

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

پایان نامه کارشناسی ارشد

بررسی مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی-کسری و معکوس آن

محمد محمدحانی

استاد راهنما

دکتر جعفر فتحعلی

استاد مشاور

دکتر مهرداد غزنوی

بهمن ۱۳۹۴

تقدیم بہ:

این پایان نامہ را کہ حاصل زحمات فراوان اساتید محترم
و ایجناب می باشد را با کمال افتخار بہ ساحت مقدس آقا
امام زمان (ارواحنا له الفدا) و رہبر معظم انقلاب (قدس
سرہ) و ہمہ می شہدای راہ علم و وطن و تمامی صاحبان علم
و دوست داران دانش بویژہ، ہمسر عزیزم و پدر و مادر کرامی ام
کہ حامیان خاص من بودہ اند، تقدیم می نمایم.

سپاس‌گزاری...

با تقدیر و تشکر فراوان از اساتید گرامی در این دوره‌ی تحصیلی و تمامی دوره‌های گذشته، از استاد گرانقدر آقای دکتر فتحعلی و آقای دکتر غزنوی که با راهنمایی‌های استادانه مرا مورد لطف و عنایت خود قرار دادند تا این کار علمی گردآوری و تدوین گردد، کمال قدردانی و تشکر را دارم و از خداوند منان توفیقات روز افزون را برای تمامی آنها در همه‌ی مراحل زندگیشان خواستارم.

محمد محمدخانی
بهمن ۱۳۹۴

تعمدنامه

اینجانب محمد محمدخانی دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی دانشکده علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان بررسی مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی-کسری و معکوس آن، تحت راهنمایی دکتر جعفر فتحعلی متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تاکنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “دانشگاه صنعتی شاهرود” یا “Shahrood University of Technology” به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

محمد محمدخانی
بهمن ۱۳۹۴

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در ابتدای پایان نامه به معرفی برنامه‌ریزی خطی-کسری پرداخته می‌شود و دوروش چارنز کوپر و دینکل بیچ جهت خطی سازی این مسئله بیان می‌گردد.

تمرکز ما بیشتر بر روی معکوس مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی-کسری می‌باشد، منظور از مسئله‌ی معکوس این است که اگر x° یک جواب شدنی برای مسئله‌ی مفروض باشد، با ایجاد تغییراتی در تابع هدف و یا محدودیت‌های مسئله و یا هر دو به مسئله‌ای دست پیدا کنیم که x° در آن بهینه باشد. نخست مسئله‌ی معکوس برنامه‌ریزی خطی مورد مطالعه قرار می‌گیرد سپس به روش‌های موجود برای معکوس مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی-کسری پرداخته می‌شود و دو روش جدید برای معکوس مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی-کسری ارائه می‌گردد. در پایان فرضیه‌ای بیان می‌گردد که عرصه را برای توسعه و تحقیقات بیشتر این مطلب، برای علاقه‌مندان باز می‌گذارد.

کلیدواژه: خطی-کسری، تابع هدف، بردار سمت راست، تبدیل معکوس، بهینه سازی، مسئله معکوس.

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

1. Mohamadkhani. M & Fathali. J, (2015), *An inverse linear fractional modeling*, 46th Annual Iranian Mathematics Conference, 591-595, Yazd.

فهرست مطالب

۱	لیست تصاویر
۳	۱ برنامه‌ریزی خطی-کسری
۳	۱.۱ مقدمه
۳	۲.۱ تاریخچه
۴	۳.۱ معرفی برنامه‌ریزی خطی-کسری
۵	۴.۱ روابط برنامه‌ریزی خطی-کسری با برنامه‌ریزی خطی
۷	۵.۱ شکل‌های اصلی برنامه‌ریزی خطی-کسری
۸	۶.۱ حل مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی-کسری با دو متغیر به روش ترسیمی (روش هندسی)
۸	۱.۶.۱ جواب بهینه منحصر به فرد
۱۰	۲.۶.۱ جواب‌های بهینه‌ی چندگانه (دگرین)
۱۱	۳.۶.۱ جواب‌های آمیخته (مخلوط)
۱۱	۴.۶.۱ جواب نامتناهی (جواب بی‌نهایت)
۱۲	۷.۱ مثال عددی
۱۵	۲ روش‌های تبدیل مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی-کسری به مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی
۱۵	۱.۲ روش چارنز-کوپر
۱۹	۲.۲ الگوریتم دینکل‌بیچ
۲۰	۳.۲ مثال عددی
۲۳	۳ معکوس مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی
۲۳	۱.۳ معکوس مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی با تغییر ضرایب تابع هدف
۲۸	۲.۳ معکوس مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی با تغییر ضرایب فنی (c) و بردار سمت راست (b)
۲۹	۱.۲.۳ مدل سازی مسئله
۳۰	۲.۲.۳ فرمول‌بندی بصورت یک برنامه‌ریزی ریاضی با قیدهای تعادل
۳۰	۳.۲.۳ بهینگی توسط مخروط مماس
۳۳	۴.۲.۳ یک فرمول برای مخروط مماس

۳۶		مثال عددی	۳.۳
۳۹		معکوس یک مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی-کسری	۴
۳۹		روش استفاده از خطی سازی تابع کسری	۱.۴
۴۳		روش دوگان	۲.۴
۴۶		مثال عددی	۳.۴
۵۱		دو روش جدید برای مسئله‌ی معکوس برنامه‌ریزی خطی-کسری	۵
۵۱		معکوس مسئله برنامه ریزی خطی-کسری فقط با تبدیل پارامتر c به c'	۱.۵
۵۵		معکوس مسئله برنامه ریزی خطی-کسری با تغییر پارامترهای c و d و b	۲.۵
۶۰		مثال عددی	۳.۵
۶۳		مراجع	
۶۵		واژه‌نامه فارسی به انگلیسی	
۶۷		واژه‌نامه انگلیسی به فارسی	

لیست تصاویر

۹	تنها راس بهینه	۱۰۱
۱۰	جواب‌های بهینه چندگانه	۲۰۱
۱۱	جواب‌های آمیخته	۳۰۱
۱۲	جواب نامتناهی	۴۰۱
۱۳	شکل مثال ۱.۷.۱	۵۰۱
۱۴	شکل مثال ۲.۷.۱	۶۰۱
۳۴	شکل مثال ۱۲.۲.۳	۱۰۳
۳۷	شکل مثال ۱۰.۳.۳	۲۰۳

فصل ۱

برنامه‌ریزی خطی-کسری

۱.۱ مقدمه

مطالب این بخش برگرفته از کتاب برنامه‌ریزی خطی-کسری، قضايا، روش‌ها، کاربردها و نرم افزار [۳] می‌باشد.

مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی-کسری، مسئله‌ای است که از یک تابع هدف و مجموعه‌ی محدودیت‌ها تشکیل شده است که در آن تابع هدف به صورت یک تابع کسری می‌باشد که صورت و مخرج آن یک تابع خطی است و محدودیت‌ها نیز توابع خطی هستند. مقدار تابع هدف را با توجه به محدودیت‌ها بهینه‌سازی می‌نمایند و منظور از بهینه‌سازی معکوس این است که اگر x° یک جواب شدنی برای مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی و یا خطی-کسری باشد، با ایجاد تغییراتی در تابع هدف و یا محدودیت‌ها و یا هر دو به مسئله‌ای دست پیدا می‌کنیم که x° در آن بهینه می‌باشد.

۲.۱ تاریخچه

بارتن و توایت^۱ [۴]، نخستین بار معکوس مسئله کوتاه‌ترین مسیر در لرزه نگاری جهت پیش‌بینی زلزله را مورد بررسی قرار دادند. از آن به بعد افراد زیادی روی بهینه سازی معکوس و بسیاری از مسائل معکوس کار کردند و برنامه‌های کاربردی را ارائه نمودند.

ژانگ و لیو^۲ [۲۰] در ابتدا تعدادی از مسائل برنامه ریزی خطی معکوس را جمع آوری کردند و علاوه بر آن معکوس مسائل برنامه ریزی را در [۲۱] مورد بررسی قرار دادند.

هانگ و لیو^۳ [۱۱] مسئله‌ی معکوس برنامه‌ریزی خطی و کاربردهای آن را مورد مطالعه قرار دادند. آهوجا و اورلین^۴ [۱] مسائل مختلفی را در عرصه بهینه‌سازی معکوس آماده کردند و چندین کاربرد در

^۱Burton & Toint

^۲Zhang & Liu

^۳Huang & Liu

^۴Ahuja & Orlin

مسائل جریان شبکه با دستگاه یکه را تلفیق نمودند و درستی برهان‌های ترکیبی را توسعه دادند .
 امین و امروزنژاد [۲] کاربردهای مسئلهی معکوس را مورد بررسی قرار دادند .
 ژانگ و ژانگ [۲۲] روی مسئلهی برنامه‌ریزی درجه دوم کارکردند . وانگ [۱۹] یک الگوریتم صفحه
 برشی برای مسئلهی برنامه‌ریزی عدد صحیح ارائه داد . هلادیک [۱۰] نخستین بار مسئلهی معکوس
 را برای برنامه‌ریزی خطی-کسری در حالت کلی مورد بررسی قرار داد. جین و آریا [۱۲] تعدادی منابع
 را در بخش مسئلهی معکوس برنامه‌ریزی خطی-کسری آماده کردند .
 باجانیلو [۳] کتاب برنامه‌ریزی خطی-کسری تحت عنوان، قضایا، روش‌ها، کاربردها و نرم افزار را
 تالیف کرد.

چارنز-کوپر [۷]، اسوارپ [۱۱]، ناگاناسان و ساک سیول [۱۲]، چادها [۱۳]، [۵]،
 جین و منگال [۱۴]، [۱۳]، چادها و چادها [۱۵]، [۶]، جین و منگال و پریهار [۱۶] [۱۵] و بسیاری از محققان
 روش‌های مختلفی برای حل مسئلهی برنامه‌ریزی خطی-کسری ارائه نمودند.

۳.۱ معرفی برنامه‌ریزی خطی-کسری

مسئله رایج برنامه‌ریزی خطی-کسری بصورت زیر فرمول‌بندی می‌شود:
 فرض کنید تابع هدف بصورت زیر داده شده باشد.

$$Q(x) = \frac{P(x)}{D(x)} = \frac{\sum_{j=1}^n p_j x_j + p_0}{\sum_{j=1}^n d_j x_j + d_0}. \quad (1.1)$$

حال باید تابع هدف را تحت شرایط زیر بهینه کنیم:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, & i = 1, 2, \dots, m_1, \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, & i = m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, m_2, \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, & i = m_2 + 1, m_2 + 2, \dots, m. \end{cases} \quad (2.1)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n_1. \quad (3.1)$$

بطوریکه $m_1 \leq m_2 \leq m$ و $n_1 \leq n$. آنچه که در ادامه‌ی این پایان نامه گفته می‌شود فرض بر این
 است که:

$$\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in S, \quad D(x) \neq 0,$$

که در آن S نشان دهنده‌ی یک مجموعه از جواب‌های شدنی است که از قیود (۲.۱) و (۳.۱) بدست
 می‌آید. از آنجائیکه $\forall x \in S, D(x) \neq 0$ ، بدون کاستن از کلیت مسئله می‌توانیم فرض کنیم

$$\forall x \in S, \quad D(x) > 0. \quad (4.1)$$

^۵Zhang & Zhang

^۶Wang

^۷Hladik

^۸Jain & Arya

^۹Bajanilov

^{۱۰}Charnes-Cooper

^{۱۱}Swarup

^{۱۲}Naganathan & Sakthivel

^{۱۳}Chadha

^{۱۴}Jain & Mangal

^{۱۵}Chadha & Chadha

^{۱۶}Jain & Mangal & Parihar

در حالتی که $D(x) < 0$ می‌توانیم صورت کسر $P(x)$ و مخرج کسر $D(x)$ از تابع هدف $Q(x)$ را در یک (۱-) ضرب کنیم.

در ادامه‌ی این پایان نامه، برنامه‌ریزی خطی-کسری را در نظر می‌گیریم که در شرط (۴.۱) صدق نماید. بنابراین فرض می‌کنیم که همه‌ی قیود سیستم (۲.۱) مستقل خطی‌اند و رتبه‌ی ماتریس $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ برابر با m است.

بطور خلاصه هدفمان در برنامه‌ریزی خطی-کسری یافتن متغیرهای تصمیم بردار $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ است بطوریکه:

۱. مقدار تابع هدف $Q(x)$ بیشینه (کمینه) شود.

۲. در مجموعه‌ای از قیود سیستم (۲.۱) و محدودیت (۳.۱) صدق نماید.

تعریف ۱.۳.۱. اگر بردار $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ در محدودیت‌های (۲.۱) و (۳.۱) صدق کند، به بردار x یک جواب شدنی برای مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی-کسری (۳.۱)-(۱.۱) می‌گوییم.

تعریف ۲.۳.۱. اگر بردار $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ یک جواب شدنی بیشینه (کمینه) برای مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی-کسری (۳.۱)-(۱.۱) بر روی مجموعه‌ی شدنی S باشد، بردار x را یک جواب بهینه برای مسئله‌ی (۳.۱)-(۱.۱) می‌گوییم.

تعریف ۳.۳.۱. اگر ناحیه‌ی شدنی S تهی نباشد یعنی $S \neq \emptyset$ و تابع هدف $Q(x)$ روی S دارای کران متناهی بالا (پائین) باشد می‌گوئیم مسئله‌ی ماکزیم سازی (مینیم سازی) برنامه‌ریزی خطی-کسری حل‌پذیر است.

تعریف ۴.۳.۱. اگر ناحیه‌ی شدنی تهی باشد یعنی $S = \emptyset$ ، می‌گوئیم مسئله برنامه‌ریزی خطی-کسری نشدنی است.

تعریف ۵.۳.۱. اگر تابع هدف $Q(x)$ در یک مسئله‌ی ماکزیم‌سازی (مینیم‌سازی)، کران متناهی بالا (پائین) نداشته باشد، می‌گوئیم مسئله بیکران است.

۴.۱ روابط برنامه‌ریزی خطی-کسری با برنامه‌ریزی خطی

واضح است که اگر $d_j = 0$ برای $j = 1, 2, \dots, n$ و $d_0 = 1$ آنگاه مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی-کسری (۳.۱)-(۱.۱) به مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی تبدیل می‌شود. این یک دلیل است برای اینکه چرا می‌گوئیم مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی-کسری (۳.۱)-(۱.۱) حالت کلی‌تری از یک مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی است. حالات خاصی که یک مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی-کسری به یک مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی تبدیل می‌شود:

۱. اگر $d_j = 0$ برای $j = 1, 2, \dots, n$ و $d_0 \neq 0$ آنگاه تابع هدف $Q(x)$ به یک مسئله‌ی خطی تبدیل می‌شود:

$$Q(x) = \sum_{j=1}^n \frac{p_j}{d_0} x_j + \frac{p_0}{d_0} = \frac{P(x)}{d_0}$$

۲. اگر $p_j = 0$ برای $j = 1, 2, \dots, n$ آنگاه تابع هدف بصورت زیر تبدیل می‌شود:

$$Q(x) = \frac{P(x)}{D(x)} = \frac{p_0}{\sum_{j=1}^n d_j x_j + d_0}$$

اگر $p_0 > 0$ آنگاه $\max Q(x) = \min D(x)$

اگر $p_0 < 0$ آنگاه $\max Q(x) = \max D(x)$

۳. اگر بردارهای $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ و $D = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ وابسته‌ی خطی باشند یعنی $0 \neq \mu$ وجود داشته باشد بطوریکه $P = \mu D$ آنگاه تابع هدف بصورت زیر تبدیل می‌شود:

$$Q(x) = \frac{P(x)}{D(x)} = \frac{\sum_{j=1}^n \mu d_j x_j + p_0}{\sum_{j=1}^n d_j x_j + d_0} = \frac{\sum_{j=1}^n \mu d_j x_j + p_0 + \mu d_0 - \mu d_0}{\sum_{j=1}^n d_j x_j + d_0},$$

$$\frac{\mu \left(\sum_{j=1}^n d_j x_j + d_0 \right) + p_0 - \mu d_0}{\sum_{j=1}^n d_j x_j + d_0} = \mu + \frac{p_0 - \mu d_0}{\sum_{j=1}^n d_j x_j + d_0}. \quad (5.1)$$

اگر $p_0 - \mu d_0 > 0$ آنگاه $\max Q(x) = \min D(x)$

اگر $p_0 - \mu d_0 < 0$ آنگاه $\max Q(x) = \max D(x)$

اگر $p_0 - \mu d_0 = 0$ آنگاه $Q(x) = \mu$ که این یعنی $Q(x)$ یک مقدار ثابت است به ازای هر $x \in S$

در این پایان نامه از حالت‌های بدیهی زیر صرف نظر می‌کنیم، زیرا مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی-کسری به مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی تبدیل می‌شود.

۰.۱

$$P(x) = \text{Const}, \quad \forall x \in S$$

۰.۲

$$D(x) = \text{Const}, \quad \forall x \in S$$

۰.۳

$$Q(x) = \text{Const}, \quad \forall x \in S$$

۵.۱ شکل‌های اصلی برنامه‌ریزی خطی-کسری

تعریف ۱.۵.۱. یک مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی-کسری به شکل استاندارد است اگر همه‌ی قیدهای آن بصورت تساوی و متغیرهای آن نامنفی باشند یعنی

$$\begin{aligned} Q(x) = \frac{P(x)}{D(x)} &= \frac{\sum_{j=1}^n p_j x_j + p_0}{\sum_{j=1}^n d_j x_j + d_0} \longrightarrow \max(\min) \\ \text{s.t} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &= b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \\ \forall x \in S, \quad D(x) &> 0. \end{aligned}$$

تعریف ۲.۵.۱. یک مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی-کسری دارای شکل متعارفی است، اگر همه‌ی قیدهای آن بصورت نامساوی و همه‌ی متغیرها نامنفی باشند، یعنی:

$$\begin{aligned} Q(x) = \frac{P(x)}{D(x)} &= \frac{\sum_{j=1}^n p_j x_j + p_0}{\sum_{j=1}^n d_j x_j + d_0} \longrightarrow \max(\min) \\ \text{s.t} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \\ \forall x \in S, \quad D(x) &> 0. \end{aligned}$$

واضح است که شکل‌های استاندارد و متعارفی مسائل برنامه‌ریزی خطی-کسری موارد خاصی از مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی-کسری (۳.۱)-(۱.۱) تحت قیدهای (۲.۱) است. اگر در قیدهای (۲.۱) برای مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی-کسری (۳.۱)-(۱.۱) قرار دهیم $m_1 = m_2 = 0$ و $n_1 = n$ آنگاه حالت استاندارد مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی-کسری را خواهیم داشت و اگر قرار دهیم $m_1 = m$ و $n_1 = n$ آنگاه به حالت متعارفی مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی-کسری خواهیم رسید. برای نوشتن یک مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی-کسری بصورت ماتریسی، نمادهای زیر را معرفی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} A_j &= (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})^T, \quad j = 1, 2, \dots, n, \\ b &= (b_1, b_2, \dots, b_m)^T, \quad A = (A_1, A_2, \dots, A_n), \\ x &= (x_1, x_2, \dots, x_n)^T, \quad P = (p_1, p_2, \dots, p_n)^T, \\ D &= (d_1, d_2, \dots, d_n)^T. \end{aligned}$$

با استفاده از نمادهای فوق، شکل استاندارد مسئله به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} Q(x) &= \frac{p^T x + p_0}{d^T x + d_0} \longrightarrow \max, \\ \text{s.t} \quad & Ax = b, \\ & x \geq 0, \\ & D(x) = d^T x + d_0 > 0, \forall x \in S. \end{aligned}$$

و شکل متعارفی مسئله را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} Q(x) &= \frac{p^T x + p_0}{d^T x + d_0} \longrightarrow \max, \\ \text{s.t} \quad & Ax \leq b, \\ & x \geq 0, \\ & D(x) = d^T x + d_0 > 0, \forall x \in S. \end{aligned}$$

در اینجا متذکر می‌شویم که مسئله‌ی مینیم‌سازی و ماکزیم‌سازی را می‌توان به یکدیگر تبدیل نمود.

$$\min_{x \in S} F(x) \equiv -\max_{x \in S} (-F(x))$$

۶.۱ حل مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی-کسری با دو متغیر به روش ترسیمی (روش هندسی)

حال در اینجا توضیح می‌دهیم که چطور هر مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی-کسری با دو متغیر را می‌توان با روش ترسیم هندسی حل کرد.

مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی-کسری با دو متغیر مجهول را در نظر بگیرید:

$$Q(x) = \frac{P(x)}{D(x)} = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_0}{d_1 x_1 + d_2 x_2 + d_0} \longrightarrow \max(\min), \quad (6.1)$$

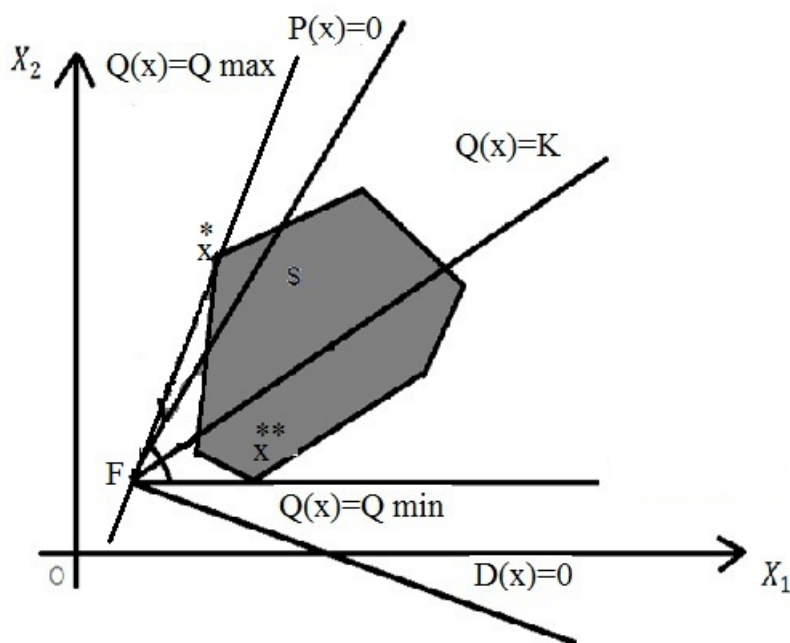
$$\text{s.t} \quad a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (7.1)$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad (8.1)$$

۱.۶.۱ جواب بهینه منحصر به فرد

فرض کنیم که قیود (۷.۱) و (۸.۱) ناحیه شدنی را که در شکل ۱.۱ مشخص شده را نشان می‌دهد. برای هر مقدار حقیقی K معادله‌ی $Q(x) = K$ به صورت زیر است:

$$(p_1 - K d_1) x_1 + (p_2 - K d_2) x_2 + (p_0 - K d_0) = 0$$



شکل ۱.۱: تنها راس بهینه

این معادله، معادله‌ی یک خط راست است که در ناحیه‌ی اول قرار دارد و به آن خط تراز یا (ایزولاین) می‌گویند که در ناحیه شدنی S قرار می‌گیرد. نقطه‌ی F که در شکل ۱.۱ مشخص شده است، را نقطه‌ی کانونی می‌نامند و از حل دستگاه معادله‌ی زیر بدست می‌آید.

$$\begin{cases} p_1 x_1 + p_2 x_2 = -p_0, \\ d_1 x_1 + d_2 x_2 = -d_0. \end{cases} \quad (9.1)$$

اگر خط‌های $P(x) = 0$ و $D(x) = 0$ موازی هم نباشند آنگاه دترمینان دستگاه (۹.۱) صفر نخواهد بود و یک جواب منحصر به فرد دارد. بعبارت دیگر اگر خط‌های $P(x) = 0$ و $D(x) = 0$ موازی هم باشند آنگاه دترمینان دستگاه (۹.۱) برابر صفر خواهد شد و سیستم جواب ندارد. این یعنی نقطه‌ی کانونی وجود ندارد و همه‌ی خط‌های تراز بایکدیگر موازی‌اند و در این حالت مسئله به یک مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی تبدیل می‌شود. در این حالت برای ماکزیم‌سازی تابع هدف $Q(x)$ ، باید مخرج کسر $D(x)$ را وابسته به علامت $p_0 - \mu d_0$ مینیم یا ماکزیم کنیم ((۵.۱) را ببینید). به حالتی که خط‌های تراز بایکدیگر موازی نیستند برمی‌گردیم.

یک مقدار دلخواه برای K انتخاب می‌کنیم و خط تراز $Q(x) = K$ را مانند شکل ۱.۱ در نظر می‌گیریم. حال می‌توانیم معادله‌ی $Q(x) = K$ را بصورت زیر بازنویسی کنیم

$$x_2 = -\frac{p_1 - K d_1}{p_2 - K d_2} x_1 - \frac{p_0 - K d_0}{p_2 - K d_2}.$$

در اینجا فرض می‌کنیم $k = -\frac{p_1 - K d_1}{p_2 - K d_2}$ شیب خط تراز $Q(x) = K$ وابسته به مقدار K در تابع

هدف $Q(x)$ باشد و از طرفی k یک تابع یکنواخت بر K است زیرا:

$$\frac{dk}{dK} = \frac{d_1 p_2 - d_2 p_1}{(p_2 - K d_2)^2}$$

بنابراین علامت $\frac{dk}{dK}$ وابسته به مقدار K نیست. بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

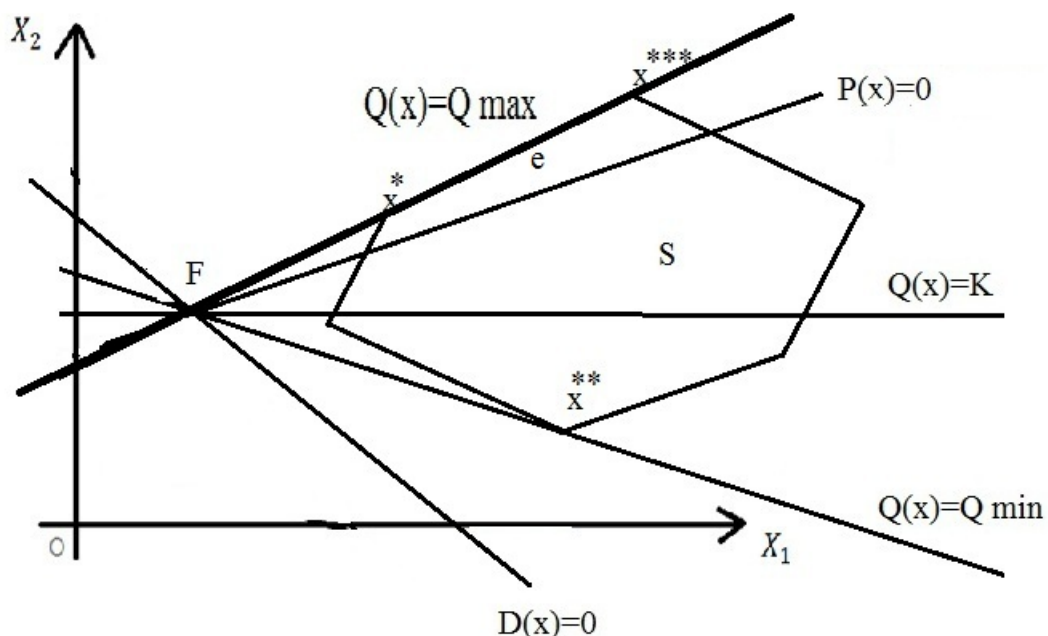
$$\text{sign} \left\{ \frac{dk}{dK} \right\} = \text{sign} \{ d_1 p_2 - d_2 p_1 \} = \text{const}$$

این یعنی زمانی که خط تراز را حول نقطه‌ی کانونی F در جهت مثبت (خلاف جهت عقربه‌های ساعت) می‌چرخانیم، مقدار تابع هدف $Q(x)$ وابسته به علامت عبارت $(d_1 p_2 - d_2 p_1)$ افزایش یا کاهش پیدا می‌کند. باتوجه به توضیحات داده شده و شکل ۱.۱ مشخص می‌شود که تابع هدف در نقطه‌ی x^* بیشترین مقدار و در نقطه‌ی x^{**} کمترین مقدار خود را می‌گیرد.

۲.۶.۱ جواب‌های بهینه‌ی چندگانه (دگرین)

این حالت زمانی رخ می‌دهد که بر اثر چرخاندن خط تراز حول نقطه‌ی کانونی خود بر یکی از یال‌های ناحیه شدنی منطبق شود (شکل ۲.۱). در این حالت مسئله بی‌شمار جواب بهینه دارد (همه‌ی نقاط x بر روی یال e) که ممکن است بصورت یک ترکیب خطی از نقاط x^* و x^{**} به شکل زیر نشان داده شود.

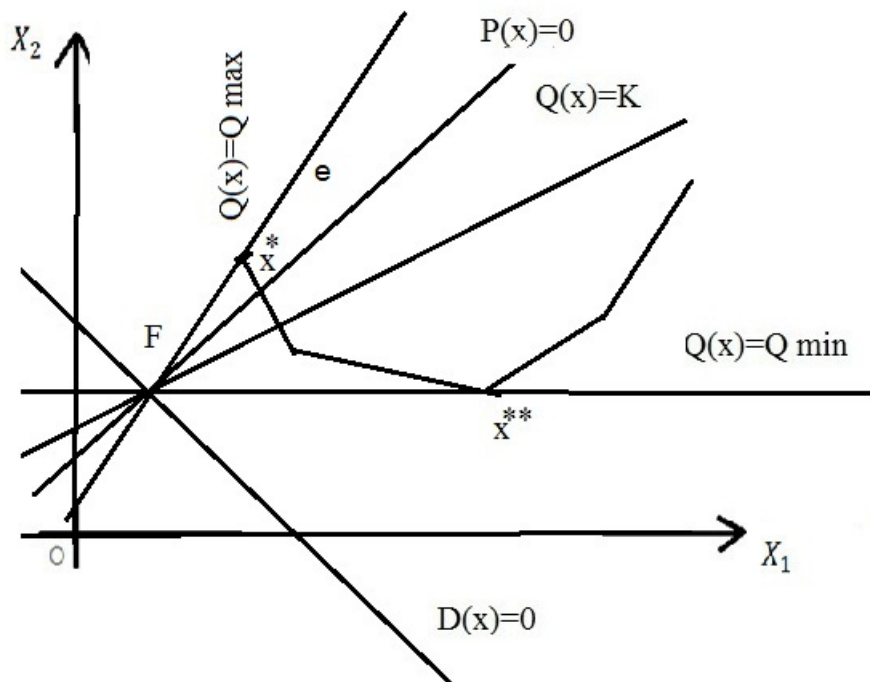
$$x = \lambda x^* + (1 - \lambda) x^{**}, \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$



شکل ۲.۱: جواب‌های بهینه چندگانه

۳.۶.۱ جواب‌های آمیخته (مخلوط)

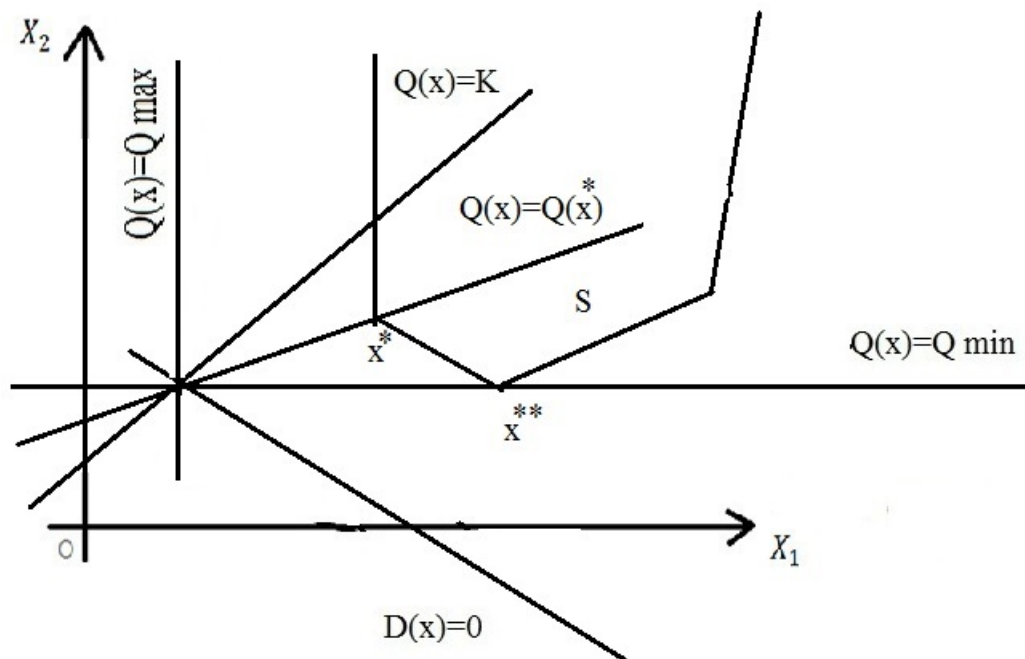
اگر ناحیه شدنی S بی‌کران باشد و بعد از چرخاندن خط تراز حول نقطه‌ی کانونی، خط تراز بر یک یال بی‌کران منطبق شود (شکل ۳.۱) آنگاه مسئله بی‌نهایت جواب بهینه دارد که یکی از آنها راس x^* و بقیه نقاط روی یال بی‌کران می‌باشند و هیچ کدام نقطه‌ی راسی نیستند. متذکر می‌شویم که در بین این نقاط غیر راسی، بی‌نهایت هم وجود دارد. این دلیلی است که چرا می‌گوئیم مسئله جواب آمیخته دارد. و این یعنی مسئله هم دارای جواب بهینه متناهی و هم دارای جواب بی‌نهایت است.



شکل ۳.۱: جواب‌های آمیخته

۴.۶.۱ جواب نامتناهی (جواب بی‌نهایت)

فرض کنیم ناحیه شدنی S بی‌کران باشد. در این حالت بعد از چرخاندن خط تراز حول نقطه‌ی کانونی برای رسیدن به حالت بهینه، ممکن است خط تراز از ناحیه شدنی خارج و با یک یال بی‌کران موازی شود که در این صورت مسئله جواب بهینه نامتناهی دارد. یعنی وابسته به مقدار $\lim_{x \rightarrow \infty} Q(x)$ ، ماکزیمم (مینیمم) مقدار تابع هدف ممکن است نامتناهی یا نامتناهی باشد (شکل ۴.۱).



شکل ۴.۱: جواب نامتناهی

۷.۱ مثال عددی

مثال ۱.۷.۱.

$$Q(x) = \frac{6x_1 + 6x_2 + 6}{5x_1 + 5x_2 + 5} \rightarrow \max(\min),$$

$$\text{s.t. } 4x_1 - 2x_2 \leq 20,$$

$$3x_1 + 5x_2 \leq 25,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

ابتدا باید ناحیه شدنی را رسم نماییم. مجموعه‌ی محدب S که شامل تمام نقاط شدنی این مساله است در شکل ۵.۱ نشان داده شده است. حال با حل سیستم زیر نقطه‌ی کانونی F را پیدا می‌کنیم.

$$\begin{cases} P(x) = 0, \\ D(x) = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 6 = 0, \\ 5x_1 + 2x_2 + 5 = 0. \end{cases}$$

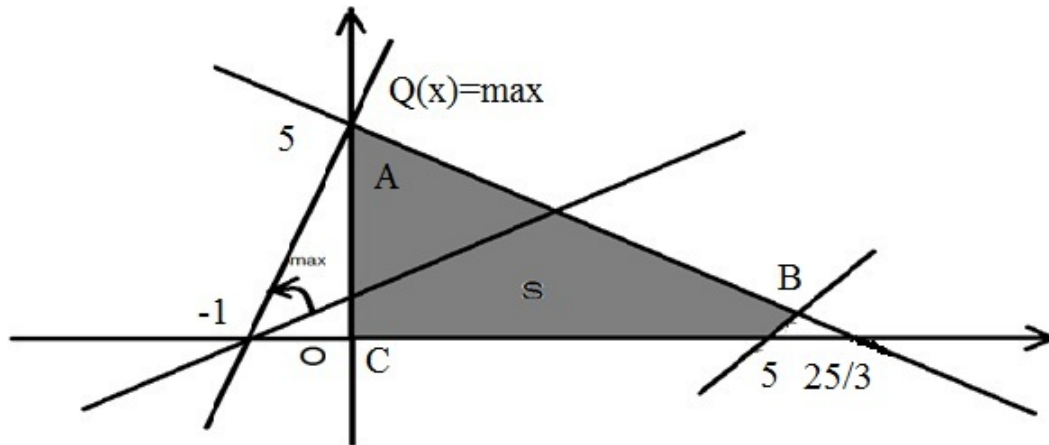
که از حل دستگاه بالا نقطه‌ی کانونی $F = (-1, 0)$ بدست می‌آید. حال با چرخاندن خط تراز حول نقطه‌ی کانونی نقاط اکسترمم زیر بدست می‌آید.

$$A = (0, 5), B = (5, 0), C = (0, 0).$$

که مقدار تابع هدف در این نقاط برابر است با

$$Q(A) = \frac{21}{15}, Q(B) = \frac{18}{15}, Q(C) = \frac{18}{15}.$$

بنابراین تابع هدف ماکزیمم مقدار خود را در نقطه‌ی $A = (0, 5)$ می‌گیرد. در حالی که مقدار مینیمم تابع هدف در دو نقطه‌ی $B = (5, 0)$ و $C = (0, 0)$ و پاره خط واصل بین این دو نقطه بدست می‌آید.



شکل ۵.۱: شکل مثال ۱.۷.۱

مثال ۲.۷.۱

$$Q(x) = \frac{1x_1 - 2x_2 + 1}{1x_1 + 1x_2 + 4} \rightarrow \max(\min),$$

$$\text{s.t. } 1x_1 + 1x_2 \geq 2,$$

$$1x_1 - 2x_2 \leq 4,$$

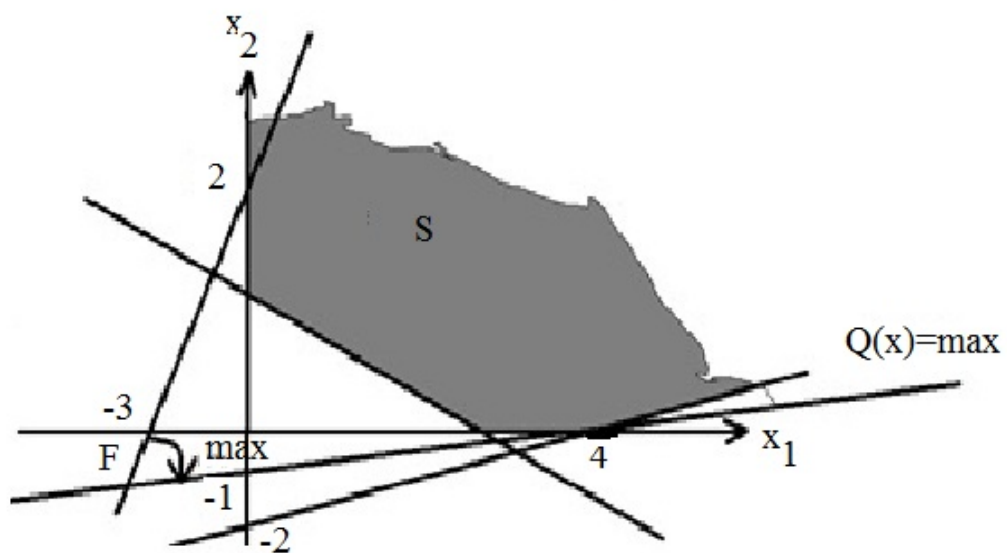
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

مجموعه جواب‌های شدنی S برای این مسئله در شکل ۶.۱ رسم شده است. از حل سیستم زیر نقطه‌ی کانونی را بدست می‌آوریم.

$$\begin{cases} 1x_1 - 2x_2 = -1, \\ 1x_1 + 1x_2 = -4. \end{cases}$$

که از حل دستگاه بالا $F = (-3, -1)$ بدست می‌آید. حال با چرخاندن خط تراز حول نقطه‌ی کانونی در جهت عقربه‌های ساعت نقاط بهینه را بدست می‌آوریم که ماکزیمم مقدار این مساله در نقطه‌ی $(4, 0)$ با مقدار تابع هدف $Q(x) = \frac{5}{8}$ بدست می‌آید. و مینیمم مقدار این مسئله در بی‌نهایت رخ می‌دهد یعنی در نقطه‌ی $(0, \infty)$ مقدار تابع هدف مینیمم می‌شود، یعنی

$$\min_{x \in S} Q(x) = \lim_{x_2 \rightarrow \infty} Q(0, x_2) = -2$$



شکل ۶.۱: شکل مثال ۲.۷.۱

فصل ۲

روش‌های تبدیل مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی-کسری به مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی

مطالب این بخش برگرفته شده از کتاب برنامه‌ریزی خطی-کسری [۳] و مقالات چارنز و کوپر^۱ [۷] و دینکل بیچ^۲ [۹] می‌باشد.

روش‌های مختلفی برای تبدیل مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی-کسری به مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی توسط ریاضی‌دانان مختلف ارائه شده است که ما در این پایان نامه به دو روش آن اشاره می‌کنیم.

۱.۲ روش چارنز-کوپر

در سال ۱۹۶۲، چارنز و کوپر نشان دادند که هر مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی-کسری با یک ناحیه شدنی کراندار را می‌توان به یک مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی تبدیل نمود. مسئله‌ی رایج (۳.۱) - (۱.۱) را در نظر بگیرید. متغیرهای جدید زیر را تعریف می‌کنیم:

$$t_j = \frac{x_j}{D(x)}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad t_0 = \frac{1}{D(x)}.$$

که در آن

$$D(x) = \sum_{j=1}^n d_j x_j + d_0. \quad (1.2)$$

حال با استفاده از متغیرهای جدید t_j برای $j = 1, 2, \dots, n$ می‌توانیم تابع هدف اصلی $Q(x)$ را بصورت زیر بازنویسی کنیم:

$$L(t) = \sum_{j=0}^n p_j t_j \longrightarrow \max(\min) \quad (2.2)$$

^۱Charnes & Cooper

^۲Dinkelbeach

از آنجائیکه فرض کردیم به ازای هر $x \in S$ ، $D(x) > 0$ ، می‌توانیم همگی قیود (۲.۱) و (۳.۱) را در $\frac{1}{D(x)}$ ضرب کنیم، لذا داریم:

$$\begin{cases} -b_i t_0 + \sum_{j=1}^n a_{ij} t_j \leq 0 & i = 1, 2, \dots, m_1, \\ -b_i t_0 + \sum_{j=1}^n a_{ij} t_j \geq 0 & i = m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, m_2, \\ -b_i t_0 + \sum_{j=1}^n a_{ij} t_j = 0 & i = m_2 + 1, m_2 + 2, \dots, m, \end{cases} \quad (3.2)$$

$$t_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (4.2)$$

اگر معادله‌ی (۱.۲) را در مقدار $\frac{1}{D(x)}$ ضرب کنیم و محدودیت جدید بدست آمده‌ی زیر را به مسئله جدید اضافه کنیم، رابطه‌ی بین متغیرهای اصلی x_j و متغیرهای جدید t_j کامل خواهد شد.

$$\sum_{j=0}^n d_j t_j = 1 \quad (5.2)$$

مسئله برنامه‌ریزی خطی، معادل با مسئله برنامه‌ریزی خطی-کسری (۳.۱)-(۲.۱)-(۱.۱) بصورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} L(t) &= \sum_{j=0}^n p_j t_j \longrightarrow \max(\min) \\ \text{s.t.} \quad &\sum_{j=0}^n d_j t_j = 1 \\ &-b_i t_0 + \sum_{j=1}^n a_{ij} t_j \leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m_1, \\ &-b_i t_0 + \sum_{j=1}^n a_{ij} t_j \geq 0 \quad i = m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, m_2, \\ &-b_i t_0 + \sum_{j=1}^n a_{ij} t_j = 0 \quad i = m_2 + 1, m_2 + 2, \dots, m, \\ &t_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (6.2)$$

به طریق مشابه، آنچه که در بخش (۵.۱) تعریف کردیم، شکل استاندارد و شکل کانونی با توجه به مسئله کلی فوق تعریف می‌شود.

لم ۱.۱.۲. اگر بردار $t = (t_0, t_1, \dots, t_n)^T$ یک جواب شدنی مسئله (۶.۲) باشد آنگاه $t_0 > 0$.

برهان. فرض می‌کنیم بردارهای $x' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ و $t' = (t'_0, t'_1, t'_2, \dots, t'_n)$ به ترتیب جواب‌های شدنی مسئله اصلی برنامه‌ریزی خطی-کسری (۳.۱)-(۱.۱) و مسئله خطی (۶.۲) باشند. فرض می‌کنیم $t'_0 = 0$ یعنی $t' = (0, t'_1, t'_2, \dots, t'_n)$. از آنجائیکه بردارهای x' و t' جواب‌های شدنی مسئله نظیرشان هستند لذا در محدودیت‌های مسئله نظیر خود صدق می‌کنند، یعنی:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x'_j \leq b_i & i = 1, 2, \dots, m_1, \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x'_j \geq b_i & i = m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, m_2, \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x'_j = b_i & i = m_2 + 1, m_2 + 2, \dots, m, \end{cases} \quad (7.2)$$

$$x'_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n_1. \quad (8.2)$$

و

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} t'_j \leq 0 & i = 1, 2, \dots, m_1, \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} t'_j \geq 0 & i = m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, m_2, \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} t'_j = 0 & i = m_2 + 1, m_2 + 2, \dots, m, \end{cases} \quad (9.2)$$

$$t'_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n_1. \quad (10.2)$$

حال i -امین محدودیت از سیستم (۹.۲) را در یک مقدار دلخواه مثبت λ ضرب و سپس آن را به i -امین محدودیت از سیستم (۷.۲) اضافه می‌کنیم و i -امین متغیر از نامعادله (۱۰.۲) را در همان λ ضرب کرده و به i -امین متغیر از محدودیت‌های (۸.۲) اضافه می‌کنیم، آنگاه داریم:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij}(x'_j + \lambda t'_j) \leq b_i & i = 1, 2, \dots, m_1, \\ \sum_{j=1}^n a_{ij}(x'_j + \lambda t'_j) \geq b_i & i = m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, m_2, \\ \sum_{j=1}^n a_{ij}(x'_j + \lambda t'_j) = b_i & i = m_2 + 1, m_2 + 2, \dots, m, \end{cases}$$

$$(x'_j + \lambda t'_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n_1.$$

و این یعنی بردار $x'_j + \lambda t'_j(j)$ یک جواب شدنی برای مسئله برنامه‌ریزی خطی-کسری به ازای هر λ مثبت است اما شاید λ خیلی بزرگ اختیار شود (زیرا λ دلخواه است) و این یعنی ناحیه شدنی S بی‌کران است و این با فرض اینکه S را یک مجموعه‌ی کراندار فرض کردیم، متناقض است. لذا فرض خلف باطل و حکم ثابت است. $\square$

قضیه ۲.۱.۲. اگر بردار $t^* = (t_0^*, t_1^*, \dots, t_n^*)$ یک جواب بهینه برای مسئله (۶.۲) باشد آنگاه $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ یک جواب بهینه برای مسئله اصلی برنامه‌ریزی خطی-کسری (۳.۱)- (۲.۱)-(۱.۱) است که در آن

$$x_j^* = \frac{t_j^*}{t_0^*}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (11.2)$$

برهان. این قضیه را برای حالت مسئله ماکزیم‌سازی اثبات می‌کنیم و برای مسئله مینیم‌سازی به طور مشابه اثبات می‌شود.

از آنجائیکه بردار t^* یک جواب بهینه برای مسئله ماکزیم‌سازی، مسئله خطی (۶.۲) است داریم:

$$L(t^*) \geq L(t), \quad \forall t \in T \quad (12.2)$$

که T نشان دهنده‌ی مجموعه‌ی جواب‌های شدنی مسئله برنامه‌ریزی خطی است. فرض کنیم که بردار x^* برای مسئله ماکزیم‌سازی برنامه‌ریزی خطی-کسری بهینه نباشد. در نتیجه بردار دیگری مانند $x' \in S$ وجود دارد بطوریکه $Q(x') > Q(x^*)$. اما بطور همزمان داریم:

$$\begin{aligned} Q(x^*) &= \frac{\sum_{j=1}^n p_j x_j^* + p_0}{\sum_{j=1}^n d_j x_j^* + d_0} \stackrel{(11.2)}{=} \frac{\sum_{j=1}^n p_j \frac{t_j^*}{t_0^*} + p_0}{\sum_{j=1}^n d_j \frac{t_j^*}{t_0^*} + d_0}, \\ &= \frac{\sum_{j=1}^n p_j t_j^* + p_0 t_0^*}{\sum_{j=1}^n d_j t_j^* + d_0 t_0^*} \stackrel{(5.2)}{=} \frac{\sum_{j=1}^n p_j t_j^* + p_0 t_0^*}{1} \stackrel{(2.2)}{=} L(t^*). \end{aligned}$$

و این یعنی $Q(x') > L(t^*)$.

از آنجائیکه بردار x' یک جواب شدنی برای مسئله‌ی اصلی برنامه‌ریزی خطی-کسری است، به آسانی دیده می‌شود که بردار $t' = (t'_0, t'_1, \dots, t'_n)$ که $t'_0 = \frac{1}{D(x')}$ و $t'_j = \frac{x'_j}{D(x')}$ برای $j = 1, 2, \dots, n$ یک جواب شدنی مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی است و این یعنی $L(t') > L(t^*)$ ، و این با فرض اینکه t^* جواب بهینه‌ی مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی است، متناقض است. لذا فرض خلف باطل و حکم ثابت است. $\square$

مثال عددی

مثال ۳.۱.۲

$$Q(x) = \frac{8x_1 + 9x_2 + 4x_3 + 4}{2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 7} \rightarrow \max,$$

$$\text{s.t. } \begin{aligned} &1x_1 + 1x_2 + 2x_3 \leq 3, \\ &2x_1 + 1x_2 + 4x_3 \leq 4, \\ &5x_1 + 3x_2 + 1x_3 \leq 15, \\ &x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

از حل مسئله‌ی خطی-کسری بالا [۳] مقادیر زیر را بدست می‌آوریم:

$$x^* = (1, 2, 0)^T, P(x^*) = 30, D(x^*) = 15, Q(x^*) = 2.$$

حال با استفاده از تبدیلات چارنز-کوپر مسئله‌ی بالا را به یک مسئله‌ی خطی تبدیل می‌کنیم:

$$L(t) = 4t_0 + 8t_1 + 9t_2 + 4t_3 \rightarrow \max,$$

$$\text{s.t. } \begin{aligned} &7t_0 + 2t_1 + 3t_2 + 3t_3 = 1, \\ &-3t_0 + 1t_1 + 1t_2 + 2t_3 \leq 0, \\ &-4t_0 + 2t_1 + 1t_2 + 4t_3 \leq 0, \\ &-15t_0 + 5t_1 + 3t_2 + 1t_3 \leq 0, \\ &t_j \geq 0, j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

اگر مسئله‌ی خطی بالا را حل کنیم خواهیم داشت:

$$t^* = \left(\frac{1}{15}, \frac{1}{15}, \frac{2}{15}, 0\right), L(t^*) = 2$$

بنابراین

$$t_0^* = \frac{1}{15}, t_1^* = \frac{1}{15}, t_2^* = \frac{2}{15}, t_3^* = 0$$

حال با استفاده از تبدیل (۱۱.۲) می‌بینیم که x^* و t^* با هم معادلند و علاوه بر آن مقادیر تابع هدف، $Q(x^*)$ و $L(t^*)$ با هم برابرند یعنی می‌توان نوشت:

$$x_1^* = \frac{t_1^*}{t_0^*} = 1, \quad x_2^* = \frac{t_2^*}{t_0^*} = 2, \quad x_3^* = \frac{t_3^*}{t_0^*} = 0, \quad L(t^*) = Q(x^*) = 2$$

۲.۲ الگوریتم دینکل بیچ

یکی از مشهورترین و عمومی‌ترین روش‌ها برای مسائل کسری (نه لزوماً خطی) روش دینکل بیچ^۳ است. در حالتی که برنامه‌ریزی خطی-کسری است این روش جواب مسئله را به یک دنباله از جواب‌های مسائل برنامه‌ریزی خطی تبدیل می‌کند.

مسئله رایج برنامه‌ریزی خطی-کسری (۳.۱)-(۱.۱) و تابع $F(\lambda) = \max\{P(x) - \lambda D(x)\}$ ، بطوریکه $\lambda \in \mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. قضیه‌ی زیر نقش اصلی نظریه‌ی دینکل بیچ را بازی می‌کند.

قضیه ۱.۲.۲. بردار x^* یک جواب بهینه‌ی مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی-کسری (۳.۱)-(۱.۱) تحت شرایط (۲.۲) است اگر و تنها اگر

$$F(\lambda^*) = \max\{P(x) - \lambda^* D(x)\} = 0 \quad (۱۳.۲)$$

که

$$\lambda^* = \frac{P(x^*)}{D(x^*)} \quad (۱۴.۲)$$

برهان. اگر بردار x^* یک جواب بهینه‌ی مسئله‌ی خطی-کسری اصلی (۳.۱)-(۱.۱) باشد، آنگاه

$$\lambda^* = \frac{P(x^*)}{D(x^*)} \geq \frac{P(x)}{D(x)}, \quad \forall x \in S$$

و این یعنی:

$$P(x) - \lambda^* D(x) \leq 0, \quad \forall x \in S$$

بماکزیم گرفتن روی $x \in S$ و در نظر گرفتن معادله‌ی (۱۴.۲) بدست می‌آوریم

$$\max_{x \in S} \{P(x) - \lambda^* D(x)\} = 0.$$

که به ازای $x = x^*$ داریم:

$$P(x^*) - \lambda^* D(x^*) = 0$$

به عکس: اگر بردار x^* یک جواب بهینه برای مسئله (۱۳.۲) باشد آنگاه

$$P(x) - \lambda^* D(x) \leq P(x^*) - \lambda^* D(x^*) = 0, \quad \forall x \in S$$

و این یعنی بردار x^* یک جواب بهینه برای مسئله‌ی خطی-کسری (۳.۱)-(۱.۱) است. $\square$

با استفاده از قضیه (۱.۲.۲)، دینکل بیچ الگوریتمی ارائه کرده که در جدول زیر آمده است.

^۳Dinkelbach

جدول ۱۰.۲: الگوریتم دینکل‌بیچ

مرحله ۰: $x^{(0)} \in S$ را در نظر بگیرید و قرار دهید $\lambda^{(k)} := \frac{P(x^{(0)})}{D(x^{(0)})}$ و فرض کنید $k := 1$.
مرحله ۱: $x^{(k)} = \arg \max_{x \in S} \{P(x) - \lambda^{(k)} D(x)\}$ را حساب کنید.
مرحله ۲: اگر $F(x^{(k)}) = 0$ آنگاه $x^* = x^{(k)}$ یک جواب بهینه است و توقف کنید.
مرحله ۳: قرار دهید $\lambda^{(k+1)} := \frac{P(x^{(k)})}{D(x^{(k)})}$ و بگذارید $k := k + 1$ و به مرحله ۱ بروید.

جهت اطلاعات بیشتر راجع به این الگوریتم و نحوه‌ی همگرایی آن به مرجع [۹] مراجعه شود. حال برای تشریح بهتر این الگوریتم، از یک مثال عددی استفاده می‌کنیم.

۳.۲ مثال عددی

مثال ۱.۳.۲.

$$Q(x) = \frac{P(x)}{D(x)} = \frac{x_1 + x_2 + 5}{3x_1 + 2x_2 + 15} \rightarrow (\max),$$

$$\text{s.t. } 3x_1 + x_2 \leq 6,$$

$$3x_1 + 4x_2 \leq 12,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \quad (15.2)$$

مرحله‌ی صفرم: از آنجائیکه بردار $x = (0, 0)^T$ در همه‌ی محدودیت‌های مسئله صدق می‌کند، $x^{(0)} \in S$ را به عنوان نقطه‌ی شروع در نظر می‌گیریم. بنابراین برای $x^{(0)} = (0, 0)^T$ مقدار $\lambda^{(1)}$ را بدست می‌آوریم:

$$\lambda^{(1)} := \frac{P(x^{(0)})}{D(x^{(0)})} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

مرحله‌ی اول: حال باید مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی زیر را حل کنیم:

$$F(x) = P(x) - \lambda^{(1)} D(x) = P(x) - \frac{1}{3} D(x) = \frac{1}{3} x_2 \rightarrow \max$$

بطوریکه قیود (۱۵.۲) برقرار باشند. از حل مسئله‌ی فوق مقادیر زیر را بدست می‌آیند:

$$x^{(1)} = (0, 3)^T, \quad F(x^{(1)}) = 1.$$

مرحله‌ی دوم: از آنجائیکه $F(\lambda^{(1)}) \neq 0$ باید به مرحله‌ی بعدی برویم.

مرحله‌ی سوم: حال $k := k + 1$ قرار می‌دهیم و $\lambda^{(k+1)}$ (یعنی $\lambda^{(2)}$) را به صورت زیر محاسبه می‌نمائیم و به مرحله‌ی اول باز می‌گردیم.

$$\lambda^{(2)} := \frac{P(x^{(1)})}{D(x^{(1)})} = \frac{1 \times 3 + 5}{2 \times 3 + 15} = \frac{8}{21}$$

مرحله‌ی اول: مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی زیر را حل می‌کنیم

$$F(x) = P(x) - \lambda^{(۲)} D(x) = \left(1 - \frac{۸}{۲۱} \times ۳\right) x_۱ + \left(1 - \frac{۸}{۲۱} \times ۲\right) x_۲ + \left(۵ - \frac{۸}{۲۱} \times ۱۵\right) \\ = -\frac{۱}{۷} x_۱ + \frac{۵}{۲۱} x_۲ - \frac{۵}{۷} \longrightarrow \max$$

بطوریکه محدودیت‌های (۱۵.۲) برقرار باشند. که از حل مسئله‌ی فوق داریم:

$$x^{(۲)} = (۰, ۳)^T, \quad F(x^{(۲)}) = ۰.$$

مرحله‌ی دوم: از آنجائیکه $F(x^{(۲)}) = ۰$ ، بردار $x^* = x^{(۲)}$ جواب بهینه مورد نظر است و توقف می‌کنیم.

بنابر این الگوریتم، جواب بهینه مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی-کسری برابر است با $x^* = (۰, ۳)^T$ و مقدار بهینه‌ی تابع هدف $Q(x^*) = \frac{۸}{۲۱}$.

فصل ۳

معکوس مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی

در این فصل از پایان نامه به معکوس یک مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی می‌پردازیم. چندین مقاله در مورد معکوس یک مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی وجود دارد که عموماً به دوشکل، معکوس یک مسئله برنامه‌ریزی خطی را بدست می‌آورند. در هر دو مورد، جواب شدنی x° از مسئله‌ای را می‌دهند که در تابع هدف بهینه نیست. در مورد اول، هدف از معکوس برنامه‌ریزی خطی این است که ضرایب فنی (ضرایب تابع هدف) را طوری تغییر دهیم که x° در تابع هدف بهینه شود [۲۰، ۲۱] و در مورد دوم ضرایب تابع هدف و بردار سمت راست همزمان تغییر می‌کنند تا x° در مسئله‌ی جدید بهینه شود [۸].

ابتدا به بررسی مورد اول یعنی فقط تغییر ضرایب تابع هدف می‌پردازیم و سپس مورد دوم آن را مورد بحث قرار می‌دهیم.

۱.۳ معکوس مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی با تغییر ضرایب تابع هدف

مطالب این بخش با توجه به مرجع [۲۰، ۲۱] بیان می‌گردد. صورت استاندارد یک مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی به شکل زیر است:

$$\min\{cx \mid Ax = b, x \geq 0\}$$

که $c \in \mathbb{R}^n$ ، $x \in \mathbb{R}^n$ ، $b \in \mathbb{R}^m$ و A یک ماتریس $m \times n$ است. فرض کنید x° یک جواب شدنی باشد، یعنی در شرایط $Ax = b$ ، $x \geq 0$ صدق کند. ما باید ضرایب c را با کمترین تغییرات، تغییر دهیم تا x° یک جواب بهینه برای مسئله جدید برنامه‌ریزی خطی باشد. اگر تعریف کنیم:

$$F(x^\circ) = \{\tilde{c} \in \mathbb{R}^n \mid \min\{\tilde{c}x \mid Ax = b, x \geq 0\} = \tilde{c}x^\circ\} \quad (۱.۳)$$

آنگاه مسئله‌ی معکوس برنامه‌ریزی خطی بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\min\{\|c - \tilde{c}\| \mid \tilde{c} \in F(x^\circ)\} \quad (۲.۳)$$

که در اینجا با نرم l_1 برای $\|c - \tilde{c}\|$ کار می‌کنیم. یعنی

$$\|c - \tilde{c}\| = \sum_j |c_j - \tilde{c}_j|.$$

لم ۱.۱.۳. فرض کنید x° یک جواب شدنی مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی باشد یعنی در شرایط $Ax = b, x \geq 0$ صدق کند. x° جواب بهینه مسئله $\min\{cx | Ax = b, x \geq 0\}$ است اگر و تنها اگر $\Pi \in \mathbb{R}^m$ وجود داشته باشد بطوریکه برای همه $j = 1, 2, \dots, n$ داشته باشیم:

$$\Pi p_j \leq c_j, \quad \text{دوگان شدنی} \quad (\bar{3.3})$$

$$x_j^\circ > 0 \Rightarrow \Pi p_j = c_j. \quad \text{مکمل زائد} \quad (3.3\text{ب})$$

که p_j ستون‌های ماتریس A هستند.

برهان. فرض کنیم که x° یک جواب شدنی مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی باشد. یعنی مسئله‌ی اولیه شدنی باشد و x° یک جواب بهینه نیز باشد، لذا شرایط K.K.T برقرار است پس می‌توان شرایط (3.3) و (3.3ب) را دید.

به عکس: فرض شود که x° یک جواب شدنی باشد و شرایط (3.3) و (3.3ب) برقرار باشد لذا شرایط K.K.T برای مسئله برقرار است پس x° یک جواب بهینه برای مسئله مورد نظر می‌باشد. $\square$

از این لم نتیجه می‌گیریم که اگر x° یک جواب شدنی باشد اما بهینه نباشد آنگاه برای هر بردار $\Pi \in \mathbb{R}^m$ باید یک j وجود داشته باشد بطوریکه یکی از شرایط (3.3) یا (3.3ب) برای اندیس j برقرار نباشد.

لم ۲.۱.۳. برای هر $\Pi \in \mathbb{R}^m$ ، یک بردار c^Π می‌توان ساخت که متعلق به مجموعه‌ی $F(x^\circ)$ باشد.

برهان. یک بردار Π ، ستون‌های A را به سه گروه زیر تقسیم می‌کند:

$$A^+ = \{p_j \mid \Pi p_j > c_j\}, \quad A^\circ = \{p_j \mid \Pi p_j = c_j\}, \quad A^- = \{p_j \mid \Pi p_j < c_j\}$$

حال تعریف می‌کنیم:

$$c_j^\Pi = \begin{cases} c_j, & p_j \in A^\circ; \text{ یا } p_j \in A^- \text{ و } x_j^\circ = 0, \\ c_j - \theta_j, & p_j \in A^-; \text{ و } x_j^\circ > 0, \text{ که } \theta_j = c_j - \Pi p_j, \\ c_j + \theta_j, & p_j \in A^+, \text{ که } \theta_j = \Pi p_j - c_j. \end{cases} \quad (4.3)$$

c_j^Π مشخصه‌های زیر را داراست:

$$\Pi p_j < c_j \text{ آنگاه } x_j^\circ = 0 \text{ و } p_j \in A^-, \quad (5.3)$$

$$\Pi p_j = c_j^\Pi \text{ در غیر اینصورت}. \quad (6.3)$$

همانطور که می‌بینید c_j^Π برای $j = 1, 2, \dots, n$ در شرایط (3.3) و (3.3ب) لم ۱.۱.۳ صدق می‌کند. بنابراین $c^\Pi = (c_1^\Pi, \dots, c_n^\Pi) \in F(x^\circ)$. $\square$

حال $F'(x^\circ)$ را مجموعه‌ی همه بردارهای c^Π تعریف شده توسط (۴.۳) برای همه‌ی $\Pi \in \mathbb{R}^m$ در نظر می‌گیریم و از لم ۲.۱.۳ نتیجه می‌گیریم:

$$F'(x^\circ) \subseteq F(x^\circ) \quad (۷.۳)$$

قضیه ۳.۱.۳.

$$\min\{\|c^\Pi - c\| \mid c^\Pi \in F'(x^\circ)\} = \min\{\|\tilde{c} - c\| \mid \tilde{c} \in F(x^\circ)\}$$

برهان. به دلیل اینکه $F'(x^\circ) \subseteq F(x^\circ)$ ، لازم است که فقط نشان دهیم برای هر $\tilde{c} \in F(x^\circ)$ یک $c^\Pi \in F'(x^\circ)$ وجود دارد بطوریکه $\|\tilde{c} - c\| \geq \|c^\Pi - c\|$. از آنجائیکه $\tilde{c} \in F(x^\circ)$ ، x° یک جواب بهینه مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی $\min\{\tilde{c}x \mid Ax = b, x \geq 0\}$ است. بنابراین با استفاده از شرایط (۳.۳) و (۳.۳ب) داریم:

(الف)

$$\Pi p_j \leq \tilde{c}_j$$

(ب)

$$x_j^\circ > 0 \rightarrow \Pi p_j = \tilde{c}_j \quad \forall j = 1, 2, \dots, n$$

حال یک بردار c^Π توسط فرمول (۴.۳) در لم ۲.۱.۳ تعریف می‌کنیم و برای هر j نشان می‌دهیم که $|c_j^\Pi - c_j| \geq |\tilde{c}_j - c_j|$. در واقع اگر $\Pi p_j \geq c_j$ آنگاه $c_j^\Pi \geq c_j$ و $\tilde{c}_j \geq \Pi p_j = c_j^\Pi$ ، بنابراین $\tilde{c}_j - c_j \geq c_j^\Pi - c_j \geq 0$. از طرفی دیگر اگر $\Pi p_j < c_j$ دو حالت وجود دارد:

(i) اگر $x_j^\circ = 0$ آنگاه $c_j^\Pi = c_j$ و البته $|\tilde{c}_j - c_j| \leq |c_j^\Pi - c_j| = 0$.

(ii) اگر $x_j^\circ > 0$ آنگاه $c_j^\Pi = \Pi p_j = \tilde{c}_j$ و در نتیجه $|\tilde{c}_j - c_j| = |c_j^\Pi - c_j|$.

از تحلیل بالا دیده می‌شود که برای هر $j = 1, 2, \dots, n$ داریم $|\tilde{c}_j - c_j| \geq |c_j^\Pi - c_j|$ و بنابراین $\|\tilde{c} - c\| \geq \|c^\Pi - c\|$. $\square$

حال معکوس یک مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی را از نقطه نظر دیگری مورد بررسی قرار می‌دهیم، سعی می‌کنیم تغییرات لازم روی c_j ها را توسط θ_j ها ایجاد کنیم بطوریکه $c_j + \theta_j$ در شرایط بهینگی لم ۱.۱.۳ صدق نماید. یعنی:

• اگر $x_j^\circ > 0$ آنگاه θ_j را پیدا کنیم بطوریکه $\Pi p_j = c_j + \theta_j$.

• اگر $x_j^\circ = 0$ آنگاه $\theta_j \geq 0$ را پیدا کنیم بطوریکه $\Pi p_j \leq c_j + \theta_j$.

برای هر j تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} D_j^\Pi &= \left\{ c_j + \theta_j : \begin{cases} \Pi p_j = c_j + \theta_j & x_j^\circ > 0, \\ \Pi p_j \leq c_j + \theta_j, \theta_j \geq 0 & x_j^\circ = 0. \end{cases} \right\} \\ &= \left\{ \hat{c}_j \mid \begin{cases} \Pi p_j = \hat{c}_j & x_j^\circ > 0, \\ \Pi p_j \leq \hat{c}_j, \hat{c}_j \geq c_j & x_j^\circ = 0. \end{cases} \right\} \end{aligned}$$

$c_j^\Pi \in D_j^\Pi$ تعریف شده توسط (۴.۳) مطابق با شرایط بالا برای $\hat{c}_j$ است یعنی $c_j^\Pi \in D_j^\Pi$. حال اگر فرض کنیم $D^\Pi = \{(\hat{c}_1, \dots, \hat{c}_n) \mid \hat{c}_j \in D_j^\Pi, j = 1, 2, \dots, n\}$ و $D(x^\circ) = \bigcup_{\Pi \in \mathbb{R}^m} D^\Pi$ آنگاه با توجه به (۷.۳) داریم:

$$F'(x^\circ) \subseteq D(x^\circ) \subseteq F(x^\circ).$$

بنابراین با توجه به قضیه ۳.۱.۳ داریم:

$$\min \{ \|\hat{c} - c\| \mid \hat{c} \in D(x^\circ) \} = \min \{ \|\hat{c} - c\| \mid \hat{c} \in F(x^\circ) \}$$

یا به عبارت دیگر به نتیجه‌ی توسعه یافته‌ی زیر می‌رسیم.

قضیه ۴.۱.۳. مسئله‌ی معکوس برنامه‌ریزی خطی (۲.۳) معادل است با:

$$\begin{aligned} \min \quad & \|\theta\|, \\ \text{s.t} \quad & \Pi p_j - \theta_j = c_j, \quad j \in \bar{J}, \\ & \Pi p_j - \theta_j \leq c_j, \quad j \in J, \\ & \theta_j \geq 0, \quad j \in J, \end{aligned}$$

که در آن $J = \{j \mid x_j^\circ = 0\}$, $\bar{J} = \{j \mid x_j^\circ > 0\}$.

که قضیه‌ی (۴.۱.۳) را می‌توان تحت نرم l_1 ، یعنی با در نظر گرفتن تبدیلات زیر به یک مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی تبدیل نمود.

$$\begin{aligned} \|\theta\|_1 &= \sum_{j=1}^n |\theta_j| \\ \theta_j &= \theta_j^+ - \theta_j^- \\ |\theta_j| &= \theta_j^+ + \theta_j^- \end{aligned} \quad (۸.۳)$$

لذا با استفاده از (۸.۳) در قضیه (۴.۱.۳)، معکوس مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی را به شکل مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی زیر می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^n \theta_i^+ + \sum_{i=1}^n \theta_i^- \\ \text{s.t} \quad & \Pi p_j - \theta_j^+ + \theta_j^- = c_j, \quad j \in \bar{J} \\ & \Pi p_j - \theta_j^+ + \theta_j^- \leq c_j, \quad j \in J \\ & \theta_j^+ - \theta_j^- \geq 0 \\ & \theta_j^+, \theta_j^- \geq 0, \quad j \in J \end{aligned} \quad (۹.۳)$$

که $J = \{j \mid x_j^\circ = 0\}$ و $\bar{J} = \{j \mid x_j^\circ > 0\}$.

حال اگر قضیه (۴.۱.۳) را با استفاده از نرم l_∞ مورد بررسی قرار دهیم به یک مسئله‌ی مینیمم ماکزیم

تبدیل می‌شود. از آنجائیکه:

$$||\theta||_{\infty} = \max_j \{\theta_j\}, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (10.3)$$

لذا با استفاده از (۱۰.۳) در قضیه‌ی (۴.۱.۳) داریم:

$$\begin{aligned} \min \{Z = \max_j \{\theta_j\}\} &\Rightarrow \min Z \\ \min Z \\ \Pi p_j - \theta_j &= c_j, \quad j \in \bar{J} \\ \Pi p_j - \theta_j &\leq c_j, \quad j \in J \\ Z &\geq \theta_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \\ \theta_j &\geq 0, \quad j \in J \end{aligned} \quad (11.3)$$

مثال عددی

مثال ۵.۱.۳. فرض کنید که مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی زیر داده شده است.

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ \text{s.t} \quad & 4x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ & -4x_1 + x_2 + x_3 \leq 0 \\ & -6x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 0 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

در این مثال جواب بهینه برابر است با $x^* = (\frac{1}{8}, 0, \frac{1}{4})$ و مقدار تابع هدف بهینه برابر است با $Z^* = 1/625$. فرض کنید $x^0 = (\frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8})$ یک جواب شدنی در مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی فوق باشد. مسئله‌ی معکوس را بدست آورید به نحوی که x^0 در آن بهینه باشد و مقدار بهینه‌ی تابع هدف برابر $Z^* = 1/625$ شود. لازم به ذکر است که لزومی ندارد مقدار بهینه تابع هدف برابر با $Z^* = 1/625$ شود، یعنی مقدار بهینه تابع هدف برای x^0 شدنی با مقدار بهینه x^* لزوماً برابر نخواهد شد.

معکوس مسئله‌ی فوق را با توجه به قضیه (۴.۱.۳) تحت نرم l_1 بدست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} \min \quad & \{\theta_1^+ + \theta_1^- + \theta_2^+ + \theta_2^- + \theta_3^+ + \theta_3^-\} \\ \text{s.t.} \quad & 4y_1 - 4y_2 - 6y_3 - \theta_1^+ + \theta_1^- = 1 \\ & y_1 + y_2 + 3y_3 - \theta_2^+ + \theta_2^- = 2 \\ & y_1 + y_2 + y_3 - \theta_3^+ + \theta_3^- = 3 \\ & \theta_1^+ - \theta_1^- \geq 0 \\ & \theta_2^+ - \theta_2^- \geq 0 \\ & \theta_3^+ - \theta_3^- \geq 0 \\ & y_1, y_2, y_3, \theta_1^+, \theta_1^-, \theta_2^+, \theta_2^-, \theta_3^+, \theta_3^- \geq 0. \end{aligned}$$

حال با حل مسئله‌ی خطی فوق داریم $\theta_1^+ = 1, 375, \theta_1^- = 1, 625, y_1 = 1, 625, y_2 = 1, 375$ و از طرفی داریم $c'_j = \theta_j^+ - \theta_j^- + c_j$. لذا $c'_1 = 1 - 0 + 2 = 3$ و بقیه ضرایب به قوت خود باقی می‌مانند پس مسئله‌ی معکوس به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = x_1 + 3x_2 + 3x_3 \\ \text{s.t.} \quad & 4x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ & -4x_1 + x_2 + x_3 \leq 0 \\ & -6x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 0 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

در مسئله‌ی معکوس فوق x^0 بهینه است و مقدار تابع هدف برابر است با $Z^* = 1, 625$.

۲.۳ معکوس مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی با تغییر ضرایب فنی (c) و بردار سمت راست (b)

مطالب این بخش با استفاده از مرجع [۸] بیان شده است.

فرض کنید $\psi(b, c)$ مجموعه جواب‌های نگاشته شده از یک مسئله‌ی بهینه سازی پارامتریک خطی با پارامترهای b در بردار سمت راست و بردار c در ضرایب تابع هدف باشد، سپس برای نقطه‌ی x^0 شدنی داده شده ما به دنبال پارامترهای جدید با مقادیر $\bar{b}$ و $\bar{c}$ مناسبی هستیم که $\bar{x} \in \psi(\bar{b}, \bar{c})$ ، یک جواب بهینه باشد بطوریکه $\|\bar{x} - x^0\|$ مینیمم شود، در این صورت x^0 برای مسئله‌ی معکوس بدست آمده با پارامترهای $\bar{b}$ و $\bar{c}$ بهینه است و یا اینکه به جواب بهینه نزدیک می‌باشد.

۱.۲.۳ مدل سازی مسئله

تعریف ۱.۲.۳. فرض کنید $\psi(b, c) = \operatorname{argmax}\{c^T x : Ax = b, x \geq 0\}$ نشان دهنده‌ی مجموعه جواب‌های شدنی مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی پارامتریک

$$\max\{c^T x : Ax = b, x \geq 0\} \quad (۱۲.۳)$$

باشد. که پارامترهای بردار سمت راست و تابع هدف اعضایی از مجموعه‌های داده شده زیر هستند.

$$\beta = \{b : Bb = \tilde{b}\}, \quad \zeta = \{c : Cc = \tilde{c}\}$$

در اینجا $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ یک ماتریس رتبه کامل سطری از مرتبه m است و

$$\tilde{c} \in \mathbb{R}^q, \tilde{b} \in \mathbb{R}^p, C \in \mathbb{R}^{q \times n}, B \in \mathbb{R}^{p \times m}$$

همچنین فرض شود که $x^\circ \in \mathbb{R}^n$ به عنوان یک جواب شدنی در نظر گرفته شده است. هدف یافتن مقادیر $\bar{b}$ و $\bar{c}$ است بطوریکه $x^\circ \in \psi(\bar{b}, \bar{c})$. یا اگر این حالت امکان پذیر نبود حداقل x° نزدیک به $\psi(\bar{b}, \bar{c})$ باشد. بنابراین مسئله‌ی برنامه‌ریزی زیر را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

$$\min\{\|x - x^\circ\| : x \in \psi(b, c), b \in \beta, c \in \zeta\} \quad (۱۳.۳)$$

که تابع هدف آن یعنی $f(x) := \|x - x^\circ\|$ محدب است، اما لازم نیست ناحیه‌ی شدنی محدب باشد. در این مورد از یک نرم یا شبه نرم دلخواه استفاده می‌کنیم. لازم نیست که حتما نرم اقلیدسی باشد. حال برای راحتی کار از نرم l_1 کمک می‌گیریم. در اینجا فرض بر این است که سیستم زیر نشدنی است:

$$\begin{aligned} A^T y &= c \\ Cc &= \tilde{c} \end{aligned} \quad (۱۴.۳)$$

در غیر این صورت هر جواب سیستم زیر

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ x &\geq 0 \\ Bb &= \tilde{b} \end{aligned}$$

برای (۱۳.۳) شدنی خواهد بود. که این یعنی معادله‌ی (۱۳.۳) به

$$\min\{\|x - x^\circ\| : Ax = b, x \geq 0, Bb = \tilde{b}\}$$

تبدیل می‌شود، که یک مسئله‌ی بهینه سازی محدب است.

۲.۲.۳ فرمول‌بندی بصورت یک برنامه‌ریزی ریاضی با قیدهای تعادل

در ابتدا مسئله‌ی (۱۳.۳) توسط شرایط K.K.T به یک برنامه‌ی ریاضی با قیود بصورت معادله، برنامه‌ریزی ریاضی با قیدهای تعادل^۱ تبدیل می‌شود یعنی:

$$\begin{aligned} \text{MPEC : } \|x - x^\circ\| &\longrightarrow \min_{x,b,c,y} \\ Ax &= b \\ x &\geq 0 \\ A^T y &\geq c \\ x^T(A^T y - c) &= 0 \\ Bb &= \tilde{b} \\ Cc &= \tilde{c} \end{aligned} \quad (15.3)$$

در ادامه قصد داریم جواب بهینه موضعی را بطور شفاف توضیح دهیم.

تعریف ۲.۲.۳. نقطه‌ی $\bar{x}$ یک جواب بهینه موضعی از مسئله‌ی (۱۳.۳) است اگر یک همسایگی U از $\bar{x}$ وجود داشته باشد بطوریکه $\|x - x^\circ\| \geq \|\bar{x} - x^\circ\|$ برای همه‌ی x, b, c با ویژگی $c \in \zeta, b \in \beta, x \in U \cap \psi(b, c)$.

با استفاده از تعریف رایج ۲.۲.۳ برای جواب بهینه موضعی مسئله‌ی (۱۵.۳) دیده می‌شود که برای هر جواب بهینه موضعی $\bar{x}$ با پارامترهای $\bar{b}$ و $\bar{c}$ از مسئله‌ی (۱۳.۳) یک $\bar{y}$ وجود دارد بطوریکه $(\bar{x}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{y})$ یک جواب بهینه موضعی مسئله‌ی (۱۵.۳) است، اما عکس این مطلب در حالت کلی برقرار نیست. مرجع [۸] را نگاه کنید.

قضیه ۳.۲.۳. فرض کنید $\beta = \{\bar{b}\}$ و $\psi(\bar{b}, c) = \{\bar{x}\}$ برای همه‌ی $c \in U \cap \zeta$ ، که U همسایگی از $\bar{c}$ باشد، آنگاه $(\bar{x}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{y})$ یک جواب بهینه موضعی مسئله‌ی (۱۵.۳) است که $\bar{y}$ متغیر دوگان می‌باشد.

برای اثبات قضیه فوق به مرجع [۸] مراجعه کنید.

۳.۲.۳ بهینگی توسط مخروط مماس

حال یک نقطه‌ی شدنی $\bar{x}$ مسئله‌ی (۱۳.۳) را انتخاب می‌کنیم، خواه بهینه موضعی باشد خواه نباشد. فرض می‌کنیم $I(\bar{x}) = \{i : \bar{x}_i = 0\}$ مجموعه‌ی اندیسی از اندیس‌های فعال باشد. سپس برای هر جواب شدنی x از مسئله‌ی (۱۳.۳) به اندازه‌ی کافی نزدیک به $\bar{x}$ ، برای همه‌ی $i \notin I(\bar{x})$ داریم $x_i > 0$.

^۱Mathemathical Program With Equilibrium

قضیه‌ی مکمل زائد سبب می‌شود که ما مجموعه‌های اندیس گذار زیر را چنین تعریف کنیم.

- $I(c, y) = \{i : (A^T y - c)_i > 0\}.$
- $\mathcal{I}(\bar{x}) = \{I(c, y) : A^T y \geq c, (A^T y - c)_i = 0 \ \forall i \notin I(\bar{x}), Cc = \tilde{c}\}.$
- $I^\circ(\bar{x}) = \bigcap_{I \in \mathcal{I}(\bar{x})} I.$

نکته ۴.۲.۳. اگر یک اندیس مجموعه‌ی I متعلق به خانواده‌ی $\mathcal{I}(\bar{x})$ باشد آنگاه

$$I^\circ(\bar{x}) \subseteq I \subseteq I(\bar{x}).$$

یک محاسبه‌ی کارآمد از مجموعه‌ی اندیس گذار $I^\circ(\bar{x})$ برای ارزیابی شرایط بهینگی لازم است. با استفاده از مقایسه، شناخت خود خانواده‌ی $\mathcal{I}(\bar{x})$ لازم نیست.

نکته ۵.۲.۳. اگر $j \in I(\bar{x}) \setminus I^\circ(\bar{x})$ و تنها اگر سیستم

$$\begin{aligned} (A^T y - c)_i &= 0, \ \forall i \notin I(\bar{x}), \\ (A^T y - c)_j &= 0, \\ (A^T y - c)_i &\geq 0, \ \forall i \in I(\bar{x}) \setminus \{j\}, \\ Cc &= \tilde{c}. \end{aligned}$$

شدنی باشد. بنابراین $I^\circ(\bar{x})$ یکی از اعضای $\mathcal{I}(\bar{x})$ است اگر و تنها اگر سیستم

$$\begin{aligned} (A^T y - c)_i &= 0, \ \forall i \notin I^\circ(\bar{x}), \\ (A^T y - c)_i &\geq 0, \ \forall i \in I^\circ(\bar{x}), \\ Cc &= \tilde{c}. \end{aligned}$$

شدنی باشد.

هم اکنون قادریم مسئله‌ی (۱۵.۳) را به یک مسئله‌ی هم ارز موضعی تبدیل کنیم که صریحا به y و c وابسته نیست.

لم ۶.۲.۳. $\bar{x}$ یک جواب بهینه‌ی موضعی از مسئله‌ی (۱۳.۳) است اگر و تنها اگر $\bar{x}$ یک جواب بهینه‌ی سراسری از همه‌ی مسائل (A_I) باشد:

$$\begin{aligned} \|x - x^\circ\| &\longrightarrow \min_{x, b}, \\ (A_I) : \quad Ax &= b, \\ x_i &= 0, \ \forall i \in I, \\ Bb &= \tilde{b} \end{aligned}$$

که در آن $I \in \mathcal{I}(\bar{x})$.

برهان. فرض کنید $\bar{x}$ یک جواب بهینه‌ی موضعی برای مسئله‌ی (۱۳.۳) باشد و همچنین فرض کنید که یک مجموعه‌ی $I \in \mathcal{I}(\bar{x})$ با یک $\bar{x}$ که برای (A_I) بهینه سراسری نیست وجود داشته باشد. آنگاه یک دنباله‌ی $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ از جواب‌های شدنی (A_I) باشد شرط $\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = \bar{x}$ و $\|x^k - x^\circ\| < \|\bar{x} - x^\circ\|$ برای همه‌ی k ها وجود دارد لذا $\bar{x}$ نمی‌تواند یک جواب بهینه‌ی موضعی برای مسئله‌ی (۱۳.۳) باشد و از آنجائیکه $I \in \mathcal{I}(\bar{x})$ نتیجه می‌دهد که x^k برای مسئله‌ی (۱۳.۳) شدنی است، که این یک تناقض است پس فرض خلف باطل و قسمت اول ثابت می‌شود.

به عکس: فرض کنید که $\bar{x}$ یک جواب بهینه سراسری برای همه‌ی مسائل (A_I) باشد و همچنین فرض کنید یک دنباله‌ی $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ از نقاط شدنی مسئله‌ی (۱۳.۳) باشد شرط $\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = \bar{x}$ و $\|x^k - x^\circ\| < \|\bar{x} - x^\circ\|$ برای همه‌ی k ها وجود داشته باشد. برای k های به قدر کافی بزرگ، اعضای این دنباله برای همه‌ی $i \notin I(\bar{x})$ ، شرط $x_i^k > 0$ صادق است و بدلیل اینکه x^k برای مسئله‌ی (۱۳.۳) شدنی است مجموعه‌های $I \in \mathcal{I}(\bar{x})$ وجود دارند بطوریکه x^k برای مسئله‌ی (A_I) شدنی است زیرا $\mathcal{I}(\bar{x})$ فقط یک تعداد متناهی از مجموعه را شامل می‌شود. یک دنباله‌ی $\{x^{k_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ وجود دارد که x^{k_j} همه‌ی جواب‌های شدنی برای مسئله در نظر گرفته شده‌ی (A_I) هستند. لذا این یک تناقض است با بهینگی $\bar{x}$ برای مسئله‌ی (A_I) ، پس فرض خلف باطل و قسمت دوم نیز ثابت می‌شود. $\square$

نتیجه ۷.۲.۳. اگر $\bar{x}$ یک جواب بهینه‌ی موضعی مسئله (۱۳.۳) باشد می‌توانیم مسئله‌ی زیر را مورد بررسی قرار دهیم.

$$\begin{aligned} \|x - x^\circ\| &\longrightarrow \min_{x, b, I}, \\ Ax &= b, \\ x &\geq 0, \\ x_i &= 0, \quad \forall i \in I, \\ Bb &= \tilde{b}, \\ I &\in \mathcal{I}(\bar{x}) \end{aligned} \quad (۱۶.۳)$$

در اینجا مجموعه‌ی اندیس I ، یک متغیر مینیم سازی است.

مسئله‌ی (۱۶.۳) همه‌ی مسائل (A_I) را به یک مسئله تبدیل می‌کند و این یعنی اینکه ما باید از بین همه‌ی جواب‌های بهینه‌ی مسائل (A_I) برای $I \in \mathcal{I}(\bar{x})$ بهترین جواب را پیدا کنیم. در اینجا از نمادگذاری زیر استفاده می‌کنیم:

$$T_I(\bar{x}) = \{d \mid \exists r : Ad = r, Br = 0, d_i \geq 0 \quad \forall i \in I(\bar{x}) \setminus I, d_i = 0 \quad \forall i \in I\}$$

این مجموعه با مخروط مماس (تنها وابسته به x)، مجموعه‌ی جواب‌های شدنی از مسئله‌ی (A_I) در نقطه‌ی $\bar{x}$ متناظر است. لذا لم قبل یک شرط لازم و کافی برای بهینگی می‌باشد.

لم ۸.۲.۳. $\bar{x}$ یک جواب بهینه‌ی موضعی برای مسئله‌ی (۱۶.۳) است اگر و تنها اگر $f'(\bar{x}, d) \geq 0$ باشد برای همه‌ی

$$d \in T(\bar{x}) : \bigcup_{I \in \mathcal{I}(\bar{x})} T_I(\bar{x})$$

برای مشاهده اثبات و توضیحات بیشتر به مرجع [۸] مراجعه کنید.

نکته ۹.۲.۳. $T(\bar{x})$ یک مخروط مماس (وابسته به x) که لزوماً محدب نیست، از مسئله‌ی (۱۶.۳) در نقطه‌ی $\bar{x}$ است.

نتیجه ۱۰.۲.۳. شرط $I^\circ(\bar{x}) \in \mathcal{I}(\bar{x})$ نتیجه می‌دهد که $T_{I^\circ(\bar{x})} = T(\bar{x})$.

نکته ۱۱.۲.۳. اگر f در $\bar{x}$ مشتق پذیر باشد آنگاه می‌گوئیم $f'(\bar{x}, \cdot)$ بر $T(\bar{x})$ نامنفی است و این معادل است با اینکه بگوئیم:

$$f'(\bar{x}, d) \geq 0 \quad \forall d \in \text{conv } T(\bar{x}) \quad (17.3)$$

که "conv" دلالت بر پوسته‌ی محدب دارد.

در مثال زیر نشان داده شده است که (۱۷.۳) برای بهینگی کافی است اما شرط لازم، نیست.

مثال ۱۲.۲.۳. مسئله را تحت نرم l_1 با دو متغیر x در تابع هدف و

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \zeta = \{2e_1^{(4)} + te_4^{(4)} : t \in \mathbb{R}\}$$

$$x^\circ = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad x^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

در نظر بگیرید. ما نقطه‌ی $\bar{x}$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

خط‌های پررنگ شده در شکل ۱.۳ مجموعه‌ی شدنی مسئله است و خط‌های هاشور خورده، خط‌های تراز با شیب‌های ۱ و -۱ می‌باشند. بنابراین مخروط مماس را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

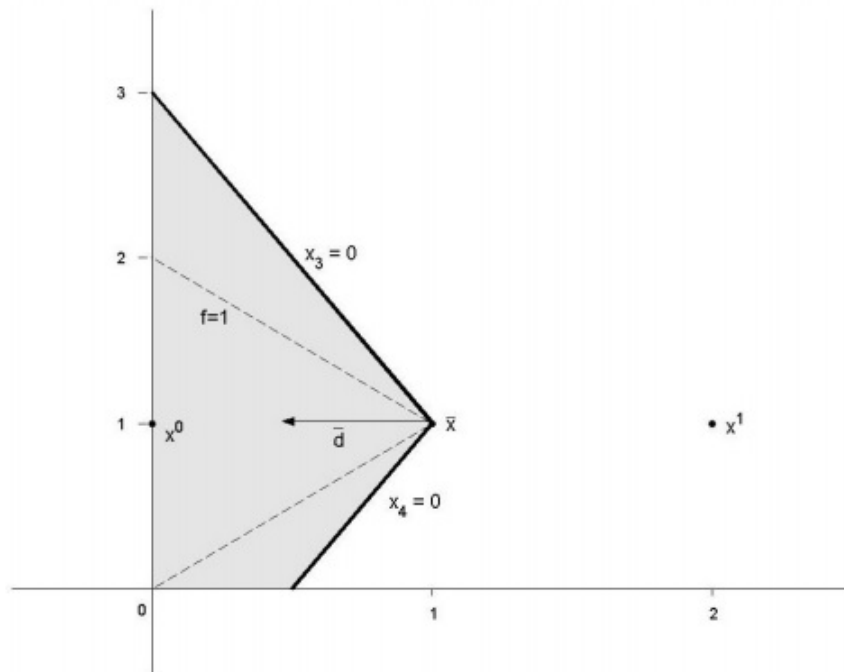
$$\text{conv } T(\bar{x}) = \{d : 2d_1 + d_2 + d_3 = 0; 2d_1 - d_2 + d_4 = 0; d_3, d_4 \geq 0\}$$

در نهایت با در نظر گرفتن x° و تابع هدف به صورت $|x_1 - x_1^\circ| + |x_2 - x_2^\circ|$ داریم $\bar{d} = (-1, 0, 2, 2)^T \in \text{conv } T(\bar{x})$ یک جهت با $f'(\bar{x}, \bar{d}) = -1$ و همچنین $\bar{x}$ یک جواب بهینه‌ی سراسری است. اما اگر ما x^1 را بجای x° انتخاب کنیم و تابع هدف بصورت $|x_1 - x_1^1| + |x_2 - x_2^1|$ باشد آنگاه

$\bar{d} = (1, 0, -2, -2)^T \in \text{conv } T(\bar{x})$ یک جهت با $f'(\bar{x}, \bar{d}) = 1$ است که طبق شرط (۱۷.۳) بهینگی $\bar{x}$ را نتیجه می‌گیریم.

۴.۲.۳ یک فرمول برای مخروط مماس

جهت بررسی شرط بهینگی (۱۷.۳) برای یک فرمول واضح از مخروط مماس، $\text{conv } T(\bar{x})$ ضروری است. برای نماد گذاری ساده فرض می‌کنیم $I(\bar{x}) = \{1, 2, \dots, k\}$ و $I^\circ(\bar{x}) = \{l+1, \dots, k\}$ که



شکل ۱۰.۳: شکل مثال ۱۲.۲.۳

بنابراین همه‌ی نقاط شدنی (۱۳.۳) که به اندازه‌ی کافی به $\bar{x}$ نزدیک است برای همه‌ی $l \leq k \leq n$. شرط $x_i = 0$ صادق است. مسئله‌ی آزادسازی زیر را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

$$\begin{aligned} & \|x - x^\circ\| \longrightarrow \min_{x,b} \\ & Ax = b \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, l, \\ & x_i = 0, \quad i = l+1, \dots, k, \\ & Bb = \tilde{b}. \end{aligned} \quad (18.3)$$

در این قسمت از نمادگذاری زیر استفاده می‌کنیم:

$$T_R(\bar{x}) = \{d \mid \exists r : Ad = r, Br = 0, d_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, l, d_i = 0 \quad i = l+1, \dots, k\}$$

این مجموعه با مخروط مماس (وابسته به x) مسئله‌ی (۱۸.۳) در نقطه‌ی $\bar{x}$ مطابقت دارد. از آنجائیکه $I^\circ \subseteq I$ برای همه‌ی $I \in \mathcal{I}(\bar{x})$ می‌توان نتیجه گرفت که

$$\text{conv } T(\bar{x}) = \text{cone } T(\bar{x}) \subseteq T_R(\bar{x}) \quad (19.3)$$

گفته می‌شود که $\bar{x}$ در شرط رتبه‌ی کامل صدق می‌کند اگر:

$$\text{Span}(\{A_i : i \notin I(\bar{x})\}) = \mathbb{R}^m$$

که A_i نشان دهنده‌ی i -امین ستون از ماتریس A است.

مثال ۱۳.۲.۳. همه‌ی رئوس ناتباهیده‌ی دستگاه $Ax = b, x \geq 0$ در شرط رتبه‌ی کامل صدق می‌کند.

این شرط این اجازه را به ما می‌دهد که بین مخروط‌های بالا تساوی برقرار کنیم.

قضیه ۱۴.۲.۳. فرض می‌کنیم شرط رتبه‌ی کامل در نقطه‌ی $\bar{x}$ برقرار باشد. آنگاه تساوی در معادله‌ی (۱۹.۳) برقرار است.

برهان. فرض کنید $\bar{d}$ یک عضو دلخواه از $T_R(\bar{x})$ باشد یعنی $\bar{r}$ موجود باشد بطوریکه $B\bar{r} = 0, A\bar{d} = \bar{r}$ و $\bar{d}_i \geq 0$ برای $i = 1, \dots, l$ و $\bar{d}_i = 0$ برای $i = l+1, \dots, k$. سیستم خطی زیر را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

$$\begin{aligned} Ad &= \delta_{1,j} \bar{r} \\ (S_j): \quad d_j &= \bar{d}_j \\ d_i &= 0, \quad i = 1, \dots, k, \quad i \neq j \end{aligned}$$

برای $j = 1, \dots, l$ که اگر $j = 1$ آنگاه $\delta_{1,j} = 1$ و اگر $j \neq 1$ آنگاه $\delta_{1,j} = 0$. این سیستم‌ها همگی شدنی‌اند زیرا شرط رتبه‌ی کامل برقرار است.

بنابراین فرض کنید $d^1, \dots, d^l$ جواب‌های دلخواهی از سیستم‌های $(S_1), \dots, (S_l)$ باشند. حال جهت $d = \sum_{j=1}^l d^j$ را تعریف می‌کنیم و برای $i = 1, \dots, k$ $d_i = \bar{d}_i$ در نظر می‌گیریم همچنین $Ad = A\bar{d} = \bar{r}$ و چون ما بردارهای $d^1, \dots, d^l$ را دلخواه انتخاب کردیم این امکان وجود دارد که $d \neq \bar{d}$ اما ما می‌توانیم با تبدیل جواب d^1 توسط یک بردار خاص بصورت $N(A) = \{z : Az = 0\}$ به تساوی برسیم.

بنابراین تعریف می‌کنیم $\hat{d}^1 := d^1 + \bar{d} - d$ و چون d^1 برای (S_1) شدنی است و $d_i = \bar{d}_i$ برای $i = 1, \dots, k$ لذا $Ad = A\bar{d} = \bar{r}$ و برای همه‌ی $i = 2, \dots, k$ $\hat{d}_i^1 = 0$ در نظر می‌گیریم و $A\hat{d}^1 = A(d^1 + \bar{d} - d) = \bar{r} + \bar{r} - \bar{r} = \bar{r}$ و در نتیجه $\hat{d}^1$ همچنین یک جواب (S_1) است بنابراین داریم $\hat{d}^1 + \sum_{j=2}^l d^j = \bar{d} - d + \sum_{j=1}^l d^j = \bar{d}$. بعنوان یک نتیجه از تعریف مجموعه‌ی $I^\circ(\bar{x})$ مجموعه‌های اندیس‌گذار $I_j \in I(\bar{x})$ با شرط $j \notin I_j$ برای همه‌ی $j \in \{1, \dots, l\} = I(\bar{x}) \setminus I^\circ(\bar{x})$ وجود دارند. بنابراین $\hat{d}^1$ یک عضو از مخروط مماس مسئله‌ی (A_{I_1}) و d^j ها عناصر مخروط‌های مماس مسائل (A_{I_j}) برای $j = 2, \dots, l$ هستند. (به تعریف این مخروط‌ها توجه کنید). در نهایت $\bar{d}$ مجموعی از یک تعداد متناهی اعضای $T(\bar{x})$ است. بنابراین $T_R(\bar{x}) \subseteq \text{cone } T(\bar{x})$. $\square$

با ترکیب لم ۲۰.۱.۳ و نکته‌های ۵.۲.۳ و ۱۱.۲.۳ نتیجه‌ی زیر حاصل می‌شود.

نتیجه ۱۵.۲.۳. فرض کنید $\bar{x}$ یک نقطه‌ی مشتق‌پذیر f باشد. آنگاه حداکثر n سیستم از معادلات (نامعادلات) خطی باید مورد بررسی دقیق برای محاسبه‌ی مجموعه‌ی اندیس $I^\circ(\bar{x})$ قرار بگیرند. بنابراین تحقق بهینگی موضعی یک نقطه‌ی شدنی مسئله‌ی (۱۳.۳) در حالت چندجمله‌ای ممکن است.

۳.۳ مثال عددی

مثال ۱۰.۳.۳. این مثال نشان خواهد داد که شرط رتبه‌ی کامل^۲ FRC برای برقراری تساوی در (۱۹.۳) لازم نیست، دستگاه زیر را در نظر بگیرید:

$$x_2 - x_4 = 1$$

$$2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 3$$

$$2x_2 - x_3 + x_6 = 1$$

$$2x_1 + x_3 - x_7 = 3$$

$$x_3 + x_8 = 3$$

$$x_i \geq 0$$

$$\beta = \{(1, 3, 1, 3, 3)^T\}$$

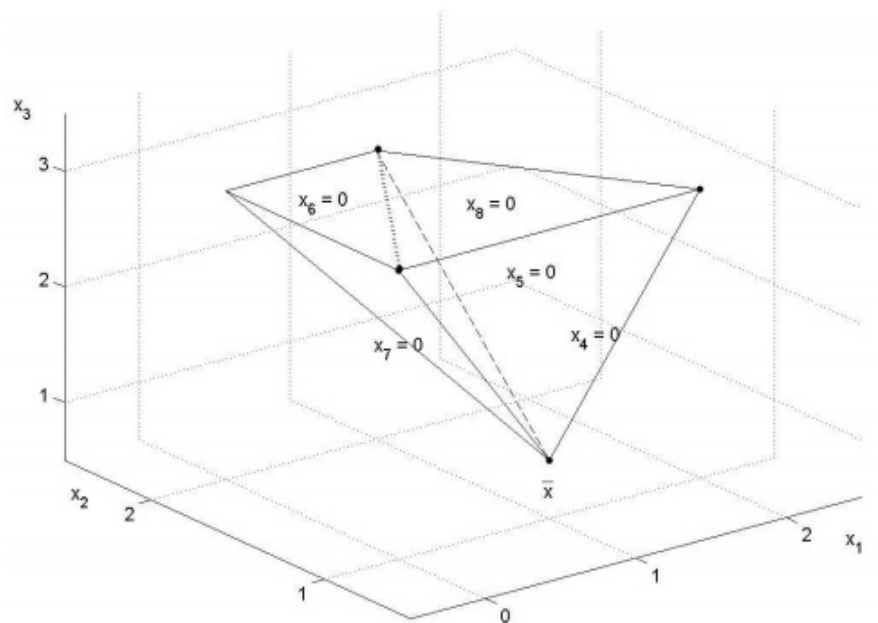
$$\zeta = \{c = -e_4^{(\lambda)} + t(2e_1^{(\lambda)} + 3e_2^{(\lambda)} - e_3^{(\lambda)}) + s(3e_2^{(\lambda)} - e_3^{(\lambda)}) : t, s \in \mathbb{R}\}$$

نقطه‌ی $\bar{x} = (1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 2)^T$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم. بنابراین $I(\bar{x}) = \{4, 5, 6, 7\}$ و $I^\circ = \emptyset$ و $T_R(\bar{x}) = \{d : Ad = 0, d_i \geq 0 \forall i \in I(\bar{x})\}$ بدست می‌آوریم. ناحیه‌ی شدنی مسئله‌ی (۱۶.۳) برای این مثال شامل چهار وجه $x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 0, x_7 = 0$ و بطوریکه $(t = s = 0; t = 1, s = 0; t = 0, s = 1)$ به ترتیب $t = -\frac{1}{3}, s = \frac{2}{3}$ حال دومین بردار در ζ را حذف می‌کنیم، یعنی داریم:

$$\zeta = \{c = -e_4^{(\lambda)} + t(2e_1^{(\lambda)} + 3e_2^{(\lambda)} - e_3^{(\lambda)}) : t, s \in \mathbb{R}\}$$

آنگاه $I^\circ = \emptyset$ بدست می‌آوریم. یعنی اینکه مخروط‌های مماس مسئله‌ی آزاد شده شبیه همان قبلی است. اما مخروط مماس محدب، $\text{conv}T(\bar{x})$ مسئله‌ی (۱۶.۳) یک زیرمجموعه‌ی مناسب از این مخروط است. از آنجائیکه مجموعه‌ی شدنی شامل فقط دو وجه $x_4 = 0$ و $x_5 = 0$ است، مخروط پوسته‌ی محدب $T(\bar{x})$ توسط چهار راس پررنگ شده، که نوک مخروط $\bar{x}$ است. شکل ۲.۳ را ببینید.

^۲Full Rank Condition



شکل ۲.۳: شکل مثال ۱.۳.۳

فصل ۴

معکوس یک مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی-کسری

مطالب این فصل برگرفته از مراجع [۱۶، ۱۲] می‌باشد. در مسئله‌ی معکوس عموماً یک جواب شدنی فرض می‌شود و سپس در صورت امکان مقادیر ضرایب تابع هدف یا بردار سمت راست افزایش یا کاهش پیدا می‌کند تا جواب شدنی فرض شده، در مسئله‌ی جدید همان مسئله‌ی معکوس است بهینه شود. همانطور که در فصل اول ملاحظه شد شکل متعارفی یک مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی-کسری به شکل زیر می‌باشد.

$$\begin{aligned} \text{LFP : } \max Z &= \frac{C(x)}{D(x)} = \frac{\sum_{j \in J} c_j x_j + c_0}{\sum_{j \in J} d_j x_j + d_0}, \\ \text{s.t } \quad \sum_{j \in J} a_{ij} x_j &\leq b_i, \quad \forall i \in I, \\ x_j &\geq 0, \quad \forall j \in J. \end{aligned} \quad (1.4)$$

در این فصل، هدف، یافتن مدلی برای معکوس مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی-کسری می‌باشد که این کار با کمترین تغییر ضرایب تابع هدف انجام می‌شود تا به یک مسئله بهینه، برای x^0 شدنی داده شده برسیم. به دو روش معکوس مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی-کسری را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

۱.۴ روش استفاده از خطی سازی تابع کسری

در اینجا I بیانگر مجموعه‌ی اندیس محدودیت‌ها و J مجموعه‌ی اندیس متغیرهای تصمیم است و همچنین فرض می‌شود $D(x) = \sum_{j \in J} d_j x_j + d_0 > 0$. مسئله‌ی (۱.۴) را به شکل مسئله‌ی پارامتریک خطی تبدیل می‌کنیم و مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی زیر را

مورد بررسی قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} & \max \{C(x) - \lambda D(x)\}, \\ & \text{یا} \\ & \max \left\{ \left(\sum_{j \in J} c_j x_j + c_0 \right) - \lambda \left(\sum_{j \in J} d_j x_j + d_0 \right) \right\}, \\ & \text{s.t} \quad \sum_{j \in J} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad \forall i \in I, \\ & \quad x_j \geq 0, \quad \forall j \in J. \end{aligned} \quad (2.4)$$

که λ یک عدد حقیقی است.

دوگان مسئله برنامه‌ریزی خطی بالا به شکل زیر است:

$$\begin{aligned} & \min \sum_{i \in I} b_i y_i + (c_0 - \lambda d_0), \\ & \text{s.t} \quad \sum_{i \in I} a_{ij} y_i \geq (c_j - \lambda d_j), \\ & \quad y_j \geq 0, \quad \forall i \in I. \end{aligned} \quad (3.4)$$

x و y جواب‌های بهینه مسائل اولیه و دوگان هستند اگر و تنها اگر شرایط $K.K.T$ برقرار باشد یعنی:

اولیه شدنی:

$$\sum_{j \in J} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad x_j \geq 0.$$

دوگان شدنی:

$$\sum_{i \in I} a_{ij} y_i \geq (c_j - \lambda d_j), \quad y_j \geq 0.$$

دوگان قوی:

$$\left(\sum_{j \in J} c_j x_j + c_0 \right) - \lambda \left(\sum_{j \in J} d_j x_j + d_0 \right) = \sum_{i \in I} b_i y_i + (c_0 - \lambda d_0).$$

اگر x^0 یک جواب شدنی برای مسئله LFP با مقدار تابع هدف z^0 باشد آنگاه هدفمان تعدیل ضرایب تابع هدف با کمترین تغییرات برای بهینه شدن x^0 در مسئله جدید است. فرض کنید c' و d' مقادیر تعدیل یافته پارامترهای c و d باشند. یعنی $C' = (c'_0, c'_1, \dots, c'_n)$ و $D' = (d'_0, d'_1, \dots, d'_n)$ مقادیر اصلاح شده $C = (c_0, c_1, \dots, c_n)$ و $D = (d_0, d_1, \dots, d_n)$ باشند. آنگاه با استفاده از قضیه ۱.۲.۲، x^0 یک جواب بهینه با مقدار تابع هدف z^0 خواهد بود اگر

$$F(z^0) = \max_{x \in S} \{C'(x) - z^0 D'(x)\} = 0 \quad (4.4)$$

که در آن

$$z^\circ = \frac{C'(x^\circ)}{D'(x^\circ)}$$

اگر c, d, λ و x را با c', d', z° و x° جایگزین کنیم و از نتیجه‌ی (۴.۴) استفاده نمائیم آنگاه شرایط بهینگی می‌تواند بصورت زیر بیان گردد:

$$\begin{aligned} i) \quad & \sum_{i \in I} a_{ij} y_j \geq (c'_j - z^\circ d'_j), \\ ii) \quad & \sum_{i \in I} b_i y_i + (c'_\circ - z^\circ d'_\circ) = \circ = \left(\sum_{j \in J} c'_j x^\circ_j + c'_\circ \right) - z^\circ \left(\sum_{j \in J} d'_j x^\circ_j + d'_\circ \right), \\ iii) \quad & y_i \geq \circ, \quad \forall i \in I. \end{aligned} \quad (5.4)$$

حال مسئله‌ی معکوس به صورت $\min ||(c', d') - (c, d)||$ است بطوریکه جواب شدنی داده شده‌ی x° ، با مقدار تابع هدف z° بهینه می‌باشد. در اینجا $||\cdot||$ می‌تواند یکی از نرم‌های l_1, l_2 یا l_∞ باشد. اگر ما مسئله را با نرم l_1 مورد بررسی قرار دهیم، مسئله‌ی معکوس می‌تواند بصورت زیر فرموله شود:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j \in J} [|c'_j - c_j| + |d'_j - d_j|], \\ \text{s.t} \quad & \sum_{j \in J} a_{ij} y_j \geq (c'_j - z^\circ d'_j), \\ & \sum_{j \in J} b_i y_i + (c'_\circ - z^\circ d'_\circ) = \circ, \\ & \left(\sum_{j \in J} c'_j x^\circ_j + c'_\circ \right) - z^\circ \left(\sum_{j \in J} d'_j x^\circ_j + d'_\circ \right) = \circ, \\ & y_i \geq \circ, \quad \forall i \in I. \end{aligned} \quad (6.4)$$

فرض کنید $c'_j = c_j + e_j - f_j$ که $e_j, f_j \geq \circ$ و $d'_j = d_j + p_j - q_j$ که $p_j, q_j \geq \circ$ برای همه‌ی $j \in J \cup \{\circ\}$ هستند. لذا مسئله‌ی معکوس بصورت زیر تبدیل خواهد شد.

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j \in J \cup \{\circ\}} \{e_j + f_j + p_j + q_j\}, \\ \text{s.t} \quad & \sum_{i \in I} a_{ij} y_i - e_j + f_j + z^\circ(p_j - q_j) \geq (c_j - z^\circ d_j) \quad \forall j \in J, \\ & \sum_{i \in I} b_i y_i + e_\circ - f_\circ - z^\circ(p_\circ - q_\circ) + (c_\circ - z^\circ d_\circ) = \circ, \\ & \sum_{j \in J} \{e_j - f_j - z^\circ(p_j - q_j)\} x^\circ_j + e_\circ - f_\circ - z^\circ(p_\circ - q_\circ) + \\ & \sum_{j \in J} (c_j - z^\circ d_j) x^\circ_j + c_\circ - z^\circ d_\circ = \circ, \\ & y_i \geq \circ, \quad \forall i \in I \quad \& \quad e_j, f_j, p_j, q_j \geq \circ \quad \forall j \in J \cup \{\circ\}. \end{aligned} \quad (7.4)$$

نکته ۱.۱.۴. همیشه لزومی ندارد که مسئله معکوس وجود داشته باشد، وجود مسئله معکوس بستگی به جواب شدنی داده شده x° و مقدار تابع هدف بهینه z° دارد زیرا مقدار تابع هدف کران بالا و پائین مشخصی دارد. خودمان را برای موقعیت‌هایی که مسئله معکوس وجود خواهد داشت، محدود می‌کنیم.

مثال عددی

مثال ۲.۱.۴. مسئله LFP زیر را مورد بررسی قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} \max z &= \frac{5x_1 - 3x_2 + 2}{4x_1 + x_2 - 2}, \\ \text{s.t} \quad & -x_1 - 2x_2 \leq -4, \\ & x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

جواب بهینه مسئله LFP برابر است با $x_1 = 4$ و $x_2 = 0$ با مقدار تابع هدف $\frac{11}{4}$. اگر $x_1^\circ = 3$ و $x_2^\circ = 0.5$ جواب شدنی باشد که به ما داده شده و مقدار تابع هدف برابر با $z^\circ = 1$ باشد، انگاه مسئله معکوس آن تحت نرم l_1 بصورت برنامه‌ریزی خطی زیر است.

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j=0}^2 \{e_j + f_j + p_j + q_j\}, \\ \text{s.t} \quad & \sum_{i=1}^2 a_{ij}y_i - e_j + f_j + z^\circ(p_j - q_j) \geq (c_j - z^\circ d_j) \quad j = 1, 2, \\ & \sum_{i=1}^2 b_i y_i + e_0 - f_0 - z^\circ(p_0 - q_0) + (c_0 - z^\circ d_0) = 0 \quad j = 1, 2, \\ & \sum_{j=1}^2 \{e_j - f_j - z^\circ(p_j - q_j)\}x_j^\circ + e_0 - f_0 - z^\circ(p_0 - q_0) + \\ & \sum_{j=1}^2 (c_j - z^\circ d_j)x_j^\circ + c_0 - z^\circ d_0 = 0 \quad j = 1, 2, \\ & y_i \geq 0, \quad i = 1, 2 \quad \& \quad e_j, f_j, p_j, q_j \geq 0 \quad j = 0, 1, 2. \end{aligned}$$

با جایگذاری

$$\begin{aligned} a_{11} &= -1, a_{12} = -2, a_{21} = 1, a_{22} = 3, b_1 = -4, b_2 = 6, \\ c_0 &= 2, c_1 = 5, c_2 = -3, d_0 = -2, d_1 = 4, d_2 = 1, z^\circ = 1 \end{aligned}$$

و ساده کردن داریم:

$$\begin{aligned} \min \quad & (e_0 + f_0 + e_1 + f_1 + e_2 + f_2 + p_0 + q_0 + p_1 + q_1 + p_2 + q_2), \\ \text{s.t.} \quad & -y_1 + y_2 - e_1 + f_1 + p_1 - q_1 \geq 1, \\ & 2y_1 - 3y_2 + e_2 - f_2 - p_2 + q_2 \leq 4, \\ & 4y_1 - 6y_2 - e_0 + f_0 + p_0 - q_0 = 4, \\ & e_0 - f_0 + 3e_1 - 3f_1 + 0.5e_2 - 0.5f_2 - p_0 + q_0 \\ & \quad - 3p_1 + 3q_1 - 0.5p_2 + 0.5q_2 = -5, \\ & y_1, y_2, e_0, f_0, e_1, f_1, e_2, f_2, p_0, q_0, p_1, p_2, q_1, q_2 \geq 0. \end{aligned}$$

جواب بهینه‌ی مسئله‌ی فوق بصورت زیر است:

$$e_2 = 2, f_1 = 2, y_1 = 1$$

با استفاده از این مقادیر، مقادیر جدید c_1 و c_2 به ترتیب برابر ۳ و ۱- هستند. بنابراین تابع هدف اصلاح شده بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\max z = \frac{3x_1 - x_2 + 2}{4x_1 + x_2 - 2}$$

حال مسئله را با تابع هدف اصلاح شده حل می‌کنیم که در این صورت $x_1 = 3$ و $x_2 = 0.5$ بدست می‌آید و مقدار تابع هدف برابر است با $z = 1$.

۲.۴ روش دوگان

حال می‌توانیم شیوه‌ای شبیه روش گفته شده اما با لحاظ کردن یک تعریف جدید برای بدست آوردن معکوس یک مسئله برنامه‌ریزی خطی-کسری ارائه دهیم. فرض می‌کنیم که مدل (۱.۴) به عنوان یک مسئله برنامه‌ریزی خطی-کسری استاندارد داده شده است همانگونه که از قبل تعریف کرده بودیم داریم

$$\sum_{j \in J} d_j x_j + d_0 > 0$$

دوگان مسئله (۱.۴) را به شیوه‌ی ارائه شده در [۶] می‌نویسیم (بطور مفصل در مرجع مذکور بحث شده است)، که یک مسئله برنامه‌ریزی خطی بصورت زیر است

$$\begin{aligned} \min \quad & Z \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i \in I} a_{ij} y_i + d_j Z - v_j = c_j \\ & - \sum_{i \in I} b_i y_i + d_0 Z = c_0 \\ & y_i \geq 0, \quad \forall i \in I. \end{aligned} \tag{۸.۴}$$

که y_i متغیر مسئله دوگان وابسته به i امین محدودیت در مدل (۱.۴) و v_j متغیر مسئله دوگان وابسته به هر متغیر x_j می‌باشد.

اگر u متغیرزائد وابسته به هر محدودیت در مسئله‌ی اولیه (مدل (۱.۴)) باشد آنگاه شرط مکمل زائد برای مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی-کسری بصورت زیر است:

اگر $v^*x^* = 0$ آنگاه (x^*, u^*) جواب بهینه مسئله‌ی (۱.۴) و اگر $u^*y^* = 0$ آنگاه (y^*, z^*, v^*) جواب بهینه مسئله (۸.۴) است در روشی دیگر شرط مکمل زائد می‌تواند بصورت زیر بیان می‌شود:

$$\textbf{i: اگر } \sum_j a_{ij}x_j < b_i \text{ آنگاه } y_i = 0.$$

$$\textbf{ii: اگر } x_j > 0 \text{ آنگاه } v_j = 0.$$

اگر x^0 یک جواب شدنی مسئله اولیه و B یک مجموعه اندیس از محدودیت‌های لازم در مدل (۱.۴) با لحاظ x^0 باشد یعنی $B = \{i : \sum_j a_{ij}x_j^0 = b_i\}$ و فرض شود که F و L نمایشگر مجموعه‌ی اندیس از متغیرهای تعریف شده بصورت $L = \{j : x_j^0 = 0\}$ و $F = \{j : x_j^0 > 0\}$ باشد آنگاه می‌توان با استفاده از این نمادگذاری شرط مکمل زائد را بصورت زیر بازنویسی کرد:

$$y_i = 0, \quad \forall i \notin B$$

$$v_j = 0, \quad \forall j \notin L$$

حال قصد داریم که x^0 را برای مسئله (۱.۴) با استفاده از تغییر بردارهای $C = (c_0, c_1, c_2, \dots, c_n)$ و $D = (d_0, d_1, \dots, d_n)$ به $C' = (c'_0, \dots, c'_n)$ و $D' = (d'_0, \dots, d'_n)$ به یک جواب بهینه تبدیل کنیم.

بنابراین بجای C از C' و بجای D از D' استفاده می‌کنیم و در محدودیت‌های مدل (۸.۴) قرار می‌دهیم. لذا داریم:

$$\sum_{i \in B} a_{ij}y_i + d'_jZ - v_j = c'_j, \quad j \in L \text{ همه برای}$$

$$\sum_{i \in B} a_{ij}y_i + d'_jZ = c'_j, \quad j \in F \text{ همه برای}$$

$$- \sum_{i \in B} b_i y_i + d'_0Z = c'_0.$$

$$\text{برای همه } i \in B \text{ و } j \in F, v_j \geq 0, y_i \geq 0 \quad (9.4)$$

حال می‌خواهیم برای x^0 شدنی مقدار تابع هدف را برابر z^* کنیم بنابراین در مدل (۹.۴) Z را با z^* جایگزین می‌کنیم و علاوه بر آن شرط بهینگی x^0 در تابع هدف را مطابق با قضیه (۱.۲.۲) به مدل (۹.۴)

اضافه می‌نمائیم، در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i \in B} a_{ij} y_i + d'_j z^* - v_j = c'_j, \quad \forall j \in L \\
 & \sum_{i \in B} a_{ij} y_i + d'_j z^* = c'_j, \quad \forall j \in F \\
 & - \sum_{i \in B} b_i y_i + d'_o z^* = c'_o \\
 & \sum_{j \in J} (d'_j z^* - c'_j) x_j^o + (d'_o z^* - c'_o) = 0, \quad \forall j \in S \\
 & y_i \geq 0, v_j \geq 0, \quad \forall j \in L, i \in B.
 \end{aligned} \tag{۱۰.۴}$$

حال مسئله‌ی معکوس به صورت $\min ||(d', c') - (d, c)||$ است بطوریکه جواب شدنی داده شده‌ی x^o ، با مقدار تابع هدف z^o بهینه می‌باشد. در اینجا $||\cdot||$ می‌تواند یکی از نرم‌های l_1 ، l_2 یا l_∞ باشد. اگر ما مسئله را با نرم l_1 مورد بررسی قرار دهیم، مسئله‌ی معکوس می‌تواند بصورت زیر فرموله شود:

$$\begin{aligned}
 & \min \left(\sum_{j \in J} |d'_j - d_j| + \sum_{j \in J} |c'_j - c_j| \right) \\
 & \text{s.t.} \quad \sum_{i \in B} a_{ij} y_i + d'_j z^* - v_j = c'_j, \quad \forall j \in L \\
 & \quad \sum_{i \in B} a_{ij} y_i + d'_j z^* = c'_j, \quad \forall j \in F \\
 & \quad - \sum_{i \in B} b_i y_i + d'_o z^* = c'_o \\
 & \quad \sum_{j \in J} (d'_j z^* - c'_j) x_j^o + (d'_o z^* - c'_o) = 0, \quad \forall j \in S \\
 & \quad y_i \geq 0, v_j \geq 0, \quad \forall j \in L, i \in B
 \end{aligned} \tag{۱۱.۴}$$

مسئله بالا یک مسئله برنامه ریزی خطی نیست اما می‌توان آن را به یک مسئله برنامه ریزی خطی با استفاده از تبدیلات استاندارد تبدیل کرد. می‌دانیم که مینیم کردن $|d'_j - d_j|$ و $|c'_j - c_j|$ معادل است با مینیم کردن $p_j + q_j$ و $\alpha_j + \beta_j$ بطوریکه شرایط زیر برقرار باشد

$$\begin{aligned}
 & d'_j - d_j = p_j - q_j, \quad p_j \geq 0, q_j \geq 0 \\
 & c'_j - c_j = \alpha_j - \beta_j, \quad \alpha_j \geq 0, \beta_j \geq 0
 \end{aligned} \tag{۱۲.۴}$$

با استفاده از تبدیلات گفته شده در قسمت (۱۲.۴) در مدل (۱۱.۴) مسئله برنامه ریزی خطی-کسری بصورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned}
 & \min \sum_{j \in J} \{\alpha_j + \beta_j + p_j + q_j\} \\
 & \text{s.t.} \quad \sum_{i \in B} a_{ij} y_i + (d_j + p_j - q_j) z^* - v_j = c_j + \alpha_j - \beta_j, \quad \forall j \in L \\
 & \quad \sum_{i \in B} a_{ij} y_i + (d_j + p_j - q_j) z^* = c_j + \alpha_j - \beta_j, \quad \forall j \in F \\
 & \quad - \sum_{i \in B} b_i y_i + (d_0 + p_0 - q_0) z^* = c_0 + \alpha_0 - \beta_0. \\
 & \quad \sum_{j \in J} ((d_j + p_j - q_j) z^* - (c_j + \alpha_j - \beta_j)) x_j^\circ \\
 & \quad + (d_0 + p_0 - q_0) z^* - (c_0 + \alpha_0 - \beta_0) = 0, \quad \forall j \in F \\
 & \quad y_i \geq 0, v_j \geq 0, \quad \forall i \in B, j \in L \\
 & \quad p_j, q_j, \alpha_j, \beta_j \geq 0 \quad j \in J \text{ برای همه } i
 \end{aligned} \tag{۱۳.۴}$$

مسئله بالا یک مسئله برنامه ریزی خطی است که با همه روش‌های موجود قابل حل است اما بدلیل پیچیدگی مسئله، می‌توان این مسئله بهینه سازی را با استفاده از نرم افزارهای موجود مانند تورا^۱، اکسل سالور^۲ و غیره حل کرد.

۳.۴ مثال عددی

مثال ۱.۳.۴. فرض کنید که مسئله برنامه ریزی خطی-کسری زیر داده شده است

$$\begin{aligned}
 \max \quad & Z = \frac{2x_1 + 3x_2 + 1}{x_1 + x_2 + 4} \\
 \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 \leq 4 \\
 & 3x_1 + x_2 \leq 6 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

در این مثال جواب بهینه برابر است با $x_1^* = 0$ و $x_2^* = 4$ و مقدار بهینه تابع هدف برابر است با $z^* = 1/625$. فرض کنید $x_1 = 1$ و $x_2 = 3$ یک جواب شدنی مسئله خطی-کسری بالا باشد می‌خواهیم x^0 یک جواب بهینه با مقدار تابع هدف $z^* = 1/625$ شود. با قبول جواب x^0 شدنی به نظر می‌رسد که هر دو محدودیت لازم است و همچنین $x_1^0 > 0$ و $x_2^0 > 0$. بنابراین با استفاده از شرط مکمل زائد داریم: $v_1 = 0$ و $v_2 = 0$. مسئله معکوس برنامه ریزی خطی-کسری آن بصورت زیر

^۱TORA

^۲EXCEL SOLVER

می‌باشد

$$\begin{aligned}
& \min \sum_{j=1}^2 \{\alpha_j + \beta_j + p_j + q_j\} \\
& \text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^2 a_{ij} y_i + (d_j + p_j - q_j) z^* = c_j + \alpha_j - \beta_j, \quad j = 1, 2 \\
& \quad - \sum_{i=1}^2 b_i y_i + (d_0 + p_0 - q_0) z^* = c_0 + \alpha_0 - \beta_0 \\
& \quad \sum_{j=1}^2 ((d_j + p_j - q_j) z^* - (c_j + \alpha_j - \beta_j)) x_j^0 + (d_0 + p_0 - q_0) z^* \\
& \quad - (c_0 + \alpha_0 - \beta_0) = 0, \\
& \quad y_i \geq 0, \quad i = 1, 2 \\
& \quad p_j, q_j, \alpha_j, \beta_j \geq 0, \quad j = 1, 2
\end{aligned} \tag{۱۴.۴}$$

با جایگذاری مقادیر $a_{11} = 1$ و $a_{12} = 1$ و $a_{21} = 3$ و $a_{22} = 1$ و $b_1 = 4$ و $b_2 = 6$ و $c_1 = 2$ و $c_2 = 3$ و $c_0 = 1$ و $d_1 = 1$ و $d_2 = 1$ و $d_0 = 4$ و $x_1^0 = 1$ و $x_2^0 = 3$ و $z^* = 1/625$ در مسئله بالا و ساده کردن آن داریم

$$\begin{aligned}
& \min \quad \{\alpha_1 + \beta_1 + \alpha_2 + \beta_2 + \alpha_0 + \beta_0 + p_1 + q_1 + p_2 + q_2 + p_0 + q_0\} \\
& \text{s.t.} \quad y_1 + 3y_2 + 1/625p_1 - 1/625q_1 - \alpha_1 + \beta_1 = 0/375 \\
& \quad y_1 + y_2 + 1/625p_2 - 1/625q_2 - \alpha_2 + \beta_2 = 1/375 \\
& \quad 4y_1 + 6y_2 - 1/625p_0 + 1/625q_0 + \alpha_0 - \beta_0 = 5/5 \\
& \quad 1/625p_1 + 1/625q_1 - 4/875p_2 + 4/875q_2 - 1/625p_0 \\
& \quad + 1/625q_0 + \alpha_1 - \beta_1 + 3\alpha_2 - 3\beta_2 + \alpha_0 - \beta_0 = 1 \\
& \quad y_1, y_2, p_1, p_2, p_0, q_1, q_2, q_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_0, \beta_1, \beta_2, \beta_0 \geq 0
\end{aligned}$$

با حل مسئله بالا $y_1 = 1/375$ و $q_1 = 0/6154$ و $q_2 = 0$ بدست می‌آید لذا داریم:

$$d'_1 = d_1 + p_1 - q_1 = 1 + 0 - 0/6154 = 0/3846$$

بقیه ضرایب هزینه به قوت خود باقی می‌ماند.

حال با استفاده از هزینه اصلاح شده، مسئله معکوس برنامه ریزی خطی-کسری بصورت زیر نوشته

می‌شود

$$\begin{aligned} \max(Z) &= \frac{2x_1 + 3x_2 + 1}{0.3846x_1 + x_2 + 4} \\ \text{s.t. } x_1 + x_2 &\leq 4 \\ 3x_1 + x_2 &\leq 6 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

در مسئله بالا دیده می‌شود که جواب بهینه برابر است با $x_1 = 1$ و $x_2 = 3$ و مقدار بهینه تابع هدف برابر است با $z = 1/625$.

حال اگر مثال عددی (۲.۱.۴) را با روش دوم بخواهیم حل کنیم خواهیم داشت: فرض کنیم جواب شدنی $x_1^0 = 0$ و $x_2^0 = 0.5$ با مقدار تابع هدف $z^0 = 1$ به ما داده شده است. چون $x_1^0 > 0$ و $x_2^0 > 0$ است با استفاده از شرایط مکمل زائد $v_1 = 0$ و $v_2 = 0$ ، لذا مسئله معکوس مثال (۲.۱.۴) با استفاده از روش ذکر شده در بخش (۲.۴) بصورت زیر است:

$$\begin{aligned} \min \sum_{j \in J} \{ \alpha_j + \beta_j + p_j + q_j \} \\ \text{s.t. } \sum_{i \in I} a_{ij} y_i + (d_j + p_j - q_j) z^* &= c_j + \alpha_j - \beta_j, \quad j = 1, 2 \\ - \sum_{i \in B} b_i y_i + (d_0 + p_0 - q_0) z^* &= c_0 + \alpha_0 - \beta_0 \\ \sum_{j \in J} ((d_j + p_j - q_j) z^* - (c_j + \alpha_j - \beta_j)) x_j^0 &+ (d_0 + p_0 - q_0) z^* \\ - (c_0 + \alpha_0 - \beta_0) &= 0 \\ y_i \geq 0, \quad i = 1, 2 \\ p_j, q_j, \alpha_j, \beta_j \geq 0, \quad j = 1, 2 \end{aligned} \quad (15.4)$$

حال با جایگذاری مقادیر $b_2 = 6, b_1 = -4, a_{22} = 3, a_{21} = 1, a_{12} = -2, a_{11} = -1, d_2 = 1, d_1 = 4, c_0 = 2, c_2 = -3, c_1 = 5, z^* = 1$ و $x_1^0 = 0.5, x_2^0 = 0.5, d_0 = -2$ در مسئله (۱۵.۴) و ساده کردن آن داریم:

$$\begin{aligned} \min (\alpha_1 + \beta_1 + \alpha_2 + \beta_2 + \alpha_0 + \beta_0 + p_1 + q_1 + p_2 + q_2 + p_0 + q_0) \\ \text{s.t. } -y_1 + y_2 + p_1 - q_1 - \alpha_1 + \beta_1 &= 1 \\ 2y_1 - 3y_2 - p_2 + q_2 + \alpha_2 - \beta_2 &= 4 \\ 4y_1 - 6y_2 + p_0 - q_0 - \alpha_0 + \beta_0 &= 4 \\ 3p_1 + 3q_1 + 0.5p_2 + 0.5q_2 + p_0 - q_0 - 3\alpha_1 + 3\beta_1 \\ - 0.5\alpha_2 + 0.5\beta_2 - \alpha_0 + \beta_0 &= 5 \\ y_1, y_2, p_1, p_2, p_0, q_1, q_2, q_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_0, \beta_1, \beta_2, \beta_0 &\geq 0 \end{aligned}$$

جواب بهینه مسئله‌ی فوق بصورت زیر است:

$$\alpha_2 = 2, \beta_1 = 2, y_1 = 1$$

با در نظر گرفتن مقادیر بدست آمده در قسمت فوق هزینه‌های اصلاح شده به صورت زیر می‌باشد:

$$c'_1 = c_1 + \alpha_1 - \beta_1 = 5 - 2 = 3$$

$$c'_2 = c_2 + \alpha_2 - \beta_2 = -3 + 2 - 0 = -1$$

بقیه ضرایب به قوت خود باقی است.

حال با استفاده از این مقادیر، مسئله‌ی معکوس بصورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} & \max \frac{3x_1 - x_2 + 2}{4x_1 + x_2 - 2} \\ \text{s.t} \quad & -x_1 - 2x_2 \leq -4 \\ & x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

حال با حل این مسئله با استفاده از این تابع هدف مقادیر بهینه به صورت $x_1 = 3$ و $x_2 = 0.5$ و مقدار بهینه تابع هدف برابر $z = 1$ بدست می‌آید.

فصل ۵

دو روش جدید برای مسئله‌ی معکوس برنامه‌ریزی خطی-کسری

در این فصل از پایان نامه به دو روش ابتکاری جهت رسیدن به مسئله معکوس برنامه‌ریزی خطی-کسری می‌پردازیم که در یکی از روش‌ها فقط به تغییر ضرایب تابع هدف در صورت، یعنی تبدیل پارامتر c به c' می‌پردازیم.

در روش دیگر هدف این است که با تبدیل پارامترهای c و d و b به پارامترهای c' و d' و b' که c و d ضرایب تابع هدف در صورت و مخرج، b بردار سمت راست در مسئله برنامه‌ریزی خطی-کسری می‌باشند به معکوس مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی-کسری برسیم. به عبارت دیگر با اعمال تغییرات ذکر شده در مسئله برنامه‌ریزی خطی-کسری، نقطه شدنی x^* به یک نقطه بهینه در مسئله معکوس بدست آمده تبدیل شود.

۱.۵ معکوس مسئله برنامه‌ریزی خطی-کسری فقط با تبدیل پارامتر c به c'

در این قسمت معکوس مسئله برنامه‌ریزی خطی-کسری را با تغییر ضرایب صورت در تابع هدف مورد بررسی قرار می‌دهیم. مسئله برنامه‌ریزی خطی-کسری زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) = \frac{\sum_{j=1}^n c_j x_j + c_0}{\sum_{j=1}^n d_j x_j + d_0} \\ \text{s.t} \quad & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (1.5)$$

تبدیلات چارنز کوپر [۷] را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned} t_j &= \frac{x_j}{\sum d_j x_j + d_0}, \quad j = 1, 2, \dots, n \\ t_0 &= \frac{1}{\sum_{j=1}^n d_j x_j + d_0} \end{aligned} \quad (2.5)$$

لذا با استفاده از تبدیلات (۲.۵) تعریف می‌کنیم:

$$E = \begin{bmatrix} d_0 & d_1 & \dots & d_n \\ -b_1 & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -b_m & a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad e = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{(m+1) \times (1)}, \quad t = \begin{bmatrix} t_0 \\ t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix}_{(n+1) \times (1)} \quad (3.5)$$

با توجه به ماتریس و بردارهای تعریف شده در (۳.۵)، مسئله‌ی (۱.۵) را بصورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \max \quad & ct \\ \text{s.t} \quad & Et = e \\ & t \geq 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

لم ۱.۱.۵. اگر در (۴.۵) پارامتر c را به c' تغییر دهیم آنگاه با توجه به مدل تابع (۱.۵) ماتریس $[E|e]$ مستقل از تغییرات c است و فقط تابع $f(x)$ تغییر می‌کند.

برهان. با جابجا کردن بردار c به c' در (۴.۵) داریم:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j=0}^n c'_j t_j \\ \text{s.t} \quad & \sum_{j=0}^n d_j t_j = 1 \\ & \sum_{j=1}^n a_{ij} t_j = t_0 b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ & t_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (5.5)$$

حال با استفاده از تبدیل معکوس t_j به x_j داریم:

$$\begin{aligned} t_j &= x_j t_0 \\ j &= 0, 1, 2, \dots, n \\ x_0 &= 1 \end{aligned}$$

بنابراین با اعمال تبدیل فوق داریم:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j=1}^n c'_j x_j t_0 + c'_0 t_0 \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=0}^n d_j x_j t_0 = 1 \\ & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j t_0 - b_i t_0 = 0 \quad i = 1, 2, \dots, m \\ & x_j t_0 \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (6.5)$$

ازطرفی چون $t_0 > 0$ و $t_0 = \frac{1}{\sum_{j=0}^n d_j x_j}$ و $x_0 = 1$ ، مسئله (۱۰۵) به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} \max \quad & \frac{\sum_{j=1}^n c'_j x_j + c'_0}{\sum_{j=1}^n d_j x_j + d_0} = g(x) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \\ & x_j \geq 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (7.5)$$

بنابراین ماتریس $[E|e]$ مستقل از تغییرات c است و فقط تابع $f(x)$ دست خوش تغییرات است. $\square$

حال فرض می‌کنیم مسئله پارامتریک زیر داده شده است

$$\max\{c^T t : Et = e, t \geq 0\} \quad (8.5)$$

که در آن $c \in \mathbb{R}^{n+1}$ و $t \in \mathbb{R}^{n+1}$ و E یک ماتریس $(m+1)(n+1)$ است.

فرض کنیم که $t^0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ یک جواب شدنی برای مسئله (۸۰۵) باشد می‌خواهیم پارامتر c' را با کمترین تغییرات c پیدا کنیم بطوریکه t^0 برای مسئله جدید بدست آمده بهینه باشد،

یعنی اگر $h(t) = \max\{c^T t | Et = e, t \geq 0\}$ آنگاه

$$C(t^0) = \{c' \in \mathbb{R}^{n+1} | h(t^0) = c'^T t^0\} \quad (9.5)$$

اکنون می‌توان مسئله (۹۰۵) را با توجه به روش ذکر شده در قسمت (۱۰۳) به یک مسئله معکوس برنامه‌ریزی خطی برای بدست آوردن c' به صورت زیر تبدیل نمود.

$$\min\{\|c - c'\| \mid c' \in C(t^0)\}$$

کمترین تغییرات c جهت رسیدن به پارامتر c' در مسئله بالا را می‌توان تحت نرم l_1 با استفاده از مسئله (۹۰۳) بدست آورد.

قضیه ۲۰۱۰۵. فرض کنید که $x^0 = (x_1, \dots, x_n)$ یک جواب شدنی برای مسئله (۱۰۵) باشد. اگر پارامتر c را با $c' \in C(t^0)$ جابجا کنیم آنگاه x^0 یک جواب بهینه برای $g(x)$ خواهد بود یا به عبارت دیگر:

$$\max\{g(x) | Ax = b, x \geq 0\} = g(x^0)$$

برهان. فرض می‌کنیم که x° یک جواب شدنی برای مسئله

$$\max \left\{ \frac{\sum_{j=1}^n c_j x_j + c_0}{\sum_{j=1}^n d_j x_j + d_0} \mid Ax = b, x \geq 0 \right\}$$

باشد. با استفاده از تبدیلات (۲.۵) مسئله مفروض را به مدل (۸.۵) و x° را به t° تبدیل می‌نمائیم، مدل (۸.۵) به مدل معکوس با استفاده از روش گفته شده در قسمت (۱.۳) تبدیل می‌شود، طبق فرض قضیه c به $c' \in C(t^\circ)$ تغییر حالت می‌دهد لذا داریم $h(t^\circ) = c't^\circ$. می‌دانیم که هر مسئله خطی بصورت (۸.۵) با استفاده از تبدیلات چارنز-کوپر قابل تبدیل به مسئله (۱.۵) است و به عکس. به عبارت دیگر مسائل (۱.۵) و (۶.۵) با هم معادلند. از طرفی دیگر می‌دانیم که اگر $t = (t_0, \dots, t_n)$ در مسئله (۸.۵) بهینه باشد آنگاه $x = (x_1, \dots, x_n)$ که $x_j = \frac{t_j}{t_0}$ برای $j = 1, 2, \dots, n$ در مسئله (۱.۵) بهینه است. یا به عبارت دیگر مقادیر تابع هدف به ازای x بهینه در مسئله (۱.۵) و t بهینه در (۸.۵) با هم برابرند. حال با استفاده از لم (۱.۱.۵) داریم که x° داده شده در مسئله (۷.۵) بهینه است. یعنی:

$$\max\{g(x) \mid Ax = b, x \geq 0\} = g(x^\circ)$$

□

مثال عددی

مثال ۳.۱.۵. مسئله‌ی ماکزیم سازی خطی-کسری زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = \frac{2x_1 + 3x_2 + 1}{x_1 + x_2 + 4} \\ \text{s.t} \quad & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & 3x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

فرض کنید که $x^\circ = (1, 3)$ یک جواب شدنی برای مسئله‌ی فوق باشد. مسئله‌ی معکوس را با کمترین تغییرات ضرایب تابع هدف بدست آورید بطوریکه x° برای مسئله‌ی معکوس بهینه باشد و مقدار تابع هدف بهینه برابر با $z^* = 1/625$ شود. لازم به ذکر است که لزومی ندارد مقدار بهینه تابع هدف برابر با $z^* = 1/625$ شود، یعنی مقدار بهینه تابع هدف برای x° شدنی با مقدار بهینه x^* لزوماً برابر نخواهد شد.

با استفاده از روش خطی سازی چارنز-کوپر مسئله‌ی فوق را به یک مسئله‌ی خطی تبدیل می‌نمائیم یعنی

داریم:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = t_0 + 2t_1 + 3t_2 \\ \text{s.t.} \quad & 4t_0 + t_1 + t_2 = 1 \\ & -4t_0 + t_1 + t_2 \leq 0 \\ & -6t_0 + 3t_1 + t_2 \leq 0 \\ & t_0, t_1, t_2 \geq 0 \end{aligned}$$

نقطه‌ی شدنی معادل x^0 در مسئله‌ی بالا برابر است با $(\frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}) = t^0$. حال با استفاده از قضیه (۴.۱.۳) تحت نرم l_1 ، $\min \|c - c'\|$ را به دست می‌آوریم یعنی داریم:

$$\begin{aligned} \min \quad & \{\alpha + \beta + e + f + g + h\} \\ \text{s.t.} \quad & 4y_1 - 4y_2 - 6y_3 - \alpha + \beta = 1 \\ & y_1 + y_2 + 3y_3 - e + f = 2 \\ & y_1 + y_2 + y_3 - g + h = 3 \\ & \alpha - \beta \geq 0 \\ & e - f \geq 0 \\ & g - h \geq 0 \\ & y_1, y_2, y_3, \alpha, \beta, e, f, g, h \geq 0 \end{aligned}$$

از حل مسئله‌ی فوق داریم $y_1 = 1/625, y_2 = 1/375, y_3 = 1/625, e = 1$ و از طرفی داریم $c'_4 = e - f + c_4 = 3$ و بقیه ضرایب تابع هدف به قوت خود باقی می‌ماند. حال با استفاده از قضیه (۲.۱.۵) معکوس مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی-کسری به صورت زیر نوشته می‌شود که x^0 در آن بهینه و مقدار تابع هدف برابر است با $Z^* = 1/625$.

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = \frac{3x_1 + 3x_2 + 1}{x_1 + x_2 + 4} \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & 3x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

۲.۵ معکوس مسئله برنامه ریزی خطی-کسری با تغییر پارامترهای

c و d و b

در این قسمت مسئله‌ی معکوس برنامه ریزی خطی-کسری را با تغییر بردار سمت راست و ضرایب تابع هدف در صورت و مخرج مورد بررسی قرار می‌دهیم.

در اینجا هدف این است که با تغییر پارامترهای ذکر شده مسئله‌ی معکوس را پیدا کنیم تا نقطه‌ی x° شدنی در مسئله‌ی اولیه، به x° بهینه در مسئله‌ی معکوس تبدیل شود یا اینکه حداقل نزدیک به مجموعه‌ی بهینه باشد.

مسئله‌ی برنامه‌ریزی مدل (۱۰۵) را در نظر بگیرید. می‌خواهیم با استفاده از روش دمپ-لوس [۸] که در برنامه‌ریزی خطی برای تغییر ضریب تابع هدف و بردار سمت راست به کار برده شد، مدلی معکوس برای مسئله‌ی (۱۰۵) بیابیم. با استفاده از تبدیلات (۲۰۵) و (۳۰۵)، مسئله‌ی (۱۰۵) را به شکل (۴۰۵) بازنویسی می‌کنیم.

لم ۱۰۲۰۵. اگر در مدل (۴۰۵) بردار e را با بردار $g = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix}$ که $g_0 \neq 0$ و c را با c' جابجا کنیم آنگاه

در مدل کسری، فقط بردار سمت راست و ضرایب تابع هدف در مخرج کسر تغییر خواهند کرد.

برهان. با جابجایی بردار e و g در مدل (۴۰۵) سه حالت ممکن است رخ دهد:

i: اگر $g_0 > 1$ داریم

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j=0}^n c_j t_j \\ \text{s.t} \quad & \sum_{j=0}^n d_j t_j < g_0 \\ & \sum_{j=0}^n a_{ij} t_j = g_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ & t_j \geq 0, \quad j = 0, 1, \dots, n \end{aligned} \quad (10.5)$$

حال با استفاده از تبدیل معکوس t_j به x_j برای $j = 1, 2, \dots, n$ که $t_j = x_j t_0$ و $x_0 = 1$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j=1}^n c_j x_j t_0 + c_0 t_0 \\ \text{s.t} \quad & \sum_{j=1}^n d_j x_j + d_0 < \frac{g_0}{t_0} \\ & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = \frac{g_i}{t_0} + b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ & t_j \geq 0, \quad j = 0, 1, \dots, n \end{aligned} \quad (11.5)$$

اگر برای $j = 0, 1, 2, \dots, n$ تعریف کنیم $d'_j = \frac{d_j}{g_0}$ با توجه به محدودیت اول در مسئله (۱۱.۵) داریم:

$$\sum_{j=1}^n d'_j x_j + d'_0 < \frac{1}{t_0}$$

با توجه به اینکه $\frac{1}{t_0} = \sum_{j=1}^n d_j x_j + d_0$ داریم:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n d'_j x_j + d'_0 &< \sum_{j=1}^n d_j x_j + d_0 \\ \xRightarrow{d_j = d'_j g_0} \sum_{j=1}^n d'_j x_j + d'_0 &< \sum_{j=1}^n d'_j g_0 x_j + d'_0 g_0 = \frac{1}{t_0} \end{aligned}$$

حال فرض می‌کنیم که $S > 0$ یک عدد حقیقی باشد داریم:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n d'_j x_j + d'_0 &= \frac{1}{t_0} - S \Rightarrow S = \frac{1}{t_0} - \sum_{j=1}^n d'_j x_j + d'_0 \\ \Rightarrow S &= \sum_{j=1}^n (d_j - d'_j) x_j + (d_0 - d'_0) \end{aligned}$$

و از اینکه $\sum_{j=1}^n d'_j x_j + d'_0 = \frac{1}{t_0} - S$ می‌توانیم نتیجه بگیریم:

$$\begin{aligned} \sum d'_j x_j + (d'_0 + S) &= \frac{1}{t_0} \\ \Rightarrow t_0(x_j) &= \frac{1}{\sum_{j=1}^n d'_j x_j + (d'_0 + S)} = \frac{1}{\sum_{j=1}^n d_j x_j + d_0} \end{aligned}$$

نمادگذاری: منظور از $t_0(x_j)$ این است که t_0 وابسته به هر x را می‌توان یافت. تساوی بالا به ما نشان می‌دهد که بردار d به d' تغییر می‌کند اما مقدار $t_0(x_j)$ در هر دو کسر با هم برابرند.

حال با تبدیل c به c' و در نظر گرفتن $b'_i = \frac{g_i}{t_0} + b_i$ برای $i = 1, \dots, m$ و لحاظ کردن

$$t_0 = \frac{1}{\sum_{j=1}^n d'_j x_j + (d'_0 + S)} \quad \text{مسئله (۱۱.۵) به صورت زیر تبدیل می‌شود}$$

$$\begin{aligned} \max \quad & \frac{\sum_{j=1}^n c'_j x_j + c'_0}{\sum_{j=1}^n d'_j x_j + (d'_0 + S)} \\ \text{s.t} \quad & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b'_i \\ & x_j \geq 0 \end{aligned} \quad (12.5)$$

که در رابطه‌ی بالا $S = \sum_{j=1}^n (d_j - d'_j) x_j + (d_0 - d'_0)$.

ii: اگر $1 < g_0 < \infty$ باشد می‌توان نشان داد که

$$S = \sum_{j=1}^n (d'_j - d_0)x_j + (d'_0 - d_0)$$

$$t_0(x_j) = \frac{1}{\sum_{j=1}^n d'_j x_j + (d'_0 - S)} = \frac{1}{\sum_{j=1}^n d_j x_j + d_0}$$

با توجه به رابطه بالا، مسئله (۱۱.۵) به شکل زیر بازنویسی خواهد شد.

$$\max \frac{\sum_{j=1}^n c'_j x_j + c'_0}{\sum_{j=1}^n d'_j x_j + (d'_0 - S)}$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b'_i, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

iii: اگر $g_0 = 1$ باشد بوضوح پیداست که $d' = d$ و $b' = \frac{g_i}{b_0} + b_i$ و $t_0 = \frac{1}{\sum_{j=1}^n d_j x_j + d_0}$ یعنی مسئله (۱۱.۵) به شکل زیر بازنویسی خواهد شد:

$$\max \frac{\sum_{j=1}^n c'_j x_j + c'_0}{\sum_{j=1}^n d_j x_j + d_0}$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b'_i, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (13.5)$$

□

حال فرض می‌کنیم که $\phi_t(g, c) = \operatorname{argmax}\{c^T t : Et = g, t \geq 0\}$ مجموعه جواب‌های بهینه مسئله پارامتریک زیر باشند.

$$\max\{c^T t : Et = g, t \geq 0\} \quad (14.5)$$

که پارامترهای بردار سمت راست و ضریب تابع هدف اعضایی از مجموعه‌های داده شده زیر باشند

$$\beta = \{g : Bg = \hat{g}\}, \quad \zeta = \{c : Cc = \hat{c}\}$$

بعلاوه فرض کنید که $\hat{c} \in \mathbb{R}^q, \hat{g} \in \mathbb{R}^p, C \in \mathbb{R}^{q(n+1)}, B \in \mathbb{R}^{p(m+1)}, E \in \mathbb{R}^{(m+1)(n+1)}$ و

$t^0 \in \mathbb{R}^{(n+1)}$ می‌خواهیم مقادیر $\bar{g}$ و $\bar{c}$ را برای پارامترها پیدا کنیم بطوریکه $t^0 \in \phi_t(\bar{g}, \bar{c})$

برای رسیدن به این هدف مسئله‌ی زیر را در نظر بگیرید

$$\min\{\|t - t^0\| : t \in \phi_t(g, c), g \in \beta, c \in \zeta\} \quad (15.5)$$

حال مسئله‌ی (۱۵.۵) را می‌توان به کمک روش دمپ و لوس^۱ [۸] به یک مسئله معکوس برنامه‌ریزی خطی تبدیل کرد.

^۱Dempe & Lohse

بعد از یافتن مسئله‌ی معکوس فرض کنید پارامترهای بهینه برای g و c به ترتیب $\bar{g}$ و $\bar{c}$ باشند و $\tilde{t}$ بردار بهینه برای مسئله‌ی (۱۴.۵) باشد. یعنی

$$\max\{\bar{c}^T t : Et = \bar{g}, t \geq 0\} = \bar{c}^T \tilde{t}$$

حال به کمک قضیه زیر یک مدل معکوس برای مسئله (۱.۵) بیان می‌کنیم.

قضیه ۲.۲.۵. نقطه $\tilde{x}$ که $\tilde{x} = \frac{\tilde{t}_j}{t_{\circ}}$ (برای $j = 1, \dots, n$) یک جواب بهینه برای مدل (۱.۵) است. بادر نظر گرفتن $c = \bar{c}$ و

$$\|\tilde{x} - x^{\circ}\| = \min\{\|x - x^{\circ}\| \mid x \in \phi_x(b, c, d), b \in \beta', c \in \zeta\}$$

که در آن

$$\beta' = \{b : Bb = \hat{b}\}, \phi_x(b, c, d) = \operatorname{argmax}\left\{\frac{c^T x}{d^T x} : Ax = b, x \geq 0\right\}$$

برهان. فرض می‌کنیم که مسئله خطی-کسری به صورت مدل (۱.۵) و x° ، یک نقطه شدنی در آن داده شده باشد. می‌خواهیم پارامترهای $\bar{b}$ و $\bar{c}$ و $\bar{d}$ را طوری تعیین کنیم که x° در مسئله جدید بهینه باشد (مسئله جدید همان مسئله معکوس است). برای این منظور ابتدا با استفاده از تبدیلات (۲.۵) مسئله را به یک مسئله برنامه‌ریزی خطی مانند مدل (۱۴.۵) تبدیل می‌کنیم و با استفاده از روش ذکر شده در قسمت (۲.۳) به یک مسئله معکوس برنامه ریزی خطی می‌رسیم که پارامترهای g به $\bar{g}$ و c به $\bar{c}$ تبدیل شده است. یعنی مسئله زیر را داریم:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j=1}^n \bar{c}_j t_j \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n d_j t_j = \bar{g}_{\circ} \\ & \sum_{j=1}^n a_{ij} t_j = \bar{g}_i + b_i t_{\circ}, \quad i = \circ, 1, \dots, m \\ & t_j \geq 0, \quad j = \circ, 1, \dots, n \end{aligned} \quad (۱۶.۵)$$

حال با استفاده از لم (۱.۲.۵) مسئله (۱۶.۵) را به یکی از حالت (۱۲.۵) یا (۱۳.۵) یا (۱۴.۵) تبدیل می‌کنیم که مسئله بدست آمده معکوس مدل (۱.۵) می‌باشد. $\square$

جهت ادامه‌ی بحث دو حالت زیر می‌تواند رخ دهد:

الف) t° در مسئله (۱۶.۵) بهینه باشد یعنی $\tilde{t} = t^{\circ}$.

ب) t° در مسئله (۱۶.۵) نزدیک به مقدار بهینه باشد یعنی $\tilde{t} \neq t^{\circ}$.

در حالت (الف) چون t° دقیقاً در مسئله معکوس بهینه است یعنی $t^{\circ} \in \phi_t(\bar{g}, \bar{c})$ می‌توان نتیجه گرفت که معادل آن یعنی x° در یکی از مسائل (۱۲.۵) یا (۱۳.۵) یا (۱۴.۵) بهینه است و دقیقاً مدل معکوس برنامه ریزی خطی-کسری (۱.۵) است.

اما در حالت (ب) نمی‌توانیم به آسانی ادعا کنیم، به دلیل اینکه $\|t - t^\circ\|$ که در آن $t \in \phi_t(\bar{g}, \bar{c})$ مینیمم شده پس $\|x - x^\circ\|$ که در آن $x \in \phi_x(b, c, d)$ نیز مینیمم می‌شود. اگر بخواهیم به این نتیجه برسیم نیاز به اثبات فرضیه زیر است که هنوز نتوانسته‌ایم آن را اثبات کنیم و در دست بررسی است.

فرضیه ۳.۲.۵. اگر به ازای هر $t \in \psi(b, c)$ مقدار $\|t - t^\circ\|$ مینیمم شود آنگاه به ازای هر $x \in \phi_x(b, c, d)$ مقدار $\|x - x^\circ\|$ نیز مینیمم می‌شود.

۳.۵ مثال عددی

مثال ۱.۳.۵. فرض کنید که مسئله برنامه ریزی خطی-کسری زیر داده شده است

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = \frac{2x_1 + 3x_2 + 1}{x_1 + x_2 + 4} \\ \text{s.t} \quad & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & 3x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

در این مثال جواب بهینه برابر است با $x_1^* = 0$ و $x_2^* = 4$ و مقدار بهینه تابع هدف برابر است با $z^* = 1/625$. فرض کنید $x_1^\circ = 1$ و $x_2^\circ = 3$ یک جواب شدنی مسئله خطی-کسری بالا باشد می‌خواهیم x° یک جواب بهینه با مقدار تابع هدف $z^* = 1/625$ شود. با تبدیل مسئله‌ی فوق به یک مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی با استفاده از تبدیلات چارنز-کوپر داریم:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = t_0 + 2t_1 + 3t_2 \\ \text{s.t} \quad & 4t_0 + t_1 + t_2 = 1 \\ & -4t_0 + t_1 + t_2 \leq 0 \\ & -6t_0 + 3t_1 + t_2 \leq 0 \\ & t_0, t_1, t_2 \geq 0 \end{aligned}$$

می‌خواهیم بردار c و b را در مسئله‌ی فوق تعیین کنیم به طوریکه $t_0^* = \frac{1}{8}$ ، $t_1^* = \frac{1}{8}$ و $t_2^* = \frac{3}{8}$ مقدار بهینه تابع هدف برابر با $z^* = 1/625$ برای این منظور داریم:

$$\begin{aligned} c_0 t_0 + c_1 t_1 + c_2 t_2 &\longrightarrow \max \\ \text{s.t} \quad & 4t_0 + t_1 + t_2 = b_1 \\ & -4t_0 + t_1 + t_2 \leq b_2 \\ & -6t_0 + 3t_1 + t_2 \leq b_3 \\ & t_0, t_1, t_2 \geq 0 \end{aligned} \tag{۱۷.۵}$$

با در نظر گرفتن محدودیت $b_1 = 1$ و $4t_0 + t_1 + t_2 = b_1$ داریم:

$$4t_0 + t_1 + t_2 = 1 \iff t_2 = 1 - 4t_0 - t_1 \quad (18.5)$$

با قرار دادن t_2 بدست آمده در (۱۷.۵) داریم:

$$\begin{aligned} (c_0 - 4c_2)t_0 + (c_1 - c_2)t_1 + c_2 &\longrightarrow \max \\ \text{s.t.} \quad -8t_0 + s_1 &= b_2 - 1 \\ -10t_0 + 2t_1 + s_2 &= b_3 - 1 \\ t_0, t_1, s_1, s_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

حال با استفاده از الگوریتم سیمپلکس دوگان مسئله‌ی بالا را با در نظر گرفتن $b_2 - 1 < 0$ حل می‌کنیم.

c_B	t_b	$c_0 - 4c_2$ t_0	$c_1 - c_2$ t_1	0 s_1	0 s_2	b	θ
0	$s_1 \uparrow$	-8	0	1	0	$b_2 - 1 \leftarrow$	$b_2 - 1 < 0$
0	s_2	-10	2	0	1	$b_3 - 1$	
Δ							
$c_0 - 4c_2$	t_0	1	0	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{1-b_2}{8} = \frac{1}{8}$	$\iff b_2 = 0$
0	$s_2 \uparrow$	0	2	$-\frac{5}{4}$	1	$\frac{1}{4} + b_3 \leftarrow$	$\frac{1}{4} + b_3 \geq 0$
Δ		0	$-c_1 + c_2$	$-\frac{1}{8}(c_0 - 4c_2)$	0	$\frac{1}{8}(c_1 - c_2) + c_2$	$\frac{1}{4}c_1 + c_2 < 0,$ $-\frac{1}{8}(c_0 - 4c_2) \geq 0$
$c_0 - 4c_2$	t_0	1	0	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	
$c_1 - c_2$	t_1	0	1	$-\frac{5}{8}$	0.5	$\frac{1}{8} + \frac{1}{2}b_3 = \frac{1}{8}$	$\iff b_3 = 0$
Δ		0	0	$-\frac{1}{8}c_0 - \frac{5}{8}c_1 + \frac{9}{8}c_2$	$0.5(c_1 - c_2)$	$\frac{1}{8}c_0 + \frac{1}{8}c_1 - \frac{5}{8}c_2 + c_2$	$-\frac{1}{8}c_0 - \frac{5}{8}c_2 + \frac{9}{8}c_3 \geq 0,$ $0.5(c_1 - c_2) \geq 0$

برای بهینگی $b = (1, 0, 0)$ را در نظر می‌گیریم و برای c باید شرط‌های زیر برقرار باشد یعنی $c_2 < c_1$ ،
 $c_0 - 4c_2 \leq 0$ و $-\frac{1}{8}c_0 - \frac{5}{8}c_1 + \frac{9}{8}c_2 \geq 0$ که سه شرط را می‌توان در دو شرط زیر خلاصه نمود:

$$\begin{cases} \frac{1}{4}c_0 \leq c_2 < c_1 \\ c_2 \geq \frac{1}{9}c_0 + \frac{5}{9}c_1 \end{cases} \quad (19.5)$$

که حال با در نظر گرفتن شرایط (۱۹.۵) می‌توانیم $c'_0 = 0$ ، $c'_1 = 4$ و $c'_2 = 3$ در نظر بگیریم و از طرفی بدست آوردیم $b'_1 = 1$ و $b'_2 = b'_3 = 0$.

با توجه به محاسبات بالا مسئله‌ی معکوس برنامه‌ریزی خطی-کسری به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} \max \quad & \frac{4x_1 + 3x_2}{x_1 + x_2 + 4} \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & 3x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

حال می‌بینیم که در مسئله‌ی فوق $x_1^* = 1$ و $x_2^* = 3$ و مقدار بهینه تابع هدف برابر است با $z^* = 1/625$.

مراجع

- [1] Ahuja, R. K. & Orlin, J. B. (2001). Inverse Optimizatuon. Operation Reserch, 49,771-783.
- [2] Amin, G. R. & Emroznejad, A. (2007). Inverse Forecasting: A new approch for predictive modeling. Computers & Industrial Engineering. doi:10.1016/j.cie.2007.05.007.
- [3] Bajaniilov, Erik B. (2003). Linear Fractional Programming: Theory, Methods, Applications and Software. Kluwer Akademik Prees.
- [4] Burton, D. and Toint, Ph. L, (1992). On an instance of shortest paths problem. Mathematical Programming, 53, 45-61.
- [5] Chudha, S. S. (1999) A linear fractional Program with homogenece constraint, Opserch, 36, 390-398.
- [6] Chadha, S. S. and Chadha, V. (2007). Linear Fractional Programming and Duality. Operation Reserch, 49:771-783.
- [7] Charnec, A. and Cooper, W. w. (1962). Programming with linear fractionals, Naval Reserch Log. Quart, 9, 181-186.
- [8] Dempe, S. and Lohse, S. (2006). Inverse Linear Programming. Lecture Notse in Economics and Mathmatihical Systems, 563, 19-28.
- [9] Dinkelbach, W. Die Maximierung Eines Quotienten zweier Linearer Functionen Under Linearen Nebenbending ungen, Wahrs cheinlich keits theorie, vol.1, 1962, pp.1412-145.
- [10] Hladik, M. (2010). generalized linear fractional under interval uncertainty. Eur. J. Oper. Res. 205(1), 42-46.
- [11] Hung, S. & Liu, Z. (1999). On the inverse problem of linear programming and its application to minimum weight perfect k-matching. European Journal of Opreational Reserch, 112, 421-426.

- [12] Jain, S. and Arya, N. (2012). Inverse linear fractional programming: A new approach. *Journal of Computer and Mathematical Sciences*, 3(5), 542-547.
- [13] Jain, S. and Mangal, A. (2004). Modified Fourier elimination technique for fractional programming problem. *Acharya Nagaarjuna International Journal of Mathematics and Information Technology*, 1, 121-131.
- [14] Jain, S. and Mangal, A. (2008). Extended Gauss elimination technique for integer solution of linear fractional programming. *Journal of Indian Mathematical Society*, 75, 37-46.
- [15] Jain, S. and Mangal, A. and Parihar, P. (2011). Solution of fuzzy linear fractional programming problem. *Observer*, 48, 129-135.
- [16] Jain, S. Arya, N. (2013). Inverse Optimization for Linear Fractional Programming. *International Journal of Physical and Mathematical Sciences*, 4, 444-450.
- [17] Naganathan, E. R. and Sakthivel, S. (1998). A ratio multiplex algorithm to solve linear fractional programming problems. *Observer*, 35, 214-225.
- [18] Swarup, K. (1965). Linear fractional functionals programming, *Operation Research*, 13, 1029-1036.
- [19] Wang, Li. (2010). Cutting plane algorithm for inverse mixed integer programming problem. *Operation Research Letters*, 37, 114-116.
- [20] Zhang, J. & Liu, Z. (1996). Calculating some inverse linear programming problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 72, 261-273.
- [21] Zhang, J. & Liu, Z. (1999). A further study on inverse linear programming problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 106, 354-359.
- [22] Zhang, J. & Liu, Z. (2009). Solving a class of inverse QP problems by a smoothing Newton method. *Journal of Computational Mathematics*, 27(6), 787-801.
- [23] Zhang, J. and Zhang, Li. (2010). An Augmented Lagrangian Method for a class of inverse Quadratic programming problems. *Applied Math. and Opt.* 61(1), 57-83.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Optimal	بهینه
Programming	برنامه‌ریزی
Optimiztion	بهینه سازی
Function	تابع
Solution	جواب
Feasible Solution	جواب شدنی
Optimal Solution	جواب بهینه
Linear	خطی
Subset	زیرمجموعه
Feasible	شدنی
Full rank condition	شرط رتبه کامل
Fractional	کسری
Set	مجموعه
Inverse	معکوس

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Function	تابع
Feasible Solution	جواب شدنی
Feasible	شدنی
Full rank condition	شرط رتبه کامل
Fractional	کسری
Inverse	معکوس
Linear	خطی
Optimal	بهینه
Optimiztion	بهینه سازی
Optimal Solution	جواب بهینه
Programming	برنامه ریزی
Solution	جواب
Subset	زیرمجموعه
Set	مجموعه

Aabstract

In this thesis we consider the inverse of linear fractional programming. At first we consider the linear fractional programming and methods of Charens-Cooper and Dinkelbach for linearization this problem.

In the inverse optimization we want to find a minimum adjustment of the parameters of the problem such that the given solution becomes optimum. In the most of methods for inverse linear programming the coefficient of objective function or right hand side are change to make a feasible solution optimum. We consider some of the methods and their extensions for linear fractional programming.

keywords: Linear-Fractional, Objective function, Right hand side, Inverse conversion, Optimization, Inverse problem



Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

Linear Fractional Programming And It's Inverse

Mohammad Mohammadkhani

Supervisor

Dr Jafar Fathali

Advisor

Dr Mehrdad Ghaznavi

February 2016