



دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی کاربردی

پایان نامه کارشناسی ارشد

مسأله پشتیبان ۲- مرکز روی برخی از گرافها

ماسمه لقمه
پ

استاد راهنما

دکتر نادر جعفری راد

استاد مشاور

دکتر جعفر فتحعلی

تیر ماه ۱۳۹۵

تقدیم بہ پدر و مادر عزیزم

سپاس‌گزاری

با سپاس فراوان از لطف خدای مهربان. با تشکر از دو استاد بزرگوارم که شایسته‌ی هر نوع سپاس، تجلیل و تکریم اند؛ جناب آقای دکتر نادر جعفری راد؛ استاد راهنمای ارجمند که صبورانه، با ارایه‌ی رهنمودها، انتقادات و پیشنهادهایشان، در تمامی مراحل اجرای پایان‌نامه مرا حمایت و تشویق نمودند و جناب آقای دکتر جعفر فتحعلی؛ استاد مشاور محترم که با نظرهای اصلاحی ارزنده‌ی خود، ضمن دلگرمی بنده، موجب تکمیل این اثر شدند. از استادان محترمی که در طول دوران تحصیلی ام در دوره‌ی کارشناسی ارشد، جهت آموزش و ارتقای علمی بنده، زحمت کشیده‌اند و داوران محترم این پایان‌نامه سپاسگزارم.

ماسیه تقه

تیرماه ۱۳۹۵

تعمدنامه

اینجانب ماهیه پقه دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی دانشکده علوم ریاضی دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان مسأله پشتیبان ۲- مرکز روی برخی از گراف‌ها، تحت راهنمایی دکتر نادر جعفری راد متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تاکنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه شاهرود “ یا “ Shahrood University “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

ماهیه پقه

سیرماه ۱۳۹۵

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

مدل قابلیت اطمینان از مسائل مکانیابی، با موقعیت‌هایی که سرویس‌دهنده‌ها ممکن است از کار بیفتند، سروکار دارد. در این صورت مشتری‌های مختص سرویس‌دهنده‌ی مذکور باید از دیگر سرویس‌دهنده‌های در حال کار خدمات دریافت کنند. ونگ و همکارانش مدلی براساس قابلیت اطمینان پیشنهاد داده‌اند که در آن هر سرویس‌دهنده با احتمال مشخصی (مانند ρ) ممکن است از کار بیفتد. زمانی که سرویس‌دهنده‌ای از کار می‌افتد سرویس‌دهنده‌های دیگر پاسخگوی تمام تقاضاها هستند. با فرض اینکه سرویس‌دهنده‌ها هم‌زمان از کار نمی‌افتند ونگ و همکارانش مساله پشتیبان ۲-مرکز روی درخت را در نظر گرفتند. این مساله عبارت است از یافتن محل استقرار دو سرویس‌دهنده روی راس‌ها به گونه‌ای که امید طولانی‌ترین فاصله از هر راس تا نزدیک‌ترین سرویس‌دهنده‌ی در حال کار مینیمم گردد. هدف ما در این تحقیق مطالعه‌ی مساله پشتیبان ۲-مرکز روی برخی از گراف‌ها نظیر گراف‌های بازه‌ای، درخت‌ها، دورها، مسیرها، گراف‌های تک‌دوری است. با ارائه‌ی الگوریتم‌هایی نشان می‌دهیم این مساله روی مسیر، درخت، دور و گراف تک‌دوری به ترتیب با پیچیدگی زمانی $O(n)$, $O(n \log n)$, $O(n^2)$ و $O(n^2 \log n)$ قابل حل است.

کلمات کلیدی: پشتیبان ۲-مرکز، گراف بازه‌ای، مسیر، درخت، دور

فهرست مطالب

خ	لیست تصاویر
ذ	لیست جداول
۱	۱ تعاریف و مقدمات
۲	۱.۱ مقدمه‌ای بر مسائل مکان‌یابی
۲	۱.۱.۱ مقدمه
۳	۲.۱.۱ نظریه‌های مکان‌یابی عمومی
۳	۳.۱.۱ دسته‌بندی کلی مسائل مکان‌یابی
۵	۴.۱.۱ مسأله p -مرکز
۶	۵.۱.۱ مسأله پشتیبان
۱۱	۲ مسأله پشتیبان ۲-مرکز روی مسیر، درخت، دور و گراف تک‌دوری
۱۲	۱.۲ مقدمه
۱۲	۲.۲ پیش‌نیازها
۱۳	۳.۲ مسأله پشتیبان ۲-مرکز وزن‌دار
۱۵	۴.۲ مسأله پشتیبان ۲-مرکز روی مسیر
۱۵	۱.۴.۲ مقدمات
۱۶	۲.۴.۲ الگوریتم مسیر
۱۸	۵.۲ مسأله پشتیبان ۲-مرکز روی درخت
۱۸	۱.۵.۲ الگوریتم درخت
۱۹	۶.۲ مسأله پشتیبان ۲-مرکز روی دور
۲۱	۱.۶.۲ الگوریتم دور
۲۳	۷.۲ گراف تک‌دوری
۲۷	۳ مسأله پشتیبان ۲-مرکز روی گراف بازه‌ای
۲۸	۱.۳ مقدمه
۲۸	۲.۳ پیش‌نیازها و تعریف مسأله

۲۹	مسأله کوتاهترین مسیر روی گراف‌های بازه‌ای	۱.۲.۳
۳۱	پشتیبان ۲-مرکز بهینه	۳.۳
۴۳	الگوریتم	۴.۳
۴۳	هر دو سرویس‌دهنده در یک بازه مستقر شوند	۱.۴.۳
۴۴	دو سرویس‌دهنده در بازه‌های متفاوت مستقر شوند	۲.۴.۳
۵۱		مراجع
۵۵		واژه‌نامه فارسی به انگلیسی
۵۷		واژه‌نامه انگلیسی به فارسی
۵۹		نمایه

لیست تصاویر

۹	پوش بالایی سه تابع f_1, f_2, f_3	۱.۱
۱۳	درخت T با مرکز x_4	۱.۲
۱۶	نمودارهای $E_L(x)$ و $E_R(x)$	۲.۲
۱۹	$E_L(x), E_R(x)$	۳.۲
۲۰	الف) افراز دور ب) مسیر بدست آمده با حذف یال (v_{j-1}, v_j)	۴.۲
۲۱	نمایش مراحل ۱ تا ۳ روند $Map - Bending - Pts$	۵.۲
۲۴	گراف تک دوری	۶.۲
۳۰	مدل بازه‌ای S	۱.۳
۳۱	محاسبه فاصله میان بازه‌ها	۲.۳
۳۵	افراز مجموعه‌ای از بازه‌ها	۳.۳

لیست جداول

- ۱.۲ شش حالت ممکن برای جواب مسأله پشتیبان ۲-مرکز روی گراف تک‌دوری ۲۴
- ۱.۳ مقادیر متغیرهای الگوریتم ۱ به ازای i و p های مختلف ۴۸

فصل ۱

تعاريف و مقدمات

۱.۱ مقدمه‌ای بر مسائل مکان‌یابی

۱.۱.۱ مقدمه

مسائل مکان‌یابی تسهیلات^۱ دسته‌ای مهم از مسائل بهینه‌سازی به شمار می‌رود. در مکان‌یابی ما به دنبال بررسی محل قرار گرفتن یک یا چند وسیله برای رسیدن به هدفی مشخص هستیم. در واقع این مسائل عمدتاً با استقرار بهینه تسهیلات جهت حداقل کردن هزینه‌های ناشی از حمل و نقل و غیره سروکار دارند. تسهیلات می‌توانند هر مجموعه شامل کارخانه، دانشگاه، بیمارستان و غیره باشند. از جمله کاربردهای این مسائل می‌توان به مکان‌یابی محل احداث کارخانه، مراکز خرید، رستوران، پایگاه‌های اورژانس و سازمان‌های دولتی در شهرها با اهدافی مانند حداقل کردن هزینه جابجایی مشتریان یا حمل و نقل مواد اولیه و غیره اشاره کرد. برای تعیین محل استقرار معیارهای مهمی موثرند، از جمله نزدیکی به جاده‌های اصلی، بازار مصرف، شرایط محیطی، امکان توسعه، مقررات و قوانین دولتی و غیره. روش‌های زیادی تا کنون برای حل این مسائل مطرح شده‌اند که از آن جمله می‌توان به برنامه‌ریزی ریاضی و استفاده از تصمیم‌گیری‌های چندگانه اشاره کرد.

تصمیم‌گیری در مورد مکان‌یابی تسهیلات عمدتاً از تصمیم‌گیری‌های بلندمدت و استراتژیک شرکت‌های بزرگ خصوصی و دولتی است و هزینه‌های بالای مکان‌یابی، استقرار و راه‌اندازی تسهیلات، پروژه‌های مکان‌یابی را که بخش مهمی از برنامه‌ریزی تسهیلات است، به سرمایه‌گذاری‌های بلندمدت تبدیل کرده است. بدین ترتیب اهمیت مسأله مکان‌یابی و استقرار تسهیلات و ضرورت پرداختن به آن بر همگان روشن است.

در قرن هفدهم فرما^۲، مسأله مکان‌یابی را به صورت زیر مطرح نمود:

فرض کنید سه نقطه در صفحه داده شده است، نقطه چهارم را به گونه‌ای بیابید که مجموع فاصله‌های آن تا سه نقطه داده شده مینیمم شود. توریچلی^۳ در سال ۱۶۴۰ این مسأله را حل کرده است. اگر سه نقطه داده شده را سه رأس یک مثلث در صفحه بگیریم، محل برخورد دایره‌های محیطی مثلث‌های متساوی‌الاضلاعی که بر روی اضلاع مثلث اصلی و رو به بیرون آن ساخته می‌شوند، جواب مسأله است. به همین دلیل مسأله را مسأله فرما و نقطه جواب را نقطه توریچلی نامیده‌اند.

در سال ۱۹۰۹ اولین تعریف مسأله مکان‌یابی به صورت کاربردی و مدرن توسط آلفرد وبر^۴ [۲۲] در کتاب مشهورش "نظریه مکان‌یابی صنعتی"^۵ ارائه شد. وبر در این کتاب نتایج تحقیقات خود در مورد صنایع کارخانه‌ای را ارائه کرده است. بیست سال قبل از ارائه تئوری مکان‌یابی صنعتی توسط وبر، لانهارد^۶ [۲۳] به طور جزئی‌تر به این امر همت گماشته بود. لانهارد تلاش کرد نشان دهد که چگونه می‌توان مکان‌یابی بهینه را در شرایط ساده‌ای که دو منبع مواد اولیه و یک بازار وجود دارند به وسیله رئوس یک

^۱ facility location

^۲ Fermat

^۳ Torricelli

^۴ Alfred Weber

^۵ Über den Standort der Industrie

^۶ Launhardt

مثلث نشان دهد.

مطالعات جدی بر روی مکان‌یابی از زمانی شروع شد که در سال ۱۹۶۴ حکیمی^۷ [۱۶]، تابع هدف را به دو صورت کم‌ترین مجموع و مینیماکس مطرح کرد. او همچنین مطالعاتی بر روی مسائل مکان‌یابی روی شبکه انجام داد که نقطه شروع مکان‌یابی گسسته مدرن است.

۲.۱.۱ نظریه‌های مکان‌یابی عمومی

- فون تانن^۸ [۱۷] در سال ۱۸۲۶ با تأکید بر فعالیتهای کشاورزی نظریه‌های را در جهت حداقل کردن هزینه‌ها براساس حداقل فاصله برای حمل و نقل محصولات و فرآورده‌ها و مواد اولیه از مزارع تولیدی به بازار مصرف و بالعکس مطرح نمود.
- لانهارد در سال‌های ۱۸۸۲ تا ۱۸۸۵ در زمینه مکان‌یابی مکان‌های صنعتی نظریاتی را ارائه کرد.
- آلفرد وبر در سال ۱۹۰۹ درباره مکان‌یابی مکان‌های صنعتی با تأکید بر نظریه حداکثر سود، نظریاتی را مطرح نمود.
نظریه وبر دارای سه اصل اساسی است:
- محل مواد اولیه معلوم است.
- مکان و میزان مصرف مشتریان مشخص است. تعداد این مکان‌ها متناهی است و جدا از هم هستند. هر تولیدکننده بازار نامحدودی در اختیار دارد و امتیازات انحصاری از نظر انتخاب مکان وجود ندارد.
- چندین مکان ثابت برای عرضه نیروی کار وجود دارد به طوری که این نیروی کار دارای قابلیت تحرک و جابه‌جایی نبوده و عرضه آن نامحدود است.
- کریستالر^۹ [۱۱] و لوش^{۱۰} نیز در قالب نظریه "مکان مرکزی" مقاله‌هایی را در خصوص تجزیه و تحلیل بازار به دنیا عرضه کردند.
- نظریه هوور: هوور [۲۰] در سال ۱۹۴۸ تئوری‌های خود را به مکان‌یابی‌های صنعتی با فرض رقابت کامل بین تولیدکنندگان و فروشندگان و تحرک کامل عوامل تولید معطوف کرد.

۳.۱.۱ دسته‌بندی کلی مسائل مکان‌یابی

دسته‌بندی‌های کلاسیک مسائل مکان‌یابی عمدتاً براساس موارد زیر بوده است:

^۷Hakimi

^۸VonThunen

^۹Christaller

^{۱۰}Lösch

۱. براساس خصوصیات وسایل جدید (مسأله مکان‌یابی تک‌وسیله/چندوسیله مکان‌یابی با وسایل نقطه‌ای/ناحیه‌ای)
 ۲. براساس خصوصیات وسایل موجود (مسأله مکان‌یابی با وسایل ایستا/پویا ، مکان‌قطعی/احتمالی)
 ۳. براساس خصوصیات وسایل موجود و وسایل جدید (مسأله مکان‌یابی با ارتباطات ایستا/پویا ، مکان‌قطعی/احتمالی)
 ۴. براساس فضای جواب (مسائل مکان‌یابی روی خط/صفحه ، مسائل مکان‌یابی با فضای مقید/نامقید ، مسائل مکان‌یابی گسسته/روی شبکه(گراف))
 ۵. براساس نوع تابع فاصله (مسائل مکان‌یابی با فواصل متعامد/چپیشف/اقلیدسی و دیگر مترهای خاص)
 ۶. براساس نوع و تعداد هدف و شاخص انتخاب (مسائل تک‌هدفه/چندهدفه و همچنین دسته مهم مسائل میانه^{۱۱} ، مرکز^{۱۲} و پوشش را شامل می‌شود. در مسائل میانه هدف مینیمم کردن مجموع هزینه‌ها و در مسائل مرکز هدف مینیمم کردن حداکثر هزینه‌ها و در مسأله پوشش هدف حداکثر پوشش تقاضا یا حداقل تعداد وسیله است.)
 ۷. براساس زمینه مسأله (مسائل مکان‌یابی نقاط تبادل(هاب) ، مسائل مکان‌یابی وسایل ناخوشایند ، مسأله مکان‌یابی انبار(کارخانه))
- از مشاهده دسته‌های فوق پیداست که تابع فاصله نقش مهمی در مسائل مکان‌یابی ایفا می‌کند. از دیگر اجزای مهم مسائل مکان‌یابی می‌توان به مواردی همچون فضا، تعداد سرویس‌دهنده‌هایی که باید مستقر شوند و سرویس‌دهنده‌های موجود، اهداف تصمیم‌گیرنده، محدودیت‌های فاصله، وزن، مشتریان و نوع تابع هدف اشاره کرد.
- فضای یک مسأله می‌تواند پیوسته، گسسته یا شبکه‌ای باشد که منظور از شبکه‌ای این است که سرویس‌دهنده‌ها روی رئوس یا یال‌های یک گراف مستقر شوند. تابع فاصله بسته به فضا یا هدف مسأله متغیر است. از جمله این توابع می‌توان به فاصله خط مستقیم یا اقلیدسی، فاصله مجذور، فاصله متعامد و فاصله چپیشف اشاره کرد. از ”رند نرم‌ها”^{۱۳} و ”نرم‌های بلوکی”^{۱۴} نیز به عنوان تابع تخمین فاصله در مسائل مکان‌یابی در فضای پیوسته استفاده می‌شود. نحوه انتخاب یک تابع فاصله متناسب با مسأله، خود موضوع مقالات بسیاری در زمینه مکان‌یابی پیوسته بوده است. در حالت گسسته، فاصله واقعی پیموده شده و یا از قبل محاسبه شده، مورد استفاده قرار می‌گیرد. در مسائل مکان‌یابی روی شبکه از آن‌جا که بیش از یک مسیر بین هر دو نقطه وجود دارد، از کوتاه‌ترین مسیر برای تعیین فاصله بین دو نقطه استفاده می‌کنند.

^{۱۱}median^{۱۲}center^{۱۳}Round norms^{۱۴}Block norms

منظور ما از مسائل کلاسیک، مسائلی است که از دیرباز مطرح بوده و در ادبیات مکان‌یابی به عنوان پایه‌های تئوری مکان‌یابی شناخته شده‌است. این مسائل شامل مسائل p -میان^{۱۵}، p -مرکز^{۱۶} و پوشش و انبار است. مسأله p -میان روی یک گراف عبارتست از یافتن محل استقرار p سرویس‌دهنده روی یال‌ها یا رأس‌های یک گراف به‌گونه‌ای که مجموع فاصله وزن‌دار رئوس تا نزدیک‌ترین سرویس‌دهنده مینیمم شود.

مسأله مکان‌یابی میان تک وسیله بر روی فضای پیوسته دو بعدی (صفحه) از قدیمی‌ترین مسائل مطرح شده در مکان‌یابی است که طرح آن را برای اولین بار آلفرد وبر در کتاب خود آورده و به "مسأله وبر" معروف است. در ادامه به معرفی مسأله p -مرکز خواهیم پرداخت.

۴.۱.۱ مسأله p -مرکز

در بسیاری از مسائل دنیای واقعی هدف حداقل کردن حداکثر هزینه‌های ناشی از یک طرح است. چنین مسائلی را مسائل مکان‌یابی "حداقل حداکثر"^{۱۷} می‌گویند. به عنوان مثال یک نمونه از مسائلی که به صورت مینیماکس فرمول‌بندی می‌شود، مسأله مکان‌یابی درمانگاه در نواحی روستایی است. در این مورد درمانگاه باید به گونه‌ای مستقر شود که حداکثر مسافتی که یک بیمار باید تا درمانگاه طی کند حداقل شود. در واقع با این هدف می‌خواهیم ریسک بدترین شرایط را حداقل کنیم.

مسأله p -مرکز به عنوان دسته‌ای از مسائل مکان‌یابی تسهیلات گسسته، عبارتست از یافتن p مرکز عرضه (کالا یا خدمات) روی یک گراف به گونه‌ای که حداکثر فاصله حمل کالا یا خدمات از مراکز عرضه به مراکز تقاضا مینیمم گردد.

در مسأله p -مرکز، مراکز می‌توانند هر نقطه روی گراف باشند، در این حالت مسأله را مسأله p -مرکز محض^{۱۸} می‌گویند. در صورتی که محل مراکز را تنها به روی رأس‌ها محدود کنیم مسأله را مسأله p -مرکز رأسی^{۱۹} می‌نامیم.

تعریف ۱.۱.۱.۱ [۲۹] فرض کنید G گرافی با طول یال‌های مثبت باشد، Σ مجموعه نقاط عرضه^{۲۰} و Δ مجموعه نقاط تقاضا^{۲۱} باشند. مسأله p -مرکز به دنبال یافتن p عنصر مثل x_1, x_2, \dots, x_p از Σ است به گونه‌ای که $\max_{y \in \Delta} \min_{1 \leq i \leq p} d(x_i, y)$ مینیمم شود. که در آن $d(x, y)$ فاصله x و y در G است و $\Delta \in A$ و $\Sigma \in V$ به طوری که A و V به ترتیب مجموعه رئوس و مجموعه نقطه‌های G هستند. یک "نقطه" از گراف مکانی روی یک یال گراف است که با یالی که در آن واقع شده و فاصله‌ی آن تا یک انتهای یال مشخص می‌شود.

^{۱۵}p-median problem

^{۱۶}p-center problem

^{۱۷}minimax

^{۱۸}Absolute p-center problem

^{۱۹}Vertex p-center problem

^{۲۰}supply set

^{۲۱}demand set

این مسأله در حالت عمومی، برای p دلخواه، NP -سخت می باشد [۲۱]. بنابراین بسیاری از محققان روی گراف‌های ساده‌تر از جمله درخت، کاکتوس و غیره تمرکز کردند [۳]. در حال حاضر بهترین الگوریتم‌ها برای این مسئله روی درخت و کاکتوس دارای پیچیدگی زمانی $O(n)$ هستند [۱۳، ۱۴].

۵.۱.۱ مسأله پشتیبان

اغلب داده‌ها در واقعیت شامل عدم قطعیت هستند و پارامترها ممکن است با گذشت زمان تغییر کنند. در سال‌های اخیر مدل‌های مکان‌یابی شامل عدم قطعیت بررسی شده‌اند. صورتی از مسأله مینماکس^{۲۲} وجود دارد که عدم قطعیت در آن در نظر گرفته شده است. در این مدل هر رأس دامنه‌ای از مقادیر ممکن به عنوان وزن رأسی مربوط به خود را دارد و هدف، محاسبه وزن صحیح برای هر رأس از میان مقادیر ممکن است به گونه‌ای که میانه حاصل از آن مینیمم مقدار مجموع فواصل وزن‌دار باشد [۱]. مدل دیگر که مدل قابلیت اطمینان^{۲۳} [۲۷، ۲۸] خوانده می‌شود با موقعیتی که ممکن است سرویس‌دهنده‌ها^{۲۴} از کار بیفتند سر و کار دارد. در این صورت مشتری‌های تخصیص داده شده به سرویس‌دهنده‌ی مذکور باید از دیگر سرویس‌دهنده‌های در حال کار خدمات دریافت کنند.

اخیرا ونگ^{۲۵} و همکاران [۳۱] یک مدل بر اساس قابلیت اطمینان، به نام مسأله پشتیبان را معرفی کرده‌اند که در آن هر سرویس‌دهنده با احتمال مشخصی (مانند p) ممکن است از کار بیفتد. زمانی که سرویس‌دهنده‌ای از کار می‌افتد سرویس‌دهنده‌های دیگر پاسخگوی تمام تقاضاها هستند. با فرض اینکه سرویس‌دهنده‌ها همزمان از کار نمی‌افتند ونگ و همکارانش مسأله پشتیبان ۲-مرکز^{۲۶} روی درخت را ارائه داده‌اند. این مسأله عبارتست از یافتن محل استقرار دو سرویس‌دهنده روی رأس‌ها به گونه‌ای که امید طولانی‌ترین فاصله از هر رأس تا نزدیک‌ترین سرویس‌دهنده‌ی در حال کار مینیمم گردد.

از نکاتی که باید در این مسأله به آن توجه داشته باشیم این است که از کار افتادن یک سرویس‌دهنده تاثیری روی فاصله بین رئوس ندارد به عبارتی با وجود این که سرویس‌دهنده مستقر شده روی یک رأس از کار افتاده است، آن رأس همچنان یک نقطه تقاضا باقی می‌ماند. سرویس‌دهنده‌ها همزمان از کار نمی‌افتند و لزومی هم ندارد مثل مسائل کلاسیک سرویس‌دهنده‌ها روی رئوس متفاوت مستقر شوند.

هنگ و کنگ^{۲۷} [۱۹] مسأله پشتیبان را روی گراف‌های بازه‌ای بررسی کرده‌اند باتاچاریا^{۲۸} و همکاران [۷] مسأله پشتیبان ۲-مرکز وزن‌دار را بر روی مسیر، درخت، دور و گراف‌های تک‌دوری مطالعه کرده و برای این مسائل به ترتیب الگوریتم‌هایی با پیچیدگی‌های $O(n)$ ، $O(n \log n)$ ، $O(n^2)$ و $O(n^2 \log n)$ ارائه دادند. برای بیان تعاریف مورد استفاده در این فصل از دو منبع [۱۲] و [۳۳] استفاده کرده‌ایم.

^{۲۲}minmax-regret

^{۲۳}reliability model

^{۲۴}servers

^{۲۵}Wang H.

^{۲۶}Backup 2-center

^{۲۷}Hong Y. and Kang L.

^{۲۸}Bhattacharya B.

تعریف ۲.۱.۱. گراف G یک سه‌تایی مرتب $(V(G), E(G), \psi_G)$ ، متشکل از یک مجموعه ناتهی $V(G)$ از رأس‌ها و مجموعه $E(G)$ از یال‌ها و تابع وقوع ψ_G که به هر یال G یک زوج نامرتب از رأس‌های G را نسبت می‌دهد که لزوماً متمایز نیستند. در صورتی که دو رأس متمایز باشند آن یال را پیوندی و در صورت متمایز نباشند یال مربوطه را طوقه گوئیم. یک گراف ساده است اگر طوقه نداشته باشد و برای هر دو رأس آن بیش از یک یال منسوب نباشد.

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنید G و H دو گراف باشند. H زیرگراف G است هرگاه $V(H) \subseteq V(G)$ و $E(H) \subseteq E(G)$ باشد و آن را با $H \subseteq G$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنید $v \in V(G)$ باشد. همسایگی باز رأس v را با نماد $N_G(v)$ نشان می‌دهند که عبارت است از $N_G(v) = \{x \in V(G) \mid vx \in E(G)\}$. همسایگی بسته رأس v به صورت $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$ تعریف می‌شود.

تعریف ۵.۱.۱. درجه رأس v را با نماد $d_G(v)$ نشان می‌دهند و برابر با تعداد همسایه‌های v است. به عبارت دیگر $d_G(v) = |N_G(v)|$.

تعریف ۶.۱.۱. یک مسیر به طول k یک دنباله $v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_k, v_k$ متناوب از رأس‌ها و یال‌هاست به طوری که رأس تکراری نداریم و برای هر i ، $e_i = (v_{i-1}v_i) \in E$.

تعریف ۷.۱.۱. گراف ناتهی G را یک گراف همبند گوئیم هرگاه بین هر دو رأس دلخواه آن مسیری وجود داشته باشد.

تعریف ۸.۱.۱. گراف مسیر، یک گراف ناتهی (V, E) است به شکل

$$V = \{x_0, x_1, \dots, x_k\} \quad E = \{x_0x_1, x_1x_2, \dots, x_{k-1}x_k\}$$

به طوری که x_i ها مجزا هستند. x_0 و x_k را انتهای مسیر و بقیه رئوس را رئوس داخلی مسیر می‌گوئیم. معمولاً یک مسیر n رأسی را با P_n نشان می‌دهیم. تعداد یال‌های یک مسیر را طول مسیر گوئیم.

تعریف ۹.۱.۱. در مسیر $P = x_0, \dots, x_{k-1}$ اگر $k \geq 3$ باشد آن‌گاه $C = P + x_{k-1}x_0$ را یک دور گوئیم. طول یک دور برابر تعداد یال‌های آن است. معمولاً یک دور n رأسی را با C_n نشان می‌دهیم. تعداد یال‌های یک دور را طول دور گوئیم.

تعریف ۱۰.۱.۱. به گرافی که تنها دارای یک دور باشد گراف تک‌دوری^{۲۹} گفته می‌شود.

تعریف ۱۱.۱.۱. فاصله دو رأس x و y از G را با $d_G(x, y)$ نشان می‌دهیم که عبارت است از طول کوتاهترین مسیر بین x و y در G .

تعریف ۱۲.۱.۱. گراف وزن‌دار G را با چهارتایی $(V(G), E(G), w, l)$ نشان می‌دهیم که در آن $V(G)$ و $E(G)$ به ترتیب مجموعه رأس‌ها و مجموعه یال‌های G هستند و $w : V(G) \rightarrow \mathbb{R}^+$ تابع وزن رئوس

^{۲۹}unicyclic graph

و $l : E(G) \rightarrow \mathbb{R}^+$ تابع طول یال باشند که به ترتیب به هر رأس و هر یال G یک عدد حقیقی مثبت نسبت می‌دهند. فاصله $d(u, v)$ بین دو رأس u و v عبارت است از مجموع طول یال‌های کوتاهترین مسیر بین u و v در G .

تعریف ۱۳.۱.۱. خروج از مرکز رأس u که آن را با $\epsilon(u)$ نشان می‌دهیم عبارت است از $\max_{v \in V(G)} d(u, v)$. هر رأس با خروج از مرکز مینیمم را یک "مرکز" برای G نامیم. به عبارتی مرکز G هر رأس مانند c است که در تساوی زیر صدق می‌کند.

$$\max_{v \in V(G)} d(c, v) = \min_{u \in V(G)} \max_{v \in V(G)} d(u, v)$$

تعریف ۱۴.۱.۱. گراف همبند و بدون دور را درخت گوئیم. یک برگ در درخت رأسی از درجه ۱ است.

تعریف ۱۵.۱.۱. در یک درخت ریشه‌دار یک رأس r را به عنوان ریشه متمایز می‌کنیم. در درخت ریشه‌دار شده برای هر رأس $P(v)$ را مسیر یکتای v تا ریشه (r) در نظر می‌گیریم آن‌گاه همسایه v روی این مسیر را والد v و بقیه همسایه‌های v را فرزندان v می‌نامیم.

تعریف ۱۶.۱.۱. درخت دودویی^{۳۰} درختی ریشه دار شده است که هر رأس آن حداکثر دو فرزند داشته باشد و هر فرزند یک رأس به عنوان فرزند راست یا چپ معین می‌شود. زیردرخت‌های ریشه‌دار شده با فرزندان ریشه را زیر درخت چپ و زیردرخت راست گوئیم.

تعریف ۱۷.۱.۱. درخت دودویی متوازن^{۳۱} درختی دودویی است که اختلاف ارتفاع زیردرخت چپ و راست آن حداکثر ۱ باشد.

تعریف ۱۸.۱.۱. $G(S) = (V, E)$ را یک گراف بازه‌ای^{۳۲} گوئیم هرگاه مجموعه‌ی S از بازه‌های روی محور اعداد حقیقی موجود باشد به طوری که تناظری یک به یک بین رئوس $v_i \in V$ و بازه‌های $I_i \in S$ موجود باشد به‌گونه‌ای که (v_i, v_j) یالی در E است اگر و فقط اگر $I_i \cap I_j \neq \emptyset$.

تعریف ۱۹.۱.۱. فرض کنید $F = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ مجموعه‌ای از توابعی باشد که $f_i : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ پوش بالایی^{۳۳} F عبارت است از:

$$E(x) = \max_{1 < i < n} f_i(x)$$

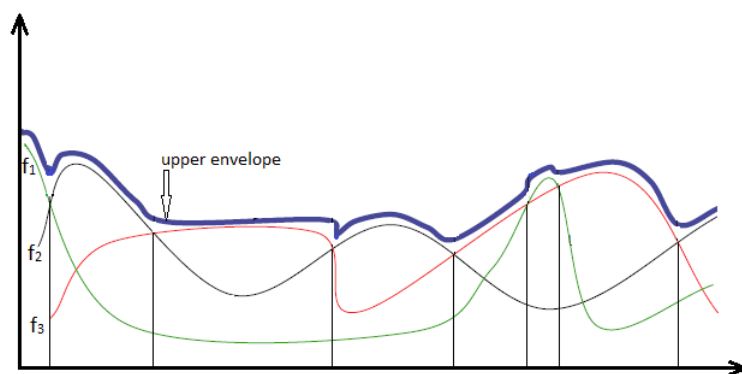
نقاطی روی نمودار پوش بالایی که در آن مقدار پوش از یک تابع به تابع دیگر تغییر می‌کند را "نقاط شکستگی" گوئیم. در فضای دوبعدی اگر نقاط شکستگی پوش را روی محور x ها بنگاریم به افرازی از محور x ها می‌رسیم که در آن هر زیرمجموعه افراز فقط متناظر با یکی از f_i هاست.

^{۳۰} binary tree

^{۳۱} balanced binary tree

^{۳۲} interval graph

^{۳۳} Upper envelope



شکل ۱.۱: پوشش بالایی سه تابع f_1, f_2, f_3

فصل ۲

مساله پشتيبان ۲- مرکز روی مسير، درخت،
دور و گراف تکدوری

۱.۲ مقدمه

در این فصل مساله پشتیبان ۲- مرکز را روی مسیر، درخت، دور و گراف تکدوری بررسی می‌کنیم که دارای رئوس با وزن‌های مثبت هستند. بر اساس نتایج به دست آمده توسط باتاچاریا^۱ و همکارانش [۷] برای گراف‌های ذکر شده، به ترتیب الگوریتم‌هایی با پیچیدگی زمانی $O(n)$ ، $O(n \log n)$ ، $O(n^2)$ و $O(n^2 \log n)$ را بیان می‌کنیم که n تعداد رئوس گراف متناظر است. ابتدا مفروضات و پیش‌نیازهای لازم را بیان کرده تابع هدف مساله را مشخص می‌کنیم. سپس مفهوم پوش بالایی^۲ که اصلی‌ترین کلید حل مساله است را معرفی می‌کنیم و با استفاده از این دیدگاه تازه به حل مساله می‌پردازیم.

۲.۲ پیش‌نیازها

فرض می‌کنیم $G = (V(G), E(G), w, l)$ گرافی ساده و بدون جهت باشد. ونگ و همکارانش برای هر $V \subseteq V(G)$ عبارت $\max_{v \in V(G)} d(u, v)$ را با $\phi(u, V)$ نشان دادند و همچنین برای هر دو رأس (u, v) قرار دادند $\prod(u, v) = (U, V)$ ، به طوری که

$$U = \{x : d(x, u) \leq d(x, v)\}, \quad V = V(G) - U.$$

حال اگر ρ_1 و ρ_2 احتمال از کار افتادن دو سرویس‌دهنده در مساله پشتیبان ۲- مرکز باشند، جواب مساله یک زوج مرتب مانند (u_1, u_2) از رئوس G است که در آن سرویس‌دهنده با احتمال شکست ρ_1 در رأس u_1 و سرویس‌دهنده با احتمال شکست ρ_2 در رأس u_2 مستقر می‌شود. برای سادگی کار فرض می‌کنیم $\rho_1 = \rho_2 = \rho$.

در مساله پشتیبان ۲- مرکز، هدف مینیم کردن امید طولانی‌ترین فاصله‌ی هر رأس تا نزدیک‌ترین سرویس‌دهنده‌ی در حال کار است. برای محاسبه‌ی این امید تحت این شرط که هر دو سرویس‌دهنده هم‌زمان از کار نمی‌افتند، سه حالت داریم. \bar{A} فقط سرویس‌دهنده اول در حال کار است، B فقط سرویس‌دهنده دوم در حال کار است، C هر دو سرویس‌دهنده در حال کار هستند. بیشترین فاصله هر رأس تا نزدیک‌ترین سرویس‌دهنده‌ی در حال کار، در حالت اول برابر $\phi(v_1, V)$ در حالت دوم برابر $\phi(v_2, V)$ و در حالتی که هر دو سرویس‌دهنده در حال کار هستند برابر $\max\{\phi(v_1, V_1), \phi(v_2, V_2)\}$ است و احتمال وقوع حالات فوق وقتی احتمال از کار افتادن هر یک از سرویس‌دهنده‌ها برابر ρ باشد، به ترتیب برابر $\rho(1-\rho)$ ، $\rho(1-\rho)$ و $(1-\rho)^2$ است لذا مجموع وزن احتمالات برابر $1-\rho^2$ به دست می‌آید.

با این تفاسیر امید ریاضی به صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{1}{1-\rho^2} \left[(1-\rho)^2 \max\{\phi(v_1, V_1), \phi(v_2, V_2)\} + \rho(1-\rho)(\phi(v_1, V) + \phi(v_2, V)) \right]$$

^۱Bhattacharya

^۲upper envelope

که در آن v_1 و v_2 رئوسی از گراف هستند و $(V_1, V_2) = \Pi(v_1, v_2)$.

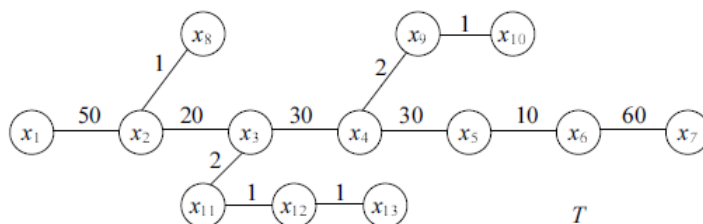
از آنجا که ρ یک عدد ثابت داده شده است، تابع هدف را می‌توان به شکل زیر ساده کرد:

$$\psi_\rho(v_1, v_2) = (1 - \rho) \max\{\phi(v_1, V_1), \phi(v_2, V_2)\} + \rho(\phi(v_1, V) + \phi(v_2, V)) \quad (1.2)$$

به طوری که $(V_1, V_2) = \Pi(v_1, v_2)$ و $v_1, v_2 \in V(G)$.

در واقع در حل مساله پشتیبان ۲-مرکز به دنبال زوج رئوسی هستیم که تابع هدف فوق را مینیمم می‌کند. برای اولین بار ونگ و همکاران [۳۰، ۳۱] مساله پشتیبان ۲-مرکز را معرفی کردند. آن‌ها با این فرض که دو سرویس‌دهنده مستقلا و با احتمال ثابت ρ از کار بیفتند و این شرط که همزمان از کار نمی‌افتند، مساله را روی درخت بررسی کردند و با محدود کردن جواب به رأس‌ها الگوریتمی را روی درخت با رئوس غیروزن دار ارائه دادند که در زمان $O(n)$ مساله را حل می‌کند.

در این جا باید به تفاوتی میان مساله ۲-مرکز کلاسیک و مساله پشتیبان ۲-مرکز اشاره کنیم. در مساله ۲-مرکز کلاسیک، دو سرویس‌دهنده همواره در دو رأس متمایز استقرار می‌یابند در حالی که در مساله پشتیبان ۲-مرکز ممکن است هر دو سرویس‌دهنده در یک رأس مستقر شوند؛ برای مثال در مرکز گراف داده شده. ونگ و همکارانش با ارائه‌ی مثال زیر با در نظر گرفتن مقادیر مختلف برای ρ این مطلب را نشان داده‌اند.



شکل ۱.۲: درخت T با مرکز x_4

با توجه به نتایج آن‌ها وقتی $\rho = 0$ جواب مساله پشتیبان ۲-مرکز برابر (x_2, x_6) به دست می‌آید، که برابر جواب همان مساله ۲-مرکز کلاسیک است. با اجرای الگوریتم به ازای $\rho = 0.3$ جواب مساله پشتیبان ۲-مرکز برابر (x_3, x_5) و برای $\rho = 0.9$ ، برابر (x_4, x_4) به دست می‌آید و همان‌طور که مشاهده می‌کنیم x_4 مرکز درخت T است [۳۱].

۳.۲ مساله پشتیبان ۲-مرکز وزن دار

در این بخش به معرفی حالت وزن دار مساله با توجه به مفروضات و نمادگذاری باتاچاریا و همکارانش [۷] می‌پردازیم.

فرض کنید $G(V, E)$ گرافی با مجموعه رئوس V و مجموعه یال‌های E باشد و هر رأس $v \in V$ دارای وزن $w_v (\geq 0)$ و هر یال در E دارای طولی نامنفی باشد. فرض می‌کنیم $X = \{x_1, x_2\}$ دو

نقطه روی G باشند؛ نه لزوماً خود رأس‌ها. فاصله‌ی $d(v, X)$ بین رأس v و X را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$d(v, X) = \min_{1 \leq i \leq 2} \{d(v, x_i)\}$$

که در آن $d(v, x_i)$ طول کوتاه‌ترین مسیر بین رأس v و نقطه‌ی x_i در گراف G است. هزینه‌ی X عبارت است از

$$\phi(X, V) = \max_{v \in V} \{d(v, X)w_v\}.$$

هرگاه X تنها شامل یک نقطه‌ی x باشد، می‌نویسیم $\phi(X, V) = \phi(x, V)$. تابع هزینه‌ی نقطه‌ی x نسبت به رأس v به صورت زیر می‌باشد:

$$f_v(x) = \phi(x, \{v\}) = d(v, x)w_v.$$

فرض می‌کنیم c یک جواب برای مساله ۱- مرکز در گراف G و $\{c_1, c_2\}$ یک جواب برای مساله ۲- مرکز روی G باشد. برای نقاط مفروض $\{x_1, x_2\}$ ، V را به دو بخش $V_1(x_1, x_2)$ و $V_2(x_1, x_2)$ افراز می‌کنیم به طوری که:

$$\forall v \in V_1(x_1, x_2) : d(v, x_1) \leq d(v, x_2) \quad , \quad \forall v \in V_2(x_1, x_2) : d(v, x_1) > d(v, x_2)$$

بدون کاستن از کلیت فرض می‌کنیم زیرگراف‌های G_1 و G_2 که با $V_1(x_1, x_2)$ و $V_2(x_1, x_2)$ تعریف می‌شوند، همبند باشند. با در نظر گرفتن تمامی این فرضیات امید طولانی‌ترین فاصله تا نزدیک‌ترین سرویس‌دهنده در حال کار، که همان تابع هدف مساله پشتیبان ۲- مرکز است، در حالت وزن‌دار به صورت زیر درمی‌آید:

$$\psi_\rho(x_1, x_2) = (1 - \rho) \max\{\phi(x_1, V_1(x_1, x_2)), \phi(x_2, V_2(x_1, x_2))\} + \rho(\phi(x_1, V) + \phi(x_2, V))$$

که در آن $0 \leq \rho < 1$.

همان‌طور که می‌بینیم در ظاهر این تابع هدف با تابع هدف در حالت غیر وزن‌دار تفاوتی ندارد اما توجه داریم از آن‌جا که رئوس وزن‌دار هستند، در تعریف تابع ϕ عنصر وزن نیز اضافه شده است. و اینکه در این‌جا ما به دنبال دو نقطه‌ی (x_1, x_2) روی G هستیم که تابع هدف فوق را مینیمم می‌کند، در واقع جستجوی خود را فقط به رأس‌ها محدود نمی‌کنیم. برای رسیدن به این منظور باتاچاریا و همکاران در [۷] از مفهوم پوش بالایی بهره‌جسته‌اند و سپس متناسب با ساختار مسیر، درخت و دور برای هر یک الگوریتمی ارائه دادند که در ادامه به معرفی آن‌ها می‌پردازیم.

مفهوم پوش بالایی

در این قسمت تعریفی برای پوش بالایی توابع هزینه در گراف $G(V, E)$ بیان می‌کنیم که سازگار با تعریف بیان شده در فصل اول است.

تعریف ۱.۳.۲. فرض کنید $G'(V', E')$ زیرگرافی از G باشد. در این صورت $\phi(x, V')$ برای هر $x \notin G'$ را پوش بالایی (توابع هزینه) برای G' می‌نامیم.

یک شبکه را بدیهی گوئیم هرگاه $\phi(c, V) = \max\{\phi(c_1, V_1(x_1, x_2)), \phi(c_2, V_2(x_1, x_2))\}$ در این فصل ما فقط شبکه‌های غیربدیهی را مورد بحث قرار می‌دهیم.

تعریف ۲.۳.۲. فرض کنید رأس c یک جواب برای مسأله ۱-مرکز در گراف $G = (V, E)$ باشد. در این صورت شعاع وزن دار G را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$r_G = \max_{v \in V} d(v, c)w_v.$$

برای رأس c ، هر رأس $v \in V$ که در عبارت $\phi(c, V) = d(v, c)w_v$ صدق می‌کند را یک رأس بحرانی برای c می‌نامیم و آن را با $\gamma(c)$ نشان می‌دهیم. با توجه به تحقیقات گذشتهی محققان حقایق زیر را در مورد مسأله داریم.

لم ۳.۳.۲. [۲] جواب مسأله ۲-مرکز روی یک درخت طی زمان $O(n)$ محاسبه می‌شود.

لم ۴.۳.۲. [۳۱] فرض کنید $\{c_1, c_2\}$ یک جواب برای مسأله ۲-مرکز روی گراف G باشد. در این صورت یک جواب مانند c برای مسأله ۱-مرکز روی G وجود دارد به گونه‌ای که روی مسیر بین c_1 و c_2 قرار می‌گیرد.

لم ۵.۳.۲. [۷] فرض کنید $\{c_1, c_2\}$ یک جواب برای مسأله ۲-مرکز در گراف G و c یک جواب برای مسأله ۱-مرکز گراف G باشد. در این صورت یک جواب برای مسأله پشتیبان ۲-مرکز مانند $\{c_1^p, c_2^p\}$ وجود دارد به طوری که c_1^p روی مسیری بین c_1 تا c و c_2^p روی مسیری بین c_2 تا c قرار می‌گیرد.

وقتی $\rho = 0$ ، داریم:

$$\psi_0(x_1, x_2) = \max\{\phi(x_1, V_1(x_1, x_2)), \phi(x_2, V_2(x_1, x_2))\}$$

لذا مینیمم تابع هدف وقتی $\rho = 0$ ، یعنی حداکثر فاصله از سرویس‌دهنده‌ها را مینیمم کنیم که این همان تعریف مسأله ۲-مرکز است. در نتیجه جواب مسأله پشتیبان ۲-مرکز وقتی $\rho = 0$ برابر $x_1 = c_1$ و $x_2 = c_2$ است که در آن $\{c_1, c_2\}$ یک جواب برای مسأله ۲-مرکز روی گراف G است.

۴.۲ مسأله پشتیبان ۲-مرکز روی مسیر

۱.۴.۲ مقدمات

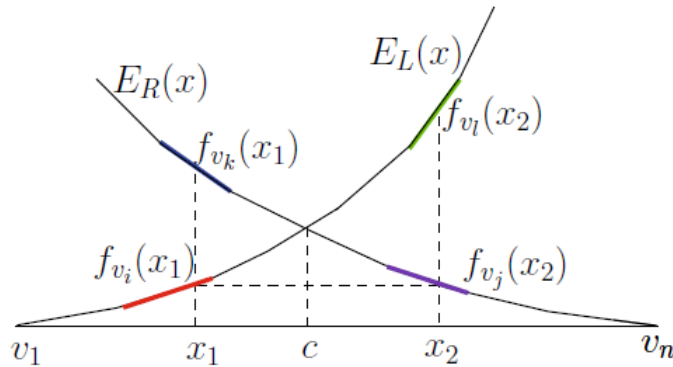
مسیر $P = (V, E)$ را که رأس‌هایش از چپ به راست با v_1, v_2, \dots, v_n نامگذاری شده را در نظر بگیرید. نمودار تابع هزینهی رأس v_i ، $f_{v_i}(x) = \phi(x, \{v_i\})$ از دو قسمت خطی تشکیل می‌شود. در واقع این تابع نموداری V -شکل دارد به طوری که با شروع از v_1 تا رسیدن به v_i تابع نزولی، در خود v_i مقدار تابع صفر و برای نقاط بعد از v_i صعودی است. البته به جز رئوس ابتدا و انتها که رأس ابتدا تنها قسمت صعودی و رأس انتهایی تنها قسمت نزولی را دارد. ابتدا نیمه‌ی سمت راست منحنی هر یک از این توابع متعلق به رئوس روی مسیر (f_{v_i}) را در نظر می‌گیریم و پوش بالایی آن‌ها به نام $E_L(x)$ را

با شروع از v_1 محاسبه می‌کنیم. با محاسبه‌ی f_{v_i} ها با حرکت از چپ به راست روی v_1 تا v_n می‌توان E_L را در زمان $O(n)$ محاسبه کرد. [۷]

به طور مشابه نیمه‌های سمت چپ منحنی f_{v_i} ها را در نظر گرفته $E_R(x)$ را به دست می‌آوریم. با توجه به اینکه نقطه‌ی x از v_1 تا v_n روی محور افقی تغییر می‌کند و از آن جا که ماکزیمم شاخه‌های صعودی f_{v_i} ها را در نظر گرفتیم، می‌بینیم که E_L به طور یکنواخت صعودی و به همین ترتیب منحنی E_R به طور یکنواخت نزولی است. تعریف می‌کنیم:

$$\phi(x, V) = E(x) = \max\{E_L(x), E_R(x)\}$$

$\phi(x, V)$ را همان پوش بالایی E_L و E_R در نظر می‌گیریم که تابعی محدب است. مشاهده می‌کنیم که با توجه به نزولی بودن $E_R(x)$ با حرکت از v_1 تا رسیدن به c تابع $E(x)$ برابر $E_R(x)$ و در ادامه حرکت از c تا v_n تابع $E(x)$ برابر $E_L(x)$ می‌شود. با محاسبه‌ی محل برخورد $E_L(x)$ و $E_R(x)$ به مینیمم مقدار $E(x)$ می‌رسیم یعنی مینیمم تابع ϕ روی مسیر که همان جواب مساله ۱- مرکز (c) است. (شکل ۲.۲)



شکل ۲.۲: نمودارهای $E_L(x)$ و $E_R(x)$

لم ۱.۴.۲ [۷] برای یک مسیر اگر $\rho > 0$ ، آنگاه یک جواب برای مساله پشتیبان ۲- مرکز مانند $\{c_1^p, c_2^p\}$ روی آن مسیر وجود دارد به گونه‌ای که $\phi(c_1^p, V_1) = \phi(c_2^p, V_2)$.

تا زمانی که داشته باشیم $\phi(x_1, V_1) > \phi(x_2, V_2)$ حرکت دادن x_2 به سمت c تا x'_2 ، $\max\{\phi(x_1, V_1), \phi(x_2, V_2)\}$ را تحت تاثیر قرار نمی‌دهد، اما $\phi(x_2, V)$ را کاهش می‌دهد. میزان کاهش برابر $\Delta = \phi(x_2, V) - \phi(x'_2, V)$ است، و داریم $\psi_\rho(x_1, x_2) - \psi_\rho(x_1, x'_2) = \rho\Delta$ که برای $\rho > 0$ مقداری مثبت است.

همان‌طور که مشاهده می‌کنیم لم ۵.۳.۲ و ۱.۴.۲ موقعیت‌های جواب مساله را برای ما روشن می‌سازد. دو لم فوق راهگشای ما در طراحی الگوریتم هستند.

۲.۴.۲ الگوریتم مسیر

اکنون می‌توانیم بر اساس لم‌های ۵.۳.۲ و ۱.۴.۲ الگوریتمی برای محاسبه‌ی پشتیبان ۲- مرکز بهینه روی یک مسیر طراحی کنیم.

بنابر ادعای لم ۱.۴.۲ اگر $\{x_1, x_2\}$ بخواهد یک جواب بهینه باشد، باید داشته باشیم $\phi(x_1, V_1) = \phi(x_2, V_2)$. لذا طبق تعریف تابع ϕ ، v_i و v_j باید موجود باشند به طوری که $f_{v_j}(x_2) = f_{v_i}(x_1)$ ، تا تساوی برقرار شود.

برای x_1 داده شده، فرض کنید به ازای v_i داشته باشیم $E_L(x_1) = f_{v_i}(x_1)$. همان‌گونه که از شکل ۲.۲ پیداست قطعه‌ای از نمودار $E_L(x)$ است. اکنون x_2 و v_j را به گونه‌ای می‌یابیم که داشته باشیم $f_{v_j}(x_2) = E_R(x_2) = f_{v_i}(x_1)$. بنابر لم ۱.۴.۲ چنین x_2 و v_j وجود دارند. حال با توجه به این که با حرکت از v_1 تا رسیدن به c تابع $E(x)$ برابر $E_R(x)$ و در ادامه حرکت از c تا v_n تابع $E(x)$ برابر $E_L(x)$ است، برای محاسبه $E(x)$ در x_1 و x_2 به محاسبه $E_R(x_1)$ و $E_L(x_2)$ می‌پردازیم. فرض می‌کنیم $E_R(x_1)$ و $E_L(x_2)$ به ترتیب روی قطعه $f_{v_k}(x)$ و $f_{v_l}(x)$ از نمودارشان قرار داشته باشند.

با توجه به تساوی $f_{v_j}(x_2) = f_{v_i}(x_1)$ می‌توانیم تابع هدف مسأله را به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$\psi_\rho(x_1, x_2) = (1 - \rho)f_{v_i}(x_1) + \rho(f_{v_k}(x_1) + f_{v_l}(x_2)). \quad (2.2)$$

اگر z را فاصله از v_1 در نظر بگیریم، $f_{v_i}(x)$ را می‌توان به صورت خطی $y = a_i z + b_i$ نوشت. بنابراین (۲.۲) نیز یک تابع تکه‌ای خطی از z است و مینیم آن در انتهای یکی از پاره‌خطها یا همان نقاط شکستگی در نمودار $E_L(x)$ یا $E_R(x)$ اتفاق می‌افتد، لذا نقطه x متناظر با این نقاط شکستگی کاندیدی برای جواب مسأله روی مسیر خواهند بود.

فرض کنید $\{c_1, c_2\}$ یک جواب برای مسأله ۲-مرکز روی مسیر P باشد. نقاط شکستگی نمودارهای $E_L(x)$ و $E_R(x)$ را روی محور افقی تصویر می‌کنیم و آن‌هایی را که بین c_1 و c_2 قرار گرفته‌اند، از چپ به راست به صورت $z_1 (= c_1), z_2, \dots, z_m (= c_2)$ نامگذاری می‌کنیم. حال با توجه به لم ۵.۳.۲ این نقاط را می‌توانیم به عنوان x_1 مفروض در توضیحات فوق استفاده کنیم و سپس x_2 متناظر با آن‌ها را بیابیم. اکنون با توجه به توضیحات فوق الگوریتم "پشتیبان ۲-مرکز مسیر"^۳ را داریم.

الگوریتم ۱ BU2Center - Path

۱. $E_L(x), E_R(x)$ ، یک مرکز مانند c و یک جواب برای مسأله ۲-مرکز مانند (c_1, c_2) را برای مسیر محاسبه کن.

۲. برای $k = 1, 2, \dots, m$ مراحل ۳ تا ۵ را تکرار کن.

۳. قرار بده $x_1 = z_k$ و v_i را به گونه‌ای بیاب که $f_{v_i}(x) = E_L(x_1)$.

۴. v_j و x_2 را به گونه‌ای تعیین کن که $f_{v_j}(x_2) = E_R(x_2) = f_{v_i}(x_1)$.

۵. مقدار (۲.۲) را محاسبه کن.

^۳BU2Center-Path

۶. کمترین مقدار (۲.۲) را به ازای k های مختلف محاسبه کن. $\{x_1, x_2\}$ متناظر با کمترین مقدار یک جواب برای مسأله پشتیبان ۲-مرکز $\{c_1^p, c_2^p\}$ روی مسیر است.

در الگوریتم فوق مشاهده می‌شود همچنان که x_1 را به راست حرکت می‌دهیم (z یا همان فاصله از v_1 افزایش می‌یابد) x_2 به طور یکنواخت به چپ حرکت می‌کند تا در نهایت به x_1 و x_2 بهینه برسیم. الگوریتم فوق را روی معکوس مسیر داده شده نیز پیاده می‌کنیم سپس از بین دو جواب بدست آمده در مرحله ۶ مینیمم گرفته جواب بهینه را ارائه می‌دهیم.

قضیه ۲.۴.۲. [۷] جواب مسأله پشتیبان ۲-مرکز روی یک مسیر در زمان $O(n)$ قابل محاسبه است.

۵.۲ مسأله پشتیبان ۲-مرکز روی درخت

در این بخش فرض ما بر این است که درخت داده شده متوازن^۴ و دودویی است، بنابراین پیمایش هر مسیر از یک برگ تا ریشه‌ی درخت در زمان $O(\log n)$ انجام می‌شود. برای سایر درخت‌ها نیز ثابت شده است که با اعمال الگوریتم‌هایی از جمله "تجزیه درخت اسپاین"^۵ [۴، ۶] می‌توان درخت را به ساختاری تبدیل کرد که ویژگی‌های یک درخت دودویی متوازن را داشته باشد. همانند لم ۱.۴.۲ برای مسیر، لم زیر را برای درخت داریم.

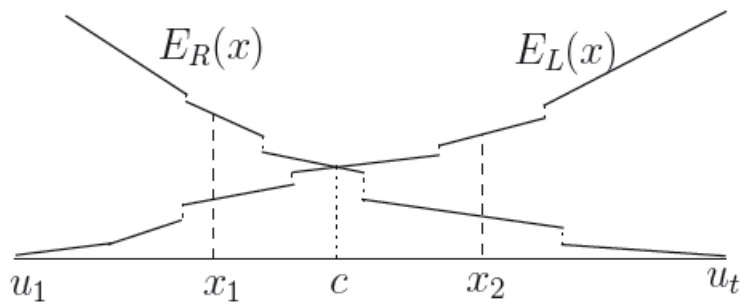
لم ۱.۵.۲. [۷] برای هر درخت، اگر $\rho > 0$ ، آنگاه یک جواب برای مسأله پشتیبان ۲-مرکز $\{c_1^p, c_2^p\}$ روی درخت وجود دارد که در $\phi(c_1^p, V_1) = \phi(c_2^p, V_2)$ صدق می‌کند.

۱.۵.۲ الگوریتم درخت

براساس لم ۵.۳.۲ الگوریتمی برای درخت طراحی می‌کنیم. طبق لم ۵.۳.۲ اگر $\{c_1, c_2\}$ یک جواب برای مسأله ۲-مرکز باشد، آنگاه یک جواب برای مسأله پشتیبان ۲-مرکز مانند $\{c_1^p, c_2^p\}$ روی مسیر بین c_1 تا c_2 وجود دارد. لذا یک جواب برای مسأله ۲-مرکز روی درخت مفروض پیدا می‌کنیم و جستجو برای جواب مسأله پشتیبان ۲-مرکز را به همان مسیر محدود می‌کنیم. حال از آن‌جا که قبلاً الگوریتم یافتن جواب مسأله پشتیبان ۲-مرکز روی یک مسیر را به دست آوردیم راحت‌تر به هدف خواهیم رسید. فرض کنید $\{c_1, c_2\}$ یک جواب برای مسأله ۲-مرکز روی درخت T باشد و $\langle u_1, u_2, \dots, u_t \rangle$ دنباله‌ی رئوس مسیر $\pi(c_1, c_2)$ باشد. $\pi(c_1, c_2)$ را به عنوان مسیری افقی از c_1 تا c_2 در نظر می‌گیریم. به ازای هر $x \in \pi(c_1, c_2)$ دو پوش بالایی تعریف می‌کنیم. $E_L(x)$ به عنوان پوش بالایی توابع هزینه‌ی رئوسی از T که در سمت چپ x قرار دارند و $E_R(x)$ به عنوان پوش بالایی توابع هزینه‌ی رئوسی از T که در سمت راست x واقعند. (شکل ۳.۲ را ببینید)

^۴balanced

^۵spine tree decomposition



شکل ۳.۲: $E_L(x), E_R(x)$

الگوریتم پشتیبان ۲-مرکز درخت^۶
 الگوریتم ۲ $BU\text{Center} - Tree$

۱. یک جواب برای مسأله ۲-مرکز روی درخت مانند $\{c_1, c_2\}$ برای درخت T محاسبه کن و قرار بده

$$\pi(c_1, c_2) = \langle u_1(=c_1), u_2, \dots, u_t(=c_2) \rangle.$$

۲. توابع $E_L(x)$ و $E_R(x)$ را محاسبه کن.

۳. الگوریتم $BU\text{Center} - Path$ را روی $\pi(c_1, c_2)$ اعمال کن.

مرحله ۱ طبق لم ۳.۳.۲ در زمان $O(n)$ انجام می‌شود و $E_L(x)$ و $E_R(x)$ در مرحله ۲ نیز در زمان $O(n \log n)$ قابل محاسبه اند [۱۸].

همان‌طور که قبلاً اشاره کردیم، ونگ و همکارانش [۳۱] مسأله پشتیبان ۲-مرکز روی درخت را با شرط اینکه رئوس با وزن‌های مساوی باشند و مراکز به رأس‌ها محدود شوند، در زمان $O(n)$ حل کردند. بدون در نظر گرفتن محدودیت‌هایی که ذکر شد الگوریتمی که ارائه کردیم نیز در زمان خطی اجرا می‌شود. ثابت شده است هرگاه وزن هر رأس عضو مجموعه‌ای با تعداد ثابت عضو باشد نیز جواب مسأله پشتیبان ۲-مرکز روی درخت در زمان $O(n)$ قابل دستیابی است.

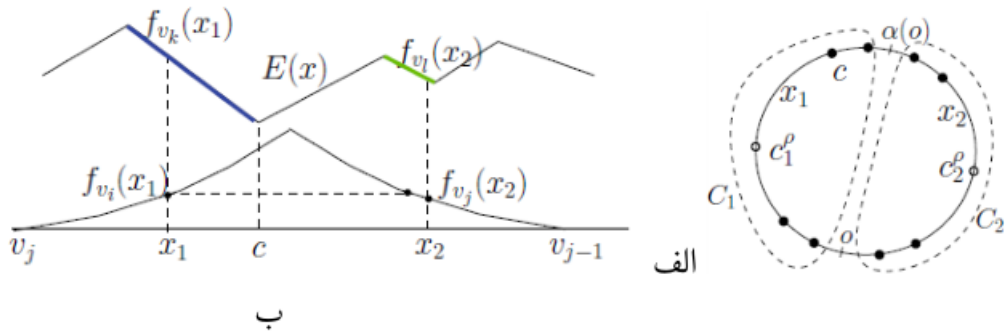
۶.۲ مسأله پشتیبان ۲-مرکز روی دور

دور $C(V, E)$ را با محیط (مجموع طول همه یال‌ها) l_C در نظر بگیرید. برای هر $a, b \in C$ نماد $C(a, b)$ بخش ساعتگرد C از a تا b را نشان می‌دهد و $d(a, b)$ طول کوتاهترین مسیر از a تا b (ساعتگرد یا پادساعتگرد) است. فرض کنید $\{c_1^p, c_2^p\}$ یک جواب برای مسأله پشتیبان ۲-مرکز روی دور C و $p \in C$ باشد، (شکل ۴.۲). نقطه‌ی $\alpha(p)$ را که در فاصله‌ی $l_C/2$ از p قرار دارد "نقطه مقابل"^۷ p می‌نامیم.

^۶BU2Center-Tree

^۷antipode

حال دور تکمیل شده‌ی $C'(V', E')$ را از روی دور $C(V, E)$ می‌سازیم. این دور را با اضافه کردن رأس $\alpha(v)$ در محل نقطه مقابل هر رأس v و اختصاص وزن صفر به آن، می‌سازیم. همچنین نقطه مرکز دور c و نقطه مقابل آن $\alpha(c)$ را نیز اضافه می‌کنیم. قرار می‌دهیم $V' = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$.



شکل ۴.۲: الف) افزایش دور (ب) مسیر بدست آمده با حذف یال (v_{j-1}, v_j)

هر یال و یال مقابل آن یک افزایش از V' را ارائه می‌دهد. از بخش ۲-۳ به یاد بیاورید که برای نقاط $\{x_1, x_2\}$ که $x_1 \neq x_2$ را به $V_1(x_1, x_2)$ و $V_2(x_1, x_2)$ افزایش کردیم. مشابه می‌توانیم با حذف یک یال و یال مقابل آن، V' را به V_1 و V_2 افزایش کنیم.

گزاره ۱.۶.۲ [۷] فرض کنید $\{c_1^p, c_2^p\}$ یک جواب برای مساله پشتیبان ۲-مرکز روی دور C باشد و o نقطه وسط c_1^p و c_2^p باشد به طوری که $o \in C(c_1^p, c_2^p)$ و $\alpha(o)$ نقطه وسط c_1^p و c_2^p به طوری که $\alpha(o) \in C(c_1^p, c_2^p)$. در این صورت به ازای هر نقطه‌ی $x \in C'(o, \alpha(o))$ که $x \neq o, \alpha(o)$ داریم $d(x, c_1^p) < d(x, c_2^p)$ و $d(x, c_1^p) > d(x, c_2^p)$ برای هر نقطه‌ی $x \in C'(\alpha(o), o)$ که $x \neq o, \alpha(o)$ داریم.

برای هر $v \in V'$ قرار می‌دهیم $f_v^{cw}(x) = f_v(x) = \phi(x, \{v\})$ وقتی $x \in C'(v, \alpha(v))$ و قرار می‌دهیم $f_v^{ccw}(x) = 0$ وقتی $x \in C'(\alpha(v), v)$. به همین ترتیب برای $x \in C'(v, \alpha(v))$ نیز قرار می‌دهیم $f_v^{ccw}(x) = 0$. همچنین پوش بالایی این توابع به صورت زیر تعریف شده و ثابت شده که در زمان $O(n \log n)$ قابل محاسبه‌اند [۱۸].

$$E^{cw}(x) = \max\{f_{v_i}^{cw}(x) \mid i = 1, 2, \dots, n\}$$

$$E^{ccw}(x) = \max\{f_{v_i}^{ccw}(x) \mid i = 1, 2, \dots, n\}$$

$$E(x) = \max\{E^{cw}(x), E^{ccw}(x)\} = \phi(x, V')$$

مشابه شکل ۲.۲ در این بخش نیز شکل ۵.۲ را داریم وقتی که C' با حذف یال (v_{j-1}, v_j) به یک مسیر تبدیل شده است.

۱.۶.۲ الگوریتم دور

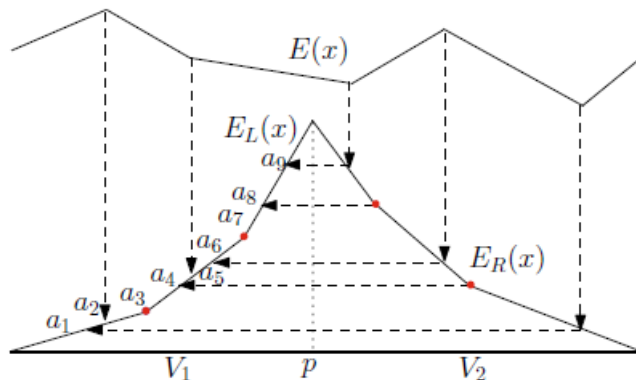
حذف یک یال و یال مقابل آن مانند $(v_{j-1}, v_j) \in E'$ و $(v_{k-1}, v_k) \in E'$ از C' ، V' را به دو بخش V_1 و V_2 افراز می‌کند. فرض می‌کنیم V_1 و V_2 شامل حداقل یک رأس از V باشند و c'_1 -۱ مرکز زیرگراف تعریف شده با V_1 و c'_2 -۱ مرکز زیرگراف تعریف شده با V_2 باشد. در این صورت به ازای هر $x_1 \in \pi(v_j, v_{k-1})$ و $\phi(x_1, V_1) \geq \phi(c'_1, V_1)$ ، برای هر $x_2 \in \pi(v_k, v_{j-1})$ داریم $\phi(x_2, V_2) \geq \phi(c'_2, V_2)$.

حذف یک یال مانند $(v_{j-1}, v_j) \in E'$ ، C' را به یک مسیر تبدیل می‌کند که نیمه‌ی سمت چپ آن شامل رئوس V_1 و نیمه‌ی راست آن شامل رئوس V_2 است. با در نظر گرفتن این مسیر $E_L(x)$ و $E_R(x)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$E_L(x) = \max\{f_v^{cw}(x) \mid v \in V_1\}$$

$$E_R(x) = \max\{f_v^{ccw}(x) \mid v \in V_2\}$$

حال به شکل ۵.۲ توجه کنید.



شکل ۵.۲: نمایش مراحل ۱ تا ۳ روند ۱ Map - Bending - Pts

فرض کنید قبلاً $E(x) = \phi(x, V')$ را برای C' محاسبه کرده‌ایم. البته توجه داشته باشید اینجا $E(x)$ متفاوت از آنچه که در مسیر P داشتیم است. حال نقاط شکستگی $E_L(x)$ و $E_R(x)$ را روی $E(x)$ و نقاط شکستگی $E_L(x)$ و $E_R(x)$ را روی $E(x)$ می‌نگاریم. برای این کار از روند ”نگاشت نقاط شکستگی”^۸ استفاده می‌کنیم.

روند ۱ Map - Bending - Pts

۱. نقاط شکستگی $E(x)$ را روی $E_L(x)$ و $E_R(x)$ ترسیم کن. همان‌گونه که در شکل ۵.۲ با پیکان‌های رو به پایین نشان داده شده.

^۸Map-Bending-Pts

۲. نقاط روی $E_R(x)$ اعم از نقاط شکستگی خود $E_R(x)$ و نقاط به دست آمده از مرحله ۱ را به صورت افقی روی $E_L(x)$ ترسیم کن.

۳. تمامی نقاط روی $E_L(x)$ اعم از نقاط شکستگی خود $E_L(x)$ و نقاط به دست آمده از مراحل ۱ و ۲ را به صورت ساعتگرد با شروع از v_1 به ترتیب a_1, a_2, \dots, a_t نامگذاری کن.

۴. نقاط روی $E_L(x)$ اعم از نقاط شکستگی خود $E_L(x)$ و نقاط به دست آمده از مرحله ۱ را به صورت افقی روی $E_R(x)$ ترسیم کن.

۵. نقاط روی $E_R(x)$ اعم از نقاط شکستگی خود $E_R(x)$ یا نقاط به دست آمده از مراحل ۱ و ۴ را به صورت پادساعتگرد با شروع از v_n به ترتیب b_1, b_2, \dots, b_t نامگذاری کن.

لم ۲.۶.۲. [۷] روند $Map - Bending - Pts$ در زمان $O(n)$ اجرا می‌شود.

اکنون نقطه‌ی c'_1 را روی $E_L(x)$ و c'_2 را روی $E_R(x)$ علامت می‌زنیم و سپس c'_1 را روی $E_R(x)$ و c'_2 را روی $E_L(x)$ می‌نگاریم و دنباله‌های حاصل را به ترتیب $\langle a_1, a_2, \dots, a_{t'} \rangle$ و $\langle b_1, b_2, \dots, b_{t'} \rangle$ نام‌گذاری می‌کنیم که در آن $t' = t + 2$ است.

فرض کنید $p(a_i)$ و $p(b_i)$ نقاط متناظر a_i و b_i روی C' باشند. نقاط $\{x_1, x_2\}$ را به گونه‌ای در نظر بگیرید که $x_1 \in C'(p(a_i), p(a_{i+1}))$ و $x_2 \in C'(p(b_i), c'_2)$ باشد به ازای چنین x_1 و x_2 داریم

$$\phi(x_1, V_1) \geq \phi(x_2, V_2) \text{ ، بنابراین}$$

$$\psi_\rho(x_1, x_2) = (1 - \rho) \max\{\phi(x_1, V_1), \phi(x_2, V_2)\} + \rho(\phi(x_1, V') + \phi(x_2, V')) \quad (3.2)$$

$$= (1 - \rho)\phi(x_1, V_1) + \rho(\phi(x_1, V') + \phi(x_2, V')) \quad (4.2)$$

قسمت $(1 - \rho)\phi(x_1, V_1) + \rho\phi(x_1, V')$ در (۲.۲) زمانی مینیمم خود را اختیار می‌کند که $x_1 = p(a_i)$ یا $x_1 = p(a_{i+1})$. مقدار مینیمم عبارت آخر یعنی $\phi(x_2, V')$ به ازای $x_2 \in C'(p(b_i), c'_2)$ نیز به راحتی از روی تابع $E(x)$ قابل محاسبه است. به همین ترتیب اگر $x_1 \in C'(c'_1, p(a_i))$ و $x_2 \in C'(p(b_{i+1}), p(b_i))$ آن‌گاه $\phi(x_1, V_1) \leq \phi(x_2, V_2)$. در این حالت می‌توان تابع زیر را بهینه کرد.

$$\psi_\rho(x_1, x_2) = (1 - \rho)\phi(x_2, V_2) + \rho(\phi(x_1, V') + \phi(x_2, V')) \quad (5.2)$$

حال اگر $x_1 \in C'(p(a_i), p(a_{i+1}))$ و $x_2 \in C'(p(b_{i+1}), p(b_i))$ آن‌گاه (۲.۲) تنها شامل توابعی خطی از x_1 و x_2 است و زوج $\{x_1, x_2\}$ ای که (۲.۲) را مینیمم می‌کند در زمان ثابت قابل محاسبه است.

زوج $\{x_1, x_2\}$ متناظر با مینیمم تمام مینیمم مقادیری که برای تابع هدف به ازای یال حذف شده معلوم $(v_{j-1}, v_j) \in E'$ ، به دست آوردیم یک کاندید برای جواب مساله پشتیبان ۲- مرکز روی دور C است. حال با توجه به این توضیحات و سه موقعیت ذکر شده برای x_1 و x_2 می‌توان الگوریتمی برای یافتن جواب مساله پشتیبان ۲- مرکز روی یک دور ارائه داد.

فرض کنید e_1, e_2, \dots, e_n یال‌های C' باشند. الگوریتم "پشتیبان ۲- مرکز دوری"^۹ را برای دور

^۹BU2Center - Cycle(C')

داریم.

الگوریتم ۳ $BU^2Center - Cycle(C')$

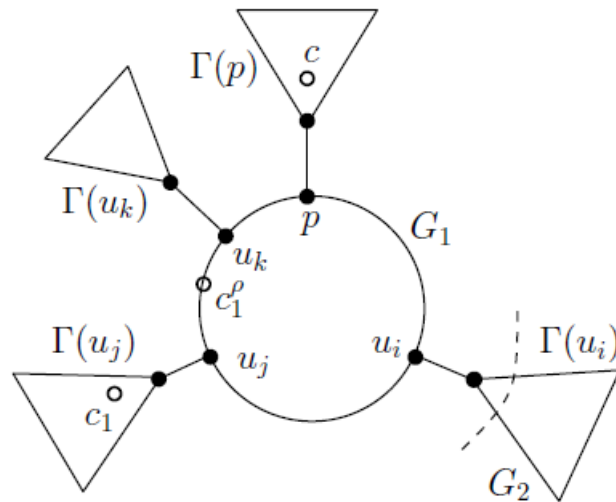
۱. $E(x)$ را محاسبه کن.
 ۲. برای $j = 1, 2, \dots, n$ یال e_j را حذف کن و مراحل ۳ و ۴ را اجرا کن.
 ۳. $E_L(x)$ و $E_R(x)$ مسیر به دست آمده را محاسبه کن.
 ۴. روند $Map - Bending - Pts$ را فراخوانی کن. برای $i = 1, 2, \dots, t-1$ سه زوج $\{x_1, x_2\}$ را به گونه‌ای بیاب که هر یک دارای یکی از شرایط زیر باشند
 - (آ) عبارت (۳.۲) را مینیمم می‌کند به طوری که $x_1 \in C'(p(a_i), p(a_{i+1}))$ و $x_2 \in C'(p(b_i), c'_i)$
 - (ب) عبارت (۴.۲) را مینیمم می‌کند به طوری که $x_1 \in C'(c'_i, p(a_i))$ و $x_2 \in C'(p(b_{i+1}), p(b_i))$
 - (ج) عبارت (۲.۲) را مینیمم می‌کند به گونه‌ای که $x_1 \in C'(p(a_i), p(a_{i+1}))$ و $x_2 \in C'(p(b_{i+1}), p(b_i))$.
 ۵. از بین زوج‌های به دست آمده در مرحله‌ی ۴، زوج دارای کمترین هزینه را معرفی کن.
- زمانبرترین مرحله، مرحله‌ی ۴ است که با توجه به نکات یاد شده قبل از ارائه الگوریتم برای هر یال در زمان $O(n)$ اجرا می‌شود.
- قضیه ۳.۶.۲. [۷] الگوریتم $BU^2Center - Cycle$ جواب مسأله پشتیبان ۲-مرکز یک دور را در زمان $O(n^2)$ محاسبه می‌کند.

۷.۲ گراف تک دوری

یک گراف تک دوری مانند $G = (V, E)$ گرافی است که تنها شامل یک دور مانند C باشد. در این بخش بدون کاستن از کلیت فرض می‌کنیم درجه‌ی هر رأس از دور C حداکثر ۳ باشد. در غیر این صورت می‌توانیم رأس‌هایی با وزن صفر و یال‌هایی با طول صفر به گراف اضافه کنیم. در گراف G به درختی که به رأس u در دور C متصل است به استثنای خود رأس u و یالی که درخت را به u وصل می‌کند، یک "پیوند"^{۱۰} گوئیم و آن را با $\Gamma(u)$ نشان می‌دهیم. (شکل ۶.۲)

ابتدا لازم است یک جواب برای مسأله ۱-مرکز گراف G همچون c را مطابق روش بن-مشه و همکاران در [۲] و همچنین یک جواب برای مسأله ۲-مرکز روی G مانند $\{c_1, c_2\}$ را در اختیار داشته

^{۱۰}graft



شکل ۶.۲: گراف تکدوری

باشیم [۲، ۳]. فرض کنید $p \in C$ رأسی باشد که $\Gamma(p)$ یا یالی که $\Gamma(p)$ را به p وصل می‌کند، شامل c باشند. در این صورت $\Gamma(p)$ را یک "پیوند والد"^{۱۱} در C می‌نامیم. حال فرض می‌کنیم فرضی که داشتیم به ازای هر k, u_k حداکثر به یک پیوند متصل خواهد بود.

فرض کنید هر پیوند یک درخت متوازن و دودویی باشد در غیر این صورت می‌توان با اعمال الگوریتم‌هایی پیوندها را به صورت متوازن و دودویی درآورد [۴، ۶]. باتاچاریا و همکاران در [۶] G را به یک ساختار درختی^{۱۲} تبدیل می‌کنند که با انجام چنین پردازشی روی G می‌توان پوش بالایی هر پیوند را در زمان $O(n \log n)$ محاسبه کرد [۶]. بر اساس لم ۵.۳.۲ لم زیر را خواهیم داشت.

لم ۱.۷.۲. [۷] فرض کنید $c_1 \in \Gamma(u_j)$. در این صورت $c_1^p \in \Gamma(u_j) \cup \Gamma(p) \cup C$.

با توجه به آن چه تاکنون درباره‌ی موقعیت احتمالی جواب مسأله پشتیبان ۲-مرکز در گراف‌های مختلف گفتیم جدول زیر را خواهیم داشت.

جدول ۱.۲: شش حالت ممکن برای جواب مسأله پشتیبان ۲-مرکز روی گراف تکدوری

		$(i) c_1^p, c_2^p \in C$	$(ii) c_1^p \in \Gamma(u_j); c_2^p \in \Gamma(u_k)$	$(iii) c_1^p \in \Gamma(u_j); c_2^p \in C$
I	$c_1, c_2 \in C$	A	-	-
II	$c_1 \in \Gamma(u_j); c_2 \in \Gamma(u_k)$	B	D	E
III	$c_1 \in \Gamma(u_j); c_2 \in C$	C	-	F

^{۱۱}parent graft

^{۱۲}cycle envelope tree

سه موقعیت ممکن برای c_1 و c_2 را به عنوان ردیف‌های I و II و III در جدول ۱.۲ در نظر گرفته‌ایم. برای نمونه در جدول ۱.۲ $c_1 \in \Gamma(u_j)$ به این معناست که c_1 در $\Gamma(u_j)$ یا روی یالی که $\Gamma(u_j)$ را به u_j وصل می‌کند قرار دارد. ستون‌های جدول نیز موقعیت‌های ممکن برای c_1^p و c_2^p را به نمایش گذاشته‌اند. علامت “_” در جدول به این معناست که ترکیب سطر و ستون مربوطه نمی‌تواند اتفاق بیفتد. مانند $I - ii$ که بنا بر لم ۵.۳.۲ نمی‌تواند اتفاق بیفتد. بنابراین شش حالت برای بررسی کردن داریم.

حالت C, B, A : این حالت‌ها مشابه مسأله‌ی دور هستند. توجه داشته باشید با وجود اینکه در مسأله‌ی دور $\phi(x_1, V_1)$ و $\phi(x_2, V_2)$ که در شکل ۵.۲ نشان داده شده‌اند پیوسته هستند اینجا این توابع یکنوا هستند اما ممکن است پیوسته نباشند. همانطور که در $BU^2Center - Cycle$ داشتیم هر بار یک یال را حذف کرده C را به یک مسیر تبدیل می‌کردیم. حال چون در این جا پیوندها به مسیر متصل هستند طبق نتایج به دست آمده در [۱۸] محاسبه‌ی $E_L(x)$ و $E_R(x)$ در زمان $O(n \log n)$ انجام می‌گیرد. بنابراین $BU^2Center - Cycle$ (اصلاح شده) در زمان $O(n^2 \log n)$ اجرا خواهد شد.

حالت D : مسیر $\pi(c_1, c_2)$ از u_j و u_k می‌گذرد و داریم $c_1^p \in \pi(c_1, u_j)$ و $c_2^p \in \pi(c_2, u_k)$. بنابراین این حالت مشابه مسأله درخت است. لذا پوش‌های بالایی $E_L(x_1)$ و $E_R(x_2)$ را به ترتیب به ازای $x_1 \in \pi(c_1, u_j)$ و $x_2 \in \pi(c_2, u_k)$ محاسبه می‌کنیم. حال برای محاسبه $E(x_1)$ برای کل گراف، یالی که $\alpha(u_j)$ در آن واقع شده را حذف می‌کنیم. لذا $E(x_1)$ ، پوش بالایی درخت حاصل است. $E(x_2)$ نیز به همین ترتیب برای $x_2 \in \pi(c_2, u_k)$ با حذف یالی که $\alpha(u_k)$ در آن واقع شده به دست خواهد آمد. پس زمان لازم برای محاسبه جواب در این حالت مشابه الگوریتم $BU^2Center - Tree$ یعنی $O(n \log n)$ است.

حالت E, F : در این حالت، $E_L(x_1)$ و $E(x_1)$ مشابه حالت D هستند. مرکز c_1^p می‌تواند قسمتی از C را بپوشاند چنان‌که لازم است c_2^p بقیه C را بپوشاند. اگر یک یال همچون $e \in C$ را حذف کنیم یک درخت خواهیم داشت. البته جواب مسأله پشتیبان ۲-مرکز روی این درخت همان جواب پشتیبان ۲-مرکز روی گراف تک دوری ما نخواهد بود.

بگذارید معکوس به مسأله نگاه کنیم. یک جواب برای مسأله پشتیبان ۲-مرکز همچون $\{c_1^p, c_2^p\}$ را در نظر بگیرید به گونه‌ای که $c_1^p \in \Gamma(u_j); c_2^p \in C$. این موقعیت گراف G را همان‌طور که در شکل ۶.۲ نشان داده‌ایم، به دو قسمت G_1 و G_2 تقسیم می‌کند. اگر قسمتی از C متعلق به G_1 باشد. در این صورت دو یال e و e' ، G_1 را از G_2 جدا می‌کنند. اگر فقط e را از G حذف کنیم، یک درخت خواهیم داشت و $\{c_1^p, c_2^p\}$ یک جواب برای مسأله پشتیبان ۲-مرکز روی این درخت است، به این ترتیب که در ۲.۲ از $\phi(x_1, V) = E(x_1)$ و $\phi(x_2, V) = E(x_2)$ استفاده می‌کنیم. بنابراین یک یالی باید وجود داشته باشد که با حذف آن جواب بهینه مسأله پشتیبان ۲-مرکز روی G به دست آید. حال اگر همه یال‌ها را امتحان کنیم در نهایت به یال صحیح خواهیم رسید. این

یال همان یالی خواهد بود که مقدار مینیمم تابع هدف به ازای حذف آن به دست می‌آید.

در حالتی که C کاملاً در G_2 می‌افتد ما تمامی یال‌های روی مسیر $\pi(c_1, u_j)$ را امتحان می‌کنیم. هر بار که یالی را حذف می‌کنیم جواب مسأله پشتیبان ۲-مرکز روی گراف حاصل در زمان $O(n \log n)$ به دست خواهد آمد. از بین تمام نامزدها، جوابی را انتخاب می‌کنیم که دارای کمترین هزینه باشد. در نتیجه با در نظر گرفتن تمامی حالات در بدترین حالت جواب مسأله پشتیبان ۲-مرکز روی گراف تک‌دوری در زمان $O(n^2 \log n)$ محاسبه خواهد شد.

در مجموع با در نظر گرفتن حالات فوق قضیه زیر را خواهیم داشت.

قضیه ۲.۷.۲. [۷] جواب مسأله پشتیبان ۲-مرکز روی گراف تک‌دوری را می‌توان در زمان $O(n^2 \log n)$ محاسبه کرد.

فصل ۳

مساله پشتيبان ۲- مرکز روی گراف بازه‌ای

۱.۳ مقدمه

در این فصل روی گراف‌های بازه‌ای^۱ متمرکز می‌شویم. طبق تعریف $G(S) = (V, E)$ را یک گراف بازه‌ای گوئیم هرگاه مجموعه‌ی S از بازه‌های روی محور اعداد حقیقی موجود باشد به طوری که تناظری یک به یک بین رئوس $v_i \in V$ و بازه‌های $I_i \in S$ موجود باشد به گونه‌ای که (v_i, v_j) یالی در E است اگر و فقط اگر $I_i \cap I_j \neq \emptyset$. مجموعه‌ی S را یک "مدل بازه‌ای"^۲ برای G می‌نامیم.

گراف‌های بازه‌ای در بسیاری از زمینه‌ها کاربرد دارند از جمله آن‌ها می‌توان به طراحی $VLSI$ ^۳، مسائل زمان‌بندی^۴، زیست‌شناسی، کنترل ترافیک و باستان‌شناسی اشاره کرد. محققان ثابت کرده‌اند مسأله‌ی تشخیص بازه‌ای بودن یک گراف در زمان $O(|V| + |E|)$ قابل حل است.^[۲۴] گراف کامل یک گراف بازه‌ای است.

در این فصل طبق تحقیقات هنگ و کنگ در [۱۹] مسأله پشتیبان ۲-مرکز را روی گراف‌های بازه‌ای با طول یال واحد بررسی می‌کنیم و الگوریتم موثری برای حل آن ارائه می‌دهیم.

۲.۳ پیش‌نیازها و تعریف مسأله

فرض کنید S مجموعه‌ای از n بازه در مدل بازه‌ای G ، داده شده باشد. هر بازه‌ی $A \in S$ به وسیله‌ی نقطه انتهایی چپ a_A و نقطه انتهایی راست b_A تعریف می‌شود. مثل $A = [a_A, b_A]$. بدون کاستن از کلیت فرض می‌کنیم هیچ دو بازه‌ی متمایز در S نقطه انتهایی یکسان نداشته باشند. همچنین می‌توانیم بازه‌های درون S را بر اساس نقاط انتهایی راست مرتب کنیم مانند I_1, I_2, \dots, I_n . برای سهولت می‌توان به ترتیب از a_i و b_i به جای a_{I_i} و b_{I_i} برای نمایش نقاط انتهایی چپ و راست بازه‌ی I_i استفاده کرد. در این صورت داریم $b_1 < b_2 < \dots < b_n$. مرتب سازی بازه‌ها در مقاله‌های زیادی از جمله در [۱۸] بررسی شده است.

حال به طور مشابه ترتیب بازه‌ها بر اساس نقاط انتهایی چپ را می‌توان با i_1, i_2, \dots, i_n مشخص کرد به طوری که $a_{i_1} < a_{i_2} < \dots < a_{i_n}$. فرض می‌کنیم $i_1 = 1$ و $i_n = n$ به این معنی که I_1 بازه‌ای است که دارای چپ‌ترین نقطه انتهایی چپ و چپ‌ترین نقطه انتهایی راست است و I_n بازه‌ای با راست‌ترین نقطه انتهایی راست و راست‌ترین نقطه انتهایی چپ است. اگر چنین نباشد می‌توان I_1 را به سمت چپ و I_n را به راست گسترش داد در حالی که رابطه‌ی همسایگی بین بازه‌ها همچنان حفظ شود. چن و همکارانش [۹] در مقاله‌ی خود درباره‌ی حل مسأله کوتاهترین مسیر روی گراف‌های بازه‌ای یک "تابع جانشینی"^۵ روی بازه‌ها تعریف می‌کنند. بر اساس این ایده، براندیو و چپو در [۸] این مفهوم

^۱interval graphs^۲interval model^۳VLSI design^۴scheduling^۵successor function

را به تابع جانشینی راست و چپ و k -امین تابع جانشینی^۶ راست و چپ تعمیم دادند. فرض کنید A بازه‌ای در S باشد. تابع جانشینی راست A که ما آن را با $R(A)$ نشان می‌دهیم، عبارت است از بازه‌ای که با A اشتراک داشته دارای راست‌ترین نقطه انتهایی راست است. همچنین داریم $R^0(A) = A$ و نیز $R^k(A) = R(R^{k-1}(A))$ k -امین تابع جانشینی A است. $L(A)$ ؛ تابع جانشینی چپ و $L^k(A)$ نیز به طور مشابه تعریف می‌شوند.

برای هر دو بازه‌ی $A, B \in S$ ، فاصله‌ی $d(A, B)$ بین A و B همان فاصله‌ی متناظر بین رئوس A و B در گراف $G(S)$ تعریف می‌شود. چن و همکارانش [۹] با استفاده از ساختمان داده‌ای بر پایه تابع جانشینی؛ جانشین‌های مکرر و فاصله میان هر دو بازه‌ی دلخواه را در زمان ثابت محاسبه کرده‌اند.

۱.۲.۳ مسأله کوتاهترین مسیر روی گراف‌های بازه‌ای

فرض کنید مدل بازه‌ای S داده شده باشد. یک "مسیر" از بازه‌ی $I \in S$ به بازه‌ی $J \in S$ ، دنباله‌ای همچون $\sigma(J_1, J_2, \dots, J_k)$ از بازه‌های S است به گونه‌ای که $J_1 = I$ و $J_k = J$ و J_i و J_{i+1} برای هر $i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ با هم اشتراک دارند. "طول" مسیر σ برابر تعداد بازه‌های σ است (k). یک "کوتاه‌ترین مسیر" از I به J است اگر دارای کوچکترین طول بین همه‌ی مسیرهای ممکن بین I و J در S باشد. $d(I, J)$ نشان‌دهنده "فاصله" بین دو بازه‌ی I و J است که برابر طول کوتاه‌ترین مسیر از I به J منهای ۱ تعریف می‌شود. مسأله کوتاهترین مسیر روی S عبارتست از محاسبه کوتاهترین مسیر بین هر دو بازه‌ی دلخواه در S . چن و همکارانش بعد از مرتب‌سازی بازه‌ها بر اساس نقاط انتهایی و معرفی یک ساختمان داده‌ی درختی که در زمان $O(n)$ محاسبه می‌شود مسأله را حل کردند. [۹] در این جا ما چکیده این روش را بیان کرده و یک مثال ارائه خواهیم داد. در مقاله‌ی آن‌ها از نماد $SUC(I)$ برای تابع جانشینی راست $(R(I))$ استفاده شده است. چن و همکارانش روندی را برای محاسبه توابع جانشینی برای هر بازه دلخواه در S را ارائه داده‌اند. بعد از اجرای روند، $SUC(I_i)$ و توابع جانشینی مکرر به ازای همه بازه‌های S در دسترس خواهد بود. [۹]

ابتدا با توجه به تعریف تابع جانشینی ساختار درختی را معرفی می‌کنیم. در این جا T درختی ریشه‌دار است که رأس‌های آن بازه‌های مرتب‌شده S هستند و این‌طور ساخته می‌شود که برای هر I_i که $i = 1, 2, \dots, n-1$ ، $SUC(I_i)$ متناظر با رأس والد I_i در T می‌باشد. در این درخت "سطح"^۷ ریشه‌ی درخت را برابر صفر و سطح هر رأس یکی بیشتر از سطح رأس والد خود در نظر می‌گیریم. سطح هر بازه‌ی I_i را با $Level(I_i)$ نشان می‌دهیم. بعد از ارائه‌ی چند لم روشی را بیان می‌کنیم که با توجه به شماره سطح رئوس T فاصله بین بازه‌های S را محاسبه کنیم.

در این قسمت دو بازه‌ی I_i و I_j که با هم اشتراک دارند را با $I_i \sim I_j$ نشان می‌دهیم و در صورتی که اشتراک نداشته باشند از نماد $I_i \not\sim I_j$ استفاده می‌کنیم. همچنین $SUC^r(I_i)$ ، r امین جد I_i در T است. حال چند لم مفید برای محاسبه فاصله بازه‌ها با استفاده از شماره سطح رئوس بیان می‌کنیم.

لم ۱.۲.۳. [۹] برای هر دو بازه I_i و I_j اگر $|Level(I_j) - Level(I_i)| > 1$ ، آن‌گاه $I_i \cap I_j = \emptyset$.

^۶k-th iterated successor

^۷level

لم ۲.۲.۳. [۹] برای هر دو بازه‌ی I_x و I_y اگر $Level(I_y) = Level(I_x)$ ، آن‌گاه

الف) اگر $I_i \sim I_j$ ، آن‌گاه $d(I_x, I_y) = ۱$

ب) در غیر این صورت $d(I_x, I_y) = ۲$

لم ۳.۲.۳. [۹] برای هر دو بازه‌ی I_x و I_y اگر $Level(I_y) = Level(I_x) - ۱$ ، آن‌گاه

الف) اگر $I_x \sim I_y$ ، آن‌گاه $d(I_x, I_y) = ۱$

ب) در غیر این صورت اگر $SUC(I_x) \sim I_y$ ، آن‌گاه $d(I_x, I_y) = ۲$

ج) در غیر این صورت $d(I_x, I_y) = ۳$

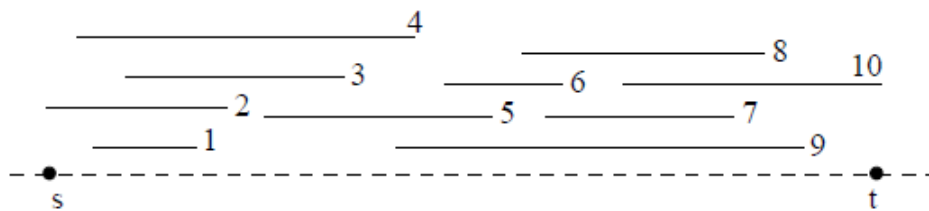
لم ۴.۲.۳. [۹] فرض کنید دو بازه‌ی I_x و I_y داده شده باشند به طوری که $a_{I_y} > a_{I_x}$ و $d(I_x, I_y) \geq ۲$ در این صورت کوتاهترین مسیری از I_x به I_y وجود دارد که از بازه‌ی $SUC(I_x)$ می‌گذرد.

لم ۵.۲.۳. [۹] برای دو بازه‌ی I_x و I_y در صورتی که $Level(I_y) < Level(I_x) - ۱$ آن‌گاه

$$d(I_x, I_y) = Level(I_x) - Level(I_y) - ۱ + d(I_z, I_y),$$

که در آن $I_z = SUC^{Level(I_x) - Level(I_y) - ۱}(I_x)$.

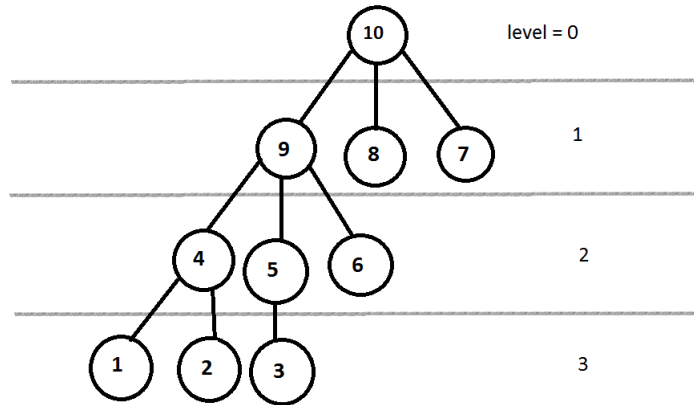
حال با توجه به لم‌های بیان شده مثال زیر را بررسی می‌کنیم.



شکل ۱.۳: مدل بازه‌ای S

مثال ۶.۲.۳. مشاهده می‌کنیم در شکل ۱.۳ بازه‌ها بر اساس نقطه انتهایی راست مرتب شده‌اند. با توجه به تعریفی که برای تابع جانشینی ارائه دادیم، داریم:

$$\begin{aligned} SUC(I_1) &= I_4, & SUC(I_2) &= I_4, & SUC(I_3) &= I_5, & SUC(I_4) &= I_9, \\ SUC(I_5) &= I_9, & SUC(I_6) &= I_9, & SUC(I_7) &= I_{10}, & SUC(I_8) &= I_{10}, \\ SUC(I_9) &= I_{10}, & SUC(I_{10}) &= I_{10}. \end{aligned}$$



شکل ۲.۳: محاسبه فاصله میان بازه‌ها

در نتیجه I_4 والد I_1 و I_2 ، I_5 والد I_3 ، I_9 والد I_4 و I_5 و I_6 ، I_{10} نیز والد بازه‌های I_7 و I_8 و I_9 است. بنابراین روابط I_{10} را ریشه می‌گیریم و در نتیجه سطح آن صفر است لذا فرزندان I_{10} یعنی I_9 و I_8 و I_7 دارای سطح ۱ و I_4 و I_5 و I_6 دارای سطح ۲ و I_1 و I_2 و I_3 در سطح ۳ هستند. حال با داشتن این اطلاعات می‌توانیم فاصله دو بازه دلخواه را با استفاده از لم‌های بیان شده بیابیم. برای مثال $d(I_2, I_8)$ را در نظر بگیرید. طبق داده‌هایی که داریم I_2 و I_8 در شرایط لم ۵.۲.۳ صدق می‌کنند. $Level(I_8) = 1 < Level(I_2) - 1 = 2$ لذا

$$d(I_2, I_8) = Level(I_2) - Level(I_8) - 1 + d(I_z, I_8), \quad I_z = SUC(I_2) = I_4, \\ \implies d(I_z, I_8) = d(I_4, I_8)$$

حال بازه‌های I_4 و I_8 خود در شرایط لم ۳.۲.۳ صدق می‌کنند. $Level(I_8) = Level(I_4) - 1$ لذا از آن‌جا که I_4 و I_8 با هم اشتراک ندارند ولی $I_8 \sim SUC(I_4) = I_9$ پس طبق قسمت ب لم ۳.۲.۳ داریم $d(I_4, I_8) = 2$ در نهایت $d(I_2, I_8)$ به صورت زیر به دست می‌آید

$$d(I_4, I_8) = 2 \implies d(I_2, I_8) = 3 - 1 - 1 + 2 = 3.$$

لم ۷.۲.۳. [۹] بعد از یک پردازش اولیه با زمان $O(n)$ روی اعضای S ، برای هر بازه‌ی A و B و عدد صحیح مفروض k ، $R^k(A)$ و $L^k(A)$ و $d(A, B)$ در زمان ثابت محاسبه می‌شوند.

۳.۳ پشتیبان ۲-مرکز بهینه

در این قسمت با توجه به مفاهیم و نمادهای ذکر شده تابع هدف مسأله پشتیبان ۲-مرکز را برای گراف‌های بازه‌ای بیان خواهیم کرد.

فرض کنید ρ_1 و ρ_2 احتمال شکست‌های دو سرویس‌دهنده در مسأله‌ی پشتیبان ۲-مرکز روی گراف بازه‌ای باشند. در این مسأله جواب را با زوج بازه‌ی (M_1, M_2) مشخص می‌کنیم که در آن سرویس‌دهنده

با احتمال شکست ρ_1 در M_1 و سرویس‌دهنده با احتمال شکست ρ_2 در M_2 مستقر می‌شود. برای ساده سازی فرض می‌کنیم $\rho_1 = \rho_2 = \rho$.

برای هر دو بازه‌ی $M_1, M_2 \in S$ و مجموعه‌ای از بازه‌ها همچون $M \subseteq S$ ، داریم:

$$\phi(M, M_1) = \max_{I \in M} d(I, M_1) \text{ و } \phi(M, \{M_1, M_2\}) = \max_{I \in M} \{ \min\{d(I, M_1), d(I, M_2)\} \}$$

تعریف ۱.۳.۳. (مساله پشتیبان ۲-مرکز روی گراف بازه‌ای). فرض کنید S مجموعه‌ای از بازه‌ها و ρ احتمال از کار افتادن سرویس‌دهنده‌ها باشد. مساله پشتیبان ۲-مرکز به دنبال یافتن یک زوج بازه‌ی (M_1, M_2) است که تابع هدف زیر را بهینه کند.

$$\psi_\rho(M_1, M_2) = (1 - \rho)\phi(S, \{M_1, M_2\}) + \rho(\phi(S, M_1) + \phi(S, M_2)). \quad (1.3)$$

هر کاندید جواب همچون (M_1, M_2) برای مساله را یک پشتیبان ۲-مرکز گوئیم و در صورتی که $\psi_\rho(M_1, M_2)$ مینیمم شود، (M_1, M_2) را یک پشتیبان ۲-مرکز بهینه می‌نامیم. ایده اصلی در این جا نیز همچون [۳۱] به دست آوردن موقعیت احتمالی جواب بهینه مساله پشتیبان ۲-مرکز و سپس طراحی یک الگوریتم با جستجوی تمامی این موقعیت‌ها است. در این بخش برخی ویژگی‌های یک جواب بهینه را برای مساله پشتیبان ۲-مرکز روی گراف‌های بازه‌ای مشخص می‌کنیم. دو نتیجه‌ی زیر بسیار ساده و مفید هستند.

مشاهده ۲.۳.۳. [۱۹] فرض کنید $A, B, C \in S$ سه بازه باشند به طوری که $A \neq C$.

الف) اگر $a_A < b_B$ و $a_B < a_C$ ، آن‌گاه $d(A, B) \leq d(A, C)$.

ب) اگر $a_B < b_C$ و $b_A < b_B$ ، آن‌گاه $d(A, B) \leq d(A, C)$.

برهان. الف) اگر $a_B < b_A$ (بازه B قبل از به انتها رسیدن بازه A ، شروع شود)، این یعنی بازه A و B با هم اشتراک دارند، پس $d(A, B) = 1$ و در نتیجه چون $A \neq C$ حکم برقرار است. بنابراین فرض می‌کنیم $a_B < a_C < b_A$. فرض کنید $[AI_1 \dots I_k C]$ کوتاه‌ترین مسیری باشد که A را به C وصل می‌کند. در این صورت C با I_k اشتراک دارد یعنی $a_C > a_B > b_{I_k}$. از طرفی فرض کنید l کوچکترین عدد صحیحی باشد که $b_{I_l} > a_B$. در این صورت $l \leq k$ و $[AI_1 \dots I_l B]$ مسیری از A به B است. بنابراین $d(A, B) \leq l + 1 \leq k + 1 = d(A, C)$. اثبات قسمت دوم نیز مشابه است.

□

لم ۳.۳.۳. [۱۹] فرض کنید $A, B, C \in S$ سه بازه باشند.

الف) اگر به ازای یک i داشته باشیم $B = R^i(A)$ و $b_B < b_C$ ، آن‌گاه $d(A, C) = d(A, B) + d(B, C)$.

ب) اگر به ازای یک i داشته باشیم $B = L^i(C)$ و $a_A < a_B$ ، آن‌گاه $d(A, C) = d(A, B) + d(B, C)$.

برهان. الف) کفایت کوتاهترین مسیری از A به C که از B می‌گذرد را پیدا کنیم. در واقع فرض می‌کنیم $P_0 = [AI_1 \dots I_k C]$ کوتاهترین مسیری باشد که A را به C وصل می‌کند. طبق تعریف $R^i(A)$ ، بازه‌ای است که از بین بازه‌هایی که در فاصله‌ی i از A هستند، دارای راست‌ترین نقطه انتهای راست است. با توجه به اینکه $b_C > b_B$ ، پس باید $d(A, C) > d(A, B)$ در نتیجه $i \leq k$. برای هر $j \leq k$ قرار می‌دهیم $P_j = [AR^1(A)R^2(A) \dots R^j(A)I_{j+1} \dots I_k C]$. می‌خواهیم نشان دهیم تمامی P_j ها کوتاهترین مسیر از A به C هستند. در واقع طبق تعریف تابع جانشینی مکرر کفایت نشان دهیم P_j مسیر است، یعنی برای هر j ، $R^j(A)$ به I_{j+1} در ادامه مسیر متصل باشد (اشتراک داشته باشد). برای اثبات از روش استقرا روی j استفاده می‌کنیم. حکم برای $j = 0$ بدیهی است زیرا P_0 یک کوتاهترین مسیر از A به C است. حال فرض می‌کنیم حکم برای $j - 1$ برقرار باشد یعنی P_{j-1} یک مسیر باشد. در این صورت $R^{j-1}(A)$ با I_j اشتراک دارد. از آن‌جا که $R^j(A)$ جانشین راست بازه‌ی $R^{j-1}(A)$ است خواهیم داشت $b_{R^j(A)} \geq b_{I_j}$. در نتیجه I_{j+1} نیز با $R^j(A)$ اشتراک دارد، که ثابت می‌کند P_j یک مسیر است. بنابراین به ازای i نیز P_i کوتاهترین مسیر از A به C است که از B می‌گذرد. اثبات قسمت دوم نیز به همین شیوه است.

□

همان‌طور که در فصل قبل نیز اشاره کردیم در مسأله ۲-مرکز کلاسیک، دو سرویس‌دهنده همواره در رأس‌های متمایز مستقر می‌شدند. اما در مسأله پشتیبان ۲-مرکز ممکن است هر دو سرویس‌دهنده در یک رأس مستقر شوند. فعلا در این بخش حالتی که دو سرویس‌دهنده در رأس‌های متمایز مستقر می‌شوند را مورد بررسی قرار می‌دهیم ($M_1 \neq M_2$). در این صورت بدون کاستن از کلیت فرض می‌کنیم $b_{M_1} < b_{M_2}$.

وقتی دو سرویس‌دهنده مستقر شدند لازم است که نزدیک‌ترین سرویس‌دهنده به هر متقاضی را بیابیم سپس مجموعه رؤس را به دو زیرمجموعه افراز می‌کنیم. برای حل این مسأله بسپامیاتیخ و همکارانش روشی را در [۵] ارائه داده‌اند. نتایج آن‌ها وقتی که فاصله میان دو کاندید جواب، زوج است همراه با خطاست زیرا آن‌ها بازه‌های کوچک مشمول در یک بازه‌ی دیگر را در نظر نگرفته‌اند. هنگ و کنگ با در نظر گرفتن تمامی حالات ممکن لم زیر را ارائه داده‌اند [۱۹].

لم ۴.۳.۳ [۱۹] فرض کنید $A, B \in S$ دو بازه باشند که $a_A < a_B$ و $b_A < b_B$ و $d = d(A, B)$ و $J = R^{\lceil \frac{d}{2} \rceil - 1}(A)$ اگر فرد باشد، آن‌گاه برای هر بازه‌ی I که $b_I \leq b_J$ داریم $d(A, I) \leq d(I, B)$ و برای هر بازه‌ی I که $b_I > b_J$ اگر زوج باشد، آن‌گاه برای هر بازه‌ی I که $a_I < b_J$ داریم $d(A, I) \leq d(I, B)$ و برای هر بازه‌ی I که $a_I > b_J$ داریم $d(I, B) \leq d(A, I)$.

برهان. قرار دهید $k = \lceil \frac{d}{2} \rceil - 1$. ادعا می‌کنیم $b_J \leq b_B$. اگر $d = 1$ ، آن‌گاه $J = R^k(A) = A$ و در نتیجه $b_J = b_A < b_B$. حال اگر $d \geq 2$ ، در

آن‌گاه به راحتی می‌بینیم که B با $R^{d-2}(A)$ اشتراک ندارد زیرا در غیر این صورت $d = d(A, B) \leq d(A, R^{d-2}(A)) + d(R^{d-2}(A), B) = d - 2 + 1 = d - 1$ بنا بر این داریم $b_{R^{d-2}(A)} < b_B$. فرض کنید ادعای ما درست نباشد. در این صورت $b_{R^{d-2}(A)} < b_J = b_{R^k(A)}$. بنا بر تعریف $R^{d-2}(A)$ و $R^k(A)$ ، داریم $k = \lceil d/2 \rceil - 1$ که با فرض $d \geq 2$ تناقض دارد. لذا ادعا ثابت شد.

در قدم بعد ابتدا حالتی که d فرد باشد را بررسی می‌کنیم. در این حالت قرار می‌دهیم $d = 2k + 1$. برای هر بازه‌ی $I \in S$ که $b_I \leq b_J$ ، اگر $a_I < b_A$ همزمان $a_A < a_B$ ، بنا بر قسمت الف ۲.۳.۳ داریم $d(I, A) \leq d(I, B)$. اما اگر $a_I > b_A$ ، آن‌گاه $a_I > b_J$ ، بنا بر قسمت الف ۲.۳.۳ داریم $d(I, B) \geq d(I, A)$. بنابراین $d(I, A) \leq d(I, B)$ ثابت شد. در ادامه این بار فرض می‌کنیم I بازه‌ای در S باشد به طوری که $b_J < b_I$. اگر $a_B < b_I$ و همزمان $b_A < b_B$ ، بنا بر قسمت ب ۲.۳.۳ داریم $d(B, I) \leq d(A, I)$. حال اگر $b_I < a_B$ ، آن‌گاه $a_I < b_B$. با کنار هم گذاشتن این نتیجه و ادعایی که ثابت کردیم و این که $b_J < b_I$ و قسمت ب ۲.۳.۳، داریم $d(I, B) \leq d(J, B) = d - k = k + 1$. از طرفی طبق قسمت الف ۲.۳.۳، داریم $d(A, I) = d(A, J) + d(J, I) \geq k + 1$. بنا بر این $d(A, I) \geq d(I, B)$ لذا قسمت اول لم ثابت شد. حالتی که d زوج باشد نیز به طریق مشابه اثبات می‌شود.

□

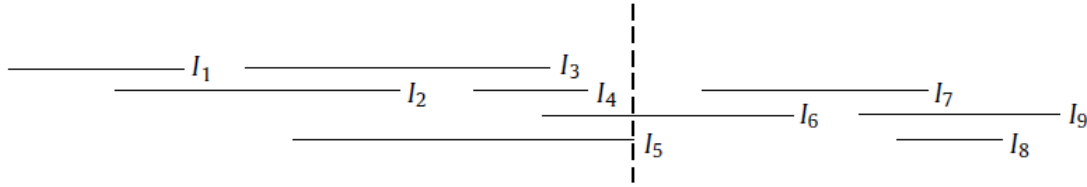
مشابه آنچه در فصل قبل انجام دادیم مجموعه رئوس را به دو زیر مجموعه افراز می‌کنیم؛ زیرمجموعه اول، رئوسی که به سرویس‌دهنده اول نزدیک‌ترند و زیرمجموعه دوم، رئوسی که به سرویس‌دهنده دوم نزدیک‌ترند. در این قسمت نیز با استفاده از لم قبل برای هر دو بازه‌ی A و B می‌توانیم افراز $(S_1(A, B), S_2(A, B))$ از S را تعریف کنیم، به طوری که فاصله هر بازه در $S_1(A, B)$ تا A نایب‌تر از فاصله‌ی آن تا B است و فاصله هر بازه در $S_2(A, B)$ تا B نایب‌تر از فاصله‌ی آن تا A است. به این ترتیب با فرض $d = d(A, B)$ می‌توان نوشت:

$$S_1(A, B) = \begin{cases} \{I \in S | b_I \leq b_{R^{(d-1)/2}(A)}\} & \text{فرد باشد } d \\ \{I \in S | a_I < b_{R^{(d/2-1)}(A)}\} & \text{زوج باشد } d \end{cases}$$

$$S_2(A, B) = \begin{cases} \{I \in S | b_I > b_{R^{(d-1)/2}(A)}\} & \text{فرد باشد } d \\ \{I \in S | a_I > b_{R^{(d/2-1)}(A)}\} & \text{زوج باشد } d \end{cases} \quad (2.3)$$

با توجه به لم ۴.۳.۳ می‌بینیم که برای هر بازه $I \in S_1(A, B)$ ، $d(A, I) \leq d(I, B)$ و برای هر بازه‌ی $I \in S_2(A, B)$ ، $d(I, B) \leq d(A, I)$. برای سادگی در نوشتار وقتی که $d = d(A, B)$ ، می‌نویسیم

$\Pi(A, B)$ از نماد $(S_1(A, B), S_2(A, B))$ افراز $LC(A, B) = R^{[d/2]-1}(A)$ و برای نشان دادن افراز $(S_1(A, B), S_2(A, B))$ استفاده می‌کنیم.



شکل ۳.۳: افراز مجموعه‌ای از بازه‌ها

مثال ۵.۳.۳. با توجه به شکل فوق می‌خواهیم افراز مجموعه بازه‌های $S = \{I_1, I_2, \dots, I_9\}$ را که بر اساس نقاط انتهایی راست بازه‌ها مرتب شده، به ازای بازه‌های A و B به دست بیاوریم. فرض کنید $A = I_2$ و $B = I_7$. در این صورت با توجه به شکل فوق، $d(A, B) = 3$ که فرد است بنابراین $LC(A, B) = R^1(A) = I_5$ پس با توجه به ۲.۳ $S_1(A, B) = \{I_1, I_2, I_3, I_4, I_5\}$ و $S_2(A, B) = \{I_6, I_7, I_8, I_9\}$.

حال اگر قرار دهیم $A = I_2$ و $B = I_8$ ، آنگاه با توجه به شکل $d(A, B) = 4$ که زوج است لذا $LC(A, B) = R^1(A) = I_5$ و در نتیجه $S_1(A, B) = \{I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6\}$ و $S_2(A, B) = \{I_7, I_8, I_9\}$.

با استفاده از چنین افرازی تابع هدف مسأله ۱.۳.۳ را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\psi_\rho(M_1, M_2) = (1-\rho)\max\{\phi(\mathcal{M}_1, M_1), \phi(\mathcal{M}_2, M_2)\} + \rho(\phi(S, M_1) + \phi(S, M_2)) \quad (3.3)$$

$$(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2) = \Pi(M_1, M_2) = (S_1(M_1, M_2), S_2(M_1, M_2))$$

لم ۶.۳.۳. [۱۹] فرض کنید $S_0 \subseteq S$ مجموعه‌ای از بازه‌ها باشد و A بازه‌ای با چپ‌ترین نقطه انتهایی راست و B بازه‌ای با راست‌ترین نقطه انتهایی چپ در S_0 باشند. در این صورت برای هر بازه‌ی $M \in S$ داریم:

$$\phi(S_0, M) = \max\{d(A, M), d(M, B)\}.$$

برهان. طبق تعریف تابع ϕ ، کفایت نشان دهیم $\phi(S_0, M) \leq \max\{d(A, M), d(M, B)\}$ در واقع برای هر بازه $I \in S_0$ ، داریم $a_I \leq a_B$ و $b_A \leq b_I$. اگر $a_M < b_I$ ، بنا بر قسمت الف ۲.۳.۳ می‌بینیم $d(M, I) \leq d(M, B)$. اگر $b_I \leq a_M$ ، آنگاه $a_I < b_M$. حال طبق قسمت ب ۲.۳.۳ داریم $d(I, M) \leq d(A, M)$. پس خواهیم داشت $d(M, I) \leq \max\{d(A, M), d(M, B)\}$. □

بنابر آنچه در ابتدای فصل گفتیم I_1 بازه‌ای با چپ‌ترین نقطه انتهایی چپ و I_n بازه‌ای با راست‌ترین نقطه انتهایی راست است. لذا بنا بر لم ۶.۳.۳ برای هر بازه‌ی $M \in S$ داریم:

$$\phi(S, M) = \max\{d(I_1, M), d(M, I_n)\}.$$

به طور مشابه در مثال قبل در مجموعه‌ی $S_1(M_1, M_2)$ ، بازه‌ای با چپ‌ترین نقطه انتهای راست است. بازه‌ی دارای راست‌ترین نقطه انتهای چپ را با $I_L(M_1, M_2)$ نشان می‌دهیم لذا خواهیم داشت:

$$\phi(S_1(M_1, M_2), M) = \max\{d(I_1, M), d(M, I_L(M_1, M_2))\}$$

همچنین بازه‌ای در $S_2(M_1, M_2)$ که چپ‌ترین نقطه انتهای راست را دارد با $I_R(M_1, M_2)$ نشان می‌دهیم بنابراین

$$\phi(S_2(M_1, M_2), M) = \max\{d(I_R(M_1, M_2), M), d(M, I_n)\}$$

با استفاده از روابط فوق محاسبه تابع ϕ کمتر زمان می‌برد.

تعریف ۷.۳.۳. یک بازه را بازه بیشین نامیم هرگاه مشمول در هیچ بازه‌ای نباشد. در نتیجه I_1 و I_n هر دو بازه بیشین هستند. همچنین اگر A و B هر دو بازه بیشین باشند، آنگاه $a_A < a_B$ معادل است با $b_A < b_B$.

لم ۸.۳.۳. [۱۹] فرض کنید $I \in S$. در این صورت به ازای هر $k \geq 1$ ، $R^k(I)$ و $L^k(I)$ هر دو بازه بیشین هستند.

برهان. به برهان خلف فرض می‌کنیم به ازای برخی $k \geq 1$ ، بازه‌ی $R^k(I)$ ، بازه بیشین نباشد. یعنی بازه‌ای همچون J وجود دارد که شامل $R^k(I)$ است. پس $a_J < a_{R^k(I)} < b_{R^k(I)} < b_J$. با توجه به این که $R^k(I)$ خود تابع جانشینی راست بازه‌ی $R^{k-1}(I)$ است، مشاهده می‌کنیم که $R^k(I)$ بازه‌ای با راست‌ترین نقطه انتهای راست است که با $R^{k-1}(I)$ اشتراک دارد. در نتیجه $b_J \leq b_{R^k(I)}$ که تناقض است لذا حکم ثابت می‌شود. به همین ترتیب ثابت می‌شود $L^k(I)$ نیز یک بازه بیشین است. \square

در قدم بعد موقعیت احتمالی یک جواب بهینه برای مساله پشتیبان ۲- مرکز روی S را بررسی می‌کنیم.

لم ۹.۳.۳. [۱۹] یک جواب بهینه برای مساله پشتیبان ۲- مرکز مثل (M_1, M_2) برای S وجود دارد به طوری که M_1 و M_2 هر دو بازه بیشین هستند و $b_{M_1} \leq b_{R^k(I_1)}$ و $a_{M_2} \geq a_{L^k(I_n)}$ که در آن $k = \lfloor \frac{d(I_1, I_n)}{4} \rfloor$.

برهان. برهان را به دو مرحله تقسیم می‌کنیم. ابتدا نشان می‌دهیم یک زوج بازه همچون (M_1, M_2) وجود دارد به گونه‌ای که

$$(۴.۳) \quad M_1 \text{ و } M_2, \text{ بازه بیشین هستند و } \psi_\rho(M_1, M_2) \text{ مینیمم شده است.}$$

سپس لم را تحت شرط فوق ثابت می‌کنیم.

در قدم اول فرض کنید (M_1, M_2) یک جواب بهینه مساله پشتیبان ۲- مرکز روی S باشد. یعنی $\psi_\rho(M_1, M_2)$ مینیمم شده است. اگر M_1 و M_2 هر دو بازه بیشین باشند، قسمت اول برقرار است در غیر این صورت بازه‌های (M'_1, M'_2) موجودند به گونه‌ای که

$$(۵.۳) \quad M'_1 \text{ و } M'_2, \text{ بازه بیشین هستند و } M_1 \subseteq M'_1, M_2 \subseteq M'_2$$

توجه کنید که M_i برابر M'_i است، اگر M_i خود یک بازه بیشین باشد. پس کافی است نشان دهیم $\psi_\rho(M'_1, M'_2) \leq \psi_\rho(M_1, M_2)$ نیز مینیمم شده است. طبق ۴.۳ کافی است نشان دهیم $\psi_\rho(M'_1, M'_2) \leq \psi_\rho(M_1, M_2)$ با توجه به تابع هدف ۱.۳ کافیت ثابت کنیم

$$\phi(S, \{M'_1, M'_2\}) \leq \phi(S, \{M_1, M_2\}), \phi(S, M'_1) \leq \phi(S, M_1), \phi(S, M'_2) \leq \phi(S, M_2).$$

به خاطر تشابه تنها اثبات $\phi(S, \{M'_1, M'_2\}) \leq \phi(S, \{M_1, M_2\})$ را بیان می‌کنیم. فرض کنید نامساوی برقرار نباشد. در این صورت بازه‌ی $I \in S$ وجود دارد طوری که

$$\begin{aligned} \min\{d(M'_1, I), d(M'_2, I)\} = \phi(S, \{M'_1, M'_2\}) &> \phi(S, \{M_1, M_2\}) \\ &\geq \min\{d(M_1, I), d(M_2, I)\}. \end{aligned} \quad (۶.۳)$$

اگر $I \neq M_1$ و $I \neq M_2$ ، آنگاه با توجه به قسمت الف و ب ۲.۳.۳ به ترتیب برای حالات $a_I < b_{M'_1}$ و $a_I > b_{M'_1}$ داریم $d(M'_1, I) \leq d(M_1, I)$. به طور مشابه خواهیم داشت $d(M'_2, I) \leq d(M_2, I)$ که با ۶.۳ متناقض است لذا داریم $I \in \{M_1, M_2\}$. با در نظر گرفتن ۵.۳ نیز داریم $\min\{d(M'_1, I), d(M'_2, I)\} \leq 1$ با جایگذاری در ۶.۳ داریم $\phi(S, \{M_1, M_2\}) = 0$ که نتیجه می‌دهد S دقیقاً شامل دو بازه‌ی M_1 و M_2 است. از این رو $M_1 = M'_1$ و $M_2 = M'_2$ که با ۶.۳ متناقض است لذا قسمت اول ثابت شد.

حال فرض کنید (M_1, M_2) زوج بازه‌ای باشند که در ۴.۳ صدق می‌کنند. در این صورت اگر $b_{M_1} \leq b_{R^k(I_1)}$ و $a_{L^k(I_n)} \leq a_{M_2}$ ، کار تمام است. در غیر این صورت باید یک زوج بازه‌ی دیگر همچون (M'_1, M'_2) پیدا کنیم که در شرایط این لم صدق کند. توجه داریم که

$$M'_1 = \begin{cases} M_1 & b_{M_1} \leq b_{R^k(I_1)} \\ R^k(I_1) & \text{در غیر این صورت} \end{cases}, \quad M'_2 = \begin{cases} M_2 & a_{L^k(I_n)} \leq a_{M_2} \\ L^k(I_n) & \text{در غیر این صورت} \end{cases}. \quad (۷.۳)$$

پس

$$b_{M'_1} \leq b_{R^k(I_1)}, \quad a_{L^k(I_n)} \leq a_{M'_2}. \quad (۸.۳)$$

حال کافیت نشان دهیم (M'_1, M'_2) در شرایط ۴.۳ صدق می‌کند. طبق لم ۸.۳.۳ و ۷.۳ به وضوح برای $M'_i, i = 1, 2$ نیز یک بازه بیشین است. بنابراین آنچه می‌ماند اثبات مینیمم بودن $\psi_\rho(M'_1, M'_2)$ است. بنابر بهینه بودن (M_1, M_2) طبق ۴.۳، فقط لازم است نشان دهیم $\psi_\rho(M'_1, M'_2) \leq \psi_\rho(M_1, M_2)$ نامساوی زیر را محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned} \psi_\rho(M_1, M_2) - \psi_\rho(M'_1, M'_2) &\geq (1 - \rho)[\max\{\phi(\mathcal{M}_1, M_1), \phi(\mathcal{M}_2, M_2)\} \\ &- \max\{\phi(\mathcal{M}_1, M'_1), \phi(\mathcal{M}_2, M'_2)\}] + \rho[\phi(S, M_1) - \phi(S, M'_1)] + \rho[\phi(S, M_2) - \phi(S, M'_2)], \end{aligned}$$

که در آن $(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2) = \Pi(M_1, M_2)$. بنابراین کافیت نشان دهیم

$$\phi(\mathcal{M}_i, M_i) \geq \phi(\mathcal{M}_i, M'_i), \phi(S, M_i) \geq \phi(S, M'_i), \quad i = 1, 2. \quad (۹.۳)$$

به خاطر تشابه ۹.۳ را فقط برای $i = 1$ ثابت می‌کنیم.

اگر $b_{M_1} \leq b_{R^k(I_1)}$ با توجه به ۷.۳ می‌بینیم که ۹.۳ به ازای $i = 1$ برقرار است. اگر $b_{M_1} > b_{R^k(I_1)}$ با توجه به قسمت الف لم ۳.۳.۳ داریم

$$\phi(M_1, M_1) \geq d(I_1, M_1) = d(I_1, R^k(I_1)) + d(R^k(I_1), M_1) \geq k + 1 = \lfloor \frac{d(I_1, I_n)}{2} \rfloor + 1$$

درحالی‌که

$$\phi(M_1, M'_1) \leq \phi(S, M'_1) = \max\{d(I_1, M'_1), d(M'_1, I_n)\} = \max\{k, d(I_1, I_n) - k\} = \lceil \frac{d(I_1, I_n)}{2} \rceil.$$

بنابراین قسمت اول ۹.۳ ثابت شد.

به طور مشابه داریم

$$\phi(S, M_1) = d(I_1, M_1) \geq d(I_1, R^k(I_1)) + d(R^k(I_1), M_1) \geq k + 1 = \lfloor \frac{d(I_1, I_n)}{2} \rfloor + 1$$

درحالی‌که

$$\phi(S, M'_1) = \max\{d(I_1, M'_1), d(M'_1, I_n)\} = \max\{k, d(I_1, I_n) - k\} = \lceil \frac{d(I_1, I_n)}{2} \rceil.$$

با ترکیب تمام تحلیل‌های فوق اثبات لم تمام می‌شود. \square

به وضوح اگر $d(I_1, I_n) = 1$ آن‌گاه $G(S)$ یک گراف کامل است پس هر زوج (M_1, M_2) از رئوس می‌تواند یک جواب بهینه برای مساله پشتیبان ۲-مرکز باشد. بنابراین فرض می‌کنیم $d(I_1, I_n) > 1$ لم بعد برخی حالت‌های بدیهی را نشان می‌دهد.

لم ۱۰.۳.۳. [۱۹] فرض کنید (M_1, M_2) یک جواب بهینه برای مساله پشتیبان ۲-مرکز روی S باشد. اگر $d = d(I_1, I_n)$ فرد باشد و $d(I_1, I_L(M_1, M_2)) = d$ یا $d(I_R(M_1, M_2), I_n) = d$ آن‌گاه $d = 1$.

برهان. به خاطر تشابه فقط به بیان اثبات حالت $d(I_1, I_L(M_1, M_2)) = d$ می‌پردازیم. در نظر داشته باشید $(M_1, M_2) = \Pi(M_1, M_2)$. فرض کنید $M'_2 = R^{d-2}(I_1)$ و به برهان خلف فرض می‌کنیم $d > 1$ بنابراین $d \geq 3$ ، چون d فرد است. حال ادعای زیر را مطرح می‌کنیم.

ادعا می‌کنیم برای هر بازه‌ی $I \in M_2$ داریم $b_{M'_2} < b_I$.

در واقع می‌بینیم که $d(I_1, M'_2) = d - 2$ و $d(I_1, I_L(M_1, M_2)) = d$. که نشان می‌دهد M'_2 با $I_L(M_1, M_2)$ اشتراک ندارد. در نتیجه

$$b_{M'_2} < a_{I_L(M_1, M_2)} < b_{I_L(M_1, M_2)}.$$

توجه داشته باشید که $I_L(M_1, M_2) \in M_1$ و $I \in M_2$. حال طبق افرازهای معرفی شده در ۲.۳ می‌بینیم که اگر $d(M_1, M_2)$ فرد باشد، آن‌گاه

$$b_{I_L(M_1, M_2)} \leq b_{L^C(M_1, M_2)} < b_I$$

و اگر $d(M_1, M_2)$ زوج باشد، آن‌گاه

$$a_{I_L(M_1, M_2)} < b_{L^C(M_1, M_2)} < a_I < b_I.$$

با ترکیب سه نامساوی فوق ادعا ثابت می‌شود.

اینک ثابت می‌کنیم:

$$\max\{\phi(\mathcal{M}_1, M_1), \phi(\mathcal{M}_2, M_2)\} \geq \max\{\phi(\mathcal{M}_1, M_1), \phi(\mathcal{M}_2, M'_2)\}$$

کافیست نشان دهیم

$$\max\{\phi(\mathcal{M}_1, M_1), \phi(\mathcal{M}_2, M_2)\} \geq \phi(\mathcal{M}_2, M'_2) = \max\{d(I, M'_2) | I \in \mathcal{M}_2\}.$$

برای هر بازه‌ی $I \in \mathcal{M}_2$ طبق ادعایی که ثابت کردیم، داریم $a_{M'_2} < b_{M'_2} < b_I$. بنابر قسمت الف ۲.۳.۳ و قسمت الف ۳.۳.۳ داریم

$$d(M'_2, I) \leq d(M'_2, I_n) = d(R^{d-2}(I_1), I_n) = d(I_1, I_n) - d(I_1, R^{d-2}(I_1)) = d - (d-2) = 2.$$

بنابراین $\phi(\mathcal{M}_2, M_2) \leq 2$. فرض کنید ادعای دوم درست نباشد. در این صورت

$$\max\{\phi(\mathcal{M}_1, M_1), \phi(\mathcal{M}_2, M_2)\} < \phi(\mathcal{M}_2, M'_2) \leq 2.$$

در نتیجه $\phi(\mathcal{M}_1, M_1) \leq 1$ ، که نشان می‌دهد M_1 با تمامی بازه‌های موجود در \mathcal{M}_1 اشتراک دارد. لذا هر

دو بازه در \mathcal{M}_1 حداکثر به فاصله ۲ از هم هستند که این با این حقیقت که $d(I_1, I_L(M_1, M_2)) = d \geq 3$

تناقض دارد. لذا ادعای دوم نیز ثابت شد.

حال نشان می‌دهیم $d = 3$.

توجه کنید (M_1, M_2) یک جواب بهینه برای مسأله پشتیبان ۲-مرکز است. طبق ۳.۳ و ادعای قبل داریم

$$\begin{aligned} & \circ \geq \psi_\rho(M_1, M_2) - \psi_\rho(M_1, M'_2) \\ & \geq (1 - \rho)[\max\{\phi(\mathcal{M}_1, M_1), \phi(\mathcal{M}_2, M_2)\} - \max\{\phi(\mathcal{M}_1, M_1), \phi(\mathcal{M}_2, M'_2)\}] + \\ & \quad \rho(\phi(S, M_2) - \phi(S, M'_2)) \\ & \geq \rho(\phi(S, M_2) - \phi(S, M'_2)). \end{aligned}$$

در نتیجه $\phi(S, M_2) \leq \phi(S, M'_2)$. طبق لم ۳.۳.۳ و ۸.۳.۳ داریم

$$\max\{d(I_1, M_2), d(M_2, I_n)\} \leq \max\{d(I_1, M'_2), d(M'_2, I_n)\} = \max\{d - 2, 2\}.$$

که نتیجه می‌دهد $d(I_1, M_2) \leq \max\{d - 2, 2\}$. علاوه بر این چون $M_2 \in \mathcal{M}_2$ و ادعای اول ما

داریم $b_{M'_2} < b_{M_2}$. حال طبق قسمت اول لم ۳.۳.۳ داریم

$$d(I_1, M_2) = d(I_1, M'_2) + d(M'_2, M_2) \geq d - 2 + 1 = d - 1.$$

پس $d - 1 \leq \max\{d - 2, 2\}$ ، که نتیجه می‌دهد $d \leq 3$. این نتیجه در کنار فرض مان $d \geq 3$ ادعای سوم را به اثبات می‌رساند.

در قدم بعد ثابت می‌کنیم $\psi_\rho(R^1(I_1), R^2(I_2)) < \psi_\rho(M_1, M_2)$ که با بهینه بودن (M_1, M_2)

تناقض دارد و حکم ثابت می‌شود. در واقع بر اساس تابع هدف ۳.۳ داریم

$$\psi_\rho(M_1, M_2) = (1 - \rho)\max\{\phi(\mathcal{M}_1, M_1), \phi(\mathcal{M}_2, M_2)\} + \rho(\phi(S, M_1) + \phi(S, M_2)).$$

علاوه بر این $\phi(S, M_1) \geq \phi(\mathcal{M}_1, M_1) \geq 2$ ، زیرا در غیر این صورت $\phi(\mathcal{M}_1, M_1) \leq 1$ ، که نتیجه

می‌دهد M_1 با همه بازه‌های موجود در \mathcal{M}_1 اشتراک دارد. لذا هر دو بازه در \mathcal{M}_1 حداکثر به فاصله ۲ از

هم هستند، این نیز با این حقیقت که $d(I_1, I_L(M_1, M_2)) = d = 3$ تناقض دارد. علاوه بر آن

$$\phi(S, M_2) \geq d(I_1, M_2) = d(I_1, M'_2) + d(M'_2, M_2) \geq d - 2 + 1 = 2.$$

بنابراین داریم

$$\psi_\rho(M_1, M_2) \geq (1 - \rho)2 + 2\rho + 2\rho = 2 + 2\rho.$$

از طرفی با توجه به این که $d = 3$ می‌بینیم که $R^1(I_1) \cup R^2(I_1)$ با هر دو بازه‌ی I_1 و I_n اشتراک دارد و لذا با هر بازه در S اشتراک دارد. بنابراین $\phi(S, \{R^1(I_1), R^2(I_1)\}) = 1$ بعلاوه

$$\phi(S, R^i(I_1)) = \max\{d(I_1, R^i(I_1)), d(R^i(I_1), I_n)\} = 2, \quad i = 1, 2.$$

بنابراین طبق ۳.۳ خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \psi_\rho(R^1(I_1), R^2(I_1)) &= (1 - \rho)\phi(S, \{R^1(I_1), R^2(I_1)\}) + \rho(\phi(S, R^1(I_1)) + \phi(S, R^2(I_1))) \\ &= (1 - \rho) + \rho(2 + 2) \\ &= 1 + 3\rho < 2 + 2\rho \leq \psi_\rho(M_1, M_2), \end{aligned}$$

که با جواب بهینه بودن (M_1, M_2) متناقض است لذا فرض خلف باطل و $d = 1$ است. \square

لم ۹.۳.۳ موقعیت احتمالی یک جواب بهینه برای مساله پشتیبان ۲-مرکز را که دنبالش هستیم به ما نشان می‌دهد. حال می‌خواهیم بر پایه‌ی لم قبل دقیق‌تر توصیفشان کنیم.

لم ۱۱.۳.۳. [۱۹] فرض کنید $d(I_1, I_n) > 1$. در این صورت یک جواب بهینه برای مساله پشتیبان ۲-مرکز روی S مانند (M_1, M_2) وجود دارد به گونه‌ای که هر دوی M_1 و M_2 ، بازه بیشین هستند و $k_1 = k, k = \lfloor \frac{d(I_1, I_n)}{2} \rfloor$ که در آن $a_{L^k(I_n)} \leq a_{M_2} \leq a_{L^{k_2}(I_n)}$ و $b_{R^{k_1}(I_1)} \leq b_{M_1} \leq b_{R^k(I_1)}$ و $k_2 = \lfloor \frac{d(I_R(M_1, M_2), I_n)}{2} \rfloor$ و $\lfloor \frac{d(I_1, I_L(M_1, M_2))}{2} \rfloor$.

برهان. بر اساس لم ۹.۳.۳ یک جواب برای مساله پشتیبان ۲-مرکز روی S مانند (M_1, M_2) وجود دارد به گونه‌ای که

$$(10.3) \quad M_2 \text{ و } M_1, \text{ بازه بیشین, } a_{M_2} \leq a_{L^k(I_n)}, b_{M_1} \leq b_{R^k(I_1)} \text{ و } \psi_\rho(M_1, M_2) \text{ مینیمم شده است.}$$

اگر $b_{R^{k_1}(I_1)} \leq b_{M_1}$ و $a_{M_2} \leq a_{L^{k_2}(I_n)}$ آن‌گاه کار تمام است. پس فرض می‌کنیم $b_{R^{k_1}(I_1)} \geq b_{M_1}$ یا $a_{M_2} \geq a_{L^{k_2}(I_n)}$. این‌جا ما می‌خواهیم یک جفت بازه‌ی (M'_1, M'_2) را به گونه‌ای بیابیم که به جای (M_1, M_2) قرار دهیم تا در ۱۰.۳ صدق کنند و داشته باشیم

$$(11.3) \quad b_{R^{k'_1}(I_1)} \leq b_{M'_1}, a_{M'_2} \leq a_{L^{k'_2}(I_n)},$$

که در آن $k'_1 = \lfloor \frac{d(I_1, I_L(M'_1, M'_2))}{2} \rfloor$ و $k'_2 = \lfloor \frac{d(I_R(M'_1, M'_2), I_n)}{2} \rfloor$. مشابه لم ۹.۳.۳ داریم

$$M'_1 = \begin{cases} M_1 & b_{R^{k_1}(I_1)} \leq b_{M_1} \\ R^{k_1}(I_1) & \text{در غیر این صورت} \end{cases}, \quad M'_2 = \begin{cases} M_2 & a_{M_2} \leq a_{L^{k_2}(I_n)} \\ L^{k_2}(I_n) & \text{در غیر این صورت} \end{cases}. \quad (12.3)$$

مشخصاً می‌بینیم

$$(13.3) \quad a_{M_2} \leq a_{L^{k_2}(I_n)}, \quad b_{R^{k_1}(I_1)} \leq b_{M_1}$$

همواره برقرار است لذا ادعای زیر را مطرح می‌کنیم.

(M'_1, M'_2) یک جفت بازه هستند که در ۱۰.۳ و ۱۳.۳ صدق می‌کنند.

مشخص است که باید ثابت کنیم:

۱. M'_i یک بازه بیشین است. که با توجه به ۱۰.۳ و ۱۲.۳ درست است.

۲. $b_{M'_1} \leq b_{R^{k_1}(I_1)}$ و $a_{L^{k_1}(I_n)} \leq a_{M'_1}$. به دلیل تشابه کفایت نشان دهیم $b_{M'_1} \leq b_{R^{k_1}(I_1)}$ در واقع طبق ۱۲.۳ کفایت نشان دهیم $k_1 \leq k$. حال فرض کنید این طور نباشد یعنی $k_1 > k$. پس $\lfloor \frac{d_1}{k_1} \rfloor = k < k_1 = \lceil \frac{d_1}{k_1} \rceil$ که در آن $d_1 = d(I_1, I_L(M_1, M_2))$ و $d = d(I_1, I_n)$. با کنار هم گذاشتن این نتیجه و این که $d_1 \leq d$ می‌بینیم $d_1 = d$ فرد است. حال طبق لم قبل نتیجه می‌گیریم $d = 1$ که متناقض با فرض لم است.

۳. $\psi_\rho(M'_1, M'_2)$ مینیمم شده است.

بنابر بهینه بودن (M_1, M_2) ، کفایت نشان دهیم $\psi_\rho(M_1, M_2) \leq \psi_\rho(M'_1, M'_2)$. برای این منظور محاسبات زیر را انجام می‌دهیم

$$\begin{aligned} \psi_\rho(M_1, M_2) - \psi_\rho(M'_1, M'_2) &\geq (1 - \rho)[\max\{\phi(\mathcal{M}_1, M_1), \phi(\mathcal{M}_2, M_2)\} \\ &\quad - \max\{\phi(\mathcal{M}_1, M'_1), \phi(\mathcal{M}_2, M'_2)\}] + \rho[\phi(S, M_1) - \phi(S, M'_1)] \\ &\quad + \rho[\phi(S, M_2) - \phi(S, M'_2)], \end{aligned}$$

که در آن $(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2) = \Pi(M_1, M_2)$. بنابراین کفایت نشان دهیم

$$\phi(\mathcal{M}_i, M_i) \geq \phi(\mathcal{M}_i, M'_i), \phi(S, M_i) \geq \phi(S, M'_i), \quad i = 1, 2. \quad (14.3)$$

به خاطر تشابه ۱۴.۳ را فقط برای $i = 1$ ثابت می‌کنیم.

اگر $b_{M_1} \geq b_{R^{k_1}(I_1)}$ ، طبق ۱۲.۳ مشاهده می‌کنیم که ۱۴.۳ به ازای $i = 1$ برقرار است. اگر $b_{M_1} < b_{R^{k_1}(I_1)}$ ، آنگاه طبق قسمت الف لم ۳.۳.۳ داریم $\phi(S, M_1) \geq d(M_1, I_n) \geq \max\{d(I_1, M'_1), d(M'_1, I_n)\} = \phi(S, M'_1)$ در حالی که $d(R^{k_1}(I_1), I_n) = d - k_1$ چون $\max\{k_1, d - k_1\} = d - k_1$ در نتیجه $\phi(S, M_1) \geq \phi(S, M'_1)$. علاوه بر این

$$\begin{aligned} \phi(\mathcal{M}_1, M_1) &= \\ \max\{d(I_1, M_1), d(M_1, I_L(M_1, M_2))\} &\geq \frac{1}{2}(d(I_1, M_1) + d(M_1, I_L(M_1, M_2))) \\ &\geq \frac{1}{2}d_1 \end{aligned}$$

لذا $\phi(\mathcal{M}_1, M_1) \geq \lceil \frac{d_1}{2} \rceil$ در حالی که

$$\phi(\mathcal{M}_1, M_1) = \max\{d(I_1, M'_1), d(M'_1, I_L(M_1, M_2))\} = \max\{k_1, d_1 - k_1\} = \lceil \frac{d_1}{2} \rceil.$$

در نتیجه $\phi(\mathcal{M}_1, M_1) \geq \phi(\mathcal{M}_1, M'_1)$.

بنابراین ۱۴.۳ برای $i = 1$ ثابت شد لذا ادعای ما درست است.

قبلا متذکر شدیم برای اثبات اینکه (M'_1, M'_2) در شرایط این لم صدق می‌کند باید نشان دهیم (M'_1, M'_2) در 10.3 و 11.3 صدق می‌کنند. به جای 11.3 ثابت کردیم (M'_1, M'_2) در 13.3 صدق می‌کند. لذا باید بررسی کنیم که زوج جدید (M'_1, M'_2) در 11.3 صدق می‌کند یا نه. در صورتی که صدق نکند ما طبق فرآیندی که در بالا انجام دادیم جواب دیگری برای مسأله پشتیبان ۲- مرکز همچون (M''_1, M''_2) را برای جایگزینی به جای (M'_1, M'_2) می‌یابیم. اگر همچنان (M''_1, M''_2) نیز صدق نکرد روند یافتن زوج جدید را ادامه می‌دهیم. از آن‌جا که بنابر 13.3 بعد از هر بار جایگزینی زوج جدید $a_{M_2} - b_{M_1}$ اکیدا کاهش می‌یابد روند جایگزینی بعد از تعداد متناهی مرحله به نتیجه خواهد رسید و در نهایت یک جواب بهینه برای مسأله پشتیبان ۲- مرکز که در شرایط لم صدق می‌کند به دست خواهد آمد. \square

از لم فوق درمی‌یابیم یک جواب بهینه برای مسأله پشتیبان ۲- مرکز همچون (M_1, M_2) روی S وجود دارد به گونه‌ای که

$$(15.3) \quad b_{R^{k_1}(I_1)} \leq b_{M_1} \leq b_{R^k(I_1)}, a_{L^k(I_n)} \leq a_{M_2} \leq a_{L^{k_2}(I_n)},$$

$$\text{که در آن } k = \lfloor \frac{d(I_1, I_n)}{d} \rfloor, k_1 = \lceil \frac{d(I_1, I_L(M_1, M_2))}{d} \rceil \text{ و } k_2 = \lceil \frac{d(I_R(M_1, M_2), I_n)}{d} \rceil$$

در لم فوق نامساوی‌ها موقعیت M_1 و M_2 را نشان می‌دهند. به وضوح پیداست این موقعیت‌ها بستگی به $d(I_1, I_L(M_1, M_2))$ و $d(I_R(M_1, M_2), I_n)$ دارند. طبق تعریف $I_L(M_1, M_2)$ و $I_R(M_1, M_2)$ این بازه‌ها بستگی به چگونگی افراز S دارند. اما قبل از مشخص شدن زوج بازه‌ی (M_1, M_2) نمی‌توان افراز متناظرشان را معین کرد. بنابراین باید تمامی بازه‌های ممکن که در 2.3 تعریف شده‌اند را بررسی کنیم. از طرفی طبق لم $5.3.2$ هر بازه‌ی تعریف شده در 2.3 به بازه‌ی (M_1) $R^{\lceil \frac{d(M_1, M_2)}{d} \rceil}$ و زوج یا فرد بودن $d(M_1, M_2)$ وابسته است. پس مجبوریم همه‌ی بازه‌های I_i و هر دو حالت زوج و فرد بودن $d(M_1, M_2)$ را در نظر بگیریم. برای جستجوی بهتر موقعیت جواب، مسأله را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم.

$$\psi'_\rho(i, p; M_1, M_2) =$$

$$(1 - \rho) \max\{\phi(S_1(i, p), M_1), \phi(S_2(i, p), M_2)\} + \rho(\phi(S, M_1) + \phi(S, M_2)),$$

که در آن

$$(16.3) \quad S_1(i, p) = \begin{cases} \{I|b_I \leq b_i\} & p = 1; \\ \{I|a_I < b_i\} & p = 2; \end{cases} \quad S_2(i, p) = \begin{cases} \{I|b_I > b_i\} & p = 1; \\ \{I|a_I > b_i\} & p = 2. \end{cases}$$

از طرفی وقتی $d = d(M_1, M_2)$ باشد برای هر جواب مسأله پشتیبان ۲- مرکز مانند (M_1, M_2) همواره اندیس i که $I_i = R^{\lceil \frac{d}{d} \rceil - 1}(M_1)$ و عدد p که با زوج یا فرد بودن d مطابقت دارد، وجود دارند $(p = 1)$ برای فرد بودن d و $(p = 2)$ برای زوج بودن d . بنابراین

$$\min_{M_1, M_2 \in S} \psi_\rho(M_1, M_2) = \min_{M_1, M_2 \in S} \min_{1 \leq i \leq n, p=1,2} \psi'_\rho(i, p; M_1, M_2)$$

در نتیجه برای تعیین مینیمم مقدار $\psi_\rho(M_1, M_2)$ کافیهست مینیمم $\psi'_\rho(i, p; M_1, M_2)$ را محاسبه کنیم. در بخش بعد نشان می‌دهیم این محاسبه در زمان $O(n)$ قابل انجام است.

[^]parity

۴.۳ الگوریتم

در این بخش الگوریتمی برای حل مسأله پشتیبان ۲-مرکز روی گراف‌های بازه‌ای ارائه می‌دهیم. در بخش قبل حالتی را در نظر گرفتیم که دو سرویس‌دهنده در یک بازه مستقر شوند. در این بخش هر دو حالتی که $M_1 = M_2$ و $M_1 \neq M_2$ را در نظر می‌گیریم.

۱.۴.۳ هر دو سرویس‌دهنده در یک بازه مستقر شوند

بنابر لم ۶.۳.۳ و این‌که $M_1 = M_2$ تابع هدف ۱.۳ را می‌توان به صورت زیر ساده کرد.

$$\begin{aligned} \psi_\rho(M_1, M_1) &= (1 - \rho)\phi(S, M_1) + \rho(\phi(S, M_1) + \phi(S, M_1)) \\ &= (1 + \rho)\phi(S, M_1) = (1 + \rho)\max\{d(I_1, M_1), d(M_1, I_n)\}. \end{aligned} \quad (17.3)$$

لم ۱.۴.۳ [۱۹] برای هر بازه‌ی $I \in S$ ، $\psi_\rho(I, I) \geq (1 + \rho)\lceil \frac{d(I_1, I_n)}{\frac{d}{\rho}} \rceil$ ، و نامساوی به ازای بازه‌ی $R^{\lceil \frac{d(I_1, I_n)}{\frac{d}{\rho}} \rceil}(I_1)$ به تساوی تبدیل می‌شود.

برهان. قرار دهید $d = d(I_1, I_n)$ و $k = \lfloor \frac{d}{\rho} \rfloor$. طبق لم ۳.۳.۳ و ۱۷.۳ داریم

$$\psi_\rho(R^k(I_1), R^k(I_1)) = (1 + \rho)(d - k) = (1 + \rho)\lceil \frac{d}{\rho} \rceil.$$

در قدم بعد قسمت اول لم را اثبات می‌کنیم.

بنابر ۱۷.۳ کفایت ثابت کنیم برای هر $I \in S$ داریم $\lceil \frac{d}{\rho} \rceil \geq \max\{d(I_1, I), d(I, I_n)\}$ به برهان خلف فرض کنید این‌گونه نباشد. در این صورت بازه‌ای همچون I وجود دارد به طوری‌که

$$d(I_1, I) \leq \lceil \frac{d}{\rho} \rceil - 1 = d(I_1, R^{\lceil \frac{d}{\rho} \rceil - 1}(I_1)), \quad d(I, I_n) \leq \lceil \frac{d}{\rho} \rceil - 1 = d(L^{\lceil \frac{d}{\rho} \rceil - 1}(I_n), I_n).$$

حال طبق تعریف $R^{\lceil \frac{d}{\rho} \rceil - 1}(I_1)$ ، داریم $b_I \leq b_{R^{\lceil \frac{d}{\rho} \rceil - 1}(I_1)}$. بنابراین می‌توان گفت $R^{\lceil \frac{d}{\rho} \rceil - 1}(I_1)$ با بازه‌ی $L^{\lceil \frac{d}{\rho} \rceil - 2}(I_n)$ اشتراک دارد، زیرا در غیر این صورت $L^{\lceil \frac{d}{\rho} \rceil - 2}(I_n)$ نیز با I اشتراک ندارد و در نتیجه

$$d(I, I_n) = d(I, L^{\lceil \frac{d}{\rho} \rceil - 2}(I_n)) + d(L^{\lceil \frac{d}{\rho} \rceil - 2}(I_n), I_n) \geq 2 + \lceil \frac{d}{\rho} \rceil - 2 = \lceil \frac{d}{\rho} \rceil.$$

که تناقض است پس $R^{\lceil \frac{d}{\rho} \rceil - 1}(I_1)$ با بازه‌ی $L^{\lceil \frac{d}{\rho} \rceil - 2}(I_n)$ اشتراک دارد. لذا مسیری از I_1 به I_n پیدا شد که از $R^{\lceil \frac{d}{\rho} \rceil - 1}(I_1)$ و $L^{\lceil \frac{d}{\rho} \rceil - 2}(I_n)$ می‌گذرد. که نتیجه می‌دهد

$$d = d(I_1, I_n) \leq d(I_1, R^{\lceil \frac{d}{\rho} \rceil - 1}(I_1)) + 1 + d(L^{\lceil \frac{d}{\rho} \rceil - 2}(I_n), I_n) = \lceil \frac{d}{\rho} \rceil - 1 + 1 + \lceil \frac{d}{\rho} \rceil - 2.$$

که تناقض است. لذا برای هر $I \in S$ داریم $\lceil \frac{d}{\rho} \rceil \geq \max\{d(I_1, I), d(I, I_n)\}$ در نتیجه طبق \square حکم نتیجه می‌شود. ۱۷.۳

از لم فوق درمی‌یابیم $(R^{\lceil \frac{d(I_1, I_n)}{\frac{d}{\rho}} \rceil}(I_1), R^{\lceil \frac{d(I_1, I_n)}{\frac{d}{\rho}} \rceil}(I_1))$ یک جواب بهینه برای مسأله پشتیبان ۲-مرکز در حالتی است که دو سرویس‌دهنده در یک بازه مستقر می‌شوند.

۲.۴.۳ دو سرویس‌دهنده در بازه‌های متفاوت مستقر شوند

در بخش قبل دیدیم برای تعیین مینیم مقدار $\psi_\rho(M_1, M_2)$ لازم است همه‌ی بازه‌های M_1 و M_2 را که در نامساوی‌های لم ۱۱.۳.۳ صدق می‌کنند بررسی کنیم. در این بخش نیز نتایج مشابه هستند. بازه‌ی دارای راست‌ترین نقطه انتهای چپ در $S_1(i, p)$ را با $I_L(i, p)$ و بازه‌ی دارای چپ‌ترین نقطه انتهای راست در $S_2(i, p)$ را با $I_R(i, p)$ نشان می‌دهیم که در آن $S_1(i, p)$ و $S_2(i, p)$ همان افزازهایی هستند که در ۱۶.۳ تعریف کردیم. M_1 و M_2 را به حالتی محدود می‌کنیم که

$$(18.3) \quad b_{R^{k_1}(I_1)} \leq b_{M_1} \leq b_{R^{k_2}(I_2)}, a_{L^{k_1}(I_n)} \leq a_{M_2} \leq a_{L^{k_2}(I_n)},$$

$$\text{که در آن } k_2 = \lceil \frac{d(I_1, I_L(i, p))}{p} \rceil \text{ و } k_1 = \lfloor \frac{d(I_2, I_R(i, p))}{p} \rfloor.$$

لم ۲.۴.۳. [۱۹] یک چهارتایی مانند (i, p, M_1, M_2) وجود دارد که در نامساوی‌های لم ۱۱.۳.۳ صدق می‌کند به طوری که ψ'_ρ مینیم مقدار خود را اختیار می‌کند.

برهان. بنابر لم ۱۱.۳.۳ یک جواب بهینه برای مساله پشتیبان ۲- مرکز همچون (M_1, M_2) وجود دارد که در نامساوی ۱۵.۳ صدق می‌کند. فرض کنید i اندیس بازه‌ی $LC(M_1, M_2)$ و $p = 1$ یا 2 باشد به گونه‌ای که همان اندیس p ای باشد که با جواب بهینه (M_1, M_2) مطابقت دارند. در این صورت $\Pi(M_1, M_2) = (S_1(i, p), s_2(i, p))$. لذا $\psi_\rho(M_1, M_2) = \psi'_\rho(i, p; M_1, M_2)$ که نتیجه می‌دهد ψ'_ρ در $(i, p; M_1, M_2)$ به مقدار مینیم خود رسیده. بنابراین $I_L(M_1, M_2) = I_L(i, p)$ و $I_R(M_1, M_2) = I_R(i, p)$ که نتیجه می‌دهد $(i, p; M_1, M_2)$ یک چهارتایی است که در ۱۸.۳ صدق می‌کند. در نتیجه حکم برقرار است. \square

طبق لم فوق کیفیت جوابی برای مساله پشتیبان ۲- مرکز بیابیم که در نامساوی‌های لم ۱۱.۳.۳ صدق کرده ψ'_ρ مینیم شود.

لم ۳.۴.۳. [۱۹] فرض کنید M_1 و M_2 دو بازه باشند که در نامساوی‌های لم ۱۱.۳.۳ صدق می‌کنند. در این صورت $\phi(S_1(i, p), M_1) = d(I_1, M_1)$ ، $\phi(S, M_2) = d(I_1, M_2)$ ، $\phi(S, M_1) = d(M_1, I_n)$ و $\phi(S_2(i, p), M_2) = d(M_2, I_n)$

برهان. به خاطر تشابه تنها قسمت $\phi(S_1(i, p), M_1) = d(I_1, M_1)$ را اثبات خواهیم کرد. قرار می‌دهیم $d_1 = d(I_1, I_L(M_1, M_2))$ و $k_1 = \lceil \frac{d_1}{p} \rceil$. طبق ۱۸.۳ داریم $b_{M_1} \geq b_{R^{k_1}(I_1)}$ و لذا $a_{M_1} \geq a_{R^{k_1}(I_1)}$ از آنجا که هر دو بازه بیشین هستند. بر اساس مشاهده ۲.۳.۳ و لم ۳.۳.۳ داریم

$$d(I_1, M_1) \geq d(I_1, R^{k_1}(I_1)) = k_1 \leq d_1 - k_1 = d(I_1, I_L(M_1, M_2)) - d(I_1, R^{k_1}(I_1)) = d(R^{k_1}(I_1), I_L(M_1, M_2)) \geq d(M_1, I_L(M_1, M_2)).$$

حال طبق لم ۶.۳.۳ داریم $\phi(S, M_1) = \max\{d(I_1, M_1), d(M_1, I_n)\} = d(I_1, M_1)$ \square

با استفاده از لم فوق می‌توانیم تابع هدف ۱۶.۳ را به صورت زیر ساده کنیم.

$$\psi'_\rho(i, p; M_1, M_2) = (1 - \rho) \max\{d(I_1, M_1), d(M_2, I_n)\} + \rho(d(M_1, I_n) + d(I_1, M_2)).$$

$$(19.3)$$

برای ساده‌تر شدن محاسبات دو حالت را در نظر می‌گیریم. حالتی که در آن $d(I_1, M_1) \geq d(M_2, I_n)$ و حالتی که $d(I_1, M_1) < d(M_2, I_n)$. به خاطر مشابهت محاسبات فقط حالت زیر را شرح می‌دهیم.

$$d(I_1, M_1) \geq d(M_2, I_n) \quad (20.3)$$

فرض کنید $d(I_1, M_1) \geq d(M_2, I_n)$. در این صورت تابع هدف ۱۹.۳ به صورت زیر درمی‌آید.

$$\psi'_\rho(i, p; M_1, M_2) = (1 - \rho)d(I_1, M_1) + \rho(d(M_1, I_n) + d(I_1, M_2)). \quad (21.3)$$

روشی که برای محاسبه‌ی مینیم مقدار $\psi'_\rho(i, p; M_1, M_2)$ ارائه خواهیم داد بر این قرار است که ابتدا i و p را ثابت گرفته سپس به ازای هر بازه‌ی M_1 که در شرایط لم ۱۱.۳.۳ صدق می‌کند بازه‌ی M_2 را به گونه‌ای می‌یابیم که $\psi'_\rho(i, p; M_1, M_2)$ مینیمم شود. با فرض $M_2(i, p; M_1) = L^{d(I_1, M_1)}(I_n)$ لم زیر را خواهیم داشت.

لم ۴.۴.۳. [۱۹] برای هر عدد صحیح i و p و هر بازه‌ی M_1 که در شرایط لم ۱۱.۳.۳ صدق می‌کند $M_2(i, p; M_1) = L^{d(I_1, M_1)}(I_n)$ همان بازه‌ی M_2 می‌باشد که به ازای آن $\psi'_\rho(i, p; M_1, M_2)$ مینیمم می‌شود.

برهان. بنابر ۲۱.۳ کفایت برای هر بازه‌ی M_2 که در محدودیت‌های ۱۸.۳ و فرض ۲۰.۳ صدق می‌کند، نشان دهیم $d(I_1, M_2) \geq d(I_1, M_2(i, p; M_1))$. در واقع طبق لم ۳.۳.۳ داریم

$$\begin{aligned} d(I_1, M_2(i, p; M_1)) &= d(I_1, L^{d(I_1, M_1)}(I_n)) \\ &= d(I_1, I_n) - d(L^{d(I_1, M_1)}(I_n), I_n) \\ &= d(I_1, I_n) - d(I_1, M_1) \\ &\leq d(I_1, I_n) - d(M_2, I_n) \\ &\leq d(I_1, M_2). \end{aligned}$$

□

لم فوق بیان می‌کند که اگر M_1 انتخاب شده باشد، بازه‌ی M_2 متناظر آن باید به گونه‌ای انتخاب شود که $M_2(i, p; M_1) = L^{d(I_1, M_1)}(I_n)$. بنابراین می‌توانیم تابع هدف را به صورت زیر ساده کنیم.

$$\begin{aligned} \psi'_\rho(i, p; M_1, M_2) &= (1 - \rho)d(I_1, M_1) + \rho(d(M_1, I_n) + d(I_1, L^{d(I_1, M_1)}(I_n))) \\ &= (1 - \rho)d(I_1, M_1) + \rho(d(M_1, I_n) + d(I_1, I_n) - d(L^{d(I_1, M_1)}(I_n), I_n)) \\ &= (1 - \rho)d(I_1, M_1) + \rho(d(M_1, I_n) + d(I_1, I_n) - d(I_1, M_1)) \\ &= (1 - 2\rho)d(I_1, M_1) + \rho d(M_1, I_n) + \rho d(I_1, I_n). \end{aligned} \quad (22.3)$$

در قدم بعد به تصریح موقعیت M_1 می‌پردازیم. به ازای i و p ثابت بازه‌ی M_1 را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که $\psi'_\rho(i, p; M_1, M_2(i, p; M_1))$ مینیمم شود. قرار می‌دهیم

$$r = \begin{cases} k & \rho \geq 1/3 \\ \max\{k_1, k_2\} & \rho < 1/3 \end{cases}$$

که در آن k ، k_1 و k_2 همان اعدادی هستند که در لم ۱۱.۳.۳ تعریف کردیم. قرار دهید $M_1(i, p) = R^r(I_1)$. لم زیر نشان می‌دهد این بهترین انتخاب برای M_1 است.

لم ۵.۴.۳. [۱۹] برای هر عدد صحیح i و p ،

$$\psi'_\rho(i, p; M_1(i, p), M_2(i, p; M_1(i, p))) \leq \psi'_\rho(i, p; M_1, M_2(i, p; M_1))$$

به ازای هر بازه‌ی M_1 که در شرایط لم ۱۱.۳.۳ صدق می‌کند.

برهان. طبق ۲۲.۳ عبارت زیر را محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned} & \psi'_\rho(i, p; M_1(i, p), M_2(i, p; M_1(i, p))) - \psi'_\rho(i, p; M_1, M_2(i, p; M_1)) \\ &= (1 - 2\rho)(d(I_1, R^r(I_1)) - d(I_1, M_1)) + \rho(d(R^r(I_1), I_n) - d(M_1, I_n)) \\ &= (1 - 2\rho)(r - d(I_1, M_1)) + \rho(d(I_1, I_n) - d(I_1, R^r(I_1)) - d(M_1, I_n)) \\ &= (1 - 3\rho)r - (1 - 2\rho)d(I_1, M_1) - \rho d(M_1, I_n) + \rho d(I_1, I_n) \\ &= (1 - 3\rho)(r - d(I_1, M_1)) - \rho(d(I_1, M_1) + d(M_1, I_n) - d(I_1, I_n)) \\ &\leq (1 - 3\rho)(r - d(I_1, M_1)). \end{aligned}$$

طبق محدودیت ۱۸.۳ می‌بینیم که $k_1 \leq d(I_1, M_1) \leq k$ و $k_2 \leq d(M_2, I_n) \leq k$. با گذاشتن این نتایج کنار ۲۰.۳ داریم $\max\{k_1, k_2\} \leq d(I_1, M_1) \leq k$. حال با در نظر گرفتن تعریفی که برای r ارائه دادیم حکم بدست می‌آید. \square

توجه داشته باشید که k وابسته به i و p نیست. اگر $\rho \geq 1/3$ ، آنگاه $M(i, p) = R^k(I_1)$ یک بازه‌ی ثابت است. لذا لم زیر را خواهیم داشت.

لم ۶.۴.۳. [۱۹] اگر $\rho \geq 1/3$ ، آنگاه $(R^k(I_1), L^k(I_n))$ یک جواب بهینه برای مساله پشتیبان ۲- مرکز برای هر گراف بازه‌ای است، که در آن $k = \lfloor \frac{d(I_1, I_n)}{3} \rfloor$.

برهان. وقتی دو سرویس‌دهنده در بازه‌های متفاوت مستقر شوند $(R^k(I_1), L^k(I_n))$ یک جواب بهینه است. حال طبق لم ۱.۴.۳ کفایت درستی $\lceil \frac{d(I_1, I_n)}{3} \rceil$ را بررسی کنیم.

در واقع با توجه به ۲۲.۳ داریم

$$\begin{aligned} \psi_\rho(i, p; R^k(I_1), L^k(I_n)) &= (1 - 2\rho)d(I_1, R^k(I_1)) + \rho d(R^k(I_1), I_n) + \rho d(I_1, I_n) \\ &= (1 - 2\rho)k + \rho(d(I_1, I_n) - k) + \rho d(I_1, I_n) \\ &= (1 + \rho)(d(I_1, I_n) - k) - (1 - \rho)(d(I_1, I_n) - 2k). \end{aligned}$$

لذا با توجه به این که $k = \lfloor \frac{d(I_1, I_n)}{4} \rfloor$ ، به دست می‌آوریم

$$\psi'_\rho(i, p; (R^k(I_1), L^k(I_n))) \leq (1 + \rho) \lfloor \frac{d(I_1, I_n)}{4} \rfloor.$$

□

بنابر لم ۴.۴.۳ و لم ۵.۴.۳، برای هر i و p ثابت می‌توانیم یک زوج از بازه‌ها را پیدا کنیم به گونه‌ای که ψ'_ρ مینیمم شود. سپس تمامی i و p های ممکن را در نظر می‌گیریم. در نهایت الگوریتمی با زمان خطی به دست خواهد آمد.

برای اینکه الگوریتم ۱ در زمان خطی اجرا شود لازم است ابتدا $(I_1, R^i(I_1), L^i(I_n), I_L(i, p), I_R(i, p))$ و $d(I_1, I_i)$ و $d(I_i, I_n)$ را به ازای $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ و $p \in \{1, 2\}$ در زمان خطی محاسبه کنیم.

لم ۷.۴.۳ [۱۹] بعد از انجام محاسبات اولیه در زمان $O(n)$ ، برای هر $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ و $p \in \{1, 2\}$ ، $(I_1, R^i(I_1), L^i(I_n), I_L(i, p), I_R(i, p))$ و $d(I_1, I_i)$ و $d(I_i, I_n)$ در زمان ثابت قابل دسترسی هستند.

برهان. طبق لم ۷.۲.۳ بازه‌های $(I_1, R^i(I_1), L^i(I_n), d(I_1, I_i))$ در زمان $O(n)$ قابل دستیابی هستند. در قدم بعد باید $I_R(i, p)$ را برای هر i محاسبه کرد. برای هر i که $i < j$ داریم $b_{I_R(i, p)} \leq b_{I_R(j, p)}$ چون $I_R(j, p) \in S_2(j, p) \subseteq S_2(i, p)$ بواسطه این که $b_i < b_j$. حال طبق تعریف $I_R(i, p)$ با بررسی همه‌ی بازه‌های S از I_n تا I_1 (طبق مرتب‌سازی براساس نقاط انتهایی راست)، می‌توانیم $I_R(i, p)$ را به ازای همه‌ی i ها در زمان $O(n)$ محاسبه کنیم. به صورت مشابه برای $i < j$ همچنین داریم $a_{I_L(i, p)} \leq a_{I_L(j, p)}$ و $I_L(i, p) \in S_1(i, p) \subseteq S_1(j, p)$ و هم‌چنان که $a_{I_L(i, p)} \leq a_{I_L(j, p)}$. حال با توجه به تعریف $I_L(i, p)$ با بررسی همه‌ی بازه‌های S از I_n تا I_1 (طبق مرتب‌سازی نقاط انتهایی چپ) می‌توان $I_L(i, p)$ را در زمان $O(n)$ محاسبه کرد.

□

لذا قضیه‌ی زیر را داریم.

قضیه ۸.۴.۳ [۱۹] الگوریتم ۱ می‌تواند یک جواب بهینه مسأله پشتیبان ۲-مرکز روی S را صحیح و در زمان $O(n)$ محاسبه کند.

در الگوریتم پشتیبان ۲-مرکز برای گراف بازه‌ای ورودی‌ها احتمال شکست $1 > \rho \geq 0$ ، و مدل بازه‌ای S است. مقدار اولیه برای مینیمم مقدار تابع هدف (opt) را طبق لم ۱.۴.۳ برابر $(1 + \rho) \lfloor \frac{d(I_1, I_n)}{4} \rfloor$ و جواب بهینه مسأله را برابر $(M_1^*, M_2^*) = (R^k(I_1), R^k(I_n))$ قرار می‌دهیم. در قدم بعد از بین n بازه‌ی موجود در S دنبال زوج بازه‌ای می‌گردیم که در محدودیت‌های ۱۸.۳ صدق کنند و مقدار تابع هدف را از مقدار جاری (opt) کاهش دهند. به این ترتیب که به ازای هر i و p قرار می‌دهیم:

$$k_1 = \lfloor \frac{d(I_1, I_L(i, p))}{4} \rfloor, k_2 = \lfloor \frac{d(I_R(i, p), I_n)}{4} \rfloor, l = \max\{k_1, k_2\}$$

همان‌طور که در اثبات لم ۵.۴.۳ نیز بیان کردیم اگر i و p جاری بخواهند مشخص کننده بازه‌های جواب بهینه مسأله باشند، باید در محدودیت‌های ۱۸.۳ صدق کنند که در این صورت باید داشته باشیم

الگوریتم ۱ پشتیبان ۲-مرکز روی گراف بازه‌ای

Input: $0 \leq \rho < 1$ و احتمال شکست $S = \{I_1, \dots, I_n\}$ از بازه‌ها

Output: یک جواب بهینه مساله پشتیبان ۲-مرکز

1: $k = \lfloor \frac{d(I_1, I_n)}{2} \rfloor, opt = (1 + \rho) \lceil \frac{d(I_1, I_n)}{2} \rceil, (M_1^*, M_2^*) = (R^k(I_1), R^k(I_1))$ قرار دهید

2: **for** $p=1, 2$ **do**

3: **for** $i=1, \dots, n$ **do**

4: $k_1 = \lceil \frac{d(I_1, I_L(i, p))}{2} \rceil, k_2 = \lceil \frac{d(I_R(i, p), I_n)}{2} \rceil, l = \max\{k_1, k_2\}$ قرار دهید

5: **if** $l \leq k$ **then**

6: اگر $\rho \leq \frac{1}{3}$; $r = l$ در غیر این صورت $r = k$ و $\psi_{min} = \psi'_\rho(i, p; R^r(I_1), L^r(I_n))$

7: **if** $opt > \psi_{min}$ **then**

8: قرار دهید $opt = \psi_{min}, M_1^* = R^r(I_1), M_2^* = L^r(I_n)$

9: **end if**

10: **end if**

11: **end for**

12: **end for**

13: بازه‌های I_1 تا I_n را معکوس کرده و مراحل ۲ تا ۱۲ را تکرار کنید

14: **return** $opt, (M_1^*, M_2^*)$.

جدول ۱.۳: مقادیر متغیرهای الگوریتم ۱ به ازای i و p های مختلف

i, p	$S_1(i, p)$	$S_2(i, p)$	$I_L(i, p)$	$I_R(i, p)$	k_1	k_2	r	ψ_{min}	opt
(۱, ۱)	$\{I_1\}$	$\{I_2, \dots, I_9\}$	I_1	I_2	۰	۲	۲	۳	۱۵/۴
(۲, ۱)	$\{I_1, I_2\}$	$\{I_3, \dots, I_9\}$	I_2	I_3	۱	۲	۲	۳	۳
(۳, ۱)	$\{I_1, I_2, I_3\}$	$\{I_4, \dots, I_9\}$	I_3	I_4	۱	۲	۲	۳	۳
(۴, ۱)	$\{I_1, \dots, I_4\}$	$\{I_5, \dots, I_9\}$	I_4	I_5	۲	۲	۲	۳	۳

$k_1 \leq k$ و $k_2 \leq k$ لذا باید داشته باشیم $l \leq k$. پس در صورتی که $l \leq k$ طبق لم ۶.۴.۳ اگر $\rho \leq 1/3$ ، آن‌گاه قرار می‌دهیم $r = l$ در غیر این صورت قرار می‌دهیم $r = k$.

حال با مشخص شدن مقدار r مقدار تابع هدف به ازای i و p جاری (یعنی $(\psi'_\rho(i, p; R^r(I_1), L^r(I_n)))$ را محاسبه کرده در ψ_{min} ذخیره می‌کنیم. حال مقدار ψ_{min} را با مقدار opt مقایسه کرده در صورتی که به سمت مینیمم رفته باشیم یعنی $opt > \psi_{min}$ ، مقدار ψ_{min} را جایگزین opt می‌کنیم و لذا بازه‌های (M_1^*, M_2^*) را نیز باید به $(M_1^* = R^r(I_1), M_2^* = L^r(I_n))$ تغییر دهیم. بعد از اجرای این روند برای هر دو حالت $p = 1, 2$ و $i = 1, 2, \dots, n$ جواب بهینه مساله پشتیبان ۲-مرکز روی گراف بازه‌ای با مدل بازه‌ای S برابر دو بازه‌ی (M_1^*, M_2^*) و مقدار بهینه تابع هدف برابر opt خواهد شد. به منظور روشن ساختن الگوریتم پشتیبان ۲-مرکز گراف بازه‌ای به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۹.۴.۳. مدل بازه‌ای ارائه شده در شکل ۳.۳ را در نظر می‌گیریم. جواب مساله پشتیبان ۲-مرکز به

ازای $\rho = 0.25$ با استفاده از الگوریتم پشتیبان ۲-مرکز گراف بازه‌ای برابر (I_5, I_6) و مقدار بهینه تابع هدف برابر ۳ است، که به ازای $i = 1$ و $p = 1$ به دست می‌آید و در تکرارهای بعد تغییری نمی‌یابد. جدول ۱.۳ مقادیر مختلف متغیرها را در هر مرحله نشان می‌دهد.

مراجع

- [1] I. Averbakh, and O. Berman. "Minimax regret p-center location on a network with demand uncertainty." *Location Science* 5.4, (1997), 247-254.
- [2] B. Ben-Moshe, B. Bhattacharya, and Q. Shi. "An optimal algorithm for the continuous/discrete weighted 2-center problem in trees." *LATIN 2006: Theoretical Informatics*. Springer Berlin Heidelberg, (2006), 166-177.
- [3] B. Ben-Moshe, B. Bhattacharya, Q. Shi, and A. Tamir, "Efficient algorithms for center problems in cactus networks." *Theoretical Computer Science* 378.3 (2007), 237-252.
- [4] R. R. Benkoczi. "Cardinality constrained facility location problems in trees." Diss. Simon Fraser University, 2004.
- [5] S. Bespamyatnikh, B. Bhattacharya, M. Keil, D. Kirkpatrick, and M. Segal. "Efficient algorithms for centers and medians in interval and circular-arc graphs." *Networks* 39.3 (2002), 144-152.
- [6] B. Bhattacharya, T. Kameda, and Z. Song. "Minimax regret 1-center on a path/cycle/tree." *Proc. 6th Int'l Conf. on Advanced Engineering Computing and Applications in Sciences (ADVCOMP)*. 2012.
- [7] B. Bhattacharya, M. De, T. Kameda, S. Roy, V. Sokol, and Z. Song. "Back-up 2-center on a path/tree/cycle/unicycle." *Computing and Combinatorics*. Springer International Publishing, (2014), 417-428.
- [8] M.L. Brandeau, S.S. Chiu, "An overview of representative problems in location research." *Management Science* 35 (1989), 645-674.
- [9] D. Z. Chen, D. T. Lee, R. Sridhar, and Chandra N. Sekharan. "Solving the all-pair shortest path query problem on interval and circular-arc graphs." *Networks* 31.4 (1998), 249-258.
- [10] TC. E. Cheng, L. Kang, and C. T. Ng. "An improved algorithm for the p-center problem on interval graphs with unit lengths." *Computers and operations research* 34.8 (2007), 2215-2222.

- [11] W. Christaller, Central places in southern Germany. Prentice-Hall, (1966).
- [12] R. Diestel, "Graph theory", Graduate texts in mathematics, Springer, (1997).
- [13] G. N. Frederickson. "Parametric search and locating supply centers in trees." *Algorithms and Data Structures*. Springer Berlin Heidelberg, 1991. 299-319.
- [14] G. N. Frederickson, D. B. Johnson. "Finding kth paths and p-centers by generating and searching good data structures." *Journal of Algorithms* 4.1 (1983), 61-80.
- [15] Y. Gurevich, L. Stockmeyer, and U. Vishkin. "Solving NP-hard problems on graphs that are almost trees and an application to facility location problems." *Journal of the ACM (JACM)* 31.3 (1984), 459-473.
- [16] S. L. Hakimi, "Optimum locations of switching centers and the absolute centers and medians of a graph." *Operations research* 12.3 (1964): 450-459.
- [17] P. Hall, "Von Thünen's Isolated State: An English Edition of Der Isolierte Staat by Johann Heinrich Von Thünen." Trans-lated by CM Wartenberg. London: PergamonPress (1966).
- [18] J. Hershberger. "Finding the upper envelope of n line segments in $O(n \log n)$ time." *Information Processing Letters* 33.4 (1989): 169-174.
- [19] Y. Hong, L. Kang. "Backup 2-center on interval graphs." *Theoretical Computer Science* 445 (2012), 25-35.
- [20] E. M. Hoover, "The location of economic activity." McGraw-Hill Book Co. (1948).
- [21] O. Kariv, S. L. Hakimi. "An algorithmic approach to network location problems. II: The p-medians." *Journal on Applied Mathematics* 37.3 (1979), 539-560.
- [22] Y. Lan, Y. Wang, and H. Suzuki. "A linear-time algorithm for solving the center problem on weighted cactus graphs." *Information Processing Letters* 71.5 (1999), 205-212.
- [23] W. Launhardt, "Das Wesen des Geldes und die Währungsfrage". W. Engelmann, 1885.
- [24] I. Louis, "A fully dynamic graph algorithm for recognizing interval graphs", *Algorithmica* 58 (2010) 637-678.
- [25] N. Megiddo, and A. Tamir. "New results on the complexity of p-centre problems." *SIAM Journal on Computing* 12.4 (1983), 751-758.
- [26] S. Olariu. "A simple linear-time algorithm for computing the center of an interval graph." *International Journal of Computer Mathematics* 34.3-4 (1990), 121-128.

-
- [27] L. V. Snyder. "Facility location under uncertainty: a review." *IIE Transactions* 38.7 (2006), 547-564.
- [28] L. V. Snyder, and M. S. Daskin. "Stochastic p-robust location problems." *IIE Transactions* 38.11 (2006), 971-985.
- [29] HL. Wang. "An optimal algorithm for the weighted backup 2-center problem on a tree." *Algorithmica* (2015), 1-14.
- [30] HL. Wang, B. Y. Wu, and KM. Chao. "A linear time algorithm for the backup 2-center problem on a tree." *24th Workshop on Combinatorial Mathematics and Computation Theory*. 2007.
- [31] HL. Wang, B. Y. Wu, and KM. Chao. "The backup 2-center and backup 2-median problems on trees." *Networks* 53.1 (2009), 39-49.
- [32] A. Weber, "Über den Standort der Industrien, translated by CJ Friedrich (1929)." Alfred Weber's Theory of the Location of Industries (1909).
- [33] D. B. West, "Introduction to graph theory ", Prentice Hall, (1996)
- [34] B. Zmazel, and J. Žerovnik. "The obnoxious center problem on weighted cactus graphs." *Discrete applied mathematics* 136.2 (2004), 377-386.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Failure probability	احتمال شکست
Intersection	اشتراک
Backup	پشتیبان
Envelope	پوش
Upper envelope	پوش بالایی
Time complexity	پیچیدگی زمانی
Preprocess	پیش‌پردازش
Successor function	تابع جانشینی
Objective function	تابع هدف
Facilities	تسهیلات
Optimal solution	جواب بهینه
Binary tree	درخت دودویی
Cycle	دور
Server	سرویس‌دهنده
Distance	فاصله
Interval graph	گراف بازه‌ای
Unicyclic graph	گراف تک‌دوری
Balanced	متوازن
Distinct	متمایز
Adjucent	مجاور
Demand set	مجموعه تقاضا
Supply set	مجموعه عرضه
Disjoint	مجزا
Order	مرتب
Path	مسیر

Client	مشتری
Facility location	مکان‌یابی تسهیلات
Median	میانه
Location theory	نظریه مکان‌یابی
Connected	همبند
Monotonicity	یک‌نوایی

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Adjucent	مجاور
Backup	پشتیبان
Binary tree	درخت دودویی
Balanced	متوازن
Client	مشتری
Connected	همبند
Cycle	دور
Demand set	مجموعه تقاضا
Disjoint	مجزا
Distance	فاصله
Distinct	متمایز
Envelope	پوش
Facilities	تسهیلات
Facility location	مکان‌یابی تسهیلات
Failure probability	احتمال شکست
Intersection	اشتراک
Interval graph	گراف بازه‌ای
Location theory	نظریه مکان‌یابی
Median	میانه
Monotonicity	یک‌نوایی
Objective function	تابع هدف
Optimal solution	جواب بهینه
Order	مرتب‌ه
Path	مسیر
Preprocess	پیش‌پردازش

Server	سرویس‌دهنده
Successor function	تابع جانشینی
Supply set	مجموعه عرضه
Time complexity	پیچیدگی زمانی
Unicyclic graph	گراف تک‌دوری
Upper envelope	پوش بالایی

نمایه

آ	دسته‌بندی مسائل مکان‌یابی، ۳	احتمال شکست، ۱۲
ر	افراز مدل بازه‌ای S ، ۳۴	الگوریتم
س	پشتیبان ۲-مرکز مسیر، ۱۷	پشتیبان ۲-مرکز درخت، ۱۹
ک	سطح بازه I_i ، ۲۹	پشتیبان ۲-مرکز دوری، ۲۳
گ	کوتاه‌ترین مسیر، ۲۹	پشتیبان ۲-مرکز گراف بازه‌ای، ۴۸
پ	گراف، ۷	پوش بالایی، ۸، ۱۴
وزن‌دار، ۷	پیوند، ۲۳	پیوند والد، ۲۴
بازه‌ای، ۸	ت	تابع
تک‌دوری، ۷	جانشینی، ۲۸	جانشینی چپ، ۲۹
دور، ۷	جانشینی راست، ۲۹	فاصله، ۴
مسیر، ۷	هدف مسأله پشتیبان ۲-مرکز، ۱۳	هزینه، ۱۴
م	د	درجه رأس، ۷
مرکز گراف، ۸	درخت، ۸	ریشه‌دار شده، ۸
مجموعه تقاضا، ۵	دودویی، ۸	دودویی متوازن، ۸
مجموعه عرضه، ۵	مکان‌یابی، ۲	p -مرکز، ۵
محیط دور، ۱۹	p -مرکز رأسی، ۵	p -مرکز محض، ۵
مسأله	p -میان، ۵	

پشتیان، ۶

پشتیان ۲-مرکز، ۱۲

پشتیان ۲-مرکز وزن دار، ۱۳

ن

نقطه انتهایی بازه، ۲۸

نقطه مقابل، ۱۹

نظریه‌های مکان‌یابی عمومی، ۳

ه

هزینه مجموعه X ، ۱۴

همسایه یک رأس، ۷

Aabstract

In practice, uncertainties can play an influential role. The reliability model deals with the situation where servers may sometimes fail, and the clients originally allocated to these servers have to request service from functioning servers. Recently, Wang, Wu and Chao, proposed a new reliability-based model, in which each server may fail with a given probability. Once a server fails, the other server will take full responsibility for the services. Under the assumption that the servers do not fail simultaneously, they consider the backup 2-center problem on a tree, which asks for deploying two servers at the vertices such that the expected value of the longest distance from any vertex to its closest functioning server is minimum. We apply the reliability-based backup 2-center model proposed by Wang, Wu and Chao, to interval graphs and present an $O(n)$ time algorithm. We show that the weighted back-up 2-center on a path (resp. tree, cycle, unicyclic) graph can be computed in $O(n)$ (resp. $O(n \log n)$, $O(n^2)$, $O(n^2 \log n)$) time, where n is the number of vertices, and the centers need not be at vertices.

Keywords: Backup 2-center, Interval graph, Path, Tree, Cycle



Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

Backup 2-Center problem on Some Graphs

Mahieh Pagheh

Supervisor

Dr. N. Jafari Rad

Advisor

Dr. J. Fathali

June 2016