بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم ریاضی
رشته ریاضی گرایش ریاضی مالی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

بهینه سازی سبد سهام با استفاده از میانگین-نیم واریانس هدف با بازده‌های نامعین

نگارنده: سجاد نوری

استاد راهنما

دکتر علیرضا ناظمی

مهر ۱۳۹۵

تقدیم به پدر و مادر فداکارم ، اسوه های صبر و خستگی ناپذیری در زندگی ام

تقدیم به کسی که محبت و راهنمایی هایش برایم امید و روشنی در مسیر این تحقیق بود.

و تقدیم به همسرم ، اسطوره زندگی، پناه خستگی و امید بودنم.

سپاس گزاری...

نخست خداوند بزرگ و علیم را شاکرم که به من قدرت تفکر و نوشتن داد و تلاش را در وجودم برای یافتن معماهایی هر چند کوچک از علم قرار داد.

بر خود فرض می دانم از استاد فرهیخته و دانشمند خویش، آقای دکتر ناظمی که همواره نگارنده را مورد لطف و محبت خود قرار داده اند، کمال تشکر و قدردانی را بجا آورم.

و نیز از خانواده خود که مرا در این کار یاری نمودند کمال تشکر را بجا می آورم.

نگارنده: سجاد نوری
مهر ۱۳۹۵

تعهد نامه

اینجانب **نگارنده: سجاد نوری** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی مالی** **دانشکده علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **بهینه سازی سبد سهام با استفاده از میانگین-نیم واریانس هدف با بازده‌های نامعین** ، تحت راهنمایی **دکتر علیرضا ناظمی** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تاکنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه شاهرود ” یا “ Shahrood University of Technology “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

نگارنده: سجاد نوری
مهر ۱۳۹۵

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

یکی از مهمترین مسائل کاربردی مالی، سبد سهام و ترکیبی از اوراق بهادار است که می‌تواند بهترین هدف سرمایه‌گذار باشد. این پایان نامه مسئله انتخاب سبد سهام را هنگامی که تشخیص بازده سبد سهام با استفاده از داده‌های تاریخی مشکل است مطرح می‌کند. در این پایان‌نامه نیم واریانس هدف برای متغیر نامعین مطرح شده‌است. یک مدل میانگین-نیم واریانس هدف برای سبد سهام نامعین پیشنهاد می‌شود که درجه واگرایی سرمایه سبد سهام، ریسک سبد سهام و بازده سرمایه‌گذاری به ترتیب با استفاده از آنتروپی شانون، نیم واریانس هدف و امید ریاضی اندازه‌گیری شده‌اند.

کلمات کلیدی: بازده، ریسک، نظریه عدم قطعیت، متغیر نامعین، نیم واریانس هدف، آنتروپی.

فهرست مطالب

فصل ۱

مفاهیم سبد سهام

۱.۱ مقدمه

در سال‌های ۱۹۰۶، ۱۹۰۷ و ۱۹۳۰ دانشمندی به نام فیشر [۱] به کارکردهای اصلی بازارهای اعتباری در فعالیت‌های اقتصادی اشاره کرد. تخصیص منابع مالی در طی زمان یکی از این کارکردها بوده بطوری که این فرآیند موجب شناخته شدن اهمیت ریسک در این بازارها شد. در دهه چهارم قرن بیستم، دانشمندانی نظیر کنیز[۲]، هیکس[۳] و کالدر[۴] دریافتند که در نظریه انتخاب سبد سهام (پرتفوی[۵])، عدم اطمینان نقش بسیار مهمی ایفا می‌کند. سبد سهام ترکیبی از اوراق بهادار (سهام) است که هر ورق بهادار موجود در آن، بازدهی و ریسک مشخصی دارد. بیشتر سرمایه‌گذاران اطمینان خاطر را به عدم اطمینان ترجیح می‌دهند. بنابراین در ازای کاهش ریسک به سطح خاصی از بازدهی اکتفا می‌کنند. این اطمینان خاطر از طریق تنوع بخشی و ایجاد سبد سهام امکان پذیر است. در بازارهای سرمایه، روش‌ها و تکنیک‌های گوناگونی برای این کار مورد استفاده قرار می‌گیرد. ورود به بازار سرمایه و استفاده از تکنیک‌های جدید به منظور کسب بازدهی بیشتر، گامی در راستای کارآتر شدن بازار است. این امر حائز اهمیت بسیار است زیرا استفاده از تکنیک‌ها و روش‌های هوشمند در بازار سرمایه می‌تواند بازدهی سرمایه‌گذار را افزایش دهد و بازدهی بیشتر برای سرمایه‌گذار، تخصیص بهتر منابع را در پی خواهد داشت.

تاکنون الگوهای زیادی برای حل مسئله انتخاب سبد سهام ارائه شده که هر یک با توجه به وضعیت و محدودیت‌هایی طرح شده است. تا قبل از سال ۱۹۵۲، سرمایه‌گذاران اوراق بهادارای را انتخاب می‌کردند که زیر قیمت واقعی ارزش‌گذاری می‌شدند و به ارتباط بین اوراق بهادار خود در داخل سبد سهام کاری نداشتند. پیدایش نظریه نوین سرمایه‌گذاری (مجموع اوراق بهادار) به سال ۱۹۵۲ برمی‌گردد

---

[۱] Fisher

[۲] Keynes

[۳] Hicks

[۴] Kaldor

[۵] Portfolio

زمانی که هری مارکویتز[۶] [۲۱] مقاله‌ای تحت عنوان انتخاب سبد سهام منتشر کرد. او نظریه احتمال را برای مسئله سبد سهام به کار برد و مدل معروف میانگین- واریانس را پیشنهاد داد و برای اولین بار عامل ریسک را نیز در تجزیه و تحلیل‌های خود وارد نمود. اگر اوراق بهادار ریسک‌دار باشند مسئله اصلی هر سرمایه‌گذار تعیین مجموعه اوراق بهاداری است که بازده آن حداکثر باشد بطوریکه که رضایت سرمایه‌گذار را فراهم کند. این مسئله معادل انتخاب سبد سهام بهینه از مجموعه سبد سهام‌های ممکن می‌باشد که تحت عنوان مسئله انتخاب سبد سهام نامیده می‌شود که مدل آن توسط مارکویتز ارائه گردید.
او توانست نظریه انتخاب سبد سهام بهینه را در چارچوب تعاملات میان ریسک و بازده بهینه‌سازی کند و نرخ بازده مورد انتظار را برای توضیح نرخ بهره سرمایه‌گذاری و واریانس جریان‌های نقدی را به عنوان کمیت سنجش ریسک معرفی نمود و ریسک کل سبد سهام را مورد توجه قرار داد. مارکویتز به مسئله تنوع بخشی سبد سهام به عنوان یکی از روش‌های کاهش ریسک اشاره دارد. نظریه او با عنوان نظریه سبد سهام مدرن شناخته می‌شود.
مطابق مدل مارکویتز سرمایه‌گذار می‌تواند نرخ بازده مورد انتظار (میانگین بازده اوراق بهادار مختلف) را تخمین بزند و سپس در اوراق بهاداری سرمایه‌گذاری کند که بیشترین بازده مورد انتظار را دارد. اما اطمینان از بازده مورد انتظار نیز مورد توجه قرار گرفت، بنابراین سرمایه‌گذار دو هدف متضاد را مورد نظر قرار می‌دهد، حداکثر رساندن بازدهی و حداقل رساندن ریسک. سرمایه‌گذاران همواره تمایل دارند تا در سطح معینی از ریسک، بازدهی خود را افزایش داده یا در سطح معینی از بازده، ریسک خود را کاهش دهند.
بعد از آن یک توسیع بزرگ پیشنهاد شد، به عقیده رایج اگر بازده بالاتر از بازده مورد انتظار باشد آن گاه می‌تواند سود به نظر برسد، برعکس این حالت، می‌تواند زیان به نظر برسد. اما مشکلی که در رابطه با واریانس وجود دارد این است که واریانس فاصله بین سود و زیان را نشان نمی‌دهد بلکه برابری نامطلوبی از بازدهی‌های بالایی و پایینی را فرض می‌کند. مدل مارکویتز بر این فرض اساسی قرار داشت که بازده اوراق بهادار از توزیع نرمال برخوردار است اما جی و دایر[۷][۱۳] براساس تحقیقات خود به این نکته اشاره نمودند که شرایط فوق به ندرت در شرایط دنیای واقعی برقرار است. وقتی بازده اوراق بهادار نامتقارن است واریانس یک اندازه ناکارا را از ریسک می‌دهد. بنابراین مارکویتز نیم واریانس را که یک اندازه بهبود یافته از ریسک است پیشنهاد داد و بی‌شمار مدل توسعه یافت که مبنای آن‌ها نیم واریانس بود.
نیم واریانس در واقع ارزش مورد انتظار مجذور انحراف منفی نتایج ممکن از بازده مورد انتظار را نشان می‌دهد که نشانگر انحراف پایین تر از نرخ بازده مورد انتظار می‌باشد. بنابراین، واریانس هر انحرافی را از بازده مورد انتظار نشان می‌دهد، در حالی که نیم واریانس تنها انحراف منفی و پایینی از بازده مورد انتظار را مورد توجه قرار می‌دهد و انحرافات مثبت و بالای بازده مورد انتظار به عنوان فرصت تلقی می‌شود. در واقع در نیم واریانس برخلاف واریانس، ریسک تنها احتمال زیان در نظر گرفته می‌شود.
حال چون سرمایه‌گذاران بیشتر از آنکه ریسک پذیر باشند ریسک گریزند، برای آن‌ها تامین امنیت اصل سرمایه نسبت به کسب بازدهی اولویت دارد و بیشتر از آن که به دنبال کسب بازدهی باشند، به دنبال

[۶] Markowitz
[۷] Jia and Dyer

حفظ اصل سرمایه هستند. بنابراین به نوسانات منفی بیشتر از نوسانات مثبت اهمیت می‌دهند و در تابع مطلوبیت آن‌ها به زیان‌ها در مقابل سودها وزن بیشتری تعلق می‌گیرد. از این رو، سرمایه‌گذاران نیم واریانس را نسبت به واریانس، بیشتر ترجیح می‌دهند. انتخاب سبد سهام با کمک نیم واریانس، سعی در حداقل کردن عملکرد بازده‌های پایینی (منفی) سبد دارد و کاری به عملکرد بازده‌های بالایی (سود بیش از انتظار) ندارد. پس از آن هوگان و وارن[۸][۶] نیم واریانس هدف را معرفی کردند. در مقایسه با نیم واریانس، نیم واریانس هدف بسیار مناسب‌تر و برای سرمایه‌گذار مقبول‌تر است.
به علاوه یک جستجوی عمیق نشان می‌دهد که یک سبد سهام بهینه با مدل میانگین- واریانس سنتی، اغلب متمرکز بر اطمینان کمی است که با نظریه تنوع سازی در تناقض می‌باشد. از این رو کاپور و کساوان[۹][۱۴] از آنتروپی از زوایای مختلفی برای بهبود بخشیدن به مدل میانگین- واریانس استفاده کردند. امروزه آنتروپی که یک اندازه واگرایی است به طور وسیع پذیرفته شده‌است، بسیاری از محققان معمولا مدل بهینه‌سازی درجه دوم را برای حل مسئله انتخاب سبد سهام و آنتروپی را برای اندازه‌گیری درجه واگرایی سرمایه سبد سهام به کار می‌برند.
در ادبیات بالا، بازده‌های اوراق بهادار به عنوان متغیرهای تصادفی فرض می‌شوند، چون بازار اوراق بهادار در بسیاری موارد پیچیده است، تشخیص بازده‌های اوراق بهادار به سادگی، با استفاده از داده‌های تاریخی مشکل است. بنابراین بسیاری از محققان می‌گویند که باید نظریه دیگری برای پاسخگویی به مسئله سبد سهام در این وضعیت بیابیم. با ابداع نظریه مجموعه فازی و قضایای معتبر آن، بسیاری از پژوهشگران شروع به استفاده از آن‌ها برای شرح دادن و مطالعه مسائل سبد سهام فازی اقدام کردند. مدل‌های بسیاری مشتمل بر متغیرهای فازی پیشنهاد شده‌است. برای مثال بیل بائو- ترول[۱۰][۲]، گوپتا[۱۱][۵] و ژانگ[۱۲][۲۸]، مدل میانگین – واریانس را از زوایای مختلفی بسط دادند. هوانگ[۱۳][۷] مدل میانگین – واریانس فازی را به کار برد و به علاوه مدل میانگین – نیم واریانس فازی سبد سهام را پیشنهاد داد. لی[۱۴][۱۶] نااریبی را برای توضیح نامعین متقارنی بازده فازی به کار برد و همچنین مدل میانگین – واریانس نااریب فازی را بدست آورد. هوانگ[۷] از روش آنتروپی در محیط فازی برای بهبود مدل میانگین – واریانس اعتباری استفاده کرد.
اما وقتی که متغیرهای فازی برای توصیف ذهنی پدیده نامعین به کار رفتند، لیو[۱۵][۱۷] یک تناقض پیدا کرد. هوانگ[۱۱] با استفاده از نظریه احتمال و نظریه اعتبار ثابت کرد که این تناقض وجود دارد. لیو[۱۷] در سال ۲۰۰۷ اندازه نامعین را پیشنهاد داد و نظریه عدم قطعیت را معرفی کرد. بسیاری از محققان شروع به استفاده از نظریه عدم قطعیت برای توضیح و مطالعه مسائل سبد سهام کردند. برای مثال هوانگ[۸] منحنی ریسک را تعریف کرد و یک شیوه انتخابی جدید برای سبد سهام نامعین ارائه

[۸] Hogan and Warren
[۹] Kapur and Kesavan
[۱۰] Bilbao and Terol
[۱۱] Gupta
[۱۲] Zhang
[۱۳] Huang
[۱۴] Li
[۱۵] Liu

داد. کوین[۱۶][۲۳] یک مدل میانگین –واریانس سبد سهام در محیط نامعین را به کار برد. باتاچاریا[۱۷][۱] به تحقیق مدل میانگین –واریانس نااریبی در محیط نامعین پرداخت. هوانگ[۱۱] مدل‌های میانگین –واریانس و میانگین –نیم واریانس سبد سهام را به محیط نامعین بسط داد.
به دلایل مشابه اشاره شده در محیط تصادفی، واریانس در مواردی که بازده‌های نامعین نامتقارن هستند کاربرد ندارد. اگرچه نیم واریانس به محیط نامعین بسط داده شده‌است اما هنوز کمبودهایی دارد. به عبارت دیگر، وقتی نیم واریانس به عنوان یک محدودیت ایفای نقش می‌کند، سرمایه‌گذاران نیازمند به داشتن بیشترین سطح تحملی هستند که بیشترین سطح تحمل بیشترین زیان قابل قبول سرمایه‌گذار است که در ان سطح زیان حاضر به سرمایه‌گذاری است، اما تشخیص اینکه یک سطح نیم واریانس قابل قبول است یا خیر، برای بعضی سرمایه‌گذاران مشکل است. زیرا مقدار مورد انتظار سبد سهام قبل از سرمایه‌گذاری نامشخص است. وقتی مقدار مورد انتظار نامشخص و در نتیجه متفاوت است بیشترین سطح قابل قبول سرمایه‌گذاری ممکن است متفاوت باشد. به عبارت دیگر مقدار مورد انتظار به عنوان هدف پایه در نیم واریانس است، که تحت عنوان نرخ بازده هدف قابل قبول تعبیر می‌شود که بیانگر حداقل نرخ بازدهی است که براي اجتناب از زیان باید کسب شود. هر بازده سهام زیر مقدار مورد انتظار زیان به نظر خواهد رسید. به هر حال در حقیقت سرمایه‌گذاران معمولا بازده یک سرمایه‌گذاری ریسک دار را با توجه به مقایسه با یک هدف پایه پیشین که آن‌ها برای سرمایه‌گذاری پذیرفته‌اند می‌سنجند. اگر بازده سبد سهام پایین تر از هدف‌های پیشین باشد آن‌گاه به عنوان زیان در نظر گرفته خواهد شد. اما سرمایه‌گذاران مختلف احساسات متفاوتی نسبت به ریسک دارند و به این دلیل ممکن است هدف‌های پیشین متفاوتی را فرض کنند، به عبارت دیگر، یک هدف پیشین تثبیت شده قادر به الزام همه سرمایه‌گذاران نیست. برای مثال فرض کنید که مقدار مورد انتظار یک مبنا باشد، حتی اگر بازده سهام زیر مقدار مورد انتظار باشد، یک سرمایه‌گذار ممکن است هنوز آن را سود بداند، زیرا بازده سهام قبلا فراتر از هدف طرح ریزی شده‌اش بوده‌است. برای غلبه بر این محدودیت‌ها، نیم واریانس هدف برای متغیر نامعین مطرح شده‌است.
برای انتخاب یک سبد سهام بهینه باید تعادلی بین ماکزیمم بازده و می‌نیمم ریسک سبد سهام ایجاد کنیم. پس ابتدا مجبوریم به این سوال پاسخ دهیم که بازده و ریسک یک سبد سهام چیست؟ برای تعریف بازده و ریسک باید با داده ورودی یعنی بازده‌های اوراق بهادار شخصی شروع کنیم.

۲.۱ بازده ورق بهادار

بازده‌های ورق بهادار شخصی اطلاعات پایه‌ای برای سرمایه‌گذار هستند، هرگونه تصمیمی براساس این اطلاعات گرفته می‌شود. بازده ورق بهادار با استفاده از نرخ بازده بیان می‌شود که نرخ بازده بصورت

$$\frac{\text{درآمد} - \text{هزینه}}{\text{هزینه}}$$

[۱۶] Qin

[۱۷] Bhattacharyya

تعریف می شود. بدون در نظر گرفتن ارزش معامله، فاکتورهای مالیاتی و سهام تقسیمی، نرخ بازده همچنین می‌تواند بصورت زیر بدست آید.

$$\frac{\text{جریان نقد سود تقسیمی + نرخ ابتدای دوره − نرخ انتهای دوره یک ورق بهادار}}{\text{نرخ ابتدای دوره}}$$

که در آن جریان نقد سود تقسیمی آن بخش از سود خالص است که شرکت هر سال بین سهامداران تقسیم می‌نمایند.

بیشترین تصویر بازده‌های اوراق بهادار بصورت غیر قطعی است، گاهی زیاد و گاهی کم است، گاهی مثبت و گاهی ممکن است منفی باشد. بنابراین نمی‌توانیم از اعداد قطعی برای بیان آن استفاده کنیم. به این دلیل باید یک متغیر برای تشریح آن استفاده شود. در نظریه کلاسیک سبد سهام، بازده‌های اوراق بهادار متغیرهای تصادفی فرض می‌شدند و نظریه احتمال ابزار ریاضیاتی اصلی برای پیش برد عدم قطعیت درگذشته بود، گرچه دنیا پیچیده است و صورت‌های عدم قطعیت متنوع. در حقیقت تصادفی تنها نوع عدم قطعیت نیست، بخصوص وقتی عوامل انسانی دورگذاشته شوند. بازار اوراق بهادار یکی از پیچیده ترین بازارها در دنیا است که شامل تقریبا همه انواع عدم قطعیت می‌باشد. بازده اوراق بهادار بستگی به عوامل مختلفی از جمله عوامل اقتصادی، اجتماعی، سیاسی و مهم تر از همه عوامل روانشناختی انسانی دارد. بنابراین بجز روش احتمال اکید، در ۱۹۹۰ پژوهشگران بعضی از دیگر روش‌های نزدیک به آن شامل احتمال مبهم، امکان و مجموعه فاصله و ... را در رابطه با عدم قطعیت در انتخاب سبد سهام پیشنهاد دادند.

امروزه در موارد بسیاری هنوز از متغیر تصادفی استفاده می‌شود. هنگامی که سرمایه‌گذاران می‌گویند که بازده ورق بهادار A، ۰/۰۸ با احتمال ۲۵ درصد ، ۰/۱ با احتمال ۵۰ درصد و ۰/۱۲ با احتمال ۲۵ درصد خواهد بود، در واقع از متغیر تصادفی برای تشریح آن استفاده کرده‌اند. با استفاده از متغیر تصادفی، این فرض شاید رضایت بخش باشد که داده تاریخی یک بازده ورق بهادار قادر به انعکاس بازده آتی ورق بهادار می‌باشد، البته این فرض همیشه هم این نتیجه را نمی‌دهد. معمولا این موضوع مورد توافق است که هنگام ارزیابی یک بازده ورق بهادار سرمایه‌گذاران باید سه نوع فاکتور را فرض کنند، فاکتور عمومی اقتصاد، فاکتور صنعت و فاکتور شرکت. فاکتور عمومی اقتصاد به سیاست‌ها و وقایعی اشاره دارد که بر رشد اقتصاد کلان تاثیر می‌گذارد (مانند سیاست پولی، سیاست مالی، تورم). فاکتور صنعت اشاره به اقدامات موثر یک صنعت از لحاظ اقتصادی در دراز مدت یا کوتاه مدت دارد (مانند واردات، صادرات، تامین مالی و...). فاکتور شرکت به فعالیت‌های گذشته و انتظارات آینده شرکت اشاره دارد که ورق بهادار آن شرکت در بازار ورق بهادار ثبت شده‌است. هیچ کدام از این فاکتورها به طور تصادفی بر بازده ورق بهادار اثر نمی‌گذارد. بلکه از طریق روانشناسی مردم بر بازده ورق بهادار اثر می‌گذارند. عدم قطعیت بازده ورق بهادار حتی وقتی که همه فاکتورها شناخته شده هستند باقی می‌ماند. به علاوه بازار ورق بهادار معمولا بسیار دارای حساسیت است. بقیه فاکتورهای غیر اقتصادی مانند موفقیت یک اختراع ممکن است بر بازده ورق بهادار اثرگذار باشد. به طور خلاصه، فاکتور انسانی در عدم قطعیت بازده ورق بهادار سهیم است. بنابراین در بسیاری مواقع سرمایه‌گذاران ممکن است چنین تصوری را نداشته باشند که داده تاریخی یک بازده ورق بهادار بتواند به خوبی بازده آینده ورق بهادار را منعکس کند. آن‌ها ممکن است ازکارشناسان ماهر و تجربه خودشان استفاده کنند تا بتوانند بازده آینده ورق بهادار را مورد ارزیابی قرار

دهند.
پیش بینی معمولا به صورت فازی بیان می‌شود، مثلا نرخ بازده ورق بهادار A حدود ۰/۱۲ است، یامثلا وقتی سن یک شخص را حدس می‌زنیم می‌گوئیم او حدود ۳۰ است به جای اینکه بگوئیم احتمالا ۳۰. ارزیابی بازده ورق بهادار تاحدود زیادی بستگی به شخص دارد و هدف‌دار و فازی است تا تصادفی. در این حالت، متغیر فازی می‌تواند برای انعکاس فازی بودن ورق بهادار به کار برده شود.
در مواردی رفتار بازده‌های ورق بهادار نه تصادفی است و نه فازی. درچنین حالتی برای انتخاب سبد سهام بهینه اندازه نامعین و نظریه عدم قطعیت را به کار می‌بریم. ظاهرا به نظر می‌رسد که بازده‌های ورق بهادار تصادفی دارای ظاهری نامعین است در حالی که بازده‌های ورق بهادار فازی هدفی مبهم را نتیجه می‌دهد. عمیقا خواهید فهمید که اندازه است که احتمال وقوع یک پیشامد را ارزیابی می‌کند و به این دلیل است که انواع بازده‌های ورق بهادار باهم تفاوت دارند.
برای مثال فرض کنید یک بازده ورق بهادار، احتمالی و حدود ۰/۱ باشد. احتمال وقوع بازده ورق بهادار بین ۰/۱ و ۰/۲، ۳۰ درصد و احتمال وقوع بازده ورق بهادار بین ۰/۲ و ۰/۳، ۲۰ درصد است، آن‌گاه فکر می‌کنید احتمال وقوع بازده بین ۰/۱ و ۰/۳ چقدر است؟ اگر فکر می‌کنید که احتمال وقوع ۵۰ درصد خواهدبود در حقیقت باور دارید که بازده ورق بهادار می‌تواند با متغیر تصادفی بیان شود اگر فکر می‌کنید که ۳۰ درصد خواهدبود باور دارید که بازده ورق بهادار باید با متغیر فازی بیان شود. اگر فکر می‌کنید که نباید بزرگتر از ۵۰ درصد و کوچکتر از ۳۰ درصد باشد، در عوض باید عددی بین ۳۰ درصد و ۵۰ درصد باشد آن‌گاه باور دارید که بازده ورق بهادار می‌تواند با نوع دیگر متغیر یعنی متغیر نامعین بیان شود.

۳.۱ بازده سبد سهام

فرض کنید n ورق بهادار متناوب داریم، ξ_i را بازده ورق بهادار iام و x_i را نسبت سرمایه‌گذاری در iامین ورق بهادار تعریف می‌کنیم که $i = ۱, ۲, \cdots, n$. آن‌گاه بازده سبد سهام مجموع زیر است:

$$\xi_۱ x_۱ + \cdots + \xi_n x_n.$$

اگر بازده ξ_i قطعی باشد می‌توانیم بازده هر سبد سهام را به صراحت بگوئیم. برای مثال فرض کنید ۳ ورق بهادار داریم که بازده‌های آن‌ها به ترتیب $\xi_۱ = ۰/۱$ ، $\xi_۲ = ۰/۱۲$، $\xi_۳ = ۰/۱۵$ باشد. اگر یک سبد سهام داشته باشیم که ۲۵ درصد سرمایه خود را در ورق بهادار ۱، ۳۵ درصد در ورق بهادار ۲ و ۴۰ درصد در ورق بهادار ۳ سرمایه‌گذاری کنیم آن‌گاه بازده سبد سهام به صورت زیر بدست می‌آید:

$$۰/۲۵ \times ۰/۱ + ۰/۳۵ \times ۰/۱۲ + ۰/۴۰ \times ۰/۱۵ = ۰/۱۲۷$$

۴.۱ بازده مورد انتظار

عددی قطعی است که ابتدا توسط مارکویتز برای توصیف و بیان بازده سبد سهام پیشنهاد شد. بازده مورد انتظار بازده‌ای است که به احتمال قوی یک سبد سهام خواهد داشت و اطلاعات میانگینی درباره متغیر

بازده سبد سهام می‌دهد. با استفاده از بازده مورد انتظار قادر خواهیم بود بین سطوح بازده هر دو سبد سهامی که امکان وجود آنها وجود داشته باشد مقایسه انجام دهیم.

۵.۱ ریسک

اگر بخواهیم ریسک را خیلی ساده تعریف کنیم باید بگوییم ریسک احتمال وقوع یک زیان مالی است. دارایی‌هایی که احتمال بیشتری برای از بین رفتنشان وجود دارد، پر ریسک‌تر از دارایی‌هایی هستند که احتمال از بین رفتنشان کمتر است. اما در تعریف رسمی‌تر ریسک مترادف عدم اطمینان به کار می‌رود و مبین تغییرپذیری بازده‌های مرتبط با یک دارایی است. اگرچه هر کسی درباره ریسک سرمایه‌گذاری چیزی گفته اما تعریف اندازه پذیری از ریسک تا ۱۹۵۲ داده نشده بود. در سال ۱۹۵۲ مارکویتز پیشنهاد داد که واریانس یک متغیر بازده سبد سهام می‌تواند به عنوان ریسک سرمایه‌گذاری در نظر گرفته شود. واریانس، مربع انحراف از مقدار مورد انتظار است. اندازه ریسک انحراف از بازده مورد انتظار فرض می‌شود. در واقع ریسک نوسان پذیری بازده نسبت به بازده مورد انتظار است.

اگرچه واریانس یک تعریف عمومی از ریسک است اما فقط یک اطلاع جامع از سطح انحراف از بازده مورد انتظار فراهم می‌کند. زیان قابل مشاهده نیست. واریانس هیچ اطلاع ذاتی از زیان به سرمایه‌گذاران نمی‌دهد. درحقیقت مردم معمولا به زیان قابل تشخیص اهمیت می‌دهند. از این گذشته این یک پدیده رایج است که وقتی مردم تصمیم به ریسک پذیری یا ریسک گریزی می‌گیرند در واقع دو عامل را می‌سنجند، یکی سطح شدت زیان احتمالی و دیگری احتمال وقوع زیان. برای درک موضوع موردی را در نظر بگیرید که در آن افراد ممکن است ۱ ریال را با احتمال ۹۹ درصد و ۱۰۰۰۰۰۰ ریال را با احتمال ۱ درصد از دست بدهند. برخی افراد می‌توانند ۱۰۰۰۰۰۰ زیان را در احتمال وقوع بسیار کم ۱ درصد متحمل شوند در حالی که برای افراد دیگری ممکن است تحمل زیان ۱۰۰۰۰۰۰ ریال حتی در احتمال وقوع پایین ۱ درصد بیش از حد بزرگ باشد. در سرمایه‌گذاری هنگام ارزیابی اگر یک سبد سهام به اندازه کافی مطمئن باشد، بعضی از سرمایه‌گذاران احتمال‌های وقوع همه زیان‌های احتمالی و سطوح شدت این زیان‌ها را ارزیابی می‌کنند.

هوانگ[۸] تعریف کمی دیگری از ریسک پیشنهاد داد که منحنی ریسک نامیده می‌شود و به تشریح هر سطح زیان احتمالی و احتمال وقوع پیشامد زیان احتمالی می‌پردازد. سرمایه‌گذارانی که منحنی ریسک را می‌پذیرند بیشتر سرمایه‌گذاران هوشیار هستند. آن‌ها پیشامد هر زیان احتمالی را می‌سنجند و آن را با توانایی تحمل خودشان مقایسه می‌کنند. به هر حال تصمیم گرفتن بر اساس منحنی ریسک بی خطر است. به علاوه منحنی ریسک سطوح زیان ذاتی را فراهم می‌کند. برای استفاده از منحنی ریسک نیاز به منحنی اطمینان داریم. چون همه سرمایه‌گذاران در سرمایه‌گذاری احتمال می‌دهند که ممکن است سود یا زیان کنند، بیشترین سطح قابل قبول در هر سطح زیان احتمالی قابل وقوع را در نظر می‌گیرند که آن را منحنی اطمینان می‌نامند. اما استفاده از منحنی اطمینان در برخی موارد هزینه‌های محاسباتی زیادی در بردارد. بدون نیاز به منحنی اطمینانِ سرمایه‌گذاران و مقادیر احتمال برای اعداد به اندازه کافی بزرگ پیشامدهای زیان، محاسبات بسیار کمتر است.

هنگامی که الگوهایی وجود نداشته باشد که قادر به تخمین یک توزیع احتمال باشند، نیازمند کارشناسان بعضی حوزه‌ها برای ارزیابی درجه اعتقاد پیشامدهایی که اتفاق خواهد افتاد هستیم. برای ارزیابی درجات اعتقاد از نظریه عدم قطعیت بهره می‌گیریم. برای روشن شدن موضوع به بیان درجه اعتقاد می‌پردازیم.

۶.۱ مسئله بهینه سازی سبد سهام

بهینه‌سازی سبد سهام عبارت است از انتخاب بهترین ترکیب از اوراق بهادار به نحوی که باعث گردد تا حتی امکان بازده سبد سهام سرمایه‌گذاری حداکثر و ریسک سبد سهام حداقل گردد. ایده اساسی نظریه مدرن [۱۸] این است که اگر در اوراق بهاداری که به طور کامل با هم همبستگی ندارند سرمایه‌گذاری شود، ریسک آن اوراق بهادار همدیگر را خنثی نموده و لذا می‌توان یک بازده ثابت را با ریسک کمتر بدست آورد.[۲۰]

۷.۱ درجه اعتقاد

درجات اعتقاد[۱۹] برای همه ما آشناست. پیشامد نمونه‌ای از اعتقاد است، برای مثال، خورشید فردا طلوع خواهد کرد، هفته آینده آفتابی خواهد بود، آن شخص مردی جوان است، نمونه‌هایی از اعتقاد است. یک درجه اعتقاد بیانگر شدت اعتقاد ما به وقوع یک پیشامد است. اگر کاملا معتقد باشیم یک پیشامد اتفاق خواهد افتاد آن‌گاه درجه اعتقاد ما ۱ است (اعتقاد کامل). اگر یک پیشامد و متمم آن دارای احتمال برابر باشند آن‌گاه درجه اعتقاد برای آن پیشامد و متمم آن هر دو ۰/۵ است. بطور کلی یک عدد بین ۰ و ۱ را به درجه اعتقاد هر پیشامد نسبت می‌دهیم. بالاترین درجه اعتقاد، بیشترین اعتقاد ما به وقوع پیشامد است.

یک جعبه شامل ۱۰۰ گوی را فرض کنید، هر کدام از آن‌ها قرمز یا مشکی است اما نمی‌دانیم چه تعداد از گوی‌ها قرمز یا مشکی است. در اینجا در رابطه با تفاوت نظریه احتمال و عدم قطعیت می‌توان گفت که تعیین احتمال کشیدن یک گوی قرمز برای ما غیر ممکن است، اگرچه تعیین درجه اعتقاد برای ما ممکن است. برای مثال، درجه اعتقاد کشیدن یک گوی قرمز ۰/۵ است زیرا کشیدن یک گوی قرمز و کشیدن یک گوی سیاه به یک اندازه ممکن است. به علاوه درجه اعتقاد کشیدن یک گوی سیاه نیز ۰/۵ است.

در خصوص پیشامد درجه اعتقاد بسیار بستگی به دانش شخصی (حتی شامل اولویت) ما دارد. هنگامی که دانش شخصی تغییر کند درجه اعتقاد نیز تغییر می‌کند. شاید بعضی‌ها تصور کنند که درجه اعتقاد باید به وسیله احتمال غیر عینی یا نظریه مجموعه فازی مدل سازی شود. اگرچه این تصور معمولا نامناسب است زیرا ممکن است در این مورد هر دو آن‌ها منجر به نتایج غیر شهودی شوند. برای بررسی منطقی درجات اعتقاد شخصی، لیو[۱۷] اندازه نامعین را پیشنهاد داد و نظریه عدم قطعیت را معرفی کرد و پس از آن توسط پژوهشگران بسیاری مورد مطالعه قرار گرفت.

[۱۸] Modern portfolio theory

[۱۹] Belief degrees

۸.۱ چگونه عدم قطعیت در صد سال گذشته رشد پیدا کرد؟

پس از اینکه کلمه «تصادفی» برای بیان پدیده احتمالی به کار برده شد، کنیت[۲۰] (۱۹۲۱) و کینز[۲۱](۱۹۳۶) شروع به استفاده از کلمه عدم قطعیت برای بیان هر پدیده غیر احتمالی کردند. انجمن علمی[۲۲] نیز آن را عدم قطعیت کنیتیان نامید، عدم قطعیت کنیتیان یا عدم قطعیت صحیح. متاسفانه برای ما به کارگیری یک نظریه ریاضیاتی برای بررسی چنین دسته گسترده‌ای از عدم قطعیت غیرممکن به نظر می‌رسد چون غیر احتمالی بیانگر چیزهای خیلی زیادی است. این مشکل عدم قطعیت را ناتوان می‌سازد که به یک اصطلاح علمی در مفهوم کینت و کینز تبدیل شود. با این وجود، می‌خواهیم این را به رسمیت بشناسیم که آن‌ها یک شیوه بزرگی برای شکستن انحصار نظریه احتمال ایجاد کرده‌اند. اگرچه، دو علت مهم عدم پیشرفت در رابطه با این موضوع در آن دوره وجود داشت. اولین علت از استدلال کتاب هلندی نوشته رمزی[۲۳] (۱۹۳۱) که درجه اعتقاد را به پیروی از قوانین نظریه احتمال اثبات و تعیین می‌کند به وجود آمد. از یک سوی، لیو با استدلال کتاب هلندی به شدت مخالف است. از سوی دیگر، حتی اگر استدلال کتاب هلندی را بپذیریم می‌توانیم فقط درجه اعتقاد را در رابطه با اصول نرمال بودن، نامنفی بودن و جمع پذیری نظریه احتمال اثبات کنیم، اما نمی‌توانیم در رابطه با اصل حاصلضربی نظریه احتمال آن را اثبات کنیم، به عبارت دیگر، استدلال کتاب هلندی نمی‌تواند ثابت کند که نظریه احتمال قادر به مدل سازی درجه‌های اعتقاد است. دومین علت از قضیه کاکس [۲۴] (۱۹۴۶) به وجود آمد که در آن درجه اعتقاد انسانی متناظر با یک اندازه احتمال است. بسیاری از مردم متوجه این مطلب نشدند که قضیه کاکس براساس یک فرض غیر معقول است، سپس به اشتباه براین باور شدند که عدم قطعیت و احتمال مشابه هستند. هنوز هم پژوهش‌های زیادی نشان می‌دهد که درجه اعتقاد پیرو قوانین نظریه احتمال نیست. یک کشف مهم توسط لطفی زاده، نظریه مجموعه فازی بود که در موارد بسیاری به آن اشاره شده و در حوزه‌های بسیاری از زندگی کاربردهای موفقیت آمیزی داشته است. اگرچه نظریه مجموعه فازی، هرگز نه به عنوان یک دستگاه ریاضیاتی رشدی داشته نه یک ابزار مناسب برای مدل سازی منطقی درجه اعتقاد بوده‌است. اشتباه اصلی نظریه مجموعه فازی، بودن اساس آن بر این فرض اشتباه است که درجه اعتقاد اجتماعی از پیشامدها، ماکزیمم درجات اعتقاد تک تک پیشامدهاست، بدون اهمیت به اینکه مستقل هستند یا نه. بسیاری از بررسی‌ها نشان می‌دهد که شعور انسانی به صورت فازی، به صورت مفهوم لطفی زاده رفتار نمی‌کند. کشف نظریه عدم قطعیت توسط لیو، جدیدترین پیشرفت در این زمینه است. امروزه نظریه عدم قطعیت به یک شاخه مطلق از ریاضیات تبدیل شده‌است که تنها یک مطالعه صوری از یک ساختار انتزاعی نیست بلکه قابل اجرا برای مدل سازی درجات اعتقاد است. از دیدگاه لیو، در تعریف ریاضیاتی عدم قطعیت می‌توان گفت که عدم قطعیت هر چیزی است که از قوانین نظریه عدم قطعیت پیروی کند. در عمل عدم قطعیت هر چیزی است که به وسیله درجات اعتقاد توصیف شود. پس عدم

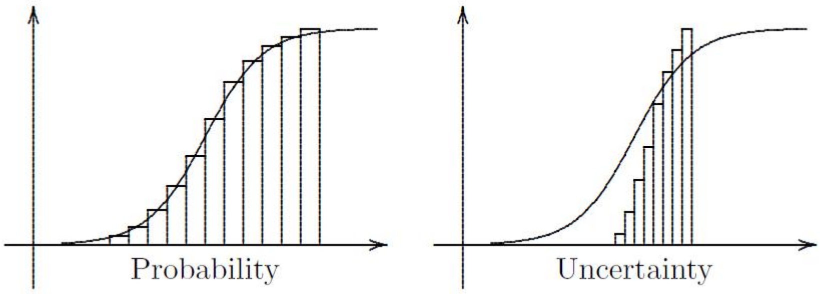
[۲۰] Knight

[۲۱] Keynes

[۲۲] Academic community

[۲۳] Ramsey

[۲۴] Cox



شکل ۱.۱: تفاوت نظریه احتمال و نظریه عدم قطعیت

قطعیت یک اصطلاح خاص علمی بر مبنای نظریه عدم قطعیت می‌شود.

۹.۱ تفاوت بین نظریه عدم قطعیت و نظریه احتمال

تفاوت اصلی بین نظریه‌های احتمال و عدم قطعیت این است که اندازه احتمال اشتراکی از پیشامدهای مستقل، برابر حاصلضرب اندازه های احتمال تک تک پیشامدها است، یعنی

$$\Pr\{\Lambda_۱ \cap \Lambda_۲\} = \Pr\{\Lambda_۱\} \times \Pr\{\Lambda_۲\},$$

ولی اندازه نامعین اشتراکی از پیشامدهای مستقل (فصل ۲ را ببینید) برابر می‌نیمم اندازه‌های نامعین تک تک آن‌هاست، یعنی

$$\mathcal{M}\{\Lambda_۱ \cap \Lambda_۲\} = \mathcal{M}\{\Lambda_۱\} \wedge \mathcal{M}\{\Lambda_۲\},$$

که در آن

$$a \wedge b = min(a, b).$$

به طور خلاصه، می‌توانیم بگوییم که نظریه احتمال یک دستگاه ضربی ریاضیاتی و نظریه عدم قطعیت یک دستگاه می‌نیمم ریاضیاتی است. این تفاوت به معنای این است که متغیرهای تصادفی و متغیرهای نامعین از قواعد عملیاتی متفاوتی پیروی می‌کنند.
نظریه احتمال و نظریه عدم قطعیت دستگاه‌های ریاضیاتی مکملی هستند که دو مدل ریاضیاتی قابل قبول برای دنیای عدم قطعیت فراهم می‌کنند. نظریه احتمال شاخه‌ای از ریاضیات برای مدل سازی فراوانی‌ها است در حالی که نظریه عدم قطعیت شاخه‌ای از ریاضیات برای مدل سازی درجات اعتقاد است، فراوانی یک ویژگی واقعی کمیت غیر قطعی است و با انتخاب دانش و اولویت ما تغییر نمی‌کند. به عبارت دیگر، فراوانی در اجرای بلند مدت بوجود می‌آید و نسبتا ثابت است و مهم نیست اگر توسط ما مشاهده شده باشد، اما درجه اعتقاد چنین نیست. درجه اعتقاد بسیار بستگی به دانش شخصی (حتی شامل اولویت) ما دارد. هنگامی که دانش شخصی تغییر کند درجه اعتقاد نیز تغییر می‌کند.

۱۰.۱ تفاوت بین نظریه عدم قطعیت و نظریه امکان

همزمان با شکل گیری منطق فازی، نظریه‌های ریاضی مختلفی برای درک و شناسایی وجوه عدم اطمینان در محیط تصمیم و پیشامدهای امکان‌پذیر و مبهم آن در این محیط ابداع و توسعه یافته‌است. از بین نظریه‌های ریاضی در شرایط ابهام، می‌توان نظریه امکان[۲۵] را مناسب‌ترین و منسجم‌ترین نظریه در تحلیل عدم قطعیت‌های محیط تصمیم به حساب آورد. به طور خلاصه محتوی این نظریه را می‌توان این گونه بیان کرد که در تحلیل پیشامدها و شرایط محیطی تنها به دنبال رویدادهای محتمل نیستیم و در سازه‌های نامطمئن در پی یافتن تمامی پیشامدهای امکان‌پذیری هستیم که با درجه امکان این پیشامدها و درجه امکان پیشامدهای متناقض معرفی می‌شوند. در این نگرش ما پیشامدها و نقیض آنها را جمع ناپذیر نمی‌دانیم و همچون نظریه احتمال، آنها را رودر روی یکدیگر قرار نمی‌دهیم. در نظریه احتمال سعی بر این است تا با اختصاص شاخص احتمال وقوع پیشامد آن را به احتمال عدم وقوع نقیض آن تعبیر نماییم حال آنکه در نظریه جامع تر امکان، عدم اطمینان یک پیشامد توسط دو عدد مشخص می‌شود، یکی درجه امکان خود پیشامد و دیگری درجه لزوم پیشامد (درجه لزوم پیشامد = درجه امکان پیشامد نقیض-۱).

درجه امکان یک پیشامد با درجه لزوم آن الزاما برابر نیست. این نوع توصیف با نوع تفکر ما بسیار سازگار است. در بررسی امکان وقوع یک پیشامد، هم زمینه‌ها و شواهد وقوع آن پیشامد را در نظر می‌گیریم و هم زمینه‌ها و شواهد وقوع پیشامد نقیض را بررسی می‌کنیم.

برای پرهیز از پیچیدگی، فرض کنید مجموعه جهانی Γ، مجموعه‌ای متناهی است و تمام زیر مجموعه‌ها اندازه پذیرند. یک توزیع امکان، تابعی از Γ به $[0, 1]$ با سه اصل موضوعه زیر است:

اصل ۱: به ازای مجموعه جهانی Γ، $\mathrm{Pos}\{\Gamma\} = 1$

اصل ۲: به ازای مجموعه تهی $\varnothing$، $\mathrm{Pos}\{\varnothing\} = 0$

اصل ۳: به ازای هر پیشامد Λ_2 و Λ_1، $\mathrm{Pos}\{\Lambda_1 \cup \Lambda_2\} = \mathrm{Pos}\{\Lambda_1\} \vee \mathrm{Pos}\{\Lambda_2\}$ هر پیشامد عضو Γ دارای امکان صفر تا یک می‌باشد. یک یعنی آن پیشامد کاملا امکان‌پذیر است و صفر یعنی آن پیشامد اصلا امکان‌پذیر نیست[۴].

اساسی‌ترین تفاوت بین نظریه عدم قطعیت و امکان این است که در اولی رابطه

$$\mathcal{M}\{\Lambda_1 \cup \Lambda_2\} = \mathcal{M}\{\Lambda_1\} \vee \mathcal{M}\{\Lambda_2\},$$

فقط برای پیشامدهای مستقل Λ_1 و Λ_2 و در دومی رابطه

$$\mathrm{Pos}\{\Lambda_1 \cup \Lambda_2\} = \mathrm{Pos}\{\Lambda_1\} \vee \mathrm{Pos}\{\Lambda_2\},$$

که در آن

$$a \vee b = max(a, b),$$

برای هر پیشامد Λ_1 و Λ_2 برقرار است و مهم نیست که مستقل هستند یا خیر، بسیاری از تحقیقات نشان می‌دهد که وقتی پیشامدها مستقل نباشند اندازه اجتماعی از پیشامدها معمولا بزرگتر از ماکزیمم

[۲۵] Possibility theory

اندازه‌های تک تک پیشامدها است. این حقیقت بیان می‌کند که هوش انسانی رفتاری فازی گونه ندارد. نظریه عدم قطعیت و امکان هر دو تلاش بر مدل سازی درجه اعتقاد دارند، که اولی از ابزار اندازه نامعین و دومی از ابزار اندازه امکان استفاده می‌کند. بنابراین آن‌ها رقیب‌های کاملی هستند.

۱۱.۱ تفاوت بین نظریه مجموعه نامعین و نظریه مجموعه فازی

یک مجموعه فازی با تابع عضویت μاش تعریف می‌شود که به هر عنصر x یک عدد حقیقی $\mu(x)$ در بازه $[۰,۱]$ اختصاص می‌دهد، که مقدار $\mu(x)$ درجه عضویت x در مجموعه فازی را نشان می‌دهد. این تعریف درسال ۱۹۶۵ توسط پروفسور لطفی‌زاده مطرح شد. سپس نظریه مجموعه فازی بر پایه مجموعه فازی لطفی‌زاده بکار برده شد.

نظریه مجموعه نامعین و نظریه مجموعه فازی وجوه مشترکی دارند. برای مثال هردو از توابع عضویت برای تشریح مفاهیم ناصریح استفاده می‌کنند و قانون عملیاتی یکسانی را فرض می‌کنند. فرض کنید ξ و η مجموعه‌های نامعین (فازی) مستقل به ترتیب با توابع عضویت μ و ν باشند، آن‌گاه اجتماع $\xi\cup\eta$ دارای تابع عضویت

$$\lambda(x)=\mu(x)\vee\nu(x),$$

است و اشتراک $\xi\cap\eta$ دارای تابع عضویت

$$\lambda(x)=\mu(x)\wedge\nu(x),$$

است. به علاوه مکمل ξ^c دارای تابع عضویت زیر است

$$\lambda(x)=۱-\mu(x).$$

از این گذشته فرض کنید $\xi_۱,\xi_۲,\cdots,\xi_n$ مجموعه های نامعین (فازی) مستقل به ترتیب با توابع عضویت $\mu_۱,\mu_۲,\cdots,\mu_n$ باشند و f یک تابع اندازه‌پذیر باشد. آن‌گاه $\xi=f(\xi_۱,\xi_۲,\cdots,\xi_n)$ دارای تابع عضویت زیر است

$$\lambda(x)=\sup_{f(x_۱,x_۲,\cdots,x_n)=x}\ \min_{۱\leq i\leq n}\mu_i(x_i).$$

اگرچه نظریه مجموعه نامعین و نظریه مجموعه فازی از بعضی لحاظ شبیه هم به نظر می‌رسند (مانند تابع عضویت و قانون عملیاتی که در فصل ۲ به بیان آن‌ها می‌پردازیم) اما نظریه‌های ریاضیاتی خیلی متفاوتی هستند. در ادامه این مطلب را از سه جنبه زیر روشن می‌سازیم.

اول این که مهمترین تفاوت اساسی این است که از اندازه‌های متفاوت استفاده می‌کنند، یکی از ابزار اندازه نامعین و دیگری از ابزار اندازه امکان استفاده می‌کند که تفاوت نظریه عدم قطعیت و امکان را ملاحظه کردیم. به علاوه اندازه نامعین خود دوگانه است اما اندازه امکان چنین نیست.

دوم این که از فرمول‌های اندازه معکوس متفاوتی استفاده می‌کنند. به ازای هر مجموعه بورل B از اعداد حقیقی، در نظریه مجموعه نامعین داریم

$$\mathcal{M}\{\xi\subset B\}=۱-\sup_{x\in B^c}\mu(x). \tag{۱.۱}$$

و در نظریه مجموعه فازی

$$\mathrm{Pos}\{\xi \subset B\} = \sup_{x \in B} \mu(x).$$

در نظریه مجموعه فازی، یک اندازه ضرورت پیشامد فازی به عنوان عدم امکان پیشامد معکوس توسط لطفی زاده [۲۷] بصورت زیر تعریف شد

$$\mathrm{Nec}\{\Lambda\} = ۱ - \mathrm{Pos}\{\Lambda^c\}.$$

در بعضی منابع هم به رابطه زیر اشاره شده است

$$\mathrm{Nec}\{\xi \subset B\} = ۱ - \sup_{x \in B^c} \mu(x), \tag{۲.۱}$$

که مشابه با رابطه (۱.۱) در نظریه مجموعه نامعین است. به هرحال برای یک مجموعه فازی ξ چون دو پیشامد $\{\xi \subset B\}$ و $\{\xi \subset B^c\}$ معکوس نیستند، یعنی

$$\{\xi \subset B\}^c \neq \{\xi \subset B^c\},$$

رابطه (۲.۱) با تعریف لطفی‌زاده از اندازه ضرورت در تناقض است.
علاوه بر این، متاسفانه رابطه (۲.۱) به ازای هر دو پیشامد $\Lambda_۱$ و $\Lambda_۲$ با اصل موضوعه اندازه ضرورت زیر نیز در تناقض است [۴]

$$\mathrm{Nec}\{\Lambda_۱ \cap \Lambda_۲\} = \mathrm{Nec}\{\Lambda_۱\} \wedge \mathrm{Nec}\{\Lambda_۲\}.$$

بنابراین (۲.۱) رابطه قابل قبولی در نظریه مجموعه فازی نیست. به عبارت دیگر اگر رابطه (۲.۱) را بپذیریم، آنگاه اصول موضوعه اندازه‌های امکان و ضرورت متناقض می‌باشند. پس کدام فرمول با اصول موضوعه اندازه ضرورت درتناقض نیست؟ تاکنون نتوانسته‌ایم چیزی پیدا کنیم.

سوم، پیشامد $\{B \subset \xi\}$ را بجای $\{\xi \subset B\}$ فرض کنیم. نظریه مجموعه نامعین از فرمول اندازه معکوس زیر استفاده می‌کند

$$\mathcal{M}\{B \subset \xi\} = \inf_{x \in B} \mu(x).$$

در فرض قبلی که اصول موضوعه اندازه‌های امکان و ضرورت بررسی شدند، ما واقعا نمی‌دانیم که چگونه مقادیر $\mathrm{Nec}\{B \subset \xi\}$ و $\mathrm{Pos}\{B \subset \xi\}$ را از تابع عضویت μ در نظریه مجموعه فازی نتیجه بگیریم.
با احترام فراوان به کار بزرگ پروفسور لطفی‌زاده، لیو بر سر موضوع مجموعه فازی با او موافق نیست.
اول از همه، لیو فکر می کند که مجموعه فازی لطفی زاده یک موضوع ریاضیاتی تخصصی و منظم نیست، زیرا مجموعه‌های فازی فراوانی می‌تواند با یک تابع عضویت $\mu(x)$ تعریف شود. برای مثال تابع عضویت زیر را فرض کنید

$$\mu(x) = \begin{cases} x & \text{if } ۰ \le x \le ۱, \\ ۲ - x & \text{if } ۱ \le x \le ۲. \end{cases}$$

بررسی اینکه مجموعه فازی تعریف شده با تابع عضویت μ بالا می‌تواند هریک از خانواده فاصله‌های زیر باشد

$$\xi = \bigcup_{0 \le \alpha \le 1} \alpha.[\alpha, 2-\alpha]. \tag{۳.۱}$$

یا یک خانواده از نقاط پایانی زیر

$$\xi = \bigcup_{0 \le \alpha \le 1} \alpha.\{\alpha, 2-\alpha\}. \tag{۴.۱}$$

متاسفانه، (۳.۱) و (۴.۱) مجموعه های فازی بسیار متفاوتی در عمل و ریاضیات هستند. بنابراین افراد ممکن است نمونه اولیه متفاوتی از مجموعه‌های فازی در ذهنشان داشته باشند. بنابراین مجموعه فازی لطفی‌زاده در مفهوم ریاضیات خوش تعریف نیست. این دلیلی است بر این که چرا تفاسیر و فرمول‌های متضاد زیادی در ادبیات نظریه مجموعه فازی وجود دارد.

به علاوه برای مجموعه فازی ξ و تابع عضویت μ، برای قبول این که هر نسخه از نظریه مجموعه فازی دست کم دارای یک مجموعه مکمل ξ^c با تابع عضویت

$$\lambda(x) = 1 - \mu(x), \tag{۵.۱}$$

است، سه اصل موضوعه امکان بیان شده و یک رابطه بین تابع عضویت و اندازه امکان را بصورت زیر داریم

$$\mu(x) = \mathrm{Pos}\{x \in \xi\}. \tag{۶.۱}$$

حال برای هر نقطه x، این واضح است که $\{x \in \xi\}$ و $\{x \in \xi^c\}$ پیشامدهای معکوس هستند، یعنی

$$\{x \in \xi\} \cup \{x \in \xi^c\} = \Gamma.$$

از طرفی، با استفاده از اصول موضوعه امکان داریم

$$\mathrm{Pos}\{x \in \xi\} \vee \mathrm{Pos}\{x \in \xi^c\} = \mathrm{Pos}\{\Gamma\} = 1. \tag{۷.۱}$$

از طرف دیگر با استفاده از رابطه (۶.۱) داریم

$$\mathrm{Pos}\{x \in \xi^c\} = 1 - \mu(x). \tag{۸.۱}$$

از روابط (۶.۱)، (۷.۱) و (۸.۱) نتیجه می‌شود که

$$\mu(x) \vee (1 - \mu(x)) = 1.$$

بنابراین

$$\mu(x) = 0 \text{ یا } 1.$$

این نتیجه نشان می‌دهد که تابع عضویت μ می‌تواند یک تابع علامت مجموعه قطعی باشد. به عبارت دیگر، فقط مجموعه‌های قطعی می‌توانند همزمان رابطه ی (۶.۱) $\sim$ (۵.۱) را توجیه کنند. در این مفهوم، نظریه مجموعه فازی طبق قانون ریاضی به نظریه مجموعه کلاسیک متلاشی می‌شود. بنابراین

نظریه مجموعه فازی چیزی بیشتر از نظریه مجموعه کلاسیک نیست.
به علاوه، در هر دو نظریه و عمل به نظر می‌رسد بین مجموعه‌های فازی نیازی به رابطه شمول خواهد بود. بنابراین نظریه مجموعه فازی نیز به ازای هر مجموعه تعدیل شده B یک فرمول اندازه معکوس بصورت زیر فرض می‌کند

$$\mathrm{Pos}\{\xi \subset B\} = \sup_{x \in B} \mu(x). \tag{۹.۱}$$

حال فرض کنید $\mathbb{R}$ مجموعه‌ای از اعداد حقیقی و $[۱, ۲]$ یک بازه قطعی باشد. اگر بگوییم $\mathbb{R}$ مشمول در $[۱, ۲]$ باشد، یعنی

$$\mathbb{R} \subset [۱, ۲].$$

باید تصور کنید که خیلی بی‌معنی است. توجه کنید که $\mathbb{R}$ یک مجموعه فازی خاصی با تابع عضویت زیر است

$$\mu(x) \equiv ۱.$$

از فرمول اندازه معکوس (۹.۱) نتیجه می‌شود که

$$\mathrm{Pos}\{\mathbb{R} \subset [۱, ۲]\} = \sup_{x \in [۱,۲]} \mu(x) = ۱.$$

بنابراین، نظریه مجموعه فازی به ما می‌گوید که $\mathbb{R} \subset [۱, ۲]$ صد در صد امکان پذیر است. آیا حاضرید این نتیجه را بپذیرید؟ اگر خیر، آن‌گاه (۹.۱) درتناقض با رابطه شمول در نظریه مجموعه‌های کلاسیک است. به عبارت دیگر، هیچ چیز نمی‌تواند همزمان روابط (۶.۱) $\sim$ (۵.۱) و (۹.۱) را توجیه کند. با این مفاهیم، نظریه مجموعه فازی خود سازگار نیست. این یک مسئله کاملا اساسی است.
شاید بعضی از فازی دانان استدلال کنند که آن‌ها هرگز از اندازه امکان در نظریه مجموعه فازی استفاده نمی‌کنند، اما در رابطه با درجه عضویت $\mu(x)$، فقط در اندازه امکان است که مجموعه فازی ξ شامل نقطه x است (یعنی x متعلق به ξ است).
از مباحث بالا می‌توانیم ببینیم نظریه مجموعه فازی در ریاضیات خود سازگار نیست و ممکن است در عمل به نتایج اشتباهی منجر شود، ، به هر حال، به عقیده لیو نظریه مجموعه فازی در ریاضیات خوش تعریف نیست. در پاسخ به این سوال که آیا می‌توانیم نظریه مجموعه فازی را اصلاح کنیم باید گفت بله، اما تغییرات بسیاربزرگ است که لیو نام نظریه مجموعه فازی اصلاح شده را نظریه مجموعه نامعین می‌گذارد.

فصل ۲

مقدمات نظریه عدم قطعیت

در سال ۲۰۰۷ لیو [۱۷] مفهوم اندازه نامعین را پیشنهاد داد و نظریه عدم قطعیت را تعریف کرد. در این فصل بعضی مفاهیم پایه و قضایایی در نظریه عدم قطعیت را بازگو می‌کنیم. مطالب این فصل از مرجع [۱۹] است.

تعریف ۱.۰.۲. فرض کنید Γ مجموعه‌ای ناتهی باشد. یک جبر از مجموعه‌ها روی Γ، گردایه‌ای ناتهی چون $\mathcal{L}$ از زیر مجموعه‌های Γ است که تحت اجتماع‌های متناهی و متمم گیری بسته باشد. به عبارت دیگر، اگر $\Lambda_1, \cdots \Lambda_n \in \mathcal{L}$، آنگاه $\cup_{i=1}^{n} \Lambda_i \in \mathcal{L}$ و اگر $\Lambda \in \mathcal{L}$، آنگاه $\Lambda^c \in \mathcal{L}$. یک σ -جبر، جبری است که تحت اجتماع‌های شمارش پذیر بسته باشد.
چنانچه Γ یک فضای متری یا به طور کلی یک فضای توپولوژیک باشد، σ -جبر تولید شده به وسیله خانواده مجموعه‌های باز واقع در Γ، σ -جبر بورل روی Γ نامیده می‌شود و آن را با B نشان می‌دهیم. اعضای σ -جبر بورل را مجموعه‌های بورل می‌نامیم. بنابراین B شامل مجموعه‌های باز، مجموعه‌های بسته، اشتراک‌های شمارش پذیر از مجموعه‌های باز، اجتماع‌های شمارش پذیر از مجموعه‌های بسته و غیره است.

۱.۲ اندازه نامعین

فرض کنید $(\Gamma, \mathcal{L})$ یک فضای اندازه پذیر باشد. هر عنصر Λ در $\mathcal{L}$ یک مجموعه اندازه پذیر نامیده می‌شود. هر مجموعه اندازه پذیر یک پیشامد در نظریه عدم قطعیت است. یک اندازه نامعین $\mathcal{M}$ روی σ -جبر $\mathcal{L}$ تعریف می‌شود. بنابراین عدد $\mathcal{M}\{\Lambda\}$ به صورت یک تابع مجموعه‌ای به هر پیشامد Λ به منظور نشان دادن درجه اعتقاد برای اندازه گیری اعتقاد ما به وقوع پیشامد Λ اختصاص داده می‌شود. اندازه نامعین $\mathcal{M}$ باید خواص ریاضی معینی داشته باشد. به منظور ارتباط منطقی با درجه اعتقاد لیو سه اصل موضوعه زیر را در نظریه عدم قطعیت مطرح کرد:
اصل (۱) نرمال بودن:

$$\mathcal{M}\{\Gamma\} = ۱.$$

اصل (۲) خود دوگانگی: برای هر پیشامد Λ؛

$$\mathcal{M}\{\Lambda\} + \mathcal{M}\{\Lambda^c\} = ۱.$$

اصل (۳) زیر افزایشی شمارا: برای هر دنباله شمارش پذیر از پیشامدهای Λ داشته‌باشیم:

$$\mathcal{M}\{\bigcup_{i=۱}^{\infty}\Lambda_i\} \leq \sum_{i=۱}^{\infty}\mathcal{M}\{\Lambda_i\}.$$

اگر $\mathcal{M}$ یک اندازه نامعین باشد آن‌گاه سه تایی $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ را فضای نامعین می‌نامند.
توجه کنید که اندازه نامعین به عنوان درجه اعتقاد شخصی یک پیشامد نامعین (نه فراوانی) که ممکن است اتفاق بیفتد تفسیر می‌شود و بستگی به دانش شخصی مربوط به پیشامد دارد، اگر حالت دانش تغییر کند اندازه نامعین تغییر خواهد کرد

.

لیو [۱۸] اندازه نامعین حاصلضربی و اصل اندازه حاصلضربی را تعریف کرد.
(اصل حاصلضربی) فرض کنید $(\Gamma_k, \mathcal{L}_k, \mathcal{M}_k)$ یک فضای نامعین به ازای $k = ۱, ۲, \cdots, n$ باشد. می‌نویسیم

$$\Gamma = \Gamma_۱ \times \Gamma_۲ \times \cdots \times \Gamma_n, \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}_۱ \times \mathcal{L}_۲ \times \cdots \times \mathcal{L}_n.$$

آن‌گاه اندازه نامعین حاصلضربی روی Γ به ازای هر $\Lambda \in \mathcal{L}$ بصورت زیر است:

$$\mathcal{M}\{\Lambda\} = \begin{cases} \sup\limits_{\Lambda_۱\times\Lambda_۲\times\cdots\times\Lambda_n\subset\Lambda} \min\limits_{۱\leq k\leq n} \mathcal{M}_k\{\Lambda_k\} \\ \quad \text{if} \sup\limits_{\Lambda_۱\times\Lambda_۲\times\cdots\times\Lambda_n\subset\Lambda} \min\limits_{۱\leq k\leq n} \mathcal{M}_k\{\Lambda_k\} > ۰/۵, \\ ۱ - \sup\limits_{\Lambda_۱\times\Lambda_۲\times\cdots\times\Lambda_n\subset\Lambda^c} \min\limits_{۱\leq k\leq n} \mathcal{M}_k\{\Lambda_k\} \\ \quad \text{if} \sup\limits_{\Lambda_۱\times\Lambda_۲\times\cdots\times\Lambda_n\subset\Lambda^c} \min\limits_{۱\leq k\leq n} \mathcal{M}_k\{\Lambda_k\} > ۰/۵, \\ ۰/۵ \quad o.w. \end{cases} \tag{۱.۲}$$

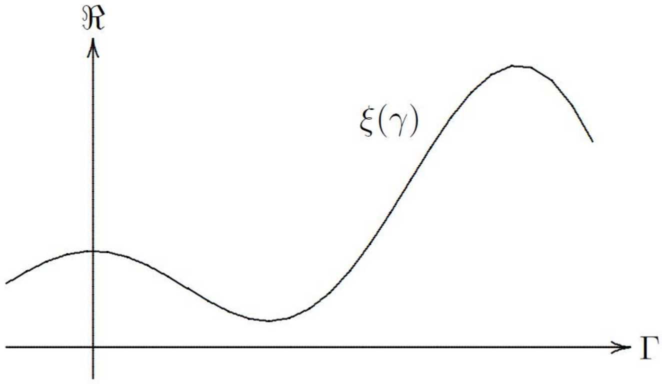
که می‌توان رابطه فوق را بصورت زیر نیز نوشت:

$$M\{\prod_{k=۱}^{\infty}\Lambda_k\} = \bigwedge_{k=۱}^{\infty} M_k\{\Lambda_k\}.$$

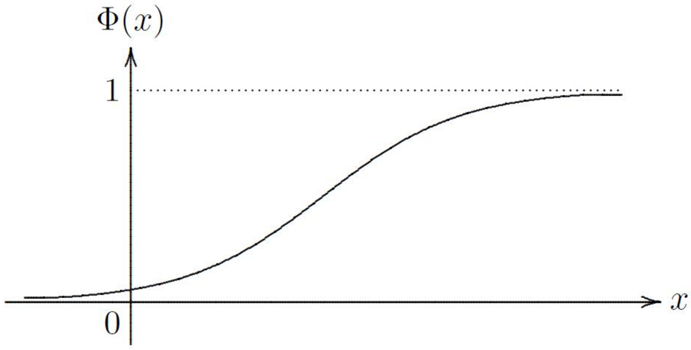
۲.۲ متغیر نامعین

متغیر نامعین یک مفهوم اساسی در نظریه عدم قطعیت است که نشان دهنده میزان عدم قطعیت می‌باشد

تعریف ۱.۲.۲. ([۱۷]) یک متغیر نامعین یک تابع اندازه پذیر ξ از σ−جبر $\mathcal{L}$ به مجموعه اعداد حقیقی است. یک متغیر نامعین ξ با یک توزیع نامعین که توسط لیو تعریف شده است مشخص می‌شود. شکل ۱.۲ یک نمونه متغیر نامعین را نشان می‌دهد.



شکل ۱.۲: یک متغیر نامعین



شکل ۲.۲: یک توزیع نامعین

۳.۲ توزیع نامعین

تعریف ۱.۳.۲. توزیع نامعین $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow [۰,۱]$ برای یک متغیر نامعین ξ به ازای هر عدد حقیقی x به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Phi(x) = \mathcal{M}\{\xi \leq x\}. \qquad (۲.۲)$$

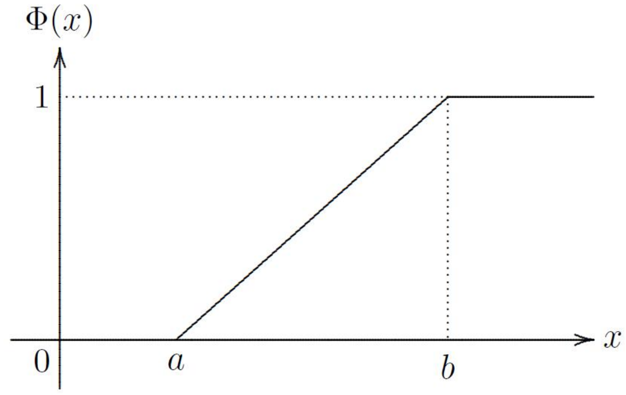
شکل ۲ ۰ ۲ نمودار یک نمونه توزیع نامعین را نشان می‌دهد.

۱.۳.۲ برخی از توزیع‌های نامعین

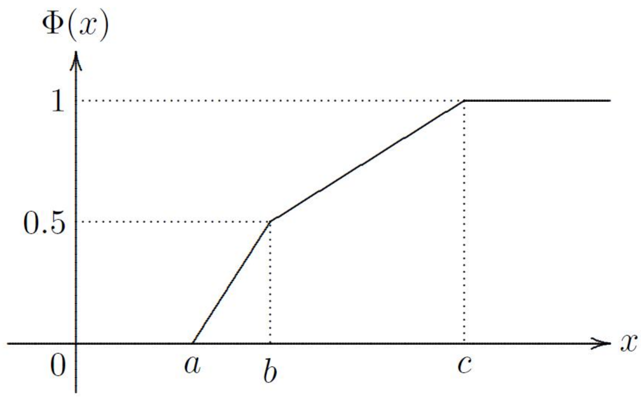
تعریف ۲.۳.۲. یک متغیر نامعین ξ را متغیر نامعین خطی گوئیم اگر توزیع نامعین خطی زیر را داشته‌باشد:

$$\Phi(x) = \begin{cases} ۰ & \text{if} \quad x \leq a, \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{if} \quad a \leq x \leq b, \\ ۱ & \text{if} \quad x \geq b. \end{cases} \qquad (۳.۲)$$

این تابع به صورت $\xi \sim \mathcal{L}(a,b)$ نشان داده می‌شود که a و b اعداد حقیقی‌اند و $a < b$.



شکل ۳.۲: توزیع نامعین خطی



شکل ۴.۲: توزیع نامعین زیگزاگ

شکل ۲ ۳۰ نمودار یک توزیع نامعین خطی را نشان می‌دهد.

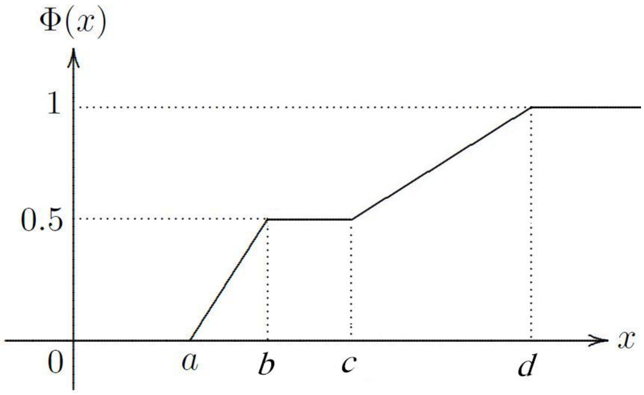
تعریف ۳.۳.۲. یک متغیر نامعین ξ را متغیر نامعین زیگزاگ گوئیم اگر توزیع نامعین زیگزاگ زیر را داشته باشد:

$$\Phi(x) = \begin{cases} ۰ & \text{if} \quad x \leq a, \\ \dfrac{x-a}{۲(b-a)} & \text{if} \ \ a \leq x \leq b, \\ \dfrac{x+c-۲b}{۲(c-b)} & \text{if} \ \ b \leq x \leq c, \\ ۱ & \text{if} \quad x \geq c, \end{cases} \tag{۴.۲}$$

و آن را با $\xi \sim \mathcal{Z}(a,b,c)$ نشان می‌دهیم که a و b و c اعداد حقیقی‌اند و $a < b < c$.

شکل ۲ ۴۰ نمودار یک توزیع نامعین زیگزاگ را نشان می‌دهد.

تعریف ۴.۳.۲. یک متغیر نامعین ξ را متغیر نامعین ذوزنقه‌ای گوئیم اگر توزیع نامعین زیر را داشته باشد:



شکل ۵.۲: توزیع نامعین ذوزنقه‌ای

$$\Phi(x)=\begin{cases} ۰ & \text{if} \quad x\le a,\\ \dfrac{x-a}{۲(b-a)} & \text{if} \;\; a\le x\le b,\\ \dfrac{۱}{۲} & \text{if} \;\; b\le x\le c,\\ \dfrac{x+d-۲c}{۲(d-c)} & \text{if} \;\; c\le x\le d,\\ ۱ & \text{if} \quad x\ge d,\end{cases} \tag{۵.۲}$$

که a و b و c و d اعداد حقیقی‌اند و $a<b<c<d$.

شکل ۲ ۰ ۵ نمودار یک توزیع نامعین ذوزنقه‌ای را نشان می‌دهد.

تعریف ۵.۳.۲. یک متغیر نامعین ξ را متغیر نامعین نرمال گوئیم اگر توزیع نامعین نرمال زیر را داشته باشد:

$$\Phi(x)=\Big(۱+exp\Big(\frac{\pi(e-x)}{\sqrt{۳}\sigma}\Big)\Big)^{-۱}, x\in\mathbb{R}, \quad \sigma>۰. \tag{۶.۲}$$

که آن را با $\xi\sim\mathcal{N}(e,\sigma)$ نشان می‌دهیم که در آن e و σ اعداد حقیقی هستند.

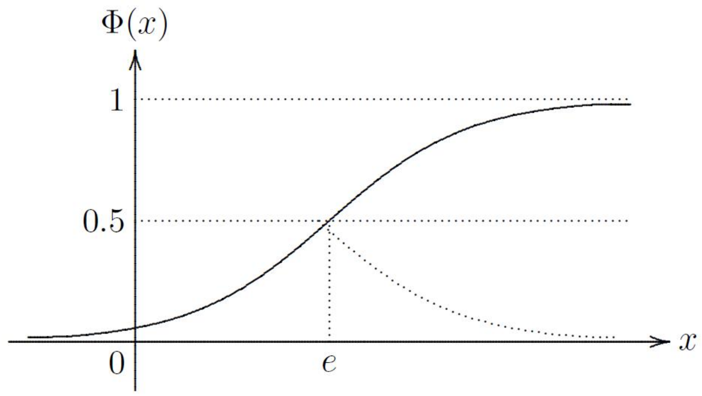
شکل ۲ ۰ ۶ نمودار یک توزیع نامعین نرمال را نشان می‌دهد.

تعریف ۶.۳.۲. یک متغیر نامعین ξ را متغیر نامعین لُگ نرمال گوئیم اگر $ln\xi$ یک متغیر نامعین نرمال $\mathcal{N}(e,\sigma)$ باشد، به عبارت دیگر توزیع نامعین زیر را داشته باشد:

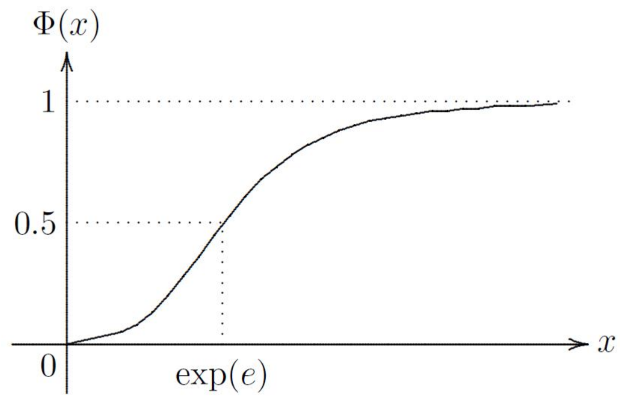
$$\Phi(x)=\Big(۱+exp\Big(\frac{\pi(e-lnx)}{\sqrt{۳}\sigma}\Big)\Big)^{-۱}, x\in\mathbb{R}, \quad \sigma>۰. \tag{۷.۲}$$

که آن را با $\xi\sim\mathcal{LOGN}(e,\sigma)$ نشان می‌دهیم که در آن e و σ اعداد حقیقی هستند.

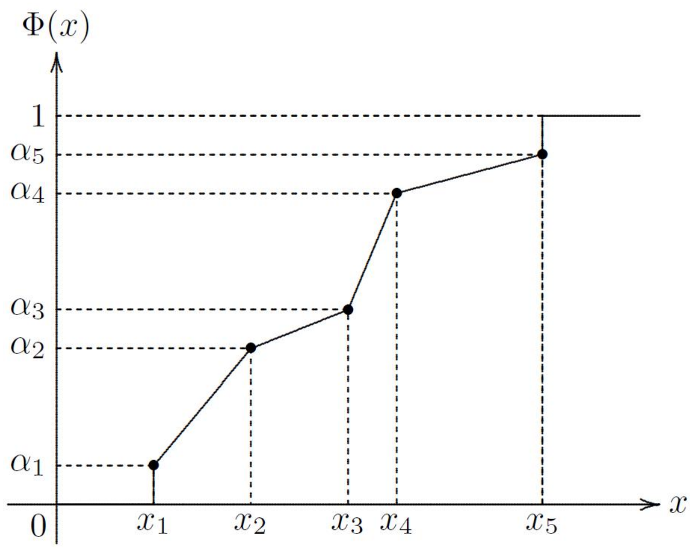
شکل ۲ ۰ ۷ نمودار یک توزیع نامعین لگ نرمال را نشان می‌دهد.



شکل ۶.۲: توزیع نامعین نرمال



شکل ۷.۲: توزیع نامعین لگ نرمال



شکل ۸.۲: توزیع نامعین عملی

تعریف ۷.۳.۲. یک متغیر نامعین ξ را متغیر نامعین عملی گوئیم اگر توزیع نامعین عملی زیر را داشته‌باشد:

$$\Phi(x)=\begin{cases}۰ & \text{if} \quad x\le x_۱,\\ \alpha_i+\dfrac{(\alpha_{i+۱}-\alpha_i)(x-x_i)}{x_{i+۱}-x_i} & \text{if} \ \ x_i\le x\le x_{i+۱},\ ۱\le i<n,\\ ۱ & \text{if} \quad x>x_n,\end{cases} \qquad (۸.۲)$$

که در آن $x_۱<x_۲<\cdots<x_n$ و $۰\le\alpha_۱\le\alpha_۲\le\cdots\le\alpha_n\le ۱$.

شکل ۲ ۰ ۸ نمودار یک توزیع نامعین عملی را نشان می‌دهد.

قضیه ۸.۳.۲. *(قضیه وارون سازی اندازه[۱۹]) فرض کنید ξ یک متغیر نامعین با توزیع نامعین Φ باشد. آن‌گاه برای هر عدد حقیقی x داریم*

$$M\{\xi\le x\}=\Phi(x),\quad \mathcal{M}\{\xi>x\}=۱-\Phi(x). \qquad (۹.۲)$$

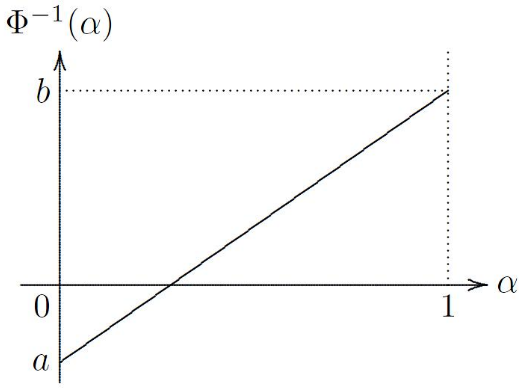
برهان. معادله $M\{\xi\le x\}=\Phi(x)$ به سادگی از تعریف توزیع نامعین نتیجه می‌شود. با استفاده از اصل ۲ اندازه نامعین نتیجه می‌گیریم که

$$\mathcal{M}\{\xi>x\}=۱-M\{\xi\le x\}=۱-\Phi(x),$$

و قضیه ثابت می‌شود. □

تعریف ۹.۳.۲. توزیع نامعین $\Phi(x)$ منظم نامیده می‌شود اگر نسبت به x به ازای $۰<\Phi(x)<۱$ تابعی پیوسته و اکیدا صعودی باشد و

$$\lim_{x\to-\infty}\Phi(x)=۰,\qquad \lim_{x\to+\infty}\Phi(x)=۱.$$



شکل ۹.۲: معکوس توزیع نامعین خطی

۴.۲ معکوس توزیع نامعین

این واضح است که توزیع نامعین منظم $\Phi(x)$ روی برد x که بصورت $۰ < \Phi(x) < ۱$ است یک تابع معکوس دارد و تابع معکوس $\Phi^{-۱}(\alpha)$ در بازه $(۰,۱)$ وجود دارد.

تعریف ۱.۴.۲. فرض کنید ξ یک متغیر نامعین با توزیع نامعین منظم $\Phi(x)$ باشد. معکوس تابع $\Phi^{-۱}(\alpha)$ معکوس توزیع نامعین ξ نامیده می‌شود.

توجه کنید که معکوس توزیع نامعین $\Phi^{-۱}(\alpha)$ به خوبی در بازه $(۰,۱)$ تعریف می‌شود. درصورت نیاز می‌توانیم دامنه را با تعریف زیر به بازه $[۰,۱]$ گسترش دهیم

$$\Phi^{-۱}(۰) = \lim_{\alpha\to ۰^-} \Phi^{-۱}(\alpha), \quad \Phi^{-۱}(۱) = \lim_{\alpha\to ۱^+} \Phi^{-۱}(\alpha). \tag{۱۰.۲}$$

مثال ۲.۴.۲. ([۱۹]) معکوس توزیع نامعین متغیر نامعین خطی $\mathcal{L}(a,b)$ به صورت زیر است

$$\Phi^{-۱}(\alpha) = (۱-\alpha)a + \alpha b. \tag{۱۱.۲}$$

شکل ۲ ۰ ۹ نمودار معکوس توزیع نامعین خطی را نشان می‌دهد.

مثال ۳.۴.۲. ([۱۹]) معکوس توزیع نامعین متغیر نامعین زیگزاگ $\mathcal{Z}(a,b,c)$ به صورت زیر است

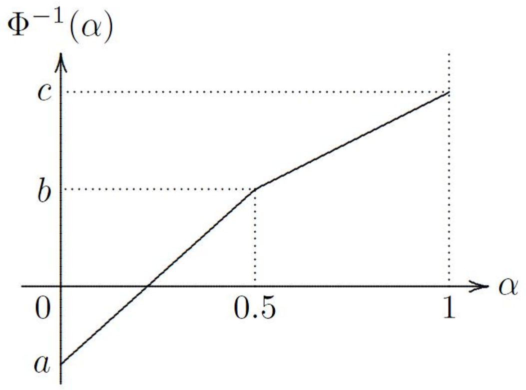
$$\Phi^{-۱}(\alpha) = \begin{cases} (۱-۲\alpha)a + ۲\alpha b & \text{if} \quad \alpha < ۰/۵, \\ (۲-۲\alpha)b + (۲\alpha-۱)c & \text{if} \quad \alpha \geq ۰/۵. \end{cases} \tag{۱۲.۲}$$

شکل ۲ ۰ ۱۰ نمودار معکوس توزیع نامعین زیگزاگ را نشان می‌دهد.

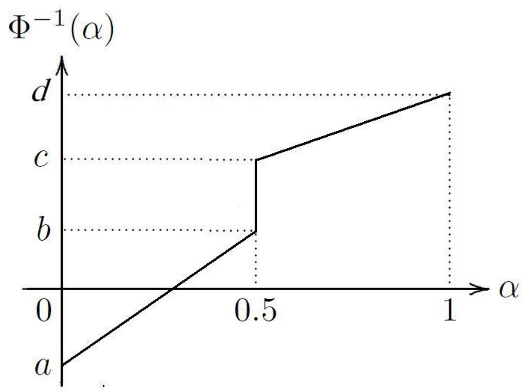
مثال ۴.۴.۲. ([۱۹]) معکوس توزیع نامعین متغیر نامعین ذوزنقه‌ای به صورت زیر است

$$\Phi^{-۱}(\alpha) = \begin{cases} (۱-۲\alpha)a + ۲\alpha b & \text{if} \quad \alpha < ۰/۵, \\ (۲-۲\alpha)c + (۲\alpha-۱)d & \text{if} \quad \alpha \geq ۰/۵. \end{cases} \tag{۱۳.۲}$$

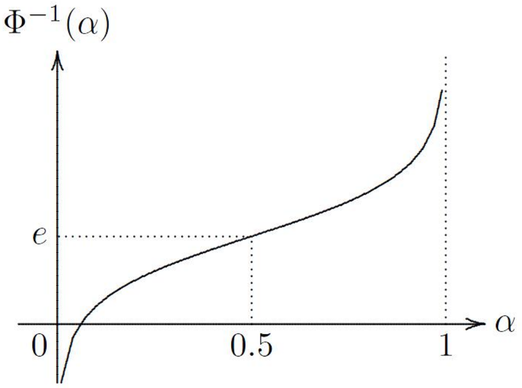
شکل ۲ ۰ ۱۱ نمودار معکوس توزیع نامعین ذوزنقه‌ای را نشان می‌دهد.



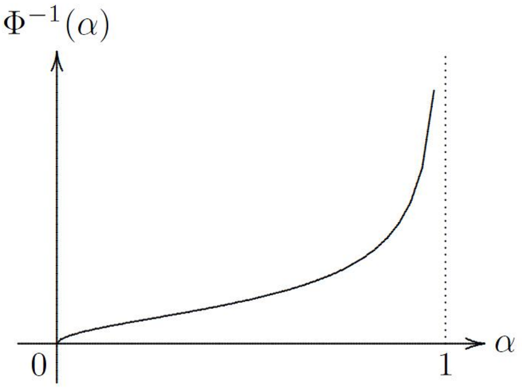
شکل ۲.۱۰: معکوس توزیع نامعین زیگزاگ



شکل ۲.۱۱: معکوس توزیع نامعین ذوزنقه‌ای



شکل ۱۲.۲: معکوس توزیع نامعین نرمال



شکل ۱۳.۲: معکوس توزیع نامعین لگ نرمال

مثال ۵.۴.۲. ([۱۹]) معکوس توزیع نامعین متغیر نامعین نرمال $\mathcal{N}(e,\sigma)$ به صورت زیر است

$$\Phi^{-1}(\alpha) = e + \frac{\sigma\sqrt{3}}{\pi} ln\frac{\alpha}{1-\alpha}. \tag{۱۴.۲}$$

شکل ۲ ۰ ۱۲ نمودار معکوس توزیع نامعین نرمال را نشان می‌دهد.

مثال ۶.۴.۲. ([۱۹]) معکوس توزیع نامعین متغیر نامعین لگ نرمال $\mathcal{LOGN}(e,\sigma)$ به صورت زیر است

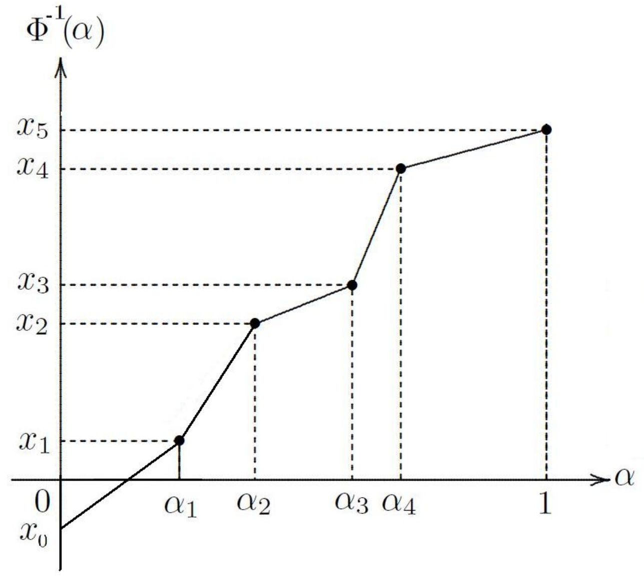
$$\Phi^{-1}(\alpha) = \exp\left(e + \frac{\sigma\sqrt{3}}{\pi} ln\frac{\alpha}{1-\alpha}\right). \tag{۱۵.۲}$$

شکل ۲ ۰ ۱۳ نمودار معکوس توزیع نامعین لگ نرمال را نشان می‌دهد.

مثال ۷.۴.۲. ([۱۹]) معکوس توزیع نامعین متغیر نامعین عملی به صورت زیر است

$$\Phi^{-1}(\alpha) = \frac{(\alpha-\alpha_i)(x_{i+1}-x_i)}{\alpha_{i+1}-\alpha_i} + x_i. \tag{۱۶.۲}$$

شکل ۲ ۰ ۱۴ نمودار معکوس توزیع نامعین عملی را نشان می‌دهد.



شکل ۱۴.۲: معکوس توزیع نامعین عملی

۵.۲ استقلال متغیرهای نامعین

تعریف ۱.۵.۲. ([۱۸])متغیرهای نامعین $\xi_۱, \xi_۲, \cdots, \xi_n$ مستقل نامیده می‌شوند اگر برای هر مجموعه بورل $B_۱, B_۲, \cdots, B_n$ از اعداد حقیقی داشته باشیم:

$$\mathcal{M}\{\bigcap_{i=۱}^{n}\{\xi_i \in B_i\}\} = \min_{۱\le i\le n} \mathcal{M}\{\xi_i \in B_i\}. \tag{۱۷.۲}$$

قضیه ۲.۵.۲. *([۱۹])متغیرهای نامعین $\xi_۱, \xi_۲, \cdots, \xi_n$ مستقل هستند اگر و تنها اگر*

$$\mathcal{M}\{\bigcup_{i=۱}^{n}\{\xi_i \in B_i\}\} = \max_{۱\le i\le n} \mathcal{M}\{\xi_i \in B_i\}. \tag{۱۸.۲}$$

برهان. چون اندازه نامعین خوددوگانه است پس متغیرهای نامعین $\xi_۱, \xi_۲, \cdots, \xi_n$ مستقل هستند اگر و تنها اگر

$$\begin{aligned}\mathcal{M}\{\bigcup_{i=۱}^{n}\{\xi_i \in B_i\}\} &= ۱ - \mathcal{M}\{\bigcap_{i=۱}^{n}\{\xi_i \in B_i^c\}\}\\ &= ۱ - \min_{۱\le i\le n} \mathcal{M}\{\xi_i \in B_i^c\} = ۱ - (۱ - \max_{۱\le i\le n} \mathcal{M}\{\xi_i \in B_i\})\\ &= \max_{۱\le i\le n} \mathcal{M}\{\xi_i \in B_i\}.\end{aligned}$$

□

۶.۲ قانون عملیاتی

قضیه ۱.۶.۲. *([۱۸]) فرض‌کنید $\xi_۱, \xi_۲, \cdots, \xi_n$ متغیرهای نامعین مستقل و $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع اندازه پذیر باشند. آن‌گاه $\xi = f(\xi_۱, \xi_۲, \cdots, \xi_n)$ یک متغیر نامعین است بطوری که*

$$\mathcal{M}\{\xi\in B\}=\begin{cases}\sup\limits_{f(B_1,B_2,\cdots,B_n)\subset B}\ \min\limits_{1\le k\le n}\mathcal{M}\{\xi_k\in B_k\}\\ \quad\text{if}\ \sup\limits_{f(B_1,B_2,\cdots,B_n)\subset B}\ \min\limits_{1\le k\le n}\mathcal{M}\{\xi_k\in B_k\}>0.5,\\ 1-\sup\limits_{f(B_1,B_2,\cdots,B_n)\subset B^c}\ \min\limits_{1\le k\le n}\mathcal{M}\{\xi_k\in B_k\}\\ \quad\text{if}\ \sup\limits_{f(B_1,B_2,\cdots,B_n)\subset B^c}\ \min\limits_{1\le k\le n}\mathcal{M}\{\xi_k\in B_k\}>0.5,\\ 0.5\qquad o.w,\end{cases}\tag{۱۹.۲}$$

که در آن $B_1,B_2,\cdots,B_n,B$ مجموعه‌های بورل از اعداد حقیقی هستند و $f(B_1,B_2,\cdots,B_n)\subset B$ یعنی $f(t_1,t_2,\cdots,t_n)\subset B$ به ازای هر $t_1\in B_1,t_2\in B_2,\cdots,t_n\in B_n$.

برهان. قضیه مستقیما از اصل حاصلضربی اندازه‌ها بدست می‌آید. □

قضیه ۲.۶.۲ *([۱۹]) فرض کنید ξ یک متغیر نامعین با توزیع نامعین Φ و f یک تابع اکیدا صعودی باشد. آن‌گاه توزیع نامعین $f(\xi)$ می‌تواند بصورت زیر بدست آید*

$$\Psi(t)=\Phi(f^{-1}(t)).\tag{۲۰.۲}$$

که می‌تواند بصورت زیر نیز بیان شود

$$\Psi^{-1}(\alpha)=f\big(\Phi^{-1}(\alpha)\big),\quad 0<\alpha<1.\tag{۲۱.۲}$$

برهان. به ازای هر عدد حقیقی t، چون f یک تابع اکیدا صعودی است پس داریم

$$f((-\infty,f^{-1}(t)])=(-\infty,t].$$

طبق قانون عملیاتی داریم

$$\Psi(t)=\mathcal{M}\{f(\xi)\in(-\infty,t]\}=\mathcal{M}\{\xi\in(-\infty,f^{-1}(t)]\}=\Phi(f^{-1}(t)).$$

□

قضیه ۳.۶.۲ *([۲۲])فرض کنید $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ متغیرهای نامعین مستقل به ترتیب با توزیع‌های نامعین منظم به صورت $\Phi_1,\Phi_2,\cdots,\Phi_n$ و Ψ توزیع نامعین مجموع $\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n$ باشند. اگر $\Phi_1{}^{-1}(\alpha),\Phi_2{}^{-1}(\alpha),\cdots,\Phi_n{}^{-1}(\alpha)$ به ازای هر $\alpha\in(0,1)$ منحصربفرد باشند آن‌گاه داریم:*

$$\Psi^{-1}(\alpha)=\Phi_1{}^{-1}(\alpha)+\Phi_2{}^{-1}(\alpha)+\cdots+\Phi_n{}^{-1}(\alpha),\quad 0<\alpha<1.\tag{۲۲.۲}$$

برهان. براساس خاصیت جمع پذیری اندازه نامعین، به ازای هر $\alpha\in(0,1)$ داریم:

$$\mathcal{M}\Big\{\sum_{i=1}^n\xi_i\le\sum_{i=1}^n\Phi_i{}^{-1}(\alpha)\Big\}\ge\mathcal{M}\Big\{\bigcup_{i=1}^n(\xi_i\le\Phi_i{}^{-1}(\alpha))\Big\}\ge\mathcal{M}\Big\{\bigcap_{i=1}^n(\xi_i\le\Phi_i{}^{-1}(\alpha))\Big\}.$$

چون $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ متغیرهای نامعین مستقل هستند، طبق معادله (۱۷.۲) داریم:

$$\mathcal{M}\Big\{\sum_{i=1}^n\xi_i\le\sum_{i=1}^n\Phi_i{}^{-1}(\alpha)\Big\}\ge\min_{1\le i\le n}\mathcal{M}\{\xi_i\le\Phi_i{}^{-1}(\alpha)\}=\min_{1\le i\le n}\alpha=\alpha.$$

به عبارت دیگر به ازای هر $\epsilon > 0$ داریم:

$$\mathcal{M}\Big\{\sum_{i=1}^{n}\xi_i \le \sum_{i=1}^{n}{\Phi_i}^{-1}(\alpha)-\epsilon\Big\} \le \mathcal{M}\Big\{\bigcup_{i=1}^{n}(\xi_i \le {\Phi_i}^{-1}(\alpha)-\frac{\epsilon}{n})\Big\}.$$

زیرا اندازه نامعین خوددوگان است. چون $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ متغیرهای نامعین مستقل هستند، طبق معادله (۱۸.۲) داریم:

$$\mathcal{M}\Big\{\sum_{i=1}^{n}\xi_i \le \sum_{i=1}^{n}{\Phi_i}^{-1}(\alpha)-\epsilon\Big\} \le \mathcal{M}\Big\{\bigcup_{i=1}^{n}(\xi_i \le {\Phi_i}^{-1}(\alpha)-\frac{\epsilon}{n})\Big\}$$

$$= \max_{1\le i\le n}\mathcal{M}\{\xi_i \le {\Phi_i}^{-1}(\alpha)-\frac{\epsilon}{n}\} < \max_{1\le i\le n}\alpha = \alpha.$$

از پیوسته بودن توزیع‌های نامعین نتیجه می‌شود که

$$\mathcal{M}\{\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n \le {\Phi_1}^{-1}(\alpha)+{\Phi_2}^{-1}(\alpha)+\cdots+{\Phi_n}^{-1}(\alpha)\} = \alpha,$$

و در نتیجه داریم

$$\Psi^{-1}(\alpha) = {\Phi_1}^{-1}(\alpha)+{\Phi_2}^{-1}(\alpha)+\cdots+{\Phi_n}^{-1}(\alpha).$$

□

قضیه ۴.۶.۲. *[۱۹] فرض کنید $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ متغیرهای نامعین مستقل و مثبت به ترتیب با توزیع‌های نامعین منظم به صورت $\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_n$ باشند، آن‌گاه حاصلضرب $\xi = \xi_1 \times \xi_2 \times \cdots \times \xi_n$ دارای معکوس تابع توزیع بصورت زیر است*

$$\Psi^{-1}(\alpha) = {\Phi_1}^{-1}(\alpha)\times{\Phi_2}^{-1}(\alpha)\times\cdots\times{\Phi_n}^{-1}(\alpha). \tag{۲۳.۲}$$

قضیه ۵.۶.۲. *فرض کنید ξ_1 و ξ_2 به ترتیب دو متغیر نامعین خطی مستقل $\mathcal{L}(a_1, b_1)$ و $\mathcal{L}(a_2, b_2)$ باشند. آن‌گاه مجموع $\xi_1+\xi_2$ نیز یک متغیر نامعین خطی است و داریم*

$$\mathcal{L}(a_1,b_1)+\mathcal{L}(a_2,b_2) = \mathcal{L}(a_1+a_2, b_1+b_2). \tag{۲۴.۲}$$

حاصل ضرب یک متغیر نامعین خطی $\mathcal{L}(a,b)$ و یک عدد اسکالر $k > 0$ نیز یک متغیر نامعین خطی است و داریم

$$k.\mathcal{L}(a,b) = \mathcal{L}(ka, kb). \tag{۲۵.۲}$$

برهان. فرض کنید Φ_1 و Φ_2 به ترتیب توزیع‌های نامعین متغیرهای نامعین خطی ξ_1 و ξ_2 باشند، آن‌گاه داریم:

$${\Phi_1}^{-1}(\alpha) = (1-\alpha)a_1+\alpha b_1,$$

$${\Phi_2}^{-1}(\alpha) = (1-\alpha)a_2+\alpha b_2.$$

طبق قضیه (۲۲.۲) ، توزیع نامعین Ψ مربوط به $\xi_1+\xi_2$ بصورت زیر است

$$\Psi^{-1}(\alpha) = {\Phi_1}^{-1}(\alpha)+{\Phi_2}^{-1}(\alpha) = (1-\alpha)(a_1+a_2)+\alpha(b_1+b_2),$$

که به معنای این است که مجموع متغیرهای نامعین خطی نیز متغیری نامعین خطی است و

$$\mathcal{L}(a_1,b_1)+\mathcal{L}(a_2,b_2) = \mathcal{L}(a_1+a_2, b_1+b_2).$$

برای یک متغیر نامعین خطی $\mathcal{L}(a,b)$، طبق قضیه (۲.۶.۲)، وقتی $k>0$ توزیع نامعین Ψ مربوط به $k\xi$ به صورت زیر است:

$$\Psi(t)=\Phi(\frac{t}{k})=\frac{t/k-a}{b-a}=\frac{t-ka}{k(b-a)}.$$

و حکم قضیه ثابت می‌شود. □

قضیه ۶.۶.۲. *فرض کنید ξ_1 و ξ_2 به ترتیب دو متغیر نامعین زیگزاگ مستقل $\mathcal{Z}(a_1,b_1,c_1)$ و $\mathcal{Z}(a_2,b_2,c_2)$ باشند. آن‌گاه مجموع $\xi_1+\xi_2$ نیز یک متغیر نامعین زیگزاگ بصورت زیر است*

$$\mathcal{Z}(a_1,b_1,c_1)+\mathcal{Z}(a_2,b_2,c_2)=\mathcal{Z}(a_1+a_2,b_1+b_2,c_1+c_2). \tag{۲۶.۲}$$

حاصل ضرب یک متغیر نامعین زیگزاگ $\mathcal{Z}(a,b,c)$ و یک عدد اسکالر $k>0$ نیز یک متغیر نامعین زیگزاگ است و داریم:

$$k.\mathcal{Z}(a,b,c)=\mathcal{Z}(ka,kb,kc). \tag{۲۷.۲}$$

برهان. فرض کنید Φ_1 و Φ_2 به ترتیب توزیع‌های نامعین متغیرهای نامعین زیگزاگ ξ_1 و ξ_2 باشند، آن‌گاه داریم:

$$\Phi_1{}^{-1}(\alpha)=\begin{cases}(1-2\alpha)a_1+2\alpha b_1, & \text{if}\quad \alpha<0/5,\\ (2-2\alpha)b_1+(2\alpha-1)c_1, & \text{if}\ \ \alpha\geq 0/5,\end{cases}$$

$$\Phi_2{}^{-1}(\alpha)=\begin{cases}(1-2\alpha)a_2+2\alpha b_2, & \text{if}\quad \alpha<0/5,\\ (2-2\alpha)b_2+(2\alpha-1)c_2, & \text{if}\ \ \alpha\geq 0/5.\end{cases}$$

طبق قضیه (۲۲.۲) ، توزیع نامعین Ψ مربوط به $\xi_1+\xi_2$ بصورت زیر است

$$\Psi^{-1}(\alpha)=\begin{cases}(1-2\alpha)(a_1+a_2)+2\alpha(b_1+b_2), & \text{if}\quad \alpha<0/5,\\ (2-2\alpha)(b_1+b_2)+(2\alpha-1)(c_1+c_2), & \text{if}\ \ \alpha\geq 0/5.\end{cases}$$

بنابراین مجموع متغیرهای نامعین زیگزاگ نیز متغیری نامعین زیگزاگ است و

$$\mathcal{Z}(a_1,b_1,c_1)+\mathcal{Z}(a_2,b_2,c_2)=\mathcal{Z}(a_1+a_2,b_1+b_2,c_1+c_2).$$

فرض کنید توزیع نامعین متغیر نامعین زیگزاگ $\xi\sim\mathcal{Z}(a,b,c)$، Φ باشد. طبق قضیه (۲.۶.۲)، وقتی $k>0$ معکوس توزیع نامعین مربوط به $k\xi$ به صورت زیر است

$$\Psi^{-1}(\alpha)=k\Phi^{-1}(\alpha)=\begin{cases}(1-2\alpha)(ka)+2\alpha(kb), & \text{if}\quad \alpha<0/5,\\ (2-2\alpha)(kb)+(2\alpha-1)(kc), & \text{if}\ \ \alpha\geq 0/5.\end{cases}$$

بنابراین $k\xi$ یک متغیر زیگزاگ به صورت $\mathcal{Z}(ka,kb,kc)$ است. □

قضیه ۷.۶.۲. *فرض کنید ξ_1 و ξ_2 دو متغیر نامعین ذوزنقه‌ای مستقل باشند. آن‌گاه مجموع $\xi_1+\xi_2$ نیز یک متغیر نامعین ذوزنقه‌ای است. همچنین حاصل ضرب یک متغیر نامعین ذوزنقه‌ای و یک عدد اسکالر $k>0$ نیز یک متغیر نامعین ذوزنقه‌ای است.*

برهان. فرض کنید Φ_1 و Φ_2 به ترتیب توزیع‌های نامعین متغیرهای نامعین ذوزنقه‌ای ξ_1 و ξ_2 باشند، آن‌گاه داریم:

$$\Phi_1^{-1}(\alpha) = \begin{cases} (1-2\alpha)a_1 + 2\alpha b_1, & \text{if} \quad \alpha < 0/5, \\ (2-2\alpha)c_1 + (2\alpha - 1)d_1, & \text{if} \quad \alpha \geq 0/5, \end{cases}$$

$$\Phi_2^{-1}(\alpha) = \begin{cases} (1-2\alpha)a_2 + 2\alpha b_2, & \text{if} \quad \alpha < 0/5, \\ (2-2\alpha)c_2 + (2\alpha - 1)d_2, & \text{if} \quad \alpha \geq 0/5. \end{cases}$$

طبق قضیه (۲۲.۲) ، توزیع نامعین Ψ مربوط به $\xi_1 + \xi_2$ بصورت زیر است

$$\Psi^{-1}(\alpha) = \begin{cases} (1-2\alpha)(a_1+a_2) + 2\alpha(b_1+b_2), & \text{if} \quad \alpha < 0/5, \\ (2-2\alpha)(c_1+c_2) + (2\alpha - 1)(d_1+d_2), & \text{if} \quad \alpha \geq 0/5. \end{cases}$$

بنابراین مجموع متغیرهای نامعین ذوزنقه‌ای نیز متغیری نامعین ذوزنقه‌ای است. فرض کنید توزیع نامعین متغیر نامعین ذوزنقه‌ای، Φ باشد. طبق قضیه (۲.۶.۲)، وقتی $k > 0$ معکوس توزیع نامعین مربوط به $k\xi$ به صورت زیر است

$$\Psi^{-1}(\alpha) = k\Phi^{-1}(\alpha) = \begin{cases} (1-2\alpha)(ka) + 2\alpha(kb), & \text{if} \quad \alpha < 0/5, \\ (2-2\alpha)(kc) + (2\alpha - 1)(kd), & \text{if} \quad \alpha \geq 0/5. \end{cases}$$

بنابراین $k\xi$ نیز یک متغیر ذوزنقه‌ای است. □

قضیه ۸.۶.۲. *فرض کنید ξ_1 و ξ_2 به ترتیب دو متغیر نامعین نرمال مستقل $\mathcal{N}(e_1, \sigma_1)$ و $\mathcal{N}(e_2, \sigma_2)$ باشند. آن‌گاه مجموع $\xi_1 + \xi_2$ نیز یک متغیر نامعین نرمال است و داریم*

$$\mathcal{N}(e_1, \sigma_1) + \mathcal{N}(e_2, \sigma_2) = \mathcal{N}(e_1 + e_2, \sigma_1 + \sigma_2). \tag{۲۸.۲}$$

همچنین حاصل ضرب یک متغیر نامعین نرمال $\mathcal{N}(e, \sigma)$ و یک عدد اسکالر $k > 0$ نیز یک متغیر نامعین نرمال است و داریم

$$k.\mathcal{N}(e, \sigma) = \mathcal{N}(ke, k\sigma). \tag{۲۹.۲}$$

برهان. فرض کنید Φ_1 و Φ_2 به ترتیب توزیع‌های نامعین متغیرهای نامعین نرمال ξ_1 و ξ_2 باشند، آن‌گاه داریم:

$$\Phi_1^{-1}(\alpha) = e_1 + \frac{\sigma_1\sqrt{3}}{\pi} ln\frac{\alpha}{1-\alpha},$$

$$\Phi_2^{-1}(\alpha) = e_2 + \frac{\sigma_2\sqrt{3}}{\pi} ln\frac{\alpha}{1-\alpha}.$$

طبق قضیه (۲۲.۲) ، معکوس توزیع نامعین مربوط به $\xi_1 + \xi_2$ بصورت زیر است

$$\Psi^{-1}(\alpha) = \Phi_1^{-1}(\alpha) + \Phi_2^{-1}(\alpha) = (e_1 + e_2) + \frac{(\sigma_1+\sigma_2)\sqrt{3}}{\pi} ln\frac{\alpha}{1-\alpha}.$$

که به معنای این است که مجموع متغیرهای نامعین نرمال نیز متغیر نامعین نرمال $\mathcal{N}(e_1+e_2, \sigma_1+\sigma_2)$ است. به این صورت قسمت اول قضیه ثابت می‌شود. برای قسمت دوم قضیه فرض کنید که توزیع نامعین

متغیر $\xi \sim \mathcal{N}(e,\sigma)$ ، Φ باشد. طبق قضیه (۲.۶.۲)، وقتی $k > 0$ معکوس توزیع نامعین $k\xi$ به صورت زیر است:

$$\Psi^{-1}(\alpha) = k\Phi^{-1}(\alpha) = (ke) + \frac{(k\sigma)\sqrt{3}}{\pi} ln\frac{\alpha}{1-\alpha}.$$

بنابراین $k\xi$ یک متغیر نامعین نرمال $\mathcal{N}(ke, k\sigma)$ است و حکم قضیه ثابت می‌شود. □

قضیه ۹.۶.۲. *فرض کنید ξ_1 و ξ_2 به ترتیب دو متغیر نامعین لگ نرمال مستقل $\mathcal{LOGN}(e_1,\sigma_1)$ و $\mathcal{LOGN}(e_2,\sigma_2)$ باشند. آنگاه حاصلضرب $\xi_1.\xi_2$ نیز یک متغیر نامعین لگ نرمال است و داریم*

$$\mathcal{LOGN}(e_1,\sigma_1).\mathcal{LOGN}(e_2,\sigma_2) = \mathcal{LOGN}(e_1+e_2, \sigma_1+\sigma_2). \qquad (۳۰.۲)$$

همچنین حاصل ضرب یک متغیر نامعین لگ نرمال $\mathcal{LOGN}(e,\sigma)$ و یک عدد اسکالر $k > 0$ نیز یک متغیر نامعین لگ نرمال است و داریم

$$k.\mathcal{LOGN}(e,\sigma) = \mathcal{LOGN}(e + lnk, \sigma). \qquad (۳۱.۲)$$

برهان. فرض کنید Φ_1 و Φ_2 به ترتیب توزیع‌های نامعین متغیرهای نامعین لگ نرمال ξ_1 و ξ_2 باشند، آنگاه داریم:

$$\Phi_1{}^{-1}(\alpha) = \exp\Big(e_1 + \frac{\sigma_1\sqrt{3}}{\pi} ln\frac{\alpha}{1-\alpha}\Big),$$

$$\Phi_2{}^{-1}(\alpha) = \exp\Big(e_2 + \frac{\sigma_2\sqrt{3}}{\pi} ln\frac{\alpha}{1-\alpha}\Big).$$

طبق قضیه (۲۳.۲) ، معکوس توزیع نامعین مربوط به $\xi_1.\xi_2$ بصورت زیر است

$$\Psi^{-1}(\alpha) = \Phi_1{}^{-1}(\alpha).\Phi_2{}^{-1}(\alpha) = \exp\Big((e_1+e_2) + \frac{(\sigma_1+\sigma_2)\sqrt{3}}{\pi} ln\frac{\alpha}{1-\alpha}\Big).$$

که به معنای این است که حاصل ضرب متغیرهای نامعین لگ نرمال نیز متغیر نامعین لگ نرمال $\mathcal{LOGN}(e_1+e_2, \sigma_1+\sigma_2)$ است. به این صورت قسمت اول قضیه ثابت می‌شود. برای قسمت دوم قضیه فرض کنید که توزیع نامعین متغیر $\xi \sim \mathcal{LOGN}(e,\sigma)$ ، Φ باشد. طبق قضیه (۲.۶.۲)، وقتی $k > 0$ معکوس توزیع نامعین $k\xi$ به صورت زیر است:

$$\Psi^{-1}(\alpha) = k\Phi^{-1}(\alpha) = \exp\Big((e + lnk) + \frac{\sigma\sqrt{3}}{\pi} ln\frac{\alpha}{1-\alpha}\Big).$$

بنابراین $k\xi$ یک متغیر نامعین نرمال $\mathcal{LOGN}(e + lnk, \sigma)$ است و حکم قضیه ثابت می‌شود. □

قضیه ۱۰.۶.۲. *فرض کنید ξ_1 و ξ_2 دو متغیر نامعین عملی مستقل باشند. آنگاه مجموع $\xi_1 + \xi_2$ نیز یک متغیر نامعین عملی است. همچنین حاصل ضرب یک متغیر نامعین عملی و یک عدد اسکالر $k > 0$ نیز یک متغیر نامعین عملی است.*

برهان. فرض کنید Φ_1 و Φ_2 به ترتیب توزیع‌های نامعین متغیرهای نامعین عملی ξ_1 و ξ_2 باشند، آنگاه داریم:

$$\Phi_1{}^{-1}(\alpha) = \frac{(\alpha - \alpha_i)(x_{i+1,1} - x_{i,1})}{\alpha_{i+1} - \alpha_i} + x_{i,1},$$

$$\Phi_2^{-1}(\alpha) = \frac{(\alpha-\alpha_i)(x_{i+1,2}-x_{i,2})}{\alpha_{i+1}-\alpha_i} + x_{i,2},$$

طبق قضیه (۲۲.۲) ، توزیع نامعین Ψ مربوط به $\xi_1 + \xi_2$ بصورت زیر است

$$\Psi^{-1}(\alpha) = \Phi_1^{-1}(\alpha) + \Phi_2^{-1}(\alpha)$$
$$= \frac{(\alpha-\alpha_i)\big((x_{i+1,1}+x_{i+1,2})-(x_{i,1}+x_{i,2})\big)}{\alpha_{i+1}-\alpha_i} + (x_{i,1}+x_{i,2}).$$

بنابراین مجموع متغیرهای نامعین عملی نیز متغیری نامعین عملی است. فرض کنید توزیع نامعین متغیر نامعین عملی ξ ، Φ باشد. طبق قضیه (۲.۶.۲)، وقتی $k > 0$ معکوس توزیع نامعین مربوط به $k\xi$ به صورت زیر است

$$\Psi^{-1}(\alpha) = k\Phi^{-1}(\alpha) = \frac{(\alpha-\alpha_i)(kx_{i+1}-kx_i)}{\alpha_{i+1}-\alpha_i} + kx_i.$$

بنابراین $k\xi$ نیز یک متغیر عملی است. □

۷.۲ امید ریاضی متغیر نامعین

امید ریاضی (مقدارمورد انتظار)، مقدار میانگین متغیر نامعین در راستای بدست آوردن اندازه نامعین است و نشان دهنده اندازه متغیر نامعین است. با توجه به متغیر نامعین منظم، لیو امید ریاضی متغیر نامعین را تعریف کرد. در ادامه برای اندازه گیری بازده سرمایه‌گذاری از امید ریاضی استفاده می‌کنیم.

تعریف ۱.۷.۲. فرض کنید ξ یک متغیر نامعین باشد، آنگاه امید ریاضی ξ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{E}[\xi] = \int_0^{+\infty} \mathcal{M}\{\xi \geq x\}\mathrm{dx} - \int_{-\infty}^{0} \mathcal{M}\{\xi \leq x\}\mathrm{dx}. \tag{۳۲.۲}$$

در صورتی که یکی از دو انتگرال متناهی باشد.

قضیه ۲.۷.۲. *فرض کنید ξ یک متغیر نامعین با توزیع نامعین Φ باشد. آنگاه داریم:*

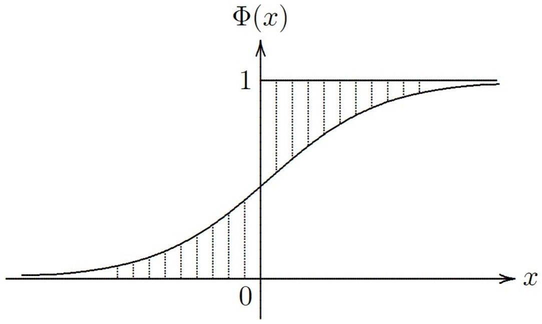
$$\mathrm{E}[\xi] = \int_0^{+\infty} (1-\Phi(x))\mathrm{dx} - \int_{-\infty}^{0} \Phi(x)\mathrm{dx}. \tag{۳۳.۲}$$

برهان. از قضیه وارون سازی اندازه نتیجه می‌شود که تقریبا برای همه xها داریم $\mathcal{M}\{\xi \geq x\} = 1-\Phi(x)$ و $\mathcal{M}\{\xi \leq x\} = \Phi(x)$. با استفاده از عملگر امید ریاضی بدست می‌آوریم:

$$\mathrm{E}[\xi] = \int_0^{+\infty} \mathcal{M}\{\xi \geq x\}\mathrm{dx} - \int_{-\infty}^{0} \mathcal{M}\{\xi \leq x\}\mathrm{dx},$$

$$\mathrm{E}[\xi] = \int_0^{+\infty} (1-\Phi(x))\mathrm{dx} - \int_{-\infty}^{0} \Phi(x)\mathrm{dx}.$$

□



شکل ۱۵.۲: $\mathrm{E}[\xi]=\int_0^{+\infty}(1-\Phi(x))\mathrm{dx}-\int_{-\infty}^0\Phi(x)\mathrm{dx}$

قضیه ۳.۷.۲. *فرض‌کنید ξ یک متغیر نامعین با توزیع نامعین منظم Φ باشد، اگر امید ریاضی موجود باشد آن‌گاه امید ریاضی‌آن در رابطه زیر صدق می‌کند:*

$$\mathrm{E}[\xi]=\int_0^1\Phi^{-1}(\alpha)\mathrm{d}\alpha. \tag{۳۴.۲}$$

برهان. طبق تعریف امید ریاضی و توزیع نامعین داریم:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[\xi]&=\int_0^{+\infty}\mathcal{M}\{\xi\geq x\}\mathrm{dx}-\int_{-\infty}^0\mathcal{M}\{\xi\leq x\}\mathrm{dx}\\&=\int_0^{+\infty}(1-\Phi(x))\mathrm{dx}-\int_{-\infty}^0\Phi(x)\mathrm{dx}\end{aligned}$$

با استفاده از انتگرال جز به جز داریم:

$$\begin{aligned}&=x(1-\Phi(x))\,|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}x\mathrm{d}\Phi(x)-x\Phi(x)\,|_{-\infty}^0+\int_{-\infty}^0x\mathrm{d}\Phi(x)\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}x\mathrm{d}\Phi(x)\xrightarrow[\Phi(x)=\alpha]{x=\Phi^{-1}(\alpha)}=\int_0^1\Phi^{-1}(\alpha)\mathrm{d}\alpha.\end{aligned}$$

□

لم ۴.۷.۲. *فرض‌کنید‌که ξ یک متغیر نامعین خطی $\mathcal{L}(a,b)$ باشد، آن‌گاه مقدار امید ریاضی‌آن برابر است با:*

$$\mathrm{E}[\xi]=\frac{a+b}{2}.$$

برهان.

$$\mathrm{E}[\xi]=\int_0^{+\infty}(1-\Phi(x))\mathrm{dx}-\int_{-\infty}^0\Phi(x)\mathrm{dx}.$$

جواب را درسه حالت مورد بررسی قرار می‌دهیم

اگر $a\geq 0$ امید ریاضی آن برابر است با:

$$\mathrm{E}[\xi]=\Big(\int_0^a 1\mathrm{dx}+\int_a^b\Big(1-\frac{x-a}{b-a}\Big)\mathrm{dx}+\int_b^{+\infty}0\,\mathrm{dx}\Big)-\int_{-\infty}^0 0\,\mathrm{dx}=\frac{a+b}{2}.$$

اگر $b\leq 0$ امید ریاضی ξ برابر است با:

$$\mathrm{E}[\xi]=\Big(\int_0^{+\infty}0\,\mathrm{dx}-\Big(\int_{-\infty}^a 0\,\mathrm{dx}+\int_a^b\frac{x-a}{b-a}\mathrm{dx}+\int_b^0 1\mathrm{dx}\Big)=\frac{a+b}{2}.$$

اگر $a < ۰ < b$ امید ریاضی ξ برابر است با:

$$\mathrm{E}[\xi] = \int_{۰}^{b} \Big(۱ - \frac{x-a}{b-a}\Big)\mathrm{dx} - \int_{a}^{۰} \frac{x-a}{b-a}\mathrm{dx} = \frac{a+b}{۲}.$$

□

لم ۵.۷.۲. *فرض کنید که ξ یک متغیر نامعین زیگزاگ $\mathcal{Z}(a,b,c)$ باشد، آن‌گاه مقدار امید ریاضی آن برابر است با:*

$$\mathrm{E}[\xi] = \frac{a+۲b+c}{۴}.$$

برهان.

$$\mathrm{E}[\xi] = \int_{۰}^{+\infty} (۱-\Phi(x))\mathrm{dx} - \int_{-\infty}^{۰} \Phi(x)\mathrm{dx}.$$

اگر $a \geq ۰$ امید ریاضی آن برابر است با:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[\xi] &= \int_{۰}^{a} (۱-۰)\mathrm{dx} + \int_{a}^{b} \Big(۱ - \frac{x-a}{۲(b-a)}\Big)\mathrm{dx} \\ &+ \int_{b}^{c} \Big(۱ - \frac{x+c-۲b}{۲(c-b)}\Big)\mathrm{dx} + \int_{c}^{+\infty} ۰\,\mathrm{dx} - \int_{-\infty}^{۰} ۰\,\mathrm{dx} \\ &= a + \frac{۳}{۴}(b-a) + \frac{۱}{۴}(c-b) = \frac{a+۲b+c}{۴}.\end{aligned}$$

برای سایر حالت‌های ممکن مشابه مثال قبل به همین جواب می‌رسیم. □

لم ۶.۷.۲. *فرض کنید که ξ یک متغیر نامعین ذوزنقه‌ای باشد، آن‌گاه مقدار امید ریاضی آن برابر است با:*

$$\mathrm{E}[\xi] = \frac{a+b+c+d}{۴}.$$

برهان.

$$\mathrm{E}[\xi] = \int_{۰}^{+\infty} (۱-\Phi(x))\mathrm{dx} - \int_{-\infty}^{۰} \Phi(x)\mathrm{dx}.$$

اگر $a \geq ۰$ امید ریاضی آن برابر است با:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[\xi] &= \int_{۰}^{a} (۱-۰)\mathrm{dx} + \int_{a}^{b} \Big(۱ - \frac{x-a}{۲(b-a)}\Big)\mathrm{dx} \\ &+ \int_{b}^{c} \frac{۱}{۲}\mathrm{dx} + \int_{c}^{d} \Big(۱ - \frac{x+d-۲c}{۲(d-c)}\Big)\mathrm{dx} + \int_{d}^{+\infty} ۰\,\mathrm{dx} - \int_{-\infty}^{۰} ۰\,\mathrm{dx} \\ &= a + \frac{۳}{۴}(b-a) + \frac{۱}{۲}(c-b) + \frac{۱}{۴}(d-c) = \frac{a+b+c+d}{۴}.\end{aligned}$$

برای سایر حالت‌های ممکن مشابه مثال قبل به همین جواب می‌رسیم. □

لم ۷.۷.۲. *فرض کنید که ξ یک متغیر نامعین نرمال $\mathcal{N}(e,\sigma)$ باشد، آن‌گاه مقدار امید ریاضی آن برابر است با:*

$$\mathrm{E}[\xi] = e.$$

برهان.

$$\mathrm{E}[\xi]=\underbrace{\int_{\circ}^{+\infty}\Big(۱-\frac{۱}{۱+e^{\frac{\pi(e-x)}{\sqrt{۳}\sigma}}}\Big)\mathrm{dx}}_{\mathrm{I}}-\underbrace{\int_{-\infty}^{\circ}\frac{۱}{۱+e^{\frac{\pi(e-x)}{\sqrt{۳}\sigma}}}\mathrm{dx}}_{\mathrm{II}}$$

$$I=\int_{\circ}^{+\infty}\frac{e^{\frac{\pi(e-x)}{\sqrt{۳}\sigma}}}{۱+e^{\frac{\pi(e-x)}{\sqrt{۳}\sigma}}}\mathrm{dx}\Longrightarrow\begin{cases}e^{\frac{\pi(e-x)}{\sqrt{۳}\sigma}}=u\\ \frac{-\pi}{\sqrt{۳}\sigma}e^{\frac{\pi(e-x)}{\sqrt{۳}\sigma}}\mathrm{dx}=\mathrm{du}\end{cases}$$

$$=\frac{-\sqrt{۳}\sigma}{\pi}\int_{e^{\frac{\pi e}{\sqrt{۳}\sigma}}}^{\circ}\frac{\mathrm{du}}{۱+u}=(\frac{-\sqrt{۳}\sigma}{\pi}\,ln|۱+u|)|_{e^{\frac{\pi e}{\sqrt{۳}\sigma}}}^{\circ}=\frac{-\sqrt{۳}\sigma}{\pi}ln|\frac{۱}{۱+e^{\frac{\pi e}{\sqrt{۳}\sigma}}}|$$

$$II=\int_{-\infty}^{\circ}\frac{۱}{۱+e^{\frac{\pi(e-x)}{\sqrt{۳}\sigma}}}\mathrm{dx}\Longrightarrow\begin{cases}۱+e^{\frac{\pi(e-x)}{\sqrt{۳}\sigma}}=u\\ \frac{-\pi}{\sqrt{۳}\sigma}e^{\frac{\pi(e-x)}{\sqrt{۳}\sigma}}\mathrm{dx}=\mathrm{du}\Rightarrow\mathrm{dx}=\frac{\mathrm{du}}{\frac{-\pi}{\sqrt{۳}\sigma}e^{\frac{\pi(e-x)}{\sqrt{۳}\sigma}}}\end{cases}$$

$$=\frac{\sqrt{۳}\sigma}{\pi}\int_{۱+e^{\frac{\pi e}{\sqrt{۳}\sigma}}}^{+\infty}\frac{\mathrm{du}}{u(u-۱)}=(\frac{\sqrt{۳}\sigma}{\pi}\,ln|\frac{u-۱}{u}|)\Big|_{۱+e^{\frac{\pi e}{\sqrt{۳}\sigma}}}^{+\infty}=\frac{-\sqrt{۳}\sigma}{\pi}ln|\frac{e^{\frac{\pi e}{\sqrt{۳}\sigma}}}{۱+e^{\frac{\pi e}{\sqrt{۳}\sigma}}}|$$

$$\mathrm{E}[\xi]=\frac{-\sqrt{۳}\sigma}{\pi}ln|\frac{۱}{۱+e^{\frac{\pi e}{\sqrt{۳}\sigma}}}|+\frac{\sqrt{۳}\sigma}{\pi}ln|\frac{e^{\frac{\pi e}{\sqrt{۳}\sigma}}}{۱+e^{\frac{\pi e}{\sqrt{۳}\sigma}}}|=\frac{\sqrt{۳}\sigma}{\pi}ln|e^{\frac{\pi e}{\sqrt{۳}\sigma}}|=e.$$

□

لم ۸.۷.۲. *فرض کنید که ξ یک متغیر نامعین عملی باشد، آن‌گاه مقدار امید ریاضی آن برابر است با:*

$$\mathrm{E}[\xi]=\frac{\alpha_۱+\alpha_۲}{۲}x_۱+\sum_{i=۲}^{n-۱}\frac{\alpha_{i+۱}-\alpha_{i-۱}}{۲}x_i+\Big(۱-\frac{\alpha_{n-۱}+\alpha_n}{۲}\Big)x_n.$$

برهان.

$$\mathrm{E}[\xi]=\int_{\circ}^{+\infty}(۱-\Phi(x))\mathrm{dx}-\int_{-\infty}^{\circ}\Phi(x)\mathrm{dx}.$$

اگر $x_۱\geq\circ$ امید ریاضی آن برابر است با:

$$\mathrm{E}[\xi]=\int_{\circ}^{x_۱}(۱-\circ)\mathrm{dx}+\int_{x_۱}^{x_۲}\Big(۱-\big(\alpha_۱+\frac{(\alpha_۲-\alpha_۱)(x-x_۱)}{x_۲-x_۱}\big)\Big)\mathrm{dx}$$

$$+\int_{x_2}^{x_3}\Big(1-\big(\alpha_2+\frac{(\alpha_3-\alpha_2)(x-x_2)}{x_3-x_2}\big)\Big)\mathrm{dx}+\cdots$$
$$+\int_{x_{n-2}}^{x_{n-1}}\Big(1-\big(\alpha_{n-2}+\frac{(\alpha_{n-1}-\alpha_{n-2})(x-x_{n-2})}{x_{n-1}-x_{n-2}}\big)\Big)\mathrm{dx}$$
$$+\int_{x_{n-1}}^{x_n}\Big(1-\big(\alpha_{n-1}+\frac{(\alpha_n-\alpha_{n-1})(x-x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}\big)\Big)\mathrm{dx}$$

$$=x_1+(x_2-x_1-\alpha_1x_2+\alpha_1x_1-\frac{\alpha_2x_2-\alpha_2x_1-\alpha_1x_2+\alpha_1x_1}{2})$$
$$+x_3-x_2-\alpha_2x_3+\alpha_2x_2-\frac{\alpha_3x_3-\alpha_3x_2-\alpha_2x_3+\alpha_2x_2}{2}+\cdots$$
$$+x_{n-1}-x_{n-2}-\alpha_{n-2}x_{n-1}+\alpha_{n-2}x_{n-2}-\frac{\alpha_{n-1}x_{n-1}-\alpha_{n-1}x_{n-2}-\alpha_{n-2}x_{n-1}+\alpha_{n-2}x_{n-2}}{2}$$
$$+x_n-x_{n-1}-\alpha_{n-1}x_n+\alpha_{n-1}x_{n_1}-\frac{\alpha_nx_n-\alpha_nx_{n-1}-\alpha_{n-1}x_n+\alpha_{n-1}x_{n-1}}{2}$$
$$=\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}x_1+\sum_{i=2}^{n-1}\frac{\alpha_{i+1}-\alpha_{i-1}}{2}x_i+\Big(1-\frac{\alpha_{n-1}+\alpha_n}{2}\Big)x_n.$$

□

قضیه ۹.۷.۲. *فرض کنید ξ_1 و ξ_2 متغیرهای نامعین مستقل با امید ریاضی متناهی باشند، آنگاه برای هر عدد حقیقی a و b داریم:*

$$\mathrm{E}[a\xi_1+b\xi_2]=a\mathrm{E}[\xi_1]+b\mathrm{E}[\xi_2]. \quad (۳۵.۲)$$

برهان. بدون از دست رفتن کلیت مسئله، فرض کنید ξ_1 و ξ_2 به ترتیب دارای توزیع‌های نامعین منظم Φ_1 و Φ_2 باشند، در غیر اینصورت می‌توانیم یک انحراف کوچک به توزیع‌های نامعین بدهیم به طوری که منظم شوند.

گام اول: ابتدا اثبات می‌کنیم که $\mathrm{E}[a\xi]=a\mathrm{E}[\xi]$ اگر $a=0$ آنگاه تساوی رابطه به وضوح برقرار است.
اگر $a>0$ آنگاه توزیع نامعین معکوس $a\xi$ به صورت زیر است

$$\Upsilon^{-1}(\alpha)=a\Phi^{-1}(\alpha).$$

با استفاده از قضیه (۳.۷.۲) داریم

$$\mathrm{E}[a\xi]=\int_0^1 a\Phi^{-1}(\alpha)\mathrm{d}\alpha=a\int_0^1\Phi^{-1}(\alpha)\mathrm{d}\alpha=a\mathrm{E}[\xi].$$

اگر $a<0$ آنگاه توزیع نامعین معکوس $a\xi$ برابر است با

$$\Upsilon^{-1}(\alpha)=a\Phi^{-1}(1-\alpha).$$

با استفاده از قضیه (۳.۷.۲) داریم

$$\mathrm{E}[a\xi]=\int_0^1 a\Phi^{-1}(1-\alpha)\mathrm{d}\alpha=a\int_0^1\Phi^{-1}(\alpha)\mathrm{d}\alpha=a\mathrm{E}[\xi].$$

بنابراین همواره داریم $\mathrm{E}[a\xi] = a\mathrm{E}[\xi]$.
گام دوم: ثابت می‌کنیم که $\mathrm{E}[\xi_۱ + \xi_۲] = \mathrm{E}[\xi_۱] + \mathrm{E}[\xi_۲]$. توزیع نامعین معکوس مجموع $\xi_۱ + \xi_۲$ برابر است با

$$\Upsilon^{-۱}(\alpha) = {\Phi_۱}^{-۱}(\alpha) + {\Phi_۲}^{-۱}(\alpha).$$

با استفاده از قضیه (۳.۷.۲) داریم

$$\mathrm{E}[\xi_۱ + \xi_۲] = \int_۰^۱ \Upsilon^{-۱}(\alpha)\mathrm{d}\alpha = \int_۰^۱ {\Phi_۱}^{-۱}(\alpha)\mathrm{d}\alpha + \int_۰^۱ {\Phi_۲}^{-۱}(\alpha)\mathrm{d}\alpha = \mathrm{E}[\xi_۱] + \mathrm{E}[\xi_۲].$$

گام سوم: در نهایت برای هر عدد حقیقی a وb از گام دوم و سوم داریم

$$\mathrm{E}[a\xi_۱ + b\xi_۲] = \mathrm{E}[a\xi_۱] + \mathrm{E}[b\xi_۲] = a\mathrm{E}[\xi_۱] + b\mathrm{E}[\xi_۲],$$

و قضیه ثابت می‌شود. □

فصل ۳

نیم واریانس هدف و مدل میانگین- نیم واریانس هدف

در سبد سهام چگونگی اندازه‌گیری ریسک یکی از مهمترین مسئله‌هاست. به عقیده رایج، مردم معمولا از واریانس و نیم واریانس برای اندازه‌گیری ریسک سبد سهام استفاده می‌کنند. اما چون واریانس فاصله بین سود و ضرر را نشان نمی‌دهد بلکه برابری نامطلوبی از کران بالایی و پایینی نرخ بهره می‌دهد محدودیت‌هایی ایجاد می‌کند[۲۶]. بنابراین نیم واریانس هدف را برای متغیر نامعین ارائه می‌دهیم.

۱.۳ نیم واریانس هدف

تعریف ۱.۱.۳. فرض کنید ξ یک بازده نامعین از سبد سهام و k بازده پایه مورد قبول سرمایه‌گذار برای سبد سهام باشد، آنگاه نیم واریانس هدف بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{SVk}[\xi] = \mathrm{E}[[(\xi - k)^-]^2], \tag{۱.۳}$$

که در آن E عملگر امید ریاضی برای متغیر نامعین است و

$$(\xi - k)^- = \begin{cases} \xi - k & \text{if} \quad \xi < k, \\ 0 & \text{if} \quad \xi \geq k. \end{cases}$$

.

فرض کنید τ بالاترین سطح ریسک باشد که سرمایه‌گذار می‌پذیرد، آنگاه واضح است که یک سبد سهام قابل اطمینان است اگر

$$\mathrm{SVk}[\xi] \leq \tau. \tag{۲.۳}$$

.

قضیه ۲.۱.۳. *([۲۶])فرض کنید ξ یک بازده اوراق بهادار با توزیع نامعین پیوسته Φ باشد. آن‌گاه نیم واریانس هدف می‌تواند بصورت زیر محاسبه شود:*

$$\mathrm{SVk}[\xi] = \int_{-\infty}^{k} ۲(k-x)\Phi(x)\,\mathrm{dx}. \tag{۳.۳}$$

اثبات: طبق معادله (۳۲.۲) بدست می‌آوریم:

$$\mathrm{SVk}[\xi] = \mathrm{E}[[(\xi-k)^{-}]^{۲}] = \int_{۰}^{+\infty} M\{[(\xi-k)^{-}]^{۲} \geq x\}\mathrm{dx}$$

$$= \int_{۰}^{+\infty} M\{\xi \leq k-\sqrt{x}\}\mathrm{dx} \Rightarrow \begin{cases} k-\sqrt{x}=u \\ \dfrac{۱}{-۲\sqrt{x}}\mathrm{dx}=\mathrm{du} \end{cases}$$

$$= \int_{-\infty}^{k} ۲(k-u)\,\Phi(u)\mathrm{du},$$

و قضیه ثابت می‌شود.

لم ۳.۱.۳. *([۲۶])فرض کنید بازده سبد سهام یک متغیر نامعین خطی $\xi=(a,b)$ باشد، آن‌گاه داریم:*

$$\mathrm{SVk}[\xi] = \frac{(k-a)^{۳}}{۳(b-a)}. \tag{۴.۳}$$

برهان.

$$\mathrm{SVk}[\xi] = \int_{-\infty}^{k} ۲(k-x)\Phi(x)\,\mathrm{dx} = ۲\int_{a}^{k} \frac{(k-x)(x-a)}{b-a}\mathrm{dx} = \frac{(k-a)^{۳}}{۳(b-a)}.$$

□

لم ۴.۱.۳. *فرض کنید بازده سبد سهام یک متغیر نامعین زیگزاگ $\xi=(a,b,c)$ باشد، آن‌گاه داریم:*

$$\mathrm{SVk}[\xi] = \begin{cases} \dfrac{(k-a)^{۳}}{۶(b-a)} & \text{if } a\leq k\leq b, \\ \\ \dfrac{(k-b)^{۲}(k-۴b+۳c)}{۶(c-b)} + \dfrac{(b-a)(۳k-۲b-a)}{۶} & \text{if } b\leq k\leq c. \end{cases} \tag{۵.۳}$$

برهان. اگر $a\leq k\leq b$ طبق معادله (۳.۳) داریم:

$$\mathrm{SVk}[\xi] = \int_{-\infty}^{k} ۲(k-x)\Phi(x)\,\mathrm{dx} = \int_{-\infty}^{a} ۲(k-x)\times ۰\,\mathrm{dx} + \int_{a}^{k} ۲\frac{(k-x)(x-a)}{۲(b-a)}\mathrm{dx}$$

$$= \frac{۱}{۶(b-a)}(k^{۳}-۳k^{۲}a+۳ka^{۲}-a^{۳}) = \frac{(k-a)^{۳}}{۶(b-a)}.$$

اگر $b\leq k\leq c$ داریم:

$$\mathrm{SVk}[\xi] = \int_{-\infty}^{k} ۲(k-x)\Phi(x)\,\mathrm{dx}$$

$$= \int_{-\infty}^{a} ۲(k-x)\times ۰\,\mathrm{dx} + \int_{a}^{b} ۲\frac{(k-x)(x-a)}{۲(b-a)}\mathrm{dx} + \int_{b}^{k} ۲\frac{(k-x)(x+c-۲b)}{۲(c-b)}\mathrm{dx}$$

$$= \frac{۱}{۶(b-a)}(۳kb^۲+۳ab^۲-۶kab-۲b^۳+۳ka^۲-a^۳)$$

$$+\frac{۱}{۶(c-b)}(k^۳+۳k^۲c-۶k^۲b+۹kb^۲+۳b^۲c-۶kbc-۴b^۳)$$

$$= \frac{(b-a)(۳k-۲b-a)}{۶} + \frac{(k-b)^۲(k-۴b+۳c)}{۶(c-b)}.$$

□

لم ۵.۱.۳. *فرض کنید بازده سبد سهام یک متغیر نامعین ذوزنقه‌ای $\xi=(a,b,c,d)$ باشد، آن‌گاه داریم:*

$$\mathrm{SVk}[\xi] = \begin{cases} \dfrac{(k-a)^۳}{۶(b-a)} & \text{if } a\le k\le b, \\[2ex] \dfrac{(b-a)(۳k-۲b-a)+۳(k-b)^۲}{۶} & \text{if } b\le k\le c, \\[2ex] \dfrac{(b-a)(۳k-۲b-a)+۳(b-c)(b-۲k+c)}{۶} & \\ +\dfrac{(k-c)^۲(k-۴c+۳d)}{۶(d-c)} & \text{if } c\le k\le d. \end{cases} \tag{۶.۳}$$

برهان. اگر $a\le k\le b$ طبق معادله (۳.۳) داریم:

$$\mathrm{SVk}[\xi] = \int_{-\infty}^{k} ۲(k-x)\Phi(x)\,\mathrm{dx} = \int_{-\infty}^{a} ۲(k-x)\times ۰\,\mathrm{dx} + \int_{a}^{k} ۲\frac{(k-x)(x-a)}{۲(b-a)}\mathrm{dx}$$

$$= \frac{۱}{۶(b-a)}(k^۳-۳k^۲a+۳ka^۲-a^۳) = \frac{(k-a)^۳}{۶(b-a)}.$$

اگر $b\le k\le c$ داریم:

$$\mathrm{SVk}[\xi] = \int_{-\infty}^{k} ۲(k-x)\Phi(x)\,\mathrm{dx}$$

$$= \int_{-\infty}^{a} ۲(k-x)\times ۰\,\mathrm{dx} + \int_{a}^{b} ۲\frac{(k-x)(x-a)}{۲(b-a)}\mathrm{dx} + \int_{b}^{k} ۲(k-x)\times\frac{۱}{۲}\mathrm{dx}$$

$$= \frac{۱}{۶(b-a)}(۳kb^۲+۳ab^۲-۶kab-۲b^۳+۳ka^۲-a^۳) + \frac{k^۲-۲kb+b^۲}{۲}$$

$$= \frac{(b-a)(۳k-۲b-a)}{۶} + \frac{۳(k-b)^۲}{۶} = \frac{(b-a)(۳k-۲b-a)+۳(k-b)^۲}{۶}.$$

اگر $c \leq k \leq d$ داریم:

$$\mathrm{SVk}[\xi] = \int_{-\infty}^{k} ۲(k-x)\Phi(x)\,\mathrm{dx}$$

$$= \int_{-\infty}^{a} ۲(k-x) \times ۰\,\mathrm{dx} + \int_{a}^{b} ۲\frac{(k-x)(x-a)}{۲(b-a)}\mathrm{dx} + \int_{b}^{c} ۲(k-x) \times \frac{۱}{۲}\mathrm{dx}$$
$$+ \int_{c}^{k} \frac{۲(k-x)(x+d-۲c)}{۲(d-c)}\mathrm{dx}$$

$$= \frac{۱}{۶(b-a)}(۳kb^{۲} + ۳ab^{۲} - ۶kab - ۲b^{۳} + ۳ka^{۲} - a^{۳}) + \frac{۲kc - c^{۲} - ۲kb + b^{۲}}{۲}$$
$$+ \frac{۱}{۶(d-c)}(k^{۳} + ۳k^{۲}d - ۶k^{۲}c + ۹kc^{۲} + ۳c^{۲}d - ۶kcd - ۴c^{۳})$$
$$= \frac{(b-a)(۳k-۲b-a) + ۳(b-c)(b-۲k+c)}{۶} + \frac{(k-c)^{۲}(k-۴c+۳d)}{۶(d-c)}.$$

□

لم ۶.۱.۳. *فرض کنید بازده سبد سهام یک متغیر نامعین عملی باشد، طبق معادله (۳.۳) داریم:*

$$\mathrm{SVk}[\xi] = \frac{(k-x_i)^{۲}[(\alpha_{i+۱} - \alpha_i)(k-x_i) + ۳\alpha_i(x_{i+۱} - x_i)]}{۳(x_{i+۱} - x_i)}. \qquad (۷.۳)$$

برهان. اگر $x_i \leq k \leq x_{i+۱}$ داریم:

$$\mathrm{SVk}[\xi] = \int_{-\infty}^{k} ۲(k-x)\Phi(x)\,\mathrm{dx}$$

$$= \int_{-\infty}^{x_i} ۲(k-x) \times ۰\,\mathrm{dx} + \int_{x_i}^{k} ۲(k-x)(\alpha_i + \frac{(\alpha_{i+۱} - \alpha_i)(x-x_i)}{x_{i+۱} - x_i})\mathrm{dx}$$

$$= \int_{x_i}^{k} ۲(k-x)\alpha_i\mathrm{dx} + \int_{x_i}^{k} \frac{۲(k-x)(\alpha_{i+۱} - \alpha_i)(x-x_i)}{x_{i+۱} - x_i}\mathrm{dx}$$

$$= ۲\alpha_i(k^{۲} - \frac{k^{۲}}{۲} - kx_i + \frac{{x_i}^{۲}}{۲}) + \frac{k^{۳} - ۳k^{۲}x_i + ۳k{x_i}^{۲} - {x_i}^{۳}}{۶}$$

$$= \alpha_i(k-x_i)^{۲} + \frac{(k-x_i)^{۳}(\alpha_{i+۱} - \alpha_i)}{۳(x_{i+۱} - x_i)}$$

$$= \frac{(k-x_i)^{۲}[(\alpha_{i+۱} - \alpha_i)(k-x_i) + ۳\alpha_i(x_{i+۱} - x_i)]}{۳(x_{i+۱} - x_i)}.$$

□

از معادله (۱.۳) می‌فهمیم که نیم واریانس هدف شبیه واریانس و نیم واریانس است. نیم واریانس هدف اغلب اندازه درجه دوم ریسک است. به هر حال تجربه نشان می‌دهد که سبد سهام بهینه فراهم شده با مدل میانگین واریانس یا میانگین- نیم واریانس اغلب متمرکز بر مقدار کمی اطمینان است، برای اجتناب از این وضعیت محدودیت آنتروپی را برای تنوع بخشیدن به سبد سهام اضافه می‌کنیم.

۲.۳ آنتروپی شانون

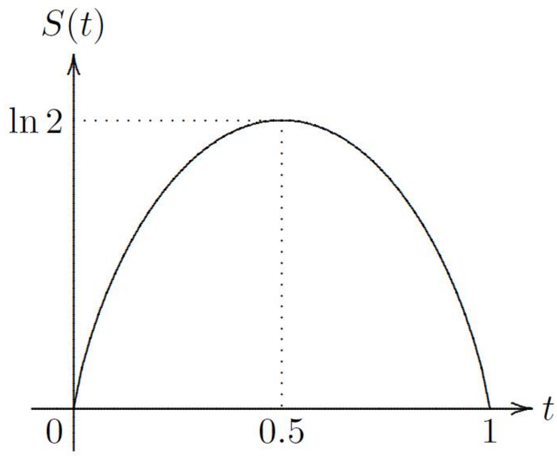
در مواردی که نیاز به شناسائی وزن شاخص‌ها وجود داشته باشد می‌توان از روش‌هاي متفاوتی استفاده کرد که یکی از مهمترین روش‌ها آنتروپی شانون می‌باشد. این روش را برای اولین بار شانون[۲۴] ارائه نمود. آنتروپی یک مفهوم عمده در علوم فیزیکی، اجتماعی و تئوري اطلاعات است. اگرچه مفهوم آنتروپی از ترمودینامیک آغازشده است، مفاهیم و اصول مربوطه، بویژه مفاهیم ماکزیمم آنتروپی و می‌نیمم عدم آنتروپی، به طور وسیع در مالی به کار برده می‌شود.
در نظریه اطلاعات، سیستم توسط یک فرستنده، کانال و گیرنده مدل شده است. فرستنده پیام‌هایی را که از طریق کانال فرستاده می‌شود ایجاد می‌کند. کانال پیام را به شیوه‌هایی تغییر می‌دهد. گیرنده سعی می‌کند به مفهوم پیام ارسال شده پی ببرد. در این زمینه، آنتروپی مقدار مورد انتظار اطلاعات موجود در هر پیام است و معادل عدم اطمینان یک سیستم است. هرچه عدم اطمینان (آنتروپی) بیشتر باشد، دامنه اطلاعات نیز بیشتر خواهد بود. وقتی موقعیتی بطور کامل قابل پیش‌بینی است، هیچ اطلاعاتی وجود ندارد. اطلاعات، معیار آزادی انتخاب در گزینش پیام است. هرقدر آزادی انتخاب بیشتری باشد، میزان عدم اطمینان (آنتروپی) درباره‌ی ویژگی پیام انتخاب شده، بیشتر می‌شود. پس آزادی بیشتر در انتخاب، عدم اطمینان بیشتر و اطلاعات بیشتر، به هم وابسته هستند. کاربرد آنتروپی در مالی می‌تواند به عنوان توسیعی از آنتروپی اطلاعات و آنتروپی احتمال در نظر گرفته شود که ابزار مهمی در انتخاب سبد سهام و قیمت‌گذاری دارایی می‌باشد و معیار جدیدی برای اندازه‌گیری ریسک سرمایه‌گذاری در نظر گرفته می‌شود. در واقع آنتروپی نشان دهنده درجه عدم اطمینان پیش بینی مقادیر تعیین شده متغیرهای نامعین است. از این رو با اندازه‌گیری آنتروپی، می‌توان میزان عدم اطمینان ناشی از تغییرات گزارش‌های مالی را تعیین نمود. در نهایت آنتروپی محاسبه شده به عنوان ریسک سرمایه‌گذاری در نظر گرفته می‌شود.

تعریف ۱.۲.۳. فرض کنید x_i مبلغ سرمایه‌گذاری مناسب در اوراق بهادار i ام و ξ_i بازدهی نامعین به ترتیب برای i امین اوراق بهادار باشد که $i = ۱, ۲, \cdots, n$، آنتروپی شانون به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\mathrm{H} = -\sum_{i=۱}^{n} x_i \ ln \, x_i, \qquad (۸.۳)$$

که در آن $\sum_{i=۱}^{n} x_i = ۱$ و $x_i \geq ۰$.

لیو در فضای نامعین برای تعیین عدم اطمینان متغیرهای نامعین تعریف دیگری از آنتروپی اراثه داد.



شکل ۱.۳: تابع $\mathrm{S}(t) = -tlnt - (۱-t)ln(۱-t)$

تعریف ۲.۲.۳. ([۱۸]) فرض کنید که ξ یک متغیر نامعین با توزیع نامعین Φ باشد. آن‌گاه آنتروپی در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$\mathrm{H}[\xi] = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{S}(\Phi(x))\mathrm{dx}. \qquad (۹.۳)$$

که در آن $\mathrm{S}(t) = -tlnt - (۱-t)ln(۱-t)$.

تابع $\mathrm{S}(t)$ در اطراف $t = ۰/۵$ تابعی متقارن است، روی بازه $[۰, ۰/۵]$ اکیدا صعودی و روی بازه $[۰/۵, ۱]$ اکیدا نزولی است و تنها نقطه ماکزیمم آن $ln۲$ است که در $t = ۰/۵$ بدست می‌آید. شکل ۱۰۳ تابع $\mathrm{S}(t)$ را به ازای مقادیر مختلف نشان می‌دهد.

لم ۳.۲.۳. *([۱۹])فرض کنید ξ یک متغیر نامعین خطی $\mathcal{L}(a,b)$ باشد. آن‌گاه آنتروپی آن برابر است با*

$$\mathrm{H}[\xi] = \frac{b-a}{۲}. \qquad (۱۰.۳)$$

برهان.

$$\mathrm{H}[\xi] = -\int_a^b \left(\frac{x-a}{b-a}ln\frac{x-a}{b-a} + \frac{b-x}{b-a}ln\frac{b-x}{b-a}\right)\mathrm{dx} = \frac{b-a}{۲}.$$

□

لم ۴.۲.۳. *فرض کنید ξ یک متغیر نامعین زیگزاگ $\mathcal{Z}(a,b,c)$ باشد. آن‌گاه آنتروپی آن برابر است با*

$$\mathrm{H}[\xi] = \frac{c-a}{۲}. \qquad (۱۱.۳)$$

برهان.

$$\begin{aligned}\mathrm{H}[\xi] &= -\int_a^c \Big(\Phi(x)ln(\Phi(x)) + (۱-\Phi(x))ln(۱-\Phi(x))\Big)\mathrm{dx} \\ &= -\int_a^b \Big(\Phi(x)ln(\Phi(x)) + (۱-\Phi(x))ln(۱-\Phi(x))\Big)\mathrm{dx}\end{aligned}$$

$$-\int_b^c \Big(\Phi(x)ln(\Phi(x)) + (۱-\Phi(x))ln(۱-\Phi(x))\Big)\mathrm{dx}$$

$$= -\int_a^b \Big(\frac{x-a}{۲(b-a)}ln(\frac{x-a}{۲(b-a)}) + (۱-\frac{x-a}{۲(b-a)})ln(۱-\frac{x-a}{۲(b-a)})\Big)\mathrm{dx}$$
$$-\int_b^c \Big(\frac{x+c-۲b}{۲(c-b)}ln(\frac{x+c-۲b}{۲(c-b)}) + (۱-\frac{x+c-۲b}{۲(c-b)})ln(۱-\frac{x+c-۲b}{۲(c-b)})\Big)\mathrm{dx}$$

$$= -\frac{b-a}{۲} - \frac{۲(c-b)}{۴} = \frac{c-a}{۲}.$$

□

لم ۵.۲.۳. *فرض کنید ξ یک متغیر نامعین ذوزنقه‌ای باشد. آن‌گاه آنتروپی آن برابر است با*

$$\mathrm{H}[\xi] = \frac{a+۰/۴b-۰/۴c-d}{۲}. \tag{۱۲.۳}$$

برهان.

$$\mathrm{H}[\xi] = -\int_a^d \Big(\Phi(x)ln(\Phi(x)) + (۱-\Phi(x))ln(۱-\Phi(x))\Big)\mathrm{dx}$$
$$= -\int_a^b \Big(\Phi(x)ln(\Phi(x)) + (۱-\Phi(x))ln(۱-\Phi(x))\Big)\mathrm{dx}$$
$$-\int_b^c \Big(\Phi(x)ln(\Phi(x)) + (۱-\Phi(x))ln(۱-\Phi(x))\Big)\mathrm{dx}$$
$$-\int_c^d \Big(\Phi(x)ln(\Phi(x)) + (۱-\Phi(x))ln(۱-\Phi(x))\Big)\mathrm{dx}$$
$$= -\int_a^b \Big(\frac{x-a}{۲(b-a)}ln(\frac{x-a}{۲(b-a)}) + (۱-\frac{x-a}{۲(b-a)})ln(۱-\frac{x-a}{۲(b-a)})\Big)\mathrm{dx}$$
$$-\int_b^c \frac{۱}{۲}ln(\frac{۱}{۲}) + \frac{۱}{۲}ln(\frac{۱}{۲})$$
$$-\int_c^d \Big(\frac{x+d-۲c}{۲(d-c)}ln(\frac{x+d-۲c}{۲(d-c)}) + (۱-\frac{x+d-۲c}{۲(d-c)})ln(۱-\frac{x+d-۲c}{۲(d-c)})\Big)\mathrm{dx}$$

$$= -\frac{b-a}{۲} - ۰/۷(c-b) - \frac{d-c}{۲} = \frac{a+۰/۴b-۰/۴c-d}{۲}.$$

□

قضیه ۶.۲.۳. *فرض کنید ξ یک متغیر نامعین و c یک عدد حقیقی باشد، آن‌گاه*

$$\mathrm{H}[\xi+c] = \mathrm{H}[\xi]. \tag{۱۳.۳}$$

برهان. فرض کنید Φ توزیع نامعین ξ باشد. آنگاه متغیر نامعین $\xi + c$ دارای توزیع نامعین $\Phi(x-c)$ است. از تعریف آنتروپی نتیجه می‌شود که

$$\mathrm{H}[\xi + c] = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{S}(\Phi(x-c))\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{S}(\Phi(x))\mathrm{d}x = \mathrm{H}[\xi].$$

□

قضیه ۷.۲.۳. *([۳]) فرض کنید ξ یک متغیر نامعین با توزیع نامعین منظم Φ باشد. آنگاه*

$$\mathrm{H}[\xi] = \int_{0}^{1} \Phi^{-1}(\alpha) ln\frac{\alpha}{1-\alpha}\mathrm{d}\alpha. \tag{۱۴.۳}$$

برهان. روشن است که $\mathrm{S}(\alpha)$ یک تابع مشتق پذیر است که مشتق آن بصورت زیر است

$$\mathrm{S}'(\alpha) = -ln\frac{\alpha}{1-\alpha}.$$

چون

$$\mathrm{S}(\Phi(x)) = \int_{0}^{\Phi(x)} \mathrm{S}'(\alpha)\mathrm{d}\alpha = -\int_{\Phi(x)}^{1} \mathrm{S}'(\alpha)\mathrm{d}\alpha,$$

داریم

$$\mathrm{H}[\xi] = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{S}(\Phi(x))\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0}\int_{0}^{\Phi(x)} \mathrm{S}'(\alpha)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}x - \int_{0}^{+\infty}\int_{\Phi(x)}^{1} \mathrm{S}'(\alpha)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}x.$$

از قضیه فوبینی نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned}\mathrm{H}[\xi] &= \int_{0}^{\Phi(0)}\int_{\Phi^{-1}(\alpha)}^{0} \mathrm{S}'(\alpha)\mathrm{d}x\mathrm{d}\alpha - \int_{\Phi(0)}^{1}\int_{0}^{\Phi^{-1}(\alpha)} \mathrm{S}'(\alpha)\mathrm{d}x\mathrm{d}\alpha \\ &= -\int_{0}^{\Phi(0)} \Phi^{-1}(\alpha)\mathrm{S}'(\alpha)\mathrm{d}\alpha - \int_{\Phi(0)}^{1} \Phi^{-1}(\alpha)\mathrm{S}'(\alpha)\mathrm{d}\alpha \\ &= -\int_{0}^{1} \Phi^{-1}(\alpha)\mathrm{S}'(\alpha)\mathrm{d}\alpha = \int_{0}^{1} \Phi^{-1}(\alpha) ln\frac{\alpha}{1-\alpha}\mathrm{d}\alpha.\end{aligned}$$

قضیه تمام است. □

قضیه ۸.۲.۳. *([۳]) فرض کنید ξ و η متغیرهای نامعین مستقل باشند. آنگاه برای هر عدد حقیقی a و b داریم*

$$\mathrm{H}[a\xi + b\eta] = |a|\mathrm{H}[\xi] + |b|\mathrm{H}[\eta]. \tag{۱۵.۳}$$

برهان. بدون ازدست رفتن کلیت مسئله، فرض کنید ξ و η به ترتیب دارای توزیع‌های نامعین منظم Φ و Ψ باشند. در غیر اینصورت می‌توان با دادن انحراف کوچکی در توزیع‌های نامعین، آن‌ها را منظم کرد.
گام ۱: ثابت می‌کنیم $\mathrm{H}[a\xi] = |a|\mathrm{H}[\xi]$. اگر $a > 0$ آنگاه معکوس توزیع نامعین $a\xi$ برابر است با

$$\Upsilon^{-1}(\alpha) = a\Phi^{-1}(\alpha).$$

با استفاده از قضیه (۷.۲.۳) داریم

$$\mathrm{H}[a\xi] = \int_{0}^{1} a\Phi^{-1}(\alpha) ln\frac{\alpha}{1-\alpha}\mathrm{d}\alpha = a\int_{0}^{1} \Phi^{-1}(\alpha) ln\frac{\alpha}{1-\alpha}\mathrm{d}\alpha = |a|\mathrm{H}[\xi].$$

اگر $a = ۰$ آن‌گاه مستقیما داریم $\mathrm{H}[a\xi] = ۰ = |a|\mathrm{H}[\xi]$. اگر $a < ۰$، آن‌گاه معکوس توزیع نامعین $a\xi$ برابر است با

$$\Upsilon^{-۱}(\alpha) = a\Phi^{-۱}(۱-\alpha).$$

با استفاده از قضیه (۷.۲.۳) داریم

$$\mathrm{H}[a\xi] = \int_۰^۱ a\Phi^{-۱}(۱-\alpha) ln\frac{\alpha}{۱-\alpha}\mathrm{d}\alpha = (-a)\int_۰^۱ \Phi^{-۱}(\alpha) ln\frac{\alpha}{۱-\alpha}\mathrm{d}\alpha = |a|\mathrm{H}[\xi].$$

بنابراین همیشه داریم $\mathrm{H}[a\xi] = |a|\mathrm{H}[\xi]$.

گام ۲: ثابت می‌کنیم که $\mathrm{H}[\xi+\eta] = \mathrm{H}[\xi] + \mathrm{H}[\eta]$. توجه کنید که معکوس توزیع نامعین $\xi+\eta$ برابر است با

$$\Upsilon^{-۱}(\alpha) = \Phi^{-۱}(\alpha) + \Psi^{-۱}(\alpha).$$

با استفاده از قضیه (۷.۲.۳) داریم

$$\mathrm{H}[\xi+\eta] = \int_۰^۱ (\Phi^{-۱}(\alpha) + \Psi^{-۱}(\alpha)) ln\frac{\alpha}{۱-\alpha}\mathrm{d}\alpha = \mathrm{H}[\xi] + \mathrm{H}[\eta].$$

گام ۳: در نهایت برای هر عدد حقیقی a و b، از گام ۱ و ۲ داریم

$$\mathrm{H}[a\xi + b\eta] = \mathrm{H}[a\xi] + \mathrm{H}[b\eta] = |a|\mathrm{H}[\xi] + |b|\mathrm{H}[\eta],$$

و قضیه ثابت می‌شود.

□

۳.۳ مدل پیشنهادی میانگین-نیم واریانس هدف

وقتی بالاترین سطح ریسک و پایین‌ترین سطح آنتروپی داده‌شود سرمایه‌گذاران به استفاده از بازدهی بالای یک سبد سهام علاقه نشان می‌دهند، با استفاده از این اطلاعات مدل میانگین -نیم واریانس هدف را به صورت زیر تشکیل می‌دهیم:

$$\mathrm{Max} \quad \mathrm{E}[x_۱\xi_۱ + x_۲\xi_۲ + \cdots + x_n\xi_n], \tag{۱۶.۳}$$

$$\mathrm{s.t}: \begin{cases} \mathrm{SVk}[x_۱\xi_۱ + x_۲\xi_۲ + \cdots + x_n\xi_n] \le r, \\ \mathrm{H}[\xi] \ge \beta, \\ x_۱ + x_۲ + \cdots + x_n = ۱, \\ x_i \ge ۰ \quad i = ۱, ۲, \ldots, n. \end{cases} \tag{۱۷.۳}$$

بطوری که τ و β سطوح اطمینان از قبل مشخص شده توسط سرمایه‌گذار هستند.

توجه ۱.۳.۳. فرض کنید بازدهی‌های اوراق بهادار ξ_i متغیر نامعین باشند که $i = ۱, ۲, \cdots, n$، آن‌گاه با استفاده از تعریف نیم واریانس هدف اولین محدودیت بالا می‌تواند بصورت زیر نوشته شود:

$$\mathrm{E}[(((x_۱\xi_۱ + x_۲\xi_۲ + \cdots + x_n\xi_n) - k)^-)^۲] \le \tau. \tag{۱۸.۳}$$

۴.۳ فرم‌های قطعی مدل پیشنهادی

قضیه ۱.۴.۳. *فرض کنید بازده‌های اوراق بهادار متغیرهای نامعین خطی مستقل از هم بصورت* $\xi_i \sim L(a_i, b_i)\ (i = ۱, ۲, , n)$ *باشد. آن‌گاه رابطه‌های (۱۶.۳) و (۱۷.۳) می‌توانند به رابطه‌های قطعی زیر تبدیل شوند:*

$$\text{Max} \quad \sum_{i=۱}^{n} (a_i + b_i)\, x_i, \tag{۱۹.۳}$$

$$s.t: \begin{cases} \text{SVk}[\xi] \leq \tau, \\ \sum\limits_{i=۱}^{n} (b_i - a_i)x_i \geq ۲\beta, \\ x_۱ + x_۲ + \cdots + x_n = ۱, \\ x_i \geq ۰ \quad i = ۱, ۲, \ldots, n. \end{cases} \tag{۲۰.۳}$$

برهان. وقتی $\xi_i = (a_i, b_i)\ (i = ۱, ۲, , n)$ همه متغیرهای نامعین خطی و مستقل باشند بازده کلی سبد سهام برابر است با $\xi = \sum\limits_{i=۱}^{n} x_i\xi_i = (\sum\limits_{i=۱}^{n} a_ix_i, \sum\limits_{i=۱}^{n} b_ix_i)$ که این نیز طبق قضیه (۵.۶.۲) یک متغیر نامعین خطی است. طبق لم‌های (۴.۷.۲) و (۳.۱.۳) و (۳.۲.۳) داریم $\text{E}[\xi] = \frac{\sum\limits_{i=۱}^{n}(a_i + b_i)x_i}{۲}$، $\text{SVk}[\xi] = \frac{\left(k - \sum\limits_{i=۱}^{n} a_ix_i\right)^۳}{۳\left(\sum\limits_{i=۱}^{n}(b_i - a_i)x_i\right)}$، $\text{H}[\xi] = \frac{\sum\limits_{i=۱}^{n}(b_i - a_i)x_i}{۲}$ و اثبات کامل است. □

قضیه ۲.۴.۳. *فرض کنید بازده‌های اوراق بهادار متغیرهای نامعین زیگزاگ مستقل از هم بصورت* $\xi_i \sim Z(a_i, b_i, c_i)\ (i = ۱, ۲, \ldots, n)$ *باشد. آن‌گاه رابطه‌های (۱۶.۳) و (۱۷.۳) می‌توانند به رابطه‌های قطعی زیر تبدیل شوند:*

$$\text{Max} \quad \sum_{i=۱}^{n} (a_i + ۲b_i + c_i)\, x_i, \tag{۲۱.۳}$$

$$s.t: \begin{cases} \text{SVk}[\xi] \leq \tau, \\ \sum\limits_{i=۱}^{n} (c_i - a_i)x_i \geq ۲\beta, \\ x_۱ + x_۲ + \cdots + x_n = ۱, \\ x_i \geq ۰ \quad i = ۱, ۲, \ldots, n, \end{cases} \tag{۲۲.۳}$$

که در آن

$$\mathrm{SVk}[\xi]=\begin{cases}\dfrac{(k-\sum_{i=1}^{n}a_ix_i)^3}{6(\sum_{i=1}^{n}b_ix_i-\sum_{i=1}^{n}a_ix_i)} & \text{if } \sum_{i=1}^{n}a_ix_i\le k\le\sum_{i=1}^{n}b_ix_i,\\[2ex] \dfrac{(k-\sum_{i=1}^{n}b_ix_i)^2(k-4\sum_{i=1}^{n}b_ix_i+3\sum_{i=1}^{n}c_ix_i)}{6(\sum_{i=1}^{n}c_ix_i-\sum_{i=1}^{n}b_ix_i)}+ & \\ \dfrac{(\sum_{i=1}^{n}b_ix_i-\sum_{i=1}^{n}a_ix_i)(3k-2\sum_{i=1}^{n}b_ix_i-\sum_{i=1}^{n}a_ix_i)}{6} & \text{if } \sum_{i=1}^{n}b_ix_i\le k\le\sum_{i=1}^{n}c_ix_i.\end{cases}$$

برهان. وقتی $(i=1,2,\ldots,n)$ $\xi_i=(a_i,b_i,c_i)$ همه متغیرهای نامعین زیگزاگ و مستقل باشند بازدهی کلی سبد سهام برابر است با $\xi=\sum_{i=1}^{n}x_i\xi_i=(\sum_{i=1}^{n}a_ix_i,\sum_{i=1}^{n}b_ix_i,\sum_{i=1}^{n}c_ix_i)$ که طبق قضیه (۶.۶.۲) این نیز یک متغیر نامعین زیگزاگ است. طبق لم‌های (۵.۷.۲)، (۴.۱.۳) و (۴.۲.۳) بدست می‌آوریم $\mathrm{E}[\xi]=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(a_i+2b_i+c_i)x_i}{4}$ و

$$\mathrm{SVk}[\xi]=\begin{cases}\dfrac{(k-\sum_{i=1}^{n}a_ix_i)^3}{6(\sum_{i=1}^{n}b_ix_i-\sum_{i=1}^{n}a_ix_i)} & \text{if } \sum_{i=1}^{n}a_ix_i\le k\le\sum_{i=1}^{n}b_ix_i,\\[2ex] \dfrac{(k-\sum_{i=1}^{n}b_ix_i)^2(k-4\sum_{i=1}^{n}b_ix_i+3\sum_{i=1}^{n}c_ix_i)}{6(\sum_{i=1}^{n}c_ix_i-\sum_{i=1}^{n}b_ix_i)}+ & \\ \dfrac{(\sum_{i=1}^{n}b_ix_i-\sum_{i=1}^{n}a_ix_i)(3k-2\sum_{i=1}^{n}b_ix_i-\sum_{i=1}^{n}a_ix_i)}{6} & \text{if } \sum_{i=1}^{n}b_ix_i\le k\le\sum_{i=1}^{n}c_ix_i,\end{cases}$$

$\mathrm{H}[\xi]=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(c_i-a_i)x_i}{2}$ و اثبات کامل است. □

قضیه ۳.۴.۳. *فرض کنید بازده‌های اوراق بهادار متغیرهای نامعین ذوزنقه‌ای مستقل از هم باشد. آن‌گاه رابطه‌های (۱۶.۳) و (۱۷.۳) می‌توانند به رابطه‌های قطعی زیر تبدیل شوند:*

$$\mathrm{Max}\ \sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i+c_i+d_i)\,x_i, \tag{۲۳.۳}$$

$$s.t: \begin{cases} \mathrm{SVk}[\xi] \le \tau, \\ \sum_{i=1}^{n}(a_i + 0/4b_i - 0/4c_i - d_i)x_i \ge 2\beta, \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1, \\ x_i \ge 0 \quad i = 1, 2, \ldots, n, \end{cases} \tag{۲۴.۳}$$

که در آن

$$\mathrm{SVk}[\xi] = \begin{cases} \dfrac{(k - \sum_{i=1}^{n} a_i x_i)^3}{6(\sum_{i=1}^{n} b_i x_i - \sum_{i=1}^{n} a_i x_i)} & \text{if } \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \le k \le \sum_{i=1}^{n} b_i x_i, \\[2ex] \dfrac{(\sum_{i=1}^{n} b_i x_i - \sum_{i=1}^{n} a_i x_i)(3k - 2\sum_{i=1}^{n} b_i x_i - \sum_{i=1}^{n} a_i x_i)}{6} \\ + \dfrac{(k - \sum_{i=1}^{n} b_i x_i)^2}{2} & \text{if } \sum_{i=1}^{n} b_i x_i \le k \le \sum_{i=1}^{n} c_i x_i, \\[2ex] \dfrac{(\sum_{i=1}^{n} b x_i - \sum_{i=1}^{n} a x_i)(3k - 2\sum_{i=1}^{n} b x_i - \sum_{i=1}^{n} a x_i)}{6} \\ + \dfrac{(\sum_{i=1}^{n} b_i x_i - \sum_{i=1}^{n} c_i x_i)(\sum_{i=1}^{n} b_i x_i - 2k + \sum_{i=1}^{n} c_i x_i)}{2} \\ + \dfrac{(k - \sum_{i=1}^{n} c_i x_i)^2 (k - 4\sum_{i=1}^{n} c_i x_i + 3\sum_{i=1}^{n} d_i x_i)}{6(\sum_{i=1}^{n} d_i x_i - \sum_{i=1}^{n} c_i x_i)} & \text{if } \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \le k \le \sum_{i=1}^{n} d_i x_i. \end{cases}$$

برهان. وقتی $\xi_i = (a_i, b_i, c_i, d_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ همه متغیرهای نامعین ذوزنقه‌ای و مستقل باشند بازده کلی سبد سهام برابر است با $\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i \xi_i = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i, \sum_{i=1}^{n} b_i x_i, \sum_{i=1}^{n} c_i x_i, \sum_{i=1}^{n} d_i x_i\right)$ که طبق قضیه (۷.۶.۲) این نیز یک متغیر نامعین ذوزنقه‌ای است. طبق لم‌های (۶.۷.۲) ، (۵.۱.۳) و

(۵.۲.۳) بدست می‌آوریم $\mathrm{E}[\xi]=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i+c_i+d_i)x_i}{4}$ و

$$\mathrm{SVk}[\xi]=\begin{cases}\dfrac{(k-\sum_{i=1}^{n}a_ix_i)^3}{6(\sum_{i=1}^{n}b_ix_i-\sum_{i=1}^{n}a_ix_i)} & \text{if } \sum_{i=1}^{n}a_ix_i\le k\le\sum_{i=1}^{n}b_ix_i,\\[2ex] \dfrac{(\sum_{i=1}^{n}b_ix_i-\sum_{i=1}^{n}a_ix_i)(3k-2\sum_{i=1}^{n}b_ix_i-\sum_{i=1}^{n}a_ix_i)}{6} & \\ +\dfrac{(k-\sum_{i=1}^{n}b_ix_i)^2}{2} & \text{if } \sum_{i=1}^{n}b_ix_i\le k\le\sum_{i=1}^{n}c_ix_i,\\[2ex] \dfrac{(\sum_{i=1}^{n}bx_i-\sum_{i=1}^{n}ax_i)(3k-2\sum_{i=1}^{n}bx_i-\sum_{i=1}^{n}ax_i)}{6} & \\ +\dfrac{(\sum_{i=1}^{n}b_ix_i-\sum_{i=1}^{n}c_ix_i)(\sum_{i=1}^{n}b_ix_i-2k+\sum_{i=1}^{n}c_ix_i)}{2} & \\ +\dfrac{(k-\sum_{i=1}^{n}c_ix_i)^2(k-4\sum_{i=1}^{n}c_ix_i+3\sum_{i=1}^{n}d_ix_i)}{6(\sum_{i=1}^{n}d_ix_i-\sum_{i=1}^{n}c_ix_i)} & \text{if } \sum_{i=1}^{n}c_ix_i\le k\le\sum_{i=1}^{n}d_ix_i,\end{cases}$$

و $\mathrm{H}[\xi]=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(a_i+0/4b_i-0/4c_i-d_i)x_i}{2}$ و اثبات کامل است. □

قضیه ۴.۴.۳. *فرض کنید بازده‌های اوراق بهادار متغیرهای نامعین عملی مستقل از هم ξ_j باشد ($j=1,2,\dots,n$) . آنگاه رابطه‌های (۱۶.۳) و (۱۷.۳) می‌توانند به رابطه‌های قطعی زیر تبدیل شوند:*

$$\text{Max}\quad\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}x_1j+\sum_{i=2}^{n-1}\frac{\alpha_{i+1}-\alpha_{i-1}}{2}x_ij+\frac{2-\alpha_{n-1}+\alpha_n}{2}x_nj\right)x_j,\qquad(۲۵.۳)$$

$$s.t:\begin{cases}\mathrm{SVk}[\xi]\le\tau,\\ -x_1\ln x_1-x_2\ln x_2-\cdots-x_n\ln x_n\ge\beta,\\ x_1+x_2+\cdots+x_n=1,\\ x_j\ge 0\quad j=1,2,\dots,n,\end{cases}\qquad(۲۶.۳)$$

که در آن

$$\mathrm{SVk}[\xi]=\frac{(k-\sum\limits_{j=1}^{n}x_ijx_j)^2[(\alpha_{i+1}-\alpha_i)(k-\sum\limits_{j=1}^{n}x_ijx_j)+3\alpha_i(\sum\limits_{j=1}^{n}x_{i+1}jx_j-\sum\limits_{j=1}^{n}x_ijx_j)]}{3(\sum\limits_{j=1}^{n}x_{i+1}jx_j-\sum\limits_{j=1}^{n}x_ijx_j)}.$$

برهان. وقتی $(i=1,2,\ldots,n,\ j=1,2,\ldots,n)$ $\xi_j=x_{i,j}$ همه متغیرهای نامعین عملی و مستقل باشند بازده کلی سبد سهام برابر است با $\xi=\sum\limits_{j=1}^{n}x_j\xi_j=\sum\limits_{i,j=1}^{n}x_{i,j}x_j$ که طبق قضیه (۱۰.۶.۲) این نیز یک متغیر نامعین عملی است. طبق لم‌های (۸.۷.۲) و (۶.۱.۳) بدست می‌آوریم

$$\mathrm{E}[\xi]=\sum_{j=1}^{n}\Big(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}x_1j+\sum_{i=2}^{n-1}\frac{\alpha_{i+1}-\alpha_{i-1}}{2}x_ij+\frac{2-\alpha_{n-1}+\alpha_n}{2}x_nj\Big)\,x_j,$$

$$\mathrm{SVk}[\xi]=\frac{(k-\sum\limits_{j=1}^{n}x_ijx_j)^2[(\alpha_{i+1}-\alpha_i)(k-\sum\limits_{j=1}^{n}x_ijx_j)+3\alpha_i(\sum\limits_{j=1}^{n}x_{i+1}jx_j-\sum\limits_{j=1}^{n}x_ijx_j)]}{3(\sum\limits_{j=1}^{n}x_{i+1}jx_j-\sum\limits_{j=1}^{n}x_ijx_j)},$$

و اثبات کامل است. □

۵.۳ چند مثال عددی

در این بخش به ذکر چند مثال عددی می‌پردازیم. مثال‌ها با استفاده از الگوریتم جستجوی کششی[1] و به کارگیری نرم افزار Lingo حل شده‌اند.

مثال ۱.۵.۳. برای ۱۰ ورق بهادار لیست شده در جدول ۱.۵.۳ فرض کنید هر بازده ورق بهادار متغیر نامعین خطی $\xi_i=L(a_i,b_i)$ باشد که در آن پارامترهای a_i و b_i براساس مقادیر برآورد شده توسط کارشناسان مالی تعیین شده است. فرض کنید می‌نیمم آنتروپی مورد قبول سرمایه‌گذار ۲/۰ و ماکزیمم ریسک قابل تحمل ۰/۰۰۲۵ باشد. به علاوه بازده هدف قبلی ۰/۰۱ باشد. با استفاده از مدل (۱۹.۳) مدل زیر را داریم:

$$\mathrm{Max}\ \sum_{i=1}^{10}(a_i+b_i)\,x_i,$$

$$s.t:\begin{cases}(0/01-\sum\limits_{i=1}^{10}a_i\,x_i)^3\le 0/075(\sum\limits_{i=1}^{10}(b_i-a_i)x_i)\\ \sum\limits_{i=1}^{10}(b_i-a_i)x_i\ge 4/0\\ x_1+x_2+\cdots+x_n=1\\ x_i\ge 0\quad i=1,2,\ldots,10.\end{cases}$$

[1] Gravitation search algorithm

جدول ۱.۵.۳: بازده نامعین خطی ۱۰ ورق بهادار

ورق بهادار i	نرخ بازده نامعین ξ_i	ورق بهادار i	نرخ بازده نامعین ξ_i
۱	L(−۰/۱۵،۰/۲۲)	۶	L(−۰/۱۸،۰/۲۴)
۲	L(−۰/۲۱،۰/۲۹)	۷	L(−۰/۲۸،۰/۳۵)
۳	L(−۰/۱۲،۰/۱۷)	۸	L(−۰/۰۵،۰/۱۰)
۴	L(−۰/۲۲،۰/۳۰)	۹	L(−۰/۳۳،۰/۴۴)
۵	L(−۰/۲۰،۰/۳۸)	۱۰	L(−۰/۱۱،۰/۲۱)

الگوریتم جستجوی کششی را برای حل این مدل به کار می‌بریم. نتیجه نشان می‌دهد که سرمایه‌گذار برای بدست آوردن ماکزیمم بازده مورد انتظار، باید سرمایه‌اش را مطابق جدول ۲.۵.۳ اختصاص دهد. مقدار بازده هدف متناظر ۰/۱۱۰۸ می‌باشد.

جدول ۲.۵.۳: نسبت سرمایه‌گذاری در ۱۰ ورق بهادار

ورق بهادار i	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
سرمایه اختصاصی	۸/۴۲	۹/۱	۶/۶۱	۹/۴۱	۳۱/۷۲	۷/۲۱	۸/۳۱	۰	۳/۹۱	۲۳/۷۳

برای بررسی میزان حساسیت سبد سهام به بازده هدف قبلی، مقدار k را تنظیم و آزمایش می‌کنیم، نتایج در جدول ۳.۵.۳ نشان داده شده است. به نظر می‌رسد وقتی بازده هدف قبلی متفاوت باشد استراتژی سرمایه‌گذاری بهینه و بازده هدف بهینه متفاوت هستند.

جدول ۳.۵.۳: نسبت سرمایه‌گذاری در ۱۰ ورق بهادار در آزمایش‌های مختلف

τ	k	β	بازده هدف	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
۰/۰۰۲۵	۰/۰۰۵	۲	۰/۱۱۴۶	۷/۰۹	۸/۴۲	۴/۸۸	۸/۲۲	۳۲/۵	۷/۰۵	۶/۹۹	۰	۱۳/۵۸	۱۱/۲۷
۰/۰۰۲۵	۰/۰۱	۲	۰/۱۱۰۸	۸/۴۲	۹/۱	۶/۶۱	۹/۴۱	۳۱/۷۲	۷/۲۱	۸/۳۱	۰	۳/۹۱	۲۳/۷۳
۰/۰۰۲۵	۰/۰۱۵	۲	۰/۱۰۹۴	۸/۲۶	۹/۳۶	۶/۰۹	۸/۹۲	۳۳/۶۸	۶/۹۳	۸/۲۳	۶/۴۱	۰	۱۲/۱۲

به علاوه، اگر مدل میانگین- نیم واریانس هدف را بدون محدودیت آنتروپی حل شود مقدار بازده هدف و تخصیص بهینه سرمایه برای ۱۰ ورق بهادار مطابق جدول ۴.۵.۳ است.

جدول ۴.۵.۳: نسبت سرمایه‌گذاری در ۱۰ ورق بهادار بدون محدودیت آنتروپی

τ	k	بازده هدف	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
۰/۰۰۲۵	۰/۰۰۵	۰/۱۲۹۲	۰	۰	۰	۰	۳۶/۶۱	۰	۰	۰	۰	۶۳/۳۹
۰/۰۰۲۵	۰/۰۱	۰/۱۲۲۴	۰	۰	۰	۰	۲۸/۰۷	۰	۰	۰	۰	۷۱/۹۳
۰/۰۰۲۵	۰/۰۱۵	۰/۱۱۵۴	۰	۰	۰	۰	۱۹/۳۵	۰	۰	۰	۰	۸۰/۶۵

ملاحظه می‌شود که بدون محدودیت آنتروپی جواب در دو ورق بهادار ۵ و ۱۰ متمرکز می‌شود. در نتیجه لازم است که محدودیت آنتروپی برای تنوع سبد سهام اضافه شود.

مثال ۲.۵.۳. برای ۱۰ ورق بهادار لیست شده در جدول ۵.۵.۳ فرض کنید هر بازده ورق بهادار متغیر نامعین زیگزاگ $\xi_i = Z(a_i, b_i, c_i)$ باشد. فرض کنید می‌نیمم آنتروپی مورد قبول سرمایه‌گذار ۲/۰ و

ماکزیمم ریسک قابل تحمل ۰/۰۰۲۵ باشد. به علاوه بازده هدف قبلی ۰/۰۱ باشد. با استفاده از مدل (۲۱.۳) مدل زیر را داریم:

$$\text{Max} \quad \sum_{i=۱}^{۱۰} (a_i + ۲b_i + c_i)\, x_i,$$

$$s.t: \begin{cases} \text{SV}_{۰/۰۱} \leq ۰/۰۰۲۵ \\ \sum_{i=۱}^{۱۰} (c_i - a_i) x_i \geq ۴/۰ \\ x_۱ + x_۲ + \cdots + x_n = ۱ \\ x_i \geq ۰ \quad i = ۱, ۲, \ldots, ۱۰. \end{cases}$$

که در آن

$$\text{SV}_{۰/۰۱}[\xi] = \begin{cases} \dfrac{(۰/۰۱ - \sum_{i=۱}^{۱۰} a_i x_i)^۳}{۶(\sum_{i=۱}^{۱۰} b_i x_i - \sum_{i=۱}^{۱۰} a_i x_i)} & \text{if } \sum_{i=۱}^{۱۰} a_i x_i \leq ۰/۰۱ \leq \sum_{i=۱}^{۱۰} b_i x_i, \\ \dfrac{(۰/۰۱ - \sum_{i=۱}^{۱۰} b_i x_i)^۲ (۰/۰۱ - ۴\sum_{i=۱}^{۱۰} b_i x_i + ۳\sum_{i=۱}^{۱۰} c_i x_i)}{۶(\sum_{i=۱}^{۱۰} c_i x_i - \sum_{i=۱}^{۱۰} b_i x_i)} + & \\ \dfrac{(\sum_{i=۱}^{۱۰} b_i x_i - \sum_{i=۱}^{۱۰} a_i x_i)(۰/۰۳ - ۲\sum_{i=۱}^{۱۰} b_i x_i - \sum_{i=۱}^{۱۰} a_i x_i)}{۶} & \text{if } \sum_{i=۱}^{۱۰} b_i x_i \leq ۰/۰۱ \leq \sum_{i=۱}^{۱۰} c_i x_i. \end{cases}$$

جدول ۵.۵.۳: بازده نامعین زیگزاگ ۱۰ ورق بهادار

ورق بهادار i	نرخ بازده نامعین ξ_i	ورق بهادار i	نرخ بازده نامعین ξ_i
۱	L(−۰/۲،۰/۰۶،۰/۲۳)	۶	L(−۰/۰۳،۰/۰۷،۰/۱۳)
۲	L(−۰/۰۵،۰/۰۸،۰/۱۳)	۷	L(−۰/۳۰،۰/۰۵،۰/۴۲)
۳	L(−۰/۲۲،۰/۰۷،۰/۳۱)	۸	L(−۰/۱۱،۰/۰۱،۰/۱۵)
۴	L(−۰/۰۲،۰/۰۵،۰/۱۰)	۹	L(−۰/۲۴،۰/۰۴،۰/۳۰)
۵	L(−۰/۱۵،۰/۰۹،۰/۲۴)	۱۰	L(−۰/۲۱،۰/۰۹،۰/۳۳)

الگوریتم جستجوی کششی را برای حل این مدل به کار می‌بریم. نتیجه نشان می‌دهد که سرمایه‌گذار برای بدست آوردن ماکزیمم بازده مورد انتظار، باید سرمایه‌اش را مطابق جدول ۶.۵.۳ اختصاص دهد. مقدار بازده هدف متناظر ۰/۲۵۴ می‌باشد.

جدول ۶.۵.۳: نسبت سرمایه‌گذاری در ۱۰ ورق بهادار

ورق بهادار i	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
سرمایه اختصاصی	۹/۱۲	۱۰/۸۴	۹/۰۳	۴/۴۶	۱۶/۰۲	۱۲/۱۵	۷/۲۵	۰	۲/۳۴	۲۸/۷۹

به علاوه، اگر مدل میانگین- نیم واریانس هدف را بدون محدودیت آنتروپی حل شود مقدار بازده هدف و تخصیص بهینه سرمایه برای ۱۰ ورق بهادار مطابق جدول ۷.۵.۳ است.

جدول ۷.۵.۳: نسبت سرمایه‌گذاری در ۱۰ ورق بهادار بدون محدودیت آنتروپی

بازده هدف	$x_{۱}$	$x_{۲}$	$x_{۳}$	$x_{۴}$	$x_{۵}$	$x_{۶}$	$x_{۷}$	$x_{۸}$	$x_{۹}$	$x_{۱۰}$
۰/۲۷۷	۰	۰	۰	۰	۰	۳۲/۹۹	۰	۰	۰	۷۷/۰۱

ملاحظه می‌شود که بدون محدودیت آنتروپی جواب در دو ورق بهادار ۶ و ۱۰ متمرکز می‌شود. در نتیجه لازم است که محدودیت آنتروپی برای تنوع سبد سهام اضافه شود.

نتیجه‌گیری و پیشنهادات

نتیجه گیری

انتخاب سبدسهام در مباحث سرمایه‌گذاری کار دشوار و پیچیده‌ای است. سرمایه‌گذار در این حالت، خود را در مقابل انتخاب‌های فراوان و گوناگونی می‌بیند که باید یکی از آنها را به عنوان بهترین روش انتخاب کند. تصمیم گیری درباره اینکه کدام ورق بهادار در مقایسه با سایر اوراق در وضعیت بهتری قرار دارد و شایستگی انتخاب شدن و قرار گرفتن در سبد سرمایه‌گذاری فرد را دارد و چگونگی تخصیص سرمایه بین این اوراق، مباحثی پیچیده است. در این پایان نامه مسئله انتخاب سبد سهام را هنگامی که بازده اوراق بهادار برای تشخیص از طریق داده‌های تاریخی مشکل است بررسی کردیم. برای حل این مشکل بازده‌های اوراق بهادار را با استفاده از متغیرهای نامعین برآورد کردیم که هر متغیر نامعین با استفاده از توزیع نامعین‌اش تعریف می‌شود.
گاهی توزیع‌های احتمال بازدهی‌های اوراق بهادار غیر متقارن هستند، در این حالت در مدل پیشنهادی میانگین- واریانس مارکویتز، واریانس یک اندازه ناکارا از ریسک سرمایه‌گذاری می‌شود، زیرا یک ورق بهادار ممکن است بازده مورد انتظار بالایی داشته باشد ولی واریانس بازدهی‌اش نیز بسیار بالا باشد. در این حالت چون ورق بهادار انحراف های مثبت خیلی بزرگی از بازده مورد انتظارش دارد و این انحراف‌های مثبت برای ما مطلوب هستند و مقدار واریانس بازده سبدسهام نباید بالاتر از سطح از قبل تعیین شده باشد و سعی در می‌نیمم کردن واریانس داریم، پس احتمال بسیاری دارد که این ورق بهادار با بازده مورد انتظار بالا به دلیل انحراف‌های مثبت بالا حذف شود که ممکن است این ورق بهادار مورد نظر ما باشد. برای غلبه بر این محدودیت از نیم واریانس به جای واریانس استفاده کردیم. نیم واریانس جدا کننده نوسانات نامطلوب طرف پایین بازده اوراق بهادار از نوسانات مطلوب طرف بالا است و فقط توجه به بازده‌های تنزل یافته به زیر بازده مورد انتظار دارد و مطابق توجه سرمایه‌گذاران درباره ریسک و سودهای مطلوب آن‌ها است.
بازه مورد انتظار فقط اطلاعات میانگینی نسبت به بازده خاصی فراهم می‌کند. گاهی سرمایه‌گذاران مایل به اتخاذ یک بازده هدف خاص بجای یک اطلاع میانگین هستند، زیرا نیازمند داشتن یک بیشترین سطح تحمل هستند اما برای سرمایه‌گذاران تشخیص اینکه یک سطح نیم واریانس قابل تحمل است یا خیر، مشکل است زیرا مقدار مورد انتظار سبدسهام قبل از سرمایه‌گذاری نامشخص است. چون مقدار مورد انتظار نامشخص و متفاوت است سرمایه‌گذار مجبور به متحمل قدری خطاپذیری برای عدم بدست آوردن بازده هدف می باشد، پس بیشترین سطح تحمل سرمایه‌گذاران متفاوت است[۹]. بنابراین مقدارمورد

انتظار را به عنوان هدف پایه در نیم واریانس در نظر رفته و از نیم واریانس هدف به جای نیم واریانس استفاده کردیم. درنهایت برای تنوع بخشیدن به سبدسهام و عدم گرایش سبدسهام به چند ورق بهادار خاص، آنتروپی را به کارگرفتیم و مدل بهینه سازی میانگین- نیم واریانس هدف را برای ترکیبی بهینه از اوراق بهادار و بدست آوردن بیشترین بازدهی ممکن سبدسهام تشکیل دادیم. به علاوه مدل‌های تعدیل شده‌ای از مدل بهینه سازی بدست آوردیم.

پیشنهادات برای کارهای آینده

به منظور تکمیل و در ادامه روند این پایان نامه، مواردی به شرح ذیل به منظور اجرای پژوهش‌های آینده پیشنهاد می‌گردد:

۱- بازدهی بسیاری ازاوراق بهادارگرایش به متغیرهای نرمال و لگ نرمال داردکه می‌توان مدل میانگین- نیم واریانس هدف را برای متغیرهای نرمال و لگ نرمال تشکیل داد.

۲- متغیرهای اعمال شده در این پایان نامه، صرفاً ریسک و بازده اوراق بهادار است. به منظور تکمیل و افزایش کارآیی مدل‌های استفاده شده در پایان نامه می‌توان عوامل دیگری چون ارزش بازار،درجه نقدشوندگی اوراق بهادار و ... را نیز مدنظر قرار داد.

۳ - از نکات مدنظر سرمایه‌گذاران در بحث سبدگردانی، در نظر داشتن هزینه‌های معاملاتی آینده است. سرمایه‌گذار همواره مایل است که با کمترین تعداد معاملات و به تبع آن کمترین هزینه‌های معاملاتی آینده به سبد مدنظر خود دست یابند. وارد کردن این متغیر به عنوان یکی دیگر از متغیرهای مسئله، امکان اجرای تحقیق جدیدی را درباره این موضوع فراهم می‌سازد.

۴- مسئله بهینه سازی سبدسهام، ترکیبی از مسئله برنامه ریزی عدد صحیح و برنامه ریزی درجه ۲ است که برای حل این گونه مسائل الگوریتم های مشخص و کارایی وجود دارد که می‌توان با استفاده از الگوریتم‌های محاسباتی خاص مدل‌های فوق را حل نمود.

مراجع

[1] Bhattacharyya. R. Kar. S. (2012), Mean-variance-skewness portfolio selection model in general uncertain environment, *Indian Journal of Industrial and Applied Mathematics*, 3, 45-61.

[2] Bilbao-Terol. Perez-Gladish. B. Arenas-Parra. M. Rodriguez-Uria. M. V. (2006), Fuzzy compromise programming for portfolio selection, *Applied Mathematics and Computation*, 173, 251-264.

[3] Dai W. and Chen X.W. (2012), Entropy of function of uncertain variables,*Mathematical and Computer Modelling*, 55, 754-760.

[4] Dubois D. and Prade H. (1988),*Possibility Theory: An Approach to Computerized Processing of Uncertainty*, Plenum, New York.

[5] Gupta. P. Mehlawat. M. K. and Saxena. A. (2008), Asset portfolio optimization using fuzzy mathematical programming, *Information Sciences*, 178, 1734-1755.

[6] Hogan W.W. Warren J.M. (1972), Computation of the efficient boundary in the E-S portfolio selection model, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 7, 1881-1896.

[7] Huang X. (2008), Mean-semivariance models for fuzzy portfolio selection, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 217, 1-8.

[8] Huang X. (2011), Mean-risk model for uncertain portfolio selection,*Fuzzy Optimization and Decision Making*, 10, 71-89.

[9] Huang X. (2011), *Portfolio Analysis from Probabilistic to Credibilistic and Uncertain Approaches*, University of Science and Technology Beijing, China. hxiaoxia@manage.ustb.edu.cn.

[10] Huang. X. (2012), An entropy method for diversified fuzzy portfolio selection, *International Journal of Fuzzy Systems*, 14, 160-165.

[11] Huang. X. (2012), Mean-variance models for portfolio selection subject to expert's estimations,*Expert Systems with Applications*, 39, 5887-5893.

[12] Jana P. Roy T. K. and Mazumder K. (2007),*Multi-objective mean-variance-skewness model for portfolio optimization*, 9, 181-193.

[13] Jia J. and Dyer J. S. (1996). A standard measure of risk and risk-value models. *Management Science*, 42, 1691-1705.

[14] Kapur J. N. and Kesavan H. K. (1992), *Entropy Optimization Principles with Applications*, Academic Press, New York.

[15] Kapur J. N. (1993), *Maximum Entropy Models in Science and Engineering*, Wiley Eastern Limited, New Delhi.

[16] Li. X. Qin. Z. F. and Kar. S . (2010), Mean-variance-skewness model for portfolio selection with fuzzy returns, *European Journal Operational Research*, 202, 239-247.

[17] Liu B. (2007),*Uncertainty Theory*, 2nd Edition, Springer-Verlag, Berlin.

[18] Liu B. (2009), Some research problems in uncertainty theory, *Journal of Uncertain Systems*, 3, 3-10.

[19] Liu B. (2015), *Uncertainty Theory*, 5th Edition, Springer-Verlag, Berlin. http://orsc.edu.cn/liu/ut.pdf.

[20] Markowitz H. (1952), Portfolio selection, *Journal of Finance*, 7, 77-91.

[21] Markowitz H. (1993), Computation of mean-semivariance efficient sets by the critical line algorithm, *Annals of Operational Research*, 45, 307-317.

[22] Peng Z. X. (2010), *Uncertainty Distribution of Functions of Uncertain Variable*, Tsinghua University, Beijing, China. http://orsc.edu.cn/online/090606.pdf.

[23] Qin. Z. and Kar. S. (2012), *Developments of Mean-Variance Model for Portfolio Selection in Uncertain Environment*, Tsinghua University, Beijing, China. http://orsc.edu.cn/online/090511. pdf.

[24] Shannon. C. (1948). A mathematical theory of communication, *Bell System Technical Journal*, 27, 379–423.

[25] Xia Y. Liu B. Wang . and Lai K. (2000), A model for portfolio selection with order of expected return, *Computers and Operations Research*, 27, 409-422.

[26] Yin M. Qian W. (2013), Mean-target semivariance diversification model for portfolio selection with uncertain returns, *College of Mathematics and Physics,* Bohai University, Jin Zhou, 121000, China.

[27] Zadeh L. A. (1979), A theory of approximate reasoning, In: Hayes J. Michie D. and Thrall R.M, *Mathematical Frontiers of the Social and Policy Sciences*, Westview Press, Boulder, Cororado, 69-129.

[28] Zhang. X. Zhang. W. G. and Xu. W. J. (2011), An optimization model of the portfolio adjusting problem with fuzzy return and a SMO algorithm, *Expert Systems with Applications*, 38, 3069-3074.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

آنتروپی	*Entropy*
استقلال	*Independent*
اصل حاصل‌ضربی	*Product measure axiom*
امیدریاضی	*Expected value*
اندازه	*Measure*
اوراق بهادار	*Security*
بازده	*Return*
بازده مورد انتظار	*Expected return*
بورل	*Borel*
بهینه سازی	*Optimization*
درجه اعتقاد	*Belief degree*
دارایی	*Asset*
ذوزنقه‌ای	*Trapezoidal*
ریسک	*Risk*
زیگزاگ	*Zigzag*
سبد سهام	*Portfolio*
سرمایه‌گذاری	*Investment*
قانون عملیاتی	*Operational law*
متغیر	*Variable*
واریانس	*Variance*
میانگین	*Mean*
نامعین	*Uncertain*
مطلوبیت	*Utility*
نیم واریانس	*Semivariance*

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Asset	دارایی
Belief degree	درجه اعتقاد
Borel	بورل
Entropy	آنتروپی
Expected return	بازده مورد انتظار
Expected value	امیدریاضی
Independent	استقلال
Investment	سرمایه‌گذاری
Mean	میانگین
Measure	اندازه
Operational law	قانون عملیاتی
Optimization	بهینه‌سازی
Risk	ریسک
Security	اوراق بهادار
Semivariance	نیم واریانس
Portfolio	سبدسهام
Product measure axiom	اصل حاصل ضربی
Return	بازده
Trapezoidal	ذوزنقه‌ای
Variable	متغیر
Variance	واریانس
Uncertain	نامعین
Utility	مطلوبیت
Zigzag	زیگزاگ

نمایه

Aabstract

This paper discusses the uncertain portfolio selection problem when security returns are hard to be well reflected by historical data. In the paper, the target semivariance is introduced for uncertain variable. A mean-target semivariance model is proposed for uncertain portfolio selection, in which the divergence degree of asset portfolio, the risk of the portfolio and investment return are measured by using the Shannon's entropy, target semivariance and expected value, respectively.

keywords: *Return, Risk, Uncertainty theory, Uncertain variable, Target semivariance, entropy.*

Shahrood University of Technology

Faculty of Mathematical Sciences
MSc Thesis in Mathematical - Finance Mathematical

Portfolio optimization by mean-target semivariance model with uncertain returns

By: Sajad Nouri

Supervisor

Dr Alireza Nazemi

September 2016