بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی کابردی، گرایش تحقیق در عملیات

عنوان

تکنیک‌های اسکالرسازی برای جواب‌های تقریباً کارا در مسایل بهینه‌سازی برداری

استادان راهنما

دکتر جعفر فتحعلی و دکتر مهرداد غزنوی

استاد مشاور

دکتر علیرضا خدامی

دانشجو

مهناز اکبری

شهریور ۱۳۹۴

تقدیم به

روح بزرگوار مادر

و

قلب پرمهر پدرم

و تمام کسانی که تاکنون مرا علمی آموخته‌اند.

الهی!

در دل های ما جز تخم محبت مکار و بر جان های ما جز الطاف و مرحمت خود منگار
بر کشت های ما جز باران رحمت خود مبار . به لطف، ما را دست گیر
و به کرم پای دار ، الهی حجاب ها از راه بردار و ما را به ما مگذار[1]

[1] مناجاتی از خواجه عبدالله انصاري

سپاس گزاری...

سپاس بیکران خدای را که مرا یاری داد تا در راهی قدم نهادم موفق گردم. در این راه پس از او ستایشگر کسانی هستم که مرا رهنما شدند، از آن جمله استادان راهنمای گرانقدر جناب آقای دکتر جعفر فتحعلی و آقای دکتر مهرداد غزنوی و استاد مشاور آقای دکتر علیرضا خدامی که با کمک‌های بی دریغ، ارزنده و عالمانه خود همواره راهگشای اینجانب در انجام و اتمام پایان نامه بوده‌اند. همچنین از خانواده‌ام که با حمایت‌های همه جانبه آنها بود که توانستم در محیطی مطلوب،مراتب تحصیلی و نیز پایان نامه درسی را به اتمام برسانم، سپاسگزاری می‌نمایم. باشد که این جملات نمایانگر سپاس بی‌پایان من نسبت به محبت بی‌دریغ آنان به شمار آید. و در پایان با تشکر فراوان از همه‌ی دوستان و عزیزانی که در این مدت وجودشان سرمایه‌ی امیدم بود.

از جمله خانم‌ها:نجمه بختیاری و سمیرا سوخت سرایی

باشد تا روزی بیشتر از اینها بدانیم، بیش از اینها بنویسیم و چیزهایی بخوانیم و بنویسیم که پس از خواندن و نوشتن آن‌ها این حس در ما بیدار شود که انسان‌تر شده‌ایم.

مهناز اکبری

شهریور ۱۳۹۴

تعهدنامه

اینجانب **مهناز اکبری** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی کاربردی** **دانشکده علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **تکنیک‌های اسکالرسازی برای جواب‌های تقریباً کارا در مسایل بهینه‌سازی برداری** ، تحت راهنمایی **دکتر جعفر فتحعلی** و **دکتر مهرداد غزنوی** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تاکنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه شاهرود “ یا “ Shahrood University of Technology “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

مهناز اکبری

شهریور ۱۳۹۴

چکیده

در این پایان‌نامه ابتدا تعاریف و قضایای اصلی مربوط به بهینه‌سازی برداری و بهینه‌سازی چندهدفه را معرفی می‌کنیم، با توجه به اهمیت جواب‌های کارای سره به معرفی کارایی سره به مفهوم جفرین، کارایی سره به مفهوم بنسن و کارایی سره به مفهوم هنیگ می‌پردایم و چند روش برای حل مساله چند هدفه ارایه می‌دهیم.

مفهوم جواب‌های تقریبی نقش مهمی را در بهینه‌سازی بردای زمانی‌که جواب دقیقی وجود ندارد ایفا می‌کنند، بنابراین کارایی تقریبی به نام E-کارایی را بر پایه مجموعه جامع فوقانی بیان می‌کنیم و بر پایه خواص مجموعه‌های بهبود یافته انواع مختلفی از E-کارایی شامل E-کارایی توسط نگاشت $\varphi_{q,E}$، E-کارایی سره بنسن و E-کارایی توسط نگاشت Δ_{-K} ارایه و ویژگی‌های آن‌ها را بررسی می‌کنیم.

در ادامه با تعریف نگاشت‌های مجموعه-مقدار بهینه‌سازی توسط این نگاشت‌ها را بیان و مفهوم شبه زیر تحدب را برای نگاشت‌های مجموعه-مقدار توسط مجموعه‌های بهبود یافته معرفی می‌کنیم و قضیایایی را تحت فرض E-شبه زیر محدب ارایه می‌دهیم. سپس قضایای ضرایب لاگرانژ E-کارایی سره بنسون را بیان می‌کنیم و با همین روند جواب E-بهینه ضعیف را برای بهینه‌سازی برداری بررسی و قضایای مربوط به آن شامل قضیه اسکالرسازی و قضیه ضریب لاگرانژ را بررسی می‌کنیم. در انتها با معرفی نقاط E-زینی ضعیف برای نگاشت‌های لاگرانژ مجموعه مقدار و مفهوم E-دوگانی ضعیف به بررسی ویژگی‌ها و قضایای مربوط به این مفاهیم می‌پردازیم.

کلمات کلیدی: بهینه‌سازی برداری، مجموعه بهبودیافته، نگاشت-مجموعه مقدار، E-کارایی، نقاط بهینه

فهرست مطالب

فصل ۱

تعاریف و قضایای اولیه

۱.۱ پیشگفتار

نظریه و روش‌های بهینه سازی برداری نقش مهمی را در همه مسایل تصمیم، بازی می‌کنند. طی سال‌های اخیر مطالعات زیادی در حوزه بهینه‌سازی برداری انجام شده است. مفهوم جواب کارا نقش مفیدی را در تحلیل مسایل بهینه‌سازی برداری ایفا می‌کند. اما گاهی اوقات مجموعه جواب کارا شامل برخی نقاط غیر معمول است و لذا نتایجی نامطلوب دارد. بنابراین برخی مفاهیم کارای سره برای محدود کردن مجموعه جواب کارا پیشنهاد شده است. تاکنون انواع مختلفی از مفهوم کارایی سره کلاسیک، شامل کارایی سره بنسون[1] [۲] ، کارایی سره بروین[2] [۴]، کارایی سره هینگ[3] [۳۴] معرفی شده است.
به طور خاص، تحت شرایط مناسب تحدب تعمیم یافته، برخی نویسندگان ویژگی‌های کارایی سره بنسون را با کمک اسکالرسازی، قضایای ضرایب لاگرانژ، معیار نقاط زینی و دوگان مطالعه کردند. وقتی مسایل بهینه سازی جواب‌های دقیقی ندارند، مفهوم جواب تقریبی نقش مهمی را بازی می‌کند. نخستین بار کوتاتلاتزه[4] مفهوم جواب تقریبی به نام جواب ϵ-کارا را مطرح کرد [۴۲]. در سال‌های اخیر، برخی مفاهیم کارایی تقریبی و کاربردهایش در بهینه سازی برداری مطالعه شده است.

اخیراً چیکو[5] و همکاران [۸] مفهوم جدیدی از کارایی تقریبی به نام E-کارایی را بر پایه مجموعه جامع فوقانی[6] را مطرح کردند. E-کارایی مفاهیم نقاط بهینه و نقاط تقریباً بهینه را در بهینه‌سازی اسکالر، تعادل پارتو و تعادل تقریبی یکسان می‌سازد. لیو[7] مفهوم ϵ-کارایی سره جفرین و برخی نتایج اسکالر سازی را به دست آورد [۴۸] . رانگ[8] و ما[9] مفهوم ϵ-کارایی سره را با کمک کارایی سره بنسون مطرح کردند [۵۵] و قضایای راجع به اسکالرسازی، برخی قضایای ϵ-ضرایب لاگرانژ، ϵ نقطه-زینی و دوگانی ϵ-سره را ارائه دادند. ژائو[10] و همکاران [۲۲] نوعی کارایی سره تقریبی برای مسایل بهینه‌سازی برداری را مطرح کردند و شرایطی لازم و کافی به وسیله اسکالر سازی را به دست آوردند. اما کارایی سره تقریبی برخی ویژگی‌های نامطلوب دارد. برای مثال لزوماً کارایی تقریبی را نتیجه نمی دهد. گاتیرز[11] و همکاران [۲۷] (C,ϵ)-شبه زیر تحدب تقریبی را معرفی کردند و اسکالرسازی و نقاط زینی از این نوع را مطرح کردند.
در این فصل تعاریف و قضایای اصلی مربوط به بهینه‌سازی برداری و بهینه‌سازی چندهدفه را معرفی می‌کنیم. این مقدمات در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند. قابل ذکر است که برای این تعاریف

[1] Benson
[2] Borwein
[3] Henig
[4] Kutateladze
[5] Chicco
[6] Upper comprehensive set
[7] Liu
[8] Rong
[9] Ma
[10] Goe
[11] Gutierrez

و قضایا از مراجع [۲، ۴، ۳۴، ۴۲، ۸، ۴۸، ۵۵، ۲۲، ۲۷، ۲۳] استفاده شده است.

۲.۱ بهینه‌سازی چندهدفه

یک مساله بهینه‌سازی چند هدفه در حالت کلی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} MOP \quad \min \qquad & f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_m(x)) \\ s.t. \qquad & x \in X \subseteq \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{۱.۱}$$

که در آن $x = (x_1, \cdots, x_n)^T$ بردار متغیرهای تصمیم است. همچنین، $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $i = 1, \cdots, m$ نشان دهنده m تابع هدف است. لغت min به این مفهوم است که همه توابع هدف به طور همزمان مینیمم می‌شوند. توجه شود که در اینجا فقط مسایل مینیمم سازی را در نظر می گیریم، زیرا با در نظر گرفتن قرینه می‌توان مسایل ماکسیمم‌سازی را به مسایل مینیمم‌سازی تبدیل کرد. در حالت $m = 1$، مساله MOP به یک مساله بهینه‌سازی تک‌هدفه تبدیل می‌شود. در بهینه‌سازی چندهدفه همواره فرض می‌کنیم که $m \geq 2$.

تصویر ناحیه شدنی X را با $Y = f(X)$ نمایش می‌دهیم و به آن مجموعه شدنی در فضای معیار[۱۲] یا فضای تصویر[۱۳] می‌گوییم. ابتدا چند مفهوم اولیه که در رساله استفاده می‌شوند را معرفی می‌کنیم.

نرم اقلیدسی[۱۴] یک بردار $x \in \mathbb{R}^n$ به صورت $\| x \|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ تعریف می‌شود و تابع فاصله اقلیدسی نقطه $\hat{x}$ و یک مجموعه S را به صورت $dist(\hat{x}, S) = \inf\limits_{x \in S} \| \hat{x} - x \|_2$ تعریف می‌کنیم.

برای هر y^1 و y^2 در $\mathbb{R}^p$ نمادهای زیر را داریم:

$$y^1 < y^2 \Leftrightarrow \qquad y^1_k < y^2_k \quad k = 1, \cdots, p,$$

$$y^1 \leqq y^2 \Leftrightarrow \qquad y^1_k \leq y^2_k \quad k = 1, \cdots, p,$$

$$y^1 \leq y^2 \Leftrightarrow \qquad y^1_k \leqq y^2_k ; y^1 \neq y^2.$$

زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}^p$ به صورت زیر نمایش داده می شوند.

$$\mathbb{R}^p_> := \{y \in \mathbb{R}^p : y > 0\}$$

$$\mathbb{R}^p_{\geqq} := \{y \in \mathbb{R}^p : y \geqq 0\}$$

$$\mathbb{R}^p_{\geq} := \{y \in \mathbb{R}^p : y \geq 0\} = \mathbb{R}^p_{\geqq} - \{0\}$$

$\mathbb{R}^n$ فضای اقلیدسی nبعدی را نشان می‌دهد که $\mathbb{R}^n_{\geq}$ مولفه‌های نامنفی آن هستند.

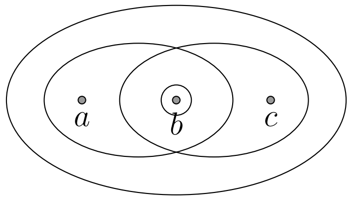
تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید X یک مجموعه ناتهی باشد. در این صورت گردایه τ از زیر مجموعه‌های X را یک توپولوژی بر روی X می نامند اگر:

الف) τ شامل مجموعهX و تهی $(\emptyset)$ باشد.

---
[۱۲] Criterion space

[۱۳] Image space

[۱۴] Euclidean norm



شکل ۱.۱: توپولوژی

ب) τ شامل اجتماع هر تعداد (متناهی یا نا متناهی) از مجموعه های موجود در آن باشد.
پ) اشتراک هر تعداد متناهی از اعضای τ به τ متعلق باشد.

اگر τ یک توپولوژی روی X باشد، آنگاه زوج (X,τ) فضای توپولوژیک نامیده می‌شود.

مثال ۲.۲.۱. فرض کنید X مجموعه سه عضوی $X=\{a,b,c\}$ باشد، شکل ۱.۱ نمایش دهنده توپولوژی است که در آن مجموعه‌های باز عبارت اند از X، $\emptyset$، $\{a,b\}$، $\{b\}$ و $\{b,c\}$.

تعریف ۳.۲.۱. فضای توپولوژیک X هاسدورف[۱۵] نامیده می‌شود اگر برای هر جفت نقطه متمایز $x,y\in X$، همسایگی های U از x و V از y وجود داشته باشند به‌طوری‌که U و V مجزا باشند. یعنی $U\cap V=\emptyset$.

مثال ۴.۲.۱. به عنوان مثال تمام فضاهای متریک هاسدورف هستند.

تعریف ۵.۲.۱. فرض کنید (X,τ) یک فضای بردای همراه با توپولوژی τ باشد. در این‌صورت X را یک فضای برداری توپولوژیک نامیم هرگاه مجموعه‌های تک‌عضوی در X بسته باشند و نگاشت $+ : X\times X\to X$ تعریف شده با ضابطه $(x,y)\to x+y$ و نگاشت $. : \mathbb{R}\times X\to X$ با ضابطه $(\alpha,x)\to \alpha.X$ پیوسته باشند.

اگر X یک فضای برداری توپولوژیک باشد، آنگاه مجموعه همه تابعک‌های خطی پیوسته روی X را دوگان توپولوژیکی X گویند و آن‌را با X^* نمایش می‌دهند. به عبارت دیگر X^* مجموعه همه نگاشت‌های خطی پیوسته از فضای X است.

فرض کنید $(X,\|.\|)$ یک فضای نرم‌دار باشد. نامساوی مثلث در تعریف نرم که به صورت $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$ برای هر $x,y\in X$ بیان می‌شود، به سادگی پیوستگی عمل جمع را به ما نتیجه خواهد داد. در حقیقت اگر $x_n\to x$ و $y_n\to y$ آنگاه نامساوی مثلث نتیجه می‌دهد که $x_n+y_n\to x+y$ و لذا جمع پیوسته است. همچنین شرط $\|\alpha x\|=\|\alpha\|\|x\|$ برای هر $\alpha\in\mathbb{R}$ و هر $x\in X$ پیوستگی عمل ضرب اسکالر را نتیجه خواهد داد. از این رو می‌توان گفت که هر فضای نرم‌دار یک فضای برداری توپولوژیک است.

[۱۵] Hausdorff

تعریف ۶.۲.۱. پوسته آفینی $A \subseteq \mathbb{R}^n$ را با $aff(A)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$aff(A) = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a^i | \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1, a^i \in A, \forall i = 1, \cdots, n\}.$$

تعریف ۷.۲.۱. پوسته محدب[۱۶] $A \subseteq \mathbb{R}^n$ را با $conv(A)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$conv(A) = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a^i | \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1, \lambda_i \geq 0 a^i \in A, \forall i = 1, \cdots, n\}.$$

تعریف ۸.۲.۱. تابع $f(x)$ را تابع آفینی گوییم، هرگاه $f(x)$ به صورت زیر باشد:

$$f(x) = c^T x + d = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i + d = c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n + d.$$

درون[۱۷] زیر مجموعه‌ی S از نقاط فضای توپولوژیک X شامل نقاطی از S است که به مرز S تعلق ندارند. نقطه‌ای که در درون S باشد نقطه درونی S نامیده می‌شود. فرض کنید S زیر مجموعه‌ای از فضای اقلیدسی باشد، آنگاه x نقطه درونی S است اگر گوی بازی به مرکز x وجود داشته باشد که به طور کامل در S قرار داشته باشد. همچنین اگر S زیر مجموعه‌ای از فضای توپولوژیک X باشد، آنگاه x نقطه درونی S است اگر x درون زیر مجموعه‌ای باز از S قرار گرفته باشد.
درون یک مجموعه، مجموع تمام نقاط درونی آن مجموعه است، که آنرا با $int(S)$ یا S° نشان می دهیم.
به طور مثال $int([0, 1]) = (0, 1)$.

تعریف ۹.۲.۱. برای هر مجموعه محدب $A \subseteq \mathbb{R}^n$ درون نسبی[۱۸] به شکل زیر تعریف می‌شود.

$$ri(A) := \{a \in A | \exists \varepsilon > 0, N_\varepsilon(a) \cap aff(A) \subseteq A\}.$$

تعریف ۱۰.۲.۱. فرض کنید S زیر مجموعه‌ای از فضای توپولوژیک X باشد، آنگاه x نقطه بستار[۱۹] S است اگر هر همسایگی از x نقطه‌ای از S را شامل شود. بستار S را با $cl(S)$ نشان می‌دهیم.
به عنوان مثال $cl((0, 1)) = [0, 1]$.

تعریف ۱۱.۲.۱. مرز یا کران[۲۰] زیرمجموعه‌ی S از فضای توپولوژیک X، مجموعه نقاطی است که می‌توان هم از درون و هم از بیرون S به آنها نزدیک شد. در واقع مجموعه نقاطی در بستار S که به درون S تعلق ندارند.
مرز مجموعه S را با $bd(S)$ یا $\delta(S)$ نمایش می دهیم.
به عنوان مثال: $bd(0, 5) = bd[0, 5) = bd(0, 5] = bd[0, 5] = \{0, 5\}$.

[۱۶] Convex hull
[۱۷] Interior
[۱۸] Relative interior
[۱۹] Closure
[۲۰] Boundary

برای مجموعه S روابط زیر را داریم:

الف) $bd(S) = cl(S) \setminus int(S)$

ب) $cl(S) = int(S) \cup bd(S)$

تعریف ۱۲.۲.۱. اگر برای هر x و y در C و برای هر λ در بازه $[0,1]$، $\lambda y + (1-\lambda)x$ نیز در C باشد. آن‌گاه C مجموعه‌ای محدب در فضای برداری توپولوژیک نامیده می‌شود.

تعریف ۱۳.۲.۱. زیرمجموعه D از $\mathbb{R}^n$ یک مخروط نامیده می‌شود هرگاه برای هر $x \in D$ و هر $\alpha \geq 0$ داشته باشیم $\alpha x \in D$. بعلاوه مخروط D محدب است هر گاه D مجموعه‌ای محدب است.
مخروط K نوک‌دار[21] نامیده می‌شود اگر $K \cap (-K) = \{0\}$، به عبارت دیگر اگر $x \in K$ و $x \neq 0$ آنگاه $-x \notin K$.

مخروط تولید شده به‌وسیله مجموعه A را با ، $cone(A) = \{\lambda a | \lambda \geq 0, a \in A\}$ نمایش می‌دهیم.
مخروط D را توپر[22] گویند هر گاه $int(D) \neq \emptyset$.
فرض کنیدK و P به ترتیب مخروط‌های نوک‌دار محدب بسته مثبت با نقاط درون ناتهی در Y و Z باشند. آنگاه برای هر $x, y \in Y$ داریم

$$x \leqq_K y \Leftrightarrow y - x \in K$$

تعریف ۱۴.۲.۱. تابع چند ارز[23] یا تابع مجموعه‌-مقدار[24] تابعی است که در آن هر خروجی به حداقل یک ورودی وابسته است. در حالت عادی در تابع هر ورودی فقط و فقط به یک خروجی منحصر به فرد وابسته است. توابع چند ارز تابع وارون ندارند.
به طور مثال هر عدد بزرگتر از صفر دو ریشه مربع (درجه دوم) دارد. ریشه‌های درجه دوم عدد ۴ مجموعه $\{-2, 2\}$ است.

تعریف ۱۵.۲.۱. [۴۷] فرض کنید $A \subset X$ مجموعه‌ای محدب و $C \subset Y$ مخروطی محدب با $intC \neq \emptyset$ باشد، در این‌صورت تابع مجموعه‌-مقدار $F : A \longrightarrow 2^Y$، C-محدب روی A گفته می شود اگر به‌ازای‌هر $x_1, x_2 \in A$ و برای هر$\lambda \in [0,1]$ داشته باشیم:

$$\lambda F(x_1) + (1-\lambda)F(x_2) \subset F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) + C.$$

تعریف ۱۶.۲.۱. تابع مجموعه‌-مقدار F، C-شبه‌محدب روی A نامیده می‌شود اگر به‌ازای هر $x_1, x_2 \in A$ و $\lambda \in (0,1)$ داشته باشیم:

$$\lambda F(x_1) + (1-\lambda)F(x_2) \subset F(A) + C.$$

[21] Pointed
[22] Solid
[23] Multivalued function
[24] Set-valued function

تعریف ۱۷.۲.۱. تابع مجموعه-مقدار F، C-شبه‌زیرمحدب روی A نامیده می‌شود اگر θ در $intC$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که به‌ازای هر$x_۱, x_۲ \in A$، $\lambda \in (۰,۱)$ و برای هر $\epsilon > ۰$ داشته باشیم:
$$\epsilon\theta + \lambda F(x_۱) + (۱-\lambda)F(x_۲) \subset F(A) + C.$$

لم ۱۸.۲.۱. *[۴۶]. F روی X، C-شبه‌زیرمحدب است، اگر وتنها اگر $F(X) + intC$ محدب باشد.*

لم ۱۹.۲.۱. *[۴۶]. F روی X، C-شبه‌محدب است، اگر وتنها اگر $F(X) + C$ محدب باشد.*

از تعاریف بالا برای نگاشت F رابطه زیر را داریم:

$C -$ محدب $\Longrightarrow$ $C -$ شبه محدب $\Longrightarrow$ $C -$ شبه زیر محدب

مثال‌های زیر نشان می‌دهد که عکس رابطه بالا برقرار نیست:

مثال ۲۰.۲.۱. فرض کنید $X = \{(x_۱, x_۲) \in \mathbb{R}^۲ | x_۱ \geq ۰, x_۲ \geq ۰, x_۱ + x_۲ \geq ۱\}$، $Y = \mathbb{R}^۲$ و $C = \mathbb{R}^۲_{\geq} = \{(x_۱, x_۲) \in \mathbb{R}^۲ | x_۱ \geq ۰, x_۲ \geq ۰\}$. نگاشت $F : X \longrightarrow ۲^Y$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.
$$F(x_۱, x_۲) = \{(x_۱, x_۲), (۱, ۰), (۱, ۰)\}$$

می‌توان دید که $F(X) + intC$ مجموعه‌ای محدب است، اما $F(X) + C$ مجموعه‌ای محدب نیست. بنابراین، F روی X، C-شبه‌زیرمحدب است اما C-شبه‌محدب نیست.

مثال ۲۱.۲.۱. فرض کنید $X = \{(x_۱, x_۲) \in \mathbb{R}^۲ | x_۱ + x_۲ = ۱\}$، $Y = \mathbb{R}^۲$ و $C = \mathbb{R}^۲_{\geq}$. نگاشت $F : X \longrightarrow ۲^Y$ را به شکل $F(x_۱, x_۲) = \{(x_۱, x_۲), (\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲})\}$ تعریف می‌کنیم، آنگاه چون $F(X)+C$ مجموعه محدب است، F روی X، C-شبه‌محدب است، اما C-محدب نیست.

در ادامه، برخی مفاهیم را در فضای برداری توپولوژیک هاسدورف موضعاً محدب حقیقی پیشنهاد می‌کنیم.

تعریف ۲۲.۲.۱. مخروط دوگان مثبت زیرمجموعه$A \subseteq Y$ به صورت زیر تعریف می‌شود
$$A^+ = \{\mu \in Y^* | \forall \langle y, \mu \rangle \geq ۰,\ y \in A\}.$$

اگر داشته باشیم $A = \mathbb{R}^P_{\geq}$ آنگاه داریم
$$A^+ = \{\mu \in Y^* | \forall \langle \mu, y \rangle \geq ۰,\ y \in \mathbb{R}^P_{\geq}\} = \{\mathbb{R}^p_{\geq}\}$$

همچنین، شبه درون A^+ نیز به صورت زیر بیان می‌شود.
$$A^{+i} = \{\mu \in Y^* | \forall \langle y, \mu \rangle > ۰,\ y \in A \setminus \{۰\}\}.$$

که Y^* فضای دوگان توپولوژیک Y و $\langle y, \mu \rangle$ مقدار تابعک خطی (ضرب داخلی μ, y) μ را در y نشان می‌دهد.

هر مخروط محدب $D \subseteq \mathrm{Y}$، که مخروط ترتیبی[۲۵] نامیده می‌شود، یک ترتیب جزئی[۲۶] روی Y به صورت زیر تعریف می‌کند.

فرض کنیم $Y^1, Y^2 \in \mathrm{Y}$. در این صورت:

$$Y^1 \leqq_D Y^2 \Longleftrightarrow Y^2 - Y^1 \in D.$$

همچنین نمادگذاری‌های زیر مورد استفاده قرار می‌گیرند:

$$Y^1 \leq_D Y^2 \Longleftrightarrow Y^2 - Y^1 \in D \setminus \{0\} \Longleftrightarrow Y^1 \leqq_D Y^2, Y^1 \neq Y^2$$

اگر مخروط ترتیبی را با ترتیب طبیعی به صورت $D = \mathbb{R}^m_{\geqq} = \{x \in \mathbb{R}^m | \forall x_i \geq 0, i = 1, \cdots, m\}$ تعریف می‌کنیم، آن‌گاه $Y^1 \leqq_D Y^2$ به این مفهوم است که $y^1_i \leq y^2_i$. به همین ترتیب، می‌توانیم $\mathbb{R}^m_{\geq}$ و $\mathbb{R}^m_{>}$ را نیز تعریف کنیم. در این رساله به جای $Y^1 \leqq_{\mathbb{R}^m_{\geqq}} Y^2$ از نماد $Y^1 \leqq Y^2, \ \forall i = 1, \cdots, m$ استفاده می‌کنیم.

در ادامه، فرض می‌کنیم که مخروط محدب D که با استفاده از آن ترتیب جزئی تعریف می‌شود نوک‌دار است، مگر این‌که خلاف آن ذکر شود.

برای توسیع تعریف بهینه‌سازی تک هدفه به بهینه‌سازی چندهدفه، تعریفی به صورت زیر داریم.

تعریف ۲۳.۲.۱. بردار $\hat{\mathrm{x}} \in \mathcal{X}$ را یک جواب بهینه کامل[۲۷] برای مسأله بهینه‌سازی چند هدفه (۱.۱) نسبت به مخروط ترتیبی D گوییم هرگاه برای هر $\mathrm{x} \in \mathcal{X}$ داشته باشیم $f(\hat{\mathrm{x}}) \leqq_D f(\mathrm{x})$.

در حالت کلی، به علت متناقض بودن توابع هدف، پیدا کردن جواب بهینه کامل که به طور همزمان همه توابع هدف را مینیمم کند غیر ممکن است. به هر حال، با استفاده از مخروط ترتیبی می‌توان بردارهای هدفی پیدا کرد که هیچ یک از مؤلفه‌هایشان نتوانند بهبود یابند، مگر این‌که حداقل یکی دیگر از مؤلفه‌هایشان بدتر شود. این مفهوم برای اولین بار توسط پارتو مطرح شد. به این جواب‌ها، نقاط کارا[۲۸] گوییم که به صورت زیر تعریف می‌شوند.

تعریف ۲۴.۲.۱. بردار $\hat{\mathrm{x}} \in \mathcal{X}$ را یک جواب کارا (مطلوب[۲۹]، غیر مغلوب[۳۰]) برای مسأله بهینه سازی چندهدفه (۱.۱) نسبت به مخروط ترتیبی D گویند، هرگاه هیچ بردار $\mathrm{x} \in \mathcal{X}$ با $f(\mathrm{x}) \leq_D f(\hat{\mathrm{x}})$ موجود نباشد، یا به طور معادل

$$(f(\hat{\mathrm{x}}) - D \setminus \{0\}) \cap f(\mathcal{X}) = \emptyset.$$

به عبارت دیگر $(f(\hat{\mathrm{x}}) - D) \cap f(\mathcal{X}) = \{f(\hat{x})\}$. مجموعه همه جواب‌های کارا نسبت به مخروط D را با $\mathcal{X}_E(D)$ یا $\mathcal{X}_E$ نمایش می‌دهیم.

تصویر مجموعه جواب‌های کارا را مجموعه غیر مغلوب[۳۱] می‌نامیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{Y}_N(D) := \{f(\mathrm{x}) | \mathrm{x} \in \mathcal{X}_E\}.$$

[۲۵] Ordering cone

[۲۶] Partial order

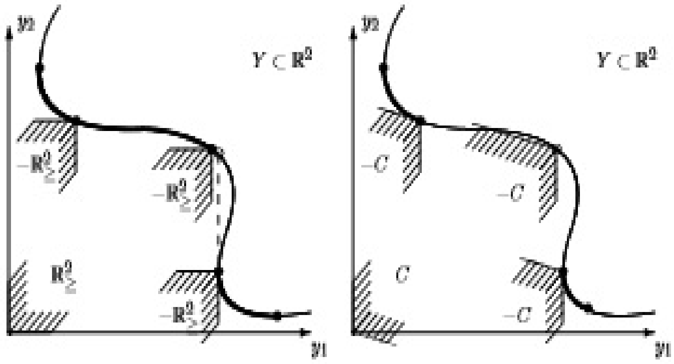
[۲۷] Complete optimal solution

[۲۸] Efficient

[۲۹] Non-inferior

[۳۰] Non-dominated

[۳۱] Non-dominated set



شکل ۲.۱: مجموعه جواب‌های غیر مغلوب $\mathcal{Y}_N(\mathbb{R}^{۲}_{\geqq \circ})$ و $\mathcal{Y}_N(C)$

ملاحظه ۲۵.۲.۱. *در تعریف بالا، اگر $D = \mathbb{R}^m_{\geqq}$ باشد، آن‌گاه به جواب‌های کارا، جواب‌های بهینه پارتو[۳۲] نیز می‌گویند.*
در شکل ۲.۱ مجموعه غیرمغلوب نسبت به مخروط $D = \mathbb{R}^{۲}_{\geqq}$ و یک مخروط دلخواه $C \subseteq \mathbb{R}^{۲}$ نشان داده شده است. همان‌گونه که مشاهده می‌شود، مجموعه جواب‌های غیرمغلوب نسبت به مخروط C زیر مجموعه‌ای از مجموعه غیرمغلوب نسبت به مخروط $D = \mathbb{R}^{۲}_{\geqq}$ است زیرا $D \subseteq C$. این رابطه همواره برقرار است که قضیه زیر به آن اشاره دارد.

قضیه ۲۶.۲.۱. *[۲۳]. فرض کنید $D_۱$ و $D_۲$ دو مخروط دلخواه باشند که $D_۲ \subseteq D_۱$. در این صورت،*

$$\mathcal{X}_E(D_۱) \subseteq \mathcal{X}_E(D_۲).$$

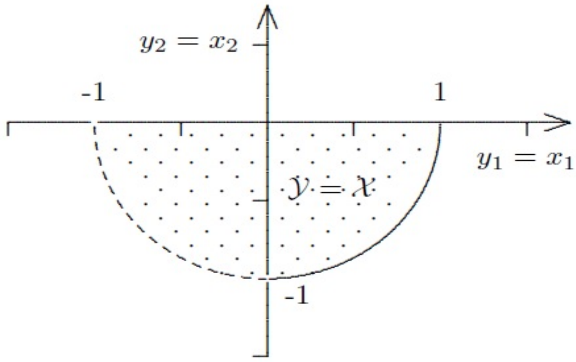
علاوه بر مفهوم کارایی، کارایی ضعیف نیز به طور گسترده استفاده می‌شود که تعریفی ضعیف‌تر از کارایی است وبه صورت زیر است.

تعریف ۲۷.۲.۱. فرض کنید D یک مخروط محدب توپر باشد. بردار $\hat{\mathrm{x}} \in \mathcal{X}$ را یک جواب کارای ضعیف[۳۳] برای مسأله (۱.۱) نسبت به مخروط D گویند، هرگاه هیچ بردار $\mathrm{x} \in \mathcal{X}$ با $f(\mathrm{x}) <_D f(\hat{\mathrm{x}})$ موجود نباشد، یا به طور معادل $(f(\hat{\mathrm{x}}) - int(D)) \cap f(\mathcal{X}) = \emptyset$.
مجموعه همه جواب‌های کارای ضعیف نسبت به مخروط D را با مخروط $\mathcal{X}_{WE}(D)$ یا $\mathcal{X}_{WE}$ نمایش می‌دهیم.
تصویر مجموعه جواب‌های کارای ضعیف را مجموعه غیرمغلوب ضعیف می‌نامیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{Y}_{WN} := \{f(\mathrm{x}) | \mathrm{x} \in \mathcal{X}_{WE}\}.$$

جواب‌های کارای ضعیف نسبت به مخروط $\mathbb{R}^m_{\geqq}$ را جواب‌های بهینه پارتو ضعیف نیز می‌گویند.

[۳۲] Pareto optimal solutions
[۳۳] Weakly efficient solution



شکل ۳.۱: فضای شدنی مسئله اول در مثال۳۰.۲.۱

ملاحظه ۲۸.۲.۱. *با توجه به تعاریف بالا، واضح است که اگر مخروط محدب D توپر باشد، آن‌گاه*

$$\mathcal{X}_E(D) \subseteq \mathcal{X}_{WE}(D),$$

$$\mathcal{Y}_N(D) \subseteq \mathcal{Y}_{WN}(D).$$

تعریف ۲۹.۲.۱. نقطه شدنی $\hat{x} \in \mathcal{X}$ را یک نقطه اکیدا کارا یا اکیدا پارتو نامیم اگر $x \in \mathcal{X}$ وجود نداشته باشد به‌طوریکه $x \neq \hat{x}$ و $f(x) \leqq f(\hat{x})$. مجموعه نقاط اکیدا کارا با $\mathcal{X}_{sE}$ نمایش داده می‌شود.

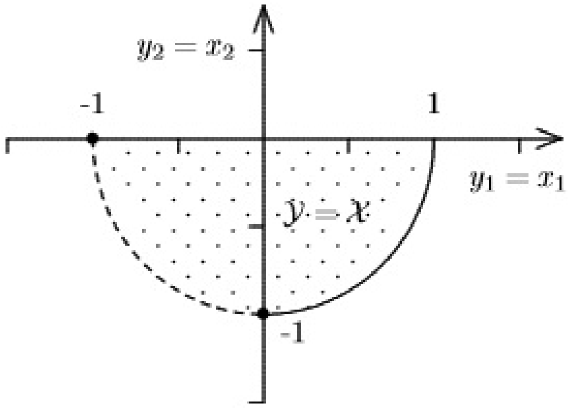
برای روشن شدن مفهوم کارایی، مثال زیر را ارایه می‌دهیم.

مثال ۳۰.۲.۱. فرض کنید $f : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}^۲$ یک تابع دو ضابطه‌ای باشد و $D = \mathbb{R}^۲_{\geqq}$. ناحیه شدنی مسأله را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\mathcal{X} = \left\{ (x_۱, x_۲) \in \mathbb{R}^۲ \middle| \begin{array}{c} -۱ \leq x_۱ \leq ۱; \\ -\sqrt{-x_۱^۲ + ۱} < x_۲ \leq ۰; \quad -۱ \leq x_۱ \leq ۰ \\ -\sqrt{-x_۱^۲ + ۱} \leq x_۲ \leq ۰; \quad ۰ < x_۱ \leq ۱ \end{array} \right\} \qquad (۲.۱)$$

به علاوه، فرض کنید توابع هدف به صورت $f(x_۱, x_۲) = (x_۱, x_۲)$ داده شده باشند. مجموعه‌های شدنی $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ به ترتیب در فضای تصمیم و فضای معیار در شکل ۳.۱ رسم شده‌اند. همان‌گونه که در شکل ۳.۱ ملاحظه می‌شود، این مسأله بهینه‌سازی دوهدفه هیچ نقطه کارایی ندارد و داریم $\mathcal{X}_E(\mathbb{R}^۲_{\geqq}) = \emptyset$ و $\mathcal{Y}_N(\mathbb{R}^۲_{\geqq}) = \emptyset$. حال فرض کنید ناحیه شدنی را به صورت زیر اصلاح کنیم:

$$\mathcal{X} = \left\{ (x_۱, x_۲) \in \mathbb{R}^۲ \middle| \begin{array}{c} -۱ \leq x_۱ \leq ۱; \\ x_۲ = ۰; \qquad x_۱ = -۱, \\ -\sqrt{-x_۱^۲ + ۱} < x_۲ \leq ۰; \quad -۱ < x_۱ < ۰, \\ -\sqrt{-x_۱^۲ + ۱} \leq x_۲ \leq ۰; \quad ۰ \leq x_۱ \leq ۱, \end{array} \right\} \qquad (۳.۱)$$



شکل ۴.۱: فضای شدنی مسئله دوم در مثال۳۰.۲.۱

در این صورت، همان‌گونه که در شکل ۴.۱ نمایش داده شده است، داریم
$\mathcal{X}_E(\mathbb{R}^{۲}_{\geqq}) = \{(-۱, ۰), (۰, -۱)\}$ و هم‌چنین $\mathcal{Y}_N(\mathbb{R}^{۲}_{\geqq}) = \{(-۱, ۰), (۰, -۱)\}$.

در ادامه نقاط ایده‌آل[۳۴] و حضیض[۳۵] را به عنوان کران‌های پایین و بالا نقاط غیرمغلوب تعریف می‌کنیم. این نقاط نشان دهنده بازه‌ای هستند که نقاط غیر مغلوب می‌توانند در آن تغییر کنند. این‌ها معمولاً به عنوان نقاط مرجع[۳۶] در مسایل وزن‌دار ظاهر می‌شوند.

تعریف ۳۱.۲.۱. ۱. نقطه $\mathrm{y}^I = (y^I_۱, y^I_۲, \cdots, y^I_m)$ که به‌صورت

$$y^I_k := \min_{\mathrm{x}\in\mathcal{X}} f_k(\mathrm{x}) = \min_{y\in\mathcal{Y}} y_k$$

تعریف می‌شود، یک نقطه ایده‌آل نامیده می‌شود.

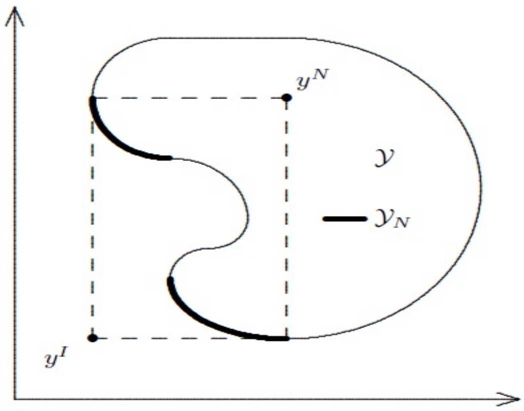
۲. نقطه $\mathrm{y}^N = (y^N_۱, y^N_۲, \cdots, y^N_m)$ که به‌صورت

$$y^N_k := \max_{\mathrm{x}\in\mathcal{X}_E} f_k(\mathrm{x}) = \max_{\mathrm{y}\in\mathcal{Y}_N} y_k$$

تعریف می‌شود، یک نقطه حضیض نامیده می‌شود.

در شکل (۵.۱)، نقاط ایده‌آل و حضیض یک مساله بهینه‌سازی دو هدفه نشان داده شده اند. واضح است که اگر بردار هدف ایده‌آل شدنی باشد، این بردار جواب بهینه کامل یک مساله بهینه‌سازی چندهدفه است. اما این حالت در اغلب مواقع برقرار نیست، چون در بیشتر مواقع توابع هدف متناقضند. حتی اگر بردار ایده‌آل غیر قابل دسترس باشد، می‌تواند به عنوان یک نقطه مرجع مناسب در برنامه‌ریزی چندهدفه استفاده شود. چون نقاط ایده‌آل با حل کردن m مساله بهینه‌سازی تک هدفه بدست می‌آیند، لذا برای پیدا کردن آن‌ها مشکلی نداریم. اما محاسبه y^N که شامل بهینه‌سازی روی مجموعه جواب‌های

[۳۴] Ideal
[۳۵] Nadir
[۳۶] Reference points



شکل ۵.۱: نقاط ایده‌آل و حضیض یک مساله بهینه‌سازی دو هدفه [۱۳]

کاراست، کاری بس مشکل است. تا کنون هیچ روش کارایی برای محاسبه نقاط حضیض ارایه نشده است [۱۳].

تعریف ۳۲.۲.۱. فرض کنید $\alpha = (\alpha_۱, \cdots, \alpha_m)$ یک بردار با مولفه‌های مثبت کوچک باشد. بردار

$$y_k^U = (y_۱^U, \cdots, y_m^U)$$

که به صورت

$$y_k^U := y_k^I - \alpha_k$$

تعریف می‌شود، یک نقطه فوق ایده‌آل[۳۷] نامیده می‌شود.

۱.۲.۱ کارایی سره

همان‌گونه که از تعریف جواب‌های کارا مشخص است، در یک جواب کارا نمی‌توان یکی از توابع هدف را بهبود داد مگر اینکه این بهبود با بدتر شدن حداقل یکی از توابع هدف همراه باشد. این بده و بستان[۳۸] بین توابع هدف، با محاسبه میزان افزایش یکی از توابع هدف به ازای کاهش یکی دیگر از توابع هدف بدست می‌آید.

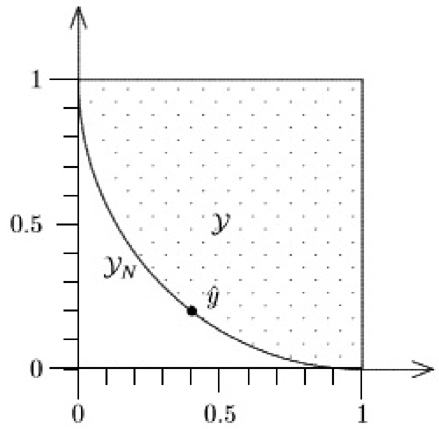
در بعضی از مواقع این بده و بستان ممکن است بی‌کران باشد. هنگامی که بده بستان بین توابع هدف بی‌کران باشد، آن‌گاه بهبود دادن یکی از توابع هدف باعث می‌شود که تابع هدف دیگری بی‌نهایت بار بدتر شود. در عمل، یعنی حداقل یکی از توابع نادیده گرفته می‌شود که مطمئناً مطلوب تصمیم گیرنده [۳۹] نیست. لذا، جواب‌های کارا با مقدار بده و بستان کران‌دار از اهمیت زیادی برخوردارند که این جواب‌ها را کارای سره[۴۰] گویند.

[۳۷] Utopia point

[۳۸] trade-off

[۳۹] decision maker

[۴۰] proper efficient



شکل ۶.۱: مجموعه نقاط غیرمغلوب مثال ۳۴.۲.۱

کارایی سره اهمیت زیادی در الگوریتم‌های تعاملی [۴۱] دارد. چون در الگوریتم‌های تعاملی در فرایند حل مساله سعی می‌شود جواب‌هایی به تصمیم گیرنده ارایه شود و اگر جواب‌های ارایه شده مطلوب تصمیم گیرنده نباشند، او می‌تواند درخواست کند که یکی از توابع هدف بهبود یابد. حال اگر بده و بستان بین توابع هدف کران‌دار نباشد، ممکن است بهبود دادن آن تابع هدف باعث بی‌نهایت بار بدتر شدن حداقل یکی دیگر از توابع هدف شود که مطمئناً مطلوب تصمیم گیرنده نخواهد بود.

تعریف ۳۳.۲.۱. (کارایی سره به مفهوم جفرین)
فرض کنید $D = \mathbb{R}^m_{\geqq}$ مخروط ترتیبی باشد. $\hat{\mathrm{x}} \in \mathcal{X}$ را کارای سره (به مفهوم جفرین [۲۳]) برای مسأله (۱.۱) گویند، هرگاه $\hat{\mathrm{x}}$ کارا باشد و $M > ۰$ای موجود باشد به‌طوری که برای هر $i \in \{۱, \cdots, m\}$ و هر $\mathrm{x} \in \mathcal{X}$ که در رابطه $f_i(\mathrm{x}) < f_i(\hat{\mathrm{x}})$ صدق می‌کنند، حداقل یک اندیس $j \in \{۱, \cdots, m\}$ وجود داشته باشد به‌طوری که $f_j(\hat{\mathrm{x}}) < f_j(\mathrm{x})$ و

$$\frac{f_i(\hat{\mathrm{x}}) - f_i(\mathrm{x})}{f_j(\mathrm{x}) - f_j(\hat{\mathrm{x}})} \leq M$$

برای معرفی بیشتر کارایی سره به مفهوم جفرین مثال زیر را در نظر بگیرید.

مثال ۳۴.۲.۱. فرض کنید $D = \mathbb{R}^۲_{\geqq}$. فضای شدنی یک مساله بهینه‌سازی دوهدفه را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\mathcal{X} = \{(x_۱, x_۲) \in \mathbb{R}^۲ | (x_۱ - ۱)^۲ + (x_۲ - ۱)^۲ \leq ۱, \ ۰ \leq x_۱, x_۲ \leq ۱\}.$$

به‌علاوه، فرض کنید $\mathcal{Y} = \mathcal{X}$. همان‌گونه که در شکل ۶.۱ نشان داده شده است، واضح است که

$$\mathcal{Y}_N = \{(y_۱, y_۲) \in \mathcal{Y} | (y_۱ - ۱)^۲ + (y_۲ - ۱)^۲ = ۱\}.$$

[۴۱] interactive algorithms

اکنون نشان می‌دهیم که $\hat{\mathrm{x}} = (۱, ۰)$ یک نقطه کارای سره نیست. بدین منظور، باید ثابت کنیم که برای هر $M > ۰$، یک اندیس $i \in \{۱, ۲\}$ و $\mathrm{x} \in \mathcal{X}$ با $f_i(\mathrm{x}) < f_i(\hat{\mathrm{x}})$ وجود دارند به‌طوری که
$$\frac{f_i(\hat{\mathrm{x}}) - f_i(\mathrm{x})}{f_j(\mathrm{x}) - f_j(\hat{\mathrm{x}})} > M$$
برای هر $j \in \{۱, ۲\}$ با $f_j(\mathrm{x}) > f_j(\hat{\mathrm{x}})$.

نقطه $\bar{\mathrm{x}} = (۱ - \varepsilon, ۱ - \sqrt{۱ - \varepsilon^۲})$ را در نظر بگیرید. از این‌که $\bar{x_۱} < \hat{x_۱}$ و $\bar{x_۲} > \hat{x_۲}$، نتیجه می‌گیریم که $i = ۱$ و $j = ۲$ بنابراین،
$$\frac{f_j(\hat{\mathrm{x}}) - f_i(\bar{\mathrm{x}})}{f_j(\bar{\mathrm{x}}) - f_j(\hat{\mathrm{x}})} = \frac{۱ - (۱ - \varepsilon)}{۱ - \sqrt{۱ - \varepsilon^۲}} = \frac{\varepsilon}{۱ - \sqrt{۱ - \varepsilon^۲}} \longrightarrow^{\varepsilon \to ۰} \infty.$$
در نتیجه، $\hat{\mathrm{x}} = (۱, ۰)$ یک نقطه کارای سره به مفهوم جفرین نیست.

توجه شود که در تعریف کارایی سره به مفهوم جفرین، مخروط ترتیبی باید $D = \mathbb{R}^m_{\geqq}$ باشد. در ادامه، تعاریفی از کارایی سره بیان می‌کنیم که در آن‌ها مخروط ترتیبی دلخواه است.

تعریف ۳۵.۲.۱. (کارایی سره به مفهوم بنسن)
فرض کنید D مخروطی محدب و بسته باشد. بردار $\hat{\mathrm{x}} \in \mathcal{X}$ را کارای سره (به مفهوم بنسن [۲]) نسبت به مخروط D برای مساله (۱.۱) گویند، هرگاه
$$cl\,(cone\,(f(\mathcal{X}) + D - f(\hat{\mathrm{x}}))) \cap (-D) = \{۰\}.$$

تعریف ۳۶.۲.۱. (کارایی سره به مفهوم هنیگ) نقطه $\hat{\mathrm{x}} \in \mathcal{X}$ را کارای سره (به مفهوم هنیگ[۳۴]) نسبت به مخروط محدب D برای مساله (۱.۱) گویند، هرگاه مخروط محدب K وجود داشته باشد به‌طوری‌که $D \setminus \{۰\} \subseteq int(K)$ و $\hat{\mathrm{x}} \in \mathcal{X}_E(K)$.

ملاحظه ۳۷.۲.۱. *همان‌گونه که از تعریف ۳۶.۲.۱ مشخص است، در تعریف کارایی سره به مفهوم هنیگ (بر خلاف تعریف بنسن از کارایی سره) لزومی ندارد که مخروط ترتیبی D بسته باشد. مخروط D می‌تواند باز باشد که در این حالت مجموعه نقاط کارای سره به مفهوم هنیگ با مجموعه جواب‌های کارا یکسان است.*

قضیه ۳۸.۲.۱. *[۳۴]. اگر $D = \mathbb{R}^m_{\geqq}$ مخروط ترتیبی باشد، آن‌گاه کارایی سره به مفهوم جفرین معادل کارایی سره به مفهوم بنسن و هنیگ است.*

قضیه ۳۹.۲.۱. *[۳۴]. اگر مخروط ترتیبی $D \subseteq \mathbb{R}^m_{\geqq}$ بسته باشد، آن‌گاه تعاریف ۳۵.۲.۱ و ۳۶.۲.۱ برای کارایی سره معادلند.*

۳.۱ روش‌های حل مسایل بهینه‌سازی چند هدفه

برای حل یک مساله بهینه‌سازی چند هدفه روش‌های زیادی موجود است که هر کدام از این روش‌ها ممکن است با توجه به شرایط مساله و انتظاراتی که تصمیم‌گیرنده دارد بر روش‌های دیگر ارجعیت داشته باشد. برای مشاهده این روش‌ها می‌توانید به کتاب‌هایی که در این زمینه موجود است به عنوان مثال

[۳۶، ۱۳، ۵۱] مراجعه کنید. در این بخش چند روش برای حل مسایل بهینه‌سازی چند هدفه ارایه می‌دهیم.

۱.۳.۱ روش ϵ-محدودیت

روش ϵ-محدودیت[۴۲] یکی از روش‌های کارا در حل مسایل بهینه سازی چند هدفه است. این روش بخصوص کاربرد زیادی در طراحی مهندسی برای پیدا کردن جواب‌های پارتو کارا دارد، زیرا این روش درک بسیار ساده‌ای دارد و از طرف دیگر پارامترهای مساله تعبیر بسیار ساده‌ای به عنوان کران‌های بالا دارند. در [۴۳، ۴۴، ۵۴] از این روش برای حل مسایل بهینه‌سازی چند هدفه به روش الگوریتم‌های تکاملی[۴۳] بکار گرفته شده است. در این روش یکی از توابع هدف مینیمم می‌شود در حالی که بقیه در قالب قید ظاهر می‌شوند. این روش اولین بار توسط هایمز[۴۴] و همکارانش [۳۳] در سال ۱۹۷۱ ابداع شد و توضیحات بیشتر را می توان در چنکنگ و هایمز[۴۵] [۶] پیدا کرد. مساله ϵ-محدودیت زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f_j(x) \\ \text{subject to} & f_k(x) \leq \epsilon_k \quad k = 1, \cdots, m \quad k \neq j, \\ & x \in \mathcal{X}. \end{array} \tag{۴.۱}$$

برای توجیه روش نشان می‌دهیم که جواب‌های بهینه (۴.۱) حداقل کارای ضعیف هستند.

گزاره ۱.۳.۱. *[۳۳]. فرض کنید $\hat{x}$ جواب بهینه (۴.۱) برای یک $j \in \{1, \cdots, m\}$ باشد. در این صورت $\hat{x}$ یک نقطه کارای ضعیف است.*

برای اینکه جواب‌های بهینه (۴.۱) بهینه پارتو باشند نیاز است که این جواب‌ها منحصر به فرد باشند.

گزاره ۲.۳.۱. *فرض کنید $\hat{x}$ جواب بهینه منحصرد به فرد (۴.۱) برای یک $j \in \{1, \cdots, m\}$ باشد. در این صورت $\hat{x} \in \mathcal{X}_{sE}$ (و در نتیجه $\hat{x} \in \mathcal{X}_E$).*

در حالت کلی برای اینکه $\hat{x}$ یک جواب بهینه پارتو باشد بایستی $\hat{x}$ جواب بهینه مساله (۴.۱) برای هر$j \in \{1, \cdots, m\}$ و با یک ϵ ثابت در تمام این مسایل باشد.

قضیه ۳.۳.۱. *نقطه شدنی $\hat{x} \in \mathcal{X}$ یک نقطه بهینه پارتو است اگر و تنها اگر وجود داشته باشد $\hat{\epsilon} \in \mathbb{R}^m$ به طوری که $\hat{x}$ جواب بهینه مساله (۴.۱) برای هر $j \in \{1, \cdots, m\}$ باشد.*

قضیه بالا نشان می دهد که با انتخاب‌های مناسب برای ϵ می توان تمام جواب‌های بهینه را پیدا کرد. ε_j را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$\varepsilon_j := \{\epsilon \in \mathbb{R}^m : \{x \in \mathcal{X} : f_k(x) \leq \epsilon_k, k \neq j\} \neq \emptyset\}$$

---

[۴۲] ϵ-Constraint method

[۴۳] Evolutionary algorithm

[۴۴] Haimes et.al.

[۴۵] Chankong and Haime

در واقع ε_j مجموعه بردارهای سمت راست در مساله (۴.۱) هستند که به ازای آن‌ها این مساله شدنی است. حال مجموعه جواب‌های بهینه مساله (۴.۱) را برای یک $\epsilon \in \varepsilon_j$ به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\mathcal{X}_j(\epsilon) = \{x \in \mathcal{X} : \text{است (۴.۱) جواب بهینه مساله } x\}$$

با توجه به گزاره ۱.۳.۱ و قضیه ۳.۳.۱ برای هر $\epsilon \in \bigcap_{j=1}^{m} \varepsilon_j$ داریم

$$\bigcap_{j=1}^{m} \mathcal{X}_j(\epsilon) \subset \mathcal{X}_E, \quad \mathcal{X}_j(\epsilon) \subset \mathcal{X}_{wE}$$

۲.۳.۱ روش هیبرید

روش هیبرید[۴۶] ترکیبی از روش ϵ-محدودیت و روش مجموع وزن‌دار[۴۷] است. در این روش تابع هدف، مجموع وزن داری از توابع هدف است و همچنین تمام توابع هدف به صورت قید در مساله ظاهر می‌شوند. فرض کنید $\hat{x}$ یک نقطه شدنی دلخواه باشد. مساله زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \sum_{k=1}^{m} \lambda_k f_k(x) \\ \text{subject to} \quad & f_k(x) \leq f_k(\hat{x}) \quad k = 1, \cdots, m \\ & x \in \mathcal{X}, \end{aligned} \tag{۵.۱}$$

که در آن $\lambda \in \mathbb{R}^m_{\geq}$.

قضیه ۴.۳.۱. *[۲۵]. فرض کنید $\lambda \in \mathbb{R}^m_{>}$. نقطه شدنی $\hat{x} \in \mathcal{X}$ یک جواب بهینه برای مساله (۵.۱) است اگر و تنها اگر $\hat{x} \in \mathcal{X}_E$.*

۳.۳.۱ روش بنسن

روش و نتایجی که در این بخش ارایه می‌شوند متعلق به بنسن [۳] می‌باشد. این ایده به این صورت است که ابتدا یک نقطه شدنی آغازین مانند $\hat{x} \in \mathcal{X}$ در نظر گرفته می‌شود، اگر $\hat{x}$ بهینه نبود آنگاه یک نقطه بهینه که بر $\hat{x}$ غلبه می‌کند معرفی می‌شود. برای این منظور به تعداد m متغیر نامنفی انحرافی به صورت $l_k = f_k(x) - f_k(\hat{x})$ معرفی می‌شوند و مجموعشان ماکسیمم می‌شود. نتیجه این کار معرفی نقطه شدنی x است که بر $\hat{x}$ غلبه می‌کند، اگر چنین نقطه‌ای وجود داشته باشد و تابع هدف با انتخاب x به عنوان دورترین نقطه از $\hat{x}$ تضمین می‌کند که این نقطه بهینه باشد. مساله بنسن برای نقطه x به

[۴۶] Hybrid method

[۴۷] Weighted sum method

صورت زیر است:

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \sum_{k=1}^{m} l_k \\ \text{subject to} & f_k(x) - l_k - f_k(\hat{x}) = 0 \quad k = 1, \cdots, m \\ & l \geq 0 \\ & x \in \mathcal{X}, \end{array} \tag{۶.۱}$$

مساله (۶.۱) می‌تواند برای بررسی اینکه آیا یک نقطه شدنی کارا است یا نه بکار گرفته شود.

قضیه ۵.۳.۱. *[۳]. نقطه شدنی $x \in \mathcal{X}$ یک نقطه بهینه است اگر وتنها اگر مقدار بهینه مساله (۶.۱) برابر با صفر باشد.*

در حالت کلی نمی‌توان انتظار داشت که نقطه آغازین بهینه باشد. نقطه قوت این روش در این است که اگر مساله دارای مقدار بهینه متناهی باشد، آنگاه جواب بهینه مساله یک نقطه کارا است. در حالتی که شرط تحدب برقرار باشد می‌توان نشان داد که اگر مساله دارای مقدار بهینه نامتناهی باشد آنگاه هیچ نقطه بهینه سره وجود ندارد.

گزاره ۶.۳.۱. *[۳] اگر مساله (۶.۱) دارای یک جواب بهینه مانند $(\bar{x}, \bar{l})$ باشد (و مقدار بهینه متناهی) آنگاه $\bar{x} \in \mathcal{X}_E$.*

جواب این سوال که اگر مساله (۶.۱) دارای مقدار بهینه نامتناهی باشد چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت را، می‌توان در حالتی که شرط تحدب برقرار باشد داد.

قضیه ۷.۳.۱. *[۳]. فرض کنید که توابع f_k برای $k = 1, \cdots, m$ توابعی محدب و مجموعه $\mathcal{X}$ مجموعه‌ای محدب باشد اگر مساله (۶.۱) دارای مقدار بهینه نامتناهی باشد آنگاه $\mathcal{X}_{pE} = \emptyset$. ($\mathcal{X}_{pE}$ مجموعه نقاط کارای سره است.)*

قضیه ۸.۳.۱. *[۳] فرض کنید که توابع f_k برای $k = 1, \cdots, m$ توابعی محدب و مجموعه $\mathcal{X}$ مجموعه‌ای محدب باشند و $f(\mathcal{X})$ یک مجموعه $\mathbb{R}^m_{\geqq}$-بسته باشد. اگر مساله (۶.۱) دارای مقدار بهینه نامتناهی باشد آنگاه $\mathcal{X}_E = \emptyset$.*

۴.۱ جواب‌های تقریباً کارا در مسائل بهینه‌سازی چندهدفه

درسال‌های اخیر پیدا کردن جواب‌های تقریباً کارا[۴۸] یک مساله بهینه‌سازی چندهدفه بسیار مورد توجه قرار گرفته است. دلایل متعددی برای جالب و مفید بودن جواب‌های تقریباً کارا وجود دارند که مهم‌ترین آن‌ها را می‌توان به صورت زیر بیان نمود .

[۴۸] Approximately efficient solutions

(۱) اغلب مواقع برای حل یک مساله بهینه‌سازی چندهدفه باید یک مساله تک‌هدفه متناظر با آن را حل کرد و رابطه بین جواب‌های بهینه مساله تک‌هدفه و جواب‌های کارای مساله چندهدفه را بررسی کرد. اما یک مساله تک هدفه اغلب با روش‌های تکراری[۴۹] حل می‌شود و جواب‌های تقریبی برای مساله اسکالرسازی شده بدست می‌آیند. لذا پیدا کردن رابطه بین این جواب‌های تقریبی و جواب‌های تقریباً کارای مساله بهینه‌سازی چندهدفه از اهمیت زیادی برخوردار است.

(۲) در بسیاری مواقع ممکن است مجموعه جواب‌های کارای یک مساله تهی باشد، اما تحت شرایطی ضعیف‌تر اغلب مواقع جواب‌های تقریباً کارایی وجود دارند که برای تصمیم گیرنده مهم هستند.

(۳) در بیشتر مسایل واقعی، مانند مسایل پزشکی و مهندسی [۱۵، ۵۸، ۵۹]، نمی‌توان فرم دقیقی از مساله را پیش از حل این مساله بدست آورد و اغلب مدل‌های ارایه شده یک نمونه ساده شده از مساله اصلی هستند و الگوریتم‌های حل این مدل‌ها جواب‌های تقریبی ارایه می‌دهند.

(۴) در اغلب مسایل چندهدفه (نامحدب)، پیدا کردن یک دسته از جواب‌های کارا ممکن است زمان زیادی بگیرد. لذا تصمیم‌گیران، پیدا کردن یک جواب تقریباً کارا درکوتاه مدت را به بدست آوردن جواب دقیق در بلند مدت ترجیح می‌دهند.

تا کنون روش‌های مختلفی برای بدست آوردن مجموعه جواب‌های تقریباً کارا در مسایل چند هدفه بیان شده است. به عنوان مثال، می توان به روش‌های تکراری [۵۱، ۱۶] اشاره کرد. به علاوه، روش‌های ابتکاری[۵۰] زیادی که توجیه دقیق ریاضی ندارند نیز مطرح شده‌اند [۱۰، ۶۵].
در عین حال روش‌هایی برای پیدا کردن مجموعه جواب‌های تقریباً کارا وجود دارند که همراه با تحلیل‌های نظری‌اند [۲۲، ۱۱، ۱۹، ۱، ۱۲، ۱۷، ۲۱، ۲۸، ۳۰، ۳۱]. در ادامه، برخی از این روش‌ها را بررسی می‌کنیم.
تا کنون تعاریف زیادی برای جواب‌های تقریباً کارا مسایل بهینه‌سازی چندهدفه ارایه شده است [۲۸، ۳۱، ۳۲، ۶۲، ۶۳، ۶۴]. یکی از مهمترین و پرکاربردترین این تعاریف توسط کوتاتلادزه [۴۲] بیان شده است، که ما در این رساله از آن استفاده می‌کنیم.
پس از آنکه کوتاتلادزه مفهوم ε–کارایی را مطرح کرد، لوریدن[۵۱] [۵۰] مفهوم جواب‌های ε–کارا را از بهینه‌سازی تک هدفه به بهینه‌سازی چندهدفه تعمیم داد و در ادامه، وایت[۵۲] [۶۶] شش تعریف برای ε–کارایی را بررسی کردند که از جمله می‌توان به مراجع [۱۹، ۶۸، ۱۷، ۳۱، ۱۸، ۴۹] اشاره کرد.
فرض کنید $\varepsilon \in D$ داده شده باشد.

تعریف ۱.۴.۱. [۵۰، ۱۹]. بردار $\hat{\mathrm{x}} \in \mathcal{X}$ را یک جواب ε–کارا برای مساله (۱.۱) نسبت به مخروط ترتیبی D گویند، هرگاه هیچ بردار $\mathrm{x} \in \mathcal{X}$ با $f(\mathrm{x}) \leq_D f(\hat{\mathrm{x}}) - \varepsilon$ موجود نباشد، یا به طور معادل

$$(f(\hat{\mathrm{x}}) - \varepsilon - D \setminus \{0\}) \cap f(\mathcal{X}) = \emptyset.$$

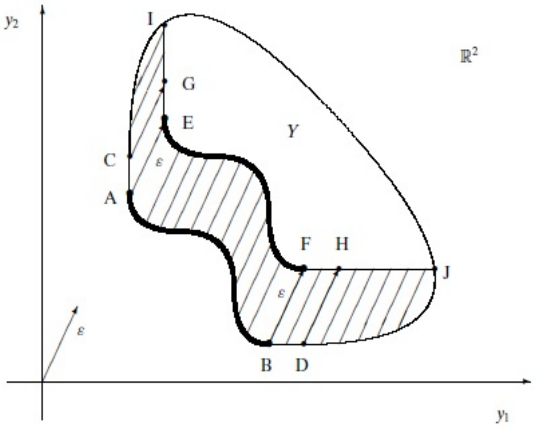
---

۴۹ Iterative methods

۵۰ Heuristic methods

۵۱ Loridan

۵۲ White



شکل ۷.۱: مجموعه جواب‌های غیرمغلوب(ضعیف) و ε-غیرمغلوب (ضعیف) یک مساله دو هدفه [۱۸]

مجموعه همه جواب‌های ε-کارا نسبت به مخروط D را با $\mathcal{X}_{\varepsilon E}(D)$ یا $\mathcal{X}_{\varepsilon E}$ نمایش می‌دهیم.
تصویر مجموعه جواب‌های ε-کارا را مجموعه ε-غیر مغلوب می‌نامیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{Y}_{\varepsilon N} := \{f(\mathrm{x}) | \mathrm{x} \in \mathcal{X}_{\varepsilon E}(D)\}.$$

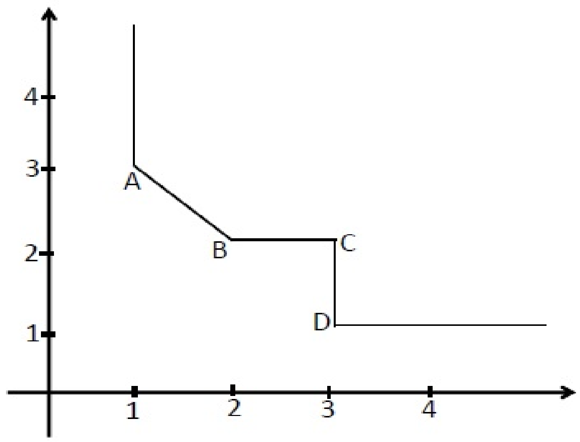
تعریف ۲.۴.۱. [۵۰، ۱۹]. فرض کنید D یک مخروط ترتیبی محدب و توپر باشد. بردار $\hat{\mathrm{x}} \in \mathcal{X}$ را یک جواب ε-کارای ضعیف برای مسأله (۱.۱) نسبت به مخروط D گویند، هرگاه هیچ بردار $\mathrm{x} \in \mathcal{X}$ با $f(\mathrm{x}) <_D f(\hat{\mathrm{x}}) - \varepsilon$ موجود نباشد، یا به طور معادل $(f(\hat{\mathrm{x}}) - \varepsilon - int(D)) \cap f(\mathcal{X}) = \emptyset$.
مجموعه همه جواب‌های ε-کارای ضعیف نسبت به مخروط D را با $\mathcal{X}_{\varepsilon WE}(D)$ یا $\mathcal{X}_{\varepsilon WE}$ نمایش می‌دهیم.
تصویر مجموعه جواب‌های ε-کارای ضعیف را مجموعه ε-غیرمغلوب ضعیف می‌نامیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{Y}_{\varepsilon WN} := \{f(\mathrm{x}) | \mathrm{x} \in \mathcal{X}_{\varepsilon WE}\}.$$

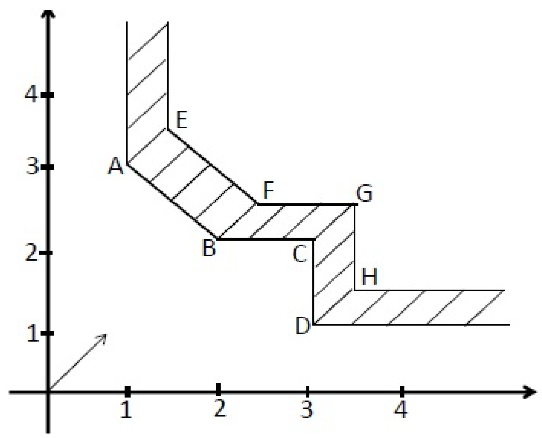
ملاحظه ۳.۴.۱. *همان‌گونه که از تعریف بالا مشاهده می‌شود، اگر قرار دهیم $\varepsilon = 0$، آن‌گاه به ترتیب تعاریف کارایی و کارایی ضعیف را داریم.*

اکنون، با مثال‌هایی رابطه بین مفاهیم مختلف کارایی را نشان می‌دهیم.

مثال ۴.۴.۱. مجموعه $\mathcal{Y} \subseteq \mathbb{R}^2$ و شکل ۷.۱ را در نظر بگیرید. همان‌گونه که در این شکل مشاهده می‌شود، منحنی متصل کننده نقاط A و B نشان دهنده مجموعه جواب‌های غیرمغلوب و منحنی متصل کننده نقاط C و D نقاط غیر مغلوب ضعیف است. با افزودن بردار داده شده $\varepsilon \in \mathbb{R}^2_{\geq}$ به نقاط مشخص شده، نقاط E، F، G و H بدست می‌آیند. در این شکل، مجموعه جواب‌های ε-غیرمغلوب، ناحیه هاشور زده همراه با همه نقاط مشخص شده به جز دو منحنی متصل کننده نقاط I, G, E و F, H, J است، درحالی‌که مجموعه جواب‌های ε-غیرمغلوب ضعیف شامل منحنی کامل از I به J نیز هست.



شکل ۸.۱: مجموعه جواب‌های غیرمغلوب(ضعیف) در مثال ۵.۴.۱



شکل ۹.۱: مجموعه جواب‌های غیر مغلوب(ضعیف) در مثال ۵.۴.۱

مثال ۵.۴.۱. فرض کنید $f:\mathbb{R}^۲\to\mathbb{R}^۲$ یک تابع دو ضابطه‌ای باشد و $D=\mathbb{R}^۲_{\geqq}$. ناحیه شدنی مساله را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\mathcal{X}=\{(x_۱,x_۲)\in\mathbb{R}^۲|x_۱\geq ۱,x_۲\geq ۱,x_۱+x_۲\geq ۴,\max\{۲x_۱,۳x_۲\}\geq ۶\}.$$

به علاوه، فرض کنید توابع هدف به صورت $f(x_۱,x_۲)=(x_۱,x_۲)$ داده شده باشند. همان‌گونه که در شکل ۸.۱ دیده می‌شود، داریم:

$$\mathcal{X}_E(D)=\{\lambda(۱,۳)+(۱-\lambda)(۲,۲)|\lambda\in[۰,۱]\}\cup\{(۳,۱)\}$$

و

$$\mathcal{X}_{WE}(D)=\mathcal{X}_E(D)\cup\{\lambda(۲,۲)+(۱-\lambda)(۳,۲)|\lambda\in[۰,۱]\}\cup\{\lambda(۳,۲)+(۱-\lambda)(۳,۱)$$
$$|\lambda\in[۰,۱]\}\cup\{(x_۱,x_۲)\in\mathbb{R}^۲|x_۱=۱,x_۲\geq ۳\}\cup\{(x_۱,x_۲)\in\mathbb{R}^۲|x_۲=۱,x_۱\geq ۳\}. \tag{۷.۱}$$

حال فرض کنید بردار $\varepsilon = (\frac{1}{\sqrt{8}}, \frac{1}{\sqrt{8}})$ داده شده باشد. همان‌گونه که در شکل ۹.۱ مشاهده می‌شود، مجموعه جواب‌های ε-کارا شامل ناحیه هاشور خورده، منحنی متصل کننده نقاط A و B، منحنی متصل کننده نقاط E و F و تک تک نقاط D و H است، درحالی‌که مجموعه جواب‌های ε-کارای ضعیف شامل ناحیه هاشور خورده و هر دو منحنی بالا و پایین این ناحیه است.

قضیه ۶.۴.۱. *فرض کنید D یک مخروط ترتیبی دلخواه و $\varepsilon \in D \setminus \{0\}$ داده شده است. در این صورت،*

$$\mathcal{X}_{\varepsilon E}(D) \subseteq \mathcal{X}_{\varepsilon WE}(D).$$

همان‌گونه که برای جواب‌های کارا ذکر شد، برای بعضی جواب‌های ε-کارا نیز ممکن است مقدار بده و بستان بین توابع بی‌کران باشد و لذا جواب‌های ε-کارایی که بده و بستان بین توابع هدفشان متناهی است، جواب‌هایی مطلوب‌اند که به آن‌ها جواب‌های ε-کارای سره گویند.
لی[53] و وانگ[54] [۴۵]، تعریف ε-کارایی سره را برای حالتی که $D = \mathbb{R}^m_{\geqq}$ یک مخروط ترتیبی است، ارایه دادند که تعمیمی از تعریف کارایی سره به مفهوم جفرین است و به صورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف ۷.۴.۱. **(ε-کارایی سره به مفهوم جفرین)**[۴۵].
فرض کنید $D = \mathbb{R}^m_{\geqq}$ مخروط ترتیبی باشد و $\varepsilon \in \mathbb{R}^m_{\geqq}$. $\hat{\mathrm{x}} \in \mathcal{X}$ را کارای سره (به مفهوم جفرین) برای مسأله (۱.۱) گویند، هرگاه $\hat{\mathrm{x}}$، ε-کارا باشد و $M > 0$ای موجود باشد به‌طوری که برای هر $i \in \{1, \cdots, m\}$ و هر $\mathrm{x} \in \mathcal{X}$ که در رابطه $f_i(\mathrm{x}) < f_i(\hat{\mathrm{x}}) - \varepsilon_i$ صدق می‌کنند، حداقل یک اندیس $j \in \{1, \cdots, m\}$ وجود داشته باشد به‌طوری که $f_j(\hat{\mathrm{x}}) - \varepsilon_j < f_j(\mathrm{x})$ و

$$\frac{f_i(\hat{\mathrm{x}}) - f_i(\mathrm{x}) - \varepsilon_i}{f_j(\mathrm{x}) - f_j(\hat{\mathrm{x}}) + \varepsilon_j} \leq M.$$

مجموعه همه نقاط ε-کارای سره به مفهوم جفرین را با $\mathcal{X}^G_{\varepsilon PE}(D)$ یا $\mathcal{X}^G_{\varepsilon PE}$ نشان میدهیم.
تصویر مجموعه جواب‌های ε-کارای سره به مفهوم جفرین را مجموعه ε-غیرمغلوب سره(به مفهوم جفرین) گوییم و با $\mathcal{Y}_{\varepsilon PN}(D)$ نمایش می‌دهیم.

ملاحظه ۸.۴.۱. *واضح است که اگر $D = \mathbb{R}^m_{>}$ مخروط ترتیبی باشد، داریم:*

$$\mathcal{X}^G_{\varepsilon PE}(D) \subseteq \mathcal{X}_{\varepsilon E}(D) \subseteq \mathcal{X}_{\varepsilon WE}(D),$$

و

$$\mathcal{Y}_{\varepsilon PN}(D) \subseteq \mathcal{Y}_{\varepsilon N}(D) \subseteq \mathcal{Y}_{\varepsilon WN}(D).$$

قضایای زیر برخی خواص جواب‌های ε-کارا را نشان می‌دهند.

قضیه ۹.۴.۱. *[۱۷]. فرض کنید D_1 و D_2 دو مخروط دلخواه باشند که $D_2 \subseteq D_1$. در این صورت،*

$$\mathcal{X}_{\varepsilon E}(D_1) \subseteq \mathcal{X}_{\varepsilon E}(D_2).$$

۵۳

۵۴

قضیه ۱.۴.۱۰. *[۱۷]. فرض کنید $\varepsilon_2 \leqq_D \varepsilon_1$، در این صورت،*

$$\mathcal{X}_{\varepsilon_1 E}(D) \subseteq \mathcal{X}_{\varepsilon_2 E}(D).$$

نتیجه ۱.۴.۱۱. *برای هر $\varepsilon \in D \setminus \{0\}$، داریم:*

$$\mathcal{X}_E(D) \subseteq \mathcal{X}_{\varepsilon E}(D).$$

قضیه ۱.۴.۱۲. *[۳۵]. فرض کنید $\varepsilon = q\lambda$ که $\lambda \in D \setminus \{0\}$، $q > 0$ و D مخروطی توپر باشد. در این صورت،*

$$\cap_{q>0}\mathcal{X}_{\varepsilon E}(D) = \cap_{q>0}\mathcal{X}_{\varepsilon WE}(D) = \mathcal{X}_{WE}(D).$$

قضیه ۱.۴.۱۳. *[۳۰]. فرض کنید $\varepsilon = q\lambda \in D \setminus \{0\}$. در این‌صورت،*

$$\cap_{t>q}\mathcal{X}_{t\lambda E}(D) = \mathcal{X}_{\varepsilon WE}(D).$$

۱.۵ روش‌هایی برای بدست آوردن جواب‌های تقریباً کارا (ضعیف، سره)

برای بدست آوردن جواب‌های تقریباً کارا یک مساله بهینه‌سازی چند هدفه روش‌های زیادی موجود است که هر کدام از این روش‌ها ممکن است با توجه به شرایط مساله و انتظاراتی که تصمیم گیرنده دارد بر روش‌های دیگر ارجعیت داشته باشد. در اکثر این روش‌ها سعی می‌شود که یک مساله تک‌هدفه متناظر با مساله اصلی ارایه [۱۳، ۶۰، ۱۶] و سپس رابطه بین جواب‌های تقریباً بهینه مساله تک‌هدفه و جواب‌های ε-کارای مساله چندهدفه بررسی شود. در این بخش، به برخی از مهم‌ترین روش‌ها اشاره می‌کنیم. قابل ذکر است که فرض می‌کنیم $D = \mathbb{R}^m_{\geqq}$ مخروط ترتیبی باشد، لذا از ε-کارایی سره به مفهوم جفرین استفاده می‌کنیم.

فرض کنید $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ و $\delta \geq 0$.

تعریف ۱.۵.۱. نقطه $\hat{x} \in \mathcal{X}$ یک جواب δ-بهینه برای مساله تک‌هدفه

$$\begin{aligned} \min \quad & \varphi(x) \\ s.t. \quad & x \in \mathcal{X} \end{aligned} \tag{۱.۸}$$

است، هرگاه برای $x \in \mathcal{X}$ داشته باشیم $\varphi(\hat{x}) - \delta \leq \varphi(x)$. همچنین $\hat{x} \in \mathcal{X}$ یک جواب δ-بهینه اکید[۵۵] گفته می‌شود اگر $\varphi(\hat{x}) - \delta < \varphi(x)$ برای هر $x \in \mathcal{X}$.

توجه شود که در تعریف ۱.۵.۱ اگر $\delta = 0$، به ترتیب به تعریف جواب‌های بهینه و بهینه اکید می‌رسیم.

[۵۵] strictly δ-optimal

۱.۵.۱ روش ϵ-محدودیت

روش ϵ-محدودیت در بدست آوردن جواب‌های تقریبی مسایل بهینه‌سازی برداری روشی کاراست [۱۳، ۵۱، ۱۰]. در [۴۴] از این روش برای حل مسایل بهینه‌سازی چند هدفه به روش الگوریتم‌های تکاملی بکارگرفته شده است. مانند روش ε-محدودیت برای بدست آوردن جواب‌های کارا در این روش نیز یکی از توابع هدف مینیمم می‌شود در حالی که بقیه در قالب قید ظاهر می‌شوند. این روش اولین بار توسط هایمز و همکارانش [۳۳] در سال ۱۹۷۱ ابداع شد و توضیحات بیشتر را می توان در چنکنگ و هایمز [۶] پیدا کرد. وایت [۶۶] و اینگاو[۵۶] و وییسیک[۵۷] [۱۹] از این روش برای بدست آوردن جواب‌های ε-کارا (ضعیف) بهره برده‌اند. مساله ϵ-محدودیت زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && f_k(x) \\ &\text{subject to} && f_i(x) \leq \epsilon_i \quad i = 1, \cdots, m \quad i \neq k, \\ &&& x \in \mathcal{X}. \end{aligned} \tag{۹.۱}$$

که در آن $\epsilon_i \in \mathbb{R}$ کران‌های بالای داده شده‌اند. در قضیه زیر نتایج بدست آمده بر پایه این روش برای جواب‌های ε-کارا (ضعیف) را ارایه می‌دهیم.

قضیه ۲.۵.۱. *[۱۹]. فرض کنید $\varepsilon \in \mathbb{R}^m_{\geqq}$ داده شده باشد و $\delta \leq \varepsilon_k$. در این صورت داریم:*

(۱) اگر $\hat{x} \in \mathcal{X}$ یک جواب δ-بهینه اکید برای مساله (۹.۱) باشد، آن‌گاه $\hat{x}$ یک جواب ε-کارا برای مساله بهینه‌سازی چندهدفه (۱.۱) است.

(۲) اگر $\hat{x} \in \mathcal{X}$ یک جواب δ-بهینه برای مساله (۹.۱) باشد، آن‌گاه $\hat{x}$ یک جواب ε-کارای ضعیف برای مساله بهینه‌سازی چندهدفه (۱.۱) است.

۲.۵.۱ روش مجموع وزن‌دار

در روش مجموع وزن‌دار[۵۸] وزن‌های نامنفی متناظر با توابع هدف در نظر گرفته می‌شوند و سپس مجموع وزن‌دار توابع هدف روی فضای شدنی مینیمم می‌شود. لذا مساله مجموع وزن‌دار متناظر با مساله بهینه‌سازی چندهدفه (۱.۱) به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} &\text{manimize} && \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x) \\ &\text{subject to} && x \in \mathcal{X}, \end{aligned} \tag{۱۰.۱}$$

که در آن، $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_m)$ یک بردار شامل ضرایب وزنی نسبت داده شده به توابع هدف است که فرض می‌شود ناصفر و نامنفی است و $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$.

این روش یکی از مهمترین روش‌هایی است که توسط افراد مختلف بررسی شده است [۱۱، ۱۲، ۶۶].

[۵۶] Engau

[۵۷] Wiecek

[۵۸] Weighted sum method

در قضیه زیر رابطه بین جواب‌های تقریباً بهینه این مساله و جواب‌های تقریباً کارای (ضعیف) مساله بهینه‌سازی چندهدفه اصلی نشان داده شده است.

قضیه ۱.۵.۳. *[۱۹، ۱۲]. مساله بهینه‌سازی چندهدفه (۱.۱) را در نظر بگیرید. فرض کنید $\varepsilon \in \mathbb{R}^m_{\geqq}$ داده شده باشد و $\delta \leq \sum_{i=1}^m \lambda_i \varepsilon_i$. در این صورت، داریم:*

(۱) اگر $\hat{x} \in \mathcal{X}$ یک جواب δ-بهینه اکید برای مساله (۱.۱۰) باشد، آن‌گاه $\hat{x}$ یک جواب ε-کارا برای مساله چند هدفه (۱.۱) است.

(۲) اگر $\hat{x} \in \mathcal{X}$ یک جواب δ-بهینه برای مساله (۱.۱۰) باشد، آن‌گاه $\hat{x}$ یک جواب ε-کارای ضعیف برای مساله چندهدفه (۱.۱) است.

(۳) اگر $\hat{x} \in \mathcal{X}$ یک جواب δ-بهینه برای مساله (۱.۱۰) با $\lambda \in \mathbb{R}^m_{>}$ باشد، آن‌گاه $\hat{x}$ یک جواب ε-کارا برای مساله چندهدفه (۱.۱) است.

روش مجموع وزن‌دار از معدود روش‌هایی است که با استفاده از آن می‌توان جواب‌های ε-کارای سره را بدست آورد، این مطلب توسط لیو [۴۸] بررسی شده است.

قضیه ۱.۵.۴. *[۴۸]. فرض کنید $\varepsilon \in \mathbb{R}^m_{\geqq}$ داده شده باشد و $\delta = \sum_{i=1}^m \lambda_i \varepsilon_i$. اگر $\hat{x} \in \mathcal{X}$ یک جواب δ-بهینه برای مساله (۱.۱۰) با $\lambda \in \mathbb{R}^m_{>}$ باشد، آن‌گاه $\hat{x}$ یک جواب ε-کارای سره برای مساله بهینه‌سازی چندهدفه (۱.۱) است.*

در قضیه زیر، یک شرط لازم برای تشخیص جواب‌های ε-کارای سره مسایل بهینه‌سازی چند هدفه ارایه می‌دهیم. توجه شود که در این قضیه، محدب بودن همه توابع هدف لازم است.

قضیه ۱.۵.۵. *[۴۸]. فرض کنید $\mathcal{X}$ یک مجموعه محدب باشد و f_i، $i = 1, \cdots, m$، توابعی محدب باشند و $\delta = \sum_{i=1}^m \lambda_i \varepsilon_i$. در این صورت، $\hat{x} \in \mathcal{X}$ یک جواب δ-بهینه برای مساله تک هدفه (۱.۱۰) با $\lambda \in \mathbb{R}^m_{>}$ است اگر وتنها اگر $\hat{x}$ یک جواب ε-کارای سره برای مساله چند هدفه (۱.۱) باشد.*

۱.۵.۳ روش هیبرید

روش هیبرید ترکیبی از روش ϵ-محدودیت و روش مجموع وزن‌دار [۱۳، ۲۵] است. همانطور که در بخش‌های قبل ذکر شد، در این روش تابع هدف، مجموع وزن داری از توابع هدف است و همچنین تمام توابع هدف به صورت قید در مساله ظاهر می‌شوند. فرض کنید $\hat{x}$ یک نقطه شدنی دلخواه باشد. مساله زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x) \\ \text{subject to} \quad & f_j(x) \leq f_j(\hat{x}) \quad j = 1, \cdots, m \\ & x \in \mathcal{X}, \end{aligned} \tag{۱.۱۱}$$

که در آن $\lambda \in \mathbb{R}^m_{\geqq}$ یک بردار وزن داده شده است.

قضیه ۶.۵.۱. *[۱۹]. مساله بهینه‌سازی چندهدفه (۱.۱) را در نظر بگیرید، فرض کنید $\delta \le \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varepsilon_i$. در این صورت، داریم:*

(۱) اگر $\hat{x} \in \mathcal{X}$ یک جواب δ-بهینه اکید برای مساله (۱۱.۱) باشد، آن‌گاه $\hat{x}$ یک جواب ε-کارا برای مساله بهینه‌سازی چندهدفه (۱.۱) است.

(۲) اگر $\hat{x}\mathcal{X}$ یک جواب δ-بهینه برای مساله (۱۱.۱) باشد، آن‌گاه $\hat{x}$ یک جواب ε-کارای ضعیف برای مساله بهینه‌سازی چندهدفه (۱.۱) است.

(۳) اگر $\hat{x}\mathcal{X}$ یک جواب δ-بهینه برای مساله (۱۱.۱) با $\lambda \in \mathbb{R}^m_>$ باشد، آن‌گاه $\hat{x}$ یک جواب ε-کارا برای مساله بهینه‌سازی چندهدفه (۱.۱) است.

۴.۵.۱ روش چبیشف وزن‌دار

روش چبیشف وزن‌دار[۵۹] برای یک مساله بهینه‌سازی چندهدفه به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \max\limits_{i=1,\cdots,m} \lambda_i (f_i(x) - y_i^U) \\ \text{subject to} & x \in \mathcal{X}, \end{array} \tag{۱۲.۱}$$

که در آن، $\lambda \in \mathbb{R}^m_{\geqq} \setminus \{0\}$ و $y^U \in \mathbb{R}^m$ یک نقطه فوق ایده‌آل است (یعنی اگر $y_i^I = \min_{x\in\mathcal{X}} f_i(x)$ آن‌گاه $Y^U < Y^I$).

در قضیه زیر رابطه بین جواب‌های ε-کارای (ضعیف) مساله بهینه‌سازی چند هدفه (۱.۱) و جواب‌های δ-بهینه مساله چبیشف وزن‌دار را بررسی می‌کنیم.

قضیه ۷.۵.۱. *[۱۹]. فرض کنید $\varepsilon \in \mathbb{R}^m_{\geqq}$ داده شده باشد و $\delta \le \min_{i=1,\cdots,m}\{\lambda_i\varepsilon_i\}$.*

(۱) اگر $\hat{x}$ یک جواب δ-بهینه اکید برای مساله (۱۲.۱) باشد، آن‌گاه $\hat{x}$ یک جواب ε-کارا برای مساله بهینه‌سازی چندهدفه (۱.۱) است.

(۲) اگر $\hat{x}$ یک جواب δ-بهینه برای مساله (۱۲.۱) باشد، آن‌گاه $\hat{x}$ یک جواب ε-کارای ضعیف برای مساله بهینه‌سازی چندهدفه (۱.۱) است.

در قضیه زیر یک شرط لازم و کافی برای جواب‌های ε-کارای ضعیف ارایه شده است.

قضیه ۸.۵.۱. *[۴۵]. فرض کنید $\varepsilon \in \mathbb{R}^m_{\geqq}$ داده شده باشد. $\hat{x} \in \mathcal{X}$ یک جواب ε-کارای ضعیف برای مساله بهینه‌سازی چندهدفه (۱.۱) است اگر و تنها اگر $\hat{x}$ یک جواب δ-بهینه برای مساله (۱۲.۱) با $\delta = \max_{1\le i\le m} \lambda_i\varepsilon_i$ و $\lambda_i = [f_i(\hat{x}) - y_i^U]^{-1}$، $i = 1, \cdots, m$ باشد.*

توجه شود که استفاده از قضیه ۸.۵.۱ در عمل مشکل ساز است، چون در شرط کافی داده شده برای ε-کارایی ضعیف، مقدار $\lambda \in \mathbb{R}^m_>$ باید از قبل مشخص شده باشد و به نقاط δ-بهینه مورد بررسی وابسته است.

[۵۹] Weighted Tchebycheff method

۵.۵.۱ روش چبیشف وزن‌دار فزوده

روش چبیشف وزن‌دار نتایجی راجع به رابطه بین جواب‌های تقریباً بهینه و جواب‌های کارای سره ندارد. به‌علاوه، اگر جواب بهینه مساله چبیشف وزن‌دار یگانه نباشد، آن‌گاه جواب‌های بهینه این مساله ممکن است تنها کارای ضعیف باشند [۱۳، ۶۰، ۱۶، ۶۱]، برای رفع این مشکل، روش چبیشف وزن‌دار فزوده [۶۰] توسط استویر[۶۱] و همکارانش [۶۰، ۶۱] برای به دست آوردن جواب‌های کارای سره به کار گرفته شد. در این روش، به یک نقطه فوق ایده‌آل و یک بردار وزن $\lambda \in \mathbb{R}^m_{\geqq}$ نیاز است. برای اسکالرسازی کردن مساله بهینه‌سازی چندهدفه، مساله چبیشف وزن‌دار فزوده به صورت زیر فرمول بندی می‌شود:

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \max_{i=1,\cdots,m} \lambda_i(f_i(x) - y_i^U) + \sum_{t\in I} \rho(f_t(x) - y_t^U) \\ \text{subject to} \quad & x \in \mathcal{X}, \end{aligned} \tag{۱۳.۱}$$

که در آن $I = \{1, \cdots, m\}$ و y^U یک نقطه فوق ایده‌آل و $\lambda \in \mathbb{R}^m_{\geqq}$ و $\rho > 0$ عدد مثبت کوچکی است. استویر و چو[۶۲] [۶۱] ثابت کردند که با کمک مساله (۱۳.۱) می‌توان جواب‌های کارای سره را تولید کرد. هم‌چنین، برای هر نقطه کارای سره می‌توان پارامترهایی را تعیین کرد تا جوابی برای مساله (۱۳.۱) باشد. با استفاده از مساله (۱۳.۱) لی و وانگ [۴۵] یک شرط لازم را برای تشخیص جواب‌های ε-کارای سره ارایه دادند، که در قضیه زیر می‌آوریم.

قضیه ۹.۵.۱. *[۴۵]. اگر $\hat{x}$ یک جواب ε-کارای سره برای مساله (۱.۱) باشد، آن‌گاه $\rho > 0$ و $\lambda \in \mathbb{R}^m_{>}$ وجود دارند به‌طوری‌که $\hat{x}$ یک جواب δ-بهینه برای مساله (۱۳.۱) با $\delta = \max_{i=1,\cdots,m}(\lambda_i\varepsilon_i + \rho\sum_{i=1}^m \varepsilon_i)$ است.*

[۴۵]. قضیه زیر یک شرط کافی برای بدست آوردن جواب‌های ε-کارا برای مساله بهینه‌سازی چندهدفه (۱.۱) با استفاده از روش چبیشف وزن‌دار فزوده ارایه می‌دهد.

قضیه ۱۰.۵.۱. *فرض کنید $\varepsilon \in \mathbb{R}^m_{>}$ داده شده باشد. اگر $\rho > 0$ موجود باشد به‌طوری‌که $\hat{x} \in \mathcal{X}$ یک جواب δ-بهینه برای مساله (۱۳.۱) با $\delta = \max_{i=1,\cdots,m}(\lambda_i\varepsilon_i + \rho\sum_{i=1}^m \varepsilon_i)$ و $\lambda_i = [f_i(\hat{x}) - y_i^U + \rho\sum_i(f_i(\hat{x}) - y_i^U)]^{-1}, i = 1, \cdots, m$ باشد، آن‌گاه $\hat{x}$ یک جواب ε-کارا برای مساله چندهدفه (۱.۱) است.*

---
[۶۰] Augmented weighted Tchebycheff method

[۶۱] Steuer

[۶۲] Choo

۶.۵.۱ روش چبیشف وزن‌دار بهبودیافته

روش چبیشف وزن‌دار بهبودیافته[۶۳] تفاوت زیادی با روش چبیشف وزن‌دار فزوده ندارد و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \max_{i=1,\cdots,m} \lambda_i \left((f_i(x) - y_i^U) + \sum_{t \in I} \rho(f_t(x) - y_t^U) \right) \\ \text{subject to} \quad & x \in \mathcal{X} \end{aligned} \tag{۱۴.۱}$$

که در آن، $I = \{1, \cdots, m\}$ و y^U یک نقطه فوق ایده‌آل و $\lambda \in \mathbb{R}^m_{\geqq}$ و $\rho > 0$ عدد مثبت کوچکی است.

این روش توسط کالیسزوسکی[۶۴] [۳۷] ارایه شد او توانست با کمک این روش شرایطی لازم و کافی برای جواب‌های کارای سره یک مساله بهینه‌سازی چندهدفه بدست آورد. به علاوه، کالیسزوسکی و همکارانش [۳۹] با کمک این روش الگوریتمی تعاملی برای بدست آوردن جواب‌های کارای سره مساله چندهدفه ارایه دادند. توجه شود که در روش چبیشف وزن‌دار فزوده، کران بالایی که برای مقدار بده و بستان بین توابع هدف بدست می‌آید وابسته به λ و ρ است، در حالی که در روش وزن‌دار چبیشف بهبودیافته، کران بالا تنها به $\rho > 0$ بستگی دارد. [۳۷، ۴۰، ۳۸]

در قضیایای زیر یک شرط کافی برای بدست آوردن جواب‌های ε-کارا و یک شرط لازم برای تشخیص جواب‌های ε-کارای سره ارایه می‌شود.

قضیه ۱۱.۵.۱ *[۴۵]. فرض کنید $\varepsilon \in \mathbb{R}^m_{\geqq}$ داده شده باشد. اگر $\rho > 0$ وجود داشته باشد که $\hat{x} \in \mathcal{X}$ یک جواب δ-بهینه برای مساله (۱۴.۱) با $\lambda_i = [(f_i(x) - y_i^U]^{-1}$، $i = 1, \cdots, m$ باشد، آن‌گاه $\hat{x} \in \mathcal{X}$ یک جواب ε-کارا برای مساله چندهدفه (۱.۱) با $\delta = \max_{i=1,\cdots,m} \lambda_i(\varepsilon_i + \rho \sum_{i=1}^m \varepsilon_i)$ است.*

قضیه ۱۲.۵.۱ *[۴۵]. فرض کنید $\varepsilon \in \mathbb{R}^m_{\geqq}$ داده شده باشد. اگر $\hat{x}$ یک جواب ε-کارای سره برای مساله (۱.۱) باشد، آن‌گاه $\rho > 0$ و $\lambda \in \mathbb{R}^m_{\geqq}$ وجود دارند به‌طوری‌که $\hat{x}$ یک جواب δ-بهینه برای مساله (۱۴.۱) با $\delta = \max_{i=1,\cdots,m} \lambda_i(\varepsilon_i + \rho \sum_{i=1}^m \varepsilon_i)$ است.*

۶.۱ جواب‌های تقریباً کارای سره در مسایل بهینه‌سازی برداری

در این بخش، بهینه‌سازی یک تابع برداری از یک فضای نرم‌دار دلخواه به یک فضای نرم‌دار دلخواه دیگر را بررسی می‌کنیم. پس از معرفی چند تعریف و قضیه اولیه، مروری بر ادبیات موضوع داریم. در ادامه، شرایطی لازم و کافی برای جواب‌های ε-کارای سره یک مساله بهینه‌سازی برداری بدست می‌آوریم.

فرض کنید $(\mathcal{Z}, \|\ .\ \|_{\mathcal{Z}})$ و $(\mathcal{Y}, \|\ .\ \|_{\mathcal{Y}})$ دو فضای نرم‌دار حقیقی باشند و $\emptyset \neq \mathcal{X} \subset \mathcal{Z}$. در این بخش

[۶۳] Improved weighted Tchebycheff method

[۶۴] Kaliszewski

یک مساله بهینه‌سازی برداری VOP را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\min\{f(x) : x \in \mathcal{X}\}, \qquad (۱۵.۱)$$

که در آن، $f : \mathcal{Z} \to \mathcal{Y}$.

حال، چند تعریف اولیه مربوط به مسایل بهینه‌سازی برداری ارایه می دهیم.

یک زیرمجموعه محدب C از یک مخروط محدب $D \neq \{\circ\}$ را پایه[۶۵] D گویند، اگر هر $d \in D \setminus \{\circ\}$ یک نمایش یکتا به صورت زیر داشته باشد:

$$d = \lambda c, \quad \exists(\lambda > \circ,\ c \in C).$$

کره واحد و گوی واحد یک فضای نرم‌دار حقیقی به‌ترتیب به صورت $U = \{y \in \mathcal{Y} : \ \parallel y \parallel = ۱\}$ و $B = \{y \in \mathcal{Y} : \ \parallel y \parallel \leq ۱\}$ تعریف می‌شوند.

همانند بخش‌های قبل، می‌توان تعاریف مربوط به کارایی، کارایی ضعیف، ε-کارایی، و ε-کارایی ضعیف را نسبت به مخروط ترتیبی $D \subseteq \mathcal{Y}$ ارایه داد.

اگر $\mathcal{Y}^*$ دوگان توپولوژیکی $\mathcal{Y}$ باشد، آنگاه مخروط قطبی و مخروط قطبی اکید مخروط D ، به‌ترتیب، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D^+ = \{\varphi \in \mathcal{Y}^* : \varphi(d) \geq \circ,\ \exists d \in \mathcal{D}\},$$

$$D^{+s} = \{\varphi \in \mathcal{Y}^* : \varphi(d) > \circ,\ \exists d \in \mathcal{D} \setminus \{\circ\}\}.$$

به وضوح، مخروط قطبی $\mathbb{R}^m_{\geqq}$ برابر با خودش است. به چنین مخروط‌هایی خودقطبی [۶۶] گویند.

در ادامه، فرض می‌کنیم که مخروط ترتیبی D یک مخروط نابدیهی محدب، توپر و نوکدار است.

گائو[۶۷] وهمکاران [۲۲] تعریف کارایی سره بنسن را به ε-کارایی سره در یک فضای نرم‌دار دلخواه تعمیم دادند که در زیر به آن اشاره می‌کنیم.

تعریف ۱.۶.۱. فرض کنید $D \subseteq \mathcal{Y}$ یک مخروط ترتیبی بسته باشد و $\varepsilon \in D$ داده شده است. $\hat{x} \in \mathcal{X}$ را یک جواب ε-کارای سره به مفهوم بنسن برای مساله (۱۵.۱) نسبت به مخروط D گویند، هرگاه

$$cl(cone(f(\mathcal{X}) + D - f(\hat{x}) + \epsilon)) \cap (-D) = \{\circ\}.$$

در ادامه، تعریف ε-کارایی سره به مفهوم هنیگ را با استفاده از تعریف هنیگ از کارایی سره ارایه می‌دهیم.

تعریف ۲.۶.۱. فرض کنید $D \subset \mathcal{Y}$ یک مخروط محدب نابدیهی باشد و $\varepsilon \in D$ داده شده باشد. $\hat{x} \in \mathcal{X}$ را یک جواب ε-کارای سره هنیگ برای مساله بهینه‌سازی برداری (۱۵.۱) گویند، هرگاه مخروط محدب K موجود باشد به‌طوری‌که $D \setminus \{\circ\} \subset intK$ و $\hat{x} \in \mathcal{X}_{\varepsilon E}(K)$.

---

[۶۵] Base

[۶۶] self polar

[۶۷] Gao

تعریف ۳.۶.۱. $\bar{\epsilon} > 0$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $D_{\bar{\epsilon}} = \{t \in \mathcal{Y} : \inf_{d\in D} \parallel t - d \parallel \leq \bar{\epsilon} \parallel t \parallel\}$ یک مخروط محدب باشد. $\hat{x} \in \mathcal{X}$ را یک جواب ε-کارای سره به مفهوم واریزبیکی[۶۸] گویند، هر گاه $\hat{x}$ یک جواب ε-کارا برای مساله (۱۵.۱) نسبت به مخروط $D_{\bar{\epsilon}}$ باشد.

ملاحظه می‌شود که اگر $\varepsilon = 0$، آن‌گاه تعاریف ۱.۶.۱، ۲.۶.۱ و ۳.۶.۱ به ترتیب به تعاریف کارایی سره داده شده توسط بنسن [۸]، هنیگ [۳۴] و واریزبیکی [۶۷] بر می‌گردند.

ملاحظه ۴.۶.۱. *مجموعه جواب‌های ε-کارای سره به مفهوم بنسن، هنیگ و واریزبیکی نسبت به مخروط D را به ترتیب با $\mathcal{X}^B_{\varepsilon PE}(D)$، $\mathcal{X}^H_{\varepsilon PE}(D)$ و $\mathcal{X}^W_{\varepsilon PE}(D)$ نشان می‌دهیم. هرگاه مخروط محدب D مشخص باشد، از ذکر آن خودداری می‌کنیم.*

قضیه ۵.۶.۱. *[؟]. اگر $\mathcal{Y}$ یک فضای نرم‌دار توپولوژیکی و $D \subseteq \mathcal{Y}$ یک مخروط محدب نوک‌دار بسته باشد، آن‌گاه هر جواب ε-کارای سره به مفهوم هنیگ یک جواب ε-کارای سره به مفهوم بنسن است.*

اکنون به بررسی خواص جواب‌های ε-کارای سره بهینه‌سازی برداری می‌پردازیم. در این بخش، ε-کارایی سره به مفهوم هنیگ را بررسی می‌کنیم، مگر این‌که غیر آن ذکر شود. قابل ذکر است که بنا به قضیه ۵.۶.۱ و تابع برداری بررسی شده در این بخش، هر جواب ε-کارای سره به مفهوم هنیگ یک جواب ε-کارای سره به مفهوم بنسن است. یادآوری می‌شود که اگر یک مساله بهینه‌سازی چندهدفه با $D = \mathbb{R}^m_{\geqq}$ را در نظر بگیریم، آن‌گاه تمام تعریفی که تا کنون در این رساله برای ε-کارایی سره ارایه شده‌اند معادل‌اند.

قضیه ۶.۶.۱. *فرض کنید D_1 و D_2 دو مخروط ترتیبی باشند و $D_2 \subseteq D_1$. آن‌گاه*

$$\mathcal{X}^H_{\varepsilon PE}(D_1) \subseteq \mathcal{X}^H_{\varepsilon PE}(D_2).$$

برهان. فرض کنید $\hat{x} \in \mathcal{X}^H_{\varepsilon PE}(D_1)$. بنا به تعریف ε-کارایی سره به مفهوم هنیگ، مخروط K_1 وجود دارد به‌طوری‌که $D_1 \setminus \{0\} \subset intK_1$ و $(f(\mathcal{X}) - f(\hat{x}) + \varepsilon) \cap (-K_1 \setminus \{0\}) = \emptyset$.

چون $D_2 \subseteq D_1$، پس داریم:

$$D_2 \setminus \{0\} \subseteq D_1 \setminus \{0\} \subset intK_1$$

از این‌که

$$(f(\mathcal{X}) - f(\hat{x}) + \varepsilon) \cap (-K_1 \setminus \{0\}) = \emptyset$$

نتیجه می‌گیریم $\hat{x} \in \mathcal{X}^H_{\varepsilon PE}(D_2)$. □

قضیه ۷.۶.۱. *[۲۲]. فرض کنید $\varepsilon_2 \leqq_D \varepsilon_1$. آن‌گاه*

$$\mathcal{X}^B_{\varepsilon_1 PE}(D) \subseteq \mathcal{X}^B_{\varepsilon_2 PE}(D).$$

ملاحظه ۸.۶.۱. *از قضیه ۷.۶.۱، برای هر $\varepsilon \in D \setminus \{0\}$ نتیجه می‌گیریم:*

$$\mathcal{X}^B_{PE}(D) = \mathcal{X}^B_{0 PE}(D) \subseteq \mathcal{X}^B_{\epsilon PE}(D), \quad \forall \varepsilon \in D \setminus \{0\}.$$

در نتیجه اگر قرار دهیم $\varepsilon = \epsilon q$ که در آن، $\epsilon > 0$ و $q \in D \setminus \{0\}$، آن‌گاه

$$\mathcal{X}^B_{PE}(D) \subseteq \cap_{\epsilon > 0} \mathcal{X}^B_{\varepsilon PE}(D); \quad \varepsilon = \epsilon q.$$

[۶۸] Wierzbicki

قضیه ۹.۶.۱. *فرض کنید* $\varepsilon \in D \setminus \{0\}$. *اگر قرار دهیم* $\varepsilon = \epsilon q$ *که در آن،* $\epsilon > 0$ *و* $q \in D \setminus \{0\}$، *آن‌گاه*

$$\mathcal{X}^{H}_{PE}(D) = \cap_{\epsilon} \mathcal{X}^{B}_{\varepsilon PE}(D); \quad \varepsilon = \epsilon q.$$

برهان. از قضیه ۷.۶.۱ نتیجه می‌گیریم که $\mathcal{X}^{B}_{PE}(D) \subseteq \cap_{\epsilon>0} \mathcal{X}^{B}_{\varepsilon PE}(D)$. عکس این رابطه شمول از [۲۲] با انتخاب $C(\varepsilon) = \varepsilon + D$ نتیجه می‌شود. □

عموماً، یکی از بهترین روش‌ها برای حل یک مساله بهینه‌سازی برداری استفاده از روش‌های اسکالرسازی است. اسکالرسازی یعنی تبدیل یک مساله بهینه‌سازی برداری به یک مساله بهینه‌سازی اسکالری[۶۹] که یک مساله بهینه‌سازی با یک تابع هدف حقیقی مقدار است. استفاده از یک مساله اسکالرسازی شده به ما این امکان را می‌دهد که بتوانیم از نظریه و روش‌های بهینه‌سازی اسکالری استفاده کنیم.
ساواراجی[۷۰] و همکاران [۵۷] دو شرط اساسی برای معرفی یک تابع اسکالرسازی بیان می‌کنند. اولاً، تابع اسکالرسازی بتواند هر جواب کارایی را پوشش بدهد. ثانیاً، هر جواب آن یک جواب کارا باشد. متاسفانه، تا کنون هیچ مساله اسکالرسازی که بتواند این شرایط را داشته باشد ارایه نشده است. [۵۱]
در ادامه، یک مساله اسکالرسازی جامع را معرفی می‌کنیم تا با اعمال شرایطی روی نگاشت مورد نظر شرایطی لازم و کافی برای ε-کارایی (سره، ضعیف) بیابیم. استفاده از یک مساله اسکالرسازی جامع برای حل یک مساله بهینه‌سازی برداری، برای اولین بار توسط واریزبیکی [۶۷] مطرح شد. پس از آن، افراد دیگری چون لوک[۷۱] [؟]، جن[۷۲] [۳۶]، و ساواراجی و همکاران [۵۷] به بررسی رابطه بین جواب‌های بهینه یک مساله اسکالرسازی جامع و جواب‌های کارای (سره، ضعیف) مساله بهینه‌سازی برداری مرتبط پرداختند.
حال، یک مساله اسکالرسازی متناظر با مساله بهینه‌سازی برداری (۱۵.۱) را به صورت زیر در نظربگیرید:

$$\begin{aligned} \min \quad & (\varphi o f)(x) \\ s.t \quad & x \in \mathcal{X}, \end{aligned} \tag{۱۶.۱}$$

که در آن، $\varphi : \mathcal{Y} \to \mathbb{R}$.
در ادامه، هدف اینست که رابطه بین جواب‌های ε-کارای سره مساله بهینه‌سازی برداری (۱۵.۱) و جواب‌های δ-بهینه (اکید) مساله اسکالرسازی (۱۶.۱) را بررسی کنیم.
گوتییرز[۷۳] و همکاران [۳۰]، نتایجی راجع به جواب‌های ε-کارای (ضعیف) یک مساله بهینه‌سازی برداری بدست آورند که در زیر به آنها اشاره می‌کنیم.

تعریف ۱۰.۶.۱. فرض کنید $\varphi : \mathcal{Y} \to \mathbb{R}$ و $y^* \in \mathcal{Y}$.

---
[۶۹] Scalar optimization problem
[۷۰] Sawaragi
[۷۱] Luc
[۷۲] Jahn
[۷۳] Gutierrez

(۱) φ نسبت به y^* یکنوا[۷۴] گفته می‌شود، اگر

$$y \leqq_D y^* \Rightarrow \varphi(y) \leq \varphi(y^*),$$

(۲) φ نسبت به y^* قویاً یکنوا[۷۵] گفته می‌شود، اگر

$$y \leq_D y^* \Rightarrow \varphi(y) < \varphi(y^*),$$

(۳) φ نسبت به y^* اکیداً یکنوا[۷۶] گفته می‌شود، اگر

$$y <_D y^* \Rightarrow \varphi(y) < \varphi(y^*).$$

مثال ۱۱.۶.۱. یک مساله بهینه‌سازی چندهدفه با $D = \mathbb{R}^m_>$ در نظر بگیرید. تابع

$$\varphi(y) = \max_{1\leq i\leq m} v_i(y_i - z_i) + \rho \sum_{i=1}^{m} y_i$$

را در نظر بگیرید که در آن، $v \in \mathbb{R}^m_{\geqq}$، $z \in \mathbb{R}^m_{\geqq}$ و $\rho \in \mathbb{R}_{\geq}$.
اگر $\rho = 0$، آنگاه این تابع یکنواست. اگر $v \in \mathbb{R}^m_>$ و $\rho = 0$، آنگاه این تابع اکیداً یکنواست و اگر $\rho > 0$، آنگاه این تابع قویاً یکنواست.

قضیه ۱۲.۶.۱. *[۳۰]. فرض کنید $\delta > 0$ و $\varepsilon \in D\setminus\{0\}$ یک جواب δ-بهینه برای مساله اسکالرسازی (۱۶.۱) باشد. در این صورت، داریم:*

(۱) *اگر φ در $f(\hat{x}) - \varepsilon$ یکنوا باشد و $\varepsilon \in intD$ و*

$$\varphi(f(\hat{x})) - \varphi(f(\hat{x}) - \varepsilon) > \delta,$$

آنگاه $\hat{x} \in \mathcal{X}_{\varepsilon E}(D)$.

(۲) *اگر φ در $f(\hat{x}) - \varepsilon$ قویاً یکنوا باشد و*

$$\varphi(f(\hat{x})) - \varphi(f(\hat{x}) - \varepsilon) \geq \delta,$$

آنگاه $\hat{x} \in \mathcal{X}_{\varepsilon E}(D)$.

نتیجه ۱۳.۶.۱. *[۳۰]. فرض کنید $\varepsilon \in D \setminus \{0\}$ داده شده باشد. به‌علاوه، فرض کنید $\hat{x}$ یک جواب δ-بهینه برای مساله (۱۶.۱) است. در این صورت ، داریم:*

(۱) *اگر $\varphi \in D^+$، $\varphi(\varepsilon) > 0$ و $\delta < \varphi(\varepsilon)$ و*

$$\hat{x} \in \mathcal{X}_{\varepsilon E}(D).$$

(۲) *اگر $\varphi \in D^{+s}$ و $\delta \leq \varphi(\varepsilon)$، آنگاه*

$$\hat{x} \in \mathcal{X}_{\varepsilon E}(D).$$

[۷۴] Monotone

[۷۵] Strongly monotone

[۷۶] strictly monotone

در ادامه شرایطی لازم برای بدست آوردن جواب‌های ε-کارای (ضعیف) مساله بهینه‌سازی برداری (۱۵.۱) ارایه دهیم.

قضیه ۱.۶.۱۴. *[۳۰]. فرض کنید $\varepsilon \in D \setminus \{0\}$ و $\varphi : \mathcal{Y} \to \mathbb{R}$ به‌گونه‌ای باشد که*

$$\{y \in \mathcal{Y} : \varphi(y) < 0\} = f(\hat{x}) - \varepsilon - intD. \tag{۱.۱۷}$$

اگر $\hat{x} \in \mathcal{X}_{\varepsilon WE}$، آن‌گاه $\hat{x}$ یک جواب δ-بهینه برای مساله اسکالرسازی (۱۶.۱) با $\delta \geq \varphi(f(\hat{x}))$ است.

توجه شود که در مسایل بهینه‌سازی چندهدفه خاصیت (۱۷.۱) برای تابع $\max_{1\leq i\leq m} v_i(y_i - z_i + \varepsilon_i)$ برقرار است، زیرا

$$\max_{1\leq i\leq m} v_i(y_i - z_i + \varepsilon_i) < 0 \Leftrightarrow y \in z - \varepsilon - \mathbb{R}^m_{>}.$$

فصل ۲

مجموعه‌های بهبودیافته و E-کارایی(سره، ضعیف)

۱.۲ مقدمه

در این فصل ابتدا مجموعه‌های بهبودیافته و برخی ویژگی‌های آنها را معرفی می‌کنیم، سپس مفهوم E-کارایی را دربهینه‌سازی برداری بیان می‌کنیم و در بخش‌های دیگر به بررسی انواع مختلفی از آن شامل E-کارایی توسط نگاشت $\varphi_{q,E}$، E-کارایی سره بنسن و E-کارایی توسط نگاشت Δ_{-K} می‌پردازیم. لازم به ذکر است در این فصل از مراجع [۲۰، ۵۰، ۲۹، ۷، ۲۴، ۶۹، ۷۴] استفاده شده است.

۲.۲ مجموعه‌های بهبودیافته و ویژگی‌های آن‌ها

چیکو و همکاران [۸] مفاهیم مجموعه‌های بهبودیافته و E-کارایی را در فضای متناهی بعد مطرح کردند. در ادامه، فرض می‌کنیم K یک مخروط محدب بسته باشد.

تعریف ۱.۲.۲. مجموعه جامع فوقانی[۱] زیر مجموعه A از Y به شکل زیر تعریف می‌شود.

$$u-compr(A)=\{x\in Y|\ \exists a\in A\ s.t.\ x-a\in K\}.$$

به خصوص اگر $K=\mathbb{R}^m_{\geqq}$ داریم $u-compr(A)=\bigcup_{a\in A}(a+\mathbb{R}^m_{\geqq})$.

ملاحظه ۲.۲.۲. *زیر مجموعه E از Y را مجموعه جامع فوقانی گویند اگر:*

$$u-compr(E)=E.$$

تعریف ۳.۲.۲. اگر $E\subset Y\setminus\{0\}$ مجموعه جامع فوقانی باشد، آنگاه E را مجموعه بهبودیافته[۲] از Y می‌نامیم. خانواده مجموعه‌های بهبودیافته در Y را با ζ_Y نشان می‌دهیم.

ملاحظه ۴.۲.۲. *از ملاحظه ۲.۲.۲ واضح است که $E\in\zeta_Y$ اگر و تنها اگر $0\notin E$ و $E+K=E$. در واقع اگر $K=\mathbb{R}^m_{\geqq}$ نتیجه می‌گیریم که $E\in\zeta_Y$ اگر وفقط اگر $0\notin E$ و اگر $a\in E$ و $y\in\mathbb{R}^m_{\geqq}$ آن‌گاه $a+y\in E$.*

مثال ۵.۲.۲. اگر $Y=\mathbb{R}^1$ در این صورت عناصر ζ_Y عبارتند از $\emptyset$، $(0,+\infty)$ و (ε,∞) که در آن $\varepsilon>0$.

مثال ۶.۲.۲. فرض کنید $Y=C(G)$ فضای توابع پیوسته حقیقی مقدار روی G باشد که $G\subset\mathbb{R}^n$ یک مجموعه بسته کراندار است، همچنین فرض کنید $K=\{x\in C(G)|\ x(t)\geq 0,\ \forall t\in G\}$ آن‌گاه $E=\{x\in C(G)|\ x(t)>0,\ \forall t\in G\}$ یک مجموعه بهبود یافته است.

زیرا از تعریف E و $C(G)$ به راحتی می‌توان دید که $0\notin E$. از طرفی $E+K=\{x\in C(G)|\ x(t)>0\ \forall t\in G\}$ بنابراین E یک مجموعه بهبود یافته است.

به وضوح $\emptyset\in\zeta_y$.

در این رساله فرض می‌کنیم $intE\neq\emptyset$.

---

[۱] upper comprehensive

[۲] improvement set

فرض کنیم $Y = \mathbb{R}^m$ و $K = \mathbb{R}^m_{\geq}$. آنگاه، تعریف ۳.۲.۲ با تعریف زیر منطبق است. خانواده مجموعه‌های بهبودیافته در $\mathbb{R}^m$ را با ζ_m نشان می‌دهیم.

تعریف ۷.۲.۲. فرض کنید $E \subset \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ یک مجموعه جامع فوقانی باشد. E را مجموعه بهبود یافته $\mathbb{R}^m$ می‌نامیم و خانواده مجموعه‌های بهبود یافته در $\mathbb{R}^m$ را با ζ_m نشان می‌دهیم.

بر پایه ایده‌های چیکو و همکاران [۸] مفهوم نقطه E-کارا را برای مسایل می‌نیمم سازی مطرح می‌کنیم.

تعریف ۸.۲.۲. فرض کنید $E \in \zeta_Y$ و مجموعه ناتهی $A \subset Y$ داده شده باشد. گوییم $a \in A$ نقطه E-کارا است اگر $(a - E) \cap A = \emptyset$ و آن را با $a \in O^E(A)$ نشان می‌دهیم.

در این بخش، برخی ویژگی‌های مجموعه بهبودیافته را ارایه می‌دهیم. این ویژگی‌ها برای به دست آوردن نتایج اصلی مهم است.

نتیجه ۹.۲.۲. *از تعریف مجموعه بهبودیافته و ملاحظه ۴.۲.۲ گزاره‌های زیر را داریم:*

الف) داریم $K \setminus \{0\} \in \zeta_Y$ *همچنین* $E + K \setminus \{0\} \in \zeta_Y$؛

ب) اگر $\epsilon \in K \setminus \{0\}$ *باشد، آن‌گاه داریم* $\epsilon + K \in \zeta_Y$؛

پ) اگر $E \subset K$ *و* $E \in \zeta_Y$ *باشد، آن‌گاه داریم* $E + E \subset E$ *و* $intE + E \subset E$؛

ت) اگر $E \subset K$، $E \in \zeta_Y$ *و* $\mu \in K^{+i}$ *باشد، آن‌گاه داریم* $\mu E \in \zeta^1$، *که در آن* $\mu E = \bigcup_{e \in E} \langle \mu, e \rangle$؛

ث) اگر $E \in \zeta_Y$ *باشد، آن‌گاه داریم* $intE \in \zeta_Y$.

برهان. الف) چون $K \setminus \{0\}$ و $0 \notin K \setminus \{0\}$ است و $K \setminus \{0\} + K = K \setminus \{0\}$ در نتیجه $K \setminus \{0\} \in \zeta_Y$. حال نشان می‌دهیم $E + K \setminus \{0\} \in \zeta_Y$. باید نشان دهیم $0 \notin E + K \setminus \{0\}$ و $E + K \setminus \{0\} + K = E + K \setminus \{0\}$. از اینکه $K \setminus \{0\} + K = K \setminus \{0\}$ نتیجه حاصل می‌شود.

ب) از اینکه $\epsilon \in K \setminus \{0\}$ واضح است که $0 \notin \epsilon + K$. همچنین داریم $\epsilon + K + K = \epsilon + K$. پس $\epsilon + K$ یک مجموعه بهبودیافته است.

پ) چون $E \in \zeta_Y$، داریم $0 \notin E$ و $E + K = E$. چون $E \subset K$ بدیهی است $E + E \subset E$. از طرفی داریم $intE \subset E$، بنابراین $intE + E \subset E$.

ت) چون $E \in \zeta_Y$ بنابراین داریم $0 \notin E$ و $E + K = E$. از اینکه $\mu \in K^{+i}$ برای هر $y \in K \setminus \{0\}$ داریم $\langle y, \mu \rangle > 0$، ابتدا ثابت می‌کنیم $0 \notin \mu E$ چون $0 \notin E$ و $\mu \in K^{+i}$ و از طرفی $E \subseteq K$ در نتیجه $\langle \mu, e \rangle > 0 \ \forall e \in E$. از طرفی چون $\mu \subset K \setminus \{0\}$ در نتیجه $\mu E + K = \mu E$.

ث) چون $E \in \zeta_Y$ پس داریم $0 \notin E$ و $E + K = E$. به وضوح $0 \notin intE$ و داریم:

$$intE + K \subset int(E + K) = intE$$

از طرفی دیگر

$$intE = int(E + K) \subset intE + intK \subset intE + K$$

بنابراین $intE + K = intE$ و $intE$ یک مجموعه بهبودیافته است. □

قضیه ۱۰.۲.۲. *اگر $E \in \zeta_Y$ آنگاه $intE = E + intK = clE + intK$.*

برهان. ابتدا نشان می‌دهیم $intE = E + intK$. چون $E \in \zeta_Y$ لذا داریم، $E = E + K$ از تحدب E و K نتیجه می‌گیریم:

$$intK + E \subset int(E + K) = intE$$

همچنین، از $E \in \zeta_Y$ بدیهی است که $intE \in \zeta_Y$. بنابراین داریم $intE = intE + K$ از طرف دیگر داریم:

$$intE = intE + K = intE + intK \subset E + intK$$

از این رو؛

$$intE = E + intK.$$

واضح است که $E + intK \subseteq clE + intK$. حال نشان می‌دهیم $E + intK \supset clE + intK$. برای هر $x \in clE + intK$، $x_1 \in clE$ و $x_2 \in intK$ وجود دارند به طوری که $x = x_1 + x_2$. از $x_2 \in intK$ استنباط می‌شود که یک همسایگی متعادل(متوازن) V از صفر وجود دارد که $x_2 + V \subset intK$. همچنین از $x_1 \in clE$ داریم $(x_1 + V) \cap E \neq \emptyset$. بنابراین $\nu \in V$ وجود دارد به طوری که $x_1 + \nu \in E$ و

$$x + \nu + V = x_1 + \nu + x_2 + V \subset E + intK.$$

واضح است که $x + \nu + V$ یک همسایگی از x است، که نتیجه می‌دهد:

$$x \in int(E + intK) \subset E + intK.$$

یعنی $clE + intK \subseteq clE + intK$. □

فلورز-بازان[3] و هرناندز [4] فرض (B) را مطرح کردند و برخی نتایج اسکالرسازی را مطرح کردند [[20]]. قضیه زیر این حقیقت را نشان می‌دهد که مفهوم مجموعه بهبودیافته، حالت خاصی از فرض (B) مطرح شده توسط فلورز-بازان و هرناندز است.

فرضB. فرض کنید $0 \neq q \in Y$، $S \subsetneq Y$ مجموعه‌ای است (نه لزوما بسته)، به طوریکه $0 \in \partial S$ آنگاه

$$cl(-S)^C + \mathbb{R}_>.q \subseteq int(-S)^C.$$

قضیه ۱۱.۲.۲. *الف) اگر E مجموعه ای بهبودیافته در Y باشد و $q \in intK$ آن‌گاه*

$$cl(-E)^C + \mathbb{R}_>.q \subset int(-E)^C.$$

که در آن $(-E)^C$ مکمل مجموعه $-E$ است. در حقیقت کافیست ثابت کنیم

$$Y \setminus (-intE) + \mathbb{R}_>.q \subseteq Y \setminus (-clE).$$

برای هر $x \in Y \setminus (-intE) + \mathbb{R}_>.q$ به وضوح $x \in Y$. پس کافی است ثابت کنیم $x \notin -clE$. برای این منظور ثابت می‌کنیم که مفهوم زیر برقرار است:

$$Y \setminus (-intE) + \mathbb{R}_>.q \subset Y \setminus (-clE).$$

[3] Florez-Bazan

[4] Hernandez

با برهان خلف فرض کنید $-x \in clE$، چون $x \in Y \setminus (-intE) + \mathbb{R}_>$ بنابراین $x_1 \in Y \setminus (-intE)$ و $x_2 \in \mathbb{R}_>$ وجود دارد به طوری که $x = x_1 + x_2$. از قضیه ۱۰.۲.۲ نتیجه می‌شود:

$$-x_1 = -x + x_2 \in clE + \mathbb{R}_>.q \subset clE + intK = intE \Longrightarrow -x_1 \in intE$$

که این با $x_1 \in Y \setminus (-intE)$ درتناقض است.

ب) اگر $E \subseteq Y$ در فرض (B) صدق کند، لزوماً یک مجموعه بهبودیافته نیست. به عنوان مثال فرض کنید $E = \mathbb{R}^2_> \cup \{(0,1)\} \cup \{(1,0)\}$. می‌توان نشان داد که $cl(-E)^C + \mathbb{R}_> \subset int(-E)^C$ بنابراین، E در فرض (B) صدق می‌کند، اما درهرحال با وجود اینکه $E \not\ni (0,0)$ داریم $E + R^2_\geq \neq E$ بنابراین E مجموعه بهبودیافته نیست.

پ) مجموعه‌ای بهبودیافته وجود دارد به طوریکه $0 \notin \partial E$. برای مثال فرض کنید $E = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1 \geq 0/1, x_2 \geq 0/1\}$. نشان می‌دهیم که $E \in \zeta_Y$ و $0 \notin \partial E$ داریم:

$$\partial E = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1 = 0/1, x_2 \geq 0/1 \cup x_1 \geq 0/1, x_2 = 0/1\}$$

مشاهده می‌شود که $Y = \mathbb{R}^2$ و $K = \mathbb{R}^2_\geq$، باید نشان دهیم $E \not\ni (0,0)$ و $E + K = E$. درهر حال شرط اینکه مبدا روی مرز واقع می‌شود محدودکننده نیست چون انتقال درفرض (B) صدق می‌کند.

ملاحظه ۱۲.۲.۲. *اگر E مجموعه بهبودیافته نباشد، قضیه ۱۰.۲.۲ لزوماً درست نیست. به عنوان مثال فرض کنید قرار می‌دهیم $Y = \mathbb{R}^2$، $K = \mathbb{R}^2_\geq$ و $E = \{(x_1, x_2) | x_1 \leqslant 0, x_2 \leqslant 0\}$ مشاهده می‌شود که*

$$u - compr(E) = \{x \in \mathbb{R}^2 | \exists e \in E \ s.t. \ x - e \in \mathbb{R}^2_\geq\} = \mathbb{R}^2$$

بنابراین با توجه به تعریف مجموعه E داریم $u - compr(E) \neq E$ و یا از طرفی داریم $E + \mathbb{R}^2_\geq = \mathbb{R}^2 \neq E$ که یعنی $E \notin \zeta_Y$. همچنین داریم:

$$intE = \{(x_1, x_2) | x_1 < 0, x_2 < 0\} \neq E + intK = \mathbb{R}^2.$$

نتیجه ۱۳.۲.۲. *اگر $E \in \zeta_Y$، آنگاه از قسمت (ث) نتیجه ۹.۲.۲ و قضیه ۱۰.۲.۲ نتیجه می‌گیریم، $E + intK \in \zeta_Y$*

برهان. چون $E \in \zeta_Y$ از قسمت (ث) نتیجه ۹.۲.۲ داریم $intE \in \zeta_Y$، بنابراین $0 \notin intE$ و $intE + K = intE$. از طرفی با استفاده از قضیه ۱۰.۲.۲ داریم $intE = E + intK$ لذا چون $0 \notin intE$ پس داریم $0 \notin E + intK$ حال باید نشان دهیم که $E + intK + K = E + intK$. چون $E \in \zeta_Y$ از اینکه $E + K = E$ به راحتی می‌توان دید که $E + intK + K = E + intK$.

□

قضیه ۱۴.۲.۲. *فرض کنید $K \subset Y$ مخروطی محدب بسته با نقاط درونی ناتهی $intK$ باشد، همچنین فرض کنید $\bar{x} \in K$، آنگاه گزاره‌های زیر را داریم:*

الف) $cone(f(X)+intK-f(\bar{x})) = cone(f(X)-f(\bar{x}))+intK$

ب) $clcone(f(X)+intK-f(\bar{x})) = clcone(f(X)+K-f(\bar{x})).$

برهان. الف) چون $intK$ یک مخروط است، به راحتی می‌توان دید که

$cone(f(X)+intK-f(\bar{x})) = cone(f(X)-f(\bar{x}))+intK.$

ب) برای اثبات کافی است گزاره زیر را ثابت کنیم:

$$cone(f(X)+K-f(\bar{x})) \subset clcone(f(X)+intK-f(\bar{x})). \qquad (۱.۲)$$

برای این منظور فرض کنید

$$y \in cone(f(X)+K-f(\bar{x})).$$

آنگاه $a \geq ۰$ و $k \in K$ وجود دارند به طوریکه

$$y = a(f(x)+k-f(\bar{x})).$$

به این دلیل که K بسته است، دنباله $\{k_n\} \subset intK$ وجود دارد به طوریکه $k = \lim_{n\to\infty} k_n$. قرار می‌دهیم

$$y_n := a(f(x)+k_n-f(\bar{x})) \in cone(f(X)+intK-f(\bar{x})).$$

آن‌گاه

$$\lim_{n\to\infty} y_n = a(f(x)+k-f(\bar{x})) = y.$$

بنابراین

$$y \in clcone(f(X)+intK-f(\bar{x})).$$

لذا (۱.۲) برقرار است. □

قضیه ۱۵.۲.۲. فرض کنید $E \in \zeta_Y$ و $A \subset Y$ آن‌گاه

$$clcone(A+E) = clcone(A+intE).$$

برهان. از آنجایی که $E \in \zeta_Y$ و از قسمت (ب) قضیه ۱۴.۲.۲ و قضیه ۱۰.۲.۲ داریم:

$$clcone(A+E) = clcone(A+E+K) = clcone(A+E+intK) = clcone(A+intE).$$

□

قضیه ۱۶.۲.۲. فرض کنید $E \in \zeta_Y$، $E \subset K$ و $\mu \in K^{+i}$. آنگاه $int(\mu E) = \mu intE$.

برهان. از $E \in \zeta_Y$، از قسمت (ت) نتیجه ۹.۲.۲ و قضیه ۱۰.۲.۲، داریم $\mu E \in \zeta^۱$ و

$$int(\mu E) = \mu E + int\mathbb{R}_{\geq} = \mu E + \mu intK = \mu(E+intK) = \mu intE.$$

□

۳.۲ E-کارایی در بهینه‌سازی برداری و اسکالرسازی

فرض کنید X یک فضای خطی و Y یک فضای خطی توپولوژیکال موضعاً محدب هاسدورف باشد. مساله بهینه‌سازی برداری زیر را درنظر بگیرید:

$$\begin{aligned} &\min f(x),\\ &x \in S. \end{aligned} \tag{۲.۲}$$

که در آن $Y \longrightarrow X : f$ و $\emptyset \neq S \subset X$.

تعریف ۱.۳.۲. [۲۹]. فرض کنید $E \in \zeta_Y$. نقطه شدنی $\bar{x} \in S$ جواب Eـکارای (۲.۲) است اگر

$$(f(\bar{x}) - E) \cap f(S) = \emptyset,$$

که با $\bar{x} \in AE(f, S, E)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲.۳.۲. [۲۹]. فرض کنید داریم $E \in \zeta_Y$. نقطه شدنی $\bar{x} \in S$ جواب Eـکارای ضعیف (۲.۲) است اگر

$$(f(\bar{x}) - \mathrm{int}E) \cap f(S) = \emptyset.$$

و آن را با $\bar{x} \in WAE(f, S, E)$ نمایش می‌دهیم.

مساله بهینه سازی اسکالر زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} &\min \phi(x),\\ &x \in Z. \end{aligned} \tag{۳.۲}$$

که در آن $\phi : X \to \mathbb{R}$ و $\emptyset \neq Z \subset X$.
فرض کنید $\epsilon \geq \circ$ و $\bar{x} \in Z$ داده شده باشند. اگر $\forall x \in Z$، $\phi(x) \geq \phi(\bar{x}) - \epsilon$، آنگاه $\bar{x}$ جواب ϵـمینیمال (۳.۲) نامیده می‌شود. مجموعه جواب‌های ϵـمینیمال را با $AMin(\phi, \epsilon)$ نشان می‌دهیم. علاوه براین اگر داشته باشیم $\forall x \in Z$، $\phi(x) > \phi(\bar{x}) - \epsilon$، آنگاه $\bar{x}$ جواب ϵـمینیمال اکید (۳.۲) نامیده می‌شود. مجموعه تمام جواب‌های ϵـمینیمال اکید را با $SAMin(\phi, \epsilon)$ نشان می‌دهیم.

لم ۳.۳.۲. *[۷]. فرض کنید Y فضای خطی توپولوژیکال هاسدورف باشد و $A \subset Y$ مجموعه‌ای محدب با درون ناتهی باشد، آنگاه*

$$\mathrm{int}A = \{y \in Y | \langle y^*, y\rangle > \circ,\ \forall y^* \in A^+ \backslash \{\circ\}\}.$$

لم ۴.۳.۲. *[۷]. فرض کنید Y فضای خطی توپولوژیکال هاسدورف باشد و $A \subset Y$ مجموعه‌ای محدب باشد. اگر داشته باشیم $x \in A$ و $y^* \in A^+ \backslash \{\circ\}$ وجود داشته باشد چنان‌که $\langle y^*, x\rangle = \circ$، آنگاه داریم $x \in \partial A$.*

۴.۲ اسکالرسازی E-کارایی توسط $\varphi_{q,E}$

در این بخش جواب‌های E-کارا و جواب‌های E-کارای ضعیف مساله بهینه‌سازی برداری (۲.۲) را با تابع اسکالرسازی غیر خطی $\varphi_{q,E}$ ارایه شده توسط گاپفرت[5] و همکاران [۲۴] مشخص می‌کنیم. فرض کنید که Y فضای خطی توپولوژیکال موضعا محدب هاسدورف حقیقی باشد و $E \in \zeta_Y$ بسته باشد.
تابع $\varphi_{q,E} : Y \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ تعریف شده با

$$\varphi_{q,E}(y) = \inf\{s \in \mathbb{R} | y \in sq - E\}, \quad y \in Y$$

و با $\inf \emptyset = +\infty$ را در نظر بگیرید.

تعریف ۱.۴.۲. دامنه تابع $\varphi : Y \to \mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{dom}\varphi := \{y \in Y | \varphi(y) < \infty\}.$$

فرض کنید $\varphi : Y \to \mathbb{R}$ تابعی مناسب برای جداسازی دو مجموعه ناتهی A و D باشد. در صورتی که D شامل شعاع‌های تولید شده توسط $k^\circ \in Y \backslash \{\circ\}$ باشد یعنی

$$D + [\circ, +\infty).k^\circ \subset D. \qquad (۴.۲)$$

در این صورت قضیه زیر را ارایه می‌دهیم.

قضیه ۲.۴.۲. *[۲۴]. فرض کنید $D \subset Y$ مجموعه سره بسته باشد و داشته باشیم $k^\circ \in Y$ چنان‌که (۴.۲) برقرار باشد. آنگاه φ فضای موضعاً محدب است و $\mathrm{dom}\varphi = \mathbb{R}k^\circ - D$،*

$$\{y \in Y | \varphi(y) \leq \lambda\} = \lambda k^\circ - D \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \qquad (۵.۲)$$

و

$$\varphi(y + \lambda k^\circ) = \varphi(y) + \lambda \quad \forall y \in Y, \forall \lambda \in \mathbb{R}. \qquad (۶.۲)$$

علاوه بر این

الف. φ محدب است اگر و تنها اگر D محدب باشد، $\varphi(\lambda y) = \lambda\varphi(y)$ برای هر $\lambda > \circ$ و $y \in Y$ اگر و تنها اگر D مخروط باشد.

ب. φ سره است اگر و تنها اگر D شامل خطوطی موازی با k° نباشد، یعنی

$$\forall y \in Y, \quad \exists t \in \mathbb{R} : \quad y + tk^\circ \notin D. \qquad (۷.۲)$$

پ. φ متناهی- مقدار است اگر و تنها اگر D شامل خطوطی موازی با k° نباشد و

$$\mathbb{R}k^\circ - D = Y. \qquad (۸.۲)$$

ت. فرض کنید $B \subset Y$ و φ، B - یکنواخت است (یعنی $\varphi(y_۱) \leq \varphi(y_۲) \Longleftarrow y_۲ - y_۱ \in B$) اگر و تنها اگر $D + B \subset D$.

[5] Gopfert

ث. φ *زیر افزایشی است اگر و تنها اگر* $D + D \subset C$.

فرض کنید که

$$D + (0, \infty).k^\circ \subset \text{int}D. \tag{۹.۲}$$

آنگاه

ج. φ *پیوسته است و*

$$\{y \in Y | \varphi(y) < \lambda\} = \lambda k^\circ - \text{int}D, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$
$$\{y \in Y | \varphi(y) = \lambda\} = \lambda k^\circ - \partial D, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

گزاره ۳.۴.۲. *فرض کنید* $D \subset Y$ *مجموعه سره بسته باشد و داشته باشیم* $k^\circ \in Y$

(الف) اگر مخروط $C \subset Y$ *وجود داشته باشد چنان‌که* $k^\circ \in \text{int}C$ *و* $D + \text{int}C \subset D$ *آن‌گاه* (۷.۲)، (۸.۲) *و* (۹.۲) *برقرارند.*

(ب) اگر D *محدب باشد،* $\text{int}D \neq \emptyset$ *و* (۴.۲) *و* (۸.۲) *برقرار باشند، آن‌گاه* (۷.۲) *و* (۹.۲) *نیز برقرارند.*

به طور خاص اگر فرضیات (الف) یا (ب) برقرار باشند آنگاه φ_{D,k° *متناهی‌مقدار و پیوسته است. همچنین در حالت (ب) محدب است.*

برهان. (الف) فرض کنید که $y \in Y$. چون $k^\circ \in \text{int}C$، $\text{int}C - k^\circ$ یک همسایگی از 0 است، دراین‌صورت $t > 0$ وجود دارد به‌طوری‌که $ty \in \text{int}C - k^\circ$. بنابراین نتیجه می‌گیریم که $y \in \text{int}C - (0, \infty)k^\circ$. بنابراین

$$C + \mathbb{R}k^\circ = C - (0, \infty).k^\circ = \text{int}C + \mathbb{R}k^\circ = \text{int}C - (0, \infty).k^\circ = Y.$$

با در نظرگرفتن $y_0 \in D$، از رابطه شمول $D + \text{int}C \subset D$ بدست می‌آوریم

$$D + \mathbb{R}k^\circ \supset y_0 + \text{int}C + \mathbb{R}k^\circ = y_0 + Y = Y;$$

یعنی (۸.۲) برقرار است، فرض کنید که خط $y + \mathbb{R}k^\circ$ درون D قرار دارد؛ آنگاه داریم $D \subset D + intC \subset Y = y + \mathbb{R}k^\circ + intC$ که با سره بودن D در تناقض است. چون داریم $D \subset D + intC \subset D + (0, \infty)k^\circ$ به وضوح (۹.۲) نیز برقرار است.

(ب) فرض کنید که (۹.۲) برقرار است، با استفاده از برهان خلف $y_0 \in D$ و $t_0 \in (0, \infty)$ وجود دارند به‌طوری‌که $y_0 + t_0 k^\circ \notin intD$. چون D محدب است، از قضیه تفکیک $y^* \in Y^* \setminus \{0\}$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\langle y_0 + t_0 k^\circ, y^* \rangle \le \langle y, y^* \rangle \quad \forall y \in D.$$

از (۴.۲) برای هر $t \geq \circ$ به دست می‌آوریم $\langle y_\circ + tk^\circ, y^* \rangle \leq \langle y_\circ + t_\circ k^\circ, y^* \rangle$. چون $t_\circ > \circ$ نتیجه می‌گیریم که $\langle k^\circ, y^* \rangle = \circ$، بنابراین

$$\langle y_\circ, y^* \rangle \leq \langle y + tk^\circ, y^* \rangle \quad \forall y \in D, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

از (۸.۲) برای هر $y \in Y$ به دست می‌آوریم $\langle y_\circ, y^* \rangle \leq \langle y, y^* \rangle$، که نشان می‌دهد $y^* = \circ$. از این تناقض نتیجه می‌گیریم که (۹.۲) برقرار است.

حال فرض کنید برای برخی $y \in Y$ داریم $y + \mathbb{R}k^\circ \subset D$. همچنین فرض کنید $d \in D$ و $t \in \mathbb{R}$.
چون D محدب است برای $n \in \mathbb{N}^*$ داریم $\frac{n-1}{n}d + \frac{1}{n}(y + tnk^\circ) \in D$. با حدگرفتن به‌دست می‌آوریم $d + tk^\circ \in clD = D$. بنابراین با استفاده از (۸.۲)، به تناقض $Y = D + \mathbb{R}k^\circ \subset D$ می‌رسیم.
از اینکه در هر دو حالت شرایط (۸.۲)، (۷.۲) و (۹.۲) برقرار است، از قضیه ۲.۴.۲ قسمت (پ) و (ج) φ متناهی-مقدار و پیوسته است، علاوه براین در حالت (ب) φ و D محدب هستند. □

لم ۴.۴.۲. *فرض کنید $E \in \zeta_Y$ و داشته باشیم $q \in \mathrm{int}K$ آن‌گاه تابع $\varphi_{q,E}$ پیوسته است و*

$$\{y \in Y | \varphi_{q,E}(y) < c\} = cq - \mathrm{int}E \quad \forall c \in \mathbb{R},$$
$$\{y \in Y | \varphi_{q,E}(y) = c\} = cq - \partial E \quad \forall c \in \mathbb{R},$$
$$\varphi_{q,E}(-E) \leq \circ, \qquad \varphi_{q,E}(-\partial E) = \circ.$$

برهان. از $E \in \zeta_Y$ ، $q \in \mathrm{int}K$ و گزاره ۳.۴.۲ نتیجه می‌گیریم که

(الف) $E + R_>.q \subset \mathrm{int}E$،

(ب) $Y = \mathbb{R}.q - E$،

(پ) $\forall y \in Y, \exists s \in \mathbb{R}$ چنان‌که $y + sq \notin E.$

بنابراین از (الف) ـ (ب) و قضیه ۲.۴.۲ نتیجه بدیهی است. □

مساله بهینه‌سازی اسکالر زیر را در نظر بگیرید:

$$(P_{q,y}) \ \min_{x \in S} \varphi_{q,E}(f(x) - y),$$

که در آن $q \in \mathrm{int}K$ و $y \in Y$. $\varphi_{q,E}(f(x) - y)$ را با $(\varphi_{q,E,y} of)(x)$ نمایش می‌دهیم.
مجموعه جواب‌های ϵ ـ مینیمال $(P_{q,y})$ را با $AMin(\varphi_{q,E,y} of, \epsilon)$ و مجموعه جواب‌های ϵ ـ مینیمال اکید $(P_{q,y})$ را با $SAMin(\varphi_{q,E,y} of, \epsilon)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۵.۴.۲. *(قضیه دوقطبی). برای هر مجموعه ناتهی $C \subset X$ در فضای خطی X، داریم:*

$$C^{\circ\circ} = cl(\mathrm{conv}\{\lambda c : \lambda \geq \circ, \, c \in C\})$$

. که درآن $C^{\circ\circ} = (C^\circ)^\circ$.

گزاره ۶.۴.۲. *[۲۹]. فرض کنید‌که $E \subset Y$ مجموعه‌ای بهبودیافته باشد آن‌گاه*
(الف) $\overline{E^+} \subset K^+$ و $clK \subset cl\overline{E}$
که درآن $\overline{E}$ مخروط تولید شده توسط پوسته محدب E است یعنی $\overline{E} = \mathrm{cone(conv)}E$.

لم ۷.۴.۲. *فرض کنید $E \in \zeta_Y$ مجموعه‌ای محدب باشد آن‌گاه $\mathrm{int}(E \cap K) \neq \emptyset$.*

برهان. ابتدا ثابت می‌کنیم $E \cap K \neq \emptyset$. اگر $E \cap K = \emptyset$، آن‌گاه از اینکه E و K هر دو محدبند و با استفاده از قضیه تفکیک $y^* \in Y^* \setminus \{0\}$ وجود دارد چنان‌که

$$\langle y^*, e\rangle \geq \langle y^*, k\rangle, \quad \forall e \in E, \forall k \in K. \tag{۱۰.۲}$$

فرض کنید در رابطه (۱۰.۲) داشته باشیم $k = 0$، در این صورت داریم $\langle y^*, e\rangle \geq 0$، $\forall e \in E$. بنابراین $y^* \in E^+$. از گزاره ۶.۴.۲ (الف) نتیجه می‌گیریم که $y^* \in K^+$، یعنی

$$\langle y^*, k\rangle \geq 0, \quad \forall k \in K. \tag{۱۱.۲}$$

علاوه براین، دوباره از (۱۰.۲) و از اینکه K یک مخروط است، نتیجه می‌گیریم که $\langle y^*, k\rangle \leq 0$ $\forall k \in K$. بنابراین از (۱۱.۲) داریم:

$$\langle y^*, k\rangle = 0, \quad \forall k \in K.$$

از لم ۴.۳.۲، داریم $K = \partial K$ که با فرض $\mathrm{int}K \neq \emptyset$ متناقض است.
اکنون ثابت می‌کنیم $E \cap K$ مجموعه‌ای بهبودیافته نسبت به K است، چون $0 \notin E$ و $0 \in K$ آن‌گاه داریم $0 \notin E \cap K$ و $E \cap K \subset E \cap K + K$. کافی است ثابت کنیم $E \cap K + K \subset E \cap K$. چون K مخروطی محدب است آن‌گاه داریم:

$$E \cap K + K \subset K + K = K. \tag{۱۲.۲}$$

از $E \in \zeta_Y$ بدست می‌آوریم:

$$E \cap K + K \subset E + K = E. \tag{۱۳.۲}$$

از (۱۲.۲) و (۱۳.۲) نتیجه می‌گیریم که $E \cap K + K \subset E \cap K$. بنابراین از $E \cap K \neq \emptyset$ و $\mathrm{int}K \neq \emptyset$ و قضیه ۱۰.۲.۲ داریم:

$$\mathrm{int}(E \cap K) = E \cap K + \mathrm{int}K \neq \emptyset.$$

□

ملاحظه ۸.۴.۲. *فرض تحدب مجموعه بهبودیافته E تنها یک شرط کافی برای اطمینان یافتن از $\mathrm{int}(E \cap K) \neq \emptyset$ است. در واقع فرض می‌کنیم $Y = \mathbb{R}^2$، $K = \mathbb{R}^2_{\geq}$ و*

$$E = \mathbb{R}^2_{\geq} \setminus \{(x_1, x_2) | 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 < 1\}.$$

بدیهی است که E مجموعه بهبودیافته نسبت به K است و E محدب نیست. در هر حال

$$\mathrm{int}(E \cap K) = \{(x_1, x_2) | x_1 > 0, x_2 > 0\} \setminus \{(x_1, x_2) | 0 \leq x_1 < 1, 0 \leq x_2 \leq 1\} \neq \emptyset.$$

طبق لم ۷.۴.۲ می‌توانیم $q \in \mathrm{int}(E \cap K)$ را در نظر بگیریم و توصیف اسکالر غیر خطی از جواب‌های E-کارای (۲.۲) توسط تابع اسکالر غیر خطی $\varphi_{q,E}$ ارایه دهیم.

قضیه ۹.۴.۲. *فرض کنید $E \in \zeta_Y$ مجموعه محدب بسته باشد و داشته باشیم $q \in \mathrm{int}(E \cap K)$ و*

$$\epsilon = \inf\{s \in \mathbb{R}_{>} | sq \in \mathrm{int}(E \cap K)\}.$$

آن‌گاه

$$\bar{x} \in WAE(f,S,E) \Longleftrightarrow \bar{x} \in AMin(\varphi_{q,E,f(\bar{x})}of, \epsilon).$$

برهان. فرض کنید که $\bar{x} \in WAE(f,S,E)$. از لم ۴.۴.۲ نتیجه می‌گیریم که

$$\{y \in Y | \varphi_{q,E}(y) < \circ\} = -\mathrm{int}E. \qquad (۱۴.۲)$$

از اینکه $\bar{x} \in WAE(f,S,E)$ نتیجه می‌گیریم

$$(f(S) - f(\bar{x})) \cap (-\mathrm{int}E) = \emptyset. \qquad (۱۵.۲)$$

از (۱۴.۲) و (۱۵.۲) نتیجه می‌گیریم که

$$(f(S) - f(\bar{x})) \cap \{y \in Y | \varphi_{q,E}(y) < \circ\} = \emptyset.$$

بنابراین

$$(\varphi_{q,E,f(\bar{x})}of)(x) = \varphi_{q,E}(f(x) - f(\bar{x})) \geq \circ \quad \forall x \in S. \qquad (۱۶.۲)$$

علاوه بر این چون $\epsilon q \in E \cap K \subset E$ داریم:

$$(\varphi_{q,E,f(\bar{x})}of)(\bar{x}) = \varphi_{q,E}(\circ) = \inf\{s \in \mathbb{R} | sq \in E\} \leq \epsilon.$$

از (۱۶.۲) نتیجه می‌گیریم که

$$(\varphi_{q,E,f(\bar{x})}of)(x) \geq (\varphi_{q,E,f(\bar{x})}of)(\bar{x}) - \epsilon.$$

بنابراین $\bar{x} \in AMin(\varphi_{q,E,f(\bar{x})}of, \epsilon)$.
به عکس فرض کنید که $\bar{x} \in AMin(\varphi_{q,E,f(\bar{x})}of, \epsilon)$ و $\bar{x} \notin WAE(f,S,E)$. آنگاه $\hat{x} \in S$ وجود دارد چنان‌که

$$f(\hat{x}) - f(\bar{x}) \in -\mathrm{int}E. \qquad (۱۷.۲)$$

از (۱۷.۲) و لم ۴.۴.۲ نتیجه می‌گیریم که برای هر $c \in \mathbb{R}$

$$cq + f(\hat{x}) - f(\bar{x}) \in cq - \mathrm{int}E = \{y \in Y | \varphi_{q,E}(y) < c\},$$

که حاصل می‌شود:

$$\varphi_{q,E}(cq + f(\hat{x}) - f(\bar{x})) < c. \qquad (۱۸.۲)$$

در (۱۸.۲) قرار می‌دهیم $c = \circ$ آن‌گاه

$$\varphi_{q,E}\left(f(\hat{x}) - f(\bar{x})\right) < \circ. \qquad (۱۹.۲)$$

از طرف دیگر چون $\bar{x} \in AMin(\varphi_{q,E,f(\bar{x})}of, \epsilon)$ نتیجه می‌گیریم

$$\varphi_{q,E}(f(\hat{x}) - f(\bar{x})) \geq \varphi_{q,E}(f(\bar{x}) - f(\bar{x})) - \epsilon = \varphi_{q,E}(\circ) - \epsilon. \qquad (۲۰.۲)$$

می‌توان ثابت کرد

$$\begin{aligned} \varphi_{q,E}(\circ) &= \inf\{s \in \mathbb{R} | \circ \in sq - E\} \\ &= \inf\{s \in \mathbb{R} | sq \in E\} \\ &= \inf\{s \in \mathbb{R}_{>} | sq \in E\}. \end{aligned} \qquad (۲۱.۲)$$

در واقع کافی است برای هر $s \le \circ$ ثابت کنیم $sq \notin E$. به وضوح هنگامی‌که $s = \circ$ داریم $\circ \notin E$. فرض کنید که $\hat{s} < \circ$ وجود داشته باشد چنانکه $\hat{s}q \in E$. چون $q \in \mathrm{int}(E \cap K) \subset K$ و $-\hat{s}q \in K$ آن‌گاه داریم:

$$\circ = \hat{s}q - \hat{s}q \in E + K = E,$$

که با $E \in \zeta_Y$ در تناقض است. پس نتیجه می‌گیریم (۲۱.۲) برقرار است. علاوه بر این طبق اینکه $q \in \mathrm{int}(E \cap K) \subset K$ برای هر $s \in \mathbb{R}_>$ داریم $sq \in K$. بنابراین از (۲۱.۲) نتیجه می‌گیریم که

$$\varphi_{q,E}(\circ) = \inf\{s \in \mathbb{R}_> | sq \in E \cap K\}.$$

بنابراین

$$\varphi_{q,E}(\circ) - \epsilon = \inf\{s \in \mathbb{R}_> | sq \in E \cap K\} - \inf\{s \in \mathbb{R}_> | sq \in \mathrm{int}(E \cap K)\} = \circ.$$

از (۲۰.۲) داریم

$$\phi_{q,E}(f(\hat{x}) - f(\bar{x})) \ge \circ$$

که با (۱۹.۲) در تناقض است بنابراین $\bar{x} \in WAE(f,S,E)$.

□

می‌توان جواب‌های E- کارای (۲.۲) را توسط تابع اسکالرسازی غیرخطی $\varphi_{q,E}$ مشخص کرد و توصیف اسکالرسازی غیر خطی زیر را بدست آورد.

قضیه ۱۰.۴.۲. *فرض کنید $E \in \zeta_Y$ مجموعه محدب بسته باشد و $q \in \mathrm{int}(E \cap K)$ و*

$$\epsilon = \inf\{S \in \mathbb{R}_> | sq \in \mathrm{int}(E \cap K)\}.$$

آنگاه

$$\bar{x} \in AE(f,S,E) \Longleftrightarrow \bar{x} \in SAMin(\varphi_{q,E,f(\bar{x})} of, \epsilon).$$

برهان. فرض کنید $\bar{x} \in AE(f,S,E)$ دراین‌صورت خواهیم داشت:

$$(f(\bar{x}) - E) \cap f(S) = \emptyset.$$

یعنی

$$(f(S) - f(\bar{x})) \cap (-E) = \emptyset.$$

از لم ۴.۴.۲ داریم

$$\varphi_{q,E}(-E) \le \circ.$$

به این معنی که

$$\{y \in Y | \varphi_{q,E}(y) \le \circ\} = E$$

بنابراین به دست می‌آوریم

$$(f(S) - f(\bar{x})) \cap \{y \in Y | \varphi_{q,E}(y) \le \circ\} = \emptyset.$$

که نتیجه می‌دهد

$$(\varphi_{q,E,f(\bar{x})} of)(x) = \varphi_{q,E}(f(x) - f(\bar{x})) > \circ, \quad \forall x \in S.$$

علاوه‌براین چون $\epsilon q \in E \cap K \subset E$ داریم:

$$(\varphi_{q,E,f(\bar{x})} o f)(\bar{x}) = \varphi_{q,E}(\circ) = \inf\{s \in \mathbb{R} | sq \in E\} \leq \epsilon.$$

پس نتیجه می‌گیریم که

$$(\varphi_{q,E,f(\bar{x})} o f)(\bar{x}) - \epsilon \leq \circ.$$

بنابراین داریم

$$(\varphi_{q,E,f(\bar{x})} o f)(x) > (\varphi_{q,E,f(\bar{x})} o f)(\bar{x}) - \epsilon.$$

لذا از روابط بالا به دست می‌آوریم $\bar{x} \in AMin(\phi_{q,E,f(\bar{x})} o f, \epsilon)$.

به عکس فرض کنید که $\bar{x} \in SAMin(\varphi_{q,E,f(\bar{x})} o f, \epsilon)$ و $\bar{x} \notin AE(f, S, E)$ آنگاه $\hat{x} \in S$ وجود دارد چنان‌که

$$f(\hat{x}) - f(\bar{x}) \in -E,$$

از لم ۲.۴.۴ نتیجه می‌گیریم که برای هر $c \in R$

$$cq + f(\hat{x}) - f(\bar{x}) \in cq - E = \{y \in Y | \varphi_{q,E}(y) \leq c.\}$$

که حاصل می‌کند

$$\varphi_{q,E}(\phi + f(\hat{x}) - f(\bar{x})) < c.$$

قرار می‌دهیم $c = \circ$ آنگاه داریم:

$$\phi_{q,E}(f(\hat{x}) - f(\bar{x})) < \circ$$

ادامه روند اثبات مشابه طرف دوم اثبات قضیه ۳.۱ است لذا از آن صرف نظر می‌کنیم. □

۵.۲ E-کارایی سره بنسن توسط اسکالرسازی غیرخطی

در این بخش مفهوم E-کارایی سره بنسن را با مجموعه‌های بهبودیافته و با استفاده از ایده کارایی سره بنسن کلاسیک مطرح می‌کنیم. در تعریف ۸.۲.۲ فرض کنید $Y = \mathbb{R}$ و $\epsilon > \circ$ و $E = \epsilon + \mathbb{R}_{\geq}$. از قسمت (ب) نتیجه ۹.۲.۲ داریم $E \in \zeta^{۱}$. بنابراین از E-کارایی برای مسایل می‌نیم‌سازی نتیجه می‌گیریم که اگر $a \in A$ نقطه E-کارا باشد یعنی $(a - \epsilon + \mathbb{R}_{\geq}) \cap A = \emptyset$ لذا برای هر $y \in A$ داریم $y > a - \epsilon$. به این معنی که a نقطه بهینه تقریبی اکید A است [۵۰]. به‌علاوه اگر $E \in \zeta_Y$، از قسمت (الف) نتیجه ۹.۲.۲ می‌دانیم که $E + K \setminus \{\circ\} \in \zeta_Y$. لذا تعاریف زیر را برای E-کارایی در مسایل می‌نیم‌سازی در نظر خواهیم داشت.

تعریف ۱.۵.۲. فرض کنید $E \in \zeta_Y$ ومجموعه ناتهی $A \subset Y$ داده شده باشد. گوییم $a \in A$ نقطه E-کارای A است اگر $(a - E - K \setminus \{\circ\}) \cap A = \emptyset$ و آن را با $a \in O^{E+K\setminus\{\circ\}}(A)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲.۵.۲. فرض کنید $E \in \zeta_Y$ ومجموعه ناتهی $A \subset Y$ داده شده باشد. گوییم $a \in A$ نقطه E-کارای سره بنسن A است اگر

$$clcone(A + E - a) \cap (-K) = \{\circ\}$$

که آن را با $a \in O^E_{BS}(A)$ نشان می‌دهیم.

ملاحظه ۳.۵.۲. *از تعریف ۱.۵.۲ و ۲.۵.۲ بدیهی است که:*

$$O^E_{BS}(A) \subset O^{E+K\setminus\{0\}}(A)$$

در واقع برای هر $a \in O^E_{BS}(A)$*، از ۲.۵.۲ داریم:*

$$clcone(A+E-a)\cap(-K)=\{0\}$$

که نتیجه می‌دهد

$$(A+E-a)\cap(-K)\subset\{0\}$$

بنابراین

$$(A+E-a)\cap(-K\setminus\{0\})=\emptyset$$

که نشان می‌دهد $a \in O^{E+K\setminus\{0\}}(A)$.

ملاحظه ۴.۵.۲. *مثال های زیر نشان می‌دهد که عکس رابطه گفته شده در ملاحظه ۳.۵.۲ لزوماً برقرار نیست.*

مثال ۵.۵.۲. قرار دهید $Y=\mathbb{R}^2$ و $K=\mathbb{R}^2_{\geq}$

$$A=\{(x_1,x_2)|x_1=0,x_2<0\}\cup\{(x_1,x_2)|0\leq x_1\leq 1,0\leq x_2\leq 1\}$$

و $E=\{(x_1,x_2)|x_1\geq 0/1,x_2\geq 0/1\}$ واضح است که $E\in\zeta^2$. از تعریف ۱.۵.۲ به دست می‌آوریم $(0,0)\in O^{E+K\setminus\{0\}}(A)$، اما چون

$$\begin{aligned}&clcone(A+E-(0,0))\cap(-K)=\\&clcone(\{(x_1,x_2)|x_1=0,x_2<0\}\cup\{(x_1,x_2)|0\leq x_1\leq 1,0\leq x_2\leq 1\}\\&+\{(x_1,x_2)|x_1\geq 0/1,x_2\geq 0/1\}-(0,0))\cap(-\mathbb{R}^2_{\geq})\\&=\{(x_1,x_2)|x_1=0,x_2\leq 0\}\neq\{(0,0)\}\end{aligned}$$

از تعریف ۲.۵.۲ نتیجه می‌گیریم که $(0,0)\notin O^E_{BS}(A)$.

مثال ۶.۵.۲. قرار دهید $Y=\mathbb{R}^2$، $K=\mathbb{R}^2_{\geq}$،

$$A=\{(x_1,x_2)|x_1=0,x_2>0\}\cup\{(x_1,x_2)|0\leq x_1\leq 1,-1\leq x_2\leq 0\}$$

و $E=\{(x_1,x_2)|x_1\geq 0/1,x_2\geq 0/1\}$ واضح است که $E\in\zeta^2$. از تعاریف ۱.۵.۲ و ۲.۵.۲ داریم $(0,0)\in O^{E+K\setminus\{0\}}(A)$ و $(0,0)\in O^E_{BS}(A)$.

ملاحظه ۷.۵.۲. *اگر* $E=K\setminus\{0\}$ *آنگاه ،* E*-کارایی سره بنسن با کارایی سره کلاسیک بنسن منطبق است. در واقع از قسمت (الف) نتیجه ۹.۲.۲ ، نتیجه می‌گیریم* $E\in\zeta_Y$ *. همچنین از قسمت (ب) قضیه ۱۴.۲.۲ نتیجه می‌گیریم که:*

$$\begin{aligned}clcone(A+E-a)&=clcone(A+K\setminus\{0\}-a)\\&\subset clcone(A+K-a)\\&=clcone(A+intK-a)\\&\subset clcone(A+K\setminus\{0\}-a)\end{aligned}$$

که نتیجه می‌دهد $clcone(A+E-a) = clcone(A+K-a)$. از تعریف ۱.۵.۲ نتیجه می‌گیریم $clcone(A+K-a) \cap (-K) = \{0\}$ یعنی a نقطه کارای سره بنسن A است.

ملاحظه ۸.۵.۲. E-کارایی سره بنسن برخی کارایی سره تقریبی و دقیق را علاوه بر کارایی سره بنسن کلاسیک و ϵ-کارایی سره در بر می‌گیرد. به عنوان مثال اگر در تعریف E-کارایی سره بنسن قرار دهیم $E = \varepsilon + K$ همان تعریف ε-کارایی سره رانگ بدست می‌آید [۵۵].

در تعریف ۲.۵.۲ فرض کنید $A = f(S)$ و $a = f(x_0)$ در این صورت تعریف زیر را داریم.

تعریف ۹.۵.۲. [۷۴]. فرض کنید E مجموعه‌ای بهبودیافته نسبت به K باشد، نقطه شدنی $x_0 \in S$ جواب E-کارای سره بنسن (۲.۲) نامیده می‌شود اگر

$$cl(cone(f(S) + E - f(x_0))) \cap (-K) = \{0\}.$$

مجموعه تمام جواب‌های E-کارای سره بنسن را با نماد $x_0 \in PAE(f,E)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۱۰.۵.۲. *فرض کنید $E \subset Y$ مجموعه بهبود یافته بسته نسبت به K باشد، $q \in int(E \cap K)$ و $\epsilon = \inf\{s \in \mathbb{R}_> | sq \in int(E \cap K)\}$. آنگاه*

الف. $x_0 \in PAE(f,E) \Longrightarrow x_0 \in AMin(\varphi_{q,E,f(x_0)} of, \epsilon)$،

ب. اگر $cone(f(S)+E-f(x_0))$ مجموعه‌ای بسته باشد، آنگاه

$$x_0 \in SAMin(\varphi_{q,E,f(x_0)} of, \epsilon) \Longrightarrow x_0 \in PAE(f,E). \qquad (۲۲.۲)$$

برهان. ابتدا قسمت (الف) را ثابت می‌کنیم. فرض کنید که $x_0 \in PAE(f,E)$، آنگاه داریم

$$cl(cone(f(S)+E-f(x_0))) \cap (-K) = \{0\}. \qquad (۲۳.۲)$$

بنابراین

$$(f(S)+E-f(x_0)) \cap (-intK) = \emptyset. \qquad (۲۴.۲)$$

ثابت می‌کنیم

$$(f(x_0) - intE) \cap f(S) = \emptyset. \qquad (۲۵.۲)$$

به عکس فرض کنید $\hat{x} \in S$ وجود داشته باشد به‌طوریکه

$$f(\hat{x}) - f(x_0) \in -intE. \qquad (۲۶.۲)$$

بنابراین از قضیه ۱۰.۲.۲ نتیجه می‌گیریم که

$$f(\hat{x}) - f(x_0) \in -E - intK. \qquad (۲۷.۲)$$

لذا

$$f(\hat{x}) - f(x_0) + E \subset -intK, \qquad (۲۸.۲)$$

که با (۲۴.۲) در تناقض است و بنابراین (۲۵.۲) برقرار است. از لم ۴.۴.۲ به دست می‌آوریم

$$\{y \in Y | \varphi_{q,E}(y) < 0\} = -intE. \qquad (۲۹.۲)$$

از (۲۵.۲) داریم،

$$(f(S)-f(x_\circ))\cap(-intE)=\emptyset. \tag{۳۰.۲}$$

با استفاده از (۲۹.۲) و (۳۰.۲) به دست می‌آوریم

$$(f(S)-f(x_\circ))\cap\{y\in Y|\varphi_{q,E}(y)<\circ\}=\emptyset. \tag{۳۱.۲}$$

بنابراین،

$$(\varphi_{q,E,f(x_\circ)}of)(x)=\varphi_{q,E}(f(x)-f(x_\circ))\geq\circ,\quad \forall x\in S. \tag{۳۲.۲}$$

علاوه براین چون $\{s\in\mathbb{R}_>|sq\in int(E\cap K)\}\subset\{s\in\mathbb{R}|sq\in E\}$ داریم،

$$(\varphi_{q,E,f(x_\circ)}of)(x_\circ)=\varphi_{q,E}(\circ)=\inf\{s\in\mathbb{R}|sq\in E\}\leq\epsilon. \tag{۳۳.۲}$$

از (۳۲.۲) نتیجه می‌گیریم که

$$(\varphi_{q,E,f(x_\circ)}of)(x)\geq(\xi_{q,E,f(x_\circ)}of)(x_\circ)-\epsilon. \tag{۳۴.۲}$$

بنابراین $x_\circ\in AMin(\varphi_{q,E,f(x_\circ)}of,\epsilon)$.

(ب) فرض کنید که $x_\circ\in SAMin(\varphi_{q,E,f(x_\circ)}of,\epsilon)$ و $x_\circ\notin PAE(f,E)$ در نتیجه $cl(cone(f(S)+E-f(x_\circ))\cap(-K)\neq\{\circ\}$. چون $cone(f(S)+E-f(x_\circ))$ مجموعه‌ای بسته است، $\circ\neq d\in -K$، $\lambda>\circ$، $\hat{x}\in S$ و $\hat{e}\in E$ وجود دارند چنانکه

$$d=\lambda(f(\hat{x})-f(x_\circ)+\hat{e}). \tag{۳۵.۲}$$

چون K مخروط است داریم

$$f(\hat{x})-f(x_\circ)+\hat{e}\in -K. \tag{۳۶.۲}$$

بنابراین چون $E\in\zeta_Y$ می‌توان نتیجه گرفت که

$$f(\hat{x})-f(x_\circ)\in-\hat{e}-K\subset -E-K=-E. \tag{۳۷.۲}$$

علاوه براین از لم ۴.۴.۲ برای هر $c\in\mathbb{R}$ داریم

$$\begin{aligned} cq+f(\hat{x})-f(x_\circ) &\in cq-E \\ &= cq-clE \\ &\{y\in Y|\varphi_{q,E}(y)\leq c\}; \end{aligned} \tag{۳۸.۲}$$

که حاصل می‌کند

$$\varphi_{q,E}(cq+f(\hat{x})-f(x_\circ))\leq c. \tag{۳۹.۲}$$

در رابطه (۳۹.۲) قرار دهید $c=\circ$، آنگاه داریم

$$\varphi_{q,E}(f(\hat{x})-f(x_\circ))\leq\circ. \tag{۴۰.۲}$$

از طرف دیگر از اینکه $x_\circ\in SAMin(\varphi_{q,E,f(x_\circ)}of,\epsilon)$، نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned} \varphi_{q,E}(f(\hat{x})-f(x_\circ)) &> \varphi_{q,E}(f(x_\circ)-f(x_\circ))-\epsilon \\ &= \varphi_{q,E}(\circ)-\epsilon. \end{aligned} \tag{۴۱.۲}$$

در ادامه ثابت می‌کنیم

$$\varphi_{q,E}(\circ) = \epsilon. \tag{۴۲.۲}$$

ابتدا ثابت می‌کنیم برای هر $s \leq \circ$، $sq \notin E$. واضح است که برای $s = \circ$ داریم $\circ \notin E$. فرض کنید که $\hat{s} < \circ$ وجود داشته باشد چنانکه $\hat{s}q \in E$. چون $q \in int(E \cap K) \subset K$ و $-\hat{s}q \in K$ داریم

$$\circ = \hat{s}q - \hat{s}q \in E + K = E, \tag{۴۳.۲}$$

که با اینکه E مجموعه‌ای بهبودیافته نسبت به K است در تناقض است، بنابراین

$$\begin{aligned} \varphi_{q,E}(\circ) &= \inf\{s \in \mathbb{R} | \circ \in sq - E\} \\ &= \inf\{s \in \mathbb{R}_{>} | sq \in E\}. \end{aligned} \tag{۴۴.۲}$$

علاوه براین، چون $q \in int(E \cap K) \subset K$، برای هر $s \in \mathbb{R}_{>}$ داریم $sq \in K$. از (۴۴.۲) نتیجه می‌گیریم که

$$\varphi_{q,E}(\circ) = \inf\{s \in \mathbb{R}_{>} | sq \in E \cap K\}. \tag{۴۵.۲}$$

بنابراین (۴۲.۲) برقرار است و از (۴۱.۲) به دست می‌آوریم $\varphi_{q,E}(f(\hat{x}) - f(x_\circ)) > \circ$ که با (۴۴.۲) در تناقض است. بنابراین $x_\circ \in PAE(f, E)$. □

ملاحظه ۱۱.۵.۲. *از اینکه* $x_\circ \in PAE(f, E)$ *نمی‌توان نتیجه گرفت که* $x_\circ \in SAMin(\varphi_{q,E,f(x_\circ)} o f, \epsilon)$.

مثال ۱۲.۵.۲. فرض کنید $X = Y = \mathbb{R}^۲$، $K = \mathbb{R}^۲_{\geq}$، $f(x) = x$ و

$$\begin{aligned} E &= \{(x_۱, x_۲) | x_۱ + x_۲ \geq ۱, x_۱ \geq \circ, x_۲ \geq \circ\}, \\ S &= \{(x_۱, x_۲) | x_۱ - x_۲ = \circ, -\tfrac{۱}{۲} \leq x_۱ \leq \circ\}. \end{aligned} \tag{۴۶.۲}$$

به وضوح K مخروط بسته و E مجموعه بهبودیافته بسته نسبت به K است. فرض کنید $x_\circ = (\circ, \circ) \in S$ و $q = (۱, ۱) \in int(E \cap K)$. آنگاه $\epsilon = \frac{۱}{۲}$. چون

$$\begin{aligned} & cl(cone(f(S) + E - f(x_\circ))) \cap (-K) \\ &= \{(x_۱, x_۲) | x_۱ + x_۲ \geq \circ\} \cap (-\mathbb{R}^۲_{\geq}) = \{(\circ, \circ)\}. \end{aligned} \tag{۴۷.۲}$$

بنابراین

$$x_\circ \in PAE(f, E). \tag{۴۸.۲}$$

برای هر $x \in S$ داریم

$$\begin{aligned} \varphi_{q,E}(f(x) - f(x_\circ)) &= \varphi_{q,E}(f(x)) \\ &= \inf\{s \in \mathbb{R} | f(x) \in sq - E\} \\ &\geq \circ = \tfrac{۱}{۲} - \tfrac{۱}{۲} \\ &= \varphi_{q,E}(\circ) - \epsilon. \end{aligned} \tag{۴۹.۲}$$

بنابراین

$$x_\circ \in AMin(\varphi_{q,E,f(x_\circ)} o f, \epsilon). \tag{۵۰.۲}$$

در هر حال، $\hat{x} = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \in S$ وجود دارد چنانکه

$$\begin{aligned} \varphi_{q,E}(f(\hat{x}) - f(x_0)) &= \varphi_{q,E}(f(\hat{x})) \\ &= \inf\{s \in \mathbb{R} | f(\hat{x}) \in sq - E\} \\ &= 0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\ &= \varphi_{q,E}(0) - \epsilon. \end{aligned} \tag{۵۱.۲}$$

بنابراین

$$x_0 \notin SAMin(\varphi_{q,E,f(x_0)} of, \epsilon). \tag{۵۲.۲}$$

ملاحظه ۱۳.۵.۲. *در صورتیکه شرط بسته بودن $cone(f(S) + E - f(x_0))$ حذف شود، قسمت (ب) قضیه ۱۰.۵.۲ ممکن است درست نباشد. مثال زیر می‌تواند این موضوع را شرح دهد.*

مثال ۱۴.۵.۲. فرض کنید $X = Y = \mathbb{R}^2$، $K = \mathbb{R}^2_{\geq}$، $f(x) = x$ و

$$\begin{aligned} &E = \{(x_1, x_2) | x_1 + x_2 \geq 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq \tfrac{1}{2}\}, \\ &S = \{(x_1, x_2) | x_1 \leq 0, x_2 = 0\}. \end{aligned} \tag{۵۳.۲}$$

به وضوح K مخروط بسته و E مجموعه بهبودیافته بسته نسبت به K است. فرض کنید $x_0 = (0, 0) \in S$ و $q = (1, 1) \in int(E \cap K)$. آنگاه $\epsilon = \frac{1}{2}$ و

$$\begin{aligned} &cl(cone(f(S) + E - f(x_0))) \cap (-K) \\ &= \{(x_1, x_2) | x_1 \in \mathbb{R}, x_2 > 0\} \cup \{(0, 0)\} \end{aligned} \tag{۵۴.۲}$$

مجموعه بسته نیست. چون برای هر $x \in S$ داریم

$$\begin{aligned} \varphi_{q,E}(f(x) - f(x_0)) &= \varphi_{q,E}(f(x)) \\ &= \inf\{s \in \mathbb{R} | f(x) \in sq - E\} \\ &= \frac{1}{2} > \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\ &= \varphi_{q,E}(0) - \epsilon. \end{aligned} \tag{۵۵.۲}$$

بنابراین

$$x_0 \in SAMin(\varphi_{q,E,f(x_0)} of, \epsilon). \tag{۵۶.۲}$$

از طرفی

$$\begin{aligned} &cl(cone(f(S) + E - f(x_0))) \cap (-K) \\ &= \{(x_1, x_2) | x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \geq 0\} \cap (-\mathbb{R}^2_{\geq}) \\ &= \{(x_1, x_2) | x_1 \leq 0, x_2 = 0\} \neq \{(0, 0)\}. \end{aligned} \tag{۵۷.۲}$$

بنابراین

$$x_0 \notin PAE(f, E). \tag{۵۸.۲}$$

ملاحظه ۱۵.۵.۲. *اگر فرض* $x_\circ \in SAMin(\varphi_{q,E,f(x_\circ)} of, \epsilon)$ *با* $x_\circ \in AMin(\varphi_{q,E,f(x_\circ)} of, \epsilon)$ *جایگزین شود، قسمت (ب) قضیه ۱۰.۵.۲ ممکن است درست نباشد. مثال زیر می‌تواند این موضوع را شرح دهد.*

مثال ۱۶.۵.۲. فرض کنید $X = Y = \mathbb{R}^۲$، $K = \mathbb{R}^۲_\geq$، $f(x) = x$ و

$$\begin{aligned} E &= \{(x_۱, x_۲) | x_۱ + x_۲ \geq ۱, x_۱ \geq \tfrac{۱}{۲}, x_۲ \geq \circ\} \cup \\ &= \{(x_۱, x_۲) | x_۱ \leq \tfrac{۱}{۲}, x_۲ \geq \tfrac{۱}{۲}\}, \\ S &= \{(x_۱, x_۲) | x_۱ - x_۲ = \circ, -\tfrac{۱}{۲} \leq x_۱ \leq \circ\}. \end{aligned} \quad (۵۹.۲)$$

به وضوح K مخروط بسته و E مجموعه بهبودیافته بسته نسبت به K است. فرض کنید $x_\circ = (\circ, \circ) \in S$ و $q = (۱, ۱) \in int(E \cap K)$. آنگاه $\epsilon = \frac{۱}{۲}$ و

$$\begin{aligned} & cl(cone(f(S) + E - f(x_\circ))) \\ &= \{(x_۱, x_۲) | x_۱ \in \mathbb{R}, x_۲ \geq \circ\} \\ & \cup \{(x_۱, x_۲) | x_۱ + x_۲ \geq \circ, x_۱ \geq \circ, x_۲ \leq \circ\} \end{aligned} \quad (۶۰.۲)$$

مجموعه‌ای بسته است، چون برای هر $x \in S$

$$\begin{aligned} \varphi_{q,E}(f(x) - f(x_\circ)) &= \varphi_{q,E}(f(x)) \\ &= \inf\{s \in \mathbb{R} | f(x) \in sq - E\} \\ &\geq \circ = \tfrac{۱}{۲} - \tfrac{۱}{۲} \\ &= \varphi_{q,E}(\circ) - \epsilon. \end{aligned} \quad (۶۱.۲)$$

بنابراین

$$x_\circ \in AMin(\varphi_{q,E,f(x_\circ)} of, \epsilon). \quad (۶۲.۲)$$

در هر حال، $\hat{x} = (-\frac{۱}{۲}, -\frac{۱}{۲}) \in S$ وجود دارد چنانکه

$$\begin{aligned} \varphi_{q,E}(f(\hat{x}) - f(x_\circ)) &= \varphi_{q,E}(f(\hat{x})) \\ &= \inf\{s \in \mathbb{R} | f(\hat{x}) \in sq - E\} \\ &= \circ = \tfrac{۱}{۲} - \tfrac{۱}{۲} \\ &= \varphi_{q,E}(\circ) - \epsilon. \end{aligned} \quad (۶۳.۲)$$

بنابراین

$$x_\circ \notin SAMin(\varphi_{q,E,f(x_\circ)} of, \epsilon). \quad (۶۴.۲)$$

علاوه براین

$$\begin{aligned} & cl(cone(f(S) + E - f(x_\circ))) \cap (-K) \\ &= \{(x_۱, x_۲) | x_۱ \in \mathbb{R}, x_۲ \geq \circ\} \\ & \cup \{(x_۱, x_۲) | x_۱ + x_۲ \geq \circ\, x_۱ \geq \circ, x_۲ \leq \circ\} \cap (-\mathbb{R}^۲_\geq) \\ &= \{(x_۱, x_۲) | x_۱ \leq \circ, x_۲ = \circ\} \neq \{(\circ, \circ)\}. \end{aligned} \quad (۶۵.۲)$$

بنابراین

$$x_\circ \notin PAE(f, E). \tag{۶۶.۲}$$

۶.۲ اسکالرسازی Eـ کارایی توسط Δ_{-K}

در این بخش، جواب‌های Eـکارا و Eـکارای ضعیف (۲.۲) را توسط تابع اسکالرساز غیرخطی Δ_{-K} معرفی شده به وسیله زافارونی[۶] در [۶۹] را مشخص می‌کنیم. فرض می‌کنیم که Y فضای نرم‌دار باشد و $E \in \zeta_Y$.

فرض کنید A زیرمجموعه‌ای از Y باشد و $\Delta_A : Y \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ تعریف شد با

$$\Delta_A(y) = d_A(y) - d_{Y \setminus A}(y),$$

داده شده باشد، که در آن $d_\emptyset(y) = +\infty$ و $d_A(y) = \inf\limits_{z \in A} ||z - y||$.

لم ۱.۶.۲. *[۶۹] فرض کنید A زیرمجموعه‌ای سره از Y باشد. دراین‌صورت گزاره‌های زیر برقرارند.*

الف. $\Delta_A(y) < \circ$ برای هر $y \in \mathrm{int} A$، $\Delta_A(y) = \circ$ برای هر $y \in \partial A$ و $\Delta_A(y) > \circ$ برای هر $y \notin clA$؛

ب. اگر A بسته باشد آنگاه داریم $A = \{Y | \Delta_A(y) \leq \circ\}$؛

پ. اگر A محدب باشد آنگاه Δ_A نیز محدب است؛

ت. اگر A مخروط باشد آنگاه Δ_A همگن مثبت است، یعنی برای هر $\lambda > \circ$ داریم، $\Delta_A(\lambda y) = \lambda \Delta_A(y)$.

ملاحظه ۲.۶.۲. *اگر A مخروطی محدب باشد آنگاه از لم ۱.۶.۲ (پ) و (ت) نتیجه می‌گیریم که Δ_A یک تابع زیرخطی است. یعنی*

$$\Delta_A(y_1 + y_2) \leq \Delta_A(y_1) + \Delta_A(y_2).$$

مساله بهینه‌سازی اسکالر زیر را در نظر بگیرید

$$(p_y) \qquad \min_{x \in S} \Delta_{-K}(f(x) - y),$$

که در آن $y \in Y$. مجموعه جواب‌های ϵ ـ مینیمال (P_y) را با $AMin(\Delta_{-K}(f(x) - y), \epsilon)$ نشان می‌دهیم و مجموعه جواب‌های ϵ ـ مینیمال اکید (P_y) را با $SAMin(\Delta_{-K}(f(x) - y), \epsilon)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۳.۶.۲. *فرض کنید $E \in \zeta_Y$ آنگاه داریم*

$$\bar{x} \in WAE(f, S, E) \Longrightarrow \bar{x} \in AMin(\Delta_{-K}(f(x) - f(\bar{x}), d_E(\circ)).$$

---

[۶] Zaffaroni

برهان. از $\bar{x} \in WAE(f, S, E)$ نتیجه می‌گیریم که
$$(f(\bar{x}) - \mathrm{int}E) \cap f(S) = \emptyset.$$
بنابراین از قضیه ۱۰.۲.۲ داریم:
$$(f(\bar{x}) - E - \mathrm{int}K) \cap f(S) = \emptyset.$$
یعنی
$$f(x) - f(\bar{x}) + e \notin -\mathrm{int}K, \quad \forall x \in S, \forall e \in E,$$
که از لم ۱.۶.۲ (الف) نتیجه می‌شود
$$\Delta_{-K}(f(x) - f(\bar{x}) + e) \geq \circ, \quad x \in S, \forall e \in E.$$
از این‌که K مخروطی محدب است و از ملاحظه ۲.۶.۲ نتیجه می‌گیریم که
$$\circ \leq \Delta_{-K}(f(x) - f(\bar{x}) + e) \leq \Delta_{-K}(f(x) - f(\bar{x})) + \Delta_{-K}(e),$$
یعنی
$$\Delta_{-K}(f(x) - f(\bar{x})) + \Delta_{-K}(e) \geq \circ, \forall x \in S, \forall e \in E.$$
بنابراین
$$\Delta_{-K}(f(x) - f(\bar{x})) + \inf_{e \in E} \Delta_{-K}(e) \geq \circ, \quad \forall x \in S. \tag{۶۷.۲}$$
اکنون $\inf\limits_{e \in E} \Delta_{-K}(e)$ را محاسبه می‌کنیم. از تعریف Δ_{-K} داریم
$$\Delta_{-K}(e) = d_{-K}(e) - d_{Y \setminus (-K)}(e), \quad \forall e \in E. \tag{۶۸.۲}$$
ثابت می‌کنیم $E \subset Y \setminus (-K)$.
با برهان خلف، فرض می‌کنیم که $\hat{e} \in E$ وجود دارد چنان‌که $\hat{e} \notin Y \setminus (-K)$، آنگاه داریم $-\hat{e} \in K$.
بنابراین از $E \in \zeta_Y$ داریم
$$\circ = \hat{e} - \hat{e} \in E + K = E,$$
که با $\circ \notin E$ در تناقض است بنابراین
$$d_{Y \setminus (-K)}(e) = \circ, \quad \forall e \in E.$$
از (۶۸.۲) نتیجه می‌گیریم که
$$\Delta_{-K}(e) = d_{-K}(e), \quad \forall e \in E.$$
بنابراین
$$\inf_{e \in E} \Delta_{-K}(e) = \inf_{e \in E} \inf_{k \in K} ||e + k||. \tag{۶۹.۲}$$
اکنون ثابت می‌کنیم
$$\inf_{e \in E} \inf_{k \in K} ||e + k|| = \inf_{e' \in E} ||e'||. \tag{۷۰.۲}$$
چون $E + K = E$ آنگاه
$$\{e + k | k \in K\} \subset E, \quad \forall e \in E,$$

که نتیجه می‌دهد که

$$\inf_{k\in K}||e+k|| \geq \inf_{e'\in E}||e'||, \quad \forall e\in E.$$

بنابراین $\inf_{e'\in E}||e'||$ کران پایین $\{\inf_{k\in K}||e+k||\}_{e\in E}$ است. علاوه‌براین از تعریف اینفیمم برای هر $\epsilon>\circ$، $e_\circ\in E$ وجود دارد چنانکه

$$||e_\circ|| < \inf_{e'\in E}||e'|| + \epsilon.$$

از $E+K=E$ نتیجه می‌گیریم که $\bar{e}\in E$ و $\bar{k}\in K$ وجود دارد چنانکه

$$e_\circ = \bar{e}+\bar{k}.$$

بنابراین

$$\inf_{k\in K}||\bar{e}+k|| \leq ||\bar{e}+\bar{k}|| = ||e_\circ|| < \inf_{e'\in E}||e'||+\epsilon.$$

بنابراین (۷۰.۲) برقرار است و آنگاه از (۶۹.۲) داریم

$$\inf_{e\in E}\Delta_{-K}(e) = \inf_{e'\in E}||e'|| = d_E(\circ).$$

از (۶۷.۲) بدست می‌آوریم که برای هر $x\in S$،

$$\Delta_{-K}(f(x)-f(\bar{x}))+d_E(\circ) = \Delta_{-K}(f(x)-f(\bar{x}))+\inf_{e\in E}\Delta_{-K}(e) \geq \circ. \quad (۷۱.۲)$$

چون $\circ\in\partial K$ و از لم ۱.۶.۲ (الف) داریم

$$\Delta_{-K}(f(\bar{x})-f(\bar{x})) = \Delta_{-K}(\circ) = \circ. \quad (۷۲.۲)$$

از ترکیب رابطه (۷۱.۲) و (۷۲.۲) نتیجه می‌گیریم که

$$\Delta_{-K}(f(x)-f(\bar{x})) \geq \Delta_{-K}(f(\hat{x})-f(\bar{x}))-d_E(\circ), \forall x\in S.$$

بنابراین

$$\bar{x}\in AMin(\Delta_{-K}(f(x)-f(\bar{x})), d_E(\circ)).$$

□

ملاحظه ۴.۶.۲. عکس قضیه ۳.۶.۲ *ممکن است برقرار نباشد. مثال زیر می‌تواند قضیه فوق را شرح دهد.*

مثال ۵.۶.۲. فرض کنید $X=Y=\mathbb{R}^۲$، $||.||=||.||_۲$، $K=\mathbb{R}^۲_+$ و $f(x)=x$ و

$$E=\{(x_۱,x_۲)|x_۱+x_۲\geq ۲, x_۱\geq\circ, x_۲\geq\circ\},$$
$$S=\{(x_۱,x_۲)|-۱\leq x_۱\leq ۱, \circ\leq x_۲\leq ۱\}$$

به وضوح $E\in\zeta_Y$ و $d_E(\circ)=\sqrt{۲}$. فرض کنید $\bar{x}=(۱,۱)\in S$. چون

$$\Delta_{-K}(f(x)-f(\bar{x})) \geq -۱ > -\sqrt{۲} = -d_E(\circ), \forall x\in S,$$

آنگاه

$$\bar{x}\in AMin(\Delta_{-K}(f(x)-f(\bar{x})), d_E(\circ)).$$

از طرف دیگر

$$\begin{aligned}(f(\bar{x})-\text{int}E)\cap f(S) &= \{(x_1,x_2)|x_1<1, x_2<1, x_1+x_2<0\}\cap f(S)\\ &= \{(x_1,x_2)|x_1+x_2<0, -1\leq x_1<0, x_2\geq 0\}\neq\emptyset,\end{aligned}$$

که حاصل می‌کند

$$\bar{x}\notin WAE(f,S,E).$$

تحت شرایط مناسب می‌توان ثابت کرد که عکس قضیه ۳.۶.۲ برقرار است.

قضیه ۶.۶.۲. *فرض کنید $E\subset K$، $E\in\zeta_Y$ و $\epsilon=\inf\limits_{e\in E}d_{\partial K}(e)$ آنگاه داریم*

$$\bar{x}\in AMin(\Delta_{-K}(f(x)-f(\bar{x})),\epsilon)\Rightarrow\bar{x}\in WAE(f,S,E).$$

برهان. فرض کنید $\bar{x}\notin WAE(f,S,E)$. آنگاه $\hat{x}\in S$ وجود دارد چنانکه $f(\hat{x})-f(\bar{x})\in-\text{int}E$. از قضیه ۱۰.۲.۲، $\hat{e}\in E$ وجود دارد چنانکه $f(\hat{x})-f(\bar{x})+\hat{e}\in-\text{int}K$. از لم ۱.۶.۲ (الف) نتیجه می‌گیریم که $\Delta_{-K}(f(\hat{x})-f(\bar{x})+\hat{e})<0$. از ملاحظه ۲.۶.۲ داریم

$$\Delta_{-K}(f(\hat{x})-f(\bar{x}))\leq\Delta_{-K}(f(\hat{x})-f(\bar{x})+\hat{e})+\Delta_{-K}(-\hat{e}).$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\Delta_{-K}(f(\hat{x})-f(\bar{x}))&<\Delta_{-K}(-\hat{e})=-d_{Y\setminus(-K)}(-\hat{e})\\ &=-d_{-\partial K}(-\hat{e})=-d_{\partial K}(\hat{e})\leq-\inf_{e\in E}d_{\partial K}(e)=-\epsilon.\end{aligned}\tag{۷۳.۲}$$

از طرف دیگر $\bar{x}\in AMin(\Delta_{-K}(f(x)-f(\bar{x})),\epsilon)$ نتیجه می‌دهد که

$$\Delta_{-K}(f(\hat{x})-f(\bar{x}))\geq\Delta_{-K}(f(\bar{x})-f(\bar{x}))-\epsilon=-\epsilon.$$

که با (۷۳.۲) در تناقض است و بنابراین

$$\bar{x}\in WAE(f,S,E).$$

□

همچنین می‌توان توصیف اسکالرسازی غیرخطی از جواب‌های E-کارای (۲.۲) با در نظر گرفتن تابع اسکالرساز غیرخطی Δ_{-K} بدست می‌آوریم.

قضیه ۷.۶.۲. *فرض کنید $E\in\zeta_Y$ آنگاه داریم*

$$\bar{x}\in AE(f,S,E)\Longrightarrow\bar{x}\in SAMin(\Delta_{-K}(f(x)-f(\bar{x})),d_E(0)).$$

قضیه ۸.۶.۲. *فرض کنید $E\subset K$ و $E\in\zeta_Y$ و $\epsilon=\inf\limits_{e\in E}d_{\partial K}(e)$ آنگاه*

$$\bar{x}\in SAMin(\Delta_{-K}(f(x)-f(\bar{x})),\epsilon)\Longrightarrow\bar{x}\in AE(f,S,E).$$

اثبات مشابه با قضیه ۳.۶.۲ و قضیه ۶.۶.۲ است، بنابراین از آن صرف نظر می‌کنیم.

فصل ۳

بهینه سازی برداری با نگاشت های مجموعه-مقدار

۱.۳ مقدمه

در این فصل با تعریف نگاشت‌های مجموعه-مقدار، بهینه‌سازی توسط این نگاشت‌ها را بیان و مفهوم شبه زیر تحدب را برای نگاشت‌های مجموعه-مقدار توسط مجموعه‌های بهبود یافته معرفی می‌کنیم و قضیایایی را تحت فرض E-شبه زیر محدب ارایه می‌دهیم. در ادامه قضایای ضرایب لاگرانژ E-کارایی سره بنسن را بیان می‌کنیم و با همین روند جواب E-بهینه ضعیف را برای بهینه‌سازی برداری بررسی و قضایای مربوط به آن شامل قضیه اسکالرسازی و قضیه ضریب لاگرانژ را بیان می‌کنیم. همچنین، با معرفی نقاط E-زینی ضعیف برای نگاشت‌های لاگرانژ مجموعه مقدار و مفهوم E-دوگانی ضعیف به بررسی ویژگی‌ها و قضایای مربوط به این مفاهیم می‌پردازیم.
در این فصل برای تعاریف و قضایای ارایه شده از مراجع [۴۷، ۷۲، ۴۶، ۵۲، ۷۰، ۵۶، ۷۱، ۷۳] استفاده شده است.
فرض کنید Y و Z فضاهای برداری توپولوژیکال هاسدورف موضعاً محدب حقیقی و P مخروط نوک دار محدب بسته در Z با درون ناتهی باشند.
مساله بهینه‌سازی برداری با نگاشت‌های مجموعه-مقدار زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{array}{lll} (VP) & \text{minimize} & F(x) \\ & \text{subject to} & x \in D = \{x \in S | G(x) \cap (-P) \neq \emptyset\} \end{array}$$

که در آن $S \subset X$ ، $F : S \rightrightarrows Y$ و $G : S \rightrightarrows Z$ نگاشت های مجموعه-مقدار ناتهی هستند. فرض می‌کنیم مجموعه شدنی D از (VP) ناتهی است، نشان می‌دهیم:
$\langle F(x), \mu\rangle = \{\langle y, \mu\rangle | y \in F(x)\}$ و $F(A) = \bigcup_{x\in A} F(x)$ و $\langle F(A), \mu\rangle = \bigcup_{x\in A} \langle F(x), \mu\rangle$ که در آن $\mu \in Y^*$ و $A \subset X$. فرض کنید $L(Z, Y)$ فضای عملگرهای خطی پیوسته از Z به Y باشد و همچنین $L^+ = L^+(Z, Y) = \{T \in L(Z, Y) | T(P) \subset K\}$. نگاشت‌های مجموعه-مقدار از S به $Y \times Z$ با $(F, G)(x) = F(x) \times G(x)$ تعریف می‌شود. اگر $\mu \in Y^*$ و $T \in L(Z, Y)$. مجموعه‌های $\mu F : S \rightrightarrows \mathbb{R}$ و $F + TG : S \rightrightarrows Y$ را به ترتیب با

$$(F + TG)(x) = F(x) + T(G(x)) \text{ و } (\mu F)(x) = \langle F(x), \mu\rangle$$

تعریف می‌کنیم. علاوه بر این، گوییم که (VP) در قید محدودیت اسلاتر تعمیم یافته صدق می‌کند، اگر $\hat{x} \in S$ وجود داشته باشد به طوریکه $G(\hat{x}) \cap (-intP) \neq \emptyset$.

تعریف ۱.۱.۳. [۸]. نقطه $x_\circ \in D$ جواب E-کارای (VP) است اگر $y_\circ \in F(x_\circ)$ وجود داشته باشد به طوریکه:

$$(y_\circ - E - K \setminus \{\circ\}) \cap F(D) = \emptyset.$$

تعریف ۲.۱.۳. نقطه $x_\circ \in D$ جواب E-کارای سره بنسن (VP)نامیده می‌شود اگر:

$$F(x_\circ) \cap O^E_{BS}(F(D)) \neq \emptyset.$$

که در آن $O^E_{BS}(F(D))$ مجموعه نقاط E-کارای سره بنسن $F(D)$ است که در فصل قبل به آن اشاره شد.

تعریف ۳.۱.۳. زوج مرتب $(x_\circ, y_\circ)$ نقطه E-کارای سره بنسن (VP) نامیده می‌شود اگر
$x_\circ \in D$ و $y_\circ \in F(x_\circ) \cap O^E_{BS}(F(D))$.

مثال ۴.۱.۳. فرض کنید $X = Y = Z = \mathbb{R}^۲$، $K = P = \mathbb{R}^۲_\geq$،
$$E = \{(x_۱, x_۲)|x_۱ \geq ۱,\ x_۲ \geq \circ\} \cup \{(x_۱, x_۲)|x_۱ \geq \circ,\ x_۲ \geq ۱\}$$
و $S = \{(x_۱, x_۲)|x_۱ = \circ,\ -۱ \leq x_۲ \leq \circ\}$. به علاوه فرض کنید $F(x) : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}^۲$ و $F(x) = x$.
همچنین اگر $G : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}^۲$ با $G(x) = x$ داده شده باشد. به وضوح
$$D = \{x \in S|G(x) \cap (-P) \neq \emptyset\} = \{x \in S|x \cap (-\mathbb{R}^۲_\geq) \neq \emptyset\} = S$$
. چون $(\circ, \circ) \in S$ و $clcone(S + E - (\circ, \circ)) \cap (-\mathbb{R}^۲_\geq) = \{(\circ, \circ)\}$ لذا $(\circ, \circ) \in F(S) \cap$ $O^E_{BS}(F(S))$ بنابراین $(\circ, \circ)$ نقطه E-کارای سره بنسن (VP) است.

ملاحظه ۵.۱.۳. *همانند ملاحظه ۳.۵.۲ و ۴.۵.۲ می‌توان دید که E-کارایی سره بنسن (VP)، E-کارایی (VP) را نتیجه می‌دهد و عکس آن لزوما درست نیست.*

۲.۳ E- شبه زیر تحدب

لی [۱] و چن [۲] [۴۷] مفهوم شبه زیر تحدب را برای نگاشت مجموعه-مقدار معرفی کردند و قضیه‌ای را برای سیستم‌های نامساوی-مساوی تعمیم یافته‌ی نگاشت‌های مجموعه-مقدار ارائه دادند. در این بخش، مفهوم E-شبه زیر تحدب را برای نگاشت‌های مجموعه-مقدار توسط مجموعه‌های بهبود یافته پیشنهاد می‌کنیم و قضیه‌ای را برای نگاشت‌های مجموعه-مقدار Eشبه زیرتحدب برقرار می‌کنیم-.

تعریف ۱.۲.۳. فرض کنید $F : S \rightrightarrows Y$ یک نگاشت مجموعه-مقدار باشد و $E \in \zeta_Y$. F را ، E-شبه زیر محدب روی S گوییم هرگاه $F(S) + intE$ مجموعه‌ای محدب باشد.

تعریف ۲.۲.۳. فرض کنید $F : S \rightrightarrows Y$ یک نگاشت مجموعه-مقدار باشد. Fرا ، تقریبا E-شبه زیر محدب روی S گوییم هرگاه $clcone(F(S) + E)$ مجموعه‌ای محدب باشد.

ملاحظه ۳.۲.۳. *اگر E به گونه‌ای باشد که $intK \subset E \subset K \setminus \{\circ\}$، آنگاه E-شبه زیر محدب بودن با K-شبه زیر محدب بودن منطبق است. در حقیقت داریم*
$$F(S) + intE = F(S) + intK.$$

ملاحظه ۴.۲.۳. *E-شبه زیر محدب لزوما K-شبه زیر محدب بودن را نتیجه نمی‌دهد. این نکته را در مثال زیر شرح می‌دهیم.*

مثال ۵.۲.۳. فرض کنید
$S = \{(x_۱, x_۲)|x_۱ \leq \circ,\ x_۱ + x_۲ = \circ\} \cup \{(x_۱, x_۲)|x_۱ \geq ۱,\ x_۱ + x_۲ = \circ\}$، $Y = \mathbb{R}^۲$،

---
[۱] Li
[۲] Chen

$K = \mathbb{R}^{۲}_{\geq}$ و $E = \mathbb{R}^{۲}_{\geq} \cap \{(x_{۱}, x_{۲}) | x_{۱} + x_{۲} \geq ۱\}$. $F : \mathbb{R}^{۲} \to \mathbb{R}^{۲}$، $F(x) = x$. به وضوح، $F(S) + intE$ مجموعه‌ای محدب است، اما $F(S) + intK$ مجموعه‌ای محدب نیست.

قضیه ۶.۲.۳. *اگر $E \in \zeta_Y$ و نگاشت F، E-شبه زیر محدب روی S باشد، آنگاه دقیقا یکی از گزاره‌های زیر درست است:*

الف) $\exists x \in S, \; F(x) \cap (-intE) \neq \emptyset$

ب) $\exists \mu \in K^{+} \setminus \{\circ_{Y^*}\}, \langle y + e, \mu \rangle \geq \circ \; \forall y \in F(S), \forall e \in E.$

برهان. فرض کنید الف و ب هم‌زمان برقرار باشند، لذا $x \in S$ وجود دارد به طوریکه $F(x) \cap (-intE) \neq \emptyset$. در نتیجه از قضیه ۱۰.۲.۲، نتیجه می‌گیریم که $x \in S$، $y \in F(x)$ و $e \in E$ وجود دارند به طوریکه $y + e \in -intK$ و این یعنی $\langle y + e, \mu \rangle < \circ$ اما از قسمت (ب) داریم $\langle y + e, \mu \rangle \geq \circ$، که یک تناقض است. در نتیجه اگر (الف) برقرار باشد، آنگاه (ب) برقرار نیست.
اکنون فرض کنید که (الف) برقرار نیست آنگاه، دوباره از قضیه ۱۰.۲.۲ می‌توانیم ثابت کنیم که

$$\circ \notin F(S) + intE = F(S) + E + intK. \tag{۱.۳}$$

از E-شبه زیر محدب بودن F، نتیجه می‌گیریم مجموعه $F(S) + intE$ محدب است. بنابراین، از قضیه تفکیک برای مجموعه‌های محدب و از رابطه (۱.۳)، $\mu \in Y^* \setminus \{\circ\}$ وجود دارد بطوریکه

$$\langle y + e + \epsilon r, \mu \rangle \geq \circ, \; \forall y \in F(S), \; \forall e \in E, \; \forall r \in intK, \; \forall \epsilon \geq \circ \tag{۲.۳}$$

با میل دادن $\epsilon \to +\infty$ در (۲.۳)، داریم $\forall r \in intK, \; \langle r, \mu \rangle \geq \circ$. در نتیجه $\forall r \in K, \; \langle r, \mu \rangle \geq \circ$. از این رو $\mu \in K^{+} \setminus \{\circ_{Y^*}\}$. با قرار دادن $\epsilon \downarrow \circ$ در (۲.۳)، داریم $\forall y \in F(S), \forall e \in E, \; \langle y + e, \mu \rangle \geq \circ$. بنابراین (ب) برقرار است. □

توجه شود که قضیه ۶.۲.۳ تعمیمی از لم فارکاس در بهینه‌سازی غیر خطی می‌باشد.
فرض کنید تابعی پشتیبان Q در y به شکل $\forall y^* \in Y^*, \; \sigma_Q(y^*) = \sup_{y \in Q}\{y^*(y)\}$ تعریف شود.

قضیه ۷.۲.۳. *[۷۲]. اگر نگاشت F، تقریبا E-شبه زیر محدب روی S باشد، آنگاه فقط یکی از گزاره‌های زیر درست است:*

الف) $\exists x \in S, \; F(x) \cap (-intE) \neq \emptyset$

ب) $\exists \mu \in K^{+} \setminus \{\circ_{Y^*}\}, \langle y, \mu \rangle - \sigma_{-E}(\mu) \geq \circ \; \forall y \in F(S).$

برهان. فرض کنید الف و ب هم‌زمان برقرار باشند، لذا $x \in S$ وجود دارد به طوریکه $F(x) \cap (-intE) \neq \emptyset$. در نتیجه از قضیه ۱۰.۲.۲، نتیجه می‌گیریم که $x \in S$، $y \in F(x)$ و $e \in E$ وجود دارند به طوریکه $y + e \in -intK$ و این یعنی $\langle y + e, \mu \rangle < \circ$ بنابراین داریم $\langle y, \mu \rangle + \langle e, \mu \rangle < \circ$ یعنی $\langle y, \mu \rangle - \langle -e, \mu \rangle < \circ$ که از تعریف تابعی پشتیبان بدست می‌آوریم $\langle y, \mu \rangle - \sigma_{-E}(\mu) < \circ$، همچنین از قسمت (ب) داریم $\langle y, \mu \rangle - \sigma_{-E}(\mu) \geq \circ$ ، که یک تناقض

است. در نتیجه اگر (الف) برقرار باشد، آنگاه (ب) برقرار نیست.
اکنون فرض کنید که (الف) برقرار نیست آنگاه، دوباره از قضیه ۱۰.۲.۲ می‌توانیم ثابت کنیم که
$$0 \notin F(S) + intE = F(S) + E + intK. \quad (۳.۳)$$
از تقریباً E-شبه زیر محدب بودن F، نتیجه می‌گیریم مجموعه $clcone(F(S)+E)$ محدب است. اما چون $clcone(F(S)+E) = clcone(F(S)+intE)$ بنابراین، از قضیه تفکیک برای مجموعه‌های محدب و از رابطه (۳.۳)، $\mu \in Y^* \setminus \{0\}$ وجود دارد بطوریکه
$$\langle y + e + \epsilon r, \mu \rangle \geq 0, \ \forall y \in F(S), \forall e \in E, \forall r \in intK, \forall \epsilon \geq 0 \quad (۴.۳)$$
با میل دادن $\epsilon \to +\infty$ در (۴.۳)، داریم $\forall r \in intK, \langle r, \mu \rangle \geq 0$. در نتیجه $\forall r \in K, \langle r, \mu \rangle \geq 0$. از این رو $\mu \in K^+ \setminus \{0_{Y^*}\}$. با قرار دادن $\epsilon \downarrow 0$ در (۴.۳)، داریم $\forall y \in F(S), \langle y + e, \mu \rangle \geq 0$ و این یعنی
$\forall y \in F(S), \langle y, \mu \rangle + \langle e, \mu \rangle = \langle y, \mu \rangle - \langle -e, \mu \rangle \geq 0$ بنابراین
$\forall y \in F(S), \langle y + e \rangle - \sigma_{-E}(\mu) \geq 0$ (ب) برقرار است. □

قضیه ۸.۲.۳. *فرض کنید $E \in \zeta_Y$، $E \subset K$ و $k_0 \in intK$. اگر (F, G)، $(E \times P)$-شبه زیر محدب روی S باشد، آنگاه برای هر $\mu \in K^{+i}$، $(\mu F, G)$ روی S، $(\mu E \times P)$-شبه زیر محدب است.*

برهان. چون (F, G) یک $(E \times P)$-شبه زیر محدب روی S است بنابراین $(F, G)(S) + int(E \times P)$ مجموعه‌ای محدب است، از طرفی از قضیه ۱۶.۲.۲ داریم $int(\mu E) = \mu intE$. بنابراین برای هر $\mu \in K^{+i}$، $(\mu F, G)(S) + int(\mu E \times P)$ مجموعه‌ای محدب است. لذا $(\mu F, G)$ روی S، $(\mu E \times P)$-شبه زیر محدب است.

□

۳.۳ جواب E-کارای ضعیف در بهینه سازی برداری

گاتیرز و همکاران مفاهیم جواب E-بهینه و E-بهینه ضعیف را برای بهینه سازی برداری با نگاشت‌های بردار- مقدار ارایه دادند [۲۹]. در این بخش به طور مشابه مفاهیم مربوطه را برای (VP) معرفی می‌کنیم.

تعریف ۱.۳.۳. نقطه $x_0 \in D$ جواب E-کارا ضعیف (VP) نامیده می‌شود، اگر $y_0 \in F(x_0)$ وجود داشته باشد به طوریکه
$$(y_0 - intE) \cap F(D) = \emptyset.$$

ملاحظه ۲.۳.۳. *بدیهی است که E-کارایی (VP)، E-کارایی ضعیف (VP) را نتیجه می‌دهد، اما عکس آن لزوما درست نیست. مثال زیر این نکته را شرح می‌دهد.*

مثال ۳.۳.۳. فرض کنید $X = Y = Z = \mathbb{R}^2$، $K = P = \mathbb{R}^2_{\geq}$، $S = [-1, 1] \times [-1, 1]$ و $E = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 | y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_1 + y_2 \geq 1\}$ نگاشت‌های مجموعه مقدار $F : S \rightrightarrows Y$ و $G : S \rightrightarrows Z$ به ترتیب به شکل زیر تعریف شده اند.
$$F(x_1, x_2) = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 | (y_1, y_2) \in [0, |x_1|] \times [0, |x_2|]\}, \forall (x_1, x_2) \in S,$$

$$G(x_1,x_2)=\{(z_1,z_2)\in\mathbb{R}^2|(z_1,z_2)\in[-1,0]\times[-|x_1|-|x_2|,0]\},\forall(x_1,x_2)\in S.$$

از تعریف G می‌توان دید که

$$\begin{aligned}D&=\{(x_1,x_2)\in S|G(x_1,x_2)\cap(-\mathbb{R}^2_{\geq})\neq\emptyset\}\\&=\{x\in[-1,1]\times[-1,1]|[-1,0]\times[-|x_1|-|x_2|,0]\cap(-\mathbb{R}^2_{\geq})\neq\emptyset\}\\&=S\end{aligned}$$

فرض کنید $x_0=(1,0)$ و $y_0=(1,0)\in F(x_0)$ بنابراین

$$((1,0)-\{(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2|y_1>0,y_2>0,y_1+y_2>1\})\cap F(S)=\emptyset.$$

بنابراین x_0 جواب E- کارای ضعیف (VP) است. اما می‌توان دید که
$(y_0-E)\cap F(D)=\{(0,0)\}\neq\emptyset$ که نشان می‌دهد که x_0 جواب E- کارا (VP) نیست.

فرض کنید $O^{intE}(F(D))$ مجموعه جواب‌های E- کارای ضعیف (VP) باشد و داشته باشیم

$$O^{\overline{intE}}(F(D))=\{y_0\in F(x_0)|(y_0+intE)\bigcap F(D)=\emptyset,x_0\in D\}.$$

تعریف ۴.۳.۳. جفت (x_0,y_0) جواب E-کارای ضعیف (VP) نامیده می‌شود، اگر $x_0\in D$ و $y_0\in F(x_0)$ وجود داشته باشد به طوریکه

$$(y_0-intE)\cap F(D)=\emptyset.$$

۱.۳.۳ قضیه اسکالرسازی برای E-کارایی ضعیف

در این بخش قضیه اسکالرسازی جواب E-کارای ضعیف را برای (VP) با استفاده از قضیه تناوب[۳] ۷.۲.۳ برای نگاشت مجموعه مقدار تقریباً E-شبه زیر محدب ارائه می‌دهیم.
مساله بهینه‌سازی اسکالر $(SP)_\mu$ زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}(SP)_\mu\quad&\text{minimize}\quad\langle F(x),\mu\rangle,\quad\mu\in Y^*\setminus\{0_Y^*\}\\&\text{subject to}\quad x\in D\end{aligned}$$

تعریف ۵.۳.۳. نقطه‌ی $x_0\in D$ جواب بهینه $(SP)_\mu$ نسبت به E نامیده می‌شود، اگر $y_0\in F(x_0)$ وجود داشته باشد به طوریکه:

$$\langle y-y_0,\mu\rangle\geq\sigma_{-E}(\mu),\quad\forall x\in D,\forall y\in F(x).\tag{۵.۳}$$

قضیه ۶.۳.۳. *فرض کنید $E\in\zeta_Y$، $x_0\in D$، $y_0\in F(x_0)$ و $F-y_0$، تقریباً E-شبه زیر محدب روی D باشد. آنگاه (x_0,y_0) نقطه E-کارای ضعیف (VP)است اگر و تنها اگر $\mu\in K^+\setminus\{0_{Y^*}\}$ وجود داشته باشد به طوریکه (x_0,y_0)نقطه بهینه $(SP)_\mu$ نسبت به E باشد.*

---
[۳] Alternative theorem

برهان. فرض کنید که $(x_\circ, y_\circ)$ نقطه E-کارای ضعیف (VP) است، دراین‌صورت داریم $(y_\circ - intE) \cap F(D) = \emptyset$ یعنی

$$(F(D) - y_\circ) \cap (-intE) = \emptyset.$$

از قضیه ۷.۲.۳ ، $\mu \in K^+ \setminus \{\circ_{Y*}\}$ وجود دارد به طوریکه

$$\langle y - y_\circ, \mu \rangle - \sigma_{-E}(\mu) \geq \circ \quad \forall x \in D, \forall y \in F(D).$$

بنابراین برای هر $x \in D$ و $y \in F(x)$ داریم

$$\langle y - y_\circ, \mu \rangle \geq \sigma_{-E}(\mu),$$

که نتیجه می‌دهد $(x_\circ, y_\circ)$ نقطه بهینه $(SP)_\mu$ نسبت به E است.

به عکس فرض کنید که $\mu \in K^+ \setminus \{\circ_{Y*}\}$ وجود دارد چنانکه $(x_\circ, y_\circ)$ نقطه بهینه $(SP)_\mu$ نسبت به E باشد. اگر $(x_\circ, y_\circ)$ نقطه E-کارای ضعیف (VP) نباشد از قضیه ۱۰.۲.۲ داریم

$$(y_\circ - E - intK) \cap F(D) \neq \emptyset.$$

بنابراین $\hat{x} \in D$، $\hat{y} \in F(\hat{x})$ و $\hat{e} \in E$ وجود دارند چنانکه

$$\hat{y} - y_\circ + \hat{e} \in -intK.$$

چون $\mu \in K^+ \setminus \{\circ_Y^*\}$، از رابطه بالا نتیجه می‌گیریم

$$\langle \hat{y} - y_\circ, \mu \rangle - \sigma_E(\mu) \leq \langle \hat{y} - y_\circ + \hat{e}, \mu \rangle < \circ,$$

که با فرض اینکه $(x_\circ, y_\circ)$ نقطه بهینه $(SP)_\mu$ است در تناقض است. □

۲.۳.۳ قضیه ضریب لاگرانژ و E-کارایی ضعیف

در این بخش، قضیه ضریب لاگرانژ را ارایه می‌دهیم که حاصل می‌کند نقطه E-کارای ضعیف (VP) نقطه E-کارای ضعیف مساله بهینه‌سازی برداری نامقید مناسب با نگاشت‌های مجموعه-بردار تحت فرض تقریباً شبه زیر محدب بودن است.

تابع لاگرانژین (VP)، $L : S \times L^+(Z, Y) \longrightarrow ۲^Y$ به شکل زیر تعریف می‌شود

$$L(x, T) := F(x) + T(G(x)), \quad (x, T) \in S \times L^+(Z, Y).$$

قضیه ۷.۳.۳. *فرض کنید $(F - y_\circ, G)$ روی S، تقریباً $(E \times P)$-شبه زیر محدب باشد و (VP) در قید محدودیت اسلاتر تعمیم یافته صدق کند. اگر $(x_\circ, y_\circ)$ نقطه E-کارای ضعیف (VP) باشد و $\circ \in G(x)$، آنگاه $T \in L^+$ وجود دارد به طوریکه $(x_\circ, y_\circ)$ نقطه E-کارای ضعیف مساله بهینه‌سازی برداری نامقید زیر است:*

$$\begin{array}{lll} (UVP) & \text{minimize} & L(x, T), \\ & \text{subject to} & (x, T) \in S \times L^+(Z, Y). \end{array}$$

و $-T(G(x_\circ) \cap (-P)) \subset (intK \cup \{\circ\}) \setminus intE$.

برهان. ازاین‌که $(x_\circ, y_\circ)$ نقطه E-کارای ضعیف (VP) است، داریم $x_\circ \in D$، $y_\circ \in F(x_\circ)$ و

$$(F(S) - y_\circ)\bigcap(-intE) = \emptyset.$$

بنابراین به دست می‌آوریم

$$(F(S) - y_\circ, G(S))\bigcap(-intE, P) = \emptyset. \tag{۶.۳}$$

از تقریباً $(E \times P)$-شبه‌زیرمحدب بودن $(F - y_\circ, G)$ روی S و از قضیه ۶.۳.۳ و رابطه (۶.۳) نتیجه می‌گیریم که $(\mu, \varphi) \in K^+ \times P^+ \setminus \{(\circ_{Y^*}, \circ_{Z^*})\}$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\langle y - y_\circ, \mu\rangle - \sigma_{-E}(\mu) + \langle z, \varphi\rangle - \sigma_{-P}(\varphi) \geq \circ, \ \forall x \in S, \ \forall y \in F(x), \ \forall z \in G(x).$$

درنتیجه برای هر $x \in S$، $y \in F(x)$،$z \in G(x)$، $e \in E$ و $z' \in P$ داریم

$$\begin{aligned} \langle y - y_\circ, \mu\rangle + \langle z, \varphi\rangle &\geq \sigma_{-E}(\mu) + \sigma_{-P}(\varphi) \\ &= \sup_{\tilde{e} \in -E}\langle \tilde{e}, \mu\rangle + \sup_{\tilde{z} \in -P}\langle \tilde{z}, \varphi\rangle \\ &\geq \langle -e, \mu\rangle + \langle -z', \varphi\rangle. \end{aligned} \tag{۷.۳}$$

به طورخاص، فرض کنید در (۷.۳) قرار می‌دهیم $z' = \circ$ در این صورت به دست می‌آوریم

$$\langle y - y_\circ + e, \mu\rangle + \langle z, \varphi\rangle \geq \circ \quad \forall x \in S, \ \forall y \in F(x), \ \forall z \in G(x), \ \forall e \in E. \tag{۸.۳}$$

چون G در قید محدودیت اسلاتر تعمیم یافته صدق می‌کند و با استفاده از رابطه (۸.۳) داریم $\mu \in K^+ \setminus \{\circ_Y*\}$. حال $k_\circ \in intK$ مناسبی را در نظر بگیرید که در رابطه $\langle k_\circ, \mu\rangle = ۱$ صدق کند. دراین‌صورت نگاشت $T : Z \to Y$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم.

$$T(z) = \langle z, \varphi\rangle k_\circ, \quad z \in Z. \tag{۹.۳}$$

از اینکه $T \in L(Z, Y)$ و $T(P) \subset K$ خواهیم داشت $T \in L^+(Z, Y)$. با قرار دادن $x = x_\circ$ و $y = y_\circ$ و $z = z_\circ \in G(x_\circ) \cap (-P)$ در (۸.۳) و از $\varphi \in P^+$ داریم

$$-\langle e, \mu\rangle \leq \langle z_\circ, \varphi\rangle \leq \circ. \tag{۱۰.۳}$$

همچنین از سمت راست (۱۰.۳) داریم :

$$-T(z_\circ) = -\langle z_\circ, \varphi\rangle k_\circ \in intK\bigcup\{\circ\}.$$

همچنین از سمت چپ نامساوی (۱۰.۳)، به دست می‌آوریم $-T(z_\circ) \notin intE$. در غیر این صورت از قضیه ۱۰.۲.۲، $\bar{e} \in E$ وجود دارد به طوریکه $-T(z_\circ) - \bar{e} \in intK$.
در نتیجه داریم $\langle T(z_\circ) + \bar{e}, \mu\rangle < \circ$ یعنی $\langle z_\circ, \varphi\rangle < -\langle \bar{e}, \mu\rangle$ که با سمت چپ نامساوی (۱۰.۳) در تناقض است. دقت کنید که $z_\circ$ در مجموعه $G(x_\circ) \cap (-P)$ دلخواه است. بنابراین به دست می‌آوریم

$$-T(G(x_\circ)\bigcap(-P)) \subset (intK\bigcup\{\circ\}) \setminus intE.$$

علاوه براین از $T \in L^+(Z, Y)$ و $\circ \in G(x_\circ)$، نتیجه می‌گیریم که $\circ \in T(G(x_\circ))$. بنابراین

$x_\circ \in F(x_\circ) \subset F(x_\circ) + T(G(x_\circ)) = L(x_\circ, T)$ از این رو از (۸.۳) و (۹.۳) حاصل می‌شود که

$$\begin{aligned}\langle y + T(z), \mu\rangle &= \langle y, \mu\rangle + \langle z, \varphi\rangle\langle k_\circ, \mu\rangle\\ &= \langle y, \mu\rangle + \langle z, \varphi\rangle\\ &\geq \langle y_\circ - e, \mu\rangle \quad \forall x \in S, \forall y \in F(x), \forall z \in G(x), \forall e \in E.\end{aligned}$$

که حاصل می کند

$$\langle y + T(z) - y_\circ, \mu\rangle \geq \sigma_E(\mu) \quad \forall x \in S, \forall y \in F(x), \forall z \in G(x). \tag{۱۱.۳}$$

بنابراین $(x_\circ, y_\circ)$ نقطه بهینه $(UVP)_\mu$ نسبت به E است که به شکل زیر تعریف می‌شود.

$$\begin{aligned}(UVP)_\mu \quad &\text{minimize} \qquad \langle L(x, T), \mu\rangle.\\ &\text{subject to} \qquad x \in (x, T) \in S \times L^+(Z, Y)\end{aligned}$$

بنابراین $(x_\circ, y_\circ)$ نقطه E-کارای ضعیف (UVP) است. در غیراینصورت از قضیه۱۰.۲.۲ و از $\mu \in K^{+i}$ است نتیجه می‌گیریم که $\hat{x} \in S$، $\hat{y} \in F(\hat{x})$، $\hat{z} \in G(x)$ و $\hat{e} \in E$ وجود دارند چنانکه

$$\langle \hat{y} + T(\hat{z}) - y_\circ, \mu\rangle < \sigma_E(\mu),$$

که این با (۱۱.۳) در تناقض است، اثبات کامل است. □

مثال ۸.۳.۳. فرض کنید $X = Y = Z = \mathbb{R}^۲$، $K = P = \mathbb{R}^۲_\geq$، $E = \{(y_۱, y_۲) \in \mathbb{R}^۲ | y_۱ \geq \circ, y_۲ \geq \circ y_۱ + y_۲ \geq ۱\}$ و $S = [-۱, ۱] \times \{\circ\}$. نگاشت‌های مجموعه مقدار $F : S \rightrightarrows Y$ و $G : S \rightrightarrows Z$ به ترتیب به شکل زیر تعریف شده اند.

$$F(x_۱, x_۲) = \{(y_۱, y_۲) \in \mathbb{R}^۲ | (y_۱, y_۲) \in \{۱\} \times [x_۱ + ۱, x_۱ + ۲]\}, \forall (x_۱, x_۲) \in S,$$

$$G(x_۱, x_۲) = \{(z_۱, z_۲) \in \mathbb{R}^۲ | (z_۱, z_۲) \in [-|x_۱|, \circ] \times [-|x_۱|, \circ]\}, \forall (x_۱, x_۲) \in S.$$

از تعریف G می‌توان دید که $D = \{(x_۱, x_۲) \in S | G(x_۱, x_۲) \cap (-\mathbb{R}^۲_\geq) \neq \emptyset\} = [-۱, ۱] \times \{\circ\} = S$. فرض کنید $x_\circ = (-۱, \circ)$ و $y_\circ = (۱, \circ) \in F(x_\circ)$، می‌توان بررسی کرد که تمام شرایط قضیه ۷.۳.۳ برقرار است، یعنی (F, G) تقریباً $(E \times P)$-شبه زیر محدب روی S است و $\hat{x} \in S$ وجود دارد چنانکه $G(\hat{x}) \cap (-intP) \neq \emptyset$. چون $\circ \in G(x_\circ)$ و $(x_\circ, y_\circ)$ نقطه E-کارای ضعیف (VP) است. آنگاه $T(z_۱, z_۲) = (\circ/۱ z_۱, \circ/۱ z_۲) \in L^+(Z, Y)$ وجود دارد به‌طوریکه $(x_\circ, y_\circ)$ نقطه E-کارای ضعیف (UVP) است.

۴.۳ نقاط E- زینی ضعیف

در این بخش، مفهوم نقطه E-زینی ضعیف را برای نگاشت لاگرانژین مجموعه-مقدار ارائه می‌دهیم و قضیه نقطه E-زینی ضعیف را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۴.۳. جفت ترتیبی $(\bar{x}, \bar{T}) \in S \times L^+(Z, Y)$، نقطه E-زینی ضعیف نگاشت مجموعه-مقدار $L(x, T)$ است اگر

$$L(\bar{x}, \bar{T}) \cap O^{intE}(L(S, \bar{T}) \cap \overline{O^{intE}}(L(\bar{x}, L^+)) \neq \emptyset.$$

قضیه ۲.۴.۳. *زوج مرتب* $(\bar{x},\bar{T})\in S\times L^{+}(Z,Y)$، *نقطه* E*-زینی ضعیف نگاشت لاگرانژ مجموعه-مقدار* $L(x,T)$ *است اگر وتنها اگر* $\bar{y}\in F(\bar{x})$ *و* $\bar{z}\in G(\bar{x})$ *وجود داشته باشند چنانکه*

الف) $\bar{y}+\bar{T}(\bar{z})\in O^{intE}(L(S,\bar{T}))$;

ب) $G(\bar{x})\subset -P$;

پ) $-\bar{T}(\bar{z})\in K\setminus intE$;

ت) $(F(\bar{x})-\bar{y}-\bar{T}(\bar{z}))\cap intE=\emptyset$.

برهان. فرض کنید که $(\bar{x},\bar{T})\in S\times L^{+}(Z,Y)$ نقطه E-زینی ضعیف $L(x,T)$ باشد. آنگاه $\bar{y}\in F(\bar{x})$ و $\bar{z}\in G(\bar{x})$ وجود دارند چنانکه

$$\bar{y}+\bar{T}(\bar{z})\in O^{intE}(L(S,\bar{T})), \tag{۱۲.۳}$$

$$\bar{y}+\bar{T}(\bar{z})\in \overline{O^{intE}}(L(\bar{x},L^{+})). \tag{۱۳.۳}$$

بنابراین از (۱۲.۳) نتیجه می‌گیریم که (الف) برقرار است. از (۱۳.۳) داریم

$$y+T(z)-\bar{y}-\bar{T}(\bar{z})\notin intE,\quad \forall y\in F(\bar{x}),\forall T\in L^{+}(Z,Y),\forall z\in G(\bar{x}). \tag{۱۴.۳}$$

با قرار دادن $y=\bar{y}$ و $z=\bar{z}$ در (۱۴.۳) داریم

$$T(\bar{z})-\bar{T}(\bar{z})\notin intE,\quad \forall T\in L^{+}(Z,Y). \tag{۱۵.۳}$$

حال فرض کنید $\bar{z}\notin -P$، با توجه به اینکه Z فضای برداری توپولوژیکال موضعا محدب است، داریم $(P^{+})^{+}=clP$. از بسته بودن P داریم $-\bar{z}\notin (P^{+})^{+}$. به راحتی می‌توان نشان داد که $\lambda\in P^{+}$ وجود دارد چنانکه $\langle\bar{z},\lambda\rangle>0$. با در نظر گرفتن هر $\hat{e}\in intE$ ثابت و تعریف نگاشت $\hat{T}:Z\to Y$ به شکل

$$\hat{T}(z):=\frac{\langle z,\lambda\rangle}{\langle\hat{z},\lambda\rangle}\hat{e}+\bar{T}(z),\quad z\in Z.$$

به وضوح از اینکه $\bar{T}\in L(Z,Y)$ و $\bar{T}(P)\subset K$داریم $\hat{T}\in L^{+}(Z,Y)$ که در $\hat{T}(\bar{z})-\bar{T}(\bar{z})=\hat{e}\in intE$ صدق می‌کند، که با (۱۵.۳) در تناقض است، بنابراین $\bar{z}\in -P$. بنابراین $-\bar{T}(\bar{z})\in K$. از طرف دیگر با قرار دادن $T=0\in L^{+}(Z,Y)$ در (۱۵.۳) داریم $-\bar{T}(\bar{z})\notin intE$ بنابراین (پ) برقرار است.

حال نشان می‌دهیم که $G(\bar{x})\subset -P$ اگر چنین نباشد نتیجه می‌گیریم که $z_{\circ}\in G(\bar{x})$ وجود دارد چنانکه $-z_{\circ}\notin P$ می‌توان نشان داد که $\lambda_{\circ}\in P^{+}$ وجود دارد چنانکه $\langle z_{\circ},\lambda_{\circ}\rangle>0$. با در نظر گرفتن $e_{\circ}\in intE$ ثابت و تعریف نگاشت $T_{\circ}:Z\to Y$ به شکل

$$T_{\circ}(z):=\frac{\langle z,\lambda_{\circ}\rangle}{\langle z_{\circ},\lambda_{\circ}\rangle}e_{\circ},\quad z\in Z.$$

به وضوح داریم $T_{\circ}\in L^{+}(Z,Y)$. با توجه به اینکه $-\bar{T}(\bar{z})\in K$ و $intE\in\zeta_{Y}$، به‌دست می‌آوریم

$$T_{\circ}(z_{\circ})-\bar{T}(\bar{z})=e_{\circ}-\bar{T}(\bar{z})\in intE+K=intE. \tag{۱۶.۳}$$

با در نظر گرفتن $T = T_\circ$، $y = \bar{y}$ و $z = z_\circ$ در (۱۴.۳) به‌دست می‌آوریم
$T_\circ(z_\circ) - \bar{T}(\bar{z}) \notin intE$. که با (۱۶.۳) در تناقض است، بنابراین (ب) برقرار است.
با در نظر گرفتن $T = \circ \in L^+(Z, Y)$ در (۱۴.۳) به‌دست می‌آوریم

$$(F(\bar{x}) - \bar{y} - \bar{T}(\bar{z})) \cap intE = \emptyset,$$

که نشان می‌دهد (ت) برقرار است.
برعکس از $\bar{y} \in F(\bar{x})$ و $\bar{z} \in G(\bar{x})$ به‌دست می‌آوریم

$$\bar{y} + \bar{T}(\bar{z}) \in F(\bar{x}) + \bar{T}(G(\bar{x})) = L(\bar{x}, \bar{T}). \qquad (۱۷.۳)$$

از (ب) داریم $-T(G(\bar{x})) \subset T(P) \subset K, \quad \forall T \in L^+(Z, Y)$. با توجه به اینکه $intE \in \zeta_y$ داریم

$$intE - T(G(\bar{x})) \subset intE + K = intE, \quad \forall T \in L^+(Z, Y). \qquad (۱۸.۳)$$

از (۱۸.۳) و (ت) نتیجه می‌گیریم که

$$(F(\bar{x})) - \bar{y} - \bar{T}(\bar{z})) \bigcap (intE - T(G(\bar{x}))) = \emptyset, \quad \forall T \in L^+(Z, Y).$$

که از این رابطه به دست می‌آوریم

$$(\bar{y} + \bar{T}(\bar{z}) + intE) \bigcap L(\bar{x}, L^+) = \emptyset. \qquad (۱۹.۳)$$

بنابراین خواهیم داشت

$$\bar{y} + \bar{T}(\bar{z}) \in \overline{O^{intE}}(L(\bar{x}, L^+)). \qquad (۲۰.۳)$$

درنتیجه از (الف) و رابطه (۱۷.۳) و (۲۰.۳) به‌دست می‌آوریم

$$\bar{y} + \bar{T}(z) \in L(\bar{x}, \bar{T}) \bigcap O^{intE}(L(S, \bar{T})) \bigcap \overline{O^{intE}}(L(\bar{x}, L^+)).$$

درنتیجه $(\bar{x}, \bar{T})$ نقطه E-زینی ضعیف $L(x, T)$ است. □

قضیه ۳.۴.۳. *اگر زوج مرتب $(\bar{x}, \bar{T}) \in S \times L^+(Z, Y)$، نقطه E-زینی ضعیف نگاشت لاگرانژ مجموعه-مقدار $L(x, T)$ باشد و $\circ \in G(\bar{x})$، آنگاه $\bar{y} \in F(\bar{x})$ و $\bar{z} \in G(\bar{x})$ وجود دارند چنانکه $\bar{x}$ جواب E'-بهینه ضعیف (VP) است که در آن $E' = E - \bar{T}(\bar{z})$.*

برهان. چون $(\bar{x}, \bar{T}) \in S \times L^+(z, y)$ نقطه E-زینی ضعیف $L(x, T)$ است، از قضیه ۲.۴.۳، $\bar{y} \in F(\bar{x})$ و $\bar{z} \in G(\bar{x})$ وجود دارند چنانکه $\bar{y} + \bar{T}(\bar{z}) \in O^{intE}(L(S, \bar{T}))$. بنابراین

$$(\bar{y} + \bar{T}(\bar{z}) - intE) \cap (F(S) + \bar{T}(G(S))) = \emptyset,$$

به این ترتیب رابطه زیر را داریم

$$(\bar{y} + \bar{T}(\bar{z}) - \bar{T}(G(S)) - intE) \cap F(S) = \emptyset.$$

با قرار دادن $E' = E - \bar{T}(\bar{z})$ به وضوح $E' \in \zeta_y$، با توجه به اینکه $\circ \in G(\bar{x}) \subset G(S)$، داریم

$$-intE' = \bar{T}(\bar{z}) - intE \subset \bar{T}(\bar{z}) - \bar{T}(G(S)) - intE.$$

بنابراین $(\bar{y} - intE') \cap F(S) = \emptyset$ از $D \subset S$ داریم $(\bar{y} - intE') \cap F(D) = \emptyset$ که نتیجه می‌دهد $\bar{x}$ جواب E'-کارای ضعیف (VP) است. □

مثال ۴.۴.۳. فرض کنید $X = Y = Z = \mathbb{R}^2$، $K = P = \mathbb{R}^2_{\geq}$، $E = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_1 + y_2 \geq 3\}$، $S = \{0\} \times [-1, 1]$، نگاشت‌های مجموعه- مقدار $F : S \rightrightarrows Y$ و $G : S \rightrightarrows Z$ به شکل زیر تعریف شده‌اند

$$F(x_1, x_2) = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 | (y_1, y_2) \in \{0\} \times [-x_1, x_2]\} \quad \forall (x_1, x_2) \in S.$$

$$G(x_1, x_2) = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2 | (z_1, z_2) \in -\lambda(|x_1|, |x_2|), \quad \forall \lambda \in [0, 1]\} \quad \forall (x_1, x_2) \in S$$

فرض کنید $\bar{x} = (0, 1)$، $\bar{T}(z_1, z_2) = (z_1, z_2) \in L^+(z, y)$.

$$L(\bar{x}, \bar{T}) \cap O^{intE}(L(S, \bar{T})) \cap \overline{O^{intE}}(L(\bar{x}, L^+)) \neq \emptyset.$$

چون

$$\bar{y} + \bar{T}(z) = (0, -1) + \bar{T}((0, 0))$$

بنابراین

$$\begin{cases} (\bar{y} + \bar{T}(\bar{z}) - intE) \cap L(S, \bar{T}) & = \emptyset \\ (\bar{y} + \bar{T}(\bar{z}) + intE) \cap L(\bar{x}, L^+) & = \emptyset. \end{cases} \tag{۲۱.۳}$$

بنابراین $(\bar{x}, \bar{T})$ نقطه E-زینی ضعیف نگاشت لاگرانژ مجموعه-مقدار $L(x, T)$ است. از قضیه ۳.۴.۳، $\bar{y} = (0, -1) \in F(\bar{x})$ و $\bar{z} = (0, 0) \in G(\bar{x})$ وجود دارند چنانکه $\bar{x}$ جواب E'-بهینه (VP) است و $E = E'$.

۵.۳ E-دوگانی ضعیف

نگاشت مجموعه-مقدار $\Phi : L^+(Z, Y) \rightrightarrows 2^Y$ تعریف شده به شکل

$$\Phi(T) := O^{intE}(L(S, T)), \quad T \in L^+(Z, Y),$$

نگاشت E-دوگان ضعیف (VP) نامیده می‌شود. مساله ماکزیمم‌سازی با نگاشت مجموعه-مقدار Φ،

$$(VD) \quad \text{maximize} \quad \bigcup_{T \in L^+} \Phi(T),$$

مساله دوگان (VP) نامیده می‌شود.

تعریف ۱.۵.۳. نقطه $y \in Y$ نقطه شدنی (VD) است اگر $y \in \bigcup_{T \in L^+} \Phi(T)$.

نقطه شدنی $\bar{y} \in Y$ جواب E-کارای ضعیف (VD) نامیده می‌شود اگر

$$y - \bar{y} \notin intE, \quad y \in \bigcup_{T \in L^+} \Phi(T).$$

قضیه ۲.۵.۳. *(E-دوگانی ضعیف). فرض کنید $\bar{x}$ جواب شدنی (VP) و $\bar{y}$ نقطه شدنی (VD) باشند. آنگاه $\bar{y} \notin F(\bar{x}) + intE$.*

برهان. چون $\bar{y}$ نقطه شدنی (VD) است، آنگاه $\bar{y} \in \bigcup_{T\in L^+} \Phi(T)$ که نتیجه می‌دهد $\bar{T} \in L^+(Z,Y)$ وجود دارد چنانکه $\bar{y} \in \Phi(\bar{T}) = O^{intE}(L(S,\bar{T})$، یعنی

$$(\bar{y} - intE)\bigcap(F(S) + \bar{T}(G(S))) = \emptyset.$$

آنگاه

$$\bar{y} - y - \bar{T}(z) \notin intE, \quad \forall \bar{y} \in F(\bar{x}), \forall z \in G(\bar{x}). \tag{۲۲.۳}$$

از طرف دیگر چون $\bar{x}$ جواب شدنی (VP) است داریم $G(\bar{x}) \cap (-P) \neq \emptyset$. بنابراین $\bar{z} \in G(\bar{x})$ وجود دارد چنانکه $-\bar{z} \in P$. بنابراین داریم $-\bar{T}(\bar{z}) \in \bar{T}(P) \subset K$. با در نظر گرفتن $z = \bar{z}$ در رابطه (۲۲.۳) به دست می‌آوریم $\bar{y} - y - \bar{T}(\bar{z}) \notin intE, \forall y \in F(\bar{x})$. از $-\bar{T}(\bar{z}) \in K$ و $intE \in \zeta_Y$ نتیجه می‌گیریم که $\bar{y} - y \notin intE, \forall y \in F(\bar{x})$، که حاصل می‌کند $\bar{y} \notin F(\bar{x}) + intE$. □

قضیه ۳.۵.۳. *فرض کنید $\bar{x}$ جواب شدنی (VP) باشد و $\bar{y}$ نقطه شدنی (VD) باشد به‌طوریکه $\bar{y} \in F(\bar{x})$. آنگاه $\bar{x}$ جواب E-کارای ضعیف (VP) و $\bar{y}$ جواب E-کارای ضعیف (VD) است.*

برهان. فرض کنید که $\bar{y}$ نقطه شدنی (VD) باشد، لذا داریم $\bar{y} \in \bigcup_{T\in L^+} \Phi(T)$. بنابراین $\bar{T} \in L^+(Z,Y)$ وجود دارد چنانکه $\bar{y} \in \Phi(\bar{T}) = O^{intE}(L(S,\bar{T}))$ یعنی

$$\bar{y} - y - \bar{T}(z) \notin intE \quad \forall x \in S, \forall y \in F(x), \forall z \in G(x). \tag{۲۳.۳}$$

هنگامی‌که داریم $x \in D$ می‌دانیم $\bar{z} \in G(x)$ وجود دارد چنانکه $\bar{z} \in -P$. بنابراین $-\bar{T}(\bar{z}) \in K$ علاوه بر این با در نظر گرفتن $z = \bar{z}$ در رابطه (۲۳.۳) می‌توان ثابت کرد که

$$\bar{y} - y \notin intE, \quad \forall x \in D, \quad y \in F(x).$$

از اینکه $\bar{y} \in F(\bar{x})$، نتیجه می‌گیریم که $\bar{x}$ جواب E-کارای ضعیف (VP) است. از طرف دیگر فرض کنید که $\bar{x}$ نقطه شدنی (VD) باشد، از فرض $\bar{y} \in F(\bar{x})$ و قضیه ۲.۵.۳ به‌دست می‌آوریم

$$y - \bar{y} \notin intE, \quad \forall y \in \bigcup_{T\in L^+} \Phi(T).$$

بنابراین $\bar{y}$ جواب E-کارای ضعیف (VD) است. □

قضیه ۴.۵.۳. *(E دوگانی قوی) فرض کنید $(F - \bar{y}, G)$ تقریبا $E \times P$-شبه زیرمحدب روی S باشد، (VP) در قید محدودیت اسلاتر تعمیم یافته صدق کند. اگر $(\bar{x}, \bar{y})$ نقطه E-کارای ضعیف (VP) باشد و $\bar{z} \in G(\bar{x})$ آنگاه $\bar{y}$ جواب E-کارای ضعیف (VD) است.*

برهان. از قضیه ۷.۳.۳، $T \in L^+$ وجود دارد به‌طوریکه $(\bar{x}, \bar{y})$ نقطه E-کارای ضعیف (UVP) است، بنابراین، داریم:

$$\bar{y} \in F(\bar{x}) \subset F(\bar{x}) + T(G(\bar{x})) \in L(S,T), \quad \forall T \in L^+(Z,Y).$$

و

$$(\bar{y} - intE) \cap L(S,T) = \emptyset, \quad \forall T \in L^+(Z,Y).$$

لذا

$$\bar{y} \in O^{intE}(L(S,T)) = \Phi(T), \quad \forall T \in L^+(Z,Y).$$

بنابراین

$$\bar{y} \in F(\bar{x}) \bigcap \left(\bigcup_{T \in L^+} \Phi(T) \right).$$

درنتیجه بنا به قضیه ۳.۵.۳ $\bar{y}$ جواب E–کارای ضعیف (VD) است. □

۶.۳ اسکالرسازی و E–کارایی سره بنسن

مساله بهینه سازی اسکالر (SP_μ) را در نظر بگیرید.

تعریف ۱.۶.۳. اگر $\bar{x}$ای داشته باشیم به طوریکه $\bar{y} \in F(\bar{x})$ و همچنین

$$\langle \bar{y}, \mu \rangle \leq \langle y, \mu \rangle \quad \forall y \in F(\mathcal{X})$$

آنگاه $\bar{x}$ و $(\bar{x}, \bar{y})$ به ترتیب جواب مینیمال و می‌نیمم کننده (SP_μ) نامیده می‌شود.

تعریف ۲.۶.۳. فرض کنید $E \in \zeta_Y$. نقطه‌ی $x_\circ \in D$ جواب بهینه $(SP)_\mu$ نسبت به E نامیده می‌شود، اگر $y_\circ \in F(x_\circ)$ وجود داشته باشد به طوریکه:

$$(\langle y_\circ, \mu \rangle - \mu(E + K \setminus \{\circ\}) \cap \langle F(D), \mu \rangle = \emptyset. \tag{۲۴.۳}$$

جفت نقطه $(x_\circ, y_\circ)$ نقطه بهینه $(SP)_\mu$ نسبت به E نامیده می‌شود.

اگر $\mu \in K^{+i}$، آنگاه (۲۴.۳) با $\forall x \in D, \forall y \in F(x) \forall e \in E, \langle y - y_\circ + e, \mu \rangle \geq \circ$ هم ارز است یعنی

$$\langle y_\circ, \mu \rangle - \mu(E + K \setminus \{\circ\}) \cap \langle F(D), \mu \rangle \cong -\mu(K \setminus \{\circ\}) \cap (-\langle y_\circ, \mu \rangle + \mu(E) + \langle F(D), \mu \rangle) = \emptyset$$

اما چون $\mu \in K^{+i}$ لذا $\forall \bar{k} \in K \setminus \{\circ\}$ $\langle \mu, \bar{k} \rangle > \circ$ بنابراین $-\langle \mu, \bar{k} \rangle < \circ$ و این یعنی

$$\forall x \in D, \forall y \in F(x), \forall e \in E, \langle y - y_\circ + e, \mu \rangle \geq \circ$$

توجه شود که تعاریف ۲.۶.۳ و ۵.۳.۳ معادل اند.

ملاحظه ۳.۶.۳. *اگر $\varepsilon \in K \setminus \{\circ\}$، $E = \varepsilon + K$ و $\mu \in K^{+i}$، آنگاه $E \in \zeta_Y$ و تعریف ۲.۶.۳ و ۵.۳.۳ به $\forall x \in D, \forall y \in F(x), \langle y, \mu \rangle \geq \langle y_\circ, \mu \rangle - \langle \varepsilon, \mu \rangle$ کاهش می‌یابند.*

ملاحظه ۴.۶.۳. *فرض کنید $\mu \in K^{+i}$ باشد، در این صورت $\mu(E + K \setminus \{\circ\})$ لزوما یک مجموعه بهبودیافته در $\mathbb{R}$ نیست.*

مثال ۵.۶.۳. فرض کنید $Y = \mathbb{R}^۲$، $K = \mathbb{R}^۲_{\geq}$ و $E = \{(x, y) | x + y \geq \circ\} \setminus \{(\circ, \circ)\}$ به راحتی می‌توان نشان داد که $E \in \zeta^۲$ و $E + K \setminus \{\circ\} \in \zeta^۲$. فرض کنید $K^{+i} \ni \mu = \left(\frac{۲}{۳}, \frac{۱}{۳} \right)$ و $z = (-۱, ۲) \in E + K \setminus \{\circ\}$. بنابراین $\langle z, \mu \rangle = \circ \in \mu(E + K \setminus \{\circ\})$، به این معنی که $\mu(E + K \setminus \{\circ\})$ یک مجموعه بهبود یافته در $\mathbb{R}$ نیست.

ملاحظه ۶.۶.۳. فرض کنید $\mu \in K^{+i}$، $E \in \zeta_Y$ و $E \subset K$، آنگاه $\mu(E + K \setminus \{\circ\})$ یک مجموعه بهبودیافته در $\mathbb{R}$ است. در نتیجه تعریف ۲.۶.۳، $\langle y_\circ, \mu\rangle \in O^{\mu(E+K\setminus\{\circ\})}(\langle F(D), \mu\rangle)$ را نتیجه می‌دهد.

لم ۷.۶.۳. [۴]. فرض کنید $N, K \subset Y$ دو مخروط بسته و محدب باشند به طوریکه $N \cap K = \{\circ\}$. اگر K نوک‌دار و فشرده موضعی باشد، آنگاه داریم $(-N^+) \cap (K^{+i}) \neq \emptyset$.

قضیه ۸.۶.۳. فرض کنید $\mu \in K^{+i}$ و $E \in \zeta_Y$ باشد. اگر $(x_\circ, y_\circ)$ نقطه بهینه $(SP)_\mu$ نسبت به E باشد، آنگاه $(x_\circ, y_\circ)$ نقطه E-کارای سره بنسن (VP) است.

برهان. فرض کنید $d \in clcone(F(D) + E - y_\circ) \cap (-K)$ چون $E \in \zeta_Y$ داریم.
$$d \in clcone(F(D) + E + K - y_\circ) \cap (-K)$$

بنابراین، $\{\lambda_n\} \subset \mathbb{R}_\geq$ و $\{y_n\} \subset F(D),\ \{e_n\} \subset E,\ \{r_n\} \subset K$ وجود دارند به طوریکه
$$d = \lim_{n\to\infty} \lambda(y_n + e_n + r_n - y_\circ). \tag{۲۵.۳}$$

چون $\mu \in K^{+i}$ و همچنین از (۲۵.۳) داریم
$$\langle d, \mu\rangle = \lim_{n\to\infty} \lambda(\langle y_n, \mu\rangle + \langle e_n, \mu\rangle + \langle r_n, \mu\rangle - \langle y_\circ, \mu\rangle). \tag{۲۶.۳}$$

چون $(x_\circ, y_\circ)$ نقطه بهینه $(SP)_\mu$ نسبت به E است. رابطه $\langle y_n, \mu\rangle + \langle e_n, \mu\rangle - \langle y_\circ, \mu\rangle \geq \circ$ را به دست می‌آوریم. از طرف دیگر چون $\mu \in K^{+i}$ داریم $\langle r_n, \mu\rangle \geq \circ$ بنابراین از رابطه (۲۶.۳) نتیجه می‌گیریم که $\langle d, \mu\rangle \geq \circ$ است. علاوه بر این چون داریم $\mu \in K^{+i}$ و $d \in (-K)$، بدیهی است که $\langle d, \mu\rangle \leq \circ$ می‌باشد. که این نتیجه می‌دهد $\langle d, \mu\rangle = \circ$. بنابراین داریم $d = \circ$. بنابراین، $y_\circ \in O^E_{BS}(F(D))$ است. همچنین از $y_\circ \in F(x_\circ)$ نتیجه می‌گیریم که $y_\circ \in F(x_\circ) \cap O^E_{BS}(F(D))$. بنابراین $(x_\circ, y_\circ)$ نقطه E-کارای سره بنسن (VP) است. $\square$

قضیه ۹.۶.۳. فرض کنید $E \in \zeta_Y$ و F، E-شبه زیر محدب روی D باشد. اگر $(x_\circ, y_\circ)$ نقطه E-کارای سره بنسن (VP) باشد، آنگاه $\mu \in K^{+i}$ وجود دارد به‌طوریکه $(x_\circ, y_\circ)$ نقطه بهینه $(SP)_\mu$ نسبت به E است.

برهان. چون $(x_\circ, y_\circ)$ نقطه E-کارای سره بنسن (VP) است، $x_\circ \in D$ و $y_\circ \in F(x_\circ)$ وجود دارد به‌طوریکه $clcone(F(D) + E - y_\circ) \cap (-K) = \{\circ\}$. از قضیه ۱۶.۲.۲ بدست می‌آوریم که
$$clcone(F(D) + intE - y_\circ) \cap (-K) = \{\circ\}. \tag{۲۷.۳}$$

از E- شبه زیر محدب بودن روی F، می‌دانیم که $F(D) + intE$ محدب است. بنابراین، $clcone(F(D)+intE-y_\circ)$ مخروطی محدب بسته است. بنابراین، از (۲۷.۳) و لم ۷.۶.۳، $\mu \in K^{+i}$ وجود دارد به طوریکه
$$\langle z, \mu\rangle \geq \circ \quad \forall z \in clcone(F(D) + intE - y_\circ). \tag{۲۸.۳}$$

علاوه براین، دوباره از قضیه ۱۶.۲.۲ داریم
$$F(D) + E - y_\circ \subset clcone(F(D) + E - y_\circ) = clcone(F(D) + intE - y_\circ) \tag{۲۹.۳}$$

از (۲۸.۳) و (۲۹.۳)، نتیجه می‌گیریم که
$\forall x \in D, \forall y \in F(x), \forall e \in E \quad \langle y+e-y_\circ, \mu\rangle \geq \circ$. که نتیجه می‌دهد که $(x_\circ, y_\circ)$ نقطه بهینه $(SP)_\mu$ نسبت به E است. □

مجموعه همه نقاط E-کارای سره بنسن (VP) با $EBPE(SP)_\mu$ نشان داده می‌شود و مجموعه همه نقاط بهینه $(SP)_\mu$ نسبت به E را با $EAP(SP)_\mu$ نشان داده می‌شود.

گزاره ۱۰.۶.۳. *[۴]. فرض کنید S و N مخروط‌های محدب بسته در X باشند که $N \cap S = \circ$. همچنین فرض کنید که مخروط دوگان S^+ نقاط درونی ناتهی در توپولوژی τ دارد که به X دوگان X' را تخصیص می‌دهد. آنگاه برخی $s^+ \in (S^+)^\circ$ با $-s^+ \in N^+$ وجود دارد و*
$$s^+(s) > \circ \quad \forall s \in S \diagup \{\circ\}. \tag{۳۰.۳}$$
در حقیقت شرط آخر هم‌ارز است با $s^+ \in (S^+)^\circ$.

نتیجه ۱۱.۶.۳. *فرض کنید $E \in \zeta^m$ و F روی D و E-شبه زیر محدب باشند. آنگاه داریم*
$$EBPE(VP) = \bigcup_{\mu \in K^{+i}} EAP(VP)_\mu.$$

برهان. اثبات نتیجه مستقیمی از قضایای ۸.۶.۳ و ۹.۶.۳ است. □

در قضایای ۸.۶.۳ و ۹.۶.۳ فرض کنید $E = \varepsilon + K$ باشد، که در آن $\varepsilon \in K \setminus \{\circ\}$ است، در این صورت نتیجه زیر را به دست می‌آوریم.

نتیجه ۱۲.۶.۳. *[۴۶]. فرض کنید $\varepsilon \in K \setminus \{\circ\}$ و همچنین فرض کنید F، K - شبه زیر محدب باشد. آنگاه $(x_\circ, y_\circ)$ نقطه ε-کارای سره (VP) است، اگر و فقط اگر $\mu \in K^{+i}$ وجود داشته باشد به طوریکه*
$$\langle y, \mu\rangle \geq \langle y_\circ, \mu\rangle - \langle \varepsilon, \mu\rangle. \quad \forall x \in D, \forall y \in F(x).$$

قضیه ۱۳.۶.۳. *فرض کنید $E \in \zeta_Y$ و $F - y_\circ$، تقریبا E-شبه زیر محدب روی D باشد. آنگاه $(x_\circ, y_\circ)$ نقطه E-کارای سره بنسن (VP)است اگر و تنها اگر $\mu \in K^{+i}$ وجود داشته باشد به طوریکه $(x_\circ, y_\circ)$نقطه بهینه $(SP)_\mu$ نسبت به E باشد.*

برهان. فرض کنید که $\mu \in K^{+i}$ وجود دارد چنانکه $(x_\circ, y_\circ)$ نقطه بهینه $(SP)_\mu$ نسبت به E است. فرض کنید $d \in clcone(F(D) + E - y_\circ) \cap (-K)$. از $E \in \zeta_Y$ داریم

$$d \in clcone(F(D) + E + K - y_\circ) \cap (-K).$$

بنابراین، $\{y_n\} \subset F(D), \{e_n\} \subset E, \{r_n\} \subset K$ و $\{\lambda_n\} \subset \mathbb{R}_\geq$ وجود دارند به‌طوریکه
$$d = \lim_{n\to\infty} \lambda(y_n + e_n + r_n - y_\circ). \tag{۳۱.۳}$$
از $\mu \in K^{+i}$ و (۳۱.۳) به دست می‌آوریم
$$\langle d, \mu\rangle = \lim_{n\to\infty} \lambda_n(\langle y_n, \mu\rangle + \langle e_n, \mu\rangle + \langle r_n, \mu\rangle - \langle y_\circ, \mu\rangle). \tag{۳۲.۳}$$

چون $(x_\circ, y_\circ)$ نقطه E-کارای $(SP)_\mu$ است. به دست می‌آوریم
$\langle y_n, \mu\rangle + \langle e_n, \mu\rangle - \langle y_n, \mu\rangle \geq \circ$. علاوه براین از $\langle r_n, \mu\rangle \geq \circ$ و از رابطه (۳۲.۳) نتیجه می‌گیریم $\langle d, \mu\rangle \geq \circ$.بعلاوه از $\mu \in K^{+i}$ و $d \in (-K)$، بدیهی است که $\langle d, \mu\rangle \leq \circ$ که نتیجه می‌دهد $\langle d, \mu\rangle = \circ$. بنابراین داریم $d = \circ$. نتیجه می‌گیریم که $y_\circ \in F(x_\circ) \cap O^E_{BS}(F(D))$. بنابراین $(x_\circ, y_\circ)$ نقطه E-کارای سره بنسن (VP) است.

درحالت عکس، فرض کنید که $(x_\circ, y_\circ)$ نقطه E-کارای سره بنسن (VP) است، بنابراین داریم $x_\circ \in D$ و $y_\circ \in F(x_\circ)$ و

$$clcone(F(D) + E - y_\circ) \cap (-K) = \{\circ\}. \tag{۳۳.۳}$$

از تقریبا E- شبه زیر محدب بودن $F - y_\circ$، نتیجه می‌گیریم که $clcone(F(D) + E - y_\circ)$ مخروط محدب بسته است. بنابراین، از (۳۳.۳) و گزاره ۱۰.۶.۳ ، $\mu \in K^{+i}$ وجود دارد به طوریکه

$$\langle z, \mu\rangle \geq \circ \quad \forall z \in clcone(F(D) + E - y_\circ). \tag{۳۴.۳}$$

علاوه براین، واضح است که

$$F(D) + E - y_\circ \subset clcone(F(D) + E - y_\circ). \tag{۳۵.۳}$$

از (۳۴.۳) و (۳۵.۳)، نتیجه می‌گیریم که
$\forall x \in D, \forall y \in F(x), \quad \langle y - y_\circ, \mu\rangle \geq \sigma_{-E}(\mu)$. که نتیجه می‌دهد که $(x_\circ, y_\circ)$ نقطه بهینه $(SP)_\mu$ نسبت به E است. □

۷.۳ ضرایب لاگرانژ و E-کارایی سره بنسن

در این بخش قضایای ضرایب لاگرانژ E-کارایی سره بنسن مساله (VP) را ارائه می‌دهیم.

قضیه ۱.۷.۳. *فرض کنید $E \in \zeta_Y$، $E \subset K$ و F روی D، E-شبه زیر محدب باشد و (F, G)، روی S، $(E \times P)$-شبه زیر محدب باشد. علاوه براین، فرض کنید (VP) در قید محدودیت اسلاتر تعمیم یافته صدق کند. اگر $(x_\circ, y_\circ)$ نقطه E-کارای سره بنسن روی (VP) باشد و $\circ \in G(x)$، آنگاه $T \in L^+(Z, Y)$ وجود دارد به طوریکه $-T(G(x_\circ) \cap (-P)) \subset (intK \cup \{\circ\}) \setminus intE$ و $(x_\circ, y_\circ)$ نقطه E-کارای سره بنسن مساله بهینه سازی برداری نامقید زیر با نگاشت‌های مجموعه-مقدار است:*

$$\begin{array}{lll} (UVP) & \text{minimize} & F(x) + T(G(x)) \\ & \text{subject to} & x \in S. \end{array}$$

برهان. از آنجایی که $(x_\circ, y_\circ)$ نقطه E-کارای سره بنسن (VP) است، با استفاده از قضیه ۹.۶.۳، $\mu \in K^{+i}$ وجود دارد به طوریکه

$$\langle y - y_\circ + e, \mu\rangle \geq \circ, \quad \forall x \in D, \forall y \in F(x), \forall e \in E. \tag{۳۶.۳}$$

نگاشت $H : S \rightrightarrows \mathbb{R} \times Z$ را با ضابطه زیر تعریف کنید:

$$H(x) = \langle F(x) - y_\circ, \mu\rangle \times G(x) = (\mu F, G)(x) - (\langle y_\circ, \mu\rangle, \circ_z).$$

چون (F,G) ، $(E\times P)$-شبه زیر محدب روی S است، از قضیه ۸.۲.۳ نتیجه می‌گیریم که H، $(\mu E\times P)$-شبه زیر محدب روی S است. علاوه بر این از (۳۶.۳) می‌توان نتیجه گرفت که دستگاه
$$x\in S,\ H(x)\cap(-int(\mu E\times P))\neq\emptyset.$$
جواب ندارد. بنابراین از قضیه ۶.۲.۳، $(\lambda,\varphi)\in\mathbb{R}_{\geq}\times P\setminus\{(\circ,\circ_z)\}$ وجود دارد به طوریکه
$$\lambda\langle y-y_\circ+e,\mu\rangle+\langle z+z',\varphi\rangle\geq\circ,\ \forall x\in S,\ \forall y\in F(x),\ \forall z\in G,\ \forall e\in E,\ \forall z'\in P. \tag{۳۷.۳}$$
در حالت خاص، فرض کنید در (۳۷.۳) قرار می‌دهیم $z'=\circ$ در این صورت به دست می‌آوریم
$$\lambda\langle y-y_\circ+e,\mu\rangle+\langle z,\varphi\rangle\geq\circ\quad\forall x\in S,\ \forall y\in F(x),\ \forall z\in G(x),\ \forall e\in E. \tag{۳۸.۳}$$
از این حقیقت که نگاشت G در قید محدودیت اسلاتر تعمیم یافته صدق می‌کند و با استفاده از رابطه (۳۸.۳) به راحتی می‌توان نشان داد که $\lambda>\circ$. حال $k_\circ\in intK$ مناسبی را بگیرید که در $\lambda\langle k_\circ,\mu\rangle=۱$ صدق کند. نگاشت $T:Z\to Y$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم.
$$T(z)=\langle z,\varphi\rangle k_\circ,\quad z\in Z \tag{۳۹.۳}$$
از $T\in L(Z,Y)$ و $T(P)\subset K$ به وضوح داریم $T\in L^+(Z,Y)$. با قرار دادن $x=x_\circ$ و $y=y_\circ$ و $z=z_\circ\in G(x_\circ)\cap(-P)$ در (۳۸.۳)به دست می‌آوریم که
$$-\lambda\langle e,\mu\rangle\leq\langle z_\circ,\varphi\rangle\leq\circ. \tag{۴۰.۳}$$
از سمت راست (۴۰.۳) داریم :
$$-T(z_\circ)=-\langle z_\circ,\varphi\rangle k_\circ\in intK\cup\{\circ\}.$$
همچنین از سمت چپ نامساوی (۴۰.۳)، به دست می‌آوریم $-T(z_\circ)\notin intE$. در غیر این صورت از قضیه ۱۰.۲.۲، $\bar{e}\in E$ وجود دارد به طوریکه $-T(z_\circ)-\bar{e}\in intK$. در نتیجه داریم $\langle T(z_\circ)+\bar{e},\mu\rangle<\circ$ که این یعنی $\langle z_\circ,\varphi\rangle+\lambda\langle\bar{e},\mu\rangle<\circ$ که با سمت چپ نامساوی (۴۰.۳) در تناقض است. دقت کنید که $z_\circ$ در مجموعه $G(x_\circ)\cap(-P)$ دلخواه است. بنابراین به دست می‌آوریم
$$-T(G(x_\circ)\cap(-P))\subset(intK\cup\{\circ\})\setminus intE.$$
علاوه براین از $T\in L^+(Z,Y)$ و $\circ\in G(x_\circ)$، نتیجه می‌گیریم که $\circ\in T(G(x_\circ))$. بنابراین $y_\circ\in F(x_\circ)\subset F(x_\circ)+T(G(x_\circ))$ از این رو از (۳۸.۳) و (۳۹.۳) حاصل می‌شود که
$$\begin{aligned}\lambda\langle y+T(z),\mu\rangle&=\lambda\langle y,\mu\rangle+\lambda\langle z,\varphi\rangle\langle k_\circ,\mu\rangle\\&=\lambda\langle y,\mu\rangle+\langle z,\varphi\rangle\\&\geq\lambda\langle y_\circ-e,\mu,\rangle\quad\forall x\in S,\ \forall y\in F(x),\ \forall z\in G(x),\ \forall e\in E.\end{aligned}$$
با تقسیم نامساوی بالا برای $\lambda>\circ$ رابطه زیر حاصل می‌شود
$$\langle y+T(z),\mu\rangle-\langle y_\circ,\mu\rangle+\langle e,\mu\rangle\geq\circ\quad\forall x\in S,\ \forall y\in F(x),\ \forall z\in G(x),\ \forall e\in E$$
بنابراین $(x_\circ,y_\circ)$ نقطه بهینه $(UVP)_\mu$ داده شده زیر است.
$$\begin{aligned}(UVP)_\mu\quad&\text{minimize}\qquad\langle F(x)+T(G(x)),\mu\rangle.\\&\text{subject to}\qquad x\in S.\end{aligned}$$

در نتیجه از اینکه $\mu \in K^{+i}$ است و از قضیه ۸.۶.۳ به دست می‌آوریم که $(x_\circ, y_\circ)$ نقطه E–کارای سره بنسن (UVP) است.

□

قضیه ۲.۷.۳. *فرض کنید $E \in \zeta_Y$، $E \subset K$ و (F, G)، روی S تقریباً $(E \times P)$–شبه زیر محدب باشد. علاوه براین، فرض کنید (VP) در قید محدودیت اسلاتر تعمیم یافته صدق کند. اگر $(x_\circ, y_\circ)$ نقطه E–کارای سره بنسن روی (VP) باشد و $\circ \in G(x)$، آنگاه $T \in L^+(Z, Y)$ وجود دارد به طوریکه*

$$-T(G(x_\circ) \cap (-P)) \subset (intK \cup \{\circ\}) \setminus intE.$$

و $(x_\circ, y_\circ)$ نقطه E–کارای سره بنسن مساله (UVP) زیر است:

$$(UVP) \quad \text{minimize} \quad F(x) + T(G(x))$$
$$\text{subject to} \quad x \in S.$$

برهان. چون $(x_\circ, y_\circ)$ نقطه E–کارای سره بنسن (VP) است، با استفاده از قضیه ۱۳.۶.۳، $\mu \in K^{+i}$ وجود دارد به طوریکه

$$\langle y - y_\circ, \mu \rangle \geq \sigma_{-E}(\mu), \quad \forall x \in D, \forall y \in F(x). \tag{۴۱.۳}$$

نگاشت $H : S \rightrightarrows \mathbb{R} \times Z$ را با ضابطه زیر تعریف می‌کنیم:

$$H(x) = \langle F(x) - y_\circ, \mu \rangle \times G(x) = (\mu F, G)(x) - (\langle y_\circ, \mu \rangle, \circ_z).$$

چون (F, G) تقریباً $(E \times P)$–شبه زیر محدب روی S است، نتیجه می‌گیریم که H تقریباً $(\mu E \times P)$–شبه زیر محدب روی S است. علاوه براین از (۴۱.۳) می‌توان نتیجه گرفت که دستگاه

$$x \in S, \; H(x) \cap (int(\mu \times P)) \neq \emptyset$$

جواب ندارد. بنابراین از قضیه ۱۳.۶.۳، $(\lambda, \varphi) \in \mathbb{R}_+ \times P \setminus \{(\circ, \circ_z)\}$ وجود دارد به طوریکه

$$\lambda \langle y - y_\circ, \mu \rangle - \sigma_{-\mu E}(\lambda) + \langle z, \varphi \rangle - \sigma_{-P}(\varphi) \geq \circ, \; \forall x \in S, \; \forall y \in F(x), \; \forall z \in G(x). \tag{۴۲.۳}$$

بنابراین برای هر $z' \in P$، $e \in E$، $z \in G(x)$، $y \in F(x)$ و $x \in S$ داریم:

$$\begin{aligned} \lambda \langle y - y_\circ, \mu \rangle + \langle z, \varphi \rangle &\geq \sigma_{-\mu E}(\lambda) + \sigma_P(\varphi) \\ &= \sup_{\tilde{e} \in -E} \langle \mu \tilde{e}, \lambda \rangle + \sup_{\tilde{z} \in -P} \langle \tilde{z}, \varphi \rangle \\ &\geq \langle -e\mu, \lambda \rangle + \langle -z', \varphi \rangle. \end{aligned} \tag{۴۳.۳}$$

فرض کنید در ۴۳.۳ قرار می‌دهیم $z' = \circ$ در این صورت داریم

$$\lambda \langle y - y_\circ + e, \mu \rangle + \langle z, \varphi \rangle \geq \circ, \quad \forall x \in S, \forall y \in F(x), \forall z \in G(x), \forall e \in E. \tag{۴۴.۳}$$

چون نگاشت G در قید محدودیت اسلاتر تعمیم یافته صدق می‌کند و از رابطه (۴۴.۳) می‌توان نشان داد که $\lambda > \circ$. حال $k_\circ \in intK$ مناسبی را بگیرید که در $\lambda \langle k_\circ, \mu \rangle = ۱$ صدق کند. نگاشت $T : Z \to Y$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم.

$$T(z) = \langle z, \varphi \rangle k_\circ, \quad z \in Z \tag{۴۵.۳}$$

به وضوح $T \in L^{+}(Z,Y)$. با قرار دادن $x = x_{\circ}$ و $y = y_{\circ}$ و $z = z_{\circ} \in G(x_{\circ}) \cap (-P)$ در (۴۴.۳) داریم

$$- \lambda\langle e, \mu\rangle \leq \langle z_{\circ}, \varphi\rangle \leq \circ. \quad (۴۶.۳)$$

از سمت راست (۴۶.۳) داریم :

$$-T(z_{\circ}) = -\langle z_{\circ}, \varphi\rangle k_{\circ} \in intK \cup \{\circ\}.$$

همچنین از سمت چپ نامساوی (۴۶.۳)، به دست می‌آوریم $-T(z_{\circ}) \notin intE$. در غیر این صورت از قضیه ۱۰.۲.۲، $\bar{e} \in E$ وجود دارد به طوریکه $-T(z_{\circ}) - \bar{e} \in intK$. در نتیجه داریم $\langle T(z_{\circ}) + \bar{e}, \mu\rangle < \circ$ که این یعنی $\langle z_{\circ}, \varphi\rangle + \lambda\langle \bar{e}, \mu\rangle < \circ$ که با سمت چپ نامساوی (۴۶.۳) در تناقض است. دقت کنید که $z_{\circ}$ در مجموعه $G(x_{\circ}) \cap (-P)$ دلخواه است. بنابراین به دست می‌آوریم

$$-T(G(x_{\circ}) \cap (-P)) \subset (intK \cup \{\circ\}) \setminus intE.$$

علاوه‌براین از $T \in L^{+}(Z,Y)$ و $\circ \in G(x_{\circ})$، نتیجه می‌گیریم که $\circ \in T(G(x_{\circ}))$. بنابراین $y_{\circ} \in F(x_{\circ}) \subset F(x_{\circ}) + T(G(x_{\circ}))$ از این رو از (۴۴.۳) و (۴۵.۳) حاصل می‌شود که

$$\begin{aligned} \lambda\langle y + T(z), \mu\rangle &= \lambda\langle y, \mu\rangle + \lambda\langle z, \varphi\rangle\langle k_{\circ}, \mu\rangle \\ &= \lambda\langle y, \mu\rangle + \langle z, \varphi\rangle \\ &\geq \lambda\langle y_{\circ} - e, \mu\rangle \quad \forall x \in S, \forall y \in F(x), \forall z \in G(x), \forall e \in E. \end{aligned}$$

که حاصل می‌کند

$$\langle y + T(z), \mu\rangle - \langle y_{\circ}, \mu\rangle \geq \sigma_{-E}(\mu) \quad \forall x \in S, \forall y \in F(x), \forall z \in G(x).$$

بنابراین $(x_{\circ}, y_{\circ})$ نقطه بهینه $(UVP)_{\mu}$ داده شده زیر است.

$$\begin{aligned} (UVP)_{\mu} \quad & \text{minimize} \quad \langle F(x) + T(G(x)), \mu\rangle. \\ & \text{subject to} \quad x \in S \end{aligned}$$

از اینکه $\mu \in K^{+i}$ است و از قضیه ۱۳.۶.۳ نتیجه می‌گیریم که $(x_{\circ}, y_{\circ})$ نقطه E-کارای سره بنسن (UVP) است. □

مثال ۳.۷.۳. فرض کنید $X = Y = Z = \mathbb{R}^{۲}$، $K = P = \mathbb{R}^{۲}_{\geq}$، $E = \{(y_{۱}, y_{۲}) \in \mathbb{R}^{۲} | y_{۱} \geq \circ, y_{۲} \geq \circ, y_{۱} + y_{۲} \geq ۱\}$ و $S = [-۱, ۱] \times [-۱, ۱]$ نگاشت‌های مجموعه مقدار $F : S \rightrightarrows Y$ و $G : S \rightrightarrows Z$ به ترتیب به شکل زیر تعریف شده اند.

$$F(x_{۱}, x_{۲}) = \{(y_{۱}, y_{۲}) \in \mathbb{R}^{۲} | (y_{۱}, y_{۲}) \in [-|x_{۱}|, |x_{۱}|] \times [-|x_{۲}|, |x_{۲}|]\}, \forall (x_{۱}, x_{۲}) \in S,$$

$$G(x_{۱}, x_{۲}) = \{(z_{۱}, z_{۲}) \in \mathbb{R}^{۲} | (z_{۱}, z_{۲}) \in [-|x_{۱}|, \circ) \times [-|x_{۲}|, \circ) \cup (\circ, \circ)\}, \forall (x_{۱}, x_{۲}) \in S.$$

از تعریف G می‌توان دید که $D = \{(x_{۱}, x_{۲}) \in S | G(x_{۱}, x_{۲}) \cap (-\mathbb{R}^{۲}_{\geq}) \neq \emptyset\} = S$. فرض کنید $x_{\circ} = (۱, ۱)$ و $y_{\circ} = (-۱, -۱) \in F(x_{\circ})$، می‌توان بررسی کرد که تمام شرایط قضیه ۲.۷.۳ برقرار است، یعنی (F, G) تقریباً $(E \times P)$-شبه زیر محدب روی S است و $\hat{x} \in S$ وجود دارد چنانکه $G(\hat{x}) \cap (-intP) \neq \emptyset$. چون $\circ \in G(x_{\circ})$ و $(x_{\circ}, y_{\circ})$ نقطه E-کارای سره بنسن (VP) است. آنگاه

$T(z_1, z_2) = (0/1 z_1, 0/1 z_2)$ وجود دارد به‌طوریکه $-T(G(x_0) \cap (-P)) \subset (intK \cup (0,0)) \setminus intE$ و (x_0, y_0) نقطه E-کارای سره بنسن (UVP) است.

قضیه ۴.۷.۳. *فرض کنید $E \in \zeta_Y$، $x_0 \in D$ و همچنین $y_0 \in F(x_0)$ باشد. اگر $T \in L^+(Z,Y)$ وجود داشته باشد به طوریکه $0 \in T(G(x_0))$ و (x_0, y_0) نقطه E-کارای سره بنسن (UVP) باشد، آنگاه (x_0, y_0) نقطه E-کارای سره بنسن (VP) است.*

برهان. با استفاده از فرض داریم $y_0 \in F(x_0) \subset F(x_0) + T(G(x_0))$ و

$$clcone\left(\left(\bigcup_{x\in S}(F(x)+T(G(x)))\right)+E-y_0\right)\cap(-K)=\{0\}. \qquad (۴۷.۳)$$

چون

$$\begin{aligned} x \in D &\Rightarrow G(x)\cap(-P)\neq\emptyset \\ &\Rightarrow \exists z\in G(x)\, s.t.\, z\in(-P) \\ &\Rightarrow -T(z)\in K \\ &\Rightarrow K\subset T(z)+K\subset T(G(x))+K, \end{aligned}$$

و همچنین $E \in \zeta_Y$ است، لذا داریم

$$\begin{aligned} F(D)+E-y_0 &= \bigcup_{x\in D}(F(x)+E-y_0) \\ &\subset \bigcup_{x\in D}(F(x)+E+T(G(x))+K-y_0) \\ &\subset \bigcup_{x\in S}(F(x)+T(G(x)))+E-y_0 \end{aligned}$$

بنابراین

$$0\in clcone(F(D)+E-y_0)\subset clcone\left(\bigcup_{x\in S}(F(x)+T(G(x)))+E-y_0\right).$$

از ترکیب رابطه بالا با (۴۷.۳) به دست می‌آوریم که $clcone(F(D)+E-y_0)\cap(-K)=\{0\}$. چون $x_0 \in D$ و $y_0 \in F(x_0) \subset F(D)$، به دست می‌آوریم $y_0 \in F(x_0)\cap O^E_{BS}(F(D))$. لذا (x_0, y_0) نقطه E-کارای سره بنسن (VP) است. □

قضیه ۵.۷.۳. *[۴۶]. فرض کنید Y فضای محدب موضعی و C نقطه‌ای با پایه‌ای فشرده باشد. همچنین فرض کنید F روی X، C- شبه زیر محدب و (F,G) روی X، $(C\times D)$- شبه زیر محدب باشد و فرض کنید (VP) در قید محدودیت اسلاتر تعمیم یافته صدق کند. اگر $(\bar{x},\bar{y})$ می‌نیمم‌کننده سره بنسن (VP) باشد، آنگاه $T\in L^+(Z,Y)$ وجود دارد به طوریکه $0_Y\in T[G]$ و $(\bar{x},\bar{y})$ می‌نیمم‌کننده سره بنسن مساله بهینه سازی برداری نامقید زیر است.*

$$\begin{aligned} (UVP)\, C-\text{minimize} \qquad & F(x)+T[G(x)] \\ \text{subject to} \qquad & x\in X. \end{aligned}$$

قضیه ۶.۷.۳. *[۴۶]. فرض‌کنید $A \ni \bar{x}$ و $\bar{y} \in F(\bar{x})$ باشد. اگر $T \in L(Z,Y)$ وجود داشته باشد به طوریکه $\circ_Y \in T\,[G(x)]$ و $(\bar{x},\bar{y})$ می‌نیم‌کننده سره بنسن (UVP) باشد، آنگاه $(\bar{x},\bar{y})$ می‌نیم‌کننده سره بنسن (VP) است.*

ملاحظه ۷.۷.۳. *فرض‌کنید $E = K \setminus \{\circ\}$ داده شده باشد. آنگاه از ملاحظه‌های ۷.۵.۲ و ۳.۲.۳ می‌توان نتیجه‌گرفت که قضایای ۱.۷.۳ و ۴.۷.۳ به ترتیب به قضایای ۵.۷.۳ و ۶.۷.۳ کاهش می‌یابند.*

در پایان مثال زیر را برای تشریح قضایای ۱.۷.۳ و ۴.۷.۳ ارائه می‌کنیم.

مثال ۸.۷.۳. فرض کنید $X = Y = Z = \mathbb{R}^{۲}$، $E = \{(y_۱, y_۲)|\, y_۱ \geq ۰/۱, y_۲ \geq ۰/۱\}$، و همچنین $S = [-۰/۱, ۰/۱] \times \{\circ\}$ نگاشت‌های مجموعه-مقدار $F : S \rightrightarrows Y$ و $G : S \rightrightarrows Z$ به ترتیب به شکل زیر تعریف می‌شوند.

$$F(x_۱, x_۲) = \{|x_۱|\} \times [۰/۱ - |x_۱|, ۰/۲ - |x_۱|]\,, (x_۱, x_۲) \in [-۰/۱, ۰/۱] \times \{\circ\}:$$

$$G(x_۱, x_۲) = \begin{cases} \{(z_۱, z_۲)|(z_۱, z_۲) = \lambda(-۰/۱, x_۱), \lambda \in [\circ, ۱]\} & \text{اگر} \quad (x_۱, x_۲) \in [-۰/۱, \circ] \times \{\circ\} \\ [\circ, x_۱] \times \{\circ\} & \text{اگر} \quad (x_۱, x_۲) \in (\circ, ۰/۱] \times \{\circ\} \end{cases}$$

فرض کنید $x_\circ = (۰/۱, \circ)$ و $y_\circ = (۰/۱, ۰/۱)$ باشد. به وضوح $(x_\circ, y_\circ)$ نقطه E-کارای سره بنسن (VP) است و در تمام شرایط قضیه ۱.۷.۳ صدق می‌کند. بنابراین $T(z_۱, z_۲) = (-z_۲, \circ)$ وجود دارد به طوریکه $-T(G(x_\circ) \cap (-P)) \subset (intK \cup \{\circ\} \setminus intE)$ و $(x_\circ, y_\circ)$ نقطه E-کارای سره بنسن (UVP) است.

فصل ۴

نتیجه‌گیری

در این رساله با تعریف بهینه‌سازی چندهدفه و با تکیه بر مفاهیم آن به بررسی مسائلی از این دسته می‌پردازیم. در مسائل چند هدفه سعی بر بهینه کردن(مینیمم- ماکسیمم) همزمان توابع هدف را داریم. در این رساله برخی مفاهیم را در فضای برداری توپولوژیکال هاسدورف موضعا محدب حقیقی ارائه می‌دهیم. در حالت کلی به دلیل در تناقض بودن توابع هدف پیدا کردن بهینه کامل که تمام توابع هدف را به طور همزمان بهینه کند غیر ممکن است، بنابراین مفهوم جواب کارا را معرفی می‌کنیم که طبق آن می‌توان بردارهای هدفی را پیدا کرد که هیچ یک از مولفه‌هایش بهبود پیدا نکند مگر اینکه حداقل یکی از مولفه‌هایش بدتر شود.
در ادامه با تعریف نقطه کارا، مفهوم کارایی، کارایی ضعیف که تعریفی ضعیف‌تر از کارایی هست را بیان می‌کنیم.
با توجه به اینکه در به دست آوردن جواب کاررا به ازای افزایش یک تابع هدف تابع هدف دیگری کاهش می‌یابد و این روند ممکن است بی‌کران باشد و نهایتا مارا به جواب مطلوب نرساند، جواب‌های کارا که در تعداد مراحل کراندار تعدادی از توابع هدف را افزایش و تعدادی را کاهش می‌دهند از اهمیت برخوردارند که به آنها جواب‌های کارای سره می‌گویند. جواب‌های تقریبی نقش مهمی در نظریه بهینه‌سازی و کاربردهای آن دارند، یکی از مهم‌ترین دلایل این است که جواب‌های تقریبی می‌توانند با استفاده از الگوریتم‌های تکرار شونده و روش‌های ابتکاری به دست آیند. همانطورکه در طول پایان‌نامه ملاحظه شد، ما مفاهیم مجموعه بهبودیافته و E-کارایی را برای مسایل مینیمم‌سازی در فضای برداری توپولوژیکال هاسدورف موضعا محدب حقیقی معرفی کردیم و برخی ویژگی‌های مجموعه بهبودیافته را ارایه دادیم و مفهوم E-کارایی سره بنسن را با استفاده از مجموعه بهبودیافته معرفی کردیم. همچنین مفهوم E-شبه زیر محدب بودن را برای نگاشت‌های مجموعه-مقدار ارایه کردیم و قضیه تناوب و قضایای اسکالرسازی و ضرایب لاگرانژ کارایی سره بنسن را تحت فرض E-شبه زیر محدب بودن ارایه دادیم. مطالعه در زمینه بدست آوردن جواب‌های تقریبا کارا بنا به تنوع مسائل بسیار وسیع می‌باشد. از پیشنهادات آتی برای کار در این زمینه می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

الف. به دست آوردن جواب‌های تقریبی برای مسائل چندهدفه غیرمحدب

ب. یافتن جواب‌های تقریبی برای مسائل چندهدفه خطی محدب، در فضاهای موجود با ویژگی‌های فضاهای برداری توپولوژیکال هاسدورف موضعا محدب حقیقی.

پ. یافتن روش های تقریبی دیگر برای مسائل چندهدفه محدب بدون استفاده از مجموعه‌های بهبودیافته.

مراجع

[1] Beldiman, M.; Panaitescu, E.; Dogaru, L. ”Approximate quasi efficient solutions in multiobjective optimization”. Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie Tome 99, 2008: PP 109-121.

[2] Benson H. An improved definition of proper efficiency for vector maximization with respect to cones. J. Math. Anal. Appl. 1979;71:232–241.

[3] Benson H. Existence of efficient solutions for vector maximization problems , Journal of Optimization Theory and Applications. 1978;26(4): 569-580

[4] Borwein JM. Proper efficient points for maximizations with respect to Cones. SIAM J. Control Optim. 1977;15:57–63.

[5] Bowman V. J. Jr, On the Relationship of the Tchebycheff Norm and the Efficient Frontier of Multiple Criteria Objectives , Multiple Criteria Decision Making, Edited by H. Thiriez, S. Zionts, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 130, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1976; 76-85

[6] Chankong V, Haimes Y. Multiobjective Decision Making: Theory and Methodology , Elsevier Science Publishing Co, New York, NY. 1983;

[7] Chiang Y. Characterizations for solidness of dual cones with applications, J. Global Optim. 2012; 52: 79-94.

[8] Chicco M, Mignanego F, Pusillo L, Tijs S. Vector optimization problems via improvement sets. J. Optim. Theory Appl. 2011;150:516–529.

[9] Choo E,Atkins D. Proper efficiency in nonconvex multicriteria programming , Mathematics of Operations Research,1983; 8(3): 467-470

[10] Deb, K. Multiobjective Optimization Using Evolutionary Algorithms. John Wiley and Sons, New York, 2001

[11] Deng S. On approximate solutions in convex vector optimization. SIAM J. Control Optim. 1997;35(6): 2128–2136.

[12] Dutta, J.; Vetrivel, V. On approximate minima in vector optimization". Numerical Functional Analysis and Optimization 22, 2001: PP 845-859

[13] Ehrgott M. Multicriteria Optimization. Springer, Berlin, 2005;

[14] Ehrgott M, Ryan D. Constructing robust crew schedules with bicriteria optimization, Journal of Multi-Criteria Decision Analysis. 2002;11(3):139-150

[15] Ehrgott, M.; Shao, L.; Schöbel, A. An approximation algorithm for convex multi-objective programming problems". Journal of Global Optimization 50, 2011: PP 397-416

[16] Eichfelder, G. Adaptive Scalarization Methods in Multiobjective Optimization. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2008

[17] Engau, A.; Wiecek, M.M. Cone characterizations of approximate solutions in real vector optimization". Journal of Optimization Theory and Applications 134(3), 2007: PP 499–513

[18] Engau, A.; Wiecek, M. M. Exact generation of epsilon-efficient solutions in multiple objective programming". OR Spectrum 29, 2007: PP 335-350

[19] Engau A, Wiecek M.M. Generating ε-efficient solutions in multiobjective programming. European Journal of Operation Research. 2007;177:1566–1579.

[20] Flores-Bazan F, Hernandez E. A unified vector optimization problem: complete scalarizations and applications. Optimization. 2011;60:1399–1419.

[21] Gao, Y; Yang, X; Lee, H.W.J. Optimality conditions for approximate solutions in multiobjective optimization problems". Journal of Inequalities and Applications doi: 10.1155/2010/620928.

[22] Gao Y, Yang XM. Optimality conditions for approximate solutions of vector optimization problems. J. Ind. Manag. Optim. 2011;7:483–496.

[23] Geffrion AM. Proper efficiency and the theory of vector maximization. J. Math. Anal. Appl. 1968;22:618–630.

[24] Gopfert A, Tammer C, Riahi H and Zalinescu C. Variational Methods in Partially Ordered Spaces, Springer-verlag, New York. 2003.

[25] Guddat, J.; Guerra Vasquez, F.; Tammer, K.; Wendler, K. Multiobjective and Stochastic Optimization Based on Parametric Optimization. Mathematical Research, Akademie- Verlag, Berlin, 1985

[26] Guerraggio, A.; Molho, E.; Zaffaroni, A. On the notion of proper efficiency in vector optimization". Journal of Optimization Theory and Applications 82, 1984: PP 1–21.

[27] Gutierrez C, Huerga L, Novo V. Scalarization and saddle points of approximate proper solutions in nearly subconvexlike vector optimization problems. J. Math.Anal.Appl. 2012;389: 1046–1058.

[28] Gutierrez, C.; Jimenez B.; Novo, V. A unified approach and optimality conditions for approximate solutions of vector optimization problems". SIAM Journal of Optimization 17(3), 2006: PP 688–710

[29] Gutierrez C, Jimenez B and Novo V. Improvement sets and vector optimization, Eur. J. Oper. Res. 2012; 223: 304-311.

[30] Gutierrez, C.; Jimenez B.; Novo, V. On approximate solutions in vector optimization problems via scalarization". Computational Optimization and Applications 35(3), 2006: PP 305–324

[31] Gutierrez, C.; Jimenez B.; Novo, V. Optimality conditions for metrically consistent approximate solutions in vector optimization". Journal of Optimization Theory and Applications 133(3), 2007: PP 49–64

[32] Gutierrez C; Jimenez B; Novo V. Optimality conditions via scalarization for a new "efficiency concept in vector optimization problems". European Journal of Operation Research 201, 2010: PP 11–22.

[33] Haimes, Y.Y.; Lasdon, L.S.; Wismer, D.A. On a bicriterion formulation of the problems of integrated system identification and system optimization". IEEE Trans. Syst. Man Cybern 1, 1971: PP 296-297

[34] Henig MI. Proper efficiency with respect to cones. J. Optim. Theory Appl. 1982;36:387–407.

[35] Helbig, S; Pateva, D. On several concepts for "-efficiency". OR Spectrum 16, 1994: PP 179-186

[36] Jahn J. Vector Optimization: Theory Applications and Exten- sions, Springer, Berlin, 2004

[37] Kaliszewski, I. A modified weighted Tchebycheff metric for multiple objective programming".Computers and Operations Research 14, 1987: PP 315–323

[38] Kaliszewski I. Michalowski, W. Efficient solutions and bounds on tradeoffs". Journal of Optimization Theory and Applications 94, 1997: PP 381–394

[39] Kaliszewski I. Michalowski, W. Searching for psychologically stable solutions of multiple criteria decision problems. European Journal of Operational Research 118, 1999: PP 549-562

[40] Kaliszewski, I. Using trade-off information in decision making algorithms". Computers and Operations Research 27, 2000: PP 161-182

[41] Kasimbeyli, R. A nonlinear cone separation theorem and scalarization in nonconvex vector optimization". SIAM J. OPTIM. 20 (3), 2010: PP 1591-1619

[42] Kutateladze S. Convex ε-programming. Soviet Math. Dokl. 1979;20:391–393.

[43] Laumanns M, Thiele L, Zitzler E. An adaptive scheme to generate the pareto front based on the epsilon-constraint method, In Branke J, Deb K, Miettinen K. and Steuer R. E. editors, Practical Approaches to Multi-Objective Optimization, number 04461 in Dagstuhl Seminar Proceedings. Schloss Dagstuhl, Germany. 2005;

[44] Laumanns, M.; Thiele, L.; Zitzler, E. An efficient, adaptive parameter variation scheme for metaheuristics based on the epsilon-constraint method". European J. Oper. Res. 169(3), 2006: PP 932-942

[45] Li Z. and Wang S. $\varepsilon-$ Approximate solutions in multiobjective optimization. Optimization. 1998;44: 161–174.

[46] Li ZF. Benson proper efficiency in the vector optimization of set-valued maps. J. Optim. Theory Appl. 1998;98:623–649.

[47] Li ZF, Chen GY. Lagrangian multipliers, saddle points, and duality in vector optimization of set-valued maps. J. Math. Anal. Appl. 1997;215:297–316.

[48] Liu JC. ε-Properly efficient solutions to nondifferentiable multiobjective programming problems. Appl. Math. Lett. 1999;12:109–113.

[49] Loridan, P. ε-Duality theorem of nondifferentiable nonconvex multiobjective programming". Journal of Optimization Theory and Application 74, 1992: PP 565-566

[50] Loridan P. ε-solutions in vector minimization problems. J. Optim. Theory Appl. 1984;43: 265–276.

[51] Miettinen, K. Nonlinear Multiobjective Optimization. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999

[52] Miglierina E and Molho E. Sectionwise connected sets in vector optimization, Oper. Res. Lett. 2009; 37: 295-298.

[53] Nakayama H, On the Components in Interactive Multiobjective Programming Methods Plural Rationality and Interactive Decision Processes Edited by M. Grauer M. Thompson A. P. Wierzbicki , Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 248, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1985; 234-247

[54] Ranjithan S. R, Chetan S. K, Dakshina H. K. Constraint method- based evolutionary algorithm (cmea) for multiobjective optimization, InE .Zitzleretal., editor, Evolutionary Multi-Criterion Optimization: First International Conference, EMO 2001, Zurich, Switzerland, March 200 Proceedings, volume 1993 of Lecture Notes in Computer Science, 2001; 1993: 299-313

[55] Rong WD, MaY. -Properly efficient solutions of vector optimization problems with set-valued maps. OR Trans. 2000;4:21–32.

[56] Sach P. H. Nearly subconvexlike set-valued maps and vector optimization problems, J. Optim. Theory Appl. 2003;119: 335-356.

[57] Sawaragi, Y.; Nakayama, H.; Tanino, T. Theory of Multiobjective Optimization. Academic Press, Orlando, FL, 1985

[58] Shao, L.; Ehrgott, M. Approximately solving multiobjective linear programmes in objective space and an application in radiotherapy treatment planning". Math. Meth. Oper. Res. 68, 2008: PP 257–276

[59] Shao, L.; Ehrgott, M. Approximating the nondominated set of an MOLP by approximately solving its dual problem". Math. Meth. Oper. Res. 68, 2008: PP 469-492

[60] Steuer R.E. Multiple criteria optimization: theory, computation and application. Wiley, New York. 1986;

[61] Steuer, R.E.; Choo, E.U. An interactive weighted Tchebycheff procedure for multiple objective programming". Mathematical Programming 26, 1983: PP 326-344

[62] Tanaka, T. A new approach to approximation of solutions in vector optimization problems". in: Proceedings of APORS 1994, M. Fushimi and K. Tone, eds., World Scientific Publishing, Singapore, 1995: PP 479-504

[63] Tanaka, T. Approximately efficient solutions in vector optimization". Journal of Multi- Criteria Decision Analysis 5, 1996: PP 271-278

[64] Valyi, I. Approximate solutions of vector optimization problems". in: Systems Analysis and Simulation, Sydow, A.; Thoma, M.; Vichnevetsky, eds., Akademie-Verlag, Berlin, Germany, 1985: PP 246-250.

[65] Weise, T. Global Optimization Algorithms–Theory and Application. 2006, http://www.it-weise.de/

[66] White, D.J. "Epsilon effciency". Journal of Optimization Theory and Applications 49(2), 1986: PP 319–337

[67] Wierzbicki, A.P. On the Completeness and Constructiveness of Parametric Characterizations to Vector Optimization Problems". OR Spectrum 8, 1986: PP 73-87

[68] Yokoyama K. Epsilon approximate solutions for multiobjective programming problems. J. Math. Anal. Appl. 1996; 203: 142–149.

[69] Zaffaroni A, Degrees of efficiency and degrees of minimality, SIAM J. Control Optim. 2003;42: 1071-1086.

[70] Zhao K. Q and Yang X. M. An unified stability result with perturbations in vector optimization, Optim. Lett. 2012; Doi 10.1007/s11590-012-0533-1,

[71] Zhao K. Q and Yang X. M and Peng J. W. weak E-optimal solution in vector optimization, journal of mathemathics. 2013;17:1287-1302

[72] Zhao K. Q, Yang X. M and Peng J. W. Weak E-Optimal solution in vector optimization, Taiwan. J. Math. 2013; 17: 1287–1302.

[73] Zhao K. Q and Yang X. M. calarization of the e-benson proper efciency in vector optimization problem, numerical Algebra, control and optimization. 2013;3:643-653

[74] Zhao K. Q and Yang X. M. E-Benson proper efficiency in vector optimization, Optimization, 2013; Doi:10.1080/02331934.2013.798321

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

اختیار آزاد	Free disposal
الگوریتم‌های تعاملی	Interactive algorithms
برنامه‌ریزی خطی چندهدفه	Multiobjective linear programme
بهینه پارتو	Pareto optimal
بهینه‌سازی محدب	Convex optimization
پوسته محدب	Convex hull
تابع چند ارز	Multivalued function
تابع زیر خطی	Sublinear function
ترتیب جزئی	Partial order
توپولوژی	Topology
زوج مرتب	Ordered pair
جواب بهینه	Optimal solution
جواب بهینه کامل	Complete optimal solution
جواب شدنی	Feasible solution
جواب E–کارا	E-Efficient solution
جواب کارای ضعیف	Weakly efficient solution
درون نسبی	Relative interior
دوگانی ضعیف	Weak duality
دوگانی قوی	Strong duality
زیر شبه محدب بودن	Subconvexlikeness
ضرایب لاگرانژ	Lagrange multipliers
عملگر خطی	Linear operators
غیر مغلوب	Non-dominated
فضای اقلیدسی	Euclidean space
فضای برداری توپولوژیک	Topological vector space

فضای تصمیم	Decision Space
قضیه اسکالرسازی	Scalarization theorem
قید محدودیت مقطعی تعمیم‌یافته	Generalized slater constraint qualification
E–کارای سره بنسن	E-Benson proper efficiency
کارایی سره	Proper efficiency
مجموعه بهبودیافته	Improvement set
محدب	Convex
مخروط ترتیبی	Ordering cone
مخروط تولید شده	Generated cone
مخروط نوک‌دار	Pointed cone
مسأله دوگان لاگرانژ	Lagrangian dual Problem
مطلوب	Non-inferior
E–نقطه زینی	E-saddle point
نگاشت مجموعه مقدار	Set-valued map

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Complete optimal solution	جواب بهینه کامل
Convex	محدب
Convex hull	پوسته محدب
Convex optimization	بهینه‌سازی محدب
Decision space	فضای تصمیم
E-Benson proper efficiency	E–کارای سره بنسن
E-Efficient solution	جواب E–کارا
E-saddle point	E–نقطه زینی
Euclidean space	فضای اقلیدسی
Free disposal	اختیار آزاد
Feasible solution	جواب شدنی
Generalized slater constraint qualification	قید محدودیت مقطعی تعمیم‌یافته
Generated cone	مخروط تولید شده
Improvement set	مجموعه بهبودیافته
Interactive algorithms	الگوریتم‌های تعاملی
Lagrangian dual problem	مسأله دوگان لاگرانژ
Lagrange multipliers	ضرایب لاگرانژ
Linear operators	عملگر خطی
Multivalued function	تابع چند ارز
Multiobjective linear programme	برنامه‌ریزی خطی چندهدفه
Non-dominated	غیر مغلوب
Non-inferior	مطلوب
Optimal solution	جواب بهینه
Ordered pair	زوج مرتب
Ordering cone	مخروط ترتیبی

Pareto optimal	بهینه پارتو
Partial order	ترتیب جزئی
Pointed cone	مخروط نوک‌دار
Proper efficiency	کارایی سره
Relative interior	درون نسبی
Set-valued map	نگاشت مجموعه مقدار
Sublinear function	تابع زیر خطی
Strong duality	دوگانی قوی
Subconvexlikeness	زیر شبه محدب بودن
Topological vector space	فضای برداری توپولوژیک
Topology	توپولوژی
Weak duality	دوگانی ضعیف
Weakly efficient solution	جواب کارای ضعیف

Abstract

This thesis first introduces the definitions and fundamental theorems relative to vector optimization and multiobjective optimization. Considering the importance of proper efficeint solutions, we define Geoffrion proper efficiency, Benson proper efficiency, and Henig proper efficiency and propose some methods for solving multobjective problems. Approximate solutions play an important role in vector optimization when there is no exact solution. Therefor we introuduce approximate efficiency, as named as E-efficiency is described based on upper comperhensive set. Then according to the properties of improvemet sets, we present different kinds of E-efficiency such as E-efficiency via map $\phi_{q,E}$, Benson proper E-efficiency and E-efficiency via map Δ_{-K} and study their properties. Next, by defining set-valued maps, we introduce optimization via these maps and propose concept of subconvexlikeness for set-valued maps and express some theorems under assumption of E-subconvexlikeness. Then provide Lagrangian multipliers theorems of Benson proper E-efficiency and in the same process, study weak E-optimal solutions for vector optimization and some relative theorems including scalarization theorem and Lagrange multiplier theorem. Finally, we introduce weak E-saddle points for set-valued Lagrangian maps and weak E-duality, followed by a discussion concerning the relative theorems and their properties.
Keywords: Vector optimization, Set-valued map, E-efficiency, Optimal points.

Shahrood University
Faculty Of Mathematical Sciences

Dissertation Submitted in Partial
Fulfillment of The Requirements For The
Degree of Master of Science in
Applied Mathematics

Scalarization techniques for approximate efficient solutions in vector optimization problems

Supervisors

Dr. Fathali and Dr. Ghaznavi

Advisor

Dr. Khoddami

by

Mahnaz Akbari

September 2015