



دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان نامه کارشناسی ارشد

بررسی نظریه‌ی گروه‌های لی در تحلیل معادلات ماکسول در اپتیک غیرخطی

سید مصطفی بازقندی

استاد راهنما

سید رضا حجازی

تیر ۱۳۹۵

تعمیر نامه

اینجانب سید مصطفی بازقندی دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض دانشکده علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان بررسی نظریه‌ی گروه‌های لی در تحلیل معادلات ماکسول در اپتیک غیرخطی، تحت راهنمایی سید رضا حجازی متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “دانشگاه صنعتی شاهرود” یا “Shahrood University of Technology” به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

سید مصطفی بازقندی
سیر ۱۳۹۵

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

ابتدا به مطالعه کاربردهای نظریه‌ی گروه‌های لی در معادلات دیفرانسیل می‌پردازیم. سپس معادلات ماکسول را بررسی می‌کنیم و دستگاه معادلات ماکسول در اپتیک غیرخطی را فرمول‌بندی می‌کنیم. با استفاده از روش گروه‌های تقارن لی جواب‌های مشابه آن را محاسبه کرده و نشان می‌دهیم می‌توان دستگاه را به یک معادله‌ی دیفرانسیل معمولی مرتبه اول کاهش داد. همچنین، با ایجاد یک ساختار لی-پواسون روی دستگاه، دستگاه همیلتونی آن را به دست می‌آوریم.

کلمات کلیدی: گروه‌های تقارن لی، معادلات دیفرانسیل، معادلات ماکسول، جواب‌های مشابه، اپتیک غیرخطی

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

1. Hejazi, S. Reza and Bazghandi Mustafa, *Conservation Laws for the Degasperis-Procesi Equation via the Direct Method*. 13th Seminar on Differential Equations, Dynamical Systems and Applications, 13-15 July 2016, Isfahan University of Technology, Iran.
2. Hejazi, S. Reza, Bazghandi Mustafa, and Abbaspour Sousan, *Integrating of Ordinary Differential Equations via a One-Parameter Symmetry Group*. The 46 th Annual Iranian Mathematics Conference, University of Yazd (2015): 402–405.

فهرست مطالب

۱	پیشگفتار
۳	۱ مفاهیم اساسی هندسی
۳	۱.۱ منیفلد
۶	۱.۱.۱ فضای مماسی
۷	۲.۱.۱ میدان‌های برداری
۹	۳.۱.۱ تانسورها
۱۰	۴.۱.۱ فرم‌های دیفرانسیلی
۱۲	۲.۱ منیفلدهای ریمانی
۱۲	۱.۲.۱ متریک
۱۳	۲.۲.۱ فضا زمان مینکوفسکی
۱۳	۳.۱ گروه‌های لی
۱۳	۱.۳.۱ گروه لی
۱۵	۲.۳.۱ جبر لی
۱۹	۲ نظریه‌ی گروه‌های لی در معادلات دیفرانسیل
۱۹	۱.۲ دستگاه معادلات دیفرانسیل
۱۹	۲.۲ امتداد دهی
۲۰	۳.۲ فرمول بندی ریاضی دستگاه معادلات دیفرانسیل
۲۱	۴.۲ روش ساختن ناورداها
۲۲	۵.۲ گروه‌های تقارن معادلات دیفرانسیل
۲۳	۱.۵.۲ امتداد دهی عمل گروه
۲۴	۲.۵.۲ امتداد میدان‌های برداری
۲۴	۳.۵.۲ فرمول امتداد میدان‌های برداری
۲۷	۶.۲ محاسبه‌ی گروه‌های تقارن
۲۷	۱.۶.۲ معادله‌ی دگاسپریس-پروسسی
۳۰	۷.۲ تبدیلات هم‌ارز

۳۰	مدل‌های انعکاس-انتشار	۱۰۷۰۲
۳۷	فرمول‌بندی معادلات ماکسول	۳
۳۸	معادلات کلاسیک ماکسول	۱.۳
۳۹	نظریه الکترومغناطیس	۲.۳
۳۹	میدان الکترومغناطیسی	۱.۲.۳
۳۹	پتانسیل مغناطیسی	۲.۲.۳
۴۰	پتانسیل الکتریکی	۳.۲.۳
۴۰	تانسور میدان الکترومغناطیسی	۳.۳
۴۱	فرم دیفرانسیلی معادلات ماکسول	۴.۳
۴۴	معادلات غیر خطی ماکسول	۵.۳
۴۵	مدل ماکسول و نوسانگر لورنتز	۶.۳
۴۵	معادله‌ی نوسانگر لورنتز	۱.۶.۳
۴۶	فرمول‌بندی مدل ماکسول و نوسانگر لورنتز	۲.۶.۳
۴۹	ساختار هندسی جواب‌های معادلات ماکسول و نوسانگر لورنتز	۴
۴۹	تقارن‌های معادلات ماکسول و نوسانگر لورنتز	۱.۴
۵۱	جبر لی تقارن‌ها	۲.۴
۵۲	گروه‌های تقارن	۳.۴
۵۲	محاسبه ناوردهای دستگاه	۴.۴
۵۴	جواب‌های مشابه	۵.۴
۵۷	دستگاه همیلتونی معادلات ماکسول و نوسانگر لورنتز	۵
۵۷	کروشه پواسون	۱.۵
۵۸	میدان‌های برداری همیلتونی	۲.۵
۵۹	توابع ساختاری	۳.۵
۶۰	ساختار لی-پواسون	۴.۵
۶۲	دستگاه همیلتونی معادلات ماکسول و نوسانگر لورنتز	۵.۵
۶۵	مراجع	
۶۷	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی	
۷۱	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی	
۷۴	نمایه	

پیشگفتار

از معادلات دیفرانسیل در علوم کاربردی مانند فیزیک، مهندسی و سایر علوم استفاده می‌شود. با استفاده از گروه‌های تقارن لی می‌توان معادلات دیفرانسیل را تحلیل کرد و جواب‌های دقیق و تقارن‌های آن‌ها را به دست آورد. تحلیل معادلات دیفرانسیل امکان تصمیم‌گیری‌های دقیق‌تری را در بررسی‌های علمی فراهم می‌کند.

بیش از یک قرن پیش، ریاضیدان نروژی سوفوس لی^۱ تعدادی ایده‌ی اساسی مبتنی بر روش‌های تقارنی مطرح کرد [۲]. با وجود سادگی، این ایده‌ها هنوز هم اساس تعداد زیادی از پژوهش‌هاست. لی نشان داد اگر معادله‌ی دیفرانسیل معمولی داده‌شده گروه لی یک-پارامتری از تبدیلات نقطه‌ای بپذیرد می‌تواند تا یک مرتبه کاهش یابد. همچنین از گروه‌های تقارن علاوه بر کاهش مرتبه‌ی معادلات دیفرانسیل معمولی می‌توانیم برای یافتن جواب‌های ناوردا و یا جواب‌های جدید معادلات دیفرانسیل معمولی یا جزئی با استفاده از جواب‌های داده شده استفاده کنیم.

معادلات برداری ماکسول در اپتیک غیرخطی با استفاده از معادلات غیرخطی شرودینگر (NLS) و گسترش یافته‌ی آن به صورت عددی بررسی و تحلیل شده اند [۲۴]. بعدها در تعدادی از مقالات [۱، ۱۱، ۱۲، ۱۶] مطالعات نشان دادند که در فاصله‌های زمانی بسیار کوتاه جواب‌های به دست آمده از معادلات NLS اشتباه است. همچنین هایل نشان داد که جواب‌های تقریبی به دست آمده از معادلات شرودینگر از نظر ریاضی رد می‌شوند [۲۷].

در این پایان‌نامه، معادلات ماکسول در اپتیک غیرخطی را به صورت یک دستگاه معادلات دیفرانسیلی می‌نویسیم و به تحلیل آن می‌پردازیم و جواب‌های دقیق، تقارن‌ها و سایر خواص آن را به دست می‌آوریم. برای یافتن جواب‌های دستگاه از روش گروه‌های تقارن لی استفاده می‌کنیم. همچنین به کمک روش تقارن‌های لی جواب‌های مشابه دستگاه را محاسبه کرده و نشان می‌دهیم می‌توان دستگاه را به یک معادله‌ی دیفرانسیل معمولی مرتبه اول برای متغیر $y = E^2$ ، که E شدت میدان الکتریکی است، کاهش داد. این معادله دیفرانسیل جواب‌هایی به شکل $y = y(\xi)$ دارد، که در آن ξ معادله‌ی موج سیار است. این جواب‌ها پدیده‌های جدیدی را نشان می‌دهند که از روش‌های معمول تقریب عددی قابل دست‌یابی نیست. اهمیت این پژوهش زمانی‌ست که نمی‌توانیم جواب معادلات برداری ماکسول در اپتیک غیرخطی را به صورت تقریب عددی به دست آوریم.

در فصل اول مفاهیم اساسی هندسه را بیان می‌کنیم، در ادامه گروه‌های لی و نحوه‌ی عمل آن‌ها را همراه با مثال توضیح می‌دهیم. در فصل دوم به کاربرد نظریه‌ی گروه‌های لی در معادلات دیفرانسیل می‌پردازیم.

^۱ماریوس سوفوس لی Marius Sophus Lie

در فصل سوم معادلات کلاسیک ماکسول را بیان می‌کنیم، فرم دیفرانسیلی این معادلات را می‌نویسیم و سپس مدل معادلات غیرخطی ماکسول همراه شده با نوسانگر لورنتز فرمول‌بندی می‌کنیم. در فصول بعدی این مدل را با دید هندسی مورد تحلیل قرار می‌دهیم. در فصل چهارم با استفاده از هندسه‌ی معادلات دیفرانسیل تقارن‌ها و جواب‌های مشابه معادلات ماکسول را به‌دست می‌آوریم. همچنین جواب‌های معادلات موج سیال را به‌دست می‌آوریم. در فصل پنجم با ایجاد یک ساختار لی-پواسون روی مدل، دستگاه معادلات همیلتونی آن را به‌دست می‌آوریم.

فصل ۱

مفاهیم اساسی هندسی

در این فصل مفاهیم هندسی مورد نیاز را تعریف می‌کنیم.

۱.۱ منیفلد

ابتدا منیفلد را تعریف می‌کنیم و سپس ساختار هموار را به منیفلد اضافه می‌کنیم، که به ما توانایی مشتق‌گیری را می‌دهد. در ادامه مفاهیم مربوط به منیفلد را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱.۱.۱. فضای توپولوژیک M را یک n -منیفلد توپولوژیکی گوییم هرگاه شرایط زیر برقرار باشند:

- M هاسدورف باشد، یعنی هر دو نقطه‌ی $p, q \in M$ به ترتیب مشمول در زیرمجموعه‌های باز $U, V \subset M$ باشند به طوری که $U \cap V = \emptyset$ ؛

- M شمارای نوع دوم باشد، یعنی پایه‌ی شمارا داشته باشد؛

- M موضعاً اقلیدسی باشد، یعنی هر نقطه آن مشمول در یک همسایگی هم‌مورف با یک زیرمجموعه‌ی باز از \mathbb{R}^n باشد.

مثال ۲.۱.۱ (الف) فضای اقلیدسی \mathbb{R}^n ، یک منیفلد n -بعدی است.

(ب) هر فضای برداری n -بعدی، یک منیفلد n -بعدی است.

(ج) مجموعه‌ی ماتریس‌های حقیقی $m \times n$ ، یک منیفلد mn -بعدی است.

مثال ۳.۱.۱ (ضرب منیفلدها). فرض کنیم M_1, \dots, M_k منیفلدهایی به ترتیب با بعدهای n_1, \dots, n_k

باشند. فضای ضرب $M_1 \times \dots \times M_k$ یک منیفلد با بعد $n_1 + \dots + n_k$ است.

تعریف ۴.۱.۱. نگاشت وارون‌پذیر $F : U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$ را هم‌مورفیزم گوییم، هرگاه خود و وارونش پیوسته باشند.

تعریف ۵.۱.۱. نگاشت $F : U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$ را هموار یا دیفرانسیل پذیر گوئیم، هرگاه مشتقات جزئی F از هر مرتبه موجود و پیوسته باشد.

تعریف ۶.۱.۱. نگاشت هموار $F : U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ را با $C^\infty(U)$ نمایش می دهیم.

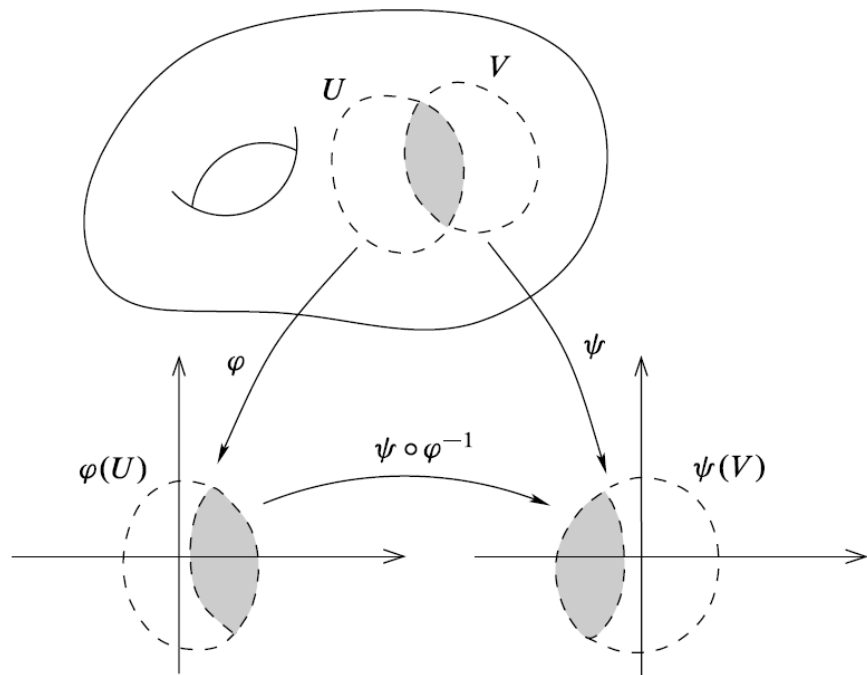
اگر نگاشت $F^{-1} : V \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow U \subseteq \mathbb{R}^m$ هموار و $m = n$ باشد، آن گاه F را دیفئومورفیسم گوئیم.

تعریف ۷.۱.۱. فرض کنیم $\{U_\alpha\}_\alpha$ گردایه ای شمارا از زیرمجموعه های باز منیفلد M و V_α زیرمجموعه های باز از \mathbb{R}^n باشند. اگر $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$ همئومورفیسم باشد، آن گاه $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ را یک چارت مختصاتی روی منیفلد M می نامیم.

فرض کنیم (U, φ) یک چارت باشد، آن گاه مجموعه ی U را دامنه چارت، و نگاشت φ را یک نگاشت مختصاتی می گوئیم.

تعریف ۸.۱.۱. فرض کنیم اگر (U, φ) و (V, ψ) دو چارت مختصاتی روی منیفلد M باشند، نگاشت $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$ را نگاشت گذر از φ به ψ می نامیم (شکل ۱.۱). این نگاشت ترکیب دو نگاشت همئومورفیسم است، بنابراین همئومورفیسم است.

دو چارت (U, φ) و (V, ψ) را به طور هموار سازگار می نامیم، هرگاه $\psi \circ \varphi^{-1}$ دیفئومورفیسم باشد.



شکل ۱.۱: یک نگاشت گذر

تعریف ۹.۱.۱. مجموعه‌ی $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi)\}$ شامل چارت‌های منیفلد n -بعدی M را یک اطلس برای منیفلد M گوئیم، هرگاه دامنه اعضای \mathcal{A} ، M را بپوشانند.

تعریف ۱۰.۱.۱. اطلس \mathcal{A} را یک اطلس هموار گوئیم، هرگاه هر دو چارت در \mathcal{A} با یکدیگر به‌طور هموار سازگار باشند.

هدف ما تعریف یک ساختار هموار روی M توسط یک اطلس هموار است. حال منیفلد هموار را تعریف می‌کنیم.

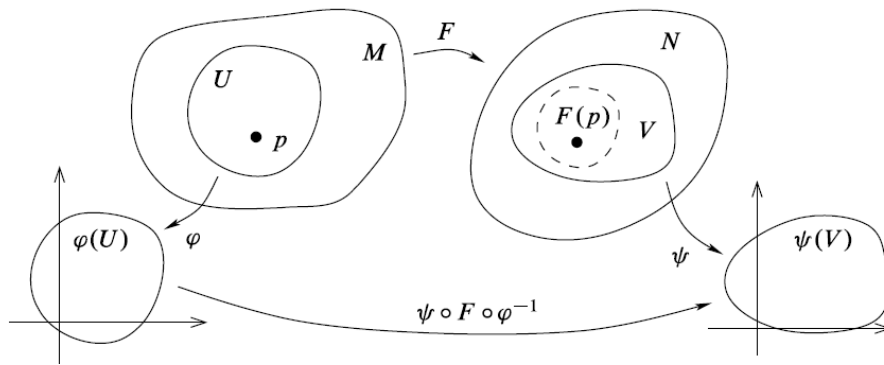
تعریف ۱۱.۱.۱. فرض کنیم M یک منیفلد باشد، یک منیفلد هموار یک دوتایی (M, \mathcal{A}) است، که در آن M یک منیفلد و \mathcal{A} یک ساختار هموار روی M است.

مثال ۱۲.۱.۱. فضای اقلیدسی \mathbb{R}^n یک منیفلد هموار n -بعدی با چارت مختصاتی همانی (\mathbb{R}^n, Id) است.

تعریف ۱۳.۱.۱. نگاشت $F : M \rightarrow N$ بین دو منیفلد هموار M و N را یک نگاشت هموار گوئیم هرگاه به ازای هر نقطه p از M یک چارت شامل p مانند (U, φ) ، و یک چارت مانند (V, ψ) شامل $F(p)$ در N وجود داشته‌باشد به‌طوری‌که نگاشت

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \psi(V)$$

هموار باشد (شکل ۱.۱).



شکل ۲.۱: تعریف نگاشت هموار

تعریف ۱۴.۱.۱. فرض کنیم M یک منیفلد هموار باشد. نگاشت $X : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ را یک عملگر مشتق در نقطه‌ی $p \in M$ گوئیم، هرگاه

خطی باشد:

$$X(f + rg)(p) = Xf(p) + r.Xg(p),$$

درقاعده لاینیتز صدق کند:

$$X(fg)(p) = Xf(p).g(p) + f(p).Xg(p).$$

۱.۱.۱ فضای مماسی

فضای تمام عملگرهای مشتق در نقطه‌ی $p \in M$ را که با T_pM نشان می‌دهیم، و آن را فضای مماسی منیفلد M در نقطه‌ی p می‌نامیم.

$$T_pM = \{x \mid x \text{ یک عملگر مشتق در نقطه‌ی } p \in M \text{ است.}\}$$

گزاره ۱۵.۱.۱. بعد T_pM با بعد منیفلد M برابر است.

برهان. [۱۳] □

تعریف ۱۶.۱.۱. فرض کنیم M یک منیفلد هموار باشد، اجتماع مجزای تمام فضاهای مماس M را کلاف مماسی M گوئیم و آن را به صورت زیر نشان می‌دهیم.

$$TM = \bigsqcup_{p \in M} T_pM.$$

تعریف ۱۷.۱.۱. فرض کنیم $F : M \rightarrow N$ یک نگاشت هموار باشد. نگاشت

$$dF_p : T_pM \rightarrow T_{F(p)}N,$$

را نگاشت دیفرانسیل F می‌نامیم. که به ازای هر $f \in C^\infty$ با ضابطه‌ی

$$dF_p(X)f = X_p(f \circ F),$$

تعریف می‌شود. نگاشت دیفرانسیل را نگاشت پیش‌برنده نیز می‌نامند.

گزاره ۱۸.۱.۱. اگر F و G دو نگاشت هموار باشند، آنگاه

$$d(G \circ F) = dG \circ dF.$$

برهان. [۱۳] □

گزاره ۱۹.۱.۱. اگر $F : M \rightarrow N$ دیفئومورفیسم باشد، آنگاه $dF_p : T_pM \rightarrow T_{F(p)}N$ ایزومورفیسم است.

برهان. [۱۳] □

تعریف ۲۰.۱.۱. اگر M یک منیفلد هموار باشد و U یک زیرمجموعه‌ی باز از آن باشد. به U یک زیرمنیفلد باز M گوئیم، هرگاه U با ساختار همواری M یک منیفلد باشد.

قضیه ۲۱.۱.۱. اگر M یک منیفلد هموار، U یک زیرمجموعه باز M و $i : U \rightarrow M$ نگاشت شمول باشد آنگاه برای هر p نگاشت $di : T_pU \rightarrow T_pM$ ایزومورفیسم است.

برهان. [۱۳] □

تعریف ۲۲.۱.۱. فرض کنیم $F : M \rightarrow N$ نگاشتی هموار از منیفلد m -بعدی M به منیفلد n -بعدی N باشد. رتبه نگاشت F در نقطه $x = (x^1, \dots, x^m)$ برابر است با رتبه ماتریس ژاکوبین $m \times n$

$$J_F = \left(\frac{\partial F^i}{\partial x^j} \right) \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n.$$

تعریف ۲۳.۱.۱. فرض کنیم M یک منیفلد هموار باشد. یک خم هموار در M نگاشتی مانند

$$\alpha : [a, b] \rightarrow M,$$

است به طوری که α یک تابع هموار است.

لم ۲۴.۱.۱. فرض کنیم M یک منیفلد هموار و $p \in M$ باشد. اگر $X \in T_p M$ ، آنگاه X مماس بر یک خم هموار در M مانند

$$\alpha : [-a, a] \rightarrow M,$$

است به طوری که در شرط زیر صدق کند.

$$\alpha(0) = p, \quad \alpha'(0) = X.$$

□

برهان. [۱۳]

تعریف ۲۵.۱.۱. فرض کنیم α یک خم هموار روی منیفلد M و

$$\varepsilon = \{x \in TM : \text{روی } [\circ, 1] \text{ تعریف شود} : \alpha_x\},$$

آنگاه تابع نمایی را به شکل زیر تعریف می‌کنیم.

$$\exp : \varepsilon \rightarrow M,$$

$$\exp(x) = \alpha_x(1).$$

تعریف ۲۶.۱.۱. فرض کنیم $\pi : M \rightarrow N$ یک نگاشت پیوسته باشد. یک برش از نگاشت π ، یک وارون پیوسته آن مانند $\sigma : N \rightarrow M$ است به طوری که:

$$\pi \circ \sigma = Id_N.$$

۲.۱.۱. میدان‌های برداری

تعریف ۲۷.۱.۱. میدان‌های برداری روی منیفلدهای هموار تعریف می‌شوند و میدان برداری نگاشتی است که به هر نقطه در منیفلد یک بردار مماس نسبت می‌دهد. به بیان دیگر، میدان برداری بر M ، یک برش از کلاف مماس TM است.

فرض کنیم $x = (x^1, \dots, x^j)$ یک دستگاه مختصات روی M باشد. به ازای هر $p \in M$ در این دستگاه، مختصات هر میدان برداری به شکل

$$x_p = \sum_{i=1}^n x^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i}; \quad x^i \in C^\infty(M).$$

نمایش داده می‌شود.

مثال ۲۸.۱.۱. $X(x, y) = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$ یک میدان برداری هموار روی \mathbb{R}^2 است.

گزاره ۲۹.۱.۱. فرض کنیم \mathbf{v} یک میدان برداری باشد که در یک نقطه $x_0 \in M$ صفر نشود ($\mathbf{v}|_{x_0} \neq 0$). آنگاه یک چارت مختصاتی موضعی $y = (y^1, \dots, y^m)$ در x_0 وجود دارد به طوری که $\mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial y^1}$.

□

برهان. [۱۹]

گزاره ۳۰.۱.۱. اگر \mathbf{X} یک میدان برداری باشد که در x -مختصات بیان شود،

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^m \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i},$$

و $y = \psi$ تغییر مختصات باشد، آنگاه \mathbf{v} در دستگاه مختصات y به شکل زیر نوشته می‌شود.

$$\mathbf{X} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m \xi^i(\psi^{-1}(y)) \frac{\partial \psi^j}{\partial x^i}(\psi^{-1}(y)) \frac{\partial}{\partial y^j}. \quad (1.1)$$

تعریف ۳۱.۱.۱. فرض کنیم X و Y دو میدان برداری روی منیفلد هموار M باشند. نداشت

$$[X, Y] : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$$

$$[X, Y]f = XYf - YXf,$$

را گروه لی دو میدان برداری x و y می‌نامیم.

گزاره ۳۲.۱.۱. (ویژگی‌های گروه لی). فرض کنیم X, Y, Z میدان‌های برداری روی M باشند، آنگاه گروه لی دارای ویژگی‌های زیر است:

• دو خطی است:

$$[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z],$$

$$[Z, aX + bY] = a[Z, X] + b[Z, Y],$$

که $a, b \in \mathbb{R}$

• پادمتقارن است:

$$[X, Y] = -[Y, X],$$

• در اتحاد ژاکوبی صدق می‌کند:

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

۳.۱.۱ تانسورها

تعریف ۳.۳.۱.۱. فرض کنیم W و V_1, \dots, V_k فضای‌های برداری باشند. نگاشت

$$F : V_1 \times \dots \times V_k \rightarrow W,$$

را یک نگاشت k -خطی گوئیم، هرگاه داشته باشیم:

$$F(\mathbf{v}_1, \dots, a\mathbf{v}_i + b\mathbf{v}'_i, \dots, \mathbf{v}_k) = aF(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_k) + bF(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}'_i, \dots, \mathbf{v}_k)$$

تعریف ۳.۴.۱.۱. فرض کنیم V یک فضای برداری n -بعدی باشد. یک k -تانسور روی V یک تابع چندخطی به صورت زیر است.

$$F : V_1 \times \dots \times V_k \rightarrow V.$$

تعریف ۳.۵.۱.۱. فرض کنیم V یک فضای برداری باشد و $\omega, \eta \in V^*$. تابع

$$\omega \otimes \eta : V \times V \rightarrow \mathbb{R} \quad (۲.۱)$$

$$\omega \otimes \eta(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \omega(\mathbf{v}_1)\eta(\mathbf{v}_2),$$

را ضرب تانسوری بین ω و η گوئیم.

تعریف ۳.۶.۱.۱. فرض کنیم V یک فضای برداری باشد. به نگاشت k -خطی

$$F : V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{R},$$

یک k -تانسور کواریان روی فضای برداری V می گوئیم.

مجموعه تمام k -تانسورهای کواریان روی فضای برداری V را با $T^k(V)$ نشان می دهیم و آن را به شکل زیر نمایش می دهیم:

$$T^k(V) = V^* \otimes \dots \otimes V^*.$$

تعریف ۳.۷.۱.۱. k -تانسور کواریان T روی فضای برداری V ، یک k -تانسور کواریان متناوب است هرگاه

$$T(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_j, \dots, \dots, \mathbf{v}_k) = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_j, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \dots, \mathbf{v}_k)$$

مجموعه تمام k -تانسورهای متناوب روی V را با $\wedge^k(V)$ نشان می دهیم.

مثال ۳.۸.۱.۱. نگاشت خطی

$$T : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$$

یک 2 -تانسور کواریان است؛ منظور تانسوری است که از ضرب دو فضای مماس به وجود می آید.

تعریف ۳۹.۱.۱. فرض کنیم V یک فضای برداری و $T \in T^k(V)$ و $S \in T^l(V)$ باشند. ضرب تانسوری بین T و S به شکل زیر تعریف می شود:

$$T \otimes S : \underbrace{V \times \dots \times V}_{k\text{-بار}} \times \underbrace{V \times \dots \times V}_{l\text{-بار}} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(T \otimes S)(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_{k+l}) = T(v_1, \dots, v_k)S(v_{k+1}, \dots, v_{k+l})$$

تعریف ۴۰.۱.۱. اگر V یک فضای برداری با بعد متناهی باشد، نگاهت

$$\text{Alt} : T^k(V) \rightarrow \bigwedge^k(V),$$

را به صورت زیر تعریف می شود:

$$\text{Alt}(T) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma} (\text{sgn} \sigma) T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}),$$

که در آن σ تمام جایگشت های ممکن روی k -تایی $\{v_1, \dots, v_k\}$ است.

تعریف ۴۱.۱.۱. فرض کنیم $\omega, \eta \in \bigwedge^k(V)$ باشند. آنگاه ضرب وج بین آنها را با نماد \wedge نشان می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\omega \wedge \eta = \frac{(k+l)!}{k!l!} \text{Alt}(\omega \otimes \eta).$$

گزاره ۴۲.۱.۱. (ویژگی های ضرب وج). فرض کنید $\omega, \omega', \eta, \eta', \xi \in \bigwedge^k(V)$ باشند، آنگاه ضرب وج بین آنها دارای ویژگی های زیر است:

• دوخطی است:

$$(a\omega + a'\omega') \wedge \eta = a(\omega \wedge \eta) + a'(\omega' \wedge \eta),$$

• شرکت پذیر است:

$$\omega \wedge (\eta \wedge \xi) = (\omega \wedge \eta) \wedge \xi,$$

• اگر $\omega \in \bigwedge^k(V)$ و $\eta \in \bigwedge^l(V)$ باشند، آنگاه:

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega.$$

۴.۱.۱ فرم های دیفرانسیلی

حال فرم های دیفرانسیلی و عملگرهای مهم روی آن را تعریف می کنیم.

تعریف ۴۳.۱.۱. ω یک k -فرم دیفرانسیلی است هرگاه

$$\omega = \sum_{i_1 \dots i_k=1}^n \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

مجموعه‌ی تمام k -فرم‌های دیفرانسیلی در M را با $\Omega^k(M)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۴۴.۱.۱. فرض کنیم M یک منیفلد n -بعدی باشد. $\Omega^k(M)$ یک فضای برداری با بعد $\binom{n}{k}$ با پایه $\{dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}\}$ است.

□

برهان. [۱۳]

تعریف ۴۵.۱.۱. اگر $\omega \in \Omega^k(M)$ عملگر دیفرانسیل (دیفرانسیل خارجی) به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$d : \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{k+1}(M)$$

فرض کنیم f یک تابع (۰-فرم) روی \mathbb{R}^3 باشد. آنگاه

$$df = \partial_1 f dx^1 + \partial_2 f dx^2 + \partial_3 f dx^3$$

دیفرانسیل توابع در ویژگی‌های زیر صدق می‌کند:

$$1. \quad d(f + g) = df + dg$$

$$2. \quad d(af) = a df$$

$$3. \quad d(fg) = df \cdot g + f dg$$

$$4. \quad d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{df \cdot g - f dg}{g^2}$$

$$5. \quad f = c \iff df = 0$$

بعد $\Omega^k(M)$ برابر $\binom{n}{k}$ است. که در آن n بعد منیفلد است.

می‌دانیم

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

که به این معنی است که به اندازه‌ی k -فرم، $(n-k)$ -فرم وجود دارد. روشی برای تبدیل یک k -فرم به $(n-k)$ -فرم وجود دارد. عملگر این تبدیل دوگان هج یا عملگر ستاره است.

تعریف ۴۶.۱.۱. عملگر ستاره یک k -فرم را به یک $(n-k)$ -فرم تبدیل می‌کند. به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\star : \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{n-k}(M)$$

اثر آن روی یک k -فرم به صورت زیر است:

$$\star(dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) = dx^{i_{k+1}} \wedge \dots \wedge dx^{i_n}$$

برای مثال اگر $n = 3$

$$\star dx^1 = dx^2 \wedge dx^3$$

$$\star dx^2 = dx^3 \wedge dx^1$$

$$\star dx^3 = dx^1 \wedge dx^2$$

ضرب وج، دیفرانسیل خارجی و عملگر ستاره عملگرهای مهم روی فرم‌های دیفرانسیلی هستند.

تعریف ۴۷.۱.۱. فرض کنیم $A = (a_1, a_2, a_3)$ یک بردار باشد. آنگاه دیورژانس A آن در مختصات دکارتی به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\nabla \cdot A = \frac{\partial a_1}{\partial x^1} + \frac{\partial a_2}{\partial x^2} + \frac{\partial a_3}{\partial x^3} \quad (3.1)$$

دیورژانس می‌تواند روی هر میدان تانسوری با رتبه‌ی ۱ و بالاتر عمل کند و یک تانسور با یک رتبه پایین‌تر می‌دهد.

تعریف ۴۸.۱.۱. فرض کنیم $A = (a_1, a_2, a_3)$ یک میدان برداری باشد. کرل A روی مختصات دکارتی به صورت زیر تعریف می‌شود و

$$\text{Curl}(A) = \nabla \times A = \left(\frac{\partial a_3}{\partial x^2} - \frac{\partial a_2}{\partial x^3}, \frac{\partial a_1}{\partial x^3} - \frac{\partial a_3}{\partial x^1}, \frac{\partial a_2}{\partial x^1} - \frac{\partial a_1}{\partial x^2} \right) \quad (4.1)$$

۲.۱ منیفلدهای ریمانی

در این بخش، ابتدا متریک را که یک میدان تانسوری است، تعریف می‌کنیم و سپس فضا زمان مینکوفسکی را معرفی می‌کنیم.

۱.۲.۱ متریک

تعریف ۱.۲.۱. یک متریک ریمانی روی منیفلد M یک میدان ۲-تانسوری مانند g است که:

۱. متقارن است:

$$g(X, Y) = g(Y, X),$$

۲. غیر تباهیده است، یعنی برای هر $Y \in T_p M$ ، $g(X, Y) = 0$ اگر و تنها اگر $X = 0$ ،

۳. مثبت معینی است، یعنی به ازای هر $X \neq 0$ داریم:

$$g(X, X) > 0$$

اگر شرط سوم برقرار نباشد به آن متریک شبه ریمانی می‌گوییم.

یک متریک ریمانی را برحسب یک دستگاه مختصات موضعی می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$g : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g(X, Y) = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$$

تعریف ۲.۲.۱. منیفلد هموار M مجهز به متریک ریمانی g را منیفلد ریمانی می‌نامیم و با (M, g) نمایش می‌دهیم.

همچنین منیفلد مجهز به متریک شبه ریمانی را منیفلد شبه ریمانی می‌نامیم.

۲.۲.۱ فضا زمان مینکوفسکی

تعریف ۳.۲.۱. فضا-زمان یک منیفلد شبه ریمانی چهار بعدی است که مولفه‌های آن زمان و مکان ذره هستند. منیفلد فضا زمان معادل رویدادها در فیزیک است.

تعریف ۴.۲.۱. فضا زمان مینکوفسکی را با چارت (ct, x^1, x^2, x^3) ، به همراه متریک

$$ds^2 = -c^2(dt)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$$

تعریف می‌کنیم. که x^i ها سه راستای فضا را نمایش می‌دهند، t مربوط به زمان می‌شود و c سرعت نور است.

۳.۱ گروه‌های لی

در این بخش، مفاهیم مربوط به نظریه گروه‌های لی را تعریف می‌کنیم.

۱.۳.۱ گروه لی

تعریف ۱.۳.۱. اگر G یک منیفلد هموار باشد به طوری که دارای ساختار جبری گروه باشد و نگاشت حاصل ضرب $m : G \times G \rightarrow G$ با ضابطه‌ی $m(g, h) = gh$ و نگاشت وارون $i : G \rightarrow G$ با ضابطه‌ی

$$i(g) = g^{-1}$$

هموار باشند آنگاه G یک گروه لی نام دارد.

مثال ۲.۳.۱. هر یک از منیفلدهای زیر یک گروه لی می‌باشند.

الف) $GL(n, \mathbb{R})$. گروه خطی عام $GL(n, \mathbb{R})$ متشکل از کلیه ماتریس‌های حقیقی وارون‌پذیر $n \times n$ یک گروه هستند. از طرفی $GL(n, \mathbb{R})$ خود یک منیفلد n^2 -بعدی است و نگاشت m :
 $(A, B) \rightarrow AB$ با ضابطه‌ی $GL(n, \mathbb{R}) \times GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$
 و نگاشت $i: GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ با ضابطه‌ی $A \rightarrow A^{-1}$
 هموار هستند. لذا $GL(n, \mathbb{R})$ با عمل ضرب ماتریس‌ها یک گروه لی است.

ب) $(\mathbb{R}, +)$ یک گروه لی است.

تعریف ۳.۳.۱. فرض کنیم G و H دو گروه لی باشند نگاشت $F: G \rightarrow H$ همومورفیسم گروه‌های لی است هرگاه علاوه بر همومورفیسم بودن گروهی، همئومورفیسم باشد.

مثال ۴.۳.۱. الف) \mathbb{R} تحت عمل جمع و \mathbb{R}^* تحت عمل ضرب را به عنوان یک گروه لی در نظر می‌گیریم، نگاشت $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ با ضابطه‌ی $\exp(t) = e^t$ هموار است، و یک همومورفیسم گروه لی است چون $e^{(s+t)} = e^s e^t$. تصویر \exp زیرگروه باز از \mathbb{R}^+ شامل اعداد حقیقی مثبت، و $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ یک ایزومورفیسم گروه لی با معکوس $\log: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$.

ب) تابع دترمینان $\det: GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^*$ هموار است زیرا $\det A$ یک چندجمله‌ای از عناصر ماتریس A است. این تابع یک همومورفیسم گروه لی است زیرا $\det(AB) = (\det A)(\det B)$.

تعریف ۵.۳.۱. یک گروه تبدیلات مثل G که روی یک منیفلد هموار مانند M عمل می‌کند، توسط یک گروه لی و یک نگاشت هموار مانند

$$\Phi: G \times M \rightarrow M$$

$$\Phi(g, x) = g.x,$$

تعریف می‌شود که برای تمام $x \in M$ و $g, h \in G$ در شرایط زیر صدق می‌کند:

$$e.x = x, \quad g.(h.x) = (g.h).x.$$

تعریف ۶.۳.۱. فرض کنیم G یک گروه تبدیلات روی منیفلد M باشد، میدان برداری \mathbf{v} روی M را G -ناوردا گوئیم هرگاه به ازای هر $g \in G$ ، $p \in M$ داشته باشیم:

$$dg(\mathbf{v}_p) = \mathbf{v}_{gp}.$$

به طوری که $g.p$ تعریف شده باشد.

فرض کنیم $g \in G$ دلخوا باشد و $L_g: h \rightarrow g.h$ و $R_g: h \rightarrow h.g$ نگاشت ضرب راست و چپ باشند. یک میدان برداری \mathbf{v} روی G را ناوردای راست گوئیم، هرگاه $dL_g(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ و ناوردای چپ گوئیم، هرگاه $dR_g(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ باشد.

۲.۳.۱ جبر لی

اگر G یک گروه لی باشد، میدان‌های برداری خاصی روی آن وجود دارند که تحت عمل گروه ناورداست. این میدان‌های برداری ناوردا یک فضای برداری با بعد نامتناهی می‌سازند که به آن جبر لی G گفته می‌شود. تمام ویژگی‌هایی که در یک گروه لی وجود دارند، در جبر لی آن نیز هستند. یکی از با اهمیت‌ترین فوایدی که این جبرها دارند و کار با آنها ساده‌تر از کار با گروه‌های لی است و در فصل‌های آینده بسیار زیاد با آن روبرو خواهیم شد، آن است که شرط‌های غیر خطی پیچیده‌ای که در مسایل با آن روبرو می‌شویم تحت این مولدهای بی‌نهایت کوچک به شروطی خطی تبدیل شده و کار با آن ساده‌تر می‌سازد [۸].

تعریف ۷.۳.۱. جبر لی راست (چپ) گروه لی G فضای تمام ناورداهای راست (چپ) میدان‌های برداری روی G است.

تعریف ۸.۳.۱. یک جبر لی \mathcal{G} یک فضای برداری مجهز به یک عملگر کروسه لی $[\cdot, \cdot] : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ است.

گزاره ۹.۳.۱. اگر G یک گروه لی باشد، آنگاه دیفرانسیل نگاشت وارون یک جبر لی ایزومورفیزم بین جبر لی راست و چپ تعریف می‌کند.

$$di : \mathcal{G}_L \simeq \mathcal{G}_R.$$

تعریف ۱۰.۳.۱. فرض کنیم v_1, \dots, v_r یک پایه برای جبر لی \mathcal{G} باشد. آنگاه ثابت‌های ساختاری C_{ij}^k متناظر با آن را توسط رابطه‌ی کروسه

$$[v_i, v_j] = \sum_{k=1}^r C_{ij}^k v_k,$$

تعریف می‌شوند.

ساده‌ترین راه برای نشان دادن ساختار یک جبر لی نوشتن آن به شکل جدول است.

تعریف ۱۱.۳.۱. اگر \mathcal{G} یک جبر لی r بعدی، و v_1, \dots, v_r یک پایه برای \mathcal{G} باشد، آنگاه جدول لی برای \mathcal{G} یک جدول $r \times r$ است که عنصر (i, j) -ام آن کروسه لی $[v_i, v_j]$ را بیان می‌کند. ثابت‌های ساختاری را می‌توان به راحتی از روی جدول خواند؛ c_{ij}^k ضریب v_k در رایه ij -ام جدول است.

مثال ۱۲.۳.۱. اگر $\mathcal{G} = \mathcal{SL}(2)$ ، جبر لی گروه $\mathcal{SL}(2)$ باشد و

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

یک پایه برای آن گرفته باشیم، آنگاه جدول لی آن به صورت زیر است: برای مثال،

$$[v_1, v_3] = v_3 v_1 - v_1 v_3 = -2v_2,$$

$[,]$	v_1	v_2	v_3
v_1	\circ	v_1	$-2v_2$
v_2	$-v_1$	\circ	v_3
v_3	$2v_2$	$-v_3$	\circ

جدول ۱.۱: جدول لی گروه $SL(2)$

است. ثابت‌های ساختاری

$$c_{12}^1 = c_{23}^3 = 1 = -c_{21}^1 = -c_{32}^3, \quad c_{13}^2 = -2 = -c_{31}^2,$$

و بقیه c_{ij}^k ها صفر هستند.

تعریف ۱۳.۳.۱. فرض کنیم G یک گروه لی و \mathcal{G} جبر لی آن باشد. نگاشت نمایی یک نگاشت به صورت زیر است

$$\exp : \mathcal{G} \rightarrow G. \quad (5.1)$$

تعریف ۱۴.۳.۱. فرض کنیم v یک میدان برداری باشد، خم انتگرال ماکسیمال پارامتری شده که از x در M می‌گذرد را با $\Psi(\epsilon, x)$ نشان می‌دهیم و آن را شار تولید شده توسط v می‌نامیم. طبق قضیه تیلور، در مختصات موضعی داریم [۲۰]:

$$\Psi(\epsilon, x) = x + \epsilon \xi(x) + O(\epsilon^2),$$

که در آن $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^m)$ ضرایب v هستند.

محاسبه شار یا یک گروه پارامتری که توسط میدان برداری دلخواه v تولید می‌شوند، معمولاً با نگاشت نمایی میدان برداری انجام می‌شود.

$$\exp(\epsilon v)x = \Psi(\epsilon, x).$$

مثال ۱۵.۳.۱. فرض کنیم $M = \mathbb{R}$ با مختصات x باشد، و میدان برداری $v = \partial_x$ را در نظر بگیرید. آنگاه

$$\exp(\epsilon v)x = \exp(\epsilon \partial_x)x = x + \epsilon.$$

برای میدان برداری $x \partial_x$:

$$\exp(\epsilon x \partial_x)x = e^\epsilon x.$$

برای میدان برداری $a \partial_x$:

$$\exp(\epsilon v)x = \exp(\epsilon \partial_x)x = x + a\epsilon,$$

که در آن a یک مقدار ثابت است.

گزاره ۱۶.۳.۱. فرض کنیم G یک گروه لی پیوسته با جبر لی \mathcal{G} باشد. هر عنصر گروه را می‌توان به صورت ضرب توابع نمایی نوشت:

$$g = \exp(\mathbf{v}_1) \circ \dots \circ \exp(\mathbf{v}_k); \quad \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathcal{G}.$$

تعریف ۱۷.۳.۱. یک گروه لی تبدیلات G که روی منیفلد M عمل می‌کند توسط یک مجموعه از میدان‌های برداری روی M تولید می‌شود، که به آن‌ها مولدهای بی‌نهایت کوچک عمل گروه می‌گوییم.

در مورد گروه‌های پیوسته، عمل گروه را می‌توان با مولد بی‌نهایت کوچک آن دریافت.

فصل ۲

نظریه‌ی گروه‌های لی در معادلات دیفرانسیل

در این فصل به بررسی نظریه‌ی گروه‌های لی و کاربردهای آن در معادلات دیفرانسیل می‌پردازیم. در بخش اول، مفاهیم فضای جت، امتداد دادن و فضای کامل را تعریف می‌کنیم. و یک روش برای به‌دست آوردن مولدهای بی‌نهایت کوچک با استفاده از مفهوم امتداد دادن یک عمل گروه روی فضای کامل دستگاه معادلات داده شده معرفی می‌کنیم. در بخش دوم، گروه تقارن لی یک دستگاه معادلات را محاسبه کرده و به بررسی کاربردهای گروه تقارن لی در تحلیل معادلات دیفرانسیل می‌پردازیم.

۱.۲ دستگاه معادلات دیفرانسیل

تعریف ۱.۱.۲. یک دستگاه معادلات دیفرانسیل با p متغیر مستقل (x^1, \dots, x^p) و q متغیر وابسته (u^1, \dots, u^q) در نظر می‌گیریم. جواب چنین دستگاهی تابعی به شکل $u = f(x)$ است که در آن

$$u^\alpha = f^\alpha(x^1, \dots, x^p), \quad \alpha = 1, \dots, q,$$

تابعی هموار از متغیرهای مستقل (x^1, \dots, x^p) است، که می‌توانیم آن را به‌عنوان یک مختصات موضعی روی فضای اقلیدسی $X \simeq \mathbb{R}^p$ و همچنین متغیرهای وابسته (u^1, \dots, u^q) را به‌عنوان یک مختصات موضعی $U \simeq \mathbb{R}^q$ در نظر بگیریم.

تعریف ۲.۱.۲. یک دستگاه معادلات دیفرانسیل با p متغیر مستقل و q متغیر وابسته در نظر می‌گیریم. آنگاه فضای کامل، فضای اقلیدسی $E = X \times U \simeq \mathbb{R}^{p+q}$ است.

۲.۲ امتداد دهی

فضای شامل متغیرهای مستقل و وابسته و مشتقات متغیرهای وابسته را فضای جت می‌نامند. در این بخش یک فرمول‌بندی از این فضا ارائه می‌کنیم.

یک تابع حقیقی هموار مانند $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ با p متغیر مستقل و q متغیر وابسته دارای تعداد

$$p_k = \binom{p+k-1}{k}.$$

مشتق جزئی متمایز از مرتبه k است. اگر $J = (j_1, \dots, j_k)$ یک اندیس چندگانه از متغیرهای تابع f باشد مشتق جزئی تابع f نسبت به J را به صورت

$$\partial_J f(x) = \frac{\partial^k f(x)}{\partial x^{j_1} \dots \partial x^{j_k}},$$

نمایش داده می‌شود. مرتبه اندیس چندگانه J را که با $\#J \equiv k$ نشان می‌دهیم. بیانگر آن است که چند بار از تابع مشتق گرفته‌ایم.

فضای تمام مشتقات جزئی این تابع تا مرتبه n -ام را با

$$U^{(n)} := U \times U_1 \times \dots \times U_n, \quad (1.2)$$

نشان می‌دهیم.

تعریف ۱.۲.۲. فرض کنیم $f : X \rightarrow U$ یک تابع p متغیر مستقل و q متغیر وابسته باشد. فضای جت مرتبه n -ام فضای اقلیدسی $J^n = X \times U^n$ است که یک فضای $p + q \binom{p+n}{n} \equiv p + q \binom{p+n}{n}$ بعدی است.

مثال ۲.۲.۲. فرض کنیم $u = f(x, y)$ یک تابع با دو متغیر مستقل و یک متغیر وابسته باشد. برای یافتن J^2 کافی است که مشتقات جزئی تابع را تا مرتبه‌ی دوم بنویسیم. بنابراین داریم:

$$J^2 = \{(x, y; u; u_x, u_y; u_{xx}, u_{xy}, u_{yy})\}$$

تعریف ۳.۲.۲. به فضای جت مرتبه n -ام یک تابع به غیر از متغیرهای مستقل امتداد تابع تا مرتبه n -ام می‌نامیم و آن را با $u^{(n)} = f^{(n)}(x)$ نشان می‌دهیم. بنابراین امتداد مرتبه‌ی دوم تابع f در مثال ۲.۲.۲ برابر است با:

$$f^{(2)}(x, y) = (f; f_x, f_y; f_{xx}, f_{xy}, f_{yy})$$

۳.۲ فرمول‌بندی ریاضی دستگاه معادلات دیفرانسیل

در این بخش با استفاده از فضای جت تعریف دقیق تری از یک دستگاه معادلات دیفرانسیل بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۳.۲. یک دستگاه m معادله دیفرانسیل مرتبه‌ی n -ام مانند Δ با فضای کامل E تابعی به صورت

$$\Delta : J^{(n)} \longrightarrow \mathbb{R}^m \quad (۲.۲)$$

$$\Delta_\nu(x, u^{(n)}) = 0, \quad \nu = 1, \dots, m,$$

است.

تعریف ۲.۳.۲. یک جواب هموار از دستگاه معادلات دیفرانسیل (۱۲.۴) تابعی هموار مانند $u = f(x)$ است به طوری که:

$$\Delta_\nu(x, f^{(n)}(x)) = 0, \quad \nu = 1, \dots, m. \quad (۳.۲)$$

مثال ۳.۳.۲. معادله لاپلاس

$$u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

این معادله دارای دو متغیر مستقل x و y می‌باشد و همچنین مرتبه آن $n = ۲$ است. فضای کامل آن به صورت

$$E = X \times U = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^3$$

است. فضای جت مرتبه دوم آن به صورت زیر است:

$$\{(x, y; u; u_x, u_y; u_{xx}, u_{xy}, u_{yy})\}$$

تعریف ۴.۳.۲. دستگاه معادلات دیفرانسیل (۳.۲) از رتبه‌ی ماکسیمال است هرگاه ماتریس ژاکوبی آن

$$\mathbf{J}_\Delta(x, u^{(n)}) = \left(\frac{\partial \Delta_\nu}{\partial x^i}, \frac{\partial \Delta_\nu}{\partial u_j^\alpha} \right)_{m \times (p+qp^{(n)})}$$

از رتبه m باشد.

قضیه ۵.۳.۲. فرض کنیم G یک گروه تبدیلات همبند باشد که روی M عمل کند. تابع $\zeta : M \rightarrow \mathbb{R}$ تحت عمل گروه G -ناورد است اگر و تنها اگر برای هر $v \in \mathfrak{g}$ و $p \in M$

$$\mathbf{v}_p(\zeta) = 0. \quad (۴.۲)$$

□

برهان. [۱۹]

۴.۲ روش ساختن ناورداهای

در این قسمت نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان ناورداهای یک عمل گروه داده شده را پیدا کرد. ابتدا فرض کنید G یک گروه یک پارامتری از تبدیلات روی M با مولد بی‌نهایت کوچک

$$\mathbf{v} = \xi^1(x) \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + \xi^m(x) \frac{\partial}{\partial x^m} \quad (۵.۲)$$

باشد که در یک مختصات موضعی دلخواه بیان شده است. یک ناوردای $\zeta(x)$ از G یک جواب خطی، معادله دیفرانسیل جزیی مرتبه اول همگن

$$v(\zeta) = \xi^1(x) \frac{\partial \zeta}{\partial x^1} + \cdots + \xi^m(x) \frac{\partial \zeta}{\partial x^m} = 0 \quad (6.2)$$

است. نظریه کلاسیک معادلاتی هم‌چون (۶.۲) نشان می‌دهد که جواب معادله (۶.۲) را می‌توان با انتگرال‌گیری از دستگاه مشخصه معادلات دیفرانسیل معمولی پیدا کرد. که دستگاه مشخصه معادله (۶.۲) به صورت

$$\frac{dx^1}{\xi^1(x)} = \cdots = \frac{dx^m}{\xi^m(x)} \quad (7.2)$$

جواب عمومی (۷.۲) به صورت

$$\zeta^1(x^1, \dots, x^m) = c_1, \dots, \zeta^{m-1}(x^1, \dots, x^m) = c_{m-1}, \quad (8.2)$$

است که در آن c_1, \dots, c_{m-1} ثابت‌های انتگرال و $\zeta^i(x)$ توابع مستقل از c_i ها هستند.

مثال ۱.۴.۲. گروه دوران $SO(2)$ را در نظر بگیرید. مولد بی‌نهایت کوچک آن $v = -y\partial_x + x\partial_y$ است [۲۰]. دستگاه مشخصه متناظر با آن

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x}$$

است. این معادله دیفرانسیل به راحتی حل می‌شود. جواب‌های آن $x^2 + y^2 = c$ هستند، که در آن c یک مقدار ثابت است. بنابراین $\zeta(x, y) = x^2 + y^2$ تنها ناوردای مستقل گروه دوران است.

۵.۲ گروه‌های تقارن معادلات دیفرانسیل

گروه تقارن یک دستگاه معادلات دیفرانسیل بزرگ‌ترین گروه تبدیلات است که روی متغیرهای مستقل و وابسته‌ی دستگاه عمل می‌کند، و جواب‌های دستگاه را به جواب‌های دیگر انتقال می‌دهد. هدف این بخش پرداختن به یک روش مفید، سیستماتیک و محاسباتی است که گروه تقارن یک دستگاه معادلات دیفرانسیل را مشخص می‌کند.

مهم‌ترین نوع تقارن‌ها یک گروه تبدیلات نقطه‌ای است که روی فضای متغیرهای مستقل و وابسته عمل می‌کند. در این نوشتار روی مطالعه گروه‌های تقارن تبدیلات نقطه‌ای متمرکز می‌شویم.

تعریف ۱.۵.۲. یک تبدیل نقطه‌ای $g: E \rightarrow E$ ، که روی فضای $E \simeq X \times U$ اثر می‌کند، یک تقارن دستگاه معادلات دیفرانسیل است، اگر هرگاه $u = f(x)$ یک جواب دستگاه باشد آنگاه $\bar{u} = g.f$ نیز یک جواب برای دستگاه باشد.

۱.۵.۲ امتداد دهی عمل گروه

از آنجایی که ما دنبال مطالعه تقارن‌های معادلات دیفرانسیل هستیم، نیاز داریم بدانیم که گروه تبدیلات چگونه روی فضای جت عمل می‌کند.

فرض کنیم G یک گروه از تبدیلات باشد که روی یک زیرمجموعه باز از فضای کامل E مانند O عمل می‌کند. این عمل را می‌توان به فضای جت مرتبه n -ام یعنی $J^n(O)$ ترفیع داد، که به آن امتداد مرتبه n -ام عمل گروه G روی O نامیده و با $G^{(n)}$ نشان می‌دهیم. به بیان دیگر منظور از امتداد عمل یک گروه، تعمیم عمل آن به مشتقات جزئی تا مرتبه n -ام تابع $u = f(x)$ است. این فرایند به این گونه است که اگر g یک تبدیل از گروه G باشد آنگاه با در نظر گرفتن g به عنوان یک تابع به صورت $O \rightarrow O$ امتداد آن را به صورت:

$$g^{(n)} : J^n(O) \rightarrow J^n(O)$$

با ضابطه $g^{(n)}.(x^\circ, u^\circ) = (\bar{x}^\circ, \bar{u}^\circ)$ به ازای نقطه‌ی دلخواه $(x^\circ, u^\circ) \in J^n(O)$ تعریف می‌شود.

مثال ۲.۵.۲. فرض کنید $E = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ باشد. عمل گروه $SO(2)$ روی E را در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم این عمل را تا مرتبه‌ی یک امتداد دهیم. در این حالت $J^1(E) = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1 \simeq \mathbb{R}^3$. امتداد مرتبه اول $\theta_t^{(1)}$ روی فضای J^1 با چارت (x, u, u_x) است. می‌دانیم اگر $u = f(x)$ یک تابع روی E باشد آنگاه طبق تعریف (۳.۲.۲) داریم:

$$f^{(1)}(x) = (f(x), f'(x)),$$

امتداد مرتبه‌ی اول f است. فرض کنیم $(x^\circ, u^\circ, u_x^\circ)$ نقطه‌ای از $J^1(E)$ و θ تبدیلی از $SO(2)$ باشد. هدف یافتن تبدیل

$$\theta^{(1)}.(x^\circ, u^\circ, u_x^\circ) = (\bar{x}^\circ, \bar{u}^\circ, \bar{u}_x^\circ),$$

است. چند جمله‌ای

$$f(x) = u^\circ + u_x^\circ(x - x^\circ) = u_x^\circ x + (u^\circ - u_x^\circ x^\circ) \quad (9.2)$$

را که در آن $f(x) = u^\circ$ و $f'(x) = u_x^\circ$ را در نظر می‌گیریم. با توجه به تابع (۹.۲)، تبدیل f تحت زاویه‌ی θ تابع خطی

$$\bar{f}(\bar{x}) = \theta.f(\bar{x}) = \frac{\sin \theta + u_x^\circ \cos \theta}{\cos \theta - u_x^\circ \sin \theta} \bar{x} + \frac{u^\circ - x^\circ u_x^\circ}{\cos \theta - u_x^\circ \sin \theta}, \quad u_x^\circ \neq \cot \theta, \quad (10.2)$$

می‌باشد. بنابراین

$$\bar{x}^\circ = x^\circ \cos \theta - u^\circ \sin \theta,$$

و

$$\bar{u}^\circ = x^\circ \sin \theta + u^\circ \cos \theta,$$

حال با یک بار مشتق‌گیری از \bar{u} داریم:

$$\bar{u}_x^\circ = \bar{f}'(\bar{x}^\circ) = \frac{\sin \theta + u_x^\circ \cos \theta}{\cos \theta - u_x^\circ \sin \theta},$$

بنابراین ضابطه امتداد مرتبه‌ی اول عملگر گروه $\text{SO}(2)^{(1)}$ روی $J^{(1)}$ را می‌توان به شکل زیر نوشت.

$$\theta^{(1)}.(x, u, u_x) = \left(x \cos \theta - u \sin \theta, x \sin \theta + u \cos \theta, \frac{\sin \theta + u_x \cos \theta}{\cos \theta - u_x \sin \theta} \right), \quad |\theta| < |\text{arccot} u_x|.$$

در مثال فوق همانگونه که مشاهده می‌شود $\text{SO}(2)^{(1)}$ روی متغیرهای (x, u) همانطور عمل می‌کند که $\text{SO}(2)$ عمل می‌کند و $\text{SO}(2)^{(1)}$ تنها روی u_x به صورتی متفاوت عمل می‌کند. به طور کلی اگر $G^{(n)}$ روی $(x, u^{(n)})$ عمل کند، با تقلیل این عمل به مرتبه‌ی $k \leq n$ معادل عمل $G^{(n)}$ خواهد بود. به ویژه برای $k = 0$ عمل $G^{(n)}$ با عمل G یکی است. بدین معنا که اگر $\pi_k^n : J^n(O) \rightarrow J^k(O)$ نگاشت تصویر طبیعی با ضابطه‌ی $\pi_k^n(x, u^{(n)}) = (x, u^{(k)})$ باشد، شامل آن دسته از مؤلفه‌های u_j^α است که در آن $\#J \leq k$. به عنوان مثال:

$$\pi_k^n(x, y; u; u_x, u_y; u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = (x, y; u; u_x, u_y)$$

۲.۵.۲ امتداد میدان‌های برداری

همان‌طور که در بخش گذشته مشاهده شد عمل یک گروه قابل امتداد به روی فضای جت است. در این بخش نشان می‌دهیم که میدان‌های برداری را نیز می‌توان امتداد داد که از آن به مولدهای بینهایت کوچک یاد می‌شود. این فرایند اولین گام برای یافتن تقارن‌های معادلات دیفرانسیل است.

تعریف ۳.۵.۲. فرض کنیم O یک زیر مجموعه باز از $E = X \times U$ و \mathbf{v} یک میدان برداری روی O با گروه یک-پارامتری $\exp(\varepsilon \mathbf{v})$ باشد. امتداد مرتبه‌ی n -ام \mathbf{v} را که با $\mathbf{v}^{(n)}$ نشان می‌دهیم، که یک میدان برداری روی $J^n(O)$ بوده و به آن مولد بینهایت کوچک گروه یک-پارامتری $[\exp(\varepsilon \mathbf{v})]^{(n)}$ می‌گویند. بدین معنی که

$$\mathbf{v}^{(n)} \Big|_{(x, u^{(n)})} = \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} [\exp(\varepsilon \mathbf{v})]^{(n)}(x, u^{(n)}), \quad (x, u^{(n)}) \in J^n(O). \quad (11.2)$$

۳.۵.۲ فرمول امتداد میدان‌های برداری

در این بخش فرمول محاسباتی امتداد میدان برداری را معرفی می‌کنیم تا به کمک آن امتداد یک میدان را محاسبه کنیم.

فرمول یک میدان برداری به صورت زیر است

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^p \xi^i(x, u) \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^q \phi^\alpha(x, u) \frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \quad (12.2)$$

که در آن x^i ها متغیرهای مستقل و u^α متغیرهای وابسته هستند.

تعریف ۴.۵.۲. مشخصه میدان برداری \mathbf{v} داده شده به صورت (۱۲.۲)، یک q -تایی از توابع $Q(x, u^{(1)})$ است، که به x, u و مشتق مرتبه اول u بستگی دارد، و به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$Q(x, u^{(1)}) = \phi^\alpha(x, u) - \sum_{i=1}^p \xi^i(x, u) \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i}. \quad (13.2)$$

تعریف ۵.۵.۲. فرض کنیم $O \subset E$ باز و $F(x, u^{(n)})$ یک تابع هموار روی $J^n(O)$ باشد. مشتق کامل F نسبت به x^j را که با $D_j F(x, u^{(n+1)})$ نشان می‌دهیم تابع همواری است روی $J^{n+1}(O)$ تعریف شده و دارای این ویژگی است که اگر $u = f(x)$ تابعی هموار باشد آنگاه

$$D_i F(x, f^{n+1}(x)) = \frac{\partial}{\partial x^i} [F(x, u^{(n)})].$$

گزاره زیر که مستقیماً از قاعده‌ی زنجیره‌ای مشتق حاصل می‌شود فرمول صریحی برای محاسبه‌ی مشتق کامل در قالب یک عملگر مشتق به دست می‌دهد.

گزاره ۶.۵.۲. تابع $F(x, u^{(n)})$ را روی فضای جت $J^n(O)$ مفروض است. اگر $J = (j_1, \dots, j_k)$ یک اندیس چندگانه و $u_{J,i}^\alpha = \partial u_j^\alpha / \partial x^i$ باشد آنگاه:

$$D_i F = \frac{\partial F}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^q \sum_J u_{J,i}^\alpha \frac{\partial F}{\partial u_J^\alpha}. \quad (14.2)$$

مثلاً اگر $E \simeq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ با مختصات (x, y, u) باشد، در این صورت

$$D_x F = \frac{\partial F}{\partial x} + u_x \frac{\partial F}{\partial u} + u_{xx} \frac{\partial F}{\partial u_x} + u_{xy} \frac{\partial F}{\partial u_y} + u_{xxx} \frac{\partial F}{\partial u_{xx}} + \dots,$$

$$D_y F = \frac{\partial F}{\partial y} + u_y \frac{\partial F}{\partial u} + u_{xy} \frac{\partial F}{\partial u_x} + u_{yy} \frac{\partial F}{\partial u_y} + u_{xxy} \frac{\partial F}{\partial u_{xx}} + \dots.$$

به ترتیب مشتق کامل F نسبت به x و y می‌باشند. به همین شکل مشتق کامل مراتب بالاتر را می‌توان نسبت به اندیس چندگانه (j_1, \dots, j_k) به صورت

$$D_J = D_{j_1} D_{j_2} \cdots D_{j_k}$$

بیان کرد. حال شرایط مهیا است تا قضیه‌ای را ارائه کنیم که نحوه‌ی محاسبه‌ی امتداد میدان‌های برداری را به دست می‌دهد.

قضیه ۷.۵.۲. فرض کنیم \mathbf{v} یک میدان برداری به شکل (۱۲.۲) و $Q = (Q^1, \dots, Q^q)$ مشخصه‌ی آن باشد. امتداد مرتبه n -ام \mathbf{v} به صورت

$$\mathbf{v}^{(n)} = \sum_{i=1}^p \xi^i(x, u) \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^q \sum_{\#J=n} \phi_J^\alpha(x, u^{(j)}) \frac{\partial}{\partial u_J^\alpha},$$

نوشته می‌شود، به طوری که

$$\begin{aligned}\phi_J^\alpha &= D_J Q^\alpha + \sum_{i=1}^p \xi^i u_{J,i}^\alpha, \\ &= D_J \left(\phi^\alpha - \sum_{i=1}^p \xi^i u_i^\alpha \right) + \sum_{i=1}^p \xi^i u_{J,i}^\alpha\end{aligned}\quad (15.2)$$

ضرایب میدان برداری امتداد داده شده است.

□

برهان. [۲۰]

مثال ۸.۵.۲. عمل گروه $SO(2)$ را روی $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \simeq X \times U$ را در نظر می‌گیریم. مولد بینهایت کوچک آن به صورت

$$\mathbf{v} = -u \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial u},$$

است. در این مورد $\phi = x$ و $\xi = -u$ می‌باشد. امتداد مرتبه‌ی اول آن برابر است با:

$$\mathbf{v}^{(1)} = \mathbf{v} + \phi^x \frac{\partial}{\partial u_x},$$

به طوری که

$$\phi_x = D_x(\phi - \xi u_x) + \xi u_{(xx)} = 1 + u_x^y.$$

و لذا امتداد مرتبه اول آن برابر است با

$$\mathbf{v}^{(1)} = -u \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial u} + (1 + u_x^y) \frac{\partial}{\partial u_x}.$$

امتداد مرتبه دوم آن نیز برابر است با:

$$\mathbf{v}^{(2)} = \mathbf{v} + \phi_x \frac{\partial}{\partial u_x} + \phi_{xx} \frac{\partial}{\partial u_{xx}}$$

به طوری که نشان داده می‌شود

$$\phi_{xx} = D_x^y(\phi - \xi u_x) + \xi u_{xxx} = D_x^y(x + u u_x) - u u_{xxx} = 3 u_x u_{xx},$$

بنابراین امتداد مرتبه دوم مولد بی‌نهایت کوچک عمل $SO(2)$ روی $X \times U^{(2)}$ برابر است با:

$$\mathbf{v}^{(2)} = -u \frac{\partial}{\partial u} + x \frac{\partial}{\partial u} + (1 + u_x^y) \frac{\partial}{\partial u_x} + 3 u_x u_{xx} \frac{\partial}{\partial u_{xx}}.$$

قضیه ۹.۵.۲. یک گروه همبند از تبدیلات G یک گروه تقارن برای دستگاه معادلات دیفرانسیل $\Delta = \circ$ هست، اگر و تنها اگر شرط

$$\mathbf{v}^{(n)}(\Delta_\nu) = \circ, \quad \nu = 1, \dots, r, \quad (16.2)$$

برای هر مولد بی‌نهایت $\mathbf{v} \in \mathfrak{g}$ از G برقرار باشد.

۶.۲ محاسبه‌ی گروه‌های تقارن

در این بخش به محاسبه تقارن‌های معادلات دیفرانسیل می‌پردازیم.

۱.۶.۲ معادله‌ی دگاسپریس-پروسسی

معادله‌ی دگاسپریس-پروسسی^۱ یک معادله PDE غیرخطی و مرتبه سوم است و به صورت زیر است:

$$u_t - u_{txx} + 2\kappa u_x + 4uu_x - 3u_x u_{xx} - uu_{xxx} = 0, \quad (17.2)$$

که در آن κ یک عدد حقیقی است. این معادله یک مدل برای موج‌های سطحی است [۳]. مولد بی‌نهایت کوچک این معادله به صورت

$$\mathbf{v} = \xi^t(t, x, u) \frac{\partial}{\partial t} + \xi^x(t, x, u) \frac{\partial}{\partial x} + \phi(t, x, u) \frac{\partial}{\partial u}, \quad (18.2)$$

است.

امتداد سوم مولد بی‌نهایت کوچک گروه معادله (۱۷.۲) به صورت

$$\mathbf{v}^{(3)} = \phi \frac{\partial}{\partial u} + \phi_t \frac{\partial}{\partial u_t} + \phi_x \frac{\partial}{\partial u_x} + \phi_{xx} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \phi_{xxt} \frac{\partial}{\partial u_{xxt}} + \phi_{xxx} \frac{\partial}{\partial u_{xxx}}, \quad (19.2)$$

است. فضای جت مرتبه سوم معادله (۱۷.۲) به صورت

$$\mathbf{J}^3 = \{(t, x; u; u_t, u_x; u_{tt}, u_{tx}, u_{xx}; u_{ttt}, u_{ttx}, u_{txx}, u_{xxx})\}.$$

است. بنابراین، با توجه به فضای جت معادله (۱۷.۲) مشتقات کامل معادله عبارتند از:

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t} + u_t \frac{\partial}{\partial u} + u_{tt} \frac{\partial}{\partial u_t} + u_{tx} \frac{\partial}{\partial u_x} + u_{txx} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + u_{tttx} \frac{\partial}{\partial u_{tttx}} + u_{tttx} \frac{\partial}{\partial u_{txxx}} + \dots,$$

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + u_x \frac{\partial}{\partial u} + u_{tx} \frac{\partial}{\partial u_t} + u_{xx} \frac{\partial}{\partial u_x} + u_{xxx} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + u_{xtxx} \frac{\partial}{\partial u_{xtxx}} + u_{xtxx} \frac{\partial}{\partial u_{xxx}} + \dots.$$

با استفاده از فرمول (۱۵.۲) ضرایب امتداد مرتبه سوم مولد بی‌نهایت کوچک معادله (۱۸.۲) را به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} \phi_t &= D_t(\phi - \xi^t u_t - \xi^x u_x) + \xi^t u_{tt} + \xi^x u_{tx}, \\ &= -\xi_u^t u_t^2 - \xi_u^x u_t u_x + u_t \phi_u - \xi_t^t u_t - \xi_t^x u_x + \phi_t, \\ \phi_x &= D_x(\phi - \xi^t u_t - \xi^x u_x) + \xi^t u_{tx} + \xi^x u_{xx}, \\ &= -\xi_u^t u_t u_x - \xi_u^x u_x^2 + u_x \phi_u - \xi_x^t u_t - \xi_x^x u_x + \phi_x. \end{aligned}$$

^۱Degasperis-Procesi

با انجام محاسبات مشابه، سایر ضرایب (۱۹.۲) را به دست می‌آوریم و در آن جایگذاری می‌کنیم. در نتیجه (۱۹.۲) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^{(3)} = & \phi \frac{\partial}{\partial u} + (-\xi_u^t u_t^{\checkmark} - \xi_u^x u_t u_x + u_t \phi_u - \xi_t^t u_t - \xi_t^x u_x + \phi_t) \frac{\partial}{\partial u_t} \\ & + (-\xi_u^t u_t u_x - \xi_u^x u_x^{\checkmark} + u_x \phi_u - \xi_x^t u_t - \xi_x^x u_x + \phi_x) \frac{\partial}{\partial u_x} \\ & + (-\xi_{uu}^t u_t u_x^{\checkmark} - \xi_{uu}^x u_x^{\checkmark} - \xi_{uu}^t u_t u_{xx} - \Upsilon \xi_u^t u_x u_{tx} - \Upsilon \xi_u^x u_x u_{xx} + \phi_{uu} u_x^{\checkmark} - \Upsilon \xi_{xu}^t u_t u_x \\ & - \Upsilon \xi_{xu}^x u_x^{\checkmark} + \phi_u u_{xx} - \Upsilon \xi_x^t u_{tx} - \Upsilon \xi_x^x u_{xx} + \Upsilon u_x \phi_{xu} - \xi_{xx}^t u_t - \xi_{xx}^x u_x + \phi_{xx}) \frac{\partial}{\partial u_{xx}} \\ & + (-\Upsilon \xi_{uu}^t u_t u_x u_{tx} - \Upsilon \xi_{uu}^x u_t u_x u_{xx} - \xi_{tuu}^t u_t u_x^{\checkmark} - \xi_{tu}^t u_t u_{xx} - \Upsilon \xi_{tu}^t u_x u_{tx} - \Upsilon \xi_{tu}^x u_x u_{xx} \\ & - \Upsilon \xi_{txu}^t u_t u_x - \xi_{uuu}^t u_t^{\checkmark} u_x^{\checkmark} - \xi_{uuu}^x u_t u_x^{\checkmark} - \xi_{uu}^t u_t^{\checkmark} u_x x + \phi_{uuu} u_t u_x^{\checkmark} - \Upsilon \xi_{xuu}^t u_t^{\checkmark} u_x \\ & - \Upsilon \xi_{xuu}^x u_t u_x^{\checkmark} - \xi_{xuu}^x u_t u_x + \phi_{uu} u_t u_{xx} - \Upsilon \xi_{xu}^t u_t u_{tx} - \Upsilon \xi_{xu}^x u_t u_{xx} + \Upsilon \phi_{xuu} u_t u_x \\ & - \xi_{uu}^t u_x^{\checkmark} u_{tt} - \xi_u^t u_{tt} u_{xx} - \Upsilon \xi_{xu}^t u_x u_{tt} - \Upsilon \xi_{uu}^x u_x^{\checkmark} u_{tx} - \Upsilon \xi_u^x u_{tx} u_{xx} + \Upsilon \phi_{uu} u_x u_{tx} \\ & - \Upsilon \xi_{xu}^x u_x u_{tx} - \Upsilon \xi_u^t u_x u_{tt} - \Upsilon \xi_u^t u_t u_{tx} - \Upsilon \xi_u^x u_x u_{tx} - \xi_u^x u_t u_{xxx} - \xi_{tuu}^x u_x^{\checkmark} + \phi_{tuu} u_x^{\checkmark} \\ & - \Upsilon \xi_{txu}^x u_x^{\checkmark} + \phi_{tu} u_{xx} - \Upsilon \xi_{tx}^t u_{tx} - \Upsilon \xi_{tx}^x u_{xx} + \Upsilon u_x \phi_{txu} - \xi_{tx}^t u_t - \xi_{tx}^x u_x - \xi_{xuu}^t u_t^{\checkmark} \\ & + \phi_{xuu} u_t - \xi_{xx}^t u_{tt} - \Upsilon \xi_u^t u_{tx}^{\checkmark} - \xi_{xx}^x u_{tx} + \Upsilon \phi_{xu} u_{tx} - \Upsilon \xi_x^t u_{tx} + \phi_u u_{txx} - \Upsilon \xi_x^x u_{txx} \\ & - \xi_t^t u_{txx} - \xi_t^x u_{xxx} + \phi_{txx}) \frac{\partial}{\partial u_{txx}} + (-\Upsilon \xi_{uu}^t u_t u_x u_{xx} - \Upsilon \xi_{xuu}^t u_t u_x^{\checkmark} - \Upsilon \xi_{xu}^t u_t u_{xx} \\ & - \Upsilon \xi_{xu}^x u_x u_{tx} - \Upsilon \xi_{xu}^x u_x u_{xx} - \Upsilon \xi_{uu}^t u_t u_x^{\checkmark} - \xi_{uuu}^t u_t u_x^{\checkmark} - \Upsilon \xi_{uu}^t u_x^{\checkmark} u_{tx} - \Upsilon \xi_{uu}^x u_x^{\checkmark} u_{xx} \\ & + \Upsilon \phi_{uu} u_x u_{xx} - \Upsilon \xi_u^t u_{tx} u_{xx} - \Upsilon \xi_u^t u_x u_{tx} - \xi_u^t u_t u_{xxx} - \Upsilon \xi_u^x u_x u_{xxx} - \Upsilon \xi_{xuu}^x u_x^{\checkmark} \\ & + \Upsilon \phi_{xuu} u_x^{\checkmark} - \Upsilon \xi_{xuu}^x u_x^{\checkmark} + \Upsilon \phi_{xu} u_{xx} - \Upsilon \xi_{xx}^t u_{tx} - \Upsilon \xi_{xx}^x u_{xx} + \Upsilon u_x \phi_{xuu} - \xi_{xxx}^t u_t \\ & - \xi_{xxx}^x u_x - \xi_{uuu}^x u_x^{\checkmark} + \phi_{uuu} u_x^{\checkmark} - \Upsilon \xi_u^x u_x^{\checkmark} - \Upsilon \xi_x^t u_{tx} + \phi_u u_{xxx} - \Upsilon \xi_x^x u_{xxx} \\ & + \phi_{xxx}) \frac{\partial}{\partial u_{xxx}}. \end{aligned}$$

طبق قضیه ۹.۵.۲، اگر امتداد مرتبه سوم (۱۸.۲) را روی معادله (۱۷.۲) اثر دهیم، آن را صفر می‌کند، یعنی:

$$\mathbf{v}^{(3)} (u_t - u_{xxt} + \Upsilon \kappa u_x + \Upsilon u u_x - \Upsilon u_x u_{xx} - u u_{xxx}) = 0. \quad (20.2)$$

با حل معادله‌ی (۲۰.۲)، دستگاه معادلات مشخصه‌ی (۱۷.۲) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\xi_u^t = 0, \quad \xi_x^t = 0, \quad \xi_{tt}^t = 0, \quad \xi_t^x = -\frac{\Upsilon}{\Upsilon} \xi_t^t \kappa, \quad \xi_u^x = 0, \quad \xi_x^x = 0, \quad \phi = -\frac{1}{\Upsilon} \xi_t^t (\Upsilon \kappa + \Upsilon u). \quad (21.2)$$

با حل دستگاه (۲۱.۲) مقادیر ξ^t ، ξ^x و ϕ به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$\xi^t = a_1 + 2\kappa ta_3,$$

$$\xi^x = a_2 + ta_3,$$

$$\phi = -a_3 u.$$

با قرار دادن ξ^t ، ξ^x و ϕ در (۱۸.۲) داریم

$$\mathbf{v} = (a_1 + 2\kappa ta_3)\partial_t + (a_2 + ta_3)\partial_x - a_3 u \partial_u.$$

بنابراین مولدهای جبر لی گروه تقارن‌های معادله‌ی (۱۷.۲) عبارتند از:

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\partial}{\partial t},$$

$$\mathbf{v}_2 = \frac{\partial}{\partial x},$$

$$\mathbf{v}_3 = 2\kappa t \frac{\partial}{\partial x} + t \frac{\partial}{\partial t} - u \frac{\partial}{\partial u}.$$

جدول جابجاگرهای جبر لی تقارن‌ها عبارت است از:

[,]	\mathbf{v}_1	\mathbf{v}_2	\mathbf{v}_3
\mathbf{v}_1	◦	◦	$\mathbf{v}_1 + 2\kappa \mathbf{v}_2$
\mathbf{v}_2	◦	◦	◦
\mathbf{v}_3	$-\mathbf{v}_1 - 2\kappa \mathbf{v}_2$	◦	◦

جدول ۱۰.۲: جدول لی تقارن‌های معادله‌ی دگاسپریس-پروسی

گروه‌های یک-پارامتری G_i تولید شده توسط \mathbf{v}_i به صورت زیر خواهد بود.

$$G_1 : (t, x, u) \mapsto (t + \epsilon, x, u),$$

$$G_2 : (t, x, u) \mapsto (t, x + \epsilon, u),$$

$$G_3 : (t, x, u) \mapsto (e^\epsilon t, x + 2\epsilon, -e^\epsilon u),$$

هر گروه G_i یک گروه تقارن معادله‌ی (۱۷.۲) است. بنابراین اگر $u = f(x, t)$ یک جواب معادله‌ی (۱۷.۲) باشد، آنگاه توابع زیر نیز جواب معادله هستند.

$$u^{(1)} = f(t - \epsilon, x), \quad u^{(2)} = f(t, x - \epsilon), \quad u^{(3)} = e^{-\epsilon} f(e^\epsilon t, x - 2\epsilon).$$

۷.۲ تبدیلات هم‌ارز

برای بررسی و محاسبه گروه‌های تقارن دستگاه‌هایی که در آن‌ها توابع وجود دارند، از روش تبدیلات هم‌ارز استفاده می‌کنیم. تبدیلات هم‌ارز ساختار دیفرانسیلی معادلات دستگاه را حفظ می‌کنند. کار بر روی تبدیلات هم‌ارز، برای اولین بار توسط اوسیانکوف^۲ (۱۹۸۲) انجام شد [۲]. بدون از دست دادن کلیت تعریف دستگاه معادلات دیفرانسیل، خانواده‌ی \mathcal{F}_K از دستگاه‌های PDE را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\Delta_\nu(x, u^{(n)}, F) = 0, \quad \nu = 1, \dots, m, \quad (22.2)$$

که شامل L تابع و یا پارامتر $F = (F_1, \dots, F_L)$ باشد. ممکن است این توابع وابسته به متغیرهای مستقل و وابسته‌ی خاصی از دستگاه است. مولد بی‌نهایت کوچک دستگاه (۲۲.۲) به صورت:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^p \xi^i(x, u) \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{j=1}^q \eta^j(x, u) \frac{\partial}{\partial u^j} + \sum_{\alpha=1}^l \mu^\alpha(x, u, F) \frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \quad (23.2)$$

است. که ضرایب در آن

$$\xi^i = \xi^i(x, u), \quad \eta^j = \eta^j(x, u), \quad \mu^\alpha = \mu^\alpha(x, u, F), \quad (24.2)$$

هستند. در این روش، امتداد میدان برداری (۲۳.۲) امتداد توسعه یافته نامیده و با $\tilde{\mathbf{v}}$ نشان داده می‌شود. در ادامه با استفاده از این روش، تقارن‌های مدل‌های انعکاس-انتشار را به دست می‌آوریم.

۱.۷.۲ مدل‌های انعکاس-انتشار

در این بخش، به بررسی گروه‌های تقارن یک-بعدي مدل‌های انعکاس-انتشار می‌پردازیم. دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر را در نظر می‌گیریم [۱۰]:

$$\begin{cases} u_t = f(u, v) + Au_{xx} + \phi(u, v)_x v_x + \phi(u, v) v_{xx}, \\ v_t = g(u, v) + Bv_{xx} + \psi(u, v)_x v_x + \psi(u, v) u_{xx} \end{cases}. \quad (25.2)$$

که در آن چهار تابع نامشخص f, g, ϕ, ψ با دو متغیر و دو ثابت نامشخص A, B ، شش عنصر دلخواه مدل هستند.

عناصر دلخواه مدل ۲۵.۲ را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$F = (f^1, f^2, f^3, f^4, f^5, f^6), \quad (26.2)$$

^۲Ovsianikov

به طوری که در آن

$$f^1 = f, f^2 = g, f^3 = \phi, f^4 = \psi, f^5 = A, f^6 = B. \quad (27.2)$$

مولد بی‌نهایت کوچک گروه به صورت زیر است.

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = & \xi^t \frac{\partial}{\partial t} + \xi^x \frac{\partial}{\partial x} + \eta^1 \frac{\partial}{\partial u} + \eta^2 \frac{\partial}{\partial v} + \mu^1 \frac{\partial}{\partial f} + \mu^2 \frac{\partial}{\partial g} \\ & + \mu^3 \frac{\partial}{\partial \phi} + \mu^4 \frac{\partial}{\partial \psi} + \mu^5 \frac{\partial}{\partial A} + \mu^6 \frac{\partial}{\partial B} \end{aligned} \quad (28.2)$$

که می‌توان آن را به صورت فشرده نوشت:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^2 \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{j=1}^2 \eta^j \frac{\partial}{\partial u^j} + \sum_{\alpha=1}^6 \mu^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \quad (29.2)$$

به طوری که در آن ضرایب به صورت زیر هستند:

$$\xi^i = \xi^i(x, u), \quad \eta^j = \eta^j(x, u), \quad \mu^\alpha = \mu^\alpha(x, u, F). \quad (30.2)$$

برای محاسبه مولدها، معادله ۲۵.۲ را به صورت گسترش یافته می‌نویسیم:

$$u_t - f(u, v) - Au_{xx} - \phi(u, v)_x v_x - \phi(u, v) v_{xx} = 0, \quad (31.2)$$

$$v_t - g(u, v) - Bv_{xx} - \psi(u, v)_x v_x - \psi(u, v) u_{xx} = 0, \quad (32.2)$$

$$f_t = f_x = 0 \quad g_t = g_x = 0, \quad (33.2)$$

$$\phi_t = \phi_x = 0, \quad \psi_t = \psi_x = 0, \quad (34.2)$$

$$A_t = A_x = A_u = A_v = 0, \quad (35.2)$$

$$B_t = B_x = B_u = B_v = 0. \quad (36.2)$$

معادلات (۳۳.۲) - (۳۴.۲) نشان می‌دهند که توابع f, g, ϕ, ψ به متغیرهای t, x بستگی ندارند و همچنین معادلات (۳۵.۲) - (۳۶.۲) نشان می‌دهند که A و B مستقل از تمام متغیرهای t, x, u, v هستند. اگر $\tilde{\mathbf{v}}$ مولد امتداد داده شده‌ی معادله گسترش یافته‌ی (۲۵.۲) باشد، آنگاه طبق قضیه ۹.۵.۲، در معادلات زیر صدق می‌کنند:

$$\tilde{\mathbf{v}}(u_t - f(u, v) - Au_{xx} - \phi(u, v)_x v_x - \phi(u, v) v_{xx}) = 0, \quad (37.2)$$

$$\tilde{\mathbf{v}}(v_t - g(u, v) - Bv_{xx} - \psi(u, v)_x v_x - \psi(u, v) u_{xx}) = 0, \quad (38.2)$$

$$\tilde{\mathbf{v}}(f_t) = \tilde{\mathbf{v}}(f_x) = 0 \quad \tilde{\mathbf{v}}(g_t) = \tilde{\mathbf{v}}(g_x) = 0, \quad (39.2)$$

$$\tilde{\mathbf{v}}(\phi_t) = \tilde{\mathbf{v}}(\phi_x) = 0, \quad \tilde{\mathbf{v}}(\psi_t) = \tilde{\mathbf{v}}(\psi_x) = 0, \quad (40.2)$$

$$\tilde{\mathbf{v}}(A_t) = \tilde{\mathbf{v}}(A_x) = \tilde{\mathbf{v}}(A_u) = \tilde{\mathbf{v}}(A_v) = 0, \quad (41.2)$$

$$\tilde{\mathbf{v}}(B_t) = \tilde{\mathbf{v}}(B_x) = \tilde{\mathbf{v}}(B_u) = \tilde{\mathbf{v}}(B_v) = 0. \quad (42.2)$$

که $\tilde{\mathbf{v}}$ به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{v}} = & \mathbf{v} + \eta_t^1 \frac{\partial}{\partial u_t} + \eta_x^1 \frac{\partial}{\partial u_x} + \eta_t^2 \frac{\partial}{\partial v_t} + \eta_x^2 \frac{\partial}{\partial v_x} + \eta_{xx}^1 \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \eta_{xx}^2 \frac{\partial}{\partial v_{xx}} + \mu_t^1 \frac{\partial}{\partial f_t} \\ & + \mu_x^1 \frac{\partial}{\partial f_x} + \mu_t^2 \frac{\partial}{\partial g_t} + \mu_x^2 \frac{\partial}{\partial g_x} + \mu_t^3 \frac{\partial}{\partial \phi_t} + \mu_x^3 \frac{\partial}{\partial \phi_x} + \mu_t^4 \frac{\partial}{\partial \psi_t} + \mu_x^4 \frac{\partial}{\partial \psi_x} + \mu_t^5 \frac{\partial}{\partial A_t} \\ & + \mu_x^5 \frac{\partial}{\partial A_x} + \mu_u^5 \frac{\partial}{\partial A_u} + \mu_v^5 \frac{\partial}{\partial A_v} + \mu_t^6 \frac{\partial}{\partial B_t} + \mu_x^6 \frac{\partial}{\partial B_x} + \mu_u^6 \frac{\partial}{\partial B_u} + \mu_v^6 \frac{\partial}{\partial B_v} \quad (۴۳.۲) \end{aligned}$$

با استفاده از فرمول (۱۵.۲) ضرایب مولد بی‌نهایت کوچک امتداد داده شده معادله (۲۵.۲) را به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} \eta_t^i &= D_t(\eta^i - \xi^t u_t^i - \xi^x u_x^i) + \xi^t u_{tt}^i + \xi^x u_{xt}^i \\ &= D_t(\eta^i) - u_t^i D_t(\xi^t) - u_x^i D_t(\xi^x), \\ \eta_x^i &= D_x(\eta^i - \xi^t u_t^i - \xi^x u_x^i) + \xi^t u_{tx}^i + \xi^x u_{xx}^i \\ &= D_x(\eta^i) - u_t^i D_x(\xi^t) - u_x^i D_x(\xi^x), \\ \eta_{xx}^i &= D_{xx}(\eta^i - \xi^t u_t^i - \xi^x u_x^i) + \xi^t u_{txx}^i + \xi^x u_{xxx}^i \\ &= D_x(\eta_x^i) - u_{tx}^i D_x(\xi^t) - u_{xx}^i D_x(\xi^x), \end{aligned}$$

که D_t, D_x در آن‌ها مشتقات کامل هستند و به شکل زیر نوشته می‌شوند.

$$\begin{aligned} D_t &= \frac{\partial}{\partial t} + u_t \frac{\partial}{\partial u} + v_t \frac{\partial}{\partial v} + u_{tt} \frac{\partial}{\partial u_t} + u_{tx} \frac{\partial}{\partial u_x} + v_{tt} \frac{\partial}{\partial v_t} + v_{tx} \frac{\partial}{\partial v_x} + \dots, \\ D_x &= \frac{\partial}{\partial x} + u_x \frac{\partial}{\partial u} + v_x \frac{\partial}{\partial v} + u_{tx} \frac{\partial}{\partial u_t} + u_{xx} \frac{\partial}{\partial u_x} + v_{tx} \frac{\partial}{\partial v_t} + v_{xx} \frac{\partial}{\partial v_x} + \dots, \end{aligned}$$

و D_{xx} تکرار عمل D_x است. برای مثال:

$$D_{xx}(u) = D_x(D_x(u)) = D_x(u_x) = u_{xx}.$$

عملگر \tilde{D} که روی فضای شامل متغیرهای مستقل t, x, u, v و متغیرهای وابسته f^α که $\alpha = 1, \dots, 6$ ، عمل می‌کند، به صورت زیر است:

$$\tilde{D}_\sigma = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} + \sum_{\alpha=1}^6 \sum_{\sigma} f_\sigma^\alpha \frac{\partial}{\partial f^\alpha},$$

که در آن $\sigma = (t, x, u, v)$ است.

ضرایب μ_σ^α که $\sigma = t, x, u, v$; $\alpha = 1, \dots, 6$ در عملگر (۴۳.۲) به صورت بیان می‌شوند.

$$\mu_\sigma^\alpha = \tilde{D}_\sigma(\mu^\alpha) - f_t^\alpha \tilde{D}_\sigma(\xi^t) - f_x^\alpha \tilde{D}_\sigma(\xi^x) + f_u^\alpha \tilde{D}_\sigma(\eta^1) + f_v^\alpha \tilde{D}_\sigma(\eta^2), \quad (۴۴.۲)$$

با جاگذاری ضرایب به‌دست آمده، (۴۳.۲) را به‌دست آورده و سپس آن را روی معادلات (۳۷.۲) - (۴۲.۲) اثر می‌دهیم. بنابراین معادلات مشخصه عبارتند از

$$\begin{aligned}\mu^3 &= (\gamma \xi_x^x - \xi_t^t + \eta_u^1 - \eta_v^2) \phi, \\ \mu^4 &= (\gamma \xi_x^x - \xi_t^t + \eta_v^2 - \eta_u^1) \psi, \\ \mu^5 &= (\gamma \xi_x^x - \xi_t^t) A, \\ \mu^6 &= (\gamma \xi_x^x - \xi_t^t) B,\end{aligned}\tag{۴۵.۲}$$

$$\mu^1 = (\eta_u^1 - \xi_t^t) f, \quad \mu^2 = (\eta_v^2 - \xi_t^t) g,\tag{۴۶.۲}$$

$$\begin{aligned}\xi_x^t &= \xi_u^1 = \xi_v^2 = 0, & \xi_{tt}^t &= 0, \\ \xi_t^x &= \xi_u^2 = \xi_v^1 = 0, & \xi_{xx}^x &= 0, \\ \eta_t^1 &= \eta_x^1 = \eta_u^1 = 0, & \eta_{uu}^1 &= 0, \\ \eta_t^2 &= \eta_x^2 = \eta_u^2 = 0, & \eta_{vv}^2 &= 0,\end{aligned}\tag{۴۷.۲}$$

با حل معادلات مشخصه (۴۷.۲) ضرایب مولد بی‌نهایت کوچک دستگاه معادلات به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند.

$$\begin{aligned}\xi^t &= c_1 + c_5 t, & \xi^x &= c_2 + c_6 x, \\ \eta^1 &= c_3 + c_7 u, & \eta^2 &= c_4 + c_8 v,\end{aligned}\tag{۴۸.۲}$$

با جای‌گذاری (۴۸.۲) در (۴۵.۲) و (۴۶.۲) داریم:

$$\mu^1 = (c_7 - c_5) f, \quad \mu^2 = (c_8 - c_5) g,\tag{۴۹.۲}$$

$$\mu^3 = (\gamma c_6 - c_5 + c_7 - c_8) \phi, \quad \mu^4 = (\gamma c_6 - c_5 + c_8 - c_7) \psi,\tag{۵۰.۲}$$

$$\mu^5 = (\gamma c_6 - c_5) A, \quad \mu^6 = (\gamma c_6 - c_5) B.\tag{۵۱.۲}$$

توابع ξ ، η و μ در (۴۸.۲) و (۵۱.۲) - (۴۸.۲)، یک جواب عمومی برای معادلات مشخصه به‌دست می‌آورند، و از این‌رو مولد برای دستگاه (۲۵.۲) تعریف می‌کنند.

جبر لی تقارن‌ها

عملگر (۲۸.۲) با ضرایب (۴۸.۲)-(۵۱.۲) ترکیب خطی مولدهای زیر است:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}_1 &= \frac{\partial}{\partial t}, & \mathbf{v}_2 &= \frac{\partial}{\partial x}, & \mathbf{v}_3 &= \frac{\partial}{\partial u}, & \mathbf{v}_4 &= \frac{\partial}{\partial v} & (52.2) \\
 \mathbf{v}_5 &= t \frac{\partial}{\partial t} - f \frac{\partial}{\partial f} - g \frac{\partial}{\partial g} - \phi \frac{\partial}{\partial \phi} - \psi \frac{\partial}{\partial \psi} - A \frac{\partial}{\partial A} - B \frac{\partial}{\partial B}, \\
 \mathbf{v}_6 &= x \frac{\partial}{\partial x} + 2\phi \frac{\partial}{\partial \phi} + 2\psi \frac{\partial}{\partial \psi} + 2A \frac{\partial}{\partial A} + 2B \frac{\partial}{\partial B}, \\
 \mathbf{v}_7 &= u \frac{\partial}{\partial u} + f \frac{\partial}{\partial f} + \phi \frac{\partial}{\partial \phi} - \psi \frac{\partial}{\partial \psi}, \\
 \mathbf{v}_8 &= v \frac{\partial}{\partial v} + g \frac{\partial}{\partial g} - \phi \frac{\partial}{\partial \phi} + \psi \frac{\partial}{\partial \psi}.
 \end{aligned}$$

بنابراین، یک جبر لی هشت بعدی برای دستگاه (۲۵.۲) پیدا کردیم.

جدول جابجایی مولدهای تقارن (۵۲.۲) به صورت زیر است:

[,]	\mathbf{v}_1	\mathbf{v}_2	\mathbf{v}_3	\mathbf{v}_4	\mathbf{v}_5	\mathbf{v}_6	\mathbf{v}_7	\mathbf{v}_8
\mathbf{v}_1	◦	◦	◦	◦	\mathbf{v}_1	◦	◦	◦
\mathbf{v}_2	◦	◦	◦	◦	◦	\mathbf{v}_2	◦	◦
\mathbf{v}_3	◦	◦	◦	◦	◦	◦	\mathbf{v}_3	◦
\mathbf{v}_4	◦	◦	◦	◦	◦	◦	◦	\mathbf{v}_4
\mathbf{v}_5	$-\mathbf{v}_1$	◦	◦	◦	◦	◦	◦	◦
\mathbf{v}_6	◦	$-\mathbf{v}_2$	◦	◦	◦	◦	◦	◦
\mathbf{v}_7	◦	◦	$-\mathbf{v}_3$	◦	◦	◦	◦	◦
\mathbf{v}_8	◦	◦	◦	$-\mathbf{v}_4$	◦	◦	◦	◦

جدول ۲.۲: جدول لی تقارن‌های مدل‌های انعکاس-انتشار

گروه‌های یک-پارامتری G_i تولید شده توسط \mathbf{v}_i به صورت زیر خواهد بود.

$$G_{\gamma} : (t, x, u, v, f, g, \phi, \psi, A, B) \mapsto (t + \epsilon, x, u, v, f, g, \phi, \psi, A, B),$$

$$G_{\Upsilon} : (t, x, u, v, f, g, \phi, \psi, A, B) \mapsto (t, x + \epsilon, u, v, f, g, \phi, \psi, A, B),$$

$$G_{\Upsilon} : (t, x, u, v, f, g, \phi, \psi, A, B) \mapsto (t, x, u + \epsilon, v, f, g, \phi, \psi, A, B),$$

$$G_{\Upsilon} : (t, x, u, v, f, g, \phi, \psi, A, B) \mapsto (t, x, u, v + \epsilon, f, g, \phi, \psi, A, B),$$

$$G_{\delta} : (t, x, u, v, f, g, \phi, \psi, A, B) \mapsto (e^{\epsilon}t, x, u, v, e^{\epsilon}f, e^{\epsilon}g, e^{\epsilon}\phi, e^{\epsilon}\psi, e^{\epsilon}A, e^{\epsilon}B),$$

$$G_{\epsilon} : (t, x, u, v, f, g, \phi, \psi, A, B) \mapsto (t, e^{\epsilon}x, u, v, f, g, \Upsilon^{\epsilon}\phi, \Upsilon^{\epsilon}\psi, \Upsilon^{\epsilon}A, \Upsilon^{\epsilon}B),$$

$$G_{\nu} : (t, x, u, v, f, g, \phi, \psi, A, B) \mapsto (t, x, u, e^{\epsilon}v, e^{\epsilon}f, g, e^{\epsilon}\phi, -e^{\epsilon}\psi, A, B),$$

$$G_{\lambda} : (t, x, u, v, f, g, \phi, \psi, A, B) \mapsto (t, x, u, e^{\epsilon}v, f, e^{\epsilon}g, -e^{\epsilon}\phi, e^{\epsilon}\psi, A, B).$$

۳ فصل

فرمول‌بندی معادلات ماکسول

معادله‌های ماکسول مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیل جزئی است که همراه با قانون نیروی لورنتس، تشکیل بنیاد الکترودینامیک کلاسیک، اپتیک کلاسیک و مدارهای الکتریکی را می‌دهد. این رشته‌ها به نوبه خود زمینه برق و ارتباطات فناوری مدرن هستند. معادلات ماکسول پس از فیزیکدان و ریاضیدان اسکاتلندی جیمز کلرک ماکسول^۱ نامگذاری شده است.

معادلات ماکسول توصیف می‌کند که میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی چگونه تولید می‌شوند و با بار و جریان در تغییر هستند. انواع فرمول‌بندی برای این معادله‌ها می‌توان ارائه داد.

نظریه الکترومغناطیس کلاسیک یک نظریه نسبیتی است. این فرمول‌بندی نسبی به ما توانایی گسترش نظریه به بعدهای بالاتر را می‌دهد. در فیزیک کلاسیک معادلات ماکسول در فضای سه بعدی اقلیدسی به‌کار گرفته می‌شوند. با استفاده از نسبیت خاص می‌توان زمان و فضا باهم ترکیب شده و با استفاده از مفاهیم هندسی روابط ماکسول به‌صورت فرم‌های دیفرانسیلی نوشته می‌شود. فرم‌های دیفرانسیلی ابزار مورد نیاز برای بررسی روابط الکترومغناطیس در کوانتوم مکانیک و اپتیک است.

در این فصل ابتدا معادلات کلاسیک ماکسول را معرفی می‌کنیم و سپس با استفاده از فرم‌های دیفرانسیلی این معادلات را به زبان هندسه بیان می‌کنیم. در ادامه مدل معادلات غیرخطی ماکسول همراه شده با نوسانگر لورنتز فرمول‌بندی می‌کنیم. این فصل شامل مفاهیم و روابط فیزیکی است. در فصول بعدی مدل به‌دست آمده از این فصل را با دید هندسی مورد بررسی قرار می‌دهیم.

^۱James Clerk Maxwell

۱.۳ معادلات کلاسیک ماکسول

در این بخش ابتدا معادلات کلاسیک ماکسول را بیان می‌کنیم. معادلات ماکسول بیان ریاضی نتایج تجربی هستند.

معادلات میکروسکوپی ماکسول به صورت زیر هستند [۷]:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho \quad (3.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{J} \quad (4.3)$$

که \mathbf{E} میدان الکتریکی، \mathbf{B} میدان برداری، ρ چگالی بار الکتریکی و \mathbf{J} چگالی جریان الکتریکی است. معادله (۱.۳) قانون گاوس در مغناطیس، معادله (۲.۳) قانون القای فارادی، معادله (۳.۳) قانون گاوس در الکتریسیته و معادله (۴.۳) قانون آمپر است.

نوع میکروسکوپی از معادله ماکسول بیانگر میدان الکتریکی \mathbf{E} و میدان مغناطیسی \mathbf{B} و جریان کل حاضر شامل بارها و جریان‌ها در سطح اتمی است. این معادلات گاهی اوقات صورت عمومی از معادلات ماکسول و یا ”معادلات ماکسول در خلاء” نامیده می‌شود. معادلات ماکروسکوپی ماکسول به صورت زیر هستند [۷]:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (5.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (6.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (7.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \quad (8.3)$$

که \mathbf{E} میدان الکتریکی، \mathbf{B} میدان برداری، \mathbf{D} میدان جابجایی الکتریکی، \mathbf{H} شدت میدان مغناطیسی، ρ چگالی بار الکتریکی، \mathbf{J} چگالی جریان الکتریکی و c سرعت نور است.

تعریف ۱.۱.۳. بردار جابه‌جایی الکتریکی D ، یک میدان ماکروسکوپی است که به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$D = \epsilon_0 E + P, \quad (9.3)$$

که در آن P چگالی قطبش و ϵ_0 ثابت دی‌الکتریک است.

تعریف ۲.۱.۳. مغناطش M میدانی برداری است که چگالی گشتاورهای مغناطیسی در یک ماده‌ی مغناطیسی را نشان می‌دهد.

رابطه‌ای خطی بین مغناطش M و شدت میدان مغناطیسی H وجود دارد. این رابطه وجود رابطه خطی زیر را ایجاب می‌کند [۲۲].

$$B = \mu_0 H + M, \quad (10.3)$$

که در آن μ_0 نفوذپذیری مغناطیسی است و $\mu_0 \epsilon_0 = c^{-2}$ که c سرعت نور در خلاء است. معادله‌ی (۵.۳) قانون گاوس در مغناطیس، معادله‌ی (۶.۳) قانون القای فارادی، معادله‌ی (۷.۳) قانون گاوس در الکتریسیته و معادله‌ی (۸.۳) قانون آمپر است. نوع ماکروسکوپی معادله‌های ماکسول به همان اندازه عمومی است و به عنوان "معادلات ماکسول در ماده" شناخته شده است.

۲.۳ نظریه الکترومغناطیس

برای بررسی معادلات ماکسول نیاز به آشنایی با نظریه الکترومغناطیس داریم. نظریه الکترومغناطیس بسیار گسترده است در این بخش فقط مفاهیم و روابط مورد نیاز را بیان می‌کنیم.

۱.۲.۳ میدان الکترومغناطیسی

پس از نسبت خاص مفهوم میدان مغناطیسی پدید آمده است، یعنی میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی جدا از یکدیگر نیستند. این میدان بر اجرام باردار که درون آن قرار دارند اثر می‌گذارد و رفتارشان را تغییر می‌دهد. میدان الکترومغناطیس یکی از چهار نیرو بنیادی طبیعت است.

۲.۲.۳ پتانسیل مغناطیسی

پتانسیل مغناطیسی که یک کمیت برداری است را با A نشان داده می‌شود و از رابطه‌ی زیر تعریف می‌شود [۷]:

$$B = \nabla \times A \quad (11.3)$$

۳.۲.۳ پتانسیل الکتریکی

پتانسیل الکتریکی که با Φ نمایش داده می‌شود و از رابطه‌ی زیر تعریف می‌شود [۷]:

$$\nabla \times \nabla \phi = 0. \quad (12.3)$$

میدان الکتریکی \mathbf{E} برحسب اسکالر پتانسیل الکتریکی و پتانسیل مغناطیسی برداری به صورت زیر نوشته می‌شود [۲۸]:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} - \nabla \Phi. \quad (13.3)$$

۳.۳ تانسور میدان الکترومغناطیسی

در این بخش، تانسور میدان الکترومغناطیسی را معرفی می‌کنیم و در بخش بعدی با استفاده از آن معادلات کلاسیک ماکسول را بازنویسی می‌کنیم.

چهار-برداری پتانسیل (Φ, \mathcal{A}) میدان الکتریکی و مغناطیسی را بیان می‌کند. این چهار-برداری با ترکیب اسکالر پتانسیل Φ و برداری پتانسیل \mathcal{A} به دست می‌آید:

$$A_\mu = (-\Phi, \mathcal{A}^1, \mathcal{A}^2, \mathcal{A}^3). \quad (14.3)$$

با استفاده از A_μ ، می‌توان شدت میدان الکترومغناطیسی $F_{\mu\nu}$ را به صورت زیر ساخت:

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (15.3)$$

رابطه‌ی (۱۵.۳) نشان می‌دهد که $F_{\mu\nu}$ پادمتقارن است:

$$F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}. \quad (16.3)$$

بنابراین درایه‌های قطری $F_{\mu\nu}$ صفر هستند:

$$F_{\circ\circ} = F_{11} = F_{22} = F_{33} = 0. \quad (17.3)$$

اندیس‌های μ و ν می‌توانند مقادیر ۰، ۱، ۲، ۳ را اختیار کنند. با استفاده از (۱۵.۳) و (۱۶.۳) درایه‌های دیگر $F_{\mu\nu}$ را محاسبه می‌کنیم.

$$F_{\circ 1} = \partial_\circ A_1 - \partial_1 A_\circ = -E_x,$$

$$F_{\circ 2} = \partial_\circ A_2 - \partial_2 A_\circ = -E_y,$$

$$F_{\circ 3} = \partial_\circ A_3 - \partial_3 A_\circ = -E_z,$$

$$F_{12} = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 = B_z,$$

$$F_{13} = \partial_1 A_3 - \partial_3 A_1 = -B_y,$$

$$F_{23} = \partial_2 A_3 - \partial_3 A_2 = B_x.$$

بنابراین $F_{\mu\nu}$ به صورت ماتریس زیر است:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (18.3)$$

تانسور میدان الکترومغناطیسی F ، یک دو-تانسور پادمتقارن به صورت زیر است [۱۸]:

$$F = F_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu, \quad (19.3)$$

با استفاده از تعریف ۴.۱.۱.۱، می‌توان آن را به صورت ۲-فرم زیر نوشت:

$$F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu. \quad (20.3)$$

با توجه به (۱۸.۳)، می‌توان رابطه‌ی (۲۰.۳) را به صورت زیر نوشت:

$$F = \mathbf{B} + \mathbf{E} \wedge dt. \quad (21.3)$$

۴.۳ فرم دیفرانسیلی معادلات ماکسول

هدف این بخش بیان معادلات ماکسول به زبان هندسه دیفرانسیل است. در این بخش معادلات ماکسول را با فرم‌های دیفرانسیلی بازنویسی می‌کنیم. فرم‌های دیفرانسیلی کار با معادلات ماکسول را ساده می‌کنند و کمک می‌کنند تصویر بهتری از معادلات داشته باشیم.

معادلات ماکسول یک دسته از معادلات دیفرانسیلی‌اند که ارتباط میان میدان الکتریکی (\mathbf{E}) و میدان مغناطیسی (\mathbf{B}) را بیان می‌کنند. میدان الکتریکی (\mathbf{E}) و میدان مغناطیسی (\mathbf{B}) وابسته به چگالی بار الکتریکی (ρ) و چگالی جریان الکتریکی (\mathbf{J}) هستند.

مختصات میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی مستقل از زمان هستند. به جای در نظر گرفتن میدان الکتریکی به عنوان یک بردار $\mathbf{E} = (E_1, E_2, E_3)$ ما این میدان را به عنوان یک ۱-فرم در نظر می‌گیریم.

$$\mathbf{E} = E_1 dx^1 + E_2 dx^2 + E_3 dx^3 \quad (22.3)$$

به‌طور مشابه به جای در نظر گرفتن میدان مغناطیسی به عنوان بردار $\mathbf{B} = (B_1, B_2, B_3)$ ما این میدان را به عنوان یک ۲-فرم در نظر می‌گیریم.

$$\mathbf{B} = B_1 dx^2 \wedge dx^3 + B_2 dx^3 \wedge dx^1 + B_3 dx^1 \wedge dx^2 \quad (23.3)$$

جریان وابسته به زمان است. جریان با مولفه‌های (ρ, j_1, j_2, j_3) را به شکل یک ۱-فرم زیر در نظر می‌گیریم.

$$\mathbf{J}^\mu = -\rho dt + j_1 dx^1 + j_2 dx^2 + j_3 dx^3$$

منیفلد فضا-زمان را به صورت

$$M = \mathbb{R} \times S$$

در نظر می‌گیریم. که در آن S یک منیفلد ۳-بعدی و نشان دهنده‌ی فضا، \mathbb{R} زیرمنیفلد زمان [۱۵] است. با جایگذاری (۲۲.۳) و (۲۳.۳) در معادله (۲۱.۳) داریم:

$$(۲۴.۳)$$

$$\mathbf{F} = B_1 dx^2 \wedge dx^3 + B_2 dx^3 \wedge dx^1 + B_3 dx^1 \wedge dx^2 + E_1 dx^1 \wedge dt + E_2 dx^2 \wedge dt + E_3 dx^3 \wedge dt$$

$$\begin{aligned} d\mathbf{F} &= d(\mathbf{B} + \mathbf{E} \wedge dt) = d\mathbf{B} + d\mathbf{E} \wedge dt \\ &= \left(\frac{\partial B_1}{\partial x^1} + \frac{\partial B_2}{\partial x^2} + \frac{\partial B_3}{\partial x^3} \right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ &\quad + \left(\frac{\partial E_3}{\partial x^2} - \frac{\partial E_2}{\partial x^3} + \frac{\partial B_1}{\partial t} \right) dt \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ &\quad + \left(\frac{\partial E_1}{\partial x^3} - \frac{\partial E_3}{\partial x^1} + \frac{\partial B_2}{\partial t} \right) dt \wedge dx^3 \wedge dx^1 \\ &\quad + \left(\frac{\partial E_2}{\partial x^1} - \frac{\partial E_1}{\partial x^2} + \frac{\partial B_3}{\partial t} \right) dt \wedge dx^1 \wedge dx^2 \end{aligned}$$

توجه کنید که $d\mathbf{F} = 0$ معادل صفر شدن عبارتهای زیر است.

$$\frac{\partial B_1}{\partial x^1} + \frac{\partial B_2}{\partial x^2} + \frac{\partial B_3}{\partial x^3} = 0 \quad (۲۵.۳)$$

و

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_3}{\partial x^2} - \frac{\partial E_2}{\partial x^3} + \frac{\partial B_1}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial E_1}{\partial x^3} - \frac{\partial E_3}{\partial x^1} + \frac{\partial B_2}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial E_2}{\partial x^1} - \frac{\partial E_1}{\partial x^2} + \frac{\partial B_3}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \quad (۲۶.۳)$$

است. که عبارت (۲۵.۳) همان معادله‌ی (۱.۳) و (۲۶.۳) معادله‌ی (۲.۳) است. حال عملگر ستاره را روی \mathbf{F} اثر می‌دهیم.

$$(۲۷.۳)$$

$$\star \mathbf{F} = -B_1 dx^1 \wedge dt - B_2 dx^2 \wedge dt - B_3 dx^3 \wedge dt + E_1 dx^2 \wedge dx^3 + E_2 dx^3 \wedge dx^1 + E_3 dx^1 \wedge dx^2$$

با مقایسه‌ی (۲۴.۳) و (۲۷.۳) داریم:

$$\begin{aligned} d \star \mathbf{F} &= \left(\frac{\partial E_1}{\partial x^1} + \frac{\partial E_2}{\partial x^2} + \frac{\partial E_3}{\partial x^3} \right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ &+ \left(\frac{\partial B_3}{\partial x^3} - \frac{\partial B_2}{\partial x^2} + \frac{\partial E_1}{\partial t} \right) dt \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ &+ \left(\frac{\partial B_1}{\partial x^3} - \frac{\partial B_3}{\partial x^1} - \frac{\partial E_2}{\partial t} \right) dt \wedge dx^1 \wedge dx^3 \\ &+ \left(\frac{\partial B_1}{\partial x^2} - \frac{\partial B_2}{\partial x^1} + \frac{\partial E_3}{\partial t} \right) dt \wedge dx^1 \wedge dx^2 \end{aligned}$$

با اثر دادن دوباره عملگر ستاره داریم:

$$\begin{aligned} \star d \star \mathbf{F} &= - \left(\frac{\partial E_1}{\partial x^1} + \frac{\partial E_2}{\partial x^2} + \frac{\partial E_3}{\partial x^3} \right) dt \\ &+ \left(\frac{\partial B_3}{\partial x^2} - \frac{\partial B_2}{\partial x^3} - \frac{\partial E_1}{\partial t} \right) dx^1 \\ &+ \left(\frac{\partial B_1}{\partial x^3} - \frac{\partial B_3}{\partial x^1} - \frac{\partial E_2}{\partial t} \right) dx^2 \\ &+ \left(\frac{\partial B_1}{\partial x^1} - \frac{\partial B_1}{\partial x^2} + \frac{\partial E_3}{\partial t} \right) dx^3 \end{aligned}$$

و معادل قراردادن با \mathbf{J} خواهیم داشت: $\star d \star \mathbf{F} = \mathbf{J}$ متناظر است با:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_1}{\partial x^1} + \frac{\partial E_2}{\partial x^2} + \frac{\partial E_3}{\partial x^3} &= \rho \\ \frac{\partial B_3}{\partial x^2} - \frac{\partial B_2}{\partial x^3} - \frac{\partial E_1}{\partial t} &= j_1 \end{aligned} \quad (۲۸.۳)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_1}{\partial x^3} - \frac{\partial B_3}{\partial x^1} - \frac{\partial E_2}{\partial t} &= j_2 \\ \frac{\partial B_1}{\partial x^1} - \frac{\partial B_1}{\partial x^2} + \frac{\partial E_3}{\partial t} &= j_3 \end{aligned} \quad (۲۹.۳)$$

که عبارت اول معادله‌ی (۲۸.۳) همان معادله (۳.۳) و ادامه‌ی دستگاه همان معادله‌ی (۴.۳) است. پس معادلات ماکسول معادل دستگاه زیر است:

$$d\mathbf{F} = \circ, \quad (30.3)$$

$$\star d\star \mathbf{F} = \mathbf{J}, \quad (31.3)$$

که F یک ۲-فرم روی منیفلد ۴-بعدی (فضا زمان) با متریک مینکوفسکی است. در این بخش نشان دادیم تمام معادلات ماکسول را می‌توان با دو معادله‌ی (۳۰.۳) و (۳۱.۳) بازنویسی کرد. این دو معادله به‌طور کامل نظریه الکترومغناطیس را بیان می‌کنند [۱۸].

۵.۳ معادلات غیر خطی ماکسول

در این بخش با استفاده از معادلات کلاسیک ماکسول، معادلات غیرخطی ماکسول را به‌دست می‌آوریم. دو فرض متداول در اپتیک غیر خطی [۶]:

$$\mathbf{J} = \circ \text{ و } \rho = \circ \quad ۱.$$

$$M = \circ \text{ یعنی نداشتن رسانا مغناطیس‌پذیر باشد؛ یعنی } M = \circ \quad ۲.$$

در نتیجه طبق معادلات ماکروسکوپی کلاسیک ماکسول و فرض‌های اپتیک غیرخطی داریم:

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \circ \quad (32.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (33.3)$$

برای رسانای غیر مغناطیسی روابط (۹.۳) و (۱۰.۳) به شکل زیر تبدیل می‌شوند.

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \quad (34.3)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{P} \quad (35.3)$$

از (۳۶.۳) و (۳۴.۳) داریم:

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} \quad (36.3)$$

ما راستای انتشار امواج الکترومغناطیسی را محور z با میدان الکتریکی $\mathbf{E} = (E(z, t), \circ, \circ)$ ، میدان مغناطیسی $\mathbf{B} = (\circ, B(z, t), \circ)$ و میدان جابه‌جایی الکتریکی $\mathbf{D} = (D(z, t), \circ, \circ)$ در نظر می‌گیریم. بنابراین معادله‌ی (۳۲.۳) و (۳۶.۳) را می‌توانیم به‌صورت زیر بنویسیم:

$$B_t + E_z = \circ, \quad (37.3)$$

$$D_t + B_z = 0. \quad (38.3)$$

همچنین میدان جابه‌جایی الکتریکی به صورت

$$D = E + \frac{E^{2\sigma+1}}{2\sigma+1} + P \quad (39.3)$$

است که در آن σ می‌تواند مقدار صحیح یک یا دو را اختیار کند [۶]. بنابراین معادلات غیرخطی ماکسول به صورت زیر هستند:

$$B_t + E_z = 0, \quad (40.3)$$

$$D_t + B_z = 0, \quad (41.3)$$

$$D = E + \frac{E^{2\sigma+1}}{2\sigma+1} + P. \quad (42.3)$$

در دستگاه بالا معادله‌ی (۴۰.۳) قانون القای فارادی، معادله‌ی (۴۱.۳) قانون آمپر و (۴۲.۳) میدان جابه‌جایی الکتریکی است.

۶.۳ مدل ماکسول و نوسانگر لورنتز

نظریه اپتیک غیرخطی براساس برهم‌کنش نور و ماده ساخته شده است. نور یک موج الکترومغناطیسی است و ماده دارای ویژگی قطبش الکتریکی است که ذاتی است. در این بخش مدلی می‌سازیم که به ما توانایی توصیف انتشار نور در ماده غیرخطی را می‌دهد.

۱.۶.۳ معادله‌ی نوسانگر لورنتز

معادله (۴۳.۳) معادله نوسانگر لورنتز است که نوسان‌های قطبش را که با میدان الکتریکی E تولید می‌شوند را نشان می‌دهد. و در آن پارامتر $\alpha = (\epsilon_s - \epsilon_\infty)/\epsilon_\infty$ است. در اینجا ϵ_s و ϵ_∞ ثابت دی‌الکتریک استاتیکی و ثابت دی‌الکتریک خطی است [۶]. معادله نوسانگر لورنتز

$$P_{tt} + P - \alpha E = 0. \quad (43.3)$$

نشان می‌دهد که نوسان‌ها توسط میدان الکتریکی E گرداننده می‌شوند.

۲.۶.۳ فرمول‌بندی مدل ماکسول و نوسانگر لورنتز

در این بخش مدل ماکسول و نوسانگر لورنتز را فرمول‌بندی می‌کنیم. در این مدل، معادلات غیرخطی ماکسول با معادله نوسانگر لورنتز همراه شده‌اند. معادلات این مدل به فرم زیر هستند [۲۳، ۲۴]:

$$B_t + E_z = 0, \quad (44.3)$$

$$D_t + B_z = 0, \quad (45.3)$$

$$D = E + \frac{E^{2\sigma+1}}{2\sigma+1} + P, \quad (46.3)$$

$$P_{tt} + P - \alpha E = 0. \quad (47.3)$$

اپتیک غیرخطی با لیزر انجام می‌شود که ماهیت جهت‌گیری بالایی دارد [۲۵]. بنابراین، معمولاً فرض می‌شود که انتشار موج در یک راستای فضا است. در این مدل انتشار موج را در امتداد محور z در نظر می‌گیریم که میدان الکتریکی $\mathbf{E} = (E(z, t), 0, 0)^T$ ، جریان جابه‌جایی $\mathbf{D} = (D(z, t), 0, 0)^T$ و قطبش $\mathbf{P} = (P(z, t), 0, 0)^T$ همگی در امتداد محور x قرار دارند و در آن میدان مغناطیسی $\mathbf{B} = (0, B(z, t), 0)^T$ در امتداد محور y قرار می‌گیرد. جریان جابه‌جایی در (۴۶.۳) به‌طور غیرخطی به میدان الکتریکی \mathbf{E} و به‌طور خطی به قطبش P بستگی دارد. در مدل ماکسول و نوسانگر لورنتز صفحه افقی انتشار موج را در امتداد محور z در نظر می‌گیریم. پس از رابطه‌های (۱۲.۳) و (۱۱.۳) پتانسیل الکتریکی و پتانسیل مغناطیسی به شکل زیر هستند:

$$E = \phi_z, \quad B = A_z. \quad (48.3)$$

قانون فارادی (۴۴.۳) را می‌توان به شکل $(E + A_t)_z = 0$ نوشت. بنابراین

$$B = A_z, \quad E = -A_t, \quad (49.3)$$

نمایشی برای \mathbf{B} و \mathbf{E} برحسب پتانسیل مغناطیسی A هستند. بنابراین (۴۴.۳)–(۴۷.۳) برحسب پتانسیل‌ها عبارتند از:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(-A_t - \frac{A_t^{2\sigma+1}}{2\sigma+1} + P \right) + A_{zz} = 0, \quad (50.3)$$

$$P_{tt} + P - \alpha A_t = 0. \quad (51.3)$$

در این بخش برای بررسی رفتار نور غیر خطی در ماده، یک مدل شامل معادلات غیرخطی ماکسول و یک نوسانگر لورنتز که توسط میدان قطبش P کنترل می‌شود، معرفی کردیم. در پایان نشان دادیم که می‌توان مدل را به دو معادله (۵۰.۳) و (۵۱.۳) کاهش داد.

فصل ۴

ساختار هندسی جواب‌های معادلات ماکسول و نوسانگر لورنتز

۱.۴ تقارن‌های معادلات ماکسول و نوسانگر لورنتز

در این بخش تقارن‌های نقطه‌ای لی معادلات ماکسول و نوسانگر لورنتز (۴۴.۳)-(۴۷.۳) یا دستگاه هم‌ارز آن (۵۰.۳)-(۵۱.۳) را به دست می‌آوریم. برای این منظور ابتدا یک دستگاه معادلات دیفرانسیل برای معادلات ماکسول و نوسانگر لورنتز می‌نویسیم و سپس تقارن‌های لی آن را بدست می‌آوریم. با استفاده از تقارن‌های نقطه‌ای دستگاه (۵۰.۳)-(۵۱.۳) جواب‌های مشابه دستگاه را به دست می‌آوریم و سپس دستگاه را کاهش مرتبه می‌دهیم.

معادلات دیفرانسیل دستگاه معادلات (۵۰.۳)-(۵۱.۳) را به صورت دستگاه معادلات دیفرانسیل:

$$\Delta_\nu(x, u^{(n)}) = 0, \quad \nu = 1, 2, \quad (1.4)$$

در نظر می‌گیریم که در آن

$$\begin{cases} \Delta_1 = -A_{tt} - \mathcal{A}_t^{\alpha\sigma} A_{tt} + P_t + A_{zz} = 0, \\ \Delta_2 = P_{tt} + P - \alpha A_t = 0. \end{cases}, \quad (2.4)$$

و $x = (t, z)$ متغیرهای مستقل و $u = (A, P)$ متغیرهای وابسته هستند. تبدیلات لی بینهایت کوچک (۱.۴) را به صورت

$$\begin{aligned} t' &= t + \epsilon \xi^t, & z' &= z + \epsilon \xi^z, & A' &= A + \epsilon \eta^A, \\ E' &= E + \epsilon \eta^E, & B' &= B + \epsilon \eta^B, & P' &= P + \epsilon \eta^P, \end{aligned} \quad (3.4)$$

با مولد تقارن

$$\mathbf{v} = \xi^t(t, z, A, P) \frac{\partial}{\partial t} + \xi^z(t, z, A, P) \frac{\partial}{\partial z} + \eta^A(t, z, A, P) \frac{\partial}{\partial A} + \eta^P(t, z, A, P) \frac{\partial}{\partial P} \quad (4.4)$$

هستند که در آن متغیرهای t و z مستقل و متغیرهای A و P وابسته هستند. مختصات فضای کامل (t, z, A, P) است و مختصات جت مرتبه اول و جت مرتبه دوم به صورت زیر هستند:

$$\mathbf{J}^1 = (t, z, A, P, A_t, A_z, P_t, P_z),$$

$$\mathbf{J}^2 = (t, z, A, P, A_t, A_z, P_t, P_z, A_{tt}, A_{tz}, A_{zz}, P_{tt}, P_{tz}, P_{zz}).$$

با توجه به این‌که (۱.۴) از مرتبه دوم است، باید امتداد مرتبه دوم (۴.۴) دستگاه را صفر کند. با استفاده از قضیه ۷.۵.۲ امتداد مرتبه دوم (۴.۴) را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^{(2)} = & \eta^P \frac{\partial}{\partial P} + (-\xi_{\mathcal{A}}^t A_t^\vee - \xi_P^t A_t P_t - \xi_{\mathcal{A}}^z A_t A_z - \xi_P^z A_z P_t + A_t \eta_{\mathcal{A}}^A + P_t \eta_P^A - \xi_t^t A_t \\ & - \xi_t^z A_z + \eta_t^A) \frac{\partial}{\partial A_t} + (-\xi_{\mathcal{A}}^t A_t P_t - \xi_P^t P_t^\vee - \xi_{\mathcal{A}}^z A_t P_z - \xi_P^z P_t P_z - \xi_t^t P_t - \xi_t^z P_z \\ & + A_t \eta_{\mathcal{A}}^P + P_t \eta_P^P + \eta_t^P) \frac{\partial}{\partial P_t} + (-\eta_{\mathcal{A}P}^t A_t P_t - \eta_{\mathcal{A}A}^z A_t A_z - \eta_{\mathcal{A}P}^z A_z P_t - \eta_{\mathcal{A}P}^t A_t P_t \\ & - \xi_{\mathcal{A}A}^z A_t^\vee A_z + \eta_{\mathcal{A}P}^A A_t P_t - \eta_{\mathcal{A}A}^t A_t A_{tt} - \eta_{\mathcal{A}P}^t A_{tt} P_t - \xi_{\mathcal{A}}^z A_z A_{tt} - \eta_{\mathcal{A}}^z A_t A_{tz} \\ & - \eta_{\mathcal{A}P}^z A_{tz} P_t - \xi_{PP}^t A_t P_t^\vee - \xi_{PP}^z A_z P_t^\vee - \xi_P^t A_t P_{tt} - \xi_P^z A_z P_{tt} - \eta_{\mathcal{A}P}^z A_t A_z P_t + \eta_{tt}^A \\ & - \eta_{\mathcal{A}t}^t A_t^\vee + \eta_{\mathcal{A}t}^A A_t + \eta_{P_t}^A A_t - \xi_{tt}^t A_t - \xi_{tt}^z A_z - \xi_{\mathcal{A}A}^t A_t^\vee + \eta_{\mathcal{A}A}^t A_t^\vee + \eta_{\mathcal{A}}^t A_{tt} \\ & - \eta_{\mathcal{A}t}^t A_{tt} - \eta_{\mathcal{A}t}^z A_{tz} + \eta_{\mathcal{A}A}^A A_t^\vee + \eta_{\mathcal{A}}^A A_{tt} - \eta_{\mathcal{A}T}^t A_{tt} - \eta_{\mathcal{A}t}^z A_{t,z} + \eta_{PP}^z P_t^\vee + \eta_P^A P_{tt}) \frac{\partial}{\partial A_{tt}} \\ & + (-\eta_{\mathcal{A}P}^z A_t P_t P_z - \eta_{\mathcal{A}t}^t A_t P_t - \eta_{\mathcal{A}A}^z A_t P_z - \eta_{\mathcal{A}P}^z P_t P_z - \xi_{\mathcal{A}A}^t A_t^\vee P_t - \eta_{\mathcal{A}P}^t A_t P_t^\vee \\ & - \xi_{\mathcal{A}A}^z A_t^\vee P_z + \eta_{\mathcal{A}P}^P A_t P_t - \xi_{\mathcal{A}}^t A_{tt} P_t - \xi_{\mathcal{A}}^z A_{tt} P_z - \xi_{PP}^t P_t^\vee P_z - \eta_{\mathcal{A}A}^t A_t P_{tt} - \eta_{\mathcal{A}P}^t P_t P_{tt} \\ & - \xi_P^z P_z P_{tt} - \eta_{\mathcal{A}}^z A_t P_{tz} - \eta_{\mathcal{A}P}^z P_t P_{tz} + \eta_{tt}^P + \eta_{\mathcal{A}t}^z \eta_{\mathcal{A}}^z + \eta_{P_t}^z \eta_{\mathcal{A}}^z + \eta_{\mathcal{A}A}^z A_t^\vee + \eta_{\mathcal{A}}^z A_{tt} \\ & - \xi_{PP}^t P_t^\vee + \eta_{PP}^z P_t^\vee - \eta_{\mathcal{A}t}^z P_{tt} + \eta_P^z P_{tt} - \eta_{\mathcal{A}t}^z P_{tz} - \eta_{\mathcal{A}P}^t P_t^\vee - \xi_{tt}^t P_t - \xi_{tt}^z P_z) \frac{\partial}{\partial P_{tt}} \\ & + (-\eta_{\mathcal{A}P}^t A_t A_z A_z P_z + \eta_{zz}^t - \xi_{\mathcal{A}A}^x A_t A_z^\vee - \eta_{\mathcal{A}P}^z A_z^\vee P_z + \eta_{\mathcal{A}P}^t A_z P_z - \eta_{\mathcal{A}A}^t A_z A_{tz} \\ & - \eta_{\mathcal{A}P}^t A_{tz} P_z - \xi_{\mathcal{A}}^t A_t A_{zz} - \eta_{\mathcal{A}A}^z A_z A_{zz} - \eta_{\mathcal{A}P}^z A_{zz} P_z - \xi_{PP}^t A_t P_z^\vee - \xi_{PP}^x A_z P_z^\vee \\ & - \xi_t^t A_t P_{zz} - \xi_z^z A_z P_{zz} - \eta_{\mathcal{A}z}^t A_t A_z - \eta_{\mathcal{A}P}^z A_t P_z - \eta_{\mathcal{A}P}^x A_z P_z - \eta_{\mathcal{A}z}^x A_z^\vee + \eta_{\mathcal{A}z}^t \eta_{zA} \\ & + \eta_{P_z}^t \eta_{zP} - \xi_{zz}^t A_t - \xi_{zz}^z A_z - \xi_{\mathcal{A}A}^x A_z^\vee + \eta_{\mathcal{A}A}^t A_z^\vee - \eta_{\mathcal{A}z}^t A_{tz} + \eta_{\mathcal{A}}^t A_{zz} - \eta_{\mathcal{A}z}^z A_{zz} \\ & + \xi_{PP}^t P_z^\vee + \eta_P^t P_{zz}) \frac{\partial}{\partial A_{zz}}. \end{aligned} \tag{۶.۴}$$

طبق قضیه ۹.۵.۲، امتداد مرتبه دوم مولد بی‌نهایت کوچک، معادله را صفر می‌کند. امتداد مرتبه دوم (۴.۴) را روی معادلات (۱.۴) اثر می‌دهیم:

$$\mathbf{v}^{(2)} (-A_{tt} - A_t^{\vee\sigma} A_{tt} + P_t + A_{zz}) = 0 \tag{۷.۴}$$

$$\mathbf{v}^{(2)}(P_{tt} + P + \alpha A_t) = 0. \quad (8.4)$$

از معادلات (۷.۴) و (۸.۴) معادلات مشخصه را به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} \xi_A^t = 0, \xi_P^t = 0, \xi_t^t = 0, \xi_z^t = 0, \xi_A^z = 0, \xi_P^z = 0, \xi_t^z = 0, \xi_z^z = 0, \\ \eta^P = 0, \eta_A^A = 0, \eta_P^A = 0, \eta_t^A = 0, \eta_{zz}^A = 0. \end{aligned} \quad (9.4)$$

با حل دستگاه معادلات مشخصه (۹.۴)، $\xi^t, \xi^z, \eta^A, \eta^P$ به دست می‌آیند:

$$\xi^t = a_1, \quad \xi^z = a_2, \quad \eta^A = a_3 z + a_4, \quad \eta^P = 0. \quad (10.4)$$

با قرار دادن $\xi^t, \xi^z, \eta^A, \eta^P$ در (۴.۴) داریم:

$$\mathbf{v} = a_1 \frac{\partial}{\partial t} + a_2 \frac{\partial}{\partial z} + (a_3 z + a_4) \frac{\partial}{\partial A}, \quad (11.4)$$

۲.۴ جبر لی تقارن‌ها

تقارن نقطه‌ای لی (۱۱.۴) ترکیب خطی جبرهای لی است. بنابراین مولدهای جبر لی گروه تقارن‌های معادله‌ی (۲.۴) عبارتند از:

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathbf{v}_2 = \frac{\partial}{\partial z}, \quad \mathbf{v}_3 = z \frac{\partial}{\partial A}, \quad \mathbf{v}_4 = \frac{\partial}{\partial A}. \quad (12.4)$$

جدول جابجاگرهای مولدهای فوق به شکل زیر است.

[,]	\mathbf{v}_1	\mathbf{v}_2	\mathbf{v}_3	\mathbf{v}_4
\mathbf{v}_1	0	0	0	0
\mathbf{v}_2	0	0	\mathbf{v}_4	0
\mathbf{v}_3	0	$-\mathbf{v}_4$	0	0
\mathbf{v}_4	0	0	0	0

جدول ۱۰.۴: جدول لی تقارن‌ها

۳.۴ گروه‌های تقارن

گروه‌های یک پارامتری G_i تولید شده توسط v_i به صورت زیر هستند:

$$G_1 : (t, z, \mathcal{A}, P) \mapsto (t + \epsilon, z, \mathcal{A}, P),$$

$$G_2 : (t, z, \mathcal{A}, P) \mapsto (t, z + \epsilon, \mathcal{A}, P),$$

$$G_3 : (t, z, \mathcal{A}, P) \mapsto (t, z, \mathcal{A} + z\epsilon, P),$$

$$G_4 : (t, z, \mathcal{A}, P) \mapsto (t, z, \mathcal{A} + \epsilon, P),$$

که در آن ϵ یک عدد حقیقی است. گروه‌های G_1 و G_2 نشان می‌دهند که دستگاه تحت انتقال زمان و مکان ناوردا است.

گروه تبدیلات دلخواه g را که از ترکیب تبدیلات یک پارامتری زیر گروه‌های G_1, \dots, G_4 ارائه کنیم. اگر g نزدیک همانی باشد، می‌توان آن را به صورت زیر نمایش داد.

$$g = \exp(\epsilon_4 v_4) \circ \exp(\epsilon_3 v_3) \circ \exp(\epsilon_2 v_2) \circ \exp(\epsilon_1 v_1).$$

$$g : (t, z, a, p) \rightarrow (t + \epsilon, z + \epsilon, (z + \epsilon)\epsilon + a + \epsilon, p).$$

اگر g روی فضای جت دستگاه عمل کند، ناوردا نگه می‌دارد.

۴.۴ محاسبه ناوردهای دستگاه

در این بخش ناوردهای دیفرانسیلی دستگاه (۲.۴) را به دست می‌آوریم و در بخش بعدی از آن‌ها برای کاهش مرتبه دستگاه استفاده می‌کنیم. ناوردهای عملگر (۱۱.۴) را پیدا می‌کنیم.

$$X(\zeta) = 0 \tag{13.4}$$

$$a_1 \frac{\partial \zeta}{\partial t} + a_2 \frac{\partial \zeta}{\partial z} + (a_3 z + a_4) \frac{\partial \zeta}{\partial \mathcal{A}} = 0 \tag{14.4}$$

که معادله مشخصه به صورت

$$\frac{dt}{a_1} = \frac{dz}{a_2} = \frac{d\mathcal{A}}{(a_3 z + a_4)} = \frac{dP}{0} \tag{15.4}$$

جواب (۱۵.۴) را می‌توان به صورت

$$\zeta^1(t, z, \mathcal{A}, P) = c_1, \zeta^2(t, z, \mathcal{A}, P) = c_2, \zeta^3(t, z, \mathcal{A}, P) = c_3, \tag{16.4}$$

است که در آن ثابت‌های انتگرال هستند.

با انتگرال‌گیری از دو معادله اول (۱۵.۴) یکی از ناوردها عبارت است از:

$$\frac{a_3}{a_1}t - z = c_1$$

به‌طور مشابه ناوردهای دیگر را به‌دست می‌آوریم. با محاسبه انتگرال

$$\int \frac{dz}{a_2} = \int \frac{dA}{(a_3z + a_4)}$$

خواهیم داشت:

$$\left(\frac{1}{2} \frac{a_3}{a_2} z^2 + \frac{a_4}{a_2} z \right) = A + c_2,$$

و به‌صورت مشابه

$$\int \frac{dt}{a_1} = \int \frac{dP}{\circ},$$

نتیجه می‌دهد:

$$P = c_3$$

بنابراین ناوردها عبارتند از

$$\begin{aligned} J_1 &= z - st, \\ J_2 &= A - \left(\frac{1}{2} \delta z^2 + vz \right), \\ J_3 &= P. \end{aligned}$$

هستند که در آن‌ها

$$s = \frac{a_2}{a_1}, \quad \delta = \frac{a_3}{a_1}, \quad v = \frac{a_4}{a_1}.$$

از ناوردها داریم:

$$A = \frac{1}{2} \delta z^2 + vz + A(\xi), \quad P = P(\xi) \quad (17.4)$$

به‌طوری‌که

$$\xi = z - st \quad (18.4)$$

متغیر موج سیار است.

۵.۴ جواب‌های مشابه

جواب‌های مشابه که از تقارن‌های نقطه‌ای به دست می‌آیند، جواب‌های دستگاه معادلات داده شده را می‌دهند [۲].

از رابطه (۴۹.۳) فصل قبل می‌دانیم $E = -A_t$ در نتیجه داریم:

$$E = -A_t = -\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = -\xi_t A'(\xi) = -(-s)A'(\xi) \quad (۱۹.۴)$$

$$A'(\xi) = \frac{E}{s}, \quad A''(\xi) = \left(\frac{E}{s}\right)'$$

با مشتق‌گیری از (۱۷.۴) داریم:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \delta z^2 + vz + A(\xi)$$

$$\mathcal{A}_z = \delta z + v + A'(\xi)$$

$$\mathcal{A}_{zz} = \delta + A''(\xi)$$

$$\mathcal{A}_t = (-s)A'(\xi)$$

$$\mathcal{A}_{tt} = s^2 A''(\xi)$$

و

$$\mathcal{P}_t = \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = (-s)P'(\xi) = (-s)P'$$

$$\mathcal{P}_{tt} = (-s)P''(\xi)(-s) = s^2 P''$$

در نتیجه معادله اول دستگاه (۲۰.۴) نسبت به متغیر ξ را به صورت زیر نوشت:

$$-s^2 A'' - (-sA')^{2\sigma} + (-s)P' + \delta + A'' = 0 \quad (۲۰.۴)$$

با جایگذاری (۱۹.۴) در (۲۰.۴) داریم:

$$-(-s\left(\frac{E}{s}\right)')^{2\sigma} + (-s)P' + \delta + \left(\frac{E}{s}\right)' = 0, \quad (۲۱.۴)$$

با یکبار انتگرال‌گیری از این معادله داریم:

$$\delta \xi + \frac{E}{s} - s\left(E + \frac{E^{2\sigma+1}}{2\sigma+1} + P\right) = c \quad (۲۲.۴)$$

که c یک مقدار ثابت است.

معادله دوم دستگاه (۲۰.۴) نسبت به متغیر ξ را به صورت زیر نوشت:

$$s^2 P'' + P - E = 0 \quad (23.4)$$

از رابطه (۲۰.۴) P ، را به دست می‌آوریم:

$$P = \frac{\delta\xi}{s} + \frac{E(1-s^2)}{s^2} - \frac{E^{2\sigma+1}}{2\sigma+1} - \frac{c}{s} \quad (24.4)$$

$$= g(E) + \frac{\delta\xi}{s} \quad (25.4)$$

که در آن

$$g(E) = \frac{E(1-s^2)}{s^2} - \frac{E^{2\sigma+1}}{2\sigma+1} - \frac{c}{s}. \quad (26.4)$$

در (۲۳.۴) جایگذاری می‌کنیم:

$$s^2 (g'(E)E_{\xi\xi} + g''(E)E_{\xi}^2) + g(E) - \alpha E + \frac{\delta\xi}{s} = 0. \quad (27.4)$$

بنابراین، جواب‌های مشابه برای دستگاه (۲۰.۴) با انتگرال‌گیری معادله‌ی غیرخطی، مرتبه دوم معمولی (۲۷.۴) برای $E = E(\xi)$ به دست می‌آیند. که یک معادله معمولی معمولی مرتبه اول است.

فصل ۵

دستگاه همیلتونی معادلات ماکسول و نوسانگر لورنتز

دستگاه همیلتونی معادلات دیفرانسیل اساس بیشتر کارهای پیشرفته در مکانیک کلاسیک، شامل حرکت یک جسم، مکانیک نجومی، نظریه کوانتس و سایر نظریات کلاسیک است. فیزیکدانان به کمک دستگاه همیلتونی یک فرمول بندی و نمایش جدیدی از معادلات فیزیک کلاسیک به دست می آورند. این فرمول بندی تازه نسبت به معادلات کلاسیک مزیت هایی دارد. برای مثال به کمک آن می توانیم معادله حرکت ذرات را بدون در نظر گرفتن نیروهای وارده بر آن ها و هندسه پیچیده سیستم حاکم بر بعضی از آن ها به دست آوریم [۴].

در این فصل، ابتدا برخی از مفاهیم دستگاه همیلتونی معادلات دیفرانسیل را به طور دقیق بیان می کنیم و پس از این که با مفاهیم دستگاه معادلات همیلتونی آشنا شدیم، به بررسی دستگاه همیلتونی معادلات ماکسول و نوسانگر لورنتز می پردازیم.

۱.۵ گروه پواسون

گروه پواسون یک مفهوم بنیادی برای مطالعه دستگاه همیلتونی معادلات دیفرانسیل است. از این رو فصل را با تعریف گروه پواسون آغاز می کنیم.

یک گروه پواسون روی منیفلد هموار M به هر دو تابع هموار حقیقی مقدار $F, H : M \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع هموار حقیقی مقدار نسبت می دهد که آن با $\{F, H\}$ نمایش می دهیم.

تعریف ۱.۱.۵. فرض کنیم M یک منیفلد هموار باشد. به ازای هر جفت تابع هموار حقیقی مقدار مانند H و F روی M یک تابع هموار حقیقی مقدار مانند $\{F, H\}$ روی M به نام گروه پواسون F و H تعریف می کنیم که در شرایط زیر صدق می کند:

۱. دوخطی است:

$$\begin{aligned} \{cF + c'P, H\} &= c\{F, H\} + c'\{P, H\}, \\ \{F, cH + c'P\} &= c\{F, H\} + c'\{F, H\}, \end{aligned}$$

که $c, c' \in \mathbb{R}$

۲. پادمتقارن است:

$$\{F, H\} = -\{H, F\},$$

۳. در اتحاد ژاکوبی صدق می‌کند:

$$\{\{F, H\}, P\} + \{\{P, F\}, H\} + \{\{H, P\}, F\} = 0,$$

۴. در قاعده لایبنیتز صدق می‌کند:

$$\begin{aligned} \{F, H.P\} &= \{F, H\}.P + H.\{F, P\} \\ \{F.P, H\} &= F.\{P, H\} + \{F, H\}.P \end{aligned}$$

یک منیفلد مجهز به گروهی پواسون، یک منیفلد پواسون نامیده می‌شود و گروهی پواسون یک ساختار پواسون روی M تعریف می‌کند. فرض کنیم $F(p, q)$ و $H(p, q)$ گروهی پواسون آن را با تابع زیر تعریف می‌کنیم:

$$\{F, H\} = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial F}{\partial q^i} \frac{\partial H}{\partial p^i} - \frac{\partial F}{\partial p^i} \frac{\partial H}{\partial q^i} \right\} \quad (1.5)$$

مثال ۲.۱.۵. فرض کنیم M یک منیفلد اقلیدسی با بعد زوج مانند \mathbb{R}^{2n} با مختصات $(p, q) = (p^1, \dots, p^n, q^1, \dots, q^n)$ باشد اگر $F(p, q)$ و $H(p, q)$ توابع هموار باشند. گروهی پواسون آن را با تابع زیر تعریف می‌کنیم:

$$\{F, H\} = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial F}{\partial q^i} \frac{\partial H}{\partial p^i} - \frac{\partial F}{\partial p^i} \frac{\partial H}{\partial q^i} \right\} \quad (2.5)$$

این گروه به وضوح دوخطی و پادمتقارن است و در اتحاد ژاکوبی و قاعده لایبنیتز صدق می‌کند.

۲.۵ میدان‌های برداری همیلتونی

فرض کنیم M یک منیفلد پواسون باشد، به طوری که در شرایط تعریف ۱.۱.۵ صدق کرده و H یک تابع هموار روی M باشد، نگاشت $F \rightarrow \{F, H\}$ یک مشتق روی فضای توابع هموار F در M تعریف می‌کند.

تعریف ۱.۲.۵. فرض کنیم M یک منیفلد پواسون و $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع هموار باشد. میدان برداری همیلتونی متناظر با H یک میدان برداری یکتا $\hat{\nu}_H$ روی M است که در شرط

$$\hat{\nu}(F) = \{F, H\} = -\{H, F\}, \quad (۳.۵)$$

برای هر تابع هموار $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ صدق می‌کند. شار تولیدشده توسط $\hat{\nu}_H$ به عنوان معادلات همیلتونی برای تابع همیلتونی H محسوب می‌شود.

۳.۵ توابع ساختاری

برای تعیین مختصات موضعی برای یک منیفلد پواسون، ابتدا میدان‌های برداری همیلتونی را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم $x = (x^1, \dots, x^m)$ مختصات موضعی روی M و $H(x)$ یک تابع حقیقی مقدار باشد. میدان همیلتونی نظیر میدان برداری به فرم عمومی $\hat{\nu}_H = \sum_{i=1}^m \xi^i(x) \partial / \partial x^i$ است که ضرایب توابع $\xi^i(x)$ وابسته به H هستند و باید مشخص باشند. فرض کنیم $F(x)$ تابع هموار دوم باشد. با استفاده از (۳.۵) داریم:

$$\{F, H\} = \hat{\nu}(F) = \sum_{i=1}^m \xi^i(x) \frac{\partial F}{\partial x^i}.$$

اما با استفاده دوباره از (۳.۵)، داریم

$$\xi^i(x) = \hat{\nu}(x^i) = \{x^i, H\},$$

بنابراین:

$$\{F, H\} = \sum_{i=1}^m \{x^i, H\} \frac{\partial F}{\partial x^i}. \quad (۴.۵)$$

از سوی دیگر با استفاده از خاصیت پادتقارنی کروشه پواسون، می‌توان نوشت

$$\{x^i, H\} = -\{H, x^i\} = -\hat{\nu}(x^i) = -\sum_{j=1}^m \{x^j, x^i\} \frac{\partial H}{\partial x^j}$$

بنابراین فرمول اصلی:

$$\{F, H\} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \{x^i, x^j\} \frac{\partial F}{\partial x^i} \frac{\partial H}{\partial x^j} \quad (۵.۵)$$

برای کروشه‌ی پواسون به‌دست می‌آید. به‌عبارت دیگر، برای محاسبه کروشه‌ی پواسون هر دو تابع، مجموعه‌ی مفروض از مختصات موضعی، کافی است کروشه‌ی پواسون بین توابع مختصاتشان را بدانیم. کروشه‌های اساسی،

$$J^{ij}(x) = \{x^i, x^j\}, \quad i, j = 1, \dots, m, \quad (۶.۵)$$

توابع ساختاری منیفلد پواسون M وابسته به مختصات موضعی مفروض، نامیده می‌شود. برای راحتی، توابع ساختاری را در یک ماتریس پاد متقارن $m \times m$ ، $J(x)$ ، گردهم می‌آوریم و آن را ماتریس ساختاری M می‌نامیم.

قضیه ۱.۳.۵. با استفاده از ∇H (بردار گرادیان H) می‌توان گروه پواسون را به صورت زیر نوشت

$$\{F, H\} = \nabla F \cdot J \nabla H. \quad (۷.۵)$$

برهان.

$$\begin{aligned} \nabla F \cdot J_{m \times m} \nabla H &= \left(\frac{\partial F}{\partial x^1} \cdots \frac{\partial F}{\partial x^m} \right) \cdot \begin{pmatrix} J^{11} & \cdots & J^{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ J^{m1} & \cdots & J^{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial x^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial x^m} \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \{x^i, x^j\} \frac{\partial F}{\partial x^i} \frac{\partial H}{\partial x^j} \\ &= \{F, H\}. \end{aligned}$$

□

۴.۵ ساختار لی-پواسون

فرض کنیم C_{ij}^k که $i, j, k = 1, \dots, r$ ثابت‌های ساختاری جبرلی \mathfrak{g} ، که با پایه $\{v_1, \dots, v_r\}$ است، باشند. فرض کنیم V فضای برداری r -بعدی دیگری با مختصات $x = (x^1, \dots, x^r)$ باشد که توسط یک پایه $\{w_1, \dots, w_r\}$ مشخص شده باشد. گروه-لی پواسون بین دو تابع هموار $F, G : V \rightarrow \mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\{F, H\} = \sum_{i,j,k=1}^r C_{ij}^k x^k \frac{\partial F}{\partial x^i} \frac{\partial H}{\partial x^j} \quad (۸.۵)$$

این تعریف به وضوح به شکل (۵.۵) با تابع‌های ساختاری خطی $J^{ij} = \sum_{k=1}^r c_{ij}^k x^k$ است. توجه کنید که اگر V یک فضای برداری و $F : V \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع هموار حقیقی مقدار باشد، آنگاه گرادیان $\nabla F(x)$ در هر نقطه $x \in V$ یک عنصر از فضای دوگان فضای برداری V^* شامل تمام توابع خطی پیوسته روی V است. درحقیقت، طبق تعریف،

$$\langle \nabla F(x); y \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F(x + \epsilon y) - F(x)}{\epsilon},$$

برای هر $y \in V$ ، که $\langle \cdot, \cdot \rangle$ یک زوج بین V و دوگانش V^* است. به خاطر داشته باشید، ما فضای برداری V با فضای دوگان \mathfrak{g}^* با جبر لی \mathfrak{g} مشخص می‌شود که $\{w_1, \dots, w_r\}$ پایه دوگان $\{v_1, \dots, v_r\}$ است.

اگر $F : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع هموار باشد، آن‌گاه گرادیان آن $\nabla F(x)$ یک عنصر از $\mathfrak{g} \simeq (\mathfrak{g}^*)^*$ است. بنابراین کروشه لی-پواسون مختصات مستقل از دستگاه مختصات به شکل

$$\{F, H\}(x) = \langle x; [\nabla F(x), \nabla H(x)] \rangle, \quad x \in \mathfrak{g}^* \quad (9.5)$$

نوشته می‌شود. که $[,]$ کروشه لی روی \mathfrak{g} است. اگر $H : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع دلخواه باشد، دستگاه معادلات همیلتونی متناظر با آن به شکل

$$\frac{dx^i}{dt} = \sum_{j,k=1}^r c_{ij}^k x^k \frac{\partial H}{\partial x^j}, \quad i = 1, \dots, r,$$

است. که در آن مختصات x^k ظاهر می‌شود.

مثال ۱۰۴.۵. جبر لی سه بعدی $\mathfrak{so}(3)$ دوران گروه $SO(3)$ را در نظر بگیرید، با استفاده از پایه

$$\{\mathbf{v}_1 = y\partial_z - z\partial_y, \mathbf{v}_2 = z\partial_x - x\partial_z, \mathbf{v}_3 = x\partial_y - y\partial_x\},$$

مولدهای بینهایت کوچک دوران حول محور x, y, z در \mathbb{R}^3 روابط زیر را محاسبه می‌کنیم.

$$[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2] = -\mathbf{v}_3, \quad [\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1] = -\mathbf{v}_2, \quad [\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3] = -\mathbf{v}_1.$$

فرض کنیم $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ یک پایه دوگان برای $\mathbb{R}^3 \simeq \mathfrak{so}(3)^*$ باشد، و

$$u = u^1\omega_1 + u^2\omega_2 + u^3\omega_3,$$

یک نقطه در آن باشد. اگر $F : \mathfrak{so}(3)^* \rightarrow \mathbb{R}$ باشد، آن‌گاه گرادیان آن بردار زیر است.

$$\nabla F = \frac{\partial F}{\partial u^1} \mathbf{v}_1 + \frac{\partial F}{\partial u^2} \mathbf{v}_2 + \frac{\partial F}{\partial u^3} \mathbf{v}_3 \in \mathfrak{so}(3).$$

بنابراین از رابطه (۹.۵) کروشه لی-پواسون به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \{F, H\} &= u^1 \left(\frac{\partial F}{\partial u^3} \frac{\partial H}{\partial u^2} - \frac{\partial F}{\partial u^2} \frac{\partial H}{\partial u^3} \right) + u^2 \left(\frac{\partial F}{\partial u^1} \frac{\partial H}{\partial u^3} - \frac{\partial F}{\partial u^3} \frac{\partial H}{\partial u^1} \right) \\ &\quad + u^3 \left(\frac{\partial F}{\partial u^2} \frac{\partial H}{\partial u^1} - \frac{\partial F}{\partial u^1} \frac{\partial H}{\partial u^2} \right) \\ &= -u \cdot \nabla F \times \nabla H, \end{aligned}$$

که از ضرب خارجی روی \mathbb{R}^3 به دست می‌آید. بنابراین ماتریس ساختاری آن به صورت

$$J(u) = \begin{pmatrix} 0 & -u^3 & u^2 \\ u^3 & 0 & -u^1 \\ -u^2 & u^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad u \in \mathfrak{so}(3)^*.$$

نوشته می‌شود. بنابراین

$$\frac{du}{dt} = u \times \nabla H(u).$$

برای مثال، اگر

$$H(u) = \frac{(u^1)^2}{2I_1} + \frac{(u^2)^2}{2I_2} + \frac{(u^3)^2}{2I_3},$$

که در آن I_1, I_2, I_3 ثابت‌های معین هستند، آنگاه دستگاه معادلات همیلتونی آن به شکل زیر به دست می‌آید.

$$\begin{cases} \frac{du^1}{dt} = \frac{I_2 - I_3}{I_2 I_3} u^2 u^3 \\ \frac{du^2}{dt} = \frac{I_3 - I_1}{I_3 I_1} u^3 u^1 \\ \frac{du^3}{dt} = \frac{I_1 - I_2}{I_1 I_2} u^1 u^2 \end{cases} \quad (10.5)$$

۵.۵ دستگاه همیلتونی معادلات ماکسول و نوسانگر لورنتز

در این بخش دستگاه معادلات ماکسول و نوسانگر لورنتز را به شکل همیلتونی بیان می‌کنیم. با استفاده از جدول لی ۱.۴، ماتریس ساختاری دستگاه به صورت زیر است:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u^4 & 0 \\ 0 & -u^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (11.5)$$

با جای‌گذاری (۱۱.۵) در (۷.۵) داریم:

$$\begin{pmatrix} \frac{du^1}{dt} \\ \frac{du^2}{dt} \\ \frac{du^3}{dt} \\ \frac{du^4}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u^4 & 0 \\ 0 & -u^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dH}{du^1} \\ \frac{dH}{du^2} \\ \frac{dH}{du^3} \\ \frac{dH}{du^4} \end{pmatrix}. \quad (12.5)$$

حال دستگاه معادلات همیلتونی را به صورت زیر می‌نویسیم.

$$\begin{cases} \frac{du^2}{dt} = u^4 \frac{dH}{du^3} \\ \frac{du^3}{dt} = -u^4 \frac{dH}{du^2} \end{cases} \quad (13.5)$$

با استفاده از تقارن‌های دستگاه، ماتریس ساختاری J را به دست آوردیم و سپس معادلات همیلتونی متناظر با تابع همیلتونی H را به دست آوردیم.

مراجع

- [1] Akimoto, Kazuhiro, *Properties and applications of ultra-short electromagnetic mono- and sub-cycle waves*. Journal of the Physical Society of Japan, 65.7 (1996): 2020–2032.
- [2] Bluman George W., Alexei F. Cheviakov, Stephen C. Anco, *Applications of Symmetry Methods to Partial Differential Equations*, Springer, 2010.
- [3] Coclite, Giuseppe M., and Kenneth H. Karlsen. *On the well-posedness of the Degasperis–Procesi equation*. Journal of Functional Analysis 233.1 (2006): 60-91.
- [4] Deriglazov, Alexei. *Classical mechanics: Hamiltonian and Lagrangian formalism*, Springer Science & Business Media, 2010.
- [5] Ehresmann, C. *Introduction a la théorie des structures infinitésimales et des pseudogroupes de Lie, Oevres completes et commente, partie 1*. Cahier de Topologie et Geometrie Differentielle, Supplement au 24 (1983): 217-230.
- [6] Gilles, L. and Hagness, SC and Vázquez, L, *Comparison between staggered and unstaggered finite-difference time-domain grids for few-cycle temporal optical soliton propagation*. Journal of Computational Physics, 161.2 (2000): 379–400.
- [7] Griffiths, D. J. *Introduction to electrodynamics*, Prentice Hall, 1999.
- [8] Hejazi, S. Reza, *Contact Geometry and Symmetry Analysis of Differential Equations.*, PhD thesis, Iran University of Science and Technology, 2011.
- [9] Hall, Brian C. *Lie groups, Lie algebras, and representations: an elementary introduction*. Vol. 222. Springer, 2015.
- [10] Ibragimov, Nail H., *Equivalence Group Analysis of Reaction-diffusion Model*. Archives of ALGA, 8 (2011): 116–123.
- [11] Kaplan, AE and Straub, SF and Shkolnikov, PL, *Electromagnetic bubbles: subcycle near-femtosecond and subfemtosecond field solitons*, JOSA B, 14.11 (1997): 3013–3024.

- [12] Kazantseva, Elena V. and Maimistov, Andrey I. and Malomed, Boris A., *Propagation and interaction of ultrashort electromagnetic pulses in nonlinear media with a quadratic-cubic nonlinearity*, Optics communications, 188.1 (2001): 195–204.
- [13] Lee, John M., *Introduction to Smooth manifolds*, Springer New York, 2013.
- [14] Lee, John M., *Riemannian manifolds: an introduction to curvature*. Vol. 176. Springer Science Business Media, 2006.
- [15] Low, Robert J, *Electrodynamics, differential forms and the method of images*, 35.5 IOP (2011): 1413.
- [16] Maimistov, Andrei Ivanovich, *Some models of propagation of extremely short electromagnetic pulses in a nonlinear medium*, Quantum electronics, 30.4 (2000): 287–304.
- [17] Meurant, Gerard. *Differential manifolds and theoretical physics*. Vol. 116. Academic Press, 1985.
- [18] Misner, C.W. and Thorne, K.S. and Wheeler, J.A. *Gravitation*, Freeman, 1973.
- [19] Olver, Peter J, *Applications of Lie groups to differential equations*, Springer, 2000.
- [20] Olver, Peter J. *Equivalence, invariance and symmetry*. Cambridge Univ. Press, 1995.
- [21] Owerre, Solomon Akaraka, *Maxwell's Equations in Terms of Differential Forms*,AIMS, 2010.
- [22] Reitz, John R., Frederick J. Milford, and Robert W. Christy. *Foundations of electromagnetic theory*. Addison-Wesley Publishing Company, 2008.
- [23] Sørensen, Mads Peter, and Moysey Brio. *The Maxwell-Lorentz model for optical pulses*. The European Physical Journal Special Topics 147.1 (2007): 253–264.
- [24] Sørensen, Mads Peter, et al. *Solitary waves, steepening and initial collapse in the Maxwell-Lorentz system*. Physica D: Nonlinear Phenomena 170.3 (2002): 287–303.
- [25] Sutherland, Richard L. *Handbook of nonlinear optics*. CRC press, 2003.
- [26] Warner, Frank W. *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*. Vol. 94. Springer Science Business Media, 2013.
- [27] Webb, Garry and Sørensen, Mads Peter and Brio, Moysey and Zakharian, Aramis R and Moloney, Jerome V, *Variational principles, Lie point symmetries, and similarity solutions of the vector Maxwell equations in non-linear optics*, Physica D, 191.1 (2004): 49–80.
- [28] Zwiebach, Barton. *A First Course in String Theory Second Edition*. Cambridge university press, 2009.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

electromagnetics	الکترومغناطیس
prolongation	امتداد
extended prolongation	امتداد توسعه یافته
tangent vector	بردار مماس
section	برش
dimension	بعد
infinitesimal	بی‌نهایت کوچک
basis	پایه
Poisson	پواسون
fiber	تار
degenerate	تباهیده
point transformation	تبدیل نقطه‌ای
image	تصویر
symmetry	تقارن
correspondence	تناظر
coordinate chart	چارت مختصات
polynomial	چند جمله‌ای
motion	حرکت
integral curve	خم انتگرال
determinant	دترمینان
entry	درایه
diffeomorphism	دیفئومورفیسم
divergence	دیورژانس
maximal rank	رتبه ماکسیمال
product	ضرب

coefficient	ضریب
action	عمل
non-degenerate	غیر تباهیده
space-time	فضا-زمان
Minkowski space-time	فضا-زمان مینکوفسکی
topological space	فضای توپولوژیکی
jet space	فضای جت
tangent space	فضای مماس
Hausdorff space	فضای هاسدورف
total space	فضای کامل
polarization	قطبش
transformation group	گروه تبدیلات
rotation group	گروه دوران
Lie group	گروه لی
one-parameter subgroup	گروه یک-پارامتری
lemma	لم
metric	متریک
independent variable	متغیر وابسته
dependent variable	متغیر مستقل
level set	مجموعه تراز
local coordinate	مختصات موضعی
partial differential equation	معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی
ordinary differential equation	معادلات دیفرانسیل معمولی
Maxwell's equations	معادلات ماکسول
equation	معادله
determining equations	معادله مشخصه
manifold	منیفلد
Riemannian manifold	منیفلد ریمانی
locally Euclidean	موضعا اقلیدسی
infinitesimal generator	مولد بی‌نهایت کوچک
vector field	میدان برداری
invariant	ناوردا

exponential.....	نمایی
force.....	نیرو
identity.....	همانی
connected.....	همبند
smooth.....	هموار
complete.....	کامل
bundle.....	کلاف
vector bundle.....	کلاف برداری
tangent bundle.....	کلاف مماسی
Lie bracket.....	کروشه لی

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

action	عمل
basis	پایه
bracket	کروشه
bundle	کلایف
characteristic	مشخصه
coefficient	ضریب
complete	کامل
connected	همبند
constant rank theorem	قضیه رتبه ثابت
coordinate chart	چارت مختصاتی
correspondence	تناظر
degenerate	تباهیده
dependent variable	متغیر وابسته
determinant	دترمینان
determining equations	معادلات مشخصه
diffeomorphism	دیفئومورفیزم
extended prolongation	امتداد توسعه یافته
invariant	ناوردا
dimension	بعد
divergence	دیورژانس
electromagnetics	الکترومغناطیس
entry	درایه
equivalence class	کلاس هم ارزی
exponential	نمایی
equation	معادله

fiber	تار
force	نیرو
Hamiltonian equations	معادلات همیلتونی
Hausdorff space	فضای هاسدورف
identity	همانی
image	تصویر
independent variable	متغیر مستقل
infinitesimal generator	مولد بی نهایت کوچک
infinitesimal group action	عمل گروه بی نهایت کوچک
integral curve	خم انتگرال
inversion map	نگاشت وارون ساز
jet space	فضای جت
Leibniz' rule	قاعده لایبنیتز
lemma	لم
level set	مجموعه تراز
Lie group	گروه لی
local coordinate	مختصات موضعی
locally Euclidean	موضعا اقلیدسی
manifold	منیفلد
maximal rank	رتبه ماکسیمال
Maxwell's equations	معادلات ماکسول
metric	متریک
Minkowski space-time	فضا-زمان مینکوفسکی
motion	حرکت
one-parameter group	گروه یک-پارامتری
operator	عملگر
order	مرتبه
ordinary differential equation	معادلات دیفرانسیلی معمولی
orthogonal group	گروه متعامد
partial differential equation	معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی
point transformation	تبدیل نقطه‌ای
polynomial	چندجمله‌ای

polarization	قطبش
product	ضرب
prolongation	امتداد
regular submanifold	زیر منیفلد منظم
rotation group	گروه دوران
section	برش
submanifold	زیر منیفلد
smooth	هموار
symmetry of differential equation	تقارن معادلات دیفرانسیل
symmetry	تقارن
tangent vector	بردار مماس
topological space	فضای توپولوژیکی
tangent space	فضای مماس
tangent bundle	کلاف مماسی
total derivative	مشتق کامل
total space	فضای کامل
totally non-degenerate	کاملاً غیر تباهیده
transformation group	گروه تبدیلات
vector bundle	کلاف برداری
vector field	میدان برداری

نمایه

- k -تانسور کواریان متناوب، ۹
 G -ناوردا، ۱۴
 k -فرم دیفرانسیلی، ۱۱
- اطلس، ۵
اطلس هموار، ۵
برش، ۷
تابع نمایی، ۷
تانسور، ۹
تانسور میدان الکترومغناطیسی، ۳۹
جابه‌جایی الکتریکی، ۳۶
جبر لی راست، ۱۵
جبر لی چپ، ۱۵
خم هموار، ۷
دامنه چارت، ۴
دستگاه معادلات دیفرانسیل، ۱۹
دیفرانسیل خارجی، ۱۱
رتبه ماکسیمال، ۲۱
رتبه نگاشت، ۷
زیرمنیفلد، ۶
شار، ۱۶
ضرب تانسوری، ۹
ضرب وج، ۱۰
عملگر دیفرانسیل، ۱۱
عملگر دیورژانس، ۱۲
عملگر ستاره، ۱۱، ۱۲
- عملگر مشتق، ۵
عملگر کرل، ۱۲
فضا زمان مینکوفسکی، ۱۳
فضا-زمان، ۱۳
فضای جت مرتبه n -ام، ۲۰
فضای مماسی، ۶
فضای کامل، ۱۹
متریک ریمانی، ۱۲
متریک شبه ریمانی، ۱۳
معادله‌ی دگاسپریس-پروسسی، ۲۸
مغناطش، ۳۷
مماس بر یک خم، ۷
منیفلد، ۳
منیفلد ریمانی، ۱۳
منیفلد شبه ریمانی، ۱۳
منیفلد هموار، ۵
مولدهای بی‌نهایت کوچک، ۱۷
میدان الکترومغناطیسی، ۳۷
میدان برداری، ۷
ناوردای راست، ۱۴
ناوردای چپ، ۱۴
نظریه الکترومغناطیس، ۳۷
نگاشت k -خطی، ۹
نگاشت دیفرانسیل، ۶
نگاشت دیفرانسیل پذیر، ۴

نگاشت مختصاتی، ۴

نگاشت نمایی، ۱۶

نگاشت همئومورفیسم، ۳

نگاشت پیش‌برنده، ۶

نگاشت گذر، ۴

همومورفیسم گروه‌های لی، ۱۴

پتانسیل الکتریکی، ۳۷

پتانسیل مغناطیسی، ۳۷

چارت مختصاتی، ۴

کلاف مماسی، ۶

گروه لی، ۱۳

Aabstract

First, we study applications of Lie groups to differential equations. Then, we analyze Maxwell's equations and formulate the equations in non-linear optics, and using symmetry groups, we obtain the similarity solutions of the equations. We show that the system could be reduced to a single ordinary differential equation. We also obtain the Hamiltonian system by constructing a Lie-Poisson structure for the system.

Keywords : *Lie symmetry groups, Maxwell's equations, differential equations, similarity solutions, Non-linear optics.*



Shahrood University of Technology

Faculty of Mathematical Sciences

**Lie Group Analysis of Maxwell's Equations in
Non-Linear Optics**

Mustafa Bazghandi

Supervisor

Seyed Reza Hejazi

July 2016