بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده‌ی علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد

بررسی جواب‌های موج متحرک معادله‌ی سه-بعدی کودریاشف-سینلشیکوف

اصغر طهماسبی جایدر

استاد راهنما

دکتر سید رضا حجازی

تیر ۱۳۹۵

تقدیم به وجود مقدس حضرت مهدی (عج)، پدر بزرگوار، مادر مهربان و خواهران عزیزم.

تشکر و قدردانی

حمد بی‌حد و ثنای بی‌عد، سزاوار خداوندی است که منّت دانش و نگارش را از میان تمامی مخلوقاتش بر ابنای بشر نهاد، و او را از ورطه‌ی ظلمانی جهل به عرصه‌ی نورانی دانش و شاه‌نشین مقام بینش کشاند.

بر خود لازم می‌دانم که از زحمات بی‌دریغ استاد گرانقدرم جناب آقای دکتر سید رضا حجازی صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم، که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده و راه گشای ایشان این مجموعه به انجام نمی‌رسید. همچنین، از جناب آقای دکتر علی سررشته‌داری و دکتر روح الله بخشنده که زحمت داوری این پایان‌نامه را کشیدند کمال تشکر و قدردانی را دارم. در پایان بر دستان پرورگار بخشنده و مهربان، پدر و مادر عزیزم بوسه می‌زنم، و خدا را به خاطر وجود مقدس‌شان ستایش می‌کنم.

اصغر طهماسبی جایدر

تیر ۱۳۹۵

تعهدنامه

اینجانب **اصغر طهماسبی جایدر** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته‌ی **ریاضی محض** **دانشکده‌ی علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **بررسی جواب‌های موج متحرک معادله‌ی سه-بعدی کودریاشف-سینلشیکوف** ، تحت راهنمایی **دکتر سید رضا حجازی** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تاکنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارائه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه صنعتی شاهرود “ یا “ Shahrood University of Technology “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

اصغر طهماسبی جایدر

تیر ۱۳۹۵

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

یکی از کاربردهای شاخه‌ی هندسه دیفرانسیل در علوم مهندسی می‌باشد. با قراردادن یک ساختار هندسی روی پدیده‌های فیزیکی، مثل یک منیفلد هموار، یک دستگاه مختصات روی آن تعریف می‌شود. یکی از کاربردهای معادلات دیفرانسیل جزئی، توصیف امواج در یک مایع حبابدار (مایعات مخلوط شده با یک نوع گاز) می‌باشد که با استفاده از معادلات سه-بعدی کوردیاشف-سینلشیکوف انتشار امواج در این نوع مایع مورد بررسی و تحلیل قرار می‌گیرد. در این تحقیق به کمک روش تقارن‌های لی مربوط به معادله‌ی مورد نظر مجموعه‌ی وسیعی از جواب‌ها بدست خواهد آمد که قابل استفاده در مکانیک شاره ها خواهد بود.

کلمات کلیدی: معادلات دیفرانسیل، گروه لی، جبر لی، تقارن لی، ناوردا، مولد بینهایت کوچک، معادلات سه-بعدی کودریاشف-سینلشیکوف، جواب‌های ناوردای گروهی.

فهرست مطالب

مقدمه ۱

۱ تعاریف و مفاهیم بنیادی ۳
۱.۱ منیفلد ۳
۲.۱ گروه‌های لی ۵
۳.۱ میدان‌های برداری ۸
۴.۱ جبرهای لی ۱۲

۲ ساختار هندسی معادلات دیفرانسیل ۱۷
۱.۲ تقارن‌های معادلات جبری ۱۷
۲.۲ گروه‌ها و معادلات دیفرانسیل ۲۰
۳.۲ امتداد دهی ۲۳
۴.۲ امتداد توسعه یافته ۳۸
۵.۲ انتگرال‌گیری از معادلات دیفرانسیل معمولی ۴۴
۱.۵.۲ معادلات مرتبه‌ی اول ۴۴
۲.۵.۲ معادلات دیفرانسیل با مراتب بالاتر ۴۸

۳ جواب‌های گروه-ناوردا و متشابه ۵۳
۱.۳ ساختن جواب‌های گروه-ناوردا ۵۳
۲.۳ مثال‌های از جواب‌های گروه-ناوردا ۵۷

۴ بررسی گروهی معادلات سه-بعدی کودریاشف-سینلشیکوف ۶۳
۱.۴ مقدمه ۶۳
۲.۴ تقارن‌های معادله‌ی سه-بعدی کودریاشف-سینلشیکوف ۶۴
۳.۴ کاهش مرتبه‌ی معادله‌ی سه-بعدی کودریاشف-سینلشیکوف ۷۰
۱.۳.۴ کاهش مرتبه‌ی معادله‌ی کودریاشف-سینلشیکوف در حالت ۱ ($\chi = ۰$) ۷۰
۲.۳.۴ کاهش مرتبه‌ی معادله‌ی کودریاشف-سینلشیکوف در حالت ۲ ($\chi \neq ۰$) ۷۷
۴.۴ جواب‌های دقیق معادله‌ی سه-بعدی کودریاشف-سینلشیکوف ۸۱

مراجع ۸۹

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی ۹۳

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی ۹۷

نمایه ۱۰۱

مقدمه

اصطلاح معادلات دیفرانسیل برای اولین بار در سال ۱۶۷۶ توسط لایبنیز[1] بکار برده شده است. بسیاری از قوانین عمومی طبیعت در فیزیک، شیمی، زیست‌شناسی، ستاره‌شناسی و . . . طبیعی‌ترین بیان ریاضی خود را در زبان معادلات دیفرانسیل می‌آبند. هرگاه که رابطه‌ای بین چند متغیر با مقادیر مختلف در حالت‌ها یا زمان‌های مختلف وجود دارد و نرخ تغییرات متغیرها در زمان‌های مختلف یا حالت‌های مختلف شناخته شده است می‌توان آن پدیده را با معادلات دیفرانسیل بیان کرد.

تا اواسط قرن نوزدهم میلادی مطالعه‌ی معادلات دیفرانسیل بیشتر به حل دسته‌ی خاص از معادلات از جمله معادلات جدایی‌پذیر، معادلات همگن و . . . اختصاص داشت. تا اینکه ماریوس سوفوس لی[2] زمستان ۱۸۷۳ – ۱۸۷۴ روش تقارن را برای حل معادلات دیفرانسیل مطرح کرد. امروزه این روش به احترام این دانشمند بزرگ به روش تقارن‌های لی نامگذاری شده است.

بی‌شک معادلات دیفرانسیل جزئی (PDE) بخش وسیعی از پدیده‌های فیزیکی را توجیه کرده و در بسیاری از شاخه‌ها مثل فیزیک، مهندسی مکانیک، مهندسی برق، مهندسی عمران، زیست شناسی، شیمی و... کاربرد اساسی دارند. برخلاف معادلات دیفرانسیل معمولی (ODE) که غالباً به صورت تکنیکی و با روش‌های خاصی حل می‌شوند، برای معادلات دیفرانسیل جزئی روش مدونی جهت حل کردن موجود نیست. اما در روش تقارنی لی به شرط یافتن تقارن‌ها می‌توان براساس الگوریتمی که در این تحقیق بدان اشاره می‌شود با تعیین یک ساختار هندسی روی معادلات داده شده دسته وسیعی از جواب‌های آن را بدون در نظر گرفتن نوع معادله بدست آورد که همین امر می‌تواند بسیاری از نقیصه‌ها و کمبودها در علوم اشاره شده در بالا را برطرف کند .

به طور کلی، گروه تقارن دستگاه معادلات دیفرانسیل بزرگ‌ترین گروه موضعی از تبدیلات می‌باشد که روی فضای شامل متغیرهای مستقل و متغیرهای وابسته عمل می‌کند، به طوری که جواب‌های یک دستگاه را به جواب‌های دیگر تبدیل می‌کند. بنابراین گروه‌های تقارنی را می‌توان به دو دسته‌ی تبدیلات پیوسته، که موضوع این پایان‌نامه می‌باشد، و تبدیلات گسسته طبقه‌بندی کرد. کار با تبدیلات پیوسته نسبت به تبدیلات گسسته آسان‌تر است، زیرا ابزار محاسبه در این تبدیلات ابزارهای کلاسیک محاسبه‌ی دیفرانسیل و انتگرال می‌باشند. یکی از کاربردهای گروه‌های تقارنی طبقه بندی جواب‌های معادلات دیفرانسیل می‌باشد، به طوری که هر دو جواب از یک دسته را می‌توان به وسیله‌ی بعضی از مولدهای گروه تقارنی به هم تبدیل کرد.

[1] Leibniz

[2] Marius Sophus Lie

این رساله در چهار فصل تنظیم شده است. در فصل اول به بیان مفاهیم اساسی هندسه از جمله منیفلد، گروه‌های لی، میدان‌های برداری و جبرهای لی پرداخته شده است. فصل دوم، ساختار هندسی معادلات دیفرانسیل مورد بررسی قرار می‌گیرد. در این فصل ابتدا فضای کامل و گروه‌های تقارنی معادلات دیفرانسیل تعریف شده و سپس فضای جت و امتداددهی تعریف می‌شود، آنگاه با استفاده از فضای جت تعریف دقیق‌تری از معادلات دیفرانسیل ارائه می‌شود. در ادامه دو قضیه‌ی مهم ارائه می‌شود. قضیه‌ی اول که به قضیه‌ی ناوردایی معادلات دیفرانسیل مشهور است، یک روش کارآمد برای پیدا کردن تقارن‌های معادلات دیفرانسیل ارائه می‌دهد و قضیه‌ی دوم نحوی محاسبه‌ی امتداد میدان‌های برداری را بیان می‌کند. بخش آخر این فصل با استفاده از گروه‌های لی به حل معادلات دیفرانسیل معمولی می‌پردازد. در فصل سوم جواب‌های گروه-ناوردا و متشابه بیان می‌شود. در این فصل به نحوه‌ی محاسبه‌ی جواب‌های گروهی پرداخته می‌شود. و بالاخره در فصل چهارم به بررسی گروهی معادلات دیفرانسیل سه-بعدی کودریاشف-سینلشیکوف[۳] (KS) پرداخته می‌شود. در این فصل ابتدا تقارن‌های معادله را بدست آورده و سپس با استفاده از این تقارن‌ها به کاهش مرتبه‌ی معادله پرداخته می‌شود. در آخر جواب‌های دقیق و متشابه‌ی برای معادله بدست آورده شده است.

[۳] Kudryashov-Sinelshchikov

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم بنیادی

در این فصل ابتدا مفاهیم اساسی مورد نیاز فصل‌های بعدی از جمله منیفلد، گروه‌های لی، میدان‌های برداری و جبرهای لی را توضیح می‌دهیم.

۱.۱ منیفلد

از نظر شهودی منیفلد تعمیمی از منحنی و رویه به ابعاد بالاتر است. منیفلد یک فضای موضعاً اقلیدسی است که در آن هر نقطه دارای یک همسایگی به نام چارت بوده و هر چارت با زیرمجموعه‌ی بازی از $\mathbb{R}^n$ همئومورف است. چارت مختصاتی این امکان را فراهم ساخته تا بتوان محاسبات را مانند فضای اقلیدسی انجام داد، بنابراین بسیاری از مفاهیم $\mathbb{R}^n$ مانند مشتق‌پذیری، مشتق‌نقطه‌ای، فضای مماسی و فرم دیفرانسیلی روی منیفلد قابل اجرا می‌باشند.

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنیم X یک مجموعه باشد. یک **توپولوژی** روی X عبارت است از خانواده‌ی مانند τ از زیرمجموعه‌های X که در شرایط زیر صدق کند:

- $\emptyset, X \in \tau$.
- اجتماع هر زیرگردایه از τ متعلق به τ باشد.
- اشتراک هر زیرگردایه‌ی متناهی از τ متعلق به τ باشد.

یک **فضای توپولوژیکی** عبارت است از زوج مرتب (X, τ) که در آن τ یک توپولوژی روی X است.

تعریف ۲.۱.۱. فضای توپولوژیک M را یک **منیفلد توپولوژیکی** $n-$ بعدی می‌گوییم هرگاه شرایط زیر برقرار باشد:

- M هاسدورف[1] باشد، یعنی هر دو نقطه‌ی $p, q \in M$ به ترتیب مشمول در زیرمجموعه‌های باز $U, V \in M$ باشند به طوری که $U \cap V = \emptyset$.

[1] Hausdorff

- M شمارای نوع دوم باشد، یعنی پایه‌ای شمارا داشته باشد.
- M به طور موضعی اقلیدسی از بعد n باشد، یعنی هر نقطه آن مشمول در یک همسایگی همئومورف با یک زیرمجموعه‌ی باز $\mathbb{R}^n$ باشد.

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنیم M یک منیفلد توپولوژیکی $n-$بعدی باشد. یک **چارت مختصاتی** روی M به صورت زوج (U, φ) است که U یک زیرمجموعه‌ی باز از M و $\varphi : U \to \hat{U}$ یک نگاشت همئومورف با یک زیرمجموعه‌ی باز $\hat{U} = \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ است.

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنیم U و V بترتیب زیرمجموعه‌های باز از فضاهای اقلیدوسی $\mathbb{R}^n$ و $\mathbb{R}^m$ باشند. نگاشت $F : U \to V$ را **هموار**(C^∞ یا دیفرانسیل پذیر) می‌گوییم هرگاه تمام مشتقات جزئی F از هر مرتبه موجود و پیوسته باشند.

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنیم $U \subseteq \mathbb{R}^n$ و $V \subseteq \mathbb{R}^m$ زیرمجموعه‌های باز باشند. نگاشت هموار و دوسویی $F : U \to V$ را **دیفئومورفیسم** می‌گوییم هرگاه وارونش هموار باشد.

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنیم $U \subseteq \mathbb{R}^n$ و $V \subseteq \mathbb{R}^m$ زیرمجموعه‌های باز باشند. U و V را **دیفئومورف** می‌گوییم هرگاه یک دیفئومورفیسم بین U و V وجود داشته باشد. و آن را با $U \approx V$ نشان می‌دهیم.

مثال ۷.۱.۱. فرض کنیم $F : \mathbb{B}^n \to \mathbb{R}^n$ و $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{B}^n$ نگاشت‌های با ضابطه‌های

$$F(x) = \frac{x}{\sqrt{۱ - |x|^۲}}, \qquad G(x) = \frac{y}{\sqrt{۱ + |y|^۲}},$$

باشند. به طوری که $\mathbb{B}^n$ یک گوی باز در $\mathbb{R}^n$ است. این نگاشت‌ها هموار و وارون یک دیگر هستند. بنابراین $\mathbb{B}^n$ دیفئومورف با $\mathbb{R}^n$ است.

تعریف ۸.۱.۱. فرض کنیم (U, φ) و (V, ψ) دو چارت روی منیفلد M باشند. نگاشت

$$\psi \circ \varphi^{-۱} : \varphi(U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap V),$$

را نگاشت **گذر** از φ به ψ می‌نامیم. دو چارت فوق را به طور هموار **سازگار** می‌گوییم هرگاه $\psi \circ \varphi^{-۱}$ دیفئومورفیسم باشند.

تعریف ۹.۱.۱. مجموعه‌ی $A = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_\alpha$ را یک **اطلس** روی M می‌نامیم هرگاه اعضای A دو به دو به طور هموار سازگار باشند، و نیز دامنه‌ی اعضای A کل M را بپوشانند. اطلس A **ماکسیمال** است هرگاه مشمول در هیچ اطلس دیگری نباشد. یک **ساختار هموار** روی منیفلد توپولوژیکی M، یک اطلس ماکسیمال هموار است. هر منیفلد توپولوژیکی مجهز به یک ساختار هموار A را یک **منیفلد هموار** می‌نامیم و با (M, A) نشان می‌دهیم.

مثال ۱۰.۱.۱. فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ یک منیفلد هموار $n-$بعدی با چارت $(\mathbb{R}^n, Id)$ می‌باشد.

مثال ۱۱.۱.۱. گروه تبدیلات خطی عام (وارون پذیر) از مرتبه‌ی n،

$$\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) = \{A \in M(n \times n, \mathbb{R}) : \det A \neq \circ\},$$

یک منیفلد $n^{۲}$−بعدی است.

مثال ۱۲.۱.۱. مجموع تمام زیرفضاهای k−بعدی یک فضای n−بعدی یک منیفلد هموار با بعد $k(n-k)$ است، که منیفلد گرسمن[۲] نام دارد.

تعریف ۱۳.۱.۱. فرض کنیم M و N دو منیفلد هموار به ترتیب m−بعدی و n−بعدی باشند. نگاشت $F : M \to N$ را **هموار** می‌گوییم هرگاه برای هر نقطه‌ی $p \in M$، چارت‌های هموازی مانند (U,φ) شامل p و (V,ψ) شامل $F(p)$ وجود داشته باشد، به طوری که $F(U) \subseteq V$ و همچنین نگاشت $\psi \circ F \circ \varphi^{-۱} : \varphi(U) \to \psi(V)$ هموار باشد.

تعریف ۱۴.۱.۱. فرض کنیم F نگاشتی هموار از منیفلد هموار m−بعدی M به منیفلد هموار n−بعدی N باشد. رتبه‌ی F در نقطه‌ی $x = (x^{۱}, \ldots, x^{m})$ برابر با رتبه‌ی ماتریس ژاکوبین $(\partial F^{i}/\partial x^{i})$ از مرتبه‌ی $n \times m$ می‌باشد، که $y = F(x)$ در هر مختصات موضعی مناسبی در همسایگی x بیان می‌شود. نگاشت F روی زیرمجموعه‌ی $S \subseteq M$ دارای **رتبه‌ی ماکسیمال** است اگر برای هر $x \in S$ رتبه‌ی F برابر با بزرگ‌ترین مقدار ممکن(مینیمم m و n) باشد.

تعریف ۱۵.۱.۱. فرض کنیم M یک منیفلد هموار باشد. زیرمنیفلد پارامتری شده $N \subset M$ به وسیله‌ی نگاشت هموار و یک به یک $\phi : \tilde{N} \to M$ را **زیرمنیفلد ایمبد شده** می‌گوییم هرگاه به ازای هر نقطه‌ی $x \in N$ همسایگی باز و به دلخواه کوچک مانند $U \subset M$ از x وجود داشته باشد به طوری که $\phi^{-۱}[U \cap N]$ یک زیرمجموعه‌ی باز و همبند از N باشد.

۲.۱ گروه‌های لی

گروه‌های لی در حد فاصل بین دو شاخه‌ی بزرگ ریاضیات یعنی جبر و توپولوژی قرار دارد. ویژگی جبری آن از اصول موضوعه‌ی گروه گرفته می‌شود و خواص هندسی آن‌ها از پارامتری کردن عناصر این گروه به وسیله‌ی نقاطی از یک منیفلد دیفرانسیل‌پذیر گرفته می‌شود. گروه‌های لی در نوع خود بسیار زیبا هستند، آن قدر زیبا که خود به تنهایی به عنوان ابزاری برای حل معادلات دیفرانسیل و مطالعه‌ی توابع خاصی که توسط دسته‌ی خاص از این معادلات تعیین می‌شود به کار می‌رود.

تعریف ۱.۲.۱. یک **گروه لی**، منیفلدی هموار مانند G است به طوری که دارای ساختار جبری گروه بوده و دو نگاشت ضربی

$$m : G \times G \longrightarrow G, \qquad m(g,h) = gh, \qquad g,h \in G,$$

[۲] Grassmann

و وارون ساز

$$i : G \longrightarrow G, \qquad i(g) = g^{-1}, \qquad g \in G,$$

هموار باشند. اگر G یک منیفلد توپولوژیکی و m و i پیوسته باشند، آنگاه G را یک **گروه توپولوژیکی** می‌نامیم.

مثال ۲.۲.۱. هر یک از منیفلدهای زیر یک گروه لی می‌باشند.

- اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ و فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ تحت عمل جمع دو گروه لی می‌باشند. مجموعه‌های $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ و $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ نیز به ترتیب تحت عمل ضرب گروه‌های لی یک بعدی و دو بعدی هستند.

- دایره $S^1 \subseteq \mathbb{C}^*$ یک منیفلد هموار و یک گروه تحت ضرب اعداد مختلط است. به ازای زوایای $\theta, \theta_1, \theta_2 \in S^1$ ، S^1 تحت نگاشت‌های

$$(\theta_1, \theta_2) \longmapsto \theta_1 + \theta_2, \qquad \theta \longmapsto -\theta,$$

یک گروه لی است.

- در حالت کلی گروه‌های ماتریسی زیر با عمل جمع معمولی ماتریس‌ها و وارون آن‌ها نسبت به عمل جمع، مثال‌های دیگر از گروه‌های لی می‌باشند. و نیز این گروه‌ها نسبت به ضرب ماتریسی یک گروه لی هستند. گروه خطی عام

$$\mathrm{GL}(n) = \{A \in M(n \times n, \mathbb{R}) : \det A \neq 0\},$$

یک گروه لی n^2–بعدی است. گروه خطی خاص

$$\mathrm{SL}(n) = \{A \in GL(n) : \det A = 1\},$$

یک گروه لی $(n^2 - 1)$–بعدی است. گروه متعامد

$$\mathrm{O}(n) = \{A \in \mathrm{GL}(n) : A^T A = I\},$$

گروه لی $\frac{1}{2}n(n-1)$–بعدی است. گروه متعامد خاص

$$\mathrm{SO}(n) = \{A \in \mathrm{O}(n) : \det = 1\},$$

گروه لی $\frac{1}{2}n(n-1)$–بعدی است. گروه آفین

$$\mathrm{A}(n) = \left\{ \begin{pmatrix} A & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : A \in \mathrm{GL}(n-1), a \in \mathbb{R}^{n-1} \right\},$$

گروه لی $n(n-1)$–بعدی است. اگر همه‌ی این گروه‌های ماتریسی را روی صفحه‌ی مختلط در نظر بگیریم بعد آن‌ها دو برابر می‌شود.

- اگر G_1، ... و G_n گروه‌های لی باشند، آنگاه به وسیله‌ی نگاشت‌های

$$(g_1, \dots, g_n)(h_1, \dots, h_n) = (g_1 h_1, \dots, g_n h_n),$$

$$(g_1, \dots, g_n) = (g_1^{-1}, \dots, g_n^{-1}),$$

$G_1 \times \dots \times G_n$ خود یک گروه لی است.

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنیم G یک گروه لی و $H \subseteq G$ یک زیرمجموعه‌ی آن باشد. H یک **زیرگروه لی** است هرگاه H یک زیرگروه G بوده و H خود یک زیرمنیفلد ایمبدشده G باشد، همچنین دو نگاشت m و i تعریف شده برای H هموار باشند.

تعریف ۴.۲.۱. فرض کنیم M یک منیفلد هموار باشد. یک گروه **موضعی** از تبدیلات که روی M عمل می‌کنند به وسیله‌ی گروه لی G، زیرمجموعه‌ی باز U که حوزه تعریف عمل گروه است، به طوری که $e \times M \subset U \subset G \times M$ و نگاشت هموار $\Psi : U \to M$ داده می‌شود که دارای ویژگی‌های زیر است:

- اگر $(h, x) \in U$ و $(g, \Psi(h, x)) \in U$ و همچنین $(g.h, x) \in U$ آنگاه

$$\Psi(g, \Psi(h, x)) = \Psi(g.h, x). \qquad (۱.۱)$$

- برای هر $x \in M$،

$$\Psi(e, x) = x. \qquad (۲.۱)$$

- اگر $(g, x) \in U$ آنگاه $(g^{-1}, \Psi(h, x)) \in U$ و

$$\Psi(g^{-1}, \Psi(h, x)) = x.$$

تعریف ۵.۲.۱. فرض کنیم M یک منیفلد باشد. زیرمجموعه‌ی $O \subseteq M$ را یک **مدار** می‌گوییم هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

- اگر $x \in O$، $g \in G$ و $g.x$ تعریف شده باشد، آنگاه $g.x \in O$ است.
- اگر $\tilde{O} \subset O$ و $\tilde{O}$ در بخش قبل صدق کند، آنگاه $\tilde{O} = O$ یا $\tilde{O}$ تهی است.

تعریف ۶.۲.۱. فرض کنیم M یک گروه موضعی از تبدیلات باشد که روی منیفلد M عمل می‌کند.

- گروه G به طور **نیم-منظم** عمل می‌کند اگر همه‌ی مدارهای آن به عنوان زیرمنیفلدی از M هم بعد باشند.
- گروه G به طور **منظم** عمل می‌کند اگر علاوه بر نیم-منظم بودن عمل، برای هر نقطه‌ی $x \in M$ همسایگی کوچک و دلخواه U از x وجود داشته باشد به طوری که هر مدار از G، U را به زیرمجموعه‌های همبند مسیری تقسیم کند.

تعریف ۷.۲.۱. یک عمل گروه را **متعدی** می‌گوییم اگر و تنها اگر یک مدار داشته باشیم و آن هم خود منیفلد M باشد.

تعریف ۸.۲.۱. گروه تبدیلات G به طور **مؤثر** عمل می‌کند اگر عناصر گروهی متفاوت عمل‌های متفاوت داشته باشند. به طوری که برای هر $x \in M$ داشته باشیم $g.x = h.x$ اگر و تنها اگر $g = h$.

۳.۱ میدان‌های برداری

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنیم M یک منیفلد هموار باشد. به ازای هر نقطه‌ی $x \in M$ نگاشت خطی $X : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ را یک مشتق در نقطه‌ی x می‌گوییم هرگاه برای هر $f, g \in C^\infty(M)$،

$$X(fg)(x) = f(x)Xg(x) + g(x)Xf(x).$$

تعریف ۲.۳.۱. مجموع تمام عملگرهای مشتق روی $C^\infty(M)$، در نقطه $x \in M$ را فضای مماسی در نقطه‌ی $x \in M$ می‌گوییم و با T_xM نشان می‌دهیم.

قضیه ۳.۳.۱. هر فضای مماسی T_xM، فضایی برداری است. همچنین مجموعه‌ی $\{\partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^m\}$ یک پایه برای T_xM در مختصات موضعی تشکیل می‌دهد. بنابراین بعد فضای مماسی برابر بعد منیفلد است.

برهان. [۱۹] □

تعریف ۴.۳.۱. اجتماع مجزایی از فضاهای مماسی در نقطه‌ی $x \in M$ را کلاف مماسی از M می‌گوییم و آن را با TM نمایش می‌دهیم:

$$TM := \bigsqcup_{x \in M} T_xM.$$

قضیه ۵.۳.۱. هر کلاف مماسی یک منیفلد هموار $n-$بعدی یک منیفلد هموار $(2n)-$بعدی است.

برهان. [۶] □

تعریف ۶.۳.۱. نقطه‌ی $a \in \mathbb{R}^n$ را در نظر می‌گیریم. مجموعه‌ی $\mathbb{R}^n_a$ را به صورت

$$\mathbb{R}^n_a := \{a\} \times \mathbb{R}^n = \{(a, V) : V \in \mathbb{R}^n\},$$

تعریف می‌کنیم. هر عضو $\mathbb{R}^n_a$ را یک بردار مماس در نقطه‌ی a می‌گوییم. برای سادگی (a, V) را با V_a یا $V|_a$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۷.۳.۱. بردار مماس بر منیفلد M در نقطه‌ی $x \in M$، به وسیله‌ی مماس بر منحنی هموارگذرنده از x تعریف می‌شود. در مختصات موضعی، بردار مماس $V|_x$ بر منحنی $x = \phi(t)$ به وسیله‌ی مشتق $V|_x = \dot{\phi}(x)$ مشخص می‌شود. گردایه‌ی از چنین بردارهای مماسی، فضای مماسی بر M در نقطه‌ی x

تشکیل می‌دهند. فضاهایی مماسی با هم کلاف برداری روی منیفلد M تشکیل می‌دهند. میدان برداری V روی M بردار مماس $V|_x \in T_xM$ در نقطه‌ی $x \in M$ می‌باشد که $V|_x$ به طور هموار از نقطه‌ای به نقطه‌ای دیگر تغییر می‌کند. درمختصات موضعی $(x^1, \ldots, x^m)$، میدان برداری برای هر تابع هموار $\xi^i(x)$ از x دارای فرم

$$V|_x = \xi^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \xi^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \cdots + \xi^m \frac{\partial}{\partial x^m},$$

می‌باشد.

تعریف ۸.۳.۱. منحنی انتگرال از یک میدان برداری V منحنی پارامتری هموار $x = \phi(\varepsilon)$ می‌باشد به طوری که بردار مماس بر هر نقطه منحنی با مقدار V در آن نقطه برابر باشد، یعنی:

$$\dot{\phi}(\varepsilon) = V|_{\phi(\varepsilon)}, \qquad \forall \varepsilon \in \mathbb{R},$$

در مختصات موضعی، بایستی $x = \phi(\varepsilon) = (\phi^1(\varepsilon), \ldots, \phi^m(\varepsilon))$ جوابی از دستگاه معادله‌ی دیفرانسیل معمولی

$$\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\varepsilon} = \xi^i(x), \qquad i = 1, \ldots, m, \tag{۳.۱}$$

باشد که $\xi^i(x)$–ها ضرایب V در x می‌باشند.

تعریف ۹.۳.۱. اگر V میدانی برداری باشد، منحنی انتگرال ماکسیمال پارامتری که از نقطه x در M می‌گذرد را با $\Psi(\varepsilon, x)$ نشان می‌دهیم و Ψ را **شار** تولید شده توسط x می‌نامیم. بنابراین برای هر $x \in M$ و هر ε در بازه I_x شامل ۰، $\Psi(\varepsilon, x)$ نقطه‌ای روی منحنی انتگرال گذرنده از x در M خواهد بود. شار میدان برداری برای هر $\varepsilon, \delta \in \mathbb{R}$ دارای خاصیت‌های زیر است:

$$\Psi(\delta, \Psi(\varepsilon, x)) = \Psi(\delta + \varepsilon, x), \qquad x \in M, \tag{۴.۱}$$

$$\Psi(0, x) = x, \tag{۵.۱}$$

و

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\Psi(\varepsilon, x) = V|_{\Psi(\varepsilon, x)}. \tag{۶.۱}$$

با مقایسه‌ی (۴.۱) و (۵.۱) با (۱.۱) و (۲.۱) مشاهده می‌کنیم که شار تولید شده به وسیله‌ی میدان برداری با عمل گروه موضعی گروه لی $\mathbb{R}$ روی منیفلد M یکسان است. اغلب گروه یک–پارامتری از تبدیلات و میدان برداری V، مولد بینهایت کوچک عمل نامیده می‌شود. با استفاده از قضیه تیلور[۳] در مختصات موضعی داریم:

$$\Psi(\varepsilon, x) = x + \varepsilon\xi(x) + O(\varepsilon^2),$$

[۳] Taylor

که $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^n)$ ضرایب V هستند. اگر $\Psi(\varepsilon, x)$ یک گروه یک-پارامتری از تبدیلات روی M باشد آنگاه مولد بینهایت کوچک آن به وسیله‌ی (۶.۱) به ازای $\varepsilon = 0$ بدست می‌آید:

$$V|_x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}|_{\varepsilon=0} \Psi(\varepsilon, x). \tag{۷.۱}$$

تناظری یک به یک بین گروه‌های یک-پارامتری موضعی از تبدیلات و مولدهای بینهایت کوچک آن وجود دارد. اغلب محاسبه‌ی شار یا گروه یک-پارامتری تولید شده توسط میدان برداری V به عنوان نگاشت نمایی در نظر گرفته می‌شود. که با نماد

$$\exp(\varepsilon V) \equiv \Psi(\varepsilon, x),$$

نمایش داده می‌شود.

مثال ۱۰.۳.۱. مثال‌های از میدان‌های برداری و شارها:

- فرض کنیم $M = \mathbb{R}$ با مختصات x باشد. میدان برداری $V = \partial/\partial x \equiv \partial_x$ را در نظر می‌گیریم. بنابراین

$$\exp(\varepsilon V)x = \exp(\varepsilon \partial_x)x = x + \varepsilon,$$

که عمل گروه انتقالات نامیده می‌شود. همچنین شار تولید شده به وسیله‌ی میدان برداری $V = x\partial_x$ به صورت

$$\exp(\varepsilon V)x = \exp(\varepsilon x \partial_x)x = e^{\varepsilon} x,$$

می‌باشد، که جواب معادله‌ی دیفرانسیل معمولی $\dot{x} = x$ با مقدار اولیه‌ی x در $\varepsilon = 0$ می‌باشد، که گروه تبدیلات مقیاسی نام دارد.

- گروه دوران‌ها در صفحه را در نظر می‌گیریم،

$$\Psi(\varepsilon, (x, y)) = (x \cos\varepsilon - y \sin\varepsilon, x \sin\varepsilon + y \cos\varepsilon).$$

مولد بینهایت کوچک آن میدان برداری به شکل $V = \xi(x, y)\partial_x + \eta(x, y)\partial_y$ است که به کمک (۷.۱) داریم:

$$\xi(x, y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}|_{\varepsilon=0} (x \cos\varepsilon - y \sin\varepsilon) = -y,$$
$$\eta(x, y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}|_{\varepsilon=0} (x \sin\varepsilon + y \cos\varepsilon) = x,$$

بنابراین مولد بینهایت کوچک آن میدان برداری $V = -y\partial_x + x\partial_y$ می‌باشد. گروه تبدیلات بالا با جواب‌های دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varepsilon} = -y, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\varepsilon} = x,$$

مطابقت دارد.

قضیه ۱۱.۳.۱. فرض کنیم V میدان برداری تعریف شده روی M باشد. اگر $x_\circ$ نقطه تکین V نباشد به طوری که $V|_{x_\circ} \neq \circ$ سپس مختصات موضعی اصلاحی $y = (y^۱, \ldots, y^m)$ در همسایگی $x_\circ$ وجود دارد به طوری که $V = \partial/\partial y^۱$.

برهان. [۶] □

تعریف ۱۲.۳.۱. فرض کنیم $F : M \to N$ نگاشتی هموار بین دو منیفلد هموار M و N باشد. به ازای هر نقطه‌ی $x \in M$ نگاشت

$$\mathrm{d}F_x : T_xM \longrightarrow T_{F(x)}N,$$

را **دیفرانسیل** F در نقطه‌ی x می‌گوییم، که به ازای هر $V \in T_xM$ و $f \in C^\infty(M)$ با ضابطه‌ی

$$\mathrm{d}F(V|_x)f(y) = V(f \circ F)(x), \qquad y = F(x),$$

تعریف می‌شود. نگاشت دیفرانسیل F را با F_* نیز نمایش می‌دهیم، که به آن نگاشت **پیش‌برنده** می‌گوییم. همچنین در مختصات موضعی $x = (x^۱, \ldots, x^m)$ روی M و $y = (y^۱, \ldots, y^n)$ روی N داریم،

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}F(V|_x) &= \mathrm{d}F\Big(\sum_{i=۱}^{m} \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big) \\
&= \sum_{j=۱}^{n} \Big(\sum_{i=۱}^{m} \xi^i \frac{\partial F^j}{\partial x^i}(x)\Big) \frac{\partial}{\partial y^j} \\
&= \sum_{j=۱}^{n} V\left(F^j(x)\right) \frac{\partial}{\partial y^j}.
\end{aligned}$$

مهمترین عملی که روی میدان‌های برداری تعریف می‌شود کروشه یا جابجاگر لی است.

تعریف ۱۳.۳.۱. اگر V و W دو میدان برداری روی M باشند **کروشه‌ی لی**، $[V, W]$، آن‌ها نیز یک میدان برداری است که برای همه‌ی توابع $f : M \longrightarrow N$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$[V, W](f) = V(W(f)) - W(V(f)). \tag{۸.۱}$$

هم‌چنین در مختصات موضعی، اگر داشته باشیم:

$$V = \sum_{i=۱}^{m} \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}, \qquad W = \sum_{i=۱}^{m} \eta^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

آنگاه می‌توان نوشت،

$$[V, W] = \sum_{i=۱}^{m} \left(V(\eta^i) - W(\xi^i)\right) \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{i=۱}^{m} \sum_{j=۱}^{m} \big(\xi^j \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} - \eta^j \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}\big) \frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{۹.۱}$$

مثال ۱۴.۳.۱. فرض کنیم $M=\mathbb{R}^{۲}$ باشد و $V,W\in T_p\mathbb{R}^{۲}$،

$$V=y\frac{\partial}{\partial x},\qquad W=x^{۲}\frac{\partial}{\partial x}+xy\frac{\partial}{\partial y},$$

دو میدان برداری باشند. در این صورت

$$[V,W]=V(x^{۲})\frac{\partial}{\partial x}+V(xy)\frac{\partial}{\partial y}-W(y)\frac{\partial}{\partial x}=xy\frac{\partial}{\partial x}+y^{۲}\frac{\partial}{\partial y}.$$

گزاره ۱۵.۳.۱. میدان‌های برداری V ، V' ، W، W' و U روی M و ثابت‌های c و c' را در نظر می‌گیریم، سپس کروشه‌ی لی آن‌ها در خواص زیر صدق می‌کند:

- دوخطی

$$[cV+c'V',W]=c[V,W]+c'[V',W],$$

$$[V,cW+c'W']=c[V,W]+c'[V,W'].$$

- پاد متقارن

$$[V,W]=-[W,V].$$

- اتحاد ژاکوبی

$$[U,[V,W]]+[W,[U,V]]+[V,[W,U]]=\circ.$$

برهان. با توجه به دو رابطه‌ی (۸.۱) و (۹.۱) درستی حکم به سادگی اثبات می‌شود. □

۴.۱ جبرهای لی

تعریف ۱.۴.۱. فرض کنیم G یک گروه لی باشد. برای هر عنصر گروهی $g\in G$ **ضرب از راست** به صورت

$$R_g:G\longrightarrow G,$$
$$h\longrightarrow h.g,$$

تعریف می‌شود. که R_g یک دیفئومورفیسم با وارون $(R_g)^{-۱}=R_{g^{-۱}}$ می‌باشد.

تعریف ۲.۴.۱. میدان برداری V را روی G، **ناوردای راست** می‌گوییم اگر برای تمام $g,h\in G$،

$$\mathrm{d}R_g(V|_h)=V|_{R_g(h)}=V|_{hg}.$$

لم ۱.۴.۳. اگر V و W دو میدان برداری ناوردای راست باشند. آنگاه هر ترکیب خطی $aV + bW$ که $a, b \in \mathbb{R}$ نیز یک میدان برداری ناوردای راست است. پس مجموعه‌ی تمام میدان‌های برداری ناوردای راست یک فضای برداری تشکیل می‌دهد.

برهان. [۱۹] □

تعریف ۱.۴.۴. فرض کنید G یک گروه لی باشد که از راست روی خودش عمل می‌کند. در این صورت به مجموعه‌ی تمام میدان‌های برداری ناوردای راست، **جبر لی** راست G گفته می‌شود.

ضرب از چپ، میدان‌های برداری ناوردای چپ و جبر لی چپ نیز به طور مشابه تعریف می‌شوند. ثابت می‌شود جبر لی راست و چپ یکی هستند. در همه جا جبر لی G را با نماد $\mathcal{G}$ نمایش می‌دهیم.

به طور کلی، یک جبر لی فضای برداری $\mathcal{G}$ همراه با عملگر دو خطی

$$[,] : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G},$$

است که کروشه‌ی لی نامیده می‌شود، و در ویژگی‌های کروشه‌ی لی صدق می‌کند.

گزاره ۱.۴.۵. اگر G یک گروه لی باشد، در این صورت دیفرانسیل نگاشت وارون ساز یعنی $\mathrm{d}i$ یک ایزومورفیسم بین جبرلی راست و جبر لی چپ برقرار می‌کند.

برهان. فرض کنیم R_g و L_g ضابطه‌های عمل راست و چپ G روی خودش و

$$i : G \longrightarrow G,$$

نگاشت وارون ساز G باشد. ثابت می‌کنیم نگاشت

$$\mathrm{d}i : \mathcal{G}_R \longrightarrow \mathcal{G}_L,$$

ایزومورفیسم است($\mathcal{G}_R$ و $\mathcal{G}_L$ نمایش دهنده جبرهای لی راست و چپ هستند.). هرگاه $h \in G$ باشد آنگاه

$$\begin{aligned}
(R_g \circ i)h &= R_g(i(h)) \\
&= R_g(h^{-1}) \\
&= h^{-1}g \\
&= (g^{-1}h)^{-1} \\
&= (i \circ L_{g^{-1}})h.
\end{aligned}$$

حال فرض کنیم $V \in \mathcal{G}_L$ و $f \in C^\infty(G)$ باشد. در این صورت

$$\begin{aligned} \mathrm{d}R_g(\mathrm{d}i(V_h))f &= (\mathrm{d}R_g \circ \mathrm{d}i)(V_h)f \\ &= \mathrm{d}(R_g \circ i)(V_h)f \\ &= \mathrm{d}(i \circ L_{g^{-۱}})(V_h)f \\ &= (\mathrm{d}i \circ \mathrm{d}L_{g^{-۱}})(V_h)f \\ &= \mathrm{d}i(\mathrm{d}L_{g^{-۱}}(V_h))f \\ &= \mathrm{d}i(V_{g^{-۱}h})f \\ &= Vf(i(g^{-۱}h)) \\ &= Vf(h^{-۱}g) \\ &= V_{h^{-۱}g}f. \end{aligned}$$

□

قضیه ۶.۴.۱. هرگاه G یک گروه لی باشد، در این صورت $\mathcal{G} \simeq T_eG$.

برهان. [۱۹] □

قضیه‌ی فوق بیان می‌کند که با یافتن فضای مماسی هر گروه لی در عضو همانی می‌توان جبر لی آن را یافت.

مثال ۷.۴.۱. در این جا بدون محاسبه به ارائه چند جبر لی می‌پردازیم. محاسبه‌ی جبرهای لی با استفاده از یافتن فضاهای مماسی کار چندان پیچیده‌ی نیست و به اطلاعاتی از هندسه منیفلد نیاز دارد.

الف) جبر لی گروه خطی عام $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ مجموعه‌ی ماتریس‌های مربعی $n \times n$ می‌باشد. به عبارت دیگر

$$T_{I_n}\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) = M(n \times n, \mathbb{R}).$$

ب) جبر لی گروه خطی خاص $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ مجموعه‌ی ماتریس‌های $n \times n$ با اثر صفر می‌باشد، یعنی

$$T_I\mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) = \{A \in M(n \times n, \mathbb{R}) : \mathrm{tr}A = ۰\}.$$

پ) جبر لی دایره $\mathbb{S}^۱$ اعداد حقیقی هستند.

ت) جبر لی فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ خود $\mathbb{R}^n$ است.

تعریف ۸.۴.۱. گروه لی G و جبر لی $\mathcal{G}$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت نگاشت $\exp : \mathcal{G} \to G$ را **نگاشت نمایی** می‌گوییم، هرگاه U یک همسایگی $۰ \in \mathcal{G}$ و V یک همسایگی $e \in G$ باشند، آنگاه $\exp$ یک دیفئومورفیسم بین U و V برقرار می‌کند.

قضیه ۹.۴.۱. فرض کنیم G یک گروه لی همبند با جبر لی $\mathcal{G}$ باشد. آنگاه برای هر $V_1, \ldots, V_k \in \mathcal{G}$ هر عضو G مثل g قابل بیان به صورت ضرب نگاشت‌های نمایی می‌باشد. بدین معنا که

$$g = \exp(V_1) \circ \cdots \circ \exp(V_k).$$

برهان. [۲۵] □

تعبیر قضیه فوق آن است که با داشتن اعضای یک جبر لی می‌توان با محاسبه‌ی نگاشت‌های نمایی متناظر با هر عضو و ضرب آن‌ها در هم ضابطه‌ی تبدیل گروه را به دست آورد.

تعریف ۱۰.۴.۱. هرگاه G یک گروه لی با جبر لی $\mathcal{G}$ باشد، که روی M عمل می‌کند. آنگاه به ازای هر $V \in \mathcal{G}$ **مولد بینهایت کوچک** $\hat{V}$ متناظر با V در نقطه‌ی $p \in M$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\hat{V}_p = \mathrm{d}\phi_p(V_e).$$

نگاشت ϕ به صورت $\phi_p : G \to M$ تعریف می‌شود به طوری که $g \to gp$.

مثال ۱۱.۴.۱. عمل گروه $\mathrm{SL}(2)$ روی $\mathbb{RP}^1$ را با ضابطه‌ی زیر تعریف می‌کنیم.

$$p \longmapsto \frac{ap+b}{cp+d}, \qquad p \in \mathbb{RP}^1, \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2),$$

جبر لی $\mathrm{SL}(2)$ ماتریس‌های 2×2 با اثر صفر است. بنابراین این جبر با ماتریس‌های زیر تولید می‌شود.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

لذا اگر V_1 و V_2 و V_3 مولدهای بینهایت کوچک متناظر با هر یک از ماتریس‌های A_1 و A_2 و A_3 باشند، آنگاه

$$V_1 = \partial_p, \qquad V_2 = 2p\partial_p, \qquad V_3 = -p^2\partial_p.$$

فصل ۲

ساختار هندسی معادلات دیفرانسیل

اصطلاح معادلات دیفرانسیل برای اولین بار در سال ۱۶۷۶ توسط لایبنیز[۱] بکار برده شده است. بسیاری از قوانین عمومی طبیعت در فیزیک، شیمی، زیست‌شناسی، ستاره‌شناسی و ... طبیعی‌ترین بیان ریاضی خود را در زبان معادلات دیفرانسیل می‌آبند. کاربردهای معادلات دیفرانسیل همچنین در ریاضیات به ویژه در هندسه و نیز در مهندسی و اقتصاد و بسیاری از زمینه‌های دیگر علوم فراوان هستند. معادلات دیفرانسیل در بسیاری از پدیده‌های علوم رخ می‌دهند. هرگاه که رابطه‌ای بین چند متغیر با مقادیر مختلف در حالت‌ها یا زمان‌های مختلف وجود دارد و نرخ تغییرات متغیرها در زمان‌های مختلف یا حالات مختلف شناخته شده است می‌توان آن پدیده را با معادلات دیفرانسیل بیان کرد. به عنوان مثال در مکانیک، حرکت جسم به وسیله‌ی سرعت و مکان آن در زمان‌های مختلف توصیف می‌شود. و معادلات نیوتون[۲] به ما رابطه‌ی بین مکان و سرعت و شتاب و نیروهای وارد بر جسم را می‌دهند در چنین شرایطی می‌توانیم حرکت جسم را در قالب یک معادله‌ی دیفرانسیل که در آن مکان نامشخص جسم تابعی از زمان است، بیان کرد.

۱.۲ تقارن‌های معادلات جبری

قبل از پرداختن به گروه‌های تقارنی معادلات دیفرانسیل لازم است که به توضیح مختصری از مفهوم گروه‌های تقارنی دستگاه معادلات جبری بپردازیم.

تعریف ۱.۱.۲. یک دستگاه از **معادلات جبری** به صورت

$$F_\nu(x) = ۰, \qquad \nu = ۱, ۲, \ldots, l, \tag{۱.۲}$$

تعریف می‌شود که در آن $F_۱(x), \ldots, F_l(x)$ به ازای هر نقطه x متعلق به منیفلد M توابعی حقیقی مقدار می‌باشند. یک جواب برای (۱.۲) نقطه‌ی مانند $x_۰ \in M$ است به طوری که برای $\nu = ۱, ۲, \ldots, l$،

[۱] Leibniz
[۲] Newton

$$F_\nu(x_\circ) = \circ,$$

تعریف ۲.۱.۲. فرض کنیم $\xi^1, \ldots, \xi^k$ توابع حقیقی مقدار و هموار روی منیفلد هموار M باشند:

- $\xi^1, \ldots, \xi^k$ **وابسته تابعی** نامیده می‌شوند اگر برای هر $x \in M$ همسایگی U از x و یک تابع حقیقی مقدار $F(z^1, \ldots, z^k)$ که روی هر زیرمجموعه‌ی باز از $\mathbb{R}^k$ مخالف صفر است، وجود داشته باشد به طوری که:

$$\forall x \in U \qquad F\big(\xi^1(x), \ldots, \xi^k(x)\big) = \circ.$$

- $\xi^1, \ldots, \xi^k$ **مستقل تابعی** نامیده می‌شوند اگر به هر زیرمجموعه‌ی باز $U \in M$ تحدید شوند وابسته تابعی نباشند. به عبارت دیگر اگر برای هر $x \in U \subset M$ داشته باشیم:

$$F\big(\xi^1(x), \ldots, \xi^k(x)\big) = \circ,$$

سپس برای هر z در هر زیر مجموعه‌ی باز از $\mathbb{R}^k$ (که حاوی تصویر U است) $F(z^1, \ldots, z^k) \equiv \circ$ باشد.

تعریف ۳.۱.۲. یک گروه موضعی از تبدیلات مانند G که روی منیفلد M عمل می‌کند، را یک **گروه تقارن** برای معادلات (۱.۲) می‌گوییم هرگاه جواب‌ها را به جواب‌های دیگر ببرد. به عبارت دیگر، اگر x یک جواب (۱.۲) و g یک عضو گروه تقارن باشد که $g.x$ تعریف شود آنگاه $g.x$ یک جواب دیگر معادله‌ی (۱.۲) است.

تعریف ۴.۱.۲. فرض کنیم G یک گروه موضعی از تبدیلات باشد که روی منیفلد M عمل می‌کند. زیرمجموعه‌ی $O \subset M$ را G**-ناوردا** می‌گوییم هرگاه به ازای هر $x \in O$ و $g \in G$ به طوری که $g.x$ تعریف شود، آنگاه $g.x \in O$. G را گروه تقارنی از O می‌گوییم.

مثال ۵.۱.۲. فرض کنیم G_c یک گروه یک-پارامتری از انتقالات

$$(x, y) \longmapsto (x + c\varepsilon, y + \varepsilon), \qquad \varepsilon \in \mathbb{R},$$

و c یک ثابت دلخواه باشد. به سادگی می‌توان دید که خط‌های $x = cy + d$، G_c-ناوردا می‌باشند، که مدارهای از G_c هستند.

تعریف ۶.۱.۲. فرض کنیم M و N دو منیفلد هموار باشند، و G یک گروه موضعی از تبدیلات باشد که روی M عمل می‌کند. تابع $F : M \to N$ را G**-ناوردا** می‌گوییم اگر برای هر $x \in M$ و $g \in G$ به طوری که $g.x$ تعریف شده باشد، آنگاه

$$F(g.x) = F(x).$$

مثال ۷.۱.۲. گروه انتقالات مثال ۵.۱.۲ را در نظر می‌گیریم. تابع $\xi(x, y) = x - cy$ یک تابع G_c-ناوردا است، زیرا برای هر ε،

$$\xi(x+c\varepsilon, y+\varepsilon) = \xi(x,y).$$

قضیه ۸.۱.۲. فرض کنیم G یک گروه از تبدیلات همبند باشد که روی M عمل می‌کند. تابع حقیقی مقدار $I : M \to \mathbb{R}$ تحت عمل گروه G ناوردا است اگر و تنها اگر برای هر $p \in M$ و $V \in \mathcal{G}$،

$$V_p(I) = ۰.$$

برهان. [۲۴] □

هرگاه $u = I(x)$ یک تابع یک-پارامتری و

$$V = \xi^۱(x)\frac{\partial}{\partial x^۱} + \cdots + \xi^m(x)\frac{\partial}{\partial x^m}$$

یک مولد بینهایت کوچک باشد، برای آنکه I تحت G ناوردا باشد باید $V(I) = ۰$. بنابراین

$$\xi^۱(x)\frac{\partial u}{\partial x^۱} + \cdots + \xi^m(x)\frac{\partial u}{\partial x^m} = ۰.$$

حال برای یافتن I دستگاه معادلات مشخصه‌ی زیر را حل می‌کنیم:

$$\frac{\mathrm{d}x^۱}{\xi^۱(x)} = \frac{\mathrm{d}x^۲}{\xi^۲(x)} = \cdots = \frac{\mathrm{d}x^m}{\xi^m(x)}. \tag{۲.۲}$$

جواب‌های عمومی رابطه‌ی (۲.۲) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$u^۱\left(x^۱, \ldots, x^m\right) = c_۱, \ldots, u^{m-۱}\left(x^۱, \ldots, x^m\right) = c_{m-۱}.$$

که $c_۱, \ldots, c_{m-۱}$ ثابت‌های انتگرال‌گیری هستند. توابع u^i−ها مستقل از c_i−ها هستند. بنابراین به راحتی دیده می‌شود که توابع $u^۱, \ldots, u^{m-۱}$ جواب‌های مستقل تابعی برای (۲.۲) هستند، و هر جواب ناوردای دیگر برای (۲.۲) باید تابعی بر حسب $u^۱, \ldots, u^{m-۱}$ باشد.

مثال ۹.۱.۲. عمل گروه $\mathrm{SO}(۲)$ را روی فضای سه متغیره به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(x,y,z) \longmapsto \left(x\cos t - y\sin t, x\sin t + y\cos t, \frac{\sin t + z\cos t}{\cos t - z\sin t}\right).$$

مولد بینهایت کوچک حاصل از این عمل به صورت زیر می‌باشد:

$$V = -y\partial_x + x\partial_y + (۱+z^۲)\partial_z.$$

حال به حل دستگاه مشخصه‌ی

$$\frac{\mathrm{d}x}{-y} = \frac{\mathrm{d}y}{x} = \frac{\mathrm{d}z}{۱+z^۲},$$

نظیر میدان برداری V می‌پردازیم و ناورداها را به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x}{-y} = \frac{\mathrm{d}y}{x} &\Longrightarrow x\mathrm{d}x = -y\mathrm{d}y \\
&\Longrightarrow c = \sqrt{x^{۲} + y^{۲}}, \\
\frac{\mathrm{d}y}{x} = \frac{\mathrm{d}z}{۱ + z^{۲}} &\Longrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{c^{۲} - y^{۲}}} = \frac{\mathrm{d}z}{۱ + z^{۲}} \\
&\Longrightarrow \arcsin \frac{y}{c} = \arctan z + k \\
&\Longrightarrow k = \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^{۲} + y^{۲}}} - \arctan z \\
&\Longrightarrow k = \arctan \frac{y}{x} - \arctan z \\
&\Longrightarrow k = \frac{xz - y}{yz + x}.
\end{aligned}$$

بنابراین توابع ناوردا عبارت‌اند از:

$$r = \sqrt{x^{۲} + y^{۲}}, \qquad \omega = \frac{xz - y}{yz + x},$$

۲.۲ گروه‌ها و معادلات دیفرانسیل

تعریف ۱.۲.۲. یک دستگاه معادلات دیفرانسیل به فرم

$$\Delta\left(x, u^{(n)}\right) = ۰,$$

است که شامل p متغیر مستقل $x = (x^{۱}, \ldots, x^{p})$ و q متغیر وابسته $u = (u^{۱}, \ldots, u^{q})$ است. جواب این دستگاه، تابعی به فرم $u = f(x)$ می‌باشد که در آن

$$u^{\alpha} = f^{\alpha}\left(x^{۱}, \ldots, x^{p}\right), \qquad \alpha = ۱, \ldots, q,$$

تابعی هموار از متغیرهای مستقل $x = (x^{۱}, \ldots, x^{p})$ می‌باشد.

تعریف ۲.۲.۲. فرض کنیم x یک دستگاه مختصات روی $X = \mathbb{R}^{p}$ و U یک دستگاه مختصات روی $U = \mathbb{R}^{q}$ باشد. به فضای اقلیدسی $E = X \times U \simeq \mathbb{R}^{p+q}$ که متشکل از متغیرهای مستقل و وابسته x و u می‌باشد، **فضای کامل** نظیر دستگاه معادلات دیفرانسیل $\Delta = ۰$ گفته می شود.

تعریف ۳.۲.۲. فرض کنیم $E = X \times U \simeq \mathbb{R}^{p+q}$ فضای اقلیدسی همه‌ی متغیرهای مستقل و وابسته باشد. یکی از انواع بسیار رایج تبدیلات، دیفئومورفیسم‌های روی فضای E به شکل:

$$(\bar{x}, \bar{u}) = g.(x, u) = (\varphi(x, u), \psi(x, u)),$$

می‌باشد که تبدیلات **نقطه‌ای**(هندسی) به کمک آن ساخته می‌شوند. نوع ساده‌ای از این تبدیلات را تبدیلات **پایه‌ای** می‌نامیم که تنها بر متغیرهای مستقل اثر می‌کند و به شکل:

$$(\bar{x}, \bar{u}) = g.(x, u) = (\varphi(x), u),$$

می‌باشد. نوع خاص دیگری از تبدیلات نقطه‌ای که به صورت

$$(\bar{x}, \bar{u}) = g.(x, u) = (\varphi(x), \psi(x, u)),$$

تعریف می‌شود را تبدیلات **حافظ تار**(تصویری) گویند.

تعریف ۴.۲.۲. منظور از یک **گروه تقارن** برای دستگاه معادلات دیفرانسیل $\Delta = 0$، گروهی موضعی از تبدیلات مانند G می‌باشد که روی یک زیرمجموعه‌ی باز از E مانند O عمل نموده به طوری که هر جواب از دستگاه $\Delta = 0$ را به جواب دیگری تبدیل می‌کند. در ادامه به بیان نحوه‌ی عمل نمودن یک تبدیل مانند $g \in G$ روی یک تابع خواهیم پرداخت. از این پس گروه تبدیلات G یک گروه لی فرض می‌شود.

تابع $u = f(x)$ را با گراف

$$\Gamma_f = \Big\{(x, f(x)) : x \in \Omega\Big\},$$

در نظر می‌گیریم، که در آن مجموعه‌ی Ω درون دامنه‌ی تعریف تابع f قرار می‌گیرد. اکنون تبدیل g را روی گراف تابع f به شکل

$$g.\Gamma_f = \Big\{(\bar{x}, \bar{u}) : g.(x, u) \in \Gamma_f\Big\},$$

تعریف می‌کنیم، که لزومی ندارد $g.\Gamma_f$ خود گراف تابعی جدید باشد. اما هرگاه G به طور هموار عمل کرده و عنصر همانی G، گراف f را ثابت نگه دارد، با انتخاب دامنه‌ی مناسب Ω می‌توان دید که تبدیل g موضعاً حول عنصر همانی G گراف تابع f را ناوردا نگه می‌دارد، به این معنا که

$$g.\Gamma_f = \Gamma_{\bar{f}}.$$

البته باید توجه داشت که منظور از $\bar{f}$ در رابطه بالا همان تبدیل یافته f تحت تبدیل g است.

در حالت کلی فرض کنیم:

$$(\bar{x}, \bar{u}) = g.(x, u) = \left(\varphi_g(x, u), \psi_g(x, u)\right),$$

که φ_g و ψ_g هموار باشند. آنگاه مختصات گراف تابع $\bar{f}$ به صورت

$$\bar{x} = \varphi_g(x, f(x)) = \varphi_g \circ (\mathrm{Id} \times f)(x), \qquad x \in \Omega, \tag{۳.۲}$$

$$\bar{u} = \psi_g(x, f(x)) = \psi_g \circ (\mathrm{Id} \times f)(x), \qquad x \in \Omega,$$

تعریف می‌شود که Id تابع همانی روی X است. برای یافتن $\bar{f}$ باید x را از (۳.۲) حذف کرد. به ازای $g = e$ واضح است که

$$\varphi_e \circ (\mathrm{Id} \times f) = \mathrm{Id},$$

به ازای یک عضو نزدیک عضو همانی e ژاکوبین $\varphi_g \circ (\mathrm{Id} \times f)$ غیر تکین است و بنابراین با استفاده از قضیه تابع ضمنی

$$x = \Big[\varphi_g \circ (\mathrm{Id} \times f)\Big]^{-۱}(\bar{x}), \qquad (۴.۲)$$

حال با جایگزینی (۴.۲) در $\bar{f}$ داریم:

$$\bar{f} = g.f = \Big[\psi_g \circ (\mathrm{Id} \times f)\Big] \circ \Big[\varphi_g \circ (\mathrm{Id} \times f)\Big]^{-۱},$$

لذا با حذف x و وارون کردن φ_g ضابطه $\bar{f}$ به شکل

$$\bar{u} = \bar{f}(\bar{x}) = f(\varphi_g^{-۱}(\bar{x})) = f(\varphi_{g^{-۱}}(\bar{x})),$$

ساخته می‌شود.

مثال ۵.۲.۲. فرض کنیم $G = \mathrm{SO}(۲)$ عمل گروه دوران‌ها روی $X \times U = \mathbb{R}^۲$ باشد تبدیلات G به صورت زیر نمایش داده می‌شود.

$$(\bar{x}, \bar{u}) = \theta.\left(x\cos\theta - u\sin\theta, x\sin\theta + u\cos\theta\right).$$

فرض کنیم $u = f(x)$ یک تابع باشد گراف آن $\Gamma_f \subset X \times U$ است. گروه $\mathrm{SO}(۲)$ روی f به وسیله‌ی گراف دوران آن عمل می‌کند. اگر θ بزرگ باشد آنگاه $\theta.\Gamma_f$ گراف تابع دیگری نخواهد بود. اما اگر $f(x)$ روی بازه متناهی $[a,b]$ تعریف شده باشد و $|\theta|$ خیلی بزرگ نباشد، $\theta.\Gamma_f$ گراف تابع خوش تعریف $\bar{u} = \bar{f}(\bar{x})$ خواهد بود که $\Gamma_{\bar{f}} = \theta.\Gamma_f$ می‌باشد. تابع خطی $u = f(x) = ax + b$ را درنظر می‌گیریم. گراف f یک خط مستقیم است. بنابراین دوران آن با زاویه θ یک خط مستقیم دیگر خواهد بود. حال تبدیل f تحت θ(یعنی $\bar{f}$) را می‌یابیم.

$$(\bar{x}, \bar{u}) = \theta.(x, ax+b) = \left(x\cos\theta - (ax+b)\sin\theta, x\sin\theta + (ax+b)\cos\theta\right),$$

برای پیدا کردن $\bar{u} = \bar{f}(\bar{x})$ بایستی x را از جفت معادلات بالا حذف کنیم.

$$\begin{aligned} &\bar{x} = x\cos\theta - (ax+b)\sin\theta \\ \Rightarrow\ & x = \frac{\bar{x} + b\sin\theta}{\cos\theta - a\sin\theta}, \end{aligned}$$

با فرض $cot\theta \neq ٠$ داریم،

$$\begin{aligned}\bar{u} = \bar{f}(\bar{x}) &= x\sin\theta + (ax+b)\cos\theta \\ &= \frac{\bar{x}+b\sin\theta}{\cos\theta - a\sin\theta}\sin\theta + \left(a\frac{\bar{x}+b\sin\theta}{\cos\theta - a\sin\theta}+b\right)\cos\theta \\ &\vdots \\ &= \frac{\sin\theta + a\cos\theta}{\cos\theta - a\sin\theta}\bar{x} + \frac{b}{\cos\theta - a\cos\theta}.\end{aligned}$$

می‌بینیم که تابع f تحت θ دوباره تابعی خطی است.

۳.۲ امتداد دهی

در این بخش به معرفی فضای جت که نقش اساسی در تبیین هندسی نظریه‌ی معادلات دیفرانسیل دارد می‌پردازیم. یک تابع حقیقی مقدار هموار مانند $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = f(x^١, \ldots, x^p)$ تعریف می‌شود، دارای

$$p_k = \binom{p+k-١}{k},$$

مشتق جزئی متمایز از مرتبه‌ی k نسبت به متغیرهایش می‌باشد. اگر $J = (j_١, \ldots, j_k)$ یک اندیس چندگانه از متغیرهای تابع f باشد آنگاه مشتق جزئی تابع f نسبت به J به صورت

$$\partial_J f(x) = \frac{\partial^k f(x)}{\partial x^{j_١} \cdots \partial x^{j_k}},$$

نمایش داده می‌شود. مرتبه‌ی اندیس چندگانه J را که با $\sharp J \equiv k$ نشان می‌دهیم، بیانگر آن است که چند بار از تابع مشتق گرفته‌ایم.

فرض کنیم $f : X \longrightarrow U$ یک تابع p متغیره q مقداری با ضابطه

$$u = f(x) = \left(f^١(x), \ldots, f^q(x)\right),$$

باشد. فضای تمام مشتقات جزئی این تابع تا مرتبه‌ی n–ام را با

$$U^{(n)} := U \times U_١ \times \ldots \times U_n, \tag{۵.۲}$$

نمایش می‌دهیم، به طوری که U_i–ها به ازای $i = ١, \ldots, n$ بیانگر فضای مشتقات جزئی از مرتبه‌ی i–ام است. به سادگی می‌توان نشان داد که بعد فضای (۵.۲) برابر است با:

$$q + qp_١ + qp_٢ + \cdots + qp_n = q\binom{p+n}{n} := qp^{(n)}.$$

توجه نمایید از این به بعد هر نقطه در$U^{(n)}$ را به صورت $u^{(n)}$ نشان می‌دهیم، بنابراین $u^{(n)}$ دارای $qp^{(n)}$ متغیر متمایز به شکل u^α_J می‌باشد، که $\alpha = ١, \cdots, q$ و $J = (j_١, \cdots, j_k)$ یک اندیس چندگانه با شرایط $١ \leq j_k \leq p$ و $٠ \leq k \leq p$ می‌باشد.

تعریف ۱.۳.۲. اگر فضای متغیرهای مستقل را به $U^{(n)}$ اضافه کنیم به فضای

$$J^n = X \times U^{(n)} \tag{۶.۲}$$

می‌رسیم که به آن **فضای جت** مرتبه‌ی n−ام فضای $X \times U$ گفته می‌شود. واضح است که بعد فضای جت برابر است با:

$$p + qp^{(n)}.$$

مثال ۲.۳.۲. تابع $u = f(x, y)$ که شامل دو متغیر مستقل و یک متغیر وابسته است را در نظر می‌گیریم. برای یافتن $J^{۲}$ کافی است که مشتقات جزئی تابع فوق را تا مرتبه‌ی دوم بنویسیم. بنابرین:

$$J^{۲} = \{(x, y; u; u_x, u_y; u_{xx}, u_{xy}, u_{yy})\} \simeq \mathbb{R}^{۸}.$$

تعریف ۳.۳.۲. به فضای جت مرتبه‌ی n−ام یک تابع منهای متغیرهای مستقل آن، **امتداد تابع** تا مرتبه‌ی n−ام می‌گوییم و آن را به صورت $u^{(n)} = f^{(n)}(x)$ نمایش می‌دهیم.

به عنوان مثال، در مثال ۲.۳.۲ امتداد مرتبه‌ی دوم تابع f برابر است با:

$$f^{(۲)}(x, y) = \{(f; f_x, f_y; f_{xx}, f_{xy}, f_{yy})\}.$$

در بخش قبل تعریف نه چندان دقیقی از دستگاه معادلات دیفرانسیل بیان شد، اکنون می‌خواهیم با استفاده از مفهوم فضای جت تعریف دقیق‌تری از دستگاه معادلات دیفرانسیل ارائه دهیم.

تعریف ۴.۳.۲. یک دستگاه l−معادله‌ی دیفرانسیل از مرتبه‌ی n مانند Δ تابعی به صورت

$$\Delta : J^{(n)} \longrightarrow \mathbb{R}^l, \tag{۷.۲}$$

با ضابطه‌ی

$$\Delta_\nu(x, u^{(n)}) = ۰, \qquad \nu = ۱, \ldots, l, \tag{۸.۲}$$

است. با نوشتن (۸.۲) به صورت

$$\Delta_\nu\left(x, u^{(n)}\right) = \left(\Delta_۱(x, u^{(n)}), \ldots, \Delta_l(x, u^{(n)})\right),$$

به ازای هر تابع هموار $\Delta_\nu(x, u^{(n)})$ می‌بینیم که (۷.۲) یک دستگاه l−معادله‌ی دیفرانسیل با مشتقات جزئی (PDE) با p−متغیر مستقل و q−متغیر وابسته است. واضح است که برای $p = ۱$ یک دستگاه معادله‌ی دیفرانسیل معمولی (ODE) می‌باشد.

تعریف ۵.۳.۲. یک دستگاه معادله‌ی دیفرانسیل را خطی می‌گوییم هرگاه ضابطه‌ی معادله بر حسب تابع مجهول و مشتقات آن خطی باشد، در غیر این صورت غیر خطی است.

فرم کلی معادلات خطی به صورت

$$a^1(x)\frac{\partial u}{\partial x^1}(x)+\cdots+a^n(x)\frac{\partial u}{\partial x^n}(x)+b(x)u(x)=k(x),$$

می‌باشد. که توابع $a^1(x),\dots,a^n(x)$ و $k(x)$ همگی هموار و حقیقی مقدار می‌باشند.
به عنوان مثال معادله‌ی $u_x+u_y=0$ خطی و $u_{xx}+u_{yy}=\sin u$ غیر خطی است.

تعریف ۶.۳.۲. یک جواب هموار از دستگاه معادلات (۸.۲) تابعی هموار مانند $u=f(x)$ است به طوری که

$$\Delta_\nu\left(x,f^{(n)}(x)\right)=0,\qquad \nu=1,\dots,l.$$

برای مثال، مطابق با تعریف ۶.۳.۲ تابع $f(x,y)=x^3-3xy^2$ یک جواب برای معادله‌ی لاپلاس $u_{xx}+u_{yy}=0$ است.

شایان ذکر است که دستگاه معادلات را می‌توان به عنوان زیر منیفلدی از فضای جت مرتبه‌ی k بیان کرد به طوری که فضای جواب کاملا در فضای تعریف معادله قرار گیرد.

مثال ۷.۳.۲. معادله‌ی دیفرانسیل $u_{xy}=F(x,y,u_x,u_y)$ یک زیر منیفلد ۷−بعدی با مختصات

$$(x,y;u;u_x,u_y;u_{xx},u_{yy}),$$

از فضای جت $J^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ است. تعریف می‌کنیم،

$$\Delta:(x,y;u;u_x,u_y;u_{xx},u_{yy})\longmapsto\left(x,y;u;u_x,u_y;u_{xx},u_{xy}=F(x,y,u_x,u_y),u_{yy}\right).$$

حال اگر $f\in C^\infty(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ جوابی از معادله باشد آنگاه،

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}-F(x,y,f(x,y))=0.$$

تعریف ۸.۳.۲. اگر $\Gamma_f=\{(x,f(x))\}$ گراف تابع f باشد آنگاه

$$\Gamma_f^{(n)}=\left\{(x,f^{(n)}(x))\right\},$$

را امتداد مرتبه‌ی n−ام گراف f می‌گویند. که یک زیرمنیفلد p−بعدی از J^n می‌باشد.

تعریف ۹.۳.۲. فرض کنیم G یک گروه از تبدیلات باشد که روی یک زیرمجموعه‌ی باز از فضای کامل E مانند O عمل می‌کند. اگر g یک تبدیل از گروه G باشد، آنگاه با در نظر گرفتن g به عنوان یک تابع به صورت $g:O\to O$، امتداد مرتبه‌ی n−ام آن روی O را به صورت

$$g^{(n)}:J^n(O)\to J^n(O),$$

$$g^{(n)}.(x_0,u_0^{(n)})=(\bar{x}_0,\bar{u}_0^{(n)}),$$

و به ازای نقطه‌ی دلخواه $(x_0,u_0^{(n)})\in J^n(O)$ تعریف می‌شود.

مثال ۱۰.۳.۲. عمل گروه $\mathrm{SO}(2)$ را روی $E=\mathbb{R}^2$ همانند مثال ۵.۲.۲ درنظر می‌گیریم. اکنون این عمل را تا مرتبه‌ی یک امتداد می‌دهیم. در این حالت $J^1(E)=\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{(1)}\simeq\mathbb{R}^3$. اگر $u=f(x)$ یک تابع روی E باشد آنگاه طبق تعریف ۳.۳.۲

$$f^{(1)}(x)=(f(x),f'(x)),$$

امتداد مرتبه‌ی اول f است. فرض کنیم $(x^\circ,u^\circ,u^\circ_x)$ نقطه‌ای از $J^1(E)$ و θ تبدیلی از $\mathrm{SO}(2)$ باشد. می‌خواهیم تبدیل

$$\theta^{(1)}.(x^\circ,u^\circ,u^\circ_x)=(\bar{x}^\circ,\bar{u}^\circ,\bar{u}^\circ_x),$$

را پیدا کنیم. چندجمله‌ای

$$f(x)=u^\circ+u^\circ_x(x-x^\circ)=u^\circ_x x+(u^\circ-u^\circ_x x^\circ) \qquad (۹.۲)$$

را در نظر می‌گیریم به طوری که $f(x^\circ)=u^\circ$ و $f'(x^\circ)=u^\circ_x$. با توجه به تابع (۹.۲)، تبدیل یافته‌ی f تحت زاویه‌ی θ تابع خطی

$$\bar{f}(\bar{x})=\theta.f(x)=\frac{\sin\theta+u^\circ_x\cos\theta}{\cos\theta-u^\circ_x\sin\theta}\bar{x}+\frac{u^\circ-x^\circ u^\circ_x}{\cos\theta-u^\circ_x\sin\theta},\qquad u^\circ_x\neq\cot\theta, \qquad (۱۰.۲)$$

می‌باشد. بنابراین

$$\bar{x}^\circ=x^\circ\cos\theta-u^\circ\sin\theta,$$

و در نتیجه

$$\bar{u}^\circ=\bar{f}(\bar{x}^\circ)=x^\circ\sin\theta+u^\circ\cos\theta.$$

حال با یک بار مشتق‌گیری از $\bar{u}^\circ$ داریم:

$$\bar{u}^\circ_x=\bar{f}'(\bar{x}^\circ)=\frac{\sin\theta+u^\circ_x\cos\theta}{\cos\theta-u^\circ_x\sin\theta}.$$

بنابراین ضابطه امتداد مرتبه‌ی اول عملگر گروه $\mathrm{SO}(2)^{(1)}$ روی $J^{(1)}$ را می‌توان به شکل

$$\theta^{(1)}(x,u,u_x)=\left(x\cos\theta-u\sin\theta,x\sin\theta+u\cos\theta,\frac{\sin\theta+u_x\cos\theta}{\cos\theta-u_x\sin\theta}\right),$$

نوشت به طوری که $|\theta|<|arccot u_x|$.

تعریف ۱۱.۳.۲. فرض کنیم O یک زیرمجموعه‌ی باز از $E=X\times U$ و V یک میدان برداری روی O با گروه یک‌-پارامتری $\exp(\varepsilon V)$ باشد. امتداد مرتبه‌ی n-ام V را که با $V^{(n)}$ نشان می‌دهیم، یک میدان برداری روی $J^n(O)$ است که به آن مولد بینهایت کوچک گروه یک‌-پارامتری $[\exp(\varepsilon V)]^{(n)}$ می‌گوییم. بدین معنی که:

$$V^{(n)}\big|_{(x,u^{(n)})}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}[\exp(\varepsilon V)]^{(n)}(x,u^{(n)}),\qquad (x,u^{(n)})\in J^{(n)}(O). \qquad (۱۱.۲)$$

مثال ۱۲.۳.۲. عمل گروه $\mathrm{SO}(۲)$ روی $\mathbb{R}^۲$ را مطابق مثال ۵.۲.۲ در نظر می‌گیریم. مولد بینهایت کوچک

$$V=-u\frac{\partial}{\partial x}+x\frac{\partial}{\partial u},$$

نظیر عمل گروه یک-پارامتری

$$\exp(\varepsilon V)(x,u,u_x)=(x\cos\varepsilon-u\sin\varepsilon,x\sin\varepsilon+u\cos\varepsilon)\,,$$

می‌باشد. بنابراین امتداد مرتبه‌ی اول آن برابر است با:

$$[\exp(\varepsilon V)]^{(1)}(x,u,u_x)=\left(x\cos\varepsilon-u\sin\varepsilon,x\sin\varepsilon+u\cos\varepsilon,\frac{\sin\varepsilon+u_x\cos\varepsilon}{\cos\varepsilon-u_x\sin\varepsilon}\right).$$

با توجه به فرمول (۱۱.۲) می‌توان دید که مولد بینهایت کوچک نظیر امتداد مرتبه‌ی اول عمل گروه $\mathrm{SO}(۲)$ برابر است با:

$$V^{(1)}=-u\frac{\partial}{\partial x}+x\frac{\partial}{\partial u}+(۱+u_x^۲)\frac{\partial}{\partial u_x}. \qquad (۱۲.۲)$$

تعریف ۱۳.۳.۲. فرض کنیم

$$\Delta_\nu(x,u^{(n)})=\circ,\qquad \nu=۱,\ldots,l,$$

یک دستگاه معادلات دیفرانسیل باشد. این دستگاه از **رتبه‌ی ماکسیمال** است اگر ماتریس ژاکوبین آن

$$\mathbb{J}_\Delta(x,u^{(n)})=\left(\frac{\partial\Delta_\nu}{\partial x^i},\frac{\partial\Delta_\nu}{\partial u_J^\alpha}\right)_{m\times(p+qp^{(n)})},$$

از رتبه l باشد.

قضیه ۱۴.۳.۲. فرض کنیم

$$\Delta_\nu(x,u^{(n)})=\circ\qquad ,\nu=۱,\ldots,l,$$

یک دستگاه معادلات دیفرانسیل از رتبه‌ی ماکسیمال روی یک زیرمجموعه‌ی باز از E مانند O باشد. اگر G گروه موضعی از تبدیلات باشد که روی O عمل کرده و V یک مولد بینهایت کوچک آن باشد، آنگاه $\Delta_\nu(x,u^{(n)})=\circ$، G را به عنوان یک گروه تقارن می‌پذیرد اگر:

$$V^{(n)}(\Delta)=\circ,\qquad \text{هرگاه}\qquad \Delta=\circ.$$

برهان. [۲۵] □

قضیه‌ی ۱۴.۳.۲ نحوه‌ی ارتباط بین گروه‌های تقارنی و ناوردایی دستگاه معادلات دیفرانسیل تحت مولدهای بینهایت کوچک را بیان می‌کند.

قضیه ۱۵.۳.۲. فرض کنیم V و W دومیدان برداری روی $E\supset O$ باشند. آنگاه برای هر $n\in\mathbb{N}$ ویژگی‌های زیر برقرارند:

۱. $(aV+bW)^{(n)} = aV^{(n)} + bW^{(n)} \qquad a, b \in \mathbb{R},$

۲. $[V, W]^{(n)} = [V^{(n)}, W^{(n)}]$

برهان. [۲۴] $\square$

نتیجه ۱۶.۳.۲. فرض کنیم $\Delta = 0$ یک دستگاه معادلات دیفرانسیل از رتبه‌ی ماکسیمال تعریف شده روی $O \subset E$ باشد. مجموعه‌ی تمام تقارن‌های بینهایت کوچک این دستگاه یک جبر لی از میدان‌های برداری روی O تشکیل می‌دهد. به علاوه اگر این جبر لی با بعد متناهی باشد، گروه تقارن‌های این دستگاه یک گروه لی موضعی از تبدیلات روی O است.

تعریف ۱۷.۳.۲. فرض کنیم $F(x, u^{(n)})$ یک تابع دیفرانسیل از مرتبه‌ی n باشد. مشتق کامل F نسبت به x^i را که با $D_i F(x, u^{(n+1)})$ نشان می‌دهیم، یک تابع دیفرانسیل از مرتبه‌ی $(n+1)$ است. که به ازای هر تابع هموار $u = f(x)$ در شرط زیر صدق کند:

$$D_i F(x, f^{(n+1)}(x)) = \frac{\partial}{\partial x^i}\big[F(x, f^{(n)}(x))\big].$$

لم زیر که مستقیماً از قاعده‌ی زنجیره‌ی مشتق نتیجه می‌شود فرمول صریحی برای محاسبه‌ی مشتق کامل ارائه می‌دهد.

لم ۱۸.۳.۲. تابع $F(x, u^{(n)})$ را روی فضای جت $J^n(O)$ در نظر می‌گیریم. هرگاه $J = (j_1, \ldots, j_k)$ یک اندیس چندگانه و $u^\alpha_{J,i} = \partial u^\alpha_J / \partial x^i$ باشد، آنگاه:

$$D_i F = \frac{\partial F}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{q} \sum_J u^\alpha_{J,i} \frac{\partial F}{\partial u^\alpha_J}.$$

مثال ۱۹.۳.۲. فرض کنیم $E \simeq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ و $F : J^n \to \mathbb{R}$ باشد، آنگاه:

$$D_x F = \frac{\partial F}{\partial x} + u_x \frac{\partial F}{\partial u} + u_{xx} \frac{\partial F}{\partial u_x} + u_{xy} \frac{\partial F}{\partial u_y} + u_{xxx} \frac{\partial F}{\partial u_{xx}} + \cdots,$$

$$D_y F = \frac{\partial F}{\partial y} + u_y \frac{\partial F}{\partial u} + u_{xy} \frac{\partial F}{\partial u_x} + u_{yy} \frac{\partial F}{\partial u_y} + u_{xxy} \frac{\partial F}{\partial u_{xx}} + \cdots.$$

بنابراین اگر $F = xuu_{xy}$ آنگاه

$$D_x F = uu_{xy} + xu_x u_{xy} + xuu_{xxy},$$
$$D_y F = xu_y u_{xy} + xuu_{xyy}.$$

حال در ادامه قضیه‌ی را بیان می‌کنیم که نحوه‌ی محاسبه‌ی امتداد میدان‌های برداری را ارائه می‌دهد.

قضیه ۲۰.۳.۲. فرض کنیم

$$V=\sum_{i=1}^{p}\xi^i(x,u)\frac{\partial}{\partial x^i}+\sum_{\alpha=1}^{q}\varphi_\alpha(x,u)\frac{\partial}{\partial u^\alpha},$$

یک میدان برداری روی زیرمجموعه‌ی باز $O\subset E$ باشد. امتداد مرتبه‌ی $n-$ام میدان برداری V به شکل

$$V^{(n)}=V+\sum_{\alpha=1}^{q}\sum_{J}\varphi_\alpha^J(x,u^{(n)})\frac{\partial}{\partial u_J^\alpha}, \tag{۱۳.۲}$$

روی $J^n(O)$ می‌باشد که ضرایب φ_α^J در (۱۳.۲) با فرمول

$$\varphi_\alpha^J(x,u^{(n)})=D_J\Big(\varphi_\alpha-\sum_{i=1}^{p}\xi^iu_i^\alpha\Big)+\sum_{i=1}^{p}\xi^iu_{J,i}^\alpha, \tag{۱۴.۲}$$

ساخته می‌شود.

برهان. [۲۸] □

شایان ذکر است عبارت $Q_\alpha=\varphi_\alpha-\sum_{i=1}^{p}\xi^iu_i^\alpha$ در (۱۴.۲) را مشخصه‌ی میدان برداری V می‌نامیم.

مثال ۲۱.۳.۲. فرض کنیم $E=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ میدان برداری کلی

$$V=\xi(x,u)\frac{\partial}{\partial x}+\varphi(x,u)\frac{\partial}{\partial u},$$

بر $M=\mathbb{R}^2$ را در نظر می‌گیریم. مشخصه‌ی میدان برداری V تابع

$$Q(x,u,u_x)=\varphi(x,u)-\xi(x,u)u_x,$$

می‌باشد. تابع $u=f(x)$ تحت گروه یک-پارامتری تولید شده توسط V ناوردا است اگر و تنها اگر در معادله‌ی دیفرانسیل معمولی $\xi(x,u)u_x=\varphi(x,u)$ صدق کند. امتداد مرتبه‌ی دوم V یک میدان برداری بر J^2 به صورت

$$V^{(2)}=\xi(x,u)\frac{\partial}{\partial x}+\varphi(x,u)\frac{\partial}{\partial u}+\varphi^x(x,u^{(1)})\frac{\partial}{\partial u_x}+\varphi^{xx}(x,u^{(2)})\frac{\partial}{\partial u_{xx}},$$

می‌باشد. ضرایب φ^x، φ^{xx} به صورت

$$\begin{aligned}\varphi^x&=D_xQ+\xi u_{xx}\\&=\varphi_x+(\varphi_u-\xi_x)u_x-\xi_uu_x^2,\\\varphi^{xx}&=D_x^2Q+\xi u_{xxx}\\&=\varphi_{xx}+(2\varphi_{xu}-\xi_{xx})u_x+(\varphi_{uu}-2\xi_{xu})u_x^3,\end{aligned}$$

محاسبه می‌شود. برای مثال امتداد مرتبه‌ی دوم مولد بینهایت کوچک

$$V = -u\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial u},$$

به صورت زیر می‌باشد.

$$V^{(۲)} = -u\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial u} + (۱ + u_x^۲)\frac{\partial}{\partial u_x} + ۳u_x u_{xx}\frac{\partial}{\partial u_{xx}}.$$

که ضرایب آن به صورت زیر محاسبه می‌شوند.

$$\begin{aligned}
\varphi^x &= D_x Q + \xi u_{xx} \\
&= \varphi_x + D_x(x + uu_x) - uu_{xx} \\
&= ۱ + u_x^۲, \\
\varphi^{xx} &= D_x^۲ Q + \xi u_{xxx} \\
&= D_x^۲(x + uu_x) - uu_{xxx} \\
&= ۳u_x u_{xx}.
\end{aligned}$$

تعریف ۲.۳.۲۲. فرض کنیم G یک گروه از تبدیلات نقطه‌ای باشد. یک ناوردای دیفرانسیلی تابع دیفرانسیلی مانند $I : J^n(M) \to \mathbb{R}$ است به طوری که:

$$I(g^{(n)}.(x, u^{(n)})) = I(x, u^{(n)}).$$

مثال ۲.۳.۲۳. به مثال ۲.۱.۹ بر می‌گردیم. با توجه به تعریف ۲.۳.۲۲ ناوردای دیفرانسیلی مرتبه‌ی صفر تابعی مانند $I : E \to \mathbb{R}$ می‌باشد که در شرط $I(g.(x, u)) = I(x, u)$ صدق کند. می‌توان بررسی کرد که $r = \sqrt{x^۲ + u^۲}$ تابع مورد نظر است. بنابراین r یک ناوردای دیفرانسیلی مرتبه‌ی صفر یا معمولی است که در مثال ۲.۱.۹ به آن پرداخته شد.

به همین ترتیب توابع

$$\kappa = \frac{u_{xx}}{(۱ + u_x^۲)^{۳/۲}}, \qquad \omega = \frac{xu_x - u}{x + uu_x},$$

به ترتیب ناورداهای مرتبه‌ی اول و دوم می‌باشند.

قضیه ۲.۳.۱۴ یک روش کارآمد برای پیدا کردن تقارن‌های معادلات دیفرانسیل ارائه می‌دهد. این روش با در نظر گرفتن ضرایب $\varphi_\alpha(x, u)$ و $\xi^i(x, u)$ از میدان برداری که روی فضای کامل نظیر معادله‌ی تعریف شده با یافتن φ_α^J آغاز می‌شود. سپس با اثر دادن $V^{(n)}$ روی دستگاه معادلات و برابر با صفر قرار دادن ضرایب u_J^α−ها در دو طرف معادلات یک دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی PDE که به آن دستگاه معادلات تعیین کننده گفته می‌شود، بدست می‌آید. با حل این دستگاه ضرایب ξ^i−ها و φ_α−ها به دست می‌آیند. تقارن‌های که با این روش به دست می‌آیند به تقارن‌های نقطه‌ای یا لی مشهورند، که دسته‌ی وسیعی از تقارن‌ها را در بر می‌گیرند و بسیار پر کاربرد می‌باشند. حال با ارائه‌ی چند مثال گوناگون روش یافتن تقارن‌های یک معادله‌ی دیفرانسیل(دستگاه معادلات) را بررسی می‌کنیم.

مثال ۲۴.۳.۲. معادله گرما

$$u_t = u_{xx}, \tag{۱۵.۲}$$

معادله‌ای خطی است که توزیع حرارت (یا اختلاف دما) را در یک دامنه‌ی داده شده توصیف می‌کند. معادله‌ی گرما روی فضای کامل $E \simeq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ تعریف شده است. چون معادله مرتبه‌ی دوم است بنابراین لازم است که میدان برداری،

$$V = \xi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial x} + \tau(x,t,u)\frac{\partial}{\partial t} + \varphi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial u},$$

را که روی E تعریف می‌شود تا مرتبه‌ی دوم امتداد داده و با استفاده از قضیه‌ی ۱۴.۳.۲ که به قضیه‌ی ناوردایی معادلات دیفرانسیل مشهور است تقارن‌ها را بیابیم. فضای جت مرتبه‌ی دوم معادله‌ی گرما به صورت زیر می‌باشد.

$$J^2 = \Big\{\big(x,t;u;u_x,u_t;u_{xx},u_{xt},u_{tt}\big)\Big\}.$$

مشتقات کامل روی چارت (x,t,u) به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\begin{aligned} D_x &= \frac{\partial}{\partial x} + u_x\frac{\partial}{\partial u} + u_{xx}\frac{\partial}{\partial u_x} + u_{xt}\frac{\partial}{\partial u_t} + u_{xxx}\frac{\partial}{\partial u_{xx}} + u_{xxt}\frac{\partial}{\partial u_{xt}} + u_{xtt}\frac{\partial}{\partial u_{tt}},\\ D_t &= \frac{\partial}{\partial t} + u_t\frac{\partial}{\partial u} + u_{xt}\frac{\partial}{\partial u_x} + u_{tt}\frac{\partial}{\partial u_t} + u_{xxt}\frac{\partial}{\partial u_{xx}} + u_{xtt}\frac{\partial}{\partial u_{xt}} + u_{ttt}\frac{\partial}{\partial u_{tt}}. \end{aligned}$$

مطابق فرمول (۱۳.۲) امتداد مرتبه‌ی دوم V برابر است با:

$$V^{(2)} = V + \varphi^x\frac{\partial}{\partial u_x} + \varphi^t\frac{\partial}{\partial u_t} + \varphi^{xx}\frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \varphi^{xt}\frac{\partial}{\partial u_{xt}} + \varphi^{tt}\frac{\partial}{\partial u_{tt}},$$

با استفاده از فرمول (۱۴.۲) و اینکه مشخصه‌ی میدان برداری V، $Q = \varphi - \xi u_x - \tau u_t$ است ضرایب $V^{(2)}$ یعنی φ^x، φ^t، φ^{xx}، φ^{xt} و φ^{tt} را در زیر بدست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} \varphi^x &= D_x(\varphi - \xi u_x - \tau u_t) + \xi u_{xx} + \tau u_{xt}\\ &= D_x\varphi - u_x D_x\xi - u_t D_x\tau\\ &= \varphi_x + (\varphi_u - \xi_x)u_x - \tau_x u_t - \xi_u u_x^2 - \tau_u u_x u_t,\\ \varphi^t &= D_t(\varphi - \xi u_x - \tau u_t) + \xi u_{xt} + \tau u_{tt}\\ &= D_t\varphi - u_x D_t\xi - u_t D_t\tau\\ &= \varphi_t - \xi_t u_x + (\varphi_u - \tau_t)u_t - \xi_u u_x u_t - \tau_u u_t^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi^{xx} &= D_x^2(\varphi - \xi u_x - \tau u_t) + \xi u_{xxx} + \tau u_{xxt} \\
&= D_x^2\varphi - u_x D_x^2\xi - u_t D_x^2\tau - 2u_{xx}D_x\xi - 2u_{xt}D_x\tau \\
&= \varphi_{xx} + (2\varphi_{xu} - \xi_{xx})u_x - \tau_{xx}u_t + (\varphi_{uu} - 2\xi_{xu})u_x^2 - 2\tau_{xu}u_x u_t - \xi_{uu}u_x^3 \\
&\quad - \tau_{uu}u_x^2 u_t + (\varphi_u - 2\xi_x)u_{xx} - 2\tau_x u_{xt} - 3\xi_u u_x u_{xx} \\
&\quad - \tau_u u_t u_{xx} - 2\tau_u u_x u_{xt}, \\
\varphi^{xt} &= D_x D_t(\varphi - \xi u_x - \tau u_t) + \xi u_{xxt} + \tau u_{xtt} \\
&= \varphi_{xt} + (\varphi_{ut} - \xi_{xt})u_x + (\varphi_{xu} - \tau_{xt})u_t - \xi_{ut}u_x^2 - \tau_{xu}u_t^2 + (\varphi_{uu} - \xi_{xu} - \xi_{ut})u_x u_t \\
&\quad - \xi_{uu}u_x^2 u_t - \tau_{uu}u_x u_t^2 - \xi_t u_{xx} + (\varphi_u - \xi_x - \tau_t)u_{xt} \\
&\quad - \xi_u u_{xx}u_t - 2\xi_u u_x u_{xt} - 2\tau_u u_t u_{xt} - \tau_x u_{tt} - \tau_u u_x u_{tt}, \\
\varphi^{tt} &= D_t^2(\varphi - \xi u_x - \tau u_t) + \xi u_{ttt} + \tau u_{xtt} \\
&= \varphi_{tt} + (2\varphi_{ut} - \xi_{tt})u_t - \xi_{tt}u_x + (\varphi_{uu} - 2\tau_{ut})u_t^2 \\
&\quad - 2\xi_{ut}u_x u_t - \tau_{uu}u_t^3 - \xi_{uu}u_x u_t^2 + (\varphi_u - 2\tau_t)u_{tt} \\
&\quad - 2\xi_t u_{xt} - 3\tau_u u_t u_{tt} - \xi_u u_x u_{tt} - 2\xi_u u_t u_{xt}.
\end{aligned}$$

حال با اثر $V^{(2)}$ بر معادله‌ی گرما داریم:

$$\varphi^t = \varphi^{xx}. \tag{۱۶.۲}$$

با جایگذاری ضرایب امتداد در (۱۶.۲) داریم:

$$\begin{aligned}
\varphi_t - \xi_t u_x + (\varphi_u - \tau_t)u_{xx} - \xi_u u_x u_{xx} - \tau_u u_{xx}^2 &= \varphi_{xx} + (2\varphi_{xx} - \xi_{xx})u_x - \tau_{xx}u_{xx} \\
&\quad + (\varphi_{uu} - 2\xi_{xu})u_x^2 - 2\tau_{xu}u_x u_{xx} - \xi_{uu}u_x^3 \\
&\quad - \tau_{uu}u_x^2 u_{xx} + (\varphi_u - 2\xi_x)u_{xx} - 2\tau_x u_{xt} \\
&\quad - 3\xi_u u_x u_{xx} - \tau_u u_{xx}^2 - 2\tau_u u_x u_{xt}.
\end{aligned}$$

حال ضرایب مختصات جت را مساوی هم قرار می‌دهیم و به دستگاه PDE خطی زیر می‌رسیم.

$$\begin{aligned}
&\tau_u = \tau_x = \tau_{uu} = \xi_{uu} = 0, \qquad \varphi_{uu} = 2\xi_{xu}, \qquad \xi_u = 2\tau_{xu} + 3\xi_u, \\
&\varphi_u - \tau_t = -\tau_{xx} + \varphi_u - 2\xi_x, \qquad \varphi_t = \varphi_{xx}, \qquad -\xi_t = 2\varphi_{xu} - \xi_{xx}.
\end{aligned}$$

با حل این دستگاه مقادیر ξ و τ و φ به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$\begin{aligned}
\xi &= c_1 + c_4 x + 2c_5 t + 4c_6 xt, \\
\tau &= c_2 + 2c_4 t + 4c_6 t^2, \\
\varphi &= (c_3 - c_5 x - 2c_6 t - c_6 x^2)u + \alpha(x,t),
\end{aligned}$$

با قرار دادن ξ، τ و φ در V داریم:

$$\begin{aligned} V &= c_1\partial_x + c_2\partial_t + c_3 u\partial_u + (x\partial_x + 2t\partial_t)c_4 + (2t\partial_x - xu\partial_u)c_5, \\ &+ (4tx\partial_x + 4t^2\partial_t - (x^2 + 2t)u\partial_u)c_6 + \alpha(x,t)\partial_u. \end{aligned}$$

بنابراین مولدهای جبر لی گروه تقارن‌های معادله‌ی گرما عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned} V_1 &= \partial_x, \\ V_2 &= \partial_t, \\ V_3 &= u\partial_u, \\ V_4 &= x\partial_x + 2t\partial_t, \\ V_5 &= 2t\partial_x - xu\partial_u, \\ V_6 &= 4tx\partial_x + 4t^2\partial_t - (x^2 + 2t)u\partial_u, \\ V_\alpha &= \alpha(x,t)\partial_u. \end{aligned}$$

پس $\{V_1, \cdots, V_6\}$ جبر لی شش-بعدی گروه تقارن‌های معادله‌ی گرما می‌باشد. و با اضافه شدن V_α به آن یک جبر لی با بعد نامتناهی برای معادله‌ی گرما است.

$[,]$	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6
V_1	0	0	0	V_1	$-V_3$	$2V_5$
V_2	0	0	0	$2V_2$	$2V_1$	$4V_4 - 2V_3$
V_3	0	0	0	0	0	0
V_4	$-V_1$	$-2V_2$	0	0	V_5	$2V_6$
V_5	V_3	$-2V_1$	0	$-V_5$	0	0
V_6	$-2V_5$	$2V_3 - 4V_4$	0	$-2V_6$	0	0

جدول ۱.۲: جدول لی تقارن‌های معادله‌ی خطی گرما

جدول (۱.۲) که به جدول لی معروف است ارتباط بین کروشه‌های لی مولدهای $\{V_1, \cdots, V_6\}$ را نشان داده و ادعای جبر لی ساختن آن‌ها را اثبات می‌کند.

گروه‌های یک-پارامتری G_i تولید شده توسط V_i به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{aligned}
&G_1 : (x,t,u) \to (x+\varepsilon, t, u),\\
&G_2 : (x,t,u) \to (x, t+\varepsilon, u),\\
&G_3 : (x,t,u) \to (x, t, e^{\varepsilon}u),\\
&G_4 : (x,t,u) \to (e^{\varepsilon}x, e^{2\varepsilon}t, u),\\
&G_5 : (x,t,u) \to (x+2\varepsilon t, t, u.\exp(-\varepsilon x-\varepsilon^2 t)),\\
&G_6 : (x,t,u) \to \Big(\frac{x}{1-4\varepsilon t}, \frac{t}{1-4\varepsilon t}, u\sqrt{1-4\varepsilon t}\exp\Big(\frac{-\varepsilon x^2}{1-4\varepsilon t}\Big)\Big),\\
&G_\alpha : (x,t,u) \to (x, t, u+\varepsilon\alpha(x,t)).
\end{aligned}$$

هر گروه G_i یک گروه تقارنی می‌باشد.

برای نمونه گروه متناظر با V_5 را محاسبه می‌کنیم. بقیه‌ی گروه‌ها به طور مشابه محاسبه می‌شوند.

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\varepsilon} = 0 \Longrightarrow \mathrm{d}t = 0 \Longrightarrow t = c_1,\\
&\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varepsilon} = 2t \Longrightarrow \mathrm{d}x = 2c_1\mathrm{d}\varepsilon \Longrightarrow x = 2c_1\varepsilon + c_2,\\
&\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varepsilon} = -xu \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}u}{u} = -(2c_1\varepsilon + c_2)\mathrm{d}\varepsilon \Longrightarrow \ln u = -(2c_1\varepsilon^2 + c_2\varepsilon) + \ln c_3\\
\Longrightarrow \quad & u = c_3\exp(-2c_1\varepsilon^2 - c_2\varepsilon).
\end{aligned}$$

بنابراین،

$$G_5 = \big(2c_1\varepsilon + c_2, c_1, c_3\exp(-2c_1\varepsilon^2 - c_2\varepsilon)\big).$$

به ازای $\varepsilon = 0$ داریم:

$$G_5 = (x,t,u) = (c_2, c_1, c_3).$$

بنابراین گروه متناظر با V_5 عبارت است از:

$$G_5 = \big(2t\varepsilon + x, c_1, u\exp(-2t\varepsilon^2 - x\varepsilon)\big).$$

فرض کنیم $u = f(x,t)$ یک جواب معادله‌ی گرما باشد. برای نمونه با استفاده از این جواب، جواب متناظر با G_6 را محاسبه می‌کنیم. جواب‌های متناظر با گروه‌های دیگر به طور مشابه محاسبه می‌شوند. داریم:

$$G_6 : (x,t,u) \longrightarrow (\bar{x}, \bar{t}, \bar{u}) = \Big(\frac{x}{1-4\varepsilon t}, \frac{t}{1-4\varepsilon t}, u\sqrt{1-4\varepsilon t}\exp\Big(\frac{-\varepsilon x^2}{1-4\varepsilon t}\Big)\Big),$$

بنابراین،

$$\begin{aligned}
&\bar{t} = \frac{t}{1 - 4\varepsilon t} \Longrightarrow t = \frac{\bar{t}}{1 + 4\varepsilon \bar{t}},\\
&\bar{x} = \frac{x}{1 - 4\varepsilon t} \Longrightarrow x = \bar{x} - 4\varepsilon \frac{\bar{t}}{1 + 4\varepsilon \bar{t}} \Longrightarrow x = \frac{\bar{x}}{1 + 4\varepsilon \bar{t}},\\
&\bar{u} = u\sqrt{1 - 4\varepsilon t}\exp\Big(\frac{-\varepsilon x^2}{1 - 4\varepsilon t}\Big) \Longrightarrow \bar{u} = \frac{u}{\sqrt{1 + 4\varepsilon \bar{t}}}\exp\Big(\frac{-\varepsilon \bar{x}^2}{1 + 4\varepsilon \bar{t}}\Big)\\
\Longrightarrow\ & u = \bar{u}\sqrt{1 + 4\varepsilon \bar{t}}\exp^{-1}\Big(\frac{-\varepsilon \bar{x}^2}{1 + 4\varepsilon \bar{t}}\Big).
\end{aligned}$$

با جایگذاری در $u = f(x, u)$ داریم:

$$\begin{aligned}
&\bar{u}\sqrt{1 + 4\varepsilon \bar{t}}\exp^{-1}\Big(\frac{-\varepsilon \bar{x}^2}{1 + 4\varepsilon \bar{t}}\Big) = f\Big(\frac{\bar{x}}{1 + 4\varepsilon \bar{t}}, \frac{\bar{t}}{1 + 4\varepsilon \bar{t}}\Big)\\
\Longrightarrow\ &\bar{u} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4\varepsilon \bar{t}}}\exp\Big(\frac{-\varepsilon \bar{x}^2}{1 + 4\varepsilon \bar{t}}\Big) f\Big(\frac{\bar{x}}{1 + 4\varepsilon \bar{t}}, \frac{\bar{t}}{1 + 4\varepsilon \bar{t}}\Big).
\end{aligned}$$

اگر به جای $\bar{x}$، $\bar{t}$ و $\bar{u}$ به ترتیب قراردهیم x، t و u جواب متناظر با G_6 عبارت است از:

$$u = \frac{1}{\sqrt{1 + 4\varepsilon t}}\exp\Big(\frac{-\varepsilon x^2}{1 + 4\varepsilon t}\Big) f\Big(\frac{x}{1 + 4\varepsilon t}, \frac{t}{1 + 4\varepsilon t}\Big).$$

بنابراین توابع زیر نیز جواب‌های معادله‌ی گرما می‌باشند.

$$\begin{aligned}
&u^{(1)} = f(x - \varepsilon, t),\\
&u^{(2)} = f(x, t - \varepsilon),\\
&u^{(3)} = e^{\varepsilon} f(x, t),\\
&u^{(4)} = f(e^{-\varepsilon}x, e^{-2\varepsilon}t),\\
&u^{(5)} = e^{-\varepsilon x + \varepsilon^2 t} f(x - 2\varepsilon t, t),\\
&u^{(6)} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4\varepsilon t}}\exp\Big(\frac{-\varepsilon x^2}{1 + 4\varepsilon t}\Big) f\Big(\frac{x}{1 + 4\varepsilon t}, \frac{t}{1 + 4\varepsilon t}\Big),\\
&u^{(\alpha)} = f(x, t) + \varepsilon\alpha(x, t).
\end{aligned}$$

که ε هر عدد حقیقی و $\alpha(x,t)$ هر جواب دیگر معادله می‌تواند باشد. و اگر یک جواب معادله را با یک جواب دیگر جمع کنیم باز یک جواب دیگر معادله بدست می‌آید.

یک جواب بدیهی معادله‌ی گرما جواب ثابت $u = c$ می‌باشد. که باقرار دادن در $u^{(6)}$ داریم:

$$u = \frac{c}{\sqrt{1 + 4\varepsilon t}}\exp\Big(\frac{-\varepsilon x^2}{1 + 4\varepsilon t}\Big).$$

در حالت خاص اگر قرار دهیم $c = \sqrt{\varepsilon/\pi}$ آنگاه یک جواب بنیادی در نقطه‌ی $(x_0, t_0) = (0, -1/4\pi)$ به صورت زیر بدست می‌آید.

$$u = \frac{1}{\sqrt{1 + 4\varepsilon t}}\exp\Big(\frac{-x^2}{4t}\Big).$$

مثال ۲۵.۳.۲. معادله‌ی KdV[۳] را که دارای ضابطه‌ی

$$u_t + u_{xxx} + uu_x = \circ,$$

است در نظر می‌گیریم. این معادله یک معادله‌ی دیفرانسیل معمولی غیرخطی مرتبه‌ی سه است، که در ابتدا برای توصیف امواج با دامنه‌ی بلند روی سطح آب بیان شد و بعدها کاربرد آن در بسیاری از شاخه‌های فیزیک آشکار شد. این معادله روی فضای کامل $E \simeq \mathbb{R}^۲ \times \mathbb{R}$ تعریف می‌شود. مولد بینهایت کوچک متناظر با معادله‌ی KdV به صورت

$$V = \xi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial x} + \tau(x,t,u)\frac{\partial}{\partial t} + \varphi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial u},$$

می‌باشد. برای بدست آوردن تقارن‌ها ابتدا باید مولد بینهایت کوچک V را امتداد دهیم. چون معادله از مرتبه‌ی سه است پس باید V را تا مرتبه‌ی سه امتداد دهیم. بنابراین

$$\begin{aligned} V^{(۳)} = V &+ \varphi^x\frac{\partial}{\partial u_x} + \varphi^t\frac{\partial}{\partial u_t} + \varphi^{xx}\frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \varphi^{xt}\frac{\partial}{\partial u_{xt}} + \varphi^{tt}\frac{\partial}{\partial u_{tt}} + \varphi^{xxx}\frac{\partial}{\partial u_{xxx}} \\ &+ \varphi^{xxt}\frac{\partial}{\partial u_{xxt}} + \varphi^{xtt}\frac{\partial}{\partial u_{xtt}} + \varphi^{ttt}\frac{\partial}{\partial u_{ttt}}. \end{aligned}$$

مشخصه‌ی میدان برداری V، $Q = \varphi - \xi u_x - \tau u_t$ می‌باشد. با استفاده از قضیه‌ی ناوردایی داریم:

$$V^۳\big(u_t + u_{xxx} + uu_x\big) = \circ.$$

و لذا شرط ناوردایی عبارت است از:

$$\varphi^t + \varphi^{xxx} + u\varphi^x + u_x\varphi = \circ.$$

که ضرایب φ^t، φ^x و φ^{xxx} به صورت زیر می‌باشند.

$$\begin{aligned} \varphi^x &= D_x(\varphi - \xi u_x - \tau u_t) + \xi u_{xx} + \tau u_{xt} = D_x\varphi - u_x D_x\xi - u_t D_x\tau, \\ \varphi^t &= D_t(\varphi - \xi u_x - \tau u_t) + \xi u_{xt} + \tau u_{tt} = D_t\varphi - u_x D_t\xi - u_t D_t\tau, \\ \varphi^{xxx} &= D_x^۳(\varphi - \xi u_x - \tau u_t) + \xi u_{xxxx} + \tau u_{xxxt} \\ &= D_x^۳\varphi - u_x D_x^۳\xi - u_t D_x^۳\tau - ۳u_{xx}D_x^۲\xi - ۳u_{xt}D_x^۲\tau - ۳u_{xxx}D_x\xi - ۳u_{xxt}D_x\tau. \end{aligned}$$

بنابراین با قراردادن مقادیر به دست آمده برای φ^x، φ^t و φ^{xxx} در شرط ناوردایی و ساده کردن، ضرایب چند جمله‌ی‌های متشابه را برابر قرار می‌دهیم. با این کار یک دستگاه معادلات دیفرانسیل PDE بدست می‌آید که با حل این دستگاه ضرایب ξ، τ و φ عبارت‌اند از:

$$\xi = c_۱ + c_۳t + c_۴x, \quad \tau = c_۲ + ۳c_۴t, \quad \varphi = c_۳ - ۲c_۴u.$$

[۳] Korteweg de vries

که c_1، c_2، c_3 و c_4 ثابت‌های دلخواه هستند. با قرار دادن مقادیر به دست آمده برای ξ ، τ و φ در مولد بینهایت کوچک V داریم:

$$\begin{aligned}V &= (c_1 + c_2 t + c_4 x)\frac{\partial}{\partial x} + (c_2 + 3c_4 t)\frac{\partial}{\partial t} + (c_3 - 2c_4 u)\frac{\partial}{\partial u} \\ &= c_1\frac{\partial}{\partial x} + c_2\frac{\partial}{\partial t} + c_3\Big(t\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u}\Big) + c_4\Big(\frac{\partial}{\partial x} + 3t\frac{\partial}{\partial t} - 2u\frac{\partial}{\partial u}\Big).\end{aligned}$$

بنابراین تقارن‌های لی معادله‌ی KdV به وسیله‌ی چهار میدان برداری زیر تولید می‌شوند.

$$\begin{aligned}V_1 &= \partial_x, \\ V_2 &= \partial_t, \\ V_3 &= t\partial_x + \partial_u, \\ V_4 &= x\partial_x + 3t\partial_t - 2u\partial u.\end{aligned}$$

پس $\{V_1, V_2, V_3, V_4\}$ یک جبر لی ۴–بعدی برای معادله‌ی KdV است.

$[\cdot,\cdot]$	V_1	V_2	V_3	V_4
V_1	0	0	0	V_1
V_2	0	0	V_1	$3V_2$
V_3	0	$-V_1$	0	$-2V_3$
V_4	$-V_1$	$-3V_2$	$2V_3$	0

جدول ۲.۲: جدول لی تقارن‌های معادله‌ی KdV

گروه‌های یک–پارامتری G_i تولید شده توسط V_i به صورت زیر می‌باشند.

$$\begin{aligned}G_1 &: (x,t,u) \longrightarrow (x+\varepsilon, t, u), \\ G_2 &: (x,t,u) \longrightarrow (x, t+\varepsilon, u), \\ G_3 &: (x,t,u) \longrightarrow (x+t\varepsilon, t, u+\varepsilon), \\ G_4 &: (x,t,u) \longrightarrow (xe^{\varepsilon}, te^{3\varepsilon}, ue^{-2\varepsilon}).\end{aligned}$$

برای مثال اگر $u = f(x,t)$ یک جواب معادله‌ی KdV باشد آنگاه توابع زیر نیز جواب معادله می‌باشد.

$$\begin{aligned}u^{(1)} &= f(x-\varepsilon, t), \\ u^{(2)} &= f(x, t-\varepsilon), \\ u^{(3)} &= f(x-\varepsilon t, t) + \varepsilon, \\ u^{(4)} &= e^{-2\varepsilon} f(e^{-\varepsilon}x, e^{-3\varepsilon}t).\end{aligned}$$

که ε هر عدد حقیقی می‌تواند باشد.

۴.۲ امتداد توسعه یافته

در این بخش به بررسی گروه‌های تقارنی دستگاه معادلات دیفرانسیلی می‌پردازیم که دارای یک یا چند تابع دلخواه می‌باشند. در سال ۱۹۸۲ اوسیانکوف [۴] برای این کار روش تبدیلات هم ارز را ارائه داد. تبدیلات هم ارز ساختار دیفرانسیلی دستگاه معادلات را حفظ می‌کنند [۴].

بدون کاستن از کلیت مسئله دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی را به صورت

$$\Delta_\nu(x, u^{(n)}, F) = 0, \quad \nu = 1, \ldots, m, \tag{۱۷.۲}$$

در نظر می‌گیریم. این دستگاه دارای q متغیر مستقل، p متغیر وابسته و l تابع دلخواه $F = (F_1, \ldots, F_l)$ است. توابع دلخواه ممکن است وابسته به متغیرهای مستقل یا متغیرهای وابسته و مشتقات آنها باشد.

مولد بینهایت کوچک دستگاه (۱۷.۲) به صورت

$$V = \sum_{i=1}^{q} \xi^i(x,u)\frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{j=1}^{p} \eta^j(x,u)\frac{\partial}{\partial u^j} + \sum_{\alpha=1}^{l} \mu^\alpha(x,u,F)\frac{\partial}{\partial F^\alpha}, \tag{۱۸.۲}$$

است، که توابع

$$\xi^i = \xi^i(x,u), \quad \eta^j = \eta^j(x,u), \quad \mu^\alpha = \mu^\alpha(x,u,F),$$

ضرایب میدان برداری هستند. در این روش امتداد میدان برداری (۱۸.۲) امتداد توسعه یافته نامیده می‌شود و آن را با $\tilde{V}$ نشان می‌دهند.

مثال ۱.۴.۲. معادله‌ی دیفرانسیل جزئی غیر خطی تصفیه،

$$v_t = h(v_x)v_{xx}, \tag{۱۹.۲}$$

را در نظر می‌گیریم. از این معادله به عنوان مدلی برای مطالعه‌ی فرایند تصفیه‌ی سیالات غیر نیوتنی و همچنین برای توصیف نوسانات دما و شوری اعماق اقیانوس بکار برده می‌شود. در این معادله تابع $h(v_x)$ را ضریب تصفیه می‌گویند. برای پیدا کردن تقارن‌های معادله‌ی تصفیه مولد بینهایت کوچک زیر را متناظر با معادله‌ی (۱۹.۲) در نظر می‌گیریم.

$$V = \xi(x,t,v)\frac{\partial}{\partial x} + \tau(x,t,v)\frac{\partial}{\partial t} + \eta(x,t,v)\frac{\partial}{\partial v} + \mu(x,t,v,h)\frac{\partial}{\partial h}. \tag{۲۰.۲}$$

با توجه به شرط ناوردایی معادله‌ی (۱۹.۲) می‌توان نوشت.

$$v_t = hv_{xx}, \qquad h_t = h_x = h_v = h_{v_t} = 0. \tag{۲۱.۲}$$

[۴] Ovsiannikov

برای پیدا کردن تقارن‌های معادله، مولد بینهایت کوچک (۲۰.۲) را تا مرتبه‌ی دوم امتداد می‌دهیم. بنابراین

$$\begin{aligned}\tilde{V} = V &+ \eta^x\frac{\partial}{\partial v_x} + \eta^t\frac{\partial}{\partial v_t} + \eta^{xx}\frac{\partial}{\partial v_{xx}} + \eta^{xt}\frac{\partial}{\partial v_{xt}} + \eta^{tt}\frac{\partial}{\partial v_{tt}} + \mu^x\frac{\partial}{\partial h_x} + \mu^t\frac{\partial}{\partial h_t}\\ &+ \mu^v\frac{\partial}{\partial h_v} + \mu^{v_x}\frac{\partial}{\partial h_{v_x}} + \mu^{v_t}\frac{\partial}{\partial h_{v_t}} + \mu^{xx}\frac{\partial}{\partial h_{xx}} + \mu^{xt}\frac{\partial}{\partial h_{xt}} + \mu^{xv}\frac{\partial}{\partial h_{xv}} + \mu^{xv_x}\frac{\partial}{\partial h_{xv_x}}\\ &+ \mu^{xv_t}\frac{\partial}{\partial h_{xv_t}} + \mu^{tt}\frac{\partial}{\partial h_{tt}} + \mu^{tv}\frac{\partial}{\partial h_{tv}} + \mu^{tv_x}\frac{\partial}{\partial h_{tv_x}} + \mu^{tv_t}\frac{\partial}{\partial h_{tv_t}} + \mu^{vv}\frac{\partial}{\partial h_{vv}}\\ &+ \mu^{vv_x}\frac{\partial}{\partial h_{vv_x}} + \mu^{vv_t}\frac{\partial}{\partial h_{vv_t}} + \mu^{v_xv_x}\frac{\partial}{\partial h_{v_xv_x}} + \mu^{v_xv_t}\frac{\partial}{\partial h_{v_xv_t}} + \mu^{v_tv_t}\frac{\partial}{\partial h_{v_tv_t}}.\end{aligned}$$

با توجه به قضیه‌ی ناوردایی $V^{(2)}$ را بر (۲۱.۲) اثر می‌دهیم. بنابراین داریم:

$$\eta^t - h\eta^{xx} - \mu v_{xx} = 0, \tag{۲۲.۲}$$

$$\mu^t = \mu^x = \mu^v = \mu^{v_t} = 0. \tag{۲۳.۲}$$

مشتقات کاملی که روی (x, t, v) تعریف می‌شوند عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned}D_t &= \frac{\partial}{\partial t} + v_t\frac{\partial}{\partial v} + v_{tt}\frac{\partial}{\partial v_t} + v_{tx}\frac{\partial}{\partial v_x},\\ D_x &= \frac{\partial}{\partial x} + v_x\frac{\partial}{\partial v} + v_{tx}\frac{\partial}{\partial v_t} + v_{xx}\frac{\partial}{\partial v_x}.\end{aligned}$$

ضرایب η^x، η^t و η^{xx} را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{aligned}\eta^x &= D_x(\eta - \tau v_t - \xi v_x) + \tau v_{xt} + \xi v_{xx} = D_x(\eta) - v_t D_x(\tau) - v_x D_x(\xi),\\ \eta^t &= D_t(\eta - \tau v_t - \xi v_x) + \tau v_{tt} + \xi v_{tx} = D_t(\eta) - v_t D_t(\tau) - v_x D_t(\xi),\\ \eta^{xx} &= D_{xx}(\eta - \tau v_t - \xi v_x) + \tau v_{xxt} + \xi v_{xxx} = D_x(\eta^x) - v_{xt} D_x(\tau) - v_{xx} D_x(\xi),\end{aligned}$$

حال فضا را به (t, x, v, v_t, v_x) تعمیم می‌دهیم. h را به عنوان متغیر دیفرانسیلی وابسته روی متغیرهای مستقل (t, x, v, v_t, v_x) و همچنین μ را تابعی از t، x، v، v_t، v_x و h در نظر می‌گیریم و مشتقات کامل روی فضای (t, x, v, v_t, v_x) را بدست می‌آوریم. بنابراین

$$\begin{aligned}\tilde{D}_t &= \frac{\partial}{\partial t} + h_t\frac{\partial}{\partial h} + h_{tt}\frac{\partial}{\partial h_t} + h_{tx}\frac{\partial}{\partial h_x} + h_{tv}\frac{\partial}{\partial h_v} + h_{tv_t}\frac{\partial}{\partial h_{v_t}},\\ \tilde{D}_x &= \frac{\partial}{\partial x} + h_x\frac{\partial}{\partial h} + h_{xt}\frac{\partial}{\partial h_x} + h_{xx}\frac{\partial}{\partial h_x} + h_{xv}\frac{\partial}{\partial h_v} + h_{xv_t}\frac{\partial}{\partial h_{v_t}},\\ \tilde{D}_v &= \frac{\partial}{\partial v} + h_v\frac{\partial}{\partial h} + h_{vt}\frac{\partial}{\partial h_t} + h_{vx}\frac{\partial}{\partial h_x} + h_{vv}\frac{\partial}{\partial h_v} + h_{vv_t}\frac{\partial}{\partial h_{v_t}},\\ \tilde{D}_{v_t} &= \frac{\partial}{\partial v_t} + h_{v_t}\frac{\partial}{\partial h} + h_{tv_t}\frac{\partial}{\partial h_t} + h_{xv_t}\frac{\partial}{\partial h_x} + h_{vv_t}\frac{\partial}{\partial h_v} + h_{v_tv_t}\frac{\partial}{\partial h_{v_t}}.\end{aligned} \tag{۲۴.۲}$$

با استفاده از این مشتقات کامل μ^t، μ^x، μ^v و μ^{v_t} را محاسبه می‌کنیم. بنابراین،

$$\begin{aligned}
\mu^t &= \tilde{D}_t(\mu - \tau h_t - \xi h_x - \eta h_v - \eta^t h_{v_t} - \eta^x h_{v_x}) + \tau h_{tt} + \xi h_{xt} + \eta h_{vt} + \eta^t h_{tv_t} + \eta^x h_{tv_x}\\
&= \tilde{D}_t(\mu) - h_t\tilde{D}_t(\tau) - h_x\tilde{D}_t(\xi) - h_v\tilde{D}_t(\eta) - h_{v_t}\tilde{D}_t(\eta^t) - h_{v_x}\tilde{D}_t(\eta^x),\\
\mu^x &= \tilde{D}_x(\mu - \tau h_t - \xi h_x - \eta h_v - \eta^t h_{v_t} - \eta^x h_{v_x}) + \tau h_{tx} + \xi h_{xx} + \eta h_{xv} + \eta^t h_{xv_t} + \eta^x h_{xv_x}\\
&= \tilde{D}_x(\mu) - h_t\tilde{D}_x(\tau) - h_x\tilde{D}_x(\xi) - h_v\tilde{D}_x(\eta) - h_{v_t}\tilde{D}_x(\eta^t) - h_{v_x}\tilde{D}_x(\eta^x),\\
\mu^v &= \tilde{D}_v(\mu - \tau h_t - \xi h_x - \eta h_v - \eta^t h_{v_t} - \eta^x h_{v_x}) + \tau h_{tv} + \xi h_{xv} + \eta h_{vv} + \eta^t h_{vv_t} + \eta^x h_{vv_x}\\
&= \tilde{D}_v(\mu) - h_t\tilde{D}_v(\tau) - h_x\tilde{D}_v(\xi) - h_v\tilde{D}_v(\eta) - h_{v_t}\tilde{D}_v(\eta^t) - h_{v_x}\tilde{D}_v(\eta^x),\\
\mu^{v_t} &= \tilde{D}_{v_t}(\mu - \tau h_t - \xi h_x - \eta h_v - \eta^t h_{v_t} - \eta^x h_{v_x}) + \tau h_{tv_t} + \xi h_{xv_t} + \eta h_{vv_t} + \eta^t h_{v_xv_t} + \eta^x h_{v_xv_t}\\
&= \tilde{D}_{v_t}(\mu) - h_t\tilde{D}_{v_t}(\tau) - h_x\tilde{D}_{v_t}(\xi) - h_v\tilde{D}_{v_t}(\eta) - h_{v_t}\tilde{D}_{v_t}(\eta^t) - h_{v_x}\tilde{D}_{v_t}(\eta^x).
\end{aligned}$$

با توجه به معادلات (۲۱.۲) و اینکه μ به مشتقات h_x، ... ، h_{v_t} وابسته نیست می‌توان مشتقات (۲۴.۲) را به صورت مشتقات جزئی زیر کاهش داد.

$$\tilde{D}_t = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \tilde{D}_x = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \tilde{D}_v = \frac{\partial}{\partial v}, \quad \tilde{D}_{v_t} = \frac{\partial}{\partial v_t}.$$

چون توابع ξ، η، η^t و η^x به h وابسته نیستند، معادله‌ی (۲۳.۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \mu}{\partial t} - h_{v_x}\frac{\partial \eta^x}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \mu}{\partial x} - h_{v_x}\frac{\partial \eta^x}{\partial x} = 0,\\
&\frac{\partial \mu}{\partial v} - h_{v_x}\frac{\partial \eta^x}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial \mu}{\partial v_t} - h_{v_x}\frac{\partial \eta^x}{\partial v_t} = 0.
\end{aligned}$$

چون h و h_{v_x} به طور جبری مستقل هستند، پس معادلات بالا را می‌توان به دو دستگاه زیر تبدیل کرد.

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \mu}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \mu}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial \mu}{\partial v_t} = 0, \tag{۲۵.۲}$$

$$\frac{\partial \eta^x}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \eta^x}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \eta^x}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial \eta^x}{\partial v_t} = 0. \tag{۲۶.۲}$$

از معادله‌ی (۲۵.۲) نتیجه می‌شود که

$$\mu = \mu(v_x, h). \tag{۲۷.۲}$$

با جایگذاری

$$\eta^x = \eta_x + v_x\eta_v - v_t\tau_x - v_tv_x\tau_v - v_x\xi_x - v_x^2\xi_v,$$

در معادله‌ی (۲۶.۲) داریم:

$$\eta_{xt}+v_{tx}\eta_v+v_x\eta_{tv}-v_{tt}\tau_x-v_t\tau_{tx}-v_{tt}v_x\tau_v-v_tv_{tx}\tau_v-v_tv_x\tau_{tv}$$
$$-v_{xt}\xi_x-v_x\xi_{tx}-2v_xv_{tx}\xi_v-v_x^2\xi_{tv}=0,$$
$$\eta_{xx}+v_{xx}\eta_v+v_x\eta_{xv}-v_{xt}\tau_x-v_t\tau_{xx}-v_{xt}v_x\tau_v-v_tv_{xx}\tau_v-v_tv_x\tau_{xv}$$
$$-v_{xx}\xi_x-v_x\xi_{xx}-2v_xv_{xx}\xi_v-v_x^2\xi_{xv}=0,$$
$$\eta_{xv}+v_x\eta_{vv}-v_t\tau_{xv}-v_tv_x\tau_{vv}-v_x\xi_{xv}-v_x^2\xi_{vv}=0,$$
$$-\tau_x-v_x\tau_v=0.$$

با برابر صفر قراردادن ضرایب تک جمله‌ی‌ها در معادلات بالا و سپس با انتگرال‌گیری از معادلات بدست آمده τ، ξ و η به صورت زیر بدست می‌آیند.

$$\tau=\tau(t),\quad \xi=A_1(t)x+c_1v+A_2(t),\quad \eta=A_3(t)v+c_2x+A_4(t), \tag{۲۸.۲}$$

که A_i‑ها توابعی دلخواه و c_i‑ها ثابت‌های دلخواه می‌باشند. با جایگذاری (۲۷.۲) و (۲۸.۲) در (۲۲.۲) جواب عمومی معادلات مشخصه‌ی (۲۲.۲) و (۲۳.۲) به صورت زیر حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned}&\tau=c_1t+c_2,\quad \xi=c_3x+c_4v+c_5,\\&\eta=c_6x+c_7v+c_8,\quad \mu=(2c_4v_x+2c_3-c_1)h.\end{aligned} \tag{۲۹.۲}$$

با جایگذاری (۲۹.۲) در (۲۰.۲) تقارن‌های لی معادله‌ی تصفیه به صورت زیر بدست می‌آیند.

$$V_1=\frac{\partial}{\partial t},\quad V_2=\frac{\partial}{\partial x},\quad V_3=\frac{\partial}{\partial v},\quad V_4=t\frac{\partial}{\partial t}-h\frac{\partial}{\partial h},$$
$$V_5=x\frac{\partial}{\partial x}+2h\frac{\partial}{\partial h},\quad V_6=v\frac{\partial}{\partial x}-2v_xh\frac{\partial}{\partial h},\quad V_7=x\frac{\partial}{\partial v},\quad V_8=v\frac{\partial}{\partial v}.$$

بنابراین معادله‌ی تصفیه دارای یک جبر لی ۸‑بعدی به صورت $\{V_1,V_2,\cdots,V_8\}$ است. چون مولد بینهایت کوچک V_6 شامل مشتق v_x است پس باید آن را امتداد مرتبه‌ی اول دهیم. بنابراین

$$V_6=v\frac{\partial}{\partial x}-v_x^2\frac{\partial}{\partial v_x}+2v_xh\frac{\partial}{\partial h}.$$

گروه‌های یک‑پارامتری G_i تولید شده توسط V_i به صورت زیر می‌باشند.

$$G_1:(t,x,v,h)\longrightarrow(t+\varepsilon,x,v,h),$$
$$G_2:(t,x,v,h)\longrightarrow(t,x+\varepsilon,v,h),$$
$$G_3:(t,x,v,h)\longrightarrow(t,x,v+\varepsilon,h),$$
$$G_4:(t,x,v,h)\longrightarrow(te^{\varepsilon},x,v,he^{-\varepsilon}),$$
$$G_5:(t,x,v,h)\longrightarrow(t,xe^{\varepsilon},v,he^{2\varepsilon}),$$
$$G_6:(t,x,v,h)\longrightarrow(t,x+\varepsilon v,v,(1+\varepsilon v_x)^2h),$$
$$G_7:(t,x,v,h)\longrightarrow(t,x,v+\varepsilon x,h),$$
$$G_8:(t,x,v,h)\longrightarrow(t,x,ve^{\varepsilon},h).$$

مثال ۲.۴.۲. دستگاه معادلات دیفرانسیل،

$$\begin{cases} u_t = f(u) - (uc_x)_x, \\ c_t = -g(c,u), \end{cases} \tag{۳۰.۲}$$

که $f(u)$ و $g(c,u)$ توابعی دلخواه هستند و در شرایط زیر صدق می‌کنند را در نظر می‌گیریم.

$$f(u) > \circ, \quad g_c(c,u) > \circ, \quad g_u(c,u) > \circ.$$

این دستگاه در زیست‌شناسی برای توصیف تومورهای بدخیم بکار برده می‌شود. مولد بینهایت کوچکی که روی این دستگاه تعریف می‌شود به صورت

$$\begin{aligned} V = {} & \tau(t,x,u,c)\frac{\partial}{\partial t} + \xi(t,x,u,c)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(t,x,u,c)\frac{\partial}{\partial u} + \mu(t,x,u,c)\frac{\partial}{\partial c} \\ & + \varphi(t,x,u,c,f,g)\frac{\partial}{\partial f} + \psi(t,x,u,c,f,g)\frac{\partial}{\partial g}, \end{aligned} \tag{۳۱.۲}$$

می‌باشد. با توجه به شرط ناوردایی دستگاه (۳۰.۲) می‌توان نوشت،

$$u_t - f + u_x c_x + u c_{xx} = \circ, \quad c_t + g = \circ, \quad f_t = f_x = f_c = g_t = g_x = \circ. \tag{۳۲.۲}$$

چون دستگاه مرتبه‌ی دوم است پس باید امتداد مرتبه‌ی دوم را به دست آوریم. بنابراین،

$$\begin{aligned} \tilde{V} = V & + \eta^t\frac{\partial}{\partial u_t} + \eta^x\frac{\partial}{\partial u_x} + \mu^t\frac{\partial}{\partial c_t} + \mu^x\frac{\partial}{\partial c_x} + \varphi^t\frac{\partial}{\partial f_t} + \varphi^x\frac{\partial}{\partial f_x} + \varphi^c\frac{\partial}{\partial f_c} + \varphi^u\frac{\partial}{\partial f_u} \\ & + \psi^t\frac{\partial}{\partial g_t} + \psi^x\frac{\partial}{\partial g_x} + \psi^c\frac{\partial}{\partial g_c} + \psi^u\frac{\partial}{\partial g_u} + \eta^{tt}\frac{\partial}{\partial u_{tt}} + \eta^{tx}\frac{\partial}{\partial u_{tx}} + \eta^{xx}\frac{\partial}{\partial u_{xx}} \\ & + \mu^{tt}\frac{\partial}{\partial c_{tt}} + \mu^{xt}\frac{\partial}{\partial c_{xt}} + \mu^{xx}\frac{\partial}{\partial c_{xx}} + \varphi^{tt}\frac{\partial}{\partial f_{tt}} + \varphi^{tx}\frac{\partial}{\partial f_{tx}} + \varphi^{tc}\frac{\partial}{\partial f_{tc}} + \varphi^{tu}\frac{\partial}{\partial f_{tu}} \\ & + \varphi^{xx}\frac{\partial}{\partial f_{xx}} + \varphi^{xc}\frac{\partial}{\partial f_{xc}} + \varphi^{xu}\frac{\partial}{\partial f_{xu}} + \varphi^{cc}\frac{\partial}{\partial f_{cc}} + \varphi^{cu}\frac{\partial}{\partial f_{cu}} + \varphi^{uu}\frac{\partial}{\partial f_{uu}} \\ & + \psi^{tt}\frac{\partial}{\partial g_{tt}} + \psi^{tx}\frac{\partial}{\partial g_{tx}} + \psi^{tc}\frac{\partial}{\partial g_{tc}} + \psi^{tu}\frac{\partial}{\partial g_{tu}} + \psi^{xx}\frac{\partial}{\partial g_{xx}} + \psi^{xc}\frac{\partial}{\partial g_{xc}} \\ & + \psi^{xu}\frac{\partial}{\partial g_{xu}} + \psi^{cc}\frac{\partial}{\partial g_{cc}} + \psi^{uu}\frac{\partial}{\partial g_{uu}}. \end{aligned}$$

حال با استفاده از قضیه‌ی ناوردایی $V^{(۲)}$ را بر دستگاه ۳۰.۲ اثر می‌دهیم، بنابراین داریم:

$$\eta^t - \varphi + c_x\eta^x + u_x\mu^x + c_{xx}\eta + u\mu^{xx} = \circ, \quad \mu^t + \psi = \circ, \tag{۳۳.۲}$$

$$\varphi^t = \varphi^x = \varphi^c = \psi^t = \psi^x = \circ. \tag{۳۴.۲}$$

که ضرایب جت عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned}
\eta^t &= D_t(\eta) - u_t D_t(\tau) - u_x D_t(\xi),\\
\eta^x &= D_x(\eta) - u_t D_x(\tau) - u_x D_x(\xi),\\
\mu^t &= D_t(\mu) - c_t D_t(\tau) - c_x D_t(\xi),\\
\mu^x &= D_x(\mu) - c_t D_x(\tau) - c_x D_x(\xi),\\
\mu^{xx} &= u_{xx}\mu_u + c_{xx}\mu_c + (u_x)^۲\mu_{uu} + ۲u_x c_x \mu_{uc} + (c_x)^۲\mu_{cc}\\
&\quad - ۲c_{tx}D_x(\tau) - ۲c_{xx}D_x(\xi) - c_t D_x^۲(\tau) - c_x D_x^۲(\xi).
\end{aligned}$$

و همچنین

$$\begin{aligned}
\varphi^t &= \tilde{D}_t(\varphi) - f_u\tilde{D}_t(\eta) = \varphi_t - f_u\eta_t,\\
\varphi^x &= \tilde{D}_x(\varphi) - f_u\tilde{D}_x(\eta) = \varphi_x - f_u\eta_x,\\
\varphi^c &= \tilde{D}_c(\varphi) - f_u\tilde{D}_c(\eta) = \varphi_c - f_u\eta_c,\\
\psi^t &= \tilde{D}_t(\psi) - g_u\tilde{D}_t(\eta) - g_c\tilde{D}_t(\mu) = \psi_t - g_u\eta_t - g_c\mu_t,\\
\psi^x &= \tilde{D}_x(\psi) - g_u\tilde{D}_x(\eta) - g_c\tilde{D}_x(\mu) = \psi_x - g_u\eta_x - g_c\mu_x.
\end{aligned}$$

که بترتیب

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t} + u_t\frac{\partial}{\partial u} + c_t\frac{\partial}{\partial c},$$
$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + u_x\frac{\partial}{\partial u} + c_x\frac{\partial}{\partial c},$$

مشتقات کامل معمولی، و همچنین

$$\tilde{D}_t = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \tilde{D}_x = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \tilde{D}_c = \frac{\partial}{\partial c} + g_c\frac{\partial}{\partial g},$$

مشتقات کامل جدید برای دستگاه (۳۰.۲) می‌باشند. با قرار دادن مقادیر به دست آمده برای φ^t، φ^x، φ^c، ψ^t و ψ^x در معادله‌ی (۳۴.۲) داریم:

$$\begin{aligned}
&\varphi_t - f_u\eta_t = ۰, \quad \varphi_x - f_u\eta_x = ۰, \quad \varphi_c - g_c\varphi_g - f_u\eta_c = ۰,\\
&\psi_t - g_c\mu_t = ۰, \quad \psi_x - g_c\eta_x = ۰.
\end{aligned}$$

چوان توابع f و g و در نتیجه f_u، g_u و g_c توابعی دلخواه هستند، بنابراین از دستگاه بالا نتیجه می‌شود که

$$\varphi_t = \varphi_x = \varphi_c = \varphi_g = \psi_t = \psi_x = \eta_t = \eta_x = \eta_c = \mu_t = \mu_x = ۰.$$

در نتیجه،

$$\varphi=\varphi(u,f),\quad \psi=\psi(u,c,f,g),\quad \eta=\eta(u),\quad \mu=\mu(u,c).$$

با جایگذاری ضرایب جت در معادلات (۳۳.۲) داریم:

$$\begin{aligned}&D_t(\eta)-u_tD_t(\tau)-u_xD_t(\xi)+c_x\big[D_x(\eta)-u_tD_x(\tau)-u_xD_x(\xi)\big]-\varphi+u_x\big[D_x(\mu)\\&-c_tD_x(\tau)-c_xD_x(\xi)\big]+\eta c_{xx}+u\big[u_{xx}\mu_u+c_{xx}\mu_c+(u_x)^2\mu_{uu}+2u_xc_x\mu_{uc}+(c_x)^2\mu_{cc}\\&-2c_{tx}D_x(\tau)-2c_{xx}D_x(\xi)-c_tD_x^2(\tau)-c_xD_x^2(\xi)\big]=0,\\&D_t(\mu)-c_tD_t(\tau)-c_xD_t(\xi)+\psi=0.\end{aligned}$$

سرنجام با حل این معادلات ضرایب میدان برداری V به صورت زیر حاصل می‌شوند.

$$\begin{aligned}&\tau=k_1+2k_3t,\quad \xi=k_2+(k_3+k_5)x,\quad \eta=k_6u,\\&\mu=k_4+2k_5c,\quad \varphi=(k_6-2k_3)f,\quad \psi=2(k_5-k_3)g.\end{aligned}$$

که k_i–ها ثابت‌های دلخواه هستند. با جایگذاری مقادیر بالا در میدان برداری V و مرتب کردن آن‌ها بر حسب k_i–ها نتیجه می‌شود که دستگاه (۳۰.۲) دارای یک جبر لی ۶-بعدی با مولدهای زیر است.

$$\begin{aligned}&V_1=\frac{\partial}{\partial t},\quad V_2=\frac{\partial}{\partial x},\quad V_3=2t\frac{\partial}{\partial t}+x\frac{\partial}{\partial x}-2f\frac{\partial}{\partial f}-2g\frac{\partial}{\partial g},\\&V_4=\frac{\partial}{\partial c},\quad V_5=x\frac{\partial}{\partial x}+2c\frac{\partial}{\partial c}+2g\frac{\partial}{\partial g},\quad V_6=u\frac{\partial}{\partial u}+f\frac{\partial}{\partial f}.\end{aligned}$$

۵.۲ انتگرال‌گیری از معادلات دیفرانسیل معمولی

یکی از کاربردهای مهم نظریه‌ی گروه‌های لی به کار بردن آن‌ها در حل معادلات دیفرانسیل معمولی می‌باشد. اساس این نظریه بر داشتن یک گروه به اندازه کافی بزرگ از تقارن‌های یک معادله‌ی دیفرانسیل معمولی می‌باشد، که با استفاده از انتگرال‌گیری می‌توان آن را حل کرد. در ادامه ابتدا این روش را برای معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه‌ی اول به کار می‌بریم سپس از روش بیان شده برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی مراتب بالاتر استفاده می‌کنیم. این روش مبتنی بر کاهش مرتبه‌ی معادلات می‌باشد.

۱.۵.۲ معادلات مرتبه‌ی اول

ابتدا با معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی اول

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=F(x,u),\tag{۳۵.۲}$$

کار را شروع می‌کنیم. اگر این معادله تحت یک گروه یک–پارامتری از تبدیلات ناوردا باشد، آنگاه می‌توان با انتگرال‌گیری‌های پی‌درپی جواب آن را به دست آورد. فرض کنیم G یک گروه یک–پارامتری از تبدیلات که روی زیرمجموعه‌ی باز $O\subset E\simeq\mathbb{R}^2$ عمل می‌کند. اگر

$$V = \xi(x,u)\frac{\partial}{\partial x} + \varphi(x,u)\frac{\partial}{\partial u},$$

مولد بینهایت کوچک نظیر آن باشد، آنگاه امتداد مرتبه‌ی اول آن میدان برداری

$$V^{(۱)} = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \varphi\frac{\partial}{\partial u} + \varphi^x\frac{\partial}{\partial u_x},$$

می‌باشد که در آن

$$\begin{aligned}\varphi^x &= D_x\varphi - u_x D_x\xi \\ &= \varphi_x + (\varphi_u - \xi_x)u_x - \xi_u u_x^۲.\end{aligned}$$

با توجه به قضیه‌ی ناوردایی با اثر دادن $V^{(۱)}$ بر معادله‌ی (۳۵.۲)،

$$V^{(۱)}\Big(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - F(x,u)\Big) = ۰,$$

معادله‌ی

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \Big(\frac{\partial\varphi}{\partial u} - \frac{\partial\xi}{\partial x}\Big)F - \frac{\partial\xi}{\partial u}F^۲ = \xi\frac{\partial F}{\partial x} + \varphi\frac{\partial F}{\partial u}, \tag{۳۶.۲}$$

حاصل می‌شود. که هر جواب $\xi(x,u)$ و $\varphi(x,u)$ از معادله‌ی جزئی (۳۶.۲) یک تقارن یک-پارامتری برای معادله‌ی (۳۵.۲) بدست می‌دهد. البته در بعضی مواقع پیدا کردن جواب‌های معادله‌ی (۳۶.۲) بسیار مشکل‌تر از حل معادله‌ی (۳۵.۲) می‌باشد. و این یکی از ایرادهای اساسی این روش می‌باشد. اما نقطه قوت این روش آن است که حتما منجر به رسیدن به جواب خواهد شد. روش‌های گوناگونی برای انتگرال‌گیری از معادله‌ی (۳۵.۲) به کمک تقارن‌ها وجود دارد.

فرض کنیم V یک تقارن باشد و $V|_{(x_۰,u_۰)} \neq ۰$. به کمک قضیه ۱۱.۳.۱ اگر

$$y = \eta(x,u), \qquad w = \zeta(x,u), \tag{۳۷.۲}$$

دستگاه مختصات حول نقطه‌ی $(x_۰,u_۰)$ باشند. در مختصات (y,w) می‌توان میدان برداری V را به شکل

$$V = \frac{\partial}{\partial w},$$

نوشت که امتداد مرتبه‌ی اول آن

$$V^{(۱)} = V = \frac{\partial}{\partial w},$$

می‌باشد. بنابراین در مختصات جدید معادله‌ی (۳۵.۲) هم‌ارز معادله‌ی مقدماتی

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}y} = H(y),$$

است، که یک معادله‌ی جدای پذیر مرتبه‌ی اول است. و جواب آن با یک بار انتگرال‌گیری به شکل

$$w = \int H(y)\mathrm{d}y + c,$$

حاصل می‌شود. با جایگذاری (۳۷.۲) در معادله به تابع $u = f(x)$ می‌رسیم که یک جواب برای معادله‌ی (۳۵.۲) است. مسئله‌ی اصلی پیدا کردن مختصات (۳۷.۲) می‌باشد. این کار با پیدا کردن توابع ناوردا که در بخش اول همین فصل بیان شده امکان پذیر است. فرض کنیم میدان برداری V با استفاده از قضیه ۱۱.۳.۱ به میدان برداری $\partial/\partial w$ تبدیل شده است. بنابراین مختصات (۳۷.۲) در معادلات دیفرانسیل جزئی خطی

$$V(\eta) = \xi\frac{\partial \eta}{\partial x} + \varphi\frac{\partial \eta}{\partial u} = ۰, \tag{۳۸.۲}$$

$$V(\zeta) = \xi\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \varphi\frac{\partial \zeta}{\partial u} = ۱, \tag{۳۹.۲}$$

صدق می‌کند. که تابع η از معادله‌ی مشخصه‌ی

$$\frac{\mathrm{d}x}{\xi(x,u)} = \frac{\mathrm{d}u}{\varphi(x,u)},$$

بدست می‌آوریم. برای پیدا کردن تابع ζ از معادله‌ی (۳۹.۲) تغییر متغیر

$$\chi(x,u,v) = v - \zeta(x,u),$$

را بکار می‌بریم. به عبارت دیگر، ζ در دستگاه (۳۹.۲) صدق می‌کند اگر و تنها اگر χ یک ناوردا برای میدان برداری $W = V + \partial_v = \xi\partial_x + \varphi\partial_u + \partial_v$ باشد. بنابراین این ناوردا ایجاب می‌کند که

$$W(\chi) = \xi\frac{\partial \chi}{\partial x} + \varphi\frac{\partial \chi}{\partial u} + \frac{\partial \chi}{\partial v} = ۰.$$

در نتیجه برای پیدا کردن ζ دستگاه معادلات مشخصه‌ی

$$\frac{\mathrm{d}x}{\xi(x,u)} = \frac{\mathrm{d}u}{\varphi(x,u)} = \frac{\mathrm{d}v}{۱},$$

را حل می‌کنیم.

مثال ۱.۵.۲. معادله‌ی

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = x^{m-۱}F\left(\frac{u}{x^m}\right), \tag{۴۰.۲}$$

نشان دهند یک معادله‌ی دیفرانسیل معمولی مرتبه‌ی اول است. این معادله تحت تبدیل

$$G : (x,u) \longmapsto (\lambda x, \lambda^m u), \qquad \lambda > ۰,$$

ناوردا است. بنابراین می‌توان دید که $V = x\partial_x + mu\partial_u$ یک تقارن متناظر با تبدیل بالا برای معادله‌ی (۲.۴۰) است. با کمک تغییر مختصاتی که در بالا توضیح داده شد می‌توان دید که معادلات (۲.۳۷) عبارت‌اند از:

$$y = \frac{u}{x^m}, \qquad w = \ln x,$$

با بکارگیری قاعده زنجیره‌ی مشتق داریم:

$$\begin{aligned} w_y = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}y} &= \frac{\mathrm{d}w/\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y/\mathrm{d}x} \\ &= \frac{1/x}{(u_x x^m - m x^{m-1} u)/x^{2m}} \\ &= \frac{x^m}{x u_x - m u} \\ &= \frac{1}{(u_x/x^{m-1}) - m(u_x/x^m)} \\ &= \frac{1}{F(y) - my}. \end{aligned}$$

بنابراین

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{F(y) - my},$$

می‌باشد، که دارای جواب

$$w = \int \frac{\mathrm{d}y}{F(y) - my} + c,$$

است.

برای مثال

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{u^2 + 2xu}{x^2} = \left(\frac{u}{x}\right)^2 + 2\frac{u}{x},$$

را در نظر می‌گیریم. سپس در مختصات‌های $w = \ln x$ و $y = u/x$ داریم:

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{y^2 + y},$$

که جواب آن

$$w = -\ln(1 + \frac{1}{y}) + c,$$

یا بر حسب متغیرهای اصلی

$$\ln x = -\ln\left(1 + \frac{x}{u}\right) + c, \tag{۲.۴۱}$$

می‌باشد. که از معادله‌ی (۲.۴۱) می‌توان u را به صورت

$$u = \frac{x^2}{\tilde{c} - x},$$

به دست آورد. به طوری که $\tilde{c} = e^c$.

نتیجه ۲.۵.۲. هر معادله‌ی دیفرانسیل همگن مرتبه‌ی اول به شکل $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x = F(u/x)$ را می‌توان با تغییر متغیر $u = xy$ به یک معادله‌ی جدایی پذیر تبدیل کرد و با یک بار انتگرال‌گیری جواب آن را بدست آورد.

یکی از روش‌های متداول برای حل معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی اول تحت یک گروه یک-پارامتری استفاده از فاکتور انتگرال است. می‌توان معادله‌ی (۳۵.۲) را به شکل

$$P(x,u)\mathrm{d}x + Q(x,u)\mathrm{d}u = 0, \tag{۴۲.۲}$$

نوشت به طوری که $F = -P/Q$. اگر شرط دقیق بودن، $\partial P/\partial u = \partial Q/\partial x$، را به معادله‌ی (۴۲.۲) اضافه کنیم، آنگاه می‌توان جواب ضمنی به شکل $T(x,u) = c$ پیدا کرد به طوری که

$$\frac{\partial T}{\partial x} = P, \qquad \frac{\partial T}{\partial u} = Q.$$

اگر معادله‌ی (۴۲.۲) دقیق نباشد باید یک فاکتور انتگرال مانند $R(x,u)$ طوری پیدا کنیم که اگر در (۴۲.۲) ضرب شود به یک معادله‌ی دقیق تبدیل شود.

۲.۵.۲ معادلات دیفرانسیل با مراتب بالاتر

حال به کمک گروه‌های تقارنی به محاسبه‌ی جواب معادلات دیفرانسیل مراتب بالاتر می‌پردازیم. فرض کنیم

$$\Delta(x, u^{(n)}) = \Delta(x, u, u_x, \ldots, u_n) = 0, \tag{۴۳.۲}$$

یک معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی n-ام باشد، که در آن $u_n = \mathrm{d}^n u/\mathrm{d}x^n$. می‌خواهیم نشان دهیم که چگونه با داشتن یک گروه تقارنی یک-پارامتری می‌توان مرتبه‌ی معادله‌ی (۴۳.۲) را یک واحد کاهش داد. ابتدا با استفاده از دستگاه مختصات $y = \eta(x,u)$ و $w = \chi(x,u)$ تقارن مورد نظر را اصلاح کرده و به شکل $V = \partial/\partial w$ می‌نویسیم. حال با استفاده از قاعده زنجیره‌ی مشتق، مشتقات u نسبت به x را بر حسب y و w می‌نویسیم. بنابراین به ازای تابعی مانند δ_k داریم:

$$\frac{\mathrm{d}^k u}{\mathrm{d}x^k} = \delta_k\Big(y, w, \frac{dw}{\mathrm{d}y}, \ldots, \frac{\mathrm{d}^k w}{\mathrm{d}y^k}\Big),$$

که با جایگذاری در معادله‌ی (۴۳.۲) به معادله‌ی

$$\bar{\Delta}(y, w^{(n)}) = \bar{\Delta}(y, w, w_y, \ldots, w_n) = 0, \tag{۴۴.۲}$$

می‌رسیم. چون معادله‌ی بالا با معادله‌ی (۴۳.۲) هم‌ارز است، پس گروه تقارن‌های آن را می‌پذیرد. اما برای آنکه V یک تقارن برای معادله‌ی (۴۴.۲) باشد باید شرط زیر برقرار باشد.

$$V^{(n)}\big(\bar{\Delta}(y, w^{(n)})\big) = \frac{\partial \bar{\Delta}}{\partial w} = \circ, \qquad \text{هرگاه} \qquad \bar{\Delta}(y, w^{(n)}) = \circ,$$

بنابراین با توجه به (۴۴.۲) معادله‌ی هم‌ارز برای $\bar{\Delta} = \circ$ مانند

$$\tilde{\Delta}\Big(y, \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}y}, \dots, \frac{\mathrm{d}^n w}{\mathrm{d}y^n}\Big) = \circ,$$

وجود دارد که مستقل از w می‌باشد. حال اگر در این معادله قرار دهیم $z = dw/dy$ آنگاه معادله‌ی مرتبه‌ی $(n-۱)$–ام

$$\tilde{\Delta}\Big(y, z, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}, \dots, \frac{\mathrm{d}^{(n-۱)} z}{\mathrm{d}y^{(n-۱)}}\Big) = \tilde{\Delta}(y, z^{(n-۱)}) = \circ, \tag{۴۵.۲}$$

حاصل می‌شود. اگر $z = h(y)$ جوابی از معادله‌ی (۴۵.۲) باشد، آنگاه $w = \int h(y)\mathrm{d}y + c$ جوابی برای معادله‌ی (۴۴.۲) می‌باشد. پس با جایگزینی x و u به جای y و w به جوابی از معادله‌ی (۴۳.۲) دست پیدا خواهیم کرد.

مثال ۳.۵.۲. معادله‌ی مرتبه‌ی دوم

$$\Delta(u, u_x, u_{xx}) = \circ, \tag{۴۶.۲}$$

که فاقد x است را در نظر می‌گیریم. بدیهی است که این معادله تحت انتقال در راستای محور x–ها ناوردا است. بنابراین $\partial/\partial x$ یک تقارن آن است. برای تبدیل این تقارن به میدان برداری $\partial/\partial w$ قرار می‌دهیم $y = u$ و $w = x$ آنگاه

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{۱}{w_y}, \qquad \frac{\mathrm{d}^۲ u}{\mathrm{d}x^۲} = -\frac{w_{yy}}{w_y^۳}.$$

بنابراین با جایگذاری در (۴۶.۲) داریم:

$$\Delta\left(y, \frac{۱}{w_y}, -\frac{w_{yy}}{w_y^۳}\right) = \circ,$$

حال اگر $z = w_y$ فرض شود صورت معادله به

$$\tilde{\Delta}(y, z, z_y) = \big(y, \frac{۱}{z}, -\frac{z_y}{z^۳}\big) = \circ,$$

کاهش پیدا می‌کند.

برای مثال معادله‌ی

$$u_{xx} - ۲uu_x = \circ, \tag{۴۷.۲}$$

با در نظر گرفتن تغییر مختصات $y = u$ و $w = x$ و اینکه $z = w_y$ به معادله‌ی مرتبه‌ی اول

$$-\frac{z_y}{z^۳} - ۲\frac{y}{z} = \circ,$$

کاهش می‌آبد. این معادله یک معادله‌ی جدایی پذیر است. به آسانی می‌توان دید که

$$z = \frac{۱}{y^{۲} + c},$$

جواب معادله است. بنابراین اگر $c = c'^{۲} > ۰$ آنگاه

$$w = \int z\mathrm{d}y = \frac{۱}{c'} \arctan \frac{y}{c'} + \tilde{c}.$$

حال با جایگذاری متغیرهای x و u به جواب

$$u = c' \tan(c'x + d), \qquad d = -\tilde{c}c',$$

می‌رسیم، که یک جواب برای معادله‌ی اصلی است.

مثال ۴.۵.۲. معادله‌ی دیفرانسیل خطی همگن مرتبه‌ی دوم

$$u_{xx} + p(x)u_x + q(x)u = ۰, \tag{۴۸.۲}$$

را در نظر می‌گیریم. بدیهی است که این معادله تحت تبدیل $(x, u) \to (x, \lambda u)$ ناوردا است بنابراین $V = u\partial_u$ تقارن آن است. با تغییر مختصات $y = x$ و $w = \ln u$، $(u \neq ۰)$ تقارن معادله به شکل $V = \partial_w$ اصلاح می‌شود. با استفاده از قاعده زنجیره‌ی داریم:

$$u = e^w, \qquad u_x = w_x e^w, \qquad u_{xx} = (w_{xx} + w_x^{۲})e^w,$$

بنابراین با جایگذاری در معادله (۴۸.۲) این معادله به معادله‌ی

$$w_{xx} + w_x^{۲} + p(x)w_x + q(x) = ۰,$$

تبدیل می‌شود که مستقل از w است. حال اگر قرار دهیم $z = w_x = u_x/u$ معادله‌ی (۴۸.۲) به معادله‌ی

$$z_x + p(x)z + q(x) + z^{۲} = ۰,$$

کاهش می‌آبد، که حالت خاصی از معادله‌ی ریکاتی است.

گزاره ۵.۵.۲. فرض کنیم G یک گروه از تبدیلات باشد که روی زیر مجموعه‌ی باز $O \subset \mathbb{R}^{۲}$ عمل کرده و $y = \eta(x, u^{(n)})$ و $w = \zeta(x, u^{(n)})$ دو ناوردای دیفرانسیلی مرتبه‌ی n–ام آن باشد. آنگاه

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}w/\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y/\mathrm{d}x} = \frac{D_x\zeta}{D_x\eta},$$

یک ناوردای دیفرانسیلی مرتبه‌ی $(n + ۱)$–ام برای عمل گروه تبدیلات G است.

برهان. [۲۴] $\square$

نتیجه ۶.۵.۲. فرض کنیم G یک گروه از تبدیلات یک-پارامتری باشد که روی یک زیرمجموعه‌ی باز $O \subset \mathbb{R}^{2}$ عمل می‌کند. هرگاه $y = \eta(x, u)$ و $w = \zeta(x, u, u_x)$ یک مجموعه‌ی کامل از ناورداهای دیفرانسیلی مستقل تابعی عمل گروه $G^{(1)}$ باشد، آنگاه

$$y, w, \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}y}, \ldots, \frac{\mathrm{d}^{n-1}w}{\mathrm{d}y^{n-1}},$$

یک مجموعه‌ی کامل از ناورداهای مستقل تابعی برای $G^{(n)}$ به ازای $n \geq 1$ است.

مثال ۷.۵.۲. ناورداهای مرتبه‌ی دوم گروه دوران $\mathrm{SO}(2)$ مثال ۹.۱.۲ را در نظر می‌گیریم. با توجه به نتیجه ۶.۵.۲، y و w و مشتق

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}w/\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y/\mathrm{d}x} = \frac{\sqrt{x^{2}+u^{2}}}{(x+uu_x)^{3}}\Big[(x^{2}+u^{2})u_{xx} - (1+u_x^{2})(xu_x - u)\Big],$$

مجموعه‌ی کامل از ناورداهای دیفرانسیلی مستقل تابعی برای $(\mathrm{SO}(2))^{(2)}$ تشکیل می‌دهند. این بدان معنی است که هر ناوردای دیفرانسیلی مستقل تابعی مرتبه‌ی دوم دیگر ترکیب خطی از ناورداهای بنیادی y ، w و $\mathrm{d}w/\mathrm{d}y$ می‌باشد. برای مثال ناوردای خمیدگی یک خم، $\kappa = u^{xx}/(1+u_x^{2})^{3/2}$، را می‌توان به صورت ترکیب خطی از ناورداهای بنیادی قبلی به شکل

$$\kappa = \frac{w_y}{(1+w^{2})^{3/2}} + \frac{w}{y(1+w^{2})^{1/2}},$$

نوشت.

قضیه ۸.۵.۲. فرض کنیم G یک گروه موضعی از تبدیلات باشد که روی زیرمجموعه‌ی باز $O \subseteq \mathbb{R}^{2}$ عمل می‌کند. همچنین فرض کنیم $G^{(n)}$ به طور نیم-منظم روی زیرمجموعه‌ی باز $O^{(n)}$ عمل کرده و

$$\eta^{1}(x, u^{(n)}), \ldots, \eta^{k}(x, u^{(n)}),$$

مجموعه‌ی کامل از ناورداهای دیفرانسیلی مرتبه‌ی n-ام مستقل تابعی باشند. آنگاه معادله‌ی دیفرانسیلی مرتبه‌ی n-ام $\Delta(x, u^{(n)}) = 0$، G را به عنوان یک گروه تقارنی می‌پذیرد اگر و تنها اگر یک معادله‌ی هم‌ارز مانند

$$\tilde{\Delta}\big(\eta^{1}(x, u^{(n)}), \ldots, \eta^{k}(x, u^{(n)})\big) = 0,$$

وجود داشته باشد به طوری که تابعی از ناورداهای دیفرانسیلی $G^{(n)}$ باشد. بخصوص اگر G یک گروه یک-پارامتری از تبدیلات باشد هر معادله‌ی دیفرانسیلی مرتبه‌ی n-ام که G را به عنوان گروه تقارن می‌پذیرد هم ارز معادله‌ی دیفرانسیلی مرتبه‌ی $(n-1)$-ام

$$\tilde{\Delta}\left(y, w, \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}y}, \ldots, \frac{\mathrm{d}^{n-1}w}{\mathrm{d}y^{n-1}}\right) = 0,$$

می‌باشد که در آن $y = \eta(x, u)$ و $w = \zeta(x, u, u_x)$ ناورداهای دیفرانسیلی $G^{(1)}$ هستند.

برهان. نتیجه‌ی از گزاره ۲.۵.۵ و نتیجه‌ی ۲.۵.۶ است. □

مثال ۲.۵.۹. برای مثال تمام معادلات دیفرانسیلی معمولی مرتبه اول و دومی که $\mathrm{SO}(۲)$ را به عنوان گروه تقارن می‌پذیرد طبقه بندی می‌کنیم. هر معادله دیفرانسیلی مرتبه‌ی اول که تحت $\mathrm{SO}(۲)$ ناوردا باشد هم ارز معادله‌ی است که ناورداهای دیفرانسیلی آن در مثال ۲.۳.۲۳ محاسبه شده است. با حل این معادلات نسبت به w معادله‌ی به شکل

$$\frac{xu_x - u}{x + uu_x} = H(\sqrt{x^۲ + u^۲}),$$

ساخته می‌شود که تحت عمل گروه $\mathrm{SO}(۲)$ ناوردا است. به طور مشابه معادلات مرتبه‌ی دوم ناوردا، آن دسته از معادلات هستند که شامل ناورداهای y و w و خمیدگی

$$\kappa = \frac{u_{xx}}{(۱ + u_x^۲)^{۳/۲}},$$

هستند، به بیان بهتر این معادلات به شکل زیر نوشته می‌شوند.

$$u_{xx} = (۱ + u_x^۲)^{۳/۲} H\Big(\sqrt{x^۲ + u^۲}, \frac{xu_x - u}{x + uu_x}\Big).$$

مثال ۲.۵.۱۰. معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی دوم

$$x^۲ u_{xx} + xu_x^۲ = uu_x, \qquad (۲.۴۹)$$

را در نظر می‌گیریم. این معادله تحت تبدیل $G : (x, u) \mapsto (\lambda x, \lambda u)$ ناوردا است. می‌توان دید که $V = x\partial_x + u\partial_u$ یک تقارن معادله است. با توجه به اینکه

$$y = \frac{u}{x}, \qquad w = u_x, \qquad \frac{dw}{dy} = \frac{x^۲ u_{xx}}{xu_x - u},$$

ناورداهای مرتبه‌ی دوم تقارن V هستند. به روشی که قبلا بیان شده از معادله‌ی (۲.۴۹) انتگرال‌گیری می‌کنیم. صورت کاهش یافته‌ی معادله بر حسب مختصات جدید y و w معادله‌ی

$$(w - y)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}y} + w^۲ = yw,$$

است، که $w = y$ و $w = ce^{-y}$ جواب‌های آن است. با قرار دادن مختصات x و u در این جواب‌ها دو معادله‌ی مرتبه‌ی اول

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{u}{x}, \qquad \text{یا} \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = ce^{-\frac{u}{x}},$$

حاصل می‌شود. تابع $u = kx$ جواب معادله‌ی سمت چپ و

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{ce^{-y} - y} = \ln x + k,$$

جواب معادله‌ی سمت راست می‌باشد که به عنوان جواب عمومی معادله‌ی (۲.۴۹) مطرح می‌شود.

فصل ۳

جواب‌های گروه-ناوردا و متشابه

هنگام مواجه با یک دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی اولین و مهمترین چیزی که به ذهن می‌رسد یافتن جواب‌های دقیق آن معادله است. در این فصل روشی برای پیدا کردن جواب‌های متشابه ارائه می‌شود. با استفاده از این روش می‌توان دسته‌ی وسیعی از جواب‌ها را پیدا کرد. این جواب‌ها توسط برخی ناورداهای خاص تولید شده توسط دستگاه معادلات دیفرانسیل مشخص می‌گردند. قضیه بنیادی که در این بحث می‌توان به آن اشاره کرد، مبتنی بر این اصل می‌باشد که آن دسته از جواب‌های دستگاه مورد مطالعه که تحت یک گروه تقارنی $r-$پارامتری ناوردا می‌باشد را می‌توان با حل یک دستگاه معادلات دیفرانسیل که مرتبه‌ی آن r واحد از مرتبه‌ی دستگاه اصلی کمتر است به دست آورد. به خصوص، هرگاه تعداد پارامترهای گروه تقارن یکی کمتر از تعداد متغیرهای مستقل باشد، $r = p - ۱$، آنگاه کلیه‌ی جواب‌های ناوردای گروهی با حل یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی حاصل می‌گردند. حتی در برخی موارد می‌توان دید آن دسته از جواب‌های گروهی که پیدا می‌شوند، در حقیقت همان جواب‌های دقیقی می‌باشند که هدف نهایی حل یک دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی می‌باشند. در این فصل، به نحوه‌ی محاسبه‌ی جواب‌های گروهی می‌پردازیم.

۱.۳ ساختن جواب‌های گروه-ناوردا

دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی

$$\Delta(x, u^{(n)}) = \circ,$$

را روی زیرمجموعه‌ی باز $O \subset X \times U \simeq \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ از فضای متغیرهای مستقل و وابسته را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم G یک گروه از تبدیلات موضعی باشد که روی O عمل می‌کند. جواب $u = f(x)$ از دستگاه بالا را $G-$ناوردا می‌گوییم اگر تحت تبدیلات گروه، ناوردا باشد. برای مثال، معادله‌ی لاپلاس دو بعدی

$$u_{xx} + u_{yy} = \circ,$$

را در نظر می‌گیریم. تابع $u = \ln(x^۲ + y^۲)$ یک جواب بنیادی برای معادله‌ی لاپلاس است. این جواب تحت گروه یک-پارامتری

$$\mathrm{SO}(۲) : (x, y, u) \longmapsto (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta, u),$$

ناوردا است. به عبارت دیگر، جواب $u = f(x)$ را یک جواب G-ناوردا از یک دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی می‌گوییم اگر گراف آن $\Gamma_f = \{(x, f(x))\}$ موضعاً یک زیرمجموعه‌ی G-ناوردا از O باشد.

اگر G گروه تقارنی از دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی $\Delta = ۰$ باشد، آنگاه می‌توان هر یک از جواب‌های G-ناوردای $\Delta = ۰$ را با حل دستگاه کاهش یافته‌ی معادلات دیفرانسیل به دست آورد. این دستگاه کاهش یافته را با Δ/G نشان می‌دهیم، که دارای متغیرهای کمتری نسبت به دستگاه اصلی است [۱۰].

فرض کنیم G یک گروه موضعی از تبدیلات تصویری روی O باشد، یعنی اگر $g \in G$ و $(x, u) \in E$ باشد در این صورت

$$(\bar{x}, \bar{u}) = g.(x, u) = (\phi_g(x), \psi_g(x, u)).$$

برای سادگی این عمل را به صورت $\bar{x} = g.x = \phi_g(x)$ نمایش می‌دهیم، که روی زیرمجموعه‌ی باز $\Omega \subset E$ تعریف می‌شود. فرض کنیم s بعد مدارات این عمل باشد، به طوری که $p > s$(در حالت $p = s$ نتیجه بدیهی است، در حالی که اگر $s > p$ هیچ تابع G-ناوردای وجود ندارد). در این صورت بنابه قضیه ۲.۱۷ مرجع [۲۴]، $p - s$ ناوردای مستقل تابعی مانند $y^{p-s} = \eta^{p-s}(x), \ldots, y^۱ = \eta^۱(x)$ از گروه تبدیلات تصویری روی زیرمجموعه‌ی باز $\Omega \subset X$ وجود دارد. هر یک از این توابع روی O ناوردا هستند. به علاوه، می‌توان q ناوردای دیگر از عمل G روی O به شکل $v^q = \zeta^q(x, u), \ldots, v^۱ = \zeta^۱(x, u)$ پیدا کنیم، که به همراه ناورداهای η^i یک مجموعه‌ی کامل از $p + q - s$ ناوردای مستقل تابعی برای G روی O می‌سازد. مجموعه‌ی این ناورداها را به صورت

$$y = \eta(x), \qquad v = \zeta(x, u), \tag{۱.۳}$$

نشان می‌دهیم. از این به بعد در دستگاه کاهش یافته y-ها را به عنوان متغیرهای مستقل جدید و v-ها را به عنوان متغیرهای وابسته جدید در نظر می‌گیریم. توجه کنید که تعداد متغیرهای مستقل به $p - s$ متغیر $y^{p-s}, \ldots, y^۱$ کاهش می‌آبد.

حال یک تناظر یک به یک بین توابع G-ناوردای $u = f(x)$ و توابع دلخواه $v = h(x)$، شامل متغیرهای جدید پیدا می‌کنیم. برای یافتن این تناظر قضیه‌ی تابع ضمنی را برای دستگاه $y = \eta(x)$ با $p - s$ متغیر بکار می‌بریم. این متغیرهای جدید را به جایی $y^{p-s}, \ldots, y^۱$ با $\tilde{x} = (x^{i_۱}, \ldots, x^{i_{p-s}})$ نشان می‌دهیم، و s متغیر باقی مانده دیگر را با $\hat{x} = (x^{j_۱}, \ldots, x^{j_s})$ نشان می‌دهیم. بنابراین جواب دستگاه را می‌توان با

$$\tilde{x} = \gamma(\hat{x}, y), \tag{۲.۳}$$

نشان داد، به طوری که γ یک تابع خوش تعریف است. $p-s$ متغیر نخست، $\tilde{x}$، را متغیرهای اصلی و s متغیر باقی‌مانده دیگر، $\hat{x}$، را به عنوان متغیرهای پارامتری در نظر می‌گیریم. بنابراین یک زیرماتریس وارون پذیر $(p-s)\times(p-s)$–بعدی از دستگاه ژاکوبین مانند

$$\left(\frac{\partial \eta^j}{\partial \tilde{x}^i}\right)_{ij},$$

وجود دارد. با بکارگیری قضیه‌ی تابع ضمنی برای حل دستگاه ناورداهای $v=\zeta(x,u)$ بر حسب متغیرهای (y,v) به جایی متغیرهای (x,u) و متغیرهای پارامتری $\hat{x}$ می‌توان نوشت:

$$u=\tilde{\delta}(x,v)=\tilde{\delta}(\hat{x},\gamma(\hat{x},y),v)\equiv\delta(\hat{x},y,v). \tag{۳.۳}$$

اگر $v=h(y)$ یک تابع هموار باشد، آنگاه (۱.۳) و (۳.۳) توابع G–ناوردا را روی O به شکل

$$u=f(x)=\delta\big(\hat{x},\eta(x),h(\eta(x))\big), \tag{۴.۳}$$

تولید می‌کنند. برعکس اگر $u=f(x)$ تابعی هموار روی O باشد، آنگاه به سادگی می‌توان دید که تابعی مانند $v=h(x)$ وجود دارد به طوری که f و تابع متناظر با (۴.۳) موضعاً معادلند.

دیدیم که چگونه توابع G–ناوردا می‌توانند مرتبه‌ی یک معادله‌ی دیفرانسیل را کاهش دهند. این روش به تبدیلات تصویری اختصاص دارد اما می‌توان آن را به تبدیلات نقطه‌ای نیز تعمیم داد.

اکنون می‌خواهیم جواب‌های G–ناوردای دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی

$$\Delta_\nu(x,u^{(n)})=\circ,\qquad \nu=\text{۱}\ldots,l, \tag{۵.۳}$$

را بررسی کنیم. به عبارت دیگر، می‌خواهیم ببینیم چه موقع تابع (۴.۳) متناظر با تابع $v=h(y)$ یک جواب برای دستگاه (۵.۳) است؟ برای این کار ابتدا باید تابع $v=h(y)$ را پیدا کنیم. برای پیدا کردن این تابع باید از (۳.۳) نسبت به x مشتق‌گیری کرد و در دستگاه معادلات قرار داد. بنابراین لازم است که روش مشتق‌گیری از تابع $v=h(y)$ با توجه به متناظر بودن آن با تابع G–ناوردای $u=f(x)$ را بدانیم. فرض کنیم $y=\eta(x)$ آنگاه با مشتق‌گیری از (۴.۳) داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}[\delta(\hat{x},y,v)]=\frac{\partial \delta}{\partial \hat{x}}+\frac{\partial \delta}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial \delta}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}.$$

بعلاوه، با استفاده از (۲.۳) می‌توان $\partial\eta/\partial x$ را بر حسب y و متغیرهای پارامتری $\hat{x}$ نوشت. بنابراین معادله به شکل

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\delta_\text{۱}\big(\hat{x},y,v,\frac{\partial v}{\partial y}\big),$$

بر حسب مشتقات مرتبه‌ی اول هر تابع G–ناوردا مانند u نسبت به x بر حسب y و v، مشتقات مرتبه‌ی اول v نسبت به y به همراه متغیرهای پارامتری $\hat{x}$ بدست خواهد آمد. با ادامه مشتق‌گیری و استفاده از قاعده زنجیره‌ی مشتق و با توجه به (۲.۳) به فرمول کلی

$$u^{(n)}=\delta^{(n)}\big(\hat{x},y,v^{(n)}\big),$$

می‌رسیم که بر حسب تمام مشتقات u تا مرتبه‌ی n–ام نسبت به x بر حسب y و مشتقات v بر حسب y تا مرتبه‌ی n–ام و پارامترهای $\hat{x}$ می‌باشد.

مثال ۳.۱.۱. گروه تجانس یک‌-پارامتری

$$(x,t,u) \longmapsto (\lambda x, \lambda t, u), \qquad \lambda \in \mathbb{R}^+,$$

را روی $E = X \times U$ در نظر می‌گیریم. این عمل روی زیرمجموعه‌ی $O = \{t : t > ۰\}$ منظم است و $y = x/t$ و $v = u$ دو ناوردای بنیادی آن می‌باشند. اگر v را تابعی از y در نظر بگیریم، می‌توان فرمولی برای مشتقات u نسبت به x و t را بر حسب y و v و مشتقاتی از v نسبت به y همراه با متغیر پارامتری بیان کرد، که این پارامتر را می‌توان همان متغیر t در نظر گرفت. با استفاده از قاعده زنجیره‌ی مشتق اگر $u = v = v(y) = v(x/t)$ آنگاه

$$u_x = u_y y_x = \frac{۱}{t} v_y, \qquad u_t = u_y y_t = -\frac{x}{t^۲} v_y = -\frac{y}{t} v_y.$$

و به همین ترتیب برای مشتقات مراتب بالاتر داریم:

$$\begin{aligned}
u_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v_y}{t}\right) = \frac{۱}{t}\frac{\partial}{\partial x}(v_y) = \frac{۱}{t^۲} v_{yy},\\
u_{xt} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{v_y}{t}\right) = \frac{۱}{t}\frac{\partial}{\partial t}(v_y) - \frac{۱}{t^۲}(v_y)\\
&= -\frac{x}{t^۲} v_{yy} - \frac{۱}{t^۲} v_y\\
&= -\frac{۱}{t^۲}\left(y v_{yy} + v_y\right),\\
v_{tt} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{y}{t} v_y\right) = \frac{۱}{t^۲} y v_y - \frac{۱}{t}\left(-\frac{x}{t^۲} v_y - \frac{x}{t^۲} y v_{yy}\right)\\
&= \frac{۱}{t^۲} y v_y + \frac{۱}{t^۲} y v_y + \frac{y^۲}{t^۲} v_{yy}\\
&= \frac{۱}{t^۲}\left(۲ y v_y + y^۲ v_{yy}\right).
\end{aligned}$$

با جایگذاری مشتقات به دست آمده در دستگاه معادلات می‌توان مرتبه‌ی دستگاه را کاهش داد. بنابراین اگر

$$\Delta_\nu\big(x, u^{(n)}\big) = ۰, \qquad \nu = ۱, \ldots, l,$$

دستگاه معادلات جزئی باشد و $v = h(y)$ تابع $G-$ناوردای بدست آمده باشد، آنگاه دستگاه معادلات جزئی

$$\big(\Delta/G\big)_\nu\big(y, v^{(n)}\big) = ۰, \qquad \nu = ۱, \ldots, l,$$

را دستگاه کاهش یافته می‌نامیم.

۲.۳ مثال‌های از جواب‌های گروه-ناوردا

مثال ۱.۲.۳. معادله‌ی موج خطی $u_{tt} - u_{xx} = ۰$ را در نظر می‌گیریم. این معادله تحت تبدیل تجانس مثال ۱.۱.۳ ناوردا است. با قرار دادن مقادیر u_{tt} و u_{xx} بدست آمده در مثال ۱.۱.۳ داریم:

$$\frac{۱}{t^۲}(y^۲ v_{yy} + ۲ y v_y - v_{yy}) = ۰.$$

این معادله هم‌ارز با معادله‌ی

$$(y^۲ - ۱) v_{yy} + ۲ y v_y = ۰,$$

است، که یک معادله‌ی دیفرانسیل معمولی خطی مرتبه‌ی دوم است. لذا با حل آن به جواب

$$v = c \ln |\frac{y - t}{y + ۱}| + c',$$

می‌رسیم، که در آن c و c' ثابت‌های دلخواه هستند. حال با جایگذاری $y = x/t$ و $u = v$ در معادله‌ی بالا تابع

$$u = c \ln |\frac{x - t}{x + t}| + c',$$

بدست می‌آید، که جواب ناوردای برای معادله‌ی موج می‌باشد.

مثال ۲.۲.۳. تقارن‌های معادله‌ی گرما

$$u_t = u_{xx},$$

در مثال ۲۴.۳.۲ بررسی شد. این معادله دارای یک تقارن ۶-بعدی و نیز یک تقارن بینهایت بعدی است. می‌خواهیم معادله‌ی گرما را نسبت به مولدهای آن کاهش دهیم.

(الف) تبدیل

$$(x, t, u) \longmapsto (x + c\varepsilon, t + \varepsilon, u), \qquad \varepsilon \in \mathbb{R},$$

از معادله‌ی گرما را در نظر می‌گیریم. این تبدیل دارای مولد بینهایت کوچک $\partial_t + c\partial_x$ می‌باشد. که در آن c یک ثابت و نشان دهنده سرعت انتشار موج می‌باشد. محاسبه نشان می‌دهد که

$$y = x - ct, \qquad v = u, \tag{۶.۳}$$

دو ناوردای بنیادی این تبدیل می‌باشند. حال با استفاده از قاعده زنجیره‌ی داریم:

$$u_t = -c v_y, \qquad u_x = v_y, \qquad u_{xx} = v_{yy},$$

باجایگذاری در معادله‌ی گرما به معادله‌ی کاهش یافته‌ی

$$-c v_y = v_{yy},$$

می‌رسیم، که یک معادله‌ی خطی مرتبه‌ی اول است. با حل این معادله جواب

$$v = ke^{-cy} + l, \tag{۷.۳}$$

بدست می‌آید. با قرار دادن (۶.۳) در (۷.۳) داریم:

$$u = ke^{-c(x-ct)} + l,$$

که یک جواب معادله‌ی گرما است.

(ب) ترکیب خطی

$$V_۴ + aV_۳ = x\partial_x + ۲t\partial_t + ۲au\partial_u, \qquad a \in \mathbb{R},$$

از تقارن‌های معادله‌ی گرما را در نظر می‌گیریم. این تقارن دارای گروه تجانس

$$(x,t,u) \longmapsto (\lambda x, \lambda^۲ t, \lambda^{۲a} u), \qquad \lambda \in \mathbb{R}^+,$$

می‌باشد. دو ناوردای بنیادی این تبدیل

$$y = \frac{x}{\sqrt{t}}, \qquad v = \frac{۱}{t^a}u,$$

می‌باشد. با استفاده از قاعده زنجیره‌ی اگر $u = t^a v = t^a v(y) = t^a v(x/\sqrt{t})$ داریم:

$$\begin{aligned}
u_x &= u_y y_x = t^a \frac{۱}{\sqrt{t}} v_y = t^{a-\frac{۱}{۲}} v_y,\\
u_{xx} &= (u_x)_y y_x = t^{a-\frac{۱}{۲}} v_{yy} \frac{۱}{\sqrt{t}} = t^{a-۱} v_{yy},\\
u_t &= u_y y_t = at^{a-۱}v + t^{a-۱}v_t = at^{a-۱}v + t^{a-۱}\frac{x}{۲\sqrt{t}} v_y = t^{a-۱}\left(av - \frac{۱}{۲}yv_y\right).
\end{aligned}$$

با جایگذاری این مشتقات در معادله‌ی گرما به معادله‌ی کاهش یافته‌ی

$$t^{a-۱}v_{yy} = t^{a-۱}\left(-\frac{۱}{۲}yv_y + av\right),$$

می‌رسیم. یا به طور معادل

$$v_{yy} + \frac{۱}{۲}yv_y - av = ۰,$$

که یک معادله‌ی غیر خطی مرتبه‌ی دوم است. جواب‌های این معادله توابع استوانه‌ی سهمی‌گون می‌باشد. در واقع اگر

$$w = v\exp\left(\frac{۱}{۸}y^۲\right),$$

باشد. آنگاه w در معادله‌ی دیفرانسیل

$$w_{yy} = \left[(a+\frac{۱}{۴}) + \frac{۱}{۱۶}y^۲\right]w,$$

صدق می‌کند. جواب عمومی این معادله

$$w(y) = kU\big(۲a + \frac{۱}{۲}, \frac{y}{\sqrt{۲}}\big) + \tilde{k}V\big(۲a + \frac{۱}{۲}, \frac{y}{\sqrt{۲}}\big),$$

می‌باشد، که در آن $U(b,z)$ و $V(b,z)$ توابع استوانه‌ی سهمی‌گون هستند. بنابراین جواب ناوردای اسکالر عمومی معادله‌ی گرما به شکل زیر می‌باشد.

$$u(x,t) = t^a e^{-\frac{x^۲}{۸t}}\Big[kU\big(۲a + \frac{۱}{۲}, \frac{x}{\sqrt{۲t}}\big) + \tilde{k}V\big(۲a + \frac{۱}{۲}, \frac{x}{\sqrt{۲t}}\big)\Big].$$

(پ) گروه یک پارامتری حرکت گالیله‌ی به وسیله‌ی مولد بینهایت کوچک

$$V_۵ = ۲t\partial_x - xu\partial_u,$$

تولید می‌شود. به ازای $t > ۰$ دارای دو ناوردای بنیادی

$$y = t, \qquad v = u\exp\left(\frac{x^۲}{۴t}\right), \tag{۸.۳}$$

است. بنابراین

$$u_t = \left(v_y + \frac{x^۲}{۴t^۲}v\right)e^{-\frac{x^۲}{۴t}}, \qquad u_{xx} = \left(\frac{x^۲}{۴t} - \frac{۱}{۲t}\right)ve^{-\frac{x^۲}{۴t}},$$

با جایگذاری در معادله‌ی گرما به یک معادله‌ی کاهش یافته می‌رسیم که با یک بار انتگرال‌گیری از آن داریم:

$$۲yv_y + v = ۰,$$

این معادله یک معادله‌ی غیر خطی مرتبه‌ی اول است. با حل این معادله جواب

$$v = \frac{k}{\sqrt{y}}, \tag{۹.۳}$$

حاصل می‌شود. بنابراین با جایگذاری (۸.۳) در (۹.۳) جواب ناوردای گالیله‌ی عمومی به صورت زیر می‌باشد.

$$u(x) = \frac{k}{\sqrt{t}}e^{-\frac{x^۲}{۴t}}.$$

مثال ۳.۲.۳. معادله‌ی KdV مثال ۲۵.۳.۲ را در نظر می‌گیریم. همانطور که مشاهده کردیم این معادله یک معادله‌ی PDE با ضابطه‌ی

$$u_t + u_{xxx} + uu_x = ۰,$$

است، که دارای یک گروه تقارنی ۴-بعدی است. یکی از این تقارن‌ها، مولد

$$V = x\partial_x + ۳t\partial_t - ۲u\partial_u.$$

می‌باشد. تبدیل نظیر این مولد،

$$(x,t,u)\longmapsto(\lambda x,\lambda^{۳}t,\lambda^{-۲}u),$$

می‌باشد. به ازای $t>۰$ این تبدیل دارای دو ناوردای

$$y=t^{-\frac{۱}{۳}}x,\qquad v=t^{\frac{۲}{۳}}u,$$

است. با استفاده از قاعده زنجیره‌ی مشتق داریم:

$$u_x=\frac{۱}{t}v_y,\qquad u_{xxx}=t^{-\frac{۵}{۳}}v_{yyy},\qquad u_t=-\frac{۱}{۳}t^{-\frac{۵}{۳}}(yv_y+۲v).$$

بنابراین معادله‌ی KdV به معادله‌ی ODE مرتبه‌ی سوم زیر کاهش می‌آبد.

$$v_{yyy}+vv_y-\frac{۱}{۳}yv_y-\frac{۲}{۳}v=۰.$$

حل این معادله با روش‌های ممکن امکان پذیر نیست. ولی تحت تبدیل

$$v=w_y-\frac{۱}{۶}w^{۲},$$

معادله‌ی فوق به معادله‌ی

$$w_{yyy}-\frac{۱}{۶}w^{۲}w_y-\frac{۱}{۳}yw_y-\frac{۱}{۳}w=۰,$$

تبدیل می‌شود. با یک بار انتگرال‌گیری به معادله‌ی

$$w_{yy}-\frac{۱}{۱۸}w^{۳}-\frac{۱}{۳}yw-k=۰,$$

کاهش می‌آبد که قابل حل است و حل آن جواب‌های ناوردای نظیر این تبدیل را می‌سازد.

مثال ۴.۲.۳. به عنوان آخرین مثال دستگاه معادلات دیفرانسیلی (۳۰.۲) در مثال ۲.۴.۲ را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم

$$f(u)=\alpha u,\quad g(c,u)=ue^{-c},$$

باشد. در این صورت با جایگذاری در دستگاه (۳۰.۲) داریم:

$$\begin{cases}u_t=\alpha u-(uc_x)_x,\\ c_t=-ue^{-c},\end{cases}\tag{۱۰.۳}$$

مولد بینهایت کوچک

$$V=\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial c}+u\frac{\partial}{\partial u},$$

یک تقارن برای دستگاه (۱۰.۳) می‌باشد [۱۵].
تبدیل نظیر این مولد

$$(t, x, u, c) \longmapsto (\varepsilon + t, x, ue^{\varepsilon}, \varepsilon + c),$$

می‌باشد. محاسبات نشان می‌دهد که این تبدیل دارای سه ناوردای زیر است.

$$x, \quad y = c - t, \quad v = ue^{-t}.$$

بنابراین جواب‌های ناوردا به شکل

$$c = t + y(x), \quad u = v(x)e^{t}, \tag{۱۱.۳}$$

می‌باشد. با استفاده از قاعده زنجیره‌ی مشتق داریم:

$$u_t = v(x)e^t, \quad u_x = v'(x)e^t, \quad c_t = ۱, \quad c_x = y'(x), \quad c_{xx} = y''(x).$$

حال با جایگذاری این مشتقات در معادلات (۱۱.۳) داریم:

$$v(x)e^t = \alpha v(x)e^t - y'(x)v'(x)e^t - v(x)y''(x)e^t,$$
$$۱ = -v(x)e^{-y(x)}.$$

یا به عبارت دیگر:

$$(۱ - \alpha)v(x) + y'(x)v'(x) + v(x)y''(x) = ۰, \tag{۱۲.۳}$$
$$v(x) = -e^{y(x)}. \tag{۱۳.۳}$$

با جایگذاری معادله‌ی (۱۳.۳) در معادله‌ی (۱۲.۳) به معادله‌ی کاهش یافته‌ی

$$y''(x) + (y'(x))^۲ + (۱ - \alpha) = ۰,$$

می‌رسیم، که یک معادله‌ی دیفرانسیل معمولی غیرخطی از مرتبه‌ی دوم است. با حل این معادله جواب‌های زیر به دست می‌آیند.

- برای $\alpha = ۰$،

$$y(x) = \ln |A_۲(x + A_۱)|, \tag{۱۴.۳}$$

- برای $\alpha > ۱$،

$$y(x) = x\sqrt{\alpha - ۱} + \ln \left| A_۲\left(۱ \pm e^{۲\sqrt{\alpha-۱}(A_۱ - x)} \right) \right|, \tag{۱۵.۳}$$

- برای $\alpha < ۱$،

$$y(x) = \ln\left|A_{۲}\cos\left(\sqrt{۱-\alpha}(A_{۱}-x)\right)\right|. \qquad (۱۶.۳)$$

$A_{۱}$ و $A_{۲}$ ثابت‌های دلخواه هستند. با جایگذاری جواب‌های که برای $y(x)$ به دست آمده در معادله‌ی (۱۳.۳) جواب‌های $v(x)$ نیز بدست می‌آیند. بنابراین با جایگذاری این جواب‌ها در معادلات (۱۱.۳) جواب‌های دستگاه (۱۰.۳) عبارت‌اند از:

- برای $\alpha = ۱$،

$$c(t,x) = t + \ln|A_{۲}(x + A_{۱})|,$$
$$u(t,x) = -e^{t}|A_{۲}(x + A_{۱})|.$$

- برای $\alpha > ۱$،

$$c(t,x) = t + x\sqrt{\alpha-۱} + \ln\left|A_{۲}\left(۱ \pm e^{۲\sqrt{\alpha-۱}(A_{۱}-x)}\right)\right|,$$
$$u(t,x) = -e^{t+x\sqrt{\alpha-۱}}\left|A_{۲}\left(۱ \pm e^{۲\sqrt{\alpha-۱}(A_{۱}-x)}\right)\right|.$$

- برای $\alpha < ۱$،

$$c(t,x) = t + \ln\left|A_{۲}\cos\left(\sqrt{۱-\alpha}(A_{۱}-x)\right)\right|,$$
$$u(t,x) = -e^{t}\left|A_{۲}\cos\left(\sqrt{۱-\alpha}(A_{۱}-x)\right)\right|.$$

فصل ۴

بررسی گروهی معادلات سه-بعدی کودریاشف-سینلشیکوف

۱.۴ مقدمه

یکی از کاربردهای معادلات دیفرانسیل جزئی در مکانیک سیالات، توصیف امواج در یک مایع حباب‌دار (مایعات مخلوط شده با یک نوع گاز) می‌باشد [۱۸]، که با استفاده از معادلات سه-بعدی کودریاشف-سینلشیکوف[۱] انتشار امواج در یک نوع مایع مورد بررسی و تحلیل قرار می‌گیرد [۲۳، ۱۲، ۲۱]. در سال ۲۰۱۰ کودریاشف و سینلشیکوف معادله‌ی دیفرانسیل غیر خطی

$$u_t + \alpha u u_x + u_{xxx} - (u u_{xx})_x - \beta u_x u_{xx} = 0, \tag{۱.۴}$$

را ارائه دادند. در این معادله u تابع چگالی و نمونه‌ی انتقال گرما و چسبندگی مایع است. همچنین α و β اعداد حقیقی هستند. به معادله‌ی (۱.۴) معادله‌ی کودریاشف-سینلشیکوف گفته می‌شود. این معادله برای توصیف فشار امواج در ترکیبی از مایع و حباب‌های گازی درون یک ظرف با توجه به میزان چسبندگی مایع و انتقال گرما بکار برده می‌شود. معادله‌ی (۱.۴) را می‌توان به معادله‌ی KdV، $BKdV$[۲] و مشابه معادله‌ی کاماس-هولم[۳]، اما نه دقیقاً خود معادله، تعمیم داد. پژوهشگران زیادی معادله‌ی (۱.۴) را به روش‌های گوناگون مورد مطالعه قرار داده‌اند. در حالت کلی‌تر معادله‌ی سه-بعدی کودریاشف-سینلشیکوف به صورت

$$(u_t + u u_x + u_{xxx} - \chi u_{xx})_x + \frac{1}{2}(u_{yy} + u_{zz}) = 0, \tag{۲.۴}$$

مطرح می‌شود [۱۴]. که برای توصیف ویژگی‌های فیزیکی امواج غیر خطی در یک مایع حباب‌دار بکار برده می‌شود. u نشان دهنده چگالی مایع حباب‌دار، x و y و z مختصات فضا، t مختصات زمان، کمیت

[۱] Kudryashov-Sinelshchikov
[۲] Korteweg de vries-Burger
[۳] Camassa-Holm

اسکالر حقیقی χ نشان دهنده چسبندگی مایع حباب‌دار و اندیس‌های پایین نشان دهنده مشتقات جزئی هستند.

۲.۴ تقارن‌های معادله‌ی سه-بعدی کودریاشف-سینلشیکوف

معادله‌ی (۲.۴) یک معادله‌ی دیفرانسیل PDE غیر خطی مرتبه چهار است. این معادله دارای چهار متغیر مستقل (x, y, z, t) و یک متغیر وابسته u است. بنابراین روی فضای کامل $E = X \times U \simeq \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}$ تعریف می‌شود. بعد فضای جت روی E برابر است با:

$$\dim J^4 = p + qp^{(n)} = p + q\binom{p+n}{n} = 74.$$

همچنین فضای جت به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$J^4 = \Big\{ \big(t, x, y, z; u; u_t, u_x, u_y, u_z; u_{tt}, u_{tx}, u_{ty}, u_{tz}, u_{xx}, u_{xy}, \ldots, u_{zzzz}\big) \Big\} \simeq \mathbb{R}^{74}.$$

مشتقات کامل روی چارت (t, x, y, z, u) به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\begin{aligned}
D_t &= \frac{\partial}{\partial t} + u_t \frac{\partial}{\partial u} + u_{tt} \frac{\partial}{\partial u_t} + u_{tx} \frac{\partial}{\partial u_x} + u_{ty} \frac{\partial}{\partial u_y} + u_{tz} \frac{\partial}{\partial u_z} + \cdots + u_{tzzzz} \frac{\partial}{\partial u_{zzzz}}, \\
D_x &= \frac{\partial}{\partial x} + u_x \frac{\partial}{\partial u} + u_{tx} \frac{\partial}{\partial u_t} + u_{xx} \frac{\partial}{\partial u_x} + u_{xy} \frac{\partial}{\partial u_y} + u_{xz} \frac{\partial}{\partial u_z} + \cdots + u_{xzzzz} \frac{\partial}{\partial u_{zzzz}}, \\
D_y &= \frac{\partial}{\partial y} + u_y \frac{\partial}{\partial u} + u_{ty} \frac{\partial}{\partial u_t} + u_{xy} \frac{\partial}{\partial u_x} + u_{yy} \frac{\partial}{\partial u_y} + u_{yz} \frac{\partial}{\partial u_z} + \cdots + u_{yzzzz} \frac{\partial}{\partial u_{zzzz}}, \\
D_z &= \frac{\partial}{\partial z} + u_z \frac{\partial}{\partial u} + u_{tz} \frac{\partial}{\partial u_t} + u_{xz} \frac{\partial}{\partial u_x} + u_{yz} \frac{\partial}{\partial u_y} + u_{zz} \frac{\partial}{\partial u_z} + \cdots + u_{zzzzz} \frac{\partial}{\partial u_{zzzz}}.
\end{aligned}$$

برای پیدا کردن تقارن‌های معادله‌ی (۲.۴) ابتدا یک گروه لی یک-پارامتری از تبدیلات بینهایت کوچک

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= x + \varepsilon\xi(x, y, z, t, u) + o(\varepsilon^2), \\
\bar{y} &= y + \varepsilon\eta(x, y, z, t, u) + o(\varepsilon^2), \\
\bar{z} &= z + \varepsilon\mu(x, y, z, t, u) + o(\varepsilon^2), \\
\bar{t} &= t + \varepsilon\tau(x, y, z, t, u) + o(\varepsilon^2), \\
\bar{u} &= u + \varepsilon\phi(x, y, z, t, u) + o(\varepsilon^2),
\end{aligned}$$

با پارامتر ۱ $>> \varepsilon$ در نظر می‌گیریم. میدان برداری متناظر با گروه تبدیلات بالا که روی E تعریف می‌شود به شکل

$$V = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y} + \mu \frac{\partial}{\partial z} + \tau \frac{\partial}{\partial t} + \phi \frac{\partial}{\partial u}, \tag{۳.۴}$$

می‌باشد. پس لازم است میدان برداری V را تا مرتبه چهارم امتداد دهیم. مطابق با فرمول (۱۳.۲) امتداد مرتبه‌ی چهارم V برابر است با:

$$\begin{aligned}
V^{(4)} = V &+ \phi^{x}\frac{\partial}{\partial u_x} + \phi^{y}\frac{\partial}{\partial u_y} + \phi^{z}\frac{\partial}{\partial u_z} + \phi^{t}\frac{\partial}{\partial u_t} + \phi^{xx}\frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \phi^{xy}\frac{\partial}{\partial u_{xy}} + \phi^{xz}\frac{\partial}{\partial u_{xz}} \\
&+ \phi^{xt}\frac{\partial}{\partial u_{xt}} + \phi^{yy}\frac{\partial}{\partial u_{yy}} + \phi^{yz}\frac{\partial}{\partial u_{yz}} + \phi^{yt}\frac{\partial}{\partial u_{yt}} + \phi^{zz}\frac{\partial}{\partial u_{zz}} + \phi^{zt}\frac{\partial}{\partial u_{zt}} + \phi^{tt}\frac{\partial}{\partial u_{tt}} \\
&+ \phi^{xxx}\frac{\partial}{\partial u_{xxx}} + \phi^{xxy}\frac{\partial}{\partial u_{xxy}} + \phi^{xxz}\frac{\partial}{\partial u_{xxz}} + \phi^{xxt}\frac{\partial}{\partial u_{xxt}} + \phi^{xyy}\frac{\partial}{\partial u_{xyy}} + \phi^{xzz}\frac{\partial}{\partial u_{xzz}} \\
&+ \phi^{xtt}\frac{\partial}{\partial u_{xtt}} + \phi^{xyz}\frac{\partial}{\partial u_{xyz}} + \phi^{xyt}\frac{\partial}{\partial u_{xyt}} + \phi^{xzt}\frac{\partial}{\partial u_{xzt}} + \phi^{yyy}\frac{\partial}{\partial u_{yyy}} + \phi^{yyz}\frac{\partial}{\partial u_{yyz}} \\
&+ \phi^{yyt}\frac{\partial}{\partial u_{yyt}} + \phi^{yzz}\frac{\partial}{\partial u_{yzz}} + \phi^{ytt}\frac{\partial}{\partial u_{ytt}} + \phi^{yzt}\frac{\partial}{\partial u_{yzt}} + \phi^{zzz}\frac{\partial}{\partial u_{zzz}} + \phi^{zzt}\frac{\partial}{\partial u_{zzt}} \\
&+ \phi^{ztt}\frac{\partial}{\partial u_{ztt}} + \phi^{ttt}\frac{\partial}{\partial u_{ttt}} + \phi^{xxxx}\frac{\partial}{\partial u_{xxxx}} + \phi^{xxxy}\frac{\partial}{\partial u_{xxxy}} + \phi^{xxxz}\frac{\partial}{\partial u_{xxxz}} \\
&+ \phi^{xxxt}\frac{\partial}{\partial u_{xxxt}} + \phi^{xxyy}\frac{\partial}{\partial u_{xxyy}} + \phi^{xxzz}\frac{\partial}{\partial u_{xxzz}} + \phi^{xxtt}\frac{\partial}{\partial u_{xxtt}} + \phi^{xxyz}\frac{\partial}{\partial u_{xxyz}} \\
&+ \phi^{xxyt}\frac{\partial}{\partial u_{xxyt}} + \phi^{xxzt}\frac{\partial}{\partial u_{xxzt}} + \phi^{xyyy}\frac{\partial}{\partial u_{xyyy}} + \phi^{xzzz}\frac{\partial}{\partial u_{xzzz}} + \phi^{xttt}\frac{\partial}{\partial u_{xttt}} \\
&+ \phi^{xyyz}\frac{\partial}{\partial u_{xyyz}} + \phi^{xyyt}\frac{\partial}{\partial u_{xyyt}} + \phi^{xyzz}\frac{\partial}{\partial u_{xyzz}} + \phi^{xytt}\frac{\partial}{\partial u_{xytt}} + \phi^{xztt}\frac{\partial}{\partial u_{xzzt}} \\
&+ \phi^{xztt}\frac{\partial}{\partial u_{xztt}} + \phi^{xyzt}\frac{\partial}{\partial u_{xyzt}} + \phi^{yyyy}\frac{\partial}{\partial u_{yyyy}} + \phi^{yyyz}\frac{\partial}{\partial u_{yyyz}} + \phi^{yyyt}\frac{\partial}{\partial u_{yyyt}} \\
&+ \phi^{yyzz}\frac{\partial}{\partial u_{yyzz}} + \phi^{yytt}\frac{\partial}{\partial u_{yytt}} + \phi^{yyzt}\frac{\partial}{\partial u_{yyzt}} + \phi^{yzzz}\frac{\partial}{\partial u_{yzzz}} + \phi^{yttt}\frac{\partial}{\partial u_{yttt}} \\
&+ \phi^{yzzt}\frac{\partial}{\partial u_{yzzt}} + \phi^{yztt}\frac{\partial}{\partial u_{yztt}} + \phi^{zzzz}\frac{\partial}{\partial u_{zzzz}} + \phi^{zzzt}\frac{\partial}{\partial u_{zzzt}} + \phi^{zztt}\frac{\partial}{\partial u_{zztt}} \\
&+ \phi^{zttt}\frac{\partial}{\partial u_{zttt}} + \phi^{tttt}\frac{\partial}{\partial u_{tttt}}.
\end{aligned}$$

با استفاده از قضیه ۱۴.۳.۲، $V^{(4)}$ را بر معادله‌ی (۲.۴) اثر می‌دهیم. بنابراین

$$u_{xx}\phi + 2u_x\phi^{x} + \phi^{xt} + u\phi^{xx} + \frac{1}{2}(\phi^{yy} + \phi^{zz}) - \chi\phi^{xxx} + \phi^{xxxx} = 0. \qquad (4.4)$$

توابع ϕ، ϕ^x، ϕ^{xt}، ϕ^{xx}، ϕ^{yy}، ϕ^{zz}، ϕ^{xxx} و ϕ^{xxxx} ضرایب $V^{(4)}$ می‌باشند. به کمک فرمول (۱۴.۲) و اینکه مشخصه‌ی میدان برداری V،

$$Q = \phi - \xi u_x - \eta u_y - \mu u_z - \tau u_t,$$

است، این ضرایب را به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned}
\phi^{x} &= D_x\phi - u_xD_x\xi - u_yD_x\eta - u_zD_x\mu - u_tD_x\tau,\\
\phi^{xt} &= D_tD_x\phi - u_{xt}D_x\xi - u_xD_tD_x\xi - u_{xx}D_t\xi - u_{yt}D_x\eta - u_yD_tD_x\eta - u_{xy}D_t\eta\\
&\quad - u_{zt}D_x\mu - u_zD_tD_x\mu - u_{xz}D_t\mu - u_{tt}D_x\tau - u_tD_tD_x\tau - u_{xt}D_t\tau,\\
\phi^{xx} &= D_x^{2}\phi - 2u_{xx}D_x\xi - u_xD_x^{2}\xi - 2u_{xy}D_x\eta - u_yD_x^{2}\eta - 2u_{xz}D_x\mu - u_zD_x^{2}\mu\\
&\quad - 2u_{xt}D_x\tau - u_tD_x^{2}\tau,\\
\phi^{xxx} &= D_x^{3}\phi - 3u_{xxx}D_x\xi - 3u_{xx}D_x^{2}\xi - u_xD_x^{3}\xi - 3u_{xxy}D_x\eta - 3u_{xy}D_x^{2}\eta - u_yD_x^{3}\eta\\
&\quad - 3u_{xxz}D_x\mu - 3u_{xz}D_x^{2}\mu - u_zD_x^{3}\mu - 3u_{xxt}D_x\tau - 3u_{xt}D_x^{3}\tau - u_tD_x^{3}\mu,\\
\phi^{xxxx} &= D_x^{4}\phi - 4u_{xxxx}D_x\xi - 6u_{xxx}D_x^{2}\xi - 4u_{xx}D_x^{3}\xi - u_xD_x^{4}\tau - 4u_{xxxy}D_x\eta\\
&\quad - 6u_{xxy}D_x^{2}\eta - 4u_{xy}D_x^{3}\eta - u_yD_x^{4}\eta - 4u_{xxxz}D_x\mu - 6u_{xxz}D_x^{2}\mu\\
&\quad - 4u_{xz}D_x^{3}\mu - u_zD_x^{4}\mu - 4u_{xxxt}D_x\tau - 6u_{xxt}D_x^{2}\tau - 4u_{xt}D_x^{3}\tau - u_tD_x^{4}\tau,\\
\phi^{y} &= D_y\phi - u_xD_y\xi - u_yD_y\eta - u_zD_y\mu - u_tD_y\tau,\\
\phi^{yy} &= D_y^{2}\phi - 2u_{xy}D_y\xi - u_xD_y^{2}\xi - 2u_{yy}D_y\eta - u_yD_y^{2}\eta - 2u_{yz}D_y\mu\\
&\quad - u_zD_y^{2}\mu - 2u_{yt}D_y\tau - u_tD_y^{2}\tau,\\
\phi^{z} &= D_z\phi - u_xD_z\xi - u_yD_z\eta - u_zD_z\mu - u_tD_z\tau,\\
\phi^{zz} &= D_z^{2}\phi - 2u_{xz}D_z\xi - u_xD_z^{2}\xi - 2u_{yz}D_z\eta - u_yD_z^{2}\eta - 2u_{zz}D_z\mu\\
&\quad - u_zD_z^{2}\mu - 2u_{zt}D_z\tau - u_tD_z^{2}\tau,
\end{aligned}$$

با جایگذاری مقادیری که برای ضرایب $V^{(4)}$ به دست آمده در شرایط ناوردایی، (۴.۴)، و برابر قرار دادن ضرایب یک جمله‌ی‌های مختلف یک دستگاه PDE برای حالت $\chi = 0$ و یک دستگاه PDE برای حالت $\chi \neq 0$ به دست می‌آید. با حل هر یک از این حالت‌ها ξ، η، μ، τ و ϕ بدست می‌آید.

حالت ۱:

فرض کنیم $\chi = 0$، بنابراین معادله‌ی (۲.۴) به معادله‌ی

$$u_{xt} + u_x^{2} + uu_{xx} + u_{xxxx} + \frac{1}{2}(u_{yy} + u_{zz}) = 0, \tag{۵.۴}$$

تبدیل می‌شود. با حل معادله‌ی (۵.۴) به دستگاه معادلات تعیین کنند زیر می‌رسیم.

$$\begin{array}{lll} \xi = -\frac{1}{2}c_1x - F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t), & \eta = -c_1y - c_3z + F_1(t), & \\ \mu = -c_1z + c_3y + F_2(t), & \phi = c_1u, & \tau = -\frac{3}{2}c_1t + c_2. \end{array} \tag{۶.۴}$$

توابع $F_1(t)$، $F_2(t)$ و $F_3(t)$ توابعی دلخواه از t و c_1، c_2 و c_3 ثابت‌های دلخواه هستند. با استفاده از روش تحلیلی تقارنی لی مولدهای بینهایت کوچک معادله‌ی (۵.۴) را بدست می‌آوریم. با جایگذاری دستگاه معادلات تعیین کننده در میدان برداری V داریم:

$$\begin{aligned}
V &= \Big(-\frac{1}{2}c_1x - F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Big)\frac{\partial}{\partial x} + \Big(-c_1y - c_3z + F_1(t)\Big)\frac{\partial}{\partial y}\\
&\quad + \Big(-c_1z + c_3y + F_2(t)\Big)\frac{\partial}{\partial z} + \big(c_1u\big)\frac{\partial}{\partial u} + \Big(-\frac{3}{2}c_1t + c_2\Big)\frac{\partial}{\partial t}\\
&= \Big(-\frac{1}{2}x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y} - z\frac{\partial}{\partial z} - \frac{3}{2}t\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial u}\Big)c_1 + c_2\frac{\partial}{\partial t} + \Big(-z\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial z}\Big)c_3\\
&\quad + \Big(-F_1'(t)y\frac{\partial}{\partial x} + F_1(t)\frac{\partial}{\partial y}\Big) + \Big(-F_2'(t)z\frac{\partial}{\partial x} + F_2(t)\frac{\partial}{\partial z}\Big) + F_3(t)\frac{\partial}{\partial x}.
\end{aligned}$$

بنابراین مولدهای هر گروه لی یک-پارامتری از تقارن‌های لی نظیر معادله‌ی (۵.۴) عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned}
V_1(F_1) &= -F_1'y\frac{\partial}{\partial x} + F_1\frac{\partial}{\partial y},\\
V_2(F_2) &= -F_2'z\frac{\partial}{\partial x} + F_2\frac{\partial}{\partial z},\\
V_3(F_3) &= F_3\frac{\partial}{\partial x},\\
V_4 &= -\frac{1}{2}x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y} - z\frac{\partial}{\partial z} - \frac{3}{2}t\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial u},\\
V_5 &= -z\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial z},\\
V_6 &= \frac{\partial}{\partial t}.
\end{aligned}$$

پس $\{V_1(F_1), V_2(F_2), V_3(F_3), V_4, V_5, V_6\}$ یک جبر لی بینهایت بعدی برای گروه تقارن‌های معادله‌ی (۵.۴) می‌باشد، زیرا:

$$\begin{aligned}
[V_1, V_4] &= \frac{1}{2}F_1'y\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}F_1'xy\frac{\partial^2}{\partial x^2} + F_1'y^2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + F_1'yz\frac{\partial^2}{\partial x\partial z} + \frac{3}{2}F_1'yt\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}\\
&\quad - F_1'yu\frac{\partial^2}{\partial x\partial u} - \frac{1}{2}F_1x\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} - F_1\frac{\partial}{\partial y} - F_1y\frac{\partial^2}{\partial y^2} - F_1z\frac{\partial^2}{\partial z\partial y} - \frac{3}{2}F_1t\frac{\partial^2}{\partial y\partial t}\\
&\quad + F_1u\frac{\partial^2}{\partial y\partial u} - \frac{1}{2}F_1'xy\frac{\partial^2}{\partial x^2} - F_1'y^2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} - F_1'y\frac{\partial}{\partial x} - F_1'yz\frac{\partial^2}{\partial x\partial z} - \frac{3}{2}F_1''yt\frac{\partial}{\partial x}\\
&\quad - \frac{3}{2}F_1'ty\frac{\partial^2}{\partial t\partial x} + F_1'uy\frac{\partial^2}{\partial u\partial x} + \frac{1}{2}F_1x\frac{\partial^2}{\partial y\partial x} + F_1y\frac{\partial^2}{\partial y^2} + F_1z\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}\\
&= \big(-\frac{1}{2}F_1'y - \frac{3}{2}F_1''yt\big)\frac{\partial}{\partial x} + \big(-F_1 + \frac{3}{2}F_1't\big)\frac{\partial}{\partial y}\\
&= V_1\big(-F_1 + \frac{3}{2}F_1't\big).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[V_1, V_2] &= V_1(V_2) - V_2(V_1)\\
&= V_1(-F_2' z\frac{\partial}{\partial x} + F_2\frac{\partial}{\partial z}) - V_2(-F_1' y\frac{\partial}{\partial x} + F_1\frac{\partial}{\partial y})\\
&= F_1'F_2' yz\frac{\partial^2}{\partial x^2} - F_1F_2' z\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} - F_1'F_2 y\frac{\partial^2}{\partial x\partial z} + F_1F_2\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}\\
&\quad - F_1'F_2' zy\frac{\partial^2}{\partial x^2} + F_1'F_2 y\frac{\partial^2}{\partial z\partial x} + F_1F_2' z\frac{\partial^2}{\partial y\partial x} - F_1F_2\frac{\partial^2}{\partial z\partial y}\\
&= 0.\\
[V_1, V_5] &= F_1' yz\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} - F_1 z\frac{\partial^2}{\partial y^2} - F_1' y^2\frac{\partial^2}{\partial x\partial z} + F_1 y\frac{\partial^2}{\partial y\partial z} + F_1\frac{\partial}{\partial y}\\
&\quad - F_1' z\frac{\partial}{\partial x} - F_1' zy\frac{\partial^2}{\partial y\partial x} + F_1' y^2\frac{\partial^2}{\partial x\partial z} + F_1 z\frac{\partial^2}{\partial y^2} - F_1 y\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}\\
&= -F_1' z\frac{\partial}{\partial x} + F_1\frac{\partial}{\partial z}\\
&= V_2(F_1).
\end{aligned}$$

به طور مشابه کروشه‌های لی دیگر به دست می‌آیند. جدول لی زیر ارتباط بین کروشه‌های لی و مولدهای $\{V_1(F_1), V_2(F_2), V_3(F_3), V_4, V_5, V_6\}$ رانشان داده و ادعای جبر لی ساختن آن‌ها را اثبات می‌کند.

$[,]$	V_1	V_2	V_3
V_1	0	0	0
V_2	0	0	0
V_3	0	0	0
V_4	$-V_1(-F_1 + \frac{3}{2}tF_1')$	$-V_2(-F_2 + \frac{3}{2}tF_2')$	$-V_3(-\frac{1}{2}F_3 + \frac{3}{2}tF_3')$
V_5	$-V_2(F_1)$	$-V_3(yF_2')$	0
V_6	$V_1(F_1')$	$V_2(F_2')$	$V_3(F_3')$

$[,]$	V_4	V_5	V_6
V_1	$V_1(-F_1 + \frac{3}{2}tF_1')$	$V_2(F_1)$	$V_1(-F_1')$
V_2	$V_2(-F_2 + \frac{3}{2}tF_2')$	$V_3(yF_2')$	$V_2(-F_2')$
V_3	$V_3(-\frac{1}{2}F_3 + \frac{3}{2}tF_3')$	0	$V_3(-F_3')$
V_4	0	$-V_5$	$\frac{3}{2}V_6$
V_5	V_5	0	0
V_6	$-\frac{3}{2}V_6$	0	0

جدول ۱.۴: جدول لی تقارن‌های معادله‌ی (۵.۴)

حالت ۲:

فرض کنیم $\chi \neq 0$، بنابراین معادله‌ی (۲.۴) به معادله‌ی

$$u_{xt} + u_x^2 + uu_{xx} + u_{xxxx} - \chi u_{xxx} + \frac{1}{2}(u_{yy} + u_{zz}) = 0, \tag{۷.۴}$$

تبدیل می‌شود. با حل این معادله به دستگاه معادلات تعیین کنند زیر می‌رسیم.

$$\begin{aligned} &\xi = -F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t), \quad \eta = -c_2 z + F_1(t), \\ &\mu = c_2 y + F_2(t), \qquad \phi = 0, \quad \tau = c_1. \end{aligned} \tag{۸.۴}$$

توابع $F_1(t)$، $F_2(t)$ و $F_3(t)$ توابعی دلخواه از t، همچنین c_1 و c_2 ثابت‌های دلخواه هستند. با استفاده از روش تحلیلی تقارنی لی مولدهای بینهایت کوچک معادله‌ی (۷.۴) را بدست می‌آوریم. با جایگذاری دستگاه معادلات تعیین کننده در میدان برداری V داریم:

$$\begin{aligned} V &= (-F_1'y - F_2'z + F_3)\frac{\partial}{\partial x} + (-c_2 z + F_1)\frac{\partial}{\partial y} + (c_2 y + F_2)\frac{\partial}{\partial z} + c_1\frac{\partial}{\partial t} \\ &= c_1\frac{\partial}{\partial t} + c_2(-\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial z}) + (-F_1'y\frac{\partial}{\partial x} + F_1\frac{\partial}{\partial y}) + (-F_2'z\frac{\partial}{\partial x} + F_2\frac{\partial}{\partial z}) + F_3\frac{\partial}{\partial x}. \end{aligned}$$

بنابراین مولدهای هر گروه لی یک-پارامتری از تقارن‌های لی نظیر معادله‌ی (۷.۴) عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned} V_1(F_1) &= -F_1'y\frac{\partial}{\partial x} + F_1\frac{\partial}{\partial y}, \\ V_2(F_2) &= -F_2'z\frac{\partial}{\partial x} + F_2\frac{\partial}{\partial z}, \\ V_3(F_3) &= F_3\frac{\partial}{\partial x}, \\ V_4 &= -z\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial z}, \\ V_5 &= \frac{\partial}{\partial t}. \end{aligned}$$

پس $\{V_1(F_1), V_2(F_2), V_3(F_3), V_4, V_5\}$ یک جبر لی بینهایت بعدی برای گروه تقارن‌های معادله‌ی (۵.۴) می‌باشد. به طور مشابه حالت ۱ می‌توان کروشه‌ی لی بین این میدان‌های برداری را بدست آورد.

$[,]$	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5
V_1	0	0	0	$V_2(F_1)$	$-V_1(F_1)$
V_2	0	0	0	$-V_1(F_2')$	$-V_2(F_2)$
V_3	0	0	0	0	0
V_4	$-V_2(F_1)$	$V_1(F_1')$	0	0	0
V_5	$V_1(F_1)$	$V_2(F_2)$	0	0	0

جدول ۲.۴: جدول لی تقارن‌های معادله‌ی (۷.۴)

جدول لی این میدان‌های برداری ارتباط بین کروشه‌های لی این مولدها را نشان داده و ادعای جبر لی ساختن آن‌ها را اثبات می‌کند.

۳.۴ کاهش مرتبه‌ی معادله‌ی سه-بعدی کودریاشف-سینلشیکوف

در این بخش می‌خواهیم مرتبه‌ی معادله‌ی (۲.۴) را با استفاده از تحلیل تقارنی کاهش دهیم. به عبارت دیگر، تعداد متغیرهای معادله‌ی (۲.۴) را کاهش دهیم. برای این کار ابتدا معادلات مشخصه‌ی،

$$\frac{\mathrm{d}x}{\xi}=\frac{\mathrm{d}y}{\eta}=\frac{\mathrm{d}z}{\mu}=\frac{\mathrm{d}t}{\tau}=\frac{\mathrm{d}u}{\phi}, \tag{۹.۴}$$

متناظر با میدان برداری (۳.۴) را در نظر می‌گیریم. سپس با حل آن ناورداهای دیفرانسیلی را بدست می‌آوریم. در آخر با استفاده از قاعده زنجیره‌ی مشتق، مشتقات موجود در معادله‌ی (۲.۴) را بدست آورده و در معادله جایگذاری می‌کنیم تا معادله‌ی کاهش یافته به دست آید.

۱.۳.۴ کاهش مرتبه‌ی معادله‌ی کودریاشف-سینلشیکوف در حالت ۱ $(\chi=0)$

در این بخش کاهش مرتبه را برای حالت ۱ $(\chi=0)$، در برخی حالت‌ها که توابع F_1، F_2، و F_3 و ثابت‌های c_1، c_2 و c_3 موجود در دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی (۶.۴) صفر یا غیر صفر باشند انجام می‌دهیم. این کار منجر به ایجاد رابطه‌های متفاوت بین متغیرهای (X,Y,Z,U) و متغیرهای اصلی (x,y,z,u) می‌شود.

حالت ۱

فرض کنیم $c_2=F_3=1$ و $c_1=c_3=F_1=F_2=0$، با جایگذاری این مقادیر در دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی (۶.۴) ضرایب میدان برداری V به صورت زیر حاصل می‌شوند.

$$\xi=\tau=1, \quad \eta=\mu=\phi=0.$$

با قرار دادن این مقادیر در معادلات مشخصه‌ی (۹.۴) داریم:

$$\frac{\mathrm{d}x}{1}=\frac{\mathrm{d}t}{1}.$$

با حل این معادله‌ی دیفرانسیلی دو ناوردای زیر حاصل می‌شود.

$$u=U(X,y,z), \quad X=x-t. \tag{۱۰.۴}$$

با استفاده از قاعده زنجیره‌ی مشتق، مشتقات موجود در معادله‌ی (۵.۴) را بدست می‌آوریم. بنابراین

$$u_x=U_XX_x=U_X, \quad u_t=U_XX_t=-U_X, \quad u_{xt}=(U_X)_t=(U_X)_XX_t=-U_{XX},$$
$$u_{xx}=U_{XX}, \quad u_{yy}=U_{yy}, \quad u_{zz}=U_{zz}, \quad u_{xxxx}=U_{XXXX}.$$

با جایگذاری این مشتقات در معادله‌ی (۵.۴) به معادله‌ی

$$- U_{XX} + U_X^{۲} + UU_{XX} + U_{XXXX} + \frac{۱}{۲}(U_{yy} + U_{zz}) = ۰, \qquad (۱۱.۴)$$

تبدیل می‌شود. مشاهده می‌کنیم که تعداد متغیرهای مستقل از چهار به سه متغیر X، y و z کاهش پیدا کرده است.

حالت ۲

فرض کنیم $c_۱ = c_۲ = c_۳ = ۰$ و $F_۱ = a$، $F_۲ = b$ و $F_۳ = c$، با جایگذاری این مقادیر در دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی (۶.۴) ضرایب میدان برداری V به صورت زیر می‌باشند.

$$\xi = c, \quad \eta = a, \quad \mu = b, \quad \phi = \tau = ۰.$$

با قرار دادن این مقادیر در معادلات مشخصه‌ی (۹.۴) داریم:

$$\frac{\mathrm{d}x}{c} = \frac{\mathrm{d}y}{a} = \frac{\mathrm{d}z}{b}.$$

با حل این دستگاه ناورداهای زیر به دست می‌آید.

$$u = U(X, Y, t), \quad X = y - \frac{a}{c}x, \quad Y = z - \frac{b}{c}x.$$

با استفاده از قاعده زنجیره‌ی مشتق داریم:

$$\begin{aligned}
u_t &= U_t, \\
u_x &= U_X X_x + U_Y Y_x = -\frac{a}{c}U_X - \frac{b}{c}U_Y, \\
u_y &= U_X X_y + U_Y Y_y = U_X, \\
u_z &= U_X X_z + U_Y Y_z = U_Y, \\
u_{xt} &= (-\frac{a}{c}U_X - \frac{b}{c}U_Y)_t = -\frac{a}{c}U_{Xt} - \frac{b}{c}U_{Yt}, \\
u_{xx} &= (-\frac{a}{c}U_X - \frac{b}{c}U_Y)_X X_x + (-\frac{a}{c}U_X - \frac{b}{c}U_Y)_Y Y_x \\
&= a^{۲}c^{۲}U_{XX} + ۲\frac{ab}{c^{۲}}U_{XY} + \frac{b^{۲}}{c_{۲}}U_{YY}, \\
u_{yy} &= (U_X)_X X_y + (U_X)_Y Y_y = U_{XX}, \\
u_{zz} &= (U_Y)_X X_z + (U_Y)_Y Y_z = U_{YY},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{xxxx} &= ((\frac{a^۲}{c^۲}U_{XX} + ۲\frac{ab}{c^۲}U_{XY} + \frac{b^۲}{c_۲}U_{YY})_X X_x)_x \\
&+ ((\frac{a^۲}{c^۲}U_{XX} + ۲\frac{ab}{c^۲}U_{XY} + \frac{b^۲}{c_۲}U_{YY})_Y Y_x)_x \\
&= (-\frac{a^۳}{c^۳}U_{XXX} - ۲\frac{a^۲b}{c^۳}U_{XXY} - \frac{ab^۲}{c^۳}U_{XYY} - \frac{a^۲b}{c^۳}U_{XXY} - ۲\frac{ab^۲}{c^۳}U_{XYY} \\
&- \frac{b^۳}{c^۳}U_{YYY})_X X_x + (-\frac{a^۳}{c^۳}U_{XXX} - ۲\frac{a^۲b}{c^۳}U_{XXY} - \frac{ab^۲}{c^۳}U_{XYY} \\
&- \frac{a^۲b}{c^۳}U_{XXY} - ۲\frac{ab^۲}{c^۳}U_{XYY} - \frac{b^۳}{c^۳}U_{YYY})_Y Y_x, \\
&= \frac{a^۴}{c^۴}U_{XXXX} + ۴\frac{a^۳b}{c^۴}U_{XXXY} + ۶\frac{a^۲b^۲}{c^۴}U_{XXYY} + ۴\frac{ab^۳}{c^۴}U_{XYYY} + \frac{b^۴}{c^۴}U_{YYYY},
\end{aligned}$$

با جایگذاری این مشتقات در معادله‌ی (۵.۴)، معادله‌ی کاهش یافته‌ی

$$\begin{aligned}
&- ۲ac^۳U_{Xt} - ۲bc^۳U_{Yt} + ۲a^۲c^۲U_X^۲ + ۴abc^۲U_XU_Y + ۲b^۲c^۲U_Y^۲ + ۲a^۲c^۲UU_{XX} \\
&+ ۴abc^۲UU_{XY} + ۲b^۲c^۲UU_{YY} + ۲a^۴U_{XXXX} + ۸a^۳bU_{XXXY} + ۱۲a^۲b^۲U_{XXYY} \\
&+ ۸ab^۳U_{XYYY} + ۲b^۴U_{YYYY} + c^۴U_{XX} + c^۴U_{YY} = ۰,
\end{aligned}$$

حاصل می‌شود. این معادله دارای سه متغیر مستقل X، Y و t است.

حالت ۳

فرض کنیم $c_۱ = c_۳ = F_۲ = F_۳ = ۰$ و $F_۱ = ۱$، با جایگذاری این مقادیر در دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی (۶.۴) ضرایب میدان برداری V به صورت زیر می‌باشند.

$$\xi = \mu = \phi = ۰, \quad \eta = ۱, \quad \tau = c_۲.$$

با قرار دادن این مقادیر در معادلات مشخصه‌ی (۹.۴) داریم:

$$\frac{\mathrm{d}y}{۱} = \frac{\mathrm{d}t}{c_۲}.$$

با حل این دستگاه ناورداهای زیر به دست می‌آید.

$$u = U(x, Y, t), \quad Y = -c_۲y + t.$$

با استفاده از قاعده زنجیره‌ی مشتق داریم:

$$\begin{aligned}
&u_x = U_x, \quad u_y = -c_۲U_Y, \quad u_z = U_z, \quad u_t = U_Y, \quad u_{xx} = U_{xx}, \\
&u_{yy} = c_۲^۲U_{YY}, \quad u_{zz} = U_{zz}, \quad u_{xt} = U_{xY}, \quad u_{xxxx} = U_{xxxx}.
\end{aligned}$$

با جایگذاری این مشتقات در معادله‌ی (۵.۴)، معادله‌ی کاهش یافته‌ی

$$U_{xY}+U_x^{۲}+UU_{xx}+U_{xxxx}+\frac{۱}{۲}(c_۲^{۲}U_{YY}+U_{zz})=۰, \qquad (۱۲.۴)$$

حاصل می‌شود. این معادله دارای سه متغیر مستقل x، Y و t است.

حالت ۴

فرض کنیم $c_۱=c_۲=F_۳=۰$ و $F_۱=F_۲=c_۳=۱$، با جایگذاری این مقادیر در دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی (۶.۴) ضرایب میدان برداری V به صورت زیر می‌باشند.

$$\xi=\phi=\tau=۰, \quad \eta=۱-z, \quad \mu=۱+y.$$

با قرار دادن این مقادیر در معادلات مشخصه‌ی (۹.۴) داریم:

$$\frac{\mathrm{d}y}{۱-z}=\frac{\mathrm{d}z}{۱+y}.$$

با حل این دستگاه ناورداهای زیر به دست می‌آید.

$$u=U(x,Y,t), \quad Y=-y-\frac{y^{۲}}{۲}+z-\frac{z^{۲}}{۲}.$$

با استفاده از قاعده زنجیره‌ی مشتق داریم:

$$\begin{aligned}&u_x=U_x, \quad u_y=(-۱-y)U_Y, \quad u_z=(۱-z)U_Y,\\ &u_t=U_t, \quad u_{xt}=U_{xt}, \quad u_{xx}=U_{xx}, \quad u_{xxxx}=U_{xxxx},\\ &u_{yy}=-U_Y+(۱+y)^{۲}U_{YY}, \quad u_{zz}=-U_Y+(۱-z)^{۲}U_{YY}.\end{aligned}$$

با جایگذاری این مشتقات در معادله‌ی (۵.۴)، معادله‌ی کاهش یافته‌ی زیر به دست می‌آید.

$$U_{xt}+U_x^{۲}+UU_{xx}+U_{xxxx}+U_{YY}-YU_{YY}-U_Y=۰. \qquad (۱۳.۴)$$

حالت ۵

فرض کنیم $c_۲=c_۳=F_۳=۱$ و $c_۱=F_۱=F_۲=۰$، با جایگذاری این مقادیر در دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی (۶.۴) ضرایب میدان برداری V به صورت زیر می‌باشند.

$$\xi=۱, \quad \eta=-z, \quad \mu=y, \quad \tau=۱, \quad \phi=۰.$$

با قرار دادن این مقادیر در معادلات مشخصه‌ی (۹.۴) داریم:

$$\frac{\mathrm{d}x}{۱}=\frac{\mathrm{d}y}{-z}=\frac{\mathrm{d}z}{y}=\frac{\mathrm{d}t}{۱}.$$

با حل این دستگاه ناورداها عبارت‌اند از:

$$u = U(X,Y,Z), \quad X = y^2 + z^2, \quad Y = x + \arctan\left(\frac{y}{z}\right), \quad Z = -t + \arctan\left(\frac{y}{z}\right).$$

با استفاده از قاعده زنجیره‌ی مشتق داریم:

$$\begin{aligned}
u_x &= U_X X_x + U_Y Y_x + U_Z Z_x = U_Y,\\
u_Y &= U_X X_y + U_Y Y_y + U_Z Z_y = 2yU_X + \frac{z}{X}U_Y + \frac{z}{X}U_Z,\\
u_z &= U_X X_z + U_Y Y_z + U_Z Z_z = 2zU_X - \frac{y}{X}U_Y - \frac{y}{X}U_Z,\\
u_t &= U_X X_t + U_Y Y_t + U_Z Z_t = -U_Z,\\
u_{xx} &= (U_Y)_X X_x + (U_Y)_Y Y_x + (U_Y)_Z Z_x = U_{YY},\\
u_{xt} &= (U_Y)_X X_t + (U_Y)_Y Y_t + (U_Y)_Z Z_t = -U_{YZ},\\
u_{yy} &= (2yU_X + \frac{z}{X}U_Y + \frac{z}{X}U_Z)_X X_y + (2yU_X + \frac{z}{X}U_Y + \frac{z}{X}U_Z)_Y Y_y\\
&\quad + (2yU_X + \frac{z}{X}U_Y + \frac{z}{X}U_Z)_Z Z_y\\
&= 4y^2 U_{XX} - 2\frac{yz}{X^2}U_Y + 4\frac{yz}{X}U_{XY} - 2\frac{yz}{X^2}U_Z\\
&\quad + 4\frac{yz}{X}U_{XZ} + \frac{z^2}{X^2}U_{YY} + 2\frac{z^2}{X^2}U_{YZ} + \frac{z^2}{X^2}U_{ZZ},\\
u_{zz} &= (2zU_X - \frac{y}{X}U_Y - \frac{y}{X}U_Z)_X X_z + (2zU_X - \frac{y}{X}U_Y - \frac{y}{X}U_Z)_Y Y_z\\
&\quad + (2zU_X - \frac{y}{X}U_Y - \frac{y}{X}U_Z)_Z Z_z\\
&= 4z^2 U_{XX} + 2\frac{yz}{X^2}U_Y - 4\frac{yz}{X}U_{XY} + 2\frac{yz}{X^2}U_Z\\
&\quad - 4\frac{yz}{X}U_{XZ} + \frac{y^2}{X^2}U_{YY} + 2\frac{y^2}{X^2}U_{YZ} + \frac{y^2}{X^2}U_{ZZ},\\
u_{xxxx} &= (U_{YY})_{xx} = \left[(U_{YY})_X X_x + (U_{YY})_Y Y_x + (U_{YY})_Z Z_x\right]_x\\
&= (U_{YYY})_x = (U_{YYY})_X X_x + (U_{YYY})_Y Y_x + (U_{YYY})_Z Z_x\\
&= U_{YYYY}.
\end{aligned}$$

این مشتقات را در معادله‌ی (۵.۴) قرار می‌دهیم. بنابراین

$$\begin{aligned}
&- U_{YZ} + U_Y^2 + UU_{YY} + U_{YYYY} + \frac{1}{2}(4(y^2+z^2)U_{XX} + \frac{1}{X^2}(y^2+z^2)U_{YY}\\
&+ \frac{2}{X^2}(y^2+z^2)U_{YZ} + \frac{1}{X^2}(y^2+z^2)U_{ZZ}) = 0.
\end{aligned}$$

با جایگذاری $X = y^2 + z^2$ در معادله‌ی بالا به معادله‌ی کاهش یافته‌ی زیر می‌رسیم که دارای سه متغیر مستقل X، Y و Z است.

$$-2XU_{YZ} + 2XU_Y^2 + 2XUU_{YY} + 2XU_{YYYY} + 4X^2U_{XX} + U_{YY} + 2U_{YZ} + U_{ZZ} = 0.$$

حالت ۶

فرض کنیم $F_3 = F_2 = c_2 = 1$ و $c_3 = c_1 = F_1 = 0$، با جایگذاری این مقادیر در دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی (۶.۴) ضرایب میدان برداری V به صورت زیر می‌باشند.

$$\xi = \mu = \tau = 1, \quad \eta = \phi = 0.$$

با قرار دادن این مقادیر در معادلات مشخصه‌ی (۹.۴) داریم:

$$\frac{\mathrm{d}x}{1} = \frac{\mathrm{d}z}{1} = \frac{\mathrm{d}t}{1}.$$

با حل این دستگاه ناورداها عبارت‌اند از:

$$u = U(X, y, Z), \quad X = -x + z, \quad Z = -x + t.$$

با استفاده از قاعده زنجیره‌ی مشتق داریم:

$$\begin{aligned}
&u_x = -U_X - U_Z, \quad u_y = U_y, \quad u_z = U_X, \quad u_t = U_Z\\
&u_{xt} = -U_{XZ} - U_{ZZ}, \quad u_{xx} = U_{XX} + 2U_{XZ} + U_{ZZ}, \quad u_{yy} = U_{yy}, \quad u_{zz} = U_{XX},\\
&u_{xxxx} = U_{XXXX} + 4U_{XXXZ} + 6U_{XXZZ} + 4U_{XZZZ} + U_{ZZZZ}.
\end{aligned}$$

با جایگذاری این مشتقات در معادله‌ی (۵.۴)، معادله‌ی کاهش یافته‌ی زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned}
&- U_{XZ} - U_{ZZ} + U_X^2 + 2U_XU_Y + U_Z^2 + UU_{XX} + 2UU_{XZ} + UU_{ZZ} + U_{XXXX}\\
&+ 4U_{XXXZ} + 6U_{XXZZ} + 4U_{XZZZ} + U_{ZZZZ} + \frac{1}{2}(U_{yy} + U_{XX}) = 0.
\end{aligned}$$

حالت ۷

فرض کنیم $F_2 = F_1 = c_2 = c_1 = 0$ و $c_3 = 1$، با جایگذاری این مقادیر در دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی (۶.۴) ضرایب میدان برداری V به صورت زیر می‌باشند.

$$\xi = F_3, \quad \eta = -z, \quad \mu = y, \quad \phi = \tau = 0.$$

با قرار دادن این مقادیر در معادلات مشخصه‌ی (۹.۴) داریم:

$$\frac{\mathrm{d}x}{F_3} = \frac{\mathrm{d}y}{-z} = \frac{\mathrm{d}z}{y}.$$

با حل این دستگاه ناورداها عبارت‌اند از:

$$u = U(X, Y, t), \quad X = y^2 + z^2, \quad Y = x + F_3 \arctan(\frac{y}{z}).$$

با استفاده از قاعده زنجیره‌ی مشتق داریم:

$$\begin{aligned}
&u_t = U_t, \quad u_x = U_Y, \quad u_y = ۲yU_X + F_۳\frac{z}{X}U_Y,\\
&u_z = ۲zU_X - F_۳\frac{y}{X}U_Y, \quad u_{xt} = U_{Yt}, \quad u_{xx} = U_{YY},\\
&u_{yy} = ۴y^۲U_{XX} - ۲F_۳\frac{yz}{X^۲}U_Y + ۴F_۳\frac{yz}{X}U_{XY} + F_۳^۲\frac{z^۲}{X^۲}U_{YY},\\
&u_{zz} = ۴z^۲U_{XX} + ۲F_۳\frac{yz}{X^۲}U_Y - ۴F_۳\frac{yz}{X}U_{XY} + F_۳^۲\frac{y^۲}{X^۲}U_{YY},\\
&u_{xxxx} = U_{YYYY}.
\end{aligned}$$

با جایگذاری این مشتقات در معادله‌ی (۵.۴)، معادله‌ی کاهش یافته‌ی زیر به دست می‌آید.

$$۲XU_{Yt} + ۲XU_Y^۲ + ۲XUU_{YY} + ۲XU_{YYYY} + ۴X^۲U_{XX} + F_۳^۲U_{YY} = ۰.$$

حالت ۸

فرض کنیم $c_۱ = c_۲ = F_۱ = ۰$ و $F_۲ = F_۳ = c_۳ = ۱$، با جایگذاری این مقادیر در دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی (۶.۴) ضرایب میدان برداری V به صورت زیر می‌باشند.

$$\xi = ۱, \quad \eta = -z, \quad \mu = ۱ + y, \quad \phi = \tau = ۰.$$

با قرار دادن این مقادیر در معادلات مشخصه‌ی (۹.۴) داریم:

$$\frac{\mathrm{d}x}{۱} = \frac{\mathrm{d}y}{-z} = \frac{\mathrm{d}z}{۱ + y}.$$

با حل این دستگاه ناورداها عبارت‌اند از:

$$u = U(X, Y, t), \quad X = ۲y + y^۲ + z^۲, \quad Y = x + \arctan\big(\frac{۱ + y}{z}\big).$$

با استفاده از قاعده زنجیره‌ی مشتق داریم:

$$\begin{aligned}
&u_x = U_Y, \quad u_y = (۲ + ۲y)U_X + \frac{z}{۱ + X}U_Y, \quad u_z = ۲zU_X - \frac{۱ + y}{۱ + X}U_Y,\\
&u_t = U_t, \quad u_{xx} = U_{YY}, \quad u_{xt} = U_{Yt}, \quad u_{xxxx} = U_{YYYY},\\
&u_{yy} = (۴ + ۸y + ۴y^۲)U_{XX} - ۲\frac{z + yz}{(۱ + X)^۲}U_Y + ۴\frac{z + yz}{۱ + X}U_{XY} + \frac{z^۲}{(۱ + X)^۲}U_{YY},\\
&u_{zz} = ۴z^۲U_{XX} + ۲\frac{z + yz}{(۱ + X)^۲}U_Y - ۴\frac{z + yz}{۱ + X}U_{XY} + \frac{۱ + ۲y + y^۲}{(۱ + X)^۲}U_{YY}.
\end{aligned}$$

این مشتقات در معادله‌ی (۵.۴) قرار می‌دهیم. بنابراین

$$\begin{aligned}
&U_{Yt} + U_Y^۲ + UU_{YY} + U_{YYYY} + \frac{۱}{۲}\Big(۴(۱ + ۲y + y^۲ + z^۲)U_{XX}\\
&+ \frac{۱ + ۲y + y^۲ + z^۲}{(۱ + X)^۲}U_{YY}\Big) = ۰.
\end{aligned}$$

با جایگذاری $X = ۲y + y^۲ + z^۲$ در معادله‌ی بالا به معادله‌ی کاهش یافته‌ی زیر می‌رسیم.

$$\begin{aligned}&۲U_{Yt} + ۲XU_{Yt} + ۲U_Y^۲ + ۲XU_Y^۲ + ۲UU_{YY} + ۲XUU_{YY} + ۲U_{YYYY} + ۲XU_{YYYY}\\&+ ۴U_{XX} + ۸XU_{XX} + ۴X^۲U_{XX} + U_{YY} + XU_{YY} = ۰.\end{aligned}$$

۲.۳.۴ کاهش مرتبه‌ی معادله‌ی کودریاشف-سینلشیکوف در حالت ۲ $(\chi \neq ۰)$

در این بخش کاهش مرتبه را برای حالت ۲ $(\chi \neq ۰)$، در برخی حالت‌ها که توابع $F_۱$، $F_۲$، و $F_۳$ و ثابت‌های $c_۱$، $c_۲$ و $c_۳$ موجود در دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی (۶.۴) صفر یا غیر صفر باشند انجام می‌دهیم.

حالت ۱

فرض کنیم $c_۱ = ۱$ و $F_۱ = F_۲ = c_۲ = ۰$، با جایگذاری این مقادیر در دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی (۸.۴) ضرایب میدان برداری V به صورت زیر می‌باشند.

$$\xi = F_۳(t), \quad \eta = \mu = \phi = ۰, \quad \tau = ۱.$$

با قرار دادن این مقادیر در معادلات مشخصه‌ی (۱۰.۴) داریم:

$$\frac{\mathrm{d}x}{F_۳(t)} = \frac{\mathrm{d}t}{۱}.$$

با حل این دستگاه ناورداها عبارت‌اند از:

$$u = U(X, y, z), \quad X = x - \int F_۳(t)dt.$$

با استفاده از قاعده زنجیره‌ی مشتق داریم:

$$\begin{aligned}&u_t = U_X X_t = -U_X \int F_۳'(t)dt = -U_X F_۳(t), \quad u_x = U_X, \quad u_y = U_y,\\&u_z = U_z, \quad u_{xx} = U_{XX}, \quad u_{yy} = U_{yy}, \quad u_{zz} = U_{zz}, \quad u_{xxx} = U_{XXX},\\&u_{xxxx} = U_{XXXX}, \quad u_{xt} = (U_X)_X X_t = -U_{XX} \int F_۳'(t)dt = -U_{XX} F_۳(t).\end{aligned}$$

با جایگذاری این مشتقات در معادله‌ی (۷.۴) معادله‌ی کاهش یافته‌ی زیر به دست می‌آید.

$$-U_{XX}F_۳(t) + U_X^۲ + UU_{XX} + U_{XXXX} - \chi U_{XXX} + \frac{۱}{۲}(U_{yy} + U_{zz}) = ۰. \qquad (۱۴.۴)$$

حالت ۲

فرض کنیم $c_2 = 1$ و $c_1 = F_1 = F_2 = 0$ با جایگذاری این مقادیر در دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی (۸.۴) ضرایب میدان برداری V به صورت زیر می‌باشند.

$$\xi = F_3, \quad \eta = -z, \quad \mu = y, \quad \phi = \tau = 0.$$

با قرار دادن این مقادیر در معادلات مشخصه‌ی (۹.۴) داریم:

$$\frac{\mathrm{d}x}{F_3} = \frac{\mathrm{d}y}{-z} = \frac{\mathrm{d}z}{y}.$$

با حل این دستگاه ناورداها عبارت‌اند از:

$$u = U(X,Y,t), \quad X = y^2 + z^2, \quad Y = x + F_3 \arctan\left(\frac{y}{z}\right).$$

با استفاده از قاعده زنجیره‌ی مشتق داریم:

$$\begin{aligned}
&u_x = U_Y, \quad u_y = 2yU_X + F_3\frac{z}{X}U_Y, \quad u_z = 2zU_X - F_3\frac{y}{X}U_Y,\\
&u_t = Y_tU_Y, \quad u_{xx} = U_{YY}, \quad u_{xt} = Y_tU_{YY},\\
&u_{yy} = 4y^2U_{XX} - 2F_3\frac{yz}{X^2}U_Y + 4F_3\frac{yz}{X}U_{XY} + F_3^2\frac{z^2}{X^2}U_{YY},\\
&u_{zz} = 4z^2U_{XX} + 2F_3\frac{yz}{X^2}U_Y - 4F_3\frac{yz}{X}U_{XY} + F_3^2\frac{y^2}{X^2}U_{YY},\\
&U_{xxx} = U_{YYY}, \quad u_{xxxx} = U_{YYYY}.
\end{aligned}$$

با جایگذاری این مشتقات در معادله‌ی (۷.۴)، معادله‌ی کاهش یافته‌ی زیر به دست می‌آید.

$$2XY_tU_{YY} + 2XU_Y^2 + 2XUU_{YY} + 2XU_{YYYY} - 2\chi XU_{YYY} + 4X^2U_{XX} + F_3^2U_{YY} = 0.$$

حالت ۳

فرض کنیم $c_1 = c_2 = 0$ و $F_1 = a$، $F_2 = b$ و $F_3 = c$، با جایگذاری این مقادیر در دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی (۸.۴) ضرایب میدان برداری V به صورت زیر می‌باشند.

$$\xi = c, \quad \eta = a, \quad \mu = b, \quad \phi = \tau = 0.$$

با قرار دادن این مقادیر در معادلات مشخصه‌ی (۹.۴) داریم:

$$\frac{\mathrm{d}x}{c} = \frac{\mathrm{d}y}{a} = \frac{\mathrm{d}z}{b}.$$

با حل این دستگاه ناورداهای زیر به دست می‌آید.

$$u = U(X,Y,t), \quad ,X = y - \frac{a}{c}x, \quad Y = z - \frac{b}{c}x.$$

با استفاده از قاعده زنجیره‌ی مشتق داریم:

$$
\begin{aligned}
u_t &= U_t, \quad u_x = -\frac{a}{c}U_X - \frac{b}{c}U_Y, \quad u_y = U_X, \\
u_z &= U_Y, \quad u_{xx} = \frac{a^2}{c^2}U_{XX} + 2\frac{ab}{c^2}U_{XY} + \frac{b^2}{c_2}U_{YY}, \\
u_{xt} &= -\frac{a}{c}U_{Xt} - \frac{b}{c}U_{Yt}, \quad u_{yy} = U_{XX}, \quad u_{zz} = U_{YY}, \\
u_{xxx} &= -\frac{a^3}{c^3}U_{XXX} - 3\frac{a^2b}{c^3}U_{XXY} - 3\frac{ab^2}{c^3}U_{XYY} - \frac{b^3}{c^3}U_{YYY}, \\
u_{xxxx} &= \frac{a^4}{c^4}U_{XXXX} + 4\frac{a^3b}{c^4}U_{XXXY} + 6\frac{a^2b^2}{c^4}U_{XXYY} + 4\frac{ab^3}{c^4}U_{XYYY} + \frac{b^4}{c^4}U_{YYYY}.
\end{aligned}
$$

با جایگذاری این مشتقات در معادله‌ی (۷.۴)، معادله‌ی کاهش یافته‌ی

$$
\begin{aligned}
&-2ac^3U_{Xt} - 2bc^3U_{Yt} + 2a^2c^2U_X^2 + 4abc^2U_XU_Y + 2b^2c^2U_Y^2 + 2a^2c^2UU_{XX} \\
&+ 4abc^2UU_{XY} + 2b^2c^2UU_{YY} + 2a^4U_{XXXX} + 8a^3bU_{XXXY} + 12a^2b^2U_{XXYY} \\
&+ 8ab^3U_{XYYY} + 2b^4U_{YYYY} + 2a^3c\chi U_{XXX} + 6a^2bc\chi U_{XXY} + 6ab^2c\chi U_{XYY} \\
&+ 2b^3c\chi U_{YYY} + c^4(U_{XX} + U_{YY}) = 0,
\end{aligned}
$$

حاصل می‌شود. این معادله دارای سه متغیر مستقل X، Y و t است.

حالت ۴

فرض کنیم $c_1 = c_2 = F_3 = 1$ و $F_1 = F_2 = 0$، با جایگذاری این مقادیر در دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی (۸.۴) ضرایب میدان برداری V به صورت زیر می‌باشند.

$$
\xi = 1, \quad \eta = -z, \quad \mu = y, \quad \tau = 1, \quad \phi = 0.
$$

با قرار دادن این مقادیر در معادلات مشخصه‌ی (۹.۴) داریم:

$$
\frac{\mathrm{d}x}{1} = \frac{\mathrm{d}y}{-z} = \frac{\mathrm{d}z}{y} = \frac{\mathrm{d}t}{1}.
$$

با حل این دستگاه ناورداها عبارت‌اند از:

$$
u = U(X, Y, Z), \quad X = y^2 + z^2, \quad Y = x + \arctan\left(\frac{y}{z}\right), \quad Z = -t + \arctan\left(\frac{y}{z}\right).
$$

با استفاده از قاعده زنجیره‌ی مشتق داریم:

$$\begin{aligned} &u_x = U_Y, \quad u_Y = ۲yU_X + \frac{z}{X}U_Y + \frac{z}{X}U_Z, \quad u_z = ۲zU_X - \frac{y}{X}U_Y - \frac{y}{X}U_Z,\\ &u_t = -U_Z, \quad u_{xx} = U_{YY}, \quad u_{xt} = -U_{YZ}, \quad u_{xxx} = U_{YYY}, \quad u_{xxxx} = U_{YYYY},\\ &u_{yy} = ۴y^۲U_{XX} - ۲\frac{yz}{X^۲}U_Y + ۴\frac{yz}{X}U_{XY} - ۲\frac{yz}{X^۲}U_Z + ۴\frac{yz}{X}U_{XZ} + \frac{z^۲}{X^۲}U_{YY}\\ &\qquad + ۲\frac{z^۲}{X^۲}U_{YZ} + \frac{z^۲}{X^۲}U_{ZZ},\\ &u_{zz} = ۴z^۲U_{XX} + ۲\frac{yz}{X^۲}U_Y - ۴\frac{yz}{X}U_{XY} + ۲\frac{yz}{X^۲}U_Z - ۴\frac{yz}{X}U_{XZ} + \frac{y^۲}{X^۲}U_{YY}\\ &\qquad + ۲\frac{y^۲}{X^۲}U_{YZ} + \frac{y^۲}{X^۲}U_{ZZ}. \end{aligned}$$

این مشتقات را در معادله‌ی (۷.۴) قرار می‌دهیم. بنابراین معادله به صورت زیر کاهش می‌آبد.

$$\begin{aligned} &- ۲XU_{YZ} + ۲XU_Y^۲ + ۲XUU_{YY} + ۲XU_{YYYY} - ۲\chi XU_{YYY} + ۴X^۲U_{XX}\\ &+ U_{YY} + ۲U_{YZ} + U_{ZZ} = ۰. \end{aligned}$$

حالت ۵

فرض کنیم $c_۱ = F_۱ = ۰$ و $c_۲ = F_۲ = F_۳ = ۱$، با جایگذاری این مقادیر در دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی (۸.۴) ضرایب میدان برداری V به صورت زیر می‌باشند.

$$\xi = ۱, \quad \eta = -z, \quad \mu = ۱ + y, \quad \phi = \tau = ۰.$$

با قرار دادن این مقادیر در معادلات مشخصه‌ی (۹.۴) داریم:

$$\frac{\mathrm{d}x}{۱} = \frac{\mathrm{d}y}{-z} = \frac{\mathrm{d}z}{۱ + y}.$$

با حل این دستگاه ناورداها عبارت‌اند از:

$$u = U(X, Y, t), \quad X = ۲y + y^۲ + z^۲, \quad Y = x + \arctan\left(\frac{۱ + y}{z}\right).$$

با استفاده از قاعده زنجیره‌ی مشتق داریم:

$$\begin{aligned} &u_x = U_Y, \quad u_y = (۲ + ۲y)U_X + \frac{z}{۱ + X}U_Y, \quad u_z = ۲zU_X - \frac{۱ + y}{۱ + X}U_Y,\\ &u_t = U_t, \quad u_{xx} = U_{YY}, \quad u_{xt} = U_{Yt}, \quad u_{xxx} = U_{YYY}, \quad u_{xxxx} = U_{YYYY},\\ &u_{yy} = (۴ + ۸y + ۴y^۲)U_{XX} - ۲\frac{z + yz}{(۱ + X)^۲}U_Y + ۴\frac{z + yz}{۱ + X}U_{XY} + \frac{z^۲}{(۱ + X)^۲}U_{YY},\\ &u_{zz} = ۴z^۲U_{XX} + ۲\frac{z + yz}{(۱ + X)^۲}U_Y - ۴\frac{z + yz}{۱ + X}U_{XY} - \frac{۱ + ۲y + y^۲}{(۱ + X)^۲}U_{YY}. \end{aligned}$$

این مشتقات در معادله‌ی (۷.۴) قرار می‌دهیم. بنابراین معادله به صورت زیر کاهش می‌آبد.

$$\begin{aligned} &۲U_{Yt}+۲XU_{Yt}+۲U_Y^۲+۲XU_Y^۲+۲UU_{YY}+۲XUU_{YY}+۲U_{YYYY}+۲XU_{YYYY}\\ &-۲\chi U_{YYY}-۲\chi XU_{YYY}+۴U_{XX}+۸XU_{XX}+۴X^۲U_{XX}+U_{YY}+XU_{YY}=۰. \end{aligned}$$

حالت ۶

فرض کنیم $c_۱=F_۲=F_۳=۰$ و $F_۱=c_۲=۱$، با جایگذاری این مقادیر در دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی (۸.۴) ضرایب میدان برداری V به صورت زیر می‌باشند.

$$\xi=\phi=\tau=۰,\quad \eta=۱-z,\quad \mu=y.$$

با قرار دادن این مقادیر در معادلات مشخصه‌ی (۹.۴) داریم:

$$\frac{\mathrm{d}y}{۱-z}=\frac{\mathrm{d}z}{y}.$$

با حل این دستگاه ناورداهای زیر به دست می‌آید.

$$u=U(x,Y,t),\quad Y=-\frac{۱}{۲}(y^۲+z^۲)+z.$$

با استفاده از قاعده زنجیره‌ی مشتق داریم:

$$\begin{aligned} &u_x=U_x,\quad u_y=-yU_Y,\quad u_z=(۱-z)U_Y,\quad u_t=U_t,\quad u_{xx}=U_{xx},\\ &u_{yy}=y^۲U_{YY},\quad u_{zz}=(۱-z)^۲U_{YY},\quad u_{xt}=U_{xt},\quad u_{xxx}=U_{xxx},\quad u_{xxxx}=U_{xxxx}. \end{aligned}$$

این مشتقات را در معادله‌ی (۷.۴) قرار می‌دهیم. بنابراین معادله به صورت زیر کاهش می‌آبد.

$$U_{xt}+U_x^۲+UU_{xx}+U_{xxxx}-\chi U_{xxx}-YU_{YY}+\frac{۱}{۲}U_{YY}=۰.$$

۴.۴ جواب‌های دقیق معادله‌ی سه-بعدی کودریاشف-سینلشیکوف

در این بخش می‌خواهیم جواب‌های دقیق معادله‌ی کودریاشف-سینلشیکوف، (۲.۴)، را بدست آوریم. بدیهی است که یافتن جواب‌های معادله‌ی کاهش یافته‌ی کودریاشف-سینلشیکوف نسبت به معادله‌ی (۱+۳)-بعدی آن آسان‌تر است. برای مثال جواب‌های دقیق معادلات کاهش یافته‌ی (۱۱.۴)، (۱۳.۴) و (۱۴.۴) را بدست می‌آوریم. برای این کار ابتدا تغییر متغیر مناسب را برای معادلات (۱۱.۴) و (۱۳.۴) و برای معادله‌ی (۱۴.۴) با ضرایب متغیر در نظر می‌گیریم، و با استفاده از آن مرتبه‌ی معادلات را کاهش

می‌دهیم. که به یک معادله‌ی دیفرانسیل ODE می‌رسیم. سپس با به کارگیری روش معادله‌ی ریکاتی[۴] جواب معادلات کاهش یافته را به دست می‌آوریم [۳۶، ۱۱].

برای کاهش مرتبه‌ی معادله‌ی (۱۱.۴) تغییر متغیر موج سیار

$$U(X,y,z)=v(w),\qquad w=kx+ly+mz, \tag{۱۵.۴}$$

را به کار می‌بریم. که $X=x-t$ و ضرایب k، l و m ثابت‌های دلخواه هستند. با استفاده از قاعده زنجیره‌ی مشتق داریم:

$$\begin{aligned}
U_X&=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}w}\frac{\partial w}{\partial X}=kv',\quad U_{XX}=\frac{\partial U_X}{\partial X}=\frac{\mathrm{d}(kv')}{\mathrm{d}w}\frac{\partial w}{\partial X}=k^۲v'',\\
U_y&=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}w}\frac{\partial w}{\partial y}=lv',\quad U_{yy}=\frac{\partial U_y}{\partial y}=\frac{\mathrm{d}(lv')}{\mathrm{d}w}\frac{\partial w}{\partial y}=l^۲v'',\\
U_z&=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}w}\frac{\partial w}{\partial z}=mv',\quad U_{zz}=\frac{\partial U_z}{\partial z}=\frac{\mathrm{d}(mv')}{\mathrm{d}w}\frac{\partial w}{\partial z}=m^۲v'',\\
U_{XXX}&=\frac{\partial U_{XX}}{\partial X}=\frac{\mathrm{d}(k^۲v'')}{\mathrm{d}w}\frac{\partial w}{\partial X}=k^۳v''',\\
U_{XXXX}&=\frac{\partial U_{XXX}}{\partial X}=\frac{\mathrm{d}(k^۳v''')}{\mathrm{d}w}\frac{\partial w}{\partial X}=k^۴v^{(۴)}.
\end{aligned}$$

با جایگذاری مشتقات بالا در معادله‌ی (۱۱.۴) این معادله به معادله‌ی دیفرانسیل معمولی غیر خطی زیر که دارای یک متغیر مستقل w است کاهش می‌آبد.

$$-k^۲v''+k^۲(v')^۲+k^۲vv''+k^۴v^{(۴)}+\frac{۱}{۲}(l^۲+m^۲)v''=۰.$$

با انتگرال‌گیری از معادله‌ی بالا و صفر فرض کردن ثابت‌های انتگرالی داریم:

$$-k^۲v'+k^۲vv'+k^۴v'''+\frac{۱}{۲}(l^۲+m^۲)v'=۰.$$

از این معادله نیز انتگرال می‌گیریم و ثابت‌های انتگرالی را صفر فرض می‌کنیم. بنابراین

$$-k^۲v+\frac{۱}{۲}k^۲v^۲+k^۴v''+\frac{۱}{۲}(l^۲+m^۲)v=۰. \tag{۱۶.۴}$$

فرض کنیم جواب‌های معادله‌ی دیفرانسیل (۱۶.۴) به شکل

$$v=\sum_{i=۰}^{n}a_i\varphi^i, \tag{۱۷.۴}$$

باشند. که a_i–ها ثابت‌های دلخواه و φ در معادله‌ی ریکاتی

$$\varphi'=\varphi^۲+r, \tag{۱۸.۴}$$

[۴] Riccati

صدق می‌کند. که r یک ثابت است. حال در معادله‌ی (۱۶.۴) با تراز قرار دادن جمله‌ی خطی با بزرگ‌ترین مرتبه‌ی مشتق و جمله‌ی غیر خطی با بزرگ‌ترین مرتبه‌ی توان می‌توان n را به صورت زیر بدست آورد.

$$n+۲=۲n \Longrightarrow n=۲.$$

بنابراین

$$v(w)=a_۰+a_۱\varphi+a_۲\varphi^۲. \qquad (۱۹.۴)$$

با مشتق‌گیری از معادله‌ی (۱۹.۴) و اینکه $\varphi'=\varphi^۲+r$ و $\varphi''=۲r\varphi+۲\varphi^۳$ داریم:

$$\begin{aligned} v'(w)&=a_۱r+۲a_۲r\varphi+a_۱\varphi^۲+۲a_۲\varphi^۳,\\ v''(w)&=۲a_۲r^۲+۲a_۱r\varphi+۸a_۲r\varphi^۲+۲a_۱\varphi^۳+۶a_۲\varphi^۴. \end{aligned}$$

با جایگذاری مقادیر v، v' و v'' در معادله‌ی (۱۶.۴) و مرتب کردن آن بر حسب توان‌های از φ معادله‌ی جبری زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} &-k^۲a_۰+\frac{۱}{۲}k^۲a_۰^۲+۲k^۴a_۲r^۲+\frac{۱}{۲}l^۲a_۰+\frac{۱}{۲}m^۲a_۰\\ &+\big(-k^۲a_۱+k^۲a_۰a_۱+۲k^۴a_۱r+\frac{۱}{۲}l^۲a_۱+\frac{۱}{۲}m^۲a_۱\big)\varphi\\ &+\big(-k^۲a_۲+\frac{۱}{۲}k^۲a_۱^۲+k^۲a_۰a_۲+۸k^۴a_۲r+\frac{۱}{۲}l^۲a_۲+\frac{۱}{۲}m^۲a_۲\big)\varphi^۲\\ &+\big(k^۲a_۱a_۲+۲k^۴a_۱\big)\varphi^۳+\big(\frac{۱}{۲}k^۲a_۲^۲+۶k^۴a_۲\big)\varphi^۴=۰. \end{aligned}$$

حال با برابر صفر قراردادن ضرایب φ^i-ها $(i=۰,۱,۲,۳,۴)$ به دستگاه معادلات جبری زیر می‌رسیم.

$$\begin{cases} -k^۲a_۰+\frac{۱}{۲}k^۲a_۰^۲+۲k^۴a_۲r^۲+\frac{۱}{۲}l^۲a_۰+\frac{۱}{۲}m^۲a_۰=۰\\ -k^۲a_۱+k^۲a_۰a_۱+۲k^۴a_۱r+\frac{۱}{۲}l^۲a_۱+\frac{۱}{۲}m^۲a_۱=۰\\ -k^۲a_۲+\frac{۱}{۲}k^۲a_۱^۲+k^۲a_۰a_۲+۸k^۴a_۲r+\frac{۱}{۲}l^۲a_۲+\frac{۱}{۲}m^۲a_۲=۰\\ k^۲a_۱a_۲+۲k^۴a_۱=۰\\ \frac{۱}{۲}k^۲a_۲^۲+۶k^۴a_۲=۰ \end{cases}$$

با حل این دستگاه دو حالت جواب برای $a_۰$، $a_۱$، $a_۲$ و l برحسب k، m و r به صورت زیر بدست می‌آید.

حالت ۱

$$a_۰=-۴k^۲r,\quad a_۱=۰,\quad a_۲=-۱۲k^۲,\quad l=\pm\sqrt{-۸k^۴r+۲k^۲-m^۲}. \qquad (۲۰.۴)$$

حالت ۲

$$a_۰=-۱۲k^۲r,\quad a_۱=۰,\quad a_۲=-۱۲k^۲,\quad l=\pm\sqrt{۸k^۴r-۲k^۲-m^۲}. \qquad (۲۱.۴)$$

معادله‌ی ریکاتی (۱۸.۴) دارای جواب‌های زیر می‌باشد.

$$\varphi = \begin{cases} -\sqrt{-r}\tanh\left(\sqrt{-r}w\right), & r<0 \\ -\dfrac{1}{w}, & r=0 \\ \sqrt{r}\tan\left(\sqrt{r}w\right), & r>0 \end{cases} \tag{۲۲.۴}$$

که $w = kX + ly + mz$.

با ترکیب روابط (۱۰.۴)، (۱۵.۴)، (۱۹.۴)، (۲۰.۴) و (۲۲.۴) برخی جواب‌های دقیق و مشابه معادله‌ی کودریاشف-سینلشیکوف به صورت زیر می‌باشد.

- اگر $r<0$ آنگاه جواب مشابه عبارت است از:

$$\begin{aligned} u(x,y,z,t) &= U(X,y,z) = v(w) = a_0 + a_1\varphi + a_2\varphi^2 \\ &= -4k^2r + 12k^2r\tanh^2\left[\sqrt{-r}(kx-kt+ly+mz)\right]. \end{aligned}$$

- اگر $r=0$ آنگاه جواب مشابه عبارت است از:

$$u(x,y,z,t) = -4k^2r - \frac{12k^2r}{(kx-kt+ly+mz)^2}.$$

- اگر $r>0$ آنگاه جواب مشابه عبارت است از:

$$u(x,y,z,t) = -4k^2r - 12k^2r\tan^2\left[\sqrt{r}(kx-kt+ly+mz)\right].$$

که $l=\pm\sqrt{-8k^4r+2k^2-m^2}$، r، k و m ثابت هستند.

با ترکیب (۱۰.۴)، (۱۵.۴)، (۱۹.۴)، (۲۱.۴) و (۲۲.۴) برخی جواب‌های مشابه دیگر معادله‌ی کودریاشف-سینلشیکوف به صورت زیر می‌باشد.

- اگر $r<0$ آنگاه جواب مشابه عبارت است از:

$$u(x,y,z,t) = -12k^2r + 12k^2r\tanh^2\left[\sqrt{-r}(kx-kt+ly+mz)\right].$$

- اگر $r=0$ آنگاه جواب مشابه عبارت است از:

$$u(x,y,z,t) = -12k^2r - \frac{12k^2r}{(kx-kt+ly+mz)^2}.$$

- اگر $r>0$ آنگاه جواب مشابه عبارت است از:

$$u(x,y,z,t) = -12k^2r - 12k^2r\tan^2\left[\sqrt{r}(kx-kt+ly+mz)\right].$$

که $l = \pm\sqrt{8k^4 r - 2k^2 - m^2}$، r، k و m ثابت هستند.

می‌خواهیم جواب‌های دقیق و مشابه معادله‌ی (۱۳.۴) را محاسبه کنیم. برای این کار تغییر متغیر موج سیار زیر را در نظر می‌گیریم.

$$U(x,Y,t) = v(w), \quad w = \rho(t)x + \sigma(t)Y + c(t), \quad Y = -y - \frac{y^2}{2} + z - \frac{z^2}{2}. \quad (23.4)$$

که $\rho(t)$، $\sigma(t)$ و $c(t)$ توابعی دلخواه هستند. با استفاده از قاعده زنجیره‌ی مشتق داریم:

$$\begin{aligned}
U_x &= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}w}\frac{\partial w}{\partial x} = \rho(t)v', \quad U_{XX} = \frac{\partial U_x}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}(\rho(t)v')}{\mathrm{d}w}\frac{\partial w}{\partial x} = \rho^2(t)v'',\\
U_Y &= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}w}\frac{\partial w}{\partial Y} = \sigma(t)v', \quad U_{YY} = \frac{\partial U_Y}{\partial Y} = \frac{\mathrm{d}(\sigma(t)v')}{\mathrm{d}w}\frac{\partial w}{\partial Y} = \sigma^2(t)v'',\\
U_t &= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}w}\frac{\partial w}{\partial t} = \big(\rho'(t)x + \sigma'(t)Y + c'(t)\big)v',\\
U_{xt} &= \frac{\partial U_x}{\partial t} = \frac{\mathrm{d}(\rho(t)v')}{\mathrm{d}w}\frac{\partial w}{\partial t} = \rho(t)\big(\rho'(t)x + \sigma'(t)Y + c'(t)\big)v'',\\
U_{xxx} &= \frac{\partial U_{xx}}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}(\rho^2(t)v'')}{\mathrm{d}w}\frac{\partial w}{\partial x} = \rho^3(t)v''',\\
U_{xxxx} &= \frac{\partial U_{xxx}}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}(\rho^3(t)v''')}{\mathrm{d}w}\frac{\partial w}{\partial x} = \rho^4(t)v^{(4)}.
\end{aligned}$$

با جایگذاری مشتقات بالا در معادله‌ی (۱۳.۴) این معادله به معادله‌ی دیفرانسیل معمولی غیر خطی زیر با متغیر مستقل w کاهش می‌آبد.

$$\rho^4 v^{(4)} + (\rho\rho' x + \rho\sigma' Y + \rho c' - \sigma^2 - \sigma^2 Y)v'' + \rho^2 v v'' + \rho^2 (v')^2 - \sigma v' = 0. \quad (24.4)$$

که در این معادله از v نسبت به w مشتق گرفته شده است. فرض کنیم جواب‌های معادله‌ی بالا به صورت

$$v = \sum_{i=0}^{n} a_i(t)\varphi^i,$$

باشند که در آن $a_i(t)$-ها توابعی دلخواه و φ در معادله‌ی ریکاتی (۱۸.۴) صدق می‌کند. با تراز قرار دادن جمله‌ی خطی با بزرگ‌ترین مرتبه‌ی مشتق و جمله‌ی غیر خطی با بزرگ‌ترین مرتبه‌ی توان در معادله‌ی (۲۴.۴) می‌توان n را به صورت زیر محاسبه کرد.

$$n + 4 = 2n + 2 \Longrightarrow n = 2.$$

بنابراین

$$v(w) = a_0(t) + a_1(t)\varphi + a_2(t)\varphi^2. \quad (25.4)$$

معادلات (۱۸.۴) و (۲۵.۴) را در (۲۴.۴) جایگذاری کرده و نسبت به توان‌های از φ مرتب می‌کنیم. سپس ضرایب φ^i-ها را برابر صفر قرار می‌دهیم. با این کار یک دستگاه معادلات جبری بدست می‌آید. با حل این دستگاه جواب‌های زیر بدست می‌آیند.

$$a_0 = \frac{-3\rho\rho''(t)Y + 9(Y-1)(\rho'(t))^2 - \rho\rho'(t)x - 8\rho^4 r - \rho c'(t)}{\rho^2},$$
$$a_1 = 0, \quad a_2 = -12\rho^2, \quad \sigma(t) = 3\rho'(t). \tag{۲۶.۴}$$

که $Y = -y - \frac{y^2}{2} + z - \frac{z^2}{2}$، $\rho(t)$، $\sigma(t)$ و $c(t)$ توابعی دلخواه از t هستند.

با ترکیب روابط (۲۲.۴)، (۲۳.۴)، (۲۵.۴) و (۲۶.۴) جواب‌های دقیق و مشابه‌ی دیگری برای معادله‌ی کودریاشف-سینلشیکوف به صورت زیر بدست می‌ید.

- اگر $r < 0$ آنگاه جواب مشابه عبارت است از:

$$u(x,y,z,t) = \frac{-3\rho\rho''(t)Y + 9\big(Y-1\big)\big(\rho'(t)\big)^2 - \rho\rho'(t)x - 8\rho^4 r - \rho c'(t)}{\rho^2} + 12\rho^2 r \tanh^2\left[\sqrt{-r}\big(\rho(t)x + 3\rho'(t)Y + c(t)\big)\right].$$

- اگر $r = 0$ آنگاه جواب مشابه عبارت است از:

$$u(x,y,z,t) = \frac{-3\rho\rho''(t)Y + 9\big(Y-1\big)\big(\rho'(t)\big)^2 - \rho\rho'(t)x - 8\rho^4 r - \rho c'(t)}{\rho^2} - \frac{12\rho^2}{\big(\rho(t)x + 3\rho'(t)Y + c(t)\big)^2}.$$

- اگر $r > 0$ آنگاه جواب مشابه عبارت است از:

$$u(x,y,z,t) = \frac{-3\rho\rho''(t)Y + 9\big(Y-1\big)\big(\rho'(t)\big)^2 - \rho\rho'(t)x - 8\rho^4 r - \rho c'(t)}{\rho^2} - 12\rho^2 r \tan^2\left[\sqrt{r}\big(\rho(t)x + 3\rho'(t)Y + c(t)\big)\right].$$

که $Y = -y - \frac{y^2}{2} + z - \frac{z^2}{2}$، $\rho(t)$، $\sigma(t)$ و $c(t)$ توابعی دلخواه از t هستند.

برای آخرین مثال جواب‌های دقیق معادله‌ی (۱۴.۴) را به دست می‌آوریم. برای سادگی فرض کنیم $F_3 = 1$. برای این معادله تغییر متغیر موج سیار

$$U(X,y,z) = v(w), \quad w = kX + ly + mz, \tag{۲۷.۴}$$

را برای کاهش مرتبه‌ی آن بکار می‌بریم. که $X = x - t$ و نیز k، l و m ثابت هستند. با استفاده از قاعده زنجیره‌ی مشتق داریم:

$$U_{XX} = k^2 v'', \quad U_{yy} = l^2 v'', \quad U_{zz} = m^2 v'', \quad U_{XXX} = k^3 v''', \quad U_{XXXX} = k^4 v^{(4)}.$$

با جایگذاری این مشتقات در معادله‌ی بالا به معادله‌ی کاهش یافته‌ی زیر می‌رسیم.

$$-k^۲v'' + k^۲(v')^۲ + k^۲vv'' + k^۴v^{(۴)} - \chi k^۳v''' + \frac{۱}{۲}(l^۲ + m^۲)v'' = ۰.$$

که یک معادله‌ی دیفرانسیل ODE غیر خطی با متغیر مستقل w است. با دو بار انتگرال‌گیری از معادله‌ی فوق نسبت به w داریم:

$$-k^۲v + \frac{۱}{۲}k^۲v^۲ + k^۴v'' - \chi k^۳v' + \frac{۱}{۲}(l^۲ + m^۲)v = ۰. \quad (۲۸.۴)$$

فرض کنیم جواب معادله‌ی فوق به صورت

$$v = \sum_{i=۰}^{n} a_i\varphi^i,$$

باشند، که در آن a_i-ها ثابت‌های دلخواه و φ در معادله‌ی ریکاتی (۱۸.۴) صدق می‌کند. با تراز قرار دادن جمله‌ی خطی با بزرگ‌ترین مرتبه‌ی مشتق و جمله‌ی غیر خطی با بزرگ‌ترین مرتبه‌ی توان در معادله‌ی (۲۸.۴) می‌توان n را به صورت زیر محاسبه کرد.

$$n + ۲ = ۲n \Longrightarrow n = ۲.$$

بنابراین

$$v(w) = a_۰ + a_۱\varphi + a_۲\varphi^۲. \quad (۲۹.۴)$$

معادلات (۱۸.۴) و (۲۹.۴) را در (۲۸.۴) جایگذاری کرده و نسبت به توان‌های از φ مرتب می‌کنیم. سپس ضرایب φ^i-ها را برابر صفر قرار می‌دهیم. با این کار یک دستگاه معادلات جبری بدست می‌آید. با حل این دستگاه دو حالت جواب زیر بدست می‌آیند.

حالت ۱

$$\begin{aligned} a_۰ &= \frac{۲k^۲ - ۲۴k^۲r - l^۲ - m^۲}{۲k^۲}, \\ a_۱ &= ۲۴\sqrt{-r}k^۲, \quad a_۲ = -۱۲k^۲, \quad \chi = ۱۰k\sqrt{-r}. \end{aligned} \quad (۳۰.۴)$$

حالت ۲

$$\begin{aligned} a_۰ &= \frac{۲k^۲ - ۲۴k^۲r - l^۲ - m^۲}{۲k^۲}, \\ a_۱ &= -۲۴\sqrt{-r}k^۲, \quad a_۲ = -۱۲k^۲, \quad \chi = -۱۰k\sqrt{-r}. \end{aligned} \quad (۳۱.۴)$$

مشاهده می‌کنیم که $r \leqslant ۰$.

با ترکیب روابط (۲۲.۴)، (۲۷.۴)، (۲۹.۴) و (۳۰.۴) جواب‌های دقیق و مشابه‌ی دیگری برای معادله‌ی کودریاشف-سینلشیکوف به صورت زیر بدست می‌ید.

• اگر $r = ۰$ آنگاه جواب مشابه عبارت است از:

$$u(x,y,z,t) = \frac{۲k^۲ - ۲۴k^۲r - l^۲ - m^۲}{۲k^۲} - \frac{۲۴\sqrt{-r}k^۲}{kx - kt + ly + mz} - \frac{۱۲k^۲}{(kx - kt + ly + mz)^۲}.$$

• اگر $r < ۰$ آنگاه جواب مشابه عبارت است از:

$$u(x,y,z,t) = \frac{۲k^۲ - ۲۴k^۲r - l^۲ - m^۲}{۲k^۲} + ۲۴k^۲r\tanh\left[\sqrt{-r}(kx - kt + ly + mz)\right] + ۱۲k^۲r\tanh^۲\left[\sqrt{-r}(kx - kt + ly + mz)\right].$$

که r، k، l و m ثابت هستند.

با ترکیب روابط (۲۲.۴)، (۲۷.۴)، (۲۹.۴) و (۳۱.۴) جواب‌های دقیق و مشابه‌ی دیگری برای معادله‌ی کودریاشف-سینلشیکوف به صورت زیر بدست می‌اید.

• اگر $r = ۰$ آنگاه جواب مشابه عبارت است از:

$$u(x,y,z,t) = \frac{۲k^۲ - ۲۴k^۲r - l^۲ - m^۲}{۲k^۲} + \frac{۲۴\sqrt{-r}k^۲}{kx - kt + ly + mz} - \frac{۱۲k^۲}{(kx - kt + ly + mz)^۲}.$$

• اگر $r < ۰$ آنگاه جواب مشابه عبارت است از:

$$u(x,y,z,t) = \frac{۲k^۲ - ۲۴k^۲r - l^۲ - m^۲}{۲k^۲} - ۲۴k^۲r\tanh\left[\sqrt{-r}(kx - kt + ly + mz)\right] + ۱۲k^۲r\tanh^۲\left[\sqrt{-r}(kx - kt + ly + mz)\right].$$

که r، k، l و m ثابت هستند.

مراجع

[1] Ames, W.F. Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering, Academic Press, New York, 1965, 1972.

[2] Beyer, W.A. Lie-group theory for symbolic integration of first order ordinary differential equations, in Proceedings of the 1979 Macsyma Users Conference, V. E. Lewis, ed., MIT Laboratory for Computer Science, Cambridge, Mass., 1976, PP. 362-384.

[3] Bluman, G. Anco, S. Symmetry and Integration Methods for Differential Equations, Appl. Math. Sci., vol. 154, Springer-Verlag, New York, 2002.

[4] Bluman, G. W. Cheviakov, A. F. and Anco, S. C. Applications of Symmetry Methods to Partial Differential Equations, Springer, New York (2002).

[5] Bluman, G. W. and Cole, J. D. The general similarity solution of the heat equation, Appl. Math. Sci., No. 13, Springer-Verlag, New York, 1974.

[6] Boothby, W. M. An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry, Academic Press, New York, 1975.

[7] Cohen, A. An Introdution to the Lie Theory of One-Parameter Groups, with Applications to the Solution of Differential Equations, D. C. Heath & Co., New York, 1911.

[8] Craddock, M. Platen, E. Symmety group methods for fundamental solutions, J. Differential Equations, 207(2)(2004), 285-302.

[9] Craddock, M. Lennox, K. Lie group symmetries as integral transforms of fundamental solutions, J. Differential Equations, 232(2) (2007), 652-674.

[10] Dresner, L. Similarity Solutions of Nonlinear Partial Differential Equations, Research Notes in Math., No. 88, Pitman, Boston, 1983.

[11] Guo, S. Mei, L. Zhou,Y. and Li, C. The extended Riccati equation mapping method for variable- coeffient diffusion-reaction and mKdV equations, Appl. Math. Comput, 217(13)(2011),6264-6272.

[12] He, B. Meng, Q. and Long, Y. The bifurcation and exact peakons, solitary and periodic wave solutions for the Kudryashov-Sinelshchikov equation, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 17(11)(2012), 4137–4148.

[13] Hejazi, S. Reza, Contact Geometry and Symmetry Analysis of Differential Equations., PhD thesis, Iran University of Science and Technology, 2011.

[14] Huizhang Yang, Wei Liu, Biyu Yang, Bin He. Lie Symmetry analysis and exact explicit solutions of three-dimmensional Kudryashov-Sinelshchikov equation. Collage of Mathematics, China, 2015.

[15] Ibragimov, N. H. and Safstrom, N. "The equivalence group and invariant solutions of a tumour growth model," Communications in Nonlinear Sciences and Numerical Simulation, vol. 9, No. 1, pp. 61–68, 2004.

[16] Krause, J. and Michel, L. Classifhcation of the symmetries of ordinary diggerential equations, in Group Theoretical Methods in Physics, V. V. Dodonov and V. I. Manko, eds., Lecture Notes in Physics, Vol. 382, Springer-Verlag, New York, 1991, PP. 251-262.

[17] Kudryashov,N.A. Sinelshchikov, D.I. Nonlinear waves in bubbly liquids with consideration for viscosity and heat transfer, Phys. Lett. A 374. 2016.

[18] Kudryashov, N. A. and Sinelshchikov, D. I. Equation for the three-dimensional nonlinear waves in liquid with gas bubbles. Physica Scripta, 85(2)(2012), 025402.

[19] Lee J. M. Introduction to smooth manifolds, GTM, Springer, New York, 2002.

[20] Lee, J. M. Riemannian Manifolds An Introduction to Curvature, Springer, 2005.

[21] Liand J. G. Chen, Exact traveling wave solutions and their bifurcations for the Kudryashov-Sinelshchikov equation, International Journal of Bifurcation and Chaos, 22(5)(2012), Article ID 1250118, 19 pages.

[22] Lloyd,S. P. The infinitesimal group of the Navier-Stokes equations. Acta Mech. 38 (1981), 129-134.

[23] Mirzazadeh, M. and Eslami, M. Exact solutions of the Kudryashov-Sinelshchikov equation and nonlinear telegraph equation via the first integral method, Nonlinear Analysis. Modelling and Control, 17(4)(2012), 481–488.

[24] Olver, Peter J.. Applications of Lie Groups to Differential Equations. Springer, 1993.

[25] Olver, P. Applications of Lie Groups to Differential Equations, Grad. Texts in Math., vol. 107, Springer, New York, 1993.

[26] Olver, P. J. Symmetry groups and group invariant solution of partial differential equations, J.Diff. Geom. 14 (1979), 497-542.

[27] Olver, P. J. and Rosenau, P. Group-invariant solutions of differential equations, SIAM J. Appl. Math. 47 (1987), 263-278.

[28] Ovsiannikov, L. V. Groups and group-invariant solutions of differential equations, Dokl. Akad. Nauk USSR 118 (1958), 439-442 (in Russian).

[29] Ovsiannikov, L. V. Group Properties of Differential Equations, Novosibirsk, Moscow, 1962 (in Russian; translated by G. W. Bluman, unpublished).

[30] Ovsiannikov, L. V. Group Analysis of Differential Equation, Academic Press, New York, 1982.

[31] Randruut, M. On the Kudryashov-Sinelshchikov equation for waves in bubbly liquids, Physics Letters A, 375(2011),3687–3692.

[32] Randruut, M. Braun, M. Cnoidal waves governed by the Kudryashov-Sinelshchikov equation, Phys. Lett. A 377 (2013) 1868-1874.

[33] Randruut, M. Braun, M. On identical traveling-wave solutions of the Kudryashov-Sinelshchikov and related equations, Int. J. Nonlin. Mech. 58 (2014) 206-211.

[34] Ryabov, P. N. Exact solutions of the Kudryashov-Sinelshchikov equation, Applied Mathematics and Computation, 217(7)(2010), 3585–3590.

[35] Stephani, H. Differential Equations, Their Solutions Using Symmetries, Camridge University Press, Cambridge New York (1989).

[36] Wang, Q. Y. Chen, H.Zahng. A new Riccati equation rational expansion method and its application to (2+1)-dimensional Burgers equation. 2005.

[37] Warner, Frank W. Foundations of differentiable manifolds and Lie groups. Vol. 94. Springer Science & Business Media, 2013.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

اتحاد ژاکوبی .... Jacobi identity

اطلس .... Atlas

اقلیدسی .... Euclidean

امتداد دهی .... Prolongation

انتگرال‌گیری .... Quadrature

ایمبدینگ .... Embedding

ایمرژن .... Immersion

بردار الحاقی .... Adjoint vector

بردار مماس .... Tangent vector

بعد .... Dimensional

بنیادی .... Fundamental

پادمتقارن .... Antisymmetric

پیش‌برنده .... Push-forward

تابع ناوردا .... Invariant function

تبدیل نقطه‌ای .... Point transformation

تجانس .... Scaling

تقارن .... Symmetry

تقارن لی .... Lie symmetry

تقارن معادله‌ی دیفرانسیل .... Symmetry of differential equation

توپولوژی .... Topology

توپولوژیکی .... Topological

جبر لی .... Lie algebra

جدول جابجاگر .... Commutator table

جواب‌های متشابه .... Similarity solutions

جواب‌های ناوردای گروهی .... Group invariant solutions

چارت مختصاتی .... Coordinate chart
دستگاه بهینه .... Optimal system
دستگاه مشخصه .... Characteristic system
دستگاه معادلات جبری .... System of algebraic equations
دستگاه معادلات دیفرانسیل .... System of differential equations
دوخطی .... Bilinear
دوسویی .... Bijective
دیفئومورفیسم .... Diffeomorphism
رتبه .... Rank
رتبه‌ی ماکسیمال .... Maximal rank
زیرجبر .... Subalgebra
زیرجبر لی .... Lie subalgebra
زیرگروه .... Subgroup
زیرگروه لی .... Lie subgroup
زیرگروه مزدوج .... Conjugate subgroup
زیرمنیفلد .... Submanifold
زیرمنیفلد ایمرژن .... Immersed submanifold
زیرمنیفلد باز .... Open submanifold
سابمرژن .... Submersion
سری لی .... Lie series
شار .... Flow
شمارای نوع دوم .... Second countable
ضرب چپ .... Left multiplication
طبقه بندی .... Classification
عمل .... Action
عمل الحاقی .... Adjoint action
عمل راست .... Right action
عمل منظم .... Regular action
عمل مؤثر .... Effective action
عمل نیم-منظم .... Semi-regular action
غیر خطی .... Nonlinean
فاکتور انتگرال .... Integral factor

فضای برداری .... Vector space
فضای جت .... Jet space
فضای کامل .... Total space
قاعده‌ی زنجیره‌ی .... Chain rule
قضیه تیلور .... Taylor's theorem
کروشه‌ی لی .... Lie bracket
کلاف مماسی .... Tangent bundle
گراف .... Graph
گروه آفین .... Affine group
گروه تقارن .... Symmetry group
گروه توپولوژیک .... Topological group
گروه خطی خاص .... Special linear group
گروه خطی عام .... General linear group
گروه دوران .... Rotation group
گروه لی .... Lie Group
گروه متعامد .... Orthogona group
گروه متعامد خاص .... Special orthogonal group
گروه یک-پارامتری .... One-parameter group
ماتریس ژاکوبین .... Jacobian matrix
متغیر وابسته .... Dependent variable
مختصات موضعی .... Local coordinate
مزدوج گیری .... Conjugation
مدار .... Orbit
مستقل .... Independent
مستقل تابعی .... Functionallay independent
مشتق .... Derivation
مشتق جزئی .... Partial Derivative
مشتق کامل .... Total derivative
مشتق لی .... Lie derivative
معادلات اویلر .... Euler equations
معادله‌ی برگر .... Burgers' equation
معادله‌ی دیفرانسیل جزئی .... Partial differential equation

معادله‌ی دیفرانسیل معمولی .... Ordinary differential equation
معادله‌ی ریکاتی .... Riccati equation
معادله‌ی گرما .... Heat equation
معادله‌ی لاپلاس .... Laplace equation
منحنی انتگرال .... Integral curve
منیفلد .... Manifold
منیفلد توپولوژیک .... Topological manifold
منیفلد گرسمن .... Grassmann manifold
منیفلد هموار .... Smooth manifold
موضعاً اقلیدسی .... Locally Euclidean
مولد بینهایت کوچک .... Infinitesimal generator
میدان برداری .... Vector field
ناوردا .... Invariant
ناوردای چپ .... Left invariant
ناوردای دیفرانسیلی .... Differential invariant
ناوردای راست .... Right-invariant
نگاشت مزدوج .... Adjoint map
نگاشت نمایی .... Exponential map
نگاشت وارون‌ساز .... Inversion map
نگاشت هموار .... Smooth map
نمایش الحاقی .... Adjoint representation
وارون .... Inverse
هم‌ارز .... Equivalent
همبند .... Connected
همبند مسیری .... Pathwise connected
هموار .... Smooth

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Action	عمل
Adjoint map	نگاشت مزدوج
Adjoint representation	نمایش الحاقی
Adjoint vector	بردار الحاقی
Adjoint action	عمل الحاقی
Affine group	گروه آفین
Antisymmetric	پادمتقارن
Atlas	اطلس
Bijective	دوسویی
Bilinear	دوخطی
Burgers' equation	معادله‌ی برگر
Chain rule	قاعده‌ی زنجیره‌ی
Characteristic system	دستگاه مشخصه
Classification	طبقه بندی
Commutator table	جدول جابجاگر
Conjugate subgroup	زیرگروه مزدوج
Conjugation	مزدوج گیری
Connected	همبند
Coordinate chart	چارت مختصاتی
Dependent variable	متغیر وابسته
Derivation	مشتق
Diffeomorphism	دیفئومورفیسم
Differential invariant	ناوردای دیفرانسیلی
Dimensional	بعد
Effective action	عمل مؤثر

Embedding .... ایمبدینگ
Equivalent .... هم‌ارز
Euler equations .... معادلات اویلر
Euclidean .... اقلیدسی
Exponential map .... نگاشت نمایی
Flow .... شار
Functionallay independent .... مستقل تابعی
Fundamental .... بنیادی
General linear group .... گروه خطی عام
Graph .... گراف
Grassmann manifold .... منیفلد گرسمن
Group invariant solutions .... جواب‌های ناوردای گروهی
Heat equation .... معادله‌ی گرما
Immersed submanifold .... زیرمنیفلد ایمرژن
Immersion .... ایمرژن
Independent .... مستقل
Infinitesimal generator .... مولد بینهایت کوچک
Invariant .... ناوردا
Invariant function .... تابع ناوردا
Integral curve .... منحنی انتگرال
Integral factor .... فاکتور انتگرال
Inverse .... وارون
Inversion map .... نگاشت وارون‌ساز
Jacobi identity .... اتحاد ژاکوبی
Jacobian matrix .... ماتریس ژاکوبین
Jet space .... فضای جت
Laplace equation .... معادله‌ی لاپلاس
Left invariant .... ناوردای چپ
Left multiplication .... ضرب چپ
Lie algebra .... جبر لی
Lie bracket .... کروشه‌ی لی
Lie derivative .... مشتق لی

گروه لی .... Lie group
سری لی .... Lie series
زیرجبر لی .... Lie subalgebra
زیرگروه لی .... Lie subgroup
تقارن لی .... Lie symmetry
مختصات موضعی .... Local coordinate
موضعاً اقلیدسی .... Locally Euclidean
منیفلد .... Manifold
رتبه‌ی ماکسیمال .... Maximal rank
غیر خطی .... Nonlinear
گروه یک-پارامتری .... One-parameter group
زیرمنیفلد باز .... Open submanifold
مدار .... Orbit
معادله‌ی دیفرانسیل معمولی .... Ordinary differential equation
گروه متعامد .... Orthogona group
معادله‌ی دیفرانسیل جزئی .... Partial differential equation
مشتق جزئی .... Partial equation
همبند مسیری .... Pathwise connected
تبدیل نقطه‌ای .... Point transformation
امتداد دهی .... Prolongation
پیش‌برنده .... Push-forward
انتگرال‌گیری .... Quadrature
رتبه .... Rank
عمل منظم .... Regular action
معادله‌ی ریکاتی .... Riccati equation
عمل راست .... Right action
ناوردای راست .... Right-invariant
گروه دوران .... Rotation group
تجانس .... Scaling
شمارای نوع دوم .... Second countable
عمل نیم-منظم .... Semi-regular action
جواب‌های متشابه .... Similarity solutions

Smooth .... هموار
Smooth manifold .... منیفلد هموار
Smooth map .... نگاشت هموار
Special linear group .... گروه خطی خاص
Special orthogonal group .... گروه متعامد خاص
Subalgebra .... زیرجبر
Subgroup .... زیرگروه
Submanifold .... زیرمنیفلد
Submersion .... سابمرژن
Symmetry .... تقارن
Symmetry group .... گروه تقارنی
Symmetry of differential equation .... تقارن معادله‌ی دیفرانسیل
System of algebraic equations .... دستگاه معادلات جبری
System of differential equations .... دستگاه معادلات دیفرانسیل
Tangent bundle .... کلاف مماسی
Tangent vector .... بردار مماس
Taylor’s theorem .... قضیه تیلور
Topological .... توپولوژیکی
Topological group .... گروه توپولوژیک
Topological manifold .... منیفلد توپولوژیک
Topology .... توپولوژی
Total derivative .... مشتق کامل
Total space .... فضای کامل
Vector field .... میدان برداری
Vector space .... فضای برداری

نمایه

اطلس، ۴
اطلس ماکسیمال، ۴
امتداد تابع، ۲۴
بردار مماس، ۸
تبدیلات حافظ تار، ۲۱
تبدیلات خطی عام، ۵
تبدیلات نقطه‌ای، ۲۰
تبدیلات پایه‌ای، ۲۰
تحلیل تقارنی، ۶۹
تغییر مختصات، ۴۷، ۴۹
تقارن نقطه‌ای، ۳۰
تقارن لی، ۳۰
تقارن‌های معادلات دیفرانسیل، ۳۰
توپولوژی، ۳
جبر لی، ۱۳، ۲۸
جبر لی بینهایت بعدی، ۶۷، ۶۹
جبر لی راست، ۱۳
جواب بنیادی، ۵۴
جواب ضمنی، ۴۸
جواب‌های دقیق، ۵۳
جواب‌های دقیق معادله‌ی کودریاشف–سینلشیکوف، ۸۱
جواب‌های متشابه، ۵۳
جواب‌های گروهی، ۵۳
حرکت گالیله‌ی، ۵۹
دستگاه مختصات، ۴۵
دستگاه معادلات تعیین کننده، ۳۰
دستگاه معادلات جبری، ۱۷
دستگاه معادلات دیفرانسیل، ۲۴، ۲۷
دستگاه معادلات مشخصه، ۴۶
دستگاه کاهش یافته، ۵۴
دیفئومورف، ۴
دیفئومورفیسم، ۴
دیفرانسیل، ۱۱
رتبه‌ی ماکسیمال، ۵
روش معادله‌ی ریکاتی، ۸۲
زیرمنیفلد ایمبد شده، ۵
زیرگروه لی، ۷
ساختار هموار، ۴
سازگار، ۴
شار، ۹
شرط ناوردایی، ۴۲
ضرب از راست، ۱۲

فاکتور انتگرال، ۴۸
فضای توپولوژیکی، ۳
فضای جت، ۲۴، ۳۱
فضای مماسی، ۸، ۱۴
فضای کامل، ۲۰، ۲۱، ۲۵
قاعده زنجیره‌ی مشتق، ۴۷، ۵۵
قضیه‌ی ناوردایی، ۳۱، ۳۹، ۴۲
مؤثر، ۸
متعدی، ۸

مختصات جت، ۳۲
مدار، ۷
مستقل تابعی، ۱۸
مشتق کامل، ۲۸
مشخصه‌ی میدان برداری، ۲۹
معادلات سه-بعدی کودریاشف-سینلشیکوف، ۶۳
معادلات مشخصه، ۱۹، ۶۹
معادله‌ی دقیق، ۴۸
معادله‌ی دیفرانسیل همگن، ۴۸
معادله‌ی ریکاتی، ۵۰
معادله‌ی لاپلاس، ۵۴
معادله‌ی گرما، ۵۷
منحنی انتگرال، ۹
منظم، ۷
منیفلد توپولوژیکی $n-$بعدی، ۴
منیفلد هموار، ۴
موضعی اقلیدسی، ۴
مولد بینهایت کوچک، ۹، ۱۵، ۱۹، ۲۷
ناوردای بنیادی، ۵۶
ناوردای دیفرانسیلی، ۳۰
ناوردای راست، ۱۲
نگاشت نمایی، ۱۰، ۱۴
نگاشت پیش‌برنده، ۱۱
نگاشت گذر، ۴
نیم-منظم، ۷
هموار، ۴
وابسته تابعی، ۱۸

چارت مختصاتی، ۴
کروشه‌ی لی، ۱۱
کلاف مماسی، ۸
گروه آفین، ۶
گروه تبدیلات مقیاسی، ۱۰
گروه تجانس، ۵۶
گروه تقارن، ۱۸
گروه تقارنی، ۵۳
گروه توپولوژیکی، ۶
گروه خطی خاص، ۶، ۱۴
گروه خطی عام، ۶، ۱۴
گروه لی، ۵، ۲۱
گروه متعامد، ۶
گروه متعامد خاص، ۶
گروه موضعی، ۷
گروه یک-پارامتری، ۱۸

Aabstract

One of the application of differential equations is in engineering sciences. A geometrical structure is defined on physical phenomena by a coordinate chart will be defined on the considered structure. One of the important differential equations in fluid mechanics is three dimension Kudryashov-Sinelshikov equation which is describing the pressure waves in a mixture liquid and gas bubbles taking into consideration the viscosity of liquid and the heat transfer, it is generalization of the KdV and the BKdV equation and similar but not identical to the Camassa-Holm equation. In this thesis we apply Lie theory of differential equation for finding some exact solution of the equation.

key words: Differential equation, Lie Group, Lie algebra, Lie symmetry, Invariant, Infinitesimal generator, Three-dimensional Kudryashov-Sinelshchikov equation, Group invariant solutions.

Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

Travelling Wave Solutions Analysis of Kudryashov-Sinelshchikov Equation.

Asghar Tahmasebi Jaidar

Supervisor

Seyed Reza Hezazi

July 2016