بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی محض

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

احاطه‌گری در برخی از گراف‌های وابسته به حلقه‌ها

حسن گرگانی زاده

استاد راهنما

دکتر مهدی‌رضا خورسندی

استاد مشاور

دکتر نادر جعفری‌راد

مهر ۹۵

تقدیم به خانواده‌ام

سپاس گزاری

در آغاز برخود وظیفه می‌دانم از استاد راهنمایم جناب آقای دکتر مهدی‌رضا خورسندی کمال تشکر و قدردانی را داشته باشم که راهنمایی‌های بی‌دریغ ایشان، بی‌شک یاریگر بنده در به انجام رسیدن این اثر بود و از آقای دکتر نادر جعفری‌راد، که زحمت مشاوره را بر عهده گرفتند، سپاس گزارم. همچنین از اساتید محترم، آقای دکتر ابراهیم هاشمی و آقای دکتر سید حیدر جعفری که زحمت داوری پایان‌نامه را انجام داده‌اند کمال تشکر را دارم.

حسن گرگانی زاده

مهر ۹۵

تعهدنامه

اینجانب **حسن گرگانی زاده** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی محض** **دانشکده علوم ریاضی** دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **احاطه‌گری در برخی از گراف‌های وابسته به حلقه‌ها** ، تحت راهنمایی **دکتر مهدی‌رضا خورسندی** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تاکنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام " دانشگاه صنعتی شاهرود " یا " Shahrood University of Technology " به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

حسن گرگانی زاده
مهر ۹۵

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

فرض کنید R حلقه‌ای یکدار ($0 \neq 1$) و $Z(R)$ و $U(R)$ به ترتیب مجموعه‌ی تمام مقسوم‌علیه‌های صفر و عناصر یکه‌ی حلقه‌ی R باشند. در این صورت گراف‌های $\Gamma(R)$، $\mathbb{AG}(R)$ و $G(R)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$\Gamma(R)$ گراف وابسته به مقسوم‌علیه‌های صفر حلقه‌ی R می‌باشد که مجموعه رئوس آن $Z(R) \setminus \{0\}$ می‌باشد و دو رأس متمایز x و y، مجاورند اگر و فقط اگر $xy = 0$ یا $yx = 0$.

$\mathbb{AG}(R)$ گراف وابسته به ایده‌آل‌های پوچ‌ساز حلقه‌ی جابه‌جایی R است که رئوس آن، ایده‌آل‌های حلقه‌ی R که دارای پوچ‌ساز ناصفر می‌باشند، هستند و دو رأس متمایزی چون I_1 و I_2 باهم مجاورند اگر و فقط اگر $I_1 I_2 = \{0\}$.

$G(R)$ گراف یکانی حلقه‌ی R می‌باشد که رئوس آن، تمامی عناصر حلقه‌ی R می‌باشند و دو رأس متمایز a و b با هم مجاورند اگر و فقط اگر $a + b \in U(R)$.

در این پایان‌نامه، به تعیین عدد احاطه‌گری و مشتقات آن در گراف‌های مذکور می‌پردازیم.

کلمات کلیدی: گراف مقسوم‌علیه صفر، گراف ایده‌آل پوچ‌ساز، گراف یکانی، عدد احاطه‌گری، عدد احاطه‌گری کلی، عدد احاطه‌گری نیم‌کلی.

فهرست مطالب

پیش‌گفتار

ترکیبیات جبری، شاخه‌ای از ریاضیات است که مفاهیم انتزاعی و محض جبر را در زمینه‌های مختلف ترکیبیات و گراف، به‌کار می‌گیرد. وابسته‌سازی یک گراف به یک حلقه، موضوعی است که توجه محققان زیادی را به خود جلب کرده است. در واقع مطالعه روی این موضوع، رابطه‌ی بین نظریه‌ی جبر و نظریه‌ی گراف‌ها و کاربرد یکی بر دیگری را نشان می‌دهد.

ایده‌ی وابسته کردن گراف‌ها به حلقه‌ها، برای نخستین بار به مقاله‌ی بک [۱] [۶] در سال ۱۹۹۸ باز می‌گردد. بک تصویری از یک گراف وابسته به مقسوم علیه صفر حلقه‌های جابه‌جایی و یکدار R ارائه نمود که در آن تمامی عناصر حلقه‌ی R رئوس گراف مورد نظر است و دو رأس x و y از گراف فوق، با هم مجاورند اگر و فقط اگر $xy = ۰$. اما وی، مطالعه‌ی خود را در زمینه‌ی رنگ آمیزی گراف وابسته به حلقه‌ها، ادامه داد. این تعریف توسط اندرسون [۲] و لوینگستون [۳] در [۳] بهبود یافت. آن‌ها مجموعه رئوس گراف را به مقسوعلیه‌های صفر ناصفر حلقه محدود کردند و نشان دادند که این گراف، گرافی همبند با قطر حداکثر سه است. در [۲]، اندرسون، فریزیر [۴]، لئوی [۵] و لیوینگستون، مطالعه‌ی این گراف را ادامه دادند.

تاکنون گراف‌های دیگری نیز به حلقه‌ها نسبت داده شده و خواص آن‌ها مورد مطالعه قرار گرفته است. در ذیل، گراف‌هایی که در این پایان‌نامه مورد توجه واقع شده است را تعریف می‌کنیم.

فرض کنید R حلقه‌ای یکدار $(۰ \neq ۱)$ و $Z(R)$ و $U(R)$، به ترتیب، مجموعه‌ی تمام عناصر مقسوم‌علیه صفر و مجموعه‌ی تمام عناصر یکال حلقه‌ی R باشند. در این صورت گراف‌های $\Gamma(R)$، $\mathbb{AG}(R)$ و $G(R)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$\Gamma(R)$ گراف وابسته به مقسوم‌علیه صفر حلقه‌ی R می‌باشد که مجموعه رئوس آن $Z(R) \setminus \{۰\}$ می‌باشد و دو رأس متمایز x و y، مجاورند اگر و فقط اگر $xy = ۰$ یا $yx = ۰$.

$\mathbb{AG}(R)$ گراف وابسته به ایده‌آل‌های پوچ‌ساز حلقه‌ی جابه‌جایی R است که رئوس آن، ایده‌آل‌های حلقه‌ی R که دارای پوچ‌ساز ناصفر می‌باشند، هستند و دو رأس متمایزی چون $I_۱$ و $I_۲$ باهم مجاورند اگر و فقط اگر $I_۱ I_۲ = \{۰\}$.

[۱] Beck
[۲] Anderson
[۳] Livingston
[۴] Frazier
[۵] Luvy

$G(R)$ گراف یکانی حلقه‌ی R می‌باشد که رئوس آن، تمامی عناصر حلقه‌ی R می‌باشند و دو رأس متمایز a و b با هم مجاورند اگر و فقط اگر $a+b \in U(R)$.

این پایان‌نامه در چهار فصل تنظیم شده‌است. در فصل اول، به ارائه‌ی قضایا و تعاریف مقدماتی در گراف‌ها و حلقه‌ها می‌پردازیم. در فصل دوم، احاطه‌گری در گراف‌های وابسته به مقسوم‌علیه صفر حلقه‌ها را مطالعه می‌کنیم. در فصل سوم، به محاسبه‌ی عدد احاطه‌گری و مشتقات آن در گراف ایده‌آل‌های پوچ‌ساز حلقه‌های جابه‌جایی پرداخته و در فصل آخر، عدد احاطه‌گری و احاطه‌گری کلی را در گراف‌های یکانی وابسته به حلقه‌های جابه‌جایی، تعیین می‌کنیم.

این پایان‌نامه، بر اساس مقالات [۱۲]، [۱۳]، [۱۵]، [۱۶] و [۱۷] تهیه شده است.

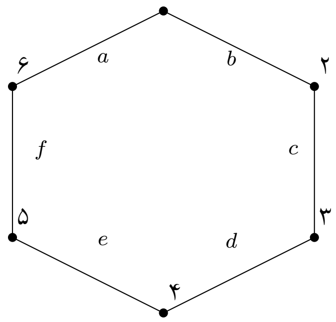
فصل ۱

قضایا و تعاریف مقدماتی

۱.۱ مفاهیم اولیه گراف‌ها

در این بخش، به ارائه‌ی تعاریف مقدماتی از گراف‌ها، خواهیم پرداخت.

تعریف ۱.۱.۱. منظور از یک گراف، سه تایی $(V(G), E(G), \psi_G)$ است که $V(G)$ مجموعه‌ی ناتهی از رئوس و $E(G)$ مجموعه‌ای از یال‌ها و ψ_G تابع وقوع است که به هر یال G یک جفت نامرتب و نه لزوماً متمایز از $V(G)$ را متناظر می‌کند. اگر e یک یال و u و v رأس‌هایی باشند که $\psi_G(e) = uv$، آن‌گاه گوییم e، u را به v وصل می‌کند و u و v، مجاورند. رأس‌های u و v را دو انتهای e می‌نامیم. از این پس گراف را به صورت $G = (V, E)$ نشان می‌دهیم و برای سادگی، به‌جای استفاده از $G = (V, E)$، از لفظ G به‌عنوان یک گراف استفاده می‌کنیم. به عنوان مثال در شکل زیر، گراف $G = (V, E)$ را با مجموعه رئوس $V = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$ و مجموعه یال‌های $E = \{a, b, c, d, e, f\}$ مشاهده می‌کنیم.



تعریف ۲.۱.۱. رأسی که روی هیچ یالی واقع نباشد را رأس تنها [1] می‌نامیم.

تعریف ۳.۱.۱. یک گشت در گراف G، دنباله‌ی ناتهی $w = v_۰e_۱v_۱e_۲\ldots e_kv_k$ است، که جمله‌های آن، متناوباً رأس‌ها و یال‌ها هستند به قسمی که برای هر $۱ \leq i \leq k$، دو انتهای e_i، $v_{i-۱}$ و v_i هستند.

[1] Isolated Vertex

رأس‌های v_0 و v_k را به ترتیب مبدأ و انتهای w و $v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}$ را رأس‌های داخلی‌اش می‌نامند و عدد صحیح k طول w است.

تذکر ۴.۱.۱. *در تعریف ۳.۱.۱، اگر یال‌های $e_1, e_2, \ldots, e_k$، مجزا باشند، w را گذر می‌نامند و اگر، علاوه براین، $v_0, v_1, \ldots, v_k$ مجزا باشند، w را مسیر می‌نامیم.*

تعریف ۵.۱.۱. گذر بسته‌ای که رأس‌های داخلی و مبدأ آن مجزا باشد را دور می‌نامیم.

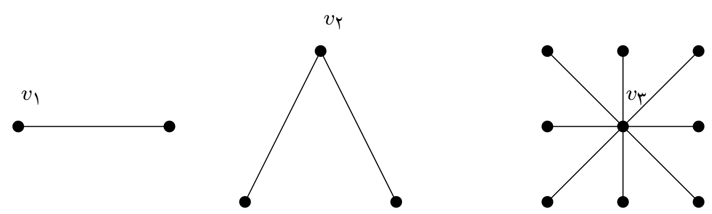
تعریف ۶.۱.۱. دوری به‌طول سه در گراف G را مثلث [۲] گوییم.

تعریف ۷.۱.۱. گراف G را همبند نامیم هرگاه بین دو رأس دلخواه u و v از G مسیری در G موجود باشد و در غیر این صورت G را ناهمبند می‌نامیم.

تعریف ۸.۱.۱. فرض کنید G یک گراف و v رأس دلخواهی از آن باشد. در این صورت تعداد رئوس مجاور با v (نه لزوماً متمایز) را درجه‌ی رأس v می‌نامیم و با $\deg(v)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۹.۱.۱. گراف G را منتظم [۳] نامیم هرگاه درجه‌های تمام رئوس آن با هم برابر باشند و اگر درجه‌ی تمامی رئوس برابر n باشد، آنگاه G را گراف $n-$ منتظم می‌گوییم.

تعریف ۱۰.۱.۱. فرض کنید G گرافی با $n \geq 1$ رأس باشد. در این صورت G را گراف ستاره [۴] با مرکز v نامیم هرگاه $\deg(v) = n - 1$ و درجه‌ی سایر رئوس برابر یک باشد. به عنوان مثال، در شکل زیر، چند نمونه از گراف‌های ستاره با مرکز v_1، v_2 و v_3 را مشاهده می‌کنیم.



تعریف ۱۱.۱.۱. یالی را که ابتدا و انتهای یک رأس را بر هم منطبق می‌کند، طوقه [۵] می‌نامیم و اگر در گرافی، بین دو رأس a و b، بیش از دو یال وجود داشته باشد آن یال‌ها را چندگانه می‌نامیم.

تعریف ۱۲.۱.۱. گراف G را ساده می‌نامیم هرگاه فاقد طوقه و یال چندگانه باشد.

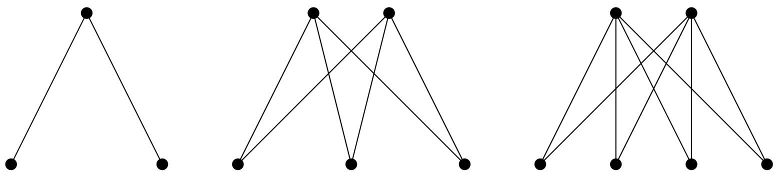
تعریف ۱۳.۱.۱. گراف ساده G با n رأس را که با K_n نشان می‌دهیم، گراف کامل گوییم هرگاه تمامی رئوس آن با هم مجاور باشند.

[۲] Tringle
[۳] Regular Graph
[۴] Star Graph
[۵] Loop

تعریف ۱۴.۱.۱. فرض کنید G گرافی با مجموعه رئوس V باشد و $S \subseteq V$. در این صورت S را یک مجموعه‌ی مستقل می‌نامیم هرگاه هیچ دو رأسی از S در G مجاور نباشد.

تعریف ۱۵.۱.۱. گراف $G = (V, E)$ را دو بخشی می‌نامیم، هرگاه مجموعه‌ی V را بتوان به دو زیر مجموعه‌ی V_1 و V_2 چنان افراز کرد که V_1 و V_2 مجموعه‌هایی مستقل باشند.

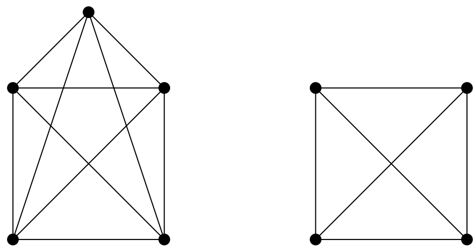
قرارداد ۱۶.۱.۱. *در تعریف ۱۵.۱.۱، اگر V_1 و V_2 مجموعه‌هایی به ترتیب m و n عضوی باشند و هر رأس از V_1 به تمامی رئوس از V_2 مجاور باشد، آن‌گاه G را گراف دو بخشی کامل می‌نامیم و با $K_{m,n}$ نشان می‌دهیم. به عنوان مثال، در شکل زیر چند نمونه از گراف دو بخشی کامل را مشاهده می‌کنیم.*



$K_{1,2}$ $K_{2,3}$ $K_{2,4}$

تعریف ۱۷.۱.۱. گراف G را در نظر بگیرید. در این صورت H زیر گرافی [۶] از G است اگر وفقط اگر $V(H) \subseteq V(G)$ و $E(H) \subseteq E(G)$ و ψ_H تحدید ψ_G به $E(H)$ باشد.

تعریف ۱۸.۱.۱. فرض کنید G گرافی با مجموعه رئوس V باشد و $S \subseteq V$. در این صورت زیر گراف القایی [۷] توسط S را که با $G[S]$ نشان می‌دهیم، زیر گرافی از G است که مجموعه رئوس آن S است و شامل یال‌هایی از G است که هر دو رأس آن‌ها به S متعلق است. برای نمونه در شکل زیر، G_1 زیر گراف القایی G است.



G G_1

تعریف ۱۹.۱.۱. گراف‌های G_1 و G_2 را یکریخت نامیم و می‌نویسیم $G_1 \cong G_2$، هرگاه توابع دوسویی $\theta : V(G) \longrightarrow V(H)$ و $\phi : E(G) \longrightarrow E(H)$ موجود باشند به‌طوری که $\psi_{G(e)} = uv$ اگر و فقط اگر $\psi_H(\phi(e)) = \theta(u)\theta(v)$. چنین جفت (θ, ϕ) از نگاشت‌ها را یک یکریختی بین G و H می‌نامیم.

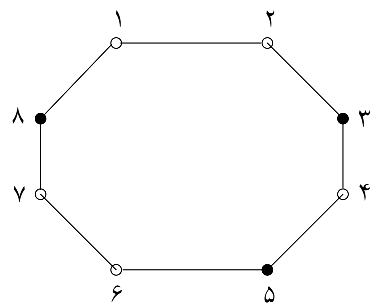
[۶] Subgraph
[۷] Induced Subgraph

تعریف ۲۰.۱.۱. فرض کنید G یک گراف و v رأسی از آن باشد. در این صورت همسایگی v را که با $N(v)$ نشان می‌دهیم عبارت است از مجموعه‌ی تمام رئوسی که با v مجاور هستند. به عبارت دیگر

$$N(v) := \{u|uv \in E(G)\}$$

و همچنین $N[v] := N(v) \cup \{v\}$.

تعریف ۲۱.۱.۱. زیر مجموعه‌ی S از رئوس گراف $G = (V, E)$ را یک مجموعه‌ی احاطه‌گر [۸] می‌نامیم هرگاه برای هر $v \in V \setminus S$، $|N(v) \cap S| \geq ۱$.
اندازه کوچکترین مجموعه‌ی احاطه‌گر در گراف G را عدد احاطه‌گر G نامیده و با $\gamma(G)$ نشان می‌دهیم.
به عنوان مثال، در شکل زیر $S = \{۳, ۵, ۸\}$ یک مجموعه‌ی احاطه‌گر برای گراف $G_۱$ است و می‌توان دید که $\gamma(G_۱) = ۳$.



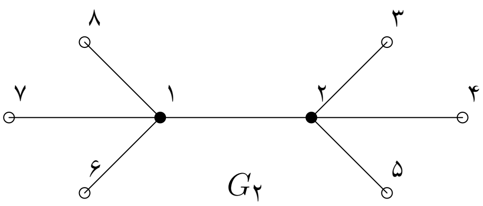
$G_۱$

تعریف ۲۲.۱.۱. زیر مجموعه‌ی S از رئوس گراف بدون رأس تنهای G را یک مجموعه‌ی احاطه‌گر کلی [۹] می‌نامیم هرگاه

۱. S مجموعه‌ای احاطه‌گر باشد.

۲. هر عنصری مانند $y \in S$، به عنصر متمایزی از S مجاور باشد.

همچنین اندازه کوچکترین مجموعه احاطه‌گر کلی گراف بدون رأس تنهای G را عدد احاطه‌گر کلی می‌نامیم و با $\gamma_t(G)$ نشان می‌دهیم. برای نمونه، در شکل زیر، $T = \{۱, ۲\}$ مجموعه‌ای احاطه‌گر کلی برای $G_۲$ است و می‌توان دید که $\gamma_t(G_۲) = ۲$.



$G_۲$

[۸] Domiating Set
[۹] Total Domiating Set

گزاره ۲۳.۱.۱. *اگر S مجموعه‌ی احاطه‌گر کلی برای گراف G باشد، آن‌گاه $G[S]$ فاقد رأس تنها است.*

برهان. فرض کنید S مجموعه‌ی احاطه‌گر کلی برای گراف G باشد. در این‌صورت هر عنصر a از S با راسی چون $b \in S$ مجاور است و لذا $ab \in E(G[S])$. بنابراین هر رأس از $G[S]$ به عنصری از مجموعه‌ی S مجاور است و در نتیجه $G[S]$ فاقد رأس تنها است. □

خواننده می‌تواند برای اطلاعات بیشتر در نظریه‌ی گراف به [۹] مراجعه کند.

۲.۱ قضایا و خواص مقدماتی حلقه‌ها

در این بخش، به قضایا و تعاریف بنیادی از حلقه‌ها اشاره خواهیم کرد که تمامی حلقه‌ها در این پایان‌نامه، یکدار ($1 \neq 0$) فرض می‌شوند.

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید R یک حلقه باشد. در این صورت مجموعه‌ی تمام مقسوم‌علیه‌های صفر R را با $Z(R)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Z(R) := \{x \in R \big| \exists 0 \neq y \in R; xy = 0 \quad \text{یا} \quad yx = 0\}.$$

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی و $\mathfrak{p}$ ایده‌آلی از R باشد. در این صورت $\mathfrak{p}$ را یک ایده‌آل اول گوییم هرگاه

۱. $\mathfrak{p} \neq R$.

۲. برای هر $a, b \in R$، اگر $ab \in \mathfrak{p}$، آن‌گاه $a \in \mathfrak{p}$ یا $b \in \mathfrak{p}$

مجموعه‌ی تمام ایده‌آل‌های اول R را با $Spec(R)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی و $\mathfrak{m}$ ایده‌آلی از R باشد. در این صورت $\mathfrak{m}$ را یک ایده‌آل ماکسیمال گوییم هرگاه

۱. $\mathfrak{m} \neq R$.

۲. اگر J ایده‌آلی از R و $\mathfrak{m} \subseteq J \subseteq R$، آن‌گاه $J = \mathfrak{m}$ یا $J = R$.

مجموعه‌ی تمام ایده‌آل‌های ماکسیمال R را با $\mathrm{Max}(R)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۴.۲.۱. ***(قضیه‌ی اجتناب از ایده‌آل‌های اول)*** [۱۰] *فرض کنید $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \dots, \mathfrak{p}_n$ ایده‌آل‌هایی از حلقه‌ی جابه‌جایی و یکدار R باشند به‌طوری که حداکثر دو تا از آن‌ها اول نباشند و همچنین S زیرگروه جمعی از R باشد که $S \subseteq \cup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i$. در این صورت $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ وجود دارد که $S \subseteq \mathfrak{p}_j$.*

برهان. [۲۳، قضیه‌ی ۶۱.۳] □

تعریف ۵.۲.۱. فرض کنید R یک حلقه باشد. در این صورت ایده‌آل راست(چپ) ناصفر I از R را یک ایده‌آل راست(چپ) مینیمال گوییم، هرگاه شامل هیچ ایده‌آل راست(چپ) غیر صفر نباشد.

[۱۰] Prime Aviodace Theorem

تعریف ۶.۲.۱. فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی و I ایده‌آل سره‌ای از R باشد. ایده‌آل اولی از R مثل $\mathfrak{p}$ که شامل I است را ایده‌آل اول مینیمال I می‌نامیم هرگاه ایده‌آل اولی از R مثل $\mathfrak{q}$ موجود نباشد که $\mathfrak{p} \subsetneqq \mathfrak{q} \subseteq I$. مجموعه‌ی تمام ایده‌آل‌های اول مینیمال I را با $\mathrm{Min}(I)$ نشان می‌دهیم. هر ایده‌آل اول مینیمال $\{0\}$ به ایده‌آل اول مینیمال R معروف است. در واقع، ایده‌آل اولی از R مثل $\mathfrak{p}$ ایده‌آل اول مینیمال R است هرگاه ایده‌آل اولی از R مثل $\mathfrak{q}$ موجود نباشد که $\mathfrak{p} \subsetneqq \mathfrak{q}$. مجموعه‌ی تمام ایده‌آل‌های اول مینیمال R را با $\mathrm{Min}(R)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۷.۲.۱. فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد. در این صورت رادیکال جیکوبسن حلقه‌ی R را که با $J(R)$ نشان می‌دهیم، به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$J(R) := \bigcap_{\mathfrak{m}\in \mathrm{Max}(R)} \mathfrak{m}.$$

تعریف ۸.۲.۱. فرض کنید $A = \{I_\alpha\}_{\alpha\in X}$، مجموعه همه ایده‌آل‌های مینیمال حلقه‌ی R باشد. در این صورت تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\mathrm{Soc}(R) :&= \sum_{\alpha\in X} I_\alpha\\ &= \{\sum_{\alpha\in I} a_\alpha \big| \text{برای هر } \alpha\in I\text{، } a_\alpha\in I \text{ و حداکثر تعداد متناهی از } a_\alpha\text{ها غیر صفر باشند}\}\end{aligned}$$

و اگر R دارای ایده‌آل مینیمال نباشد، $\mathrm{Soc}(R)$ برابر $\{0\}$ تعریف می‌شود.

تعریف ۹.۲.۱. فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی و I ایده‌آلی از R باشد. رادیکال I را که با $\sqrt{I}$ نشان می‌دهیم، به صورت

$$\sqrt{I} := \{r\in R \big| r^n\in I \text{ ،} n \text{ به ازای عدد طبیعی مثل}\}$$

تعریف می‌کنیم. همچنین، $\sqrt{0}$ را با $\mathrm{Nil}(R)$ نمایش می‌دهیم و آن را رادیکال پوچ حلقه‌ی R می‌نامیم. در واقع

$$\mathrm{Nil}(R) := \{r\in R \big| r^n = 0 \text{ ،} n \text{ به ازای عدد طبیعی مثل}\}$$

تعریف می‌شود.

تعریف ۱۰.۲.۱. حلقه‌ی R را کاهشی [۱۱] نامیم هرگاه تنها عنصر پوچ‌توان آن صفر باشد.

قضیه ۱۱.۲.۱. *فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی و I ایده‌آل سره‌ای از R باشد. در این صورت*

$$\sqrt{I} = \bigcap_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Min}(I)} \mathfrak{p}.$$

به‌ویژه

$$\mathrm{Nil}(R) = \bigcap_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Min}(R)} \mathfrak{p}.$$

[۱۱] Reduced Ring

برهان. [۲۵، قضیه‌ی ۵] □

نتیجه ۱.۲.۱۲. *اگر R حلقه‌ی کاهشی باشد، آن‌گاه*

$$\mathrm{Nil}(R)=\bigcap_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Min}(R)}\mathfrak{p}=\{0\}.$$

لم ۱.۲.۱۳. *اگر R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد، آن‌گاه*

$$\bigcup_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Min}(R)}\mathfrak{p}\subseteq Z(R).$$

برهان. بنابر [۱۴، قضیه‌ی ۸۴]، حکم واضح است. □

قضیه ۱.۲.۱۴. *فرض کنید R حلقه‌ای کاهشی باشد. در این صورت* $Z(R)=\bigcup_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Min}(R)}\mathfrak{p}$.

برهان. بنابر لم ۱.۲.۱۳، کافیست نشان دهیم $Z(R)\subseteq\bigcup_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Min}(R)}\mathfrak{p}$. برای این منظور، به برهان خلف فرض کنید $x\in Z(R)\setminus\bigcup_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Min}(R)}\mathfrak{p}$. در این صورت به ازای عنصر ناصفری چون $y\in R$، $xy=0$. از طرفی برای هر $\mathfrak{p}\in \mathrm{Min}(R)$، $x\notin\mathfrak{p}$ و لذا برای هر $\mathfrak{p}\in \mathrm{Min}(R)$، $y\in\mathfrak{p}$. بنابراین $y\in\bigcap_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Min}(R)}\mathfrak{p}=\{0\}$ که تناقض است. □

تعریف ۱.۲.۱۵. فرض کنید R حلقه‌ی جابه‌جایی و x عنصری از R باشد. در این صورت $\mathrm{Ann}(x)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{Ann}(x)=\{r\in R|rx=0\}$$

لم ۱.۲.۱۶. *فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی و x عنصری از R باشد. در این صورت $\mathrm{Ann}(x)$ ایده‌آلی از R است.*

برهان. به آسانی می‌توان چک کرد که حکم برقرار است. □

قضیه ۱.۲.۱۷. *فرض کنید R حلقه‌ی جابه‌جایی، M، $R-$مدولی از R و I عنصر ماکسیمالی از مجموعه‌ی $\{\mathrm{Ann}(x)|0\neq x\in M\}$ باشد. در این صورت I یک ایده‌آل اول است.*

برهان. [۱۴، قضیه‌ی ۶] □

لم ۱.۲.۱۸. *(لم براور)* [۱۲] *فرض کنید I ایده‌آل مینیمالی از حلقه‌ی R باشد. در این صورت $I^2=\{0\}$ یا به ازای عنصر خودتوانی چون e از R، $I=Re$.*

برهان. فرض کنید $I^2\neq\{0\}$. در این صورت عنصر ناصفری چون $a\in I$ موجود است که در آن $Ia\neq\{0\}$. بنابراین $Ia=I$. لذا عنصر چون $e\in I$ موجود است که $a=ea$. حال مجموعه‌ی J را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$J=\{x\in I|xa=0\}.$$

چون $e\notin J$، در نتیجه $J\subsetneqq I$ و $J=0$. از طرفی $e^2-e\in I$ و $(e^2-e)a=0$. پس $e^2-e=0$ و چون I ایده آل چپ مینیمال حلقه‌ی R است، لذا $I=Re$. □

---

[۱۲] Brauer Lemma

تعریف ۱۹.۲.۱. حلقه‌ی جابه‌جایی R را نوتری(آرتینی) گوییم، هرگاه هر زنجیر صعودی(نزولی) از ایده‌آل‌های آن، متوقف شود.

قضیه ۲۰.۲.۱. *فرض کنید R یک حلقه‌ی جابه‌جایی باشد. در این صورت R آرتینی است اگر و فقط اگر R نوتری باشد و $Spec(R) = \mathrm{Max}(R)$.*

برهان. [۲۵]، قضیه‌های ۹، ۱۰ و ۱۲] □

قضیه ۲۱.۲.۱. *فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی و آرتینی باشد. در این صورت $\mathrm{Max}(R)$ مجموعه‌ی متناهی است.*

برهان. [۲۵]، قضیه‌ی ۱۱] □

تعریف ۲۲.۲.۱. فرض کنید R حلقه و M یک $R-$مدول باشد. در این صورت $\mathfrak{p} \in Spec(R)$ را ایده‌آل اول وابسته‌ی [۱۳] M نامیم، هرگاه عنصر ناصفری چون x از M موجود باشد که $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}(x)$. مجموعه‌ی تمام ایده‌آل‌های اول وابسته‌ی M را با $Ass(M)$ نشان می‌دهیم. همچنین مجموعه‌ی تمام مقسوم‌علیه‌های صفر M را با $Z(M)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Z(M) = \{x \in M \big| \exists 0 \neq r \in R : rx = 0\}.$$

قضیه ۲۳.۲.۱. *فرض کنید M، $R-$مدول و حلقه‌ی R، نوتری باشد. در این صورت*

۱. $Z(M) = \bigcup_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)} \mathfrak{p}$.
۲. *اگر M ناصفر باشد، آن‌گاه $Ass(M)$ ناتهی است.*
۳. *اگر M، $R-$مدول متناهی مولد باشد، آن‌گاه $|Ass(M)| < \infty$.*

برهان. [۱۸]، قضیه‌ی ۱.۶ و قضیه‌ی ۵.۶] □

نتیجه ۲۴.۲.۱. *اگر $(R, \mathfrak{m})$ حلقه‌ی موضعی آرتینی باشد، آن‌گاه $Z(R) = \mathfrak{m}$. به ویژه، به ازای عنصر ناصفری چون $x \in R$، $Z(R) = \mathrm{Ann}(x)$.*

برهان. چون R حلقه‌ی آرتینی است، لذا با توجه به قضیه‌ی ۲۰.۲.۱، R نوتری است و همچنین داریم $Spec(R) = \mathrm{Max}(R)$ لذا بنابر قضیه‌ی ۲۳.۲.۱، $\mathfrak{m} \in Ass(R)$ و $Z(R) = \mathfrak{m}$. در نتیجه به ازای عنصر ناصفری چون $x \in R$، $Z(R) = \mathrm{Ann}(x)$. □

تعریف ۲۵.۲.۱. فرض کنید R حلقه‌ی جابه‌جایی باشد. $S \subseteq R$ را یک مجموعه‌ی بسته‌ی ضربی نامیم، هرگاه $1 \in S$ و برای هر $a, b \in R$، اگر $a, b \in S$، آن‌گاه $ab \in S$.

تعریف ۲۶.۲.۱. فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی و $S \subseteq R$ مجموعه‌ی بسته‌ی ضربی باشد. رابطه‌ی "$\sim$" روی $R \times S$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$(a, s) \sim (b, t)$ اگر و فقط اگر $u \in S$ موجود باشد که $u(at - bs) = 0$.

[۱۳] Associated Prime Ideal

به‌سادگی می‌توان مشاهده کرد که رابطه‌ی فوق، هم‌ارزی است. کلاس هم ارزی (a,s) را با $\frac{a}{s}$ نشان می‌دهیم که در آن

$$\frac{a}{s}=\{(b,t)\in R\times S\big|(b,t)\sim(a,s)\}.$$

مجموعه‌ی تمام کلاس‌های هم‌ارزی را با $S^{-1}R$ یا R_S نشان می‌دهیم. توجه کنید که

$$S^{-1}R=\{\frac{a}{s}\big|a\in R, s\in S\}.$$

حال با تعریف عمل جمع و ضرب زیر،

$$\frac{a}{s}+\frac{b}{t}=\frac{at+bs}{st}\quad,\quad \frac{a}{s}\cdot\frac{b}{t}=\frac{ab}{st}$$

$S^{-1}R$، تشکیل یک حلقه جابه‌جایی و یکدار می‌دهد که به‌آن حلقه‌ی کسرهای R نسبت به S می‌گوییم.

تعریف ۲۷.۲.۱. فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی، $S\subseteq R$ یک مجموعه‌ی بسته‌ی ضربی و I ایده‌آلی از R باشد. در این صورت اگر $\varphi:R\longrightarrow S^{-1}R$ همریختی (حلقه‌ای) طبیعی با ضابطه‌ی $\varphi(r)=\frac{r}{1}$ باشد، آن‌گاه I^e ایده‌آلی از $S^{-1}R$ تعریف می‌شود که در آن $I^e=\langle\varphi(I)\rangle$.

تعریف و لم ۲۸.۲.۱. **(موضعی سازی)** فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد و $\mathfrak{p}\in Spec(R)$. در این صورت $S:=R-\mathfrak{p}$ یک مجموعه‌ی بسته‌ی ضربی است. در این حالت حلقه‌ی کسرهای $S^{-1}R$ را با $R_\mathfrak{p}$ نشان می‌دهیم. $R_\mathfrak{p}$ یک حلقه‌ی موضعی با ایده‌آل ماکسیمال

$$p^e=\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}=\{\frac{a}{s}\in R_\mathfrak{p}\big|a\in\mathfrak{p} \text{ و } s\in R\setminus\mathfrak{p}\}$$

است. این حلقه را حلقه‌ی حاصل از موضعی سازی R در $\mathfrak{p}$ می‌نامیم.

برهان. [۲۳، لم ۲۰.۵] □

قضیه ۲۹.۲.۱. *فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی و $\varphi:R\longrightarrow S^{-1}R$ همریختی(حلقه‌ای) طبیعی با ضابطه‌ی $\varphi(r)=\frac{r}{1}$ باشد. در این صورت ایده‌آل‌های اول $S^{-1}R$ دقیقاً به صورت $\mathfrak{p}^e=\varphi(\mathfrak{p})S$ هستند که در آن $\mathfrak{p}\in Spec(R)$ و $\mathfrak{p}\cap S=\emptyset$.*

برهان. [۲۳، قضیه‌ی ۳۲.۵] □

تعریف ۳۰.۲.۱. فرض کنید $\mathbb{F}$ یک میدان باشد. در این صورت کوچکترین عدد طبیعی n که $n1=0$ را مشخصه‌ی $\mathbb{F}$ گوییم و اگر چنین n ای موجود نباشد، آن‌گاه مشخصه‌ی $\mathbb{F}$ برابر صفر تعریف می‌شود. مشخصه‌ی میدان $\mathbb{F}$ را با $\mathrm{Char}\ \mathbb{F}$ نشان می‌دهیم.

نمادگذاری ۳۱.۲.۱. حلقه‌ی اعداد صحیح به پیمانه‌ی n را با $\mathbb{Z}_n$ نمایش می‌دهیم.

فصل ۲

احاطه‌گری در گراف‌های مقسوم‌علیه صفر حلقه‌ها

فرض کنید R یک حلقه باشد و $Z^*(R) := Z(R) \setminus \{۰\}$. در این صورت گراف وابسته به مقسوم‌علیه صفر حلقه‌ی R را که با $\Gamma(R)$ نشان می دهیم، گرافی است جهت دار که رئوس $\Gamma(R)$ مجموعه‌ی $Z^*(R)$ است و یک یال جهت‌دار از x به رأس y وجود دارد هرگاه $xy = ۰$. درحالتی که حلقه‌ی R جابه‌جایی باشد، گراف را غیر جهت‌دار در نظر می‌گیریم.

در این فصل، ابتدا به بیان خواص مقدماتی احاطه‌گری در گراف‌های مقسوم‌علیه صفر حلقه‌های جابه‌جایی می‌پردازیم و سپس عدد احاطه‌گری و مشتقات آن را در گراف‌های مقسوم‌علیه صفر حلقه‌های جابه‌جایی نوتری تعیین می‌کنیم و به دنبال آن به تعیین رابطه‌ی بین $\gamma(\Gamma(\frac{R}{I}))$ و $\gamma(\Gamma_I(R))$ می‌پردازیم و سرانجام احاطه‌گری را در گراف مقسوم‌علیه صفر حلقه‌های ماتریسی روی میدان‌ها، مطالعه می‌کنیم.

در سراسر این فصل، حلقه‌ها یکدار و مجموعه رئوس گراف مقسوم‌علیه صفر حلقه‌ها، غیر تهی فرض شده‌اند. همچنین در بخش یک، دو و سه حلقه‌ها جابه‌جایی نیز فرض می‌شوند.

۱.۲ خواص مقدماتی احاطه‌گری در گراف‌های مقسوم علیه صفر حلقه‌های جابه‌جایی

در این بخش، ابتدا خواص مقدماتی احاطه‌گری را در گراف‌های مقسوم‌علیه صفر حلقه‌های جابه‌جایی مطالعه می‌کنیم و در ادامه، عدد احاطه‌گری و مشتقات آن را در چنین گرافی محاسبه می‌کنیم.

لم ۱.۱.۲. *فرض کنید $R_۱$ و $R_۲$ حلقه باشند. در این‌صورت $(a,b) \in Z(R_۱ \times R_۲)$ اگر و فقط اگر $a \in Z(R_۱)$ یا $b \in Z(R_۲)$.*

برهان. ($\Longleftarrow$) فرض کنید $(a,b) \in Z(R_۱ \times R_۲)$. در این صورت عنصر ناصفری چون (c,d) از $R_۱ \times R_۲$ موجود است که $(a,b) \times (c,d) = (۰,۰)$. لذا $(ac,bd) = (۰,۰)$. حال اگر c عنصر

ناصفری از R_1 باشد، آن‌گاه $a \in Z(R_1)$ و به‌طور مشابه اگر d عنصر ناصفری از R_2 باشد، آن‌گاه $b \in Z(R_2)$.

$(\Longrightarrow)$ فرض کنید $a \in Z(R_1)$ یا $b \in Z(R_2)$. در این‌صورت اگر $a \in Z(R_1)$ آن‌گاه عنصر ناصفری چون $x \in R_1$ موجود است که $ax = 0$. بنابراین $(a,b)\times(x,0) = (0,0)$. لذا $(a,b) \in Z(R_1 \times R_2)$.
به‌طور مشابه اگر $b \in Z(R_2)$، آن‌گاه $(a,b) \in Z(R_1 \times R_2)$. □

قضیه ۲.۱.۲. *فرض کنید R حلقه باشد. در این‌صورت رأسی از $\Gamma(R)$ وجود دارد که به سایر رئوس دیگر مجاور است اگر و فقط اگر به ازای حوزه‌ی صحیحی چون A، $R \cong \mathbb{Z}_2 \times A$ یا $Z(R)$ ایده‌آل پوچ‌ساز R باشد.*

برهان. $(\Longleftarrow)$ فرض کنید $Z(R)$ ایده‌آل پوچ‌ساز حلقه‌ی R نباشد و $0 \neq a \in Z(R)$ با سایر رئوس دیگر مجاور باشد. ثابت می‌کنیم $R \cong \mathbb{Z}_2 \times A$ که در آن A یک حوزه‌ی صحیح است. ابتدا توجه کنید که $a \notin \mathrm{Ann}(a)$، زیرا در غیر این‌صورت $Z(R) = \mathrm{Ann}(a)$ یک ایده‌آل پوچ‌ساز خواهد شد که متناقض با فرض است. از طرفی $\mathrm{Ann}(a)$ در میان سایر ایده‌آل‌های پوچ‌ساز، ماکسیمال است، زیرا در غیر این صورت اگر b عنصر ناصفری از حلقه‌ی R باشد که $\mathrm{Ann}(a) \subset \mathrm{Ann}(b)$، آن‌گاه $Z(R) = \mathrm{Ann}(b)$ که متناقض با فرض است. لذا بنابر قضیه‌ی ۱۷.۲.۱، $\mathrm{Ann}(a)$ یک ایده‌آل اول است. حال اگر $a^2 \neq a$، آن‌گاه $a^3 = a^2a = 0$. اما $\mathrm{Ann}(a)$ ایده‌آل اول و $a^3 \in \mathrm{Ann}(a)$، لذا $a \in \mathrm{Ann}(a)$ که تناقض است. بنابراین $a^2 = a$ و همچنین

$$R = Ra \oplus R(1-a).$$

لذا می‌توان فرض کرد که $R = R_1 \times R_2$ و $(1,0)$ به سایر رئوس $\Gamma(R)$ مجاور باشد (زیرا اگر (a,b) رأسی باشد که به سایر رئوس دیگر مجاور باشد، آن‌گاه به $(0,1)$ یا $(1,0)$ نیز مجاور خواهد بود و لذا $(a,b) = (0,1)$ یا $(a,b) = (1,0)$). نشان خواهیم داد $R_1 \cong \mathbb{Z}_2$. به برهان خلف فرض کنید عنصری چون $1 \neq c \in R_1$ موجود باشد. مطابق لم ۱.۱.۲، $(c,0)$ رأسی از $\Gamma(R)$ است. لذا $(c,0) = (c,0)(1,0) = (0,0)$ که تناقض است. بنابراین $R_1 \cong \mathbb{Z}_2$.

حال نشان می‌دهیم R_2 حوزه‌ی صحیح است. برای این منظور، به برهان خلف فرض کنید b عنصر ناصفری از $Z(R_2)$ باشد. در این صورت بنابر لم ۱.۱.۲، $(1,b)$ رأسی از $\Gamma(R)$ است و لذا $(1,b)(1,0) = (0,0)$ که تناقض است. بنابراین R_2 حوزه‌ی صحیح است.

$(\Longrightarrow)$ اگر A حوزه‌ای صحیح و $R \cong \mathbb{Z}_2 \times A$، آن‌گاه $(1,0)$ به سایر رئوس دیگر مجاور است. حال اگر به ازای عنصر ناصفری چون x از حلقه‌ی R، $Z(R) = \mathrm{Ann}(x)$، آن‌گاه x به سایر رئوس دیگر مجاور است. □

نتیجه ۳.۱.۲. $\gamma(\Gamma(R)) = 1$ *اگر و فقط اگر به ازای حوزه‌ی صحیحی چون A، $R \cong \mathbb{Z}_2 \times A$ یا $Z(R)$ ایده‌آل پوچ‌ساز باشد.*

قضیه ۴.۱.۲. *فرض کنید R حلقه‌ای متناهی باشد. اگر $\Gamma(R)$ گراف منتظم از درجه‌ی r باشد، آن‌گاه $\Gamma(R)$ گراف کامل K_r یا گراف دوبخشی کامل $K_{r,r}$ است.*

برهان. فرض کنید $\Gamma(R)$ گراف منتظم از درجه‌ی r و $R = R_۱ \times R_۲$ حلقه‌ی تجزیه پذیر باشد. چون $\deg(۱, ۰) = |R_۲| - ۱$ و $\deg(۰, ۱) = |R_۱| - ۱$، لذا $|R_۱| = |R_۲| = r + ۱$. ادعا می‌کنیم $R_۱$ میدان است. به برهان خلف فرض کنید $R_۱$ میدان نباشد، لذا عناصر ناصفری چون a و b از $R_۱$ موجوداند که $ab = ۰$ و در نتیجه $(\{۰\} \times R_۲) \cup \{(b, ۱)\} \subseteq \mathrm{Ann}(a, ۰)$. پس $\deg(a, ۰) \geq r + ۱$ که تناقض است. لذا $R_۱$ میدان است. مشابه روش فوق، $R_۲$ نیز میدان است. بنابراین $\Gamma(R) \cong K_{r,r}$.

حال فرض کنید R حلقه‌ای تجزیه ناپذیر باشد. در این‌صورت R حلقه‌ای موضعی است و لذا بنابر نتیجه‌ی ۲۴.۲.۱، $Z(R) = \mathrm{Ann}(x)$. بنابراین x به همه‌ی رأس‌های $\Gamma(R)$ وصل است. از طرفی $\Gamma(R)$ گراف منتظم است و لذا برای هر $y \in \Gamma(R)$، $\deg(y) = \deg(x)$. بنابراین $\Gamma(R)$ گراف کامل است. □

نتیجه ۵.۱.۲. *فرض کنید R حلقه‌ای متناهی باشد. در این صورت اگر $\Gamma(R)$ گرافی منتظم از درجه‌ی r باشد، آن‌گاه $\gamma(\Gamma(R)) = ۱$ یا $\gamma(\Gamma(R)) = ۲$.*

تعریف ۶.۱.۲. زیر مجموعه‌ی S از رئوس گراف $\Gamma(R)$ را یک مجموعه‌ی احاطه‌گر نیم‌کلی [۱] برای $\Gamma(R)$ نامیم هرگاه

۱. S یک مجموعه‌ی احاطه‌گر برای $\Gamma(R)$ باشد.

۲. برای هر $x \in S$، $y \in S$ موجود باشد(نه لزوماً متمایز) که $xy = ۰$.

همچنین

$$\gamma_{st}(\Gamma(R)) := \min\{|S| \mid S \text{ یک مجموعه‌ی احاطه‌گر نیم‌کلی برای } \Gamma(R) \text{ باشد}\}$$

تعریف می‌شود.

لم ۷.۱.۲. *فرض کنید R حلقه باشد. در این صورت* $\gamma(\Gamma(R)) \leq \gamma_{st}(\Gamma(R)) \leq ۲\gamma(\Gamma(R))$.

برهان. فرض کنید $\alpha = \gamma_{st}(\Gamma(R))$. در این صورت زیرمجموعه‌ای از $V(\Gamma(R))$، چون S موجود است که $|S| = \alpha$ و S مجموعه‌ی احاطه‌گر نیم‌کلی برای $\Gamma(R)$ است. چون S مجموعه‌ی احاطه‌گر است لذا $\gamma(\Gamma(R)) \leq \alpha$. حال فرض کنید $\beta = \gamma(\Gamma(R))$ و T مجموعه‌ای احاطه‌گر برای $\Gamma(R)$ باشد که $|T| = \beta$. چون $T \subseteq Z^*(R)$، لذا برای هر $y \in T$، عنصر ناصفری چون x_y از R موجود است که $xx_y = ۰$. حال قرار دهید $T' = T \cup \{x_y | y \in T\}$. لذا، T' مجموعه‌ی احاطه‌گر نیم‌کلی است. بنابراین

$$\gamma_{st} \leq |T'| \leq ۲|T| = ۲\beta.$$

□

تذکر ۸.۱.۲. *همواره مجموعه‌ی احاطه‌گر کلی، یک مجموعه‌ی احاطه‌گر نیم‌کلی است ولی عکس آن، همواره برقرار نیست. به عنوان مثال، مجموعه‌ی $\{۲\}$ در $\mathbb{Z}_۴$، یک مجموعه‌ی احاطه گر نیم‌کلی است، ولی یک مجموعه‌ی احاطه‌گر کلی نیست.*

[1]Semi-total Dominating Set

گزاره ۹.۱.۲. *در حلقه‌ی R، $\gamma(\Gamma(R))$ متناهی است اگر و فقط اگر به ازای $n \in \mathbb{N}$، عناصری چون x_i $(i = ۱, ۲, \dots, n)$ از حلقه‌ی R موجود باشند که $Z(R) = \cup_{i=۱}^{n}\mathrm{Ann}(x_i)$.*

برهان. $(\Longleftarrow)$ فرض کنید $\gamma(\Gamma(R)) < \infty$ و $D = \{y_۱, y_۲, \dots, y_m\}$ مجموعه‌ی احاطه‌گر برای $\Gamma(R)$ باشد. در این صورت

$$Z(R) = \bigcup_{i=۱}^{m}\mathrm{Ann}(y_i) \cup D$$

اما برای هر $y_i \in D$، عنصر $a_i \in Z(R)$ موجود است که $y_i a_i = ۰$. لذا $y_i \in \mathrm{Ann}(a_i)$. درنتیجه

$$Z(R) = \bigcup_{i=۱}^{m}(\mathrm{Ann}(y_i) \cup \mathrm{Ann}(a_i)).$$

$(\Longrightarrow)$ فرض کنید $Z(R) = \bigcup_{i=۱}^{n}\mathrm{Ann}(x_i)$. در این صورت $D = \{x_۱, x_۲, \dots, x_n\}$ مجموعه‌ی احاطه‌گر برای $\Gamma(R)$ است و لذا $\gamma(\Gamma(R)) < \infty$. □

گزاره ۱۰.۱.۲. *اگر R حوزه‌ای صحیح باشد، آن‌گاه $\gamma(\Gamma(\mathbb{Z}_۲ \times R)) = ۱$ و همچنین خواهیم داشت:*

$$\gamma_{st}(\Gamma(\mathbb{Z}_۲ \times R)) = \gamma_t(\Gamma(\mathbb{Z}_۲ \times R)) = ۲.$$

برهان. چون $V(\Gamma(\mathbb{Z}_۲ \times R)) = \{(۰, a) | ۰ \neq a \in R\} \cup \{(۱, ۰)\}$، لذا $\Gamma(\mathbb{Z}_۲ \times R)$ گراف ستاره با مرکز $(۱, ۰)$ است. بنابراین $\gamma(\Gamma(\mathbb{Z}_۲ \times R)) = ۱$. از طرفی $T = \{(۱, ۰), (۰, ۱)\}$ یک مجموعه‌ی احاطه‌گر کلی برای $\Gamma(\mathbb{Z}_۲ \times R)$ است. در نتیجه $\gamma_t(\Gamma(\mathbb{Z}_۲ \times R)) = |T| = ۲$. □

مثال ۱۱.۱.۲. فرض کنید $\mathbb{F}_۱$ و $\mathbb{F}_۲$ میدان‌هایی باشند که $|\mathbb{F}_۲| = m \geq ۳$ و $|\mathbb{F}_۱| = n \geq ۳$. در این صورت $\Gamma(\mathbb{F}_۱ \times \mathbb{F}_۲)$ یک گراف دو بخشی کامل است و لذا $\gamma(\Gamma(\mathbb{F}_۱ \times \mathbb{F}_۲)) = ۲$.

گزاره ۱۲.۱.۲. *اگر R حوزه‌ی صحیح نباشد، آن‌گاه $\gamma(\Gamma(\mathbb{Z}_۲ \times R)) \leq \gamma_{st}(\Gamma(R)) + ۱$.* [۲]

برهان. فرض کنید S مجموعه‌ی احاطه‌گر نیم‌کلی برای $\Gamma(R)$ باشد. می‌دانیم

$$V(\Gamma(\mathbb{Z}_۲ \times R)) = \{(۰, b) | ۰ \neq b \in R\} \cup \{(۱, a) | a \in Z(R)\}.$$

لذا $A = \{(۰, x) | x \in S\} \cup \{(۱, ۰)\}$، یک مجموعه‌ی احاطه‌گر برای $\Gamma(\mathbb{Z}_۲ \times R)$ است. بنابراین

$$\gamma(\Gamma(\mathbb{Z}_۲ \times R)) \leq ۱ + \gamma_{st}(\Gamma(R)).$$

□

[۲] این گزاره در [۱۳، گزاره‌ی ۵.۲] به‌صورت تساوی آمده است، اما برهان آن در حالت $R = \mathbb{Z}_۶$ و مجموعه‌ی احاطه‌گر $D = \{(۱, ۰), (۱, ۳), (۰, ۳)\}$ دارای اشکال می‌باشد.

تعریف ۱۳.۱.۲. فرض کنید R حلقه باشد. در این صورت تعریف می‌کنیم:

$$a(R) := \begin{cases} ۱ & Z(R) = ۰, \\ \gamma_{st}(\Gamma(R)) & Z(R) \neq ۰. \end{cases}$$

قضیه ۱۴.۱.۲. *فرض کنید $R_۱$ و $R_۲$ دو حلقه باشند. در این صورت اگر $\mathbb{Z}_۲ \notin \{R_۱, R_۲\}$، آن‌گاه $\gamma(\Gamma(R_۱ \times R_۲)) \leq a(R_۱) + a(R_۲)$.*

برهان. فرض کنید $R = R_۱ \times R_۲$. حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

۱. اگر $Z(R_۱) = Z(R_۲) = ۰$، آن‌گاه بنابر لم ۱.۱.۲،

$$V(\Gamma(R)) = \{(a, ۰)|۰ \neq a \in R_۱\} \cup \{(۰, b)|۰ \neq b \in R_۲\}.$$

در نتیجه $S = \{(۱, ۰), (۰, ۱)\}$ مجموعه‌ی احاطه‌گر برای $\Gamma(R)$ است. لذا $\gamma(\Gamma(R)) \leq ۲$. حال نشان می‌دهیم $\gamma(\Gamma(R)) = ۲$. به برهان خلف فرض کنید $\gamma(\Gamma(R)) = ۱$. دراین‌صورت دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

الف) فرض کنید $S_۱ = \{(x, ۰)|۰ \neq x \in R_۱\}$، مجموعه‌ی احاطه‌گر برای $\Gamma(R)$ باشد. دراین‌صورت چون $\mathbb{Z}_۲ \notin \{R_۱, R_۲\}$ لذا $|R_۱| \geq ۳$. بنابراین عنصری چون $a_۱ \in R_۱ \setminus \{۰, x\}$ موجود است و در نتیجه $(x, ۰)(a_۱, ۰) = (xa_۱, ۰) = (۰, ۰)$. لذا $xa_۱ = ۰$. از طرفی $Z(R_۱) = ۰$ و $a_۱$ عنصر ناصفری از $R_۱$ است، بنابراین $x = ۰$ که تناقض است.

(ب) مشابه الف)، $S_۲ = \{(۰, y)|۰ \neq y \in R_۲\}$ نمی‌تواند مجموعه‌ی احاطه‌گر برای $\Gamma(R)$ باشد. بنابراین

$$\gamma(\Gamma(R)) = a(R_۱) + a(R_۲) = ۲.$$

۲. فرض کنید $Z(R_۲) = ۰$ و $Z(R_۱) \neq ۰$ و $S_۱$ مجموعه‌ی احاطه‌گر نیم‌کلی برای $\Gamma(R_۱)$ باشد که $|S_۱| = \gamma_{st}(\Gamma(R_۱))$. در این صورت

$$V(\Gamma(R)) = \{(۰, b)|۰ \neq b \in R_۲\} \cup \{(x, y)|x \in Z(R_۱) \text{ و } ۰ \neq y \in R_۲\} \cup \{(a, ۰)|۰ \neq a \in R_۱\}.$$

در نتیجه $S = \{(x, ۰)|x \in S_۱\} \cup \{(۰, ۱)\}$ مجموعه‌ی احاطه‌گر برای $\Gamma(R)$ است. بنابراین

$$\gamma(\Gamma(R)) \leq a(R_۱) + a(R_۲) = a(R_۱) + ۱.$$

۳. فرض کنید $Z(R_۱) \neq ۰$، $Z(R_۲) \neq ۰$ و $S_۱$ و $S_۲$ به‌ترتیب دو مجموعه‌ی احاطه‌گر نیم‌کلی برای $\Gamma(R_۱)$ و $\Gamma(R_۲)$ باشند که $|S_۱| = \gamma_{st}(\Gamma(R_۱))$ و $|S_۲| = \gamma_{st}(\Gamma(R_۲))$. قرار می‌دهیم

$$T_۱ = \{(x, ۰)|x \in S_۱\} \quad \text{و} \quad T_۲ = \{(۰, y)|y \in S_۲\}.$$

چون $V(\Gamma(R)) = \{(x, y)|x \in Z(R_۱) \text{ یا } y \in Z(R_۲)\}$، در نتیجه $T_۱ \cup T_۲$ مجموعه‌ی احاطه‌گر برای $\Gamma(R)$ است. بنابراین

$$\gamma(\Gamma(R)) \leq |T_۱| + |T_۲| \leq a(R_۱) + a(R_۲).$$

□

تذکر ۱۵.۱.۲. *قضیه‌ی ۱۴.۱.۲ در [۱۳، قضیه‌ی ۶.۲]، به‌صورت تساوی آمده است. اما در حالت کلی تساوی برقرار نیست. زیرا اگر $\mathbb{F}$ میدانی از مشخصه‌ی دو و غیر یکریخت با میدان $\mathbb{Z}_2$ باشد، آن‌گاه گراف $\Gamma(\mathbb{F}\times\mathbb{Z}_4)$ دارای مجموعه‌ی احاطه‌گر $D=\{(2,0)\}$ است و لذا $\gamma(\Gamma(\mathbb{F}\times\mathbb{Z}_4))=1$. از طرفی $a(\mathbb{F})+a(\mathbb{Z}_4)=2$ و لذا $\gamma(\Gamma(\mathbb{F}\times\mathbb{Z}_4))\neq a(\mathbb{F})+a(\mathbb{Z}_4)$*

قضیه ۱۶.۱.۲. *فرض کنید $R_1, R_2, \ldots, R_n$ حوزه‌های صحیح باشند. در این‌صورت*

۱. *اگر $n\geq 3$ و $R=R_1\times R_2\times\cdots\times R_n$، آن‌گاه $\gamma(\Gamma(R))\leq n$.* [۳]

۲. *اگر $n=2$ و $\min\{|R_1|,|R_2|\}\geq 3$، آن‌گاه $\gamma(\Gamma(R))=2$.*

۳. *اگر $n=2$ و $\min\{|R_1|,|R_2|\}=2$، آن‌گاه $\gamma(\Gamma(R))=1$.*

برهان. ۱. مطابق فرض، R_i $(1\leq i\leq n)$ ها، حوزه‌های صحیح‌اند، لذا بنابر لم ۱.۱.۲، هریک از رئوس $\Gamma(R)$ متعلق به مجموعه‌ای متشکل از n-تایی‌هایی خواهد بود که حداقل یکی از مؤلفه‌ها، برابر صفر می‌باشند. در نتیجه

$$S=\{(1,0,\ldots,0),(0,1,0,\ldots,0),\ldots,(0,\ldots,0,1)\},$$

مجموعه‌ی احاطه‌گر برای $\Gamma(R)$ است. بنابراین $\gamma(\Gamma(R))\leq n$.

۲ و ۳. چون $n=2$ و R_1 و R_2 حوزه‌های صحیح‌اند لذا

$$V(R_1\times R_2)=\{(a,0)|0\neq a\in R_1\}\cup\{(0,b)|0\neq b\in R_2\}$$

و در نتیجه $\Gamma(R_1\times R_2)$ یک گراف دوبخشی کامل با بخش‌های $V_1=\{(a,0)|0\neq a\in R_1\}$ و $V_2=\{(0,b)|0\neq b\in R_2\}$ است. بنابراین حکم به اثبات می‌رسد. □

قضیه ۱۷.۱.۲. *فرض کنید R یک حلقه‌ی کاهشی باشد و $|\mathrm{Min}(R)|<\infty$. در این صورت اگر $\gamma(\Gamma(R))>1$، آن‌گاه*

$$\gamma(\Gamma(R))=\gamma_t(\Gamma(R))=|\mathrm{Min}(R)|.$$

برهان. فرض کنید $\mathrm{Min}(R)=\{\mathfrak{p}_1,\mathfrak{p}_2,\ldots,\mathfrak{p}_n\}$. در این صورت با استفاده از قضیه‌ی ۱۴.۲.۱، $Z(R)=\cup_{i=1}^{n}\mathfrak{p}_i$. حال قرار دهید $A:=\{\hat{x}_i|1\leq i\leq n\}$ که در آن $\hat{x}_i$ عنصری از

$$\hat{\mathfrak{p}}_i:=\mathfrak{p}_1\ldots\mathfrak{p}_{i-1}\mathfrak{p}_{i+1}\ldots\mathfrak{p}_n$$

است. توجه کنید که $\hat{x}_i$ $(i=1,\ldots,n)$، رأسی از $\Gamma(R)$ است. حال ثابت می‌کنیم A مجموعه‌ی احاطه‌گر برای $\Gamma(R)$ است. برای این منظور، فرض کنید x رأسی از $\Gamma(R)$ باشد. در این صورت به ازای $1\leq i\leq n$، $x\in\mathfrak{p}_i$. بنابر نتیجه‌ی ۱۲.۲.۱، $\bigcap_{i=1}^{n}\mathfrak{p}_i=\{0\}$ و در نتیجه $\hat{x}_i\mathfrak{p}_i=0$ و لذا $x\hat{x}_i=0$. بنابراین A مجموعه‌ی احاطه‌گر است. حال نشان می دهیم $\gamma(\Gamma(R))=n$.

اگر $n=2$، آن‌گاه بنابر قضیه‌ی ۱۴.۲.۱، $Z(R)=\mathfrak{p}_1\cup\mathfrak{p}_2$. ادعا می‌کنیم $\Gamma(R)$ گراف دوبخشی کامل با بخش‌های $V_1=\mathfrak{p}_1\setminus\{0\}$ و $V_2=\mathfrak{p}_2\setminus\{0\}$ است. برای اثبات این ادعا، ابتدا نشان دهیم

[۳] این قضیه در [۲۱، قضیه‌ی ۱۱]، به صورت تساوی آمده است، اما برهان آن‌ها دارای اشکال می‌باشد.

$V_۱$ و $V_۲$ مجموعه‌های مستقل هستند. برای این منظور، اگر $a, b \in V_۱$ و $ab = ۰$، آن‌گاه $ab \in \mathfrak{p}_۲$ و لذا $a \in \mathfrak{p}_۲$ یا $b \in \mathfrak{p}_۲$ که تناقض است. به همین ترتیب، می‌توان ثابت کرد که $V_۲$ نیز مجموعه‌ی مستقل است. حال فرض کنید x و y عناصری به ترتیب متعلق به مجموعه‌های $V_۱$ و $V_۲$ باشند. در این صورت بنابر نتیجه‌ی ۱۲.۲.۱، داریم:

$$xy \in \mathfrak{p}_۱\mathfrak{p}_۲ \subseteq \mathfrak{p}_۱ \cap \mathfrak{p}_۲ = \{۰\}.$$

در نتیجه $\Gamma(R)$ گراف دوبخشی کامل است. بنابراین چون $\gamma(\Gamma(R)) > ۱$، لذا $\gamma(\Gamma(R)) = ۲$.
حال فرض کنید $n \geq ۳$. نشان خواهیم داد $\gamma(\Gamma(R)) = n$. به برهان خلف فرض کنید

$$B = \{y_۱, y_۲ \dots, y_{n-۱}\}$$

مجموعه‌ی احاطه‌گر برای $\Gamma(R)$ در این صورت بنابر قضیه‌ی ۴.۲.۱،

$$x_i \in \mathfrak{p}_i \setminus \bigcup_{\substack{j=۱\\ j\neq i}}^{n} \mathfrak{p}_j$$

وجود دارد. حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

۱.اگر $B \cap \{x_۱, x_۲, \dots, x_n\} = \emptyset$، آن‌گاه بنابر اصل لانه‌ی کبوتری، عناصری چون x_s و x_t به ترتیب، از ایده‌آل‌های $\mathfrak{p}_s$ و $\mathfrak{p}_t$ و $y_l \in B$ موجودند که $y_lx_t = y_lx_s = ۰$ و لذا $y_lx_t \in \mathfrak{p}_s$ و $y_lx_s \in \mathfrak{p}_t$. چون $x_t \notin \mathfrak{p}_s$ و $x_s \notin \mathfrak{p}_t$، لذا $y_l \in \mathfrak{p}_s \cap \mathfrak{p}_t$. از طرفی R حلقه‌ی کاهشی است، لذا به ازای برخی $۱ \leq r \leq n$، $y_l \notin \mathfrak{p}_r$. حال چون $y_lx_s \in \mathfrak{p}_r$ ،$= ۰$، لذا $y_l \in \mathfrak{p}_r$ یا $x_s \in \mathfrak{p}_r$ که تناقض است.

۲. فرض کنید $B \cap \{x_۱, x_۲, \dots, x_n\} \neq \emptyset$. می‌دانیم به ازای $i \neq j$، x_i و x_j، غیر مجاورند. زیرا در غیر این صورت چون $n \geq ۳$، لذا ایده‌آلی چون $\mathfrak{p}_k \in \mathrm{Min}(R) \setminus \{\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_j\}$ موجود است که در آن $x_ix_j \in \mathfrak{p}_k = ۰$. بنابراین $x_i \in \mathfrak{p}_k$ یا $x_j \in \mathfrak{p}_k$ که تناقض است. از طرفی B با مجموعه‌ی $\{x_۱, x_۲, \dots, x_{n-۱}\}$ برابر نیست. زیرا در غیر این صورت به ازای $i \neq n$، x_n با x_i مجاور خواهد بود که تناقض است. لذا بدون از دست رفتن کلیت مسأله می‌توان فرض کرد که به ازای $k < n-۱$ ای و $i = ۱, ۲, \dots, k$، $y_i := x_i$ و $\{y_{k+۱}, \dots, y_{n-۱}\} \cap \{x_۱, x_۲, \dots, x_k\} = \emptyset$. لذا هر عنصر مجموعه‌ی $\{x_{k+۱}, \dots, x_n\}$ به عنصری از مجموعه‌ی $\{y_{k+۱}, \dots, y_{n-۱}\}$ مجاور است. در نتیجه بنابر اصل لانه‌ی کبوتری، به ازای $v \neq u$ که $k + ۱ \leq u < v \leq n$ و $k + ۱ \leq i \leq n - ۱$،

$$x_uy_i = x_vy_i = ۰.$$

چون R حلقه‌ی کاهشی است، به ازای برخی $۱ \leq t \leq n$، $y_i \notin \mathfrak{p}_t$ و چون $x_uy_i \in \mathfrak{p}_t = ۰$، لذا $x_u \in \mathfrak{p}_t$. از طرفی $x_vy_i = ۰ \in \mathfrak{p}_u$ و $x_v \notin \mathfrak{p}_u$. لذا $y_i \in \mathfrak{p}_u$ و در نتیجه $v \neq t$. بنابراین $x_v \in \mathfrak{p}_t$ که تناقض است.

از طرفی به ازای $i \neq j$، $\hat{x}_i\hat{x}_j = ۰$. در نتیجه A مجموعه‌ی احاطه‌گر کلی است. بنابراین

$$\gamma(\Gamma(R)) = \gamma_t(\Gamma(R)) = |\mathrm{Min}(R)|.$$

□

۲.۲ احاطه‌گری در گراف‌های وابسته به حلقه‌های نوتری

در این بخش، ابتدا به محاسبه‌ی عدد احاطه‌گری و مشتقات آن در گراف‌های مقسوم‌علیه صفر حلقه‌های آرتینی پرداخته و سپس به مطالعه‌ی احاطه‌گری در گراف‌های مقسوم‌علیه صفر حلقه‌های نوتری می‌پردازیم.

تذکر ۱.۲.۲. *اگر R حلقه‌ی آرتینی باشد، آن‌گاه بنابر [۵، قضیه‌ی ۷.۸]*

$$R \cong R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_n$$

که در آن R_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ها حلقه‌های موضعی آرتینی با ایده‌آل ماکسیمال $\mathfrak{m}_i$ می‌باشند.

قضیه ۲.۲.۲. *فرض کنید R حلقه‌ی آرتینی باشد. در این صورت بنابر تذکر ۱.۲.۲ ،*

۱. *اگر $n \geq 2$، آن‌گاه $\gamma(\Gamma(R)) \leq n$.* [۴]

۲. *اگر R حلقه‌ی موضعی باشد، آن‌گاه $\gamma(\Gamma(R)) = 1$.*

۳. *اگر $R \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{F}$، آن‌گاه $\gamma(\Gamma(R)) = 1$.*

برهان. ۱. چون $(R_i, \mathfrak{m}_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ها حلقه‌های موضعی می‌باشند، لذا با فرض اینکه x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ عنصر ناصفری از حلقه‌ی R_i باشند، در این صورت بنابر نتیجه‌ی ۲۴.۲.۱ خواهیم داشت:

$$Z(R_i) = \mathfrak{m}_i = \mathrm{Ann}(x_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

بنابراین $S = \{(x_1, 0, \ldots, 0), (0, x_2, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, x_n)\}$ مجموعه‌ی احاطه‌گر برای $\Gamma(R)$ است و در نتیجه $\gamma(\Gamma(R)) \leq n$.

۲. فرض کنید R حلقه‌ی موضعی با ایده‌آل ماکسیمال $\mathfrak{m}$ باشد. در این صورت بنابر نتیجه‌ی ۲۴.۲.۱، عنصر ناصفری از R مانند x وجود دارد که $Z(R) = \mathfrak{m} = \mathrm{Ann}(x)$. در نتیجه $D = \{x\}$، مجموعه‌ی احاطه‌گر برای $\Gamma(R)$ است و لذا $\gamma(\Gamma(R)) = 1$.

۳. بنابر گزاره‌ی ۱۰.۱.۲، حکم واضح است. □

گزاره ۳.۲.۲. *اگر $(R, \mathfrak{m})$ حلقه‌ی موضعی آرتینی باشد، آن‌گاه $a(R) = 1$.*

برهان. اگر R میدان باشد، آن‌گاه حکم واضح است. لذا فرض کنید R میدان نباشد. در این صورت چون R آرتینی است لذا بنابر نتیجه‌ی ۲۴.۲.۱، عنصر ناصفری چون $x \in R$ موجود است که

$$Z(R) = \mathfrak{m} = \mathrm{Ann}(x).$$

پس $S = \{x\}$ مجموعه‌ی احاطه‌گر برای $\Gamma(R)$ است. از طرفی چون $x \in Z(R)$، لذا $x^2 = 0$. در نتیجه S مجموعه‌ی احاطه‌گر نیم‌کلی است. بنابراین $a(R) = 1$. □

حال به محاسبه‌ی عدد احاطه‌گری در گراف‌های وابسته به مقسوم‌علیه صفر حلقه‌های نوتری می‌پردازیم.

---

[۴] این قضیه در [۱۳، نتیجه‌ی ۱۱.۲] و [۲۱، قضیه‌ی ۱۱] به صورت تساوی آمده است، اما برهان‌های آن‌ها دارای اشکال می‌باشد. همچنین با توجه به تذکر ۱۵.۱.۲، در حالت کلی تساوی برقرار نمی‌باشد.

لم ۴.۲.۲. *اگر R حلقه‌ی نوتری باشد، آن‌گاه $\gamma(\Gamma(R)) < \infty$.*

برهان. چون R حلقه‌ی نوتری است لذا بنابر قضیه‌ی ۲۳.۲.۱ (۳)، $|Ass(R)| < \infty$. لذا می‌توان فرض کرد که $Ass(R) = \{\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n\}$. از طرفی بنابر قضیه‌ی ۲۳.۲.۱ (۱)،

$$Z(R) = \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i.$$

چون برای هر $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$، $\mathfrak{p}_i \in Ass(R)$، لذا عناصر ناصفری چون x_i از حلقه‌ی R وجود دارند که $\mathfrak{p}_i = \mathrm{Ann}(x_i)$. بنابراین با استفاده از گزاره‌ی ۹.۱.۲، حکم ثابت می‌شود. □

تذکر ۵.۲.۲. *با توجه به اثبات لم ۴.۲.۲ و اثبات گزاره‌ی ۹.۱.۲، اگر R حلقه‌ی نوتری باشد، آن‌گاه*

$$\gamma(\Gamma(R)) \leq |Ass(R)|.$$

قضیه ۶.۲.۲. *اگر R حلقه‌ی نوتری باشد و $\gamma(\Gamma(R)) \neq 1$، آن‌گاه*

$$\gamma_t(\Gamma(R)) = \gamma_{st}(\Gamma(R)) = |\mathrm{Max}\{0 \neq \mathfrak{p} | \mathfrak{p} \in Ass(R)\}|.$$

برهان. بنابر قضیه‌ی ۲۳.۲.۱ (۳)، $|Ass(R)| < \infty$. حال فرض کنید $A = \{\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_k\}$ مجموعه‌ی همه‌ی ایده‌آل‌های اول وابسته متمایز ماکسیمال حلقه‌ی R باشد. در این‌صورت بنابر قضیه‌ی ۲۳.۲.۱، $Z(R) = \cup_{i=1}^{k} \mathfrak{p}_i$ که به ازای عناصر ناصفری چون x_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ از حلقه‌ی R، $\mathfrak{p}_i = \mathrm{Ann}(x_i)$. قرار دهید $S := \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$. طبق فرض $k > 1$. ادعا می‌کنیم S مجموعه‌ی احاطه‌گر نیم‌کلی و کلی برای $\Gamma(R)$ است. برای این منظور، فرض کنید $y \notin S$ رأس دلخواهی $\Gamma(R)$ باشد. در این‌صورت به ازای $1 \leq i \leq k$، $y \in P_i$ و لذا $x_i y = 0$. در نتیجه y توسط عنصری از S احاطه شده است. بنابراین S مجموعه‌ی احاطه‌گر برای $\Gamma(R)$ است. حال نشان می‌دهیم S مجموعه‌ی احاطه‌گر نیم‌کلی و کلی برای $\Gamma(R)$ است. برای این منظور، فرض کنید i, j ها، مقادیری باشند که $1 \leq i < j \leq k$. ادعا می‌کنیم $x_i x_j = 0$. به برهان خلف فرض کنید $x_i x_j \neq 0$. ادعا می‌کنیم $\mathrm{Ann}(x_i) = (\mathrm{Ann}(x_i) : x_j)$. ابتدا فرض کنید a عنصر دلخواهی از $(\mathrm{Ann}(x_i) : x_j)$ باشد. در این‌صورت $a x_j \in \mathrm{Ann}(x_i)$. لذا $a x_j x_i = 0$. پس $a x_j \in \mathrm{Ann}(x_i)$. چون $\mathrm{Ann}(x_i)$ ایده‌آل اول حلقه‌ی R است و $x_j \notin \mathrm{Ann}(x_i)$، پس $a \in \mathrm{Ann}(x_i)$. بنابراین

$$(\mathrm{Ann}(x_i) : x_j) \subseteq \mathrm{Ann}(x_i).$$

حال فرض کنید b عنصر دلخواهی از $\mathrm{Ann}(x_i)$ باشد. در این صورت $b x_i = 0$. لذا خواهیم داشت:

$$b x_i x_j = b x_j x_i = 0.$$

پس $b x_j \in \mathrm{Ann}(x_i)$ و لذا $b \in (\mathrm{Ann}(x_i) : x_j)$. در نتیجه $\mathrm{Ann}(x_i) \subseteq (\mathrm{Ann}(x_i) : x_j)$. بنابراین $(\mathrm{Ann}(x_i) : x_j) = \mathrm{Ann}(x_i)$. بطور مشابه $(\mathrm{Ann}(x_j) : x_i) = \mathrm{Ann}(x_j)$. از طرفی

$$(\mathrm{Ann}(x_i) : x_j) = \mathrm{Ann}(x_i x_j) \quad \text{و} \quad (\mathrm{Ann}(x_j) : x_i) = \mathrm{Ann}(x_i x_j)$$

لذا $\mathrm{Ann}(x_i) = \mathrm{Ann}(x_j)$ که متناقض با متمایز بودن ایده‌آل‌های اول ماکسیمال حلقه‌ی R است. بنابراین $x_ix_j = ۰$. لذا S یک مجموعه‌ی احاطه‌گر نیم‌کلی و کلی برای $\Gamma(R)$ است.

حال فرض کنید $\gamma_{st}(\Gamma(R)) = n$ $(n \leq k)$. در این‌صورت باتوجه به گزاره‌ی ۹.۱.۲، عناصر $a_۱, a_۲, \ldots, a_n$ از حلقه‌ی R موجوداند که

$$Z(R) = \bigcup_{i=۱}^{n} \mathrm{Ann}(a_i).$$

حال با استفاده از قضیه‌ی ۴.۲.۱، برای هر $i \in \{۱, ۲, \ldots, n\}$، اندیسی چون $i_j \in \{۱, ۲, \ldots, k\}$ موجود است که $\mathrm{Ann}(a_i) \subseteq \mathfrak{p}_{i_j}$. بنابراین

$$Z(R) = \bigcup_{i=۱}^{n} \mathfrak{p}_{i_j}.$$

حال اگر $\mathfrak{p}_l$ عنصری از مجموعه‌ی A باشد، آن‌گاه $\mathfrak{p}_l \subseteq \cup_{j=۱}^{n} \mathfrak{p}_j$. لذا با استفاده‌ی مجدد از قضیه‌ی ۴.۲.۱، چون اعضای مجموعه‌ی A ایده‌آل‌های اول وابسته‌ی ماکسیمال حلقه‌ی R می‌باشند بنابراین $n \leq k$ و لذا $\gamma_{st}(\Gamma(R)) = k$. □

قضیه ۷.۲.۲. *اگر R حلقه‌ای نوتری باشد، آن‌گاه*

$$\gamma(\Gamma(R)) = \gamma_t(\Gamma(R)) \quad \text{یا} \quad \gamma(\Gamma(R)) = \gamma_t(\Gamma(R)) - ۱.$$

برهان. اگر $\gamma(\Gamma(R)) = ۱$، آن‌گاه $\gamma_t(\Gamma(R)) = ۲$. لذا حالتی را در نظر بگیرید که $\gamma(\Gamma(R)) > ۱$ و $D = \{x_۱, x_۲, \ldots, x_k\}$ مجموعه‌ی احاطه‌گر برای $\Gamma(R)$ باشد که $\gamma(\Gamma(R)) = k$ و همچنین $\gamma(\Gamma(R)) \neq \gamma_t(\Gamma(R))$. طبق برهان گزاره‌ی ۹.۱.۲، $Z(R) = \cup_{i=۱}^{k} \mathrm{Ann}(x_i) \cup D$. از طرفی طبق قضیه‌ی ۲۳.۲.۱، اگر $A = \{\mathfrak{p}_۱, \mathfrak{p}_۲, \ldots, \mathfrak{p}_n\}$ مجموعه‌ای متشکل از ایده‌آل‌های اول وابسته‌ی متمایز ماکسیمال حلقه‌ی R باشد، آن‌گاه $Z(R) = \cup_{i=۱}^{n} \mathfrak{p}_i$ و بنابر قضیه‌ی ۶.۲.۲، $\gamma_t(\Gamma(R)) = n$. نشان خواهیم داد $\gamma(\Gamma(R)) = \gamma_t(\Gamma(R))$. برای این منظور، t را بیشترین تعداد از اعضای مجموعه‌ی D در نظر بگیرید که ضربشان ناصفر باشد. از آن‌جا که $n < k$، لذا $t \geq ۲$. در نتیجه، عناصری چون $x_{i_۱}, x_{i_۲}, \ldots, x_{i_t}$ از مجموعه‌ی D موجوداند که $\prod_{j=۱}^{t} x_{i_j} \neq ۰$. چون $\mathrm{Ann}(\prod_{j=۱}^{n} x_{i_j}) \subseteq Z(R)$، پس بنابر ۴.۲.۱، به ازای ایده‌آلی چون $\mathfrak{p}$ از مجموعه‌ی A، $\mathrm{Ann}(\prod_{j=۱}^{t} x_{i_j}) \subseteq \mathfrak{p}$. لذا

$$\mathrm{Ann}(x_{i_j}) \subseteq \mathfrak{p}, \quad j = ۱, ۲, \ldots, t.$$

از طرفی، ضرب $t + ۱$ عنصر از مجموعه‌ی D صفر است. پس $k - t$ عنصر از D متعلق به $\mathfrak{p}$ است. لذا $\cup_{i=۱}^{t} \mathrm{Ann}(x_{i_j}) \cup D$، زیر مجموعه‌ی اجتماع حداکثر، $t + ۱$ عنصر از مجموعه‌ی A است. از طرفی

$$Z(R) = D \cup (\bigcup_{i=۱}^{t} \mathrm{Ann}(x_{i_j})) \cup (\bigcup_{l \in \{۱,\ldots,k\} \setminus \{i_۱,\ldots,i_t\}} \mathrm{Ann}(x_l)),$$

و بنابر قضیه‌ی ۴.۲.۱، برای هر $l \in \{۱, ۲, \ldots, k\} \setminus \{i_۱, i_۲, \ldots, i_t\}$ ،$\mathfrak{p}_{i_l} \in A$ وجود دارد که $\mathrm{Ann}(x_l) \subseteq \mathfrak{p}_{i_l}$. بنابراین A دارای حداکثر $k + ۱$ عنصر است. اما $|A| = \gamma_t(\Gamma(R))$ و همچنین $\gamma_t(\Gamma(R)) > \gamma(\Gamma(R))$. لذا $\gamma_t(\Gamma(R)) \geq k + ۱$. بنابراین خواهیم داشت:

$$\gamma_t(\Gamma(R)) = \gamma(\Gamma(R)) + ۱.$$

□

قضیه ۸.۲.۲. *فرض کنید R حلقه‌ای نوتری باشد و $\gamma(\Gamma(R)) \neq ۱$. در این صورت*

$$\gamma(\Gamma(R[x])) = \gamma(\Gamma(R)) \quad \text{یا} \quad \gamma(\Gamma(R[x])) = \gamma_t(\Gamma(R)).$$

برهان. فرض کنید $\{f_۱(x), \ldots, f_n(x)\}$ مجموعه‌ی احاطه‌گر برای $R[x]$ باشد و $\gamma(\Gamma(R[x])) = n$. اگر a_i ضریب غیر صفری از $f_i(x)$ باشد، آن‌گاه چون $Z(R) \subseteq Z(R[x])$، لذا $\{a_۱, a_۲, \ldots, a_n\}$ نیز مجموعه‌ی احاطه‌گر برای $\Gamma(R)$ است. بنابراین $\gamma(\Gamma(R)) \leq \gamma(\Gamma(R[x]))$.

حال فرض کنید $f(x) \in Z(R[x])$ دلخواه باشد. در این صورت طبق [۱۹، قضیه‌ی۲]، عنصری چون $R \ni r \neq ۰$ وجود دارد که $rf(x) = ۰$. از طرفی R حلقه‌ی نوتری است لذا بنابر قضیه‌ی ۲۳.۲.۱، $Z(R) = \cup_{i=۱}^{n} \mathrm{Ann}(x_i)$ که در آن، x_i $(i = ۱, ۲, \ldots, n)$، عناصر ناصفری از حلقه‌ی R و $\mathrm{Ann}(x_i)$ ایده‌آل‌های اول وابسته‌ی ماکسیمال حلقه‌ی R می‌باشند. حال چون $\mathrm{Ann}(r) \subseteq Z(R)$، طبق قضیه‌ی ۴.۲.۱، $۱ \leq j \leq n$، وجود دارد که $\mathrm{Ann}(r) \subseteq \mathrm{Ann}(x_j)$ و در نتیجه $x_j f(x) = ۰$. بنابراین $\{x_۱, x_۲, \ldots, x_n\}$ مجموعه‌ی احاطه‌گر برای $\Gamma(R[x])$ است و لذا $\gamma(\Gamma(R[x])) \leq n$. از طرفی بنابر قضیه‌ی ۶.۲.۲، $\gamma_t(\Gamma(R)) = n$ و لذا $\gamma(\Gamma(R[x])) \leq \gamma_t(\Gamma(R))$.

حال بنابر قضیه‌ی ۷.۲.۲،

$$\gamma(\Gamma(R)) = \gamma_t(\Gamma(R)) - ۱ \quad \text{یا} \quad \gamma(\Gamma(R)) = \gamma_t(\Gamma(R)).$$

اگر $\gamma(\Gamma(R)) = \gamma_t(\Gamma(R))$، آن‌گاه $\gamma(\Gamma(R)) = \gamma(\Gamma(R[x]))$ و اگر $\gamma(\Gamma(R)) = \gamma_t(\Gamma(R)) - ۱$، آن‌گاه

$$\gamma(\Gamma(R[x])) = \gamma(\Gamma(R)) \quad \text{یا} \quad \gamma(\Gamma(R[x])) = \gamma_t(\Gamma(R)).$$

□

۳.۲ رابطه‌ی بین $\gamma(\Gamma(\frac{R}{I}))$ و $\gamma(\Gamma_I(R))$

فرض کنید R حلقه و I ایده‌آلی از R باشد. در این صورت گراف مقسوم‌علیه صفر بر پایه‌ی یک ایده‌آل که با $\Gamma_I(R)$ نمایش داده می‌شود گرافی غیر جهت دار است که

$$V(\Gamma_I(R)) = \{x \in R \setminus I \big| xy \in I \colon y \in R \text{ برای برخی}\}$$

و دو رأس متمایز $x \in R \setminus I$ و $y \in R \setminus I$ از آن مجاورند اگر و فقط اگر $xy \in I$ و در حالت خاص $I = \{0\}$، آن‌گاه $\Gamma_I(R) = \Gamma(R)$. گراف بر پایه‌ی یک ایده‌آل و خواص آن، اولین بار توسط ردموند در [۲۲]، مطالعه و تعریف شد.

در این بخش، به بیان رابطه‌ی بین عدد احاطه‌گری و مشتقات آن در گراف‌های $\Gamma(\frac{R}{I})$ و $\Gamma_I(R)$ خواهیم پرداخت.

گزاره ۱.۳.۲. *فرض کنید R حلقه و I ایده‌آلی از آن باشد. در این صورت موارد زیر برقرار می‌باشند:*

۱. $\gamma_{st}(\Gamma(\frac{R}{I})) = \gamma_{st}(\Gamma_I(R))$.

۲. $\gamma_t(\Gamma(\frac{R}{I})) = \gamma_t(\Gamma_I(R))$.

برهان. ۱. فرض کنید $S_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ مجموعه‌ی احاطه‌گر نیم‌کلی برای $\Gamma_I(R)$ باشد که $\gamma(\Gamma_I(R)) = k$. در این‌صورت برای هر $1 \leq i \leq k$، $x_i \in R \setminus I$. حال فرض کنید y عنصر دلخواهی از $V(\Gamma_I(R))$ باشد. در این صورت $x_j \in S_1$ وجود دارد که $x_j y \in I$ و لذا $(x_j + I)(y + I) \in I$. در نتیجه $S_1 + I = \{x_i + I | x_i \in S_1\}$، مجموعه‌ی احاطه‌گر نیم‌کلی برای $\Gamma(\frac{R}{I})$ است. بنابراین $\gamma_{st}(\Gamma(\frac{R}{I})) \leq \gamma_{st}(\Gamma_I(R))$.

حال فرض کنید $S_2 = \{x_1 + I, x_2 + I, \dots, x_t + I\}$ مجموعه‌ی احاطه‌گر نیم‌کلی برای $\Gamma(\frac{R}{I})$ باشد که $\gamma_{st}(\Gamma(\frac{R}{I})) = t$. همچنین فرض کنید y عنصر دلخواهی از $V(\Gamma_I(R))$ باشد. لذا $y + I \in V(\Gamma(\frac{R}{I}))$ و در نتیجه $x_i + I$ از مجموعه‌ی S_2 وجود دارد که $(x_i + I)(y + I) = I$ و لذا y با رأس x_i در $\Gamma_I(R)$ مجاور است. بنابراین $S_2{}' = \{x_1, x_2, \dots, x_t\}$ مجموعه‌ی احاطه‌گر نیم‌کلی برای $\Gamma_I(R)$ است و $\gamma_{st}(\Gamma_I(R)) \leq \gamma_{st}(\Gamma(\frac{R}{I}))$.

۲. مشابه برهان ۱ است. □

لم ۲.۳.۲. *فرض کنید I ایده‌آلی از حلقه‌ی R باشد. در این صورت اگر S مجموعه‌ی احاطه‌گر برای $\Gamma_I(R)$ باشد، آن‌گاه $S + I = \{s + I | s \in S\}$ مجموعه‌ی احاطه‌گر برای $\Gamma(\frac{R}{I})$ است.*

برهان. فرض کنید S مجموعه‌ی احاطه‌گر برای $\Gamma_I(R)$ و x رأسی از $\Gamma_I(R)$ باشد. در این صورت $x \notin I$ و به ازای عنصری چون $s \in S$، $sx \in I$. لذا

$$(s + I)(x + I) = sx + I = I = 0_{\frac{R}{I}}.$$

در نتیجه $S + I$ مجموعه‌ی احاطه‌گر برای $\Gamma(\frac{R}{I})$ است. □

مثال زیر نشان می‌دهد که عکس لم ۲.۳.۲، الزاماً برقرار نیست.

مثال ۳.۳.۲. فرض کنید $R = \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_3$ و $I = \{0\} \times \mathbb{Z}_3$. در این‌صورت،

$$V(\Gamma_I(R)) = \{(2,0), (2,1), (2,2), (3,0), (3,1), (3,2), (4,0), (4,1), (4,2)\}$$

و

$$V(\Gamma(\frac{R}{I})) = \{(2,0) + I, (3,0) + I, (4,0) + I\}.$$

در نتیجه $S = \{(۳,۰) + I\}$ مجموعه‌ی احاطه‌گر برای $\Gamma(\frac{R}{I})$ است، اما $S' = \{(۳,۰)\}$، مجموعه‌ی احاطه‌گر برای $\Gamma_I(R)$ نیست.

قضیه ۴.۳.۲. *فرض کنید R یک حلقه و I ایده‌آلی از آن باشد. در این‌صورت*

$$\gamma(\Gamma(\frac{R}{I})) = \gamma(\Gamma_I(R)) \quad \text{اگر و فقط اگر} \quad \gamma(\Gamma(\frac{R}{I})) = \gamma_{st}(\Gamma(\frac{R}{I})).$$

برهان. $(\Longrightarrow)$ فرض کنید $\gamma(\Gamma(\frac{R}{I})) = \gamma(\Gamma_I(R))$ و $D = \{x_۱, x_۲, \dots, x_k\}$ مجموعه‌ی احاطه‌گر برای $\Gamma_I(R)$ باشد که $\gamma(\Gamma_I(R)) = k$. در این صورت طبق لم ۲.۳.۲،

$$D + I = \{x_۱ + I, x_۲ + I, \dots, x_k + I\}$$

مجموعه‌ی احاطه گر برای $\Gamma(\frac{R}{I})$ است که $\gamma(\Gamma(\frac{R}{I})) = \gamma(\Gamma_I(R)) = k$. حال اگر x_i عنصر دلخواهی از مجموعه‌ی D و a نیز عنصر دلخواهی از $I \setminus \{۰\}$ باشد، آن‌گاه $x_i + a \notin D$. زیرا در غیر این صورت به ازای عنصری چون $x_j \in D$، $x_i + a = x_j$ و در نتیجه $x_i - x_j = a \in I$ و لذا $x_i + I = x_j + I$ که در تناقض با متمایز بودن عناصر مجموعه‌ی $D + I$ است. از طرفی x_i رأسی از $\Gamma_I(R)$ و $a \in I \setminus \{۰\}$، در نتیجه $x_i + a$ رأسی از $\Gamma_I(R)$ است. لذا عنصری چون x_j از D موجود است که $(x_i + a)x_j \in I$. در نتیجه $xx_i \in I$ و $(x_i + I)(x_j + I) = I$. بنابراین $D + I$ مجموعه‌ی احاطه‌گر نیم‌کلی برای $\Gamma(\frac{R}{I})$ است و لذا $\gamma_{st}(\Gamma(\frac{R}{I})) \leq |D + I| = k$. از طرفی بنابر لم ۷.۱.۲، $k = \gamma(\Gamma(\frac{R}{I})) \leq \gamma_{st}(\Gamma(\frac{R}{I}))$. بنابراین $\gamma_{st}(\Gamma(\frac{R}{I})) = k$.

$(\Longleftarrow)$ فرض کنید $\gamma(\Gamma(\frac{R}{I})) = \gamma_{st}(\Gamma(\frac{R}{I}))$ و S مجموعه‌ی احاطه‌گر برای گراف $\Gamma_I(R)$ باشد که $|S| = \gamma(\Gamma_I(R))$. در این صورت بنابر لم ۲.۳.۲، $S + I$ مجموعه‌ی احاطه‌گر برای $\Gamma(\frac{R}{I})$ است و لذا

$$\gamma(\Gamma(\frac{R}{I})) \leq \gamma(\Gamma_I(R)).$$

ازطرفی بنابر فرض و با استفاده از قسمت اول از گزاره‌ی ۱.۳.۲،

$$\gamma(\Gamma(\frac{R}{I})) = \gamma_{st}(\Gamma(\frac{R}{I})) = \gamma_{st}(\Gamma_I(R)).$$

در نتیجه بنابر لم ۷.۱.۲، $\gamma(\Gamma_I(R)) \leq \gamma_{st}(\Gamma_I(R)) = \gamma(\Gamma(\frac{R}{I}))$. بنابراین $\gamma(\Gamma(\frac{R}{I})) = \gamma(\Gamma_I(R))$.
$\square$

مثال زیر نشان می‌دهد که در قضیه‌ی ۴.۳.۲، نمی‌توان به‌جای $\gamma_{st}(\Gamma(\frac{R}{I}))$، $\gamma_t(\Gamma(\frac{R}{I}))$ قرار داد.

مثال ۵.۳.۲. اگر $R = \mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{Z}_۴$ و $I = \mathbb{Z}_۲ \times \{۰\}$، آن‌گاه

$$\gamma(\Gamma(\frac{R}{I})) = \gamma_{st}(\Gamma(\frac{R}{I})) = \gamma(\Gamma_I(R)) = ۱ \quad \text{و} \quad \gamma_t(\Gamma(\frac{R}{I})) = ۲$$

نتیجه ۶.۳.۲. *فرض کنید R حلقه و I ایده‌آلی از آن باشد که $\sqrt{I} = I$. در این صورت*

۱. $\gamma_{st}(\Gamma(\frac{R}{I})) = \gamma_t(\Gamma(\frac{R}{I}))$.

۲. $\gamma(\Gamma(\frac{R}{I})) = \gamma(\Gamma_I(R))$ *اگر و فقط اگر* $\gamma(\Gamma(\frac{R}{I})) = \gamma_t(\Gamma(\frac{R}{I}))$.

برهان. ۱. فرض کنید $S = \{x_i + I | x_i \in R \setminus I\}$ مجموعه‌ی احاطه‌گر نیم‌کلی برای $\Gamma(\frac{R}{I})$ باشد و $|S| = \gamma_{st}(\Gamma(\frac{R}{I}))$. اگر $x_i + I$ عنصر دلخواهی از S باشد، آنگاه به ازای $i \neq j$، $x_i + I$ با رأس $x_j + I$ مجاور است یا $(x_i + I)^۲ \in I$. اگر $(x_i + I)^۲ \in I$، آنگاه $x_i^۲ \in I$ و لذا $x_i \in \sqrt{I} = I$ که تناقض است. در نتیجه به ازای $i \neq j$، $(x_i + I)(x_j + I) = I$. بنابراین S، مجموعه‌ی احاطه‌گر کلی برای $\Gamma(\frac{R}{I})$ است.

۲. بنابر قضیه‌ی ۴.۳.۲ و قسمت اول، حکم واضح است. □

۴.۲ احاطه‌گری در گراف‌های وابسته به مقسوم‌علیه صفر حلقه‌های ماتریسی روی میدان‌ها

فرض کنید $\mathbb{F}$ یک میدان و $M_n(\mathbb{F})$ مجموعه‌ی تمام ماتریس‌های $n \times n$ با درایه‌های در $\mathbb{F}$ باشد. در این بخش، به مطالعه‌ی احاطه‌گری در $\Gamma(M_n(\mathbb{F}))$ می‌پردازیم. توجه کنید که $\Gamma(M_n(\mathbb{F}))$ گرافی جهت‌دار است.

تعریف ۱.۴.۲. فرض کنید $D = (V, A)$ گرافی جهت‌دار با مجموعه رئوس V و مجموعه یال‌های A باشد. در این صورت اگر $A \subseteq V \times V$، آنگاه $O(u)$ عبارت است از مجموعه‌ی تمام رئوسی که از u به آن‌ها، یالی موجود باشد. به عبارت دقیق‌تر $o(u) := \{v \big| (u, v) \in A\}$. همچنین $O[u] := o(u) \cup \{u\}$ تعریف می‌شود.

تعریف ۲.۴.۲. فرض کنید v رأسی از گراف جهت‌دار $D = (V, A)$ باشد. در این صورت $\deg^o(v)$ که درجه‌ی بیرونی [۵] رأس v نامیده می‌شود، عبارت است از تعداد رئوسی که از v به آن‌ها یالی موجود باشد.

تعریف ۳.۴.۲. فرض کنید $D = (V, A)$ گرافی جهت‌دار و $S \subseteq V$ و

$$O(s) := \bigcup_{u \in S} O(u) \quad , \quad O[S] := \bigcup_{u \in S} O[u].$$

همچنین اگر $O[S] = V$، آنگاه S مجموعه‌ی احاطه‌گر بیرونی برای D است و $\gamma^o(D)$ (عدد احاطه‌گر بیرونی D) اندازه‌ی کوچکترین مجموعه‌ی احاطه‌گر بیرونی گراف D تعریف می‌شود.

تذکر ۴.۴.۲. *اگر $D = (V, A)$ گرافی جهت‌دار باشد، آنگاه درجه‌ی درونی [۶] رأس $w \in V$ و عدد احاطه‌گر درونی D را به‌ترتیب با $\deg^i(w)$ و $\gamma^i(D)$ نمایش داده می‌شود و به‌طور مشابه تعریف می‌شود.*

لم ۵.۴.۲. *فرض کنید V و W، به ترتیب دو فضای m و n بعدی روی میدان $\mathbb{F}$ باشند. در این صورت اگر $L(V, W)$ مجموعه‌ی تمام تبدیلات خطی از V به W باشد، آنگاه $L(V, W) \cong M_{m \times n}(\mathbb{F})$.*

برهان. رجوع کنید به [۱۱، قضیه‌ی ۱۲.۴.۳]. □

[۵] Out Degree
[۶] In-Degree

لم ۶.۴.۲. *فرض کنید V فضای برداری n بعدی روی میدان $\mathbb{F}$ باشد و $T,U \in L(V,V)$. در این صورت $TU = \circ$ اگر و فقط اگر $\mathrm{Im}(T) \subseteq \ker(U)$.*

لم ۷.۴.۲. *فرض کنید R حلقه‌ای دلخواه باشد. در این صورت $\gamma^{\circ}(M_n(R)) = \gamma^i(M_n(R))$.*

برهان. فرض کنید $S = \{B_۱, B_۲, \ldots, B_n\}$ مجموعه‌ی احاطه‌گر بیرونی برای $\Gamma(M_n(R)$ باشد. در این صورت برای هر $A \in \Gamma(M_n(R) \setminus S$، عنصری چون $B_i \in S$ موجود است که $B_iA = \circ$ و لذا $A^tB_i^t = \circ$. از طرفی $\phi : \Gamma(M_n(R)) \longrightarrow \Gamma(M_n(R))$ با ضابطه‌ی $\phi(A) = A^t$، یکریختی است. بنابراین $S' = \{B_۱^t, B_۲^t, \ldots, B_n^t\}$ مجموعه‌ی احاطه‌گر درونی برای $\Gamma(M_n(R))$ است. $\square$

لم ۸.۴.۲. *فرض کنید A مجموعه‌ی احاطه‌گر بیرونی برای $\Gamma(M_n(R))$ باشد. در این صورت $\Gamma(M_n(R))$ دارای مجموعه‌ی احاطه‌گر بیرونی‌ای چون B است که $|B| \leq |A|$ و هر عنصر از مجموعه‌ی B از رتبه‌ی یک است.*

برهان. فرض کنید $T \in A$، v عنصر ناصفری از $\mathrm{Im}(T)$ و $\{\beta_۱, \beta_۲, \ldots, \beta_n\}$ پایه‌ای برای V باشد. حال اگر $T_۱ : V \longrightarrow V$ تابعی باشد که $T_۱(\beta_۱) = v$ و برای هر $i \geq ۲$، $T_۱(\beta_i) = \circ$، آن‌گاه برای هر $w \in V$، عناصری چون $c_۱, c_۲, \ldots, c_n$ از میدان $\mathbb{F}$ وجود دارند که $w = c_۱\beta_۱ + c_۲\beta_۲ + \cdots + c_n\beta_n$. حال

$$T_۱(v) = c_۱T_۱(\beta_۱) + c_۲T_۱(\beta_۲) + \cdots + c_nT_۱(\beta_n) = c_۱T_۱(\beta) = c_۱v.$$

در نتیجه $\mathrm{Im}(T_۱) = \langle v \rangle$. از طرفی $\mathrm{Im}(T_۱) \subseteq \mathrm{Im}(T)$ و هر عنصری که به T مجاور باشد به $T_۱$ نیز مجاور خواهد بود.

$\square$

قضیه ۹.۴.۲. *فرض کنید V فضای برداری $n-$بعدی روی میدان $\mathbb{F}$ باشد و $|\mathbb{F}| = q$. در این صورت*

$$\gamma^o(L(V,V)) = \frac{q^n - ۱}{q - ۱}.$$

برهان. فرض کنید S مجموعه‌ی احاطه‌گر بیرونی برای $\Gamma(L(V,V))$ باشد که $|S| = \gamma^o(L(V,V))$ و v عنصر ناصفری از V باشد. چون $\{v\}$ مستقل است لذا عناصری چون $\alpha_۲, \alpha_۳, \ldots, \alpha_n$ در V وجود دارند که $\{v, \alpha_۲, \ldots, \alpha_n\}$ پایه‌ای برای V است(رجوع کنید به [۱۱]). حال تبدیل $T : V \longrightarrow V$ را با ضابطه‌ی زیر تعریف می‌کنیم:

$$T(v) = \circ$$
$$T(\alpha_i) = \alpha_i, \quad i \geq ۲.$$

حال برای هر $x \in \ker(T)$، عناصری چون $c_۱, c_۲, \ldots, c_n$ از میدان $\mathbb{F}$ وجود دارند که

$$x = c_۱v + c_۲\alpha_۲ + \cdots + c_n\alpha_n.$$

در نتیجه بنابر خطی بودن تبدیل T، خواهیم داشت:

$$T(x) = 0 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_n\alpha_n = 0.$$

لذا برای هر $i \geq 2$، $c_i = 0$. بنابراین $\ker(T) = \langle v \rangle$. اما $T \in \Gamma(L(V,V))$ و در نتیجه عنصری از S مانند T_1 موجود است که $T_1 T = 0$. از طرفی بنابر لم ۶.۴.۲، $\mathrm{Im}(T_1) \subseteq \ker(T)$ و لذا داریم $\mathrm{Im}(T_1) = \ker(T)$. بنابراین $\psi : S \longrightarrow \{\langle v \rangle | 0 \neq v \in V\}$، تابعی پوشا با ضابطه‌ی $\psi(T') = \mathrm{Im}(T')$ است. در نتیجه

$$|S| \geq |\{\langle v \rangle | 0 \neq v \in V\}.$$

طبق لم ۸.۴.۲، $B \subseteq S$ وجود دارد که هر عنصر از مجموعه‌ی B از رتبه‌ی یک و B مجموعه‌ی احاطه‌گر بیرونی است. حال چون $|S| = \gamma^o(\Gamma(L(V,V)))$ لذا $|B| = |S|$. از طرفی

$$|S| = |B| \leq |\{\langle v \rangle | 0 \neq v \in V\}|.$$

بنابراین $|S| = |\{\langle v \rangle | 0 \neq v \in V\}|$. چون تعداد زیرفضای مستقل خطی از بعد یک، برابر با $\frac{q^n-1}{q-1}$ است، در نتیجه خواهیم داشت:

$$\gamma^o(\Gamma(L(V,V))) = \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

$\square$

نتیجه ۱۰.۴.۲. *برای هر عدد طبیعی n، اگر $q = |\mathbb{F}|$، آن‌گاه*

$$\gamma^o(\Gamma(M_n(\mathbb{F}))) = \gamma^i(\Gamma(M_n(\mathbb{F}))) = \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

برهان. بنابر لم ۵.۴.۲ و قضیه‌ی ۹.۴.۲، حکم ثابت می‌شود. $\square$

نتیجه ۱۱.۴.۲. *فرض کنید $\mathbb{F}$ یک میدان باشد و $R = M_n(\mathbb{F})$. در این صورت*

$$S := \{A = [a_{ij}] \mid a_{ij} = \delta_{1i}(\lambda_j) \ \text{و} \ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F} \ \text{و} \ \exists 1 \leq j \leq n : \ \lambda_j = 1\}$$

مجموعه‌ی احاطه‌گر بیرونی $\Gamma(R)$ است.

برهان. می‌دانیم A مقسوم‌علیه صفر $\Gamma(M_n(\mathbb{F}))$ است اگر و فقط اگر سطرهای A، وابسته‌ی خطی باشند. لذا با فرض این‌که $A_1, A_2, \ldots, A_n$، سطرهایی از ماتریس A باشند عناصری چون $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ از میدان $\mathbb{F}$، که همگی صفر نیستند موجوداند که $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 \cdots + \lambda_n A_n = 0$. بدون از دست رفتن کلیت مسأله می‌توان فرض کرد که برای برخی $1 \leq j \leq n$، $\lambda_j = 1$. لذا ماتریسی چون $B \in S$ موجود است که $BA = 0$. بنابراین S مجموعه‌ی احاطه‌گر بیرونی است. $\square$

فصل ۳

احاطه‌گری در گراف‌های ایده‌آل پوچ‌ساز حلقه‌های جابه‌جایی

فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی و یکدار و I ایده‌آلی از R باشد. در این صورت I را ایده‌آل پوچ‌ساز R نامیم هرگاه ایده‌آل ناصفری چون J از R موجود باشد که $IJ = \{0\}$. مجموعه‌ی تمام ایده‌آل‌های پوچ‌ساز R را با $\mathbb{A}(R)$ نشان می‌دهیم. همچنین تعریف می‌کنیم $\mathbb{A}^*(R) := \mathbb{A}(R) \setminus \{0\}$. گراف ایده‌آل پوچ‌ساز حلقه‌ی R را با $\mathbb{AG}(R)$ نشان می‌دهیم که $\mathbb{A}^*(R)$ مجموعه رئوس آن می‌باشد و دو رأس متمایز I_1 و I_2 از $\mathbb{AG}(R)$ با هم مجاورند اگر و فقط اگر $I_1I_2 = \{0\}$.

در این فصل، ابتدا خواص مقدماتی احاطه‌گری را در گراف ایده‌آل پوچ‌ساز حلقه‌های جابه‌جایی بیان می‌کنیم و سپس به مطالعه‌ی احاطه‌گری در گراف ایده‌آل پوچ‌ساز حلقه‌های کاهشی می‌پردازیم و سرانجام عدد احاطه‌گری در گراف ایده‌آل پوچ‌ساز حلقه‌های آرتینی و نوتری را محاسبه می‌کنیم.

در سراسر این فصل، مجموعه رئوس گراف‌های ایده‌آل پوچ‌ساز حلقه‌های جابه‌جایی، غیر تهی فرض می‌شوند.

۱.۳ خواص مقدماتی احاطه‌گری در گراف وابسته به ایده‌آل پوچ‌ساز حلقه‌های جابه‌جایی

در این بخش، خواص مقدماتی احاطه‌گری را در گراف ایده‌آل پوچ‌ساز حلقه‌های جابجایی بیان می‌کنیم.

قضیه ۱.۱.۳. *فرض کنید R یک حلقه باشد. در این صورت $\gamma(\mathbb{AG}) = 1$ اگر و فقط اگر به ازای میدانی چون $\mathbb{F}$ و حوزه‌ی صحیحی چون D، $R \cong \mathbb{F} \oplus D$ یا $Z(R)$ ایده‌آل پوچ‌ساز باشد.*

برهان. ($\Longleftarrow$) فرض کنید $Z(R)$ ایده‌آل پوچ‌ساز نباشد و I_0 ایده‌آلی از $\mathbb{A}^*(R)$، که به سایر رئوس دیگر مجاور باشد. در این صورت اگر a عنصر ناصفری از I_0 باشد، آنگاه $\langle a \rangle \subseteq I_0$. بنابراین $\langle a \rangle$ به سایر رئوس دیگر مجاور است. ابتدا توجه کنید که $a \notin \mathrm{Ann}(a) = I$. زیرا در غیر این صورت

$Z(R)=\mathrm{Ann}(a)$ که متناقض با فرض است. از طرفی Ra یک ایده‌آل مینیمال است. زیرا در غیر این صورت اگر b عنصر ناصفری از حلقه‌ی R باشد که $Rb\subsetneqq Ra$، آنگاه Rb نیز به سایر رئوس دیگر مجاور است. از طرفی برای هر عنصر ناصفری چون x از $Z(R)$، Rx رأسی از $\mathbb{AG}(R)$ است و $(Rx)(Rb)=\{0\}$. لذا $x\in\mathrm{Ann}(b)$. در نتیجه $Z(R)\subseteq\mathrm{Ann}(b)$. حال چون $\mathrm{Ann}(b)\subseteq Z(R)$، در نتیجه $Z(R)=\mathrm{Ann}(b)$ که در تناقض با فرض است. بنابراین Ra ایده‌آل مینیمال حلقه‌ی R است و $(Ra)^2\neq\{0\}$. در نتیجه بنابر لم ۱۸.۲.۱، عنصر خودتوانی از R چون e موجود است که $Ra=Re$. بنابراین $R=Re\oplus R(1-e)$. لذا می‌توان فرض کرد $R=R_1\times R_2$ که در آن $R_1\times\{0\}$ رأسی از گراف $\mathbb{AG}(R)$ است که به سایر رئوس دیگر مجاور است (زیرا اگر $I_1\times I_2$ ایده‌آلی از $R_1\times R_2$ باشد که به سایر رئوس دیگر مجاور باشد، آنگاه $I_1\times I_2=\{0\}\times R_2$ یا $I_1\times I_2=R_1\times\{0\}$). حال نشان می‌دهیم R_1 میدان است. برای این منظور، به برهان خلف فرض کنید R_1 میدان نباشد. در این صورت به ازای عنصر ناصفری چون c از R_1، $R_1c\times\{0\}$ عضوی از $\mathbb{A}^*(R)$ است و $R_1c\times\{0\}\neq R_1\times\{0\}$، بنابراین

$$(R_1\times\{0\})(R_1c\times\{0\})=\{\langle 0,0\rangle\}.$$

لذا $R_1c=\{0\}$ که تناقض است. بنابراین R_1 میدان است. ادعا می‌کنیم R_2 حوزه‌ی صحیح است. برای این منظور، به برهان خلف فرض کنید b عنصر ناصفری از $Z(R_2)$ باشد. در این صورت $R_1\times R_2b$، عنصری از مجموعه‌ی $\mathbb{A}^*(R)$ و نامجاور با رأس $R_1\times\{0\}$ می‌باشد که تناقض است. بنابراین R_2 حوزه‌ی صحیح است.

($\Longrightarrow$) فرض کنید به ازای میدانی چون $\mathbb{F}$ و حوزه‌ی صحیحی چون D، $R=\mathbb{F}\oplus D$. در این صورت $\mathbb{F}\times\{0\}$ رأسی از حلقه‌ی R که به سایر رئوس دیگر مجاور است. در نتیجه $\gamma(\mathbb{AG}(R))=1$.

حال اگر x عنصر ناصفری از حلقه‌ی R باشد که $Z(R)=\mathrm{Ann}(x)$، آنگاه Rx به تمام رئوس دیگر مجاور است و لذا $\gamma(\mathbb{AG}(R))=1$. □

گزاره ۲.۱.۳. *فرض کنید R حلقه باشد. در این صورت*

۱. *اگر $\gamma(\mathbb{AG}(R))=1$، آنگاه $\gamma(\Gamma(R))\in\{1,2\}$.*

۲. *اگر $\gamma(\Gamma(R))=1$، آنگاه $\gamma(\mathbb{AG}(R))=1$.*

برهان. با استفاده از قضیه‌ی ۱.۱.۳ و قضیه‌ی ۲.۱.۲، حکم ثابت می‌شود. □

قضیه ۳.۱.۳. *فرض کنید R حلقه باشد. در این صورت اگر $\gamma(\mathbb{AG}(R))\neq 1$، آنگاه*

$$\gamma_t(\mathbb{AG}(R))=\gamma(\mathbb{AG}(R)) \quad \text{یا} \quad \gamma_t(\mathbb{AG}(R))=\gamma(\mathbb{AG}(R))+1.$$

برهان. فرض کنید $\gamma_t(\mathbb{AG}(R))\neq\gamma(\mathbb{AG}(R))$ و D مجموعه‌ی احاطه‌گری برای $\mathbb{AG}(R)$ باشد که $|D|=\gamma(\mathbb{AG}(R))$. نشان خواهیم داد $\gamma_t(\mathbb{AG}(R))=\gamma(\mathbb{AG}(R))+1$. برای این منظور، فرض کنید

$$k=\max\{n|\exists\, I_1,I_2,\ldots,I_n\in D;\ \prod_{i=1}^{n}I_i\neq 0\}.$$

چون $\gamma(\mathbb{AG}(R)) \neq \gamma_t(\mathbb{AG}(R))$، در نتیجه $k \geq ۲$. حال

$$S := \{\prod_{i=۱}^{k} I_i,\ \mathrm{Ann}I_۱, \mathrm{Ann}I_۲, \ldots, \mathrm{Ann}I_k\} \cup D \setminus \{I_۱, I_۲, \ldots, I_k\}$$

مجموعه‌ی احاطه‌گر کلی برای گراف $\mathbb{AG}(R)$ است و در نتیجه

$$\gamma_t(\mathbb{AG}(R)) \leq |D| + ۱ = \gamma(\mathbb{AG}(R)) + ۱.$$

از طرفی چون $\gamma(\mathbb{AG}(R)) \neq \gamma_t(\mathbb{AG}(R))$، لذا $\gamma(\mathbb{AG}(R)) + ۱ \leq \gamma_t(\mathbb{AG}(R))$. بنابراین

$$\gamma_t(\mathbb{AG}(R)) = \gamma(\mathbb{AG}(R)) + ۱.$$

□

تعریف ۴.۱.۳. زیر مجموعه‌ی S از رئوس گراف $\mathbb{AG}(R)$ را یک مجموعه‌ی احاطه‌گر نیم‌کلی برای $\mathbb{AG}(R)$ نامیم هرگاه

۱. S یک مجموعه‌ی احاطه‌گر برای $\mathbb{AG}(R)$ باشد.
۲. برای هر $I \in S$، $J \in S$ موجود باشد(نه لزوماً متمایز) که $IJ = \{۰\}$.

همچنین

$$\gamma_{st}(\mathbb{AG}(R)) := \min\{|S| \mid \text{یک مجموعه‌ی احاطه‌گر نیم‌کلی برای } \mathbb{AG}(R) \text{ باشد} S\}$$

تعریف می‌شود.

تذکر ۵.۱.۳. *مشابه لم ۷.۱.۲ و برهان آن، نامساوی زیر را خواهیم داشت:*

$$\gamma(\mathbb{AG}(R)) \leq \gamma_{st}(\mathbb{AG}(R)) \leq ۲\gamma(\mathbb{AG}(R)).$$

قضیه ۶.۱.۳. *فرض کنید R حلقه‌ای باشد که حاصل‌ضرب دو حلقه‌ی غیر صفر باشد. در این صورت*

۱. اگر به ازای میدانی چون $\mathbb{F}$ و حوزه‌ی صحیحی چون D، $R \cong \mathbb{F} \times D$، آن‌گاه $\gamma(\mathbb{AG}(R)) = ۱$.
۲. اگر به ازای حوزه‌های صحیحی چون $D_۱$ و $D_۲$، که میدان نباشند و $R \cong D_۱ \times D_۲$، آن‌گاه

$$\gamma(\mathbb{AG}(R)) = ۲.$$

۳. اگر $R \cong R_۱ \times D$، که D حوزه‌ی صحیح و $R_۱$ حوزه‌ی صحیح نباشد، آن‌گاه

$$۱ + \gamma(\mathbb{AG}(R_۱)) \leq \gamma(\mathbb{AG}(R)) \leq ۱ + \gamma_{st}(\mathbb{AG}(R_۱)).$$

۴. اگر $R_۱$ و $R_۲$ حوزه‌های صحیح نباشند و $R \cong R_۱ \times R_۲$، آن‌گاه خواهیم داشت:

$$\gamma(\mathbb{AG}(R)) \leq \gamma_{st}(\mathbb{AG}(R_۱)) + \gamma_{st}(\mathbb{AG}(R_۲)).$$

برهان. ۱. $\mathbb{F} \times \{0\}$ ایده‌آلی از حلقه‌ی $\mathbb{F} \times D$ است که به سایر رئوس دیگر از گراف $\mathbb{AG}(R)$ مجاور است. بنابراین $\gamma(\mathbb{AG}(R)) = \gamma(\mathbb{AG}(\mathbb{F} \times D)) = 1$.

۲. می‌دانیم

$$V(\mathbb{AG}(D_1 \times D_2)) = \{I_1 \times \{0\} \big| \{0\} \neq I_1 \trianglelefteq D_1\} \cup \{\{0\} \times I_2 \big| \{0\} \neq I_2 \trianglelefteq D_2\}.$$

در نتیجه $\mathbb{AG}(D_1 \times D_2)$ یک گراف دوبخش کامل با بخش‌های بیش از یک عضو می‌باشد. بنابراین

$$\gamma(\mathbb{AG}(D_1 \times D_2)) = 2.$$

۳. فرض کنید $\gamma_{st}(\mathbb{AG}(R_1)) = n$ و $T = \{I_1, I_2, \ldots, I_n\}$ مجموعه‌ی احاطه‌گر نیم‌کلی برای $\mathbb{AG}(R_1)$ باشد. چون

$$\begin{aligned} V(\mathbb{AG}(R)) =& \{I \times J \big| I \in V(\mathbb{AG}(R_1)), \{0\} \neq J \trianglelefteq D\} \\ & \cup \{I \times \{0\} \big| \{0\} \neq I \trianglelefteq R_1\} \cup \{\{0\} \times J \big| \{0\} \neq J \trianglelefteq D\} \end{aligned}$$

لذا $T' = \{I_1 \times \{0\}, I_2 \times \{0\}, \ldots, I_n \times \{0\}, \{0\} \times D\}$ مجموعه‌ی احاطه‌گر برای $\mathbb{AG}(R)$ است و در نتیجه

$$\gamma(\mathbb{AG}(R)) \leq 1 + \gamma_{st}(\mathbb{AG}(R_1)).$$

حال برای اثبات قسمت دوم فرض کنید $S = \{I_1 \times J_1, \ldots, I_m \times J_m\}$ مجموعه‌ی احاطه‌گر برای $\mathbb{AG}(R_1 \times D)$ باشد و $\gamma(\mathbb{AG}(R_1 \times D)) = m$. در این صورت چون $R_1 \times \{0\}$ رأسی از $\mathbb{AG}(R_1 \times D)$ است، لذا $R_1 \times \{0\} \in S$ یا $R_1 \times \{0\}$ به یکی از اعضای S مانند $I_j \times J_j$ وصل خواهد شد که در این حالت، $I_j = \{0\}$. بنابراین در هر حالت، $1 \leq j \leq m$ وجود دارد که $I_j = \{0\}$ یا $I_j = R_1$. از طرفی برای هر $I \in \mathbb{AG}(R_1)$، $I \times D$ رأسی از $\mathbb{AG}(R_1 \times D)$ است و لذا $I \times D \in S$ یا $I \times D$ با یکی از اعضای S مجاور است. در هر حالت $1 \leq j \leq m$ وجود دارد که $I = I_j$ یا $II_j = \{0\}$ و لذا $V(\mathbb{AG}(R_1)) \cap \{I_1, I_2, \ldots, I_m\}$ یک مجموعه‌ی احاطه‌گر برای $\mathbb{AG}(R_1)$ است. چون $V(\mathbb{AG}(R_1)) \cap \{I_1, I_2, \ldots, I_m\} \leq m - 1$، لذا

$$\gamma(\mathbb{AG}(R_1)) + 1 \leq m - 1 + 1 = m = \gamma(\mathbb{AG}(R_1 \times D)).$$

۴. فرض کنید $S_1 = \{I_1, I_2, \ldots, I_m\}$ و $S_2 = \{J_1, J_2, \ldots, J_n\}$ به‌ترتیب دو مجموعه‌ی احاطه‌گر نیم‌کلی برای $\mathbb{AG}(R_1)$ و $\mathbb{AG}(R_2)$ باشند که $\gamma_{st}(\mathbb{AG}(R_1)) = m$ و $\gamma_{st}(\mathbb{AG}(R_2)) = n$. در این صورت چون

$$\begin{aligned} V(\mathbb{AG}(R)) =& \{I \times J \big| I \in V(\mathbb{AG}(R_1)), \{0\} \neq J \trianglelefteq R_2\} \cup \{I \times \{0\} \big| \{0\} \neq I \trianglelefteq R_1\} \\ & \cup \{\{0\} \times J \big| \{0\} \neq J \trianglelefteq R_2\} \cup \{I \times J \big| \{0\} \neq I \trianglelefteq R_1, J \in V(\mathbb{AG}(R_2))\} \end{aligned}$$

لذا

$$S_1 \cup S_2 = \{I_1 \times \{0\}, I_2 \times \{0\}, \ldots, I_m \times \{0\}, \{0\} \times J_1, \{0\} \times J_2, \ldots, \{0\} \times J_n\}$$

مجموعه‌ی احاطه‌گر برای $\mathbb{AG}(R)$ است و در نتیجه خواهیم داشت:

$$\gamma(\mathbb{AG}(R)) \leq \gamma_{st}(\mathbb{AG}(R_۱)) + \gamma_{st}(\mathbb{AG}(R_۲)).$$

□

تذکر ۷.۱.۳. *قسمت سوم از قضیه‌ی ۶.۱.۳، در [۱۶، قضیه‌ی ۹.۲]، به‌صورت*

$$\gamma(\mathbb{AG}(R)) = ۱ + \gamma(\mathbb{AG}(R_۱))$$

آمده است که برهان آن دارای اشکال می‌باشد و در حالت کلی تساوی برقرار نیست. به عنوان مثال در حالت $D = \mathbb{Z}_۲$ و $R_۱ = \mathbb{Z}_۶$، $\gamma(\mathbb{AG}(R)) = ۳$، اما $۱ + \gamma(\mathbb{AG}(R_۱)) = ۲$ و لذا

$$\gamma(\mathbb{AG}(R)) \neq ۱ + \gamma(\mathbb{AG}(R_۱)).$$

تذکر ۸.۱.۳. *با فرض این‌که $R_۱$ و $R_۲$ حوزه‌های صحیح نباشند و $R = R_۱ \times R_۲$، قسمت چهارم از قضیه‌ی ۶.۱.۳ در [۱۶، قضیه‌ی ۹.۲]، به صورت*

$$\gamma(\mathbb{AG}(R)) = \gamma(\mathbb{AG}(R_۱)) + \gamma(\mathbb{AG}(R_۲))$$

آمده است که برهان ارائه شده از آن دارای اشکال می‌باشد و در حالت کلی تساوی برقرار نیست. زیرا اگر $R_۱ = \mathbb{Z}_۶$ و $R_۲ = \mathbb{Z}_۴$، آن‌گاه $D_۱ = \{\langle ۳\rangle\}$ و $D_۲ = \{\langle ۲\rangle\}$ به‌ترتیب دو مجموعه‌ی احاطه‌گر برای $R_۱$ و $R_۲$ می‌باشند و لذا $\gamma(\mathbb{AG}(R_۱)) + \gamma(\mathbb{AG}(R_۲)) = ۲$. از طرفی به‌سادگی می‌توان مشاهده کرد که $\gamma(\mathbb{AG}(R)) = ۳$ و لذا $\gamma(\mathbb{AG}(R)) \neq \gamma(\mathbb{AG}(R_۱)) + \gamma(\mathbb{AG}(R_۲))$.

۲.۳ احاطه‌گری در گراف وابسته به ایده‌آل پوچ‌ساز حلقه‌ی نوتری

در این بخش، به محاسبه‌ی عدد احاطه‌گر و احاطه‌گر کلی و رابطه‌ی بین آن‌ها در گراف ایده‌آل پوچ‌ساز حلقه‌های نوتری می‌پردازیم.

قضیه ۱.۲.۳. *اگر R حلقه‌ی نوتری و M مجموعه‌ی متشکل از اعضای ماکسیمال $\mathbb{A}(R)$ باشد که $|M| > ۱$، آن‌گاه $\gamma_t(\mathbb{AG}(R)) = |M|$.*

برهان. فرض کنید M مجموعه‌ای از اعضای ماکسیمال $\mathbb{A}(R)$ باشد و $I \in M$. نشان خواهیم داد $I = \mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}\ I)$. چون I عنصری از M است، در نتیجه $\mathrm{Ann(I)} \neq ۰$. لذا فرض کنید x عنصر ناصفری از $\mathrm{Ann}(I)$ باشد. واضح است که

$$I \subseteq \mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(I)) \qquad (۱.۳)$$

حال اگر y' عنصر دلخواهی $\mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(I))$ باشد، آن‌گاه $y'\mathrm{Ann}(I) = ۰$. چون $x \in \mathrm{Ann}(I)$، لذا $y'x = ۰$. در نتیجه

$$\mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(I)) \subseteq \mathrm{Ann}(x). \qquad (۲.۳)$$

بنابراین از مقایسه‌ی رابطه‌های (۱.۳) و (۲.۳) داریم:

$$I \subseteq \mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(I)) \subseteq \mathrm{Ann}(x).$$

حال چون I عنصر ماکسیمال M است و $\mathrm{Ann}(x) \in M$ لذا $I = \mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(I)) = \mathrm{Ann}(x)$. بنابراین برای هر $I \in M$، $0 \neq x_I \in R$ وجود دارد که $I = \mathrm{Ann}(x_I)$. حال نشان خواهیم داد $D = \{Rx_I | I \in M\}$ مجموعه‌ی احاطه‌گر کلی برای $\mathbb{AG}(R)$ است. برای این منظور، عنصر دلخواه $J \in \mathbb{A}(R)$ را در نظر بگیرید. چون R نوتری است لذا ایده‌آلی چون $I \in M$ موجود است که $J \subseteq I = \mathrm{Ann}(x_I)$. در نتیجه J با ایده‌آل Rx_I مجاور است. چون $|M| > 1$، لذا به ازای دو ایده‌آل متمایز $I, I' \in M$، $Rx_I Rx_{I'} = \{0\}$. زیرا در غیر این صورت اگر x عنصر ناصفری از $Rx_I Rx_{I'}$ باشد، آن‌گاه $x \in Rx_I \cap Rx_{I'}$. در نتیجه به ازای عنصری چون $r \in R$، $x = rx_I$ و به ازای $r' \in R$، $x = r' x_{I'}$ و لذا

$$\mathrm{Ann}(x) = \mathrm{Ann}(r' x_{I'}) = \mathrm{Ann}(rx_I). \qquad (۳.۳)$$

از طرفی

$$I = \mathrm{Ann}(\mathrm{x_I}) \subseteq \mathrm{Ann}(rx_I),$$
$$I' = \mathrm{Ann}(\mathrm{x_{I'}}) \subseteq \mathrm{Ann}(rx_{I'})$$

در نتیجه بنابر ماکسیمال بودن ایده‌آل‌های I, I' و رابطه‌ی (۳.۳) داریم:

$$I = \mathrm{Ann}(x_I) = \mathrm{Ann}(rx_I) = \mathrm{Ann}(x),$$
$$I' = \mathrm{Ann}(x_{I'}) = \mathrm{Ann}(rx_{I'}) = \mathrm{Ann}(x).$$

در نتیجه $I = I' = \mathrm{Ann}(x)$. که در تناقض با متمایز بودن I و I' است. بنابراین خواهیم داشت:

$$\gamma_t(\mathbb{AG}(R)) \leq |M|.$$

حال فرض کنید D_1 مجموعه‌ی احاطه‌گر برای $\mathbb{AG}(R)$ باشد و $\gamma_t(\mathbb{AG}(R)) = |D_1|$. حال برای کامل کردن اثبات، نشان خواهیم داد که هر عنصر متعلق به مجموعه‌ی D_1 دقیقاً به یک عنصر از مجموعه‌ی M مجاور است. برای این منظور، به برهان خلف فرض کنید عنصری چون K از D_1، به دو عنصر متمایز I و I' از M مجاور باشد. در این صورت خواهیم داشت $IK = I'K = \{0\}$. در نتیجه

$$I \subseteq \mathrm{Ann}(K) \quad , \quad I' \subseteq \mathrm{Ann}(K)$$

لذا بنابر ماکسیمال بودن ایده‌آل‌های I و I' داریم:

$$I = I' = \mathrm{Ann}(K)$$

که تناقض است. در نتیجه $\gamma_t(\mathbb{AG}(R)) = |M| \leq \gamma_t(\mathbb{AG}(R))$. بنابراین $\gamma_t(\mathbb{AG}(R)) = |M|$. $\square$

نتیجه ۲.۲.۳. *اگر R حلقه‌ی نوتری و M مجموعه‌ی متشکل از اعضای ماکسیمال $\mathbb{A}(R)$ باشد که $|M| > ۱$، آن‌گاه $\gamma_t(\Gamma(R)) \leq \gamma_t(\mathbb{AG}(R))$.*

برهان. فرض کنید $\gamma_t(\mathbb{AG}(R)) = k$. در این صورت بنابر قضیه‌ی ۱.۲.۳ و برهان آن، چون R حلقه‌ی نوتری است لذا عنصری چون $x_i \in R$ $(i = ۱, ۲ \ldots, k)$ موجود است که $\mathrm{Ann}(x_i)$ عنصر ماکسیمالی از $\mathbb{A}(R)$ است و همچنین $D = \{Rx_۱, \ \ldots, \ Rx_k\}$ مجموعه‌ی احاطه‌گر کلی برای $\mathbb{AG}(R)$ است که $\gamma_t(\mathbb{AG}(R)) = k$. در نتیجه $D' = \{x_۱, \ \ldots, \ x_k\}$ یک مجموعه‌ی احاطه‌گر کلی برای $\Gamma(R)$ است. بنابراین

$$\gamma_t(\Gamma(R)) \leq \gamma_t(\mathbb{AG}(R)).$$

□

قضیه ۳.۲.۳. *فرض کنید R حلقه‌ی نوتری باشد. در این صورت*

$$\gamma(\mathbb{AG}(R)) \leq |\mathrm{Ass}(R)| < \infty.$$

برهان. چون R حلقه‌ی نوتری است، پس $|\mathrm{Ass}(R)| < \infty$. لذا فرض کنید $\mathrm{Ass}(R) = \{\mathfrak{p}_۱, \mathfrak{p}_۲, \ldots, \mathfrak{p}_n\}$ و x_i $(i = ۱, ۲, \ldots, n)$ ها عناصر ناصفری از حلقه‌ی R باشند که $\mathfrak{p}_i = \mathrm{Ann}(x_i)$. قرار دهید:

$$A = \{Rx_i \big| ۱ \leq i \leq n\}.$$

نشان خواهیم داد A مجموعه‌ی احاطه‌گر برای گراف $\mathbb{AG}(R)$ است. برای این منظور، فرض کنید I رأسی از $\mathbb{AG}(R)$ باشد. در این صورت

$$I \subseteq Z(R) = \bigcup_{i=۱}^{n} \mathfrak{p}_i.$$

لذا بنابر قضیه‌ی ۴.۲.۱، به ازای $۱ \leq i \leq n$، $I \subseteq \mathfrak{p}_i$. در نتیجه $IRx_i = \{۰\}$. لذا A مجموعه‌ی احاطه‌گر برای $\mathbb{AG}(R)$ است. بنابراین

$$\gamma(\mathbb{AG}(R)) \leq |\mathrm{Ass}(R)|.$$

□

در مثال زیر مشاهده خواهیم کرد که حالت تساوی در قضیه‌ی فوق، ممکن است برقرار نباشد.

مثال ۴.۲.۳. اگر K میدان و $R = \frac{K[x,y]}{\langle x^۲, xy\rangle}$ آن‌گاه $\mathrm{Ass}(R) = \{\langle \bar{x}\rangle, \langle \bar{x}, \bar{y}\rangle\}$ $(\bar{x} = x + \langle x^۲, xy\rangle)$ و $\gamma(\mathbb{AG}(R)) = ۱$. (زیرا ایده‌آل $\langle \bar{x}\rangle$ به سایر رئوس دیگر مجاور است.)

گزاره ۵.۲.۳. *فرض کنید R حلقه‌ی آرتینی باشد. در این صورت با توجه به نمادهای تذکر ۱.۲.۲،*

۱. *اگر $n \geq ۲$، آن‌گاه $\gamma(\mathbb{AG}(R)) \leq n$*

۲. *اگر R حلقه‌ی موضعی باشد، آن‌گاه $\gamma(\mathbb{AG}(R)) = \gamma_{st}(\mathbb{AG}(R)) = ۱$.*

برهان. ۱. چون $(R_i, \mathfrak{m}_i)$ $(i = ۱, ۲, \ldots, n)$ ها، حلقه‌های موضعی می‌باشند، لذا بنابر نتیجه‌ی ۲۴.۲.۱، عنصر ناصفری چون $x_i \in R_i$ وجود دارد که:

$$Z(R_i) = \mathfrak{m}_i = \mathrm{Ann}(x_i), \quad i = ۱, ۲, \ldots, n.$$

بنابراین

$$D = \{\langle x_۱\rangle\times\{۰\}\times\{۰\}\times\cdots\times\{۰\}, \{۰\}\times\langle x_۲\rangle\times\{۰\}\times\cdots\times\{۰\}, \ldots, \{۰\}\times\{۰\}\times\cdots\times\langle x_n\rangle\}$$

مجموعه‌ی احاطه‌گر برای $\mathbb{AG}(R)$ است و لذا خواهیم داشت:

$$\gamma(\mathbb{AG}(R)) \leq n.$$

۲. فرض کنید R حلقه‌ی موضعی با ایده‌آل ماکسیمال $\mathfrak{m}$ باشد. در این صورت بنابر نتیجه‌ی ۲۴.۲.۱، عنصر ناصفری چون $x \in R$ موجود است که $Z(R) = \mathfrak{m} = \mathrm{Ann}(x)$. در نتیجه $S = \{\langle x\rangle\}$ یک مجموعه‌ی احاطه‌گر است و لذا $\gamma(\mathbb{AG}(R)) = ۱$. از طرفی چون $x \in Z(R)$، پس $x^۲ = ۰$ و در نتیجه $\langle x\rangle^۲ = \{۰\}$. بنابراین S مجموعه‌ی احاطه‌گر نیم‌کلی است و لذا $\gamma_{st}(\mathbb{AG}(R)) = ۱$. □

قضیه ۶.۲.۳. *اگر R حلقه‌ی آرتینی غیر موضعی باشد و R با حاصل‌ضرب دو میدان یکریخت نباشد، آن‌گاه $\gamma(\mathbb{AG}(R)) = \gamma_t(\mathbb{AG}(R)) = |\mathrm{Min}(R)|$.*

برهان. چون R حلقه‌ی آرتینی است لذا هر ایده‌آل آن متعلق به $\mathbb{A}(R)$ می‌باشد. پس عناصر ماکسیمال $\mathbb{A}(R)$ با $\mathrm{Max}(R)\ (= \mathrm{Min}(R))$ برابر است. چون R غیر موضعی است، بنابر قضیه‌ی ۱.۲.۳،

$$\gamma_t(\mathbb{AG}(R)) = |\mathrm{Max}(R)|.$$

از طرفی بنابر تذکر ۱.۲.۲، حلقه‌ی R، با حاصل‌ضرب حلقه‌های موضعی آرتینی $(R_i, \mathfrak{m}_i)$ $(i = ۱, \ldots, n)$ یکریخت است و نیز

$$\mathrm{Max}(R) = \{\mathfrak{n}_i = R_۱ \times \cdots \times R_{i-۱} \times \mathfrak{m}_i \times R_{i+۱} \times \cdots \times R_n \big| ۱ \leq i \leq n\}.$$

ادعا می‌کنیم $\gamma(\mathbb{AG}(R)) = n$. برای این منظور، به برهان خلف فرض کنید $D = \{J_۱, J_۲, \ldots, J_{n-۱}\}$ مجموعه‌ی احاطه‌گر برای گراف $\mathbb{AG}(R)$ باشد. چون R با حاصل‌ضرب دو میدان یکریخت نیست، لذا به ازای i، t و s که $۱ \leq i \leq n-۱$ و $۱ \leq t, s \leq n$، داریم:

$$J_i\mathfrak{n}_s = J_i\mathfrak{n}_t = \{۰\}.$$

در نتیجه $J_i = \{۰\}$ که تناقض است. □

قضیه ۷.۲.۳. *فرض کنید R حلقه‌ی نوتری و کاهشی باشد و همچنین $|\mathrm{Min}(R)| < \infty$. در این صورت اگر $\gamma(\mathbb{AG}(R)) > ۱$، آن‌گاه*

$$\gamma(\mathbb{AG}(R)) = \gamma_t(\mathbb{AG}(R)) = |\mathrm{Min}(R)|.$$

برهان. چون R حلقه‌ی کاهشی و $\gamma(\mathbb{AG}(R)) > ۱$، پس $|\mathrm{Min}(R)| > ۱$ (زیرا اگر $|\mathrm{Min}(R)| = ۱$، آن‌گاه با فرض این‌که $\mathfrak{p}$ تنها ایده‌آل مینیمال حلقه‌ی R باشد، آن‌گاه بنابر نتیجه‌ی ۱۲.۲.۱، خواهیم داشت $\mathrm{Nil}(R) = \mathfrak{p} = \{۰\}$ و در نتیجه R حوزه‌ی صحیح است و $V(\mathbb{AG}(R_۱)) = \emptyset$ که تناقض است). لذا فرض کنید $n \geq ۲$، $\mathrm{Min}(R) = \{\mathfrak{p}_۱, \mathfrak{p}_۲, \ldots, \mathfrak{p}_n\}$ و $\mathfrak{p}_i$ ها متمایز باشند.

اگر $n = ۲$، آن‌گاه بنابر نتیجه‌ی ۱۲.۲.۱ و قضیه‌ی ۱۴.۲.۱، $\mathfrak{p}_۱ \cap \mathfrak{p}_۲ = \{۰\}$ و $Z(R) = \mathfrak{p}_۱ \cup \mathfrak{p}_۲$. حال فرض کنید I رأس دلخواهی از $\mathbb{AG}(R)$ باشد. در این صورت $I \subseteq \mathfrak{p}_۱ \cup \mathfrak{p}_۲$. لذا بنابر قضیه‌ی ۴.۲.۱، $i \in \{۱, ۲\}$ وجود دارد که $I \subseteq \mathfrak{p}_i$. حال نشان خواهیم داد که $\mathbb{AG}(R)$ گرافی دوبخشی کامل با بخش‌های $\mathbb{A}(R) \cap P(\mathfrak{p}_۱)$ و $\mathbb{A}(R) \cap P(\mathfrak{p}_۲)$ است[۱]. برای این منظور، فرض کنید $I_۱$ و $I_۲$ دو رأس از $\mathbb{AG}(R)$ باشند که

$$I_۱, I_۲ \subseteq \mathfrak{p}_j, \quad j \in \{۱, ۲\}.$$

در این صورت $I_۱ I_۲ \neq \{۰\}$. حال اگر I و J رئوسی از $\mathbb{AG}(R)$ باشند که $I \subseteq \mathfrak{p}_۱$ و $J \subseteq \mathfrak{p}_۲$، آن‌گاه

$$IJ \subseteq \mathfrak{p}_۱ \cap \mathfrak{p}_۲ = \{۰\}.$$

بنابراین $\mathbb{AG}(R)$ یک گراف دو بخشی کامل است و چون طبق فرض، $\gamma(\mathbb{AG}(R)) > ۱$، لذا $\gamma(\mathbb{AG}(R)) = ۲$.

حال فرض کنید $n \geq ۳$، و

$$\hat{\mathfrak{p}}_i = \mathfrak{p}_۱ \mathfrak{p}_۲ \ldots \mathfrak{p}_{i-۱} \mathfrak{p}_{i+۱} \ldots \mathfrak{p}_n, \quad i = ۱, ۲, \ldots, n.$$

در این صورت بنابر نتیجه‌ی ۱۲.۲.۱، برای هر $i \in \{۱, \ldots, n\}$، $\hat{\mathfrak{p}}_i \neq \{۰\}$ و $\hat{\mathfrak{p}}_i \mathfrak{p}_i = \{۰\}$. بنابراین $\mathfrak{p}_i$ رأسی از $\mathbb{AG}(R)$ است. حال اگر I رأس دلخواهی از $\mathbb{AG}(R)$ باشد، آن‌گاه بنابر قضیه‌ی ۱۴.۲.۱،

$$I \subseteq Z(R) = \bigcup_{i=۱}^{n} \mathfrak{p}_i.$$

لذا بنابر قضیه‌ی ۴.۲.۱، $i \in \{۱, \ldots n\}$ وجود دارد که $I \subseteq \mathfrak{p}_i$. بنابراین به ازای هر $i \in \{۱, \ldots, n\}$، $\mathfrak{p}_i$ عنصر ماکسیمال $A(R)$ است و لذا بنابر قضیه‌ی ۱.۲.۳،

$$\gamma_t(\mathbb{AG}(R)) = |\mathrm{Min}(R)|.$$

نشان می‌دهیم $\gamma(\mathbb{AG}(R)) = n$. به برهان خلف فرض کنید $B = \{J_۱, \ldots, J_{n-۱}\}$ مجموعه‌ی احاطه‌گر برای $\mathbb{AG}(R)$ باشد. در این صورت حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

۱. اگر $B \cap \mathrm{Min}(R) = \emptyset$، آن‌گاه بنابر اصل لانه‌ی کبوتری، ایده‌آل‌هایی چون $\mathfrak{p}_s$ و $\mathfrak{p}_t$ از $\mathrm{Min}(R)$ و $J_l \in B$ موجوداند که $J_l \mathfrak{p}_t = J_l \mathfrak{p}_s = \{۰\}$. پس $J_l \mathfrak{p}_s \subseteq \mathfrak{p}_t = \{۰\}$. چون $\mathfrak{p}_s \not\subseteq \mathfrak{p}_t$، لذا $J_l \subseteq \mathfrak{p}_t$ و لذا $J_l \mathfrak{p}_t = \{۰\}$. $J_l^۲ \subseteq J_l \mathfrak{p}_t = \{۰\}$. بنابراین $J_l^۲ = \{۰\}$. چون R کاهشی است، لذا $J_l = \{۰\}$ که تناقض است.

۲. فرض کنید $B \cap \mathrm{Min}(R) \neq \emptyset$. می‌دانیم به ازای $i \neq j$، ایده‌آل‌های $\mathfrak{p}_i$ و $\mathfrak{p}_j$ غیر مجاورند. زیرا در غیر این صورت چون $n \geq ۳$، لذا ایده‌آلی چون $\mathfrak{p}_k \in \mathrm{Min}(R) \setminus \{\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_j\}$ موجود است. از طرفی

[۱] $P(\mathfrak{p}_i)$ $(i = ۱, ۲)$، مجموعه‌ی توانی $\mathfrak{p}_i$ است.

$\mathfrak{p}_k \subseteq \mathfrak{p}_i\mathfrak{p}_j = \{\circ\}$ و در نتیجه $\mathfrak{p}_i \subseteq \mathfrak{p}_k$ یا $\mathfrak{p}_j \subseteq \mathfrak{p}_k$. حال بنابر مینیمال بودن ایده‌آل‌های $\mathfrak{p}_i$ و $\mathfrak{p}_j$، $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}_k$ یا $\mathfrak{p}_j = \mathfrak{p}_k$ که تناقض است. از طرفی B با مجموعه‌ی $\{\mathfrak{p}_۱, \dots, \mathfrak{p}_{n-۱}\}$، برابر نیست. زیرا در غیر این صورت به ازای $i \neq n$، ایده‌آل $\mathfrak{p}_n$ با ایده‌آل $\mathfrak{p}_i$ مجاور است که تناقض است. فرض کنید $k < n - ۱$، و به ازای $i = ۱, ۲, \dots, k$، $J_i := \mathfrak{p}_i$ و $\{J_{k+۱}, \dots, J_{n-۱}\} \cap \mathrm{Min}(R) = \emptyset$. پس هر ایده‌آل از مجموعه‌ی $\{\mathfrak{p}_{k+۱}, \dots, \mathfrak{p}_n\}$، به ایده‌آلی از مجموعه‌ی $\{J_{k+۱}, \dots, J_{n-۱}\}$ مجاور است. درنتیجه بنابر اصل لانه‌ی کبوتری، به ازای $u \neq v$ و $k + ۱ \leq i \leq n - ۱$ داریم:

$$\mathfrak{p}_u J_i = \mathfrak{p}_v J_i = \{\circ\}.$$

لذا مشابه حالت ۱، $J_i^۲ = \{\circ\}$ که تناقض است.
بنابراین خواهیم داشت:

$$\gamma(\mathbb{AG}(R)) = \gamma_t(\mathbb{AG}(R)) = |\mathrm{Min}(R)|.$$

□

لم ۸.۲.۳. *فرض کنید R یک حلقه، I ایده‌آلی از R با تولید متناهی باشد و $\mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(R)$. در این صورت اگر $I \subseteq \mathfrak{p}$ آن‌گاه عنصر ناصفری چون $b \in R$ موجود است که $Ib = \{\circ\}$.*

برهان. فرض کنید $\mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(R)$ و $\langle a_۱, a_۲, \dots, a_n \rangle = I \subseteq \mathfrak{p}$. بنابر قضیه‌ی ۲۹.۲.۱،

$$Spec(R_\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{q}^e | \mathfrak{q} \in Spec(R) \text{ و } \mathfrak{q} \cap (R \setminus \mathfrak{p}) = \emptyset\}.$$

از طرفی $\mathfrak{q} \cap (R \setminus \mathfrak{p}) = \emptyset$ معادل $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$ است. چون $\mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(R)$، لذا $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$. بنابراین $Spec(R_\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{p}^e\}$ و در نتیجه $\mathrm{Nil}(R_\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}^e$.

برای هر $۱ \leq i \leq n$، چون $a_i \in I \subseteq p$، لذا $\frac{a_i}{۱} \in \mathfrak{p}^e$ و در نتیجه $n_i \in \mathbb{N}$ وجود دارد که $(\frac{a_i}{۱})^{n_i} = \circ$. قرار دهید $n := n_۱ + n_۲ + \cdots + n_n$. به‌سادگی می‌توان مشاهده کرد که $(I^e)^n = \{\circ\}$. حال فرض کنید n کوچکترین عدد طبیعی باشد که $(I^e)^n = \{\circ\}$. پس $(I^e)^{n-۱} \neq \{\circ\}$ و لذا عنصری چون $\frac{c}{۱} \in (I^e)^{n-۱} \neq \circ$ وجود دارد (اگر $n = ۱$، آنگاه $c = ۱$ اختیار شود). حال برای هر $۱ \leq i \leq n$، $\frac{a_i}{۱} \in I^e$ و لذا $\frac{c}{۱}\frac{a_i}{۱} \in (I^e)^n = \{\circ\}$ و در نتیجه $u_i \in R \setminus \mathfrak{p}$ وجود دارد که $u_i a_i c = \circ$. قرار دهید $b := u_۱ u_۲ \dots u_n c$. توجه کنید که $b \neq \circ$. زیرا در غیر این صورت $\frac{c}{۱} = \frac{\circ}{۱}$ که تناقض است. از طرفی برای هر $۱ \leq i \leq n$ داریم:

$$ba_i = u_۱ u_۲ \dots u_n c a_i = \circ.$$

و لذا $\circ \neq b \in R$ و $Ib = \{\circ\}$. □

نتیجه ۹.۲.۳. *اگر R حلقه‌ای نوتری کاهشی باشد و $\gamma(\mathbb{AG}(R)) > ۱$، آن‌گاه موارد زیر با هم معادل‌اند:*

۱. $\gamma(\mathbb{AG}(R)) = ۲$
۲. *$\mathbb{AG}(R)$ گراف دوبخشی با دو بخش ناتهی است.*
۳. *$\mathbb{AG}(R)$ گراف دوبخشی کامل، با دوبخش ناتهی است.*
۴. *R حلقه‌ای دارای دقیقاً دو ایده‌آل اول مینیمال است.*

برهان. بنابر قضیه‌ی ۷.۲.۳، و برهان آن، هریک از رابطه‌های (۴) $\longrightarrow$ (۱)، (۳) $\longrightarrow$ (۴) برقرار است و همچنین روابط (۱) $\longrightarrow$ (۳) و (۲) $\longrightarrow$ (۳) به وضوح برقرارند.

(۴) $\longrightarrow$ (۲). چون $\gamma(\mathbb{AG}(R)) > ۱$ و R کاهشی است، لذا $|\mathrm{Min}(R)| > ۱$. به برهان خلف فرض کنید R دارای حداقل سه ایده‌آل اول مینیمال متمایزی چون $\mathfrak{p}_۱$، $\mathfrak{p}_۲$ و $\mathfrak{p}_۳$ باشد و $b_۱ \in \mathfrak{p}_۱ \cap \mathfrak{p}_۲ \setminus \mathfrak{p}_۳$. بنابر لم ۱۳.۲.۱، $\mathfrak{p}_۱ \subseteq Z(R)$ و لذا $b_۱ \in Z(R)$. بنابراین $۰ \neq c \in R$ وجود دارد که $c \in \mathrm{Ann}(b_۱)$.

حال فرض کنید $d \in \mathfrak{p}_۱ \setminus \mathfrak{p}_۲ \cup \mathfrak{p}_۳$ و همچنین قرار دهید $b_۲ := cd$. چون $\mathrm{Ann}(b_۱) \subseteq \mathfrak{p}_۳$ و $d \in \mathfrak{p}_۱$، لذا $b_۲ \in \mathfrak{p}_۱ \cap \mathfrak{p}_۳$. چون $c \in \mathrm{Ann}(b_۱)$، لذا ایده‌آل‌های $\langle b_۱ \rangle$ و $\langle b_۲ \rangle$، مجاورند. از طرفی $\langle b_۱ \rangle + \langle b_۲ \rangle$ ایده‌آلی با تولید متناهی و $\langle b_۱ \rangle + \langle b_۲ \rangle \subseteq \mathfrak{p}_۱$، لذا بنابر لم ۸.۲.۳، عنصر ناصفری چون $b_۳$ از R موجود است که $b_۳(\langle b_۱ \rangle + \langle b_۲ \rangle) = ۰$. لذا ایده‌آل‌های $\langle b_۱ \rangle$، $\langle b_۳ \rangle$ و $\langle b_۲ \rangle$، $\langle b_۳ \rangle$ مجاورند که متناقض با دوبخشی بودن گراف $\mathbb{AG}(R)$ است. (توجه کنید که $b_۳$ با $b_۱$ و $b_۲$ برابر نیست، زیرا در غیر این صورت مثلاً اگر $b_۳ = b_۱$، آنگاه $b_۱^۲ = ۰$ و چون R کاهشی است، لذا $b_۱ = ۰$ که تناقض است.) $\square$

نتیجه ۱۰.۲.۳. *فرض کنید R حلقه‌ی نوتری و کاهشی باشد و همچنین $|\mathrm{Min}(R)| < \infty$. در این صورت اگر $\gamma(\mathbb{AG}(R)) \neq ۱$، آنگاه $\gamma(\mathbb{AG}(R)) = \gamma(\Gamma(R))$.*

برهان. اگر $\gamma(\Gamma(R)) = ۱$، آنگاه بنابر قضایای ۲.۱.۲ و ۱.۱.۳، $\gamma(\mathbb{AG}(R)) = ۱$ که متناقض با فرض است. لذا فرض کنید $\gamma(\Gamma(R)) > ۱$. در این صورت بنابر قضیه‌ی ۱۷.۱.۲، خواهیم داشت $\gamma(\Gamma(R)) = |\mathrm{Min}(R)|$. از طرفی بنابر قضیه‌ی ۷.۲.۳، $|\mathrm{Min}(R)| = \gamma(\mathbb{AG}(R))$ و در نتیجه $\gamma(\mathbb{AG}(R)) = \gamma(\Gamma(R))$. $\square$

لم ۱۱.۲.۳. *فرض کنید R حلقه باشد. در این صورت $\mathbb{AG}(R)$ یک گراف همبند است.*

برهان. فرض کنید I و J دو رأس متمایز $\mathbb{AG}(R)$ باشند. حالت‌های زیر را در نظر بگیرید:

۱. $IJ = \{۰\}$. در این حالت I به J مجاور است.

۲. $IJ \neq \{۰\}$، $I^۲ = \{۰\}$ و $J^۲ = \{۰\}$. در این حالت، $I - IJ - J$ یک مسیر از I به J است.

۳. $IJ \neq \{۰\}$، $I^۲ = \{۰\}$ و $J^۲ \neq \{۰\}$. در این حالت چون J رأسی از $\mathbb{AG}(R)$ است، لذا ایده‌آل $K \neq J$ از R وجود دارد که $JK = \{۰\}$. بنابراین:

اگر $IK \neq \{۰\}$، آنگاه $I - IK - J$ یک مسیر از I به J است.

اگر $IK = \{۰\}$، آنگاه $I - K - J$ یک مسیر از I به J است.

۴. $IJ \neq \{۰\}$، $I^۲ \neq \{۰\}$ و $J^۲ = \{۰\}$. مشابه حالت ۳، مسیری از I به J وجود دارد.

۵. $IJ \neq \{۰\}$، $I^۲ \neq \{۰\}$ و $J^۲ \neq \{۰\}$. در این حالت چون I و J رأس‌های $\mathbb{AG}(R)$ هستند، لذا ایده‌آل‌های L و K وجود دارند که $IK = \{۰\}$ و $JL = \{۰\}$. بنابراین:

اگر $L = k$، آنگاه $I - L - J$ یک مسیر از I به J است.

اگر $K \neq L$ و $LK = \{۰\}$، آنگاه $I - K - L - J$ یک مسیر از I به J است.

اگر $K \neq L$ و $LK \neq \{۰\}$، آنگاه $I - LK - J$ یک مسیر از I به J است. $\square$

قضیه ۱۲.۲.۳. *فرض کنید R حلقه‌ی غیر کاهشی، $\mathbb{AG}(R)$ گراف بدون دور مثلثی و دارای حداقل یک یال باشد. در این صورت $\mathbb{AG}(R)$ گراف دوبخشی و R حلقه‌ای با حداکثر دو ایده آل مینیمال است. به ویژه، یکی از موارد زیر برقرار است:*

۱. R دارای دقیقاً دو ایده‌آل مینیمال است و $R \cong \mathbb{F} \times S$، که $\mathbb{F}$ میدان و S حلقه‌ای با دقیقاً یک ایده‌آل غیر بدیهی است.

۲. R دارای دقیقاً یک ایده‌آل مینیمال چون $\langle x \rangle$ است که $\langle x \rangle^۲ = \{۰\}$ و $\mathbb{AG}(R)$ گرافی دوبخشی با بخش‌های $V_۱ = N(\langle x \rangle)$ و $V_۲ = V_۱^c$ است و علاوه بر آن اگر $A := \{L \in V_۱ \big| \langle x \rangle \subseteq L\}$، آن‌گاه زیرگراف القایی روی $V_۱{}^c \cup (V_۱ \setminus A)$، یک گراف دوبخشی کامل است.

برهان. چون R حلقه‌ایی غیر کاهشی است، لذا عنصری چون $R \ni z \neq ۰$ موجود است که $z^۲ = ۰$. توجه کنید که $\langle z \rangle$ شامل حداکثر یک ایده‌آل غیر بدیهی R است. زیرا در غیر این صورت اگر I و J ایده‌آل‌هایی از حلقه‌ی R باشند که $I \subseteq \langle z \rangle$ و $J \subseteq \langle z \rangle$، آن‌گاه $\mathbb{AG}(R)$ گرافی با دور مثلث خواهد شد که تناقض است. اگر $\langle z \rangle$ ایده‌آل مینیمال نباشد، آن‌گاه ایده‌آلی چون $\{۰\} \neq J \subseteq \langle z \rangle$ وجود دارد. حال $J \ni x \neq ۰$ را انتخاب می‌کنیم. با توجه به این‌که $\langle z \rangle$ شامل حداکثر یک ایده‌آل غیر بدیهی R است، لذا $\langle x \rangle$ مینیمال است. چون $x \in \langle z \rangle$، لذا $x^۲ = ۰$. بنابراین در هر حالت R دارای حداقل یک ایده‌آل مینیمالی چون $\langle x \rangle$ است که $\langle x \rangle^۲ = \{۰\}$. از طرفی R دارای حد اکثر دو ایده‌آل مینیمال است. زیرا اگر مثلاً I، J و K ایده‌آل‌های مینیمال متمایز R باشند، آن‌گاه $IJ = JK = IK = \{۰\}$ که متناقض با فرض است (توجه کنید اگر مثلاً $IJ \ni x \neq ۰$ موجود باشد، آن‌گاه $\langle x \rangle \subseteq IJ \subseteq I \cap J$ و بنابر مینیمال بودن I و J، $I = J = \langle x \rangle$ که متناقض با متمایز بودن I و J است). بنابراین حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

۱.فرض کنید R دارای دقیقاً دو ایده‌آل مینیمال باشد و J ایده‌آل مینیمال دیگر R متمایز با ایده‌آل مینیمال $\langle x \rangle$ باشد. ادعا می‌کنیم $J^۲ \neq \{۰\}$. برای این منظور، به برهان خلف فرض کنید $J^۲ = \{۰\}$. در این صورت رأس‌های J، $\langle x \rangle$ و $J + \langle x \rangle$ با هم مجاور بوده که متناقض با فرض است و لذا $J^۲ \neq \{۰\}$. حال بنابر لم ۱۸.۲.۱، عنصر خودتوانی چون $e \in R$ موجود است که $J = Re$ و $R \cong Re \oplus R(۱-e)$. لذا می‌توان فرض کرد $R \cong R_۱ \times R_۲$.

ادعا می‌کنیم $R_۱$ یا $R_۲$ حوزه صحیح هستند. به برهان خلف فرض کنید $R_۱$ و $R_۲$ حوزه صحیح نباشند. در این صورت $x, x' \in R_۱ \setminus \{۰\}$ و $y, y' \in R_۲ \setminus \{۰\}$ وجود دارند که $xx' = ۰$ و $yy' = ۰$. اگر $x \neq x'$ باشد، آن‌گاه $\langle x \rangle \times \{۰\}$، $\langle x' \rangle \times \{۰\}$ و $\{۰\} \times R_۲$ با هم مجاورند که متناقض فرض است. اگر $y \neq y'$، آن‌گاه به‌طور مشابه به تناقض می‌رسیم. حال اگر $x = x'$ و $y = y'$، آن‌گاه ایده‌آل‌های $\langle x \rangle \times \{۰\}$، $\langle x \rangle \times \langle y \rangle$ و $\{۰\} \times \langle y \rangle$ با هم مجاورند که متناقض فرض است. بنابراین فرض خلف باطل و $R_۱$ یا $R_۲$ حوزه صحیح هستند. بدون از دست رفتن کلیت مسأله فرض کنید $R_۱$ حوزه‌ی صحیح باشد. حال ثابت می‌کنیم $R_۲$ حلقه‌ای با دقیقاً یک ایده‌آل غیر بدیهی است. چون $R \cong R_۱ \times R_۲$ و R غیر کاهشی است، لذا $R_۱ \times R_۲$ نیز غیر کاهشی است و در نتیجه $R_۱ \times R_۲ \ni (x, y) \neq (۰, ۰)$ وجود دارد که $(x, y)^۲ = (۰, ۰)$. لذا $x^۲ = ۰$ و $y^۲ = ۰$. چون $R_۱$ حوزه‌ی صحیح است، لذا $x = ۰$. از طرفی $(x, y) \neq (۰, ۰)$ لذا $y \neq ۰$. ادعا می‌کنیم $\langle y \rangle$ تنها ایده‌آل غیر بدیهی $R_۲$ است. به برهان خلف

فرض کنید L ایده‌آل غیر بدیهی دیگری از R_2 باشد. اگر $\langle y\rangle L=\{0\}$، آنگاه $\{0\}\times\langle y\rangle$، $\{0\}\times L$ و $R_1\times\{0\}$ با هم مجاورند که متناقض فرض است. حال اگر $\langle y\rangle L\neq\{0\}$، آنگاه $t\in L$ وجود دارد که $ty\neq 0$. حال اگر $\langle y\rangle\neq\langle ty\rangle$، آنگاه $\{0\}\times\langle ty\rangle$، $\{0\}\times\langle y\rangle$ و $R_1\times\{0\}$ با هم مجاورند که تناقض است. حال اگر $\langle ty\rangle=\langle y\rangle$، آنگاه $y\in\langle ty\rangle$ و لذا $r\in R_2$ وجود دارد که $y=rty$. چون $t\in L$ و $L\lhd R_2$، لذا $y\in L$. از طرفی $y(1-rt)=0$، لذا اگر $\langle 1-rt\rangle\neq\langle y\rangle$، آنگاه $\{0\}\times\langle 1-rt\rangle$، $\{0\}\times y$ و $R_1\times\{0\}$ با هم مجاورند که تناقض است. اگر $\langle 1-rt\rangle=\langle y\rangle$، آنگاه $r'\in R_2$ وجود دارد که $1-rt=r'y$ و در نتیجه $1=rt+r'y\in L$ و لذا $L=R_2$ که تناقض است. بنابراین فرض خلف باطل و R_2 دارای دقیقاً یک ایده‌آل غیر بدیهی است.

کافی است نشان دهیم R_1 میدان است. چون $\langle x\rangle$ و J ایده‌آل‌های $R_1\times R_2$ هستند، لذا ایده‌آل‌های I_1 و J_1 از R_1 و ایده‌آل‌های I_1' و J_1' از R_2 وجود دارند که $\langle x\rangle=I_1\times J_1$ و $J=I_1'\times J_1'$. ادعا می‌کنیم $\langle x\rangle=\{0\}\times K$ که در آن K تنها ایده‌آل غیر بدیهی R_2 است. اگر $I_1\neq\{0\}$، آنگاه $0\neq a\in I_1$ وجود دارد و در این حالت $\langle a\rangle\times\{0\}\subseteq\langle x\rangle=I_1\times J_1$ و چون $\langle x\rangle$ ایده‌آل مینیمال است، لذا $\langle x\rangle=\langle a\rangle\times\{0\}$. چون $\langle x\rangle^2=\{0\}$، لذا $a^2=0$ و چون R_1 حوزه‌ی صحیح است، پس $a=0$ که تناقض است. بنابراین $\langle x\rangle=\{0\}\times J_1$. چون $\langle x\rangle$ مینیمال است و تنها ایده‌آل‌های R_2، $\{0\}$، K و R_2 هستند، لذا $J_1=K$ و در نتیجه $\langle x\rangle=\{0\}\times K$. حال چون $J\neq\{x\}$ و J مینیمال است، لذا $I_1'\neq\{0\}$. ادعا می‌کنیم I_1' ایده‌آل مینیمال R_1 است. فرض کنید I_1'' ایده‌آل ناصفری از R_1 باشد که $I_1''\subseteq I_1'$. در این حالت $I_1''\times J_1'\subseteq I_1'\times J_1'=J$ و چون J مینیمال است، لذا $I_1'=I_1''$. بنابراین I_1' ایده‌آل مینیمال R_1 است. فرض کنید $0\neq b\in I_1'$. چون $\langle b\rangle\subseteq I_1'$ و I_1' ایده‌آل مینیمال R_1 است، لذا $I_1'=\langle b\rangle$. همچنین R_1 حوزه صحیح است لذا $b^2\neq 0$ و به‌طور مشابه، $I_1'=\langle b^2\rangle$. بنابراین $b\in I_1'=\langle b^2\rangle$ و لذا $r\in R_1$ای وجود دارد که $b=rb^2$. از طرفی R_1 حوزه صحیح است و $b\neq 0$، لذا $rb=1$. بنابراین $I_1'=R_1$. چون I_1' ایده‌آل مینیمال است، لذا R_1 میدان است.

۲. فرض کنید $\langle x\rangle$ ایده‌آل مینیمال یکتای حلقه‌ی R باشد، $V_1=N(\langle x\rangle)$ و $V_2=V_1^c$. نشان خواهیم داد $\mathbb{AG}(R)$، گراف دوبخشی با بخش‌های V_1 و V_2 است. بنابر فرض، $\mathbb{AG}(R)$ گراف فاقد دور مثلث است و لذا V_1 مجموعه‌ی مستقل است. حال فرض کنید $I_1,I_2\in V_2$، $I_1\neq I_2$ و $I_1I_2=\{0\}$. چون I_1 و I_2 متمایزند، لذا هر دو نمی‌توانند برابر $\langle x\rangle$ باشند. بدون از دست رفتن کلیت مسأله فرض کنید $I_1\neq\langle x\rangle$. چون $I_1\in V_2$ و $I_1\neq\langle x\rangle$، لذا $I_1\langle x\rangle\neq\{0\}$ و درنتیجه با توجه به مینیمال بودن ایده‌آل $\langle x\rangle$، $I_1\langle x\rangle=\langle x\rangle$. حال

$$I_1I_2\langle x\rangle=I_2\langle x\rangle=\{0\}.$$

با توجه به این‌که $I_1I_1=\{0\}$، لذا $I_2\neq\langle x\rangle$ و در نتیجه $I_2\in V_1$ که تناقض است. بنابراین $\mathbb{AG}(R)$ گرافی با دو بخش $V_1=N(\langle x\rangle)$ و $V_2={V_1}^c$ است.

حال نشان می‌دهیم اگر $A:=\{L\in V_1|\langle x\rangle\subseteq L\}$، آنگاه زیر گراف القایی روی ${V_1}^c\cup(V_1\setminus A)$ یک گراف دو بخشی کامل است. برای این منظور، قرار دهید $B:=V_1\setminus A$. به برهان خلف فرض کنید $I\neq\langle x\rangle$ و J ایده‌آل‌هایی دلخواه و به ترتیب از مجموعه‌های V_2 و B باشند و $IJ\neq\{0\}$. در این

صورت $IJ \subseteq J$ و چون $J\langle x\rangle = \{\circ\}$، پس $IJ\langle x\rangle = \{\circ\}$ و در نتیجه IJ رأسی از $\mathbb{AG}(R)$ است. ادعا می‌کنیم برای هر دو رأس مجاور از $\mathbb{AG}(R)$، یکی شامل $\langle x\rangle$ و دیگری با $\langle x\rangle$ مجاور است. برای این منظور، فرض کنید $I_۱$ و $I_۲$ دو رأس مجاور از $\mathbb{AG}(R)$ و مخالف با $\langle x\rangle$ باشند. در این صورت چون $I_۱\langle x\rangle \subseteq \langle x\rangle$، لذا بنابر مینیمال بودن $\langle x\rangle$، $I_۱\langle x\rangle = \{\circ\}$ یا $\langle x\rangle \subseteq I_۱$. اگر حالت دوم اتفاق بیفتد، آن‌گاه $I_۲\langle x\rangle = \{\circ\}$. اگر $I_۱\langle x\rangle = \{\circ\}$، آن‌گاه چون $\mathbb{AG}(R)$ فاقد دور مثلثی است، لذا $I_۲\langle x\rangle \neq \{\circ\}$ و در نتیجه چون $\langle x\rangle$ مینیمال است و $I_۲ \times \langle x\rangle = \langle x\rangle$ و در این حالت $\langle x\rangle \subseteq I_۲$.
چون $I \in V_۲$ و $I \neq \langle x\rangle$، لذا $I\langle x\rangle \neq \{\circ\}$ و با توجه به این‌که $\mathbb{AG}(R)$ دارای حداقل یک یال است و بنابر لم ۱۱.۲.۳، $\mathbb{AG}(R)$ همبند است، پس I به ایده‌آلی از $\mathbb{AG}(R)$ مجاور است. حال چون $I\langle x\rangle \neq \{\circ\}$، پس I شامل $\langle x\rangle$ خواهد بود. چون I دلخواه فرض شده است، لذا تمامی رئوس $A \cup V_۲$ شامل $\langle x\rangle$ است. از طرفی $\langle x\rangle \not\subseteq J$، لذا $IJ \in B$. از آن‌جا که $I \in V_۲$ و $\mathbb{AG}(R)$ فاقد رأس تنها است، لذا I به رأسی از $V_۱$ مانند K وصل است. اگر $K \in A$، آن‌گاه $\langle x\rangle \subseteq K$ و در نتیجه $I\langle x\rangle = \{\circ\}$ که تناقض است و لذا $K \in B$. بنابراین دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

۱. اگر $K \neq IJ$، آن‌گاه به وضوح K و IJ با هم مجاورند و لذا خواهیم داشت:

$$K(IJ) = IJ\langle x\rangle = K\langle x\rangle = \{\circ\}$$

که متناقض فرض است.

۲. فرض کنید $K = IJ$. در این صورت اگر ایده‌آلی چون $R \ni L \neq \{\circ\}$ موجود باشد که $L \subsetneq IJ$، آن‌گاه

$$L\langle x\rangle = L(IJ) = IJ\langle x\rangle = \{\circ\}$$

که متناقض با فرض است (توجه کنید که چون $IJ \in B$، لذا $IJ \neq \langle x\rangle$ و همچنین $L \neq \langle x\rangle$. زیرا در غیر این صورت $L = \langle x\rangle \subsetneq IJ$ و در نتیجه $I\langle x\rangle = \{\circ\}$ که تناقض است). اگر هیچ ایده‌آل غیر صفری از R موجود نباشد که مشمول IJ شود، آن‌گاه چون $\langle x\rangle$ تنها ایده‌آل مینیمال R است، لذا $K = IJ = \langle x\rangle$ که متناقض $IJ \in B$ است. □

قضیه ۱۳.۲.۳. *فرض کنید R حلقه و $\mathbb{AG}(R)$ گراف دوبخشی باشد. در این صورت یکی از موارد زیر برقرار است:*

۱. *$\mathbb{AG}(R)$ گراف ستاره است.*
۲. *$\mathbb{AG}(R)$ مسیری به طول ۴ است.*
۳. $\mathrm{Nil}(R) = \mathrm{Soc}(R)$.

برهان. ابتدا فرض کنید R حلقه‌ی کاهشی باشد. در این صورت اگر R هیچ ایده‌آل مینیمالی نداشته نباشد، آن‌گاه

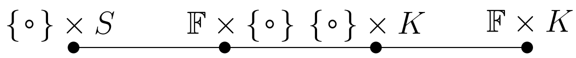
$$\mathrm{Soc}(R) = \mathrm{Nil}(R) = \{\circ\}.$$

لذا فرض کنید R دارای حداقل یک ایده‌آل مینیمال چون I باشد. چون R کاهشی است، لذا $I^۲ \neq \{\circ\}$. حال بنابر لم ۱۸.۲.۱، عنصر خودتوانی چون $a \in R$، موجود است که $I = Ra$. بنابراین خواهیم داشت

$R \cong Ra \oplus R(1-a)$. لذا می‌توان فرض کرد که $R \cong D_1 \times D_2$. ادعا می‌کنیم حلقه‌های D_1 و D_2، حوزه صحیح‌اند. به برهان خلف فرض کنید حداقل یکی از حلقه‌های D_1 یا D_2، مثلاً D_1 حوزه صحیح نباشد. در این صورت عنصری چون $x \in Z(D_1) \setminus \{0\}$ وجود دارد. چون R حلقه‌ی کاهشی است، لذا عنصری چون $0 \neq y \in D_1 \setminus \{x\}$ وجود دارد که $xy = 0$. بنابراین $\langle x\rangle\langle y\rangle = \{0\}$ و در نتیجه ایده‌آل‌های $\{0\} \times \langle x\rangle$، $\langle y\rangle \times \{0\}$ و $\{0\} \times R_2$ با هم مجاورند که متناقض با دوبخشی بودن گراف $\mathbb{AG}(R)$ است. بنابراین فرض خلف باطل است و D_1 و D_2 حوزه‌های صحیح‌اند.

ادعا می‌کنیم یکی از حلقه‌های D_1 یا D_2، مثلاً D_1 میدان است. چون I ایده‌آلی از R است، لذا ایده‌آل‌های I_1 از D_1 و I_2 از D_2 وجود دارند که $I = I_1 \times I_2$. اگر $I_1 \neq \{0\}$ و $I_2 \neq \{0\}$، آن‌گاه $I = I_1 \times I_2 \subsetneqq I_1 \times \{0\}$ که متناقض مینیمال بودن I است. بنابراین یکی از ایده‌آل‌های I_1 یا I_2، مثلاً I_2 برابر صفر خواهد بود که در این حالت $I = I_1 \times \{0\}$. ادعا می‌کنیم I_1 ایده‌آل مینیمال D_1 است. اگر $I_1{}'$ ایده‌آل ناصفری از D_1 باشد که $I_1{}' \subseteq I_1$، آن‌گاه $I_1{}' \times \{0\} \subseteq I_1 \times \{0\} = I$ و لذا بنابر مینیمال بودن I، $I_1{}' \times \{0\} = I_1 \times \{0\}$ و در نتیجه $I_1{}' = I_1$. بنابراین I_1 ایده‌آل مینیمال D_1 است. حال فرض کنید $0 \neq c \in I_1$. چون $\langle c\rangle \subseteq I_1$ و I_1 ایده‌آل مینیمال D_1 است، لذا $I_1 = \langle c\rangle$. از طرفی چون D_1 حوزه صحیح است، لذا $c^2 \neq 0$ و به‌طور مشابه، $I_1 = \langle c^2\rangle$. بنابراین $c \in I_1 = \langle c^2\rangle$ و لذا $d \in D_1$ وجود دارد که $c = dc^2$. چون D_1 حوزه‌ی صحیح است و $c \neq 0$، لذا $cd = 1$. بنابراین $I_1 = D_1$ پس بنابر مینیمال بودن ایده‌آل I_1، D_1 میدان است. بنابراین در این حالت گراف $\mathbb{AG}(R)$ ستاره با مرکز $D_1 \times \{0\}$ است.

حال فرض کنید R حلقه‌ای غیر کاهشی باشد. در این صورت بنابر قضیه‌ی ۱۲.۲.۳، دو حالت اتفاق می‌افتد. در حالت اول $R \cong \mathbb{F} \times S$ است که $\mathbb{F}$ یک میدان و S حلقه‌ای با دقیقاً یک ایده‌آل غیر بدیهی K است. در این حالت نشان می‌دهیم $K^2 = \{0\}$. چون R حلقه‌ای غیر کاهشی است و $R \cong \mathbb{F} \times S$، لذا $\mathbb{F} \times S$ نیز غیر کاهشی است. بنابراین عنصر ناصفری چون $(x,y) \in \mathbb{F} \times S$ وجود دارد که $(x,y)^2 = (x^2,y^2) = (0,0)$. چون $\mathbb{F}$ میدان است، لذا $x = 0$ از طرفی $(x,y) \neq (0,0)$، و لذا $y \neq 0$. چون K تنها ایده‌آل غیر بدیهی S است، پس $K = \langle y\rangle$ و لذا $K^2 = \langle y\rangle^2 = \{0\}$. بنابراین $\mathbb{AG}(R)$ به‌صورت



است و در نتیجه $\mathbb{AG}(R)$ مسیری به طول ۴ است.

حال فرض کنید حالت دوم از قضیه‌ی ۱۲.۲.۳ برقرار باشد. در این حالت R دارای دقیقاً یک ایده‌آل مینیمال مانند $\langle x\rangle$ است که $x^2 = 0$ و $\mathbb{AG}(R)$ گراف دوبخشی با بخش‌های $V_1 = N(\langle x\rangle)$ و $V_2 = V_1{}^c$ است. همچنین با فرض $A := \{L \in V_1 \big| \langle x\rangle \subseteq L\}$، زیرگراف القایی روی $V_1{}^c \cup \{V_1 \setminus A\}$، یک گراف دوبخشی کامل است. حال دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

الف) اگر $\mathrm{Nil}(R) = \langle x\rangle$، آن‌گاه $\mathrm{Nil}(R) = \mathrm{Soc}(R)$.

ب) اگر $\langle x\rangle \neq \mathrm{Nil}(R)$، آن‌گاه چون $\mathrm{Nil}(R)\subseteq J(R)\subseteq \mathrm{Ann}(x)$، (اگر $r\in J(R)\setminus \mathrm{Nil}(R)$ موجود باشد، آن‌گاه $\{۰\}\neq \langle rx\rangle \subseteq \langle x\rangle$ و بنابر مینیمال بودن $\langle x\rangle$، $\langle rx\rangle = \langle x\rangle$. چون $x\in\langle rx\rangle$، لذا $r'\in R$ وجود دارد که $x = rr'x$ و در نتیجه $(۱-rr')x = ۰$. از طرفی $r\in J(R)$، لذا $۱-rr'$ یکه است و در نتیجه $x=۰$ که تناقض است.) بنابراین $\langle x\rangle \mathrm{Nil}(R) = ۰$ و در نتیجه $\mathrm{Nil}(R)\in N(\langle x\rangle)$.

ابتدا نشان می‌دهیم $V_۱\setminus A=\emptyset$. برای این منظور، به برهان خلف فرض کنید $K\in V_۱\setminus A$. ادعا می‌کنیم $K\cap \mathrm{Nil}(R)\neq\{۰\}$. به برهان خلف فرض کنید $K\cap \mathrm{Nil}(R)=\{۰\}$. در این صورت $K\cdot \mathrm{Nil}(R)=\{۰\}$. از طرفی $K\neq \mathrm{Nil}(R)$، زیرا در غیر این صورت با توجه به این‌که $x\in \mathrm{Nil}(R)$، لذا $\langle x\rangle \subseteq \mathrm{Nil}(R)=K$ که تناقض است. بنابراین ایده‌آل‌های K، $\langle x\rangle$ و $\mathrm{Nil}(R)$ مجاورند که متناقض فرض است و لذا $K\cap \mathrm{Nil}(R)\neq\{۰\}$. حال چون $K\cap \mathrm{Nil}(R)\neq\{۰\}$، لذا $z\in K\cap \mathrm{Nil}(R)$ وجود دارد. ادعا می‌کنیم $z^۲=۰$. به برهان خلف فرض کنید $z^۲\neq ۰$. چون $z\in \mathrm{Nil}(R)$، لذا به ازای $۲\neq i\in\mathbb{N}$، $z^i=۰$ ولی $z^{i-۱}\neq ۰$ و لذا ایده‌آل‌های $\langle z\rangle$ و $\langle x\rangle$، $\langle z\rangle^{i-۱}$ مجاورند که تناقض است. همچنین $\langle z\rangle$ یک ایده‌آل مینیمال است، زیرا اگر $\langle z\rangle$ ایده‌آل مینیمال نباشد، آن‌گاه ایده‌آل ناصفری چون $\langle z\rangle \supsetneqq J$ وجود دارد و لذا ایده‌آل‌های $\langle x\rangle$، $\langle z\rangle$ و J با هم مجاورند که تناقض است. بنابراین $\langle z\rangle$ ایده‌آل مینیمال R است. از طرفی $\langle x\rangle$ تنها ایده‌آل مینیمال R است، لذا $\langle z\rangle = \langle x\rangle$ و در نتیجه $K\supseteq K\cap \mathrm{Nil}(R)\supseteq\langle z\rangle = \langle x\rangle$ که تناقض است. بنابراین $V_۱\setminus A=\emptyset$.

ادعا می‌کنیم $V_۲=\{\langle x\rangle\}$. به برهان خلف فرض کنید $\langle x\rangle\neq I\in V_۲$ موجود باشد. چون $\mathbb{AG}(R)$ گرافی همبند است و $V_۱\setminus A=\emptyset$، لذا $J\in A$ وجود دارد که $IJ=\{۰\}$ حال چون $\langle x\rangle\subseteq J$، لذا $\langle x\rangle I=\{۰\}$ و در نتیجه $I\in V_۱$ که تناقض است. بنابراین $\mathbb{AG}(R)$ گراف ستاره با مرکز $\langle x\rangle$ است. □

قضیه ۱۴.۲.۳. *اگر $\mathbb{AG}(R)$ گرافی دو بخشی، با بخش‌های ناتهی باشد، آن‌گاه* $\gamma(\mathbb{AG}(R))\leq ۲$.

برهان. اگر R حلقه‌ی کاهشی باشد، آن‌گاه بنابر نتیجه‌ی ۹.۲.۳، حکم ثابت می‌شود. لذا فرض کنید R حلقه‌ی غیر کاهشی باشد. در این صورت بنابر قضیه‌ی ۱۲.۲.۳، سه حالت اتفاق می‌افتد:

۱. اگر $\mathbb{AG}(R)$ دارای یک رأس باشد، آن‌گاه $\gamma(\mathbb{AG}(R))=۱$.

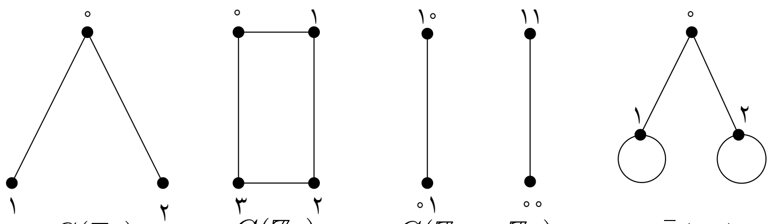
۲. R دارای دقیقاً دو ایده‌آل مینیمال است که در این حالت بنابر برهان قضیه‌ی ۱۳.۲.۳، $\mathbb{AG}(R)$ مسیری به طول ۴ است و در نتیجه $\gamma(\mathbb{AG}(R))=۲$.

۳. R دارای دقیقاً یک ایده‌آل مینیمال مانند $\langle x\rangle$ است و $\mathbb{AG}(R)$ گراف دوبخشی با بخش‌های $V_۱=N(\langle x\rangle)$ و $V_۲={V_۱}^c$ است و به علاوه با فرض $A:=\{L\in V_۱ | \langle x\rangle\subseteq L\}$، زیر گراف القایی روی ${V_۱}^c\cup\{V_۱\setminus A\}$، یک گراف دوبخشی کامل است. در این حالت، اگر $D:=\{\langle x\rangle, K\}$ که $K\in V_۱\setminus A$، آن‌گاه D یک مجموعه‌ی احاطه‌گر برای $\mathbb{AG}(R)$ است و لذا $\gamma(\mathbb{AG}(R))\leq ۲$. (توجه کنید که اگر $V_۱\setminus A=\emptyset$، آن‌گاه $D:=\{\langle x\rangle\}$ یک مجموعه‌ی احاطه‌گر است و در این حالت $\gamma(\mathbb{AG}(R))=۱$.) □

فصل ۴

احاطه‌گری در گراف‌های یکانی وابسته به حلقه‌های جابه‌جایی

فرض کنید $U(R)$ مجموعه‌ی تمام عناصر یکه‌ی حلقه‌ی R باشد. در این صورت گراف یکانی حلقه‌ی R را با $G(R)$ نشان می‌دهیم که در آن تمامی عناصر حلقه‌ی R رئوس گراف $G(R)$ هستند و دو رأس متمایز x و y از $G(R)$، با هم مجاورند اگر و فقط اگر $x + y \in U(R)$. حال اگر دو رأس مجاور از گراف $G(R)$، لزوماً متمایز نباشند، آن‌گاه گراف یکانی حلقه‌ی R را گراف یکانی بسته‌ی R گوییم و با $\bar{G}(R)$ نشان می‌دهیم. به عنوان مثال، در شکل زیر چند نمونه از گراف‌های یکانی حلقه‌ها را مشاهده می‌کنیم.



$G(\mathbb{Z}_3)$ $G(\mathbb{Z}_4)$ $G(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ $\bar{G}(\mathbb{Z}_3)$

در این فصل، ابتدا به مطالعه‌ی احاطه‌گری در گراف‌های یکانی وابسته به ضرب میدان‌ها می‌پردازیم و سپس عدد احاطه‌گری و احاطه‌گری کلی را در گراف‌های یکانی حلقه‌های موضعی، تعیین می‌کنیم. یکی از نتایج اصلی این فصل، رده بندی حلقه‌هایی است که عدد احاطه‌گری گراف یکانی آن‌ها کمتر از چهار است و در هر حالت شرایط لازم و کافی برای این موضوع بیان خواهد شد. در سراسر این فصل، حلقه‌ها جابه‌جایی و متناهی فرض شده‌اند.

۱.۴ خواص مقدماتی گراف‌های یکانی

در این بخش، خواص مقدماتی گراف‌های یکانی وابسته به حلقه‌ها را بیان می‌کنیم.

لم ۱.۱.۴. *فرض کنید R و S دو حلقه باشند. در این صورت اگر $R \cong S$، آن‌گاه $G(R) \cong G(S)$.*

برهان. فرض کنید $f : R \longrightarrow S$ یک یکریختی باشد و x و y عناصری از حلقه‌ی R که $x+y \in U(R)$. در این صورت به ازای عنصری چون $a \in R$، $a(x+y) = 1$. چون f یکریختی است، لذا

$$f(a(x+y)) = f(1) = 1.$$

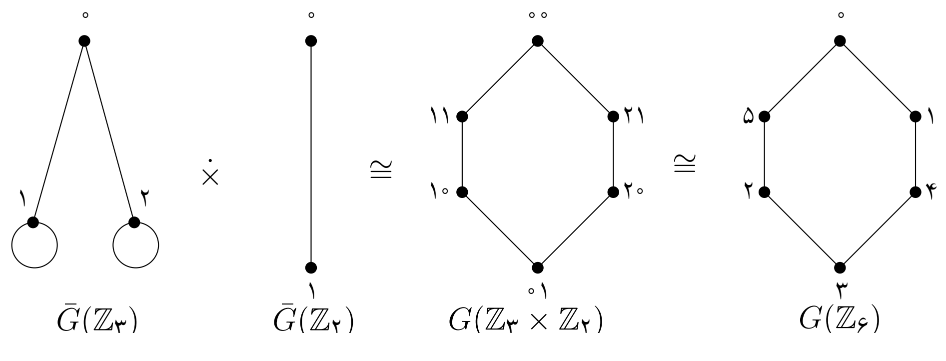
و در نتیجه $f(a)f(x+y) = f(a(x+y)) = 1$ و لذا $f(x)+f(y) \in U(S)$. به طور مشابه اگر $f(x)+f(y) \in U(S)$، آن‌گاه $x+y \in U(R)$. بنابراین $G(R) \cong G(S)$. □

تعریف ۲.۱.۴. گراف‌های (G_1, V_1) و (G_2, V_2) را در نظر بگیرید. ضرب کتگوری [1] دو گراف G_1 و G_2 را با $G_1 \dot{\times} G_2$ نمایش می‌دهیم که در آن $V(G_1 \dot{\times} G_2) := V(G_1) \times V(G_2)$ و همچنین دو رأس متمایز (x,y) و (x',y') با هم مجاورند اگر و فقط رئوس x و x' در گراف G_1 و رئوس y و y' در گراف G_2 مجاور باشند.

تذکر ۳.۱.۴. *مشابه تعریف فوق، با در نظرگرفتن دو حلقه‌ی R_1 و R_2، رئوس متمایز (x,y) و (x',y') از $\bar{G}(R_1)\dot{\times}\bar{G}(R_2)$، مجاورند اگر و فقط اگر رئوس x و x' از گراف $\bar{G}(R_1)$ و y و y' از $\bar{G}(R_2)$ مجاور باشند. لذا می‌توان مشاهده کرد که*

$$\bar{G}(R_1)\dot{\times}\bar{G}(R_2) \cong G(R_1 \times R_2).$$

مثال ۴.۱.۴. در شکل زیر، ضرب کتگوری در گراف‌های یکانی بسته‌ی حلقه‌های $\mathbb{Z}_2$ و $\mathbb{Z}_3$ را مشاهده می‌کنیم.



گزاره ۵.۱.۴. *فرض کنید R حلقه باشد. در این صورت برای گراف $G(R)$، موارد زیر را خواهیم داشت:*

۱. *اگر $2 \notin U(R)$، آن‌گاه برای هر $x \in U(R)$، $\deg(x) = |U(R)|$.*

۲. *اگر $2 \in U(R)$، آن‌گاه برای هر $x \in U(R)$، $\deg(x) = |U(R)| - 1$ و اگر x عنصر دلخواهی از $R \setminus U(R)$ باشد، آن‌گاه $\deg(x) = |U(R)|$.*

[1] Categorical Product

برهان. فرض کنید x عنصر دلخواهی از حلقه‌ی R باشد. در این صورت $R+x=R$ و لذا اگر u عنصر دلخواهی از $U(R)$ باشد، آن‌گاه عنصری چون $x_u \in R$ موجود است که $x_u + x = u$. حال به ادامه‌ی برهان می‌پردازیم.

۱. فرض کنید $۲ \notin U(R)$. در این حالت برای هر $u \in U(R)$، $x \neq x_u$. حال می‌دانیم تابع $f : U(R) \longrightarrow N_{G(R)}(x)$ با ضابطه‌ی $f(u) = x_u$ دوسویی است. زیرا

الف) f خوش تعریف است. زیرا اگر $u_۱, u_۲ \in U(R)$ و $u_۱ = u_۲$، آن‌گاه $x_{u_۱} + x = x_{u_۲} + x$ و لذا $x_{u_۱} = x_{u_۲}$ و در نتیجه $f(u_۱) = f(u_۲)$.

ب) f یک به یک است. زیرا اگر $u_۱, u_۲ \in U(R)$ و $f(u_۱) = f(u_۲)$، آن‌گاه $x_{u_۱} = x_{u_۲}$. پس $x_{u_۱} + x = x_{u_۲} + x$ و لذا $u_۱ = u_۲$.

پ) f پوشاست. زیرا اگر b عنصر دلخواهی از $N_{G(R)}(x)$ باشد، آن‌گاه عنصری چون $u \in U(R)$ موجود است که $b + x = u$ و لذا $f(u) = b$.

بنابراین

$$\deg(x) = |N_{G(R)}(x)| = |U(R)|.$$

۲. ابتدا فرض کنید $۲ \in U(R)$ و $x \in R \setminus U(R)$. بنابراین $x_u \neq x$ و در نتیجه مشابه حالت ۱،

$$\deg(x) = |U(R)|.$$

حال فرض کنید $۲x \in U(R)$. در این صورت مشابه اثبات حالت۱، تابع $g : U(R) \longrightarrow N_{G(R)}[x]$ با ضابطه‌ی $g(u) = x_u$ دوسویی است و لذا

$$\deg(x) = |N_{G(R)}(x)| = |N_{G(R)}[x]| - ۱ = |U(R)| - ۱.$$

□

گزاره ۶.۱.۴. *فرض کنید R حلقه‌ای با ایده‌آل ماکسیمال $\mathfrak{m}$ باشد که $|\frac{R}{\mathfrak{m}}| = ۲$. در این صورت $G(R)$ گراف دو بخشی با بخش‌های $V_۱ = \mathfrak{m}$ و $V_۲ = R \setminus \mathfrak{m}$ است.*

برهان. فرض کنید $V_۱ = \mathfrak{m}$ و $V_۲ = R \setminus \mathfrak{m}$. در این صورت

$$V(G(R)) = V_۱ \cup V_۲ \quad \text{و} \quad V_۱ \cap V_۲ = \emptyset.$$

لذا $V_۱$ و $V_۲$ بخش‌هایی از گراف $G(R)$ می‌باشند که عناصر مجموعه‌ی $V_۱$ با هم غیر مجاورند. حال برای کامل شدن اثبات، کافیست نشان دهیم هر دو عنصر متمایز مجموعه‌ی $V_۲$، با هم غیر مجاورند. برای این منظور، عنصر ثابت و دلخواه a از $R \setminus \mathfrak{m}$ را در نظر می‌گیریم. لذا بنابر فرض خواهیم داشت:

$$R = \mathfrak{m} \cup (\mathfrak{m} + a) = \mathfrak{m} \cup (\mathfrak{m} + (-a))$$

و لذا با فرض این‌که m و m' عناصری از $\mathfrak{m}$ باشند، در این صورت به ازای عناصری چون x و y از $R \setminus \mathfrak{m}$ داریم:

$$x = m + a \quad , \quad y = m' - a.$$

حال اگر $x + y \in U(R)$، آن‌گاه $m + m' \in U(R) \cap \mathfrak{m}$ که تناقض است. بنابراین $x + y \notin U(R)$ و لذا هیچ دو عنصر مجموعه‌ی $V_۲$ با هم مجاور نیستند و در نتیجه $G(R)$ گراف دو بخشی است. □

۲.۴ احاطه‌گری در گراف‌های یکانی وابسته به ضرب میدان‌ها

در این بخش، ابتدا شرط لازم و کافی را برای آنکه عدد احاطه‌گری گراف‌های یکانی برابر یک باشد را بیان می‌کنیم و سپس به تعیین عدد احاطه‌گر و احاطه‌گر کلی، در گراف‌های یکانی وابسته به ضرب میدان‌ها می‌پردازیم. هدف اساسی این بخش، یافتن شرایط لازم و کافی برای آنکه عدد احاطه‌گری گراف‌های یکانی برابر دو باشد، است.

لم ۱.۲.۴. *فرض کنید $\mathbb{F}$ میدان باشد. در این صورت* $\gamma(G(\mathbb{F})) = ۱$.

برهان. عنصر ناصفر و دلخواه x از میدان $\mathbb{F}$ را در نظر بگیرید. در این صورت $x = ۰ + x \in U(\mathbb{F})$. لذا تمامی عناصر ناصفر میدان $\mathbb{F}$، با صفر مجاور است. بنابراین $G(\mathbb{F})$، گراف ستاره با مرکز $\{۰\}$ است و در نتیجه $\gamma(G(\mathbb{F})) = ۱$. □

قضیه ۲.۲.۴. *فرض کنید R حلقه باشد. در این صورت $\gamma(G(R)) = ۱$ اگر و فقط اگر R میدان باشد.*

برهان. ($\Longleftarrow$) فرض کنید $\gamma(G(R)) = ۱$ و $D = \{x\}$ مجموعه‌ی احاطه‌گر برای گراف $G(R)$ باشد. ادعا می‌کنیم $\deg(x) = |U(R)|$. برای این منظور، حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

۱. اگر $x = ۰$، آنگاه $x \notin U(R)$ و لذا بنابر گزاره‌ی ۵.۱.۴، $\deg(x) = |U(R)|$.

۲. اگر $x \neq ۰$، آنگاه $x = -x$. زیرا در غیر این صورت چون $D = \{x\}$ مجموعه‌ی احاطه‌گر برای $G(R)$ است، لذا $۰ = -x + x \in U(R)$ که تناقض است و لذا $۲x = ۰$. حال با توجه به این که $x \neq ۰$، می‌توان نتیجه گرفت که $۲ \notin U(R)$. در نتیجه بنابر گزاره‌ی ۵.۱.۴، $\deg(x) = |U(R)|$. چون $D = \{x\}$ مجموعه‌ی احاطه‌گر برای $G(R)$ است، لذا تمامی عناصر متعلق به $R \setminus \{x\}$، با x مجاور است. بنابراین $|U(R)| = |R| - ۱$ و در نتیجه R میدان است.

($\Longrightarrow$) بنابر لم ۱.۲.۴، حکم برقرار است.

□

لم ۳.۲.۴. *فرض کنید $\mathbb{F}_۱$ و $\mathbb{F}_۲$ میدان‌هایی از مشخصه‌ی دو باشند و یکریخت با $\mathbb{Z}_۲$ نباشند. در این صورت* $\gamma(G(\mathbb{F}_۱ \times \mathbb{F}_۲)) \geq ۳$.

برهان. به برهان خلف فرض کنید $\gamma(G(\mathbb{F}_۱ \times \mathbb{F}_۲)) \leq ۲$. دراین صورت گراف $G(\mathbb{F}_۱ \times \mathbb{F}_۲)$ دارای مجموعه‌ی احاطه‌گر $D = \{(x_۱, x_۲), (x_۳, x_۴)\}$ است که در آن $x_۱, x_۳ \in \mathbb{F}_۱$ و $x_۲, x_۴ \in \mathbb{F}_۲$ و همچنین $(x_۱, x_۲) \neq (x_۳, x_۴)$. لذا $x_۱ \neq x_۳$ یا $x_۲ \neq x_۴$. بنابراین موارد زیر را خواهیم داشت:

الف) فرض کنید $x_۱ \neq x_۳$ در این صورت چون $\mathrm{Char}\, \mathbb{F}_۱ = \mathrm{Char}\, \mathbb{F}_۲ = ۲$، لذا

$$(x_۱, x_۴) + (x_۱, x_۲) = (۰, x_۴ + x_۲) \notin U(\mathbb{F}_۱ \times \mathbb{F}_۲),$$
$$(x_۱, x_۴) + (x_۳, x_۴) = (x_۱ + x_۳, ۰) \notin U(\mathbb{F}_۱ \times \mathbb{F}_۲).$$

بنابراین $(x_۱, x_۴)$ به عناصر مجموعه‌ی D مجاور نیست و لذا

$$(x_۱, x_۴) = (x_۱, x_۲) \quad \text{یا} \quad (x_۱, x_۴) = (x_۳, x_۴).$$

چون $x_3 \neq x_1$، پس $(x_1, x_4) = (x_1, x_2)$. بنابراین $x_2 = x_4$ و $D = \{(x_1, x_2), (x_3, x_2)\}$. حال برای هر عنصر دلخواهی مانند $a \in \mathbb{F}_1$، چون $\mathrm{Char}\ \mathbb{F}_2 = 2$ لذا

$$(a, x_2) + (x_1, x_2) = (a + x_1, 0) \notin U(\mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2),$$
$$(a, x_2) + (x_3, x_2) = (a + x_3, 0) \notin U(\mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2).$$

بنابراین (a, x_2) به عناصر مجموعه‌ی D مجاور نیست. در نتیجه $(a, x_2) \in D$ و لذا

$$(a, x_2) = (x_1, x_2) \text{ یا } (a, x_2) = (x_3, x_2).$$

پس $a = x_1$ یا $a = x_3$. چون $a \in \mathbb{F}_1$ دلخواه بود، لذا $\mathbb{F}_1 = \{x_1, x_3\} \cong \mathbb{Z}_2$ که تناقض است.

ب) فرض کنید $x_3 \neq x_2$. در این صورت مشابه الف)، $\mathbb{F}_2 = \{x_2, x_4\} \cong \mathbb{Z}_2$ که تناقض است. بنابراین $\gamma(G(\mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2)) \geq 3$. □

لم ۴.۲.۴. *فرض کنید $\mathbb{F}_1$ و $\mathbb{F}_2$ دو میدان باشند. در این صورت اگر $a \in \mathbb{F}_1$ و $\mathrm{Char}\ \mathbb{F}_1 \neq 2$، آن‌گاه $D_1 = \{(a, 0), (-a, 0)\}$ مجموعه‌ی احاطه‌گر برای گراف $G(\mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2)$ نیست و به‌طور مشابه، اگر $\mathrm{Char}\ \mathbb{F}_2 \neq 2$ و $b \in \mathbb{F}_2$، آن‌گاه $D_2 = \{(0, b), (0, -b)\}$ نمی‌تواند مجموعه‌ی احاطه‌گر برای گراف $G(\mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2)$ باشد.*

برهان. ابتدا به اثبات حالت اول می‌پردازیم و حالت دوم مشابه حالت اول ثابت می‌شود. برای این منظور، فرض کنید $a \in \mathbb{F}_1$ و $\mathrm{Char}\ \mathbb{F}_1 \neq 2$. نشان خواهیم داد $D_1 = \{(a, 0), (-a, 0)\}$ نمی‌تواند مجموعه‌ی احاطه‌گر برای $G(\mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2)$ باشد. به برهان خلف فرض کنید D_1 مجموعه‌ی احاطه‌گر برای گراف $G(\mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2)$ باشد. چون $|\mathbb{F}_1| \geq 3$ و $\mathrm{Char}\mathbb{F}_1 \neq 2$، لذا عنصری چون $x \in \mathbb{F}_1$ موجود است که $x \neq a$ و $x \neq -a$. بنابراین داریم:

$$(x, 0) + (a, 0) = (x + a, 0) \notin U(\mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2),$$
$$(x, 0) + (-a, 0) = (x - a, 0) \notin U(\mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2).$$

در نتیجه $(x, 0)$ نمی‌تواند با عنصری از D_1 مجاور باشد و لذا

$$(x, 0) = (a, 0) \text{ یا } (x, 0) = (-a, 0).$$

پس $x = a$ یا $x = -a$ که تناقض است. □

لم ۵.۲.۴. *فرض کنید $\mathbb{F}_1$ و $\mathbb{F}_2$ میدان‌هایی از مشخصه‌ی مخالف دو باشند. در این صورت*

$$\gamma(G(\mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2)) \geq 3.$$

برهان. به برهان خلف فرض کنید $\gamma(G(\mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2)) \leq 2$. در این صورت $D = \{(x_1, x_2), (x_3, x_4)\}$ مجموعه‌ی احاطه‌گر برای گراف $G(\mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2)$ است که در آن $x_1, x_3 \in \mathbb{F}_1$، $x_2, x_4 \in \mathbb{F}_2$ و همچنین

$(x_۱, x_۲) \neq (x_۳, x_۴)$. حال داریم:

$$(-x_۱, -x_۴) + (x_۱, x_۲) = (\circ, -x_۴ + x_۲) \notin U(\mathbb{F}_۱ \times \mathbb{F}_۲),$$
$$(-x_۱, -x_۴) + (x_۳, x_۴) = (-x_۱ + x_۳, \circ) \notin U(\mathbb{F}_۱ \times \mathbb{F}_۲).$$

در نتیجه $(-x_۱, -x_۴)$ به عناصر D مجاور نیست. پس $(-x_۱, -x_۴) \in D$ و لذا

$$(-x_۱, -x_۴) = (x_۱, x_۲) \text{ یا } (-x_۱, -x_۴) = (x_۳, x_۴).$$

از طرفی

$$(-x_۳, -x_۲) + (x_۱, x_۲) = (-x_۳ + x_۱, \circ) \notin U(\mathbb{F}_۱ \times \mathbb{F}_۲),$$
$$(-x_۳, -x_۲) + (x_۳, x_۴) = (\circ, -x_۲ + x_۴) \notin U(\mathbb{F}_۱ \times \mathbb{F}_۲).$$

در نتیجه $(-x_۳, x_۲)$ به عناصر مجموعه‌ی D، مجاور نیست. پس $(-x_۳, -x_۲) \in D$ و لذا

$$(-x_۳, -x_۲) = (x_۱, x_۲) \text{ یا } (-x_۳, -x_۲) = (x_۳, x_۴).$$

بنابراین حالت‌های زیر را خواهیم داشت:

۱. $(-x_۱, -x_۴) = (x_۱, x_۲)$ و $(-x_۳, -x_۲) = (x_۱, x_۲)$.
۲. $(-x_۱, -x_۴) = (x_۳, x_۴)$ و $(-x_۳, -x_۲) = (x_۳, x_۴)$.
۳. $(-x_۱, -x_۴) = (x_۳, x_۴)$ و $(-x_۳, -x_۲) = (x_۱, x_۲)$.
۴. $(-x_۱, -x_۴) = (x_۱, x_۲)$ و $(-x_۳, -x_۲) = (x_۳, x_۴)$.

اگر یکی از دو حالات اول اتفاق بیفتد، آنگاه $x_۱ = x_۲ = x_۳ = x_۴ = \circ$ که در تناقض با فرض $(x_۱, x_۲) \neq (x_۳, x_۴)$ است.

اگر حالت سوم اتفاق بیفتد، آنگاه $x_۲ = x_۴ = \circ$ و لذا با قرار دادن $a := x_۱ = -x_۳$، $D = \{(a, \circ), (-a, \circ)\}$ که متناقض با لم ۴.۲.۴ است.

اگر حالت آخر اتفاق بیفتد، آنگاه $x_۱ = x_۳ = \circ$ و لذا با فرض $b := x_۲ = -x_۴$، داریم $D = \{(\circ, b), (\circ, -b)\}$ که مجدداً در تناقض با لم ۴.۲.۴ است. بنابراین $\gamma(\Gamma(\mathbb{F}_۱ \times \mathbb{F}_۲)) \geq ۳$. □

در ادامه به تعیین عدد احاطه‌گر در گراف‌های یکانی وابسته به ضرب سه میدان می‌پردازیم و نشان خواهیم داد که مقدار عدد احاطه‌گر، در این حالت، برابر با چهار است.

لم ۶.۲.۴. *اگر $\mathbb{F}_۱$ و $\mathbb{F}_۲$ و $\mathbb{F}_۳$ میدان‌هایی باشند که یکی از آن‌ها، یکریخت با میدان $\mathbb{Z}_۲$، دیگری غیر یکریخت با $\mathbb{Z}_۲$ و بَعدی از مشخصه‌ی دو باشد، آنگاه $\gamma(G(\mathbb{F}_۱ \times \mathbb{F}_۲ \times \mathbb{F}_۳)) \geq ۴$.*

برهان. بدون از دست دادن کلیت، فرض کنید

$$\mathbb{F}_۱ \ncong \mathbb{Z}_۲ \ , \ \mathrm{Char}\ \mathbb{F}_۲ = ۲ \ , \ \mathbb{F}_۳ \cong \mathbb{Z}_۲.$$

می‌دانیم $\mathbb{F}_۱ \times \mathbb{F}_۲ \times \{\circ\}$ ایده‌آل ماکسیمال حلقه‌ی $\mathbb{F}_۱ \times \mathbb{F}_۲ \times \mathbb{F}_۳$ و $۲ = \left|\frac{\mathbb{F}_۱\times\mathbb{F}_۲\times\mathbb{F}_۳}{\mathbb{F}_۱\times\mathbb{F}_۲\times\{\circ\}}\right|$ و لذا بنابر گزاره‌ی ۶.۱.۴، $G(\mathbb{F}_۱ \times \mathbb{F}_۲ \times \mathbb{F}_۳)$، گرافی دوبخشی، با بخش‌های

$$V_۱ = \mathbb{F}_۱ \times \mathbb{F}_۲ \times \{\circ\} \quad , \quad V_۲ = \mathbb{F}_۱ \times \mathbb{F}_۲ \times \{۱\},$$

است و $|V_۱| = |V_۲| = |\mathbb{F}_۱ \times \mathbb{F}_۲|$. ادعا می‌کنیم $\gamma(G(\mathbb{F}_۱ \times \mathbb{F}_۲ \times \mathbb{F}_۳)) \geq ۴$. به برهان خلف فرض کنید $\gamma(G(\mathbb{F}_۱ \times \mathbb{F}_۲ \times \mathbb{F}_۳)) \leq ۳$ و D مجموعه‌ای احاطه‌گر برای $G(\mathbb{F}_۱ \times \mathbb{F}_۲ \times \mathbb{F}_۳)$ باشد که $|D| = ۳$. چون $|\mathbb{F}_۱| \geq ۳$ لذا $|\mathbb{F}_۱ \times \mathbb{F}_۲| \geq ۶$. در نتیجه $|V_۱| = |V_۲| \geq ۶$. اما از طرفی D یک مجموعه‌ی احاطه‌گر و $|D| = ۳$، لذا D نمی‌تواند به طور کامل در مجموعه‌ی $V_۱$ یا $V_۲$ قرار بگیرد. در نتیجه $D \cap V_۱ \neq \emptyset$ و $D \cap V_۲ \neq \emptyset$ و لذا

$$|D \cap V_۱| = ۱ \quad \text{یا} \quad |D \cap V_۲| = ۱.$$

بدون از دست دادن کلیت، فرض کنید $|D \cap V_۱| = ۱$. چون $D \cap V_۱ \subseteq V_۱ = \mathbb{F}_۱ \times \mathbb{F}_۲ \times \{\circ\}$، لذا می‌توان فرض کرد $D \cap V_۱ = \{(x, y, \circ)\}$ که در آن $x \in \mathbb{F}_۱$ و $y \in \mathbb{F}_۲$ و از آن‌جا که $|\mathbb{F}_۱| \geq ۳$ لذا عناصری چون $x_۱$، $x_۲$ و $x_۳$ از $\mathbb{F}_۱$ وجود دارند که $(x_۱, y, ۱)$، $(x_۲, y, ۱)$ و $(x_۳, y, ۱)$، سه رأس متمایزی از مجموعه‌ی $V_۲$ می‌باشند. از طرفی $\mathrm{Char}\, \mathbb{F}_۲ = ۲$، در نتیجه به ازای $i = ۱, ۲, ۳$ داریم:

$$(x_i, y, ۱) + (x, y, \circ) = (x_i + x, \circ, ۱) \notin U(\mathbb{F}_۱ \times \mathbb{F}_۲ \times \mathbb{F}_۳)$$

و لذا $(x_i, y, ۱)$ با رأس $(x, y, \circ)$ مجاور نیست. بنابراین به ازای $i = ۱, ۲, ۳$، $(x_i, y, ۱)$ عضوی از D است و درنتیجه $|D| \geq ۴$ که تناقض است. بنابراین $\gamma(G(\mathbb{F}_۱ \times \mathbb{F}_۲ \times \mathbb{F}_۳)) \geq ۴$. □

تعریف ۷.۲.۴. فرض کنید G و H دو گراف باشند و $D \subseteq V(G \times H)$. در این صورت تعریف می‌کنیم:

$$P_G(D) := \{g \in G \big| (g, h) \in D \text{ ،} h \in H \text{ برای برخی}\}.$$

$$P_H(D) := \{h \in H \big| (g, h) \in D \text{ ،} g \in G \text{ برای برخی}\}.$$

گزاره ۸.۲.۴. *فرض کنید G و H دو گراف (بدون یال چندگانه و احتمالاً دارای طوقه) باشند. در این صورت $\gamma(G \dot{\times} H) \geq \gamma(G) + \gamma(H) - ۱$. به ویژه اگر تساوی برقرار باشد و $\gamma(G) = ۱$، آن‌گاه $|V(G)| = ۱$.*

برهان. برای دو گراف G و H، ابتدا نشان می‌دهیم $\gamma(G \dot{\times} H) \geq \gamma(G) + \gamma(H) - ۱$. به برهان خلف فرض کنید $D \subseteq V(G \dot{\times} H)$ مجموعه‌ی احاطه‌گر برای $G \dot{\times} H$ باشد که $|D| \leq \gamma(G) + \gamma(H) - ۲$. اگر $\gamma(G) = ۱$، آن‌گاه $|D| \leq \gamma(H) - ۱$. حال چون $|D| \geq |P_H(D)| \geq \gamma(H)$، لذا $\gamma(H) - ۱ \geq \gamma(H)$ که تناقض است. لذا فرض کنید $\gamma(G), \gamma(H) \geq ۲$.

چون $|P_G(D)| \geq \gamma(G) \geq ۲$، لذا D دارای زیر مجموعه‌ای مانند

$$D_\circ = \{(p_۱, q_۱), \ldots, (p_{\gamma(G)-۱}, q_{\gamma(G)-۱})\}$$

است که به ازای تمامی مقادیر $i \neq j$، $p_i \neq p_j$. حال چون $|P_G(D_\circ)| = \gamma(G) - ۱ < \gamma(G)$، لذا $V(G)$ دارای عنصری چون $g_۱$ است که به هیچ یک از عناصر $P_G(D_\circ)$ مجاور نیست و همچنین $g_۱ \notin P_G(D_\circ)$. زیرا در غیر این صورت اگر تمامی رئوس $G \setminus P_G(D_\circ)$، به عناصری از $P_G(D_\circ)$ مجاور باشند، آنگاه $P_G(D_\circ)$ یک مجموعه‌ی احاطه‌گر برای G است و لذا $\gamma(G) \leq |P_G(D_\circ)|$ که تناقض است. از طرفی $|D \setminus D_\circ| \leq \gamma(H) - ۱$ و نیز $|P_H(D \setminus D_\circ)| \leq |D \setminus D_\circ| \leq \gamma(H) - ۱ < \gamma(H)$، لذا به‌طور مشابه H دارای رأسی چون $h_۱$ است که به هیچ یک از اعضای $P_H(D \setminus D_\circ)$ مجاور نیست و همچنین $h_۱ \notin P_H(D \setminus D_\circ)$. بنابراین $(g_۱, h_۱)$ عنصری از $V(G\dot{\times}H)$ است که به هیچ یک از اعضای D مجاور نیست. زیرا در غیر این صورت اگر $(g_۱, h_۱)$ به عنصری از D مانند (a, b) مجاور باشد، آنگاه $g_۱$ و a در G و $h_۱$ و b در H مجاورند. چون $g_۱$ به هیچ یک از اعضای $P_G(D_\circ)$ مجاور نیست، لذا $a \notin \{p_۱, p_۲, \ldots, p_{\gamma(G)-۱}\}$ و در نتیجه $(a, b) \notin D_\circ$. بنابراین $(a, b) \in D \setminus D_\circ$ و $b \in P_H(D \setminus D_\circ)$ یعنی $h_۱$ با عنصری از $P_H(D \setminus D_\circ)$ مجاور است که تناقض است. حال چون D مجموعه‌ی احاطه‌گر است، لذا $(g_۱, h_۱) \in D$. از طرفی $g_۱ \notin P_G(D_\circ)$، لذا $(g_۱, h_۱) \in D \setminus D_\circ$ و در نتیجه $h_۱ \in P_H(D \setminus D_\circ)$ که متناقض با $h_۱ \in P_H(D \setminus D_\circ)$ است.

برای اثبات قسمت دوم، فرض کنید $D \subseteq V(G\dot{\times}H)$ یک مجموعه‌ی احاطه‌گر باشد که

$$|D| = \gamma(G\dot{\times}H).$$

در این صورت چون $\gamma(G) = ۱$، لذا $|D| = \gamma(H)$. حال فرض کنید رأسی چون $(g_\circ, h_\circ) \in D$ موجود باشد که برای برخی $g_۱ \in V(G)$، $(g_۱, h_\circ) \notin D$. در این صورت مجموعه‌ی $D' = D \setminus \{(g_\circ, h_\circ)\}$ رئوس $\{g_\circ\} \times V(H)$ را احاطه می‌کند به‌جز احتمالاً رأس $(g_\circ, h_\circ)$. بنابراین $P_H(D')$ تمامی رئوس H را احاطه می‌کند به‌جز احتمالاً رأس $h_\circ \in H$. از طرفی $(g_۱, h_\circ)$ با رأسی از D' مجاور است بنابراین $h_\circ$ به عنصری از $P_H(D')$ مجاور خواهد بود و لذا $P_H(D')$ یک مجموعه‌ی احاطه‌گر برای H است و درنتیجه $\gamma(H) \leq |P_H(D')| \leq \gamma(H) - ۱ < \gamma(H)$ که تناقض است. بنابراین برای هر $(g, h) \in D$ و هر $g' \in V(G)$، $(g', h) \in D$. اگر $|V(G)| \geq ۲$، آنگاه حداقل دو رأس از D دارای مؤلفه‌ی دوم یکسان خواهد بود و لذا $|P_H(D)| \leq |D| - ۱ = \gamma(H) - ۱$. از طرفی چون $P_H(D)$ یک مجموعه‌ی احاطه‌گر برای H است، لذا $\gamma(H) \leq |P_H(D)|$ که تناقض است. بنابراین $|V(G)| = ۱$. □

لم ۹.۲.۴. *فرض کنید R حلقه و $\mathbb{F}$ میدان باشد. در این صورت* $\gamma(G(R \times \mathbb{F})) > \gamma(G(R))$.

برهان. بنابر گزاره‌ی ۸.۲.۴، $\gamma(\bar{G}(R)\dot{\times}\bar{G}(\mathbb{F})) \geq \gamma(\bar{G}(R)) + \gamma(\bar{G}(\mathbb{F})) - ۱$. اگر تساوی برقرار باشد، آنگاه چون بنابر لم ۱.۲.۴، $\gamma(\bar{G}(\mathbb{F})) = \gamma(G(\mathbb{F})) = ۱$ لذا بنابر گزاره‌ی ۸.۲.۴، $|V(\bar{G}(\mathbb{F}))| = ۱$ که تناقض است و در نتیجه

$$\gamma(\bar{G}(R)\dot{\times}\bar{G}(\mathbb{F})) > \gamma(\bar{G}(R)) + \gamma(\bar{G}(\mathbb{F})) - ۱ = \gamma(\bar{G}(R)).$$

از طرفی برای هر حلقه‌ی S، $\gamma(\bar{G}(S)) = \gamma(G(S))$ و لذا

$$\gamma(G(R \times \mathbb{F})) = \gamma(\bar{G}(R)\dot{\times}\bar{G}(\mathbb{F})) > \gamma(\bar{G}(R)) = \gamma(G(R)).$$

□

لم ۱۰.۲.۴. *میدان‌های $\mathbb{F}_1$، $\mathbb{F}_2$ و $\mathbb{F}_3$ را در نظر بگیرید. اگر a و b و c به ترتیب عناصر ناصفری از میدان‌های $\mathbb{F}_1$ و $\mathbb{F}_2$ و $\mathbb{F}_3$ باشند، آن‌گاه $D = \{(0,0,0), (-a,-b,0), (a,0,-c), (0,b,c)\}$ مجموعه‌ی احاطه‌گر برای $G(\mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_3)$ است.*

برهان. می‌دانیم

$$\begin{aligned} V(G(\mathbb{F}_1\times\mathbb{F}_2\times\mathbb{F}_3))\setminus D = & \cup \{(x,y,0) \big| -a \neq x \in \mathbb{F}_1 \setminus \{0\} \text{ یا } -b \neq y \in \mathbb{F}_2 \setminus \{0\}\} \\ & \cup \{(x,0,z) \big| a \neq x \in \mathbb{F}_1 \setminus \{0\} \text{ یا } -c \neq z \in \mathbb{F}_3 \setminus \{0\}\} \\ & \cup \{(0,y,z) \big| b \neq y \in \mathbb{F}_2 \setminus \{0\} \text{ یا } c \neq z \in \mathbb{F}_3 \setminus \{0\}\} \\ & \cup \{(x,0,0),(0,y,0),(0,0,z) \big| 0 \neq x \in \mathbb{F}_1, 0 \neq y \in \mathbb{F}_2, 0 \neq z \in \mathbb{F}_3\} \\ & \cup \{(x,y,z) \big| 0 \neq x \in \mathbb{F}_1, 0 \neq y \in \mathbb{F}_2, 0 \neq z \in \mathbb{F}_3\} \end{aligned}$$

حال برای $(x,y,0)$ که $-a \neq x \in \mathbb{F}_1 \setminus \{0\}$ یا $-b \neq y \in \mathbb{F}_2 \setminus \{0\}$ داریم:

$$(x,y,0) + (a,0,-c) = (x+a, y, -c) \in U(\mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_3)$$

یا

$$(x,y,0) + (0,b,c) = (x, y+b, c) \in U(\mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_3).$$

برای $(x,0,z)$ که $a \neq x \in \mathbb{F}_1 \setminus \{0\}$ یا $-c \neq z \in \mathbb{F}_3 \setminus \{0\}$ داریم:

$$(x,0,z) + (-a,-b,0) = (x-a, -b, z) \in U(\mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_3)$$

یا

$$(x,0,z) + (0,b,c) = (x, b, z+c) \in U(\mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_3).$$

برای $(0,y,z)$ که $b \neq y \in \mathbb{F}_2 \setminus \{0\}$ یا $c \neq z \in \mathbb{F}_3 \setminus \{0\}$ داریم:

$$(0,y,z) + (-a,-b,0) = (-a, y-b, z) \in U(\mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_3)$$

یا

$$(0,y,z) + (a,0,-c) = (a, y, z-c) \in U(\mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_3).$$

برای $(x,0,0)$، $(0,y,0)$ و $(0,0,z)$ که $0 \neq x \in \mathbb{F}_1$، $0 \neq y \in \mathbb{F}_2$ و $0 \neq z \in \mathbb{F}_3$، داریم:

$$\begin{aligned} (x,0,0) + (0,b,c) &= (x,b,c) \in U(\mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_3), \\ (0,y,0) + (a,0,-c) &= (a,y,-c) \in U(\mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_3), \\ (0,0,z) + (-a,-b,0) &= (-a,-b,z) \in U(\mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_3). \end{aligned}$$

سرانجام با فرض $0 \neq x \in \mathbb{F}_1$، $0 \neq y \in \mathbb{F}_2$ و $0 \neq z \in \mathbb{F}_3$ داریم:

$$(x,y,z) + (0,0,0) = (x,y,z) \in U(\mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_3)$$

بنابراین D مجموعه‌ی احاطه‌گر برای $G(\mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_3)$ است. □

لم ۱۱.۲.۴. *میدان‌های $\mathbb{F}_۱$، $\mathbb{F}_۲$ و $\mathbb{F}_۳$ را در نظر بگیرید. در این صورت* $\gamma(G(\mathbb{F}_۱ \times \mathbb{F}_۲ \times \mathbb{F}_۳)) = ۴$.

برهان. ابتدا نشان خواهیم داد $\gamma(G(\mathbb{F}_۱ \times \mathbb{F}_۲ \times \mathbb{F}_۳)) \geq ۴$. برای این منظور، دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

الف) حداقل دو میدان مانند $\mathbb{F}_۱$ و $\mathbb{F}_۲$، از مشخصه‌ای دو باشند.

ب) حداقل دو میدان مانند $\mathbb{F}_۱$ و $\mathbb{F}_۲$، از مشخصه‌ی مخالف دو باشد.

الف) اگر $\mathrm{Char}\ \mathbb{F}_۱ = \mathrm{Char}\ \mathbb{F}_۲ = ۲$، آنگاه موارد زیر را خواهیم داشت:

۱. فرض کنید $\mathbb{F}_۱, \mathbb{F}_۲ \cong \mathbb{Z}_۲$. در این صورت اگر $\mathbb{F}_۳ \cong \mathbb{Z}_۲$، آنگاه $\gamma(G(\mathbb{F}_۱ \times \mathbb{F}_۲ \times \mathbb{F}_۳)) = ۴$ و اگر $\mathbb{F}_۳ \ncong \mathbb{Z}_۲$، آنگاه چون $\mathbb{F}_۱ \cong \mathbb{Z}_۲$ و $\mathrm{Char}\ \mathbb{F}_۲ = ۲$، لذا بنابر لم ۶.۲.۴، $\gamma(G(\mathbb{F}_۱\times\mathbb{F}_۲\times\mathbb{F}_۳)) \geq ۴$.

۲. فرض کنید $\mathbb{F}_۱ \cong \mathbb{Z}_۲$ و $\mathbb{F}_۲ \ncong \mathbb{Z}_۲$. در این صورت اگر $\mathbb{F}_۳ \cong \mathbb{Z}_۲$، آنگاه فرضیات لم ۶.۲.۴، برقرار بوده و لذا $\gamma(G(\mathbb{F}_۱ \times \mathbb{F}_۲ \times \mathbb{F}_۳)) \geq ۴$ و اگر $\mathbb{F}_۳ \ncong \mathbb{Z}_۲$، آنگاه با استفاده‌ی مجدد از لم ۶.۲.۴، $\gamma(G(\mathbb{F}_۱ \times \mathbb{F}_۲ \times \mathbb{F}_۲)) \geq ۴$.

۳. فرض کنید $\mathbb{F}_۱, \mathbb{F}_۲ \ncong \mathbb{Z}_۲$. در این صورت بنابر لم ۳.۲.۴ و ۹.۲.۴،

$$\gamma(G(\mathbb{F}_۱ \times \mathbb{F}_۲ \times \mathbb{F}_۳)) > \gamma(G(\mathbb{F}_۱ \times \mathbb{F}_۲)) \geq ۳$$

و در نتیجه $\gamma(G(\mathbb{F}_۱ \times \mathbb{F}_۲ \times \mathbb{F}_۳)) \geq ۴$

ب) فرض کنید $\mathrm{Char}\ \mathbb{F}_۱, \mathrm{Char}\ \mathbb{F}_۲ \neq ۲$. در این صورت بنابر لم ۹.۲.۴ و ۵.۲.۴،

$$\gamma(G(\mathbb{F}_۱ \times \mathbb{F}_۲ \times \mathbb{F}_۳)) > \gamma(G(\mathbb{F}_۱ \times \mathbb{F}_۲)) \geq ۳$$

و لذا $\gamma(G(\mathbb{F}_۱ \times \mathbb{F}_۲ \times \mathbb{F}_۳)) \geq ۴$. از طرفی بنابر لم ۱۰.۲.۴، $\gamma(G(\mathbb{F}_۱ \times \mathbb{F}_۲ \times \mathbb{F}_۳)) \leq ۴$. بنابراین

$$\gamma(G(\mathbb{F}_۱ \times \mathbb{F}_۲ \times \mathbb{F}_۳)) = ۴.$$

□

لم ۱۲.۲.۴. *میدان‌های $\mathbb{F}_۱$،$\mathbb{F}_۲$، ...، و $\mathbb{F}_n$ را در نظر بگیرید. در این صورت اگر $n \geq ۳$، آنگاه*

$$\gamma(G(\mathbb{F}_۱ \times \mathbb{F}_۲ \times \cdots \times \mathbb{F}_n)) \geq n + ۱.$$

برهان. حکم را به روش استقرای ریاضی روی n ثابت می‌کنیم. اگر $n = ۳$، آنگاه بنابر لم ۱۱.۲.۴، حکم برقرار است. حال فرض کنید به ازای جمیع مقادیر کمتر از n، حکم برقرار باشد. در این صورت بنابر لم ۹.۲.۴ و فرض استقراء، خواهیم داشت:

$$\gamma(G(\mathbb{F}_۱ \times \mathbb{F}_۲ \times \cdots \times \mathbb{F}_n)) > \gamma(G(\mathbb{F}_۱ \times \mathbb{F}_۲ \times \cdots \times \mathbb{F}_{n-۱})) \geq n$$

و لذا $\gamma(G(\mathbb{F}_۱ \times \mathbb{F}_۲ \times \cdots \times \mathbb{F}_n)) \geq n + ۱$. □

لم ۱۳.۲.۴. *فرض کنید R حلقه باشد. در این صورت* $\gamma(G(\frac{R}{J(R)})) \leq \gamma(G(R))$.

برهان. فرض کنید $\gamma(G(R)) = n$ و $D = \{x_۱, x_۲, \ldots, x_n\}$ مجموعه‌ی احاطه‌گر برای $G(R)$ باشد. در میان اعضای مجموعه‌ی $\{x_n + J(R), \ldots, x_۲ + J(R), x_۱ + J(R)\}$، عناصر متمایز را انتخاب کرده و قرار می‌دهیم $D' := \{x_{i_۱} + J(R), x_{i_۲} + J(R), \ldots, x_{i_k} + J(R)\}$. بنابراین

$$\{x_{i_۱}, x_{i_۲}, \ldots, x_{i_k}\} \subseteq \{x_۱, x_۲, \ldots, x_n\}.$$

ادعا می‌کنیم D' مجموعه‌ی احاطه‌گر برای $G(\frac{R}{J(R)})$ است. برای این منظور، فرض کنید $y + J(R)$ عنصر دلخواهی از $(\frac{R}{J(R)})\setminus D'$ باشد. در این صورت $y \in R \setminus D$ و لذا عنصری چون $x_l \in D$ وجود دارد که $y + x_l \in U(R)$ و در نتیجه

$$(y + J(R)) + (x_l + J(R)) \in U(\frac{R}{J(R)}).$$

از طرفی به ازای $۱ \leq j \leq k$، $x_l + J(R) = x_{i_j} + J(R)$. بنابراین $y + J(R)$ با عنصر $x_{i_j} + J(R)$ از گراف $G(\frac{R}{J(R)})$ مجاور است و لذا D' مجموعه‌ی احاطه‌گر برای $G(\frac{R}{J(R)})$ است و در نتیجه

$$\gamma(G(\frac{R}{J(R)})) \leq |D'| = k \leq n = \gamma(G(R)).$$

□

لم ۱۴.۲.۴. *فرض کنید $R \cong R_۱ \times R_۲ \times \cdots \times R_n$ و $I_۱, I_۲, \ldots, I_n$ به ترتیب ایده‌آل‌هایی از حلقه‌های $R_۱, R_۲, \ldots, R_n$ باشند. در این صورت*

$$\frac{R_۱ \times R_۲ \times \cdots \times R_n}{I_۱ \times I_۲ \times \cdots \times I_n} \cong \frac{R_۱}{I_۱} \times \frac{R_۲}{I_۲} \times \cdots \times \frac{R_n}{I_n}.$$

برهان. می‌دانیم $f : R_۱ \times \cdots \times R_n \longrightarrow \frac{R_۱}{I_۱} \times \cdots \times \frac{R_n}{I_n}$ با ضابطه‌ی زیر، همریختی است

$$f(r_۱, \ldots, r_n) = (r_۱ + I_۱, \ldots, r_n + I_n)$$

که در آن $\ker(f) = I_۱ \times \cdots \times I_n$. به وضوح f پوشاست و لذا بنابر قضیه‌ی اول یکریختی حکم ثابت می‌شود. □

لم ۱۵.۲.۴. *فرض کنید $R \cong R_۱ \times R_۲ \times \cdots \times R_n$ که در آن‌ها R_i ($۱ \leq i \leq n$)، حلقه‌های موضعی با ایده‌آل ماکسیمال $\mathfrak{m}_i$ باشند. در این صورت اگر $n \geq ۳$، آن‌گاه $\gamma(G(R)) \geq n + ۱$.*

برهان. بنابر لم ۱۴.۲.۴ داریم:

$$\frac{R_۱ \times R_۲ \times \cdots \times R_n}{\mathfrak{m}_۱ \times \mathfrak{m}_۲ \times \cdots \times \mathfrak{m}_n} \cong \frac{R_۱}{\mathfrak{m}_۱} \times \frac{R_۲}{\mathfrak{m}_۲} \times \cdots \times \frac{R_n}{\mathfrak{m}_n} = \mathbb{F}_۱ \times \mathbb{F}_۲ \times \cdots \times \mathbb{F}_n$$

و در نتیجه بنابر لم‌های ۱۲.۲.۴ و ۱۳.۲.۴،

$$\gamma(G(R)) = \gamma(G(R_۱ \times \cdots \times R_n)) \geq \gamma(G(\frac{R_۱ \times \cdots \times R_n}{J(R_۱ \times \cdots \times R_n)})) = \gamma(G(\mathbb{F}_۱ \times \cdots \times \mathbb{F}_n)) \geq n + ۱.$$

□

تذکر ۱۶.۲.۴. *فرض کنید R حلقه باشد. چون R متناهی است، لذا با توجه به تذکر ۱.۲.۲ ، حلقه‌های موضعی $(R_۱, \mathfrak{m}_۱)$، $(R_۲, \mathfrak{m}_۲)$، ... و $(R_n, \mathfrak{m}_n)$ وجود دارند که $R \cong R_۱ \times R_۲ \times \cdots \times R_n$ و لذا بنابر لم ۱۵.۲.۴ ، خواهیم داشت:*

$$\gamma(G(R)) \geq n + ۱.$$

لم ۱۷.۲.۴. *فرض کنید R حلقه‌ای موضعی با ایده‌آل ماکسیمال $\mathfrak{m}$ باشد و $x \in R$. در این صورت اگر $x \notin \mathfrak{m}$، آن‌گاه $x \in U(R)$ و اگر $x \in \mathfrak{m}$، آن‌گاه $x + ۱ \in U(R)$ و به‌ویژه $D = \{۰, ۱\}$، مجموعه‌ی احاطه‌گر برای گراف $G(R)$ است.*

برهان. ابتدا فرض کنید $x \notin \mathfrak{m}$. در این صورت اگر $x \notin U(R)$، آن‌گاه $\langle x \rangle$ ایده‌ال سره‌ای از R است. از طرفی $(R, \mathfrak{m})$ حلقه‌ای موضعی است و لذا $\langle x \rangle \subseteq \mathfrak{m}$. بنابراین $x \in \mathfrak{m}$ که تناقض است.

حال فرض کنید $x \in \mathfrak{m}$. در این صورت $x + ۱ \notin \mathfrak{m}$. زیرا در غیر این صورت $۱ \in \mathfrak{m}$ که تناقض است و لذا بنابر حالت قبل، $x + ۱ \in U(R)$.

حال فرض کنید a عنصری از حلقه‌ی R باشد. در این صورت اگر $a \notin \mathfrak{m}$، آن‌گاه $a \in U(R)$ و لذا $a + ۰ \in U(R)$ و اگر $a \in \mathfrak{m}$، آن‌گاه $a + ۱ \in U(R)$ و در نتیجه $D = \{۰, ۱\}$، مجموعه‌ی احاطه‌گر برای $G(R)$ است.

$\square$

لم ۱۸.۲.۴. *فرض کنید $\mathbb{F}_۱$ و $\mathbb{F}_۲$ میدان‌هایی باشند که $\mathrm{Char}\ \mathbb{F}_۱ = ۲$ و $\mathrm{Char}\ \mathbb{F}_۲ \neq ۲$. در این صورت اگر b عنصر ناصفری از میدان $\mathbb{F}_۲$ باشد، آن‌گاه $D = \{(۰, -b), (۱, b)\}$، مجموعه‌ی احاطه‌گر برای گراف $G(\mathbb{F}_۱ \times \mathbb{F}_۲)$ است.*

برهان. چون $\mathrm{Char}\ \mathbb{F}_۱ = ۲$ و $\mathrm{Char}\ \mathbb{F}_۲ \neq ۲$ لذا خواهیم داشت:

$$۲(۱, ۱) = (۰, ۲) \notin U(\mathbb{F}_۱ \times \mathbb{F}_۲).$$

و لذا بنابر گزاره‌ی ۵.۱.۴، درجه‌ی هر رأس از $G(\mathbb{F}_۱ \times \mathbb{F}_۲)$ برابر است با:

$$|U(\mathbb{F}_۱ \times \mathbb{F}_۲)| = |U(\mathbb{F}_۱)||U(\mathbb{F}_۲)| = (|\mathbb{F}_۱| - ۱)(|\mathbb{F}_۲| - ۱)$$

و همچنین

$$|N(۰, -b)| = |N(۱, b)| = (|\mathbb{F}_۱| - ۱)(|\mathbb{F}_۲| - ۱).$$

از طرفی هر عنصر $(x, y) \in \mathbb{F}_۱ \times \mathbb{F}_۲$ با رئوس $(۰, -b)$ و $(۱, b)$ مجاور است اگر و فقط اگر $x \neq ۰, -۱$ و $y \neq b, -b$ و لذا

$$N(۰, -b) \cap N(۱, b) = \{(x, y) \in \mathbb{F}_۱ \times \mathbb{F}_۲ | x \neq ۰, -۱ \ \text{و}\ y \neq b, -b\}$$

و در نتیجه

$$|N(۰, -b) \cap N(۱, b)| = (|\mathbb{F}_۱| - ۲)(|\mathbb{F}_۲| - ۲).$$

حال داریم:

$$\begin{aligned}|N(0,-b)\cup N(1,b)| &= |N(0,-b)|+|N(1,b)|-|N(0,-b)\cap N(1,b)|\\ &= 2(|\mathbb{F}_1|-1)(|\mathbb{F}_2|-1)-(|\mathbb{F}_1|-2)(|\mathbb{F}_2|-2)\\ &= |\mathbb{F}_1||\mathbb{F}_2|-2\\ &= |\mathbb{F}_1\times\mathbb{F}_2|-2.\end{aligned}$$

از طرفی

$$(0,-b)+(1,b)=(1,0)\notin U(\mathbb{F}_1\times\mathbb{F}_2)$$

لذا $(0,-b)$ و $(1,b)$ باهم غیر مجاورند و چون

$$(0,-b),(1,b)\notin N(0,-b)\cup N(1,b).$$

در نتیجه

$$N(0,-b)\cup N(1,b)=(\mathbb{F}_1\times\mathbb{F}_2)\setminus D.$$

لذا هر عنصر از $(\mathbb{F}_1\times\mathbb{F}_2)\setminus D$، با حد اقل یک عنصر از D مجاور است بنابراین D مجموعه‌ی احاطه‌گر برای $G(\mathbb{F}_1\times\mathbb{F}_2)$ است. □

لم ۱۹.۲.۴. *فرض کنید $\mathbb{F}$ میدان باشد. در این صورت $D=\{(0,0),(1,0)\}$ مجموعه‌ی احاطه‌گر برای $G(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{F})$ است.*

برهان. چون

$$V(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{F})\setminus D=\{(0,y_1)\big|0\neq y_1\in\mathbb{F}\}\cup\{(1,y_2)\big|0\neq y_2\in\mathbb{F}\}$$

و نیز

$$\begin{aligned}(0,y_1)+(1,0)&=(1,y_1)\in U(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{F})\\ (1,y_2)+(0,0)&=(1,y_2)\in U(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{F})\end{aligned}$$

بنابراین D مجموعه‌ی احاطه‌گر برای $G(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{F})$ است. □

قضیه ۲۰.۲.۴. *فرض کنید R حلقه باشد. در این صورت $\gamma(G(R))=2$ اگر وفقط اگر R در یکی از حالت‌های زیر صدق کند:*

۱. *R حلقه‌ی موضعی و میدان نباشد.*
۲. *R با حاصل‌ضرب دو میدانی یکریخت باشد که تنها یکی از آن‌ها دارای مشخصه‌ی دو باشد.*
۳. *به ازای میدانی چون $\mathbb{F}$، R با $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{F}$ یکریخت باشد.*

برهان. ($\Longleftarrow$) فرض کنید $\gamma(G(R)) = ۲$. در این صورت چون R حلقه‌ی متناهی است، در نتیجه بنابر تذکر ۱.۲.۲،

$$R \cong R_۱ \times R_۲ \times \cdots \times R_n,$$

که در آن، $(R_۱, \mathfrak{m}_۱)$، $(R_۲, \mathfrak{m}_۲)$، ... و $(R_n, \mathfrak{m}_n)$، حلقه‌های موضعی می‌باشند. اگر $n \geq ۳$، آن‌گاه بنابر لم ۱۵.۲.۴، $۲ = \gamma(G(R)) \geq n + ۱ \geq ۴$ که تناقض است و لذا $n \leq ۲$. بنابراین

$$R \cong R_۱ \quad \text{یا} \quad R \cong R_۱ \times R_۲.$$

اگر $R \cong R_۱$ و $R_۱$ میدان باشد، آن‌گاه بنابر لم ۱.۲.۴، $\gamma(G(R)) = \gamma(G(R_۱)) = ۱$ که تناقض است. بنابراین $R_۱$ میدان نیست و لذا R حلقه‌ی موضعی با ایده‌آل ماکسیمال غیر صفر است.
حال فرض کنید $R \cong R_۱ \times R_۲$. برای حلقه‌ی دلخواهی مانند S، می‌دانیم $\gamma(\bar{G}(S)) = \gamma(G(S))$، در نتیجه بنابر گزاره‌ی ۸.۲.۴، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
۲ &= \gamma(G(R)) \\
&= \gamma(G(R_۱ \times R_۲)) \\
&= \gamma(\bar{G}(R_۱) \dot{\times} \bar{G}(R_۲)) \\
&\geq \gamma(\bar{G}(R_۱)) + \gamma(\bar{G}(R_۲)) - ۱ \\
&= \gamma(G(R_۱)) + \gamma(G(R_۲)) - ۱
\end{aligned}$$

اما از آن‌جا که $\gamma(G(R_۲)) \geq ۱$ و $\gamma(G(R_۱))$، در نتیجه

$$۲ \leq \gamma(G(R_۱)) + \gamma(G(R_۲)) \leq ۳$$

و لذا

$$\gamma(G(R_۱)) + \gamma(G(R_۲)) = ۲ \quad \text{یا} \quad \gamma(G(R_۱)) + \gamma(G(R_۲)) = ۳.$$

اگر $\gamma(G(R_۱)) + \gamma(G(R_۲)) = ۳$، آن‌گاه به ازای $i, j = ۱, ۲$ $(i \neq j)$، داریم

$$\gamma(G(R_i)) = ۱ \quad \text{و} \quad \gamma(G(R_j)) = ۲.$$

بدون از دست دادن کلیت، فرض کنید $\gamma(G(R_۱)) = ۲$ و $\gamma(G(R_۲)) = ۱$. لذا بنابر قضیه‌ی ۲.۲.۴، $R_۲ := \mathbb{F}_۲$ که $\mathbb{F}_۲$ میدان است و در این حالت، $R \cong R_۱ \times \mathbb{F}_۲$. در نتیجه بنابر لم ۹.۲.۴، داریم:

$$۲ = \gamma(G(R)) = \gamma(G(R_۱ \times \mathbb{F}_۲)) > \gamma(G(R_۱)) = ۲$$

که تناقض است. بنابرین $\gamma(G(R_۱)) + \gamma(G(R_۲)) = ۲$ و لذا $\gamma(G(R_۱)) = \gamma(G(R_۲)) = ۱$. پس بنابر لم ۲.۲.۴، $R_۱ := \mathbb{F}_۱$ و $R_۲ := \mathbb{F}_۲$ که $\mathbb{F}_۱$ و $\mathbb{F}_۲$، میدان می‌باشند. لذا بنابر لم‌های ۳.۲.۴ و ۵.۲.۴، R یکریخت با ضرب میدان‌هایی است که فقط یکی از آن‌ها دارای مشخصه‌ی دو است یا به

ازای میدانی چون $\mathbb{F}$، $R \cong \mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{F}$.

$(\Longrightarrow)$ بنابر فرض، R نمی‌تواند میدان باشد و لذا بنابر قضیه‌ی ۲.۲.۴، $\gamma(G(R)) \neq ۱$.

اگر R حلقه‌ی موضعی باشد، آن‌گاه بنابر لم ۱۷.۲.۴، $\gamma(G(R)) = ۲$ و اگر R یکریخت با ضرب دو میدانی باشد که تنها یکی از آن‌ها دارای مشخصه‌ی دو باشد، آن‌گاه بنابر لم ۱۸.۲.۴، $\gamma(G(R)) = ۲$ و اگر $R \cong \mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{F}$، آن‌گاه بنابر لم ۱۹.۲.۴، $\gamma(G(R)) = ۲$. □

۳.۴ احاطه‌گری درگراف‌های یکانی وابسته به حاصل‌ضرب حلقه‌های موضعی

در این بخش، احاطه‌گری را در گراف‌های یکانی حلقه‌های موضعی، مطالعه می‌کنیم و سپس به تعیین عدد احاطه‌گر و احاطه‌گر کلی و رابطه‌ی بین آن‌ها در چنین گرافی می‌پردازیم. هدف اساسی در این بخش، یافتن شرط لازم و کافی برای آن‌که $\gamma(G(R)) = ۳$ باشد، است.

لم ۱.۳.۴. *فرض کنید R و S حلقه‌های موضعی باشند و $\mathfrak{m}$ ایده‌آل ماکسیمال حلقه‌ی R باشد که $|\frac{R}{\mathfrak{m}}| = ۲$. در این صورت $\gamma_t(G(R \times S)) \leq ۴$.*

برهان. چون $\mathfrak{m} \times S$ ایده‌آل ماکسیمال $R \times S$ است و $|\frac{R \times S}{\mathfrak{m} \times S}| = ۲$، لذا بنابر گزاره‌ی ۶.۱.۴، $G(R \times S)$ گراف دوبخشی با بخش‌های $V_۱ = \mathfrak{m} \times S$ و $V_۲ = (R \setminus \mathfrak{m}) \times S$ است.

ادعا می‌کنیم $D = \{(۰,۰),(۰,۱),(۱,۰),(۱,۱)\}$ مجموعه‌ی احاطه‌گر کلی برای $G(R \times S)$ است. برای این منظور، فرض کنید (a,b) عنصر دلخواهی از $R \times S$ باشد. در این صورت

$$(a,b) \in V_۱ = \mathfrak{m} \times S \quad \text{یا} \quad (a,b) \in V_۲ = (R \setminus \mathfrak{m}) \times S.$$

حال اگر $\mathfrak{n}$ ایده‌آل ماکسیمال S باشد، آن‌گاه با استفاده از لم ۱۷.۲.۴، حالت‌های زیر را خواهیم داشت:

اگر $(a,b) \in \mathfrak{m} \times S$ و $b \notin \mathfrak{n}$، آن‌گاه داریم:

$$(a,b) + (۱,۰) = (a+۱, b) \in U(R \times S)$$

و اگر $b \in \mathfrak{n}$، آن‌گاه خواهیم داشت:

$$(a,b) + (۱,۱) = (a+۱, b+۱) \in U(R \times S).$$

حال اگر $(a,b) \in V_۲ = (R \setminus \mathfrak{m}) \times S$ و $b \notin \mathfrak{n}$، آن‌گاه داریم:

$$(a,b) + (۰,۰) = (a,b) \in U(R \times S)$$

و اگر $b \in \mathfrak{n}$، آن‌گاه خواهیم داشت:

$$(a,b) + (۰,۱) = (a, b+۱) \in U(R \times S)$$

و لذا $D = \{(۰,۰),(۰,۱),(۱,۰),(۱,۱)\}$ مجموعه‌ی احاطه‌گر کلی برای $G(R\times S)$ است. بنابراین

$$\gamma_t(G(R\times S)) \leq ۴.$$

□

لم ۲.۳.۴. *اگر R و S دو حلقه‌ی موضعی و $\mathfrak{m}$ ایده‌آل ماکسیمال ناصفری از R باشد که $|\frac{R}{\mathfrak{m}}| = ۲$، آن‌گاه*

$$\gamma(G(R\times S)) = \gamma_t(G(R\times S)) = ۴.$$

برهان. بنابر فرض، $\mathfrak{m}\times S$، ایده‌آل ماکسیمال $R\times S$ است که $|\frac{R\times S}{\mathfrak{m}\times S}| = ۲$ و لذا بنابر گزاره‌ی ۶.۱.۴، $G(R\times S)$، گراف دوبخشی با بخش‌های $V_۱ = \mathfrak{m}\times S$ و $V_۲ = (R\setminus \mathfrak{m})\times S$ است. از طرفی $|\frac{R}{\mathfrak{m}}| = ۲$، لذا $|\mathfrak{m}| = |R\setminus \mathfrak{m}| = \frac{|R|}{۲}$ و لذا $|V_۱| = |V_۲| = (\frac{|R|}{۲})|S|$.

نشان می‌دهیم $\gamma(G(R\times S)) = ۴$. برای این منظور، به برهان خلف فرض کنید $\gamma(G(R\times S)) \leq ۳$ و D مجموعه‌ای احاطه‌گر برای $G(R\times S)$ باشد که $|D| = ۳$ (با توجه به قضیه‌ی ۲۰.۲.۴، $|D| > ۲$). چون R میدان نیست و $|\frac{R}{\mathfrak{m}}| = ۲$، لذا $|R| \geq ۴$ و چون $|S| \geq ۲$، در نتیجه خواهیم داشت:

$$|V_۱| = |V_۲| = (\frac{|R|}{۲})|S| \geq ۴.$$

از طرفی $|D| = ۳$، لذا D نمی‌تواند به طور کامل مشمول مجموعه‌های $V_۱$ و $V_۲$ باشد. بنابراین

$$D\cap V_۱ \neq \emptyset \quad \text{و} \quad D\cap V_۲ \neq \emptyset$$

و لذا $|D\cap V_۱| = ۱$ یا $|D\cap V_۲| = ۱$. بدون از دست رفتن کلیت، فرض کنید $|D\cap V_۱| = ۱$. چون

$$D\cap V_۱ \subseteq V_۱ = \mathfrak{m}\times S$$

لذا با فرض این‌که x و y به‌ترتیب عناصری از $\mathfrak{m}$ و S باشند، قرار می‌دهیم $D\cap V_۱ := \{(x,y)\}$. چون $|R\setminus \mathfrak{m}| = \frac{|R|}{۲} \geq ۲$، لذا عناصر متمایزی چون $x_۱$ و $x_۲$ از مجموعه‌ی $R\setminus \mathfrak{m}$ وجود دارند. پس $(x_۱,-y)$ و $(x_۲,-y)$ دو عنصر متفاوتی از $V_۲ = R\setminus \mathfrak{m}\times S$ می‌باشند و چون $(x,y)\in V_۱$، لذا $(x_۱,-y)\neq (x,y)$ و $(x,y)\neq (x_۲,-y)$. حال اگر $(x_۱,-y)\notin D$، آن‌گاه داریم:

$$(x_۱,-y)+(x,y) = (x_۱+x,۰) \in U(R\times S)$$

که تناقض است و لذا $(x_۱,-y)\in D$ و به طریق مشابه، $(x_۲,-y)\in D$. در نتیجه

$$D = \{(x,y),(x_۱,-y),(x_۲,-y)\}.$$

از طرفی $|\mathfrak{m}| = \frac{|R|}{۲} \geq ۲$، لذا عنصری چون $a\in \mathfrak{m}\setminus\{x\}$ موجود است که $(a,y)\in \mathfrak{m}\times S = V_۱$ و $(a,y)\neq (x,y)$. چون $|D\cap V_۱| = ۱$، لذا $(a,y)\notin D$. از طرفی $(a,y)\in V_۱$، لذا (a,y) با رأس (x,y) مجاور نیست و لذا خواهیم داشت:

$$(a,y)+(x_۱,-y) = (a+x_۱,۰) \in U(R\times S)$$

یا

$$(a, y) + (x_2, -y) = (a + x_2, 0) \in U(R \times S).$$

که هر دو حالت فوق منجر به تناقض می‌شود و لذا $\gamma(G(R \times S)) \geq 4$. از طرفی بنابر لم ۱.۳.۴،

$$4 \leq \gamma(G(R \times S)) \leq \gamma_t(G(R \times S)) \leq 4.$$

بنابراین

$$\gamma(G(R \times S)) = \gamma_t(G(R \times S)) = 4.$$

□

لم ۳.۳.۴. *فرض کنید S، حلقه‌ی موضعی باشد که میدان نباشد. در این صورت*

$$\gamma(G(\mathbb{Z}_2 \times S)) = \gamma_t(G(\mathbb{Z}_2 \times S)) = 4.$$

برهان. فرض کنید $\mathfrak{m}$ ایده‌آل ماکسیمال حلقه‌ی S باشد. در این صورت اگر $|\frac{S}{\mathfrak{m}}| = 2$، آن‌گاه بنابر لم ۲.۳.۴، داریم:

$$\gamma(G(\mathbb{Z}_2 \times S)) = \gamma_t(G(\mathbb{Z}_2 \times S)) = 4.$$

حال فرض کنید $|\frac{S}{\mathfrak{m}}| \geq 3$. در این صورت چون $\mathbb{Z}_2 \times S$، حلقه‌ای با ایده‌آل ماکسیمال $\{0\} \times S$ است و $|\frac{\mathbb{Z}_2 \times S}{\{0\} \times S}| = 2$، لذا بنابر گزاره‌ی ۶.۱.۴، $G(\mathbb{Z}_2 \times S)$، گرافی دوبخشی با بخش‌های $V_1 = \{0\} \times S$ و $V_2 = \{1\} \times S$ است و همچنین $|V_1| = |V_2| = |S|$.

ادعا می‌کنیم $\gamma(G(\mathbb{Z}_2 \times S)) \geq 4$. به برهان خلف فرض کنید $\gamma(G(\mathbb{Z}_2 \times S)) \leq 3$ و D مجموعه‌ای احاطه‌گر برای $G(\mathbb{Z}_2 \times S)$ باشد که $|D| = 3$. چون S میدان نیست، لذا $|\mathfrak{m}| \geq 2$ و چون $|\frac{S}{\mathfrak{m}}| \geq 3$، پس $|S| \geq 3|\mathfrak{m}| \geq 6$. بنابراین خواهیم‌داشت:

$$|V_1| = |V_2| = |S| \geq 6.$$

از طرفی $|D| = 3$، لذا D بطور کامل نمی‌تواند مشمول مجموعه‌های V_1 و V_2 باشد. بنابراین

$$D \cap V_1 \neq \emptyset \quad \text{و} \quad D \cap V_2 \neq \emptyset.$$

در نتیجه

$$|D \cap V_1| = 1 \quad \text{یا} \quad |D \cap V_2| = 1.$$

بدون از دست دادن کلیت، فرض کنید $|D \cap V_1| = 1$. در این صورت $|D \cap V_2| = 2$. بنابراین

$$D = \{(0, y_1), (1, y_2), (1, y_3) | y_1, y_2, y_3 \in S \text{ و } y_2 \neq y_3\}.$$

فرض کنید y عنصر دلخواهی از مجموعه‌ی $S \setminus \{y_2, y_3\}$ باشد. در این صورت $(1, y) \notin D$ و با عنصری از D مجاور است. از طرفی $(1, y), (1, y_2), (1, y_3) \in V_2$، چون D مجموعه‌ی احاطه‌گر است،

لذا $(\text{۱},y)$ با رأس $(\circ,y_\text{۱})$، مجاور است و با رئوس $(\text{۱},y_\text{۱}),(\text{۱},y_\text{۲})$، مجاور نیست. بنابراین برای هر $y\in S\setminus\{y_\text{۲},y_\text{۳}\}$، $(\text{۱},y)$ با رأس $(\circ,y_\text{۱})$ مجاور است و لذا

$$\deg(\circ,y_\text{۱})\geq |S|-\text{۲}.$$

از طرفی بنابر گزاره‌ی ۵.۱.۴ داریم:

$$\deg(\circ,y_\text{۱})\leq |U(\mathbb{Z}_\text{۲}\times S)|=|U(\mathbb{Z}_\text{۲})||U(S)|=|U(S)|=|S|-|\mathfrak{m}|\leq |S|-\text{۲}.$$

در نتیجه

$$\deg(\circ,y_\text{۱})=|S|-\text{۲}\quad \text{و}\quad |\mathfrak{m}|=\text{۲}.$$

بنابراین $(\circ,y_\text{۱})$ با رئوس $(\text{۱},y_\text{۲})$ و $(\text{۱},y_\text{۳})$، غیر مجاور است و در نتیجه به ازای $i=\text{۲},\text{۳}$،

$$(\circ,y_\text{۱})+(\text{۱},y_i)=(\text{۱},y_\text{۱}+y_i)\notin U(\mathbb{Z}_\text{۲}\times S).$$

بنابراین به ازای $i=\text{۲},\text{۳}$، $y_\text{۱}+y_i\notin U(S)$ و لذا بنابر لم ۱۷.۲.۴، خواهیم داشت:

$$y_\text{۱}+y_\text{۲}\in\mathfrak{m}\quad \text{و}\quad y_\text{۱}+y_\text{۳}\in\mathfrak{m}.$$

چون $y_\text{۲}\neq y_\text{۳}$ و $|\mathfrak{m}|=\text{۲}$، در نتیجه $\mathfrak{m}=\{y_\text{۱}+y_\text{۲},y_\text{۱}+y_\text{۳}\}$. بدون از دست دادن کلیت، فرض کنید $y_\text{۱}+y_\text{۲}=\circ$. در این صورت $D=\{(\circ,y_\text{۱}),(\text{۱},-y_\text{۱}),(\text{۱},y_\text{۳})\}$. چون $y_\text{۱}+y_\text{۳}\in\mathfrak{m}$ در نتیجه $-y_\text{۳}-y_\text{۱}\in\mathfrak{m}$ و لذا بنابر لم ۱۷.۲.۴، $-y_\text{۳}-y_\text{۱}\notin U(S)$. بنابراین

$$(\circ,-y_\text{۳})+(\circ,y_\text{۱})=(\circ,-y_\text{۳}+y_\text{۱})\notin U(\mathbb{Z}_\text{۲}\times S),$$
$$(\circ,-y_\text{۳})+(\text{۱},-y_\text{۱})=(\text{۱},-y_\text{۳}-y_\text{۱})\notin U(\mathbb{Z}_\text{۲}\times S),$$
$$(\circ,-y_\text{۳})+(\text{۱},y_\text{۳})=(\text{۱},\circ)\notin U(\mathbb{Z}_\text{۲}\times S).$$

لذا $(\circ,-y_\text{۳})$ با عناصر مجموعه‌ی D مجاور نیست. پس $(\circ,-y_\text{۳})\in D$ و در نتیجه خواهیم داشت $(\circ,-y_\text{۳})=(\circ,y_\text{۱})$. پس $y_\text{۱}+y_\text{۳}=\circ$ که تناقض است و لذا $\gamma(\mathbb{Z}_\text{۲}\times S)\geq \text{۴}$. از طرفی بنابر لم ۱.۳.۴، $\gamma(G(\mathbb{Z}_\text{۲}\times S))\leq\gamma_t(G(\mathbb{Z}_\text{۲}\times S))\leq\text{۴}$. بنابراین

$$\gamma(G(\mathbb{Z}_\text{۲}\times S))=\gamma_t(G(\mathbb{Z}_\text{۲}\times S))=\text{۴}.$$

□

لم ۴.۳.۴. *فرض کنید $(R_\text{۱},\mathfrak{m}_\text{۱})$ و $(R_\text{۲},\mathfrak{m}_\text{۲})$ حلقه‌های موضعی باشند و $R\cong R_\text{۱}\times R_\text{۲}$. در این صورت اگر $|\frac{R_\text{۱}}{\mathfrak{m}_\text{۱}}|=\text{۲}$ یا $|\frac{R_\text{۲}}{\mathfrak{m}_\text{۲}}|=\text{۲}$ و $R\ncong\mathbb{Z}_\text{۲}\times\mathbb{F}$ که $\mathbb{F}$ میدان است، آن‌گاه $\gamma(G(R))=\gamma_t(G(R))=\text{۴}$.*

برهان. بدون از دست دادن کلیت فرض کنید $|\frac{R}{\mathfrak{m}_\text{۱}}|=\text{۲}$. در این صورت اگر $\mathfrak{m}_\text{۱}\neq\{\circ\}$، آن‌گاه $R_\text{۱}$ میدان نیست و لذا بنابر لم ۲.۳.۴، $\gamma(G(R))=\gamma_t(G(R))=\text{۴}$ و اگر $\mathfrak{m}_\text{۱}=\{\circ\}$، آن‌گاه $R_\text{۱}\cong\mathbb{Z}_\text{۲}$ و چون به ازای میدان $\mathbb{F}$، $R\ncong\mathbb{Z}_\text{۲}\times\mathbb{F}$، لذا $R_\text{۲}$ میدان نیست و در نتیجه بنابر لم ۳.۳.۴،

$$\gamma(G(R))=\gamma_t(G(R))=\text{۴}.$$

□

لم ۵.۳.۴. *فرض کنید $\mathbb{F}_1$ و $\mathbb{F}_2$ میدان‌هایی باشند که یکی از شرایط زیر برای آن‌ها برقرار باشد:*

۱. $\operatorname{Char} \mathbb{F}_1 = \operatorname{Char} \mathbb{F}_2 = 2$ و $\mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2 \ncong \mathbb{Z}_2$.

۲. $\operatorname{Char} \mathbb{F}_1, \operatorname{Char} \mathbb{F}_2 \neq 2$

در این صورت $\gamma(G(\mathrm{F}_1 \times \mathbb{F}_2)) = \gamma_t(G(\mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2)) = 3$.

برهان. بنابر فرض، $\mathbb{F}_1$ و $\mathbb{F}_2$ میدان‌هایی هستند که دارای حداقل سه عضو می‌باشند و لذا عناصری چون $a, c \in \mathbb{F}_1 \setminus \{0\}$ و $b, d \in \mathbb{F}_2 \setminus \{0\}$ وجود دارند که $a \neq c$ و $b \neq d$. حال نشان می‌دهیم $D = \{(0,0), (a,b), (c,d)\}$ مجموعه‌ی احاطه‌گر کلی برای گراف $G(\mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2)$ است. می‌دانیم:

$$\begin{aligned} V(\mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2) =& \{(0,0)\} \cup \{(x,0) \big| 0 \neq x \in \mathbb{F}_1\} \\ & \cup \{(0,y) \big| 0 \neq y \in \mathbb{F}_2\} \cup \{(x,y) \big| 0 \neq x \in \mathbb{F}_1, 0 \neq y \in \mathbb{F}_2\} \end{aligned}$$

نشان می‌دهیم تمامی عناصر مجموعه‌ی $V(\mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2)$ به عنصری از مجموعه‌ی D مجاور است.

برای $(0,0)$ داریم:

$$(0,0) + (a,b) = (a,b) \in U(\mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2)$$

و لذا $(0,0)$ با رأس (a,b) مجاور است.

برای عنصر $(x,0)$، $x \neq -a$ یا $x \neq -c$ و لذا

$$(x,0) + (a,b) = (x+a, b) \in U(\mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2)$$

یا

$$(x,0) + (c,d) = (x+c, d) \in U(\mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2)$$

و لذا $(x,0)$ به رأس (a,b) یا (c,d) مجاور است. به‌طور مشابه چون $y \neq -b$ یا $y \neq -d$، لذا $(0,y)$ به رأس (a,b) یا (c,d) مجاور است.

برای رأس (x,y) که $x \neq 0$ و $y \neq 0$،

$$(x,y) + (0,0) = (x,y) \in U(\mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2)$$

و لذا (x,y) با رأس $(0,0)$ مجاور است.

بنابراین D یک مجموعه‌ی احاطه‌گر کلی برای $G(\mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2)$ است و در نتیجه $\gamma_t(G(\mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2)) \leq 3$.

از طرفی بنابر لم‌های ۳.۲.۴ و ۵.۲.۴، $\gamma(G(\mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2)) \geq 3$ و لذا

$$3 \leq \gamma(G(\mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2)) \leq \gamma_t(G(\mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2)) \leq 3.$$

بنابراین $\gamma(G(\mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2)) = \gamma_t(G(\mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2)) = 3$. □

لم ۶.۳.۴. *فرض کنید $\mathbb{F}_1$ و $\mathbb{F}_2$ میدان‌هایی باشند که تنها یکی از آن‌ها از مشخصه‌ی دو و هیچ‌کدام با $\mathbb{Z}_2$ یکریخت نباشند. در این صورت* $\gamma_t(G(\mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2)) \leq 3$.

برهان. بدون از دست دادن کلیت، فرض کنید $\mathrm{Char}\ \mathbb{F}_1 = 2$ و $\mathrm{Char}\ \mathbb{F}_2 \neq 2$. چون $\mathbb{F}_1 \ncong \mathbb{Z}_2$ و $\mathbb{F}_2 \ncong \mathbb{Z}_2$، لذا $|\mathbb{F}_1| \geq 3$ و $|\mathbb{F}_2| \geq 3$ و لذا عناصری چون $a \in \mathbb{F}_1$ و $b \in \mathbb{F}_2$ موجوداند که $a \neq 0, 1$ و $b \neq -1, 1$. ادعا می‌کنیم $D = \{(0,1),(1,-1),(a,b)\}$، مجموعه‌ی احاطه‌گر کلی برای گراف $G(\mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2)$ است. می‌دانیم:

$$\begin{aligned} V(G(\mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2)) = &\{(0,0)\} \cup \{(x,0) \big| 0 \neq x \in \mathbb{F}_1\} \\ &\cup \{(0,y) \big| 0 \neq y \in \mathbb{F}_2\} \cup \{(x,y) \big| 0 \neq x \in \mathbb{F}_1, 0 \neq y \in \mathbb{F}_2\} \end{aligned}$$

نشان می‌دهیم تمامی عناصر $V(G(\mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2))$، به عنصری از مجموعه‌ی B مجاور است.

برای $(0,0)$ داریم:

$$(0,0) + (1,-1) = (1,-1) \in U(\mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2)$$

و لذا $(0,0)$ با رأس $(1,-1)$ مجاور است.

برای $(x,0)$ که $x \neq 0$ داریم:

$$(x,0) + (0,1) = (x,1) \in U(\mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2)$$

و در نتیجه $(x,0)$ با رأس $(0,1)$ مجاور است.

برای رأس $(0,y)$، اگر $y \neq 1$، آن‌گاه داریم:

$$(0,y) + (1,-1) = (1,y-1) \in U(\mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2)$$

و اگر $y = 1$، آن‌گاه داریم:

$$(0,y) + (a,b) = (a,1+b) \in U(\mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2)$$

و لذا $(0,y)$ با رأس $(1,-1)$ یا (a,b) مجاور است.

سر انجام، برای رأس (x,y) که $x \neq 0$ و $y \neq 0$، اگر $x = 1$ و $y = 1$، آن‌گاه داریم:

$$(x,y) + (a,b) = (1+a, 1+b) \in U(\mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2).$$

اگر $x \neq 1$ و $y = 1$، آن‌گاه داریم:

$$(x,y) + (0,1) = (x,2) \in U(\mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2).$$

حال اگر $x = 1$ و $y \neq 1$، آن‌گاه برای $y \neq -1$، داریم:

$$(x,y) + (0,1) = (1,y+1) \in U(\mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2)$$

و اگر $y = -1$، آن‌گاه خواهیم داشت:

$$(x,y) + (a,b) = (1+a, -1+b) \in U(\mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2).$$

اگر $x \neq ۱$ و $y \neq ۱$، آن‌گاه داریم:

$$(x, y) + (۱, -۱) = (x + ۱, y - ۱) \in U(\mathbb{F}_۱ \times \mathbb{F}_۲)$$

و لذا در حالت‌های فوق (x, y) با یکی از رئوس $(۱, ۰)$ یا $(۱, -۱)$ یا (a, b) مجاور است. بنابرین

$$\gamma_t(G(\mathbb{F}_۱ \times \mathbb{F}_۲)) \leq ۳.$$

□

لم ۷.۳.۴. *فرض کنید R حلقه‌ی جابه‌جایی باشد. در این صورت $u \in U(R)$ اگر و فقط اگر داشته باشیم $u + J(R) \in U(\frac{R}{J(R)})$.*

برهان. $(\Longrightarrow)$ فرض کنید به ازای $u \in R$، $u + J(R) \in U(\frac{R}{J(R)})$. در این صورت عنصری چون $v + J(R) \in U(\frac{R}{J(R)})$ وجود دارد که $(u + J(R))(v + J(R)) = ۱ + J(R)$. لذا $۱ - uv \in J(R)$ و در نتیجه $uv = ۱ - (۱ - uv) \in U(R)$. بنابراین $u \in U(R)$.

$(\Longleftarrow)$ واضح است.

□

لم ۸.۳.۴. *فرض کنید R حلقه باشد. در این صورت اگر x و y عناصری از حلقه‌ی R باشند که $x + J(R)$ با رأس $y + J(R)$ درگراف $G(\frac{R}{J(R)})$ مجاور باشد، آن‌گاه هر عنصر از $x + J(R)$ با هر عضو از $y + J(R)$ درگراف $G(R)$ مجاور است.*

برهان. فرض کنید a و b عناصری به ترتیب متعلق به مجموعه‌های $x + J(R)$ و $y + J(R)$ باشند. در این صورت به ازای عناصری چون j و j' از $J(R)$ داریم:

$$a = x + j \quad \text{و} \quad b = y + j'.$$

چون $x + J(R)$ با رأس $y + J(R)$ در گراف $G(\frac{R}{J(R)})$ مجاور است، لذا بنابر لم ۷.۳.۴، عنصر یکه‌ای چون $u \in R$ موجود است که $(x + J(R)) + (y + J(R)) = u + J(R)$ و لذا

$$x + y - u = (a + b) - (j + j') - u \in J(R).$$

نشان می‌دهیم $a + b \in U(R)$. به برهان خلف فرض کنید $a + b$ عنصر غیر یکه‌ای از حلقه‌ی R باشد. در این صورت $\langle a + b \rangle$ ایده‌آل سره‌ای از R است و در نتیجه ایده‌آل ماکسیمالی از حلقه‌ی R، چون $\mathfrak{m}$ موجود است که $\langle a + b \rangle \subseteq \mathfrak{m}$ و لذا $a + b \in \mathfrak{m}$. از طرفی $j + j'$ و $(a + b) - (j + j') - u$ عناصری از $\mathfrak{m}$ می‌باشند. در نتیجه $u \in \mathfrak{m}$ که تناقض است و لذا $a + b \in U(R)$ و در نتیجه a و b در $G(R)$ مجاورند. □

گزاره ۹.۳.۴. *فرض کنید R حلقه باشد. در این صورت $\gamma_t(G(R)) \leq \gamma_t(G(\frac{R}{J(R)}))$.*

برهان. فرض کنید $\gamma_t(G(\frac{R}{J(R)})) = n$ و $D = \{x_1 + J(R), x_2 + J(R), \dots, x_n + J(R)\}$ مجموعه‌ی احاطه‌گر کلی برای گراف $G(\frac{R}{J(R)})$ باشد. ادعا می‌کنیم $D' = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ مجموعه‌ی احاطه‌گر کلی برای $G(R)$ است. برای این منظور، فرض کنید y عنصر دلخواهی از حلقه‌ی R باشد. در این صورت $y + J(R) \in \frac{R}{J(R)}$. لذا عنصری چون $x_i + J(R) \in D$ موجود است که

$$(y + J(R)) + (x_i + J(R)) = y + x_i + J(R) \in U(R)$$

و لذا بنابر گزاره‌ی ۸.۳.۴، y با رأس x_i از گراف $G(R)$ مجاور است. بنابرین

$$\gamma_t(G(R)) \le |D'| = n = \gamma_t(G(\frac{R}{J(R)})).$$

□

قضیه ۱۰.۳.۴. *فرض کنید R حلقه باشد. در این صورت $\gamma(G(R)) = 3$ اگر و فقط اگر R در هر دو حالت زیر صدق کند:*

۱. *R یکریخت با ضرب دو میدانی نباشد که تنها یکی از آن‌ها از مشخصه دو باشد.*

۲. *$R \cong R_1 \times R_2$ که در آن $(R_1, \mathfrak{m}_1)$ و $(R_2, \mathfrak{m}_2)$ حلقه‌های موضعی‌ای باشند که $\frac{R_1}{\mathfrak{m}_1} \ncong \mathbb{Z}_2$ و $\frac{R_2}{\mathfrak{m}_2} \ncong \mathbb{Z}_2$.*

برهان. $(\Longleftarrow)$ فرض کنید $\gamma(G(R)) = 3$. در این صورت بنابر قضیه‌ی ۲۰.۲.۴، R غیر یکریخت با حاصل‌ضرب میدان‌هایی است که تنها یکی از آن‌ها از مشخصه‌ی دو است. از طرفی بنابر تذکر ۱.۲.۲، چون R متناهی است، لذا $R \cong R_1 \times R_2 \times \dots \times R_n$، که در آن $(R_1, \mathfrak{m}_1)$، $(R_2, \mathfrak{m}_2)$، ... و $(R_n, \mathfrak{m}_n)$ حلقه‌ای موضعی می‌باشند. اگر $n \ge 3$، آن‌گاه بنابر لم ۱۵.۲.۴، داریم:

$$3 = \gamma(G(R)) \ge n + 1 \ge 4$$

که تناقض است و لذا $n \le 2$. اگر $n = 1$، آن‌گاه $R \cong R_1$. در این حالت اگر R_1 میدان باشد، آن‌گاه بنابر لم ۱.۲.۴، $\gamma(G(R)) = \gamma(G(R_1)) = 1$ که تناقض است و اگر R_1 حلقه‌ی موضعی با ایدهآل ماکسیمال غیر صفر باشد، آن‌گاه بنابر قضیه‌ی ۲۰.۲.۴، $\gamma(G(R)) = \gamma(G(R_1)) = 2$ که تناقض است. بنابراین $n = 2$ و در این حالت $R \cong R_1 \times R_2$. لذا بنابر قضیه‌ی ۲۰.۲.۴، به ازای میدانی چون $\mathbb{F}$، $R \ncong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{F}$. حال اگر $|\frac{R_1}{\mathfrak{m}_1}| = 2$ یا $|\frac{R_2}{\mathfrak{m}_2}| = 2$ آن‌گاه بنابر لم ۴.۳.۴، $\gamma(G(R)) = 4$ که تناقض است و لذا $|\frac{R_1}{\mathfrak{m}_1}| \ge 3$ و $|\frac{R_2}{\mathfrak{m}_2}| \ge 3$. بنابراین $\frac{R_1}{\mathfrak{m}_1} \ncong \mathbb{Z}_2$ و $\frac{R_2}{\mathfrak{m}_2} \ncong \mathbb{Z}_2$.

$(\Longrightarrow)$ بنابر فرض و لم ۱۴.۲.۴، $\frac{R}{J(R)} \cong \mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2$ که $\mathbb{F}_1 = \frac{R_1}{\mathfrak{m}_1}$ و $\mathbb{F}_2 = \frac{R_2}{\mathfrak{m}_2}$ میدان‌اند و با $\mathbb{Z}_2$ غیر یکریخت هستند. بنابراین دو حالت زیر را خواهیم داشت:

۱. هر دو میدان $\mathbb{F}_1$ و $\mathbb{F}_2$ از مشخصه‌ی دو یا هیچ‌کدام از مشخصه‌ی دو نباشند که در این حالت بنابر لم ۵.۳.۴، خواهیم داشت:

$$\gamma(G(\frac{R}{J(R)})) = \gamma_t(G(\frac{R}{J(R)})) = 3.$$

حال بنابر لم ۱۳.۲.۴ و گزاره‌ی ۹.۳.۴، داریم:

$$۳ = \gamma(G(\frac{R}{J(R)})) \leq \gamma(G(R)) \leq \gamma_t(G(R)) \leq \gamma_t(G(\frac{R}{J(R)})) = ۳$$

و لذا $\gamma(G(R)) = ۳$.

۲. تنها یکی از میدان‌های $\mathbb{F}_۱$ یا $\mathbb{F}_۲$ از مشخصه‌ی دو باشند. در این حالت بنابر قضیه‌ی ۲۰.۲.۴، $\gamma(\frac{R}{J(R)}) = ۲$ و نیز بنابر لم ۶.۳.۴، $\gamma_t(G(\frac{R}{J(R)})) \leq ۳$. لذا با استفاده از لم ۱۳.۲.۴ و گزاره‌ی ۹.۳.۴، داریم:

$$۲ = \gamma(G(\frac{R}{J(R)})) \leq \gamma(G(R)) \leq \gamma_t(G(R)) \leq \gamma_t(G(\frac{R}{J(R)})) \leq ۳$$

و لذا $\gamma(G(R)) = ۲$ یا $\gamma(G(R)) = ۳$. نشان می‌دهیم $\gamma(G(R)) = ۳$.

چون $R \cong R_۱ \times R_۲$، لذا R غیر موضعی است. از طرفی بنابر فرض، R غیر یکریخت با ضرب دو میدانی است که تنها یکی از آن‌ها از مشخصه‌ی دو است. همچنین $R \ncong \mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{F}$، زیرا در غیر این صورت $R \cong \mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{F}$ و لذا $\frac{R}{J(R)} \cong \mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{F}$ و در نتیجه $R \cong \mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{F} \cong \mathbb{F}_۱ \times \mathbb{F}_۲$. از طرفی بنابر فرض چون R با ضرب دو میدانی که تنها یکی از آن مشخصه‌ی دو داشته باشد، یکریخت نیست لذا $\mathrm{Char}\ \mathbb{F} = ۲$ و چون $\mathbb{F}$ متناهی است، لذا بنابر [۲۴، نتیجه‌ی ۱ صفحه‌ی ۴۳۹]، $|\mathbb{F}| = ۲^m$ $(m \in \mathbb{N})$. بنابراین $|\mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{F}| = ۲^{m+۱}$. از طرفی تنها یکی از میدان‌های $\mathbb{F}_۱$ یا $\mathbb{F}_۲$ دارای مشخصه‌ی ۲ هستند و همچنین بنابر [۲۴، نتیجه‌ی ۱ صفحه‌ی ۴۳۹]، $|\mathbb{F}_۱ \times \mathbb{F}_۲| = ۲^n \times p^m$ که $p > ۲$ و این متناقض $|\mathbb{F}_۱ \times \mathbb{F}_۲| = |\mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{F}|$ است. بنابراین، بنابر قضیه‌ی ۲۰.۲.۴، $\gamma(G(R)) \neq ۲$ و در نتیجه $\gamma(G(R)) = ۳$. □

مراجع

[1] S. Akbari and A. Mohammadian, *On the Zero-Divisor Graph of a Commutative Ring*, J. Algebra, (**274**)(2004), 847-885.

[2] D. F. Anderson, A. Frazier, A. Lauve, P. S. Livingston, *The Zero-Divisor Graph of a Commutative Ring II*, J. Algebra, (**217**)(1999), 437-447.

[3] D. F. Anderson and P. S. Livingston, *The Zero-Divisior Graph of a Commutative Ring*, J. Algebra, (**217**)(1998), 434-447.

[4] N. Ashrafi, H. R. Maimani, M. R. Pournaki And S. Yassemi, *Unit Graphs Assosiated with Rings*, Comm. Algebra, (**38**)(2010), 2851-2871.

[5] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald, *Introduction to Commutative Algebra*, Addision-Wesly, Reading, MA, 1969.

[6] I. Beck, *Coloring of Commutative Rings*, J. Algebra, (**116**)(1988), 208-226.

[7] M. Behboodi and Z. Rakeei, *The Annihilating-Ideal of Commutative Rings I*, J. Algebra, (**10**)(2011), 727-739.

[8] M. Behboodi and Z. Rakeei, *The Annihilating-Ideal of Commutative Rings II*, J. Algebra, (**10**)(2011), 741-753.

[9] J. A. Bondy and U. S. R. Murty, *Graph theory with application*, American Elsevier Publishing Co., Inc., New York, 1976.

[10] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi and Slater, P. J. (eds.), *Fundamentals of Domination in Graphs*, MarcelDekker, Inc, New York, NY, 1998.

[11] K. Hoffman, R. Knuze, *Linear Algebra*, Prentice-Hall, Inc, Englewood, New Jercy, 1971.

[12] S. H. Jafari and N. Jafari Rad, *On Domination of Zero-Divisor Graphs of Matrix Ring*, Canad. Math. Bull., (**58**)(2015), 271-275.

[13] N. Jafari Rad, S. H. Jafari, D. A. Mojdeh, *On Domination in Zero-Divisior Graphs*, Canad. Math. Bull., (**56**)(2013), 407-411.

[14] I. Kaplansky, *Commutative Rings*, The University of chicago Press, chicago, 1974.

[15] S. Kiani, H. R. Maimani, R. Nikandish, *Some Result on the Domination Number Of a Zero-Divisior Graph*, Canad. Math. Bull., (**57**)(2014), 573-578.

[16] S. Kiani, H. R. Maimani, R. Nikandish, *Domination Number In the Annihilating-Ideal Graphs of Commutative Rings*, Publ. Inst. Math., (**111**)(2015), 225-231.

[17] S. Kiani, H. R. Maimani, M. R. Pournaki, S. Yassemi, *Classification of Rings with Unit Graphs having Domination Number less than Four*, Rend. Semin. Math., (**133**)(2015), 173-195.

[18] H. Matsumura, *Commutative Ring Theory*, Translated by M. Ried, Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

[19] N. H. McCoy, *Remarks on Divisors of Zero*, Amer. Math. Monthly, (**49**)(1942), 286-295.

[20] G. Mekis, *Lower bounds for the Domination Number and the Total Domination of Direct Product Graphs*, Discrete Math., (**310**)(2010), 3310-3317.

[21] D. A. Mojdeh and A. M. Rahimi, *Domination Sets of Some Graphs Associated to Commutative Rings*, Comm. Algebra, (**40**)(2012), 3389-3396.

[22] S. P. Redmond, *An Ideal-Based Zero-Divisior Graph of a Commutative Ring*, Comm. Algebra,(**31**)(2003), 4425-4443.

[23] R. Y. Sharp, *Steps in Commutative Algebra*, London Mathematical Society Student Texts 51, Cambridge university Press, 2000.

[۲۴] ی. ن. هرشتاین؛ مباحثی در جبر، ترجمه علی اکبر عالم‌زاده، مؤسسه نشر علوم نوین، تهران، ۱۳۷۳.

[۲۵] س. یاسمی، م. ر. پورنکی؛ مقدمه‌ای بر نظریه‌ی مدول‌ها، انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف، ۱۳۹۱.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

ایده‌آل اول	Prime Ideal
ایده‌آل ماکسیمال	Maximal Ideal
ایده‌آل مینیمال	Minimal Ideal
پایه	Basis
پوچ‌توان	Nilpotent
پوچ‌ساز	Annihilator
پوشا	Surjective
حلقه‌ی آرتینی	Artinian Ring
حلقه‌ی کاهشی	Reduced Ring
حلقه‌ی موضعی	Local Ring
حلقه‌ی نوتری	Noetherian Ring
خود توان	Idempotent
رأس تنها	Isolated Vertex
زیر گراف	Subgraph
فضای برداری	Vector Space
گراف القایی	Induced Graph
گراف ستاره	Star Graph
گراف جهت دار	Directed Graph
گراف دو بخشی	Bipartite Graph
گراف کامل	Complete Graph
گراف مقسوم‌علیه صفر	Zero-Divisor Graph
گراف همبند	Connected Graph
گراف یکانی	Unit Graph
عدد احاطه‌گری	Domination Number
عدد احاطه‌گری کلی	Total Domination Number

عدد احاطه‌گری نیم کلی .... Semi-Total Domination Number
ماتریس .... Matrix
مسیر .... Path
مجموعه‌ی احاطه‌گر .... Domination Set
مجموعه‌ی احاطه‌گر کلی .... Total Domination Set
مجموعه‌ی احاطه‌گر نیم کلی .... Semi-Total Domination Set
مشخصه .... Characteristic
مثلث .... Tringle
یال .... Edge
یک به یک .... Injective
یکریخت .... Isomorphism
یکه .... Unit

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Annihilator .... پوچ‌ساز
Artinian Ring .... حلقه‌ی آرتینی
Basis .... پایه
Bipartite Graph .... گراف دو بخشی
Charactristic .... مشخصه
Complete Graph .... گراف کامل
Connected Graph .... گراف همبند
Directed Graph .... گراف جهت دار
Dominating Number .... عدد احاطه‌گری
Domination Set .... مجموعه‌ی احاطه‌گر
Edge .... یال
Idempotent .... خودتوان
Isolated Vertex .... رأس تنها
Isomorphism .... یکریخت
Induced Graph .... گراف القایی
Injective .... یک به یک
Local Ring .... حلقه‌ی موضعی
Matrix .... ماتریس
Maximal Ideal .... ایده‌آل ماکسیمال
Minimal Ideal .... ایده‌آل مینیمال
Nilpotent .... پوچ‌توان
Noetherian Ring .... حلقه‌ی نوتری
Path .... مسیر
Prime Ideal .... ایده‌آل اول
Reduced Ring .... حلقه‌ی کاهشی

Semi-Total Dominating Number .... عدد احاطه‌گری نیم‌کلی
Semi-Total Domination Set .... مجموعه‌ی احاطه‌گر نیم‌کلی
Star Graph .... گراف ستاره
Subgraph .... زیر گراف
Surjective .... پوشا
Tringle .... مثلث
Total Dominating Number .... عدد احاطه‌گر کلی
Total Domination Set .... مجموعه‌ی احاطه‌گر کلی
Unit .... یکه
Unit Graph .... گراف یکانی
Vector Space .... فضای برداری
Zero-Divisor Graph .... گراف مقسوم‌علیه صفر

نمایه

Aabstract

Let R be a ring with non-zero identity, and $Z(R), U(R)$ be the set of zero-divisior elements and unit elements of R, respectively. The zero-divisior graph, the annihilating ideal graph and unit graph of R are graphs defiened as follows:

The zero-divisior graph of R, denoted by $\Gamma(R)$, is the graph with vertex set $Z(R)\backslash\{0\}$, and two distinct vertices x and y are adjacent if and only if $xy = 0$ or $yx = 0$.

The annihilating-ideal graph of a commutative ring R, denoted by $\mathbb{AG}(R)$, is the graph whose vertices are ideals of R with non-zero annihilator, and two distinct vertices I_1 and I_2 are adjacent if and only if $I_1 I_2 = \{0\}$.

The unit graph of R, denoted by $G(R)$, is the graph obtained by setting all the elements of R to be the vertices, and defining distinct vertices x and y to be adjacent if and only if $x + y \in U(R)$.

In this thesis we study the domination number of these graphs.

Keywords: Zero-divisior graph, Annihilating ideal graph, Unit graph, Domination number, Total domination number, Semi-total domination number.

Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

Domination In Some Graphs Associated to Rings

Hassan Gorganizadeh

Supervisor

Dr. Mahdi Reza Khorsandi

Advisor

Dr. Nader Jafari Rad

September 2016