



دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی کاربردی

پایان نامه کارشناسی ارشد

منظّم سازی تجزیه های ماتریس های متقارن معین مثبت در حل معادلات دیفرانسیل با توابع پایه ای شعاعی

صدیقه احمدی

••

استاد راهنما

دکتر مهدی قوتمند

استاد مشاور

دکتر حجت احسنی طهرانی

بهمن ۹۴

نیایش:

همیشه دعا کنید
چشمانی داشته باشید
که بهترین ها را در آدم با بینند
قلبی، که خطا کارترین ها را بخشد
ذهنی که بدی ها را فراموش کند
و روحی که هیچگاه،
ایمان به خدا را از دست ندهد.

تقدیم:

این پایان نامه را ضمن تشکر و سپاس بیکران و در کمال افتخار و امتنان تقدیم می نمایم
به محضر ارزشمنند پروماد عزیزم به خاطر همه تلاش های محبت آمیزی که در دوران
مختلف زندگی ام انجام داده اند و بامهربانی چگونه زیستن را به من آموخته اند و به استادان
فرزانه و فریخته که در راه کسب علم و معرفت مرایاری نمودند.

تعمدنامه

اینجانب صدیقه احمدی دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی دانشکده علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **منظم‌سازی تجزیه‌های ماتریس‌های متقارن معین مثبت در حل معادلات دیفرانسیل** با توابع پایه‌ای شعاعی، تحت راهنمایی دکتر مهدی قوتمند متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه صنعتی شاهرود “ یا “ Shahrood University of Technology “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

صدیقه احمدی

بهار ۹۴

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

ابتدا به معرفی توابع پایه‌ای شعاعی پرداخته‌ایم و درونیایی تابع با کمک توابع پایه‌ای شعاعی شرح داده شد و از طریق درونیایی با این توابع، مشتق تابع را با روش‌های مستقیم و غیرمستقیم به دست آورده‌ایم و سپس دستگاهی که در درونیایی توابع پایه‌ای شعاعی، ایجاد شده است را به روش‌های تجزیه مستقیم چولسکی، دولیتل و LDL^T حل کرده‌ایم، تجزیه چولسکی به دلایلی قابل حل نبود به این خاطر روش افزایش قطر و روش رایلی را بکار برده‌ایم، در اینصورت تجزیه چولسکی قابل اجرا و LDL^T نتایج بهتری را خواهد داد و نمودار ایجاد شده از نوسانات کمتری برخوردار خواهد بود، در بخش دیگر دستگاهی که با روش چولسکی قابل اجرا نبود را با روش دیگری به نام روش تجزیه گرادیان مزدوج حل کرده‌ایم و در پایان حل معادلات دیفرانسیل غیرخطی وابسته به زمان را با خطی کردن و با روش شبکه توابع پایه‌ای شعاعی انجام داده‌ایم.

کلمات کلیدی: توابع پایه‌ای شعاعی، درونیایی تابع، حل دستگاه به روش‌های تجزیه، حل معادلات

دیفرانسیل

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

۱. احمدی. ص، قوتمند. م، ”درونیایی با توابع پایه‌ای شعاعی و حل دستگاه‌های حاصل با روش گرادیان مزدوج”، دومین کنفرانس بین المللی فیزیک و ریاضی دی ماه ۱۳۹۴.

فهرست مطالب

۱	مفاهیم اولیه و پیش نیازها	۱
۱	۱.۱ مقدمه	۱
۳	۲.۱ تعاریف و مقدمات	۳
۷	۳.۱ روش کرانک - نیکلسون	۷
۸	۴.۱ روش رونگ - کوتا	۸
۱۱	۲ شبکه توابع پایه‌ای شعاعی	۱۱
۱۱	۱.۲ مقدمه	۱۱
۱۲	۲.۲ معرفی شبکه توابع پایه‌ای شعاعی	۱۲
۱۶	۳.۲ روش مستقیم برای محاسبه مشتق	۱۶
۲۱	۴.۲ روش‌های غیرمستقیم برای محاسبه درونیابی مشتق	۲۱
۲۱	۱.۴.۲ توابع یک متغیره	۲۱
۲۶	۲.۴.۲ توابع دو یا چند متغیره	۲۶
۲۹	۳ حل دستگاه حاصل از توابع پایه‌ای شعاعی به روش تجزیه	۲۹
۲۹	۱.۳ مقدمه	۲۹
۳۰	۲.۳ روش‌های مستقیم برای حل دستگاه‌های متقارن معین مثبت	۳۰
۳۲	۳.۳ منظم‌سازی تجزیه ماتریس‌های متقارن معین مثبت	۳۲
۳۴	۴.۳ انتخاب پارامتر منظم‌ساز و شرایط توقف	۳۴
۳۷	۴ حل دستگاه معادلات توابع پایه‌ای شعاعی به روش گرادیان مزدوج	۳۷
۳۷	۱.۴ روش گرادیان مزدوج	۳۷
۴۰	۲.۴ حل دستگاه توابع پایه‌ای شعاعی به روش گرادیان مزدوج	۴۰
۴۱	۳.۴ مثال	۴۱
۴۳	۵ حل معادلات وابسته به زمان با بکار بردن توابع پایه‌ای شعاعی	۴۳
۴۳	۱.۵ مقدمه	۴۳
۴۳	۱.۱.۵ حل معادلات با طرح کرانک - نیکلسون و توابع پایه‌ای شعاعی	۴۳

۴۵	مثال ۲.۱.۵
۴۸	حل معادلات با روش رونگ - کوتا و توابع پایه‌ای شعاعی
۴۹	نتیجه‌گیری و پیشنهادات ۲.۵
۵۱		آ کد matlab
۵۱		پیوست
۵۱	آ.۱ کد matlab فصل سوم
۶۱		مراجع
۶۳		واژه‌نامه فارسی به انگلیسی
۶۵		واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

فصل ۱

مفاهیم اولیه و پیش نیازها

۱.۱ مقدمه

بیشتر پدیده‌های طبیعی را با مدل‌های ریاضی توصیف می‌کنند و از آنجایی که نمی‌توان برای بسیاری از این مدل‌ها جواب واقعی یافت از روش‌های عددی بهره می‌گیریم. تعداد زیادی از این مدل‌ها به معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی منجر می‌شوند.

در بسیاری از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی که دامنه جواب آنها، پیچیدگی‌هایی دارند دستیابی به جواب دقیق دشوار بوده و یک روش عددی مناسب مورد نیاز است. روش‌های سنتی موجود (نظیر تفاضلات متناهی و اجزاء محدود) برای حل این معادلات عمدتاً وابسته به شبکه‌بندی دامنه حل مساله می‌باشند. از جمله مشکلات روش‌های وابسته به شبکه می‌توان به دشواری‌های تولید یک شبکه مناسب از جمله هزینه محاسباتی بالا در برخی مسائل اشاره کرد.

به دلیل مشکلات مذکور، روش‌های بدون شبکه جایگزینی برای روش‌های سنتی وابسته به شبکه به حساب می‌آیند. یک روش را بدون شبکه گوئیم هرگاه معادلات اصلی که گسسته‌سازی مساله مقدار مرزی را به عهده دارند وابسته به یک شبکه خوش‌رفتار نباشند (مستقل از ارائه یک شبکه خوش‌رفتار باشند)

روش توابع پایه‌ای شعاعی، یک روش بدون شبکه بوده و به دلیل خاصیت شعاعی بکارگیری آن در ابعاد بالا با دشواری‌های کمتری همراه است و دقت طیفی برای انواع معینی از آنها دست‌یافتنی است. بعلاوه این روش بر روی دامنه‌های نامنظم به خوبی قابل استفاده است. روش توابع پایه‌ای شعاعی یکی از ابزارهای اساسی برای درونیابی داده‌های پراکنده چند متغیره است. بعضی از کاربردهای آن در نقشه‌برداری، شبکه‌های عصبی، تصویر برداری پزشکی و حل عددی معادلات دیفرانسیل می‌باشد.

مفهوم توابع پایه‌ای شعاعی در سال ۱۹۷۱ توسط هاردی^۱ ارائه شد. او این روش را برای توابع پایه‌ای شعاعی چندربعی ارائه داد.

هاردی در مطالعات خود با درونیابی دو متغیره از داده‌های پراکنده و تنک سروکار داشت. هیچ یک از روش‌های درونیابی موجود (نظیر فوریه، چندجمله‌ای‌ها و اسپلاین‌های دو متغیره) برای این منظور رضایت

^۱Hardy

بخش نبودند، زیرا این روش‌ها یا خیلی هموار بودند یا از نوسانات زیادی برخوردار بودند، بعلاوه نامفرد بودن ماتریس درونیاب آنها تضمین شده نبودند.

روش هاردی روی مسائل با ابعاد بیش از یک هم به خوبی کار می‌کرد. چرا که تنها مفهوم فاصله در آن مطرح بود که در هر بعدی به راحتی قابل محاسبه بوده و در واقع یک مفهوم تک بعدی است. در سال ۱۹۸۲، ریچارد فرانک^۲ روش چندربعی را شهرت بخشید. او در گزارش خود روش‌های مشهور و معمول درونیابی را بر روی برخی مثال‌های متنوع مورد بررسی و مطالعه قرار داد. ریچارد دریافت که روش چندربعی بهترین روش است. یک ویژگی اصلی روش چندربعی آن است که تابع درونیاب یک ترکیب خطی از انتقال‌های یک تابع پایه‌ای شعاعی است که هرکدام از آنها تنها به فاصله اقلیدسی نقاط از مرکز بستگی دارد. بنابراین هرکدام از این توابع پایه‌ای شعاعی، متقارن شعاعی نسبت به مرکز می‌باشد. روش چندربعی به دیگر توابع پایه‌ای شعاعی نظیر گاوسی تعمیم داده شد و به عنوان روش توابع پایه‌ای شعاعی نام گرفت.

در سال ۱۹۹۰ روش و مفهوم توابع پایه‌ای شعاعی یک‌بار دیگر مطرح شد و آن زمانی بود که کانس^۳ روش را برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مبتنی بر توابع پایه‌ای شعاعی ارائه کرد. از آن زمان تا به حال روش‌های مبتنی بر توابع پایه‌ای شعاعی به طور گسترده در عرصه‌های علوم و مهندسی به کار گرفته شده‌اند.

توابع $\phi(r)$ که در روش توابع پایه‌ای شعاعی بکار می‌روند به دو بخش اصلی توابع بی‌نهایت هموار و توابع تکه‌ای هموار تقسیم می‌شوند که توابع بی‌نهایت هموار دارای یک پارامتر شکل هستند و همواری شکل توابع پایه‌ای را تنظیم می‌کند به طوری که با کاهش مقدار پارامتر شکل توابع پایه‌ای هموارتر می‌شوند. توابع پایه‌ای گاوسی و چندربعی و معکوس چندربعی بی‌نهایت هموار هستند.

دقت و پایداری برای $\phi(r)$ بی‌نهایت هموار به تعداد نقاط داده‌ای و مقدار پارامتر شکل بستگی دارد. مریچ^۴ نشان داد که با کاهش مقدار پارامتر شکل، دقت درونیاب توابع پایه‌ای شعاعی بطور معناداری بهبود می‌یابد و بر پایداری دستگاه خطی تاثیرگذار است.

در مورد هزینه محاسباتی نیز این نکته قابل ذکر است که با توجه به نوع محمل سراسری بسیاری از توابع پایه‌ای شعاعی، ماتریس درونیاب وابسته به چگال و پر است و بدلیل لزوم محاسبه وارون این ماتریس با پیچیدگی‌های محاسباتی مواجه می‌باشیم. هرچند تلاش‌هایی برای رفع این مشکل و افزایش سرعت انجام شده است. از سوی دیگر بدلیل ویژگی‌های توابع پایه‌ای شعاعی، با افزایش بعد این پیچیدگی‌ها توسعه نمی‌یابد که از امتیازات بزرگ توابع پایه‌ای شعاعی است.

^۲Richard Frank

^۳Kansa

^۴Merich

۲.۱ تعاریف و مقدمات

در این فصل مفاهیم مورد نیاز در فصل‌های بعد توضیح داده شده است.

تعریف ۱.۲.۱ (ماتریس تنک). یک ماتریس با تعداد زیادی عناصر صفر ماتریس تنک^۵ نامیده می‌شود.

تعریف ۲.۲.۱ (ماتریس متقارن). ماتریس مربعی A را متقارن گویند هرگاه:

$$A = A^t.$$

تعریف ۳.۲.۱ (دترمینان ماتریس). فرض کنید A ماتریسی $n \times n$ باشد، در این صورت دترمینان A که با علامت $\det(A)$ نشان داده می‌شود را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij} (-1)^{i+j} \det(A_{ij}).$$

که در آن A_{ij} ، ماتریس مربعی $(n-1) \times (n-1)$ است که از حذف سطر i ام و ستون j ام ماتریس $A_{n \times n}$ به دست می‌آید.

تعریف ۴.۲.۱ (ماتریس منفرد و نامنفرد). ماتریس A را منفرد گویند هرگاه $\det(A) \neq 0$ و نامنفرد گویند هرگاه $\det(A) = 0$.

تعریف ۵.۲.۱ (ماتریس متعامد). ماتریس مربع A را متعامد گویند هرگاه:

$$A^T = A^{-1}.$$

تعریف ۶.۲.۱ (ماتریس معین مثبت). ماتریس متقارن A را معین مثبت گویند، هرگاه برای هر بردار ناصفر x داشته باشیم:

$$x^t A x > 0,$$

و در صورتی که:

$$x^t A x \geq 0.$$

A را معین نامنفی گویند.

تعریف ۷.۲.۱ (مقادیر ویژه). فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ باشد. چندجمله‌ای

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A),$$

چندجمله‌ای مشخصه نامیده می‌شود. صفرهای چندجمله‌ای مشخصه، مقادیر ویژه ماتریس A هستند. این معادل با این است، $\lambda \in C$ ، یک مقدار ویژه از ماتریس A است، اگر و تنها اگر بردار غیر صفر x وجود داشته باشد، به طوری که:

$$Ax = \lambda x.$$

^۵Spars

تعریف ۸.۲.۱ (شعاع طیفی). بزرگترین مقدار ویژه ماتریس A از نظر اندازه را شعاع طیفی ماتریس A با ابعاد $n \times n$ گویند و با $\rho(A)$ نشان می‌دهند. به بیان دیگر اگر $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ مقادیر ویژه A باشند:

$$\rho(A) = \max |\lambda_i|, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

تعریف ۹.۲.۱ (نرم برداری). $\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ نگاشت را نرم نامند هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

(الف) $\|\mathbf{X}\| \geq 0$ و $\|\mathbf{X}\| = 0$ اگر و فقط اگر $\mathbf{X} = \mathbf{0}$

(ب) برای هر عدد حقیقی α و هر بردار $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$

$$\|\alpha \mathbf{X}\| = |\alpha| \|\mathbf{X}\|,$$

(پ) برای هر دو بردار دلخواه $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^n$

$$\|\mathbf{X} + \mathbf{Y}\| \leq \|\mathbf{X}\| + \|\mathbf{Y}\|.$$

تعریف ۱۰.۲.۱ نرم‌های برداری متعددی وجود دارد که چند نمونه از آنها در زیر آمده است:

(الف) نرم یک:

$$\|\mathbf{X}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|,$$

(ب) نرم دو یا نرم اقلیدسی:

$$\|\mathbf{X}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

(پ) نرم p :

$$\|\mathbf{X}\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

(ت) نرم بینهایت:

$$\|\mathbf{X}\|_\infty = \max |x_i|.$$

تعریف ۱۱.۲.۱ (جواب کمترین توان‌های دوم). یک جواب x برای دستگاه $Ax = b$ با این خاصیت است که $\|Ax - b\|_2$ می‌نیم می‌باشد.

تعریف ۱۲.۲.۱ (مساله خوش‌وضع و بدوضع). یک مساله را خوش‌وضع نامند هرگاه تغییرات جزئی در داده‌های ورودی منجر به تغییرات چشمگیر در جواب خروجی نشود و اگر مساله‌ای خوش‌وضع نباشد اصطلاحاً بدوضع می‌نامند.

تعریف ۱۳.۲.۱ (عدد شرطی ماتریس). عدد شرطی ماتریس A را با $C(A)$ نشان می‌دهند و به صورت زیر تعریف می‌کنند:

$$C(A) = \|A\| \times \|A^{-1}\|.$$

که نرم $\|A\|$ یک نرم ماتریسی است اگر عدد شرطی کوچک باشد بیانگر آن است که دستگاه معادلات $Ax = b$ حاصل، خوش وضع است و اگر عدد شرطی مقداری بزرگ باشد، بیانگر آن است که ماتریس A تقریباً منفرد است، در این حالت ماتریس را بدوضع می‌نامند و خطا در محاسبه معکوس ماتریس A زیاد است.

تعریف ۱۴.۲.۱. فرض کنید $\|\cdot\|$ یک نرم برداری باشد، تابع

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

یک نرم ماتریسی است که نرم ماتریس القایی (نرم ماتریس طبیعی) نامیده می‌شود.

تعریف ۱۵.۲.۱ (نرم ماتریس). نرم یک و نرم بینهایت به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \quad (\text{الف})$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} |a_{ij}| \quad (\text{ب})$$

و به ترتیب نرم مجموع ستونی و نرم مجموع سطری نامیده می‌شود.

تعریف ۱۶.۲.۱. یک نرم ماتریسی نگاشتی بر مجموعه تمام ماتریس‌های حقیقی $n \times n$ به مجموعه اعداد حقیقی است که برای ماتریس‌های از مرتبه n ، A و B در شرایط زیر صدق می‌کند:

$$\|A\| \geq 0 \quad \text{و} \quad \|A\| = 0 \quad \text{اگر و تنها اگر} \quad A = 0 \quad (\text{الف})$$

$$\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\| \quad (\text{ب})$$

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\| \quad (\text{پ})$$

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\| \quad (\text{ت})$$

قضیه ۱۷.۲.۱. اگر A معین مثبت باشد آنگاه نامنفرد است.

برهان. اگر A منفرد باشد آنگاه دستگاه $Ax = b$ می‌تواند جواب ناصفر داشته باشد لذا به ازای $x \neq 0$ می‌توانیم داشته باشیم $x^t Ax = 0$ و این با فرض معین مثبت بودن A منافات دارد پس A باید نامنفرد باشد. \square

قضیه ۱۸.۲.۱. اگر λ یک مقدار ویژه A و X بردار ویژه نظیر λ و p یک عدد حقیقی دلخواه باشد آنگاه $\lambda - p$ مقدار ویژه ماتریس $A - pI$ و X بردار ویژه نظیر آن است.

برهان. فرض کنید λ مقدار ویژه A نظیر بردار ویژه X است بنابراین:

$$AX = \lambda X,$$

با افزودن $-pX$ به طرفین رابطه فوق داریم:

$$AX - pX = \lambda X - pX,$$

و با فاکتورگیری از X

$$(A - pI)X = (\lambda - p)X,$$

□ و در نتیجه $(\lambda - p)$ یک مقدار ویژه ماتریس $A - pI$ و X بردار ویژه نظیر آن است.

تعریف ۱۹.۲.۱. ماتریس A را همگرا گوئیم اگر:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0.$$

قضیه ۲۰.۲.۱. سری ماتریسی

$$I + A + A^2 + \dots,$$

به $(I - A)^{-1}$ همگرا است اگر A یک ماتریس همگرا باشد.

برهان. چون A یک ماتریس همگرا است، $A^k \rightarrow 0$ وقتی $k \rightarrow \infty$ و این معادل است با اینکه $\rho(A) < 1$ ، لذا به ازای هر مقدار ویژه A داریم: $|\lambda_i| < 1$ و چون $1 - \lambda_i$ مقادیر ویژه ماتریس $I - A$ هستند و همگی مثبت هستند لذا ماتریس $I - A$ نامنفرد است. از طرفی داریم

$$(I - A)(I + A + A^2 + \dots + A^k) = I - A^{k+1}$$

و چون A یک ماتریس همگرا است، $A^{k+1} \rightarrow 0$ وقتی $k \rightarrow \infty$. بنابراین داریم:

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \dots$$

□

قضیه ۲۱.۲.۱. برای یک ماتریس متقارن معین مثبت مانند A یک تجزیه منحصرنفر

$$A = HH^T,$$

وجود دارد که در آن H یک ماتریس پایین مثلثی است.

برهان. وجود تجزیه چولسکی برای یک ماتریس معین مثبت متقارن A می‌تواند از روی تجزیه LU ماتریس A دیده شود. چون ماتریس A یک ماتریس معین مثبت است و در نتیجه دارای کهادهای اصلی پیشرو مثبت است. ماتریس بالا مثلثی U را می‌توان به صورت $U = DU_1$ نوشت. که در آن $A = LDU_1$ بنا براین $D = \text{diag}(u_{11}, u_{22}, \dots, u_{nn})$ و U_1 یک ماتریس بالا مثلثی واحد است. چون $A = A^T$ داریم $U_1^T D L^T = L D U_1$ یا $D = (U_1^T)^{-1} L D U_1 (L^T)^{-1}$ ماتریس $D = (U_1^T)^{-1} L$ یعنی یک ماتریس پایین مثلثی واحد است. بنابراین نتیجه می‌شود که $(U_1^T)^{-1} L = U_1 (L^T)^{-1} = I$ نوشته شود که در آن L یک ماتریس پایین مثلثی واحد است. چون کهادهای اصلی پیشرو ماتریس A ، a_{11} ، $a_{11} a_{22}^{(1)}$ ، $a_{11} a_{22}^{(1)} \dots a_{nn}^{(n-1)}$ هستند، معین مثبت است اگر و فقط اگر عناصر محوری a_{11} ، $a_{22}^{(1)}$ ، $a_{11} a_{22}^{(1)}$ ، $a_{11} a_{22}^{(1)} \dots a_{nn}^{(n-1)}$ مثبت باشد. یعنی هنگامی که ماتریس A معین مثبت است، عناصر قطری D مثبت می‌باشند، بنابراین می‌توان نوشت $D = D^{\frac{1}{2}} D^{\frac{1}{2}}$ که:

$$D^{\frac{1}{2}} = \text{diag} \left[\sqrt{a_{11}}, \sqrt{a_{22}^{(1)}}, \dots, \sqrt{a_{nn}^{(n-1)}} \right] = \text{diag}(\sqrt{u_{11}}, \sqrt{u_{22}} \dots, \sqrt{u_{nn}}).$$

بنابراین:

$$A = LDL^T = LD^{\frac{1}{2}} D^{\frac{1}{2}} L^T = HH^T.$$

□

الگوریتم چولسکی در برخی کاربردها به نام الگوریتم ریشه دوم معروف است.

قضیه ۲۲.۲.۱ (تیلور دو متغیره). اگر $f \in C^{n+1}[a, b] \times [c, d]$ ، آنگاه برای هر دو نقطه $x+h$ و $y+k$ در $[a, b] \times [c, d] \subseteq R^2$ داریم:

$$f(x+h, y+k) = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^i f(x, y) + E_n(h, k),$$

که در آن

$$E_n(h, k) = \frac{1}{(n+1)!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^{n+1} f(x + \theta h, y + \theta k),$$

که در اینجا θ عددی بین ۰ و ۱ می‌باشد.

معنی جملات در این قضیه برای دو جمله به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^0 f(x, y) &= f(x, y), \\ \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^1 f(x, y) &= \left(h \frac{\partial f}{\partial x} + k \frac{\partial f}{\partial y} \right) (x, y), \\ \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(x, y) &= \left(h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2kh \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) (x, y). \end{aligned}$$

و غیره.

تعریف ۲۳.۲.۱. رابطه زیر برقرار است:

$$(A - UD^{-1}V)^{-1} = A^{-1} + A^{-1}U(D - VA^{-1}U)VA^{-1},$$

هنگامی که:

$$D = I = V, \quad U = -KI,$$

در نتیجه:

$$(A + KI)^{-1} = A^{-1} - K^2 A^{-1} \left(I + \frac{A^{-1}}{k} \right)^{-1} A.$$

برای K ثابت و خیلی کوچک، مقدار $K^2 A^{-1} \left(I + \frac{A^{-1}}{k} \right)^{-1} A$ در معادله فوق ناچیز است، که نشان می‌دهد $(A + KI)^{-1}$ تقریب نزدیکی به A^{-1} خواهد داشت. [۱۴]

تعریف ۲۴.۲.۱. رابطه زیر برقرار است: [۵]

$$(A + B)^{-1} = A^{-1} + A^{-1}BA^{-1} + A^{-1}BA^{-1}BA^{-1} - \dots,$$

۳.۱ روش کرانک - نیکلسون

روش کرانک - نیکلسون را با معادله گرما یا انتشار زیر توضیح خواهیم داد.

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t), & 0 < x < L, \quad t > 0, \\ u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, & t > 0. \\ u(x, 0) = f(x), & x \geq 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

روشی که برای تقریب جواب این مسئله بکار می‌بریم شامل تفاضلات متناهی می‌باشد روش تفاضلی با استفاده از سری تیلور در t به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{k}, \quad (2.1)$$

و سری تیلور در x ، برابر است با:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) = \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j))}{h^2}, \quad (3.1)$$

بنابراین، روش تفاضلی که از (۲.۱) و (۳.۱) به دست می‌آید، به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{k} - \alpha^2 \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j))}{h^2} = 0.$$

این روش تفاضلی به روش تفاضلی پیشرو معروف است.

به طور مشابه می‌توان فرمول تفاضلی پسرو را به صورت زیر به دست آورد.

$$\frac{u(x_i, t_j) - u(x_i, t_{j-1}))}{k} - \alpha^2 \frac{u(x_{i+1}, t_{j+1}) - 2u(x_i, t_{j+1}) + u(x_{i-1}, t_{j+1}))}{h^2} = 0,$$

آنگاه روش تفاضلی میانگین شده، از میانگین روش تفاضلی پیشرو و پسرو به دست می‌آید. این روش، به عنوان روش کرانک - نیکلسون^۶ شناخته شده است.

۴.۱ روش رونگ - کوتا

مساله کلی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (4.1)$$

بسط تیلور $x(t+h)$ به صورت:

$$x(t+h) = x(t) + hx'(t) + \frac{h^2}{2!}x''(t) + \frac{h^3}{3!}x'''(t) + \dots \quad (5.1)$$

از معادله دیفرانسیل (۴.۱)

$$x'(t) = f,$$

$$x''(t) = f_t + f_x x' = f_t + f_x f,$$

$$x'''(t) = f_{tt} + f_{tx}f + (f_t + f_x f)f_x + f(f_{xt} + f_{xx}f),$$

سه جمله اول معادله (۵.۱) می‌توانند به شکل زیر نوشته شوند:

$$\begin{aligned} x(t+h) &= x + hf + \frac{1}{2}h^2 f_t + f f_x + O(h^3) \\ &= x + \frac{1}{2}hf + \frac{1}{2}h[f + hf_t + hf f_x] + O(h^3), \end{aligned} \quad (6.1)$$

که x به معنای $x(t)$ ، f به معنای $f(t, x)$ و غیره می‌باشند. حال مشتقات جزئی را به کمک چند جمله اول سری تیلور دو متغیره حذف می‌کنیم.

$$f(t+h, x+hf) = f + hf_t + hf f_x + O(h^2),$$

^۶Crank - Nicolson

معادله (۶.۱) می‌تواند به صورت زیر دوباره نوشته شود.

$$x(t+h) = x + \frac{1}{4}hf + \frac{1}{4}hf(t+h, x+hf) + O(h^3),$$

بنابراین فرمول برای پیش بردن جواب عبارت است از:

$$x(t+h) = x(t) + \frac{h}{4}f(t, x) + \frac{h}{4}f(t+h, x+hf(t, x)),$$

یا به طور معادل

$$x(t+h) = x(t) + \frac{1}{4}(F_1 + F_2), \quad (7.1)$$

که در آن

$$\begin{cases} F_1 = hf(t, x), \\ F_2 = hf(t+h, x+F_1), \end{cases} \quad (8.1)$$

این فرمول می‌تواند در هر لحظه برای یک گام پیش بردن جواب به طور تکراری، مورد استفاده قرار گیرد و روش رونگ - کوتای مرتبه دو نامیده می‌شود.

به طور کلی روش رونگ - کوتای مرتبه دو به شکل زیر می‌باشد.

$$x(t+h) = x + w_1hf + w_2hf(t+\alpha h, x+\beta hf) + O(h^3), \quad (9.1)$$

که در آن w_1, w_2, α, β پارامترهایی هستند که در اختیار ما می‌باشند. معادله (۹.۱) می‌تواند به کمک سری تیلور دو متغیره به شکل زیر دوباره نوشته شود.

$$x(t+h) = x + w_1hf + w_2h[f + \alpha hf_t + \beta hff_x] + O(h^3), \quad (10.1)$$

با مقایسه روابط (۶.۱) و (۱۰.۱) ملاحظه می‌کنیم که باید شرایط زیر را تحمیل کنیم.

$$\begin{cases} w_1 + w_2 = 1, \\ w_2\alpha = \frac{1}{4}, \\ w_2\beta = \frac{1}{4}, \end{cases} \quad (11.1)$$

پس $w_1 = w_2 = \frac{1}{2}$ و $\alpha = \beta = 1$ ، که متناظر با روش رونگ - کوتای مرتبه دو معادله (۷.۱) می‌باشد. به طور مشابه روش رونگ - کوتای مراتب بالاتر به دست می‌آید.

رونگ - کوتای مرتبه ۴

در اینجا فرمول‌هایی برای روش رونگ - کوتای مرتبه ۴ ارائه می‌دهیم.

$$x(t+h) = x(t) + \frac{1}{6}(r_1 + 2r_2 + 2r_3 + r_4), \quad (12.1)$$

که در آن:

$$\begin{cases} r_1 = hf(t, x), \\ r_2 = hf(t + \frac{1}{2}h, x + \frac{1}{2}r_1), \\ r_3 = hf(t + \frac{1}{4}h, x + \frac{1}{4}r_2), \\ r_4 = hf(t+h, x+r_3). \end{cases} \quad (13.1)$$

این روش از آن جهت مرتبه ۴ خوانده می‌شود که جملات سری تیلور تا h^4 و خود h^4 را تولید می‌کند. بنابراین خطا $O(h^5)$ است.

فصل ۲

شبکه توابع پایه‌ای شعاعی

۱.۲ مقدمه

شبکه توابع پایه‌ای شعاعی^۱ دارای پایه ریاضیاتی بسیار قوی بر مبنای فرضیه منظم‌سازی برای حل مسائل مشکل می‌باشد. این شبکه‌ها، از سه لایه شامل لایه‌های ورودی، مخفی و خروجی تشکیل شده‌اند. خروجی این شبکه یک ترکیب خطی از توابع پایه‌ای شعاعی برای داده‌های ورودی می‌باشد.

اخیرا درونیایی داده‌های پراکنده به طور چشمگیر مورد مطالعه محققان رشته‌های مختلف قرار گرفته است. در این شاخه با مسائلی مواجه می‌شویم که مقادیر یک تابع تنها در برخی از نقاط معلوم است و ما هیچ اطلاعی از رفتار تابع در دیگر نقاط نداریم اما مقدار تابع در نقاط نامعلوم برای تحلیل و بررسی برای ما مهم است حتی مقادیر نزدیک به واقعیت نیز برای ما مفید است. استفاده از روش‌های توابع پایه‌ای شعاعی در درونیایی یک مجموعه از نقاط پراکنده، یکی از مباحث مهم نظریه تقریب می‌باشد. در این روش‌ها داده‌ها توسط ترکیب خطی از انتقال‌های یک تابع، درونیایی می‌شوند. مزیت اصلی این روش‌ها نسبت به درونیایی چندجمله‌ای قابلیت استفاده ساده‌تر از آن‌ها در بعدها بالاتر می‌باشد.

در این بخش روش‌های تقریب جدید مبتنی بر شبکه توابع پایه‌ای شعاعی، توضیح داده شده است. هدف اصلی این روش، دستیابی به تقریب دقیق‌تر تابع و مشتقات تابع است. ابتدا شبکه توابع پایه‌ای شعاعی را تعریف کرده و به معرفی ساختار آن پرداخته‌ایم و تقریب تابع به کمک این توابع را توضیح می‌دهیم، سپس محاسبه دو روش تقریب برای مشتقات تابع یعنی روش مشتق مستقیم^۲ و روش مشتق تابع به صورت غیر مستقیم^۳ را توضیح خواهیم داد و نشان خواهیم داد تقریب مشتق تابع به روش غیرمستقیم خطای کمتری نسبت به روش مستقیم دارد.

^۱ Radial basis function Network

^۲ Direct Radial basis function Method

^۳ Indirect Radial basis function Method

۲.۲ معرفی شبکه توابع پایه‌ای شعاعی

تعریف ۱.۲.۲. شبکه توابع پایه‌ای شعاعی نگاهی از فضای ورودی n بعدی به فضای خروجی یک بعدی به صورت $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ می‌باشد. این شبکه از مجموعه وزن‌های $\{w^{(i)}\}_{i=1}^m$ و مجموعه توابع پایه‌ای شعاعی $\{g^{(i)}\}_{i=1}^m$ تشکیل شده است. توابع پایه‌ای شعاعی را می‌توان به صورت:

$$g^{(i)}(x) = \phi^{(i)}(\|x - c^{(i)}\|).$$

بنویسیم که $\|\cdot\|$ علامت نرم اقلیدسی است و $\{c^{(i)}\}_{i=1}^m$ مراکز توابع پایه‌ای شعاعی می‌باشند.

توابع پایه‌ای شعاعی دارای تنوع زیادی است، برخی از این توابع که موارد استفاده زیادی دارند در زیر معرفی شده است:

(الف) چندربعی^۴

$$\phi^{(i)}(r) = \phi^{(i)}(\|x - c^{(i)}\|) = \sqrt{r^2 + a^{(i)2}}, \quad a^{(i)} > 0. \quad (1.2)$$

(ب) معکوس چندربعی^۵

$$\phi^{(i)}(r) = \phi^{(i)}(\|x - c^{(i)}\|) = \frac{1}{\sqrt{r^2 + a^{(i)2}}}, \quad a^{(i)} > 0. \quad (2.2)$$

(پ) معکوس ربعی^۶

$$\phi^{(i)}(r) = \phi^{(i)}(\|x - c^{(i)}\|) = \frac{1}{r^2 + a^{(i)2}}, \quad a^{(i)} > 0. \quad (3.2)$$

(ت) گاوسی^۷

$$\phi^{(i)}(r) = \phi^{(i)}(\|x - c^{(i)}\|) = \exp\left(-\frac{r^2}{a^{(i)2}}\right), \quad a^{(i)} > 0. \quad (4.2)$$

که $a^{(i)}$ معمولاً به عرض i امین تابع پایه‌ای شعاعی اشاره دارد:

$$a^{(i)} = \beta d^{(i)},$$

که در آن β ضریب عددی و $\beta > 0$ ، مقدار β روی دقت تقریب تاثیر دارد و $d^{(i)}$ فاصله مرکز i ام تا نزدیکترین همسایه مرکزی به آن می‌باشد و r برابر است با:

$$r = \|x - c^{(i)}\| = \sqrt{(x - c^{(i)}) \cdot (x - c^{(i)})},$$

می‌توان توابع پایه‌ای شعاعی را با پارامتر ε به صورت زیر نشان داد، اگر در فرمول‌های فوق $a^{(i)} = \frac{1}{\varepsilon}$ باشد.

• مراکز را می‌توان به روش‌های متفاوتی به دست آورد:

^۴ Multiquadrics

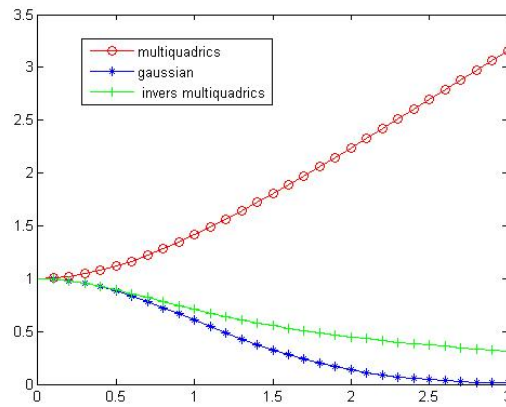
^۵ Inverse Multiquadrics

^۶ Inverse quadrics

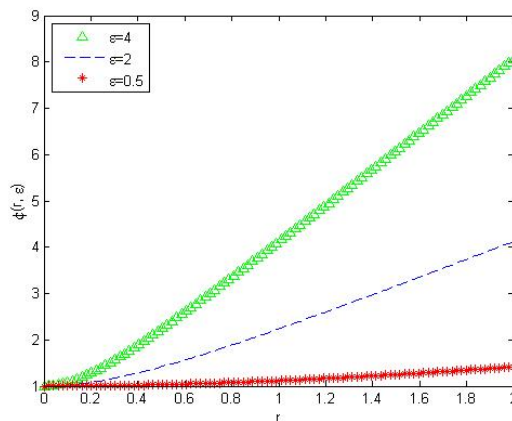
^۷ Gaussians

جدول ۱.۲: نمونه‌هایی از توابع پایه‌ای شعاعی با پارامتر شکل ϵ

ضابطه	نوع تابع
$\exp(\epsilon r)^2$	گوسی
$\sqrt{1 + (\epsilon r)^2}$	چندربعی
$\frac{1}{1 + (\epsilon r)^2}$	معکوس ربعی
$\frac{1}{\sqrt{1 + (\epsilon r)^2}}$	چندربعی معکوس



شکل ۱.۲: رسم توابع پایه‌ای شعاعی چندربعی، معکوس چندربعی و گوسی در حالت یک بعدی.



شکل ۲.۲: رسم تابع پایه‌ای شعاعی از نوع چندربعی با در نظر گرفتن پارامتر شکل‌های $\epsilon = 4$ و $\epsilon = 2$ ، $\epsilon = 0.5$ ، نمودار نشان می‌دهد که چطور با نزدیک شدن ϵ به صفر تابع پایه‌ای شعاعی هموارتر می‌شود.

(الف) انتخاب همه داده‌ها به عنوان مراکز (درونیایی کامل)

(ب) انتخاب بر اساس نمونه‌برداری (انتخاب تصادفی با توزیع یکنواخت)

• انتخاب پارامتر شکل ε : در توابع پایه‌ای شعاعی، پارامتر شکل ε نقش مهمی در دقت تقریب دارد. چند الگوریتم برای انتخاب پارامتر شکل مناسب، زمانی که هیچ راه حل دقیقی وجود ندارد معرفی می‌کنیم.

(الف) آسان‌ترین روش که آزمون و خطا نام دارد، اجرای برنامه متلب با پارامتر شکل‌های متفاوت و سپس انتخاب بهترین پارامتر که کمترین خطا را داشته است.

(ب) هاردی^۸ برای توابع پایه‌ای شعاعی معکوس چندربعی پارامتر شکل زیر را پیشنهاد کرده است:

$$\varepsilon = \frac{1}{0.815d}, \quad d = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N d_i,$$

که d_i فاصله بین نقطه x_i تا نزدیک‌ترین نقطه همسایه‌اش می‌باشد.

(پ) فرانک^۹ برای مسائل دو بعدی، پارامتر شکل زیر را ارائه داده است.

$$\varepsilon = \frac{0.8\sqrt{N}}{D},$$

که D قطر کوچکترین دایره می‌باشد، که تمام نقاط داخل آن قرار دارند.

مدیچ^{۱۰} نشان داد که با کاهش مقدار پارامتر شکل، دقت درونیایی توابع پایه‌ای شعاعی بطور معناداری بهبود می‌یابد. افزایش تعداد نقاط داده‌ای یا کاهش پارامتر شکل بر پایداری دستگاه خطی تاثیرگذار است.

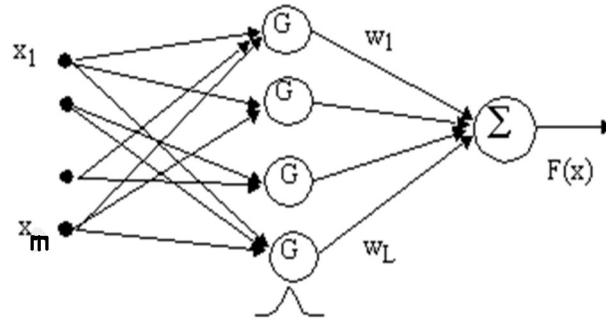
توابع پایه‌ای شعاعی از نوع معکوس چندربعی و گاوسی، توابع محلی هستند، با افزایش فاصله از مرکز مقادیر آنها کاهش می‌یابند در واقع یک تابع غیرافزایشی یا یکنوای کاهشی می‌باشند ولی تابع چندربعی غیر محلی است چون با افزایش فاصله از مرکز مقدارش ماکسیمم می‌شود. در حالت کلی شبکه توابع پایه‌ای شعاعی تشکیل شده از لایه ورودی که شامل پارامترهای ورودی می‌باشد و لایه مخفی که شامل توابع پایه‌ای شعاعی هستند، توابع پایه‌ای در وزن‌ها ضرب و با یکدیگر جمع شده و لایه خروجی را می‌دهد. پس لایه خروجی ترکیب خطی از لایه‌های مخفی است، که در شکل ۳.۲ نشان داده‌ایم و به صورت فرمول ۵.۲ نوشته می‌شود:

$$f(x) = \sum_{i=1}^m w^{(i)} \phi(\|x - c^{(i)}\|). \quad (5.2)$$

^۸Hardy

^۹Frank

^{۱۰}Madych



شکل ۳.۲: شبکه توابع پایه‌ای شعاعی، از سه لایه ورودی، مخفی و خروجی تشکیل شده است. داده‌های ورودی، توابع پایه‌ای شعاعی G و خروجی f می‌باشد.

معادله f ترکیب خطی از m تابع ثابت می‌باشد، مساله پیدا کردن وزن‌های مجهول است. برای این منظور اصل کمترین مربعات را برای به حداقل رساندن مجموع مربعات خطا بکار می‌بریم.

$$SSE = \sum_{i=1}^n [y^{(i)} - f(x^{(i)})]^2 \quad (۶.۲)$$

با جایگذاری $f(x^{(i)})$ در فرمول SSE و محاسبه مینیمم مقدار آن داریم:

$$\sum_{i=1}^n \left[y^{(i)} - \sum_{j=1}^m w^{(j)} g^{(j)}(x^{(i)}) \right]^2,$$

$$2 \sum_{i=1}^n \left[y^{(i)} - \sum_{j=1}^m w^{(j)} g^{(j)}(x^{(i)}) \right] \cdot g^{(j)}(x^{(i)}) = 0,$$

$$Gw = y.$$

که در آن:

$$G = \begin{pmatrix} g^{(1)}(x^{(1)}) & g^{(2)}(x^{(1)}) & \dots & g^{(m)}(x^{(1)}) \\ g^{(1)}(x^{(2)}) & g^{(2)}(x^{(2)}) & \dots & g^{(m)}(x^{(2)}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g^{(1)}(x^{(n)}) & g^{(2)}(x^{(n)}) & \dots & g^{(m)}(x^{(n)}) \end{pmatrix},$$

برای یک بعدی یعنی مقداری که با قرار دادن، قدرمطلق فاصله $x^{(1)}$ تا مرکز دوم، در تابع پایه‌ای شعاعی به دست می‌آید.

$$w = [w^{(1)}, w^{(2)}, \dots, \dots, w^{(m)}]^T,$$

$$y = [y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(m)}]^T.$$

قضیه ۲.۲.۲. ماتریس‌های ایجاد شده از توابع پایه‌ای شعاعی، متقارن معین مثبت می‌باشند.

□

اگر $m = n$ آنگاه:

$$w = G^{-1}y$$

در غیراینصورت:

$$(G^T G)w = G^T y.$$

G^{-1} به معنای معکوس ماتریس G می‌باشد. بعد از محاسبه w ، جواب به‌دست آمده را در معادله (۵.۲) قرار داده و تقریب تابع با بکاربردن داده‌های دیگر به‌دست می‌آید.

مثال ۳.۲.۲. محاسبه وزن‌ها در درونیایی تابع

$$y = x + 1,$$

به کمک توابع پایه‌ای شعاعی چنددرجی با $\varepsilon = 0.1$ و نقاط را از $[1, 3]$ با فاصله یکنواخت یک، به‌صورت $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$ و مراکز $c^{(1)} = 1, c^{(2)} = 2, c^{(3)} = 3$ انتخاب کرده‌ایم.

$$y = \begin{pmatrix} y^{(1)} \\ y^{(2)} \\ y^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$r = \|x - c^{(i)}\|, \quad \phi(r) = \sqrt{1 + (\varepsilon r)^2},$$

$$G = \begin{pmatrix} \phi|x_1 - x_1| & \phi|x_1 - x_2| & \phi|x_1 - x_3| \\ \phi|x_2 - x_1| & \phi|x_2 - x_2| & \phi|x_2 - x_3| \\ \phi|x_3 - x_1| & \phi|x_3 - x_2| & \phi|x_3 - x_3| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi(0) & \phi(1) & \phi(2) \\ \phi(1) & \phi(0) & \phi(1) \\ \phi(2) & \phi(1) & \phi(0) \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{1/1} & \sqrt{1/2} \\ \sqrt{1/1} & 1 & \sqrt{1/1} \\ \sqrt{1/2} & \sqrt{1/1} & 1 \end{pmatrix}, \quad G^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/0.488 & 1/0.954 \\ 1/0.488 & 1 & 1/0.488 \\ 1/0.954 & 1/0.488 & 1 \end{pmatrix},$$

$$Gw = y, \quad w = G^{-1}y$$

$$w = \begin{pmatrix} w^{(1)} \\ w^{(2)} \\ w^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11.8823 \\ 0.0631 \\ -9.0821 \end{pmatrix}.$$

۳.۲ روش مستقیم برای محاسبه مشتق

در شبکه توابع پایه‌ای شعاعی که در آن توابع پایه‌ای شعاعی ثابت هستند و وزن‌ها متناظر با آنها، مشتقات تابع درونیاب در نقاط گره‌ای به‌صورت ترکیب خطی از مشتق توابع پایه‌ای شعاعی نوشته خواهد شد. مشتقات جزئی از تابع تقریب به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_j \cdots \partial x_1} = \sum_{i=1}^m w^{(i)} \frac{\partial^k g^{(i)}}{\partial x_j \cdots \partial x_1}. \quad (7.2)$$

که $\frac{\partial^k g^{(i)}}{\partial x_j \dots \partial x_1}$ توسط توابع پایه‌ای شعاعی اصلی از $g^{(i)}(x)$ که مشتق‌پذیر است به دست می‌آید. برای مثال مشتق مرتبه اول از تابع $f(x)$ نسبت به x_j به صورت f_j نشان داده شده است که مشتقات توابع پایه‌ای شعاعی متناظر با آن به صورت زیر می‌باشد:

(الف) چندربعی

$$h^{(i)}(x) = \frac{\partial g^{(i)}}{\partial x_j} = \frac{x_j - c_j^{(i)}}{(r^2 + a^{(i)2})^{0.5}}. \quad (۸.۲)$$

(ب) معکوس چندربعی

$$h^{(i)}(x) = \frac{\partial g^{(i)}}{\partial x_j} = \frac{-(x_j - c_j^{(i)})}{(r^2 + a^{(i)2})^{1.5}}. \quad (۹.۲)$$

(پ) گاوسی

$$h^{(i)}(x) = \frac{\partial g^{(i)}}{\partial x_j} = \frac{-2(x_j - c_j^{(i)})}{a^{(i)2}} \exp\left(-\frac{r^2}{a^{(i)2}}\right). \quad (۱۰.۲)$$

مشتق مرتبه دوم تابع $f(x)$ نسبت به x_j که با f_{jj} نشان داده می‌شود و توابع پایه‌ای شعاعی متناظر با آنها به صورت زیر می‌باشد:

(الف) چندربعی

$$\bar{h}^{(i)}(x) = \frac{\partial h^{(i)}}{\partial x_j} = \frac{r^2 + a^{(i)2} - (x_j - c_j^{(i)})^2}{(r^2 + a^{(i)2})^{1.5}}. \quad (۱۱.۲)$$

(ب) معکوس چندربعی

$$\bar{h}^{(i)}(x) = \frac{\partial h^{(i)}}{\partial x_j} = \frac{2(x_j - c_j^{(i)})^2}{(r^2 + a^{(i)2})^{2.5}} - \frac{1}{(r^2 + a^{(i)2})^{1.5}}. \quad (۱۲.۲)$$

(پ) گاوسی

$$\bar{h}^{(i)}(x) = \frac{\partial h^{(i)}}{\partial x_j} = \frac{2}{a^{(i)2}} \left[\frac{2}{a^{(i)2}} (x_j - c_j^{(i)})^2 - 1 \right] \exp\left(-\frac{r^2}{a^{(i)2}}\right). \quad (۱۳.۲)$$

بطور مشابه مشتق k ام توابع پایه‌ای شعاعی به صورت زیر محاسبه شده است:

(الف) چندربعی

$$\bar{h}^{(i)}(x) = \frac{\partial^k h^{(i)}}{\partial x^k} = \frac{(x_j - c_j^{(i)})(x_k - c_k^{(i)})}{(r^2 + a^{(i)2})^{1.5}}.$$

(ب) معکوس چندربعی

$$\bar{h}^{(i)}(x) = \frac{\partial^k h^{(i)}}{\partial x^k} = \frac{2(x_j - c_j^{(i)})(x_k - c_k^{(i)})}{(r^2 + a^{(i)2})^{2.5}}.$$

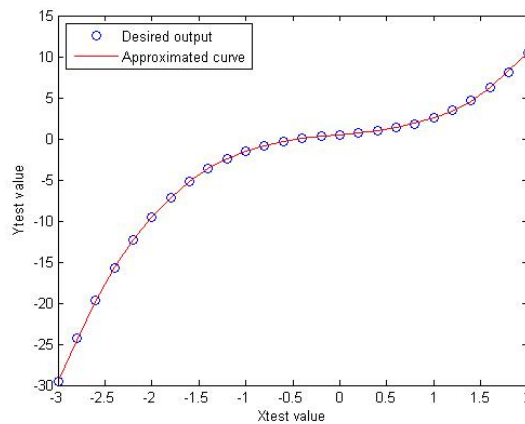
(پ) گاوسی

$$\bar{h}^{(i)}(x) = \frac{\partial^k h^{(i)}}{\partial x^k} = \frac{\Psi(x_j - c_j^{(i)})(x_k - c_k^{(i)})}{a^{(i)^4} \exp(-\frac{r^2}{a^{(i)^2})}$$

مثال ۱.۳.۲. تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$y = x^3 + x + 0.5,$$

درونیایی این تابع در بازه $[-3, 2]$ با در نظر گرفتن ۵۰ نقطه با فاصله‌های یکنواخت در نمودار زیر نشان داده شده است، در این مثال تمام نقاط را به عنوان مرکز شبکه انتخاب کرده‌ایم یعنی $m = n$ و $\beta = 2/0$.



شکل ۴.۲: نمودار تابع $y = x^3 + x + 0.5$: نمودار تابع اصلی و تقریب تابع توسط توابع پایه‌ای شعاعی با در نظر گرفتن تابع معکوس چندربعی و $\beta = 2/0$ انجام شده است، تقریباً نمودار تقریب و تابع اصلی روی هم قرار دارند.

اگر دقت جواب را با N_e نشان دهیم، که از روش زیر به دست می آید:

$$N_e = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y^{(i)} - f^{(i)})^2}. \quad (14.2)$$

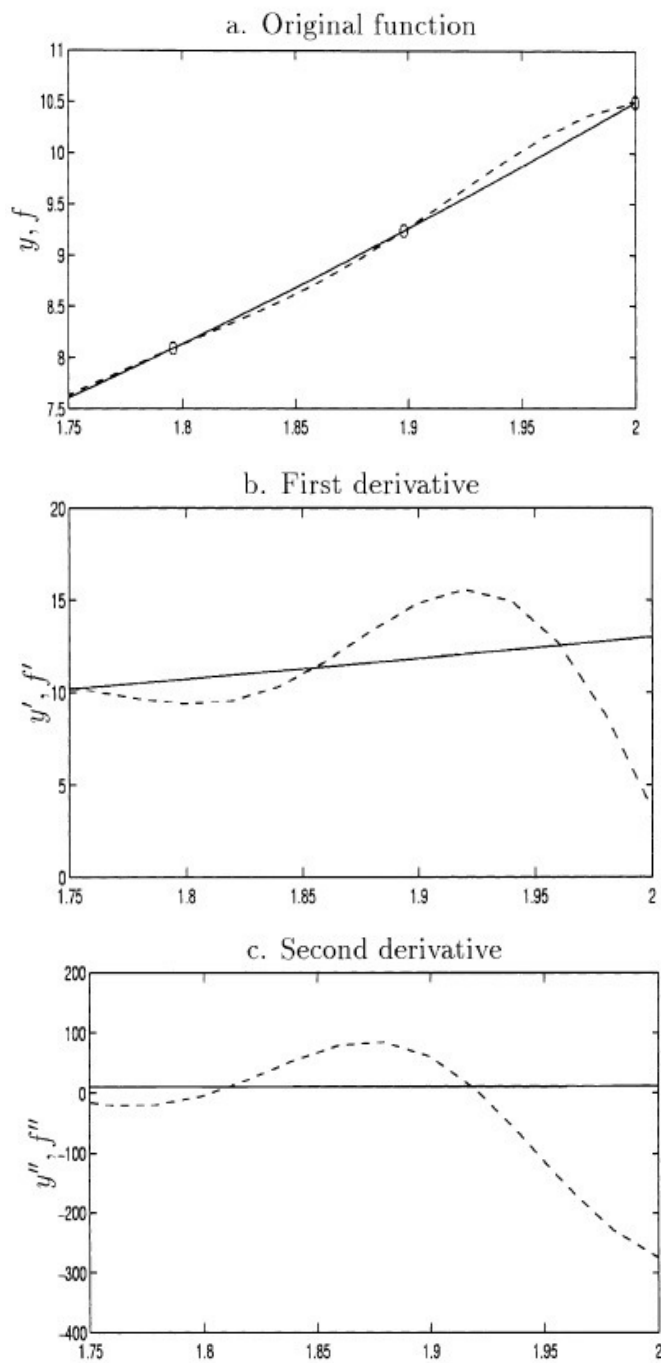
که $f^{(i)}$ تقریب تابع و $y^{(i)}$ مقادیر دقیق تابع در مکان i و n تمام نقاط گره ای است.

مثال ۲.۳.۲. در جدول زیر خطای N_e برای تقریب تابع اصلی، مشتق اول و دوم تابع $y = x^3 + x + 0.5$ روی ۲۵۰ نقطه و با $\beta = 2/0$ ، به کمک توابع پایه ای شعاعی انجام شده است. همانطور که در جدول مشاهده می شود دقت تقریب به روش مستقیم در تقریب تابع $y = x^3 + x + 0.5$ با

جدول ۲.۲: N_e تقریب تابع اصلی، مشتقات اول و دوم به روش مستقیم

نوع تابع	گاوسی	چندربعی	معکوس چندربعی
تابع اصلی	$7.002e-01$	$9.570e-02$	$7.459e-01$
مشتق اول	$3.035e+01$	$4.053e+00$	$3.086e+01$
مشتق دوم	$1.214e+03$	$1.564e+02$	$1.141e+03$

استفاده از توابع پایه ای شعاعی چندربعی، معکوس چندربعی و گاوسی، $9.570e-02$ ، $7.459e-01$ و $7.002e-01$ است. دقت تقریب در تابع پایه ای شعاعی چندربعی کمتر می باشد و همینطور برای تقریب مشتق اول و مشتق دوم تابع، دقت تقریب تابع چندربعی بهتر می باشد و این نشان می دهد استفاده از تابع چندربعی در تقریب این تابع بهتر می باشد.



شکل ۵.۲: رسم تابع $y^3 + x + 0.5$: برای تقریب تابع اصلی، مشتق اول و مشتق دوم با در نظر گرفتن $\beta = 2/0$ و تابع پایه‌ای شعاعی معکوس چنددرجی به روش مستقیم انجام شده است. خط پیوسته تابع اصلی و خط نقطه‌چین تابع تقریبی می‌باشد. دقت تقریب برای تابع اصلی، $7/459e - 1$ ، برای تابع مشتق اول، $3/086e + 1$ و برای مشتق دوم $1/141e + 3$ است.

۴.۲ روش‌های غیرمستقیم برای محاسبه درونیایی مشتق

در این روش پیشنهاد می‌شود که روش تقریب با استفاده از توابع پایه‌ای شعاعی با مشتق شروع شود و سپس تابع اصلی با انتگرال‌گیری به دست می‌آید. فرض کنید تابع f و مشتقاتش f' و f'' باید تقریب زده شوند، روش شامل دو مرحله است در مرحله اول f متناظر با تابع اصلی و f' تابع مشتق است، در مرحله دوم f' به دست آمده در مرحله اول متناظر با تابع اصلی و f'' تابع مشتق در نظر گرفته می‌شود. روش می‌تواند با مشتق مرتبه دوم آغاز شود، نخست مشتق مرتبه دوم توسط یک شبکه توابع پایه‌ای شعاعی تقریب زده می‌شود آنگاه مشتق مرتبه اول از طریق انتگرال‌گیری به دست می‌آید در نهایت بطور مشابه تابع اصلی با انتگرال‌گیری از تابع مشتق اول به دست می‌آید. روش غیرمستقیم برای تابع یک متغیره و دو متغیره در بخش‌های بعدی توضیح داده شده است.

۱.۴.۲ توابع یک متغیره

روش غیرمستقیم نوع اول

در این روش تابع مشتق مرتبه اول مانند فرمول (۱۵.۲) که $g^{(i)}(x)$ مجموعه‌ای از توابع پایه‌ای شعاعی و $w^{(i)}$ مجموعه وزن‌های متناظر با آنها هستند، تجزیه می‌شوند.

$$f'(x) = \sum_{i=1}^m w^{(i)} g^{(i)}(x), \quad (15.2)$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx \\ &= \int \sum_{i=1}^m w^{(i)} g^{(i)}(x) dx \\ &= \sum_{i=1}^m w^{(i)} \int g^{(i)}(x) dx \\ &= \sum_{i=1}^m w^{(i)} H^{(i)}(x) + C_1. \end{aligned} \quad (16.2)$$

که C_1 ثابت انتگرال‌گیری و $H^{(i)}(x)$ مجموعه توابع پایه‌ای شعاعی برای تابع اصلی می‌باشد، که برابر با $H^{(i)}(x) = \int g^{(i)}(x) dx$ است و $g^{(i)}(x)$ ها انتگرال‌پذیر پیوسته هستند، انتگرال تنها دو تابع پایه‌ای شعاعی چندربعی و معکوس چندربعی که بطور تحلیلی می‌توانند به دست آیند در زیر معرفی شده است.

انتگرال توابع پایه‌ای شعاعی چندربعی و معکوس چندربعی به صورت زیر می‌باشد:

(الف) چندربعی

$$\begin{aligned} H^{(i)}(x) &= \frac{(x - c^{(i)}) \sqrt{(x - c^{(i)})^2 + a^{(i)2}}}{2} \\ &+ \frac{a^{(i)2}}{2} \times \ln \left((x - c^{(i)}) + \sqrt{(x - c^{(i)})^2 + a^{(i)2}} \right). \end{aligned} \quad (17.2)$$

(ب) معکوس چنددربعی

$$H^{(i)}(x) = \ln \left((x - c^{(i)}) + \sqrt{(x - c^{(i)})^2 + a^{(i)2}} \right). \quad (18.2)$$

برای تعیین وزن‌ها در روابط (۱۵.۲) و (۱۶.۲) مانند قبل معادل با مینیم کردن مجموع مربعات خطا است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$SSE = \sum_{i=1}^n [y^{(i)} - f(x^{(i)})]^2. \quad (19.2)$$

معادله (۱۶.۲) را در معادله (۱۹.۲) قرار داده که از معادلات دستگاهی برحسب وزن‌های مجهول $w^{(i)}$ به دست خواهد آمد.

می‌نیمم کردن (۱۹.۲) می‌تواند از طریق حل معادلات نرمال متناظر به دست آید. هر چند که در عمل روش‌های حل معادلات نرمال کمتر می‌تواند راه حل مطلوبی را تولید کند، یعنی نرم جواب کوچکترین نیست. خوشبختانه روش تجزیه مقدار تکین می‌تواند بر این مشکل غلبه کند و برای حل (۱۹.۲) به ازای وزن‌های مجهول و ثابت انتگرال‌گیری مورد استفاده قرار گیرند.

پس از حل (۱۹.۲) مجموعه‌ای از وزن‌ها به دست خواهد آمد و برای تقریب تابع مشتق از طریق رابطه (۱۵.۲) استفاده می‌شود، این وزن‌ها به همراه ثابت C_1 برای تخمین توابع اصلی از طریق رابطه (۱۶.۲) بکار می‌رود.

مثال ۱۰.۴.۲. تابع

$$y = x^3 + x + 0.5,$$

را در نظر بگیرید، نتایج درونیایی تابع و مشتقاتش را با روش مستقیم و غیرمستقیم در جدول زیر نشان داده‌ایم: اگر فاکتور بهبود را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$IF = \frac{DRBFNN_e}{IRBFN \setminus N_e},$$

جدول ۳.۲: N_e دو روش مستقیم و غیرمستقیم در تقریب تابع اصلی

نوع روش	چنددربعی	معکوس چنددربعی
روش مستقیم	$9/570e - 02$	$7/459e - 01$
روش غیرمستقیم نوع اول	$9/324e - 04$	$1/510e - 02$
فاکتور بهبود	$102/6$	$49/4$

هنگامی که تابع پایه‌ای شعاعی از نوع چنددربعی استفاده می‌شود فاکتورهای بهبود برای تابع اصلی، مشتق اول و مشتق دوم به ترتیب $102/6$ و $85/9$ و $93/6$ هستند و هنگامی که تابع پایه‌ای شعاعی از نوع معکوس چنددربعی است فاکتورهای بهبود $49/4$ و $40/6$ و $44/7$ می‌باشد و این نشان می‌دهد تابع پایه‌ای شعاعی چنددربعی دقت تقریب بهتری نسبت به معکوس چنددربعی دارد.

جدول ۴.۲: N_e دو روش مستقیم و غیرمستقیم در تقریب مشتق اول

نوع روش	چنددربعی	معکوس چنددربعی
روش مستقیم	$4/053e + 00$	$3/086e + 01$
روش غیرمستقیم نوع اول	$4/720e - 02$	$7/603e - 01$
فاکتور بهبود	۸۵/۹	۴۰/۶

جدول ۵.۲: N_e دو روش مستقیم و غیرمستقیم در تقریب مشتق دوم

نوع روش	چنددربعی	معکوس چنددربعی
روش مستقیم	$1/564e + 02$	$1/141e + 03$
روش غیرمستقیم نوع اول	$1/671e + 00$	$2/550e + 01$
فاکتور بهبود	۹۳/۶۴	۴۴/۷

روش غیرمستقیم نوع دوم

بعنوان روش غیرمستقیم دیگر برای تقریب تابع و مشتقات آن استفاده می‌شود، نخست مشتق مرتبه دوم یعنی f'' برحسب توابع پایه‌ای شعاعی تقریب زده می‌شود.

$$f''(x) = \sum_{i=1}^m w^{(i)} g^{(i)}(x), \quad (20.2)$$

آنگاه تابع مشتق مرتبه اول f' طبق رابطه (۱۶.۲)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \int f''(x) dx \\ &= \sum_{i=1}^m w^{(i)} H^{(i)}(x) + C_1, \end{aligned} \quad (21.2)$$

با تابع پایه‌ای شعاعی داده شده توسط روابط (۱۷.۲) یا (۱۸.۲) تابع اصلی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx \\ &= \sum_{i=1}^m w^{(i)} \bar{H}^{(i)}(x) + C_1 x + C_2, \end{aligned} \quad (22.2)$$

که C_1 و C_2 ثابت‌های انتگرال‌گیری و توابع پایه‌ای متناظر با انتگرال‌گیری از (۱۷.۲) یا (۱۸.۲) به صورت زیر به دست می‌آیند:

(الف) چندربعی

$$\begin{aligned}\bar{H}^{(i)}(x) &= \int H^{(i)}(x) dx \\ &= \frac{((x - C^{(i)})^2 + a^{(i)2})^{1/5}}{6} \\ &\quad + \frac{a^{(i)2}}{2} (x - C^{(i)}) \ln \left((x - C^{(i)}) + \sqrt{(x - C^{(i)})^2 + a^{(i)2}} \right) \\ &\quad - \frac{a^{(i)2}}{2} \sqrt{(x - C^{(i)})^2 + a^{(i)2}},\end{aligned}\quad (23.2)$$

(ب) معکوس چندربعی

$$\begin{aligned}\bar{H}^{(i)}(x) &= \int H^{(i)}(x) dx \\ &= (x - C^{(i)}) \ln \left((x - C^{(i)}) + \sqrt{(x - C^{(i)})^2 + a^{(i)2}} \right) \\ &\quad - \sqrt{(x - C^{(i)})^2 + a^{(i)2}},\end{aligned}\quad (24.2)$$

در روش غیرمستقیم نوع دوم، فاکتورهای بهبود برای تابع اصلی و مشتقات آن در مقایسه با روش غیرمستقیم نوع اول، افزایش یافته است. در هر دو روش تقریب به کمک تمام توابع پایه‌ای شعاعی بهبود چشمگیری حاصل می‌شود. تابع چندربعی در بین توابع پایه‌ای شعاعی استفاده شده در روش غیرمستقیم نوع دوم عملکرد بهتری دارد.

ثابت‌های انتگرال‌گیری در معادلات (۱۶.۲) و (۲۲.۲) به‌طور طبیعی در فرمول غیرمستقیم ظاهر می‌شود. در نتیجه ساختار تقریب به صورت زیر خواهد بود.

$$f(x) = \sum_{i=1}^m w^{(i)} \bar{H}^{(i)}(x) + p(x). \quad (25.2)$$

$p(x)$ یک چندجمله‌ای است که از طریق درونیایی به کمک شبکه محاسبه می‌شود.

مثال ۲.۴.۲. تابع

$$y = x^3 + x + 0.5,$$

را در نظر بگیرید، نتایج درونیایی تابع و مشتقاتش را با روش غیرمستقیم نوع اول و غیرمستقیم نوع دوم در جدول زیر نشان داده‌ایم:

فاکتور بهبود در این مثال به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$IF = \frac{IRBFN \setminus N_e}{IRBFN \setminus 2N_e},$$

مثال ۳.۴.۲. تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$y = 0.02(12 + 3x - 3.5x^2 + 7.2x^3)(1 + \cos 4\pi x)(1 + 0.8 \sin 3\pi x). \quad (26.2)$$

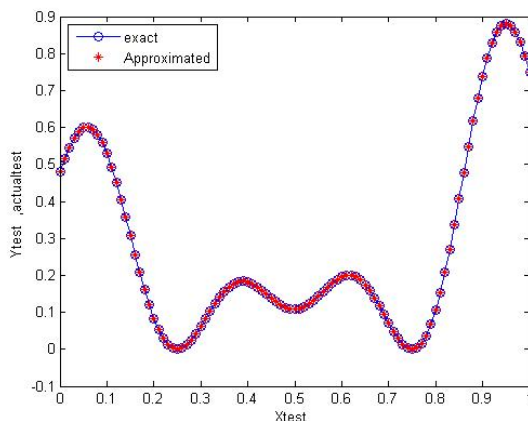
جدول ۶.۲: مقایسه N_e بین دو روش غیرمستقیم با استفاده از تابع چنددرجی

نوع روش	تابع اصلی	مشتق اول	مشتق دوم
روش غیرمستقیم نوع اول	$9/324e - 044$	$4/720e - 02$	$1/671e + 00$
روش غیرمستقیم نوع دوم	$3/968e - 05$	$2/100e - 03$	$1/022e.1$
فاکتور بهبود	۲۳/۵	۲۲/۵	۱۶/۳

جدول ۷.۲: مقایسه N_e بین دو روش غیرمستقیم با استفاده از تابع معکوس چنددرجی

نوع روش	تابع اصل	مشتق اول	مشتق دوم
روش غیرمستقیم نوع اول	$1/510e - 02$	$7/603e - 01$	$2/550e + 01$
روش غیرمستقیم نوع دوم	$2/200e - 03$	$9/760e - 02$	$4/073e + 00$
فاکتور بهبود	۶/۹	۷/۸	۶/۳

درونیایی این تابع را به کمک توابع پایه‌ای شعاعی چنددرجی با در نظر گرفتن $\beta = 0/02$ انجام می‌دهیم. همانطور که در شکل ۶.۲ دیده می‌شود تابع اصلی و تقریبی حدوداً روی هم قرار دارند و این نشان می‌دهد خطا در این محاسبات ناچیز است.



شکل ۶.۲: نمودار اصلی و تقریبی تابع: (۲۶.۲) با در نظر گرفتن $\beta = 0/02$ و تابع پایه‌ای شعاعی چنددرجی، در $[-1, 1]$ انجام شده است.

۲.۴.۲ توابع دو یا چند متغیره

در این بخش روش غیرمستقیم برای توابع دو متغیره توسعه داده شده است. این روش به‌طور مشابه برای توابع سه یا چند متغیره می‌تواند توسعه داده شود.

روش غیرمستقیم نوع اول

در روش غیرمستقیم نوع اول ابتدا مشتقات جزئی مرتبه اول $f(x_1, x_2)$ نسبت به x_1 که با f_1 نشان داده می‌شود برحسب توابع پایه‌ای شعاعی تقریب زده می‌شود.

$$f_1(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^m w^{(i)} g^{(i)}(x_1, x_2), \quad (27.2)$$

که $\{g^{(i)}(x_1, x_2)\}_{i=1}^m$ مجموعه توابع پایه‌ای شعاعی و $\{w^{(i)}\}_{i=1}^m$ مجموعه وزن‌های متناظر با آن‌ها است. تابع اصلی می‌تواند به‌صورت زیر محاسبه شود.

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= \int f_1(x_1, x_2) dx \\ &= \int \sum_{i=1}^m w^{(i)} g^{(i)}(x_1, x_2) dx_1 \\ &= \sum_{i=1}^m w^{(i)} \int g^{(i)}(x_1, x_2) dx_1 \\ &= \sum_{i=1}^m w^{(i)} H^{(i)}(x_1, x_2) + C_1(x_2). \end{aligned} \quad (28.2)$$

که $C_1(x_2)$ تابعی از متغیر x_2 و $\{H^{(i)}(x_1, x_2)\}_{i=1}^m$ مجموعه توابع پایه‌ای برای تابع اصلی هستند و در زیر نشان داده شده است:

(الف) چندربعی

$$\begin{aligned} H^{(i)}(x_1, x_2) &= \frac{(x_1 - c_1^{(i)})\sqrt{r^2 + a^{(i)2}}}{2} \\ &+ \frac{r^2 - (x_1 - c_1^{(i)}) + a^{(i)2}}{2} \times \ln \left((x_1 - c_1^{(i)}) + \sqrt{r^2 + a^{(i)2}} \right). \end{aligned} \quad (29.2)$$

(ب) معکوس چندربعی

$$H^{(i)}(x_1, x_2) = \ln \left((x_1 - c_1^{(i)}) + \sqrt{r^2 + a^{(i)2}} \right). \quad (30.2)$$

در سمت راست (۲۸.۲) تابعی از متغیر x_2 است. بنابراین $C_1(x_2)$ می‌تواند با استفاده از روش شبکه توابع پایه‌ای شعاعی غیرمستقیم نوع دوم برای توابع تک متغیره از طریق زیر به دست آید.

$$\begin{aligned} C_1''(x_2) &= \sum_{i=1}^M \bar{w}^{(i)} g^{(i)}(x_2), \\ C_1'(x_2) &= \sum_{i=1}^M \bar{w}^{(i)} H^{(i)}(x_2) + \hat{C}_1, \\ C_1(x_2) &= \sum_{i=1}^M \bar{w}^{(i)} \bar{H}^{(i)}(x_2) + \hat{C}_1(x_2) + \hat{C}_2. \end{aligned}$$

که \hat{C}_1 و \hat{C}_2 ثابت‌های انتگرال‌گیری هستند و $\bar{w}^{(i)}$ وزن‌های متناظر با توابع پایه‌ای شعاعی

روش غیرمستقیم نوع دوم

در این روش، مشتقات مرتبه دوم، ابتدا برحسب توابع پایه‌ای شعاعی تقریب زده می‌شود، برای مثال f_{11} توابع پایه‌ای برای تابع مشتق اول f_1 توسط روابط (۲۹.۲) و (۳۰.۲) داده می‌شود در حالی که برای تابع اصلی f ، توابع پایه‌ای با انتگرال‌گیری از روابط (۲۹.۲) و (۳۰.۲) به دست می‌آید.

(الف) چندربعی

$$\begin{aligned} \bar{H}^{(i)}(x_1, x_2) &= \int H^{(i)}(x_1, x_2) dx_1 = \frac{(r^2 + a^{(i)2})^{1/5}}{6} \\ &+ \frac{r^2 - (x_1 - c_1^{(i)})a^{(i)2}}{2} (x_1 - c_1^{(i)}) \\ &\times \ln \left((x_1 - c^{(i)}) + \sqrt{r^2 + a^{(i)2}} - \frac{r^2 - (x_j - c_j^{(i)})^2 a^{(i)2}}{2} \sqrt{r^2 + a^{(i)2}} \right). \end{aligned} \quad (31.2)$$

(ب) معکوس چندربعی

$$\begin{aligned} \bar{H}^{(i)}(x_1, x_2) &= \int H^{(i)}(x_1, x_2) dx_1 (x - c^{(i)}) \ln \left((x - c^{(i)}) + \sqrt{r^2 + a^{(i)2}} \right) \\ &- \sqrt{r^2 + a^{(i)2}}. \end{aligned} \quad (32.2)$$

که تابع اصلی به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$f(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^m w^{(i)} \bar{H}^{(i)}(x_1, x_2) + C_1(x_2)x_1 + C_2(x_2). \quad (33.2)$$

$C_1(x_2)$ و $C_2(x_2)$ ثابت‌های انتگرال‌گیری هستند.

فصل ۳

حل دستگاه حاصل از توابع پایه‌ای شعاعی به روش تجزیه

۱.۳ مقدمه

درونیایی داده‌ها با توابع پایه‌ای شعاعی، گاهی منجر به حل دستگاه متقارن معین مثبت، بدوضع می‌شود. الگوریتم استاندارد برای حل دستگاه متقارن معین مثبت تجزیه چولسکی می‌باشد. این ماتریس ممکن است معین مثبت متقارن نباشد که در این صورت تجزیه چولسکی با شکست مواجه می‌شود. یک تجزیه جایگزین برای ماتریس متقارن، تجزیه LDL^T است، در این روش از گرفتن جذر در محاسبات اجتناب می‌شود و محاسبات به همان تعداد تجزیه چولسکی می‌باشد.

روش افزایش قطر، می‌تواند برای جلوگیری از شکست تجزیه چولسکی و به منظور بهبود دقت هر دو روش تجزیه برای ماتریس متقارن معین مثبت، هنگامی که ماتریس به شدت بدوضع است استفاده شود. در این روش منظم‌ساز پارامتر بکار رفته می‌تواند روی دقت روش تاثیرگذار باشد.

اگر دستگاهی که در قسمت درونیایی تابع با بکاربردن توابع پایه‌ای شعاعی تشکیل شده است را به صورت $Gw = f$ نشان دهیم، که در آن G ماتریس ایجاد شده از توابع پایه‌ای شعاعی و w وزن‌های متناظر با توابع پایه‌ای شعاعی و f مقادیر دقیق تابع در نقاط داده شده باشد، می‌توان این دستگاه را با روش‌های مستقیم تجزیه کنیم که در بخش بعدی توضیح خواهیم داد.

می‌توان برای هر تابع پایه‌ای شعاعی یک پارامتر شکل متفاوتی انتخاب کنیم ولی گاهی ممکن است دستگاه ماتریس ایجاد شده غیرمتقارن باشد و به این دلیل در تمام شبکه یک پارامتر شکل ثابت را استفاده می‌کنیم. برای یک مجموعه ثابت از مراکز هم پارامتر شکل و هم مقدار عددشرطی روی دقت روش تاثیرگذار است.

اگر مقادیر ویژه ماتریس را به صورت زیر مرتب کنیم که λ_{\min} کمترین مقدار ویژه و λ_{\max} بزرگترین مقدار ویژه ماتریس ایجاد شده از توابع پایه‌ای شعاعی باشد.

$$0 < \lambda_{\min} = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N = \lambda_{\max}.$$

عدد شرطی از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$k(G) = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}.$$

کران بالا برای مقدار ویژه ماکسیمم برابر با:

$$\lambda_{\max} \leq N.$$

و کران پایین برای مقدار ویژه می‌نیمم به صورت زیر خواهد بود:

$$\lambda_{\min} \geq K(\varepsilon, d) q_X^{-\frac{d}{\nu} - \frac{1}{\nu}} \exp\left(\frac{-2C_d}{\varepsilon q_X}\right). \quad (1.3)$$

عبارت سمت راست (۱.۳) اگر یک مقدار کوچک باشد، باعث می‌شود λ_{\min} به سمت صفر میل کند و این باعث می‌شود دستگاه ماتریسی بدوضع شود، به این دلیل یک تکنیک منظم‌ساز که مقدار λ_{\min} و λ_{\max} را افزایش می‌دهد معرفی می‌کنیم. [۱۸]

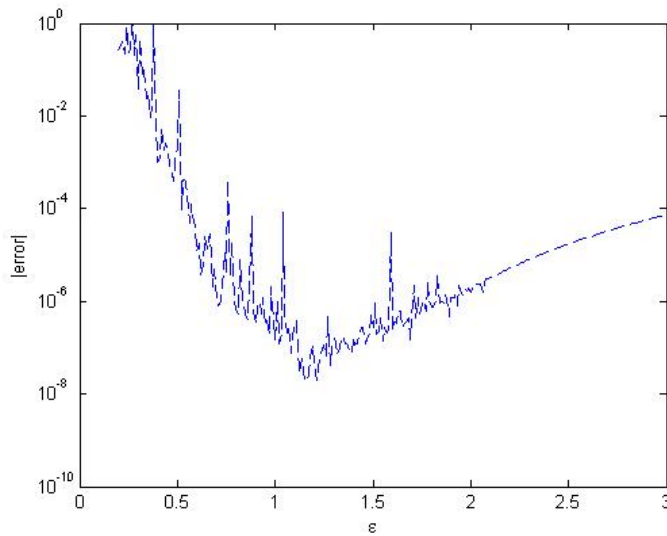
۲.۳ روش‌های مستقیم برای حل دستگاه‌های متقارن معین مثبت

یکی از روش‌های مستقیم برای حل دستگاه $Gw = f$ تجزیه دولیتل با محورگیری جزئی است. این الگوریتم با $\frac{2}{3}N^3$ عمل انجام می‌شود. دستگاه متقارن معین مثبت، می‌تواند با نصف محاسبات قبلی از طریق تجزیه چولسکی که L پایین مثلثی است انجام شود. این ماتریس متقارن معین مثبت از لحاظ عددی ممکن است، معین مثبت متقارن نباشد^۱ در این حالت تجزیه با شکست مواجه می‌شود. تجزیه چولسکی بدون عمل جذرگیری، $G = LDL^T$ نامیده می‌شود که L پایین مثلثی با قطر اصلی یک و D ماتریس قطری است. زمانی که ماتریس تجزیه متقارن معین مثبت است تمام عناصر قطری D بزرگتر از صفر خواهد بود. هر دو الگوریتم تجزیه چولسکی و تجزیه LDL^T برای ماتریس‌های متقارن معین مثبت بدون نیاز به محورگیری، پایدار پسر هستند. این دو الگوریتم اساساً محاسبات همانندی دارند. تفاوت عمده بین دو الگوریتم زمانی است که ماتریس معین مثبت متقارن نباشد. تجزیه چولسکی شکست می‌خورد در حالی که تجزیه LDL^T اینطور نیست. بعد از اینکه ماتریس متقارن معین مثبت، با بکاربردن روش‌های تجزیه دولیتل و چولسکی و LDL^T انجام شد، $O(N^2)$ عمل برای الگوریتم جایگذاری پسر و پیشرو برای حل دستگاه خطی حاصل از درونیایی به کمک توابع پایه‌ای شعاعی، بکار می‌رود.

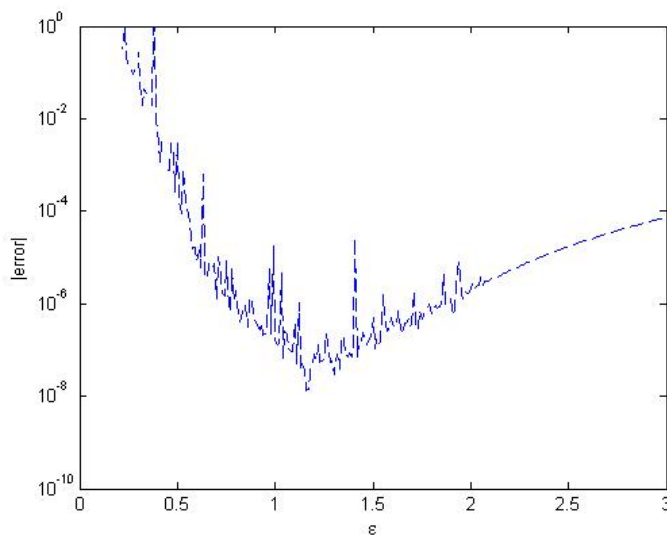
مثال ۱.۲.۳. تابع $y = \exp \sin(\pi x)$ را در نظر بگیرید، دستگاه حاصل از درونیایی این تابع با بکار بردن توابع پایه‌ای شعاعی با تعداد مراکز $N = 55$ در بازه $[-1, 1]$ با فاصله‌های یکنواخت در نظر گرفته شده است و تعداد نقاط درونیایی $M = 175$ است.

دستگاه ایجاد شده از توابع پایه‌ای شعاعی با روش‌های تجزیه چولسکی، دولیتل و LDL^T حل شده است، تجزیه چولسکی با شکست مواجه می‌شود، ولی تجزیه دولیتل و LDL^T همانطور که در نمودارهای ۱.۳ و ۲.۳ دیده می‌شود، اجرا شده است. محور افقی پارامترشکل ε می‌باشد و محور عمودی خطا (اختلاف بین تابع اصلی و تابع تقریبی) را نشان می‌دهد. نمودار عددشرطی این دستگاه در شکل ۳.۳ نشان داده شده

^۱Numerically Symmetric Positive Definite



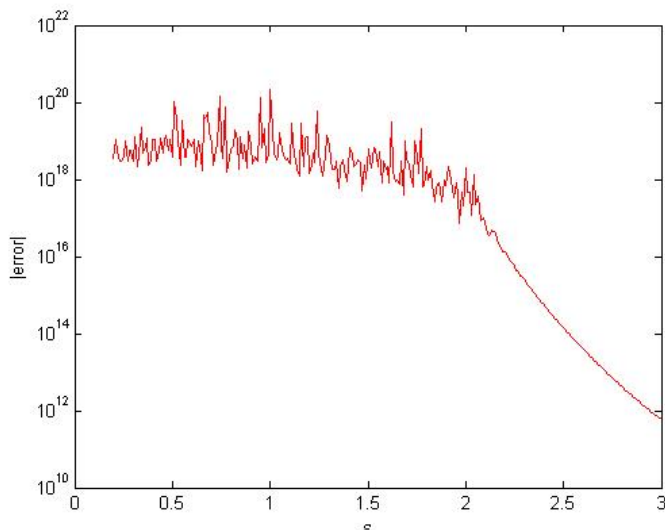
شکل ۱.۳: حل دستگاه حاصل از تقریب تابع $f = \exp \sin(\pi x)$ با بکار بردن تابع پایه‌ای شعاعی معکوس ربعی به روش تجزیه LDL^T با در نظر گرفتن پارامتر شکل‌های متفاوت.



شکل ۲.۳: حل دستگاه حاصل از تقریب تابع $f = \exp \sin(\pi x)$ با بکار بردن تابع پایه‌ای شعاعی معکوس ربعی به روش تجزیه LU با در نظر گرفتن پارامتر شکل‌های متفاوت که کمترین خطا با $\epsilon = 1/15$ ، حدوداً $10e-8$ است.

است. در روش تجزیه LU و LDL^T تا $\epsilon = 2/1$ منحنی خطا در نوسان است. بطور کلی تا $\epsilon = 1/2$ بطور کامل روند کاهشی داشته است. تجزیه چولسکی تا $\epsilon = 1/95$ با شکست مواجه می‌شود به علت اینکه دستگاه معین مثبت متقارن عددی نمی‌باشد تجزیه LDL^T با تولید کردن عناصر ماتریس قطری کمتر از صفر، تشخیص می‌دهد که دستگاه ماتریس با $\epsilon = 1/95$ و کمتر، معین مثبت متقارن عددی نیست. برخلاف تجزیه چولسکی تجزیه LDL^T منجر به شکست نمی‌شود و در عوض نتایج خوبی همانند روش تجزیه دولیتل تولید می‌کند. ناحیه پارامتری برای اینکه هم محاسبات LDL^T پایدار باشد و هم عناصر

قطری D مثبت باشد و الگوریتم چولسکی موفق و پایدار باشد، می‌تواند توسط تکنیک منظم‌سازی افزایش قطر بهبود یابد که در بخش بعدی توضیح خواهیم داد.



شکل ۳.۳: نمودار عدد شرطی دستگاه حاصل از تقریب تابع $f = \exp \sin(\pi x)$ با استفاده از توابع پایه‌ای شعاعی روی ناحیه‌ای از پارامتر شکل ε

۳.۳ منظم‌سازی تجزیه ماتریس‌های متقارن معین مثبت

روش افزایش قطر برای اولین بار در سال ۱۹۴۰ استفاده شده است. بجای حل کردن دستگاه $Gw = f$ ، دستگاه منظم $Cy = f$ را که $C = G + \mu I$ حل می‌کنیم. پارامتر μ پارامتر ثابت مثبت کوچک و I ماتریس واحد است، این تکنیک را روش افزایش قطر می‌نامند (MDI)^۲ روش افزایش قطر این گونه است که درایه‌های روی قطر را افزایش می‌دهیم با این عمل ماتریس حاصل شرایط بهتری نسبت به قبل دارد، یعنی دارای عدد شرطی کوچکتر نسبت به ماتریس اولیه می‌باشد.

ماتریس C حاصل شده در این جا عدد شرطی کوچکتری نسبت به G دارد و در نتیجه دستگاه ماتریسی $Cy = f$ خوش‌وضع‌تر می‌شود.

$$K(C) = \frac{\lambda_{\max} + \mu}{\lambda_{\min} + \mu} < K(G) = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}, \quad (2.3)$$

در فرمول (۲.۳) λ_{\max} بزرگترین مقدار ویژه و λ_{\min} کمترین مقدار ویژه می‌باشد.

برای μ های کوچک، G^{-1} نزدیک به $(G + \mu I)^{-1}$ است. در روش افزایش قطر در حل دستگاه به سادگی می‌توان G را با $(G + \mu I)$ جایگزین کنیم.

$$G^{-1} - (G + \mu I)^{-1} = \mu^{-1} G^{-1} \left(I + \frac{G^{-1}}{\mu} \right) G, \quad (3.3)$$

^۲Method of Diagonal Increments

رابطه (۳.۳) نزدیک بودن G^{-1} و $(G + \mu I)^{-1}$ را برای μ کوچک نشان می‌دهد. G^{-1} را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$G^{-1} = \frac{1}{\mu} \sum_{k=1}^{\infty} (\mu C^{-1})^k, \quad (4.3)$$

که به روش زیر به دست آمده است:

$$\begin{aligned} G^{-1} &= (C - \mu I)^{-1} \\ &= C^{-1} - C^{-1}(-\mu I)C^{-1} + C^{-1}(-\mu I)C^{-1}(-\mu I)C^{-1} + \dots \\ &= C^{-1} + \mu(C^{-1})^2 + \mu^2(C^{-1})^3 + \dots \\ &= \frac{1}{\mu} \sum_{k=1}^{\infty} (\mu C^{-1})^k. \end{aligned}$$

سری همگرا است زیرا شعاع طیفی μC^{-1} کمتر از یک است.

$$0 < \frac{\mu}{\lambda_i + \mu} < 1 \quad i = 1, 2, \dots, N \quad \forall \mu > 0,$$

اگر $\mu > \lambda_{\max}$ آنگاه ممکن است عددشرطی C نسبت به عددشرطی G کمتر باشد و اگر $\mu \leq \lambda_{\min}$ آنگاه $\frac{\mu}{\lambda_i + \mu} \leq 1$ برای تمام i ها سری به سرعت همگرا است.

جواب دستگاه $Gw = f$ را می‌توان به صورت $w = G^{-1}f$ نوشت که از روش زیر به دست آمده است:

$$\begin{aligned} w &= G^{-1}f \\ &= \frac{1}{\mu} \sum_{k=1}^{\infty} (\mu C^{-1})^k f = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu} (\mu C^{-1})^k f \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu} \mu^k C^{-k} f = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^{k-1} C^{-k} f \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mu^{k-1} C^{-k} C y = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^{k-1} C^{1-k} y \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mu^{k-1} (C^{-1})^{k-1} y = \sum_{k=1}^{\infty} (\mu C^{-1})^{k-1} y \\ &= (\mu C^{-1})^{1-1} + (\mu C^{-1})^{2-1} + (\mu C^{-1})^{3-1} + \dots \\ &= y + \mu C^{-1} y + (\mu C^{-1})^2 y + \dots \\ &= y + \mu C^{-1} [y + \mu C^{-1} y + \dots]. \end{aligned}$$

جمله اول برابر است با:

$$w^{[0]} = C^{-1} f,$$

و سپس تکرار روابط:

$$w^{[k+1]} = w^{[k]} + \mu C^{-1} w^{[k]}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (5.3)$$

محاسبه هر جمله از معادله فوق یک تکرار نامیده می‌شود. در نوشته‌های جدید به روش رایلی معروف است به طور خلاصه با اجرای روش w یک بار با $O(\frac{1}{\mu} N^3)$ عمل تجزیه می‌شود و سپس با حل دستگاه به $O(N^3)$

عمل انجام می‌شود.

درسالهای اخیر نظریه رابلی، در حل مسائل درونیایی توابع پایه‌ای شعاعی استفاده شده است. نکته‌ای که باقی می‌ماند این است که چطور معیار توقف مرتبه تکرار را برای بهترین دقت و بهروری مشخص کنیم.

۴.۳ انتخاب پارامتر منظم‌ساز و شرایط توقف

برای انتخاب پارامتر منظم‌ساز پیشنهاد شده است اگر p را بعنوان دقتی مناسب و a را برابر ۲ یا ۳ در نظر بگیریم رابطه $\mu = 10^{a-p}$ برقرار است. مثال‌های عددی وجود دارد که مقدار $\mu = 1e - 11$ را استفاده کرده است، اما اطلاعاتی درباره تعداد تکرار یا ضابطه همگرا نمی‌دهد. در نرم‌افزار Scilab RBF مقدار $\mu = 1e - 11$ را بعنوان پیش‌فرض برای پارامتر منظم‌ساز در نظر گرفته است اما اطلاعاتی در مورد ضابطه همگرا یا تعداد تکرار نمی‌دهد. برای انتخاب پارامتر منظم‌ساز که حداکثر پایداری و حداقل طول تکرار را داشته باشد، راهکار دقیقی وجود ندارد. [۱۸]

تابع $f = \exp(\sin \pi x)$ را در نظر بگیرید، دستگاه حاصل از درونیایی این تابع که به کمک توابع پایه‌ای شعاعی به دست آمده است را با روش افزایش قطر انجام داده‌ایم. نتایجی که در شکل ۴.۳ آمده، روش $RLDL^T$ با $\mu = 5e - 15$ در نظر گرفته است و دقت این روش را با روش تجزیه LDL^T در محدوده پارامتر شکل، مقایسه می‌کند. شکل ۴.۳ نشان می‌دهد که الگوریتم $RLDL^T$ در ناحیه پارامتر شکل در دستگاه ماتریس‌هایی که شرایط نامطلوبی دارند می‌تواند راه حل دقیق‌تر و همچنین منحنی غیرنوسانی را در محدوده وسیعی از پارامتر شکل‌ها، ارائه دهد که از طریق تجزیه LDL^T ممکن نیست.

همانطور که نمودار در شکل ۶.۳ نشان داده است، دستگاه خطی به صورت پایدار حل شده و رفتاری ثابت (منحنی خطا بدون نوسان)، با عدد شرطی 10^{16} و کمتر دارد. کمترین خطا در ناحیه ناپایدار با $\varepsilon = 1/15$ رخ داده است. در این مقدار از پارامتر شکل دستگاه ماتریسی G عدد شرطی $1/4e19$ و کمترین مقدار ویژه $16 - 7/23e -$ را دارد. در سری (۴.۳) روش رابلی، μ با مقداری کمتر از می‌نیم مقدار ویژه تعیین شده است که به سرعت همگرا شده است اما در این مورد انجام چنین کاری امکان‌پذیر نمی‌باشد، زیرا عدد شرطی در ماتریس C بالاتر از 10^{16} به دست می‌آید. با این حال تعیین پارامتر منظم‌ساز کمی بالاتر از کمترین مقدار ویژه G تاثیرگذار است. در نمودارهای زیر پارامتر منظم‌ساز در محدوده $5e - 13 \leq \mu \leq 5e - 15$ انتخاب شده است.

زمانی که ماتریس متقارن معین مثبت است، وضعیت این روش متفاوت است. برای مثال با در نظر گرفتن $\mu = 5e - 15$ با مقدار $\varepsilon = 3/0$ منجر می‌شود ماتریس G عدد شرطی $O(10^{12})$ را داشته باشد، عدد شرطی ماتریس C حدودا با عدد شرطی ماتریس G یکسان است. در این حالت کمترین مقدار ویژه $11 - 3/5e -$ و شعاع طیفی μC^{-1} برابر $1/4e - 04$ است. سری (۴.۳) سریعا به جواب مطلوب نزدیک می‌شود. در این مورد تکرار نشدن یا کم تکرار شدن ضروری می‌باشد. زمانی که ماتریس متقارن معین مثبت است، کران خطا باید در می‌نیم تغییرات نسبی تنظیم شود در غیر این صورت این روش صدها تکرار را با تغییرات نسبی کم خواهد داشت ولی راه حل دقیق‌تری از آن حاصل نمی‌شود. برای پایان دادن به تکرار روش رابلی پارامتر منظم را در محدوده $5e - 13 \leq \mu \leq 5e - 15$ همراه با شرایط زیر پیشنهاد

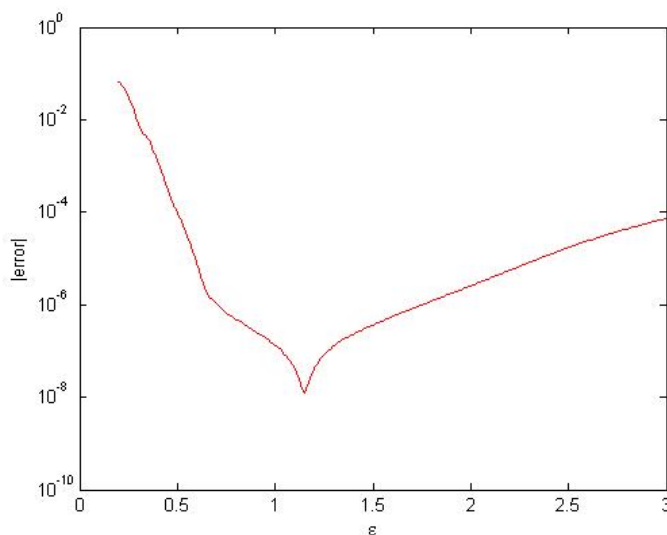
می‌کنیم.

(الف) هنگامی که نرم عبارت $\mu C^{-1} a^{[k]}$ مربوط به جواب y که از دستگاه منظم‌ساز $Cy = f$ به دست می‌آید کمتر از کران خطا که به طور پیش فرض $1e - 4$ در نظر می‌گیریم، باشد توقف می‌کنیم. تعداد تکرار برای یک ماتریس متقارن معین مثبت صفر یا حداکثر یک در نظر می‌گیریم. در غیراینصورت الگوریتم مراحل اصلاح را تا ماکسیمم تعداد تکرار ادامه می‌دهیم که در شرط سوم توضیح داده‌ایم.

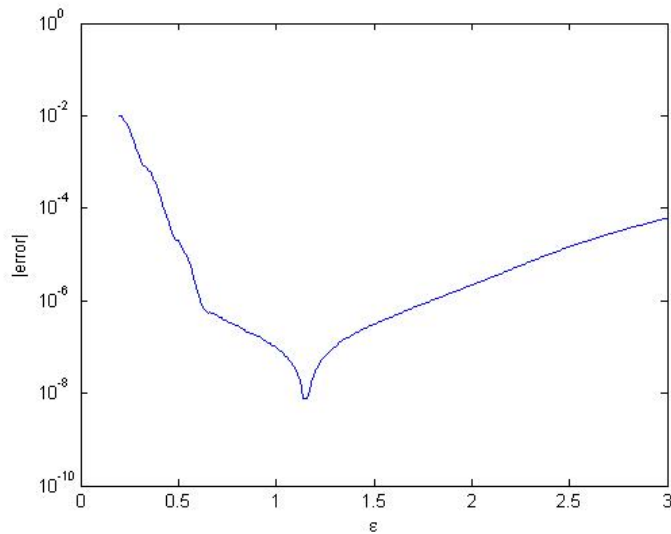
(ب) خاتمه می‌یابد زمانی که تغییرات نسبی در شرط اول متوقف می‌شود برای کاهش از یک تکرار به بعد، این به این مطلب اشاره دارد که روش شروع به واگرا شدن می‌کند.

(پ) برای اطمینان، الگوریتم ماکسیمم تعداد تکرار را محدود کرده، تکرار پیش فرض ۵ در نظر گرفته شده، زیرا اکثر نتایج در چند تکرار اول با پارامتر منظم‌ساز پیشنهاد شده، به دست آمده است.

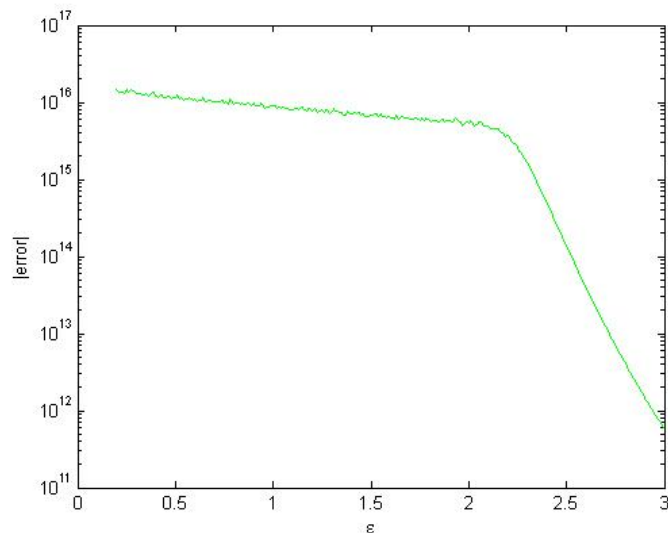
استراتژی ساده‌تر و موثری هم وجود دارد که از روش رایلی استفاده نمی‌کند، بلکه فقط از روش افزایش قطری استفاده می‌کند، این عمل، جواب $G + \mu I$ را به جواب $Gw = f$ تبدیل می‌کند.



شکل ۴.۳: حل دستگاه درونیایی تابع $f = \exp \sin(\pi x)$ با بکار بردن تابع پایه‌ای شعاعی معکوس ربعی به روش تجزیه $RLDL^T$ با در نظر گرفتن ϵ ‌های متفاوت و با پارامتر منظم‌ساز $\mu = 5e - 15$ ، کمترین خطا در ناحیه پارامتر شکل $\epsilon = 1/15$ ، $7/99e - 9$ می‌باشد.



شکل ۵.۳: حل دستگاه درونیایی تابع $f = \exp \sin(\pi x)$ با بکاربردن تابع پایه‌ای شعاعی، با در نظر گرفتن پارامتر منظم‌ساز $\mu = 5e - 15$ و آن را با RLL^T نشان می‌دهیم، منحنی از نوسانات کمتری نسبت به روش تجزیه دولیتل برخوردار است.



شکل ۶.۳: عدد شرطی دستگاه حاصل از درونیایی تابع $f = \exp \sin(\pi x)$ به کمک توابع پایه‌ای شعاعی با روش افزایش قطر.

فصل ۴

حل دستگاه معادلات توابع پایه‌ای شعاعی به روش گرادیان مزدوج

مقدمه

یکی از روش‌های تکراری قدرتمند برای حل سریع سیستم‌های بزرگ از معادلات با ضرایب مثبت متقارن روش گرادیان مزدوج است. الگوریتم گرادیان مزدوج در سال ۱۹۵۲ توسط هستنز^۱ و استایفل^۲ مطرح شد.

۱.۴ روش گرادیان مزدوج

روش گرادیان مزدوج یکی از روش‌های تکراری می‌باشد که معمولاً برای حل دستگاه خطی تنک و خیلی بزرگ $Ax = b$ استفاده می‌شود. روش‌های مبتنی بر مثلثی‌سازی ماتریس A از جهت زمان اجرا و ذخیره‌سازی توصیه نمی‌شود، بعلاوه بیشتر مسائل تنک هستند و تنک بودن در طی فرایند مثلثی‌سازی از بین می‌رود و به طور قابل ملاحظه‌ای توسعه می‌یابد. بنابراین در انتها با یک ماتریس خیلی بزرگ با عناصر مخالف صفر بسیار زیادی سروکار خواهیم داشت. برای چنین مسائلی، توصیه می‌شود از روش‌های تکراری استفاده کرد که هرگز ماتریس A را تغییر نمی‌دهند و فقط به ذخیره‌سازی تعدادی بردار با طول n در یک زمان نیاز دارند. الگوریتم گرادیان مزدوج تکنیکی است که نیاز به محاسبه مقادیر ویژه ندارد و می‌توان به عنوان یک روش مستقیم برای پیدا کردن جواب دستگاه خطی $Ax = b$ استفاده شود. روش گرادیان مزدوج برای ماتریس‌های متقارن، معین مثبت و پراکنده و بزرگ کاربرد دارد.

قضیه ۱.۱.۴. اگر A یک ماتریس متقارن معین مثبت باشد، آنگاه حل دستگاه $Ax = b$ معادل با می‌نیم

^۱Hestenes

^۲Stiefel

سازی تابع درجه دوم زیر می‌باشد:

$$q(x) = x^T A x - 2x^T b$$

برهان. ابتدا رفتار تابع q را بر روی یک نیم خط یک بعدی بررسی می‌کنیم. $x + \alpha p$ را در نظر می‌گیریم که در آن x و p بردار بوده و α یک اسکالر می‌باشد.

$$\begin{aligned} q(x + \alpha p) &= \langle x + \alpha p, A(x + \alpha p) \rangle - 2 \langle x + \alpha p, b \rangle \\ &= \langle x, Ax \rangle + \alpha \langle x, Ap \rangle + \alpha \langle p, Ax \rangle + \alpha^2 \langle p, Ap \rangle - 2 \langle x, b \rangle - 2\alpha \langle p, b \rangle \\ &= q(x) + 2\alpha \langle p, Ax \rangle - 2\alpha \langle p, b \rangle + \alpha^2 \langle p, Ap \rangle \\ &= q(x) + 2\alpha \langle p, Ax - b \rangle + \alpha^2 \langle p, Ap \rangle, \end{aligned} \quad (1.4)$$

زیرا $A = A^T$. ضریب α^2 در رابطه (۴.۴) مثبت است. لذا تابع درجه دوم بر روی نیم خط باید یک می‌نیم داشته باشد و نه یک ماکسیمم. از رابطه (۴.۴) نسبت به t مشتق می‌گیریم، نتیجه می‌شود:

$$\frac{d}{dt} q(x + \alpha p) = 2 \langle p, Ax - b \rangle + 2\alpha \langle p, Ap \rangle, \quad (2.4)$$

می‌نیم q وقتی است که مشتق رابطه (۲.۴) برابر صفر باشد. مقدار α که نقطه می‌نیم را می‌دهد عبارت است از:

$$\alpha = \frac{\langle p, b - Ax \rangle}{\langle p, Ap \rangle}, \quad (3.4)$$

با استفاده از این مقدار α ، می‌نیم q را بر روی نیم خط محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} q(x + \alpha p) &= q(x) + \alpha [2 \langle p, Ax - b \rangle + \alpha \langle p, Ap \rangle] \\ &= q(x) + \alpha [2 \langle p, Ax - b \rangle + \alpha \langle p, b - Ax \rangle] \\ &= q(x) - \alpha \langle p, b - Ax \rangle \\ &= q(x) - \frac{\langle p, b - Ax \rangle^2}{\langle p, Ap \rangle}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

محاسبات نشان می‌دهد که کاهش مقدار q همیشه در عبور از x به $x + \alpha p$ پدید می‌آید مگر آنکه p عمود بر بردار مانده باشد یعنی $\langle p, b - Ax \rangle = 0$. اگر x یک جواب دستگاه $Ax = b$ نباشد، آنگاه تعداد زیادی بردار p وجود دارند که در رابطه $\langle p, b - Ax \rangle \neq 0$ صدق می‌کنند. از اینرو اگر $Ax \neq b$ آنگاه x را می‌نیم نمی‌کند. از طرف دیگر اگر $Ax = b$ ، آنگاه نیم خطی یافت نمی‌شود که از x سرچشمه بگیرد و روی آن q مقداری کمتر از مقدار $q(x)$ اختیار کند. از اینرو یک چنین x یک نقطه می‌نیم q است. □

مثال ۲.۰۱.۴. دستگاه معادله جبری زیر را به روش گرادیان مزدوج حل می‌کنیم:

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix},$$

حل: روش باید بعد از سه مرحله تکرار (با توجه به مرتبه دستگاه) به جواب برسد. با انتخاب بردار اولیه:

$$x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$r_0 = b - Ax_0 = \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$p_0 = r_0 = \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix},$$

$$Ap_0 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 54 \\ -26 \\ 34 \end{pmatrix},$$

$$\alpha_0 = \frac{p_0^T r_0}{p_0^T Ap_0} = \frac{(12)^2 + (-1)^2 + (5)^2}{12(54) + (-1)(-26) + 5(34)} = 0,20142,$$

$$x_1 = x_0 + \alpha_0 p_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0,20142 \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,41704 \\ -0,20142 \\ 1,0071 \end{pmatrix}$$

$$r_1 = b - Ax_1 = \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2,41704 \\ -0,20142 \\ 1,0071 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,12332 \\ 4,23692 \\ -1,84828 \end{pmatrix},$$

$$\beta_0 = -\frac{r_1^T Ap_0}{p_0^T Ap_0} = -\frac{1,12332(54) + 4,23692(-26) - 1,84828(34)}{12(54) + (-1)(-26) + (5)(34)} = 0,133107,$$

$$p_1 = r_1 + \beta_0 p_0 = \begin{pmatrix} 1,12332 \\ 4,23692 \\ -1,84828 \end{pmatrix} + 0,133107 \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,72076 \\ 4,10380 \\ -1,18268 \end{pmatrix},$$

$$Ap_1 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2,72076 \\ 4,10380 \\ -1,18268 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5,59656 \\ 16,05980 \\ -10,21760 \end{pmatrix},$$

$$\alpha_1 = \frac{p_1^T r_1}{p_1^T Ap_1} = \frac{2,72076(1,12332) + 4,10380(4,23692) - 1,18268(-1,84828)}{2,72076(5,59656) + 4,10380(16,05980) - 1,18268(-10,21760)},$$

$$\alpha_1 = 0,24276,$$

$$x_2 = x_1 + \alpha_1 p_1 = \begin{pmatrix} 2,41704 \\ -0,20142 \\ 1,00710 \end{pmatrix} + 0,24276 \begin{pmatrix} 2,72076 \\ 4,10380 \\ -1,18268 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,07753 \\ 0,79482 \\ 0,71999 \end{pmatrix},$$

$$r_2 = b - Ax_2 = \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,07753 \\ 0,79482 \\ 0,71999 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,23529 \\ 0,33823 \\ 0,63215 \end{pmatrix},$$

$$\beta_1 = -\frac{r_2^T Ap_1}{p_1^T Ap_1},$$

$$\beta_1 = -\frac{-0,23529(0,59656) + 0,33823(16,05980) + 0,63215(-10,21760)}{2,72076(0,59656) + 4,10380(16,05980) - 1,18268(-10,21760)},$$

$$\beta_1 = 0,251452,$$

$$p_2 = r_2 + \beta_1 p_1 = \begin{pmatrix} -0,23529 \\ 0,33823 \\ 0,63215 \end{pmatrix} + 0,251452 \begin{pmatrix} 2,72076 \\ 4,10380 \\ -1,18268 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,166876 \\ 0,441421 \\ 0,602411 \end{pmatrix},$$

$$Ap_2 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0,166876 \\ 0,441421 \\ 0,602411 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,506514 \\ 0,727738 \\ 1,359930 \end{pmatrix},$$

$$\alpha_2 = \frac{p_2^T r_2}{p_2^T Ap_2},$$

$$\alpha_2 = \frac{-0,166876(-0,23529) + 0,441421(0,33823) + 0,602411(0,63215)}{-0,166876(-0,506514) + 0,441421(0,727738) + 0,602411(1,359930)},$$

$$\alpha_2 = 0,46480,$$

$$x_2 = x_2 + \alpha_2 p_2 = \begin{pmatrix} 3,07753 \\ 0,79482 \\ 0,71999 \end{pmatrix} + 0,46480 \begin{pmatrix} -0,166876 \\ 0,441421 \\ 0,602411 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,99997 \\ 0,99999 \\ 0,99999 \end{pmatrix}.$$

که تقریباً تا ۵ رقم اعشار صحیح است. اختلاف جزئی با حل دقیق به علت خطای گرد نمودن در محاسبات است.

۲.۴ حل دستگاه توابع پایه‌ای شعاعی به روش گرادیان مزدوج

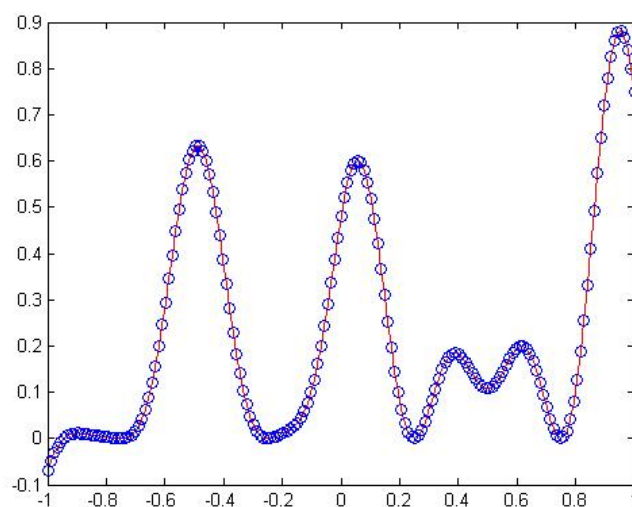
در ادامه به درونیایی چند تابع با توابع پایه‌ای شعاعی می‌پردازیم که منجر به حل دستگاه‌های متقارن معین مثبت می‌شود. این دستگاه‌ها را به روش گرادیان مزدوج که در بخش قبل شرح داده‌ایم حل می‌کنیم، همانطور که در مثال‌های زیر خواهیم دید نتایج خوبی حاصل می‌شود. در مثال‌های زیر محاسبات با نرم‌افزار Matlab ۲۰۱۰ انجام شده است.

۳.۴ مثال

مثال ۱.۳.۴. تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$y = 0.02(12 + 3x - 3.5x^2 + 7.2x^3)(1 + \cos 4\pi x)(1 + 0.8 \sin 3\pi x),$$

درونیایی این تابع را با کمک توابع پایه‌ای شعاعی چندربعی با $\varepsilon = 4$ در بازه $[-1, 1]$ با تعداد نقاط مورد ارزیابی $M = 175$ انجام داده‌ایم، دستگاه حاصل از درونیایی این تابع که از توابع پایه‌ای شعاعی به دست آمده است را با روش تجزیه گرادیان مزدوج حل می‌کنیم، همانطور که در نمودار ۱.۴ مشاهده می‌شود تابع درونیاب و تابع اصلی تقریباً روی هم قرار دارند، خطای محاسبه شده $1/548e - 04$ می‌باشد.

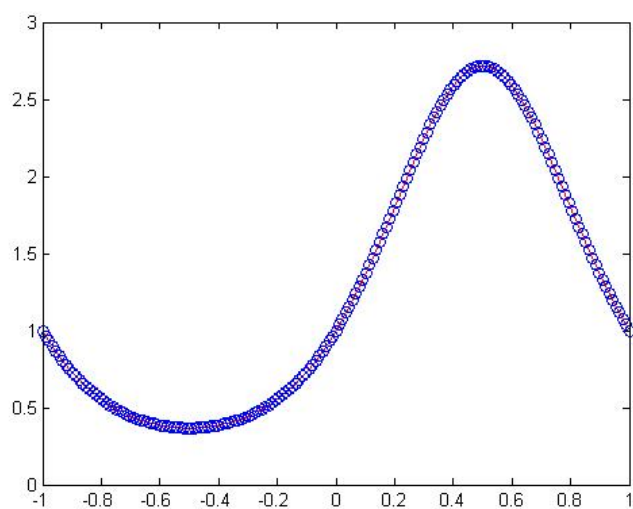


شکل ۱.۴: درونیایی تابع $y = 0.02(12 + 3x - 3.5x^2 + 7.2x^3)(1 + \cos 4\pi x)(1 + 0.8 \sin 3\pi x)$ به کمک توابع پایه‌ای شعاعی چندربعی با $\varepsilon = 4$. تابع تقریب با نقاط دایره‌ای و تابع دقیق به صورت خط‌های پیوسته نشان داده شده است.

مثال ۲.۳.۴. تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$y = \exp(\sin(\pi x)),$$

درونیایی این تابع را با بکاربردن تابع پایه‌ای شعاعی معکوس چندربعی، با در نظر گرفتن $\varepsilon = 2$ در بازه $[-1, 1]$ با تعداد نقاط ۱۷۵ انجام داده‌ایم، حل دستگاه حاصل را با روش تجزیه گرادیان مزدوج انجام می‌دهیم این درونیایی در نمودار ۲.۴ نشان داده شده است، خطای محاسبه شده $1/2262e - 05$ می‌باشد.



شکل ۲.۴: درونیایی تابع $y = \exp(\sin(\pi x))$ به کمک توابع پایه‌ای شعاعی چندربعی با $\varepsilon = 4$. در شکل تابع تقریب با نقاط دایره‌ای و تابع دقیق به صورت خط‌های پیوسته نشان داده شده است.

فصل ۵

حل معادلات وابسته به زمان با بکار بردن توابع پایه‌ای شعاعی

۱.۵ مقدمه

در سال ۱۹۹۰، کانسا طرحی را برای تقریب حل معادلات دیفرانسیل با بکار بردن توابع پایه‌ای شعاعی ارائه داد. اخیراً، روش کانسا برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی و جزئی شامل معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی وابسته به زمان بهبود یافته است. در این بخش دو روش برای حل معادلات وابسته به زمان مورد استفاده قرار گرفته است. این دو روش بدون شبکه بر اساس توابع پایه‌ای شعاعی برای حل معادلات دیفرانسیل غیرخطی وابسته به زمان بکار رفته است. در روش اول شرایط غیرخطی با خطی کردن حذف شده است و به کمک کرانک - نیکلسون و توابع پایه‌ای شعاعی انجام شده و در روش دوم حل معادلات به کمک توابع پایه‌ای شعاعی و روش رونگ - کوتا انجام شده است. روش رونگ - کوتا توسط رانگ^۱ پیشنهاد شد و سپس توسط کوتا^۲ و هیون^۳ گسترش داده شد.

۱.۱.۵ حل معادلات با طرح کرانک - نیکلسون و توابع پایه‌ای شعاعی

معادله زیر را در نظر بگیرید:

$$u_t + uu_x + \alpha u_{xx} + \sigma u_{xxx} + \beta u_{xxxx} = 0, \quad (1.5)$$

$$\begin{cases} u(a, t) = g_1(t), \\ u(b, t) = g_2(t), \\ u(x, 0) = f(x). \end{cases}$$

^۱Runge

^۲Kutta

^۳Hean

با اعمال روش کرانک- نیکلسون روی معادله (۱.۵) معادله دیفرانسیلی به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\left[\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} \right] + \left[\frac{(uu_x)^{n+1} + (uu_x)^n}{2} \right] + \alpha \left[\frac{(u_{xx})^{n+1} + (u_{xx})^n}{2} \right] + \sigma \left[\frac{(u_{xxx})^{n+1} + (u_{xxx})^n}{2} \right] + \beta \left[\frac{(u_{xxxx})^{n+1} + (u_{xxxx})^n}{2} \right] = 0, \quad (2.5)$$

که $u^{n+1} = u(t^{n+1})$ و $t^{n+1} = t^n + \Delta t$ گام زمانی است. ایده اصلی در این روش، خطی سازی عبارت غیرخطی است. برای خطی سازی عبارت غیرخطی uu_x ، می‌توان فرمول زیر را بکار ببریم:

$$(uu_x)^{n+1} = u^n u_x^{n+1} + u^{n+1} u_x^n - u^n u_x^n, \quad (3.5)$$

نتیجه جایگذاری (۳.۵) در (۲.۵) به صورت زیر می‌باشد:

$$\left[\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} \right] + \left[\frac{u^n u_x^{n+1} + u^{n+1} u_x^n}{2} \right] + \alpha \left[\frac{(u_{xx})^{n+1} + (u_{xx})^n}{2} \right] + \sigma \left[\frac{(u_{xxx})^{n+1} + (u_{xxx})^n}{2} \right] + \beta \left[\frac{(u_{xxxx})^{n+1} + (u_{xxxx})^n}{2} \right] = 0 \quad (4.5)$$

می‌توان جملات بالا را به صورت زیر تغییر داد:

$$u^n - \frac{\Delta t}{2} [\alpha u_{xx}^n + \sigma u_{xxx}^n + \beta u_{xxxx}^n] = u^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} [u^n u_x^{n+1} + u^{n+1} u_x^n + \alpha u_{xx}^{n+1} + \sigma u_{xxx}^{n+1} + \beta u_{xxxx}^{n+1}] \quad (5.5)$$

که از محاسبات زیر به دست آمده است:

$$u^{n+1} - u^n + \frac{1}{2} u^n u_x^{n+1} \Delta t + \frac{1}{2} u^{n+1} u_x^n \Delta t + \alpha \frac{1}{2} \frac{u_x x^{n+1}}{2} \Delta t + \frac{1}{2} \alpha \frac{u_{xx}^n}{2} \Delta t + \frac{1}{2} \sigma \frac{u_{xxx}^{n+1}}{2} \Delta t + \frac{1}{2} \sigma \frac{u_{xxx}^n}{2} \Delta t + \frac{1}{2} \beta \frac{u_{xxxx}^{n+1}}{2} \Delta t + \frac{1}{2} \beta \frac{u_{xxxx}^n}{2} \Delta t$$

$$u^n - \frac{1}{2} \Delta t \alpha u_{xx}^n - \frac{1}{2} \Delta t \sigma u_{xxx}^n - \frac{1}{2} \beta u_{xxxx}^n \Delta t = u^{n+1} + \frac{1}{2} u^n u_x^{n+1} \Delta t + \frac{1}{2} u^{n+1} u_x^n \Delta t + \alpha \frac{u_x x^{n+1}}{2} \Delta t + \frac{1}{2} \sigma \frac{u_{xxx}^{n+1}}{2} \Delta t + \frac{1}{2} \beta \frac{u_{xxxx}^{n+1}}{2} \Delta t$$

از Δt فاکتور می‌گیریم

$$u^n - \frac{1}{2} \Delta t [\alpha u_{xx}^n + \sigma u_{xxx}^n + \beta u_{xxxx}^n] = u^{n+1} + \frac{1}{2} \Delta t \left[u^n u_x^{n+1} + u^{n+1} u_x^n + \alpha \frac{u_x x^{n+1}}{2} + \sigma \frac{u_{xxx}^{n+1}}{2} + \beta \frac{u_{xxxx}^{n+1}}{2} \right]$$

که u^n نشان‌دهنده تکرار n ام از حل تقریبی است. فرمول (۵.۵) را با داشتن رابطه زیر تقریب می‌زنیم:

$$u^n(x_i) = \sum_{j=0}^N w_j^n \varphi(r_{ij}) \quad (۶.۵)$$

که $x_i = a + i\Delta x$ مجموعه نقاطی در $[a, b]$ ، $r_{ij} = \|x_i - x_j\|$ ، w_j ها مقادیر مجهول هستند که تعیین خواهند شد و $\varphi(r)$ ها توابع پایه‌ای شعاعی می‌باشند. با جایگزین کردن (۶.۵) در (۵.۵) معادله زیر برای نقاط درونی $x_i (i = 1, 2, \dots, N-1)$ به دست خواهد آمد.

$$\begin{aligned} & u^n - \frac{1}{\tau} \Delta t [\alpha u_{xx}^n + \sigma u_{xxx}^n + \beta u_{xxxx}^n] \\ &= \sum_{j=0}^N w_j^{n+1} \varphi(r_{ij}) + \frac{1}{\tau} \Delta t \left[u^n \times \sum_{j=0}^N w_j^{n+1} \varphi_x(r_{ij}) + u_x^n \times \sum_{j=0}^N w_j^{n+1} \varphi(r_{ij}) \right. \\ & \quad \left. + \alpha \sum_{j=0}^N w_j^{n+1} \varphi_{xx}(r_{ij}) + \sigma \sum_{j=0}^N w_j^{n+1} \varphi_{xxx}(r_{ij}) + \beta \sum_{j=0}^N w_j^{n+1} \varphi_{xxxx}(r_{ij}) \right] \quad (۷.۵) \end{aligned}$$

شرایط مرزی (۱.۵) به صورت زیر تبدیل می‌شوند:

$$\sum_{j=0}^N w_j^{n+1} \varphi(r_{1j}) = g_1(t), \quad \sum_{j=0}^N w_j^{n+1} \varphi(r_{Nj}) = g_2(t), \quad (۸.۵)$$

در هر مرحله w_j ها به دست می‌آید و دستگاه (۷.۵) و (۸.۵) شامل $N + 1$ مجهول w_j^{n+1} ، که می‌تواند به آسانی توسط برخی روش‌ها مانند روش حذفی گاوس تعیین شوند.

۲.۱.۵ مثال

مثال ۱.۱.۵. معادله (۱.۵) با در نظر گرفتن $\alpha = 1, \sigma = 4, \beta = 1$ به صورت:

$$u_t + uu_x + u_{xx} + 4u_{xxx} + u_{xxxx} = 0,$$

با شرایط مرزی:

$$u(x, 0) = C + 9 - 15 \left[\tanh(k(x - x_0)) + \tanh^2(k(x - x_0)) - \tanh^3(k(x - x_0)) \right],$$

$$u(a, t) = C + 9 - 15 \left[\tanh(k(a - Ct - x_0)) + \tanh^2(k(a - Ct - x_0)) - \tanh^3(k(a - Ct - x_0)) \right],$$

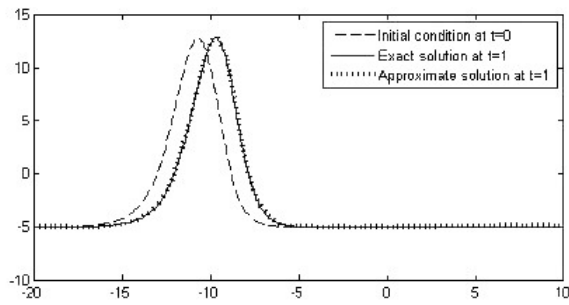
$$u(b, t) = C + 9 - 15 \left[\tanh(k(b - Ct - x_0)) + \tanh^2(k(b - Ct - x_0)) - \tanh^3(k(b - Ct - x_0)) \right],$$

و جواب دقیق

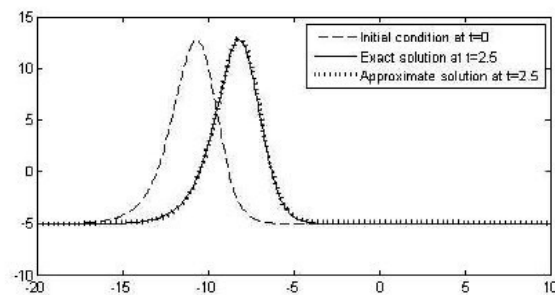
$$u(x, t) = C + 9 - 15 \left[\tanh(k(x - Ct - x_0)) + \tanh^2(k(x - Ct - x_0)) - \tanh^3(k(x - Ct - x_0)) \right].$$

است. این معادله را با $C = 6, K = 0.5, x_0 = -1$ به کمک کرانک - نیکلسون و تابع پایه‌ای شعاعی چنددرجی در بازه $[a, b] = [-20, 10]$ و گام زمانی $\Delta t = 0.1$ حل کرده‌ایم. خطای RMS که برابر با فرمول زیر است در برخی از نقاط، با زمان‌های متفاوت در جدول پایین آمده است.

$$RMS = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |u_{exact}(x_i, t) - u_{approximate}(x_i, t)|^2}$$



شکل ۱.۵: رسم مقدار دقیق و تقریبی معادله (۱.۵) با در نظر گرفتن $\alpha = 1, \sigma = 4, \beta = 1$ که به کمک تابع پایه‌ای شعاعی چندربعی و کرانک - نیکلسون به دست آمده است با $t = 1$.



شکل ۲.۵: رسم مقدار دقیق و تقریبی معادله (۱.۵) با در نظر گرفتن $\alpha = 1, \sigma = 4, \beta = 1$ که به کمک تابع پایه‌ای شعاعی چندربعی و کرانک - نیکلسون به دست آمده است با $t = 2/5$.

جدول ۱.۵: خطای RMS

زمان	۰.۵	۱	۱.۵	۲	۲.۵
خطای روش کرانک - نیکلسون	$3.11e-2$	$6.66e-2$	$7.44e-2$	$9.24e-2$	$1.15e-1$

مثال ۲.۱.۵. معادله (۱.۵) را با $\alpha = 1$ ، $\sigma = 1$ و $\beta = 0$ در نظر بگیرید.

$$u_t + uu_x + u_{xx} + u_{xxx} = 0,$$

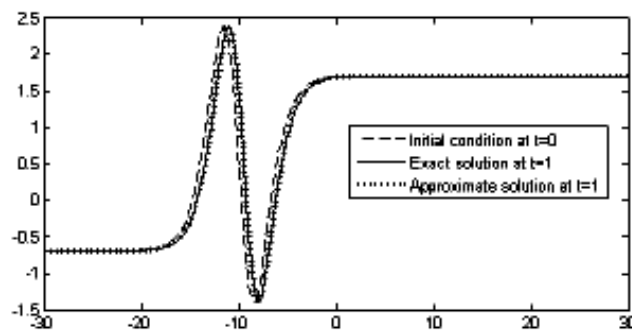
با شرایط مرزی:

$$u(x, 0) = C + \frac{15}{19} \sqrt{\frac{11}{19}} [11 \tanh^3(k(x - x_0)) - 9 \tanh(k(x - x_0))],$$

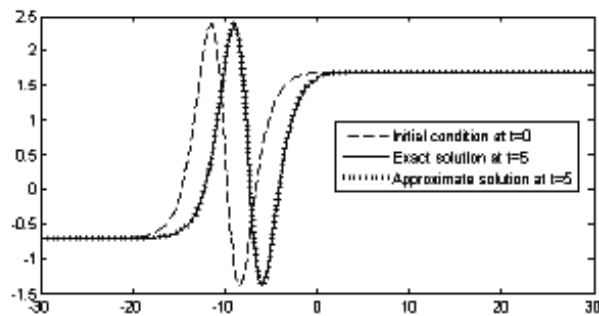
$$u(a, t) = C + \frac{15}{19} \sqrt{\frac{11}{19}} [11 \tanh^3(k(a - Ct - x_0)) - 9 \tanh(k(a - Ct - x_0))],$$

$$u(b, t) = C + \frac{15}{19} \sqrt{\frac{11}{19}} [11 \tanh^3(k(b - Ct - x_0)) - 9 \tanh(k(b - Ct - x_0))].$$

این معادله را با در نظر گرفتن $C = 0.5$ ، $K = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{11}{19}}$ ، $x_0 = -10$ با $[a, b] = [-20, 10]$ کمک روش کرانک - نیکلسون و تابع پایه‌ای شعاعی چندربعی حل کرده‌ایم. گام زمانی برابر با $\Delta t = 0.1$ می‌باشد.



شکل ۳.۵: رسم مقدار دقیق و تقریبی معادله (۱.۵) را با $\alpha = 1$ ، $\sigma = 1$ و $\beta = 0$ که به کمک تابع پایه‌ای شعاعی چندربعی و کرانک - نیکلسون به دست آمده است با $t = 1$.



شکل ۴.۵: رسم مقدار دقیق و تقریبی معادله (۱.۵) را با $\alpha = 1$ ، $\sigma = 1$ و $\beta = 0$ که به کمک تابع پایه‌ای شعاعی چنددرجی و کرانک - نیکلسون به دست آمده است با $t = 5$.

جدول ۲.۵: خطای RMS

زمان	۰.۵	۱	۱.۵	۲	۵
خطای روش کرانک - نیکلسون	$2.98e-4$	$6.06e-4$	$7.73e-4$	$1.07e-3$	$1.22e-3$

۳.۱.۵ حل معادلات با روش رونگ - کوتا و توابع پایه‌ای شعاعی

برای حل معادله (۹.۵) از توابع پایه‌ای شعاعی کمک می‌گیریم.

$$u_t + uu_x - \mu u_{xxt} = 0, \quad x \in [a, b], \quad t > 0. \quad (9.5)$$

در معادله (۱۰.۵) $\phi(x_i, x_j)$ توابع پایه‌ای شعاعی و $w^{(j)}$ ها وزن‌های توابع پایه‌ای شعاعی هستند.

$$u(x_i, t) = \sum_{j=1}^N w^{(j)}(t) \phi(x_i, x_j), \quad 1 \leq i \leq N \quad (10.5)$$

فرم ماتریسی معادله (۱۰.۵) به صورت زیر می‌باشد:

$$u = Aw, \quad (11.5)$$

که A ماتریس تشکیل شده از توابع پایه‌ای شعاعی می‌باشد.

در معادله (۹.۵)، u_x با مشتق‌گیری از تابع پایه‌ای شعاعی که در فصل دوم توضیح داده‌ایم به دست می‌آید و می‌توان به صورت زیر نوشته شود:

$$u_x = A_x w, \quad (12.5)$$

با در نظر گرفتن $w = A^{-1}u$ که از معادله (۱۱.۵) به دست می‌آید، معادله را می‌توان به صورت زیر بنویسیم:

$$u_x = A_x A^{-1} u = D_x u, \quad (13.5)$$

که $D_x = A_x A^{-1}$ ماتریس مشتق گیری است. لازم به ذکر است ماتریس مشتق گیری وابسته به وارون پذیری ماتریس A است. همانطور که قبلا هم توضیح داده ایم ماتریس A وارون پذیر می باشد.

$$u_{xx} = A_{xx} A^{-1} u = D_{xx} u, \quad (14.5)$$

بطور مشابه $D_{xx} = A_{xx} A^{-1}$ که ورودی ماتریس A_{xx} ، $1 \leq i, j \leq N$ ، یعنی $\frac{d^2}{dx^2} \phi(x, x_i)_{x=x_i}$ مشتق گیری دوم از توابع پایه ای شعاعی می باشد. بطور مشابه ما می توانیم ماتریس مشتق گیری مراتب بالاتر را محاسبه کنیم. با بکاربردن ماتریس دیفرانسیل بالا معادله متناظر با معادله (۹.۵) به صورت زیر می باشد:

$$u' + u(D_x u) - \mu D_{xx} u' = 0, \quad (15.5)$$

این معادله را می توان به صورت زیر بنویسیم:

$$(I - \mu D_{xx}) u' = -(u(D_x u)), \quad (16.5)$$

ماتریس $B = (I - \mu D_{xx})$ وابسته به t می باشد.

$$u' = -B^{-1}(\text{diag}(u) D_x), \quad (17.5)$$

شکل برداری معادله (۱۷.۵) به صورت زیر می باشد:

$$u' = F(u), \quad (18.5)$$

معادله ای که بدست آمده برحسب t می باشد، این معادله را با روش رونگ - کوتا حل خواهیم کرد. شکل برداری روش رونگ - کوتا برای استفاده در معادله (۱۸.۵) به صورت زیر می باشد:

$$\begin{cases} r_1 = F(u^n), \\ r_2 = F(u + \frac{h}{2} r_1), \\ r_3 = F(u + \frac{h}{4} r_2), \\ r_4 = F(u + h r_3), \\ u^{n+1} = u^n + \frac{1}{6}(r_1 + 2r_2 + 2r_3 + r_4). \end{cases}$$

۲.۵ نتیجه گیری و پیشنهادات

در فصل دوم به بررسی درونیایی توابع با کمک توابع پایه ای شعاعی پرداخته ایم. سپس از طریق درونیایی به کمک این توابع، تقریبی برای مشتق توابع با دو روش مستقیم و غیرمستقیم بیان کرده ایم، دیدیم که هر دو روش قادرند نتایج خوبی را ارائه دهند. از بین توابع پایه ای شعاعی بررسی شده، تابع پایه ای شعاعی چندربعی از نظر دقت بهترین عملکرد را در هر دو روش مستقیم و غیرمستقیم نسبت به معکوس چندربعی و گاوسی، ارائه داده است. نتایج عددی نشان می دهد روش غیرمستقیم در تقریب تابع، بخصوص مشتقاتش دقت بالاتری نسبت به روش مستقیم دارد و روش غیرمستقیم نوع دوم نسبت به روش مستقیم نوع اول دقیق تر می باشد.

در فصل سوم دستگاه معین مثبت به دست آمده از توابع پایه ای شعاعی در درونیایی توابع را، ابتدا به کمک روش های تجزیه دولیتل، تجزیه چولسکی و LDL^T حل کرده ایم، دیدیم که گاهی حل این توابع با تجزیه چولسکی امکان پذیر نمی باشد به همین دلیل به کمک روش دیگر به نام روش افزایش قطر این کار انجام شد، علاوه بر اینکه تجزیه این ماتریس با روش RLL^T امکان پذیر می باشد بکارگیری روش منظم ساز

در حل دستگاه حتی در روش LDL^T که با $RLDL^T$ نام‌گذاری می‌شود نتایج بهتری، نسبت به قبل ارائه داشته است.

در فصل چهارم روش گرادیان مزدوج در حل دستگاه‌های ایجاد شده از توابع پایه‌ای شعاعی بکار رفته است، نتایج نشان داده است بکارگیری این روش خطای قابل اغماضی دارد و برای دستگاه‌های نسبتاً بزرگ در مقایسه با روش چولسکی که برای حل دستگاه‌های متقارن معین مثبت استفاده می‌شود مفید می‌باشد. در فصل پنجم دو روش بدون شبکه برای حل معادلات دیفرانسیل وابسته به زمان با طرح کرانک - نیکلسون و روش رونگ - کوتا با بکار بردن توابع پایه‌ای شعاعی مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج عددی نشان داده است که هر دو روش برای حل PDE های غیرخطی وابسته به زمان قابل قبول می‌باشند.

• پیشنهادات

(الف) حل معادلات جبری جزئی به کمک توابع پایه‌ای شعاعی و مقایسه آن با روش‌های دیگر در حل این معادلات.

(ب) حل معادلات جبری جزئی با در نظر گرفتن توابع پایه‌ای شعاعی چندربعی، معکوس چندربعی و گاوسی و مقایسه آن با یکدیگر.

پیوست آ

کد *matlab*

آ.۱ کد *matlab* فصل سوم

نمودار اول:

```
N = 55; M = 175;
xc = linspace(-1,1,N);
x = linspace(-1,1,M);
f = exp{(sin{(pi xc)}});
fExact = exp{(sin{(pi x)}});
rs = zeros{(N,N)};
for i=1:N
for j=1:N
rs{(i,j)}= abs{(xc{(i)} - xc{(j)}});
end
end
re = zeros{(N,N)};
for i=1:M
for j=1:N
re{(i,j)} = abs{(x{(i)} - xc{(j)}});
end
end
h = abs{(xc{(2)}-xc{(1)}});
shape =3:-0.01:0.2;
```

```

bnd = zeros{(1,length{(shape)}});
for i = 1:length{(shape)};
c = shape(i);
mqs =1/{(1 + rs^2c^2)};
B = mqs
mqe=1/{(1 + re^2c^2)};
H = mqe
NA=size{(B,2)}
[NB,NB]=size{(f)};
AB=[B f]
E=eye{(NA,NA)};
L=eye{(NA,NA)};
for o=1:NA-1
    for z=o+1:NA
        if ne{(AB{(o,o)}, 0)}
            E{(z,o)}= -AB{(z,o)}/AB{(o,o)};
            AB = E*AB;
            L=L*inv{(E)};
            E=eye{(NA,NA)};
        else
            error{('algorithm needs pivoting')}
        end
    end
end
U=AB{(:,1:NA)};
lambda ={(U\{(L\f)})};
fApprox = H*lambda;
maxError{(i) }= norm{(fApprox - fExact)};
end
semilogy{(shape,maxError,'b--')}

```

.....
نمودار دوم:

N = 55; M = 175;

```

xc = linspace{(-1,1,N)};
x = linspace{(-1,1,M)};
f = exp{(sin{(pi*xc)})};
fExact = exp{(sin{(pi*x)})};
rs = zeros{(N,N)};
for i=1:N
for j=1:N
rs{(i,j)} = abs{(xc{(i)} - xc{(j)})};
end
end
re = zeros{(N,N)};
for i=1:M
for j=1:N
re{(i,j)} = abs{(x{(i)} - xc{(j)})};
end
end
h = abs{(xc{(2)}-xc{(1)})};
shape =3:-.01:0.2;
bnd = zeros{(1,length{(shape)})};
for i = 1:length{(shape)};
c = shape{(i)};
mqs =1/{(1 + rs^2*c^2)};
B = mqs
mqe=1/{(1 + re^2*c^2)};
H = mqe
n=size{(B,1)};
L=zeros{(n,n)};
for j=1:n,
if{ (j > 1)},
v{(1:j-1)}=L{(j,1:j-1)}d{(1:j-1)};
v{(j)}=B{(j,j)}-L{(j,1:j-1)}*v{(1:j-1)};
d{(j)}=v{(j)};
if {(j < n)},
L{(j+1:n,j)}={(B{(j+1:n,j)}-L{(j+1:n,1:j-1)}*v{(1:j-1)'})}/v{(j)};

```

```

end;
else
v{1}=B{1,1};
d{1}=v{1};
L{2:n,1}=B{2:n,1}/v{1};
end;
end;
D=diag{d};
L=L+eye{n};
lambda=L'\{D\{L\f}\};
fApprox = H*lambda;
maxError{i} = norm{fApprox - fExact};
end
semilogy{shape,maxError,'b--'};

```

.....
نمودار سوم:

```

N = 55; M = 175;
xc = linspace{-1,1,N};
x = linspace{-1,1,M};
f = exp{sin{pi xc}};
fExact = exp{sin{pi x}};
rs = zeros{N,N};
for i=1:N
for j=1:N
rs{i,j} = abs{xc{i} - xc{j}};
end
end
re = zeros{N,N};
for i=1:M
for j=1:N
re{i,j} = abs{x{i} - xc{j}};
end
end
h = abs{xc{2}-xc{1}};

```

```

shape =3:-.01:0.2;
bnd = zeros{(1,length{(shape)})};
for i = 1:length{(shape)};
c = shape{(i)};
mqs =1/{(1 + rs^2*c^2)};
B = mqs
mqe=1/{(1 + re^2*c^2)};
H = mqe
NA=size{(B,2)}
{[NB,NB]}=size{(f)};
AB={[B f]}
E=eye{(NA,NA)};
L=eye{(NA,NA)};
for o=1:NA-1
for z=o+1:NA
if ne{(AB{(o,o)}, 0)}
E{(z,o)}= -AB{(z,o)}/AB{(o,o)};
AB = E*AB;
L=L*inv{(E)};
E=eye{(NA,NA)};
else
error{('algorithm needs pivoting')}
end
end
end
U=AB{(:,1:NA)};
lambda ={(U\{(L\f)})};
bnd{(i)} = cond{(B)};
fApprox = H*lambda;
maxError(i) = norm(fApprox - fExact);
end

```

نمودار

چهارم:

```
N = 55; M = 175;xc = linspace{(-1,1,N)};
```

```

x = linspace{(-1,1,M)};
f = exp{(sin{(pi*xc)}});
fExact = exp{(sin{(pi*x)}});
rs = zeros{(N,N)};
for i=1:N
for j=1:N
rs{(i,j)}= abs{(xc{(i)} - xc{(j)}});
end\q
end
re = zeros{(N,N)};
for i=1:M
for j=1:N
re{(i,j)} = abs{(x(i) - xc{(j)}});
end
end
h = abs{(xc{(2)}-xc{(1)}});
shape =3:-.01:0.2;
bnd = zeros{(1,length{(shape)}});
for i = 1:length(shape);
c = shape{(i)};
mqs =1/{(1 + rs^2c^2)};
B = mqs
mqe=1/{(1 + re.^2c^2)};
H = mqe
mu = 5e-15;
N = length{(f)};
B{(1:N+1:end)} = B{(1:N+1:end)] + mu;
n=size{(B,1)};
L=zeros{(n,n)};
for j=1:n,
if{ (j > 1)},
v{(1:j-1)}=L{(j,1:j-1)}*d{(1:j-1)};
v{(j)}=B{(j,j)}-L{(j,1:j-1)}v{(1:j-1)};
d{(j)}=v{(j)};

```



```

if {(j < n)},
L{(j+1:n,j)}={B{(j+1:n,j)}-L{(j+1:n,1:j-1)}v{(1:j-1)}'}/v{(j)};
end;
else
v{(1)}=B{(1,1)};
d{(1)}=v{(1)};
L{(2:n,1)}=B{(2:n,1)}/v{(1)};
end;
end;
D=diag{(d)};
L=L+eye{(n)};
lambda=L'\{D\{(L\ f)}\});
fApprox = H*lambda;
maxError(i) = norm{(fApprox - fExact)};
end

```

.....
نمودار پنجم:

```

N = 55; M = 175;
xc = linspace(-1,1,N)';
x = linspace(-1,1,M)';
f = exp(sin(pi*xc));
fExact = exp(sin(pi*x));
rs = zeros(N,N);
for i=1:N
for j=1:N
rs(i,j) = abs(xc(i) - xc(j));
end
end
re = zeros(N,N);
for i=1:M
for j=1:N
re(i,j) = abs(x(i) - xc(j));
end

```

```

end
h = abs(xc(2)-xc(1));
shape =3:-.01:0.2;
for i = 1:length(shape);
c = shape(i);
mqs =1./ (1 + rs.^2.*c^2);
B = mqs
mqe=1./(1 + re.^2.*c^2);
H = mqe
mu = 5e-15;
N = length(f);
B(1:N+1:end) = B(1:N+1:end) + mu;
L = chol(B,'lower');
z = L\f;
lambda = L'\z;
fApprox = H*lambda;
maxError(i) = norm(fApprox - fExact,inf);
end
semilogy(shape,maxError,'b')
xlabel '\epsilon', ylabel '|error|'
axis([0 3 10e-11 1])

```

نمودار

ششم:

```

N = 55; M = 175;
xc = linspace{(-1,1,N)};
x = linspace{(-1,1,M)};
f = exp{(sin{(pi*xc)}});
fExact = exp{(sin{(pi*x)}});
rs = zeros{(N,N)};
for i=1:N
for j=1:N
rs{(i,j)} = abs{(xc{(i)} - xc{(j)}});
end
end

```

```

re = zeros{(N,N)};
for i=1:M
for j=1:N
re{(i,j)}= abs{(x{(i)} - xc{(j)})});
end
end
h = abs{(xc{(2)}-xc{(1)})});
shape =3:-.01:0.2;
bnd = zeros{(1,length{(shape)})});
for i = 1:length{(shape)};
c = shape{(i)};
mqs =1/ {(1 + rs^2*c^2)};
B = mqs
mqe=1/{(1 + re.^2*c^2)};
H =mqe
mu = 5e-15;
N = length{(f)};
B{(1:N+1:end) }= B{(1:N+1:end) }+ mu;
L = chol{(B,'lower')}; z = L\f; lambda = L'\z;
bnd{(i)} = cond{(B)}; fApprox = H*lambda;
maxError{(i) }= norm{(fApprox - fExact,inf)};
end
semilogy{(shape,bnd,'g')}

```


مراجع

- [1] A. Alipanah, S. Esmaeili, *Nurmerical Solutionof the Two-Dimensional Fredholm Integral Equations Using Gaussian Radial Basis Function*, J. Comput. Appl. Math.
- [2] R. Beatson, G. Newsam, *Fast evaluation of radial basis functions: Moment-based methods*, J. Scien. Comput, 19(5):1428–1449, 1998.
- [3] R. K. Beatson, W. A. Light, and S. Billings, *Fast solution of the radial basis function interpolation equations: Domain decomposition methods*, J. Scien. Comput, 22(5):1717–1740, 2000.
- [4] J. Biazar, M. Hosami, *Two Efficient Approaches Based on Radial Basis Function to Nonlinear Time-dependent Partial Differential Equations*, J. Math. Comput. Sci 9(2014)1-11.
- [5] D. Biswa Nath, *Numerical Linear Algebra and Applications*, 1995.
- [6] E. Caraba, *The Matrix-Vector Products in The Conjugate Gradient Method* , Dec 15, 2008.
- [7] M. Dehghan, M. Abbaszadeh, *The Numerical Solution of Nonlinear High Dimensional Generalized Benjamin-Bona-Mahony-Burgers Equation via The Meshless Method of Radial Basis Functions*, Comput. Math. Appli, 68(2014)212-237.
- [8] M. D. Buhmann, *Radial Basis Function: Theory and Implementations*, in: *Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics*, vol. 12, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
- [9] T. A. Driscoll, B. Fornberg, *Interpolation in the limit of increasingly flat radial basis functions*, Comput. Math. Appli, 43:413–422, 2002.
- [10] N. M. Duy, T. T.Cong, *Approximation of Function and Its Derivatives using Radial Basis Function Networks*, Appl. Math. Mode. 27(2003) 197-220.
- [11] M. Dehghan, R. Salehi, *The Numerical Solution of The Non-linear Integrodifferential Equations Based on The Meshless Method*, J. Comput. Appl. Math. 236(2012)2367-2377.

-
- [12] I.Dag, Y. Dereli, *Numerical Solutions of Kdv Equation using Radial Basis Functions*, Appl. Math .Mod. 32(2008) 535-546.
- [13] B.Fornberg, N. Flyer, *Solving PDEs with Radial Basis Functions*, September 22, 2014.
- [14] j. Franke, *Scattered data interpolation: tests of some methods*, Math. Comput. 38 (157) (1982) 181-200.
- [15] E. Larsson, B. Fornberg, *A Numerical Study of Radial Basis Function Based Solution Methods for Elliptic PDEs*, Comput. Math. Appl. 46(2003)891-902.
- [16] A.Quarterni, R. Sacco and F. Saleri, *Numerical Mathematics*, 2000.
- [17] R. Schaback, *A Practical Guide to Radial Basis Functions*, April 19, 2007.
- [18] S. A.Sarra, *Regularized Symmetric Positive Definite Matrix Factorizations For Linear Systems Arising From RBF Interpolation and Differentiation*, Eng. Anal. Bound. Elem. 44(2014) 76-86.
- [19] M. Tatari, M. Dehghan, *A Method for Solving Partial Differential Equations via Radial Basis Function: Application to the Heat Equation*, Eng. Anal. Bound. Elem. 34(2010) 206-212.
- [20] M. Uddin, *RBF-PS Scheme for Solving the Equal Width Equation*, Appl. Math .Comp. 222(2013) 619-631.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Euclidean	اقلیدسی
Increase	افزایش
Algorithm	الگوریتم
P- dimensional	P - بعدی
Upper Triangular	بالا مثلثی
Lower Triangular	پایین مثلثی
Shape Parameter	پارامتر شکل
Cholesky Factorization	تجزیه چولسکی
Regularization Techniq	تکنیک منظم ساز
Approximation	تقریب
LU Factorization	تجزیه دولیتل
Singular Value Decomposition	تجزیه مقدار تکین
Flat	تخت، مسطح
Radial Basis Function	توابع پایه‌ای شعاعی
Back Substitution	جایگزینی پسرو
Forward Elimination	حذفی پیشرو
Characteristic Polynomial	چندجمله ای مشخصه
Multiquadric	چندربعی
Invers Multiquadric	چندربعی معکوس
Direct Method	روش مستقیم
Meshfree Method	روش بدون شبکه
Gaussian Elimination Method	روش حذفی گاوس
Relative Error	خطای نسبی
Interpolation	درونیایی
Scattered Data	داده‌های پراکنده

Global	سراسری
Spectral Radius	شعاع طیفی
Spectrum	طیف
Condition Number	عدد شرطی
Flop	عمل ممیز شناور
Decrease	کاهش
Gaussian	گاس
Derivative	مشتق
Set	مجموعه
Eigenvalue and Eigenvector	مقدار ویژه و بردار ویژه
Stopping Criterion	معیار توقف
Ill Conditioned Problem	مساله بدوضع
Ill Conditioned Problem	مساله خوش وضع
Nonsingular Matrix	ماتریس نامنفرد
Complete Pivoting	محورگیری کامل
Partial Pivoting	محورگیری جزئی
Positive Definite	معین مثبت
Symmetric	متقارن
Norm of Matrix	نرم ماتریس
Weight	وزن
Invertible	وارون پذیر
One- Dimensional	یک بعدی

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

CG Method	روش گرادیان مزدوج
Crank-Nicolson	کرانک - نیکلسون
diagonal	قطری
Equations	معادلات
Euclidean	اقلیدسی
Eigenvalue	مقدار ویژه
Eigenvector	بردار ویژه
Gaussian	گاوسی
Inverse Multiquadric	معکوس چندربعی
Iteration Method	روش تکراری
Ill-Conditioned Problem	مساله بدوضع
Iterative Method	روش تکراری
Linear Composition	ترکیب خطی
Multiquadric	چندربعی
Matrix	ماتریس
Mapping	نگاشت
Norm	نرم
Square Matrix	ماتریس مربعی
Singular Value Decomposition	تجزیه مقدار تکین
Symmetric Matrix	ماتریس متقارن
Symmetric	متقارن
Sparse Matrix	ماتریس تنک
Positive Definite	معین مثبت

Abstract

We introduced the radial basis functions first and interpolation of functions by using Radial basis functions were explained. By interpolation of this function, derivation of functions were determined by using direct and indirect methods. Then the device in interpolation of radial function that was created by using direct factorization methods of LU, LLT and LDLT was solved. Cholesky factorization was not a good way of solving the problem because of some reasons, so we used the increase of diagonal and Rayleigh method. In this way the Cholesky factorization was usable and LDLT has better results and the created graph has less vacillations. In another part, the device that was not usable by stochastic method because of not being NSPD so, another method. that is called conjugate gradient method has been used to solve the problem. At the end of solving non-linear differential equations depending on time, by changing to linear and solved by radial basis functions network method.

Keywords: radial basis functions, interpolation function , solving device factorization methods , solving differential equations



Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

**Regularized symmetric positive definite
matrix factorizations for solving differential
equations with radial basis functions**

Sedigheh Ahmadi

Supervisor

Dr. Mahdi Ghovatmand

Advisor

Dr. Hojjat Ahsani Tehrani

January 2016