



دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

پایان نامه کارشناسی ارشد

راه حلی برای مسئله‌ی جنگل برگ در سیستم‌های ۶-دوری

زیبب بهزادی

استادان راهنما

دکتر نادر جعفری راد و دکتر رامین جوادی

بهمن ۱۳۹۳

این تحقیقات ناچیز را به استاد کراتقدر

سید فضل الله درم تقدیم می‌کنم.

انشاءالله برقرار باشند و به لقاء الله برسند.

از پدر و مادر و همسرم به خصوص فرزندم متین به خاطر تحمل همه‌ی سختی‌های من سپاسگزارم. همچنین از آقای دکتر رامین جوادی برای راهنمایی‌هایشان و از دکتر نادر جعفری راد برای همراهی‌هایشان تشکر می‌کنم که هم‌فکری فعال آنها در طول پروژه به من انگیزه‌ی لازم را برای ادامه‌ی کار می‌داد.

زینب بهزادی
بهمن ۱۳۹۳

تعمدنامه

اینجانب زینب بهزادی دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی دانشکده علوم ریاضی دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان راه‌حلی برای مسئله‌ی جنگل‌برگ در سیستم‌های ۶-دوری، تحت راهنمایی دکتر نادر جعفری‌راد و دکتر رامین جوادی متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام ” دانشگاه شاهرود “ یا ” Shahrood University “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

زینب بهزادی

بهرمن ۱۳۹۳

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در این پایان نامه شرایط لازم و کافی برای وجود یک سیستم m -دوری از گراف‌های کامل چند بخشی و گراف‌های کامل K_n به ازای n فرد و گراف‌های $K_n - I$ به ازای n زوج (که I ، ۱-عامل است) بررسی می‌شود و همچنین شرایط لازم و کافی برای وجود یک سیستم m -دوری از $K_n - E(F)$ اثبات می‌شود که F هر جنگل فراگیری با درجه‌ی هر رأس فرد می‌باشد.

یک سیستم m -دوری از گراف کامل K_n به صورت زوج مرتب (V, B) می‌باشد که V مجموعه رئوس K_n و B یک مجموعه از m -دورهاست، به طوری که یال‌های K_n را افزایش می‌کند.

کلمات کلیدی: سیستم m -دوری، تجزیه‌ی دوری، جنگل برگ

فهرست مطالب

۱	پیش‌گفتار	۱
۱	سازش‌های آغازین	۱.۱
۳	تعریف مسئله	۲.۱
۵	نگاهی گذرا به فصل‌های پایان‌نامه	۳.۱
۷	تجزیه‌ی گراف‌های چند بخشی کامل به دورهای با طول ثابت	۲
۷	بررسی C_{2k} - تجزیه‌پذیری گراف‌های دو بخشی	۱.۲
۱۵	بررسی C_m - تجزیه‌پذیری گراف‌های g بخشی	۲.۲
۱۹	تجزیه‌ی گراف‌های کامل به m -دورها	۳
۱۹	نتایج مورد نیاز	۱.۳
۲۵	C_m - تجزیه‌پذیری $K_n - I$ برای m و n زوج	۲.۳
۳۶	C_m - تجزیه‌پذیری K_n برای m و n فرد	۳.۳
	C_m - تجزیه‌پذیری گراف‌های کامل برای m زوج و n فرد و برای m فرد و	۴.۳
۵۳	n زوج	
	۱.۴.۳ استفاده از یک گراف چرخشی معین برای اتصال	
۵۸	$(m' - 1)$ - مسیرهادر ایجاد یک دور جانبی	
۶۱	وجود سیستم‌های ۶-دوری از گراف‌های $K_n - E(F)$	۴
۶۱	انواع کوچک سیستم‌های ۶-دوری	۱.۴
۶۴	ساختار بعضی بلوک‌ها	۲.۴
۶۸	نتیجه‌ی نهایی	۳.۴
۷۹	مراجع	
۸۱	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی	
۸۵	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی	

فصل ۱

پیش‌گفتار

۱.۱ سازش‌های آغازین

تعریف‌ها و سازش‌های^۱ به‌کار رفته در این‌جا برگرفته از مطالب کتاب دایستل^۲ [۶] می‌باشند. برای تعریف‌هایی که ذکر نشده‌اند، خواننده‌ی گرامی به این کتاب مراجعه کنند.

اگر V مجموعه‌ای از عناصر باشد، $[V]^k$ مجموعه‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های k تایی V است. یک مجموعه با k عضو را k -مجموعه می‌نامند. یک گراف، یک جفت به‌صورت $G = (V, E)$ است که V مجموعه‌ای متناهی از رئوس و $E \subseteq [V]^2$ یعنی مجموعه‌ای از 2 -مجموعه‌ها، مجموعه‌ی یال‌ها می‌باشد. بنا به این تعریف، گراف‌های به‌کار رفته در این‌جا همگی ساده هستند، یعنی دارای طوقه و یال چندگانه و جهت‌دار نیستند (طوقه‌ی یالی از یک رأس به خودش است و G گراف جهت‌دار است هرگاه جهت هر یال از رأسی به رأس دیگر مشخص باشد). مجموعه رئوس و مجموعه یال‌های گراف G را به ترتیب با $V(G) = V_G = V$ و $E(G) = E_G = E$ نشان می‌دهند. به تعداد رئوس یک گراف، مرتبه و به تعداد یال‌های آن گراف، اندازه گفته می‌شود و به ترتیب با $|G|$ و $\|G\|$ نمادگذاری می‌شوند. برای یک گراف تهی $G = (\emptyset, \emptyset)$ به‌طور ساده \emptyset را می‌نویسیم. به یک گراف از مرتبه‌ی 0 یا 1 گراف بدیهی گفته می‌شود. به عنوان مثال گراف‌های بدیهی را می‌توان برای شروع یک استقرا استفاده کرد. گراف کامل از مرتبه‌ی n (K_n) گرافی با مجموعه یال‌های $E = [V]^2$ است و گراف دو بخشی کامل با بخش‌هایی از مرتبه‌ی m و n با $K_{m,n}$ نشان داده می‌شود و \bar{G} یا G^c معرفی‌کننده‌ی مکمل G است.

^۱ در فرهنگ لغت دهخدا واژه‌ی اصطلاح به معنای سازش است. یعنی چیزی که چند نفر بر روی مفهوم آن توافق می‌کنند. سازش + ه ← اسم مصدر از ساختن است.
بنابراین معادل فارسی اصطلاحات، سازش‌ها می‌باشد.
(با تشکر از راهنمایی استاد بزرگوار، سید فضل‌الله دژم برای معادل سازی ”اصطلاحات اولیه“)

^۲Diestel

گراف H با مجموعه رئوس V_H و مجموعه یال‌های E_H زیرگراف G است اگر $E_H \subseteq E$ و $V_H \subseteq V$ باشد، در این صورت می‌نویسیم $H \subseteq G$. H زیرگراف فراگیر G است هرگاه $E_H \subseteq E$ و $V_H = V$. H زیرگراف القایی G است اگر $H \subseteq G$ شامل همه یال‌های $xy \in E_G$ باشد به طوری که $x, y \in V_H$ ؛ و با نماد $H[G]$ معرفی می‌شود.

فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف غیر تهی باشد. دو رأس u و v در G مجاورند اگر $uv = \{u, v\}$ یک یال از G باشد و دو یال $e \neq f$ مجاورند اگر یک رأس انتهایی آنها مشترک باشد. $N_G(v) = N(v)$ مجموعه مجاورهای رأس v در G است. درجه ی رأس v تعداد یال‌های واقع بر v است و با نماد $\deg_G(v)$ یا به طور ساده‌تر با $\deg(v)$ نمایش داده می‌شود. کمترین درجه ی رئوس G را با $\delta(G)$ و بیشترین درجه را با $\Delta(G)$ نشان می‌دهند که به صورت زیر است.

$$\delta(G) = \min\{\deg(v) \mid v \in V\},$$

$$\Delta(G) = \max\{\deg(v) \mid v \in V\}$$

و اگر همه ی رئوس G ، درجه ی k داشته باشند، در این صورت G ، k -منتظم یا به طور ساده‌تر منتظم است. به زیرگرافی فراگیر از G که درجه ی هر رأس آن یک باشد، تطابق کامل یا ۱- عامل می‌گویند.

گذر، دنباله‌ای از یال‌های G است که از یک رأس شروع می‌شود، یال تکراری ندارد (رأس می‌تواند تکرار شود) و به آن رأس ابتدایی ختم نمی‌شود. یک مسیر، یک گراف غیر تهی $P = (V, E)$ است که مجموعه رئوس و یال‌های آن به ترتیب به صورت $V = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ و $E = \{v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{p-1}v_p\}$ هستند به طوری که همه ی v_i ها متمایزند. در یک مسیر $P = v_1, v_2, v_3, \dots, v_p$ ، رئوس v_2, v_4, \dots را رئوس زوج و رئوس v_1, v_3, \dots را رئوس فرد می‌گوییم. v_1 و v_p رئوس انتهایی و v_2, \dots, v_{p-1} رئوس داخلی مسیر P هستند. گراف همبند گرافی است که بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد. دو مسیر را رأس-مجزا گویند هرگاه رئوس داخلی دو مسیر متمایز باشند، و یال-مجزا گویند هرگاه هیچ یال مشترکی نداشته باشند.

یک m -دور مسیری بسته با دنباله‌ی $C_m = v_0, v_1, \dots, v_{m-1}$ می‌باشد که m رأس و m یال دارد. دور همیلتنی، یک دور فراگیر در G است. یک گراف ساده و همبند بدون دور را درخت می‌نامند. یک درخت شامل n رأس و $n-1$ یال می‌باشد. هر رأس درجه ی یک در درخت یک برگ خوانده می‌شود. جنگل اجتماعی از یک یا چند درخت رأس-مجزا است، و به تعداد درخت‌های واقع در یک جنگل، تعداد مؤلفه‌های آن می‌گویند.

یک رنگ آمیزی یالی از G تابعی به صورت $c = E(G) \rightarrow S$ است که برای هر دو یال مجاور e, f ، $c(e) \neq c(f)$ باشد. عناصر S ، رنگ‌های قابل قبول هستند. به کمترین مقدار k به طوری که یک رنگ آمیزی یالی $\{1, 2, \dots, k\} : E(G) \rightarrow$ برای G وجود داشته باشد،

عدد رنگی یالی گفته و با نماد $\chi'(G)$ نشان داده می‌شود. به‌طور مشابه عدد رنگی رأسی یک گراف، حداقل تعداد رنگی است که بتوان با آنها رئوس یک گراف را رنگ کرد به‌طوری که هیچ دو رأس مجاوری هم‌رنگ نباشند؛ این عدد با نماد $\chi(G)$ معرفی می‌شود.

اجتماع و اشتراک دو گراف G و H به‌ترتیب به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$G \cup H = (V_G \cup V_H, E_G \cup E_H),$$

$$G \cap H = (V_G \cap V_H, E_G \cap E_H).$$

اگر $G \cap H = \emptyset$ ، در این حال G و H را مجزا می‌گویند.

فرض کنید U مجموعه‌ای از رئوس باشد، $G - U$ به‌صورت $G[V_G \setminus U]$ تعریف می‌شود. به عبارت دیگر $G - U$ یک گراف به‌دست آمده از G با حذف همه‌ی رئوس $U \cap V_G$ و حذف همه‌ی یال‌های متصل به این رئوس است.

H را با G یکرخت گویند و می‌نویسند $G \simeq H$ ، هرگاه یک تابع دو سویه $\varphi: V_G \rightarrow V_H$ وجود داشته باشد به‌طوری که برای هر دو رأس $x, y \in V_G$ ، $xy \in E_G$ اگر و تنها اگر $\varphi(x)\varphi(y) \in E_H$ باشد. اگر $G = H$ ، این یکرختی را خودریختی می‌نامند.

۲.۱ تعریف مسئله

تعریف ۱.۲.۱. اگر G اجتماع یال-مجزایی از زیرگراف‌های H_1 و H_2 باشد، می‌نویسیم $G = H_1 \oplus H_2$. اگر $G = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_k$ و H_1, \dots, H_k با H یکرخت باشند، در این صورت G قابل تجزیه به زیرگراف‌های یکرخت با H است و می‌گوییم G ، H -تجزیه‌پذیر است و $\{H_1, \dots, H_k\}$ یک H -تجزیه از G می‌باشد. به‌طور خاص C_m ، G -تجزیه‌پذیر است اگر G بتواند به زیرگراف‌های یکرخت با یک m -دور تجزیه شود، در این صورت می‌نویسیم $C_m | G$.

تحقیقات بسیاری بر روی مسئله‌ی H -تجزیه از گراف G برای انواع H و G انجام شده است که معمولاً G ، گراف کامل K_n می‌باشد، اما یک نوع خاص از این مباحث، حل کردن مسئله‌ی تجزیه‌ای است که در آن $H = C_m$ است. اصطلاح طیف و رشته در کتاب برایانت^۳ [۵] به صورت زیر تعریف شده‌اند.

^۳Bryant

تعریف ۲.۲.۱. به مجموعه‌ای از مقادیر n که K_n قابل تجزیه به m -دورها باشد طیف C_m می‌گویند و با $Spec(C_m)$ نمایش داده می‌شود.

مسئله‌ی محاسبه‌ی $Spec(C_m)$ در ۴۰ سال گذشته مورد توجه زیادی بوده اما ریشه‌ی این مسئله به اواسط قرن ۱۹ برمی‌گردد، وقتی که کرکمن^۴ [۱۳] ثابت کرد K_n به دورهای ۳ تایی قابل تجزیه است اگر و تنها اگر (به پیمانه‌ی ۶) $n \equiv 1, 3$ باشد که این همان سیستم‌های سه‌تایی اشتاینری است.

توجه ۳.۲.۱. برای دور m تایی داده شده عدد مجاز n حتماً در کلاس مانده‌ها به پیمانه‌ی $2m$ قرار می‌گیرد. برای مثال اعداد مجاز برای $m = 30$ ، به پیمانه‌ی ۶۰ با مقادیر ۴۵، ۲۵، ۲۱، ۱، همنهشت هستند. به این کلاس مانده‌های مجاز رشته می‌گویند. برای هر $m \geq 3$ ، (به پیمانه‌ی $2m$) $n \equiv 1$ یک رشته است.

مسئله‌ی محاسبه‌ی $Spec(C_m)$ به دو بخش تقسیم می‌شود؛ n های زوج و n های فرد. وقتی n زوج است چون رتوس K_n از درجه‌ی فرد هستند، K_n قابل تجزیه به دورها نیست. به این دلیل ریاضی‌دانان تجزیه‌ی $K_n - I$ به دورها را در نظر گرفتند که I یک ۱-عامل است و $K_n - I$ به معنی حذف یال‌های ۱-عامل از K_n می‌باشد.

نتیجه تلاش‌های طولانی ۱۵۰ ساله‌ی ریاضی‌دانان متعدد برای این نوع تجزیه، در سال ۲۰۰۱ در مقاله‌ای توسط آل‌سپچ^۵ و گاولاس^۶ [۱] و در سال ۲۰۰۲ توسط ساجنا^۷ [۱۹] به اوج خود رسید و مسئله C_m -تجزیه‌پذیری $K_n - I$ و $K_n - I$ به‌طور کامل حل شد. اما در حالت کلی که طول دورها مشخص هستند و لزوماً یکسان نیستند، مسأله حل نشده باقی مانده است.

در تجزیه K_n به m -دورها برای n های زوج، این‌که یال‌هایی که در هیچ دوری نمی‌آیند چه خواصی دارند راه را برای ادامه تحقیق باز گذاشته است. یک تعمیم انجام شده این است که برای n های زوج، یال‌های حذف شده را به جای ۱-عامل، هر جنگل فراگیری مانند F با درجه هر رأس فرد در نظر بگیرند. در این صورت نماد $K_n - E(F)$ استفاده می‌شود.

در تعمیم مورد نظر، فاو^۸ و رادجر^۹ [۸] در سال ۲۰۰۰ شرایط لازم و کافی را برای وجود C_m -تجزیه‌پذیری $K_n - E(F)$ برای $m = 4$ ثابت کردند. همچنین آش^{۱۰} و رادجر و فاو [۲] در ۲۰۰۴ آن را برای $m = 6$ ثابت کردند؛ در این پایان نامه تحقیقات آن‌ها بررسی می‌شود.

^۴Kirkman

^۵Alspach

^۶Gavlas

^۷Sajna

^۸Fu

^۹Rodger

^{۱۰}Ash

۳.۱ نگاهی گذرا به فصل‌های پایان نامه

در فصل ۲، شرایط لازم و کافی برای C_m -تجزیه‌پذیری گراف‌های دوبخشی کامل $K_{m,n}$ با بخش‌هایی از اندازه‌ی متفاوت و همچنین C_m -تجزیه‌پذیری گراف‌های g بخشی کامل $K_{2m, 2m, \dots, 2m}$ با بخش‌هایی از اندازه‌ی یکسان، به کمک شبه گروه‌ها بررسی می‌شود. بهتر است اشاره کنیم که قضایای این فصل در فصل‌های ۳ و ۴ کاربرد دارند.

در فصل ۳ که از نظر حجم مطالب طولانی‌ترین فصل پایان‌نامه می‌باشد، C_m -تجزیه‌پذیری گراف‌های کامل با همه‌ی جزئیات برای m و n فرد و برای m و n زوج که توسط آل‌سیچ و گاولاس تحقیق شده است و به‌طور مختصر برای m فرد و n زوج و همچنین برای m زوج و n فرد که توسط ساجنا تحقیق شده است بررسی می‌شود. در همه‌ی انواع m و n ، اثبات وجود C_m -تجزیه از گراف کامل، در دو مرحله انجام می‌شود. مرحله‌ی اول، استقرایی است یعنی نشان داده می‌شود که اگر گراف کامل K_n به ازای هر n قابل قبول در بازه‌ای مشخص، C_m -تجزیه‌پذیر باشد، به ازای همه‌ی n ‌های قابل قبول خارج از بازه‌ی مورد نظر نیز C_m -تجزیه‌پذیر است. در مرحله‌ی بعد K_n در آن محدوده‌ی خاص به m -دورها تجزیه می‌شود.

در فصل ۴ که هدف نهایی این پایان‌نامه است، تحقیقات آس و فاو و رادجر در مورد اثبات وجود C_m -تجزیه از گراف‌های کامل با حذف جنگل فراگیر، برای n ‌های زوج و $m = 6$ بررسی می‌شود. روند کار این گونه است که به پیمان‌های ۶، n ‌ها را دسته بندی و در هر دسته تعداد مؤلفه‌های F در $K_n - E(F)$ را مشخص می‌کنند. سپس با کمک همین مؤلفه‌ها و استقرا $K_n - E(F)$ را برای n ‌های متفاوت به چند بخش افراز کرده و بعد هر بخش را به m -دورها تجزیه می‌کنند.

لازم به ذکر است در فصل ۴ از اصطلاح سیستم m -دوری به جای تجزیه به m -دورها استفاده شده است که در ابتدای فصل تعریف می‌شود.

فصل ۲

تجزیه‌ی گراف‌های چند بخشی کامل به دورهای با طول ثابت

۱.۲ بررسی C_{2k} - تجزیه‌پذیری گراف‌های دو بخشی

در ابتدای این بخش شرایط لازم و کافی برای تجزیه‌ی گراف دو بخشی $K_{m,n}$ به $2k$ -دورها بررسی می‌شود که نتایج تحقیقات سوتیو^۱ در [۲۰] است و در بخش بعد C_m -تجزیه‌پذیری گراف‌های g بخشی با بخش‌های $2m$ رأسی بحث می‌شود که نتیجه‌ی تلاش‌های هافمن^۲ و لیندنر^۳ و رادجر در [۱۱] می‌باشد.

لم ۱.۱.۲. فرض کنید m و n و k اعداد صحیح مثبت باشند. شرایط لازم برای این‌که گراف دو بخشی $K_{m,n}$ ، C_{2k} -تجزیه‌پذیر باشد عبارت است از:

$$(۱) \quad m \geq k \text{ و } n \geq k$$

$$(۲) \quad m \text{ و } n \text{ زوج باشند و}$$

$$(۳) \quad \text{تعداد یال‌های } K_{m,n} \text{ (که } mn \text{ تا است) مضربی از تعداد یال‌های دور } (2k) \text{ باشد.}$$

برهان. اگر $m < k$ و $n < k$ باشد، آنگاه $\frac{|C_{2k}|}{2} < m, n$ می‌باشد و این تناقض است، زیرا تعداد رئوس یک دور زوج است و دقیقاً نصف آن رئوس در یک بخش از $K_{m,n}$ قرار دارند، پس $m, n \geq \frac{|C_{2k}|}{2}$. چون باید تمامی یال‌های $K_{m,n}$ به $2k$ -دورها تجزیه شود، بنابراین درجه‌ی هر رأس باید زوج باشد. پس m و n زوج هستند و شرط (۳) نیز بدیهی است. \square

^۱Sotteau

^۲Hofman

^۳Lindner

قضیه ۲.۱.۲. گراف دو بخشی $K_{m,n}$ می‌تواند به $2k$ - دوره‌ها تجزیه شود اگر و تنها اگر m و n زوج باشند و $m \geq k$ و $n \geq k$ و mn بر $2k$ بخش پذیر باشد.

برهان. شرایط لازم در لم ۱.۱.۲ اثبات شد و برای اثبات کفایت، قضیه را به چند بخش تقسیم کرده و در هر بخش برای افزایش یال‌های $K_{m,n}$ ، دوره‌هایی به‌طور منظم ارائه می‌شود. فرض کنید $k = pq$ و $m = rp$ و $n = sq$ باشد در این صورت چون $2k \mid mn = rpsq$ ، پس $rs \mid 2$ و چون m و n زوجند، این شرایط نتیجه می‌دهد که rs و rp و sq زوج هستند و چون $m \geq k$ و $n \geq k$ ، داریم $rp \geq pq$ و $sq \geq pq$. پس $r \geq q$ و $s \geq p$. بنابراین دو حالت زیر را داریم:

حالت ۱. حداقل یکی از دو عدد p یا q زوج هستند. در این صورت دو زیرحالت زیر رخ می‌دهد:

زیرحالت ۱.۱. q و r زوج باشند.

زیرحالت ۲.۱. p و s زوج باشند.

در زیر حالت ۱.۱، B یک افزایش از مجموعه یال‌های $K_{m,n} = K_{rp,sq}$ به $2k$ - دوره‌هاست به‌طوری که:

$$B = \{C_{\lambda\mu} : 0 \leq \lambda \leq s-1, 0 \leq \mu \leq \frac{r}{p}-1\},$$

$$C_{\lambda\mu} = (\dots(\dots x_{(2\mu+i)p+j} y_{(\lambda+j)q+i} \dots)_{0 \leq i \leq q-1})_{0 \leq j \leq p-1}$$

که اندیس‌های x و y به ترتیب از بخش m رأسی و n رأسی $K_{m,n}$ هستند، پس به ترتیب به پیمانه‌ی m و n می‌باشند. برای این‌که نشان دهیم $\frac{rs}{p}$ دور حاصل یال‌های $K_{m,n}$ را افزایش می‌کند، به عنوان نمونه $K_{6,6}$ را به 12 - دوره‌ها تجزیه می‌کنیم:

$$p = 3, \quad q = 2, \quad r = 2, \quad s = 3, \quad k = 6$$

$$0 \leq i \leq 1, \quad 0 \leq j \leq 2, \quad B = \{C_{\lambda\mu} : 0 \leq \lambda \leq 2, \mu = 0\}$$

$$C_{00} = x_0 y_0 x_3 y_1 x_1 y_2 x_4 y_3 x_2 y_4 x_5 y_5,$$

$$C_{10} = x_0 y_2 x_3 y_3 x_1 y_4 x_4 y_5 x_2 y_0 x_5 y_1,$$

$$C_{20} = x_0 y_4 x_3 y_5 x_1 y_0 x_4 y_1 x_2 y_2 x_5 y_3.$$

در زیرحالت ۲.۱ با جابه‌جایی m و n در نوع ۱.۱ می‌توان $K_{m,n}$ را به $2k$ - دوره‌ها تجزیه کرد.

حالت ۲. p و q فرد هستند. در این صورت باید r و s زوج باشند. باز هم دو نوع زیر را داریم:

زیرحالت ۱.۲. $1 < p$ و $1 < q$.

در این حال B یک افزایش از مجموعه یال‌های $K_{m,n}$ به $\frac{rs}{p}$ تا m - دور است به‌طوری که:

$$B = \{C_{\lambda\mu} : \circ \leq \lambda \leq \frac{s}{\mu} - 1, \circ \leq \mu \leq \frac{r}{\mu} - 1\} \cup \{C'_{\lambda\mu} : \frac{s}{\mu} \leq \lambda \leq s - 1, \circ \leq \mu \leq \frac{r}{\mu} - 1\},$$

$$C_{\lambda\mu} = (\dots (\dots x_{(\mu+j)p+i} y_{(\lambda+i)q+j} \dots)_{\circ \leq j \leq q-2} x_{(\mu+q-1)p+i} y_{c_{i\lambda}})_{\circ \leq i \leq p-2} \\ (\dots x_{(\mu+j)p+p-1} y_{(\lambda+p-1)q+j} \dots)_{\circ \leq j \leq q-3} x_{(q-2+\mu)p+p-1} y_{b_\lambda} x_{(q+\mu)p+p-1} y_{d_\lambda},$$

$$C'_{\lambda\mu} = (\dots x_{(\mu+j+1)p} y_{\lambda q+j} \dots)_{\circ \leq j \leq q-3} x_{(q-1+\mu)p} y_{a_\lambda} x_{(q+\mu)p} y_{c_{\circ\lambda}} \\ (\dots (\dots x_{(j+1+\mu)p+i} y_{(\lambda+i)q+j} \dots)_{\circ \leq j \leq q-2} x_{(q+\mu)p+i} y_{c_{i\lambda}})_{1 \leq i \leq p-2} \\ (\dots x_{(j+1+\mu)p+p-1} y_{(p-1+\lambda)q+j} \dots)_{\circ \leq j \leq q-3} x_{(q-1+\mu)p+p-1} y_{b_\lambda} x_{(q+\mu)p+p-1} y_{d_\lambda}$$

که اندیس های x و y به ترتیب به پیمانه های m و n هستند. فرض کنید باقیمانده های هر عدد صحیح L به پیمانه های $\frac{sq}{\mu}$ را با نماد $[L]$ نشان دهیم، اندیس های a_λ و b_λ و $\{c_{i\lambda} : \circ \leq i \leq p-2\}$ و d_λ برای $\circ \leq \lambda \leq s-1$ مقادیر زیر را دارند:

$$a_{\frac{s}{\mu}} = (s-1)q + q - 1 \quad (1)$$

و برای $\frac{s}{\mu} + 1 \leq \lambda \leq s-1$ ، داریم:

$$a_\lambda = (\lambda - 1)q + q - 1.$$

(۲) برای $\circ \leq \lambda \leq s-1$ و $\circ \leq i \leq p-2$ ، اگر i زوج باشد داریم:

$$C_{i\lambda} = [(\lambda + \frac{i}{\mu})q + q - 1]$$

و اگر i فرد باشد داریم:

$$C_{i\lambda} = [(\lambda + \frac{(i-1)}{\mu})q + q - 1] + \frac{sq}{\mu}.$$

(۳) در نوعی که $p < \frac{s}{\mu} + 1$ ، برای $\circ \leq \lambda \leq s-1$ ، داریم:

$$d_\lambda = [\lambda q + q - 2] + \frac{sq}{\mu}$$

و برای $\circ \leq \lambda \leq \frac{s}{\mu} - 1$ ، داریم:

$$b_\lambda = [(\lambda + \frac{(p-1)}{\mu})q + q - 1]$$

و همچنین برای $\frac{s}{\mu} \leq \lambda \leq s-1$ ، $b_\lambda = [\lambda + q - 2]$.

(۴) در نوعی که $p \geq \frac{s}{\mu} + 1$ ، برای $\circ \leq \lambda \leq \frac{s}{\mu} - 1$ ، و $\frac{s}{\mu} \leq \lambda \leq s-1$ ، به ترتیب از

راست داریم:

$$d_\lambda = \lambda q + q - 2 \text{ و } d_\lambda = [(\lambda + p - 1)q + q - 2] + \frac{sq}{\mu}$$

همچنین برای $\circ \leq \lambda \leq s-p$ و $\frac{s}{\mu} - p + 1 \leq \lambda \leq s-1$ ، داریم:

$$b_\lambda = \left[\left(\lambda + \frac{p-1}{2} \right) q + q - 1 \right]$$

و برای $\frac{3s}{4} - p \leq \lambda \leq s - p + 1$ ، داریم: $b_\lambda = [(\lambda + (p-1))q + q - 2]$
 علاوه بر این در نوعی که $p > \frac{s}{4} + 1$ باشد برای $i = p - \frac{s}{4} - 1$ و $j = q - 2$ ، $y_{(\lambda+i)q+j}$
 با y_{e_λ} جابه‌جا می‌شود که برای $0 \leq \lambda \leq s - 1$ ، داریم: $e_\lambda = (\lambda - 1)q + q - 2$. زیرا در این
 حالت d_λ با $y_{(\lambda+i)q+j}$ که آخرین اندیس y در یک دور است به پیمانه‌ی n برابر می‌شود.

برای این‌که نشان دهیم دوره‌های $C_{\lambda\mu}$ که $0 \leq \lambda \leq \frac{s}{4} - 1$ و دوره‌های $C'_{\lambda\mu}$ که $\frac{s}{4} \leq \lambda \leq s - 1$ ،
 یال‌های $K_{m,n}$ را افزاز می‌کنند بررسی می‌کنیم که در هر دور، رأس تکراری وجود ندارد و هر یال
 از $K_{m,n}$ ، فقط در یک دور ظاهر می‌شود.
 اندیس‌های x ظاهر شده در یک دور $C_{\lambda\mu}$ معادل با $(2\mu + j)p + i$ هستند ($0 \leq i \leq p - 1$)
 و ($0 \leq j \leq q - 1$). بنابراین همه‌ی اندیس‌ها متفاوت می‌باشند.

فرض کنید Y مجموعه‌ی اندیس‌های y است که در یک دور $C_{\lambda\mu}$ ظاهر می‌شوند. در این صورت
 داریم:

$$Y = \{(\lambda + i)q + j : 0 \leq j \leq q - 3, 0 \leq i \leq p - 1\} \cup \{c_{i\lambda} : 0 \leq i \leq p - 2\} \\ \cup \{(\lambda + i)q + q - 2 : 0 \leq i \leq p - 2\} \cup \{b_\lambda, d_\lambda\}$$

که

$$\{c_{i\lambda} : 0 \leq i \leq p - 2\} = \{[(\lambda + i)q + q - 1], [(\lambda + i)q + q - 1] + \frac{sq}{4} : 0 \leq i \leq \frac{p-3}{4}\}.$$

اگر $p < \frac{s}{4} + 1$ باشد $b_\lambda = [(\lambda + \frac{p-1}{4})q + q - 1]$ و $d_\lambda = [\lambda q + q - 2] + \frac{sq}{4}$ می‌باشد
 به‌طوری که برای هر λ که $0 \leq \lambda \leq \frac{s}{4} - 1$ باشد، همه‌ی اعضای Y متفاوت هستند.

اگر $p \geq \frac{s}{4} - 1$ باشد، $d_\lambda = [(\lambda + p - 1)q + q - 2]$ و برای $0 \leq \lambda \leq s - p$ ، داریم:
 $b_\lambda = [(\lambda + p - 1)q + q - 2]$ ، $s - p + 1 \leq \lambda \leq \frac{s}{4} - 1$ و برای $b_\lambda = [(\lambda + \frac{p-1}{4})q + q - 2]$

علاوه بر این اگر $p > \frac{s}{4} + 1$ ، آن‌گاه در مجموعه‌ی $\{(\lambda + i)q + q - 2 : 0 \leq i \leq p - 2\}$ ،
 عضو $(\lambda + (p - \frac{s}{4} - 1))$ (که معادل با d_λ می‌شود) با $e_\lambda = (\lambda - 1)q + q - 2$ جابه‌جا شده است
 که دوباره بررسی کردن نابرابری اندیس‌های y در یک دور مشکل نیست. مشابه این بررسی‌ها
 را می‌توان برای هر دور $C'_{\lambda\mu}$ نیز انجام داد.

حال نشان می‌دهیم که هر یال $K_{m,n}$ فقط در یک دور ظاهر می‌شود. برای این کار کافی است
 به ازای هر رأس x_i همه‌ی مجاورهای آن در همه‌ی دورها یعنی y_j ها را که
 $0 \leq j \leq sq - 1$ می‌باشد، بررسی کنیم اما چون دورها به شکل منظم ارائه شده‌اند، طبق الگوی

داده شده کافی است مجاورهای x_i در همه ی دورها برای $i = 0, 1, p-1, 0, p+1, 2p+1$ بررسی شوند.

بنابراین اگر در دورهای $C_{\lambda\mu}$ و $C'_{\lambda\mu}$ مجموعه اندیس های j که x_i مجاور y_j است را با X_i معرفی کنیم، می خواهیم نشان دهیم که برای $i = 0, 1, p-1, p, p+1, 2p-1$ $X_i = \{j : 0 \leq j \leq qs-1\}$ اگر یک اندیس j' در مجموعه ی X_i نیامده باشد یعنی یال $x_i y_{j'}$ در هیچ دوری رخ نداده است و این یعنی mn یال موجود نمی تواند به $2k-2$ دورها تجزیه شود و اگر یک اندیس j' حداقل دو بار در مجموعه ی X_i واقع شود به این منظور است که یک یال حداقل در دو دور آمده است. ما داریم:

$$X_0 = \{\{\lambda q + j : 0 \leq j \leq q-2\}, c_{0\lambda}, d_\lambda : 0 \leq \lambda \leq \frac{s}{p} - 1\} \\ \cup \{\{\lambda q + j : 0 \leq j \leq q-3\}, a_\lambda : \frac{s}{p} \leq \lambda \leq s-1\}.$$

$$X_1 = \{c_{0\lambda}, c_{1\lambda}, \{(\lambda+1)q + j : 0 \leq j \leq q-2\} : 0 \leq \lambda \leq \frac{s}{p} - 1\} \\ \cup \{(\lambda+1)q + j : 0 \leq j \leq q-2, \frac{s}{p} \leq \lambda \leq s-1\}.$$

$$X_{p-1} = \{c_{p-2,\lambda}, \{(\lambda+p-1)q + j : 0 \leq j \leq q-3\}, b_\lambda, d_\lambda : 0 \leq \lambda \leq \frac{s}{p} - 1\} \\ \cup \{(\lambda+p+1)q + j : 0 \leq j \leq q-3, b_\lambda : \frac{s}{p} \leq \lambda \leq s-1\}.$$

$$X_p = \{\lambda q + j : 0 \leq j \leq q-2, 0 \leq \lambda \leq \frac{s}{p} + 1\} \\ \cup \{\{\lambda q + j : 0 \leq j \leq q-3\}, a_\lambda, c_{0\lambda}, d_\lambda : \frac{s}{p} \leq \lambda \leq s-1\}.$$

$$X_{p+1} = \{(\lambda+1)q + j : 0 \leq j \leq q-2, 0 \leq \lambda \leq \frac{s}{p} - 1\} \\ \cup \{c_{0\lambda}, \{(\lambda+1)q + j : 0 \leq j \leq q-2\}, c_{1\lambda} : \frac{s}{p} \leq \lambda \leq s-1\}.$$

$$X_{2p-1} = \{c_{p-2,\lambda}, \{(\lambda+p-1)q + j : 0 \leq j \leq q-3\}, b_\lambda, d_\lambda : \frac{s}{p} \leq \lambda \leq s-1\} \\ \cup \{\{\lambda + (p-1)q + j : 0 \leq j \leq q-3\}, b_\lambda : 0 \leq \lambda \leq \frac{s}{p} - 1\}.$$

حال با جایگزین کردن اندیس های d_λ و $c_{i\lambda}$ و b_λ و a_λ با مقادیرشان به ترتیب در انواع $p < \frac{s}{p} + 1$ و $p \geq \frac{s}{p} + 1$ می توان بررسی کرد که همه ی مجموعه های بالا در رابطه ی خواسته شده صدق می کنند.

برای مثال به تجزیه‌ی $K_{12,18}$ به ۱۸-دورها توجه کنید.

$$(p = 3, \quad q = 3, \quad r = 4, \quad s = 6)$$

$$\mu = 0$$

$$\begin{aligned} C_{\cdot} &= (x_{\cdot} \ y_{\cdot} \ x_{\cdot} \ y_{\cdot} \ x_{\cdot} \ y_{\cdot} \ y_2 \ x_1 \ y_3 \ x_4 \ y_5 \ x_6 \ y_{11} \ x_7 \ y_8 \ x_9 \ y_{10} \ x_{11} \ y_5 \ x_{12} \ y_1) \\ C_{1_0} &= (x_{\cdot} \ y_3 \ x_{\cdot} \ y_4 \ x_{\cdot} \ y_5 \ y_2 \ x_1 \ y_6 \ x_4 \ y_7 \ x_6 \ y_{14} \ x_7 \ y_9 \ x_9 \ y_8 \ x_{12} \ y_{13}) \\ C_{2_0} &= (x_{\cdot} \ y_6 \ x_{\cdot} \ y_7 \ x_{\cdot} \ y_8 \ y_2 \ x_1 \ y_9 \ x_4 \ y_{10} \ x_6 \ y_{17} \ x_7 \ y_{12} \ x_9 \ y_7 \ x_{12} \ y_{16}) \\ C'_{3_0} &= (x_{\cdot} \ y_9 \ x_{\cdot} \ y_{10} \ x_{\cdot} \ y_{11} \ y_2 \ x_4 \ y_{12} \ x_6 \ y_{13} \ x_{11} \ y_{11} \ x_{11} \ y_{15} \ x_{12} \ y_1 \ x_{11} \ y_{10}) \\ C'_{4_0} &= (x_{\cdot} \ y_{12} \ x_{\cdot} \ y_{13} \ x_{\cdot} \ y_{14} \ y_2 \ x_4 \ y_{15} \ x_6 \ y_{16} \ x_{11} \ y_{14} \ x_{11} \ y_1 \ x_{12} \ y_4 \ x_{11} \ y_{13}) \\ C'_{5_0} &= (x_{\cdot} \ y_{15} \ x_{\cdot} \ y_{16} \ x_{\cdot} \ y_{17} \ y_2 \ x_4 \ y_1 \ x_6 \ y_1 \ x_{11} \ y_{17} \ x_{11} \ y_4 \ x_{12} \ y_7 \ x_{11} \ y_{16}) \end{aligned}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{a_{i=0}} \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{c_{0,i=1}} \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{c_{i=2}} \qquad\qquad\qquad b_{i=3} \qquad\qquad\qquad d_{i=4}$$

$$\mu = 1$$

$$\begin{aligned} C_{1_1} &= (x_6 \ y_{\cdot} \ x_9 \ y_1 \ x_{\cdot} \ y_2 \ x_{11} \ y_3 \ x_{11} \ y_4 \ x_1 \ y_{11} \ x_{12} \ y_6 \ x_{11} \ y_5 \ x_{12} \ y_1) \\ C_{11_1} &= (x_{\cdot} \ y_3 \ x_9 \ y_4 \ x_{\cdot} \ y_5 \ x_{11} \ y_6 \ x_{11} \ y_7 \ x_1 \ y_{14} \ x_{12} \ y_9 \ x_{11} \ y_8 \ x_{12} \ y_{13}) \\ C_{21_1} &= (x_6 \ y_6 \ x_9 \ y_7 \ x_{\cdot} \ y_8 \ x_{11} \ y_9 \ x_{11} \ y_{10} \ x_1 \ y_{17} \ x_{12} \ y_{12} \ x_{11} \ y_7 \ x_{12} \ y_{16}) \\ C'_{31_1} &= (x_9 \ y_9 \ x_{\cdot} \ y_{10} \ x_{\cdot} \ y_{11} \ y_2 \ x_{11} \ y_{12} \ x_1 \ y_{13} \ x_6 \ y_{11} \ x_{11} \ y_{15} \ x_{12} \ y_1 \ x_{11} \ y_{10}) \\ C'_{41_1} &= (x_9 \ y_{12} \ x_{\cdot} \ y_{13} \ x_{\cdot} \ y_{14} \ y_2 \ x_{11} \ y_{15} \ x_1 \ y_{16} \ x_6 \ y_{14} \ x_{11} \ y_1 \ x_{12} \ y_4 \ x_{11} \ y_{13}) \\ C'_{51_1} &= (x_9 \ y_{15} \ x_{\cdot} \ y_{16} \ x_{\cdot} \ y_{17} \ y_2 \ x_{11} \ y_1 \ x_1 \ y_1 \ x_6 \ y_{17} \ x_{11} \ y_4 \ x_{12} \ y_7 \ x_{11} \ y_{16}) \end{aligned}$$

اکنون در مثال فوق برای $i = 0, 1, p-1, p, p+1, 2p-1$ را می‌یابیم.

$$\begin{aligned} X_0 &= \{0, 10, 3, 13, 6, 16, 1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 17, 12, 11, 15, 14\}, \\ X_1 &= \{2, 3, 5, 6, 8, 9, 4, 11, 7, 14, 10, 17, 12, 13, 15, 16, 0, 1\}, \\ X_{p-1} = X_2 &= \{11, 6, 14, 9, 17, 12, 5, 10, 8, 13, 2, 16, 15, 1, 0, 4, 3, 7\}, \\ X_p = X_3 &= \{0, 1, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 12, 13, 15, 16, 17, 2, 11, 5, 14, 8\}, \\ X_{p+1} = X_4 &= \{3, 4, 6, 7, 9, 10, 2, 12, 5, 15, 8, 0, 13, 11, 16, 14, 1, 17\}, \\ X_{2p+1} = X_7 &= \{4, 11, 7, 14, 10, 17, 12, 13, 15, 16, 0, 1, 2, 3, 5, 6, 8, 9\}. \end{aligned}$$

مشاهده می‌کنید که هر x_i با همه‌ی y_j ها، $0 \leq j \leq 17$ ، مجاور است و هیچ اندیس j دوبار در X_i ظاهر نشده است. پس هر یال $K_{12,18}$ فقط در یک دور واقع شده است.

زیر حالت ۲.۲.۲. $p = 1$ (یا $q = 1$).

فرض کنید $p = 1$ است (اگر $q = 1$ باشد p و q را جابه جا کنید). ما می خواهیم نشان دهیم که با r و s زوج و $r \geq q$ و q فرد، $K_{r,s,q}$ قابل تجزیه به $2q$ - دورهاست. فرض کنید $r = 2t$ و $s = 2u$. چون اجتماع یال مجزایی از u گراف یکرخت با $K_{2t,2q}$ است، کافی است ثابت کنیم $K_{2t,2q}$ برای q فرد و $2t \geq q$ به $2q$ - دورها تجزیه می شود که خود به دو بخش زیر تقسیم می گردد:

نوع ۱.۲.۲.۲. وقتی t زوج است، $t = 2a$ را در نظر بگیرید. بر موند^۴ در [۳] ثابت کرد که $K_{4a,2q}$ قابل تجزیه به $2q$ - دورهاست که می دانیم q فرد است و $r = 4a \geq q$.

نوع ۲.۲.۲.۲. وقتی t فرد است، فرض کنید $t = 2a + 1$ و $q = 2b + 1$. نشان می دهیم گراف دوبخشی $K_{4a+2,4b+2}$ برای هر عدد صحیح a و b در محدوده $2b + 1 \leq 4a + 2$ ، به $(2b + 1) - 2$ دورها تجزیه می شود. برای انجام این کار کافی است در حالتی که برای a و b ، $2b + 1 \leq 4a + 2 < 4b + 4$ برقرار است، وجود تجزیه به دورها ثابت شود. پس در واقع اگر $4b + 4 \leq 4a_0 + 2$ باشد با توجه به استقرا برای هر $a < a_0$ که $2b + 1 \leq 4a + 2$ صدق کند، $K_{4a+2,4b+2}$ به $(2b + 1) - 2$ دورها تجزیه می شود. ملاحظه می کنید که $K_{4a_0+2,4b+2}$ به عنوان اجتماع یال مجزای $G_1 = K_{2b+2,4b+2}$ و $G_2 = K_{4a_0-2b,4b+2}$ می باشد.

اعداد $2b + 2$ و $4a_0 - 2b$ بزرگتر از $2b + 1$ هستند؛ یکی از آنها به پیمانهای ۴ با صفر هم نهشت است و با توجه به اثبات بر موند برای نوع t زوج می توان نشان داد گراف مربوط G_i ، $i = 1$ یا 2 قابل تجزیه به $(2b + 1) - 2$ دورهاست. دیگری اگر به شکل $a' < a_0$ باشد در این صورت بنا به فرض استقرا، گراف مربوط G_i ، $i = 1$ یا 2 ، به $(2b + 1) - 2$ دورها تجزیه می شود. بنابراین ما فقط باید نشان دهیم $K_{4a+2,4b+2}$ قابل تجزیه به $(2b + 1) - 2$ دورهاست. برای $2b + 1 \leq 4a + 2 < 4b + 4$ که $2b + 1 \leq 2a \leq 2b$ ، چنین تجزیه ای به صورت $C_{\lambda,\mu}$ برای $\lambda = 0$ ، $1 \leq \mu \leq 2a$ در زیر داده شده است.

$$C_{0,\mu} = (\dots x_{i+2\mu} y_i \dots)_{0 \leq i \leq 2b-1} x_{2b+2\mu} y_{c_\mu},$$

$$C_{1,\mu} = (\dots x_{i+2\mu+1} y_{i+2b+1} \dots)_{0 \leq i \leq 2b-2} x_{2b+2\mu} y_{d_\mu} x_{2b+2\mu+1} y_{c_\mu}$$

که در دورهای ارائه شده $\{c_\mu, d_\mu, c_{\mu+b}\} = \{2b, 4b, 4b + 1\}$ می باشد و در این جا $\mu + b$ به پیمانهای $2a + 1$ حساب می شود. کافی است که ابتدا C_μ بر حسب b و سپس $C_{\mu+b}$ به دست آید و در نهایت d_μ به عنوان سومین عضو مجموعه یافت شود.

^۴Bermond

یک روش عبارت از این است که برای $a = b$ قرار دهیم:

$$\begin{aligned} C_\mu &= 2b & 0 \leq \mu \leq b-1 \\ C_\mu &= 4b+1 & \mu = b \\ C_\mu &= 4b & b+1 \leq \mu \leq 2a \end{aligned}$$

و برای $a \neq b$ ، اگر $0 \leq \mu \leq b-1$ و h بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی با $\frac{\mu}{2a-b+1}$ باشد، قرار دهیم:

$$\begin{aligned} C_\mu &= 2b & \text{برای } h \text{ زوج} \\ C_\mu &= 4b+1 & \text{برای } h \text{ فرد} \\ C_\mu &= 4b & \text{برای } b \leq \mu \leq 4b \end{aligned}$$

□

مثال ۳.۱.۲. تجزیه‌ی گراف $K_{6,12}$ به ۶-دورها.

$$\begin{aligned} m = rp = 2t = 6 &\rightarrow t = 3 \\ n = sq = 2uq = 12 &\rightarrow u = 2, q = 3 \end{aligned}$$

$K_{6,12}$ اجتماع یال-مجزایی از $u = 2$ گراف یکرخت با $K_{6,6}$ است. بنابراین نشان می‌دهیم $K_{6,6}$ به ۶-دورها تجزیه می‌شود.

$$\begin{aligned} a = 1, \quad b = 1, \quad \lambda = 0, 1, \quad 0 \leq \mu \leq 2 \\ C_{0,0} &= (x_0 \ y_0 \ x_1 \ y_1 \ x_2 \ y_2), \\ C_{0,1} &= (x_2 \ y_0 \ x_3 \ y_1 \ x_4 \ y_5), \\ C_{0,2} &= (x_4 \ y_0 \ x_5 \ y_1 \ x_0 \ y_4), \\ C_{1,0} &= (x_1 \ y_3 \ x_2 \ y_4 \ x_3 \ y_2), \\ C_{1,1} &= (x_3 \ y_3 \ x_4 \ y_2 \ x_5 \ y_5), \\ C_{1,2} &= (x_5 \ y_3 \ x_0 \ y_5 \ x_1 \ y_4). \end{aligned}$$

همان‌طور که می‌بینید در دورها یال تکراری وجود ندارد و همه‌ی یال‌های $K_{6,6}$ نیز افزاز شده‌اند.

۲۰۲. بررسی C_m - تجزیه پذیری گرافهای g بخشی

برای بیان قضیه‌ی بعد به تعریف مربع لاتین و شبه گروه‌ها نیاز داریم که اکنون آنها را بر اساس کتاب‌های لیندنر و رادجر [۱۵] و ون‌لینت^۵ و ویلسون^۶ [۲۲] شرح می‌دهیم. همچنین تعاریف عمل دوتایی و گروه از [۷] گرفته شده‌اند.

تعریف ۱.۲.۲. یک جدول $n \times n$ پر شده با n عنصر متمایز را مربع لاتین می‌گویند هرگاه هر عنصر دقیقاً یک بار در هر سطر و در هر ستون ظاهر شود.

تعریف ۲.۲.۲. فرض کنید T مجموعه‌ای غیرتهی و دلخواه باشد. هر تابع $T \times T \rightarrow T$ را یک عمل دوتایی روی مجموعه‌ی T می‌نامند. در اینجا عمل دوتایی را با نماد $*$ و تصویر هر عضو (x, y) از $T \times T$ را به صورت $x * y$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۳.۲.۲. مجموعه‌ی غیرتهی T همراه با یک یا چند عمل دوتایی را یک دستگاه جبری می‌نامند. اگر دستگاه جبری $(T, *)$ از اصول زیر پیروی کند، آن‌گاه $(T, *)$ را یک گروه می‌گویند.

(۱) دستگاه جبری $(T, *)$ فقط مجهز به یک عمل دوتایی باشد.

(۲) عمل دوتایی $*$ بر T شرکت‌پذیر باشد.

(۳) عضوی مانند e (عضو همانی یا خنثی) موجود باشد به طوری که به ازای هر $x \in T$ دلخواه، $x * e = e * x = x$.

(۴) به ازای هر $x \in T$ دلخواه، $y \in T$ (عضو وارون) چنان وجود داشته باشد که $x * y = y * x = e$.

تعریف ۴.۲.۲. شبه گروه^۷ $(T, *)$ شامل مجموعه‌ی T و یک عمل دوتایی $*$ است که از شرایط مربع لاتین پیروی می‌کند. به عبارت دیگر یک شبه گروه نسبت به عمل $*$ بسته است و خاصیت حذف از چپ و راست را دارد. یعنی برای هر a و b در T عناصر منحصر به فرد x و y در T چنان موجودند که $a * x = b$ و $y * b = a$.

شرط مربع لاتین یک شرط ابتدایی در همه‌ی گروه‌ها و شبه گروه‌ها می‌باشد و جدول ضربی (جدول کیلی) یک شبه گروه متناهی، یک مربع لاتین است و در مقابل، هر مربع لاتین می‌تواند جدول ضربی یک شبه گروه در نظر گرفته شود.

^۵Van Lint

^۶Wilson

^۷Quasi group

تعریف ۵.۲.۲. یک گروه بخش‌کننده‌ی گراف C_m -تجزیه پذیر با g زیرگروه از مرتبه‌ی u ، یک افزاز از گراف g بخشی کامل از مرتبه‌ی u به m -دورهاست.

قضیه ۶.۲.۲. اگر $g \leq ۳$ ، آنگاه حتماً یک گروه بخش‌کننده‌ی گراف C_m -تجزیه‌پذیر، با g زیرگروه از مرتبه‌ی $۲m$ وجود دارد.

قضیه ۷.۲.۲. اگر g فرد باشد، آنگاه حتماً یک گروه بخش‌کننده‌ی گراف C_m -تجزیه‌پذیر، با g زیرگروه از مرتبه‌ی m وجود دارد.

قضایای فوق را بدون اثبات می‌پذیریم. برای دیدن شرح بیشتر به نتایج به دست آمده از تحقیقات هافمن و لیندندر و رادجر در [۱۱] مراجعه کنید.

قضیه ۸.۲.۲. [۱۱] اگر $۳ \leq m$ عددی فرد و $۳ \leq g$ باشد، آنگاه گراف g بخشی $K_{۲m, ۲m, \dots, ۲m}$ قابل تجزیه به m -دورهاست.

برهان. برای اثبات این قضیه ساختار تجزیه را شرح می‌دهیم. فرض کنید $(T, *)$ با مجموعه‌ی $T = \{1, 2, \dots, 2g\}$ و عمل $*$ یک شبه گروه جابه‌جایی باشد. زیرگروه‌های این شبه گروه که به صورت زیر هستند را در نظر بگیرید.

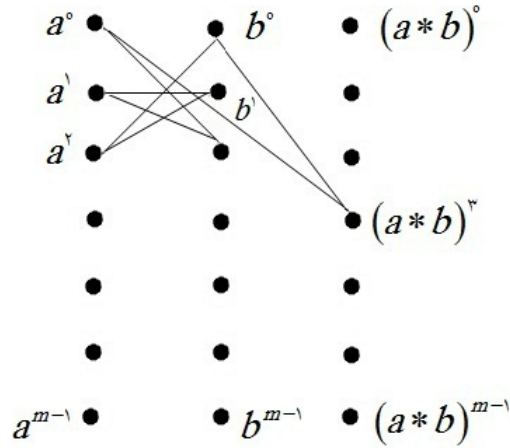
$$H_1 = (\{1, 2\}, *), H_2 = (\{3, 4\}, *), \dots, H_g = (\{2g-1, 2g\}, *).$$

همچنین فرض کنید $K_{۲m, ۲m, \dots, ۲m}$ یک گراف g بخشی است که برای $1 \leq i \leq g$ ، مجموعه رئوس در هر بخش $\mathbb{Z}_m \times \{2i-1, 2i\}$ می‌باشد. به بیان دیگر رئوس هر بخش به ازای هر $a, b \in T$ که a, b عضو یک زیرگروه H_i نیز است، به شکل a^0, a^1, \dots, a^{m-1} و b^0, b^1, \dots, b^{m-1} می‌باشد. برای هر $a, b \in T$ که $a < b$ و a, b عضو یک H_i ، $1 \leq i \leq g$ ، نباشد (زیرا بین رئوس هر بخش یالی وجود ندارد) دور C را به صورت زیر قرار دهید.

$$C = (a^0, b^{\frac{m-3}{2}}, a^1, b^{\frac{m-5}{2}}, \dots, a^{\frac{m-3}{2}}, b^0, (a * b)^{\frac{m-1}{2}}).$$

اکنون به ازای هر $i \in \mathbb{Z}_m$ و $a \in T$ با اعمال جایگشت $a^i \mapsto a^{i+1}$ روی دور C ، مجموعه دورهایی حاصل می‌شود که یال‌های گراف g بخشی $K_{۲m, ۲m, \dots, ۲m}$ را که به تعداد $\binom{g}{2} 4m^2$ یال دارد، به $m \cdot 2(2g-2) + m \cdot 2(2g-4) + \dots + m \cdot 2(2g-(2g-2))$ تا m -دور افزاز می‌کند و تجزیه‌ی مطلوب به دست می‌آید. \square

مثال ۹.۲.۲. فرض کنید $m = ۷$ و $g = ۳$. دور C در گراف ۳ بخشی $K_{۱۴,۱۴,۱۴}$ به صورت شکل ۱.۲ است.



شکل ۱.۲: اولین دور در تجزیه.

بقیه دورهای تجزیه با اعمال جایگشت‌های گفته شده در قضیه قبل بر روی C به دست می‌آیند.

فصل ۳

تجزیه‌ی گراف‌های کامل به m -دورها

۱.۳ نتایج مورد نیاز

در این بخش شرایط لازم مسئله‌ی تجزیه و تعاریف مورد نیاز و شرح کوتاهی از بعضی ساختارهای تجزیه‌ی مورد استفاده در بخش‌های بعد را ارائه می‌دهیم. لازم به ذکر است که مطالب ارائه شده در این جا برگرفته از تحقیقات آلسپیچ و گاولاس در [۱] و نتایج ساجنا در [۱۹] و کتاب برایانت در [۵] می‌باشد.

لم ۱.۱.۳. [۱۹، ۵] اگر C_m, K_n -تجزیه‌پذیر باشد در این صورت:

$$(۱) \quad ۳ \leq m \leq n$$

$$(۲) \quad n \text{ فرد است.}$$

$$(۳) \quad (n(n-1) \equiv 0 \pmod{2m})$$

برهان. شرط اول بدیهی است و از آن جا که درجه‌ی هر رأس در یک دور ۲ است، باید درجه‌ی هر رأس در K_n (که $n-1$ است) زوج باشد پس n باید فرد باشد. تعداد یال‌های K_n (که $\frac{n(n-1)}{2}$ است) باید بر m بخش‌پذیر باشد یعنی (به پیمانه‌ی m) $\frac{n(n-1)}{2} \equiv 0 \pmod{m}$. پس شرط ۳ نیز برقرار است. \square

لم ۲.۱.۳. [۱۹، ۵] اگر $C_m, K_n - I$ -تجزیه‌پذیر باشد در این صورت:

$$(۱) \quad ۳ \leq m \leq n$$

$$(۲) \quad n \text{ زوج است.}$$

$$(۳) \quad (n(n-2) \equiv 0 \pmod{2m})$$

برهان. اولین شرط بدیهی است و از آن جا که درجه‌ی هر رأس در یک دور ۲ است، باید درجه‌ی هر رأس در $K_n - I$ (که $n-2$ است) زوج باشد پس n باید زوج باشد؛ و چون تعداد یال‌های

$K_n - I$ (که $\frac{n(n-2)}{2}$ تاست) باید بر m بخش‌پذیر باشد یعنی (به پیمانه‌ی m) $\frac{n(n-2)}{2} \equiv 0$. پس شرط ۳ نیز برقرار است. □

توجه ۳.۱.۳. اگر یک n در شرایط یکی از دو لم قبل صدق کند، n را قابل قبول می‌گویند.
سؤال ۴.۱.۳. آیا شرایط لازم برای این که K_n و $K_n - I$ ، C_m -تجزیه‌پذیر باشند کافی نیز هستند؟

آلسیچ و گاولاس نشان دادند که هرگاه m و n هر دو زوج یا هر دو فرد باشند پاسخ به این سوال مثبت است و برای دو نوع دیگر نیز یعنی n زوج و m فرد و به‌عکس، ساجنا نشان داد پاسخ مثبت است. پاسخ این ریاضی‌دانان را در سه بخش بعد بررسی می‌کنیم.
تعریف ۵.۱.۳. [۱] اتصال دو گراف G و H را با نماد $G \vee H$ نشان داده که گرافی با مجموعه رئوس و یال‌های زیر است:

$$V(G \vee H) = V(G) \cup V(H),$$

$$E(G \vee H) = E(G) \cup E(H) \cup \{uv : u \in V(G), v \in V(H)\}.$$

بنابراین $G \vee H$ شامل یک زیرگراف یکرخت با G و یک زیرگراف یکرخت با H همراه با همه‌ی یال‌های ممکن میان رئوس آن‌ها می‌باشد.
چند مثال کاربردی: برای n فرد K_n با $K_1 \vee K_{n-1}$ و برای n زوج $K_n - I$ با $K_2 \vee \overline{K_{n-2}}$ یکرخت است.

توجه ۶.۱.۳. در این پایان‌نامه رئوس K_1 و $\overline{K_2}$ را براساس نتایج به دست آمده توسط ساجنا رئوس مرکزی می‌نامیم.

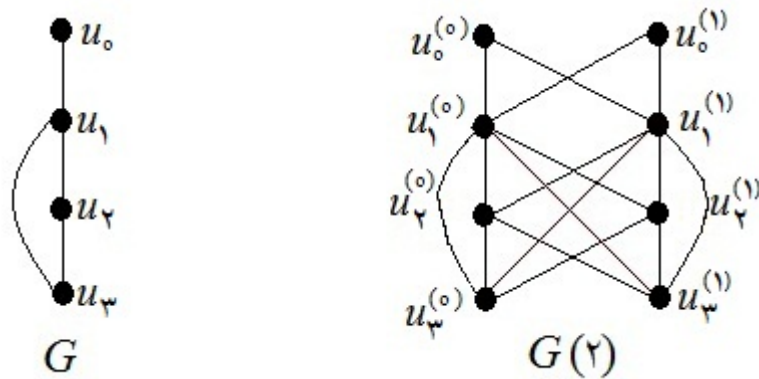
تعریف ۷.۱.۳. [۱۱، ۱۹] فرض کنید G یک گراف با مجموعه رئوس $V(G) = \{u_0, \dots, u_{n-1}\}$ و یال‌های $E(G)$ باشد. در این صورت $G(\mathbb{Z}_m)$ گرافی با مجموعه رئوس و یال‌های زیر است:

$$V(G(\mathbb{Z}_m)) = \{u_i^l : u_i \in V(G), l \in \mathbb{Z}_m\},$$

$$E(G(\mathbb{Z}_m)) = \{u_i^{(0)}u_j^{(0)}, u_i^{(1)}u_j^{(1)}, u_i^{(0)}u_j^{(1)}, u_j^{(0)}u_i^{(1)} : u_iu_j \in E(G)\}.$$

یال‌های به شکل $u_i^{(0)}u_j^{(0)}$ را یال طول خالص چپ و یال‌های به شکل $u_i^{(1)}u_j^{(1)}$ را یال طول خالص راست می‌گویند که هر کدام طول $j - i$ یا $i - j$ دارند و این طول، عنصری از مجموعه‌ی $\{1, 2, \dots, [\frac{m}{2}]\}$ است؛ و یال‌های به شکل $u_i^{(0)}u_j^{(1)}$ و $u_i^{(1)}u_j^{(0)}$ را یال طول مختلط نام می‌گذارند که طول هر کدام $(j - i)$ یا $(i - j)$ عنصری از مجموعه‌ی \mathbb{Z}_m است. بنابراین، $G(\mathbb{Z}_m) = G_n(\mathbb{Z}_m)$ شامل دو گراف یکرخت با G ، n رأسی است که علاوه بر آن متناظر با هر یال $u_iu_j \in E(G)$ دو یال متقاطع $u_i^{(0)}u_j^{(1)}$ و $u_i^{(1)}u_j^{(0)}$ بین رئوس این دو گراف یکرخت وجود دارد.

همچنین آلسیچ و گاولاس [۱] این تعریف را ضرب حلقه‌ای گفته‌اند و با نماد $G \wr K_2$ نشان داده‌اند.



شکل ۱.۳: مثالی از گراف‌های $G, G(2)$.

چند مثال کاربردی: توجه کنید که $K_n(2)$ با $(K_n \vee K_n) - I$ یکرخت است که در این جا I شامل یال‌های میان رئوس نظیر در دو گراف یکرخت با K_n است. همچنین $K_n(2)$ با $K_{2n} - I$ یکرخت است.

تعریف ۸.۱.۳. [۱۹] مجموعه‌ی $\{1, 2, \dots, [\frac{m}{2}]\}$ را در نظر بگیرید. اگر $D_0 \subseteq A$ و $D_1 \subseteq A$ باشند، $M \subseteq \mathbb{Z}_m$ و $D_1 \subseteq A$ می‌کنیم که همه‌ی یال‌های طول خالص چپ آن در D_0 و طول خالص راست آن در D_1 و یال‌های طول مختلط آن در M هستند. توجه کنید که $K_m(2)\langle D_0, M, D_1 \rangle$ با $K_m(2)\langle D_0, -M, D_1 \rangle$ و همچنین برای هر $x \in \mathbb{Z}_m$ با $K_m(2)\langle D_0, M+x, D_1 \rangle$ یکرخت است. به عنوان نمونه برای m فرد داریم $K_{2m} - I \cong K_m(2)\langle A, \mathbb{Z}_m - \{0\}, A \rangle$ و $K_{2m} \cong K_m(2)\langle A, \mathbb{Z}_m, A \rangle$ ، که در این جا $A = \{1, 2, \dots, [\frac{m}{2}]\}$.

ما برای اثبات قضایای بخش‌های بعد نیاز به گراف‌های کیلی خاص داریم که اکنون آن‌ها و چند تعریف بعد از آن را با توجه به تعاریف گاولاس و آلسیچ در [۱] شرح می‌دهیم.

تعریف ۹.۱.۳. فرض کنید S یک زیر مجموعه از گروه متناهی Γ باشد که در شرایط زیر صدق می‌کند:

$$(1) \quad 1 \notin S, \text{ که در این جا } 1 \text{ مؤلفه‌ی همانی گروه } \Gamma \text{ است.}$$

$$(2) \quad S = S^{-1}, \text{ که مستلزم این است که اگر } s \in S \text{ باشد در این صورت } s^{-1} \in S \text{ باشد.}$$

به یک زیر مجموعه مانند S که در شرایط بالا صدق کند زیر مجموعه‌ی کیلی می‌گویند. گراف کیلی $X(\Gamma, S)$ به این صورت تعریف می‌شود که رئوس آن عناصر Γ هستند و میان دو رأس g و h یال وجود دارد اگر و تنها اگر $s \in S$ چنان وجود داشته باشد که $h = gs$. مجموعه‌ی S را مجموعه‌ی اتصال نامیده و می‌گوییم که $X(\Gamma, S)$ یک گراف کیلی روی گروه Γ است.

تعریف ۱۰.۱.۳. وقتی Γ یک گروه دوری باشد به گراف $X(\Gamma, S)$ گراف چرخشی گفته می‌شود. برای یک گروه دوری Γ از مرتبه‌ی n نماد $X(n, S)$ را به جای $X(\Gamma, S)$ به کار می‌بریم.

بنابراین همچون تعریف ۹.۱.۳ برای یک عدد صحیح مثبت n ، زیرمجموعه‌ی $\{1, \dots, n-1\}$ را به گونه‌ای در نظر بگیرید که اگر $s \in S$ ، آنگاه، $n-s \in S$. در این صورت گراف چرخشی $X(n, S)$ گرافی با مجموعه رئوس $\{u_0, \dots, u_{n-1}\}$ است که میان u_i و u_j یال وجود دارد اگر و تنها اگر $j-i \in S$. به عبارت دیگر مجموعه یال‌های گراف چرخشی عبارتند از: $E(X) = \{u_i u_{i+s} : i \in \mathbb{Z}_n, s \in S\}$. همچنین یال $u_i u_j$ را یالی به طول $j-i$ نامیده و وقتی n زوج باشد یالی به طول $j-i = \frac{n}{2}$ را یال قطری می‌گویند.

تعریف ۱۱.۱.۳. اگر A یک مجموعه از اعداد صحیح مثبت باشد، در این صورت داریم:

$$-A = \{-a : a \in A\},$$

$$A + x = \{a + x : a \in A, x \in \mathbb{Z}\}.$$

فرض کنید $A \subseteq \{1, 2, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$. اگر مجموعه اتصال یک گراف چرخشی به صورت $S = A \cup -A$ باشد A را مجموعه طول یال می‌گویند. به وضوح محاسبه‌ی مربوط به طول یال $-A$ در پیمانه‌ی n انجام می‌شود.

تعریف ۱۲.۱.۳. فرض کنید n یک عدد صحیح زوج و G یک گراف چرخشی از مرتبه‌ی n با مجموعه اتصال S باشد. یال‌های $u_i u_{i+s}$ و $u_{i+\frac{n}{2}} u_{i+\frac{n}{2}+s}$ را که یال‌هایی به طول s هستند و $s \in S$ ، یال‌های متقابل قطری می‌گویند.

اکثر تجزیه‌های استفاده شده در تحقیقاتی که تاکنون صورت گرفته است، ناشی از اعمال یک جایگشت روی زیرگرافی ثابت است. تعاریف بعد با توجه به تعاریف ساجنا [۱۹]، این موضوع را به صورت جامع بیان می‌کند.

تعریف ۱۳.۱.۳. فرض کنید G یک گراف و $H \subseteq G$ با مجموعه رئوس $U \subseteq V$ باشد. جایگشت $\rho(H)$ با مجموعه رئوس $\rho(V)$ و مجموعه یال‌های $\{\rho(u)\rho(v) : uv \in E(H)\}$ به عنوان یک تابع از V به V در نظر گرفته می‌شود. یک خودریختی از گراف G یک جایگشت ρ از مجموعه رئوس $V(G)$ است با این شرط که $\rho(H)$ یک زیرگراف از G باشد، به این معنی که برای هر یال $uv \in E(H)$ ، $\rho(u)\rho(v) \in E(G)$.

مجموعه‌ی همه‌ی خودریختی‌ها روی G ، با عمل ترکیب یک گروه خودریختی از G است و با نماد $Aut(G)$ نشان داده می‌شود.

توجه ۱۴.۱.۳. دقت شود که ممکن است $\rho(H)$ برای همه‌ی زیرگراف‌های $H \subseteq G$ تعریف نشود زیرا ρ لزوماً خودریختی نیست.

برای هر $\rho \in Aut(G)$ ، زیرگروهی از $Aut(G)$ با مولد ρ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\langle \rho \rangle = \{\rho^i : i = 0, 1, \dots\}.$$

تعریف ۱۵.۱.۳. فرض کنید G یک گراف و $v \in V(G)$ و σ زیرگروهی از $Aut(G)$ باشد. مجموعه‌ی $\{\rho(v) : \rho \in \sigma\}$ با $\sigma(v)$ نشان داده می‌شود و آن را قلمرو σ شامل v می‌نامند.

قلمرو σ مجموعه رئوس $V(G)$ را افزای می‌کند و رئوس u و v متعلق به قلمرو σ است اگر و تنها اگر یک خودریختی $\rho \in \sigma$ وجود داشته باشد به طوری که $\rho(u) = v$. همچنین برای هر زیر گروه σ از $Aut(G)$ و هر یال $e \in E(G)$ قلمرو σ شامل e به صورت $\sigma(e) = \{\rho(e) : \rho \in \sigma\}$ تعریف می‌شود.

توجه ۱۶.۱.۳. عمل گروه $Aut(G)$ روی $V(G)$ ، برای هر $\rho \in Aut(G)$ و $uv \in E(G)$ یک عمل روی $E(G)$ با ضابطه‌ی $\rho(uv) = \rho(u)\rho(v)$ القا می‌کند.

تعریف ۱۷.۱.۳. فرض کنید $X(n, S)$ یک گراف چرخشی با مجموعه رئوس $\{u_0, u_1, \dots, u_{n-1}\}$ و جایگشت دوری $(u_0 \dots u_{n-1})$ باشد. به طور مستقیم از تعریف گراف‌های چرخشی نتیجه می‌شود که $\langle \rho \rangle$ یک زیرگروه از $Aut(X)$ است که

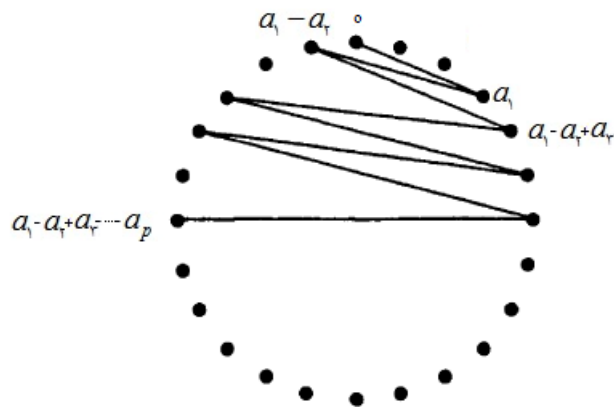
$$\langle \rho \rangle = \{\rho^i : i = 0, \dots, (n-1)\}$$

و قلمرو یال‌های آن مجموعه‌ی $\{u_i u_{i+s} : i \in \mathbb{Z}_n, s \in S\}$ می‌باشد؛ این مجموعه شامل همه‌ی یال‌های هم‌طول است.

وقتی که K_n و $K_n - I$ را به ترتیب معادل با $K_{n-1} \vee K_1$ و $(K_{n-2} - I) \vee \bar{K}_2$ قرار می‌دهیم، ρ را جایگشتی تعریف می‌کنیم که به عنوان یک دوران روی گراف چرخشی عمل می‌کند. در این دوران، بخشی از K_{n-1} یا $K_{n-2} - I$ و رئوس مرکزی ثابت هستند (به یاد بیاورید که رئوس K_1 و \bar{K}_2 را رئوس مرکزی نامیدیم که آن‌ها را به ترتیب $\{\infty\}$ و $\{\infty_1, \infty_2\}$ در نظر می‌گیریم). در نوع $K_{n-1} \vee K_1$ ، اگر مجموعه رئوس K_{n-1} به صورت $\{u_0, \dots, u_{n-2}\}$ باشد در این صورت جایگشت به شکل $\rho = (u_0, \dots, u_{n-2})(\infty)$ است. در نوع $(K_{n-2} - I) \vee \bar{K}_2$ اگر مجموعه رئوس $K_{n-2} - I$ به صورت $\{u_0, \dots, u_{n-3}\}$ باشد، جایگشت مورد نظر به شکل $\rho = (u_0, \dots, u_{n-2})(\infty_1)(\infty_2)$ است.

تعریف ۱۸.۱.۳. فرض کنید $X = X(n, S)$ یک گراف چرخشی باشد. یک مسیر P در X با این شرط که هیچ دو یالی از P هم‌طول نباشد را مسیر زیگزاگ می‌نامند (شکل ۲.۳ را ببینید). به مجموعه‌ی همه‌ی طول یال‌های موجود در P مجموعه طول یال P گفته می‌شود.

بنابراین $\{a_1, a_2, \dots, a_p\}$ که $a_1 < a_2 < \dots < a_p$ ، مجموعه طول یال مسیر زیگزاگ تقریباً همه‌ی دورها در تجزیه‌های ما از مسیر زیگزاگ ساخته شده است.



شکل ۲.۳: یک مسیر زیگزاگ با مجموعه طول یال $\{a_1, a_2, \dots, a_p\}$.

ساختار والکی^۱ [۱۶]

در قرن ۱۹ والکی نحوه‌ی تجزیه‌ی K_n و $K_n - I$ را به دورهای همیلتنی بیان کرد. با توجه به استفاده از روش والکی در C_m -تجزیه‌ها، در این جا به این روش ساختاری اشاره می‌کنیم. برای اطلاعات بیشتر [۱۶] را ببینید.

برای n فرد فرض کنید $n = 2r + 1$ و K_n را با مجموعه رئوس $\mathbb{Z}_{2r} \cup \{\infty\}$ در نظر بگیرید. حال تجزیه‌ی K_n به n -دورها با جایگشت‌های متوالی $\rho = (0, 1, \dots, 2r - 1)$ و با شروع از دور زیر حاصل می‌شود:

$$(\infty, 0, 1, 2r - 1, 2, 2r - 2, 3, 2r - 3, \dots, r - 1, r + 1, r)$$

و به ازای n زوج قرار دهید $n = 2r + 2$ و $K_n - I$ را با مجموعه رئوس $\mathbb{Z}_{2r} \cup \{\infty_1, \infty_2\}$ در نظر بگیرید. حال به ازای r زوج دور زیر را

$$(\infty_1, 0, 1, 2r - 1, 2, 2r - 2, 3, 2r - 3, \dots, \frac{r}{2}, \infty_2, \frac{3r}{2}, \dots, r - 1, r + 1, r)$$

و به ازای r فرد دور زیر را

$$(\infty_1, 0, 1, 2r - 1, 2, 2r - 2, 3, 2r - 3, \dots, \frac{r}{2}, \infty_2, \frac{r+1}{2}, \dots, r - 1, r + 1, r)$$

تحت جایگشت‌های متوالی $(\infty_1)(\infty_2)\rho = (0, 1, \dots, 2r - 1)$ دوران داده تا $K_n - I$ به دورهای همیلتنی تجزیه شود.

اکنون آخرین قضایای این بخش را بیان می‌کنیم که آن‌ها را بدون اثبات می‌پذیریم.

قضیه ۱۹.۱.۳. K_{2n+1} و $K_{2n+2} - I$ را می‌توان به n دور همیلتنی تجزیه کرد.

^۱Walecki

قضیه ۲۰۱.۱.۳. $K_{r \times n}$ را می توان به دورهای همیلتنی تجزیه کرد اگر و تنها اگر $n(r - 1)$ زوج باشد. اگر $n(r - 1)$ فرد باشد $K_{r \times n}$ را می توان به دورهای همیلتنی و یک تطابق کامل (۱-عامل) تجزیه کرد.

هیلتون^۲ دو قضیه ی فوق را شرح داده است که برای دیدن نتایج، می توانید به [۱۰] مراجعه کنید.

قضیه ۲۱۱.۱.۳. هر گراف چرخشی درجه ۴ را می توان به دورهای همیلتنی تجزیه کرد. نتایج این قضیه توسط برموند و فاوارون^۳ و ماهیو^۴ در [۴] ارائه شده است.

۲.۳ C_m - تجزیه پذیری $K_n - I$ برای m و n زوج

مطالب ارائه شده در این بخش، نتیجه ی تحقیقات آلسیچ و گاولاس [۱]، در مقاله ای در سال ۲۰۰۱ می باشد که راجع به تجزیه ی گراف های کامل به m -دورها به ازای n, m زوج است. در ابتدا قضیه ای بیان و اثبات می شود که مرحله ی استقرایی روند تجزیه می باشد و در نهایت به اثبات قضیه ای می پردازیم که پایه ی استقرا در اولین قضیه است.

قضیه ۱۰۲.۳. فرض کنید m و n اعداد صحیح مثبت و زوج باشند که $n \leq m \leq 4$. اگر $K_n - I$ برای همه ی n های قابل قبول در محدوده ی $2m < n \leq m$ به m -دورها تجزیه شود، در این صورت $K_n - I$ می تواند برای هر $m \leq n$ که قابل قبول است به m -دورها تجزیه می شود.

برهان. فرض کنید که $K_n - I$ بتواند برای m و n صحیح و مثبت و زوج در محدوده ی $2m < n < m$ که (به پیمانه ی $2m$) $n(n - 2) \equiv 0$ باشد به m -دورها تجزیه شود. برای n های خارج از این محدوده n را به صورت $n = qm + r$ در نظر بگیرید که q عددی صحیح و $0 \leq r \leq m - 1$ می باشد. به راحتی با یک جایگذاری در رابطه ی (به پیمانه ی $2m$) $n(n - 2) \equiv 0$ می توان نتیجه گرفت که (به پیمانه ی $2m$) $r(r - 2) \equiv 0$.

رئوس $K_n - I$ را به $q - 1$ دسته ی m رأسی و یک دسته ی $m + r$ رأسی افراز می کنیم. هر دسته از رئوس، یک زیر گراف یکرخت با K_m یا K_{m+r} القا می کند و یال های میان هر دو دسته یک زیر گراف یکرخت با $K_{m,m}$ یا $K_{m,m+r}$ القا می کند. در قضایای فصل ۲ دیدید که $C_m \mid K_{m,m+r}$ و $C_m \mid K_{m,m}$ در ساختار والکی در بخش ۱.۳ نیز دیدید که $K_m - I$ به m -دورها تجزیه شد. همچنین چون (به پیمانه ی $2m$) $(m + r)(m + r - 2) \equiv 0$ ، یال های K_{m+r} طبق فرض استقرا می توانند به m -دورها و یک 1 -عامل تجزیه شود. بنابراین اثبات کامل می شود. \square

^۲Hilton

^۳Favaron

^۴Maheo

لم ۲.۲.۳. اگر m و n و r اعداد صحیح زوج باشند به طوری که $n = m + r$ و (به پیمانه‌ی $4m$) $n(n-2) \equiv 2m$ ، در این صورت حالت‌های زیر رخ می‌دهند:

$$(1) \text{ (به پیمانه‌ی } 4) \cdot m \equiv 0.$$

$$(2) \text{ (به پیمانه‌ی } 8) \quad r \equiv 2 \text{ یا } r \equiv 0.$$

برهان. اول این‌که (به پیمانه‌ی $4m$) $n(n-2) \equiv 2m$ نتیجه می‌دهد که $n(n-2) = 2m(2q+1)$ پس $\frac{n(n-2)}{2}$ مضرب فردی از m می‌باشد و n و $n-2$ هر دو زوج هستند، پس n یا $n-2$ بر 4 بخش پذیرند، بنابراین $n(n-2)$ بر 8 و $\frac{n(n-2)}{2}$ بر 4 بخش پذیر است و از آنجا که $2q+1$ فرد است، m نیز بر 4 بخش پذیر است. پس حالت ۱ برقرار است.

اکنون نشان می‌دهیم که (به پیمانه‌ی 8) $r \equiv 2$ یا $r \equiv 0$ (فرض خلف) با توجه به دلایل بالا که m و $\frac{n(n-2)}{2}$ بر 4 بخش پذیرند، فرض کنید که (به پیمانه‌ی 8) $r \equiv 4$ و برای k صحیح و نامنفی، r را به صورت $r = 8k + 4$ در نظر بگیرید. بنابراین داریم:

$$\frac{r(r-2)}{2} = \frac{(8k+4)(8k+2)}{2} = 32k^2 + 24k + 4(8k^2 + 6k + 1) = 4(8k^2 + 6k + 1).$$

از این رو

$$\frac{r(r-2)}{8} = 8k^2 + 6k + 1.$$

حال $\frac{r(r-2)}{2}$ بر m بخش پذیر است، $mt = \frac{r(r-2)}{2}$ را برای t صحیح مثبت و زوج در نظر بگیرید. داریم:

$$\frac{m}{4}t = \frac{r(r-2)}{8} = 8k^2 + 6k + 1$$

و این یک تناقض است پس (به پیمانه‌ی 8) $r \not\equiv 4$. اکنون فرض کنید که (به پیمانه‌ی 8) $r \equiv 6$ باشد و برای k صحیح و نامنفی r را به صورت $r = 8k + 6$ در نظر بگیرید. بنابراین:

$$\frac{r(r-2)}{2} = \frac{(8k+6)(8k+4)}{2} = 32k^2 + 40k + 12(8k^2 + 10k + 3)$$

$$\frac{r(r-2)}{8} = 8k^2 + 10k + 3.$$

همچون قبل فرض کنید برای t صحیح و مثبت $mt = \frac{r(r-2)}{2}$ باشد. از آنجا که $m \mid 4$ ، داریم:

$$\frac{m}{4}t = \frac{r(r-2)}{8} = 8k^2 + 10k + 3$$

و این باز هم تناقض است. بنابراین (به پیمانه‌ی 8) $r \not\equiv 6$ ، پس (به پیمانه‌ی 8) $r \equiv 2$ یا $r \equiv 0$ می‌باشد. \square

تعریف ۳.۲.۳. فرض کنید $A \subseteq \{1, 2, \dots, \frac{n}{p} - 1\}$ باشد که در این جا n یک عدد صحیح زوج و مثبت است. فرض کنید G یک گراف چرخشی از مرتبه $n - 2$ با مجموعه اتصال $A \cup -A$ باشد و ∞_1 و ∞_2 دو رأس \bar{K}_2 باشند. گراف H را به صورت $H(n; A) = G \vee \bar{K}_2$ تعریف می کنیم.

گراف $K_n - I$ می تواند اتصالی از گراف چرخشی مرتبه $n - 2$ با \bar{K}_2 باشد. به عبارت دیگر $K_n - I = H(n; A)$ ، که در این حالت $A = \{1, 2, \dots, \frac{(n-4)}{p}\}$. بنابراین یال هایی به طول $\frac{(n-2)}{p}$ در زیرگراف چرخشی به انضمام یال $\infty_1 \infty_2$ ، یال های 1 -عامل I را می سازند.

لم ۴.۲.۳. فرض کنید m و n اعداد صحیح مثبت و زوج باشند که $4 \leq m < n < 2m$ و (به پیمانه 4) $m \equiv 0$ برقرار باشد. اگر $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{\frac{(m-4)}{p}}\}$ که در این جا $a_1, a_2, \dots, a_{\frac{(m-4)}{p}}$ اعداد صحیح مثبتی هستند که $a_1 < a_2 < \dots < a_{\frac{(m-4)}{p}} < \frac{(n-2)}{p}$ در این صورت $C_m | H(n; A)$.

برهان. رئوس زیر گراف چرخشی $H(n; A)$ را $(u_0, u_1, \dots, u_{n-3})$ نامگذاری می کنیم. داریم: $u_i u_j \in E(H(n; A))$ اگر و تنها اگر $j - i \in (A \cup -A)$. فرض کنید جایگشت ρ به صورت $(u_0 u_1 \dots u_{n-3})(\infty_1)(\infty_2)$ (یادآوری می کنیم که اگر L هر زیر گرافی از $H(n; A)$ باشد، در این صورت $\rho(L)$ به شکل $\rho \in \text{Aut}(H(n; A))$ تعریف شده است). فرض کنید P دنباله ای به طول $\frac{(m-4)}{p}$ به صورت زیر داده شده است:

$$P = u_0, u_{a_1}, u_{a_1-a_2}, u_{a_1-a_2+a_3}, \dots, u_{a_1-a_2+a_3-\dots+a_{\frac{(m-4)}{p}}-a_{\frac{(m-4)}{p}}}.$$

توجه کنید که P دقیقاً یک یال از هر طول در A را استفاده می کند، یعنی یال های هم طول ندارد. همچنین توجه کنید که با شروع از رأس u_{a_1} و در ادامه با در نظر گرفتن یک در میان رئوس دیگر، اندیس ها را اکیداً صعودی می بینیم در صورتی که رئوس یک در میان، با شروع از رأس u_0 اندیس های اکیداً نزولی دارند. بنابراین رئوس P مجزا هستند و P یک مسیر زیگزاگ است. آخرین یال استفاده شده در P طول $\frac{(n-2)}{p}$ دارد، به طوری که همه ی رئوس P در بازه ی $u_{a_1-a_2+\dots+a_{\frac{(m-4)}{p}}}$ تا $u_{a_1-a_2+\dots+a_{\frac{(m-4)}{p}}}$ که شامل u_0 نیز هست قرار می گیرند. این فاصله حداکثر طول $\frac{(n-4)}{p}$ دارد. از سوی دیگر مسیر $\rho^{\frac{(n-2)}{p}}(P)$ شکل گرفته از رئوس مجزای P است و یال به طول a_i در P متقابل قطری یال به طول a_i در $\rho^{\frac{(n-2)}{p}}(P)$ است. بنابراین ما می توانیم یک دور C به طول m به صورت زیر بسازیم.

$$C = \{ \infty_1 u_0, \infty_1 u_{\frac{(n-2)}{p}}, \infty_2 u_{a_1-a_2+\dots+a_{\frac{(m-4)}{p}}}, \infty_2 u_{\frac{(n-2)}{p}+a_1-a_2+\dots-a_{\frac{(m-4)}{p}}} \} \\ \cup P \cup \rho^{\frac{(n-2)}{p}}(P).$$

از اظهارات بالا چنین به دست می‌آید که $C, \rho(C), \rho^2(C), \dots, \rho^{\binom{n-4}{2}}(C)$ یک افزاز از مجموعه یال‌های $H(n; A)$ به m -دورهاست. \square

حال قضیه‌ای را که هدف نهایی این بخش است بیان و اثبات می‌کنیم.

قضیه ۵.۲.۳. برای m و n صحیح مثبت و زوج که $4 \leq m \leq n$ ، گراف $K_n - I$ می‌تواند به m -دورها تجزیه شود اگر و تنها اگر تعداد یال‌های $K_n - I$ بر m بخش پذیر باشد. برهان. فرض کنید m و n اعداد صحیح مثبت باشند که (به پیمانه‌ی $2m$) $n(n-2) \equiv 0$ باشد.

اگر تعداد یال‌های $K_n - I$ مضرب زوجی از m باشد با استفاده از تحقیقات تزی ^۵ [۲۱] و لم هک ویست ^۶ [۹] دیده می‌شود که $K_n - I, C_m$ -تجزیه پذیر است. برای انجام این کار $K_n - I$ را معادل با ضرب حلقه‌ای $K_{\frac{n}{2}} \setminus \overline{K_2}$ (که همان $K_{\frac{n}{2}}(2)$ است) قرار می‌دهند. تحقیقات تزی بر روی تجزیه‌ی $K_{\frac{n}{2}}$ به $\frac{m}{2}$ -مسیرها می‌باشد و لم هک ویست نشان می‌دهد که هر $\frac{m}{2}$ -مسیر در $K_{\frac{n}{2}}$ به دو m -دور در $K_{\frac{n}{2}}(2) = K_n - I$ جهش می‌یابد (تبدیل می‌شود). حال فرض کنید $\frac{n(n-2)}{2}$ (تعداد یال‌ها) مضرب فردی از m است و همچنین n را در محدوده‌ی $m \leq n < 2m$ و برای r صحیح و مثبت که $0 \leq r < m$ باشد، n را به صورت $n = m + r$ در نظر بگیرید. اگر $r = 0$ باشد ساختار والکی در بخش ۱.۳ را برای C_m -تجزیه پذیری $K_n - I$ انجام می‌دهیم. بنابراین فرض می‌کنیم که $0 < r < m$ ، دیدیم که (به پیمانه‌ی $2m$) $n(n-2) \equiv 0$ نتیجه می‌دهد که (به پیمانه‌ی $2m$) $r(r-2) \equiv 0$ و از آن جا که $\frac{n(n-2)}{2}$ مضرب فردی از m است، پس باید $\frac{r(r-2)}{2}$ مضرب زوجی از m باشد. فرض کنید $A = \{1, 2, \dots, \frac{n-4}{2}\}$ باشد و ∞_1 و ∞_2 رئوس $H(n; A)$ به صورت $u_0, u_1, \dots, u_{n-3}, \infty_1, \infty_2$ نامگذاری شده باشند که ∞_1 و ∞_2 رئوس $\overline{K_2}$ هستند (رئوس مرکزی). توجه کنید که یال متصل به u_i و u_j با طول $i - j$ یا $j - i$ که این طول بین ۱ تا $\frac{n-2}{2}$ قرار دارد، به پیمانه‌ی $n-2$ محاسبه می‌شود. در ادامه فرض کنید که B یک زیرمجموعه از A باشد به طوری که $|B| = \frac{r}{2}$ ، و همچنین فرض کنید می‌توانیم گراف چرخشی $X(n-2, B \cup -B)$ را به m -دورها تجزیه کنیم. پس از آن جا که $H(n; A) = H(n; A - B) \oplus X(n-2, B \cup -B)$ و گراف $H(n; A - B)$ با توجه به لم ۴.۲.۳ می‌تواند به m -دورها تجزیه شود، بدین معنی است که می‌توان $H(n; A)$ را به m -دورها تجزیه کرد.

بنابراین بقیه‌ی اثبات شامل محاسبه‌ی یک مجموعه‌ی B مناسب با اندازه‌ی $\frac{r}{2}$ است به طوری که گراف چرخشی $R = X(n-2; B \cup -B)$ بتواند به m -دورها تجزیه شود. یک مورد ویژه و جالب این است که $r = 2$ یعنی $n = m + 2$ باشد. در این حالت $B = \{1\}$ را انتخاب می‌کنیم به طوری که R خود یک m -دور است. بنابراین ما یک تجزیه از $K_{m+2} - I$

^۵Tarsi

^۶Haggkvist

به m -دورها داریم. با کمک لم ۲.۲.۳ می دانیم (به پیمانه‌ی ۸) $r \equiv 0$ یا $r \equiv 2$. پس اکنون این اثبات به دو نوع تقسیم می‌شود:

نوع ۱. فرض کنید که (به پیمانه‌ی ۸) $r \equiv 0$. همچنین فرض کنید $r = 2^e a$ که a عددی فرد است و $e \leq 3$. بنابراین داریم: $\frac{r(r-2)}{2} = 2^e a(2^{e-1}a - 1)$. از آن جا که $\frac{r(r-2)}{2}$ بر m بخش پذیر است و (به پیمانه‌ی ۴) $m \equiv 0$ ، داریم: $m = 2^d a' b'$ که $a' | a$ و $b' | (2^{e-1}a - 1)$ و $2 \leq d \leq e$ در این صورت:

$$n - 2 = m + r - 2 = 2^d a' b' + 2^e a - 2 = b' \left(2^d a' + \frac{2^e a - 2}{b'} \right).$$

رئوس گراف چرخشی R را به b' بخش افراز کرده که هر بخش شامل $l = 2^d a' + \frac{2^e a - 2}{b'}$ رأس می‌باشد. همچنین هر بخش $2^d a'$ یال در یک m -دور شرکت می‌دهد. مسیر $P_{\circ, \circ}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$P_{\circ, \circ} = u_0, u_2, u_{-1}, u_3, u_{-2}, \dots, u_{2^d a' - 2}, u_{-2^d a' + 1}, u_{2^d a' + 2}, u_{-2^d a' + 3},$$

$$u_{-2^d a' - 1}, \dots, u_{2^d a' + 1}, u_{-2^d a' + 1}, u_{l+1}, u_l.$$

فرض کنید $P_{\circ, 1} = \rho^l(P_{\circ, \circ})$ که ρ جایگشتی به صورت $(\infty_1)(\infty_2)(u_0 u_1 \dots u_{n-3})$ است. از آن جا که $2^d a' < l$ ، داریم: $2^d a' + 1 < l - 2^d a' + 1$. به جز رأس u_l که آخرین رأس $P_{\circ, \circ}$ و اولین رأس $P_{\circ, 1}$ است، دیگر رئوس این دو مسیر متمایز هستند. به طور مشابه مسیرهای زیر به جز در اولین رأس $P_{\circ, i}$ که با آخرین رأس $P_{\circ, i-1}$ برای $1 \leq i \leq b' - 1$ مشترکند، همگی رأس مجزا هستند. همچنین رأس انتهایی $P_{\circ, b'-1}$ با رأس ابتدایی $P_{\circ, \circ}$ یعنی u_0 مشترک است.

$$P_{\circ, \circ}, P_{\circ, 1} = \rho^l(P_{\circ, \circ}), P_{\circ, 2} = \rho^{2l}(P_{\circ, \circ}), \dots, P_{\circ, b'-1} = \rho^{(b'-1)l}(P_{\circ, \circ}).$$

بنابراین C_{\circ} یک m -دور به صورت $C_{\circ} = P_{\circ, \circ} \cup P_{\circ, 1} \cup \dots \cup P_{\circ, b'-1}$ می‌باشد که طول یال‌های این دور، $2^d a', 2^d a' + 1, \dots, 2^d a' + l, 2^d a' + 1, \dots, 2^d a' - 1, 2^d a' - 1, \dots, 1$ است. مسیر $P_{\circ, \circ}$ برای $2^{d-2} a' = 1$ که $d = 1$ و $a' = 1$ ، تعریف نمی‌شود، در این حالت $P_{\circ, \circ}$ به صورت زیر است:

$$P_{\circ, \circ} = u_0, u_2, u_{-1}, u_{l+1}, u_l.$$

فرض کنید $b = \frac{r}{(2^{d+1} a')} = 2^{e-d-1} \frac{a}{a'}$. اگر $b < 1$ ، آن‌گاه مسیر $P_{1, \circ}$ با افزودن l به اندیس‌های رئوس زوج $P_{\circ, \circ}$ به دست می‌آید که به صورت زیر است:

$$P_{1, \circ} = u_0, u_{2+l}, u_{-1}, u_{3+l}, u_{-2}, \dots, u_{2^d a' + l}, u_{-2^d a' + 1}, u_{2^d a' + 2+l}, u_{-2^d a' + 3},$$

$$u_{2^d a' + 3+l}, u_{-2^d a' - 1}, \dots, u_{2^d a' + 1+l}, u_{-2^d a' + 1}, u_{2l+1}, u_l.$$

سپس مسیرهای $P_{1,1}, P_{1,2}, \dots, P_{1,b'-1}$ را با اعمال توان‌های ρ^l روی $P_{1,0}$ به همان شیوه که روی $P_{1,i-1}$ عمل می‌کردند، به دست می‌آوریم. علاوه بر این مسیر $P_{1,i}$ با آخرین رأس مسیر $P_{1,i-1}$ برای $1 \leq i \leq b' - 1$ آغاز می‌شود و همچنین آخرین رأس $P_{1,b'-1}$ ، u_0 می‌باشد.

بنابراین این مسیرها در بقیه‌ی رئوس متمایز هستند. پس C_1 یک m -دور است که $C_1 = P_{1,0} \cup P_{1,1} \cup P_{1,2} \cup \dots \cup P_{1,b'-1}$ و طول یال‌های این دور به صورت زیر است:

$$1+l, 2+l, 3+l, \dots, 2^{d-1}a' - 1+l, 2^{d-1}a' + 2l, 2^{d-1}a' + 1+l, \dots, 2^d a' + l.$$

به طور مشابه برای هر j در محدوده‌ی $2 \leq j \leq b$ مسیر $P_{j,0}$ با افزودن jl به اندیس‌های رئوس زوج مسیر $P_{j,0}$ ایجاد می‌شود، سپس مسیرهای $P_{j,1}, P_{j,2}, \dots, P_{j,b'-1}$ با اعمال توان‌های ρ^l روی $P_{j,0}$ به دست می‌آیند. توجه کنید که در این جا برای $1 \leq i \leq b' - 1$ ، $P_{j,i}$ با آخرین رأس $P_{j,i-1}$ آغاز می‌شود و آخرین رأس $P_{j,b'-1}$ ، u_0 است. بنابراین $C_j = P_{j,0} \cup P_{j,1} \cup \dots \cup P_{j,b'-1}$ یک m -دور و طول یال‌های C_j عبارت است از:

$$1+jl, 2+jl, 3+jl, \dots, 2^{d-1}a' - 1+jl, 2^{d-1}a' + 1+jl, \dots, \quad (*)$$

$$2^d a' + jl, 2^{d-1}a' + (j+1)l.$$

برای $0 \leq j \leq b-1$ فرض کنید B_j مجموعه طول‌های استفاده شده در دور C_j باشد که این مجموعه شامل طول‌های ارائه شده در (*) است. فرض کنید $B = B_0 \cup B_1 \cup \dots \cup B_{b-1}$. بلندترین یال در B طول $bl + 2^{d-1}a'$ دارد. از آن جا که $2^e a < 2^d a' b'$ ، نتیجه می‌دهد که $\frac{2^{e-d}a}{a'} + 1 \leq b'$ ، بنابراین این طول به صورت زیر است:

$$bl + 2^{d-1}a' = 2^{e-d-1} \frac{a}{a'} l + 2^{d-1}a' = 2^{e-d-1} \frac{a}{a'} l + \frac{l}{2} - \frac{2^{e-1}a - 1}{b'} \leq \frac{b'}{2} l - \frac{2^{e-1}a - 1}{b'}$$

$$< \frac{b'l}{2} = \frac{n-2}{2}.$$

از سوی دیگر طول‌های B متمایزند و بنابراین $|B| = \frac{r}{2}$. بر این اساس مجموعه‌ی $\{C_j, \rho(C_j), \rho^2(C_j), \dots, \rho^{l-1}(C_j)\}$ یک افراز از مجموعه یال‌های گراف چرخشی $R = X(n-2; B \cup -B)$ به m -دورها است.

نوع ۲. فرض کنید (به پیمانه ۸) $r \equiv 2$. یک ساختار برای این نوع خاص در ابتدای اثبات قضیه داده شد، پس برای بقیه‌ی اثبات فرض می‌کنیم $2 < r$. فرض کنید برای k صحیح و نامنفی $r = 8k + 2$. در این نوع داریم:

$$\frac{r(r-2)}{2} = 8k(4k+1) = 2^e a(4k+1)$$

که $2^e a = 8k$ و a فرد و $\gcd(a, 4k+1) = 1$ می‌باشد. در این صورت $m = 2^d a' b'$ که $2 \leq d < e$ و $a' | a$ و $b' | (4k+1)$. فرض کنید $\frac{r}{2} = bb'$ ، در این صورت:

$$n - 2 = 2^d a' b' + 2^e a = 2^d a' (b' + \frac{2^{e-d} a}{a'}).$$

در نظر بگیرید که $l = b' + 2^{e-d} \frac{a}{a'}$ و توجه کنید که $b' + 2 \leq l$ است. حال بقیه‌ی اثبات وابسته به کلاس هم‌نشستی b' به پیمان‌های ۴ به دو حالت تقسیم می‌شود.

حالت ۱.۲. فرض کنید که (به پیمان‌های ۴) $b' \equiv 1$. مشاهده می‌کنید که $b' \leq 5$ ، زیرا $b' = 1$ نتیجه می‌دهد که $2^e a = 2^d a' \leq m = r - 2$ ، که یک تناقض است. فرض کنید $s = l - \frac{(b' + 1)}{2} - 1$ و توجه کنید که s فرد است. گذر $P_{\circ, \circ}$ را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$P_{\circ, \circ} = u_{-s}, u_{\circ}, u_2, u_{-1}, u_3, \dots, u_{-\frac{(s-3)}{2}}, u_{\frac{(s+1)}{2}}, u_{-\frac{(s-1)}{2}}, u_{\frac{(s+3)}{2}+l}, u_{-\frac{(s+3)}{2}}, \\ u_{\frac{(s+5)}{2}}, \dots, u_{-\frac{(b'-1)}{2}}, u_{\frac{(b'+1)}{2}}.$$

از آن جا که $1 + \frac{(b' - 1)}{2} = \frac{(b' + 1)}{2} - 1 \geq s$ می‌باشد، رئوس $P_{\circ, \circ}$ متمایزند. بنابراین یک مسیر است. در نوعی که $s = 3$ و $b' = 5$ و $l - s = 4$ و $P_{\circ, \circ} = u_{-3}, u_{\circ}, u_2, u_{-2}, u_3$ مشاهده می‌کنید که طول یال‌های مسیر $P_{\circ, \circ}$ ، $2, 3, \dots, b'$ هستند. مسیر $P_{\circ, 1}$ همچون قبل به دست می‌آید یعنی $P_{\circ, 1} = \rho^l(P_{\circ, \circ})$. از آن جا که $l - s = \frac{b' + 3}{2}$ ، مسیرهای $P_{\circ, 1}$ و $P_{\circ, \circ}$ رأس-مجزا هستند. اولین رأس $P_{\circ, 1}$ را به آخرین رأس $P_{\circ, \circ}$ وصل می‌کنیم، توجه کنید که این یال طول ۱ دارد.

دوباره توان‌های ρ^l را روی $P_{\circ, \circ}$ اعمال کنید تا مسیرهای $P_{\circ, 2^{d_a'} - 1}, \dots, P_{\circ, 1}, P_{\circ, \circ}$ به دست آیند. C یک m -دور است که با اتصال آخرین رأس $P_{\circ, i}$ به اولین رأس $P_{\circ, i+1}$ برای $0 \leq i \leq 2^{d_a'} - 2$ و با اتصال آخرین رأس $P_{\circ, 2^{d_a'} - 1}$ به اولین رأس $P_{\circ, \circ}$ ساخته می‌شود. این یال‌ها لزوماً همگی طول ۱ دارند. فرض کنید $B_{\circ} = \{1, 2, \dots, b'\}$ باشد. اگر $b < 1$ ، در این صورت مسیر $P_{1, \circ}$ از کم کردن l از اندیس اولین رأس $P_{\circ, \circ}$ و افزودن l به اندیس‌های رئوس فرد باقیمانده‌ی $P_{\circ, \circ}$ به دست می‌آید که به صورت زیر است:

$$P_{1, \circ} = u_{-(l+s)}, u_{\circ}, u_{2+l}, u_{-1}, u_{3+l}, \dots, u_{-\frac{(s-3)}{2}}, u_{\frac{(s+1)}{2}+l}, u_{-\frac{(s+1)}{2}}, u_{\frac{(s+3)}{2}+l}, u_{-\frac{(s+3)}{2}}, \\ u_{\frac{(s+5)}{2}+l}, \dots, u_{-\frac{(b'-1)}{2}}, u_{\frac{(b'+1)}{2}+l}.$$

بنابراین طول یال‌های $P_{1, \circ}$ ، $b' + l, \dots, 3 + l, 2 + l$ هستند. مانند قبل توان‌های ρ^l را روی $P_{1, \circ}$ اعمال کرده تا مسیرهای $P_{1, 2^{d_a'} - 1}, \dots, P_{1, 1}, P_{1, \circ}$ به دست آیند. حال C_1 یک m -دور است که با اتصال آخرین رأس $P_{1, i}$ به اولین رأس $P_{1, i+1}$ برای $0 \leq i \leq 2^{d_a'} - 2$ و با اتصال آخرین رأس $P_{1, 2^{d_a'} - 1}$ به اولین رأس $P_{1, \circ}$ ایجاد می‌شود. توجه کنید که این یال‌ها طول $2l - 1$ دارند. به طور مشابه برای $1 \leq j \leq b - 1$ ، مسیر $P_{j, \circ}$ از کم کردن jl از اندیس اولین رأس $P_{\circ, \circ}$ و افزودن jl به اندیس‌های رئوس فرد باقیمانده‌ی $P_{\circ, \circ}$ به دست می‌آید. دوباره توان‌های ρ^l را روی $P_{j, \circ}$ اعمال کرده و C_j را که یک m -دور است با اتصال آخرین رأس $P_{j, i}$ به اولین رأس

برای $P_{j,i+1}$ برای $0 \leq i \leq 2^d a' - 2$ و اتصال آخرین رأس $P_{j, 2^d a' - 1}$ به اولین رأس $P_{j,0}$ می‌سازیم. مشاهده می‌کنید که این یال‌ها طول $2jl - 1$ دارند، بنابراین دور C_j یال‌هایی با طول‌های $1, 2jl - 1, 3 + jl, \dots, b' + jl, 2jl - 1$ دارد. اگر B_j برای $1 < j \leq b - 1$ مجموعه طول یال‌های C_j باشد و $B = B_0 \cup B_1 \cup \dots \cup B_{b-1}$ ، در این صورت بلندترین یال B طول $b' + (b - 1)l$ یا $1 - 2(b - 1)l$ دارد. حال $r = 2bb'$ و $m = 2^d a' b'$ و از آن‌جا که $r < m$ ، داریم: $2b < 2^d a'$. بنابراین $2bl < 2^d a' l = n - 2$.

علاوه بر این طول‌های $1 - 2(b - 1)l, 1, 2l - 1, 3l - 1, 4l - 1, \dots, 2(b - 1)l - 1$ همگی متمایز هستند و داریم:

$$b' + (b - 1)l < l + (2^{d-1} a' - 1)l = 2^{d-1} a' l = \frac{(n - 2)}{2}$$

به طوری که B شامل $\frac{r}{2}$ تا طول متمایز است. بنابراین مجموعه‌ی زیر یک افراز از مجموعه یال‌های گراف چرخشی $R = X(n - 2; B \cup -B)$ به m -دورهاست.

$$\{C_j, \rho(C_j), \rho^2(C_j), \dots, \rho^{l-1}(C_j) \mid 0 \leq j \leq b - 1\}.$$

حالت ۲.۲. فرض کنید که (به پیمانه‌ی ۴) $b' \equiv 3$ و $P_{0,0}$ را مسیری به صورت زیر در نظر

بگیرید:

$$P_{0,0} = u_0, u_2, u_{-1}, u_3, \dots, u_{-\frac{(b'-7)}{4}}, u_{\frac{(b'+1)}{4}}, u_{-\frac{(b'+1)}{4}}, u_{\frac{(b'+5)}{4}}, \dots, u_{-\frac{(b'-1)}{4}}, u_{\frac{(b'+1)}{4}}, u_{1-l}.$$

توجه کنید که $P_{0,0}$ دقیقاً یک یال از هر طول $2, 3, \dots, \frac{(b' - 3)}{2}, \frac{(b' - 1)}{2} + l, \frac{(b' + 1)}{2}, \dots, b'$ را که طول آن به پیمانه‌ی l هم‌نهشت با ± 1 باشد، استفاده نمی‌کند. بقیه مسیرها به صورت زیر ساخته می‌شوند:

$$P_{0,1} = \rho^l(P_{0,0}), P_{0,2} = \rho^{2l}(P_{0,0}), \dots, P_{0, 2^d a' - 1} = \rho^{(2^d a' - 1)l}(P_{0,0})$$

و توجه کنید که $P_{0,i}$ با رأس u_{il} آغاز می‌شود و در رأس $u_{(i-1)l+1}$ پایان می‌پذیرد. دو مورد خاص که باید در نظر گرفته شوند وجود دارند؛ وقتی $b' = 7$ باشد، مسیر زیر را در نظر بگیرید.

$$P_{0,0} = u_0, u_2, u_{-2}, u_3, u_{-3}, u_4, u_{1-l}.$$

وقتی $b' = 3$ باشد، شرط $m > r = 2^e a + 2$ باعث می‌شود که $a' = a$ و $d = e - 1$ و $l = 5$. در این نوع، مسیر اولیه به صورت $P_{0,0} = u_0, u_3, u_{-4}$ می‌باشد.

اگر $1 < b$ باشد در این صورت مسیر $P_{1,0}$ با افزودن l به اندیس‌های رئوس زوج $P_{0,0}$ به دست می‌آید که به صورت زیر است:

$$P_{1,0} = u_0, u_{2+l}, u_{-1}, u_{3+l}, \dots, u_{-\frac{(b'-7)}{4}}, u_{\frac{(b'+1)}{4}+l}, u_{-\frac{(b'+1)}{4}}, u_{\frac{(b'+5)}{4}+l}, \dots, u_{-\frac{(b'-1)}{4}}, u_{\frac{(b'+1)}{4}+l}, u_{1-l}.$$

سپس مسیره‌های $P_{1,0}, P_{1,2}, \dots, P_{1,2^{d'}-1}$ با اعمال توان‌های ρ^l روی $P_{1,0}$ همچون قبل به دست می‌آیند. این مسیره‌ها یال‌هایی به طول‌های زیر را استفاده می‌کنند:

$$2+l, 3+l, \dots, \frac{(b'-3)}{2}+l, \frac{(b'-1)}{2}+2l, \frac{(b'+1)}{2}+l, \dots, b'+l.$$

به‌طور مشابه برای هر j در محدوده $2 \leq j \leq b-1$ ، مسیر $P_{j,0}$ را با افزودن jl به اندیس‌های رئوس زوج $P_{j,0}$ به دست می‌آوریم.

در این صورت مسیره‌های $P_{j,1}, P_{j,2}, \dots, P_{j,2^{d'}-1}$ حاصل اعمال توان‌های ρ^l روی $P_{j,0}$ هستند. برای $0 \leq j \leq b-1$ فرض کنید F_j مجموعه‌ای از مسیره‌های $P_{j,0}, P_{j,1}, \dots, P_{j,2^{d'}-1}$ باشد و B_j مجموعه‌ی طول‌هایی باشد که F_j استفاده می‌کند و به صورت زیر است:

$$B_j = \{2+jl, 3+jl, \dots, \frac{(b'-3)}{2}+jl, \frac{(b'-1)}{2}+(j+1)l, \frac{(b'+1)}{2}+jl, \dots, b'+jl\}.$$

ملاحظه می‌کنید که $B = B_0 \cup B_1 \cup \dots \cup B_{b-1}$ شامل $b(b'-1)$ طول است و بنابراین باید b طول به B افزوده شود تا B بتواند $\frac{r}{2}$ تا طول را استفاده کند. بلندترین طول استفاده شده تاکنون $\frac{b'-1}{2}+bl$ یا $b'+(b-1)l$ است. از آن‌جا که رابطه‌ی $r < m$ نتیجه می‌دهد که $b < 2^{d'-1}a'$ ، پس $bl < \frac{(n-2)}{2}$. بنابراین طول‌های زیر متمایزند.

$$\frac{(b'-1)}{2}+l, \frac{(b'-1)}{2}+2l, \dots, \frac{(b'-1)}{2}+bl.$$

علاوه بر این چون $\frac{(n-2)}{2}$ مضرب زوجی از l است، همه‌ی آن طول‌ها نیز کم‌تر از $\frac{(n-2)}{2}$ هستند. در حالت ۱.۲ صرف نظر از کلاس همنهشتی b' به پیمانه‌ی ۴ دیدیم که $\frac{(n-2)}{2} < b'+(b-1)l$ برقرار است. بنابراین B شامل $b(b'-1)$ طول متمایز است.

یادآوری می‌کنیم که برای $0 \leq j \leq b-1$ و $0 \leq i \leq 2^{d'}-1$ ، رأس ابتدایی $u_{j,i}$ و $u_{(j-1)l+1}$ رأس انتهایی $P_{j,i}$ می‌باشند. حال می‌خواهیم مسیره‌های مجموعه‌ی F_j به صورت یک m -دور، شکل بگیرند. برای این منظور دورهای همیلتنی در یک گراف چرخشی خاص G یعنی گراف چرخشی درجه ۴ (۴-منتظم) را استفاده می‌کنیم. فرض کنید رئوس G با $v_0, v_1, \dots, v_{2^{d'}-1}$ نامگذاری شده باشند. یک دور همیلتنی C در G را در نظر بگیرید. این دور را به دلخواه جهت داده تا دور همیلتنی جهت‌دار \vec{C} به دست آید. اگر در \vec{C} یک کمان از v_i به v_k (که طول $k-i$ دارد) وجود داشته باشد، در این صورت یک یال را که لزوماً طول $1 - (k-i)l$ دارد، از رأس ابتدایی $P_{j,i}$ به رأس انتهایی $P_{j,k}$ الحاق می‌کنیم. اگر این کار را برای هر کمان در \vec{C} انجام دهیم، مسیره‌های مجموعه‌ی F_j به صورت یک m -دور به هم وصل می‌شوند. علاوه بر این چون یالی که از رأس انتهایی $P_{j,i}$ شروع و به رأس ابتدایی $P_{j,k}$ ختم می‌شود دارای طول متفاوت $1 + (k-i)l$ است، می‌توانیم از یالی که از رأس انتهایی $P_{j,k}$ شروع و به رأس ابتدایی $P_{j,i}$ ختم می‌شود، \overleftarrow{C} را به عنوان جهت‌گیری معکوس \vec{C} برای اتصال

مسیرها در مجموعه‌ی دیگر یعنی F_t ، $(t \neq k)$ برای یک m -دور استفاده کنیم. ملاحظه می‌کنید که همه‌ی یال‌های مورد استفاده برای اتصال مسیرها به هم، به پیمانه‌ی l طول‌های هم‌نهشت با ± 1 دارند و به این ترتیب هیچ یک از آن‌ها در ساخت خانواده‌ی $\{F_j : 0 \leq j \leq b-1\}$ استفاده نمی‌شوند. چند نکته وجود دارد که باید به آنها توجه کنیم.

اول این‌که اگر یک دور همیلتنی در G فقط یک طول را برای یال‌هایش استفاده کند، در این صورت این دور می‌تواند برای اتصال مسیرهای بعضی از F_j ‌ها برای ایجاد یک m -دور استفاده شود، در انجام این کار فقط یک طول در R به کار می‌رود. با این وجود اگر یک دور همیلتنی در G با طول یال‌های متفاوت استفاده شود، در این صورت هر جهت‌گیری C برای وصل کردن مسیرهای بعضی از F_j ‌ها به هم به کار می‌رود. در نتیجه بعضی طول یال‌ها که به پیمانه‌ی l با ± 1 هم‌نهشت هستند، استفاده نمی‌شوند. کاربرد این موضوع در زیر دیده می‌شود. دو طول یال s_1 و s_2 را در G انتخاب می‌کنیم به طوری که $\gcd(s_1, s_2) = 1$ ، که تضمین می‌کند گراف چرخشی G با مجموعه اتصال $\{\pm s_1, \pm s_2\}$ همبند است. حال این گراف را به دو دور همیلتنی تجزیه می‌کنیم و هر یک از این دو دور را در دو جهت ممکن جهت‌دهی می‌کنیم. در این صورت چهار دور جهت‌دار شده را برای ایجاد چهار m -دور در R استفاده می‌کنیم. همه‌ی یال‌های مورد نیاز در R که طول آن‌ها به پیمانه‌ی l هم‌نهشت با ± 1 است، وابسته به یال‌های استفاده شده در دورهای همیلتنی مورد استفاده قرار می‌گیرند.

دوم این‌که هنگامی که یک یا سه خانواده‌ی $\{F_j\}$ را برای اتصال به هم کنار می‌گذاریم، یک یا دو دور همیلتنی از G با یال‌های هم طول را برای فرآیند اتصال استفاده می‌کنیم. حال باید نشان دهیم که برای طرح ارائه شده در بالا، به اندازه‌ی کافی دورهای همیلتنی یال-مجزا در گراف G وجود دارد. به یاد بیاورید که تعداد رئوس G ، $2^{d'} a'$ است که $2b < 2^{d'} a'$. اکنون بسته به تعداد خانواده‌های F_j برای اتصال به هم، ادامه می‌دهیم.

اگر $b = 1$ باشد در این صورت G را گراف چرخشی $X(2^{d'} a'; \{\pm 1\})$ در نظر بگیرید به طوری که G یک $(2^{d'} a')$ -دور باشد، در این نوع برای اتصال مسیرهای F_0 برای ایجاد یک m -دور در R ، طول $2l - 1$ استفاده می‌شود. اگر $b = 3$ باشد در این صورت G حداقل هشت رأس دارد به طوری که حداقل دو طول s_1 و s_2 وجود دارد که نسبت به $2^{d'} a'$ اول هستند. در این حال هریک از s_1 و s_2 یک دور همیلتنی در $X(2^{d'} a'; \{\pm s_1, \pm s_2\})$ تولید می‌کنند (برای اطلاعات بیشتر بخش ۱.۴.۳ را مطالعه کنید) و بنابراین می‌توان به راحتی سه خانواده از مسیرها را برای ایجاد m -دورها به هم وصل کرد. در این نوع برای اتصال مسیرهای F_0 و F_1 و F_2 به هم و تشکیل m -دورها در R ، طول‌های $(s_1 + 1)l - 1$ ، $(s_1 - 1)l + 1$ و $(s_2 + 2)l - 1$ ، استفاده می‌شوند.

در نهایت اگر $b < 3$ باشد، برای q صحیح و مثبت، b را به صورت $b = 4q + 1$ یا $b = 4q + 3$ در نظر بگیرید. ابتدا فرض کنید $b = 4q + 1$. در این صورت گراف چرخشی $X(2^{d'} a'; \{\pm 1\})$ را می‌توان برای اتصال مسیرهای F_0 با کمک طول $2l - 1$ در R برای یک m -دور استفاده کرد. سپس q جفت متوالی $\{2q, 2q + 1\}$ ، $\{4, 5\}$ ، \dots ، $\{2, 3\}$ را در نظر بگیرید. همه‌ی این جفت‌ها

گراف چرخشی همبند تولید می‌کنند تا در هر بار برای $1 \leq i \leq q$ دو دور همیلتنی در $X(2^d a'; \{\pm 2i, (\pm 2i + 1)\})$ برای اتصال چهار خانواده به هم به دست آید. در این صورت طول‌های $1, 2ql + 1, (2q + 2)l - 1, \dots, 2l + 1, 4l - 1, l + 1, 3l - 1$ در R برای اتصال هریک از مسیرهای زیگزاگ $F_1 F_2, \dots, F_{b-1}$ استفاده می‌شوند.

اگر $b = 4q + 3$ ، یک $2q + 1 \leq t$ و نسبت به $2^d a'$ اول، برای به‌کاربردن دو خانواده‌ی اضافی پیدا می‌کنیم و طول‌های $1 - (t + 1)l$ و $1 + (t - 1)l$ در R مورد استفاده قرار می‌گیرند.

حال برای همه‌ی m -دوره‌های به‌دست آمده که در بالا شرح داده شد، جایگشت ρ را روی هر m -دور C طبق $C, \rho(C), \rho^2(C), \dots, \rho^{l-1}(C)$ اعمال می‌کنیم. در نتیجه $H = X(n - 2; B \cup -B)$ به m -دورها تجزیه می‌شود و اثبات قضیه‌ی ۵.۲.۳ کامل می‌شود.

□

۳.۳ C_m -تجزیه‌پذیری K_n برای m و n فرد

همان‌طور که در ابتدای بخش قبل بیان شد، مطالب ارائه شده در این‌جا نیز نتایج به‌دست آمده توسط آلسپچ و گاولاس [۱] در مورد تجزیه‌ی گراف‌های کامل به m -دورها به ازای m, n فرد است، که اصلی‌ترین قضیه‌ی این بخش می‌باشد؛ اما مانند روند تجزیه به ازای m, n زوج، ابتدا مرحله‌ی استقرایی تجزیه بحث می‌شود که برگرفته از تحقیقات هافمن و لیندر [۱۱] است.

قضیه ۱.۳.۳. [۱۱] فرض کنید m و n اعداد صحیح مثبت و فرد باشند که $۳ \leq m \leq n$. اگر K_n برای همه‌ی n ‌های قابل قبول در محدوده‌ی $m \leq n < ۳m$ ، C_m -تجزیه‌پذیر باشد، در این صورت K_n می‌تواند برای هر n قابل قبول، به m -دورها تجزیه شود.

برای اثبات این قضیه به تعاریف جدید و چند لم دیگر نیاز داریم که بعضی را بدون اثبات می‌پذیریم.

لم ۲.۳.۳. (کتزینگ^۷) [۱۴] C_m, K_n تجزیه‌پذیر است هرگاه (به پیمانه‌ی $۲m$) $n \equiv ۱$ و (به پیمانه‌ی ۴) $m \equiv ۰$.

لم ۳.۳.۳. (روزا^۸) [۱۸] C_m, K_n تجزیه‌پذیر است هرگاه (به پیمانه‌ی $۲m$) $n \equiv ۱$ و (به پیمانه‌ی ۴) $m \equiv ۲$.

لم ۴.۳.۳. (جکسون^۹) [۱۲] به ازای $m = p^\alpha$ که p عددی اول فرد و $\alpha \geq ۱$ است، K_n, C_m تجزیه‌پذیر می‌باشد هرگاه (به پیمانه‌ی $۲m$) $n \equiv ۱, m$.

اکنون با توجه به مقاله‌ی هافمن و رادجر و لیندر [۱۱] و همچنین مقاله‌ی ساجنا [۱۹] نشان می‌دهیم گراف‌های خاص $\vee \bar{K}_t < D_0, M, D_1 > K_m(۲)$ ، برای مقادیر مختلف t ، تجزیه‌پذیر هستند که رئوس \bar{K}_t ، $\infty_1, \infty_2, \dots, \infty_t$ می‌باشد. در لم‌های بعد m فرد را به صورت $m = ۲l + ۱$ و s را عددی صحیح و نامنفی در محدوده‌ی $۰ \leq s \leq l$ در نظر بگیرید.

لم ۵.۳.۳. اگر s فرد باشد در این صورت گراف زیر قابل تجزیه به m -دورهاست.

$$K_m(۲) \langle \emptyset, \{0, 1, 2, \dots, m - 2s - 1\}, \emptyset \rangle \vee \bar{K}_s.$$

برهان. فرض کنید که C یک $(m - s)$ -دور به شکل a_1, a_2, \dots, a_{m-s} باشد که برای $۱ \leq i \leq \frac{(m-s)}{۲}$ ، داریم $a_{۲i-1} = a_{۱-i}^{(0)}$ و $a_{۲i} = a_{۱-i}^{(1)}$. توجه کنید که $m - 2s$ یال استفاده شده در ابتدای این دور هر کدام دقیقاً یکی از طول مختلط‌های $0, 1, \dots, m - 2s - 1$ را

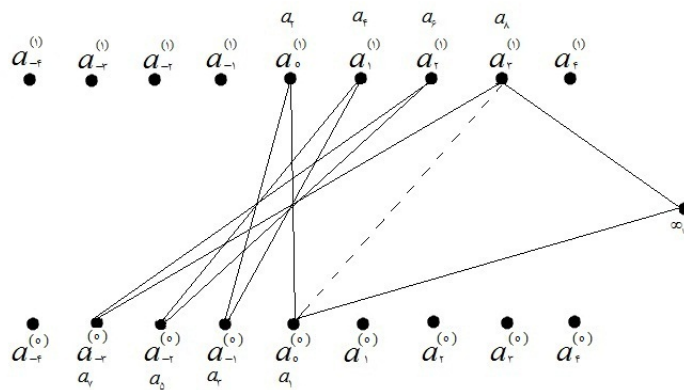
^۷Kotzing

^۸Rosa

^۹Jackson

به‌کار می‌برند. در واقع s تا یال انتهای این دور دارای طول مختلط هستند اما در مجموعه‌ی $\{0, 1, \dots, m - 2s - 1\}$ قرار ندارند.

اگر این s یال برای $1 \leq i \leq s$ باشد، $x_i y_i$ را با -2 مسیر $x_i \infty y_i$ جابه‌جا می‌کنیم و با این کار m -دور C_0 به‌دست می‌آید. درنهایت m -دور C_j را برای $j = 1, \dots, m - 1$ از افزودن j به اندیس‌های رئوس C_0 به جز رأس ∞_i می‌سازیم که m -دوره‌های C_j ، $0 \leq j \leq m - 1$ ، دو به دو مجزا هستند. (به‌عنوان مثال شکل ۳.۳ را ببینید). \square

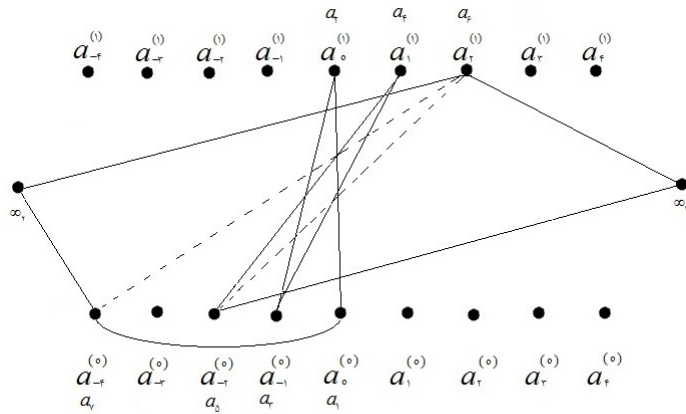


شکل ۳.۳: C_0 در یک C_q -تجزیه‌پذیری از گراف $\langle K_1, \{0, \dots, q\}, \emptyset \rangle \vee \overline{K_1}$.

لم ۶.۳.۳. اگر s زوج باشد در این صورت گراف زیر قابل تجزیه به m -دورهاست. به یاد بیاورید که $m = 2l + 1$.

$$K_m(2) \langle \{l\}, \{0, 1, \dots, m - 2s - 2\}, \emptyset \rangle \vee \overline{K_s}.$$

برهان. $(m-s)$ -دور $C = a_1, a_2, \dots, a_{m-s}$ را در نظر بگیرید که برای $1 \leq i \leq \frac{(m-s-1)}{2}$ داریم $a_{2i} = a_{i-1}^{(1)}$ و $a_{2i-1} = a_{i-1}^{(0)}$ و $a_{m-s} = a_{-l}^{(0)}$. $m - 2s - 1$ یال به‌کار رفته در ابتدای دور C ، دقیقاً هر کدام یکی از طول مختلط‌های $0, 1, 2, \dots, m - 2s - 2$ را استفاده می‌کنند. فرض کنید s یال انتهایی این دور، برای $1 \leq i \leq s$ باشد، طول این s یال در مجموعه‌ی $\{0, 1, 2, \dots, m - 2s - 2\}$ قرار ندارد. پس در دور C ، یال $x_i y_i$ را با -2 مسیر $x_i \infty y_i$ جابه‌جا می‌کنیم تا دور C_0 به‌دست آید و همچون لم قبل برای $1, \dots, m - 1$ ، C_j ها را از افزودن j به اندیس‌های رئوس C_0 به جز ∞_i می‌سازیم. (برای مثال شکل ۴.۳ را ببینید). \square

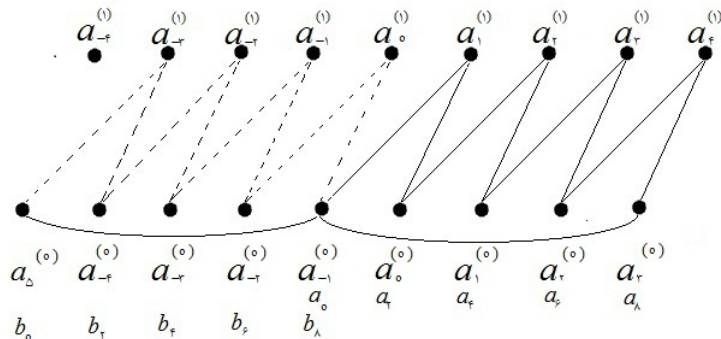


شکل ۴.۳: C_0 در یک C_4 -تجزیه‌پذیری از گراف $\vee \bar{K}_2 < \{4\}, \{0, \dots, 6\}, \emptyset >$.

لم ۷.۳.۳. اگر $S \subseteq \{2k-1 \mid 1 \leq k \leq l\}$ ، در این صورت گراف زیر به m -دورها قابل تجزیه است.

$$G = K_m(2) \langle \{l\}, S \cup \{S+1\}, \emptyset \rangle.$$

برهان. برای هر $2k-1 \in S$ که $1 \leq k \leq l$ ، دو m -دور $C^{(k)} = a_0, a_1, \dots, a_{m-1}$ و $C'^{(k)} = b_0, b_1, \dots, b_{m-1}$ را در نظر بگیرید که برای $0 \leq i \leq l$ داریم: $a_{2i} = a_{i-k}^{(0)}$ و $a_{2i+1} = a_{i-k-1}^{(0)}$ و برای $0 \leq i \leq l-1$ داریم: $a_{2i+1} = a_{k+i}^{(1)}$ و $b_{2i+1} = a_{k+i-1}^{(1)}$. بنابراین $C^{(k)}$ و $C'^{(k)}$ به اندازه‌ی $|S|$ ، m -دوره‌های یال-مجزا در G ایجاد می‌کنند که بعد از حذف این m -دورها برای هر $2k-1 \in S$ ، m یال در G باقی می‌ماند. با کمک استقرا بر روی $|S|$ می‌توان نشان داد که m یال باقیمانده در G نیز یک m -دور تشکیل می‌دهد. (شکل ۵.۳ را مشاهده کنید). \square



شکل ۵.۳: C_1 و C'_1 در یک C_4 -تجزیه‌پذیری از گراف $\vee \bar{K}_2 < \{4\}, \{1, 2\}, \emptyset >$.

تعریف ۸.۳.۳. به گراف به دست آمده از K_n که یال‌های یک زیرگراف کامل از مرتبه v ، از آن حذف شده است، گراف کامل از مرتبه n با سوراخی از اندازه v می‌گویند و با $K_n - K_v$ نشان می‌دهند که سوراخ آن همان رئوس K_v هستند.

لم ۹.۳.۳. اگر $3 \leq m$ و $1 \leq v$ عددهای فرد باشند و همچنین $q \leq m + 2r - 1$ باشد که q و r از رابطه $v = q \frac{m-1}{2} + r$ و $1 \leq r \leq \frac{m-1}{2}$ به دست می‌آیند، در این صورت $K_{2m+v} - K_v$ قابل تجزیه به m -دورهاست.

توجه. به ازای $5 \leq m$ و $v < 3m$ ، شرط $q \leq m + 2r - 1$ همیشه برقرار است.

برهان. می‌دانیم $1 + 2l = m$ و K_m بنابه ساختار والکی در بخش ۱.۳، C_m -تجزیه پذیر است. فرض کنید O_1, O_2, \dots, O_l ، m -دورهای همیلتنی این تجزیه باشند که یال‌های K_m را افزاز می‌کنند. ما در این جا مجموعه رئوس K_m را \mathbb{Z}_m و O_l را دوری شامل یال‌های طول مختلط l در نظر می‌گیریم و نشان می‌دهیم $G = K_m(2) \langle D, \mathbb{Z}_m, D \rangle \vee \overline{K}_v$ برای $D = \{0, 1, \dots, l\}$ قابل تجزیه به m -دورهاست. برای انجام این کار یال‌های G را به زیر گراف‌های C_m -تجزیه پذیر افزاز می‌کنیم.

نوع ۱. l زوج می‌باشد (پس r فرد است).

ابتدا G را به صورت $G = G_1 \cup (G_2 \vee \overline{K}_{ql})$ افزاز می‌کنیم که داریم:

$$G_1 = K_m(2) \langle \emptyset, \{0, 1, \dots, m - 2r - 1\}, \emptyset \rangle \vee \overline{K}_r,$$

$$G_2 = K_m(2) \langle D, \{m - 2r, m - 2r + 1, \dots, m - 1\}, D \rangle.$$

G_1 با توجه به لم ۵.۳.۳، C_m -تجزیه پذیر است که در آن $s = r$ می‌باشد. G_2 اجتماعی از گراف‌های $G'_1 = K_m(2) \langle D \setminus \{l\}, \emptyset, D \rangle$ و $G''_1 = K_m(2) \langle \{l\}, \{m - 2r, \dots, m - 1\}, \emptyset \rangle$ است که G'_1 به m -دورهای $O_i^{(0)}$ ، $1 \leq i \leq l - 1$ و $O_i^{(1)}$ ، $1 \leq i \leq l$ ، تجزیه پذیر است و G''_1 بنابه لم ۷.۳.۳، C_m -تجزیه پذیر است. بنابراین G_2 به m -دورها تجزیه می‌شود. یک محاسبه‌ی ساده نشان می‌دهد که تعداد m -دورها در این افزاز، $m + 2r - 1$ است. q تا از این دورها را مانند C_1, C_2, \dots, C_q انتخاب می‌کنیم و G_2 را به صورت $G_2 = G_3 \cup G_4$ افزاز می‌کنیم، که G_4 شامل دورهای C_1, C_2, \dots, C_q و G_3 شامل یال‌های باقیمانده از G_2 می‌باشد. بنابراین G_2 به m -دورها تجزیه می‌شود و فقط افزاز $G_4 \vee \overline{K}_{ql}$ می‌ماند.

اما $G_4 \vee \overline{K}_{ql}$ به q گراف یکریخت با گراف نوع لم ۶.۳.۳ افزاز می‌شود که در آن‌ها $s = l$ می‌باشد و از این رو C_m -تجزیه پذیر است.

نوع ۲. l و r فرد هستند (بنابراین q زوج است).

ابتدا فرض کنید $q \leq 2r$. G را به صورت $G = G_1 \cup (G_2 \vee \overline{K}_{ql})$ افزاز می‌کنیم که

$$G_1 = K_m(\Psi)\langle\emptyset, \{0, 1, \dots, m - 2r - 1\}, \emptyset\rangle \vee \overline{K}_r,$$

$$G_2 = K_m(\Psi)\langle D, \{m - 2r, m - 2r + 1, \dots, m - 1\}, D\rangle.$$

G_1 با کمک لم ۵.۳.۳ که در آن $s = r$ ، C_m -تجزیه‌پذیر می‌باشد و برای G_2 داریم:

$$G_2 = K_m(\Psi)\langle\emptyset, \{m - 2r, \dots, m - 2r + q + 1\}, \emptyset\rangle \cup$$

$$K_m(\Psi)\langle\{l\}, \{m - 2r + q, \dots, m - 1\}, \emptyset\rangle \cup K_m(\Psi)\langle D \setminus l, \emptyset, D\rangle.$$

از این سه زیرگراف، دومین زیرگراف با کمک لم ۷.۳.۳ به m -دورها تجزیه می‌شود و سومین زیرگراف به m -دورهای همیلتنی $O_i^{(0)}$ ، $1 \leq i \leq l - 1$ و $O_i^{(1)}$ ، $1 \leq i \leq l$ افزاز می‌شود. حال فقط افزاز \overline{K}_{ql} $K_m(\Psi)\langle\emptyset, \{m - 2r, \dots, m - 2r + q - 1\}, \emptyset\rangle \vee \overline{K}_{ql}$ باقی می‌ماند که خود می‌تواند به q گراف یکرخیخت با گراف نوع ۷.۳.۳ افزاز شود که در آن‌ها $s = l$.

حال فرض کنید $q \leq 2r + 2$ ، ابتدا G را به شکل $G = G_1 \cup (G_2 \vee \overline{K}_{ql})$ در نظر بگیرید که

$$G_1 = K_m(\Psi)\langle\emptyset, \{1, 2, \dots, m - 2r\}, \emptyset\rangle \vee \overline{K}_r,$$

$$G_2 = K_m(\Psi)\langle D, \{m - 2r + 1, \dots, m\}, D\rangle.$$

G_1 با توجه به لم ۵.۳.۳، به m -دورها قابل تجزیه است که در آن $s = l$ فرض کنید $O = O_1 \cup O_2 \cup \dots \cup O_{q-r}$ و φ را گرافی با یال‌های $O^{(0)}$ و $O^{(1)}$ و یال‌های $K_m(\Psi)\langle\emptyset, \{m - 2r + 1, \dots, m\}, \emptyset\rangle$ در نظر بگیرید. $\Delta\varphi = q$ عدد رنگی گراف φ می‌باشد که برای هر $1 \leq i \leq m - 1$ ، $K_m(\Psi)\langle\emptyset, \{i\}, \emptyset\rangle$ یک کلاس رنگی است. بنابراین $\varphi \vee \overline{K}_{ql}$ به q گراف یکرخیخت با گراف نوع لم ۵.۳.۳ افزاز می‌شود و لذا به m -دورها تجزیه می‌شود. نوع ۳. l فرد و r زوج است (بنابراین q فرد و $q \leq m + 2r - 2$ می‌باشد). ابتدا فرض کنید $q \leq 2r + 1$. G را به شکل $G = G_1 \cup (G_2 \vee \overline{K}_{ql})$ افزاز می‌کنیم به طوری که

$$G_1 = K_m(\Psi)\langle\emptyset, \{0, 1, \dots, m - 2r - 2\}, \{l\}\rangle \vee \overline{K}_r,$$

$$G_2 = K_m(\Psi)\langle D, \{m - 2r - 1, \dots, m - 1\}, D \setminus \{l\}\rangle.$$

G_1 از گراف نوع لم ۶.۳.۳ است که در آن $s = r$ ، بنابراین به m -دورها تجزیه می‌شود. برای G_2 داریم:

$$G_2 = K_m(\Psi)\langle\emptyset, \{m - 2r - 1, \dots, m - 2r + q - 2\}, \emptyset\rangle \cup$$

$$K_m(\Psi)\langle\{l\}, \{m - 2r + q - 1, \dots, m - 1\}, \emptyset\rangle \cup K_m(\Psi)\langle D \setminus \{l\}, \emptyset, D \setminus \{l\}\rangle.$$

از این سه زیرگراف، دومی از گراف نوع لم ۷.۳.۳ می‌باشد و لذا C_m -تجزیه‌پذیر است. سومین زیرگراف را می‌توان به m -دورهای $O_i^{(0)}$ و $O_i^{(1)}$ که $1 \leq i \leq l - 1$ ، افزاز کرد. حال فقط تجزیه‌ی \overline{K}_{ql} $K_m(\Psi)\langle\emptyset, \{m - 2r - 1, \dots, m - 2r + q - 2\}, \emptyset\rangle \vee \overline{K}_{ql}$ باقی می‌ماند که می‌توان آن را به q گراف یکرخیخت با گراف نوع لم ۵.۳.۳ افزاز کرد که در آن‌ها $s = l$.

اکنون فرض کنید $q \leq 2r + 3$. ابتدا G را به صورت $G = G_1 \cup (G_2 \vee \overline{K}_{ql})$ افراز می‌کنیم به طوری که

$$G_1 = K_m(2) \langle \emptyset, \{1, 2, \dots, m - 2r - 1\}, \{l\} \rangle \vee \overline{K}_r,$$

$$G_2 = K_m(2) \langle D, \{m - 2r, \dots, m\}, D \setminus \{l\} \rangle.$$

G_1 از گراف نوع لم ۶.۳.۳ با $s = r$ است و بنابراین C_m -تجزیه پذیر می‌باشد. $O = O_1 \cup O_2 \cup \dots \cup O_{-r+\frac{q-1}{2}}$ را در نظر بگیرید و فرض کنید φ گرافی با یال‌های $O^{(e)}$ و $O^{(l)}$ و $K_m(2) \langle \emptyset, \{m - 2r, \dots, m\} \rangle$ باشد. با ادامه‌ی کار مانند نوع ۲ به تجزیه‌ی مطلوب می‌رسیم. \square

حال به کمک لم‌ها و تعاریف گفته شده در بالا اثبات قضیه ۱.۳.۳ را شرح می‌دهیم.

برهان. با توجه به این‌که تمام m ‌های فرد کوچکتر از ۱۴ همگی توانی از یک عدد اول فرد هستند، با کمک لم ۴.۳.۳ در می‌یابیم که مسئله‌ی تجزیه‌ی K_n به m -دورها برای $13 \leq m$ حل شده است. پس به بررسی $m \leq 15$ می‌پردازیم.

n را به صورت $n = 2mx + v$ در نظر بگیرید که $3m < v \leq m$ و $1 \leq x$ می‌باشد. اکنون به ازای x ‌های مختلف موارد زیر رخ می‌دهند:

(الف) به ازای $x = 1$ ، n در محدوده‌ی $3m < n < 4m$ قرار دارد و می‌توان K_{2m+v} را به $K_{2m+v} - K_v$ و یک K_v تجزیه کرد که با توجه به لم ۹.۳.۳، گراف کامل از مرتبه‌ی $2m + v$ با سوراخی از اندازه‌ی v ، قابل تجزیه به m -دورهاست. چون n قابل قبول است (یعنی در شرایط لم ۱.۱.۳ صدق می‌کند)، نتیجه می‌شود که v نیز قابل قبول است و داریم: (به پیمانه‌ی $2m$) $v(v-1) \equiv 0$. طبق فرض نیز K_v دارای تجزیه‌ی m -دوری است.

(ب) برای $x = 2$ ، گراف K_{4m+v} را به گراف‌های $K_{4m+v} - K_{2m+v}$ و K_{2m+v} تجزیه کرده و سپس با استفاده از لم ۹.۳.۳، گراف $K_{4m+v} - K_{2m+v}$ را به m -دورها تجزیه می‌کنیم. K_{2m+v} نیز در حالت (الف) تجزیه شد.

(ج) برای $x \geq 3$ ، گراف K_{2mx+v} را به یک K_v و x گراف یکرخت با $K_{2m+v} - K_v$ و یک گراف x بخشی $K_{2m, 2m, \dots, 2m}$ تجزیه می‌کنیم. تجزیه‌ی دو گراف اول در حالت‌های بالا بحث شد و $K_{2m, 2m, \dots, 2m}$ با کمک قضیه‌ی ۸.۲.۲، قابل تجزیه به m -دورهاست.

بنابراین K_{2mx+v} ، C_m -تجزیه پذیر است و برهان قضیه‌ی ۱.۳.۳ کامل می‌شود. \square

بعد از بررسی مرحله‌ی استقرایی، به اثبات آلسیچ و گاولاس در مورد تجزیه‌ی گراف‌های کامل به m -دورها به ازای m و n فرد می‌پردازیم که با تعریف زیر شروع می‌شود.

تعریف ۱۰.۳.۳. فرض کنید $A \subseteq \{1, 2, \dots, \frac{(n-1)}{2}\}$ ، که n یک عدد صحیح و مثبت و فرد است. G را یک گراف چرخشی از مرتبه‌ی $n-1$ با مجموعه اتصال $A \cup -A$ و ∞ را یک رأس

متمایز که رأسی از G نیست در نظر بگیرید. گراف $H(n; A) = G \vee K_1$ را تعریف می‌کنیم که رأس K_1 با ∞ نام گذاری می‌شود.

این تعریف نتیجه می‌دهد که گراف K_n می‌تواند به عنوان اتصال یک گراف چرخشی از مرتبه‌ی $n - 1$ و K_1 در نظر گرفته شود که در آن $K_n = H(n, A)$ و $A = \{1, 2, \dots, \frac{(n-1)}{2}\}$ می‌باشند.

لم ۱۱.۳.۳. فرض کنید G یک گراف چرخشی از مرتبه‌ی $n - 1$ و m و n اعداد صحیح مثبت و فرد هستند که $3 \leq m \leq n < 3m$. اگر $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{\frac{(m-2)}{2}} < \frac{n-1}{2}\}$ به طوری که $C_m | H(n; A) = G \vee K_1$ در این صورت $a_1, a_2 < \dots < a_{\frac{(m-2)}{2}} < \frac{n-1}{2}$

برهان. رئوس زیرگراف چرخشی یعنی G را u_0, u_1, \dots, u_{n-2} نامگذاری می‌کنیم. ما داریم $u_i u_j \in E(H(n; A))$ اگر و تنها اگر $j - i \in (A \cup -A)$. جایگشت ρ را به صورت $(\infty u_0 u_1 \dots u_{n-2})$ در نظر بگیرید. از تعریف ۱۳.۱.۳ می‌دانیم که اگر L هر زیرگرافی از $H(n; A)$ باشد، در این حال $\rho(L)$ به صورت $\rho \in \text{Aut}(H(n; A))$ تعریف می‌شود. فرض کنید P یک گذر به طول $\frac{m-3}{2}$ باشد که به صورت زیر داده شده است:

$$P = u_0, u_{a_1}, u_{a_1 - a_2}, u_{a_1 - a_2 + a_3}, \dots, u_{a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots \pm a_{\frac{(m-5)}{2}} \pm a_{\frac{(a-2)}{2}}}.$$

توجه کنید که P دقیقاً یک یال از هر طول در A را استفاده می‌کند؛ همچنین رئوس یک در میان P که با u_{a_1} شروع می‌شوند، اندیس اکیداً صعودی دارند، در صورتی که رئوس یک در میان P که با u_0 شروع می‌شوند، اندیس اکیداً نزولی دارند. بنابراین رئوس P متمایزند و P یک مسیر است. آخرین یال استفاده شده در P طول $\frac{n-1}{2} < a_{\frac{(m-2)}{2}}$ دارد، به طوری که همه‌ی رئوس P در بازه‌ی شامل u_0 قرار می‌گیرند که این بازه از $u_{a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots \pm a_{\frac{(m-2)}{2}}}$ تا $u_{a_1 - a_2 + \dots \pm a_{\frac{(m-5)}{2}}}$ می‌باشد. این بازه حداکثر طول $\frac{n-3}{2}$ دارد. از سوی دیگر مسیر $\rho^{\frac{n-1}{2}}(P)$ از مسیر P راس-مجازست و یال به طول a_i در P متقابل قطری یال به طول a_i در $\rho^{\frac{n-1}{2}}(P)$ است. فرض کنید $w = u_{a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots \pm a_{\frac{(m-5)}{2}} \pm a_{\frac{(m-2)}{2}}}$ آخرین راس P باشد. دور C به طول m را به صورت زیر تشکیل می‌دهیم:

$$C = \{w \rho^{\frac{n-1}{2}}(w), \infty u_0, \infty u_{n-1}\} \cup P \cup \rho^{\frac{n-1}{2}}(P).$$

بنابراین $C, \rho(C), \rho^2(C), \dots, \rho^{\frac{n-3}{2}}(C)$ یک افراز از مجموعه یال‌های گراف $H(n; A)$ به m -دورهاست.

□

قضیه‌ی بعد اصلی‌ترین بحث در این بخش می‌باشد که آن را بیان و اثبات می‌کنیم.

قضیه ۱۲.۳.۳. برای m و n صحیح مثبت و فرد که $3 \leq m \leq n$ ، گراف K_n می تواند به m -دورها تجزیه شود اگر و تنها اگر تعداد یال های K_n مضربی از m باشد.

برهان. فرض کنید m و n اعداد صحیح مثبت و فرد باشند که در محدوده $m \leq n < 3m$ هستند. پس n را به صورت $n = m + r$ یا $n = 2m + r$ می نویسیم که $0 \leq r < m$.

فرض کنید $A = \{1, 2, \dots, \frac{(n-1)}{2}\}$ و رئوس گراف $K_n = H(n; A) = G \vee K_1$ با $u_0, u_1, \dots, u_{n-2}, \infty$ نامگذاری شده باشند که ∞ رأس K_1 و G یک گراف چرخشی از مرتبه $n-1$ است. جایگشت ρ را به صورت $(\infty)(u_0, u_1, \dots, u_{n-1})$ در نظر بگیرید. حال با توجه به $n = m + r$ یا $n = 2m + r$ بقیه ی اثبات به دو نوع تقسیم می شود.

نوع ۱. فرض کنید که $n = m + r$ باشد. به وضوح اگر $r = 0$ باشد با انجام ساختار والکی در بخش ۱.۳، K_n به دورهای همیلتنی تجزیه می شود. پس فرض می کنیم که $0 < r < m$. فرض کنید B یک زیرمجموعه از $A = \{1, 2, \dots, \frac{(n-1)}{2}\}$ باشد به طوری که $|B| = \frac{r}{2}$ و فرض کنید می توانیم گراف چرخشی $X(n-1; B \cup -B)$ را به m -دورها تجزیه کنیم. از آنجا که $H(n; A) = H(n; A-B) \oplus X(n-1; B \cup -B)$ و می توان $H(n; A-B)$ را با کمک لم ۱۱.۳.۳ به m -دورها تجزیه کرد، لذا می توان $H(n; A)$ را به m -دورها تجزیه کرد. بنابراین هدف ما یافتن یک مجموعه ی B مناسب به طول $\frac{r}{2}$ است به طوری که $X(n-1; B \cup -B)$ به m -دورها تجزیه شود. چون m و n فرد هستند، r باید زوج باشد. r را به صورت $r = 2^e a$ در نظر بگیرید که a عددی فرد است. از آنجا که (به پیمانه ی $2m$) $n(n-1) \equiv 0$ ، پس (به پیمانه ی $2m$) $r(r-1) \equiv 0$ و چون $r \frac{(r-1)}{2} = 2^{e-1} a(2^e a - 1)$ ، m را به صورت $m = a'b'$ می نویسیم که $a'|a$ و $b'|(2^e a - 1)$. فرض کنید $a'c = \frac{r}{2}$. داریم:

$$n-1 = m+r-1 = a'b' + 2^e a - 1 = b'(a' + \frac{(2^e a - 1)}{b'}).$$

حال رئوس $R = X(n-1; B \cup -B)$ را به b' بخش که هر بخش $l = a' + \frac{(2^e a - 1)}{b'}$ رأس دارد، افراز می کنیم.

مشاهده می کنید که l زوج است. اکنون با توجه به کلاس هم نهستی a' به پیمانه ی ۴ اثبات را ادامه می دهیم.

نوع ۱.۱. فرض کنید که (به پیمانه ی ۴) $a' \equiv 3$. وقتی $a' < 7$ ، مسیر $P_{0,0}$ را که طول $a' - 1$ دارد به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$P_{0,0} = u_0, u_2, u_{-1}, u_3, \dots, u_{-\frac{(a'-7)}{4}}, u_{\frac{(a'+1)}{4}}, u_{-\frac{(a'+1)}{4}}, u_{\frac{(a'+5)}{4}}, \dots, u_{-\frac{(a'-1)}{4}}, u_{\frac{(a'+1)}{4}}, u_{1-l}.$$

ملاحظه می‌کنید که طول یال‌های $P_{\circ, \circ}, a', \dots, \frac{(a'+1)}{2}, \dots, \frac{(a'-1)}{2} + l, \frac{(a'-3)}{2}, \dots, 2, 3, \dots$ هستند. مسیر $P_{\circ, 1}$ را همچون قبل به صورت $P_{\circ, 1} = \rho^l(P_{\circ, \circ})$ به دست می‌آوریم. از آن جا که $l - \frac{(a'-1)}{2} \geq \frac{(a'+3)}{2}$ مسیره‌های $P_{\circ, \circ}$ و $P_{\circ, 1}$ رأس-مجزا هستند. دوباره توان‌های ρ^l را در نظر بگیرید که روی $P_{\circ, \circ}$ اعمال می‌شوند و مسیره‌های $P_{\circ, \circ}, P_{\circ, 1}, \dots, P_{\circ, b'-1}$ به دست می‌آیند. فرض کنید $B_{\circ} = \{2, 3, \dots, \frac{(a'-3)}{2}, \frac{(a'-1)}{2} + l, \frac{(a'+1)}{2}, \dots, a'\}$. وقتی $a' = 3$ و $P_{\circ, \circ} = u_{\circ}, u_2, u_{1-l}$ را به صورت زیر نظر بگیرید:

$$P_{\circ, \circ} = u_{\circ}, u_2, u_{-2}, u_3, u_{-3}, u_4, u_{1-l}$$

اگر $c > 1$ ، در این صورت برای هر $j = 1, 2, \dots, c-1$ مسیر $P_{j, \circ}$ از افزودن jl به اندیس رئوس زوج $P_{\circ, \circ}$ به دست می‌آید که به صورت زیر است:

$$P_{j, \circ} = u_{\circ}, u_{2+jl}, u_{-1}, u_{3+jl}, \dots, u_{-\frac{(a'-7)}{4}}, u_{\frac{(a'+1)}{4}+jl}, u_{-\frac{(a'+1)}{4}}, \\ u_{\frac{(a'+5)}{4}+jl}, \dots, u_{-\frac{(a'-1)}{4}}, u_{\frac{(a'+1)}{4}+jl}, u_{1-l}$$

و همچون قبل توان‌های ρ^l را روی $P_{j, \circ}$ اعمال می‌کنیم. در این صورت طول یال‌های مسیره‌های حاصل به صورت زیر می‌باشد.

$$B_j = \{2 + jl, \dots, \frac{(a'-3)}{2} + jl, \frac{(a'-1)}{2} + (j+1)l, \frac{(a'+1)}{2} + jl, \dots, a' + jl\}.$$

برای $0 \leq j \leq c-1$ را به عنوان مجموعه‌ی شامل مسیره‌های $P_{j, \circ}, P_{j, 1}, \dots, P_{j, b'-1}$ در نظر بگیرید. در این صورت مجموعه‌ی $B_{\circ} \cup B_1 \cup \dots \cup B_{c-1}$ شامل $c(a'-1)$ طول است. همچنین بلندترین یال $B_{\circ} \cup B_1 \cup \dots \cup B_{c-1}$ ، طول $\frac{(a'-1)}{2} + cl$ دارد و $\frac{(a'-1)}{2} + cl < \frac{n-1}{2}$. توجه کنید که $B_{\circ} \cup B_1 \cup \dots \cup B_{c-1}$ شامل هیچ طولی به پیمانه‌ی l ، همنهشت با ± 1 نیست و این طول‌ها که عضو مجموعه‌ها نیستند به صورت $a' > l - 1$ هستند (این مورد را به طور جداگانه بررسی می‌کنیم).

بنابراین ما گراف چرخشی از مرتبه‌ی b' را برای اتصال مسیره‌های هر خانواده‌ی F_j به شکل m -دور C_j استفاده می‌کنیم و همین‌طور این گراف چرخشی مرتبه‌ی b' در حالت ۲.۲ در اثبات این قضیه کاربرد دارد. در این صورت مجموعه‌ی زیر

$$\{C_j, \rho(C_j), \rho^2(C_j), \dots, \rho^{l-1}(C_j) \mid 0 \leq j \leq c-1\}$$

یک افزاز از مجموعه یال‌های گراف چرخشی R به m -دورهاست. اگر $l = a' + 1$ و $3 < a'$ ، مسیر $P_{\circ, \circ}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$P_{\circ, \circ} = u_{\circ}, u_{a'}, u_1, u_{a'-1}, \dots, u_{\frac{(a'-3)}{4}}, u_{\frac{a'-(a'-3)}{4}}, u_{\frac{(a'+5)}{4}}, u_{\frac{a'-(a'+1)}{4}}, \dots, \\ u_{\frac{(a'-1)}{4}}, u_{\frac{(a'+3)}{4}}, u_{\frac{(a'+1)}{4}}$$

و برای $a' = 3$ ، مسیر $P_{\circ, \circ} = u_{\circ}, u_3, u_2$ را در نظر بگیرید. طول‌های استفاده شده در مسیر فوق $a', \dots, \frac{(a'+5)}{2}, \frac{(a'+3)}{2}, \frac{(a'-1)}{2}, 1, 2, \dots$ هستند. در نظر داشته باشید که دیگر مسیرها در $F_{\circ}, F_1, \dots, F_{c-1}$ دقیقاً مثل بالا به دست آمده‌اند.

همان‌طور که گفته شد گراف چرخشی از مرتبه b' را برای اتصال مسیرهای هریک از این خانواده‌ها به شکل m -دورها استفاده می‌کنیم. اما تفاوت این است که یال‌های اتصال، به پیمانه‌ی l هم‌نهشت با $\frac{(a'+1)}{2} = \frac{l}{2}$ هستند و ما باید دقت کنیم زیرا به پیمانه‌ی l ، $\frac{-(a'+1)}{2}$ با $\frac{(a'+1)}{2}$ هم‌نهشت است.

در این نوع، $b' = r - 1$ و اگر b' را به صورت $b' = a't + s$ که $0 \leq s < a'$ بنویسیم، می‌بینیم که تعداد یال‌های K_{m+r} بر $m = a'b'$ بخش پذیر است اگر و تنها اگر $s = a' - 1$. از آن‌جا که m فرد است، t باید فرد باشد. بنابراین $(r = a'(t+1))$ ، به طوری که $b' = a'(t+1) - 1$ و $c = \frac{(t+1)}{2}$.

اکنون اجازه دهید طول یال‌های اتصال مختلف که ناشی از کمان‌های دورهای همیلتنی جهت‌دار واقع در گراف چرخشی هستند را بررسی کنیم.

اگر در یک دور همیلتنی کمانی از v_i به v_k وجود داشته باشد، در این صورت رأس انتهایی مسیرهای $P_{j,i}$ را به رأس ابتدایی مسیرهای $P_{j,k}$ وصل می‌کنیم، که این یال اتصال، طول $(k-i-1)l + \frac{(a'+1)}{2}$ دارد. اگر کمان از v_k به v_i باشد، در این صورت طول یال اتصال $(k-i)l + \frac{(a'+1)}{2}$ می‌باشد. بنابراین اگر $c = 4q$ ، آن‌گاه همچون قبل تجزیه‌های همیلتنی از گراف‌های چرخشی درجه ۴ را استفاده می‌کنیم که این گراف‌ها عبارتند از:

$$X(b'; \{\pm 1, \pm 3\}), X(b'; \{\pm 5, \pm 7\}), \dots, X(b'; \{\pm(2q-3), \pm(2q-1)\}).$$

از آن‌جا که $b' = 8qa' + 1 \geq 24q + 1$ و $c = 4q + 1$ و $c = 4q + 2$ و $c = 4q + 3$ استدلال مشابه به کار می‌رود.

نوع ۲.۱. فرض کنید که (به پیمانه‌ی ۴) $a' \equiv 1$. چون $a' = 1$ و $m < r$ را نتیجه می‌دهد، ما $a' \leq 5$ را در نظر می‌گیریم. ابتدا فرض کنید که $l = a' + 1$. مانند نوع $l = a' + 1$ در حالت ۱.۱، $b' = a'(t+1) - 1$ و $c = \frac{(t+1)}{2}$ که t فرد است را به دست می‌آوریم. مسیر $P_{\circ, \circ}$ را به صورت زیر بگیرید:

$$P_{\circ, \circ} = u_{\circ}, u_1, u_{-1}, u_2, u_{-2}, \dots, u_{\frac{(a'-1)}{2}}, u_{-\frac{(a'-1)}{2}}.$$

مسیرهای $P_{\circ, 1}, P_{\circ, 2}, \dots, P_{\circ, b'-1}$ با اعمال توان‌های ρ^l روی $P_{\circ, \circ}$ ، به روش معمول گفته شده به دست می‌آیند. برای هر $j < \circ$ ، مسیر $P_{j, \circ}$ با افزودن lj به اندیس‌های رئوس زوج $P_{\circ, \circ}$ حاصل

می‌شود. سپس $P_{j,1}, \dots, P_{j,b-1}$ با اعمال توان‌های ρ^l روی $P_{j,0}$ به دست می‌آیند. F_j را به عنوان خانواده‌ای از مسیرهای $P_{j,0}, P_{j,1}, \dots, P_{j,b-1}$ در نظر بگیرید.

اگر $c = 4q$ ، در این صورت $39q \leq b'$ و مجموعه‌های $F_0, F_1, \dots, F_{4q-1}$ را استفاده می‌کنیم و توجه کنید که بلندترین یال، طول $(4q-1)l + a' - 1$ دارد. همچنین دوره‌های همیلتنی جهت‌دار ناشی از تجزیه‌ی همیلتنی گراف‌های چرخشی زیر را به کار می‌بریم.

$$X(b'; \{\pm 6q, \pm(6q+1)\}), X(b'; \{\pm(6q+2), \pm(6q+3)\}), \dots, \\ X(b'; \{\pm(8q-2), \pm(8q-1)\}).$$

یال‌های اتصال، طولی بیشتر از $(4q-1)l + a' - 1$ و کمتر از $\frac{(n-1)}{4}$ دارند به طوری که همه‌ی طول‌ها متمایز هستند.

در انواع دیگر c ، برای انجام این کارها آزادی عمل زیادی وجود دارد. برای مثال اگر $c = 4q+1$ ، مجموعه مسیرهای $F_2, F_3, \dots, F_{4q+2}$ به کار می‌روند و الگوی اتصال این خانواده‌ها مانند حالت $c = 4q$ است و یال‌های به طول $\frac{(a'+3)}{4}$ برای اتصال مسیرها به هم در دیگر خانواده‌ها استفاده می‌شوند. در انواع $c = 4q+2$ و $c = 4q+3$ نیز مشابه با حالت $c = 4q+1$ عمل می‌شود.

در نهایت فرض کنید که $l \geq a' + 3$. t را به صورت $t = l - \frac{(a'+1)}{4} - 2$ در نظر بگیرید که t فرد است. گذر $P_{0,0}$ به طول $a' - 1$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$P_{0,0} = u_{-t}, u_0, u_2, u_{-1}, \dots, u_{-\frac{(t-2)}{4}}, u_{\frac{(t+1)}{4}}, u_{-\frac{(t+1)}{4}}, u_{\frac{(t+5)}{4}}, u_{-\frac{(t+2)}{4}}, \\ u_{\frac{(t+7)}{4}}, \dots, u_{-\frac{(a'-1)}{4}}, u_{\frac{(a'+3)}{4}}.$$

از آن جا که $\frac{(a'-1)}{4} - 2 = (a'+2) - \frac{(a'+1)}{4} - 2 = t > (a'+2)$ پس $P_{0,0}$ یک مسیر است. وقتی $t = 3$ و $a' = 5$ ، مسیر فوق به صورت $P_{0,0} = u_{-3}, u_0, u_2, u_{-2}, u_4$ است. همانند قبل با اعمال توان‌های ρ^l روی $P_{0,0}$ مسیرهای $P_{0,1}, P_{0,2}, \dots, P_{0,b'-1}$ به دست می‌آیند. مشاهده می‌کنید که $l - t = \frac{(a'+5)}{4}$ ، به طوری که این مسیرها رأس-مجزا هستند. برای $0 \leq i \leq b' - 2$ رأس $P_{0,i}$ را به اولین رأس $P_{0,i+1}$ و آخرین رأس $P_{0,b'-1}$ را به اولین رأس $P_{0,0}$ وصل کرده تا m -دور C_0 ایجاد شود. طول یال‌های C_0 عناصر مجموعه‌ی زیر هستند.

$$B_0 = \{1, 2, \dots, t, t+1, t+3, \dots, a', a'+1\}$$

اگر $1 < c$ ، در این صورت برای هر $j = 1, 2, \dots, c-1$ ، با کم کردن jl از اندیس اولین رأس $P_{0,0}$ و افزودن jl به اندیس‌های رئوس فرد باقیمانده‌ی $P_{0,0}$ ، مسیر $P_{j,0}$ به دست می‌آید که به صورت زیر است:

$$P_{j,0} = u_{-(jl+t)}, u_0, u_{2+jl}, u_{-1}, \dots, u_{-\frac{(t-3)}{4}}, u_{\frac{(t+1)}{4}+jl}, u_{-\frac{(t+1)}{4}}, u_{\frac{(t+5)}{4}+jl}, u_{-\frac{(t+3)}{4}}, \\ , u_{\frac{(t+7)}{4}+jl}, \dots, u_{-\frac{(a'-1)}{4}}, u_{\frac{(a'+3)}{4}+jl}$$

و در ادامه همچون قبل توان‌های ρ^l را روی $P_{j,0}$ اعمال می‌کنیم. برای $2 \leq i \leq b' - 2$ آخرین رأس $P_{j,i}$ را به اولین رأس $P_{j,i+1}$ و آخرین رأس $P_{j,b'-1}$ را به اولین رأس $P_{j,0}$ وصل کرده تا m -دور C_j شکل گیرد. توجه کنید که این یال‌ها همگی طول $2jl - 1$ دارند. بنابراین طول یال‌های C_j عناصر مجموعه‌ی B_j هستند که در زیر آمده است:

$$B_j = \{2 + jl, 3 + jl, \dots, t + 1 + jl, t + 3 + jl, \dots, a' + jl, a' + 1 + jl, 2jl - 1\}.$$

فرض کنید $B = B_0 \cup B_1 \cup \dots \cup B_{c-1}$. بنابراین بلندترین یال B طول $2(c-1)l - 1$ یا $2(c-1)l - 1 < n - 1$ می‌بینیم که $a' + 1 + (c-1)l < \frac{n-1}{4}$ و $2(c-1)l - 1 < n - 1$ بنابراین مجموعه‌ی زیر

$$\{C_j, \rho(C_j), \rho^2(C_j), \dots, \rho^{l-1}(C_j) \mid 0 \leq j \leq c-1\}$$

یک افزاز از مجموعه یال‌های گراف چرخشی $R = X(n-1; B \cup -B)$ به m -دوره‌هاست.

نوع ۲. فرض کنید که $n = 2m + r$. چون n و m فرد هستند، در این نوع r نیز فرد است. ابتدا فرض کنید که $r = 1$ یعنی $n = 2m + 1$. رأس ∞ از $H(n; A) = G \vee K_1$ را که رأس K_1 است، با u_{n-1} نامگذاری جدید می‌کنیم. مانند قبل برای $0 \leq i$ و $j \leq n-1$ ، طول یال $u_i u_j$ وابسته به این‌که به پیمانه‌ی n در میان ۱ تا $\frac{(n-1)}{4}$ قرار دارد، $i - j$ یا $j - i$ است. جایگشت $\tau = (u_0 u_1 \dots u_{n-1})$ را در نظر بگیرید. فرض کنید که $\frac{(m-1)}{4}$ فرد باشد. m -دور C را به صورت زیر فرض کنید.

$$C = u_0, u_1, u_{-1}, u_2, u_{-2}, \dots, u_{\frac{(m-3)}{4}}, u_{-\frac{(m-3)}{4}}, u_{\frac{(m+5)}{4}}, u_{-\frac{(m+1)}{4}}, u_{\frac{m+9}{4}}, \\ u_{-\frac{(m+5)}{4}}, \dots, u_{\frac{(m+1)}{4}}, u_{-\frac{(m-1)}{4}}, u_0.$$

در این صورت $(C), \tau(C), \tau^2(C), \dots, \tau^{n-1}(C)$ یک افزاز از مجموعه یال‌های $K_n = H(n; A)$ به m -دوره‌هاست. حال فرض کنید که $\frac{(m-1)}{4}$ زوج باشد. m -دور داده شده در زیر را در نظر بگیرید.

$$C = u_0, u_1, u_{-1}, u_2, u_{-2}, \dots, u_{\frac{(m-1)}{4}}, u_{-\frac{(m-1)}{4}}, u_{\frac{m+7}{4}}, u_{-\frac{(m-3)}{4}}, u_{\frac{(m+11)}{4}}, \dots, \\ u_{-\frac{(m-3)}{4}}, u_{\frac{(m+1)}{4}}, u_{-\frac{(m+1)}{4}}, u_0.$$

مانند بالا، $(C), \tau(C), \tau^2(C), \dots, \tau^{n-1}(C)$ یک افراز از مجموعه یال‌های K_n به m -دورهاست. بنابراین گراف K_{2m+1} قابل تجزیه به m -دورهاست. اکنون فرض کنید که $0 < r < 1$. برای کامل کردن این اثبات روش استفاده شده در حل حالت $r = 1$ را تعمیم می‌دهیم؛ اما توجه کنید که این اثبات متفاوت از همه‌ی انواع قبلی است، چرا که دیگر نمی‌توان دو مسیر متقارن و متقابل قطری ساخت که از طریق یک یا دو رأس مرکزی به هم وصل می‌شوند تا یک دور ایجاد کنند. در عوض با تقسیم n به بخش‌هایی، $\frac{(r-1)}{2}$ تا طول را برای تولید m -دورها و m تا طول باقیمانده را برای ایجاد یک m -دور که τ روی آن عمل می‌کند، استفاده می‌کنیم. در نظر بگیرید که اگر $r = 2^e a + 1$ و $m = a'b'$ که $a' | a$ و $b' | (2^e a + 1)$ و $r < m$ ، در این صورت داریم: $n = 2m + r = b'(2a' + \frac{(2^e a + 1)}{b'})$. این رئوس را به b' بخش افراز می‌کنیم که هر بخش دارای $l = 2a' + \frac{(2^e a + 1)}{b'}$ رأس می‌باشد. فرض کنید $c = \frac{(r-1)}{2a'} = \frac{2^{e-1}a}{a'}$. کران پایین تعداد بخش‌ها با رابطه‌ی $2c = \frac{2^e a}{a'} > \frac{r}{a'} > \frac{m}{a'} = b'$ برای ما مشخص می‌شود. c را برای $0 \leq t \leq 3$ ، به شکل $c = 2k + t$ می‌نویسیم. ابتدا $t = 0$ و $\frac{(a'-1)}{2}$ را فرد بگیرید. مسیر $P_{0,0}$ به صورت زیر است:

$$P_{0,0} = u_0, u_1, u_{-1}, u_2, u_{-2}, \dots, u_{\frac{(a'-3)}{2}}, u_{-\frac{(a'-3)}{2}}, u_{\frac{(a'+5)}{2}}, u_{-\frac{(a'+1)}{2}}, \\ u_{\frac{(a'+9)}{2}}, \dots, u_{-\frac{(a'-3)}{2}}, u_{\frac{(a'+1)}{2}}, u_{-\frac{(a'+1)}{2}}.$$

طول یال‌های $P_{0,0}, a', \dots, \frac{(a'+1)}{2}, \frac{(a'-3)}{2}, \dots, 1$ هستند و مسیرهای $P_{0,b'-1}, \dots, P_{0,1}$ با روش قبل، از اعمال توان‌های τ^l روی $P_{0,0}$ به دست می‌آیند.

اکنون در حال اقدام برای استفاده از یال‌هایی هستیم که به عنوان یال‌های اتصال در ایجاد دورها هستند و طول آن‌ها به پیمانه‌ی l همنهشت با $\frac{(a'-1)}{2}$ است. بنابراین در تشکیل $P_{1,0}$ نمی‌خواهیم یک یال به طول $l - \frac{(a'-1)}{2}$ را استفاده کنیم. فرض کنید P مسیری باشد که با افزودن a' به اندیس‌های همه‌ی رئوس زوج در $P_{0,0}$ به دست می‌آید. پس طول یال‌های استفاده شده در P ، $2a', \dots, a' + \frac{(a'+1)}{2}, \dots, a' + 1$ هستند. اگر $2a' < l - \frac{(a'-1)}{2}$ ، در این صورت $P_{1,0} = P$ را در نظر بگیرید.

اگر $2a' < l - \frac{(a'-1)}{2}$ ، در این صورت رأس $u_{a'+\frac{(a'+1)}{2}}$ از P را حذف نمی‌کنیم بلکه به جای آن رأسی را حذف می‌کنیم که با حذف آن، یال به طول $l - \frac{(a'-1)}{2}$ حذف شود. از آنجا که $l - \frac{(a'-1)}{2}$ زوج است، این رأس حذف شده در فاصله‌ی u_0 تا u_l قرار دارد و

آخرین رأس مسیر حاصل در این فاصله، $u_{a'+\frac{(a'+1)}{2}}$ است و به این صورت مسیر $P_{1,0}$ ایجاد می شود. حال مسیرهای $P_{1,1}, P_{1,2}, \dots, P_{1,b'-1}$ را با اعمال توان های τ^l بر $P_{1,0}$ به دست می آوریم. مسیرهای $P_{1,0}, P_{1,1}, \dots, P_{1,b'-1}$ دو به دو رأس-مجزا هستند، زیرا $2a' < l$ نتیجه می دهد که

$$a' + \frac{(a'+1)}{2} < l - \frac{(a'-1)}{2}$$

در نوع خاص $a' = 3$ ، مسیر $P_{1,0} = u_0, u_4, u_{-1}$ و $P_{0,0} = u_0, u_2, u_{-1}$ را استفاده می کنیم. برای $j = 1, 2, \dots, 2k-1$ مسیر $P_{2j,0}$ را با افزودن jl به اندیس های رئوس زوج $P_{0,0}$ به دست آورده و $P_{2j,1}, \dots, P_{2j,b-1}$ بنا به روش معمول گفته شده از $P_{2j,0}$ به دست می آیند. در نهایت $P_{2j+1,0}$ با افزودن jl به اندیس های رئوس زوج $P_{1,0}$ به وجود می آید.

مسیرهای $P_{2j+1,1}, \dots, P_{2j+1,b'-1}$ نیز همچون روش قبل ایجاد می شوند. فرض کنید F_j به صورت $F_j = \{P_{j,0}, \dots, P_{2j+1,b'-1}\}$ در نظر گرفته شود. هیچ کدام از این مسیرها یال هایی که طول آنها به پیمانه l با $\pm \frac{(a'-1)}{2}$ هم نهشت است را استفاده نمی کنند، بلکه یال هایی به این طول ها را برای اتصال مسیرهای F_j به هم برای ایجاد m -دورها استفاده می کنیم، همچنین تشکیل m -دورها بر اساس دوره های جهت دار همیلتنی ناشی از تجزیه ی همیلتنی یک گراف چرخشی از مرتبه b' و درجه ۴ است. گراف چرخشی $X(b'; \{\pm(2s-1), \pm 2s\})$ را برای مجموعه مسیرهای $F_{4s-4}, F_{4s-3}, F_{4s-2}$ و F_{4s-1} استفاده می کنیم، که $1 \leq s \leq k$.

حال اجازه دهید که متمایز بودن همه ی طول های به کار گرفته شده را بررسی کنیم. طول بلندترین یال $2kl + \frac{(a'-1)}{2}$ است و کران پایین تعداد رئوس $n = b'l > 2cl = 8kl$ می باشد. بنابراین همه ی یال ها طول متمایز دارند.

اکنون نشان می دهیم که می توان m طول باقیمانده را برای ایجاد یک m -دور استفاده کرد. طول های باقیمانده را به صورت صعودی l_1, l_2, \dots, l_m مرتب می کنیم. از آن جا که بلندترین طول استفاده شده در قبل $2kl + \frac{(a'-1)}{2}$ می باشد، $\frac{(r-1)}{2}$ تا طول استفاده شده است. طول های l_{s+1}, \dots, l_m عبارتند از اعداد صحیح متوالی از $2kl + \frac{(a'-1)}{2}$ تا $\frac{(n-1)}{2}$ ، به طوری که $s = 2kl + \frac{(a'-1)}{2} - \frac{(r-1)}{2}$ مسیر P را به صورت زیر در نظر بگیرید،

$$P = u_0, u_{l_1}, u_{l_1-l_2}, u_{l_1-l_2+l_3}, \dots, u_{l_1-l_2+l_3-\dots+l_s-l_{s+1}}$$

توجه کنید که s فرد است و همه ی طول های l_1, l_2, \dots, l_{s+1} در P استفاده شده اند. آخرین اندیس را به صورت $-x = l_1 - l_2 + \dots, l_s - l_{s+1}$ در نظر بگیرید به طوری که x از u_0 متمایز است. حال می دانیم که $l_{s+1} = 2kl + \frac{(a'+1)}{2}$ زوج است و این که طول های باقیمانده اعداد صحیح متوالی هستند. ما باید P را به صورت زیر

$$u_{l_1-l_2+\dots+l_s-l_{s+1}+l_{s+2}}, u_{l_1-l_2+\dots+l_s-l_{s+1}+l_{s+2}-l_{s+3}}, \dots, u_{l_1-l_2+\dots+l_j}, u_{l_1-l_2+\dots+l_j-l_{j+1}}$$

$$u_{l_1-l_2+\dots+l_j-l_{j+1}}, u_{l_1-l_2+\dots+l_j-l_{j+1}+l_{j+2}}, u_{l_1-l_2+\dots+l_j-l_{j+1}+l_{j+2}-l_{j+3}}, \dots$$

تا رسیدن به $u_y = u_{l_1-l_2+\dots+l_j-l_{j+1}+l_{j+2}-l_{j+3}+\dots+l_{m+1}}$ ادامه دهیم که مسیر P' به طول $m-2$ حاصل شود. توجه کنید که P' به وسیله‌ی زیگزاگ‌های متوالی با طول یال‌های صعودی و حذف یک یال فرد به طول l_{j+2} به دست می‌آید. فرض کنید u_{-z} اولین رأس جلوتر از u_y در P' باشد. اگر بخواهیم یک یال به طول $\frac{(n-1)}{2}$ به P' اضافه کنیم، این یال باید از u_y به u_{-z-1} یا از u_y به u_{-z-2} برود. فرض کنید w عددی صحیح و فرد میان $z+1$ و $z+2$ باشد. اگر $w \leq 2kl + \frac{(a'+1)}{2}$ باشد، در این صورت w را طول فرد l_{j+2} در نظر بگیرید که برای ایجاد P' حذف شده است. با افزودن 2 -مسیر u_y, u_{-w}, u_0 به P' و با دقیقاً یک‌بار استفاده از همه‌ی طول‌های ذکرشده، یک m -دور C' حاصل می‌شود. اکنون با اعمال جایگشت τ روی C' تجزیه کامل می‌شود.

برای $w \leq 2kl + \frac{(a'+1)}{2}$ ابتدا فرض کنید $l_{s+2} = 2kl + \frac{(a'+3)}{2}$ یالی به طول فرد باشد. در تشکیل P' این یال را از P حذف می‌کنیم. اکنون P' با رئوس u_{y-1}, u_{-z}, u_y پایان می‌پذیرد و یال u_{y-1}, u_{-z} طول $\frac{(n-5)}{2}$ و یال u_{-z}, u_y طول $\frac{(n-3)}{2}$ دارد. پس تغییرات بعد را انجام می‌دهیم؛ از u_{y-1} ترتیب قرار گرفتن طول‌ها را (از راست به چپ) به صورت $\frac{(n-1)}{2}$ و $\frac{(n-3)}{2}$ و $\frac{(n-5)}{2}$ معکوس می‌کنیم و از آن‌جا که دو انتخاب برای یال به طول $\frac{(n-1)}{2}$ وجود دارد، مسیر تغییر یافته در u_{-z-3} یا u_{-z-4} پایان می‌پذیرد.

اگر $z+3$ یا $z+4$ معادل با $2kl + \frac{(a'+3)}{2}$ باشند، در این صورت این مسیر را برای ایجاد یک m -دور با یک یال به طول $2kl + \frac{(a'+3)}{2}$ می‌بندیم.

اگر $z+4 < 2kl + \frac{(a'+3)}{2}$ ، تغییرات P' را از u_{y-2} شروع می‌کنیم. در این صورت ممکن است آن مسیر تغییر یافته در u_{-z-5} یا u_{-z-6} پایان پذیرد. اگر $z+5$ یا $z+6$ معادل با $2kl + \frac{(a'+3)}{2}$ باشند، یک m -دور را مانند قبل کامل می‌کنیم.

حال نیاز داریم که نشان دهیم می‌توان به تغییری از P' دست یافت که این مسیر به $u_{-2kl-\frac{(a'+1)}{2}}$ خاتمه یابد. گام اول در انجام این کار یافتن کران پایین برای P' است. در نوعی که $2a' < l - \frac{(a'-1)}{2}$ ، داریم: $l_1 = \frac{(a'-1)}{2}$ و $l_2 = a' + \frac{(a'-1)}{2}$.

در این صورت مسیر P' با $u_0, u_{\frac{(a'-1)}{2}}, u_{-a'}, \dots$ آغاز می‌شود. از سوی دیگر در نوعی که $2a' < l - \frac{(a'-1)}{2}$ ، داریم: $l_1 = \frac{(a'-1)}{2}$ و $l_2 = 2a' + 1$. بنابراین مسیر P' با $u_0, u_{\frac{(a'-1)}{2}}, u_{-(2a'+2)}, \dots$ آغاز می‌شود. پس در P' بین رأس u_0 و رأس بعدی که منفی اندیس گذاری شده است، حداقل $a'-1$ رأس فاصله وجود دارد. از این رو داریم:

$$w \geq \frac{m-1}{2} + a' - 1.$$

مسیر P' یال‌هایی را استفاده می‌کند که طولشان اعداد صحیح متوالی از $\frac{(a'+5)}{2}$ تا $2kl + \frac{(a'+5)}{2}$ است. همان‌طور که در بالا دیدیم با انتخاب یکی از دو یال موجود واقع بر u_y که طول $\frac{(n-1)}{2}$ دارند، دو مقدار ممکن برای w وجود دارد. با شروع الگوی تغییر P' از u_{y-1} ، برای هر یک از دو مقدار w ، به $w+2$ می‌رسیم و با شروع از u_{y-2} برای هر دو مقدار w به $w+4$ می‌رسیم. دوباره با انجام این کار بر روی رأس واقع بر یال به طول $\frac{(a'+5)}{2}$ ، در صورت لزوم ممکن است برای هر یک از دو مقدار w به مقدار زیر برسیم،

$$w + \frac{n-3}{2} - (2kl + \frac{a'+5}{2}).$$

اگر نشان دهیم که عبارت اخیر از نظر بزرگی حداقل $2kl + \frac{(a'+3)}{2}$ است، کار ما به پایان می‌رسد. با استفاده از $8kl \leq n$ و $\frac{n}{3} < m$ داریم:

$$\begin{aligned} w + \frac{n-3}{2} - (2kl + \frac{a'+5}{2}) &\geq \frac{m-1}{2} + a' - 1 + \frac{n-3}{2} - (2kl + \frac{a'+5}{2}) \\ &= \frac{m+n}{2} + \frac{a'-11}{2} - 2kl \\ &> 2kl + \frac{4kl}{4} + \frac{a'-11}{2} - 2kl \\ &= 2kl + \frac{a'+3}{2} + \frac{4kl}{3} - 7. \end{aligned}$$

از آن‌جا که $1 \leq k$ و $7 \leq l$ است (حالت $a' = 1$ نمی‌تواند وجود داشته باشد زیرا $r \leq m$)، عبارت $\frac{4kl}{3} - 7$ مثبت است و کار تمام می‌شود.

اگر $c = 4k + 1$ ، مسیرهای F را برای ایجاد یک m -دور با استفاده از یال‌های به طول $l + \frac{(a'-1)}{2}$ به هم وصل می‌کنیم. سپس یال‌های اتصال هر یک از خانواده‌های F_1, \dots, F_{4k} را برای ایجاد m -دورها، با استفاده از تجزیه‌ی همیلتنی گراف‌های چرخشی زیر به دست می‌آوریم،

$$X(b'; \{\pm 2, \pm 3\}), \dots, X(b'; \{\pm 2k, \pm(2k+1)\})$$

و m طول باقیمانده همچون نوع قبل به کار گرفته می‌شوند.

اگر $c = 4k + 2$ ، مسیرهای F و F_1 را به ترتیب برای ایجاد دو m -دور با استفاده از یال‌هایی به طول $l \pm \frac{(a'-1)}{2}$ به هم وصل می‌کنیم. بر روی بقیه‌ی خانواده‌های مسیرها و m طول باقیمانده مانند قبل عمل می‌شود.

در نهایت اگر $c = 4k + 3$ ، طول‌های $l = \pm \frac{(a'-1)}{2}$ و $2l + \frac{(a'-1)}{2}$ به ترتیب برای اتصال مسیرهای F و F_1 و F_2 استفاده می‌شود و یال‌های اتصال خانواده‌های F_3, \dots, F_{4k+2} برای ایجاد m -دورها، با استفاده از تجزیه‌ی همیلتنی گراف‌های چرخشی زیر به دست می‌آیند،

$$X(b'; \{\pm 3, \pm 4\}), \dots, X(b'; \{\pm 2k, \pm(2k+1)\}).$$

برای m -طول باقیمانده نیز مثل قبل عمل می‌کنیم.

در نوعی که $\frac{(a' - 1)}{۲}$ زوج است، عملیات انجام شده تا اندازه‌ای شبیه به نوع $\frac{(a' - 1)}{۲}$ فرد است و تفاوت‌ها اندک هستند. بنابراین فقط روی تفاوت‌ها بحث می‌کنیم. مسیر $P_{۰,۰}$ را به صورت زیر در نظر بگیرید.

$$P_{۰,۰} = u_{۰}, u_{۱}, u_{-۱}, u_{۲}, u_{-۲}, \dots, u_{\frac{(a'-1)}{۲}}, u_{-\frac{(a'-1)}{۲}}, u_{\frac{(a'+۱)}{۲}}, \\ u_{-\frac{(a'+۳)}{۲}}, \dots, u_{-\frac{(a'-۳)}{۲}}, u_{\frac{(a'+۱)}{۲}}, u_{-\frac{(a'+۱)}{۲}}.$$

این مسیر، یال‌هایی به طول $۱, ۲, \dots, \frac{(a' - 1)}{۲}, \frac{(a' + 3)}{۲}, \dots, a' - 1, a' + 1$ دارد. یکی از تفاوت‌های جزئی در این جا این است که طول a' استفاده نشده است. بنابراین مسیر $P_{۱,۰}$ را با $u_{۰}, u_{a'}, u_{-۲}$ شروع می‌کنیم و توجه کنید که طول‌های دو یال ابتدایی، a' و $a' + ۲$ هستند که هیچ‌کدام میان طول‌های $P_{۰,۰}$ ظاهر نشده‌اند. در این صورت الگوی زیگزاگ را همچون الگوی $P_{۰,۰}$ ادامه می‌دهیم، با این تفاوت که بیشتر رئوس در فاصله‌ی $u_{-۲}$ تا $u_{-\frac{(a'+۱)}{۲}}$ که این فاصله شامل $u_{۰}$ نمی‌باشد، حذف نشده‌اند. بنابراین مسیر $P_{۱,۰}$ در $u_{-\frac{(a'+۱)}{۲}}$ پایان پذیرفته است. این بدین معنی است که طول یال‌های اتصال استفاده شده برای وصل کردن مسیرهای هر خانواده به هم، به شکل m -دورها، به پیمانه‌ی l با $\frac{\pm(a'+1)}{۲}$ هم‌نهشت است. از این رو ما می‌خواهیم مشخص کنیم که یالی به طول $l - \frac{(a'+1)}{۲}$ در $P_{۱,۰}$ استفاده نمی‌شود. از آن جا که $l - \frac{(a'+1)}{۲}$ زوج است، می‌توان در صورتی که $l - \frac{(a'+1)}{۲} < 2a' - 1$ ، با انتقال رئوس در فاصله‌ی $u_{a'}$ تا $u_{a'+\frac{(a'-۳)}{۲}}$ ، که این فاصله شامل $u_{a'+۱}$ است، از استفاده از آن طول یال جلوگیری کرد. در غیر این صورت هیچ رأسی که در این فاصله قرار دارد نیاز به انتقال ندارد. با مشخص شدن این دو شروع مسیر، ادامه‌ی بحث همچون نوع قبل است و اثبات قضیه‌ی ۱۲.۳.۳ کامل شد. \square

۴.۳- تجزیه‌پذیری گراف‌های کامل برای m زوج و n فرد و برای m فرد و n زوج

به علت این‌که بررسی و اثبات قضایا در این بخش که حاصل تلاش‌های ساجنا [۱۹] در سال ۲۰۰۲ می‌باشد طولانی است، نگاهی کوتاه به روند انجام تجزیه در این دو حالت می‌کنیم. برای شرح بیشتر به مقاله‌ی ساجنا مراجعه کنید. لازم به ذکر است که تعاریف زیر، همسو با عملیات انجام شده در بخش ۲.۳ و ۳.۳ می‌باشد که در این جا نیز استفاده می‌شوند.

تعریف ۱.۴.۳. فرض کنید m یک عدد صحیح مثبت و $G = X(n; S)$ یک گراف چرخشی با مجموعه اتصال S و مجموعه طول یال A باشد که در این جا $\frac{m}{p} \in A$. یک دور قطری C_D یک m -دور در G است که شامل دو $(\frac{m}{p} - 1)$ -مسیر زیگزاگ P و $\rho^{\frac{m}{p}}(P)$ همراه با دو یال به طول $\frac{m}{p}$ می‌باشد. به $(\frac{m}{p} - 1)$ -مسیر زیگزاگ P ، مولد دور قطری C_D گفته می‌شود.

تعریف ۲.۴.۳. فرض کنید $G = X(n; S)$ یک گراف چرخشی با مجموعه اتصال S و مجموعه طول یال A و مجموعه رئوس $\{u_0, \dots, u_{n-1}\}$ باشد. $\gcd(n, m) = d$ و $n' = \frac{n}{d}$ و $m' = \frac{m}{d}$ را در نظر بگیرید که $3 \leq d$ می‌باشد. یک دور جانبی یک m -دور از G مانند C است که متناسب با یکی از تعاریف زیر باشد.

الف) از الحاق m' -مسیرهای $\rho^{(d-1)n'}(P), \rho^{2n'}(P), \dots, \rho^{n'}(P)$ ساخته می‌شود.
 ب) از الحاق $(m' - 1)$ -مسیرهای $\rho^{(d-1)n'}(P), \rho^{2n'}(P), \dots, \rho^{n'}(P)$ همراه با d یال برای اتصال ساخته می‌شود.

در هر دو نوع، به مسیر P مولد دور جانبی C گفته می‌شود. کافی است شرایط زیر برقرار باشند تا P مولد یک دور جانبی باشد.

- در نوع الف، باید مجموعه رئوس داخلی مسیرهای $\rho^{jn'}(P)$ ، $j = 0, \dots, d - 1$ ، دوبه‌دو مجزا باشند و رأس انتهایی مسیر P بر رأس ابتدایی مسیر $\rho^{n'}(P)$ منطبق باشد.
- در نوع ب، باید مسیرهای $\rho^{jn'}(P)$ رأس-مجزا باشند.

اگر C یک دور جانبی در $X(n; S)$ باشد، آنگاه به دورهای $\rho(C), \rho^2(C), \dots, \rho^{n'-1}(C)$ همچون C ، دور جانبی تولید شده توسط $(m' - 1)$ -مسیر P یا m' -مسیر P می‌گویند. بنابراین $\{\rho^i(C) : i = 0, 1, \dots, n' - 1\}$ یک C_m -تجزیه از $X(n, S)$ است.

در نوعی که $m \leq n < 2m$ و n' زوج باشد، برای هر دور جانبی C ، دو حالت وجود دارد.
حالت ۱. همه‌ی دورهای $\rho(C), \rho^2(C), \dots, \rho^{n'-1}(C)$ در C_m -تجزیه استفاده می‌شوند که در این حالت C را همراه شده می‌گویند.

حالت ۲. فقط دورهای $\rho^2(C), \rho^3(C), \dots, \rho^{n-2}(C)$ در C_m -تجزیه استفاده می‌شوند، در حالی که نسخه‌ی مسیرهای مولدی که در $\rho(C), \rho^3(C), \dots, \rho^{n-1}(C)$ ظاهر شده‌اند در دیگر دورها ترکیب و تلفیق شده‌اند. در این حالت C را منفرد می‌گویند.

توجه. به جز دورهای قطری و جانبی از دورهای مرکزی نیز استفاده می‌شود که به دلیل متفاوت بودن تعریف آن با توجه به نوع گراف، در هر کجا که لازم شد به‌طور خاص تشریح می‌شود.

لم ۳.۴.۳. فرض کنید $l = \lfloor \frac{m}{4} \rfloor$ و هر یک از مجموعه‌های D_0 و D_1 یکی از مجموعه‌های $A = \{1, 2, \dots, l\}$ یا $A - \{l\}$ باشند. در این صورت $\langle D_0, \emptyset, D_1 \rangle$ ، $K_m(2)$ به m -دورها قابل تجزیه است.

برهان. از آن جا که $X(m; \{l\})$ یک m -دور است و $X(m; (A - \{l\}) \cup -(A - \{l\}))$ بسته به این که l زوج یا فرد است می‌تواند به یک m -دور و گراف‌های درجه چهار (۴-منتظم)

$$X(m; \{1\}), X(m; \{2, 3\}), \dots, X(m; \{l-2, l-1\})$$

یا

$$X(m; \{1, 2\}), \dots, X(m; \{l-2, l-1\})$$

تجزیه شود، و از آن جا که این گراف‌ها با کمک لم ۲۱.۱.۳، C_m -تجزیه‌پذیرند (به دورهای همیلتنی تجزیه می‌شوند)، نتیجه‌ی مطلوب حاصل می‌شود. \square

لم ۴.۴.۳. گراف $K_{2m} - I$ ، C_m -تجزیه‌پذیر است.

برهان. گراف $K_{2m} - I$ را به صورت $\langle A, \mathbb{Z}_m - \{0\}, A \rangle$ ، $K_m(2)$ می‌نویسیم که $A = \{1, 2, \dots, \lfloor \frac{m}{4} \rfloor\}$ حال آن را به دو زیرگراف زیر

$$K_m(2) \langle A - \{l\}, \emptyset, A \rangle \text{ و } K_m(2) \langle \{l\}, \mathbb{Z}_m - \{0\}, \emptyset \rangle$$

تجزیه می‌کنیم که به ترتیب در لم ۶.۳.۳ و در لم ۳.۴.۳، C_m -تجزیه‌پذیری آن‌ها بررسی شده است. \square

لم زیر که نتیجه‌ی تحقیقات هافمن و لیندرن و رادجر در [۱۱] است و در اثبات قضیه‌ی ۶.۴.۳ استفاده می‌شود را به دلیل طولانی بودن، بدون اثبات می‌پذیریم.

لم ۵.۴.۳. عدد صحیح و مثبت t را در نظر بگیرید. اگر $t \leq \frac{m^2 + 1}{4}$ ، آن‌گاه $(K_{2m} - I) \vee \overline{K}_t$ ، C_m -تجزیه‌پذیر است.

قضیه ۶.۴.۳. عددهای صحیح و مثبت n زوج و m فرد را در نظر بگیرید. اگر $K_n - I$ به ازای همه‌ی n ‌های قابل قبول در محدوده‌ی $3m < n \leq m$ ، C_m -تجزیه‌پذیر باشد، در این صورت به ازای تمام n ‌های قابل قبول $3m \leq n$ ، C_m -تجزیه‌پذیر است.

برهان. این قضیه که مرحله‌ی استقرایی بررسی تجزیه می‌باشد، مشابه نتایج هافمن و لیندرن و رادجر است که در قضیه‌ی ۱.۳.۳ آن را بیان کردیم.

عدد n را به صورت $n = 2mx + v$ در نظر بگیرید که $m \leq v < 3m$ و v زوج می باشد. چون n قابل قبول است، v نیز قابل قبول است و بنا به فرض $K_v - I$ ، به m -دورها تجزیه می شود. نشان می دهیم $K_{2mx+v} - I$ نیز برای همه $x \geq 1$ ، به m -دورها افزاز می شود. اگر $v \leq m$ و $n < 3m$ باشد، نتیجه می گیریم که $v < \frac{m^2 + 1}{2}$. بنابراین می توان لم ۵.۴.۳ را به شرح زیر برای تجزیه استفاده کرد.

اگر $x \geq 3$ ، آن گاه $K_{v+2mx} - I$ به یک گراف x بخشی کامل $K_{2m, \dots, 2m}$ و یک گراف $K_v - I$ و x تا نسخه از گراف $(K_{2m} - I) \vee \bar{K}_v$ افزاز می شود که به ترتیب با توجه به قضیه ۵.۲.۲ و بنا به فرض و با کمک لم ۵.۴.۳، C_m -تجزیه پذیرند.

اگر $x = 1$ ، آن گاه $K_{v+2m} - I$ به $(K_{2m} - I) \vee \bar{K}_v$ و $K_v - I$ تجزیه می شود که هر دو C_m -تجزیه پذیرند. اگر $x = 2$ ، آن گاه $K_{v+4m} - I$ به $(K_{2m} - I) \vee \bar{K}_{v+2m}$ و $K_{v+2m} - I$ تجزیه می شود که باز هم C_m -تجزیه پذیرند.

در نوع $x = 2$ ، تجزیه به m -دورها به کمک لم ۵.۴.۳ شکل می گیرد. اما تا آن جا که ما می دانیم این روش فقط می تواند برای $v + 2m \leq \frac{m^2 + 1}{2}$ انجام شود؛ که برای $m \leq 11$ درست است. برای $m \leq 9$ ، m توانی از یک عدد اول است. بنابراین (به پیمانه $2m$) $v(v-2) \equiv 0$ و $m \leq v < 3m$ نتیجه می دهد که $v = 2m$ یا $v = 2m + 2$. بنابراین برای $m \leq 5$ ، داریم $v \leq \frac{m^2 + 1}{2}$ ، به طوری که $K_{v+2mx} - I$ برای همه x ها، C_m -تجزیه پذیر است.

اگر $v = 2m$ ، آن گاه $K_{v+4m} - I = K_{6m} - I$ قابل تجزیه به یک گراف ۳ بخشی $K_{2m, 2m, 2m}$ و سه گراف یکرخت با $K_{2m} - I$ است که به ترتیب بنا به لم ۵.۲.۲ و لم ۴.۴.۳ قابل تجزیه به m -دورها هستند.

اگر $v = 2m + 2$ ، آن گاه $K_{v+4m} - I$ به گراف $K_{2m, 2m, 2m}$ و سه گراف یکرخت با $(K_{2m} - I) \vee \bar{K}_2$ افزاز می شود که هر دو C_m -تجزیه پذیرند.

حال نوع $m = 3$ باقی می ماند. ابتدا فرض کنید $v = 2m$. برای $x \neq 2$ ، با توجه به لم ۳.۲.۳ و بنا به فرض $K_{v+2mx} - I$ قابل تجزیه به m -دورهاست.

یک C_3 -تجزیه از $K_{12} - I = K_{4m} - I$ به صورت زیر پیدا می شود. یک C_3 -تجزیه از K_{13} در نظر بگیرید. یک رأس v از K_{13} همراه با شش تا ۳-دور که شامل v هستند را حذف می کنیم. از آن جا که شش یال در این ۳-دورها که با v مجاور نیستند، مستقلند، باقیمانده ۳-دورها یک C_3 -تجزیه از $K_{12} - I$ ارائه می دهد.

در نهایت برای $m = 3$ فرض کنید که $v = 2m + 2$. برای $x \leq 2$ ، گراف $K_{v+2mx} - I = (K_{2m(x+1)} - I) \vee \bar{K}_2$ قابل تجزیه به گراف کامل $x + 1$ بخشی $K_{2m, 2m, \dots, 2m}$ و $x + 1$ تا گراف یکرخت با $(K_{2m} - I) \vee \bar{K}_2$ است که همه C_m -تجزیه پذیرند.

اکنون نوع $K_{14} - I$ باقی می ماند، آن را به $K_6 - I$ و $(K_8 - I) \vee \bar{K}_6$ افزاز می کنیم. $K_6 - I$ با کمک لم ۴.۴.۳، C_m -تجزیه پذیر است. برای تجزیه $(K_8 - I) \vee \bar{K}_6$ ، ۱-عامل های $\{F_1, \dots, F_6\}$ از $K_n - I$ را انتخاب می کنیم. اگر ۶ رأس اضافی را $\infty_1, \infty_2, \dots, \infty_6$ بنامید

و $F_i = \{x_j^{(i)} y_j^{(i)} : j = 1, \dots, 4\}$ را در نظر بگیرید، در این صورت

$$\{\infty_i x_j^{(i)} y_j^{(i)} \infty_i : i = 1, \dots, 6, j = 1, \dots, 4\}$$

یک C_3 -تجزیه از $(K_8 - I) \vee \bar{K}_6$ است و اثبات کامل می‌شود. \square

قضیه ۷.۴.۳. فرض کنید n یک عدد صحیح زوج و m یک عدد صحیح فرد باشد که $3m < n < 3m + 1$ و n قابل قبول است. در این صورت $(K_n - I)$ ، C_m -تجزیه‌پذیر است.

خلاصه‌ی برهان. مرحله‌ی استقرایی این قضیه در قضیه‌ی قبل بررسی شد. بقیه‌ی اثبات به دو نوع تفکیک می‌شود: $m \leq n < 2m$ و $2m \leq n < 3m$.

- برای n در محدوده‌ی $2m \leq n < 3m$ ، $K_n - I$ معادل با $K_{\frac{n}{2}}(2)$ است. ابتدا $K_{\frac{n}{2}}$ را بر اساس روش تریزی [۲۱] به m -دورها و m -مسیرها تجزیه کرده و سپس هر یک از آن‌ها با توجه به نتایج هگ‌ویست [۹] می‌تواند به چهار m -دور در $K_{\frac{n}{2}}(2)$ تبدیل شود.
- برای n در محدوده‌ی $m \leq n < 2m$ ، $K_n - I$ معادل با $(K_{n-2} - I) \vee \bar{K}_2$ است. این ساختار شامل دو نوع دور است:

دور جانبی (همراه شده یا منفرد) در $K_{n-2} - I$ و دور مرکزی.

دوره‌های جانبی در تعریف ۲.۴.۳ شرح داده شده‌اند؛ اما دور مرکزی شروع‌کننده که C می‌باشد، از دو مسیر P_1 و P_2 که نقاط انتهایی یال‌های آن‌ها به دو رأس مرکزی (یعنی رؤس \bar{K}_2) وصل شده است، ساخته می‌شود. مسیرهای P_1 و P_2 شامل دو نسخه از یک یا دو مسیر زیگزاگ که هر دو متعلق به قلمروهای متمایز $\langle \rho^2 \rangle$ می‌باشند و شامل یک نسخه از مسیر زیگزاگ مولد دوره‌های جانبی منفرد هستند.

\square دوره‌های مرکزی دیگر با اعمال جایگشت‌های $\rho^2, \rho^4, \dots, \rho^{n-4}$ بر روی C به دست می‌آیند.

قضیه ۸.۴.۳. عددهای صحیح و مثبت n فرد و m زوج را در نظر بگیرید. اگر K_n در محدوده‌ی $3m < n < 3m + 1$ ، C_m -تجزیه‌پذیر باشد، در این صورت به ازای هر $3m \leq n$ قابل قبول، C_m -تجزیه‌پذیر است.

برهان. اثبات مرحله‌ی استقرایی در این نوع با روش رادجر به دست آمده است که می‌توانید برای اطلاعات بیشتر [۱۷] را مطالعه کنید.

عدد n را به صورت $n = 2mx + v$ در نظر بگیرید که $n \leq v < 3m$ و v فرد است. چون n قابل قبول است، v نیز قابل قبول است، پس بنا به فرض K_v به m -دورها تجزیه می‌شود. نشان می‌دهیم K_{2mx+v} برای $x \geq 1$ ، به m -دورها افزای می‌شود.

K_{2mx+v} را به یک K_{2mx+1} و یک K_v که دارای یک رأس مشترک هستند و نیز یک $K_{v-1, 2mx}$ افزای می‌کنیم. K_v طبق فرض و K_{2mx+1} بنا به لم کتریگ (۲.۳.۳) و لم رزا (۳.۳.۳)، C_m -تجزیه‌پذیرند. $K_{v-1, 2mx}$ نیز با توجه به قضیه‌ی سوتیو (۲.۱.۲) به m -دورها تجزیه می‌شود. بنابراین K_{2mx+v} ، C_m -تجزیه‌پذیر است. \square

قضیه ۹.۴.۳. فرض کنید n عددی فرد و m عددی زوج باشد که $3m < n < 3m - 3$ و n قابل قبول است. در این صورت C_m, K_n - تجزیه پذیر است.

خلاصه ی برهان. ساختار این اثبات نیز مانند قبل بر اساس مقاله ی ساجنا [۱۹] به دو نوع تفکیک می شود: نوع $2m \leq n < 3m$ و $m \leq n < 2m$.

• در نوع $2m \leq n < 3m$ رئوس مرکزی استفاده نمی شوند و ساختار تجزیه شامل دو نوع دور است: دورهای مرکزی و دورهای جانبی.

دور مرکزی شروع کننده یعنی C ، به سادگی یک m -مسیر زیگزاگ است که رئوس ابتدا و انتهایی آن بر هم منطبق هستند. همه ی دورهای مرکزی دیگر، با اعمال جایگشت های $\rho^1, \rho^2, \dots, \rho^{n-1}$ به دست می آیند. بیشتر کار را در ساختار این نوع، دورهای جانبی انجام می دهند که شرایط را برای وجود دورهای مرکزی مناسب می سازند.

• در نوعی که $m \leq n < 2m$ ، K_n را معادل با $K_{n-1} \vee K_1$ قرار می دهند. در این نوع برای $c = \frac{(n-m)d}{m}$ و $\frac{1}{4}gcd(m, n-1) = \frac{d}{4}$ دو حالت مشاهده می شود.

حالت ۱. $\frac{d}{4} \leq c$. (صرف نظر از جزئیات وقتی تعداد m -دورها نسبتاً بزرگ است)، ساختار تجزیه در این حالت شامل سه نوع دور است:

دورهای جانبی (منفرد و همراه شده یا فقط همراه شده) و دورهای قطری در K_{n-1} و دورهای مرکزی که رأس مرکزی (یعنی رأس K_1) را می گیرند.

دور قطری که C_D می باشد از دو $(\frac{m}{4} - 1)$ -مسیر زیگزاگ P و (P) $\rho^{\frac{n-1}{4}}$ و دو یال به طول قطر ساخته شده است که این دو یال متعلق به قلمروهای متمایز $\langle \rho^2 \rangle$ هستند. همه ی دورهای قطری دیگر با اعمال جایگشت های $\rho^2, \rho^4, \dots, \rho^{\frac{n-1}{2}-2}$ بر روی C_D به دست می آیند.

دور مرکزی شروع کننده یعنی C شامل مسیرهای زیر است:

- یک نسخه از مسیر زیگزاگی که مولد دورهای جانبی منفرد می باشد (در صورت وجود).
- یک نسخه از مسیر زیگزاگی که مولد دورهای قطری است.
- دو نسخه از مسیر زیگزاگی که طول یال های باقیمانده را استفاده می کند و متعلق به قلمروهای متمایز $\langle \rho^2 \rangle$ هستند.
- دو یال واقع بر رئوس مرکزی.

دیگر دورهای مرکزی با اعمال جایگشت های $\rho^2, \rho^4, \dots, \rho^{n-3}$ بر روی C به دست می آیند.

حالت ۲. $\frac{d}{4} > c$. (وقتی تعداد m -دورها حدوداً کوچک است)، ساختار تجزیه در این حالت شامل دو نوع دور است:

دورهای جانبی (منفرد و همراه شده) در K_{n-1} و دورهای مرکزی که رأس مرکزی را استفاده می کنند.

در این جا دو دور مرکزی شروع کننده یعنی C_1 و C_2 به کار می رود. C_1 شامل یک مسیر P (که P خود دو مسیر زیگزاگ متقابل قطری است که با یک یال به طول قطر متصل شده اند) و C_2 شامل مسیر $\rho(P)$ و 3 یا 5 یال اتصال و دو یال از رأس مرکزی می باشد.

یال اتصال و دو یال از رأس مرکزی می‌باشد. دیگر دورهای مرکزی با اعمال جایگشت‌های $\rho^2, \rho^4, \dots, \rho^{\frac{n-1}{2}}$ بر روی C_1 و C_2 به دست می‌آیند. دورهای جانبی منفرد یک ساختار خاص برای تطبیق ۳ یا ۵ یال اتصال در دورهای مرکزی نیاز دارند که می‌توانید شرح آن را در [۱۹] مطالعه کنید. □

۱.۴.۳ استفاده از یک گراف چرخشی معین برای اتصال $(m' - 1)$ -مسیرهادر ایجاد یک دور جانبی

فرض کنید $G = X(n; S)$ یک گراف چرخشی با مجموعه رئوس $\{u_0, \dots, u_{n-1}\}$ و مجموعه اتصال S و مجموعه طول یال A باشد. قرار دهید $d = \gcd(n, m)$ و $n' = \frac{n}{d}$ و $m' = \frac{m}{d}$ و $c = \frac{(n-m)d}{m}$ که $3 \leq d$. در این بخش روش‌های استفاده شده برای اتصال $(m' - 1)$ -مسیرهادر $G = X(n; S)$ برای ایجاد یک m -دور جانبی را شرح می‌دهیم. این تکنیک استفاده شده توسط ساجنا، در جهت روش آلسپیچ و گاولاس است.

فرض کنید که $(m' - 1)$ -مسیره‌های زیگزاگ $P_{i,0}$ ، $i = 1, 2, \dots, c$ ، با رأس آغازین یکسان u_0 و رأس انتهایی یکسان u_t (در این ساختار $t \in \{-1, n' - 1, n' + 1\}$ داده شده‌اند. مجموعه‌های طول یال A_i که دوبه‌دو مجزا هستند و همچنین $(m' - 1)$ -مسیره‌های درون هریک از خانواده‌های $\{F_i = \{\rho^{jn'}(P_{i,0}) : j = 0, 1, \dots, d-1\}$ که دوبه‌دو رأس مجزا هستند را در نظر بگیرید. برای انتخاب یال‌های اتصال، دورهای همیلتنی در یک گراف چرخشی معین X' با مجموعه رئوس u_0, u_1, \dots, u_{d-1} استفاده می‌شوند.

فرض کنید دور همیلتنی C در X' داده شده است. به دلخواه دور C را جهت‌دهی کرده تا دور همیلتنی جهت‌دار \vec{C} به دست آید. فرض کنید $v_{j_1} v_{j_2}$ یک یال در C به طول $j_2 - j_1$ باشد؛ اگر \vec{C} کمانی از v_{j_1} به v_{j_2} را استفاده کند رأس انتهایی P_{i,j_1} (که $u_{j_1 n' + t}$ می‌باشد) را به رأس ابتدایی P_{i,j_2} (که $u_{j_2 n'}$ است) وصل می‌کنیم، همچنین از G یک یال به طول $(j_2 - j_1)n' - t$ استفاده می‌شود. به عکس، اگر \vec{C} شامل کمانی از v_{j_2} به v_{j_1} باشد، رأس ابتدایی P_{i,j_1} (که $u_{j_1 n'}$ است) را به رأس انتهایی P_{i,j_2} (که $u_{j_2 n' + t}$ است) وصل می‌کنیم، همچنین از G یک یال به طول $(j_2 - j_1)n' + t$ استفاده می‌شود. در نوع دیگر، خانواده‌ای از $(m' - 1)$ -مسیره‌ها یعنی F_i ، همراه با یال‌های اتصال حاصل از دور جهت‌دار \vec{C} در X ، به صورت یک m -دور شکل می‌گیرند. از آنجا که دو کمان مربوط به یک یال ثابت در گراف چرخشی معین X' ، دو یال اتصال با طول‌های متمایز در G را نتیجه می‌دهد، هر دور همیلتنی در X' می‌تواند برای متصل کردن دو خانواده از $(m' - 1)$ -مسیره‌ها استفاده شود.

حال توضیح می‌دهیم که چگونه گراف چرخشی معین X' به دو دور همیلتنی تجزیه می‌شود. فرض کنید مجموعه طول یال گراف چرخشی X' ، $\{l_1, l_2, \dots, l_b\}$ باشد. ابتدا X' را به گراف‌های چرخشی درجه ۲ و ۴ تجزیه می‌کنیم. یعنی گراف‌های چرخشی به شکل $X(d; \{l_i\})$ که $\gcd(d, l_i) = 1$ و به شکل $X(d; \{l_i, l_j\})$ که طول‌های l_i و l_j به گونه‌ای انتخاب شده‌اند که

گراف چرخشی همبند باشد. یک گراف چرخشی مانند اولی به‌وضوح یک d -دور است و یک گراف چرخشی مانند دومی می‌تواند با کمک قضیه‌ی ۲۱.۱.۳، به دو دور همیلتنی تجزیه شود. مثال‌هایی از گراف‌های چرخشی درجه ۴ همبند برای d فرد به‌صورت زیر است:

$$X(d; \{l, l+1\}), \quad X(d; \{2l-1, 2l+1\}), \quad X(d; \{2l, 2l+2\}).$$

بنابراین یک تجزیه‌ی همیلتنی از گراف چرخشی معین X' داریم. یک دور C در این تجزیه یا یک یال به طول l_i و یا دو طول یال متمایز l_i و l_j را استفاده می‌کند. اگر یک یال به طول l_i استفاده شده باشد، یال‌های اتصال ناشی از یک دور جهت‌دار C ، باید همه‌ی یال‌های هم‌طول را داشته باشد؛ یعنی $l_i n' + t$ یا $l_i n' - t$. سپس از اعمال جایگشت‌های $\rho^1, \rho^2, \dots, \rho^{n'-1}$ بر روی m -دور C در G ، تجزیه‌ی مطلوب حاصل می‌شود. بنابراین ما یک انتخاب داریم؛ یا استفاده از هر دو جهت و یا فقط یکی از دو جهت C . از این‌رو یک یا دو خانواده از $(m' - 1)$ -مسیرها به هم متصل می‌شوند. وقتی C دو یال متمایز به طول‌های l_i و l_j را استفاده کند، یک جهت‌دهی از C می‌تواند چهار تا طول یال اتصال متفاوت را تولید کند یعنی طول یال‌های $l_i n' + t$ و $l_i n' - t$ و $l_j n' + t$ و $l_j n' - t$. به‌منظور به‌کار بردن همه‌ی یال‌های با آن طول‌ها در G ، ما باید از هر دو جهت C استفاده کنیم. یک گراف چرخشی $X(d; \{l_i, l_j\})$ برای اتصال چهار خانواده از $(m' - 1)$ -مسیرها استفاده می‌شود.

اکنون می‌توان نتیجه گرفت که به تعداد کافی، طول یال‌های مناسب $\{l_1, l_2, \dots, l_b\}$ یافت می‌شوند. هر تعداد از خانواده‌های $(m' - 1)$ -مسیرها می‌توانند با اتصال، به m -دورها تبدیل شوند. جزئیات نحوه‌ی انتخاب این طول یال‌ها در X' و چگونگی تجزیه‌ی X' به گراف‌های چرخشی درجه ۲ و ۴ در [۱۹] به‌طور کامل شرح داده شده است؛ برای اطلاعات بیشتر می‌توانید به آن رجوع کنید.

فصل ۴

وجود سیستم‌های ۶-دوری از گراف‌های $K_n - E(F)$

همان‌طور که در مقدمه ذکر شد، در این فصل اصطلاح سیستم m -دوری را به جای C_m -تجزیه‌پذیری گراف‌های کامل استفاده می‌کنیم و چنان‌چه گفته شد، یک تعمیم برای تجزیه‌پذیری $K_n - I$ به m -دورها این است که برای n زوج، یال‌های حذف شده به جای ۱-عامل (تطابق کامل)، هر جنگل فراگیری باشد. رادجر و آس و لیندر [۲] در مقاله‌شان تعمیم گفته شده را برای $m = 6$ انجام دادند. در این فصل نتیجه‌ی تحقیقات این ریاضی‌دانان یعنی شرایط لازم و کافی برای وجود سیستم‌های ۶-دوری از گراف‌های کامل K_n به ازای n زوج، با حذف یک جنگل فراگیر F ، مورد بحث قرار می‌گیرد که در این صورت گراف حاصل را با $K_n - F$ نشان می‌دهیم.

۱.۴ انواع کوچک سیستم‌های ۶-دوری

تعریف ۱.۱.۴. یک سیستم m -دوری از گراف کامل G به صورت زوج مرتب (V, B) می‌باشد که V مجموعه رئوس G و B یک مجموعه از m -دورهاست، به طوری که یال‌های G را افزاز می‌کند.

تعریف ۲.۱.۴. به یال‌هایی از گراف کامل که در هیچ m -دوری واقع نمی‌شود و به عبارت دیگر با حذف آن یال‌ها از گراف، بیشترین تعداد m -دور حاصل می‌شود، جنگل برگ گفته می‌شود که در این جا با F نشان داده می‌شود.

روش در نظر گرفته شده در ساختار تجزیه، به تعداد مؤلفه‌های F نیاز دارد. این موضوع در لم بعد دیده می‌شود و نتایج آن در جدول ۱.۴ خلاصه شده‌اند.

لم ۳.۱.۴. فرض کنید n زوج و F یک جنگل فراگیر از یک گراف کامل K_n با $C(F)$ مؤلفه باشد. تعداد یال‌های $K_n - E(F)$ بر ۶ بخش‌پذیر است اگر و فقط اگر n و $C(F)$ بر طبق جدول ۱.۴ باشند.

n	$12k$	$12k+2$	$12k+4$	$12k+6$	$12k+8$	$12k+10$
$C(F)$ (پیمانه ۶)	۰	۱	۴	۳	۴	۱

جدول ۱.۴: تعداد مؤلفه‌های مورد نیاز F برای این‌که $E(K_n - E(F))$ بر ۶ بخش‌پذیر باشد.

برهان. فرض کنید $C_1, C_2, \dots, C_{C(F)}$ مؤلفه‌های F باشند. در این صورت:

$$|E(F)| = \sum_{i=1}^{C(F)} |E(C_i)| = \sum_{i=1}^{C(F)} (V(C_i) - 1) = \sum_{i=1}^{C(F)} V(C_i) - \sum_{i=1}^{C(F)} 1 = n - C(F).$$

بنابراین داریم:

$$C(F) = n - |E(F)|.$$

پس اگر $|E(K_n - E(F))|$ بر ۶ بخش‌پذیر باشد، داریم:

$$C(F) \equiv (n - |E(F)|) \equiv \left(n - \frac{(n^2 - n)}{2}\right) \pmod{6} \text{ (به پیمانه‌ی ۶).}$$

از روی رابطه‌ی فوق و بر اساس مقدار n به پیمانه‌ی ۱۲، مقادیر جدول ۱.۴ به دست می‌آیند. همچنین اگر $C(F)$ و n بر طبق جدول ۱.۴ باشند، در این صورت داریم: (به پیمانه‌ی ۶) $C(F) \equiv n - \frac{(n^2 - n)}{2}$. بنابراین (به پیمانه‌ی ۶) $E(F) \equiv E(K_n)$ و از این رو نتایج بعد حاصل می‌شوند. □

ابزار دیگری که نیاز داریم یک قضیه از سوتیو [۲۰] می‌باشد. سوتیو تعمیم لم زیر را ثابت کرد که آن را در فصل ۲ آورده‌ایم و شرایط گفته شده در این جا فقط برای سیستم‌های ۶-دوری است.

لم ۴.۱.۴. یک سیستم ۶-دوری از $K_{a,b}$ وجود دارد اگر و فقط اگر

(۱) a و b زوج باشند،

(۲) a یا b بر ۶ بخش‌پذیر باشد و

(۳) $4 \leq a, b$.

لم بعد یک نوع خاص از نتایج آلسیچ و گاولاس می‌باشد اما به راحتی اثبات می‌شود.

لم ۵.۱.۴. فرض کنید $n \in \{2, 6, 8\}$ و F یک ۱-عامل در K_n باشد. در این صورت یک سیستم ۶-دوری در $K_n - E(F)$ وجود دارد.

برهان. در هر مورد سیستم ۶-دوری را روی رئوس \mathbb{Z}_n تعریف می‌کنیم.
 الف) اگر $n = 2$ ، با قرار دادن جنگل برگ $F = \{\{0, 1\}\}$ سیستم ۶-دوری $B = \emptyset$ به دست می‌آید.
 ب) اگر $n = 6$ ، با قرار دادن جنگل برگ $F = \{\{0, 1\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}\}$ سیستم ۶-دوری به صورت زیر است:

$$B = \{(0, 2, 1, 4, 3, 5), (0, 4, 2, 5, 1, 3)\}.$$

ج) اگر $n = 8$ ، با قرار دادن جنگل برگ $F = \{\{0, 5\}, \{7, 3\}, \{6, 2\}, \{1, 4\}\}$ سیستم ۶-دوری به صورت زیر است:

$$B = \{(0, 1, 2, 4, 5, 7), (0, 2, 5, 6, 3, 4), (0, 3, 1, 7, 4, 6), (1, 5, 4, 2, 7, 6)\}.$$

□

لم ۶.۱.۴. اگر F یک جنگل فراگیر در K_1 باشد که هر رأس آن درجه‌ی فرد دارد و $|E(K_1 - E(F))|$ بر ۶ بخش‌پذیر باشد، در این صورت یک سیستم ۶-دوری از $K_1 - E(F)$ وجود دارد.

برهان. بیشترین تعداد مؤلفه‌های ممکن در یک زیرگراف K_1 که هر رأس درجه‌ی فرد باشد ۵ است. (به عنوان مثال، یک ۱-عامل از K_1 ، ۵ مؤلفه دارد.) بنابراین به کمک لم ۳.۱.۴ و جدول ۱.۴ و از آنجا که فرض شده که $|E(K_1 - E(F))|$ بر ۶ بخش‌پذیر است، پس $C(F) = 1$. بنابراین F یک درخت است. ۷ حالت برای انتخاب جنگل برگ F وجود دارد. برای $1 \leq i \leq 7$ یک سیستم ۶-دوری (\mathbb{Z}_1, B_i) از $E(K_1 - E(F_i))$ به صورت زیر در نظر گرفته شده است، که در این جا F_i یک جنگل فراگیر است که یال‌هایش در هیچ دور ۶ تایی B_i واقع نشده است.

$$B_1 = \{(1, 4, 5, 8, 2, 9), (2, 5, 6, 9, 3, 7), (3, 6, 4, 7, 1, 8), (1, 2, 4, 8, 7, 5), (2, 3, 5, 9, 8, 6), (3, 1, 6, 7, 9, 4)\},$$

$$E(F_1) = \{\{0, 1\}, \{0, 2\}, \{0, 3\}, \{0, 4\}, \{0, 5\}, \{0, 6\}, \{0, 7\}, \{0, 8\}, \{0, 9\}\}.$$

$$B_2 = \{(1, 4, 5, 8, 2, 9), (2, 5, 6, 9, 3, 7), (3, 6, 4, 0, 1, 8), (1, 2, 4, 8, 7, 5), (2, 3, 5, 9, 8, 6), (3, 1, 6, 7, 9, 4)\},$$

$$E(F_2) = \{\{0, 2\}, \{0, 3\}, \{0, 5\}, \{0, 6\}, \{0, 7\}, \{0, 8\}, \{0, 9\}, \{7, 4\}, \{7, 1\}\}.$$

$$B_3 = \{(1, 4, 5, 8, 2, 9), (2, 5, 6, 9, 3, 7), (3, 6, 4, 0, 1, 8), (1, 2, 4, 8, 7, 5), \\ (2, 3, 5, 9, 8, 6), (3, 0, 6, 7, 9, 4)\},$$

$$E(F_3) = \{\{0, 2\}, \{0, 5\}, \{0, 7\}, \{0, 8\}, \{0, 9\}, \{7, 4\}, \{7, 1\}, \{1, 3\}, \{1, 6\}\}.$$

$$B_4 = \{(1, 4, 5, 8, 2, 9), (2, 5, 0, 9, 3, 7), (3, 6, 4, 0, 1, 8), (1, 2, 4, 8, 7, 5), \\ (2, 3, 5, 9, 8, 6), (3, 0, 6, 7, 9, 4)\},$$

$$E(F_4) = \{\{0, 2\}, \{0, 7\}, \{0, 8\}, \{7, 4\}, \{7, 1\}, \{1, 3\}, \{1, 6\}, \{6, 5\}, \{6, 9\}\}.$$

$$B_5 = \{(1, 4, 5, 8, 2, 9), (2, 5, 0, 9, 3, 7), (3, 6, 4, 0, 1, 8), (1, 2, 4, 8, 7, 5), \\ (2, 3, 5, 9, 8, 6), (3, 1, 6, 7, 9, 4)\},$$

$$E(F_5) = \{\{0, 2\}, \{0, 3\}, \{0, 6\}, \{0, 7\}, \{0, 8\}, \{7, 4\}, \{7, 1\}, \{6, 5\}, \{6, 9\}\}.$$

$$B_6 = \{(1, 4, 5, 8, 2, 9), (2, 5, 6, 9, 3, 7), (3, 6, 4, 0, 1, 8), (1, 2, 4, 8, 0, 5), \\ (2, 3, 5, 9, 8, 6), (3, 1, 6, 7, 9, 4)\},$$

$$E(F_6) = \{\{0, 2\}, \{0, 3\}, \{0, 6\}, \{0, 7\}, \{0, 9\}, \{7, 4\}, \{7, 1\}, \{7, 5\}, \{7, 8\}\}.$$

$$B_7 = \{(1, 4, 5, 8, 2, 9), (2, 5, 6, 9, 3, 7), (3, 6, 4, 0, 1, 8), (1, 2, 0, 8, 7, 5), \\ (2, 3, 5, 9, 8, 6), (3, 0, 6, 7, 9, 4)\},$$

$$E(F_7) = \{\{0, 5\}, \{0, 7\}, \{0, 9\}, \{7, 4\}, \{7, 1\}, \{1, 3\}, \{1, 6\}, \{4, 2\}, \{4, 8\}\}.$$

□

۲.۴ ساختار بعضی بلوک‌ها

ما در این بخش بعضی از سیستم‌های ۶-دوری کوچک که برای ساختن سیستم‌های ۶-دوری از $K_n - E(F)$ در بخش ۳.۴ استفاده می‌شوند را ارائه می‌دهیم.

برای ۶ لم بعد فرض کنید $G_{\gamma, \beta}$ یک گراف برچسب‌دار با رئوسی در دنباله‌ی V باشد (ترتیب قرار گرفتن رئوس ذکر شده مهم هستند). فرض کنید B یک سیستم ۶-دوری از $G_{\gamma, \beta}(V)$ باشد. γ و β اندیس‌هایی هستند که β امین گراف تعریف شده در γ امین لم از این بخش را نشان می‌دهد. (مثلاً $G_{4,1}$ اولین گراف تعریف شده در لم ۴ از بخش ۲، فصل ۴ و G_6 تنها گراف تعریف شده در لم ۶ این بخش را معرفی می‌کند.)

یادآوری می‌کنیم که G^c نماد مکمل گراف G و $H \vee G$ نماد اتصال دو گراف H و G است.

لم ۱.۲.۴. فرض کنید $G_{1,1}(0, 1, \dots, 11)$ به صورت زیر تعریف شود، به طوری که $V(K_4) = \mathbb{Z}_{12} \setminus \mathbb{Z}_8$ و $V(K_8^c) = \mathbb{Z}_8$

$$G_{1,1} = K_8^c \vee K_4 + \{\{0, 2\}\{1, 2\}\} - \{\{0, 11\}, \{1, 10\}\{2, 9\}, \{2, 8\}\}.$$

در این صورت یک سیستم ۶-دوری از $G_{1,1}$ وجود دارد.

برهان. (\mathbb{Z}_{12}, B) یک سیستم ۶-دوری برای $G_{1,1}$ است و به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$B = \{(0, 2, 1, 8, 9, 10), (2, 10, 5, 8, 4, 11), (0, 8, 6, 10, 11, 9), (1, 9, 4, 10, 8, 11), \\ (3, 10, 7, 9, 6, 11), (3, 8, 7, 11, 5, 9)\}.$$

□

لم ۲.۲.۴. فرض کنید $G_{2,1}(0, 1, \dots, 7)$ گرافی به صورت $K_7^c \vee K_4 - \{\{0, i\} \mid 4 \leq i \leq 7\}$ و $G_{2,2}(0, 1, \dots, 7)$ گرافی به صورت $K_7^c \vee K_4 - \{\{i, 7-2i\}, \{i-6-2i\} \mid i \in \mathbb{Z}_7\}$ باشد. که در هر دو نوع گراف، مجموعه رئوس، $V(K_4) = \mathbb{Z}_8 \setminus \mathbb{Z}_4$ و $V(K_7^c) = \mathbb{Z}_4$ هستند. در این صورت یک سیستم ۶-دوری B از $G_{2,\beta}$ برای $1 \leq \beta \leq 2$ وجود دارد.

برهان. برای $1 \leq \beta \leq 2$ یک سیستم ۶-دوری (\mathbb{Z}_8, B_β) از گراف $G_{2,\beta}$ به صورت زیر وجود دارد.

$$B_1 = \{(1, 7, 2, 4, 6, 5), (1, 6, 3, 7, 5, 4), (2, 6, 7, 4, 3, 5)\}, \\ B_2 = \{(0, 4, 6, 7, 3, 5), (1, 7, 4, 5, 2, 6), (2, 4, 3, 6, 5, 7)\}.$$

□

لم ۳.۲.۴. فرض کنید گراف $G_{3,1}(0, 1, \dots, 15)$ و گراف $G_{3,2}(0, 1, \dots, 15)$ به ترتیب به صورت زیر باشند.

$$G_{3,1} = K_{10}^c \vee K_6 + \{\{0, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 4\} - \{\{i, 15-i\}, \{4, 10\} \mid i \in \mathbb{Z}_5\}\}, \\ G_{3,2} = K_{10}^c \vee K_6 + \{\{0, 3\}, \{1, 3\}, \{2, 3\} - \{\{i, 15-i\}, \{3, 11\}, \{3, 10\} \mid i \in \mathbb{Z}_4\}\}.$$

که در هر دو نوع گراف مجموعه رئوس، $V(K_6) = \mathbb{Z}_{16} \setminus \mathbb{Z}_{10}$ و $V(K_{10}^c) = \mathbb{Z}_{10}$ هستند. در این صورت یک سیستم ۶-دوری B از $G_{3,\beta}$ برای $1 \leq \beta \leq 2$ وجود دارد.

برهان. برای $1 \leq \beta \leq 2$ یک سیستم ۶-دوری $(\mathbb{Z}_{16}, B_\beta)$ از $G_{3,\beta}$ به صورت زیر وجود دارد.

$$B_1 = \{(2, 4, 1, 12, 11, 10), (10, 3, 11, 15, 14, 0), (3, 0, 11, 7, 12, 13), \\ (4, 13, 1, 15, 10, 12), (5, 10, 9, 14, 2, 11), (5, 15, 6, 11, 13, 14), \\ (6, 13, 7, 15, 8, 12), (3, 15, 13, 10, 7, 14), (4, 15, 12, 9, 11, 14), \\ (5, 13, 9, 15, 2, 12), (6, 14, 8, 11, 1, 10), (0, 13, 8, 10, 14, 12)\}$$

و

$$B_2 = \{(2, 3, 1, 12, 11, 10), (10, 4, 11, 15, 14, 0), (3, 0, 11, 7, 12, 13), \\ (4, 13, 1, 15, 10, 12), (5, 10, 9, 14, 2, 11), (5, 15, 6, 11, 13, 14), \\ (6, 13, 7, 15, 8, 12), (3, 15, 13, 10, 7, 14), (4, 15, 12, 9, 11, 14), \\ (5, 13, 9, 15, 2, 12), (6, 14, 8, 11, 1, 10), (0, 13, 8, 10, 14, 12)\}.$$

□

لم ۴.۲.۴. فرض کنید گراف‌های $G_{۴,۱}, \dots, G_{۴,۵}$ به صورت زیر تعریف شوند.

$$G_{۴,۱}(0, 1, \dots, 15) = K_8^c \vee K_8 - \{\{0, i\} \mid 8 \leq i \leq 15\},$$

$$G_{۴,۲}(0, 1, \dots, 15) = K_8^c \vee K_8 - \{\{1, 8\}, \{1, 9\}, \{0, i\} \mid 10 \leq i \leq 15\},$$

$$G_{۴,۳}(0, 1, \dots, 15) = K_8^c \vee K_8 - \{\{i, 15 - 4i\}, \{i, 14 - 4i\}, \{i, 13 - 4i\}, \\ \{i, 12 - 4i\} \mid i \in \mathbb{Z}_2\},$$

$$G_{۴,۴}(0, 1, \dots, 15) = K_8^c \vee K_8 - \{\{0, i\}, \{1, j\}, \{2, k\} \mid 12 \leq i \leq 15, \\ 10 \leq j \leq 11, 8 \leq k \leq 9\},$$

$$G_{۴,۵}(0, 1, \dots, 15) = K_8^c \vee K_8 - \{\{i, 15 - 2i\}, \{i, 14 - 2i\} \mid i \in \mathbb{Z}_4\}.$$

به طوری که در همه‌ی موارد بالا $V(K_8^c) = \mathbb{Z}_8$ و $V(K_8) = \mathbb{Z}_{16} \setminus \mathbb{Z}_8$. در این صورت یک سیستم ۶-دوری (\mathbb{Z}_{16}, B) از $G_{۴,\beta}$ برای $1 \leq \beta \leq 5$ وجود دارد.

برهان. فرض کنید $(\mathbb{Z}_{16} \setminus \mathbb{Z}_7, B)$ یک سیستم ۶-دوری از K_9 باشد، برای $1 \leq \beta \leq 5$ ، سیستم ۶-دوری $(\mathbb{Z}_{16}, B_\beta)$ از $G_{۴,\beta}$ به صورت زیر یافت می‌شود.

$$B_1 = B \cup \{(9, 1, 8, 6, 15, 4), (11, 1, 10, 5, 14, 4), (9, 2, 8, 5, 11, 6), \\ (13, 3, 12, 6, 10, 4), (13, 6, 14, 3, 10, 2), (13, 5, 15, 2, 12, 1), \\ (11, 3, 15, 1, 14, 2), (8, 4, 12, 5, 9, 3)\}$$

و

$$B_2 = B \cup \{(9, 0, 8, 6, 15, 4), (11, 1, 10, 5, 14, 4), (9, 2, 8, 5, 11, 6), \\ (13, 3, 12, 6, 10, 4), (13, 6, 14, 3, 10, 2), (13, 5, 15, 2, 12, 1), \\ (11, 3, 15, 1, 14, 2), (8, 4, 12, 5, 9, 3)\}$$

و

$$B_3 = B \cup \{(9, 0, 8, 6, 15, 4), (11, 0, 10, 5, 14, 4), (9, 2, 8, 5, 11, 6), \\ (13, 3, 12, 6, 10, 4), (13, 6, 14, 3, 10, 2), (13, 5, 15, 2, 12, 1), \\ (11, 3, 15, 1, 14, 2), (8, 4, 12, 5, 9, 3)\}$$

و

$$B_4 = B \cup \{(9, 0, 8, 6, 15, 4), (11, 0, 10, 5, 14, 4), (9, 1, 8, 5, 11, 6), \\ (13, 3, 12, 6, 10, 4), (13, 6, 14, 3, 10, 2), (13, 5, 15, 2, 12, 1), \\ (11, 3, 15, 1, 14, 2), (8, 4, 12, 5, 9, 3)\}$$

و

$$B_5 = B \cup \{(9, 0, 8, 6, 15, 4), (13, 0, 10, 5, 14, 4), (9, 1, 8, 5, 13, 6), \\ (11, 0, 12, 6, 10, 4), (11, 6, 14, 3, 10, 1), (11, 5, 15, 2, 12, 3), \\ (13, 3, 15, 1, 14, 2), (8, 4, 12, 5, 9, 3)\}.$$

□

لم ۵.۲.۴. فرض کنید گراف‌های $G_{5,1}$ و $G_{5,2}$ با مجموعه رئوس $V(K_8) = \mathbb{Z}_{16} \setminus \mathbb{Z}_8$ و $V(K_8^c) = \mathbb{Z}_8$ به صورت زیر تعریف شوند.

$$G_{5,1}(\circ, 1, \dots, 15) = K_8^c \vee K_8 - \{\{\circ, 15\}, \{\circ, 14\}, \{12, 14\}, \{13, 14\}, \{1, 11\}, \\ \{1, 10\}, \{2, 9\}, \{2, 8\}\},$$

$$G_{5,2}(\circ, 1, \dots, 15) = K_8^c \vee K_8 - \{\{\circ, 15\}, \{\circ, 14\}, \{12, 14\}, \{13, 14\}, \\ \{1, 11 - i \mid i \in \mathbb{Z}_4\}\}.$$

در این صورت یک سیستم ۶-دوری B_β از $G_{5,\beta}$ برای $1 \leq \beta \leq 2$ وجود دارد.

برهان. سیستم m -دوری B_1 و B_2 را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$B_1 = \{(8, 1, 9, 0, 11, 5), (1, 13, 6, 14, 5, 15), (3, 10, 2, 15, 6, 11), \\ (3, 14, 7, 13, 8, 9), (4, 8, 0, 12, 7, 11), (4, 9, 5, 12, 15, 10), (4, 15, 13, 11, 8, 12), \\ (4, 14, 9, 11, 10, 13), (13, 12, 11, 14, 15, 9), (1, 12, 10, 6, 8, 14), (3, 12, 6, 9, 7, 8), \\ (3, 13, 5, 10, 7, 15), (2, 14, 10, 8, 15, 11), (2, 12, 9, 10, 0, 13)\}$$

و

$$B_2 = \{(8, 2, 9, 0, 11, 5), (1, 13, 6, 14, 5, 15), (3, 10, 2, 15, 6, 11), \\ (3, 14, 7, 13, 8, 9), (4, 8, 0, 12, 7, 11), (4, 9, 5, 12, 15, 10), (4, 15, 13, 11, 8, 12), \\ (4, 14, 9, 11, 10, 13), (13, 12, 11, 14, 15, 9), (1, 12, 10, 6, 8, 14), (3, 12, 6, 9, 7, 8), \\ (3, 13, 5, 10, 7, 15), (2, 14, 10, 8, 15, 11), (2, 12, 9, 10, 0, 13)\}.$$

□

لم ۶.۲.۴. فرض کنید G_6 با مجموعه رئوس $V(K_8^c) = \mathbb{Z}_8$ و $V(K_8) = \mathbb{Z}_{16} \setminus \mathbb{Z}_8$ به صورت زیر باشد، در این صورت یک سیستم ۶-دوری B از G_6 وجود دارد.

$$G_6(0, 1, \dots, 15) = K_8^c \vee K_8 - \{\{0, 15\}, \{0, 14\}, \{12, 14\}, \{13, 14\}, \{1, 11\}, \\ \{1, 10\}, \{8, 10\}, \{9, 10\}\}.$$

برهان. سیستم ۶-دوری (\mathbb{Z}_{16}, B) از G_6 به صورت زیر وجود دارد.

$$B = \{(2, 14, 11, 10, 6, 12), (2, 15, 4, 10, 7, 13), (3, 15, 9, 6, 8, 12), \\ (3, 14, 1, 8, 9, 13), (0, 11, 5, 9, 7, 12), (4, 9, 11, 8, 5, 13), (5, 10, 12, 13, 11, 15), \\ (1, 9, 14, 15, 8, 13), (2, 10, 0, 9, 3, 11), (2, 9, 12, 5, 14, 8), (3, 8, 7, 15, 13, 10), \\ (0, 8, 4, 11, 6, 13), (4, 14, 6, 15, 1, 12), (7, 11, 12, 15, 10, 14)\}.$$

□

۳.۴ نتیجه‌ی نهایی

ما در نهایت اثبات قضیه‌ی اصلی این پایان نامه را ارائه می‌دهیم. یادآوری می‌کنیم که $G[W]$ زیرگراف القایی G روی W می‌باشد.

قضیه ۱.۳.۴. فرض کنید F یک جنگل در گراف کامل K_n با $|E(F)| \geq 1$ باشد. در این صورت یک سیستم ۶-دوری از $G = K_n - E(F)$ وجود دارد اگر و تنها اگر

(۱) همه‌ی رئوس F درجه‌ی فرد باشند،

(۲) $|E(K_n - E(F))|$ بر ۶ بخش‌پذیر باشد و

(۳) n زوج باشد.

توجه کنید که شرط (۱) نیازمند این است که F یک جنگل فراگیر باشد.

برهان. فرض کنید سیستم ۶-دوری (V, B) از $G = K_n - E(F)$ وجود دارد. بنابراین برای هر $v \in V$ ، دوره‌های ۶ تایی مجموعه‌ی B ، یال‌های واقع بر v را به جفت‌ها افزای می‌کند، پس $\deg_G(v)$ زوج است. از آن‌جا که $|E(F)| \geq 1$ و F یک جنگل است، F حداقل شامل یک رأس بنام w است که $\deg_F(w) = 1$ ، بنابراین $\deg_G(w) = n - 2$ پس n زوج است. همچنین برای هر رأس $v \in V$ داریم: $\deg_F(v) = n - 1 - \deg_G(v)$ ، بنابراین $\deg_F(v)$ فرد است.

پس به وضوح F فراگیر است زیرا $\deg_G(v)$ زوج است و اگر $\deg_F(v) = 0$ ، در این صورت $\deg_G(v) = n - 1 - 0$ فرد می‌شود و این تناقض است. از آن‌جا که دورهای 6 تایی در B یال‌های G را افزاز می‌کند، $E(K_n - F)$ نیز بر 6 بخش‌پذیر است.

برای اثبات کفایت قضیه توجه کنید که شرایط لازم از امکان حالت $n = 4$ جلوگیری می‌کند و توجه دوم این‌که اگر $n = \{2, 6, 8\}$ ، آن‌گاه شرایط (۱) تا (۳) نتیجه می‌دهند که F یک 1 -عامل است. با کمک لم ۵.۱.۴ می‌توان نشان داد که برای $n \in \{2, 6, 8\}$ یک سیستم 6 -دوری از $K_n - E(F)$ وجود دارد.

اگر $n = 10$ ، آن‌گاه شرایط (۱) تا (۳) نتیجه می‌دهند که F یک درخت فراگیر است. بنابراین 7 حالت برای F حاصل می‌شود که در لم ۶.۱.۴ دیده شدند. از این‌رو ما اکنون می‌توانیم فرض کنیم که $n \leq 12$.

اثبات حالت‌های باقیمانده برای $n \leq 12$ ، با استقرا انجام می‌شود. بنابراین حال فرض می‌کنیم برای هر عدد صحیح مثبت α که $2 \leq \alpha < n$ ، و برای هر جنگل F' از K_α که در روابط زیر صدق کند،

(۱') همه‌ی رئوس در F' درجه‌ی فرد دارند. (این شرط ایجاب می‌کند که F' فراگیر باشد.)

(۲') $|E(K_\alpha - E(F'))|$ بر 6 بخش‌پذیر است.

(۳') α زوج است.

در این صورت یک سیستم 6 -دوری در $K_\alpha - E(F')$ وجود دارد.

ما می‌توانیم فرض کنیم که $V(K_n) = \mathbb{Z}_n$ و سیستم 6 -دوری (\mathbb{Z}_n, B) از گراف $K_n - E(F)$ را با در نظر گرفتن چندین حالت برای F به دست می‌آوریم؛ یا F حداقل سه مؤلفه‌ی یکرخت با K_2 دارد یا $n = 6t$ یا $n = 6t + 2$ یا $n = 6t + 4$ یا $n = 12k + 4$ یا $n = 12k + 10$ (همراه با 3 زیرحالت) می‌باشد، که به جز حالت اول فرض می‌کنیم بقیه‌ی حالت‌ها حداکثر دو مؤلفه‌ی یکرخت با K_2 دارند و n در آن‌ها وابسته به همنهشتی به پیمانه‌ی 12 می‌باشد. از آن‌جا که استفاده از جدول ۱.۴ راحت‌تر از یافتن تعداد مؤلفه‌های $C(F')$ در F' است، پس به طور مرتب از این جدول استفاده می‌شود.

حالت اول: در نظر بگیرید که F سه مؤلفه‌ی یکرخت با K_2 داشته باشد و فرض کنید که

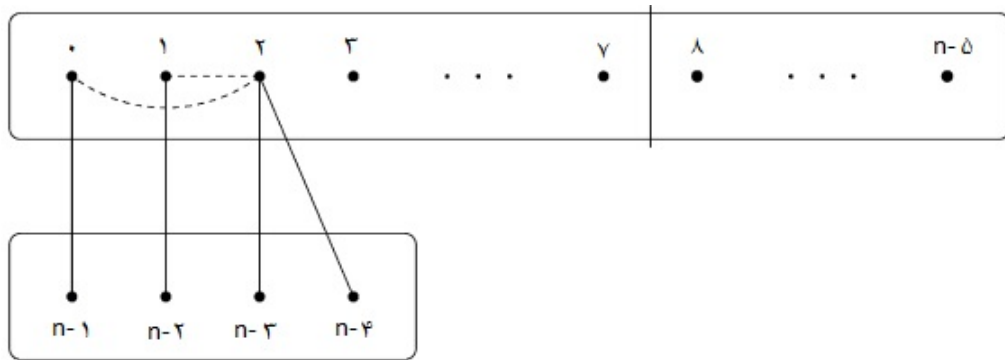
رئوس این سه مؤلفه $\{n-i, n-i-1\}$ باشد که $i \in \{1, 3, 5\}$ است. فرض کنید $F' = F[\mathbb{Z}_{n-6}]$ ، که نماد زیرگراف القایی F روی \mathbb{Z}_{n-6} است و $\alpha = n-6$ را در نظر بگیرید. باید بررسی کنیم که F' و $\alpha = n-6$ در شرایط (۱') تا (۳') صدق می‌کند. از آن‌جا که F' با برداشتن سه مؤلفه‌ی یکرخت با K_2 از F' شکل می‌گیرد، برای هر رأس $v \in \mathbb{Z}_{n-6}$ داریم: $\deg_{F'}(v) = \deg_F(v)$ ، بنابراین همه‌ی رئوس F' درجه‌ی فرد دارند، پس (۱') صدق می‌کند. همچنین $C(F') = C(F) - 3$ و $|V(F')| = n - 6$. از آن‌جا که ما فرض کردیم که $|E(K_n - F)|$ بر 6 بخش‌پذیر است، با کمک جدول ۱.۴ داریم که $|E(K_{n-6} - F')|$ بر 6 بخش‌پذیر است، بنابراین (۲') نیز برقرار

است. به‌وضوح $n - 6$ زوج است، زیرا n زوج می‌باشد پس (۳') نیز صدق می‌کند. حال برای به‌دست آوردن سیستم ۶-دوری (\mathbb{Z}_{n-6}, B_1) از $K_{n-6} - E(F')$ فرض استقرا را اعمال می‌کنیم. از آن‌جا که $n \geq 12$ و $n - 6 \geq 6$ و $|\mathbb{Z}_n \setminus \mathbb{Z}_{n-6}| = 6$ ، با کمک لم ۴.۱.۴ یک سیستم ۶-دوری (\mathbb{Z}_n, B_2) از گراف دوبخشی $K_{n-6,6}$ با مجموعه رئوس $\{\mathbb{Z}_{n-6}, \mathbb{Z}_n \setminus \mathbb{Z}_{n-6}\}$ وجود دارد و با کمک لم ۵.۱.۴ یک سیستم ۶-دوری $(\mathbb{Z}_n \setminus \mathbb{Z}_{n-6}, B_3)$ از $K_6 - F_3$ وجود دارد که F_3 در این‌جا ۱-عامل در K_6 و یال‌های آن $\{\{n-i, n-i-1\} \mid i \in \{1, 3, 5\}\}$ می‌باشد. در این‌صورت $(\mathbb{Z}_n, B_1 \cup B_2 \cup B_3)$ یک سیستم ۶-دوری از $K_n - F$ است.

حالت دوم: فرض کنید $n = 6t$ و $n \geq 12$.

با توجه به جدول ۱۰.۴ می‌دانیم که (به پیمانه‌ی ۶) یا $C(F) \equiv 3$ یا $C(F) \equiv 0$ ، پس به‌طور خاص داریم $C(F) \geq 3$. در نظر بگیرید که C_2, C_1, C_0 سه مؤلفه‌ی F باشند، پس فرض می‌کنیم در حالت اول یکی از مؤلفه‌ها مانند C_2 با K_2 یکرخت نیست.

برای $0 \leq i \leq 2$ فرض کنید که دومین رأس در مسیر $P_i \in C_i$ (که P_i مسیری با بیشترین طول است) i نامگذاری شده باشد. پس رأس i مجاور به یک رأس درجه یک از F است یعنی مجاور به اولین رأس در P_i ، که آن را $n-i-1$ می‌نامیم. از آن‌جا که می‌دانیم C_2 با K_2 یکرخت نیست و همچنین می‌دانیم که هر رأس در F درجه‌ی فرد دارد، رأس $i = 2$ بر حداقل دو یال دیگر از F واقع است و حداقل یکی از این یال‌ها بر یک برگ واقع است. در غیر این‌صورت مسیر P_2 نمی‌تواند طولانی‌ترین مسیر در مؤلفه‌ی C_2 باشد. این برگ، $n-4$ نام دارد (شکل ۱۰.۴ را ببینید).



شکل ۱۰.۴: نامگذاری رئوس وقتی $n = 6t$.

حال که ما ۴ رأس انتخاب شده داریم به شرح زیر عمل می‌کنیم. فرض کنید F' از $F[Z_{n-4}]$ و افزودن یال‌های $\{0, 2\}$ و $\{1, 2\}$ ساخته شده است و فرض کنید $\alpha = n - 4$. اکنون شرایط (۱') تا (۳') را بررسی می‌کنیم. از آن‌جا که برای $0 \leq i \leq 1$ داریم: $\deg_{F'}(i) = \deg_F(i) - 1 + 1$ و $\deg_{F'}(2) = \deg_F(2) - 2 + 2$ ، به‌وضوح برای $1 \leq i \leq n - 4$ داریم: $\deg_{F'}(i) = \deg_F(i)$ ، پس همه‌ی رئوس درجه‌ی فرد دارند بنابراین (۱') صدق می‌کند. علاوه بر این یال‌های $\{0, 2\}$ و $\{1, 2\}$ سه مؤلفه‌ی C_0 و C_1 و C_2 در F را برای ایجاد یک

مؤلفه‌ی مجزا در F' متصل می‌کنند بنابراین می‌بینیم که $C(F') = C(F) - ۲$. از آن جا که $V(F') = n - ۴$ و ما فرض کردیم $|E(K_n - F)|$ بر ۶ بخش‌پذیر است و با توجه به جدول ۱۰۴ داریم که $|E(K_{n-۴} - F')|$ بر ۶ بخش‌پذیر است پس شرط (۲') برقرار است. به‌وضوح چون n زوج است، $n - ۴$ نیز زوج است پس شرط (۳') نیز صدق می‌کند، بنابراین با توجه به فرض استقرای یک سیستم ۶-دوری $(\mathbb{Z}_{n-۴}, B_۱)$ از $K_{n-۴} - E(F')$ وجود دارد. به راحتی اگر $n = ۱۲$ ، در این صورت $B_۲ = \emptyset$ و اگر $n \geq ۱۸$ باشد در این صورت $۱۲ - ۶ \leq n - ۴ < ۳$ است.

به‌وضوح $۶(t - ۲) = n - ۱۲$ بر ۶ بخش‌پذیر است (به‌طور خاص ما به $۲ \leq t$ توجه داریم). بنا به لم ۴.۱.۴ یک سیستم ۶-دوری $(\mathbb{Z}_n \setminus \mathbb{Z}_۸, B_۲)$ از $K_{n-۱۲,۴}$ با مجموعه رئوس $\{\mathbb{Z}_{n-۴} \setminus \mathbb{Z}_۸, \mathbb{Z}_n \setminus \mathbb{Z}_۴\}$ وجود دارد و بنا به لم ۱.۲.۴ یک سیستم ۶-دوری $B_۳$ از $G_۱ = G_۱(0, ۱, \dots, ۷, n - ۴, n - ۳, n - ۲, n - ۱)$ وجود دارد. به یاد بیاورید که در تعریف $G_۱$ در لم ۱.۲.۴ داریم: $\{\{0, ۲\}, \{0, ۱\}\} \subseteq E(G)$. این دو یال در F' هستند، بنابراین این دو یال نه در F و نه در هیچ دور ۶ تایی در $B_۱$ واقع نمی‌شود، پس این دو یال فقط در یک دور ۶ تایی $B_۳$ قرار می‌گیرند. همچنین عبارت زیر به این معنی است که یال‌های معرفی شده در پایین در هیچ دور ۶ تایی $B_۳$ واقع نشده‌اند، زیرا عضو $G_۱$ نیستند.

$$\{\{0, n - ۱\}, \{۱, n - ۲\}, \{۲, n - ۳\}, \{۲, n - ۴\}\} \cap E(B_۳) = \emptyset$$

و این خوب است، زیرا این یال‌ها در F رخ می‌دهند. بنابراین $(\mathbb{Z}_n, B_۱ \cup B_۲ \cup B_۳)$ یک سیستم ۶-دوری در $K_n - E(F)$ است.

حالت سوم: فرض کنید $n = ۶t + ۲$ ، بنابراین $n \leq ۱۴$ (مورد توجه است). این اثبات به انتخاب با دقت چهار رأس از F به نام‌های $(n - ۱, n - ۲, n - ۳, n - ۴)$ نیاز دارد، که ما چندین حالت را در نظر می‌گیریم. با کمک جدول ۱۰۴ می‌بینیم که در این حالت (به پیمانه‌ی ۶) یا $C(F) \equiv ۱$ یا $C(F) \equiv ۴$. فرض کنید $C(F) = ۱$ ، اگر F یک ستاره به مرکز ۰ باشد، در این صورت F حداقل ۱۳ برگ دارد (حداقل $t = ۲$ است). بنابراین هر ۴ رأس $n - ۱$ و $n - ۲$ و $n - ۳$ و $n - ۴$ از برگ‌ها انتخاب می‌شوند و اگر F ستاره نباشد، مسیر P با بلندترین طول در F در نظر می‌گیریم. چون $n \leq ۱۴$ و F یک ستاره نیست، مسیر P حداقل طول ۳ دارد. دومین رأس در P را ۰ و دومین رأس مانده به آخرین رأس در P را ۱ بنامید. از آن جا که P ماکسیمال است و هر رأس F درجه‌ی فرد دارد، رأس ۰ حداقل با دو رأس درجه یک مجاور است. این دو رأس را $n - ۱$ و $n - ۲$ بنامید. به‌طور مشابه رأس ۱ حداقل با دو رأس درجه یک مجاور است. آنها را $n - ۳$ و $n - ۴$ بنامید.

حال فرض کنید که $C(F) \geq ۱$ ، در این صورت F حداقل ۴ مؤلفه دارد. بنا به توضیحات قبل F حداکثر ۲ مؤلفه‌ی یکرخیخت با $K_۲$ دارد، پس حداقل ۲ مؤلفه‌ی غیر یکرخیخت با $K_۲$ دارد، این دو مؤلفه را $C_۰$ و $C_۱$ بنامید. برای $۱ \leq i \leq ۰$ فرض کنید رأس i دومین رأس مسیر P_i با بیشترین طول باشد که $P_i \in C_i$. از آن جا که P_i بلندترین مسیر است و همه‌ی رئوس F درجه‌ی

فرد دارند، رأس i حداقل با دو رأس درجه یک مجاور است. این دو رأس را $n - 2i - 1$ و $n - 2i - 2$ بنامید.

اکنون که ما ۴ رأس خاص انتخاب شده داریم، در دو نوع F ستاره و غیر ستاره، به صورت زیر عمل می‌کنیم.

فرض کنید $F' = F[\mathbb{Z}_{n-4}]$ ، از سوی دیگر چون F' ، \mathbb{Z}_{n-4} را می‌پوشاند، پس یکی از دو نوع زیر رخ می‌دهد:

(الف) برای $i = 0$ ، $\deg_{F'}(i) = \deg_F(i) - 4$ و برای $1 \leq i \leq n - 5$ ، $\deg_{F'}(i) = \deg_F(i)$.

(ب) برای $0 \leq i \leq 1$ ، $\deg_{F'}(i) = \deg_F(i) - 2$ و برای $2 \leq i \leq n - 5$ ، $\deg_{F'}(i) = \deg_F(i)$.

با توجه به دو نوع بالا همهی رئوس F' درجه‌ی فرد دارند (چون رئوس F درجه‌ی فرد بودند). بنابراین (۱') برقرار است. از آن‌جا که F' با حذف رئوس درجه یک از F ساخته شده است، $C(F') = C(F)$ و چون $|V(F')| = n - 4$ و ما فرض می‌کنیم $|E(K_n - F)|$ بر ۶ بخش پذیر است، با توجه به جدول ۱.۰۴، $|E(K_{n-4} - F')|$ بر ۶ بخش پذیر است، بنابراین (۲') صدق می‌کند. به‌وضوح چون n زوج است $n - 4$ نیز زوج است، پس (۳') نیز برقرار است.

حال با توجه به فرض استقرای یک سیستم ۶-دوری (\mathbb{Z}_{n-4}, B_1) از $K_{n-4} - E(F')$ وجود دارد. از آن‌جا که $n \geq 14$ و $n - 8 \geq 6$ ، به‌وضوح $n - 8 = 6(t - 1)$ که بر ۶ بخش پذیر است ($t \geq 2$ مورد نظر است). پس با توجه به لم ۴.۱.۴ یک سیستم ۶-دوری $(\mathbb{Z}_n \setminus \mathbb{Z}_4, B_2)$ از گراف دو بخشی $K_{n-8,4}$ با مجموعه رئوس $\{\mathbb{Z}_{n-4} \setminus \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_n \setminus \mathbb{Z}_{n-4}\}$ وجود دارد و بنا به لم ۲.۲.۴ یک سیستم ۶-دوری B از $G_{2,i} = G_{2,i}(0, 1, 2, 3, n-4, \dots, n-1)$ وجود دارد که در این‌جا وقتی F یک ستاره باشد، $i = 1$ و در غیر این صورت $i = 2$ ؛ که در حالت $i = 1$ بنا به تعریف $G_{2,1}$ داریم:

$$\{\{0, n-1\}, \{0, n-2\}, \{0, n-3\}, \{0, n-4\}\} \cap E(B_2) = \emptyset$$

که این ایده‌آل است. زیرا این یال‌ها وقتی F یک ستاره است، در F واقع می‌شوند. به‌طور مشابه در حالت $i = 2$ تعریف $G_{2,2}$ تضمین می‌کند که

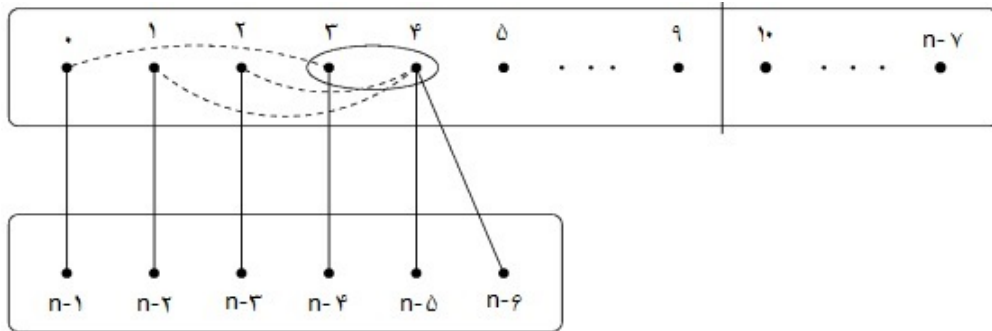
$$\{\{0, n-1\}, \{0, n-2\}, \{1, n-3\}, \{1, n-4\}\} \cap E(B_2) = \emptyset$$

که این نیز ایده‌آل است، زیرا وقتی F ستاره نیست، این یال‌ها در F واقع می‌شوند. بنابراین $(\mathbb{Z}_n, B_1 \cup B_2 \cup B_3)$ یک سیستم ۶-دوری از $K_n - E(F)$ است.

حالت چهارم: فرض کنید $n = 12k + 4$ ، پس $n \geq 16$.

با توجه به جدول ۱.۰۴ می‌دانیم که در این حالت (به پیمانۀ ۶) $C(F) \equiv 4$ ، بنابراین به‌طور خاص $C(F) \geq 4$. فرض کنید C_0 و C_1 و C_2 و C_3 مؤلفه‌های F باشند. با توجه به توضیحات داده شده در تقسیم بندی حالات می‌دانیم که در این حالت حداکثر دو مؤلفه‌ی یکرخت با K_2

وجود دارد. فرض کنید C_3 با K_2 یکرخیخت نباشد. برای $0 \leq i \leq 3$ با بیشترین طول P_i در C_i را در نظر بگیرید و فرض کنید $n - i - 1$ اولین رأس در P_i و i دومین رأس در P_i باشد. اگر C_3 یک ستاره باشد در این صورت P_3 مسیری به طول ۲ است و رأس ۳ که دومین رأس در P_3 و مرکز ستاره‌ی C_3 است با $n - 5$ و $n - 6$ نیز مجاور می‌باشد (چون باید درجه‌ی رأس ۳ همچون درجه‌ی رئوس دیگر F فرد باشد). اگر C_3 ستاره نباشد فرض کنید دومین رأس مانده به آخر در مسیر P_3 رأس ۴ باشد. چون P_3 ماکسیمال است (و رئوس F درجه فردند) رأس ۴ حداقل با دو رأس درجه یک (برگ) مجاور است، آن‌ها را $n - 5$ و $n - 6$ می‌نامیم. (شکل ۲.۴ را ببینید.)



شکل ۲.۴: نامگذاری رئوس وقتی $n = 12k + 4$ و C_3 ستاره نیست.

(اگر C_3 ستاره باشد رأس ۳ و ۴ همین رئوس هستند.)

حال که ما ۶ رأس انتخابی خاص به نام‌های $n - 1$ و $n - 2$ و $n - 3$ و $n - 4$ و $n - 5$ و $n - 6$ داریم، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

فرض کنید F' به صورت $F[\mathbb{Z}_{n-6}]$ با افزودن یال‌هایی در دو مورد زیر باشد.

• اگر C_3 ستاره نباشد، یال‌های افزوده شده به F' ، $\{0, 3\}$ و $\{1, 4\}$ و $\{2, 4\}$ هستند.

• اگر C_3 ستاره باشد، یال‌های افزوده شده به F' ، $\{0, 3\}$ و $\{1, 3\}$ و $\{2, 3\}$ هستند.

چون به وضوح F' رئوس K_{n-6} را می‌پوشاند، پس یکی از دو نوع زیر رخ می‌دهد:

(الف) برای $0 \leq i \leq 3$ ، $\deg_{F'}(i) = \deg_F(i) + 1 - 1$ و برای $i = 4$ ،
 $\deg_{F'}(i) = \deg_F(i) + 2 - 2$

(ب) برای $0 \leq i \leq 2$ ، $\deg_{F'}(i) = \deg_F(i) + 1 - 1$ و برای $i = 3$ ،
 $\deg_{F'}(i) = \deg_F(i) + 3 - 3$

با توجه به دو نوع بالا همه‌ی رئوس در F' درجه فرد دارند، پس (F') صدق می‌کند. به علاوه با وصل کردن ۴ مؤلفه‌ی C_0 و C_1 و C_2 و C_3 در F تنها یک مؤلفه در F' ایجاد می‌شود، یعنی $C(F') = C(F) - 3$. علاوه بر این از آن‌جا که (به پیمانه‌ی ۶) $C(F) \equiv 4$ ، پس (به پیمانه‌ی ۶) $C(F') \equiv 1$ و چون $|V(F')| = n - 6$ و ما فرض می‌کنیم که تعداد یال‌های $K_n - E(F)$ بر ۶ بخش پذیر است، با توجه به جدول ۱.۴ داریم که $|E(K_{n-6} - E(F'))|$ بر ۶ بخش پذیر

است. بنابراین (۲') صدق می‌کند. چون n زوج است به‌وضوح $n - 6$ نیز زوج است پس (۳') برقرار است. از این‌رو بنا به فرض استقرا یک سیستم ۶-دوری (\mathbb{Z}_{n-6}, B_1) از زیرگراف $K_{n-6} - E(F')$ وجود دارد.

به راحتی اگر $n = 16$ ، در این‌صورت $B_2 = \emptyset$. اگر $n \leq 28$ ، به‌وضوح داریم: $(2 - 2k)6 = n - 16$ ، که بر ۶ بخش‌پذیر است. بنابراین با توجه به لم ۴.۱.۴ یک سیستم ۶-دوری $(\mathbb{Z}_n \setminus \mathbb{Z}_{10}, B_2)$ از $K_{n-16,6}$ با مجموعه رئوس $\{\mathbb{Z}_{n-6} \setminus \mathbb{Z}_{10}, \mathbb{Z}_n \setminus \mathbb{Z}_{n-6}\}$ وجود دارد. اگر C_3 ستاره نباشد، با توجه به لم ۳.۲.۴ یک سیستم ۶-دوری B_3 از زیرگراف $G_{3,1}(0, 1, \dots, 9, n-6, n-5, \dots, n-1)$ وجود دارد و اگر C_3 ستاره باشد، با توجه به همین لم یک سیستم ۶-دوری B_3 از $G_{3,1}(0, 1, \dots, 9, n-6, \dots, n-1)$ وجود دارد. توجه کنید یال‌های $G_{3,\beta}$ ، $(\beta = 1, 2)$ ، که رئوس \mathbb{Z}_{n-6} را متصل می‌کنند دقیقاً یال‌های $E(F') \setminus E(F)$ هستند و در دوره‌های ۶ تایی B_1 قرار نمی‌گیرند، اما در یک دور ۶ تایی B_3 واقع می‌شوند. همچنین یال‌هایی که یک رأس در \mathbb{Z}_{n-6} را به یک رأس در $\mathbb{Z}_n \setminus \mathbb{Z}_{n-6}$ وصل می‌کنند، در یک دور ۶ تایی B_3 واقع نمی‌شوند و دقیقاً یال‌های $E(F) \setminus E(F')$ هستند. بنابراین $(\mathbb{Z}_n, B_1 \cup B_2 \cup B_3)$ یک سیستم ۶-دوری از $K_n - E(F)$ است.

حالت پنجم: فرض کنید $n = 12k + 10$ ، پس $n \geq 22$.

با توجه به جدول ۱.۴ می‌دانیم که (به پیمانه ۶) $C(F) \equiv 1$. اثبات در این مرحله به تعریف جفت برگ نیاز دارد.

تعریف ۲.۳.۴. یک جفت برگ مجموعه‌ای مانند Y است که شامل دو رأس درجه یک در F است، به‌طوری که یک رأس مجاور مشترک دارند. $N(Y)$ را مرکز Y می‌نامیم. علاوه بر این دو یا سه یا چهار جفت برگ مجزا که یک مرکز مشترک دارند، به ترتیب جفت برگ دوگانه یا سه‌گانه و یا چهارگانه نامیده می‌شوند.

این اثبات به انتخاب با دقت ۸ رأس از F (به نام‌های: $n-1, n-2, \dots, n-8$) نیاز دارد که ما برای ۳ نوع F آن‌ها را می‌یابیم.

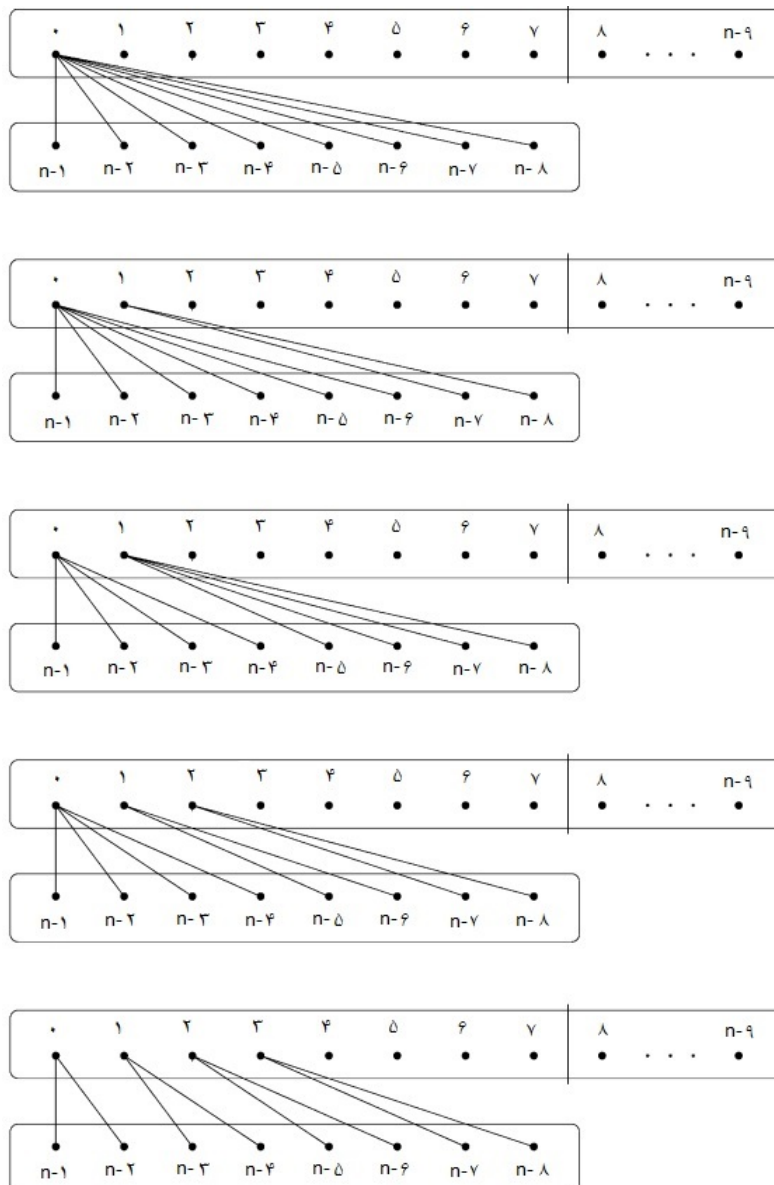
زیرحالت ۱. فرض کنید برای $1 \leq C(F)$ ، حداقل چهار جفت برگ دارد که این جفت برگ‌ها خود ۵ نوع هستند و در پایین شرح داده شده‌اند. جفت برگ‌ها را برای $0 \leq i \leq 3$ ، $\{n - (2i + 1), n - (2i + 2)\}$ بنامید. هریک از مراکز چهار جفت برگ را با یک رأس از $\{0, 1, 2, 3\}$ نام‌گذاری کنید، پنج حالت ممکن برای مجموعه L که شامل جفت برگ‌هاست، امکان دارد. (شکل ۳.۴ را ببینید).

(۱) L یک جفت برگ چهارگانه است، در این نوع فرض کنید $\beta = 1$.

(۲) L یک جفت برگ و یک جفت برگ سه‌گانه است، در این نوع فرض کنید $\beta = 2$.

(۳) L دو جفت برگ دوگانه است، در این نوع فرض کنید $\beta = 3$.

- (۴) L دو جفت برگ و یک جفت برگ دوگانه است، در این نوع فرض کنید $\beta = 4$.
- (۵) L چهار جفت برگ است، در این حالت فرض کنید $\beta = 5$.



شکل ۳.۴: نامگذاری رئوس وقتی $n = 12k + 10$ (زیرحالت ۱)

حال که ما ۸ رأس خاص انتخاب شده داریم، به صورت زیر عمل می‌کنیم. فرض کنید $F' = F[\mathbb{Z}_{n-8}]$ ، در هر نوع F در بالا، همه‌ی $n - 8$ رأس در F' درجه فرد دارند، پس (۱') صدق می‌کند. از آنجا که F' از حذف رئوس درجه یک از F به وجود آمده است، $C(F') = C(F)$ و چون $|V(F')| = n - 8$ و ما فرض می‌کنیم که $|E(K_n - E(F))|$ بر ۶ بخش پذیر باشد و با توجه به جدول ۱۰.۴، می‌بینیم که $|E(K_n - E(F'))|$ بر ۶ بخش پذیر است، بنابراین (۲') برقرار است. به وضوح چون n زوج است، $n - 8$ نیز زوج است پس (۳') نیز صدق می‌کند. بنابراین می‌توان با توجه به فرض استقرای یک سیستم ۶-دوری (\mathbb{Z}_{n-8}, B_1)

از $K_{n-8} - E(F')$ به دست آورد.

از آن جا که $n \geq 22$ و $n - 16 \geq 6$ ، بدیهی است که $n - 6 = 6(2k - 1)$ بر ۶ بخش پذیر باشد، پس با توجه به لم ۴.۱.۴ یک سیستم ۶-دوری (\mathbb{Z}_{n-8}, B_2) از گراف دو بخشی $K_{n-16,8}$ با مجموعه رئوس $\{\mathbb{Z}_{n-8} \setminus Z_8, \mathbb{Z}_n \setminus \mathbb{Z}_{n-8}\}$ وجود دارد. در نهایت با توجه به لم ۴.۲.۴ برای انواع F در بالا یک سیستم ۶-دوری B_3 از گراف $(\mathbb{Z}_n, B_1 \cup B_2 \cup B_3)$ لازم به ذکر است که یال‌هایی که رئوس \mathbb{Z}_{n-8} را به رئوس $\mathbb{Z}_n \setminus \mathbb{Z}_{n-8}$ متصل می‌کنند و در هیچ دور ۶ تایی B_3 واقع نمی‌شوند، دقیقاً در $E(F) \setminus E(F')$ هستند. بنابراین $(\mathbb{Z}_n, B_1 \cup B_2 \cup B_3)$ یک سیستم ۶-دوری از $K_n - E(F)$ است.

زیر حالت ۲. توجه کنید که در حالت پنجم اگر $C(F) > 1$ ، در این صورت به وضوح با توجه به جدول ۱.۴ داریم $7 \leq C(F)$.

از آن جا که F حداکثر دو مؤلفه یکرخت با K_2 دارد اگر $C(F) < 1$ ، در این صورت حداقل ۵ مؤلفه وجود دارد که هریک شامل یک جفت برگ هستند. بنابراین یکی از انواع F ترسیم شده در زیر حالت ۱ ایجاد می‌شود و مسأله حل است. از این رو فرض می‌کنیم F یک درخت با حداکثر سه جفت برگ باشد، پس F یک مؤلفه دارد.

فرض کنید که F سه جفت برگ دارد و P را مسیری در F با بیشترین طول در نظر بگیرید. می‌دانیم که دومین رأس و دومین رأس مانده به آخر در P مراکز جفت برگ هستند، از آن جا که فقط یک جفت برگ دیگر مانده است، همه رئوس داخلی P در F به جز احتمالاً یک رأس، درجه‌ی ۳ دارند و مجاور یک برگ هستند (مانند حالتی که P بر مرکز سه جفت برگ واقع شود). از آن جا که $n \geq 22$ ، P باید حداقل طول ۸ داشته باشد. بنابراین در صورت لزوم با تغییر مسیر P می‌توانیم مطمئن باشیم که سومین جفت برگ بین آغاز و پایان مسیر P است.

حال فرض کنید $n - 2$ دومین رأس از P باشد و فرض کنید دو رأس درجه یک و مجاور با $n - 2$ در F ، $n - 3$ و $n - 4$ باشند. همچنین فرض کنید \circ سومین رأس در P باشد، برگ مجاور با آن را $n - 1$ و دومین رأس مانده به آخر در P را رأس ۱ و دو رأس مجاور با آن را $n - 5$ و $n - 6$ بنامید. در نهایت رئوس آخرین جفت برگ را $n - 7$ و $n - 8$ با مرکزیت رأس ۲ در نظر بگیرید (البته اگر این مرکز ۱ نباشد). (شکل ۴.۴ را ببینید).

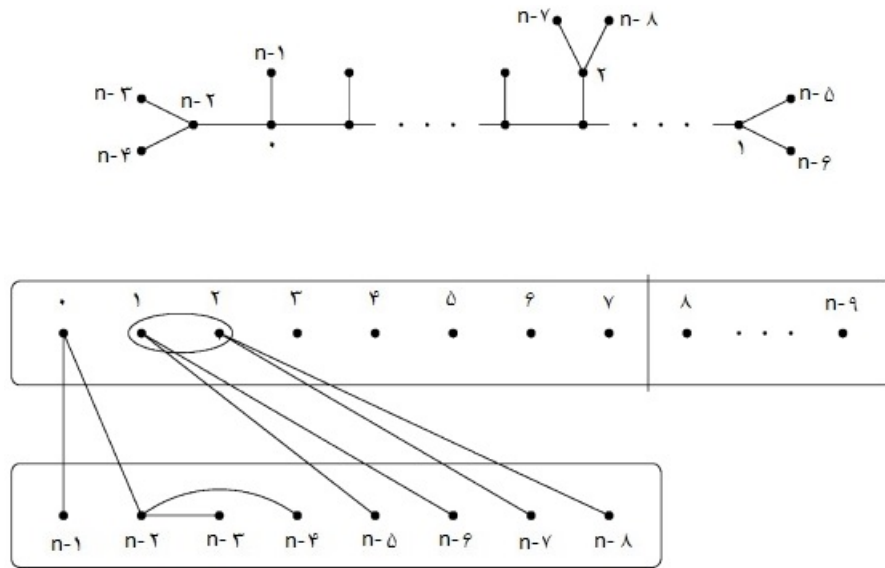
اگر رأس ۱ یک جفت برگ تنها یا دوگانه باشد به ترتیب قرار دهید $\beta = 1$ یا $\beta = 2$.

حال که ما حداقل ۱۰ رأس خاص انتخاب شده داریم، به صورت زیر عمل می‌کنیم.

فرض کنید $F' = F[\mathbb{Z}_{n-8}]$. می‌دانیم F' روی \mathbb{Z}_{n-8} فراگیر است. با توجه به یکی از دو نوع زیر رخ می‌دهد.

(الف) وقتی $\beta = 1$ ، برای $i \in \mathbb{Z}_3$ داریم: $\deg_{F'}(i) = \deg_F(i) - 2$ و برای $3 \leq i \leq n - 9$ داریم: $\deg_{F'}(i) = \deg_F(i)$.

(ب) اگر $\beta = 2$ ، داریم: $\deg_{F'}(\circ) = \deg_F(\circ) - 2$ و $\deg_{F'}(1) = \deg_F(1) - 4$ و برای



شکل ۴.۴: نامگذاری رئوس وقتی $n = 12k + 10$ (زیرحالت ۲)

$\deg_{F'}(i) = \deg_F(i)$: داریم $2 \leq i \leq n - 9$

که در هر دو حالت بالا رئوس F' درجه‌ی فرد دارند، بنابراین (۱') برقرار است. از آنجا که F' از حذف رأس $n - 2$ و رئوس جفت‌برگ‌ها به‌وجود آمده است، پس $C(F') = C(F)$. چون $|V(F')| = n - 8$ و ما فرض کردیم $|E(K_n - E(F))|$ بر ۶ بخش پذیر است، با توجه به جدول ۱.۴ داریم که $|E(K_n - E(F'))|$ بر ۶ بخش‌پذیر است، بنابراین (۲') صدق می‌کند.

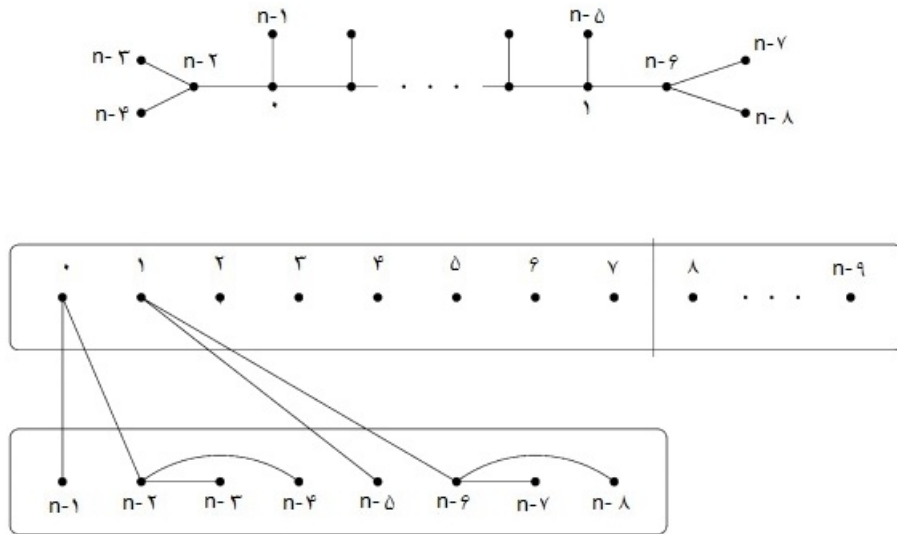
به‌وضوح چون n زوج است پس $n - 8$ نیز زوج است و (۳') نیز برقرار است. حال با توجه به فرض استقرای یک سیستم ۶-دوری (\mathbb{Z}_{n-8}, B_1) از $K_{n-8} - E(F')$ وجود دارد.

از آنجا که $n \geq 22$ و $n - 16 \geq 6$ ، بدیهی است که $n - 16 = 6(2k - 1)$ بر ۶ بخش پذیر است. بنابراین با توجه به لم ۴.۱.۴ یک سیستم ۶-دوری (\mathbb{Z}_{n-8}, B_2) از گراف دو بخشی $K_{n-16,8}$ با مجموعه رئوس $\{\mathbb{Z}_n \setminus \mathbb{Z}_{n-8}, \mathbb{Z}_{n-8} \setminus \mathbb{Z}_8\}$ وجود دارد، و با کمک لم ۵.۲.۴ یک سیستم ۶-دوری B_3 از $G_{\Delta, \beta}(\circ, 1, \dots, 7, n-8, \dots, n-1)$ وجود دارد (که با توجه به جفت‌برگ‌های واقع بر رأس ۱ یا رأس ۲، $\beta = 1$ یا 2 می‌باشد).

توجه کنید یال‌هایی که یک رأس در \mathbb{Z}_{n-8} را به یک رأس در $\mathbb{Z}_n \setminus \mathbb{Z}_{n-8}$ وصل می‌کنند و در هیچ دور ۶‌تایی B_3 واقع نمی‌شوند، دقیقاً در بخش $E(F) \setminus E(F')$ هستند. بنابراین $(\mathbb{Z}_n, B_1 \cup B_2 \cup B_3)$ یک سیستم ۶-دوری از $K_n - E(F)$ است.

زیرحالت ۳. فرض کنید F دو جفت برگ دارد و فرض کنید P یک مسیر با بیشترین طول در F باشد. می‌دانیم رئوس دوم و دومین مانده به آخر، مراکز دو جفت‌برگ هستند. حال فرض کنید $n - 2$ دومین رأس P باشد، برگ‌های مجاور آن را $n - 3$ و $n - 4$ و سومین رأس P را $n - 1$ و برگ مجاور آن را $n - 2$ بنامید. به‌طور مشابه فرض کنید $n - 6$ دومین رأس مانده به آخر P

باشد و برگ‌های متصل به آن را $n-7$ و $n-8$ و سومین رأس مانده به آخر را ۱ و برگ مجاور به آن را $n-5$ بنامید. این رئوس همه متمایز هستند، چون $n \geq 22$ (شکل ۵.۴ را ببینید).



شکل ۵.۴: نامگذاری رئوس وقتی $n = 12k + 1$ (زیرحالت ۳)

حال که ما ۸ رأس خاص انتخاب شده داریم، به صورت زیر عمل می‌کنیم. فرض کنید $F' = F[\mathbb{Z}_{n-8}]$ ، بنابراین چون F' روی $\mathbb{Z}_n \setminus \mathbb{Z}_{n-8}$ فراگیر است و از آن جا که برای $0 \leq i \leq 1$ داریم: $\deg_{F'}(i) = \deg_F(i) - 2$ و برای $2 \leq i \leq n-9$ داریم: $\deg_{F'}(i) = \deg_F(i)$ ، در این صورت همگی رئوس F' درجه فرد دارند، بنابراین (۱') صدق می‌کند. از آن جا که F' از حذف رئوس $n-2$ و $n-6$ و جفت برگ‌های این دو رأس و رئوس $n-1$ و $n-5$ (که درجه یک هستند) به وجود می‌آید، $C(F') = C(F)$. چون $|V(F')| = n-8$ و ما فرض کردیم $|E(K_n - E(F))|$ بر ۶ بخش پذیر است، با کمک جدول ۱.۴، $|E(K_n - E(F'))|$ بر ۶ بخش پذیر است. پس (۲') نیز صدق می‌کند. به وضوح چون n زوج است $n-8$ نیز زوج است پس (۳') نیز برقرار است. از این رو می‌توان با اعمال فرض استقرا یک سیستم ۶-دوری (\mathbb{Z}_{n-8}, B_1) از زیرگراف $K_{n-8} - E(F')$ به دست آورد. از آن جا که $n \geq 22$ پس $n-16 \geq 6$ ؛ و بدیهی است که $n-16 = 6(2k-1)$ بر ۶ بخش پذیر است. بنابراین با توجه به لم ۴.۱.۴ یک سیستم ۶-دوری (\mathbb{Z}_{n-8}, B_2) از گراف دو بخشی $K_{n-16,8}$ با مجموعه رئوس $\{\mathbb{Z}_n \setminus \mathbb{Z}_{n-8}, \mathbb{Z}_{n-8} \setminus \mathbb{Z}_8\}$ وجود دارد، و با توجه به لم ۶.۲.۴ یک سیستم ۶-دوری B_3 از $G_6 = G_6(0, 1, \dots, 7, n-8, n-7, \dots, n-1)$ وجود دارد. توجه کنید یال‌هایی که یک رأس در \mathbb{Z}_{n-8} را به یک رأس در $\mathbb{Z}_n \setminus \mathbb{Z}_{n-8}$ وصل می‌کنند و در هیچ دور ۶ تایی B_3 واقع نمی‌شوند، دقیقاً در $E(F) \setminus E(F')$ قرار دارند. در این صورت $(\mathbb{Z}_n, B_1 \cup B_2 \cup B_3)$ یک سیستم ۶-دوری از $K_n - E(F)$ می‌باشد و اثبات کامل می‌شود. \square

مراجع

- [١] B. Alspach, H. Gavlas, *Cycle decompositions of K_n and $K_n - I$* , J. Combinatorial Theory, Series B 81, (2001), 77 – 99.
- [٢] D. J. Ashe, H. L. Fu, C. A. Rodger, *A solution the forest leave problem for partial 6-cycle systems*, Discrete Mathematics, 281, (2004), 27 – 41.
- [٣] J. C. Bermond, *Cycles dans les graphs et G-configurations*, Thesis, University of Paris XI. Orsay, (1975).
- [٤] J. C. Bermond, O. Favaron, M. Maheo, *Hamiltonian decomposition of Cayley graphs of degree 4*, J. Combinatorial Theory, Series B 46, (1989), 142 – 153.
- [٥] D. Bryant, *Surveys in combinatorics*, London mathematical society lecture note, series 346, Cambridge university press, (2007), 67 – 96.
- [٦] R. Diestel, *Graph theory*, Electronic edition (2005).
- [٧] J. B. Fraleigh, *A first course in abstract algebra*, Third edition (1982).
- [٨] H. L. Fu, C. A. Rodger, *Forest leaves and four cycles*, J. Graph Theory, 33, (2000), 161 – 166.
- [٩] R. Haggkvist, *A lemma on cycle decompositions*, Ann. Discrete Mathematics, 27, (1985), 227 – 232.
- [١٠] A. J. W. Hilton, *Hamiltonian decompositions of complete graphs*, J. Combinatorial Theory, Series B 36, (1984), 125–134.
- [١١] D. G. Hofman, C.C. Lindner, C.A. Rodger, *On the construction of odd cycle systems*, J. Graph Theory, 13, (1989), 417 – 426.
- [١٢] B. W. Jackson, *Some cycle decompositions of complete graphs*, J. Combinatorics, Information System Sciences, 13, (1988), 20 – 32.
- [١٣] Rev.T. Kirkman, *On a problem in combinations*, Cambridge and Dublin Math. J., 2, (1847), 191 – 204.

- [١٤] A. Kotzig, *On decompositions of complete graphs into $4k$ -gons*, Mat. Fyz. Casopis Sloven. Akad. Vied, 15, (1965), 221 – 233.
- [١٥] C. C. Lindner, C. A. Rodger, *Design theory*, CRC Press, New York, (1997).
- [١٦] D. E. Lucas, *Recreations math oematiques*, Gauthiers Villars, Paris, 2, (1892).
- [١٧] C. A. Rodger, *Graph decompositions*, Proc. Second Internat, Catania Combin. Cod., Le Matematiche, 45, (1990), 119-140.
- [١٨] A. Rosa, *On cyclic decompositions of the complete graph into $(4m+2)$ -gons*, Mat. Fyz. Casopis Sloven. Akad. Vied, 16, (1966), 349 – 352.
- [١٩] M. Sajna, *Cycle decompositions of K_n and $K_n - I$* , J. Combinatorial Theory, Des., 10, (2002), 1 – 151.
- [٢٥] D. Sotteau, *Decompositions of $K_{m,n}$ ($K_{m,n}^*$) into cycles (circuits) of length $2k$* , J. Combinatorial Theory, Series B 29, (1981), 75 – 81.
- [٢١] M. Tarsi, *Decomposition of a complete multigraph into simple paths*, Nonbalanced handcuffed designs, J. Combinatorial Theory, Series A 34, (1983), 60 – 70.
- [٢٢] J. H. Van Lint, R. M. Wilson, *A course in combinatorics*, Cambridge university press, (2001).

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

1-factor	۱-عامل
Join	اتصال
Edge disjoint union	اجتماع یال مجزا
Induction	استقرا
Partition	افراز
Decomposition	تجزیه
Perfect matching	تطابق کامل
Permutation	جایگشت
Leaf pairs	جفت برگ
Forest	جنگل
Forest leave	جنگل برگ
Orient	جهت
Lift	جهش
Rotation	چرخش (دوران)
Automorphism	خودریختی
Degree	درجه
Tree	درخت
Bipartite	دوبخشی
Peripheral cycle	دور جانبی
Directed cycle	دور جهت‌دار
Diameter cycle	دور قطری
Central cycle	دور مرکزی
Solitary cycle	دور منفرد
Coupled cycle	دور همراه شده
Hamilton cycle	دور همیلتنی

Initial vertex	رأس ابتدایی
Terminal vertex	رأس انتهایی
Vertex-disjoint	رأس-مجزا
Internal vertices	رئوس داخلی
Fiber	رشته
Spanning subgraph	زیرگراف فراگیر
Hole	سوراخ
m -Cycle system	سیستم m -دوری
Wreath product	ضرب حلقه‌ای
Length	طول
Left pure length	طول خالص چپ
Right pure length	طول خالص راست
Diameter length	طول قطری
Mixed length	طول مختلط
Spectrum	طیف
Chromatic number	عدد رنگی
Decomposable	قابل تجزیه
Orbit	قلمرو
Arc	کمان
Circulant graph	گراف چرخشی
Complete graph	گراف کامل
Cayley graph	گراف کیلی
Group divisible m -cycle system	گروه بخش‌کننده‌ی سیستم m -دوری
Cyclic group	گروه دوری
Component	مؤلفه
Maximal	ماکسیمال (بیشین)
Diametrically opposed	متقابل قطری
Adjacent	مجاورت
Connection set	مجموعه اتصال
Edge Length set	مجموعه طول یال
Order	مرتبه
Path	مسیر

Zigzag path	مسیر زیگزاگ
k-Regular	k -منتظم
Generate	مولد
Connected	همبند
Congment	همنشت
Edge-coloring	یال رنگی
Edge-disjoint	یال-مجزا
Isomorphic	یکرختی

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

1-factor	۱- عامل
Adjacent	مجاورت
Arc	کمان
Automorphism	خودریختی
Bipartite	دوبخشی
Cayley graph	گراف کیلی
Central cycle	دور مرکزی
Chromatic number	عدد رنگی
Circulant graph	گراف چرخشی
Complete graph	گراف کامل
Component	مؤلفه
Congment	همنهشت
Connected	همبند
Connection set	مجموعه اتصال
Coupled cycle	دور همراه شده
Cyclic group	گروه دوری
Decomposable	قابل تجزیه
Decomposition	تجزیه
Degree	درجه
Diameter cycle	دور قطری
Diameter length	طول قطری
Diametrically opposed	متقابل قطری
Directed cycle	دور جهت‌دار
Edge coloring	یال رنگی
Edge-disjoint	یال-مجزا

Edge disjoint union	اجتماع یال مجزا
Edge length set	مجموعه طول یال
Fiber	رشته
Forest	جنگل
Forest leave	جنگل برگ
Generate	مولد
Group divisible m -cycle system	گروه بخش کننده‌ی سیستم m -دوری
Hamilton cycle	دور همیلتنی
Hole	سوراخ
Induction	استقرا
Initial vertex	رأس ابتدایی
Internal vertices	رئوس داخلی
Isomorphic	یکرختی
Join	اتصال
k -Regular	k -منتظم
Leaf pairs	جفت برگ
Left pure length	طول خالص چپ
Length	طول
Lift	جهش
Maximal	ماکسیمال (بیشین)
m -Cycle system	سیستم m -دوری
Mixed length	طول مختلط
Orbit	قلمرو
Order	مرتبه
Orient	جهت
Partition	افراز
Path	مسیر
Perfect matching	تطابق کامل
Peripheral cycle	دور جانبی
Permutation	جایگشت
Right pure length	طول خالص راست
Rotation	چرخش (دوران)

Solitary cycle	دور منفرد
Spanning supgraph	زیرگراف فراگیر
Spectrum	طیف
Terminal vertex	رأس انتهایی
Tree	درخت
Vertex-disjoint	رأس-مجزا
Wreath product	ضرب حلقه‌ای
Zigzag path	مسیر زیگزاگ

Aabstract

In this thesis, we investigate necessary and sufficient conditions for the existence of a m -cycle system in complete graphs K_n for n odd, and also $K_n - I$ for n even, where I is 1-factor. Moreover, we prove necessary and sufficient conditions for the existence of a 6-cycle system of $K_n - E(F)$, where F is any spanning forest that all vertices in F have odd degree.

An m -cycle system of G will be formally described as an ordered pair (V, B) , where V is the vertex set of G and B is the set of m -cycles.

Keywords:Cycle systems; Forest Leave; 6-cycle; cycle-decomposition



University of Shahrood

Faculty Of Mathematical Sciences

**A solution to the forest leave problem for
partial 6-cycle systems**

Zeynab Behzadi

Supervisors

Dr Nader Jafari Rad and Dr Ramin Javadi

February 2015