



دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان نامه کارشناسی ارشد

برآورد ضرایب برای زیررده‌هایی از توابع تحلیلی و دو طرف-تک‌ارز

سماذکر

استاد راهنما

دکتر احمد زیره

بهمن ۱۳۹۴

الهی...

به تو درودی فرستم ای باسکوه عشق و بخشایش، تو حضور مطلق ای خالق هستی تو را
ستایش می کنم. درهایی است که به هیچ کوشی نمی توان گفت، کفنی هایی هست که
به هیچ قلبی محرم آن نیست، تلاش هایی است که جز به مدد تو نمی بخشد، تغیراتی
است که جز به تقدیر تو ممکن نیست، دعا هایی است که جز به آمین تو اجابت نمی شود،
قدم های کم شده ای دارم که تنها هدایتگرش تویی، افکار آشفته ای دارم که تنها سامان
دهنده اش تویی.

تقدیم بہ

مادر مہربانم و، محترمہ سر دل سوزم

سپاس کزاری...

سپاس خدای را، به وسعت همه‌ی آن سپاسی که ملائکه مقرب و خلایق مکرم و ستاینندگان پسندیده، او را شکر گفته‌اند. برترین شکر، چون برتری پروردگارمان بر هر وجودی.

سپاس بی‌پایان از استاد راهنمای ارجمندم، جناب آقای دکتر احمد زیره که همواره خوشه‌چین دانش و خرد ایشان بوده‌ام و تداوم همکاری با ایشان نهایت آرزو و مایه‌ی افتخارم می‌باشد.

در نهایت بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگار مهر و مهربانی، مادر عزیزم که در سردترین روزگاران، بهترین پشتیبانم بود.

سما ذاکر
بهمن ۱۳۹۴

تعمدنامه

اینجانب سیما ذاکر دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض دانشکده علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان برآورد ضرایب برای زیررده‌هایی از توابع تحلیلی و دوطرف-تک‌ارز، تحت راهنمایی دکتر احمد زیره متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “دانشگاه صنعتی شاهرود” یا “Shahrood University of Technology” به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

سما ذاکر
بهمن ۱۳۹۴

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

علاقه برای یافتن تخمین‌هایی از ضرایب $|a_2|$ و $|a_3|$ سری تیلور-مکلورن توابع تحلیلی و دوطرف-تک‌ارز رده‌ی Σ ، باعث شده‌است ریاضی‌دانان بسیاری در این زمینه فعالیت کنند. آن‌ها تا کنون نتوانسته‌اند تخمین‌های دقیقی به‌دست آورند، ولی هدف آن‌ها بهبود این کران‌هاست.

در این پایان‌نامه، چند زیررده‌ی جدید از رده‌ی تابع Σ از توابع تحلیلی و دوطرف-تک‌ارز در دیسک باز واحد را معرفی می‌کنیم. به‌علاوه، تخمینی از ضرایب $|a_2|$ و $|a_3|$ برای توابع متعلق به این زیررده‌ها را پیدا خواهیم کرد.

کلمات کلیدی: تابع تحلیلی، تک‌ارز، دوطرف-تک‌ارز، رده، زیررده، زیرترتیبی

فهرست مطالب

۱	پیش‌نیازها و مفاهیم مقدماتی	۱
۱	۱.۱ نمادگذاری و تعاریف	۱
۳	۲.۱ رده‌ی $\mathcal{S}$	۳
۷	۳.۱ رده‌ی $\mathcal{S}^*$	۷
۹	۴.۱ رده‌ی $\mathcal{K}$	۹
۱۵	۲ کران ضرایب برای زیررده‌هایی از توابع دوطرف-تک‌ارز	۱۵
۱۵	۱.۲ تعاریف و مقدمات	۱۵
۱۹	۲.۲ رده‌های $B(h, \alpha, \lambda)$ و $B(h, \beta, \lambda)$	۱۹
۱۹	۱.۲.۲ کران ضرایب برای رده‌ی توابع $B(h, \alpha, \lambda)$	۱۹
۲۴	۲.۲.۲ کران ضرایب برای رده‌ی توابع $B(h, \beta, \lambda)$	۲۴
۲۷	۳.۲ رده‌های $\Sigma(\tau, \gamma, \varphi)$ و $\Sigma_1(e^a \eta \cos \eta, \gamma, \beta)$	۲۷
۲۷	۱.۳.۲ کران ضرایب برای رده‌ی توابع $\Sigma(\tau, \gamma, \varphi)$	۲۷
۳۱	۲.۳.۲ کران ضرایب برای رده‌ی توابع $\Sigma_1(e^{in} \cos \eta, \gamma, \beta)$	۳۱
۳۴	۴.۲ رده‌های $B_\Sigma(n, \alpha, \lambda)$ و $H_\Sigma(n, \beta, \lambda)$	۳۴
۳۴	۱.۴.۲ کران ضرایب برای رده‌ی توابع $B_\Sigma(n, \alpha, \lambda)$	۳۴
۳۸	۲.۴.۲ کران ضرایب برای رده‌ی توابع $H_\Sigma(n, \beta, \lambda)$	۳۸
۴۳	۳ کران ضرایب برای زیررده‌هایی از توابع دوطرف-تک‌ارز وابسته به عملگر هوهلوف	۴۳
۴۳	۱.۳ تعاریف و مقدمات	۴۳
۴۴	۲.۳ رده‌ی $\mathcal{S}_\Sigma^{a,b;c}(\gamma, \lambda, \phi)$	۴۴
۴۴	۱.۲.۳ کران ضرایب برای رده‌ی توابع $\mathcal{S}_\Sigma^{a,b;c}(\gamma, \lambda, \phi)$	۴۴
۵۱	۲.۲.۳ نتیجه‌گیری	۵۱
۵۲	۳.۳ رده‌های $\mathcal{M}_\Sigma^{a,b;c}(\beta, \lambda)$ و $\mathcal{S}_\Sigma^{a,b;c}(\alpha, \lambda)$	۵۲
۵۳	۱.۳.۳ کران ضرایب برای رده‌ی توابع $\mathcal{S}_\Sigma^{a,b;c}(\alpha, \lambda)$	۵۳

۵۸		$\mathcal{M}_{\Sigma}^{a,b;c}(\beta, \lambda)$	کران ضرایب برای ردهی توابع	۲.۳.۳
۶۵			بهبود کران ضرایب*	۴
۶۵		$B_{\Sigma}(\varphi, \tau, \lambda)$	ردهی	۱.۴
۶۶		$B_{\Sigma}(\varphi, \tau, \lambda)$	کران ضرایب برای ردهی توابع	۲.۴
۷۰			نتیجه‌گیری	۳.۴
۷۳			مراجع	
۷۷			واژه‌نامه فارسی به انگلیسی	
۷۹			واژه‌نامه انگلیسی به فارسی	

فصل ۱

پیش‌نیازها و مفاهیم مقدماتی

این فصل شامل تعاریف و مفاهیم اولیه‌ی مورد نیاز در فصول بعد می‌باشد. مجموعه‌ی اعداد مختلط را با $\mathbb{C}$ نمایش می‌دهیم.

۱.۱ نمادگذاری و تعاریف

فرض کنید $\zeta \in \mathbb{C}$ و $r > 0$ ، در این صورت دیسک باز به مرکز ζ و شعاع r به صورت

$$\mathbb{U}(\zeta, r) = \{z \in \mathbb{C}; |z - \zeta| < r\},$$

تعریف می‌شود، هم‌چنین $\mathbb{U} = \mathbb{U}(0, 1)$ به عنوان دیسک یک‌ه‌ی باز در نظر گرفته می‌شود.

تعریف ۱.۱. هر مجموعه‌ی همبند و باز در $\mathbb{C}$ را میدان می‌نامیم. میدان را معمولاً با D نشان می‌دهیم.

تعریف ۲.۱. تابع $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ را در نقطه‌ی $z_0 \in \mathbb{C}$ تحلیلی گوییم هرگاه در یک همسایگی z_0 مشتق‌پذیر باشد.

تعریف ۳.۱. تابع تحلیلی که یک‌به‌یک باشد را تک‌ارز می‌نامیم. بنابراین اگر f تابع تک‌ارز باشد، $f(z_1) = f(z_2)$ نتیجه می‌دهد $z_1 = z_2$. از نظر تحلیلی تابع تک‌ارز، مشتق مخالف صفر دارد و از نظر هندسی تابع تک‌ارز، خم‌های ساده را بر خم‌های ساده می‌نگارد.

مطالعات و تحقیقات فراوانی در جهت چگونگی ترکیب این خواص و خواص دیگر برای اثبات قضایایی که سرشت هندسی یا تحلیلی داشته باشند، انجام گرفته‌است. در ابتدا سیلورمن^۱ رده‌ی توابعی که در دیسک یک‌ه‌ی باز، تحلیلی و تک‌ارز می‌باشند را رده‌ی S نامید و با شرح کاملی از زیررده‌های این رده به بررسی قضایای مربوط پرداخت.

^۱H.Silverman

تعریف ۴.۱. تابع $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ را در یک میدان تحلیلی گوئیم اگر در هر نقطه‌اش تحلیلی باشد.

تعریف ۵.۱. تابع دومتغیره‌ی حقیقی مقدار $u(x, y)$ را در D همساز گوئیم اگر در سراسر D مشتقات جزئی مرتبه‌ی اول و دوم آن نسبت به x و y پیوسته باشند و در معادله‌ی با مشتقات جزئی زیر صدق کنند

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

اثبات قضیه‌ی ۱.۱ را می‌توان در [۳۱] مشاهده نمود.

قضیه ۱.۱. فرض کنید تابع $u(z)$ در دامنه‌ی همبند ساده‌ای شامل دیسک $\mathbb{U}(z_0, r)$ همساز باشد، در این صورت

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta.$$

تعریف ۶.۱. رده‌ای از همه‌ی توابع $f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ که در $\mathbb{U}$ تحلیلی هستند و $\operatorname{Re}\{f(z)\} > 0$ را با P نمایش می‌دهیم.

لم ۱.۱. فرض کنید $f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ در P باشد، در این صورت برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $|a_n| \leq 1$.

برهان. اگر $f(z) = u(re^{i\theta}) + iv(re^{i\theta})$ و $a_n = \alpha_n + i\beta_n$ باشد، آنگاه

$$u(re^{i\theta}) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos n\theta - \beta_n \sin n\theta) r^n,$$

چون برای هر $n \neq m$

$$\int_0^{2\pi} \cos n\theta \cos m\theta d\theta = \int_0^{2\pi} \sin n\theta \sin m\theta d\theta = 0.$$

و برای هر $m, n \in \mathbb{N}$

$$\int_0^{2\pi} \sin m\theta \cos n\theta d\theta = 0,$$

پس خواهیم داشت

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) \cos n\theta d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \alpha_n r^n \cos^2 n\theta d\theta = \alpha_n r^n \quad (1.1)$$

و

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) \sin n\theta d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} -\beta_n r^n \sin^2 n\theta d\theta = -\beta_n r^n, \quad (2.1)$$

حال با ضرب رابطه‌ی (۲.۱) در $-i$ و جمع آن با رابطه‌ی (۱.۱) داریم

$$a_n r^n = (\alpha_n + i\beta_n) r^n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta,$$

در نتیجه

$$|a_n| r^n \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) |e^{-in\theta}| d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) d\theta. \quad (3.1)$$

چون تابع $u(z)$ همساز است، به موجب قضیه‌ی ۱.۱ داریم

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) d\theta = 2u(\circ) = 2, \quad (4.1)$$

با جایگذاری (۴.۱) در (۳.۱) رابطه‌ی $|a_n| r^n \leq 2$ بدست می‌آید، حال اگر $r \rightarrow 1$ ، رابطه‌ی $|a_n| \leq 2$ حاصل می‌شود و قضیه ثابت می‌گردد. $\square$

لم ۲۰۱ (شوارتز^[۱۲]). فرض کنید $f(z)$ تابعی تحلیلی در دیسک

$$\mathbb{U}(\circ, R) = \{z \in \mathbb{C}; |z| < R\},$$

باشد و $f(\circ) = \circ$ و برای ثابت M ، $|f(z)| < M$ در این صورت برای $|z| = r$ که $r < R$ داریم

$$|f(z)| \leq \frac{r}{R} M.$$

۲۰۱. رده‌ی S

تعریف ۷۰۱. رده‌ی همه‌ی توابع $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ که در $\mathbb{U}$ تحلیلی و تک‌ارز می‌باشند و در شرایط $f(\circ) = \circ$ و $f'(\circ) = 1$ صدق می‌کنند را با S نشان می‌دهیم.

لم ۳۰۱. اگر $f(z) \in S$ آنگاه $g(z) = z \sqrt{\frac{f(z^2)}{z^2}} \in S$.

تذکر: به جای $\sqrt{f(z^2)}$ می‌نویسیم $z \sqrt{\frac{f(z^2)}{z^2}}$ زیرا $f(z^2)$ صفری در مبدا دارد که

$$\sqrt{f(z^2)} = e^{\left(\frac{1}{2}\right) \log f(z^2)}$$

را بی‌معنی می‌کند.

برهان. اگر $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ آنگاه

$$g(z) = z \sqrt{\frac{f(z^2)}{z^2}} = z \sqrt{1 + a_2 z^2 + a_3 z^4 + \dots}, \quad (5.1)$$

تابع $g(z)$ بر دیسک واحد تحلیلی می‌باشد و $g(\circ) = \circ$ و $g'(\circ) = 1$. حال به اثبات تک‌ارزی می‌پردازیم.

اگر $g(z_1) = g(z_2)$ آنگاه $z_1 \sqrt{\frac{f(z_1^2)}{z_1^2}} = z_2 \sqrt{\frac{f(z_2^2)}{z_2^2}}$ در این صورت $f(z_1^2) = f(z_2^2)$ و چون f یک‌به‌یک می‌باشد، داریم $z_1^2 = z_2^2$ یعنی $z_1 = z_2$ یا $z_1 = -z_2$. از (۵.۱) ملاحظه می‌شود که $g(z)$

تابعی فرد است، لذا $z_1 = -z_2$ تساوی $g(z_1) = -g(z_2)$ را نتیجه می‌دهد که با فرض در تناقض است، پس $z_1 = z_2$ و تکراری $g(z)$ اثبات می‌شود. $\square$

قضیه ۲.۱. اگر $g(z) = z\sqrt{\frac{f(z^2)}{z^2}} \in S$ ، آنگاه $|a_2| \leq 2$. [۳۱]

مثال ۸.۱ (تابع کوئب). در قضیه ۲.۱، با قرار دادن $a_2 = 2e^{i\alpha}$ که α حقیقی باشد، می‌توان $g(z)$ را به صورت زیر محاسبه کرد

$$g(z) = \frac{z}{1 - e^{i\alpha}z^2} = z\sqrt{\frac{f(z^2)}{z^2}},$$

لذا

$$f(z) = \frac{z}{(1 - e^{i\alpha}z)^2} = z + 2e^{i\alpha}z^2 + 3e^{2i\alpha}z^3 + \dots,$$

با قرار دادن $\alpha = 0$ به تابع

$$k(z) = \frac{z}{(1 - z)^2} = \frac{1}{4} \left(\frac{1 + z}{1 - z} \right)^2 - \frac{1}{4},$$

می‌رسیم که به تابع کوئب معروف است. این تابع قرص $|z| < 1$ را بر صفحه‌ای که در امتداد محور حقیقی منفی از $-\frac{1}{4}$ تا $-\infty$ بریده شده است، می‌نگارد.

قضیه ۳.۱ (پوشش). اگر $f(z) \in S$ و برای $|z| < 1$ که $f(z) \neq c$ ، $c \in \mathbb{C}$ ، آنگاه $|c| \geq \frac{1}{4}$.

برهان. چون $f(z) \in S$ پس $f(z) = z + a_2z^2 + \dots$ و چون $f(z) \neq c$ پس تابع $g(z) = \frac{cf(z)}{c - f(z)}$ نیز متعلق به S می‌باشد

$$\frac{cf(z)}{c - f(z)} = z + \left(a_2 + \frac{1}{c}\right)z^2 + \dots,$$

بنابه قضیه ۲.۱ داریم $|a_2 + \frac{1}{c}| \leq 2$ ، از طرفی

$$\left|\frac{1}{c}\right| - |a_2| \leq |a_2 + \frac{1}{c}| \leq 2,$$

پس

$$\left|\frac{1}{c}\right| \leq 2 + |a_2|,$$

و چون $f(z) \in S$ در نتیجه $|a_2| \leq 2$ ، لذا داریم

$$\left|\frac{1}{c}\right| \leq 4$$

و

$$|c| \geq \frac{1}{4}.$$

$\square$

لم ۴.۱. اگر $f(z) \in S$ و $z = re^{i\theta}$ آنگاه

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} = r \frac{\partial}{\partial r} \log |f'(z)|.$$

برهان. چون برای $|z| < 1$ ، $f'(z) \neq 0$ پس می‌توان شاخه‌ای از $\log f'(z)$ را برای $|z| < 1$ در نظر

گرفت. حال برای $f(z) = f(re^{i\theta})$ داریم $f'(z) = f'(re^{i\theta})$ ، لذا

$$\frac{\partial}{\partial r} \log f'(re^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta} f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})},$$

با ضرب طرفین رابطه‌ی فوق در r داریم

$$r \frac{\partial}{\partial r} \log f'(re^{i\theta}) = \frac{re^{i\theta} f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})} = \frac{zf''(z)}{f'(z)},$$

با محاسبه‌ی قسمت‌های حقیقی خواهیم داشت

$$r \frac{\partial}{\partial r} \log |f'(re^{i\theta})| = \operatorname{Re} \left\{ \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\}.$$

□

قضیه ۴.۱. اگر $f(z) \in S$ آنگاه

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3} \quad (|z| = r < 1).$$

برهان. می‌دانیم برای $|z_0| < 1$ ، تابع $w = \frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0 z}$ تحلیلی، یک‌به‌یک و پوشاست و قرص واحد را

بر خودش می‌نگارد. لذا تابع $g(z) = f\left(\frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0 z}\right) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2$ نیز به ازای $|z| < 1$ تحلیلی و تک‌ارز است و

$$g(0) = b_0 = f(z_0),$$

$$b_1 = g'(0) = f'(z_0)(1 - |z_0|^2),$$

$$b_2 = \frac{g''(0)}{2} = \frac{1}{2} (f''(z_0)(1 - |z_0|^2)^2 - 2f'(z_0)\bar{z}_0(1 - |z_0|^2)).$$

چون $g(z)$ نرمالیزه نمی‌شود (یعنی در شرایط ردهی S صدق نمی‌کند)، پس متعلق به S نمی‌باشد.

با توجه به اینکه تابع $\frac{g(z) - g(0)}{g'(0)} = z + \frac{b_2}{b_1} z^2 + \dots$ در S قرار می‌گیرد لذا بنابه قضیه ۲.۱،

$$\left| \frac{b_2}{b_1} \right| \leq 2 \quad \text{یعنی}$$

$$\frac{1}{2} \left| \frac{f''(z_0)}{f'(z_0)} (1 - |z_0|^2) - 2\bar{z}_0 \right| \leq 2,$$

با قرار دادن $z_0 = re^{i\theta}$ و ضرب طرفین در $\frac{2|z_0|}{1 - |z_0|^2}$ داریم

$$\left| \frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{2|z_0|^2}{1 - |z_0|^2} \right| \leq \frac{4|z_0|}{1 - |z_0|^2},$$

حال چون z دلخواه است قرار می‌دهیم

$$\left| \frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{2r^2}{1 - r^2} \right| \leq \frac{4r}{1 - r^2},$$

یعنی $\frac{zf''(z)}{f'(z)}$ در دایره‌ای به شعاع $\frac{4r}{1-r^2}$ و به مرکز $\frac{2r^2}{1-r^2}$ واقع است، لذا

$$\frac{2r^2 - 4r}{1-r^2} \leq \operatorname{Re} \frac{zf''(z)}{f'(z)} \leq \frac{2r^2 + 4r}{1-r^2},$$

بنابه لم ۴.۱ داریم $\operatorname{Re} \frac{zf''(z)}{f'(z)} = r \frac{\partial}{\partial r} \log |f'(z)|$ یعنی

$$\frac{2r^2 - 4r}{1-r^2} \leq r \frac{\partial}{\partial r} \log |f'(z)| \leq \frac{2r^2 + 4r}{1-r^2},$$

پس

$$\frac{2r - 4}{1-r^2} \leq \frac{\partial}{\partial r} \log |f'(z)| \leq \frac{2r + 4}{1-r^2},$$

حال از طرفین نامساوی اخیر از $\circ$ تا r انتگرال می‌گیریم، داریم

$$\log(1-r) - 3 \log(1+r) \leq \log |f'(z)| \leq \log(1+r) - 3 \log(1-r)$$

و

$$\log \frac{1-r}{(1+r)^3} \leq \log |f'(z)| \leq \log \frac{1+r}{(1-r)^3},$$

در نتیجه

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3} \quad (|z| = r < 1).$$

□

قضیه ۵.۱. اگر $f(z) \in \mathcal{S}$ آنگاه

$$\frac{r}{(1+r)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^2} \quad (|z| = r < 1).$$

برهان. طبق قضیه ۴.۱، برای $|z| = r < 1$ داریم $|f'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3}$ ، نقطه‌ی $\circ$ را با یک خط مستقیم به z وصل کرده و روی این پاره‌خط انتگرال می‌گیریم

$$|f(z)| \leq \int_0^r |f'(t)| dt \leq \int_0^r \frac{1+t}{(1-t)^3} dt = \frac{r}{(1-r)^2},$$

نامساوی $\frac{r}{(1+r)^2} \leq |f(z)|$ همواره برقرار است. حال اگر $|f(z)| \geq \frac{1}{4}$ آنگاه $|f(z)| \leq \frac{r}{(1+r)^2}$ و

اگر $|f(z)| < \frac{1}{4}$ بنا به قضیه ۳.۱ مسیر c داخل دایره‌ی یکه از $\circ$ تا z موجود است که تصویر c تحت تابع f پاره‌خطی می‌باشد که مبدا را به $f(z)$ وصل می‌کند، این پاره‌خط را c_0 می‌نامیم. در این صورت اگر $w = f(z)$ قرار دهیم، داریم

$$|f(z)| = \int_{c_0} |dw| = \int_c |f'(s)| |ds|,$$

از طرفی بنا به قضیه ۴.۱

$$|f(z)| = \int_c |f'(s)| |ds| \geq \int_c |f'(s)| d|s| \geq \int_0^r \frac{1-t}{(1+t)^3} dt = \frac{r}{(1+r)^2},$$

لذا داریم

$$\frac{r}{(1+r)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^2}.$$

□

قضیه ۶.۱. اگر $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ در $\mathcal{S}$ باشد آنگاه برای هر n ، $|a_n| \leq en$ [۳۱]

قضیه ۷.۱. اگر تابع $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ در ردهی $\mathcal{S}$ و با ضرایب حقیقی باشد، آنگاه برای هر n ، $|a_n| \leq n$.

برهان. برای $1 < r$ ، $z = re^{i\theta}$ قرار می‌دهیم،

$$\operatorname{Im} f(z) = v(re^{i\theta}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k r^k \sin k\theta,$$

با ضرب طرفین رابطه‌ی فوق در $\sin n\theta$ و انتگرال‌گیری از 0 تا π نسبت به θ داریم

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} v(re^{i\theta}) \sin n\theta d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} a_n r^n \sin^2 n\theta d\theta = a_n r^n, \quad (6.1)$$

با توجه به رابطه‌ی

$$|\sin(n+1)\theta| = |\sin n\theta \cos \theta + \cos n\theta \sin \theta| \leq |\sin n\theta| + |\sin \theta|$$

و به روش استقرایی می‌توان نشان داد $|\sin n\theta| \leq n|\sin \theta|$ ، لذا از رابطه‌ی (۶.۱) نتیجه می‌شود

$$|a_n r^n| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} |v(re^{i\theta})| \sin \theta d\theta. \quad (7.1)$$

حال نشان می‌دهیم $v(re^{i\theta}) \neq 0$ که $0 < \theta < \pi$ و $0 < r < 1$. برای این کار، از یک‌به‌یک بودن تابع

f داریم $f(re^{i\theta}) \neq f(re^{-i\theta})$ ، پس

$$0 \neq f(re^{i\theta}) - f(re^{-i\theta}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n (e^{in\theta} - e^{-in\theta}) = 2i \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n \sin n\theta = 2i v(re^{i\theta}),$$

در نتیجه $v(re^{i\theta}) \neq 0$.

چون $v(re^{i\theta})$ نسبت به θ تابعی پیوسته است، طبق قضیه‌ی مقدار میانی می‌بایست در فاصله‌ی

$0 < \theta < \pi$ علامت جبری ثابت داشته باشد، لذا با قرار دادن $n=1$ در رابطه‌ی (۶.۱) داریم

$$r = |a_1 r| = \left| \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} v(re^{i\theta}) \sin \theta d\theta \right| = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} |v(re^{i\theta})| \sin \theta d\theta, \quad (8.1)$$

با جایگذاری (۸.۱) در (۷.۱) رابطه‌ی $|a_n r^n| \leq nr$ به دست می‌آید و با $r \rightarrow 1$ قضیه ثابت می‌گردد.

□

۳.۱ ردهی $\mathcal{S}^*$

تعریف ۹.۱. میدان D را نسبت به z ستاره‌گون می‌نامیم هرگاه پاره‌خط مستقیمی که هر نقطه از D را به z وصل می‌کند در D قرار بگیرد. تابع $f(z) \in \mathcal{S}$ را نسبت به مبدا ستاره‌گون گوئیم هرگاه قرص

$|z| < 1$ تحت $f(z)$ بر میدانی نگاشته شود که نسبت به $w = 0$ ستاره‌گون است، این زیر رده‌ی $\mathcal{S}$ را با $\mathcal{S}^*$ نشان می‌دهیم.

لم ۵.۱. فرض کنید $f(z) \in \mathcal{S}$ ، در این صورت $f(z) \in \mathcal{S}^*$ اگر و تنها اگر $f(z)$ هر قرص $|z| < r < 1$ را بر میدان ستاره‌گون بنگارد.

برهان. ابتدا فرض کنید $f(z) \in \mathcal{S}^*$ و D تصویر $|z| < 1$ و D_r تصویر $|z| < r < 1$ تحت $f(z)$ باشد، اگر $w \in D$ ، آنگاه برای $0 < t < 1$ ، $tw \in D$ (چون D ستاره‌گون می‌باشد). لذا تابع $g(z) = f^{-1}(tf(z))$ در $|z| < 1$ تحلیلی است و در آنجا در نامساوی $|g(z)| < 1$ صدق می‌کند. چون $g(0) = f^{-1}(tf(0))$ ، با توجه به لم شوارتز $|g(z)| \leq |z|$ اکنون نقطه‌ی $w_1 = f(z_1) \in D_r$ انتخاب می‌کنیم، در این صورت برای نقطه‌ی z_1 ای که $|z_1| < 1$ و برای t که $0 < t < 1$ داریم

$$|f^{-1}(tw_1)| = |f^{-1}(tf(z_1))| = |g(z_1)| \leq |z_1| < r,$$

ولی این بدان معنی است که tw_1 در D_r قرار دارد. چون این مطلب برای همه‌ی w_1 ها در D_r و همه‌ی t ها که $0 < t < 1$ درست است، پس میدان D_r نسبت به $w = 0$ ستاره‌گون است.

به عکس (برهان خلف)، فرض کنیم $f \notin \mathcal{S}^*$ ، در این صورت نقطه‌ی $w_0 \in D$ و t_0 که $0 < t_0 < 1$ موجودند که $t_0 w_0 \notin D$. از طرفی نقطه‌ی $z_0 \in D$ موجود است که $f(z_0) = w_0$. حال مقدار $r_0 < 1$ را در نظر می‌گیریم که $|z_0| < r_0$ ، بنابراین $w_0 \in D_{r_0}$ و چون D_{r_0} ستاره‌گون است پس $t_0 w_0 \in D_{r_0}$ که این با فرض در تناقض است. پس فرض خلف باطل و $f \in \mathcal{S}^*$. $\square$

قضیه ۸.۱. فرض کنید $f(z) \in \mathcal{S}$ ، در این صورت $f(z) \in \mathcal{S}^*$ اگر و تنها اگر

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > 0.$$

که $|z| < 1$.

برهان. با توجه به لم ۵.۱، $f(z) \in \mathcal{S}^*$ اگر و تنها اگر تصویر ناحیه‌ی $|z| < r < 1$ تحت تابع $f(z)$ یعنی D_r ، یک میدان ستاره‌گون باشد، به بیان معادل برای هر θ که $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ، بردار شعاعی از $w = 0$ تا $w = f(re^{i\theta})$ باید در D_r باشد و این بدان معنی است که $\arg f(re^{i\theta})$ تابعی صعودی اکید نسبت به θ است، زیرا در غیر این صورت بردار شعاعی می‌بایست مرز D_r را حداقل در دو نقطه قطع کند که با ستاره‌گون بودن D_r در تناقض می‌شود یعنی یک تابع در $\mathcal{S}^*$ با شرط $\frac{\partial}{\partial \theta} \arg f(re^{i\theta}) > 0$ مشخص می‌گردد.

ولی $\arg f(re^{i\theta}) = \operatorname{Im} \log f(re^{i\theta})$ ، بنابراین

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \{ \operatorname{Im} \log f(re^{i\theta}) \} = \operatorname{Im} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \log f(re^{i\theta}) \right\} = \operatorname{Im} \left\{ i \frac{re^{i\theta} f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > 0.$$

$\square$

مثال ۱۰.۱. تابع کوئب $k(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ در رده‌ی $\mathcal{S}^*$ قرار دارد زیرا تصویر $|z| < 1$ صفحه‌ی w می‌باشد که در امتداد پرتو $\frac{-1}{4}$ تا $-\infty$ بریده شده است.

قضیه ۹.۱. فرض کنید $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ در $\mathcal{S}^*$ باشد آنگاه برای هر n ، $|a_n| < n$.

برهان. چون برای $1 < |z| < \infty$ ، $f(z) \neq 0$ ، تابع

$$p(z) = z \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1 + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n z^{n-1}}{1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^{n-1}}, \quad (9.1)$$

در $|z| < 1$ تحلیلی است. تابع $p(z)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n z^n, \quad (10.1)$$

از طرفی برای $1 < |z| < \infty$ ، $f(z) \in \mathcal{S}^*$ و داریم $\operatorname{Re}\{p(z)\} > 0$. بنا به **لم ۱.۱** می‌دانیم

$$|\alpha_n| \leq 2 \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (11.1)$$

از (۹.۱) داریم

$$1 + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n z^{n-1} = \left(1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^{n-1}\right) \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n z^n\right),$$

با مساوی قرار دادن ضرایب به رابطی

$$k a_k = a_k + a_{k-1} \alpha_1 + a_{k-2} \alpha_2 + \dots + a_2 \alpha_{k-2} + \alpha_{k-1} \quad (k = 2, 3, \dots),$$

یا به صورت معادل به رابطی

$$(k-1) a_k = a_{k-1} \alpha_1 + a_{k-2} \alpha_2 + \dots + a_2 \alpha_{k-2} + \alpha_{k-1} \quad (k = 2, 3, \dots), \quad (12.1)$$

می‌رسیم. با استفاده از کران (۱۱.۱) می‌توان نامساوی مثلث را در (۱۲.۱) به کار برد، لذا

$$(k-1) |a_k| \leq 2(|a_{k-1}| + |a_{k-2}| + \dots + |a_2| + 1).$$

از رابطی فوق در می‌یابیم $|a_2| \leq 2$ ، سپس فرض کنیم برای $k = 2, 3, \dots, n-1$ ، $|a_k| \leq k$ در این صورت

$$(n-1) |a_n| \leq 2[(n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1] = \frac{2(n-1)n}{2},$$

□

پس $|a_n| \leq n$ ، لذا به استقراء، قضیه برای هر n درست است.

تعریف ۱۱.۱. تابع $f(z) \in \mathcal{S}$ ستاره‌گون از مرتبه‌ی α که $0 \leq \alpha \leq 1$ نامیده می‌شود هرگاه

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{z f'(z)}{f(z)} \right\} > \alpha \quad (|z| < 1).$$

این زیررده‌ی $\mathcal{S}$ را به $\mathcal{S}^*(\alpha)$ نشان می‌دهیم. برای سادگی $\mathcal{S}^*(0)$ را با $\mathcal{S}^*$ نمایش می‌دهیم.

۴.۱ رده‌ی $\mathcal{K}$

تعریف ۱۲.۱. میدان D را محدب گوئیم هرگاه پاره‌خط مستقیمی که هر دو نقطه از D را به هم وصل می‌کند در D قرار گیرد.

تعریف ۱۳.۱. تابع $f(z) \in \mathcal{S}$ را محدب گوییم هرگاه قرص $|z| < 1$ تحت $f(z)$ بر یک میدان محدب نگاشته شود، این زیرردهی $\mathcal{S}$ را با $\mathcal{K}$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۱۰.۱. فرض کنید $f(z) \in \mathcal{S}$ ، در این صورت $f(z) \in \mathcal{K}$ اگر و تنها اگر $f(z)$ هر قرص $|z| < r < 1$ را بر میدان محدب تصویر کند.

برهان. ابتدا فرض کنید $f(z) \in \mathcal{K}$ و D تصویر $|z| < 1$ و D_r تصویر $|z| < r < 1$ تحت $f(z)$ باشد. نقاط w_1 و w_2 را در D_r انتخاب می‌کنیم، باید نشان دهیم که پاره‌خط $tw_1 + (1-t)w_2$ که $0 < t < 1$ هم در D_r قرار دارد، می‌بایست نقاط z_1 و z_2 در قرص $|z| < 1$ موجود باشند که $w_1 = f(z_1)$ و $w_2 = f(z_2)$. بدون کم شدن از کلیت فرض کنیم $|z_1| \leq |z_2|$ ، آنگاه تصویر $|z| < 1$ تحت تابع $g(z) = tf(\frac{z_1}{z_2}z) + (1-t)f(z)$ در D واقع است. لذا تابع $h(z) = f^{-1}(g(z))$ در $|z| < 1$ تحلیلی است و چون $f(z) \in \mathcal{S}$ لذا در شرایط $|h(z)| < 1$ و $h(0) = 0$ صدق می‌کند، به موجب لم شوارتز $|h(z)| \leq |z|$ به‌ویژه

$$|h(z_2)| = |f^{-1}(tw_1 + (1-t)w_2)| \leq |z_2| < r, \quad (13.1)$$

پس $|f^{-1}(tw_1 + (1-t)w_2)| < r$ ، در نتیجه $tw_1 + (1-t)w_2 \in D_r$. به‌عکس، اگر $f(z)$ در ردهی $\mathcal{K}$ نباشد آنگاه دو نقطه در D وجود دارد که پاره‌خط مار بر این دو نقطه در D قرار ندارد. اینک قرصی مانند $|z| < r < 1$ انتخاب می‌کنیم که تصویرش، D_r ، شامل این دو نقطه باشد. چون $D_r \subset D$ ، پاره‌خطی که این دو نقطه را به هم وصل می‌کند نمی‌تواند در D_r قرار داشته باشد، لذا $f(z)$ قرص $|z| < r$ را بر یک میدان محدب تصویر نمی‌کند. $\square$

قضیه ۱۱.۱. فرض کنید $f(z) \in \mathcal{S}$. در این صورت $f(z) \in \mathcal{K}$ اگر و تنها اگر

$$Re \left\{ 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} > 0 \quad (|z| < 1).$$

برهان. بنا به قضیه ۱۰.۱، $f(z) \in \mathcal{K}$ اگر و تنها اگر تصویر D_r از $|z| < r < 1$ یک میدان محدب باشد. از نظر هندسی به این معنی است که تابع $w = f(re^{i\theta})$ دایره‌ی $|z| = r < 1$ را بر یک مرز ساده‌ی بسته می‌نگارد و مماس بر این مرز، با افزایش θ در جهت خلاف عقربه‌های ساعت حرکت می‌کند. از طرفی، زاویه‌ای که خط مماس در صفحه‌ی w با محور حقیقی مثبت می‌سازد برابر است با

$$\frac{\pi}{4} + \theta + \arg f'(z),$$

پس طبق صعودی بودن داریم

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\pi}{4} + \theta + \arg f'(re^{i\theta}) \right) > 0,$$

لذا داریم

$$1 + \frac{\partial}{\partial \theta} (Im \log f'(re^{i\theta})) = 1 + Im \left\{ ire^{i\theta} \frac{f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})} \right\} = Re \left\{ 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} > 0.$$

$\square$

قضیه ۱۲.۱ (الکساندر^۳). فرض کنید $f(z) \in \mathcal{S}$. در این صورت $f(z) \in \mathcal{K}$ اگر و تنها اگر $zf'(z) \in \mathcal{S}^*$.

برهان. اگر $g(z) = zf'(z)$ در این صورت

$$\left\{ \frac{zg'(z)}{g(z)} \right\} = \left\{ 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\},$$

با استفاده از قضیه‌های (۸.۱) و (۱۱.۱) نتیجه حاصل می‌شود.

□

قضیه ۱۳.۱. فرض کنید $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ در $\mathcal{K}$ باشد، در این صورت برای هر n ، $|a_n| \leq 1$.
برهان. با توجه به قضیه ۱۲.۱، تابع $zf'(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} na_n z^n$ در $\mathcal{S}^*$ قرار دارد، لذا بنا به قضیه ۹.۱ برای هر n ، $n|a_n| \leq n$ و $|a_n| \leq 1$.

□

قضیه ۱۴.۱ (قضیه پوششی برای توابع محدب). اگر $f(z) \in \mathcal{K}$ و $f(z) \neq c$ برای $|z| < 1$ ، در این صورت $|c| \geq \frac{1}{2}$.

برهان. ابتدا نشان می‌دهیم تابع کمکی $g(z) = (c - f(z))^2$ در $|z| < 1$ تک‌ارز است. دو نقطه‌ی متمایز z_0 و z_1 را در قرص واحد انتخاب می‌کنیم، در این صورت

$$g(z_0) - g(z_1) = (c - f(z_0))^2 - (c - f(z_1))^2 = (f(z_0) - f(z_1))(f(z_0) + f(z_1) - 2c),$$

اکنون $f(z_0) \neq f(z_1)$ زیرا $f(z)$ تک‌ارز می‌باشد، همچنین چون $f(z)$ محدب است پس نقطه‌ی

$$\frac{1}{2}[f(z_0) + f(z_1)]$$

به تصویر $|z| < 1$ متعلق است، لذا نمی‌تواند مساوی c باشد پس

$$[f(z_0) + f(z_1)] - 2c \neq 0$$

و تک‌ارزی $g(z)$ ثابت می‌شود. از طرفی $g(z) = c^2 - 2cz + z^2 + \dots$. تابع زیر متعلق به $\mathcal{S}$ است،

$$h(z) = \frac{g(z) - c^2}{-2c},$$

به‌علاوه در $|z| < 1$ ، $h(z) \neq \frac{c}{2}$ زیرا $g(z)$ هرگز در آنجا صفر نیست. با به‌کار بردن قضیه پوششی در می‌یابیم $\frac{1}{2} \leq \left| \frac{c}{2} \right|$ و $|c| \geq \frac{1}{2}$.

□

قضیه ۱۵.۱. اگر $f(z) \in \mathcal{K}$ آنگاه برای $|z| = r < 1$ داریم

$$\frac{1}{(1+r)^2} \leq |f'(z)| \leq \frac{1}{(1-r)^2}.$$

برهان. می‌دانیم تابع $w = \frac{z + z_0}{1 + \bar{z}_0 z}$ که $|z_0| < 1$ ، تحلیلی، یک‌به‌یک و پوشاست و قرص واحد را بر خودش می‌نگارد، پس تابع

$$g(z) = f\left(\frac{z + z_0}{1 + \bar{z}_0 z}\right) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots,$$

نیز به ازای $|z| < 1$ تحلیلی و تک‌ارز است. داریم

$$g(\circ) = b_\circ = f(z_\circ),$$

$$b_1 = g'(\circ) = f'(z_\circ)(1 - |z_\circ|^2),$$

$$b_2 = \frac{g''(\circ)}{2} = \frac{1}{2}(f''(z_\circ)(1 - |z_\circ|^2)^2 - 2f'(z_\circ)\bar{z}_\circ(1 - |z_\circ|^2)),$$

چون تابع $g(z)$ نرمالیزه نمی‌باشد لذا $g(z)$ در رده‌ی $\mathcal{S}$ قرار ندارد. با توجه به اینکه تابع

$$\frac{g(z) - g(\circ)}{g'(\circ)} = z + \frac{b_2}{b_1}z^2 + \dots,$$

در $\mathcal{S}$ قرار می‌گیرد لذا متعلق به $\mathcal{K}$ نیز می‌باشد. پس بنا به قضیه‌ی ۱۳.۱،

$$\frac{1}{2} \left| \frac{f''(z_\circ)}{f'(z_\circ)}(1 - |z_\circ|^2) - 2\bar{z}_\circ \right| \leq 1.$$

با قرار دادن $z_\circ = re^{i\theta}$ و ضرب طرفین در $\frac{2|z_\circ|}{1 - |z_\circ|^2}$ داریم

$$\left| \frac{z_\circ f''(z_\circ)}{f'(z_\circ)} - \frac{2|z_\circ|^2}{1 - |z_\circ|^2} \right| \leq \frac{2|z_\circ|}{1 - |z_\circ|^2},$$

حال چون z دلخواه است، خواهیم داشت

$$\left| \frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{2r^2}{1 - r^2} \right| \leq \frac{2r}{1 - r^2},$$

$$\frac{2r^2 - 2r}{1 - r^2} \leq \operatorname{Re} \left(\frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) \leq \frac{2r^2 + 2r}{1 - r^2},$$

$$\frac{2r - 2}{1 - r^2} \leq \frac{\partial}{\partial r} \log |f'(z)| \leq \frac{2r + 2}{1 - r^2}.$$

اکنون از $\circ$ تا r انتگرال می‌گیریم،

$$-2 \log(1 + r) \leq \log |f'(z)| \leq -2 \log(1 - r),$$

لذا

$$\frac{1}{(1 + r)^2} \leq |f'(z)| \leq \frac{1}{(1 - r)^2}.$$

□

قضیه ۱۶.۱. اگر $f(z) \in \mathcal{K}$ آنگاه برای $|z| = r < 1$ داریم

$$\frac{r}{1 + r} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{1 - r}.$$

برهان. بنا به قضیه‌ی ۱۵.۱ برای $|z| = r < 1$ داریم $|f'(z)| \leq \frac{1}{(1 - r)^2}$. برای نقطه‌ی $z_\circ$ که $|z_\circ| = r < 1$ ، پاره‌خط مستقیم c ، از مبدا تا $z_\circ$ را در نظر می‌گیریم و روی این پاره‌خط انتگرال می‌گیریم،

$$|f(z_\circ)| = \left| \int_\circ^{z_\circ} f'(z) dz \right| \leq \int_c |f'(z)| |dz| \leq \int_\circ^r \frac{1}{(1 - t)^2} dt = \frac{r}{1 - r}.$$

نامساوی $\frac{r}{(1+r)} \leq \frac{1}{4}$ همواره برقرار است، حال اگر $\frac{1}{4} \leq |f(z_0)|$ لذا $|f(z)| \leq \frac{r}{(1+r)}$ و اگر $|f(z_0)| < \frac{1}{4}$ ، طبق قضیه‌ی پوششی برای توابع محدب، پاره‌خط L که مبدا را به $f(z_0)$ متصل می‌کند داخل برد $f(z)$ قرار می‌گیرد. حال اگر c تصویر وارون پاره‌خط فوق باشد آنگاه با قرار دادن $w = f(z)$ داریم

$$|f(z_0)| = \int_L |dw| = \int_c |f'(z)dz| \geq \int_c |f'(z)| |dz| \geq \int_0^r \frac{1}{(1+t)^2} dt = \frac{r}{1+r},$$

در نتیجه داریم

$$|f(z)| \geq \frac{r}{1+r}.$$

□

فصل ۲

کران ضرایب برای زیررده‌هایی از توابع دوطرف-تک‌ارز

در این فصل، چند زیررده‌ی جدید از رده‌ی تابع Σ از توابع تحلیلی و دوطرف-تک‌ارز در دیسک باز واحد را معرفی می‌کنیم. به‌علاوه، تخمینی از ضرایب $|a_2|$ و $|a_3|$ برای توابع متعلق به این زیررده‌ها را پیدا خواهیم کرد.

۱.۲ تعاریف و مقدمات

$\mathcal{A}$ را رده‌ی تمامی توابع f به فرم

$$f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k \quad (1.2)$$

در نظر می‌گیریم که در دیسک باز واحد $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ تحلیلی هستند و شرط نرمالیزه $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ برقرار است. به‌علاوه، توسط $\mathcal{S}$ رده‌ی تمامی توابع $\mathcal{A}$ که در $\mathbb{U}$ تک‌ارز هستند را نمایش می‌دهیم.

می‌دانیم اگر $f(z)$ تابعی تحلیلی و تک‌ارز از دامنه‌ی D_1 به دامنه‌ی D_2 باشد، در این صورت تابع معکوس آن یعنی g تعریف شده به صورت $g(f(z)) = z$ که $z \in D_1$ ، نگاشتی تحلیلی و تک‌ارز از D_2 به D_1 است.

علاوه بر این، به‌وسیله‌ی قضیه‌ی $\frac{1}{4}$ کوئب، واضح است که تصویر $\mathbb{U}$ تحت هر تابع $f \in \mathcal{S}$ حاوی یک دیسک با شعاع $\frac{1}{4}$ است. در نتیجه به‌وضوح، هر تابع تک‌ارز $f \in \mathcal{S}$ در $\mathbb{U}$ ، معکوسی مانند f^{-1} دارد که در شرایط زیر صدق می‌کند،

$$f^{-1}(f(z)) = z \quad (z \in \mathbb{U})$$

$$f(f^{-1}(w)) = w \quad \left(|w| < r_0(f); r_0(f) \geq \frac{1}{4} \right).$$

معکوس تابع $f(z)$ دارای بسط تیلوری در دیسکی حول مبدا به شکل

$$f^{-1}(w) = w + \gamma_2 w^2 + \gamma_3 w^3 + \dots \quad (2.2)$$

است. پیش‌تر نشان داده شد [۲۲، ۲۸] که معکوس تابع کوئب، بهترین کران را برای همه $|\gamma_k|$ ها در (۲.۲) فراهم می‌کند. اثبات‌های جدیدی از این نتیجه، همراه با رفتار غیر منتظره و غیر معمول ضرایب γ_k در (۲.۲) برای زیرده‌های مختلف از تابع تک‌ارز رده‌ی $\mathcal{S}$ ، توجهی بیشتری به این مشکل را ایجاد کرده است [۱۸، ۳۰].

تابع $f(z)$ که در یک همسایگی از مبدأ تک‌ارز است، معکوسش یعنی $f^{-1}(w)$ ، در شرط

$$f(f^{-1}(w)) = w,$$

یا به‌طور معادل

$$w = f^{-1}(w) + a_2[f^{-1}(w)]^2 + a_3[f^{-1}(w)]^3 + \dots, \quad (3.2)$$

صدق می‌کند.

با استفاده از (۱.۲) و (۲.۲) در (۳.۲) داریم

$$g(w) = f^{-1}(w) = w - a_2 w^2 + (2a_2^2 - a_3)w^3 + (5a_2^3 - 5a_2 a_3 + a_4)w^4 + \dots. \quad (4.2)$$

زیرا $f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$ و $f^{-1}(w) = b_0 + b_1 w + b_2 w^2 + b_3 w^3 + \dots$ رابطه‌ی اخیر باید در شرط $f(f^{-1}(w)) = w$ صدق کند.

از طرفی $w = f^{-1}(w) + a_2[f^{-1}(w)]^2 + a_3[f^{-1}(w)]^3 + \dots$ پس

$$w = (b_0 + b_1 w + b_2 w^2 + b_3 w^3 + \dots) + a_2(b_0 + b_1 w + b_2 w^2 + b_3 w^3 + \dots)^2 + a_3(b_0 + b_1 w + b_2 w^2 + b_3 w^3 + \dots)^3 + \dots,$$

$$0 + w + (0)w^2 + (0)w^3 + \dots = (b_0 + a_2 b_0^2 + a_3 b_0^3) + b_1 w + (b_2 + a_2 b_1^2)w^2 + (b_3 + 2a_2 b_1 b_2 + a_3 b_1^3)w^3 + \dots,$$

پس

$$b_0 + a_2 b_0^2 + a_3 b_0^3 = 0 \implies b_0(1 + a_2 b_0 + a_3 b_0^2) = 0$$

$$\implies b_0 = 0,$$

$$w = b_1 w \implies b_1 = 1,$$

$$\begin{aligned} b_2 + a_2 b_1^2 &= 0 \implies b_2 = -a_2, \\ b_3 + 2a_2 b_1 b_2 + a_3 b_1 &= 0 \implies b_3 = -2a_2 b_1 b_2 - a_3 b_1 \\ &\implies b_3 = 2a_2^2 - a_3, \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} f^{-1}(w) &= b_0 + b_1 w + b_2 w^2 + b_3 w^3 + \dots \\ &= w - a_2 w^2 + (2a_2 - a_3) w^3 + \dots \end{aligned}$$

تعریف ۱.۲. تابع $f \in \mathcal{A}$ در $\mathbb{U}$ دوطرف-تک‌ارز نامیده می‌شود هرگاه هم f و هم f^{-1} در $\mathbb{U}$ تک‌ارز باشند. توسط Σ رده‌ی همه‌ی توابع $f(z)$ که در $\mathbb{U}$ دوطرف-تک‌ارز هستند و به‌وسیله‌ی بسط سری تیلور-مک‌لورن (۱.۲) داده شده‌اند را نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲.۲. تابع تحلیلی f با تابع تحلیلی دیگری مانند g زیر ترتیبی است هرگاه تابعی شوارتز مانند w وجود داشته باشد به‌طوری‌که در $\mathbb{U}$ تحلیلی باشد و $w(0) = 0$ ، $|w(z)| < 1$ که $z \in \mathbb{U}$ و $f(z) = g(w(z))$ و به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$f(z) \prec g(z) \quad (z \in \mathbb{U}),$$

به‌خصوص اگر تابع g در $\mathbb{U}$ تک‌ارز باشد، در این صورت هم‌ارزی زیر را داریم

$$f(z) \prec g(z) \iff f(0) = g(0), \quad f(\mathbb{U}) \subset g(\mathbb{U}).$$

مثال ۳.۲. فرض کنید $1 < |z|$ ، $f(z) = \frac{1}{z}$ و $g(z) = z$. در این صورت تابع شوارتز w به‌صورت $w = \frac{1}{z}$ خواهد بود که در شرایط مورد نظر صدق می‌کند.

تعریف ۴.۲. برای $f(z)$ تعریف شده به‌صورت (۱.۲) و $\Phi(z)$ تعریف شده به‌صورت

$$\Phi(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \phi_n z^n \quad (\phi_n \geq 0), \quad (5.2)$$

تلفیق یا ضرب هادامارد^۱ دو تابع $f(z)$ و $\Phi(z)$ را به‌صورت

$$(f * \Phi)(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \phi_n z^n = (\Phi * f)(z), \quad (6.2)$$

تعریف می‌کنیم.

تعریف ۵.۲. برای $0 \leq \alpha < 1$ و $\lambda \geq 0$ ، رده‌ی $\mathcal{Q}_\lambda(h, \alpha)$ را زیر رده‌ای از $\mathcal{A}$ شامل توابع $f(z)$ به‌صورت (۱.۲) و توابع $h(z)$ فرض شده به‌صورت

$$h(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} h_n z^n \quad (h_n > 0) \quad (7.2)$$

و دارای ضابطه‌ی تحلیلی به‌صورت

$$\mathcal{Q}_\lambda(h, \alpha) = \left\{ f \in \mathcal{A} : \operatorname{Re} \left((1 - \lambda) \frac{(f * h)(z)}{z} + \lambda (f * \lambda)'(z) \right) > \alpha, 0 \leq \alpha < 1, \lambda \geq 0 \right\} \quad (8.2)$$

^۱Hadamard

تعریف می‌کنیم.

در سال ۱۹۸۵، لوئیس دی برانگس^۲ [۱۰]، حدس مشهور بیبر باخ^۳ را ثابت کرد که بیان می‌کرد که برای هر $f(z) \in \mathcal{S}$ داده شده توسط بسط سری تیلور-مکلورن (۱.۲)، نابرابری ضریب زیر برقرار است

$$|a_n| \leq n \quad (n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}),$$

که $\mathbb{N}$ مجموعه‌ی اعداد صحیح مثبت است.

لوین^۴ [۲۰] رده‌ی Σ از توابع دوطرف-تک‌ارز را بررسی کرد و با استفاده از نامساوی گرانسکی^۵ نشان داد $|a_2| < 1/51$. سپس برانان^۶ و کلونی^۷ [۲] حدس زدند که $|a_2| \leq \sqrt{2}$. از سوی دیگر نتانیاها^۸ [۲۵] نشان داد که $\max_{f \in \Sigma} |a_2| = \frac{4}{3}$.

در سال ۱۹۸۱، استایر^۹ و رایت^{۱۰} [۳۴] ثابت کردند که توابع $f(z) \in \Sigma$ وجود دارند که برای آن‌ها $|a_2| > \frac{4}{3}$.

در سال ۱۹۸۵، تان^{۱۱} [۳۶] نشان داد $|a_2| \leq 1/485$.

برانان^{۱۲} و طاها^{۱۳} [۴، ۳۵] زیرده‌های خاصی از توابع دوطرف-تک‌ارز رده‌ی Σ ، شبیه به زیرده‌های $\mathcal{S}^*(\alpha)$ و $\mathcal{K}(\alpha)$ ، به ترتیب از توابع ستاره‌گون و محدب از مرتبه α که $0 \leq \alpha < 1$ را معرفی کردند [۳]. در نتیجه، طبق نظر برانان و طاها [۳۷، ۳۲]، تابع $f \in \mathcal{A}$ در رده‌ی $\mathcal{S}_\Sigma^*(\alpha)$ از توابع به‌طور قوی دوطرف-ستاره‌گون از مرتبه α که $0 \leq \alpha < 1$ است اگر شرایط زیر برقرار باشد،

$$f \in \Sigma$$

و

$$\left| \arg \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right) \right| < \frac{\alpha\pi}{2}, \quad (0 \leq \alpha < 1, \quad z \in \mathbb{U})$$

و

$$\left| \arg \left(\frac{wg'(w)}{g(w)} \right) \right| < \frac{\alpha\pi}{2}, \quad (0 \leq \alpha < 1, \quad w \in \mathbb{U}),$$

که g گسترش f^{-1} روی $\mathbb{U}$ است. رده‌های $\mathcal{S}_\Sigma^*(\alpha)$ و $\mathcal{K}_\Sigma(\alpha)$ از توابع دوطرف-ستاره‌گون و دوطرف-محدب از مرتبه α ، به ترتیب مربوط به رده توابع $\mathcal{S}^*(\alpha)$ و $\mathcal{K}(\alpha)$ ، به‌طور مشابه معرفی شدند. برای هر

^۸Netanyahu

^۹Styer

^{۱۰}Wright

^{۱۱}Tan

^{۱۲}Branna

^{۱۳}Taha

^۲Louis de Branges

^۳Bieberbach Conjecture

^۴Lewin

^۵Grunsky

^۶Brannan

^۷Clunie

کدام از رده توابع $\mathcal{S}_{\Sigma}^*(\alpha)$ و $\mathcal{K}_{\Sigma}(\alpha)$ آن‌ها تخمینی نادقیق از ضرایب اول و دوم سری تیلور-مکلورن^{۱۴} یعنی تخمینی از ضرایب $|a_2|$ و $|a_3|$ را پیدا کردند [۳۵، ۴].

به‌تازگی، محققان متعددی [۳۲، ۱۴، ۳۸، ۳۹]، تخمینی از ضرایب $|a_2|$ و $|a_3|$ از توابع دوطرف-تک‌ارز، برای زیررده‌های مختلف از رده‌ی تابع Σ را به‌دست آورده‌اند. با الهام از کار آن‌ها، زیررده‌های جدیدی از رده‌ی تابع Σ را معرفی و تخمینی از ضرایب $|a_2|$ و $|a_3|$ برای توابع این زیررده‌های جدید از رده‌ی تابع Σ را با به‌کار بردن روش درگذشته استفاده شده توسط سریواستوا^{۱۵} [۳۲] و فراسین^{۱۶} و آووف^{۱۷} [۱۴] پیدا می‌کنیم.

به‌منظور اثبات نتیجه‌ی اصلیمان، به لم ۱.۱ نیاز داریم.

۲.۲ رده‌های $B(h, \beta, \lambda)$ و $B(h, \alpha, \lambda)$

۱.۲.۲ کران ضرایب برای رده‌ی توابع $B(h, \alpha, \lambda)$

تعریف ۶.۲. تابع $f(z)$ داده شده به‌صورت (۱.۲)، متعلق به رده‌ی $B_{\Sigma}(h, \alpha, \lambda)$ است هرگاه شرایط (۹.۲)، (۱۰.۲) و (۱۱.۲) برقرار باشند،

$$f \in \Sigma \quad (9.2)$$

و

$$\left| \arg\left((1-\lambda)\frac{(f*h)(z)}{z} + \lambda(f*h)'(z)\right) \right| < \frac{\alpha\pi}{2} \quad (10.2)$$

$$(\circ < \alpha \leq 1; \lambda \geq 1; z \in \mathbb{U})$$

و

$$\left| \arg\left((1-\lambda)\frac{(f*h)^{-1}(w)}{w} + \lambda((f*h)^{-1})'(w)\right) \right| < \frac{\alpha\pi}{2} \quad (11.2)$$

$$(\circ < \alpha \leq 1; \lambda \geq 1; w \in \mathbb{U}),$$

که تابع $h(z)$ به‌صورت (۷.۲) و $(f*h)^{-1}(w)$ تعریف شده به‌صورت

$$(f*h)^{-1}(w) = w - a_2 h_2 w^2 + (2a_2^2 h_2^2 - a_3 h_3) w^3 - (5a_2^3 h_2^3 - 5a_2 h_2 a_3 h_3 + a_4 h_4) w^4 + \dots, \quad (12.2)$$

است.

$$\text{زیرا } (f*h)(z) = z + a_2 h_2 z^2 + a_3 h_3 z^3 + \dots$$

$$(f*h)^{-1}(w) = b_0 + b_1 w + b_2 w^2 + b_3 w^3 + \dots$$

^{۱۶}Frasin

^{۱۷}Aouf

^{۱۴}Taylor – Maclaurin

^{۱۵}Srivastava

رابطه‌ی اخیر باید در $w = (f * h)^{-1}((f * h)^{-1}(w))$ صدق کند،

$$w = (f * h)^{-1}(w) + a_2 h_2 (f * h)^{-1}(w) + a_3 h_3 ((f * h)^{-1}(w))^2 + \dots,$$

پس

$$w = (b_0 + b_1 w + b_2 w^2 + b_3 w^3 + \dots) + a_2 h_2 (b_0 + b_1 w + b_2 w^2 + b_3 w^3 + \dots)^2 + a_3 h_3 (b_0 + b_1 w + b_2 w^2 + b_3 w^3 + \dots)^3 + \dots,$$

$$0 + w + (0)w^2 + (0)w^3 + \dots = (b_0 + a_2 h_2 b_0^2 + a_3 h_3 b_0^3) + b_1 w + (b_2 + a_2 h_2 b_1^2)w^2 + (b_3 + 2a_2 h_2 b_1 b_2 + a_3 h_3 b_1^3)w^3 + \dots,$$

پس

$$b_0 + a_2 h_2 b_0^2 + a_3 h_3 b_0^3 = 0 \implies b_0(1 + a_2 h_2 b_0 + a_3 h_3 b_0^2) = 0$$

$$\implies b_0 = 0,$$

$$w = b_1 w \implies b_1 = 1,$$

$$b_2 + a_2 h_2 b_1^2 = 0 \implies b_2 = -a_2 h_2,$$

$$b_3 + 2a_2 h_2 b_1 b_2 + a_3 h_3 b_1^3 = 0 \implies b_3 = -2a_2 h_2 b_1 b_2 - a_3 h_3 b_1^3,$$

$$b_3 = 2a_2 h_2 (-a_2 h_2) - a_3 h_3 = 2a_2^2 h_2^2 - a_3 h_3,$$

پس

$$(f * h)^{-1}(w) = w - a_2 h_2 w^2 + (2a_2^2 h_2^2 - a_3 h_3)w^3 + \dots.$$

توجه کنید که برای $\lambda = 1$ و $h(z) = \frac{z}{1-z}$ ، رده‌ی $B_\Sigma(h, \alpha, \lambda)$ به رده‌ی $\mathcal{H}_\Sigma^\alpha$ (معرفی شده و مطالعه شده توسط سریواستاوا) تبدیل می‌شود [۳۲].

هم‌چنین برای $h(z) = \frac{z}{1-z}$ ، رده‌ی $B_\Sigma(h, \alpha, \lambda)$ به رده‌ی $B_\Sigma(\alpha, \lambda)$ (معرفی شده و مطالعه شده توسط فراسین و آووف) تبدیل می‌شود [۱۴].

کار خود را با پیدا کردن تخمین‌هایی از ضرایب $|a_2|$ و $|a_3|$ برای توابع رده‌ی $B_\Sigma(h, \alpha, \lambda)$ شروع می‌کنیم.

قضیه ۱.۲. فرض کنید $f(z)$ داده شده به صورت (۱.۲)، در رده‌ی $B_\Sigma(h, \alpha, \lambda)$ باشد که $0 \leq \alpha < 1$ و $\lambda \geq 1$ در این صورت

$$|a_2| \leq \frac{2\alpha}{h_2 \sqrt{(\lambda+1)^2 + \alpha(1+2\lambda-\lambda^2)}} \quad (۱۳.۲)$$

و

$$|a_3| \leq \frac{1}{h_3} \left(\frac{4\alpha^2}{(\lambda+1)^2} + \frac{2\alpha}{(2\lambda+1)} \right). \quad (۱۴.۲)$$

برهان. از (۱۰.۲) و (۱۱.۲) نتیجه می‌شود

$$(1-\lambda) \frac{(f * h)(z)}{z} + \lambda(f * h)'(z) = [p(z)]^\alpha \quad (۱۵.۲)$$

و

$$(\mathfrak{I} - \lambda) \frac{(f * h)^{-\mathfrak{I}}(w)}{w} + \lambda((f * h)^{-\mathfrak{I}})'(w) = [q(w)]^\alpha, \quad (16.2)$$

که $p(z), q(w) \in P$ و به صورت

$$p(z) = \mathfrak{I} + p_1 z + p_2 z^2 + p_3 z^3 + \dots, \quad (17.2)$$

$$q(w) = \mathfrak{I} + q_1 w + q_2 w^2 + q_3 w^3 + \dots, \quad (18.2)$$

هستند. حال با برابر قرار دادن ضرایب در (۱۵.۲) و (۱۶.۲) داریم

$$(\lambda + \mathfrak{I})a_2 h_2 = \alpha p_1, \quad (19.2)$$

زیرا

$$(f * h)(z) = z + a_2 h_2 z^2 + a_3 h_3 z^3 + \dots,$$

$$(f * h)'(z) = \mathfrak{I} + 2a_2 h_2 z + 3a_3 h_3 z^2 + \dots.$$

با استفاده از (۱۵.۲) داریم

$$(\mathfrak{I} - \lambda) \frac{z + a_2 h_2 z^2 + a_3 h_3 z^3 + \dots}{z} + \lambda(\mathfrak{I} + 2a_2 h_2 z + 3a_3 h_3 z^2 + \dots) = [p(z)]^\alpha,$$

$$(\mathfrak{I} - \lambda)(\mathfrak{I} + a_2 h_2 z + a_3 h_3 z^2 + \dots) + \lambda(\mathfrak{I} + 2a_2 h_2 z + 3a_3 h_3 z^2 + \dots) = \mathfrak{I} + \alpha p_1 z + (\alpha p_2 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} p_1^2) z^2 + \dots,$$

$$\begin{aligned} & \left[(\mathfrak{I} + \underbrace{a_2 h_2 z + a_3 h_3 z^2 + \dots}_{\text{...}} - \lambda - \underbrace{\lambda a_2 h_2 z - \lambda a_3 h_3 z^2 - \dots}_{\text{...}}) + (\lambda \right. \\ & \left. + \underbrace{2\lambda a_2 h_2 z + 3\lambda a_3 h_3 z^2 + \dots}_{\text{...}}) \right] = \mathfrak{I} + \underbrace{\alpha p_1 z}_{\text{...}} + (\alpha p_2 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} p_1^2) z^2 + \dots, \\ & (a_2 h_2 - \lambda a_2 h_2 + 2\lambda a_2 h_2) z = \alpha p_1 z \implies (\lambda + \mathfrak{I})a_2 h_2 = \alpha p_1. \end{aligned}$$

$$(2\lambda + \mathfrak{I})a_3 h_3 = \alpha p_2 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} p_1^2, \quad (20.2)$$

زیرا

$$\begin{aligned} & \left[(\mathfrak{I} + a_2 h_2 z + \underbrace{a_3 h_3 z^2 + \dots}_{\text{...}} - \lambda - \lambda a_2 h_2 z - \underbrace{\lambda a_3 h_3 z^2 - \dots}_{\text{...}}) + (\lambda \right. \\ & \left. + 2\lambda a_2 h_2 z + \underbrace{3\lambda a_3 h_3 z^2 + \dots}_{\text{...}}) \right] = \mathfrak{I} + \alpha p_1 z + \underbrace{(\alpha p_2 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} p_1^2) z^2}_{\text{...}} + \dots, \end{aligned}$$

$$(a_3 h_3 - \lambda a_3 h_3 + 3\lambda a_3 h_3) z^2 = (\alpha p_2 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} p_1^2) z^2,$$

$$(2\lambda + \mathfrak{I})a_3 h_3 = \alpha p_2 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} p_1^2.$$

$$-(\lambda + 1)a_2 h_2 = \alpha q_1 \quad (21.2)$$

و

$$(\lambda + 1)(2a_2^* h_2^* - a_3 h_3) = \alpha q_2 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} q_1^2. \quad (22.2)$$

از (۱۹.۲) و (۲۱.۲) داریم

$$p_1 = -q_1, \quad (23.2)$$

طرفین رابطه‌های (۱۹.۲) و (۲۱.۲) را به توان ۲ رسانده و با هم جمع می‌کنیم، در نتیجه خواهیم داشت

$$2(\lambda + 1)^2 a_2^* h_2^* = \alpha^2 (p_1^2 + q_1^2). \quad (24.2)$$

حال با جمع کردن (۲۰.۲) با (۲۲.۲) و سپس با استفاده از (۲۴.۲) داریم

$$\begin{aligned} 2(\lambda + 1)a_2^* h_2^* &= \alpha(p_2 + q_2) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}(p_1^2 + q_1^2) \\ &= \alpha(p_2 + q_2) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} \frac{2(\lambda + 1)^2 a_2^* h_2^*}{\alpha^2}. \end{aligned}$$

بنابراین داریم

$$a_2^* = \frac{\alpha^2 (p_2 + q_2)}{2\alpha(2\lambda + 1)h_2^* - (\alpha-1)(\lambda + 1)^2 h_2^*}.$$

زیرا

$$\begin{aligned} 2(\lambda + 1)a_2^* h_2^* &= \frac{2\alpha^2 (p_2 + q_2) + \alpha(\alpha-1)2(\lambda + 1)^2 a_2^* h_2^*}{2\alpha^2} \\ &= \frac{\alpha^2 (p_2 + q_2) + (\alpha-1)(\lambda + 1)^2 a_2^* h_2^*}{\alpha}, \end{aligned}$$

$$2\alpha(2\lambda + 1)a_2^* h_2^* = \alpha^2 (p_2 + q_2) + (\alpha-1)(\lambda + 1)^2 a_2^* h_2^*,$$

$$a_2^* (2(2\lambda + 1)\alpha h_2^* - (\alpha-1)(\lambda + 1)^2 h_2^*) = \alpha^2 (p_2 + q_2),$$

$$a_2^* = \frac{\alpha^2 (p_2 + q_2)}{2\alpha(2\lambda + 1)h_2^* - (\alpha-1)(\lambda + 1)^2 h_2^*}.$$

با به‌کار بستن لم ۱.۱ برای ضرایب p_2 و q_2 و با توجه به اینکه $h_n > 0$ و $0 < \alpha \leq 1$ داریم

$$|a_2| \leq \frac{2\alpha}{h_2 \sqrt{(\lambda + 1)^2 + \alpha(1 + 2\lambda - \lambda^2)}}.$$

زیرا

$$a_2^* \leq \frac{2\alpha^2}{h_2^* (2\alpha(2\lambda + 1) - (\alpha-1)(\lambda + 1)^2)},$$

$$\begin{aligned} |a_2| &\leq \frac{2\alpha}{h_2 \sqrt{2\alpha(2\lambda+1) - (\alpha-1)(\lambda+1)^2}} \\ &= \frac{2\alpha}{h_2 \sqrt{4\alpha\lambda + 2\alpha - (\alpha-1)(\lambda^2 + 2\lambda + 1)}} \\ &= \frac{2\alpha}{h_2 \sqrt{4\alpha\lambda + 2\alpha - \alpha\lambda^2 - 2\alpha\lambda - \alpha + \lambda^2 + 2\lambda + 1}} \\ &= \frac{2\alpha}{h_2 \sqrt{(\lambda+1)^2 + \alpha(1+2\lambda-\lambda^2)}}. \end{aligned}$$

در نتیجه به کران مورد نظر برای $|a_2|$ ، همان‌گونه که در (۱۳.۲) ادعا شد، دست یافتیم.

حال به منظور یافتن کران برای $|a_3|$ ، با کم کردن (۲۲.۲) از (۲۰.۲) داریم

$$\begin{aligned} &2(2\lambda+1)a_3h_3 - 2(2\lambda+1)a_2^2h_2^2 \\ &= \alpha p_2 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}p_1^2 - \left(\alpha q_2 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}q_1^2 \right). \end{aligned} \quad (25.2)$$

از (۲۳.۲)، (۲۴.۲) و (۲۵.۲) نتیجه می‌شود

$$2(2\lambda+1)a_3h_3 = \frac{\alpha^2(2\lambda+1)(p_1^2 + q_1^2)}{(\lambda+1)^2} + \alpha(p_2 - q_2),$$

یا به طور معادل

$$a_3 = \frac{\alpha^2(p_1^2 + q_1^2)}{2(\lambda+1)^2h_3} + \frac{\alpha(p_2 - q_2)}{2(2\lambda+1)h_3}.$$

زیرا

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{\alpha^2(2\lambda+1)(p_1^2 + q_1^2)}{2(\lambda+1)^2(2\lambda+1)h_3} + \frac{\alpha(p_2 - q_2)}{2(2\lambda+1)h_3} \\ &= \frac{\alpha^2(p_1^2 + q_1^2)}{2(\lambda+1)^2h_3} + \frac{\alpha(p_2 - q_2)}{2(2\lambda+1)h_3}. \end{aligned}$$

با به کار بستن لم ۱.۱ یک بار دیگر برای ضرایب p_1, p_2, q_1 و q_2 ، به سادگی داریم

$$|a_3| \leq \frac{1}{h_3} \left(\frac{4\alpha^2}{(\lambda+1)^2} + \frac{2\alpha}{(2\lambda+1)} \right),$$

□

و این اثبات قضیه ۱.۲ را کامل می‌کند.

نکته ۷.۲.

الف) با قرار دادن $\lambda = 1$ و $h(z) = \frac{z}{1-z}$ در قضیه ۱.۲، به نتایجی دست می‌یابیم که ”سریواستاوا“ دست یافت [۳۲].

ب) با قرار دادن $h(z) = \frac{z}{1-z}$ در قضیه ۱.۲، به نتایجی دست می‌یابیم که ”فراسین و آووف“ دست یافتند [۱۴].

مثال ۸.۲.

الف) برای

$$h(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{1 + \ell + \gamma(n-1)}{1 + \ell} \right]^m z^n \quad (26.2)$$

$$(\ell, \gamma \geq 0; m \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}),$$

[۶]، کران $|a_2|$ و $|a_3|$ در قضیه‌ی ۱.۲ به صورت زیر می‌شود،

$$|a_2| \leq \frac{\sqrt{2}\alpha}{\left[\frac{1+\ell+\gamma}{1+\ell} \right]^m \sqrt{(\lambda+1)^2 + \alpha(1+2\lambda-\lambda^2)}}$$

و

$$|a_3| \leq \frac{1}{\left[\frac{1+\ell+2\gamma}{1+\ell} \right]^m} \left(\frac{4\alpha^2}{(\lambda+1)^2} + \frac{2\alpha}{(2\lambda+1)} \right).$$

زیرا $h(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} h_n z^n$ و در این مثال $h(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{1+\ell+\gamma(n-1)}{1+\ell} \right]^m z^n$ پس $h_2 = \left[\frac{1+\ell+\gamma}{1+\ell} \right]^m$ و $h_3 = \left[\frac{1+\ell+2\gamma}{1+\ell} \right]^m$ و نتیجه حاصل می‌شود.

ب) برای

$$h(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \Gamma_{n-1}(\alpha_1) z^n, \quad (27.2)$$

که

$$\Gamma_{n-1}(\alpha_1) = \frac{(\alpha_1)_{n-1} \cdots (\alpha_q)_{n-1}}{(\beta_1)_{n-1} \cdots (\beta_s)_{n-1} (1)_{n-1}} \quad (n \geq 2), \quad (28.2)$$

$\alpha_i \in \mathbb{C} \quad (i = 1, 2, \dots, q), \quad q \leq s+1$ و $\beta_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_0^- \quad (j = 1, 2, \dots, s)$ ، [۱۳]، کران $|a_2|$

و $|a_3|$ در قضیه‌ی ۱.۲ به صورت زیر می‌شود،

$$|a_2| \leq \frac{\sqrt{2}\alpha}{|\Gamma_1(\alpha_1)| \sqrt{(\lambda+1)^2 + \alpha(1+2\lambda-\lambda^2)}}$$

و

$$|a_3| \leq \frac{1}{|\Gamma_2(\alpha_1)|} \left(\frac{4\alpha^2}{(\lambda+1)^2} + \frac{2\alpha}{(2\lambda+1)} \right).$$

۲.۲.۲ کران ضرایب برای رده‌ی توابع $B(h, \beta, \lambda)$

تعریف ۹.۲. تابع $f(z)$ داده شده به صورت (۱.۲)، در رده‌ی $B_{\Sigma}(h, \beta, \lambda)$ است هرگاه شرایط (۲۹.۲)، (۳۰.۲) و (۳۱.۲) برقرار باشند،

$$f \in \Sigma \quad (29.2)$$

و

$$Re \left((1-\lambda) \frac{(f * h)(z)}{z} + \lambda (f * h)'(z) \right) > \beta \quad (30.2)$$

$$(0 \leq \beta < 1; \lambda \geq 1; z \in \mathbb{U})$$

و

$$\operatorname{Re} \left((1 - \lambda) \frac{(f * h)^{-1}(w)}{w} + \lambda ((f * h)^{-1})'(w) \right) > \beta \quad (31.2)$$

$$(\circ \leq \beta < 1; \lambda \geq 1; w \in \mathbb{U}),$$

که توابع $h(z)$ و $(f * h)^{-1}(w)$ به ترتیب به صورت (۷.۲) و (۱۲.۲) تعریف شده‌اند.

توجه کنید که برای $\lambda = 1$ و $h(z) = \frac{z}{1-z}$ ، رده‌ی $B_{\Sigma}(h, \beta, \lambda)$ به رده‌ی $\mathcal{H}_{\Sigma}(\beta)$ (مطالعه شده توسط سریواستاوا) تبدیل می‌شود [۳۲].

هم‌چنین برای $h(z) = \frac{z}{1-z}$ ، رده‌ی $B_{\Sigma}(h, \beta, \lambda)$ به رده‌ی $B_{\Sigma}(\beta, \lambda)$ (تعریف شده و مطالعه شده توسط فراسین و آووف) تبدیل می‌شود [۱۴].

قضیه ۲.۲. فرض کنید تابع $f(z)$ به صورت (۱.۲) داده شده و در رده‌ی $B(h, \beta, \lambda)$ باشد که $\circ \leq \beta < 1$ و $\lambda \geq 1$ در این صورت

$$|a_2| \leq \frac{1}{h_2} \sqrt{\frac{2(1-\beta)}{(2\lambda+1)}} \quad (32.2)$$

و

$$|a_3| \leq \frac{1}{h_3} \left(\frac{4(1-\beta)^2}{(\lambda+1)^2} + \frac{2(1-\beta)}{(2\lambda+1)} \right). \quad (33.2)$$

برهان. از (۳۰.۲) و (۳۱.۲) نتیجه می‌شود که $p(z), q(z) \in P$ وجود دارند به طوری که

$$(1 - \lambda) \frac{(f * h)(z)}{z} + \lambda (f * h)'(z) = \beta + (1 - \beta)p(z) \quad (34.2)$$

و

$$(1 - \lambda) \frac{(f * h)^{-1}(w)}{w} + \lambda ((f * h)^{-1})'(w) = \beta + (1 - \beta)q(w), \quad (35.2)$$

که $p(z)$ و $q(z)$ به ترتیب به صورت (۱۷.۲) و (۱۸.۲) می‌باشند.

با برابر قرار دادن ضرایب در (۳۴.۲) و (۳۵.۲) داریم

$$(\lambda + 1)a_2 h_2 = (1 - \beta)p_1, \quad (36.2)$$

زیرا

$$(f * h)(z) = z + a_2 h_2 z^2 + a_3 h_3 z^3 + \dots,$$

$$(f * h)'(z) = 1 + 2a_2 h_2 z + 3a_3 h_3 z^2 + \dots.$$

با استفاده از (۳۴.۲) داریم

$$(1 - \lambda) \frac{z + a_2 h_2 z^2 + a_3 h_3 z^3 + \dots}{z} + \lambda (1 + 2a_2 h_2 z + 3a_3 h_3 z^2 + \dots)$$

$$+ \dots = \beta + (1 - \beta)p(z),$$

$$(1 - \lambda)(1 + a_2 h_2 z + a_3 h_3 z^2 + \dots) + \lambda(1 + 2a_2 h_2 z + 3a_3 h_3 z^2 + \dots)$$

$$+ \dots = \beta + (1 - \beta)(1 + p_1 z + p_2 z^2 + \dots),$$

$$\begin{aligned} & \left[(1 + \underbrace{a_2 h_2 z + a_3 h_3 z^2 + \dots - \lambda - \underbrace{\lambda a_2 h_2 z - \lambda a_3 h_3 z^2 - \dots}}_{(1-\beta)p_1 z} + (\lambda \right. \\ & \left. + \underbrace{2\lambda a_2 h_2 z + 3\lambda a_3 h_3 z^2 + \dots}) \right] = 1 + (1-\beta)p_1 z + (1-\beta)p_2 z^2 + \dots, \\ & (a_2 h_2 - \lambda a_2 h_2 + 2\lambda a_2 h_2)z = (1-\beta)p_1 z \implies (\lambda + 1)a_2 h_2 = (1-\beta)p_1. \end{aligned}$$

$$(2\lambda + 1)a_2 h_2 = (1-\beta)p_2, \quad (37.2)$$

زیرا

$$\begin{aligned} & \left[(1 + a_2 h_2 z + \underbrace{a_3 h_3 z^2 + \dots - \lambda - \lambda a_2 h_2 z - \underbrace{\lambda a_3 h_3 z^2 - \dots}}_{(1-\beta)p_2 z^2} + (\lambda \right. \\ & \left. + 2\lambda a_2 h_2 z + \underbrace{3\lambda a_3 h_3 z^2 + \dots}) \right] = 1 + (1-\beta)p_1 z + (1-\beta)p_2 z^2 + \dots, \\ & (a_3 h_3 - \lambda a_3 h_3 + 3\lambda a_3 h_3)z^2 = (1-\beta)p_2 z^2, \\ & (2\lambda + 1)a_3 h_3 = (1-\beta)p_2. \end{aligned}$$

$$-(\lambda + 1)a_2 h_2 = (1-\beta)q_1, \quad (38.2)$$

طرفین رابطه‌های (۳۶.۲) و (۳۸.۲) را به توان ۲ رسانده و با هم جمع می‌کنیم، در نتیجه خواهیم داشت

$$(2\lambda + 1)(2a_2^2 h_2^2 - a_3 h_3) = (1-\beta)q_2. \quad (39.2)$$

از (۳۶.۲) و (۳۸.۲) داریم

$$p_1 = -q_1, \quad (40.2)$$

با به توان ۲ رساندن طرفین رابطه‌های (۳۶.۲) و (۳۸.۲) و جمع کردن آنها با هم، خواهیم داشت

$$2(\lambda + 1)^2 a_2^2 h_2^2 = (1-\beta)^2 (p_1^2 + q_1^2). \quad (41.2)$$

هم‌چنین با جمع کردن (۳۷.۲) با (۳۹.۲) داریم

$$2(2\lambda + 1)a_2^2 h_2^2 = (1-\beta)(p_2 + q_2).$$

با به کار بستن لم ۱.۱ برای ضرایب p_2 و q_2 و با توجه به اینکه $h_n > 0$ و $0 \leq \beta < 1$ داریم

$$|a_2^2| \leq \frac{(1-\beta)}{2(2\lambda + 1)h_2^2} (|p_2| + |q_2|) = \frac{2(1-\beta)}{(2\lambda + 1)h_2^2},$$

و این کرانی برای $|a_2|$ است، همان‌گونه که در (۳۲.۲) بیان شد.

حال به منظور یافتن کران برای $|a_3|$ ، با کم کردن (۳۷.۲) از (۳۹.۲) داریم

$$2(2\lambda + 1)a_3 h_3 - 2(2\lambda + 1)a_2^2 h_2^2 = (1-\beta)(p_2 - q_2),$$

یا به طور معادل

$$a_3 = \frac{1}{h_3} \left(a_2^2 h_2^2 + \frac{(1-\beta)(p_2 - q_2)}{2(2\lambda + 1)} \right).$$

با جای‌گذاری مقدار $a_2^2 h_2^2$ از (۴۱.۲) در رابطه‌ی فوق مشاهده می‌کنیم

$$a_3 = \frac{1}{h_3} \left(\frac{(1-\beta)^2(p_1^2 + q_1^2)}{2(\lambda+1)^2} + \frac{(1-\beta)(p_2 - q_2)}{2(2\lambda+1)} \right).$$

با به‌کار بردن لم ۱.۱ برای ضرایب p_1, p_2, q_1 و q_2 و با توجه به اینکه $h_n > 0$ ، به‌سادگی داریم

$$|a_3| \leq \frac{1}{h_3} \left(\frac{4(1-\beta)^2}{(\lambda+1)^2} + \frac{2(1-\beta)}{(2\lambda+1)} \right),$$

و این کرانی برای $|a_3|$ است، همان‌گونه که در (۳۳.۲) ادعا شد. $\square$

نکته ۱۰.۲.

الف) با قرار دادن $\lambda = 1$ و $h(z) = \frac{z}{1-z}$ در قضیه‌ی ۱.۲، به نتایجی دست می‌یابیم که ”سریواستاوا” دست یافت [۳۲].

ب) با قرار دادن $h(z) = \frac{z}{1-z}$ در قضیه‌ی ۱.۲، به نتایجی دست می‌یابیم که ”فراسین و آووف” دست یافتند [۱۴].

مثال ۱۱.۲.

الف) برای $h(z)$ داده شده به‌صورت (۲۶.۲)، کران $|a_2|$ و $|a_3|$ در قضیه‌ی ۲.۲ به‌صورت

$$|a_2| \leq \frac{1}{\left[\frac{1+\ell+\gamma}{1+\ell} \right]^m} \sqrt{\frac{2(1-\beta)}{(2\lambda+1)}}$$

و

$$|a_3| \leq \frac{1}{\left[\frac{1+\ell+2\gamma}{1+\ell} \right]^m} \left(\frac{4(1-\beta)^2}{(\lambda+1)^2} + \frac{2(1-\beta)}{(2\lambda+1)} \right)$$

می‌شود.

ب) برای $h(z)$ داده شده به‌صورت (۲۷.۲)، کران $|a_2|$ و $|a_3|$ در قضیه‌ی ۲.۲ به‌صورت

$$|a_2| \leq \frac{1}{|\Gamma_1(\alpha_1)|} \sqrt{\frac{2(1-\beta)}{(2\lambda+1)}}$$

و

$$|a_3| \leq \frac{1}{|\Gamma_2(\alpha_1)|} \left(\frac{4(1-\beta)^2}{(\lambda+1)^2} + \frac{2(1-\beta)}{(2\lambda+1)} \right)$$

می‌شود.

۳.۲ رده‌های $\Sigma_1(e^i \eta \cos \eta, \gamma, \beta)$ و $\Sigma(\tau, \gamma, \varphi)$

۱.۳.۲ کران ضرایب برای رده‌ی توابع $\Sigma(\tau, \gamma, \varphi)$

فرض کنید φ تابعی تحلیلی با قسمت حقیقی مثبت در $\mathbb{U}$ باشد به‌طوری که $\varphi(0) = 1$ و $\varphi'(0) > 0$.

چنین تابعی دارای بسط سری به‌صورت

$$\varphi(z) = 1 + B_1 z + B_2 z^2 + B_3 z^3 + \dots \quad (B_1 > 0) \quad (۴۲.۲)$$

می‌باشد.

تعریف ۱۲.۲. فرض کنید $0 \leq \gamma \leq 1$ و $\tau \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. تابع $f \in \Sigma$ در رده‌ی $\Sigma(\tau, \gamma, \varphi)$ است هرگاه شرایط (۴۳.۲) و (۴۴.۲) برقرار باشند،

$$1 + \frac{1}{\tau}[f'(z) + \gamma z f''(z) - 1] \prec \varphi(z) \quad (z \in \mathbb{U}) \quad (43.2)$$

و

$$1 + \frac{1}{\tau}[g'(w) + \gamma w g''(w) - 1] \prec \varphi(w) \quad (w \in \mathbb{U}), \quad (44.2)$$

که $g(w) = f^{-1}(w)$.

برای توابع رده‌ی $\Sigma(\tau, \gamma, \varphi)$ ، نتیجه زیر به دست آورده می‌شود.

قضیه ۳.۲. فرض کنید $f(z) \in \Sigma(\tau, \gamma, \varphi)$ به صورت (۱.۲) باشد. در این صورت

$$|a_2| \leq \frac{|\tau| B_1^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{|3\tau B_1^2(1 + 2\gamma) + 4(1 + \gamma)^2(B_1 - B_2)|}} \quad (45.2)$$

و

$$|a_3| \leq B_1 |\tau| \left(\frac{1}{3(1 + 2\gamma)} + \frac{B_1 |\tau|}{4(1 + \gamma)^2} \right), \quad (46.2)$$

که ضرایب B_1 و B_2 به صورت (۴۲.۲) هستند.

برهان. فرض کنید $f(z) \in \Sigma(\tau, \gamma, \varphi)$ و $g = f^{-1}$. در این صورت توابع تحلیلی $u, v : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}$ وجود دارند که $u(0) = v(0) = 0$ و شرایط زیر برقرار است،

$$1 + \frac{1}{\tau}[f'(z) + \gamma z f''(z) - 1] = \varphi(u(z)) \quad (z \in \mathbb{U}) \quad (47.2)$$

و

$$1 + \frac{1}{\tau}[g'(w) + \gamma w g''(w) - 1] = \varphi(v(w)) \quad (w \in \mathbb{U}). \quad (48.2)$$

توابع p_1 و p_2 را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$p_1(z) = \frac{1 + u(z)}{1 - u(z)} = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots \quad (49.2)$$

و

$$p_2(z) = \frac{1 + v(z)}{1 - v(z)} = 1 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots. \quad (50.2)$$

در این صورت p_1 و p_2 در $\mathbb{U}$ تحلیلی هستند و $p_1(0) = 1 = p_2(0)$.

چون $u, v : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}$ ، هر یک از توابع p_1 و p_2 دارای قسمت حقیقی مثبت در $\mathbb{U}$ هستند. بنابراین طبق لم ۱.۱، داریم

$$|b_n| \leq 2, \quad |c_n| \leq 2 \quad (n \in \mathbb{N}), \quad (51.2)$$

حال $u(z)$ و $v(z)$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم،

$$u(z) = \frac{p_1(z) - 1}{p_1(z) + 1} = \frac{1}{\tau} \left[c_1 z + \left(c_2 - \frac{c_1^2}{\tau} \right) z^2 + \dots \right] \quad (z \in \mathbb{U}) \quad (52.2)$$

و

$$v(z) = \frac{p_2(z) - 1}{p_2(z) + 1} = \frac{1}{\tau} \left[b_1 z + \left(b_2 - \frac{b_1^2}{\tau} \right) z^2 + \dots \right] \quad (z \in \mathbb{U}). \quad (53.2)$$

به توضوح با جای‌گذاری (52.2) و (53.2) به ترتیب در (47.2) و (48.2) و استفاده از (42.2)، در می‌یابیم

$$1 + \frac{1}{\tau} [f'(z) + \gamma z f''(z) - 1] = \varphi \left(\frac{p_1(z) - 1}{p_2(z) + 1} \right) = \\ 1 + \frac{1}{\tau} B_1 c_1 z + \left[\frac{1}{\tau} B_1 \left(c_2 - \frac{c_1^2}{\tau} \right) + \frac{1}{\tau} B_2 c_1^2 \right] z^2 + \dots \quad (54.2)$$

و

$$1 + \frac{1}{\tau} \left[g'(w) + \gamma w g''(w) - 1 \right] = \varphi \left(\frac{p_2(w) - 1}{p_2(w) + 1} \right) = \\ 1 + \frac{1}{\tau} B_1 b_1 w + \left[\frac{1}{\tau} B_1 \left(b_2 - \frac{b_1^2}{\tau} \right) + \frac{1}{\tau} B_2 b_1^2 \right] w^2 + \dots \quad (55.2)$$

با استفاده از (1.2) و (4.2) در (54.2) و (55.2) خواهیم داشت

$$\frac{2(1 + \gamma)a_2}{\tau} = \frac{B_1 c_1}{\tau}, \quad (56.2)$$

زیرا

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots,$$

$$f'(z) = 1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \dots,$$

$$f''(z) = 2a_2 + 6a_3 z + \dots,$$

با توجه به رابطه‌ی (54.2) داریم

$$1 + \frac{1}{\tau} [(1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \dots) + \gamma z(2a_2 + 6a_3 z + \dots) - 1] \\ = 1 + \frac{1}{\tau} B_1 c_1 z + \left[\frac{1}{\tau} B_1 \left(c_2 - \frac{c_1^2}{\tau} \right) + \frac{1}{\tau} B_2 c_1^2 \right] z^2 + \dots, \\ 1 + \frac{1}{\tau} [2a_2 z + 3a_3 z^2 + \dots + 2a_2 \gamma z + 6a_3 \gamma z^2 + \dots] \\ = 1 + \frac{1}{\tau} B_1 c_1 z + \left[\frac{1}{\tau} B_1 \left(c_2 - \frac{c_1^2}{\tau} \right) + \frac{1}{\tau} B_2 c_1^2 \right] z^2 + \dots, \\ \frac{1}{\tau} [2(1 + \gamma)a_2 z] = \frac{1}{\tau} B_1 c_1 z \implies \frac{1}{\tau} [2(1 + \gamma)a_2] = \frac{1}{\tau} B_1 c_1.$$

$$\frac{3(1+2\gamma)a_3}{\tau} = \frac{1}{4}B_1\left(c_2 - \frac{c_1^2}{4}\right) + \frac{1}{4}B_2c_1^2, \quad (57.2)$$

$$- \frac{2(1+\gamma)a_2}{\tau} = \frac{B_1b_1}{2}, \quad (58.2)$$

و

$$\frac{3(1+2\gamma)(2a_1^2 - a_3)}{\tau} = \frac{1}{4}B_1\left(b_2 - \frac{b_1^2}{4}\right) + \frac{1}{4}B_2b_1^2. \quad (59.2)$$

از (56.2) و (58.2) داریم

$$c_1 = -b_1, \quad (60.2)$$

با جمع کردن (57.2) با (59.2) و سپس با استفاده از (56.2) و (60.2) داریم،

$$a_1^2 = \frac{\tau^2 B_1^3 (b_2 + c_2)}{4 \left[3\tau B_1^2 (1+2\gamma) + 4(1+\gamma)^2 (B_1 - B_2) \right]}. \quad (61.2)$$

زیرا

$$\begin{aligned} \frac{3(1+2\gamma)2a_1^2}{\tau} &= \frac{1}{4}B_1\left(c_2 - \frac{c_1^2}{4}\right) + \frac{1}{4}B_2c_1^2 + \frac{1}{4}B_1\left(b_2 - \frac{b_1^2}{4}\right) + \frac{1}{4}B_2b_1^2 \\ &= \frac{1}{4}B_1(c_2 + b_2 - c_1^2) + \frac{1}{4}B_2c_1^2 \\ &= \frac{B_1(c_2 + b_2) - c_1^2(B_1 - B_2)}{4}, \end{aligned}$$

$$\frac{6(1+2\gamma)a_1^2}{\tau} = \frac{(c_2 + b_2)}{2}B_1 + \frac{c_1}{4}(B_1 - B_2),$$

$$\frac{6(1+2\gamma)a_1^2}{\tau}B_1^2 = \frac{(c_2 + b_2)}{2}B_1^3 - \frac{c_1}{4}B_1^2(B_1 - B_2),$$

$$\frac{6(1+2\gamma)a_1^2}{\tau}B_1^2 + \frac{B_1^2c_1}{4}(B_1 - B_2) = \frac{B_1^3(b_2 + c_2)}{2},$$

چون $\frac{2(1+\gamma)a_2}{\tau} = \frac{B_1c_1}{2}$ پس

$$\frac{6(1+2\gamma)a_1^2}{\tau}B_1^2 + 2\left(\frac{2(1+\gamma)a_2}{\tau}\right)^2(B_1 - B_2) = \frac{B_1^3(b_2 + c_2)}{2},$$

$$4a_1^2(3\tau B_1^2(1+2\gamma) + 4(1+\gamma)^2(B_1 - B_2)) = \tau^2 B_1^3(b_2 + c_2),$$

$$a_1^2 = \frac{\tau^2 B_1^3(b_2 + c_2)}{4 \left[3\tau B_1^2(1+2\gamma) + 4(1+\gamma)^2(B_1 - B_2) \right]}.$$

به‌طور مشابه، با کم کردن (59.2) از (57.2) و استفاده از (56.2) و (60.2)، داریم

$$a_3 = \frac{B_1^2\tau^2b_1^2}{16(1+\gamma)^2} + \frac{B_1\tau}{12(1+2\gamma)}(c_2 - b_2). \quad (62.2)$$

زیرا

$$\begin{aligned} & \frac{3(1+2\gamma)a_3 - 6(1+2\gamma)a_1^2 + 3(1+2\gamma)a_3}{\tau} \\ &= \frac{1}{4}B_1 \left(c_2 - \frac{c_1^2}{4} \right) + \frac{1}{4}B_2 c_1^2 - \frac{1}{4}B_1 \left(b_2 - \frac{b_1^2}{4} \right) - \frac{1}{4}B_2 b_1^2 \\ &= \frac{1}{4}B_1 \left(c_2 - \frac{c_1^2}{4} - b_2 + \frac{b_1^2}{4} \right) + \frac{1}{4}B_2 (c_1^2 - b_1^2), \\ & \frac{6(1+2\gamma)a_3 - 6(1+2\gamma)a_1^2}{\tau} = \frac{1}{4}B_1 (c_2 - b_2), \\ & a_3 - a_1^2 = \frac{B_1 \tau}{12(1+2\gamma)} (c_2 - b_2), \end{aligned}$$

با توجه به اینکه $a_2 = \frac{B_1 c_1 \tau}{4(1+\gamma)}$ و $a_1^2 = \frac{B_1^2 c_1^2 \tau^2}{16(1+\gamma)^2}$ داریم

$$a_3 = \frac{B_1^2 c_1^2 \tau^2}{16(1+\gamma)^2} + \frac{B_1 \tau}{12(1+2\gamma)} (c_2 - b_2),$$

چون $c_1 = -b_1$ ، در نتیجه خواهیم داشت

$$a_3 = \frac{B_1^2 \tau^2 b_1^2}{16(1+\gamma)^2} + \frac{B_1 \tau}{12(1+2\gamma)} (c_2 - b_2).$$

در نهایت، با نظر به لم ۱.۱، نتایج مورد نظر (۴۵.۲) و (۴۶.۲)، ادعا شده در قضیه حاصل می‌شود. $\square$

۲.۳.۲ کران ضرایب برای رده‌ی توابع $\Sigma_1(e^{i\eta} \cos \eta, \gamma, \beta)$

اگر در تعریف ۱۲.۲ قرار دهیم $\tau = e^{i\eta} \cos \eta$ که $-\frac{\pi}{4} < \eta < \frac{\pi}{4}$ و

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \frac{1 + (1-2\beta)z}{1-z} \\ &= 1 + 2(1-\beta)z + 2(1-\beta)z^2 + \dots \quad (z \in \mathbb{U}; 0 \leq \beta < 1), \end{aligned}$$

در این صورت زیر رده‌ی جدید $\Sigma_1(e^{i\eta} \cos \eta, \gamma, \beta)$ توسط تعریف ۱۳.۲ به دست می‌آید.

تعریف ۱۳.۲. تابع $f \in \Sigma$ در رده‌ی $\Sigma_1(e^{i\eta} \cos \eta, \gamma, \beta)$ است هرگاه شرایط (۶۳.۲) و (۶۴.۲) برقرار باشند

$$\operatorname{Re} \left(\frac{e^{i\eta}}{\cos \eta} [f'(z) + \gamma z f''(z)] - \beta \right) > 0 \quad (z \in \mathbb{U}) \quad (63.2)$$

و

$$\operatorname{Re} \left(\frac{e^{i\eta}}{\cos \eta} [g'(w) + \gamma w g''(w)] - \beta \right) > 0 \quad (w \in \mathbb{U}), \quad (64.2)$$

$$g(w) = f^{-1}(w) \text{ که}$$

با استفاده از تنظیمات پارامتری تعریف ۱۳.۲ در قضیه ۳.۲، نتیجه‌ی زیر به دست می‌آید.

نتیجه ۱.۲. فرض کنید تابع $f(z) \in \Sigma_1(e^{i\eta} \cos \eta, \gamma, \beta)$ به صورت (۱.۲) باشد. در این صورت

$$|a_2| \leq \sqrt{\frac{2(1-\beta)}{3(1+2\gamma)} \cos \eta}, \quad (۶۵.۲)$$

زیرا با توجه به (۴۵.۲) داریم

$$|a_2| \leq \frac{|\tau| B_1^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{|\tau B_1^{\frac{2}{3}}(1+2\gamma) + 4(1+\gamma)^2(B_1 - B_2)|}},$$

و با توجه به این‌که $\tau = e^{i\eta} \cos \eta$ و $\varphi(z) = 1 + \underbrace{2(1-\beta)}_{B_1} z + \underbrace{2(1-\beta)}_{B_2} z^2 + \dots$ داریم

$$\begin{aligned} |a_2| &\leq \frac{|e^{i\eta} \cos \eta| B_1^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{|\tau B_1^{\frac{2}{3}}(1+2\gamma) + 4(1+\gamma)^2(B_1 - B_2)|}} \leq \frac{|e^{i\eta}| |\cos \eta| B_1^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{|e^{i\eta}| |3 \cos \eta B_1^{\frac{2}{3}}(1+2\gamma)|}} \\ &= \frac{|\cos \eta| B_1^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{|3 \cos \eta B_1^{\frac{2}{3}}(1+2\gamma)|}} \\ &= \sqrt{\frac{B_1^{\frac{2}{3}}}{3 \cos \eta B_1^{\frac{2}{3}}(1+2\gamma)} \cos^2 \eta} \\ &= \sqrt{\frac{B_1}{3(1+2\gamma)} \cos \eta} \\ &= \sqrt{\frac{2(1-\beta)}{3(1+2\gamma)} \cos \eta}. \end{aligned}$$

و

$$|a_3| \leq 2(1-\beta) \left(\frac{1}{3(1+2\gamma)} + \frac{(1-\beta) \cos \eta}{2(1+\gamma)^2} \right) \cos \eta. \quad (۶۶.۲)$$

زیرا با توجه به (۴۶.۲) داریم

$$|a_3| \leq B_1 |\tau| \left(\frac{1}{3(1+2\gamma)} + \frac{B_1 |\tau|}{4(1+\gamma)^2} \right),$$

و چون $\tau = e^{i\eta} \cos \eta$ و $\varphi(z) = 1 + \underbrace{2(1-\beta)}_{B_1} z + \underbrace{2(1-\beta)}_{B_2} z^2 + \dots$ داریم

$$\begin{aligned} |a_3| &\leq B_1 |e^{i\eta} \cos \eta| \left(\frac{1}{3(1+2\gamma)} + \frac{B_1 |e^{i\eta} \cos \eta|}{4(1+\gamma)^2} \right) \\ &\leq 2(1-\beta) \left(\frac{1}{3(1+2\gamma)} + \frac{2(1-\beta) \cos \eta}{2(1+\gamma)^2} \right) \cos \eta. \end{aligned}$$

نکته ۱.۴.۲. در حالت خاص، زمانی‌که $\gamma = 0$ ، نتیجه‌ی ۱.۲ به صورت زیر ساده می‌شود.

نتیجه ۲.۲. فرض کنید تابع $f(z)$ داده شده توسط

$$f(z) \in \Sigma_2(e^{i\eta} \cos \eta, \beta) := \Sigma_1(e^{i\eta} \cos \eta, 0, \beta),$$

به صورت (۱.۲) باشد. در این صورت

$$|a_2| \leq \sqrt{\frac{2}{3}(1-\beta)\cos\eta} \quad (۶۷.۲)$$

و

$$|a_3| \leq \frac{1-\beta}{3}[2+3(1-\beta)\cos\eta]\cos\eta. \quad (۶۸.۲)$$

نکته ۱۵.۲. اگر در نتیجه‌ی ۱.۲ قرار دهیم $\eta = 0$ ، قضیه‌ی ۱ از ”سریواستاوا“ به دست می‌آید [۳۲].

اگر در تعریف (۱۲.۲)، $\tau = 1$ و

$$\varphi(z) = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^\alpha = 1 + 2\alpha z + 2\alpha^2 z^2 + \dots \quad (0 < \alpha \leq 1; z \in \mathbb{U}),$$

قرار دهیم در این صورت زیر رده‌ی جدید $\Sigma_3(\gamma, \alpha)$ تعریف شده به صورت زیر به دست می‌آید.

تعریف ۱۶.۲. تابع $f \in \Sigma$ در رده‌ی $\Sigma_3(\gamma, \alpha)$ است هرگاه شرایط زیر برقرار باشد

$$|\arg[f'(z) + \gamma z f''(z)]| < \frac{\alpha\pi}{2} \quad (0 < \alpha \leq 1; z \in \mathbb{U})$$

و

$$|[\arg[g'(w) + \gamma w g''(w)]]| < \frac{\alpha\pi}{2} \quad (0 < \alpha \leq 1; w \in \mathbb{U}),$$

$$g(w) = f^{-1}(w) \text{ که}$$

با استفاده از تنظیمات پارامتری تعریف ۱۶.۲ در قضیه، نتیجه‌ی زیر به دست می‌آید.

نتیجه ۳.۲. فرض کنید تابع $f(z) \in \Sigma_3(\gamma, \alpha)$ به صورت (۱.۲) باشد. در این صورت

$$|a_3| \leq \alpha \sqrt{\frac{2}{3(1+2\gamma)\alpha + 2(1+\gamma)^2(1-\alpha)}}, \quad (۶۹.۲)$$

زیرا با توجه به این که $|a_2| \leq \frac{|1|B_1^{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{|3\tau B_1^{\frac{\alpha}{2}}(1+2\gamma)+4(1+\gamma)^2(B_1-B_2)|}}$ و $\tau = 1$ داریم $\varphi(z) = 1 + \underbrace{2\alpha}_{B_1} z + \underbrace{2\alpha^2}_{B_2} z^2 + \dots$

$$\begin{aligned} |a_2| &\leq \frac{|1|B_1^{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{3(1)B_1^{\frac{\alpha}{2}}(1+2\gamma)+4(1+\gamma)^2(B_1-B_2)}} \\ &= \sqrt{\frac{B_1^{\frac{\alpha}{2}}}{3B_1^{\frac{\alpha}{2}}(1+2\gamma)+4(1+\gamma)^2(B_1-B_2)}} \\ &= \sqrt{\frac{\lambda\alpha^3}{3(4\alpha^2)(1+2\gamma)+4(1+\gamma)^2(2\alpha-2\alpha^2)}} \\ &= \sqrt{\frac{(4)(2)(\alpha^2)(\alpha)}{4\alpha(3\alpha(1+2\gamma)+2(1+\gamma)^2(1-\alpha))}} \\ &= \alpha \sqrt{\frac{2}{3(1+2\gamma)\alpha + 2(1+\gamma)^2(1-\alpha)}}. \end{aligned}$$

و

$$|a_3| \leq \left(\frac{2\alpha}{3(1+2\gamma)} + \frac{\alpha^2}{(1+\gamma)^2} \right), \quad (70.2)$$

زیرا با توجه به این‌که $|a_3| \leq B_1|\tau| \left(\frac{1}{3(1+2\gamma)} + \frac{B_1|\tau|}{4(1+\gamma)^2} \right)$ و $\tau = 1$ داریم $\varphi(z) = 1 + \underbrace{2\alpha}_{B_1}z + \underbrace{2\alpha^2}_{B_2}z^2 + \dots$

$$\begin{aligned} |a_3| &\leq 2\alpha|1| \left(\frac{1}{3(1+2\gamma)} + \frac{2\alpha|1|}{4(1+\gamma)^2} \right) \\ &= \left(\frac{2\alpha}{3(1+2\gamma)} + \frac{4\alpha^2}{4(1+\gamma)^2} \right). \end{aligned}$$

نکته ۱۷.۲. اگر در نتیجه‌ی ۳.۲، $\gamma = 0$ قرار دهیم، قضیه‌ی ۱ از ”سریواستاوا” به دست می‌آید [۳۲].

۴.۲ رده‌های $B_\Sigma(n, \alpha, \lambda)$ و $H_\Sigma(n, \beta, \lambda)$

۱.۴.۲ کران ضرایب برای رده‌ی توابع $B_\Sigma(n, \alpha, \lambda)$

برای $n \in \mathbb{N}_0$ ، $0 \leq \beta < 1$ و $\lambda \geq 0$ ، زیررده‌ی $Q(n, \lambda, \beta)$ از $\mathcal{S}$ ، از توابع داده شده به صورت (۱.۲) و صادق در شرط

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{(1-\lambda)D^n f(z) + \lambda D^{n+1} f(z)}{z} \right\} > \beta \quad z \in \mathbb{U}, \quad (71.2)$$

را معرفی می‌کنیم که D^n ، مخفف مشتق سالاجین^{۱۸}، معرفی شده توسط سالاجین^{۱۹} است [۲۹].

تعریف ۱۸.۲. فرض کنید $f(z)$ داده شده به صورت (۱.۲) در رده‌ی $\mathcal{A}$ باشد. در این صورت مشتق سالاجین به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$D^n f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} k^n a_k z^k \quad n \in \mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}.$$

نکته ۱۹.۲. برای $n = 0$ ، رده‌ی فوق به رده‌ی $Q_\lambda(\beta)$ ، مطالعه شده توسط ”دینگ”^{۲۰}، تقلیل پیدا می‌کند [۱۱].

تعریف ۲۰.۲. تابع $f(z)$ داده شده به صورت (۱.۲)، در رده‌ی $B_\Sigma(n, \alpha, \lambda)$ است هرگاه شرایط (۷۲.۲) و (۷۳.۲) برقرار باشند

^{۲۰}Ding

^{۱۸}Salagean derivative

^{۱۹}Salagean

$$f \in \Sigma, \quad \left| \arg \left\{ \frac{(\lambda - 1)D^n f(z) + \lambda D^{n+1} f(z)}{z} \right\} \right| < \frac{\alpha\pi}{2} \quad (72.2)$$

$$(\circ < \alpha \leq 1, \lambda \geq 1, z \in \mathbb{U}),$$

و

$$f \in \Sigma, \quad \left| \arg \left\{ \frac{(\lambda - 1)D^n g(w) + \lambda D^{n+1} g(w)}{w} \right\} \right| < \frac{\alpha\pi}{2} \quad (73.2)$$

$$(\circ < \alpha \leq 1, \lambda \geq 1, w \in \mathbb{U}),$$

که تابع g داده شده به صورت

$$g(w) = w - a_2 w^2 + (2a_2' - a_3)w^3 - (5a_2' - 5a_2 a_3 + a_4)w^4 + \dots \quad (74.2)$$

است.

ملاحظه می‌کنیم که برای $n = \circ$ و $\lambda = 1$ ، رده‌ی $B_\Sigma(n, \alpha, \lambda)$ به رده‌ی H_Σ^α (معرفی شده و مطالعه شده توسط سریواستوا ات آل) تقلیل پیدا می‌کند [۳۲] و برای $n = \circ$ ، رده‌ی $B_\Sigma(n, \alpha, \lambda)$ به رده‌ی $B_\Sigma(\alpha, \lambda)$ (معرفی شده و مطالعه شده توسط فراسین و آووف) تقلیل پیدا می‌کند [۱۴]. کار خود را با پیدا کردن تخمینی از ضرایب $|a_2|$ و $|a_3|$ ، برای رده‌ی توابع $B_\Sigma(n, \alpha, \lambda)$ شروع می‌کنیم.

قضیه ۴.۲. فرض کنید $f(z)$ داده شده به صورت (۱.۲)، در رده‌ی $B_\Sigma(n, \alpha, \lambda)$ که

$$\circ < \alpha \leq 1, n \in \mathbb{N}, \lambda \geq 1 \text{ باشد. در این صورت}$$

$$|a_2| \leq \frac{2\alpha}{\sqrt{4^n(1+\lambda)^2 + \alpha(2(3^n)(1+2\lambda) - 4^n(1+\lambda)^2)}} \quad (75.2)$$

و

$$|a_3| \leq \frac{2\alpha}{[(1-\lambda)3^n + \lambda 3^{n+1}]} + \frac{4\alpha^2}{[(1-\lambda)2^n + \lambda 2^{n+1}]^2}. \quad (76.2)$$

برهان. از (۷۲.۲) و (۷۳.۲) داریم

$$\frac{(\lambda - 1)D^n f(z) + \lambda D^{n+1} f(z)}{z} = [p(z)]^\alpha \quad (77.2)$$

و

$$\frac{(\lambda - 1)D^n g(w) + \lambda D^{n+1} g(w)}{w} = [q(w)]^\alpha, \quad (78.2)$$

که $p(z)$ و $q(w)$ در P و به صورت

$$p(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + p_3 z^3 + \dots \quad (79.2)$$

و

$$q(w) = 1 + q_1 w + q_2 w^2 + q_3 w^3 + \dots \quad (80.2)$$

هستند. حال با برابر قرار دادن ضرایب در (۷۷.۲) و (۷۹.۲) مشاهده می‌کنیم

$$[(1-\lambda)2^n + \lambda 2^{n+1}]a_2 = \alpha p_1, \quad (81.2)$$

زیرا با توجه به (۷۷.۲) داریم

$$\frac{(1-\lambda)(z + 2^n a_2 z^2 + 2^n a_3 z^3 + \dots) + \lambda(z + 2^{n+1} a_2 z^2 + 2^{n+1} a_3 z^3 + \dots)}{z} \\ = [p(z)]^\alpha,$$

$$(1-\lambda)(1 + 2^n a_2 z + 2^n a_3 z^2 + \dots) + \lambda(1 + 2^{n+1} a_2 z + 2^{n+1} a_3 z^2 + \dots) \\ = \alpha p_1 z + (\alpha p_2 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} p_1^2) z^2 + \dots,$$

$$(1-\lambda)2^n a_2 z + \lambda 2^{n+1} a_2 z = \alpha p_1 z \implies [(1-\lambda)2^n + \lambda 2^{n+1}] a_2 = \alpha p_1.$$

$$[(1-\lambda)2^n + \lambda 2^{n+1}]a_3 = \alpha p_2 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} p_1^2, \quad (82.2)$$

زیرا

$$(1-\lambda)(1 + 2^n a_2 z + 2^n a_3 z^2 + \dots) + \lambda(1 + 2^{n+1} a_2 z + 2^{n+1} a_3 z^2 + \dots) \\ = \alpha p_1 z + (\alpha p_2 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} p_1^2) z^2 + \dots,$$

$$(1-\lambda)2^n a_3 z^2 + \lambda 2^{n+1} a_3 z^2 = (\alpha p_2 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} p_1^2) z^2,$$

$$[(1-\lambda)2^n + \lambda 2^{n+1}] = \alpha p_2 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} p_1^2.$$

$$-[(1-\lambda)2^n + \lambda 2^{n+1}]a_2 = \alpha q_1, \quad (83.2)$$

$$[(1-\lambda)2^n + \lambda 2^{n+1}](2a_2^2 - a_3) = \alpha q_2 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} q_1^2. \quad (84.2)$$

از (۸۱.۲) و (۸۳.۲) داریم

$$p_1 = -q_1, \quad (85.2)$$

طرفین رابطه‌ی (۸۱.۲) و (۸۳.۲) را به توان ۲ رسانده و با هم جمع می‌کنیم، در نتیجه خواهیم داشت

$$2[(1-\lambda)2^n + \lambda 2^{n+1}]^2 a_2^2 = \alpha^2 (p_1^2 + q_1^2). \quad (86.2)$$

حال با جمع کردن (۸۲.۲) با (۸۴.۲) و استفاده از (۸۶.۲) داریم

$$2[(1-\lambda)2^n + \lambda 2^{n+1}]a_2^2 = \alpha(p_2 + q_2) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} (p_1^2 + q_1^2) \\ = \alpha(p_2 + q_2) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} \frac{2[(1-\lambda)2^n + \lambda 2^{n+1}]^2}{\alpha^2} a_2^2.$$

بنابراین داریم

$$a_2^2 = \frac{\alpha^2 (p_2 + q_2)}{2^n (1+\lambda)^2 + \alpha[2(2^n)(1+2\lambda) - 2^n (1+\lambda)^2]},$$

زیرا

$$\begin{aligned} \mathfrak{r}[(1-\lambda)\mathfrak{r}^n + \lambda\mathfrak{r}^{n+1}]a_{\mathfrak{r}}^{\mathfrak{r}} &= \alpha(p_{\mathfrak{r}} + q_{\mathfrak{r}}) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{\mathfrak{r}} \frac{\mathfrak{r}[(1-\lambda)\mathfrak{r}^n + \lambda\mathfrak{r}^{n+1}]^{\mathfrak{r}}}{\alpha^{\mathfrak{r}}} a_{\mathfrak{r}}^{\mathfrak{r}} \\ &= \frac{\alpha^{\mathfrak{r}}(p_{\mathfrak{r}} + q_{\mathfrak{r}}) + (\alpha-1)[(1-\lambda)\mathfrak{r}^n + \lambda\mathfrak{r}^{n+1}]^{\mathfrak{r}} a_{\mathfrak{r}}^{\mathfrak{r}}}{\alpha}, \end{aligned}$$

$$\mathfrak{r}\alpha[(1-\lambda)\mathfrak{r}^n + \lambda\mathfrak{r}^{n+1}]a_{\mathfrak{r}}^{\mathfrak{r}} = \alpha^{\mathfrak{r}}(p_{\mathfrak{r}} + q_{\mathfrak{r}}) + (\alpha-1)[(1-\lambda)\mathfrak{r}^n + \lambda\mathfrak{r}^{n+1}]^{\mathfrak{r}} a_{\mathfrak{r}}^{\mathfrak{r}},$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{r}\alpha[(1-\lambda)\mathfrak{r}^n + \lambda\mathfrak{r}^{n+1}]a_{\mathfrak{r}}^{\mathfrak{r}} \\ - (\alpha-1) \left[(1-\lambda)^{\mathfrak{r}} \mathfrak{r}^n + \lambda^{\mathfrak{r}} \mathfrak{r}^{n+1} + \mathfrak{r}^{\mathfrak{r}n+\mathfrak{r}} \lambda(1-\lambda) \right] a_{\mathfrak{r}}^{\mathfrak{r}} &= \alpha^{\mathfrak{r}}(p_{\mathfrak{r}} + q_{\mathfrak{r}}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[\alpha \left(\mathfrak{r}(\mathfrak{r}^n) - \mathfrak{r}\lambda\mathfrak{r}^n + \mathfrak{r}\lambda\mathfrak{r}^{n+1} \right) \right. \\ \left. - (\alpha-1) \left((1+\lambda^{\mathfrak{r}} - \mathfrak{r}\lambda)\mathfrak{r}^n + \lambda^{\mathfrak{r}}\mathfrak{r}^{n+1} + \mathfrak{r}^{n+1}\lambda(1-\lambda) \right) \right] a_{\mathfrak{r}}^{\mathfrak{r}} &= \alpha^{\mathfrak{r}}(p_{\mathfrak{r}} + q_{\mathfrak{r}}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[\alpha \left(\mathfrak{r}(\mathfrak{r}^n) - \mathfrak{r}\lambda\mathfrak{r}^n + \mathfrak{r}\lambda\mathfrak{r}^{n+1} \right) \right. \\ \left. - (\alpha-1) \left((1+\lambda^{\mathfrak{r}} - \mathfrak{r}\lambda)\mathfrak{r}^n + \lambda^{\mathfrak{r}}\mathfrak{r}^{n+1} + (\lambda-\lambda^{\mathfrak{r}})\mathfrak{r}^{n+1} \right) \right] a_{\mathfrak{r}}^{\mathfrak{r}} &= \alpha^{\mathfrak{r}}(p_{\mathfrak{r}} + q_{\mathfrak{r}}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[\alpha \left(\mathfrak{r}(\mathfrak{r}^n) - \mathfrak{r}\lambda\mathfrak{r}^n + \mathfrak{r}\lambda\mathfrak{r}^{n+1} \right) \right. \\ \left. - (\alpha-1) \left(\mathfrak{r}^n(1+\lambda^{\mathfrak{r}} - \mathfrak{r}\lambda + \mathfrak{r}\lambda^{\mathfrak{r}} + \mathfrak{r}\lambda - \mathfrak{r}\lambda^{\mathfrak{r}}) \right) \right] a_{\mathfrak{r}}^{\mathfrak{r}} &= \alpha^{\mathfrak{r}}(p_{\mathfrak{r}} + q_{\mathfrak{r}}), \end{aligned}$$

$$\left[\alpha \left(\mathfrak{r}(\mathfrak{r}^n) - \mathfrak{r}\lambda\mathfrak{r}^n + \mathfrak{r}\lambda\mathfrak{r}^{n+1} \right) - (\alpha-1) \left(\mathfrak{r}^n(1+\lambda^{\mathfrak{r}} + \mathfrak{r}\lambda) \right) \right] a_{\mathfrak{r}}^{\mathfrak{r}} = \alpha^{\mathfrak{r}}(p_{\mathfrak{r}} + q_{\mathfrak{r}}),$$

$$\left[\alpha \left(\mathfrak{r}(\mathfrak{r}^n) - \mathfrak{r}\lambda\mathfrak{r}^n + \mathfrak{r}\lambda\mathfrak{r}^{n+1} \right) - (\alpha-1) \left(\mathfrak{r}^n(1+\lambda)^{\mathfrak{r}} \right) \right] a_{\mathfrak{r}}^{\mathfrak{r}} = \alpha^{\mathfrak{r}}(p_{\mathfrak{r}} + q_{\mathfrak{r}}),$$

$$\left[\alpha \left(\mathfrak{r}(\mathfrak{r}^n)(1+\mathfrak{r}\lambda) - \mathfrak{r}^n(1+\lambda)^{\mathfrak{r}} \right) + \mathfrak{r}^n(1+\lambda)^{\mathfrak{r}} \right] a_{\mathfrak{r}}^{\mathfrak{r}} = \alpha^{\mathfrak{r}}(p_{\mathfrak{r}} + q_{\mathfrak{r}}),$$

$$a_{\mathfrak{r}}^{\mathfrak{r}} = \frac{\alpha^{\mathfrak{r}}(p_{\mathfrak{r}} + q_{\mathfrak{r}})}{\mathfrak{r}^n(1+\lambda)^{\mathfrak{r}} + \alpha[\mathfrak{r}(\mathfrak{r}^n)(1+\mathfrak{r}\lambda) - \mathfrak{r}^n(1+\lambda)^{\mathfrak{r}}]}.$$

با استفاده از لم ۱.۱ برای ضرایب $p_{\mathfrak{r}}$ و $q_{\mathfrak{r}}$ داریم

$$|a_{\mathfrak{r}}| \leq \frac{\mathfrak{r}\alpha}{\sqrt{\mathfrak{r}^n(1+\lambda)^{\mathfrak{r}} + \alpha[\mathfrak{r}(\mathfrak{r}^n)(1+\mathfrak{r}\lambda) - \mathfrak{r}^n(1+\lambda)^{\mathfrak{r}}]}},$$

حال به‌منظور یافتن کران برای $|a_3|$ ، با کم کردن (۸۴.۲) از (۸۲.۲) داریم

$$2[(1-\lambda)3^n + \lambda 3^{n+1}][a_3 - a_3'] = \alpha(p_2 - q_2) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}(p_1^2 - q_1^2),$$

$$2[(1-\lambda)3^n + \lambda 3^{n+1}]a_3 = \alpha(p_2 - q_2) + \frac{2[(1-\lambda)3^n + \lambda 3^{n+1}]\alpha^2(p_1^2 + q_1^2)}{2[(1-\lambda)2^n + \lambda 2^{n+1}]^2},$$

زیرا

$$2[(1-\lambda)3^n + \lambda 3^{n+1}][a_3 - a_3'] = \alpha(p_2 - q_2) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}(p_1^2 - q_1^2),$$

با استفاده از (۸۶.۲) داریم

$$2[(1-\lambda)3^n + \lambda 3^{n+1}]a_3 = \alpha(p_2 - q_2) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}(p_1^2 - q_1^2) + \frac{\alpha^2(p_1^2 + q_1^2)2[(1-\lambda)3^n + \lambda 3^{n+1}]}{2[(1-\lambda)2^n + \lambda 2^{n+1}]^2},$$

چون $p_1 = -q_1$ ، در نتیجه داریم

$$2[(1-\lambda)3^n + \lambda 3^{n+1}]a_3 = \alpha(p_2 - q_2) + \frac{\alpha^2(p_1^2 + q_1^2)2[(1-\lambda)3^n + \lambda 3^{n+1}]}{2[(1-\lambda)2^n + \lambda 2^{n+1}]^2},$$

$$a_3 = \frac{\alpha(p_2 - q_2)}{2[(1-\lambda)3^n + \lambda 3^{n+1}]} + \frac{\alpha^2(p_1^2 + q_1^2)}{2[(1-\lambda)2^n + \lambda 2^{n+1}]^2},$$

با استفاده از لم ۱.۱، یک‌بار دیگر برای ضرایب p_1, p_2, q_1 و q_2 داریم

$$|a_3| \leq \frac{2\alpha}{[(1-\lambda)3^n + \lambda 3^{n+1}]} + \frac{4\alpha^2}{[(1-\lambda)2^n + \lambda 2^{n+1}]^2},$$

□

این اثبات قضیه‌ی ۴.۲ را کامل می‌کند.

۲.۴.۲ کران ضرایب برای رده‌ی توابع $H_\Sigma(n, \beta, \lambda)$

تعریف ۲.۱۰.۲. تابع $f(z)$ داده شده به‌صورت (۱.۲)، در رده‌ی $H_\Sigma(n, \beta, \lambda)$ است هرگاه شرایط (۸۷.۲) و (۸۸.۲) برقرار باشند

$$f \in \Sigma, \operatorname{Re} \left\{ \frac{(1-\lambda)D^n f(z) + \lambda D^{n+1} f(z)}{z} \right\} > \beta \quad (۸۷.۲)$$

$$(\circ < \beta \leq 1, \lambda \geq 1, n \in \mathbb{N}_0, z \in \mathbb{U})$$

و

$$f \in \Sigma, \operatorname{Re} \left\{ \frac{(1-\lambda)D^n g(w) + \lambda D^{n+1} g(w)}{w} \right\} > \beta \quad (۸۸.۲)$$

$$(\circ < \beta \leq 1, \lambda \geq 1, n \in \mathbb{N}_0, w \in \mathbb{U}),$$

که تابع g داده شده به‌صورت (۷۴.۲) است.

ملاحظه می‌کنیم که برای $(n = 0)$ و $(n = 0, \lambda = 1)$ ، رده‌ی $H_\Sigma(n, \beta, \lambda)$ به رده‌های $H_\Sigma(\beta, \lambda)$ و $H_\Sigma(\lambda)$ (مطالعه شده به ترتیب توسط "فراسین و آووف" [۱۴] و "سریواستاوا" [۳۲]) تقلیل پیدا می‌کند.

قضیه ۵.۲. فرض کنید تابع $f(z)$ داده شده به صورت (۱.۲)، در رده‌ی $H_\Sigma(n, \beta, \lambda)$ که $n \in \mathbb{N}$ ، $0 \leq \beta < 1$ و $\lambda \geq 1$ باشد. در این صورت

$$|a_2| \leq \sqrt{\frac{2(1-\beta)}{[(1-\lambda)3^n + \lambda 3^{n+1}]}} \quad (۸۹.۲)$$

$$|a_3| \leq \frac{4(1-\beta)^2}{[(1-\lambda)2^n + \lambda 2^{n+1}]^2} + \frac{2(1-\beta)}{[(1-\lambda)3^n + \lambda 3^{n+1}]}. \quad (۹۰.۲)$$

برهان. طبق (۸۷.۲) و (۸۸.۲)، $p(z) \in P$ و $q(z) \in P$ وجود دارند که

$$\frac{(1-\lambda)D^n f(z) + \lambda D^{n+1} f(z)}{z} = \beta + (1-\beta)p(z) \quad (۹۱.۲)$$

$$\frac{(1-\lambda)D^n g(w) + \lambda D^{n+1} g(w)}{w} = \beta + (1-\beta)q(w), \quad (۹۲.۲)$$

و $p(z)$ و $q(w)$ به ترتیب به صورت (۷۹.۲) و (۸۰.۲) هستند. با برابر قرار دادن ضرایب در (۹۱.۲) و (۹۲.۲) خواهیم داشت

$$[(1-\lambda)2^n + \lambda 2^{n+1}]a_2 = (1-\beta)p_1, \quad (۹۳.۲)$$

زیرا با توجه به (۹۱.۲) داریم

$$\frac{(1-\lambda)(z + 2^n a_2 z^2 + 3^n a_3 z^3 + \dots) + \lambda(z + 2^{n+1} a_2 z^2 + 3^{n+1} a_3 z^3 + \dots)}{z}$$

$$= \beta + (1-\beta)(1 + p_1 z + p_2 z^2 + \dots),$$

$$(1-\lambda)(1 + 2^n a_2 z + 3^n a_3 z^2 + \dots) + \lambda(1 + 2^{n+1} a_2 z + 3^{n+1} a_3 z^2 + \dots)$$

$$= \beta + (1-\beta)(1 + p_1 z + p_2 z^2 + \dots),$$

$$(1-\lambda)2^n a_2 z + \lambda 2^{n+1} a_2 z = (1-\beta)p_1 z,$$

$$[(1-\lambda)2^n + \lambda 2^{n+1}]a_2 = (1-\beta)p_1.$$

$$[(1-\lambda)3^n + \lambda 3^{n+1}]a_3 = (1-\beta)p_2, \quad (۹۴.۲)$$

زیرا

$$(1-\lambda)(1 + 2^n a_2 z + 3^n a_3 z^2 + \dots) + \lambda(1 + 2^{n+1} a_2 z + 3^{n+1} a_3 z^2 + \dots)$$

$$= \beta + (1-\beta)(1 + p_1 z + p_2 z^2 + \dots),$$

$$(1-\lambda)3^n a_3 z^2 + \lambda 3^{n+1} a_3 z^2 = (1-\beta)p_2 z^2,$$

$$\left[(1-\lambda)3^n + \lambda 3^{n+1} \right] a_3 = (1-\beta)p_2.$$

$$- \left[(1-\lambda)2^n + \lambda 2^{n+1} \right] a_2 = (1-\beta)q_1 \quad (95.2)$$

و

$$\left[(1-\lambda)3^n + \lambda 3^{n+1} \right] (2a_2 - a_3) = (1-\beta)q_2. \quad (96.2)$$

از (93.2) و (95.2) داریم

$$p_1 = -q_1, \quad (97.2)$$

با به توان ۲ رساندن طرفین رابطه‌های (93.2) و (95.2) و جمع کردن آن‌ها با هم داریم

$$2 \left[(1-\lambda)2^n + \lambda 2^{n+1} \right]^2 a_2 = (1-\beta)^2 (p_1^2 + q_1^2). \quad (98.2)$$

هم‌چنین، با جمع کردن (94.2) با (96.2) در می‌یابیم

$$2 \left[(1-\lambda)3^n + \lambda 3^{n+1} \right] a_2 = (1-\beta)(p_2 + q_2), \quad (99.2)$$

یا

$$a_2 = \frac{(1-\beta)(p_2 + q_2)}{2 \left[(1-\lambda)3^n + \lambda 3^{n+1} \right]},$$

در نتیجه

$$|a_2| \leq \frac{2(1-\beta)}{\left[(1-\lambda)3^n + \lambda 3^{n+1} \right]},$$

و این کران مورد نظر برای $|a_2|$ است، همان‌گونه که در (۸۹.۲) ادعا شد.حال به منظور یافتن کران برای $|a_3|$ ، با کم کردن (96.2) از (94.2) داریم

$$2 \left[(1-\lambda)3^n + \lambda 3^{n+1} \right] [a_3 - a_2] = (1-\beta)(p_2 - q_2),$$

یا به‌طور معادل

$$a_3 = a_2 + \frac{(1-\beta)(p_2 - q_2)}{2 \left[(1-\lambda)3^n + \lambda 3^{n+1} \right]}.$$

با جای‌گذاری مقدار a_2 از (98.2) داریم

$$a_3 = \frac{(1-\beta)^2 (p_1^2 + q_1^2)}{2 \left[(1-\lambda)2^n + \lambda 2^{n+1} \right]^2} + \frac{(1-\beta)(p_2 - q_2)}{2 \left[(1-\lambda)3^n + \lambda 3^{n+1} \right]}.$$

با استفاده از لم ۱.۱ برای ضرایب p_1, p_2, q_1 و q_2 داریم

$$|a_3| \leq \frac{4(1-\beta)^2}{\left[(1-\lambda)2^n + \lambda 2^{n+1} \right]^2} + \frac{2(1-\beta)}{\left[(1-\lambda)3^n + \lambda 3^{n+1} \right]},$$

که این کران $|a_3|$ است، همان‌گونه که در (۹۰.۲) ادعا شد.

□

نکته ۲۲.۲. اگر در قضیه‌های ۴.۲ و ۵.۲، قرار دهیم $n = 0$ ، به نتیجه‌هایی مرتبط با "فراسین و آووف" دست می‌یابیم [۱۴].

نکته ۲۳.۲. اگر در قضیه‌های ۴.۲ و ۵.۲، قرار دهیم $n = 0$ و $\lambda = 1$ ، به نتیجه‌هایی مرتبط با "سریواستاوا" دست می‌یابیم [۳۲].

فصل ۳

کران ضرایب برای زیررده‌هایی از توابع دوطرف-تک‌ارز وابسته به عملگر هوهلوف

در این فصل، چند زیررده‌ی جدید از رده‌ی تابع Σ از توابع دوطرف-تک‌ارز، تعریف شده در دیسک باز واحد، وابسته به عملگر هوهلوف^۱ را معرفی و بررسی می‌کنیم. به‌علاوه، تخمین‌هایی از ضرایب $|a_2|$ و $|a_3|$ سری تیلور-مکلورن برای توابع این زیررده‌های جدید را پیدا خواهیم کرد.

۱.۳ تعاریف و مقدمات

برخی از زیررده‌های مهم رده‌ی S شامل، به‌عنوان مثال، رده‌ی $S^*(\alpha)$ از توابع ستاره‌گون بر حسب α در $\mathbb{U}$ و رده‌ی $\mathcal{K}(\alpha)$ از توابع محدب بر حسب α در $\mathbb{U}$ می‌باشند.

ما و میندا^۲ [۲۴] زیررده‌های دیگری از توابع ستاره‌گون و محدب را با روش زیرترتیبی معرفی کردند. برای این منظور، آن‌ها تابع تحلیلی ϕ با قسمت حقیقی مثبت در دیسک واحد $\mathbb{U}$ را در نظر گرفتند که $\phi(0) = 1$ ، $\phi'(0) > 0$ و ϕ را بر روی یک ناحیه‌ی ستاره‌گون نسبت به ۱ می‌نگارد.

این رده‌ها، به‌ترتیب با $S_\Sigma^*(\phi)$ و $\mathcal{K}_\Sigma(\phi)$ نمایش داده می‌شوند. در نتیجه، فرض بر این است که ϕ تابعی تحلیلی با قسمت حقیقی مثبت در دیسک واحد $\mathbb{U}$ است که $\phi(0) = 1$ و $\phi'(0) > 0$. چنین تابعی دارای بسط سری به‌صورت

$$\phi(z) = 1 + B_1 z + B_2 z^2 + B_3 z^3 + \dots \quad (B_1 > 0), \quad (1.3)$$

است.

در این فصل، عملگر تلفیقی $\mathcal{I}_{a,b,c}$ معرفی شده توسط ”هوهلوف“ [۱۶، ۱۷] را فراخوانی می‌کنیم.

^۲Ma and Minda

^۱Hohlov

برای پارامترهای مختلف a, b و c که $c \neq 0, -1, -2, -3, \dots$ تابع فوق هندسی گاوسی^۲ ${}_2F_1(a, b, c; z)$ به صورت

$$\begin{aligned} {}_2F_1(a, b, c; z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_{n-1} (b)_{n-1}}{(c)_{n-1}} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} \quad (z \in \mathbb{U}), \end{aligned} \quad (2.3)$$

تعریف می‌شود که $(\alpha)_n$ نماد پوچ‌هامر^۳ است که به صورت زیر معرفی می‌شود

$$\begin{aligned} (\alpha)_n &= \frac{\Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(\alpha)} \\ &= \begin{cases} 1 & (n = 0), \\ \alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \cdots (\alpha + n - 1) & (n = 1, 2, 3, \dots). \end{cases} \end{aligned} \quad (3.3)$$

برای پارامترهای مختلف a, b و c که $c \neq 0, -1, -2, -3, \dots$ با استفاده از تابع فوق هندسی گاوسی داده شده به صورت (۲.۳)، هوهلوف [۱۶، ۱۷] عملگر تلفیقی $\mathcal{I}_{a,b,c}$ را به صورت

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{a,b,c} f(z) &= z {}_2F_1(a, b, c; z) * f(z) \\ &= z + \sum_{n=2}^{\infty} \varphi_n a_n z^n \quad (z \in \mathbb{U}), \end{aligned} \quad (4.3)$$

معرفی کرد که

$$\varphi_n = \frac{(a)_{n-1} (b)_{n-1}}{(c)_{n-1} (n-1)!}. \quad (5.3)$$

هوهلوف [۱۶، ۱۷] برخی خواص جالب هندسی ارائه شده توسط عملگر $\mathcal{I}_{a,b,c}$ را مطرح کرد.

۲.۳ رده‌ی $\mathcal{S}_{\Sigma}^{a,b;c}(\gamma, \lambda, \phi)$

۱.۲.۳ کران ضرایب برای رده‌ی توابع $\mathcal{S}_{\Sigma}^{a,b;c}(\gamma, \lambda, \phi)$

تعریف ۱.۳. تابع $f \in \Sigma$ داده شده به صورت (۱.۲)، در رده‌ی $\mathcal{S}_{\Sigma}^{a,b;c}(\gamma, \lambda, \phi)$ است هرگاه شرایط (۶.۳) برقرار باشند

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{z(\mathcal{I}_{a,b,c} f(z))'}{(1-\lambda)z + \lambda \mathcal{I}_{a,b,c} f(z)} - 1 \right) &\prec \phi(z) \\ (\gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}; 0 \leq \lambda \leq 1; z \in \mathbb{U}), & \\ 1 + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{w(\mathcal{I}_{a,b,c} g(w))'}{(1-\lambda)w + \lambda \mathcal{I}_{a,b,c} g(w)} - 1 \right) &\prec \phi(w) \\ (\gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}; 0 \leq \lambda \leq 1; w \in \mathbb{U}), & \end{aligned} \quad (6.3)$$

که تابع g داده شده به صورت (۴.۲) است.

^۲Pochhammer

^۳Gaussian hypergeometric function

در حالت‌های خاص برای پارامترهای λ, a, b و c ، می‌توان زیررده‌های جدیدی از Σ ، همان‌گونه که در مثال‌های زیر آمده را بیان کرد.

مثال ۲.۳. برای $\lambda = 1$ و $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ، تابع $f \in \Sigma$ داده شده به صورت (۱.۲)، در رده‌ی $\mathcal{S}_{\Sigma}^{a,b;c}(\gamma, \phi)$ است هرگاه شرایط زیر برقرار باشد

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{z(\mathcal{I}_{a,b;c}f(z))'}{\mathcal{I}_{a,b;c}f(z)} - 1 \right) &\prec \phi(z), \\ 1 + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{w(\mathcal{I}_{a,b;c}g(w))'}{\mathcal{I}_{a,b;c}g(w)} - 1 \right) &\prec \phi(w), \end{aligned} \quad (7.3)$$

که $z, w \in \mathbb{U}$ و تابع g داده شده به صورت (۴.۲) است.

مثال ۳.۳. برای $\lambda = 0$ و $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ، تابع $f \in \Sigma$ داده شده به صورت (۱.۲)، در رده‌ی $\mathcal{Y}_{\Sigma}^{a,b;c}(\gamma, \phi)$ است هرگاه شرایط زیر برقرار باشد

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{\gamma} \left((\mathcal{I}_{a,b;c}f(z))' - 1 \right) &\prec \phi(z), \\ 1 + \frac{1}{\gamma} \left((\mathcal{I}_{a,b;c}g(w))' - 1 \right) &\prec \phi(w), \end{aligned} \quad (8.3)$$

که $z, w \in \mathbb{U}$ و تابع g داده شده به صورت (۴.۲) است.

توجه به این مطلب جالب است که برای $a = c$ و $b = 1$ ، رده‌ی $\mathcal{S}_{\Sigma}^{a,b;c}(\gamma, \lambda, \phi)$ به زیررده‌های جدید زیر تقلیل پیدا می‌کند.

مثال ۴.۳. برای $\lambda = 1$ و $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ، تابع $f \in \Sigma$ داده شده به صورت (۱.۲)، در رده‌ی $\mathcal{S}_{\Sigma}^*(\gamma, \phi)$ است هرگاه شرایط زیر برقرار باشد

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1 \right) &\prec \phi(z), \\ 1 + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{wg'(w)}{g(w)} - 1 \right) &\prec \phi(w), \end{aligned} \quad (9.3)$$

که $z, w \in \mathbb{U}$ و تابع g داده شده به صورت (۴.۲) است.

مثال ۵.۳. برای $\lambda = 0$ و $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ، تابع $f \in \Sigma$ داده شده به صورت (۱.۲)، در رده‌ی $\mathcal{H}_{\Sigma}^*(\gamma, \phi)$ است هرگاه شرایط زیر برقرار باشد

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{\gamma} (f'(z) - 1) &\prec \phi(z), \\ 1 + \frac{1}{\gamma} (g'(w) - 1) &\prec \phi(w), \end{aligned} \quad (10.3)$$

که $z, w \in \mathbb{U}$ و تابع g داده شده به صورت (۴.۲) است.

حال تخمین‌هایی از ضرایب $|a_2|$ و $|a_3|$ ، برای توابع زیرده‌ی $\mathcal{S}_{\Sigma}^{a,b;c}(\gamma, \lambda, \phi)$ ، در بالا معرفی شده، از رده‌ی تابع Σ را با به‌کار بستن روشی که متفاوت با روش مولفان پیشین است، پیدا می‌کنیم. مولفان پیشین، به‌طور عمده ضرایب توابع دوطرف-تک‌ارز را با استفاده از لم ۱.۱، مورد بررسی قرار می‌دادند. کار خود را با پیدا کردن تخمینی از ضرایب $|a_2|$ و $|a_3|$ ، برای توابع رده‌ی $\mathcal{S}_{\Sigma}^{a,b;c}(\gamma, \lambda, \phi)$ شروع می‌کنیم.

فرض کنید $p(z)$ و $q(z)$ در $\mathbb{U}$ تحلیلی باشند و $p(\circ) = \circ = q(\circ)$ و $|p(z)| < 1$ و $|q(z)| < 1$ ، هم‌چنین فرض کنید

$$\begin{aligned} p(z) &= p_1 z + p_2 z^2 + \dots \quad (|z| < 1), \\ q(z) &= q_1 z + q_2 z^2 + \dots \quad (|z| < 1). \end{aligned} \quad (11.3)$$

خوب است بدانید که

$$\begin{aligned} |p_1| &\leq 1, \quad |p_2| \leq 1 - |p_1|^2, \\ |q_1| &\leq 1, \quad |q_2| \leq 1 - |q_1|^2. \end{aligned} \quad (12.3)$$

زیرا $|p(z)| < 1$ و $p(\circ) = \circ$ پس طبق لم شوارتز داریم

$$\begin{aligned} |p(z)| < |z| &\implies \left| \frac{p(z)}{z} \right| < 1 \implies \left| \frac{p(z) - p(\circ)}{z - \circ} \right| < 1 \\ &\implies |p'(\circ)| \leq 1 \implies |p_1| \leq 1, \end{aligned}$$

هم‌چنین با استفاده از این قضیه که بیان می‌کند که ”اگر $f: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{C}$ تابعی تحلیلی و $|f(z)| < 1$ باشد آنگاه $|f'(z)| \leq \frac{1-|f(z)|^2}{1-|z|^2}$ ، داریم

$$f(z) = \frac{p(z)}{z} = p_1 + p_2 z + \dots,$$

چون این تابع بسط تیلور دارد، تحلیلیست، هم‌چنین چون $\left| \frac{p(z)}{z} \right| < 1$ پس با استفاده از قضیه‌ی ذکر شده، خواهیم داشت

$$|f'(z)| \leq \frac{1 - |f(z)|^2}{1 - |z|^2} \quad \forall z \in \mathbb{U},$$

پس

$$|f'(\circ)| \leq \frac{1 - |f(\circ)|^2}{1 - |\circ|^2},$$

در نتیجه

$$|p_2| \leq 1 - |p_1|^2.$$

بنابراین از (۱۰.۳) داریم

$$\phi(p(z)) = 1 + B_1 p_1 z + (B_1 p_2 + B_2 p_1^2) z^2 + \dots, \quad (13.3)$$

زیرا

$$\begin{aligned}\phi(p(z)) &= \phi(p_1 z + p_2 z^2 + \dots) \\ &= 1 + B_1(p_1 z + p_2 z^2 + \dots) + B_2(p_1 z + p_2 z^2 + \dots)^2 + \dots \\ &= 1 + B_1 p_1 z + (B_1 p_2 + B_2 p_1^2) z^2 + \dots.\end{aligned}$$

$$\phi(q(w)) = 1 + B_1 q_1 w + (B_1 q_2 + B_2 q_1^2) w^2 + \dots. \quad (14.3)$$

قضیه ۱۰۳. فرض کنید تابع $f(z)$ داده شده به صورت (۱۰۲)، در رده‌ی $\mathcal{S}_{\Sigma}^{a,b;c}(\gamma, \lambda, \phi)$ باشد. در این صورت

$$\begin{aligned}|a_2| &\leq \frac{|\gamma| B_1 \sqrt{B_1}}{\sqrt{|\gamma(\lambda^2 - 2\lambda)B_1^2 - (2-\lambda)^2 B_2[\varphi_1^2 + \gamma(3-\lambda)B_1^2 \varphi_2| + (2-\lambda)^2 B_1 \varphi_1^2]|}}, \\ |a_2| &\leq \begin{cases} \frac{|\gamma| B_1}{(3-\lambda)\varphi_2}, & |\gamma| \leq \frac{(2-\lambda)^2 \varphi_1^2}{(3-\lambda)\varphi_2 B_1}, \\ \frac{|\gamma| B_1 \{|\gamma(\lambda^2 - 2\lambda)B_1^2 - (2-\lambda)^2 B_2[\varphi_1^2 + \gamma(3-\lambda)B_1^2 \varphi_2| + (2-\lambda)\varphi_2 B_1^2 |\gamma|]\}}{(3-\lambda)\varphi_2 \{|\gamma(\lambda^2 - 2\lambda)B_1^2 - (2-\lambda)^2 B_2[\varphi_1^2 + \gamma(3-\lambda)B_1^2 \varphi_2| + (2-\lambda)^2 B_1 \varphi_1^2]\}}, & |\gamma| > \frac{(2-\lambda)^2 \varphi_1^2}{(3-\lambda)\varphi_2 B_1}, \end{cases} \quad (15.3)\end{aligned}$$

که φ_2 و φ_3 داده شده به صورت (۵.۳) هستند.

برهان. از (۶.۳) داریم

$$\begin{aligned}1 + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{z(\mathcal{I}_{a,b;c} f(z))'}{(1-\lambda)z + \lambda \mathcal{I}_{a,b;c} f(z)} - 1 \right) &= \phi(p(z)), \\ 1 + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{w(\mathcal{I}_{a,b;c} g(w))'}{(1-\lambda)w + \lambda \mathcal{I}_{a,b;c} g(w)} - 1 \right) &= \phi(q(w)),\end{aligned} \quad (16.3)$$

که $\phi(p(z))$ و $\phi(q(w))$ به ترتیب داده شده به صورت (۱۳.۳) و (۱۴.۳) می‌باشند. حال با برابر قرار دادن ضرایب در (۱۶.۳) داریم

$$\frac{(2-\lambda)}{\gamma} \varphi_2 a_2 = B_1 p_1, \quad (17.3)$$

زیرا با توجه به (۱۶.۳) داریم

$$\begin{aligned}1 + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{z(z + \varphi_2 a_2 z^2 + \varphi_3 a_3 z^3 + \dots)'}{(1-\lambda)z + \lambda(z + \varphi_2 a_2 z^2 + \varphi_3 a_3 z^3 + \dots)} - 1 \right) \\ = 1 + B_1 p_1 z + (B_1 p_2 + B_2 p_1^2) z^2 + \dots, \\ 1 + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{z(1 + 2\varphi_2 a_2 z + 3\varphi_3 a_3 z^2 + \dots)'}{z - \lambda z + \lambda z + \lambda \varphi_2 a_2 z^2 + \lambda \varphi_3 a_3 z^3 + \dots} - 1 \right) \\ = 1 + B_1 p_1 z + (B_1 p_2 + B_2 p_1^2) z^2 + \dots, \\ \frac{1}{\gamma} \left(\frac{z + 2\varphi_2 a_2 z^2 + 3\varphi_3 a_3 z^3 + \dots - z - \lambda \varphi_2 a_2 z^2 - \lambda \varphi_3 a_3 z^3 - \dots}{z + \lambda \varphi_2 a_2 z^2 + \lambda \varphi_3 a_3 z^3 + \dots} \right) \\ = B_1 p_1 z + (B_1 p_2 + B_2 p_1^2) z^2 + \dots, \\ \frac{1}{\gamma} \left(\frac{(2-\lambda)\varphi_2 a_2 z^2 + (3-\lambda)\varphi_3 a_3 z^3 + \dots}{z + \lambda \varphi_2 a_2 z^2 + \lambda \varphi_3 a_3 z^3 + \dots} \right) \\ = B_1 p_1 z + (B_1 p_2 + B_2 p_1^2) z^2 + \dots,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\gamma} \left(\underbrace{(\lambda - \lambda) \varphi_2 a_2 z}_{= B_1 p_1 z} + ((\lambda^2 - 2\lambda) \varphi_1^2 a_1^2 + (\lambda^3 - \lambda) \varphi_3 a_3) z^2 + \dots \right) \\
&= \underbrace{B_1 p_1 z}_{= B_1 p_1 z} + (B_1 p_2 + B_2 p_1^2) z^2 + \dots, \\
& \frac{(\lambda^2 - 2\lambda) \varphi_1^2 a_1^2}{\gamma} z = B_1 p_1 z \implies \frac{(\lambda^2 - 2\lambda) \varphi_1^2 a_1^2}{\gamma} = B_1 p_1. \\
& \frac{(\lambda^2 - 2\lambda) \varphi_1^2 a_1^2}{\gamma} + \frac{(\lambda^3 - \lambda) \varphi_3 a_3}{\gamma} = B_1 p_2 + B_2 p_1^2, \tag{۱۸.۳}
\end{aligned}$$

زیرا

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\gamma} \left((\lambda - \lambda) \varphi_2 a_2 z + \underbrace{((\lambda^2 - 2\lambda) \varphi_1^2 a_1^2 + (\lambda^3 - \lambda) \varphi_3 a_3) z^2}_{= (B_1 p_2 + B_2 p_1^2) z^2} + \dots \right) \\
&= B_1 p_1 z + \underbrace{(B_1 p_2 + B_2 p_1^2) z^2}_{= (B_1 p_2 + B_2 p_1^2) z^2} + \dots, \\
& \frac{(\lambda^2 - 2\lambda) \varphi_1^2 a_1^2 + (\lambda^3 - \lambda) \varphi_3 a_3}{\gamma} z^2 = (B_1 p_2 + B_2 p_1^2) z^2 \\
& \frac{(\lambda^2 - 2\lambda) \varphi_1^2 a_1^2 + (\lambda^3 - \lambda) \varphi_3 a_3}{\gamma} = B_1 p_2 + B_2 p_1^2. \\
& - \frac{(\lambda^2 - 2\lambda) \varphi_1^2 a_1^2}{\gamma} = B_1 q_1, \tag{۱۹.۳}
\end{aligned}$$

$$\frac{(\lambda^2 - 2\lambda) \varphi_1^2 a_1^2}{\gamma} + \frac{(\lambda^3 - \lambda) \varphi_3 (2a_1^2 - a_3)}{\gamma} = B_1 q_2 + B_2 q_1^2. \tag{۲۰.۳}$$

از (۱۷.۳) و (۱۹.۳) در می‌یابیم

$$a_2 = \frac{\gamma B_1 p_1}{(\lambda^2 - 2\lambda) \varphi_2} = \frac{-\gamma B_1 q_1}{(\lambda^2 - 2\lambda) \varphi_2}, \tag{۲۱.۳}$$

یعنی

$$p_1 = -q_1, \tag{۲۲.۳}$$

با به توان ۲ رساندن طرفین رابطه‌ی (۱۷.۳) داریم

$$(\lambda^2 - \lambda)^2 \varphi_1^2 a_1^2 = \gamma^2 B_1^2 p_1^2. \tag{۲۳.۳}$$

با جمع کردن (۱۸.۳) با (۲۰.۳) و با استفاده از (۲۱.۳) و (۲۲.۳) داریم

$$\begin{aligned}
& \{ [2\gamma(\lambda^2 - 2\lambda) B_1^2 - 2(\lambda^2 - \lambda)^2 B_2] \varphi_1^2 + 2\gamma(\lambda^3 - \lambda) B_1^2 \varphi_3 \} a_1^2 \\
&= B_1^2 \gamma^2 (p_2 + q_2). \tag{۲۴.۳}
\end{aligned}$$

زیرا

$$\begin{aligned}
& 2 \frac{(\lambda^2 - 2\lambda) \varphi_1^2 a_1^2}{\gamma} + 2 \frac{(\lambda^3 - \lambda) \varphi_3 a_3}{\gamma} = B_1 (p_2 + q_2) + B_2 (p_1^2 + q_1^2), \\
& 2(\lambda^2 - 2\lambda) \varphi_1^2 a_1^2 + 2(\lambda^3 - \lambda) \varphi_3 a_3 = B_1 \gamma (p_2 + q_2) + B_2 \gamma (p_1^2 + q_1^2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 2\gamma(\lambda^2 - 2\lambda)B_1^2\varphi_1^2a_1^2 + 2\gamma(3 - \lambda)B_1^2\varphi_3a_1^2 \\ & = B_1^2\gamma^2(p_2 + q_2) + B_2B_1^2\gamma^2(p_1^2 + q_1^2), \end{aligned}$$

با استفاده از (۲۱.۳) داریم

$$\begin{aligned} & 2\gamma(\lambda^2 - 2\lambda)B_1^2\varphi_1^2a_1^2 + 2\gamma(3 - \lambda)B_1^2\varphi_3a_1^2 \\ & = B_1^2\gamma^2(p_2 + q_2) + B_2((2 - \lambda)^2a_1^2\varphi_1^2 + (2 - \lambda)^2a_1^2\varphi_3^2), \\ & 2\gamma(\lambda^2 - 2\lambda)B_1^2\varphi_1^2a_1^2 + 2\gamma(3 - \lambda)B_1^2\varphi_3a_1^2 - 2(2 - \lambda)^2a_1^2\varphi_1^2B_2 = B_1^2\gamma^2(p_2 + q_2), \\ & \{[2\gamma(\lambda^2 - 2\lambda)B_1^2 - 2(2 - \lambda)^2B_2]\varphi_1^2 + 2\gamma(3 - \lambda)B_1^2\varphi_3\}a_1^2 = B_1^2\gamma^2(p_2 + q_2). \end{aligned}$$

حال با استفاده از (۱۲.۳) و (۲۳.۳) داریم

$$\begin{aligned} & \{[\gamma(\lambda^2 - 2\lambda)B_1^2 - (2 - \lambda)^2B_2]\varphi_1^2 + \gamma(3 - \lambda)B_1^2\varphi_3 \\ & + (2 - \lambda)^2B_1\varphi_1^2\}|a_2|^2 \leq |\gamma|^2|B_1^2|. \end{aligned} \quad (25.3)$$

$$|a_2| \leq \frac{|\gamma|B_1\sqrt{B_1}}{\sqrt{[\gamma(\lambda^2 - 2\lambda)B_1^2 - (2 - \lambda)^2B_2]\varphi_1^2 + \gamma(3 - \lambda)B_1^2\varphi_3 + (2 - \lambda)^2B_1\varphi_1^2}}. \quad (26.3)$$

این کران مورد نظر برای $|a_2|$ است، همان‌گونه که در (۱۵.۳) ادعا شد. حال به منظور یافتن کران برای $|a_3|$ ، با کم کردن (۲۰.۳) از (۱۸.۳) داریم

$$\frac{2(3 - \lambda)}{\gamma}\varphi_3a_3 = B_1(p_2 - q_2) + \frac{2(3 - \lambda)}{\gamma}\varphi_3a_1^2. \quad (27.3)$$

از (۱۲.۳)، (۲۳.۳) و (۲۷.۳) و این که $B_1 > 0$ نتیجه می‌شود

$$|a_3| \leq \frac{|\gamma|B_1}{(3 - \lambda)\varphi_3} + \frac{(3 - \lambda)\varphi_3|\gamma|B_1 - (2 - \lambda)^2\varphi_1^2}{(3 - \lambda)\varphi_3|\gamma|B_1}|a_2|^2. \quad (28.3)$$

زیرا

$$\frac{2(3 - \lambda)}{\gamma}\varphi_3a_3 = B_1(p_2 - q_2) + \frac{2(3 - \lambda)}{\gamma}\varphi_3a_1^2,$$

$$a_3 = \frac{\gamma B_1(p_2 - q_2)}{2(3 - \lambda)\varphi_3} + a_1^2,$$

$$|a_3| \leq \frac{|\gamma|B_1(|p_2| + |q_2|)}{2(3 - \lambda)\varphi_3} + |a_1^2|,$$

با استفاده از (۱۲.۳) داریم

$$|a_3| \leq \frac{|\gamma|B_1(2 - |p_1|^2 + |q_1|^2)}{2(3 - \lambda)\varphi_3} + |a_1^2|,$$

با استفاده از (۲۲.۳) نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} |a_3| & \leq \frac{|\gamma|B_1(2 - 2|p_1|^2)}{2(3 - \lambda)\varphi_3} + |a_1^2| \\ & = \frac{|\gamma|B_1(1 - |p_1|^2)}{(3 - \lambda)\varphi_3} + |a_1^2| \\ & = \frac{|\gamma|B_1}{(3 - \lambda)\varphi_3} - \frac{|\gamma|B_1}{(3 - \lambda)\varphi_3}|p_1|^2 + |a_1^2|, \end{aligned}$$

مقدار p_2 از رابطه‌ی (۲۳.۳) را در رابطه‌ی اخیر جای‌گذاری می‌کنیم، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} |a_3| &\leq \frac{|\gamma|B_1}{(\lambda-1)\varphi_3} - \frac{|\gamma|B_1}{(\lambda-1)\varphi_3} \frac{(\lambda-1)^2\varphi_1^2|a_1^2|}{|\gamma|^2B_1^2} + |a_1^2| \\ &= \frac{|\gamma|B_1}{(\lambda-1)\varphi_3} - \frac{(\lambda-1)^2\varphi_1^2|a_1^2|}{(\lambda-1)\varphi_3|\gamma|B_1} + |a_1^2| \\ &= \frac{|\gamma|B_1}{(\lambda-1)\varphi_3} - \frac{[(\lambda-1)\varphi_3|\gamma|B_1 - (\lambda-1)^2\varphi_1^2]|a_1^2|}{(\lambda-1)\varphi_3|\gamma|B_1}. \end{aligned}$$

با استفاده از (۲۶.۳) در می‌یابیم

$$|a_3| \leq \begin{cases} \frac{|\gamma|B_1}{(\lambda-1)\varphi_3}, & |\gamma| \leq \frac{(\lambda-1)^2\varphi_1^2}{(\lambda-1)\varphi_3B_1}, \\ \frac{|\gamma|B_1}{(\lambda-1)\varphi_3} \frac{[(\lambda^2-2\lambda)B_1^2 - (\lambda-1)^2B_1\varphi_1^2 + \gamma(\lambda-1)B_1^2\varphi_3 + (\lambda-1)\varphi_3B_1^2|\gamma|^2]}{[(\lambda^2-2\lambda)B_1^2 - (\lambda-1)^2B_1\varphi_1^2 + \gamma(\lambda-1)B_1^2\varphi_3 + (\lambda-1)\varphi_3B_1^2|\gamma|^2]}, & |\gamma| > \frac{(\lambda-1)^2\varphi_1^2}{(\lambda-1)\varphi_3B_1}. \end{cases} \quad (29.3)$$

زیرا زمانی‌که $|\gamma| \leq \frac{(\lambda-1)^2\varphi_1^2}{(\lambda-1)\varphi_3B_1}$ داریم

$$\begin{aligned} |a_3| &\leq \frac{|\gamma|B_1}{(\lambda-1)\varphi_3} + \frac{(\lambda-1)\varphi_3 \frac{(\lambda-1)^2\varphi_1^2}{(\lambda-1)\varphi_3B_1} B_1 - (\lambda-1)^2\varphi_1^2}{(\lambda-1)\varphi_3 \frac{(\lambda-1)^2\varphi_1^2}{(\lambda-1)\varphi_3B_1} B_1} |a_1^2| \\ &= \frac{|\gamma|B_1}{(\lambda-1)\varphi_3} + \frac{(\lambda-1)^2\varphi_1^2 - (\lambda-1)^2\varphi_1^2}{(\lambda-1)^2\varphi_1^2} |a_1^2| \\ &= \frac{|\gamma|B_1}{(\lambda-1)\varphi_3}, \end{aligned}$$

هم‌چنین با استفاده از (۲۶.۳) در (۲۸.۳) خواهیم داشت

$$\begin{aligned} |a_3| &\leq \frac{|\gamma|B_1}{(\lambda-1)\varphi_3} \\ &\quad + \frac{(\lambda-1)\varphi_3|\gamma|B_1 - (\lambda-1)^2\varphi_1^2}{(\lambda-1)\varphi_3|\gamma|B_1} \frac{|\gamma|^2B_1^2}{|[\gamma(\lambda^2-2\lambda)B_1^2 - (\lambda-1)^2B_1\varphi_1^2 + \gamma(\lambda-1)B_1^2\varphi_3 + (\lambda-1)\varphi_3B_1^2|\gamma|^2]|}, \end{aligned}$$

حال با مخرج مشترک‌گیری و سپس ساده کردن عبارت به‌دست آمده، نتیجه مورد نظر حاصل می‌شود و این اثبات قضیه‌ی ۱.۳ را کامل می‌کند. $\square$

با قرار دادن $\lambda = 1$ در قضیه‌ی ۱.۳، نتیجه‌ی زیر را داریم.

نتیجه ۱.۳. فرض کنید تابع $f(z)$ داده شده به‌صورت (۱.۲)، در رده‌ی $S_{\Sigma}^{a,b;c}(\gamma, \phi)$ باشد. در این صورت

$$\begin{aligned} |a_2| &\leq \frac{|\gamma|B_1\sqrt{B_1}}{\sqrt{|\gamma B_1^2\varphi_3 - (\gamma B_1^2 + B_2)\varphi_1^2| + B_1\varphi_1^2}}, \\ |a_3| &\leq \begin{cases} \frac{|\gamma|B_1}{2\varphi_3}, & |\gamma| \leq \frac{\varphi_1^2}{2\varphi_3B_1} \\ \frac{|\gamma|B_1\{|\gamma B_1^2\varphi_3 - (\gamma B_1^2 + B_2)\varphi_1^2| + 2\varphi_3B_1^2|\gamma|^2\}}{2\varphi_3\{|\gamma B_1^2\varphi_3 - (\gamma B_1^2 + B_2)\varphi_1^2| + B_1\varphi_1^2\}}, & |\gamma| > \frac{\varphi_1^2}{2\varphi_3B_1}. \end{cases} \end{aligned} \quad (30.3)$$

با قرار دادن $a = c$ و $b = 1$ در نتیجه‌ی ۱.۳، نتیجه‌ی زیر را داریم.

نتیجه ۲.۳. فرض کنید تابع $f(z)$ داده شده به‌صورت (۱.۲)، در رده‌ی $S_{\Sigma}^*(\gamma, \phi)$ باشد. در این صورت

$$|a_2| \leq \frac{|\gamma|B_1\sqrt{B_1}}{\sqrt{|\gamma B_1^2 - B_2| + B_1}}, \quad (31.3)$$

$$|a_3| \leq \begin{cases} \frac{|\gamma|B_1}{3}, & |\gamma| \leq \frac{1}{2B_1}, \\ \frac{|\gamma|B_1|\gamma B_1^2 - B_2| + 2B_1^2|\gamma|^2}{2(|\gamma B_1^2 - B_2| + B_1)}, & |\gamma| > \frac{1}{2B_1}. \end{cases} \quad (32.3)$$

با قرار دادن $\lambda = 0$ در قضیه ۱.۳، نتیجهی زیر را داریم.

نتیجه ۳.۳. فرض کنید تابع $f(z)$ داده شده به صورت (۱.۲)، در ردهی $\mathcal{N}_{\Sigma}^{a,b;c}(\gamma, \phi)$ باشد. در این صورت

$$|a_2| \leq \frac{|\gamma|B_1\sqrt{B_1}}{\sqrt{|3\gamma B_1^2\varphi_3 - 4B_2\varphi_1^2| + 4B_1\varphi_1^2}}, \quad (33.3)$$

$$|a_3| \leq \begin{cases} \frac{|\gamma|B_1}{3\varphi_3}, & |\gamma| \leq \frac{4\varphi_1^2}{3\varphi_3B_1}, \\ \frac{|\gamma|B_1|3\gamma B_1^2\varphi_3 - 4B_2\varphi_1^2| + 3\varphi_3B_1^2|\gamma|^2}{3\varphi_3(|3\gamma B_1^2\varphi_3 - 4B_2\varphi_1^2| + 4B_1\varphi_1^2)}, & |\gamma| > \frac{4\varphi_1^2}{3\varphi_3B_1}. \end{cases}$$

با قرار دادن $a = c$ و $b = 1$ در نتیجه ۳.۳، نتیجهی زیر را داریم.

نتیجه ۴.۳. فرض کنید تابع $f(z)$ داده شده به صورت (۱.۲)، در ردهی $\mathcal{H}_{\Sigma}^*(\gamma, \phi)$ باشد. در این صورت

$$|a_2| \leq \frac{|\gamma|B_1\sqrt{B_1}}{\sqrt{|3\gamma B_1^2 - 4B_2| + B_1}}, \quad (34.3)$$

$$|a_3| \leq \begin{cases} \frac{|\gamma|B_1}{3}, & |\gamma| \leq \frac{4}{3B_1}, \\ \frac{|\gamma|B_1|3\gamma B_1^2 - 4B_2| + 3B_1^2|\gamma|^2}{3(|3\gamma B_1^2 - 4B_2| + B_1)}, & |\gamma| > \frac{4}{3B_1}. \end{cases}$$

۲.۲.۳ نتیجه گیری

برای ردهی توابع به طور قوی ستاره گون، تابع ϕ به صورت

$$\phi(z) = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\alpha} = 1 + 2\alpha z + 2\alpha^2 z^2 + \dots \quad (0 < \alpha \leq 1), \quad (35.3)$$

داده می شود که قرار می دهیم $B_1 = 2\alpha$ و $B_2 = 2\alpha^2$.

نکته ۶.۳. از قضیه ۱.۳، برای ردهی $S_{\Sigma}^{a,b;c}(\gamma, \lambda, \phi)$ وقتی که $B_1 = 2\alpha$ و $B_2 = 2\alpha^2$ [۵]، داریم

$$|a_2| \leq \frac{|2\gamma|\alpha}{\sqrt{|(\lambda-2)(2\gamma\lambda-\lambda+2)\alpha\varphi_1^2 + 2(3-\lambda)\gamma\alpha\varphi_3| + (2-\lambda)^2\varphi_1^2}}, \quad (36.3)$$

$$|a_3| \leq \begin{cases} \frac{|2\gamma|\alpha}{(3-\lambda)\varphi_3}, & |\gamma| \leq \frac{(2-\lambda)^2\varphi_1^2}{2(3-\lambda)\varphi_3\alpha}, \\ \frac{|2(\lambda-2)(2\gamma\lambda-\lambda+2)\gamma\alpha^2\varphi_1^2 + 2\gamma^2(3-\lambda)\alpha^2\varphi_3| + 4(3-\lambda)\alpha^2\varphi_3|\gamma|^2}{(3-\lambda)\varphi_3\{[(\lambda-2)(2\gamma\lambda-\lambda+2)\alpha\varphi_1^2 + 2\gamma(3-\lambda)\alpha\varphi_3] + (2-\lambda)^2\varphi_1^2\}}, & |\gamma| > \frac{(2-\lambda)^2\varphi_1^2}{2(3-\lambda)\varphi_3\alpha}. \end{cases}$$

از سوی دیگر، اگر قرار دهیم

$$\phi(z) = \frac{1 + (1-2\beta)z}{1-z} = 1 + 2(1-\beta)z + 2(1-\beta)^2z^2 + \dots \quad (0 \leq \beta < 1), \quad (37.3)$$

در این صورت $B_1 = B_2 = 2(1-\beta)$.

نکته ۷.۳. از قضیه ۱.۳، برای رده‌ی $\mathcal{S}_{\Sigma}^{a,b;c}(\gamma, \lambda, \phi)$ ، زمانی که $B_1 = B_2 = 2(1 - \beta)$ ، داریم

$$|a_2| \leq \frac{2(1-\beta)|\gamma|}{\sqrt{[2(1-\beta)\lambda\gamma - \lambda + 2](\lambda - 2)\varphi_1^2 + 2(1-\beta)(3-\lambda)\gamma\varphi_3 + (2-\lambda)^2\varphi_1^2}},$$

$$|a_3| \leq \begin{cases} \frac{2(1-\beta)|\gamma|}{(3-\lambda)\varphi_3}, & |\gamma| \leq \frac{(2-\lambda)^2\varphi_1^2}{2(1-\beta)(3-\lambda)\varphi_3} \\ \frac{2(1-\beta)[(\lambda-2)[2(1-\beta)\lambda\gamma - \lambda + 2]\gamma\varphi_1^2 + 2(1-\beta)(3-\lambda)\gamma^2\varphi_3 + 4(1-\beta)^2(3-\lambda)|\gamma|^2\varphi_3}{(3-\lambda)\varphi_3\{[(\lambda-2)[2(1-\beta)\lambda\gamma - \lambda + 2]\varphi_1^2 + 2(1-\beta)(3-\lambda)\gamma\varphi_3 + (2-\lambda)^2\varphi_1^2\}}, & |\gamma| > \frac{(2-\lambda)^2\varphi_1^2}{2(1-\beta)(3-\lambda)\varphi_3}. \end{cases} \quad (28.3)$$

۳.۳ رده‌های $\mathcal{M}_{\Sigma}^{a,b;c}(\beta, \lambda)$ و $\mathcal{S}_{\Sigma}^{a,b;c}(\alpha, \lambda)$

تعریف ۸.۳. تابع $f(z) \in \Sigma$ داده شده به صورت (۱.۲)، در رده‌ی $\mathcal{S}_{\Sigma}^{a,b;c}(\alpha, \lambda)$ است هرگاه شرایط (۳۹.۳) و (۴۰.۳) برقرار باشند

$$\left| \arg \left(\frac{z(\mathcal{I}_{a,b;c}f(z))'}{(1-\lambda)z + \lambda\mathcal{I}_{a,b;c}f(z)} \right) \right| < \frac{\alpha\pi}{2} \quad (0 < \alpha \leq 1; 0 \leq \lambda \leq 1; z \in \mathbb{U}) \quad (39.3)$$

و

$$\left| \arg \left(\frac{w(\mathcal{I}_{a,b;c}g(w))'}{(1-\lambda)w + \lambda\mathcal{I}_{a,b;c}g(w)} \right) \right| < \frac{\alpha\pi}{2} \quad (0 < \alpha \leq 1; 0 \leq \lambda \leq 1; w \in \mathbb{U}), \quad (40.3)$$

که تابع g داده شده به صورت

$$g(w) = w - a_2w^2 + (2a_2^2 - a_3)w^3 - (5a_2^3 - 5a_2a_3 + a_4)w^4 + \dots,$$

و تعمیمی از f^{-1} در $\mathbb{U}$ است.

برای $\lambda = 0$ و $a = c$ ، $b = 1$ ، رده‌ی $\mathcal{S}_{\Sigma}^{a,b;c}(\alpha, \lambda)$ به رده‌ی $\mathcal{H}_{\Sigma}^{\alpha}$ (مطالعه شده و معرفی شده توسط سربواستوا) تقلیل پیدا می‌کند [۳۲].

با قرار دادن $\lambda = 1$ و $a = c$ ، $b = 1$ ، رده‌ی $\mathcal{S}_{\Sigma}^{a,b;c}(\alpha, \lambda)$ به رده‌ی توابع به‌طور قوی دوطرف-ستاره‌گون بر حسب α که $0 < \alpha \leq 1$ ، تقلیل پیدا می‌کند و با $\mathcal{S}_{\Sigma}^*(\alpha)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۹.۳. تابع $f(z) \in \Sigma$ داده شده به صورت (۱.۲)، در رده‌ی $\mathcal{M}_{\Sigma}^{a,b;c}(\beta, \lambda)$ است هرگاه شرایط (۴۱.۳) و (۴۲.۳) برقرار باشد

$$\operatorname{Re} \left(\frac{z(\mathcal{I}_{a,b;c}f(z))'}{(1-\lambda)z + \lambda\mathcal{I}_{a,b;c}f(z)} \right) > \beta \quad (0 \leq \beta < 1; 0 \leq \lambda \leq 1; z \in \mathbb{U}) \quad (41.3)$$

و

$$\operatorname{Re} \left(\frac{w(\mathcal{I}_{a,b;c}g(w))'}{(1-\lambda)w + \lambda\mathcal{I}_{a,b;c}g(w)} \right) > \beta \quad (0 \leq \beta < 1; 0 \leq \lambda \leq 1; w \in \mathbb{U}), \quad (42.3)$$

که تابع g داده شده به صورت (۴.۲) است.

جالب است که بدانیم برای $\lambda = 0$ ، $a = c$ و $b = 1$ ، رده‌ی $\mathcal{M}_{\Sigma}^{a,b;c}(\beta, \lambda)$ به رده‌ی $\mathcal{H}_{\Sigma}^{\alpha}$ (مطالعه شده و معرفی شده توسط سریواستاوا) تقلیل پیدا می‌کند [۳۲].

با قرار دادن $\lambda = 1$ ، $a = c$ و $b = 1$ ، رده‌ی $\mathcal{M}_{\Sigma}^{a,b;c}(\beta, \lambda)$ به رده‌ی توابع دوطرف-ستاره‌گون بر حسب β که $0 < \beta \leq 1$ ، تقلیل پیدا می‌کند و با $\mathcal{S}_{\Sigma}(\beta)$ نمایش می‌دهیم. هدف این بخش، پیدا کردن تخمینی از ضرایب $|a_2|$ و $|a_3|$ برای توابع رده‌های $\mathcal{S}_{\Sigma}^{a,b;c}(\alpha, \lambda)$ و $\mathcal{M}_{\Sigma}^{a,b;c}(\alpha, \lambda)$ از رده‌ی تابع Σ است. برای به‌کار بردن روش استفاده شده توسط سریواستاوا [۳۲] برای به‌دست آوردن نتیجه‌ی مورد نظر، به لم ۱.۱ نیاز داریم.

۱.۳.۳ کران ضرایب برای رده‌ی توابع $\mathcal{S}_{\Sigma}^{a,b;c}(\alpha, \lambda)$

کار خود را با پیدا کردن تخمین‌هایی از ضرایب $|a_2|$ و $|a_3|$ برای توابع رده‌ی $\mathcal{S}_{\Sigma}^{a,b;c}(\alpha, \lambda)$ شروع می‌کنیم.

قضیه ۲.۳. فرض کنید تابع $f(z)$ داده شده به صورت (۱.۲)، در رده‌ی زیر باشد

$$\mathcal{S}_{\Sigma}^{a,b;c}(\alpha, \lambda) \quad (0 < \alpha \leq 1; 0 \leq \lambda \leq 1),$$

در این صورت

$$|a_2| \leq \frac{2\alpha}{\sqrt{[2\alpha(\lambda^2 - 2\lambda) + (1 - \alpha)(2 - \lambda)^2]\varphi_1^2 + 2\alpha(3 - \lambda)\varphi_3}} \quad (43.3)$$

و

$$|a_3| \leq \frac{2\alpha}{(3 - \lambda)\varphi_3}. \quad (44.3)$$

برهان. از (۳۹.۳) و (۴۰.۳) داریم

$$\frac{z(\mathcal{I}_{a,b;c}f(z))'}{(1 - \lambda)z + \lambda\mathcal{I}_{a,b;c}f(z)} = [p(z)]^{\alpha} \quad (45.3)$$

و

$$\frac{w(\mathcal{I}_{a,b;c}g(w))'}{(1 - \lambda)w + \lambda\mathcal{I}_{a,b;c}g(w)} = [q(w)]^{\alpha}, \quad (46.3)$$

که $p(z)$ و $q(w)$ در P و به ترتیب به صورت زیر می‌باشند

$$p(z) = 1 + p_1z + p_2z^2 + \dots \quad (47.3)$$

و

$$q(z) = 1 + q_1w + q_2w^2 + \dots, \quad (48.3)$$

حال ضرایب را در (۴۵.۳) و (۴۶.۳) برابر هم قرار می‌دهیم. خواهیم داشت

$$(2 - \lambda)\varphi_2a_2 = \alpha p_1, \quad (49.3)$$

زیرا با توجه به (۴۵.۳) داریم

$$\frac{z(z + \varphi_2a_2z^2 + \varphi_3a_3z^3 + \dots)'}{(1 - \lambda)z + \lambda(z + \varphi_2a_2z^2 + \varphi_3a_3z^3 + \dots)} = [p(z)]^{\alpha},$$

$$\begin{aligned} \frac{z + 2\varphi_2 a_2 z^2 + 3\varphi_3 a_3 z^3 + \dots}{z - \lambda z + \lambda z + \lambda \varphi_2 a_2 z^2 + \lambda \varphi_3 a_3 z^3 + \dots} &= [p(z)]^\alpha, \\ \frac{1 + 2\varphi_2 a_2 z + 3\varphi_3 a_3 z^2 + \dots}{1 + \lambda \varphi_2 a_2 z + \lambda \varphi_3 a_3 z^2 + \dots} &= [p(z)]^\alpha, \\ 1 + \underbrace{(2 - \lambda)\varphi_2 a_2 z}_{\alpha p_1 z} + ((\lambda^2 - 2\lambda)\varphi_2^2 a_2^2 + (3 - \lambda)\varphi_3 a_3) z^2 + \dots \\ &= \alpha p_1 z + \frac{1}{\varphi_1} [\alpha(\alpha - 1)p_1^2 + 2\alpha p_2] z^2 + \dots, \\ (\lambda^2 - 2\lambda)\varphi_2 a_2 &= \alpha p_1. \end{aligned}$$

$$(\lambda^2 - 2\lambda)\varphi_2^2 a_2^2 + (3 - \lambda)\varphi_3 a_3 = \frac{1}{\varphi_1} [\alpha(\alpha - 1)p_1^2 + 2\alpha p_2], \quad (50.3)$$

زیرا

$$\begin{aligned} 1 + (2 - \lambda)\varphi_2 a_2 z + \underbrace{((\lambda^2 - 2\lambda)\varphi_2^2 a_2^2 + (3 - \lambda)\varphi_3 a_3) z^2}_{\alpha p_1 z} + \dots \\ = \alpha p_1 z + \frac{1}{\varphi_1} [\alpha(\alpha - 1)p_1^2 + 2\alpha p_2] z^2 + \dots, \\ (\lambda^2 - 2\lambda)\varphi_2^2 a_2^2 + (3 - \lambda)\varphi_3 a_3 &= \frac{1}{\varphi_1} [\alpha(\alpha - 1)p_1^2 + 2\alpha p_2]. \end{aligned}$$

$$- (2 - \lambda)\varphi_2 a_2 = \alpha q_1 \quad (51.3)$$

و

$$(\lambda^2 - 2\lambda)\varphi_2^2 a_2^2 + (3 - \lambda)\varphi_3 (2a_2^2 - a_3) = \frac{1}{\varphi_1} [\alpha(\alpha - 1)q_1^2 + 2\alpha q_2]. \quad (52.3)$$

از (۴۹.۳) و (۵۱.۳) در می‌یابیم

$$a_2 = \frac{\alpha p_1}{(2 - \lambda)\varphi_2} = \frac{-\alpha q_1}{(2 - \lambda)\varphi_2}, \quad (53.3)$$

یعنی

$$p_1 = -q_1. \quad (54.3)$$

با جمع کردن (۵۰.۳) با (۵۲.۳) داریم

$$[2(\lambda^2 - 2\lambda)\varphi_2^2 + 2(3 - \lambda)\varphi_3]a_2^2 = \frac{\alpha(\alpha - 1)}{\varphi_1} (p_1^2 + q_1^2) + \alpha(p_2 + q_2). \quad (55.3)$$

با جای‌گذاری مقدار a_2 از (۵۳.۳) و استفاده از (۵۴.۳) در (۵۵.۳) داریم

$$p_1^2 = \frac{(2 - \lambda)^2 \varphi_2^2 (p_2 + q_2)}{[2\alpha(\lambda^2 - 2\lambda) + (1 - \alpha)(2 - \lambda)^2] \varphi_2^2 + 2\alpha(3 - \lambda)\varphi_3}. \quad (56.3)$$

زیرا

$$[2(\lambda^2 - 2\lambda)\varphi_2^2 + 2(3 - \lambda)\varphi_3] \frac{\alpha^2 p_1^2}{(2 - \lambda)^2 \varphi_2^2} = \alpha(\alpha - 1)p_1^2 + \alpha(p_2 + q_2),$$

$$[2(\lambda^2 - 2\lambda)\varphi_1^2 + 2(3 - \lambda)\varphi_3]\alpha^2 p_1^2 = \alpha(\alpha - 1)p_1^2(2 - \lambda)^2\varphi_1^2 + \alpha(2 - \lambda)^2\varphi_1^2(p_2 + q_2),$$

$$[2(\lambda^2 - 2\lambda)\varphi_1^2 + 2(3 - \lambda)\varphi_3]\alpha p_1^2 - (\alpha - 1)p_1^2(2 - \lambda)^2\varphi_1^2 = (2 - \lambda)^2\varphi_1^2(p_2 + q_2),$$

$$p_1^2 \left(\alpha[2(\lambda^2 - 2\lambda)\varphi_1^2 + 2(3 - \lambda)\varphi_3] + (1 - \alpha)(2 - \lambda)^2\varphi_1^2 \right) = (2 - \lambda)^2\varphi_1^2(p_2 + q_2),$$

$$p_1^2 = \frac{(2 - \lambda)^2\varphi_1^2(p_2 + q_2)}{[2\alpha(\lambda^2 - 2\lambda) + (1 - \alpha)(2 - \lambda)^2]\varphi_1^2 + 2\alpha(3 - \lambda)\varphi_3}.$$

با استفاده از لم ۱.۱ برای ضرایب p_2 و q_2 داریم

$$|p_1| \leq \frac{2(2 - \lambda)\varphi_2}{\sqrt{[2\alpha(\lambda^2 - 2\lambda) + (1 - \alpha)(2 - \lambda)^2]\varphi_1^2 + 2\alpha(3 - \lambda)\varphi_3}}. \quad (57.3)$$

با استفاده از (53.3) و (57.3) نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} |a_2| &= \frac{\alpha|p_1|}{(2 - \lambda)\varphi_2} \\ &\leq \frac{\alpha}{(2 - \lambda)\varphi_2} \frac{2(2 - \lambda)\varphi_2}{\sqrt{[2\alpha(\lambda^2 - 2\lambda) + (1 - \alpha)(2 - \lambda)^2]\varphi_1^2 + 2\alpha(3 - \lambda)\varphi_3}} \\ &= \frac{2\alpha}{\sqrt{[2\alpha(\lambda^2 - 2\lambda) + (1 - \alpha)(2 - \lambda)^2]\varphi_1^2 + 2\alpha(3 - \lambda)\varphi_3}}, \end{aligned}$$

و این کرانی برای $|a_2|$ است همان‌گونه که در (43.3) ادعا شد.

حال به منظور یافتن کران $|a_3|$ ، با کم کردن (52.3) از (50.3) داریم

$$2(3 - \lambda)\varphi_3 a_3 - 2(3 - \lambda)\varphi_3 a_1^2 = \alpha(p_2 - q_2) + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2}(p_1^2 - q_1^2). \quad (58.3)$$

از (53.3)، (54.3) و (58.3) فهمیده می‌شود

$$\begin{aligned} 2(3 - \lambda)\varphi_3 a_3 &= \left[\frac{2(3 - \lambda)\alpha^2\varphi_3}{[2\alpha(\lambda^2 - 2\lambda) + (1 - \alpha)(2 - \lambda)^2]\varphi_1^2 + 2\alpha(3 - \lambda)\varphi_3} + \alpha \right] p_2 \\ &\quad + \left[\frac{2(3 - \lambda)\alpha^2\varphi_3}{[2\alpha(\lambda^2 - 2\lambda) + (1 - \alpha)(2 - \lambda)^2]\varphi_1^2 + 2\alpha(3 - \lambda)\varphi_3} - \alpha \right] q_2. \end{aligned}$$

زیرا از (58.3) داریم

$$2(3 - \lambda)\varphi_3 a_3 = 2(3 - \lambda)\varphi_3 a_1^2 + \underbrace{\alpha(p_2 - q_2) + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2}(p_1^2 - q_1^2)}_0,$$

با استفاده از (53.3) نتیجه می‌شود

$$2(3 - \lambda)\varphi_3 a_3 = 2(3 - \lambda)\varphi_3 \frac{p_1^2 \alpha^2}{(2 - \lambda)^2 \varphi_1^2} + \alpha(p_2 - q_2),$$

با استفاده از (۵۶.۳) داریم

$$\begin{aligned} 2(3-\lambda)\varphi_3 a_3 &= \frac{2(3-\lambda)\varphi_3 \alpha^2}{(2-\lambda)^2 \varphi_1^2} \frac{(2-\lambda)^2 \varphi_1^2 (p_2 + q_2)}{[2\alpha(\lambda^2 - 2\lambda) + (1-\alpha)(2-\lambda)^2] \varphi_1^2 + 2\alpha(3-\lambda)\varphi_3} \\ &\quad + \alpha(p_2 - q_2), \\ 2(3-\lambda)\varphi_3 a_3 &= \left[\frac{2(3-\lambda)\alpha^2 \varphi_3}{[2\alpha(\lambda^2 - 2\lambda) + (1-\alpha)(2-\lambda)^2] \varphi_1^2 + 2\alpha(3-\lambda)\varphi_3} + \alpha \right] p_2 \\ &\quad + \left[\frac{2(3-\lambda)\alpha^2 \varphi_3}{[2\alpha(\lambda^2 - 2\lambda) + (1-\alpha)(2-\lambda)^2] \varphi_1^2 + 2\alpha(3-\lambda)\varphi_3} - \alpha \right] q_2, \\ a_3 &= \left[\frac{\alpha^2}{[2\alpha(\lambda^2 - 2\lambda) + (1-\alpha)(2-\lambda)^2] \varphi_1^2 + 2\alpha(3-\lambda)\varphi_3} + \frac{\alpha}{2(3-\lambda)\varphi_3} \right] p_2 \\ &\quad + \left[\frac{\alpha^2}{[2\alpha(\lambda^2 - 2\lambda) + (1-\alpha)(2-\lambda)^2] \varphi_1^2 + 2\alpha(3-\lambda)\varphi_3} - \frac{\alpha}{2(3-\lambda)\varphi_3} \right] q_2, \end{aligned}$$

با استفاده‌ی مجدد از لم ۱.۱ برای ضرایب p_2 و q_2 ، به آسانی داریم

$$|a_3| \leq \frac{2\alpha}{(3-\lambda)\varphi_3},$$

زیرا

$$\begin{aligned} |a_3| &\leq \left[\frac{\alpha^2}{|2\alpha(\lambda^2 - 2\lambda) + (1-\alpha)(2-\lambda)^2| \varphi_1^2 + 2\alpha(3-\lambda)\varphi_3} + \frac{\alpha}{2(3-\lambda)\varphi_3} \right] p_2 \\ &\quad + \left| \frac{\alpha^2}{|2\alpha(\lambda^2 - 2\lambda) + (1-\alpha)(2-\lambda)^2| \varphi_1^2 + 2\alpha(3-\lambda)\varphi_3} - \frac{\alpha}{2(3-\lambda)\varphi_3} \right| q_2, \\ |a_3| &\leq \frac{4\alpha^2}{|2\alpha(\lambda^2 - 2\lambda) + (1-\alpha)(2-\lambda)^2| \varphi_1^2 + 2\alpha(3-\lambda)\varphi_3} \\ &\leq \frac{4\alpha^2}{2\alpha(3-\lambda)\varphi_3} \\ &= \frac{2\alpha}{(3-\lambda)\varphi_3}. \end{aligned}$$

□

با قرار دادن $\lambda = 0$ در قضیه‌ی ۲.۳، نتیجه‌ی زیر را داریم.

نتیجه ۵.۳. فرض کنید تابع $f(z)$ داده شده به صورت (۱.۲)، درده‌ی $S_{\Sigma}^{a,b;c}(\alpha)$ که $0 < \alpha \leq 1$ باشد.

در این صورت

$$|a_2| \leq \alpha \sqrt{\frac{2}{2(1-\alpha)\varphi_1^2 + 3\alpha\varphi_3}} \quad (۵۹.۳)$$

و

$$|a_3| \leq \frac{2\alpha}{3\varphi_3}. \quad (۶۰.۳)$$

با فرض کردن $a = c$ و $b = 1$ در نتیجه‌ی ۵.۳، نتیجه‌ی زیر حاصل می‌شود.

نتیجه ۶.۳. فرض کنید تابع $f(z)$ داده شده به صورت (۱.۲)، در رده‌ی $\mathcal{H}_{\Sigma}^{\alpha}$ که $0 < \alpha \leq 1$ باشد. در این صورت

$$|a_2| \leq \alpha \sqrt{\frac{2}{2+\alpha}} \quad (۶۱.۳)$$

و

$$|a_3| \leq \frac{2\alpha}{3}. \quad (۶۲.۳)$$

زیرا با توجه به (۳.۳) و (۵.۳) و این که $a = c$ و $b = 1$ داریم

$$\varphi_2 = \frac{(a)_1(b)_1}{(a)_1 1!} = (b)_1,$$

$$(b)_1 = \frac{\Gamma(b+1)}{\Gamma(b)} = b = 1 \implies \varphi_2 = 1,$$

و

$$\varphi_3 = \frac{(a)_2(b)_2}{(a)_2 2!} = \frac{(b)_2}{2!},$$

$$(b)_2 = \frac{\Gamma(b+2)}{\Gamma(b)} = b(b+1) = 2 \implies \varphi_3 = \frac{(b)_2}{2!} = 1,$$

با توجه به (۵۹.۳) داریم

$$|a_2| \leq \alpha \sqrt{\frac{2}{2(1-\alpha) + 3\alpha}} = \alpha \sqrt{\frac{2}{2+\alpha}},$$

و با توجه به (۶۰.۳) داریم

$$|a_3| \leq \frac{2\alpha}{3\varphi_3} = \frac{2\alpha}{3}. \quad (۶۳.۳)$$

نکته ۱۰.۳. کران $|a_3|$ در نتیجه‌ی ۶.۳، بهبودی در نتیجه‌ی ”سریواستاوا“ [۳۲] ایجاد می‌کند.

در قضیه‌ی ۲.۳ زمانی که $\lambda = 1$ ، نتیجه زیر را داریم.

نتیجه ۷.۳. فرض کنید تابع $f(z)$ داده شده به صورت (۱.۲)، در رده‌ی $\mathcal{S}_{\Sigma}^{a,b;c}(\alpha, 1)$ که $0 < \alpha \leq 1$ باشد. در این صورت

$$|a_2| \leq \frac{2\alpha}{\sqrt{(1-3\alpha)\varphi_1^2 + 4\alpha\varphi_3}}$$

و

$$|a_3| \leq \frac{\alpha}{\varphi_3}.$$

۲.۳.۳ کران ضرایب برای رده‌ی توابع $\mathcal{M}_{\Sigma}^{a,b;c}(\beta, \lambda)$

در این قسمت، تخمینی از ضرایب $|a_2|$ و $|a_3|$ برای توابع رده‌ی $\mathcal{M}_{\Sigma}^{a,b;c}(\beta, \lambda)$ را می‌یابیم.

قضیه ۳.۳. فرض کنید تابع $f(z)$ داده شده به صورت (۱.۲)، در رده‌ی

$$\mathcal{M}_{\Sigma}^{a,b;c}(\beta, \lambda) \quad (0 \leq \beta < 1; 0 \leq \lambda \leq 1),$$

باشد. در این صورت

$$|a_2| \leq \sqrt{\frac{2(1-\beta)}{(\lambda^2 - 2\lambda)\varphi_1^2 + (3-\lambda)\varphi_3}} \quad (۶۴.۳)$$

و

$$|a_3| \leq \frac{2(1-\beta)}{(3-\lambda)\varphi_3}. \quad (۶۵.۳)$$

برهان. از (۴۱.۳) و (۴۲.۳) فهمیده می‌شود که $p, q \in P$ وجود دارند به طوری که

$$\frac{z(\mathcal{I}_{a,b;c}f(z))'}{(1-\lambda)z + \lambda\mathcal{I}_{a,b;c}f(z)} = \beta + (1-\beta)p(z) \quad (۶۶.۳)$$

و

$$\frac{w(\mathcal{I}_{a,b;c}g(w))'}{(1-\lambda)w + \lambda\mathcal{I}_{a,b;c}g(w)} = \beta + (1-\beta)q(w), \quad (۶۷.۳)$$

که $p(z)$ و $q(w)$ به ترتیب به صورت (۴۷.۳) و (۴۸.۳) هستند. با برابر قرار دادن ضرایب در (۶۶.۳) و

(۶۷.۳) داریم

$$(2-\lambda)\varphi_2a_2 = (1-\beta)p_1, \quad (۶۸.۳)$$

زیرا با توجه به (۶۶.۳) داریم

$$\frac{z(z + \varphi_2a_2z^2 + \varphi_3a_3z^3 + \dots)'}{(1-\lambda)z + \lambda(z + \varphi_2a_2z^2 + \varphi_3a_3z^3 + \dots)} = \beta + (1-\beta)(1 + p_1z + p_2z^2 + \dots),$$

$$\frac{z + 2\varphi_2a_2z^2 + 3\varphi_3a_3z^3 + \dots}{z - \lambda z + \lambda z + \lambda\varphi_2a_2z^2 + \lambda\varphi_3a_3z^3 + \dots} = 1 + (1-\beta)p_1z + (1-\beta)p_2z^2 + \dots,$$

$$\frac{1 + 2\varphi_2a_2z + 3\varphi_3a_3z^2 + \dots}{1 + \lambda\varphi_2a_2z + \lambda\varphi_3a_3z^2 + \dots} = 1 + (1-\beta)p_1z + (1-\beta)p_2z^2 + \dots,$$

$$\underbrace{(2-\lambda)\varphi_2a_2z}_{= (1-\beta)p_1z} + ((\lambda^2 - 2\lambda)\varphi_1^2a_1^2 + (3-\lambda)\varphi_3a_3)z^2 + \dots$$

$$= \underbrace{(1-\beta)p_1z}_{= (1-\beta)p_1z} + (1-\beta)p_2z^2 + \dots,$$

$$(2-\lambda)\varphi_2a_2 = (1-\beta)p_1.$$

$$(\lambda^2 - 2\lambda)\varphi_1^2a_1^2 + (3-\lambda)\varphi_3a_3 = (1-\beta)p_2, \quad (۶۹.۳)$$

زیرا

$$(2-\lambda)\varphi_2a_2z + \underbrace{((\lambda^2 - 2\lambda)\varphi_1^2a_1^2 + (3-\lambda)\varphi_3a_3)z^2}_{= (1-\beta)p_2z^2} + \dots$$

$$= (1-\beta)p_1z + \underbrace{(1-\beta)p_2z^2}_{= (1-\beta)p_2z^2} + \dots,$$

$$(\lambda^2 - 2\lambda)\varphi_1^2 a_1^2 + (3 - \lambda)\varphi_3 a_3 = (1 - \beta)p_2.$$

$$-(2 - \lambda)\varphi_2 a_2 = (1 - \beta)q_1 \quad (70.3)$$

و

$$(\lambda^2 - 2\lambda)\varphi_1^2 a_1^2 + (3 - \lambda)\varphi_3(2a_1^2 - a_3) = (1 - \beta)q_2. \quad (71.3)$$

از (۶۸.۳) و (۷۰.۳) داریم

$$a_2 = \frac{(1 - \beta)}{(2 - \lambda)\varphi_2} p_1 = \frac{-(1 - \beta)}{(2 - \lambda)\varphi_2} q_1, \quad (72.3)$$

یعنی

$$p_1 = -q_1. \quad (73.3)$$

از (۶۹.۳) و (۷۱.۳) داریم

$$[2(\lambda^2 - 2\lambda)\varphi_1^2 + 2(3 - \lambda)\varphi_3]a_1^2 = (1 - \beta)(p_2 + q_2). \quad (74.3)$$

همچنین با استفاده از (۷۲.۳) و (۷۴.۳) داریم

$$p_1^2 = \frac{(2 - \lambda)^2 \varphi_1^2 (p_2 + q_2)}{2[(\lambda^2 - 2\lambda)\varphi_1^2 + (3 - \lambda)\varphi_3](1 - \beta)}. \quad (75.3)$$

زیرا با جای‌گذاری مقدار a_1^2 از (۷۲.۳) در (۷۴.۳) خواهیم داشت

$$[2(\lambda^2 - 2\lambda)\varphi_1^2 + 2(3 - \lambda)\varphi_3] \frac{(1 - \beta)^2 p_1^2}{(2 - \lambda)^2 \varphi_1^2} = (1 - \beta)(p_2 + q_2),$$

$$\begin{aligned} p_1^2 &= \frac{(1 - \beta)(p_2 + q_2)(2 - \lambda)^2 \varphi_1^2}{[2(\lambda^2 - 2\lambda)\varphi_1^2 + 2(3 - \lambda)\varphi_3](1 - \beta)^2} \\ &= \frac{(2 - \lambda)^2 \varphi_1^2 (p_2 + q_2)}{2[(\lambda^2 - 2\lambda)\varphi_1^2 + (3 - \lambda)\varphi_3](1 - \beta)}. \end{aligned} \quad (76.3)$$

با استفاده از لم ۱.۱ داریم

$$|p_1| \leq (2 - \lambda)\varphi_2 \sqrt{\frac{2}{[(\lambda^2 - 2\lambda)\varphi_1^2 + (3 - \lambda)\varphi_3](1 - \beta)}}. \quad (77.3)$$

با استفاده‌ی مجدد از لم ۱.۱ برای (۷۲.۳) و استفاده از (۷۷.۳) در می‌یابیم

$$|a_2| \leq \sqrt{\frac{2(1 - \beta)}{(\lambda^2 - 2\lambda)\varphi_1^2 + (3 - \lambda)\varphi_3}},$$

زیرا

$$\begin{aligned} |a_2| &= \frac{(1 - \beta)}{(2 - \lambda)\varphi_2} |p_1| \\ &\leq \frac{(1 - \beta)(2 - \lambda)\varphi_2}{(2 - \lambda)\varphi_2} \sqrt{\frac{2}{[(\lambda^2 - 2\lambda)\varphi_1^2 + (3 - \lambda)\varphi_3](1 - \beta)}} \\ &= \sqrt{\frac{2(1 - \beta)}{(\lambda^2 - 2\lambda)\varphi_1^2 + (3 - \lambda)\varphi_3}}. \end{aligned} \quad (78.3)$$

و این کرانی برای $|a_2|$ است، همان‌گونه که در (۶۴.۳) ادعا شد.
 حال به منظور یافتن کران برای $|a_3|$ ، با کم کردن (۷۱.۳) از (۶۹.۳) داریم
 (۷۹.۳) $2(3-\lambda)\varphi_3 a_3 - 2(3-\lambda)\varphi_3 a_2^* = (1-\beta)(p_2 - q_2).$

از (۷۴.۳) و (۷۹.۳) خواهیم داشت

$$2(3-\lambda)\varphi_3 a_3 = \frac{2(3-\lambda)\varphi_3(1-\beta) + (\lambda^2 - 2\lambda)\varphi_2^*(1-\beta)}{(\lambda^2 - 2\lambda)\varphi_2^* + (3-\lambda)\varphi_3} p_2 - \frac{(\lambda^2 - 2\lambda)\varphi_2^*(1-\beta)}{(\lambda^2 - 2\lambda)\varphi_2^* + (3-\lambda)\varphi_3} q_2.$$

زیرا با توجه به (۷۹.۳) داریم

$$2(3-\lambda)\varphi_3 a_3 = 2(3-\lambda)\varphi_3 a_2^* + (1-\beta)(p_2 - q_2),$$

حال با استفاده از (۷۲.۳) خواهیم داشت

$$2(3-\lambda)\varphi_3 a_3 = 2(3-\lambda)\varphi_3 \frac{(1-\beta)^2}{(2-\lambda)^2 \varphi_2^*} p_2^* + (1-\beta)(p_2 - q_2),$$

با قرار دادن مقدار p_2^* از (۷۵.۳) در معادله‌ی فوق مشاهده می‌کنیم

$$2(3-\lambda)\varphi_3 a_3 = \frac{2(3-\lambda)\varphi_3(1-\beta)^2}{(2-\lambda)^2 \varphi_2^*} \frac{(2-\lambda)^2 \varphi_2^*(p_2 + q_2)}{2[(\lambda^2 - 2\lambda)\varphi_2^* + (3-\lambda)\varphi_3](1-\beta)} + (1-\beta)(p_2 - q_2),$$

$$2(3-\lambda)\varphi_3 a_3 = \frac{(3-\lambda)\varphi_3(1-\beta)(p_2 + q_2)}{(\lambda^2 - 2\lambda)\varphi_2^* + (3-\lambda)\varphi_3} + (1-\beta)(p_2 - q_2),$$

$$2(3-\lambda)\varphi_3 a_3 = \frac{(3-\lambda)\varphi_3(1-\beta)(p_2 + q_2) + [(\lambda^2 - 2\lambda)\varphi_2^* + (3-\lambda)\varphi_3](1-\beta)(p_2 - q_2)}{(\lambda^2 - 2\lambda)\varphi_2^* + (3-\lambda)\varphi_3},$$

$$a_3 = \frac{2(3-\lambda)\varphi_3(1-\beta) + (\lambda^2 - 2\lambda)\varphi_2^*(1-\beta)}{[(\lambda^2 - 2\lambda)\varphi_2^* + (3-\lambda)\varphi_3]2(3-\lambda)\varphi_3} p_2 - \frac{(\lambda^2 - 2\lambda)\varphi_2^*(1-\beta)}{[(\lambda^2 - 2\lambda)\varphi_2^* + (3-\lambda)\varphi_3]2(3-\lambda)\varphi_3} q_2,$$

$$a_3 = \frac{2(3-\lambda)\varphi_3(1-\beta)}{[(\lambda^2 - 2\lambda)\varphi_2^* + (3-\lambda)\varphi_3]2(3-\lambda)\varphi_3} p_2 + \frac{(\lambda^2 - 2\lambda)\varphi_2^*(1-\beta)}{[(\lambda^2 - 2\lambda)\varphi_2^* + (3-\lambda)\varphi_3]2(3-\lambda)\varphi_3} p_2 - \frac{(\lambda^2 - 2\lambda)\varphi_2^*(1-\beta)}{[(\lambda^2 - 2\lambda)\varphi_2^* + (3-\lambda)\varphi_3]2(3-\lambda)\varphi_3} q_2,$$

$$a_3 = \frac{(1-\beta)}{[(\lambda^2 - 2\lambda)\varphi_1^2 + (3-\lambda)\varphi_3]} p_2 \\ + \frac{(\lambda^2 - 2\lambda)\varphi_1^2(1-\beta)}{[(\lambda^2 - 2\lambda)\varphi_1^2 + (3-\lambda)\varphi_3]2(3-\lambda)\varphi_3} p_2 \\ - \frac{(\lambda^2 - 2\lambda)\varphi_1^2(1-\beta)}{[(\lambda^2 - 2\lambda)\varphi_1^2 + (3-\lambda)\varphi_3]2(3-\lambda)\varphi_3} q_2,$$

یکبار دیگر، با استفاده از لم ۱.۱ برای ضرایب p_2 و q_2 ، به آسانی داریم

$$|a_3| \leq \frac{2(1-\beta)}{(3-\lambda)\varphi_3}.$$

زیرا

$$|a_3| \leq \frac{(1-\beta)}{(|(\lambda^2 - 2\lambda)|\varphi_1^2 + (3-\lambda)\varphi_3)}^2 \\ + \frac{(\lambda^2 - 2\lambda)\varphi_1^2(1-\beta)}{(|(\lambda^2 - 2\lambda)|\varphi_1^2 + (3-\lambda)\varphi_3)2(3-\lambda)\varphi_3}^2 \\ - \frac{(\lambda^2 - 2\lambda)\varphi_1^2(1-\beta)}{(|(\lambda^2 - 2\lambda)|\varphi_1^2 + (3-\lambda)\varphi_3)2(3-\lambda)\varphi_3}^2, \\ |a_3| \leq \frac{(1-\beta)}{(|(\lambda^2 - 2\lambda)|\varphi_1^2 + (3-\lambda)\varphi_3)}^2 \\ \leq \frac{2(1-\beta)}{(3-\lambda)\varphi_3}.$$

□

و این اثبات قضیه ۳.۳ را کامل می‌کند.

با قرار دادن $\lambda = 0$ در قضیه ۳.۳، نتیجه زیر را داریم.

نتیجه ۸.۳. فرض کنید تابع $f(z)$ داده شده به صورت (۱.۲)، در رده $\mathcal{M}_{\Sigma}^{a,b;c}(\beta)$ که $0 \leq \beta < 1$ باشد. در این صورت

$$|a_2| \leq \sqrt{\frac{2(1-\beta)}{3\varphi_3}} \quad (۸.۳)$$

و

$$|a_3| \leq \frac{2(1-\beta)}{3\varphi_3}. \quad (۸.۳)$$

نکته ۱۱.۳. برای $a = c$ و $b = 1$ ، کران $|a_3|$ در نتیجه ۸.۳، بهبودی در نتیجه سریواستاوا [۳۲] ایجاد می‌کند.

در قضیه ۳.۳ زمانی که $\lambda = 1$ است، به نتیجه زیر برای رده $\mathcal{M}_{\Sigma}^{a,b;c}(\beta, 1)$ از توابع دو طرف-ستاره‌گون بر حسب β می‌رسیم.

نتیجه ۹.۳. فرض کنید تابع $f(z)$ داده شده به صورت (۱.۲)، دردهی $S_{\Sigma}^{a,b;c}(\beta)$ که $0 \leq \beta < 1$ باشد. در این صورت

$$|a_2| \leq \sqrt{\frac{2-2\beta}{2\varphi_3 - \varphi_1^2}},$$

$$|a_3| \leq \frac{1-\beta}{\varphi_3}.$$

فصل ۴

بهبود کران ضرایب*

در این فصل، رده‌ی جدیدی از توابع را معرفی می‌کنیم و با توجه به آن، کران ضرایب را بهبود می‌دهیم. تعاریف، قضایا و نتایجی را که این جانب به‌دست آورده‌ام را با * مشخص کرده‌ام.

۱.۴ رده‌ی $B_{\Sigma}(\varphi, \tau, \lambda)$

تعریف ۱.۴. * $0 \leq \gamma \leq 1$ و $\tau \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ را در نظر بگیرید. تابع $f \in \Sigma$ داده شده به‌صورت (۱.۲)،

در رده‌ی $B_{\Sigma}(\varphi, \tau, \lambda)$ است هرگاه شرایط زیر برقرار باشد

$$1 + \frac{1}{\tau} \left[(1 - \lambda) \frac{(f * h)(z)}{z} + \lambda (f * h)'(z) - 1 \right] \prec \varphi(z) \quad (z \in \mathbb{U}) \quad (1.4)$$

و

$$1 + \frac{1}{\tau} \left[(1 - \lambda) \frac{(f * h)^{-1}(w)}{w} + \lambda ((f * h)^{-1})'(w) - 1 \right] \prec \varphi(w) \quad (w \in \mathbb{U}), \quad (2.4)$$

که توابع $h(z)$ و $(f * h)^{-1}(w)$ به ترتیب تعریف شده به‌صورت (۷.۲) و (۱۲.۲) هستند.

نکته ۲.۴. انتخاب‌های زیادی برای φ وجود دارد که می‌تواند زیررده‌های جالبی از رده‌ی $B_{\Sigma}(\varphi, \tau, \lambda)$ را فراهم سازد.

• اگر قرار دهیم $\tau = 1$ و $\varphi = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\alpha}$ که $0 < \alpha \leq 1$ ، در این صورت رده‌ی $B_{\Sigma}(\varphi, \tau, \lambda)$ به تعریف ۶.۲ تقلیل پیدا می‌کند.

• اگر قرار دهیم $\tau = 1$ ، $\varphi = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\alpha}$ که $0 < \alpha \leq 1$ و $h(z) = \frac{z}{1-z}$ ، در این صورت رده‌ی $B_{\Sigma}(\varphi, \tau, \lambda)$ به رده‌ی $B_{\Sigma}(\alpha, \lambda)$ (معرفی شده و مطالعه شده توسط فراسین و آووف [۱۴]) تقلیل پیدا می‌کند.

• اگر قرار دهیم $\tau = \lambda = 1$ ، $\varphi = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\alpha}$ که $0 < \alpha \leq 1$ و $h(z) = \frac{z}{1-z}$ ، در این صورت رده‌ی $B_{\Sigma}(\varphi, \tau, \lambda)$ به رده‌ی $\mathcal{H}_{\Sigma}^{\alpha}$ (معرفی شده و مطالعه شده توسط سریواستاوا [۳۲]) تقلیل پیدا می‌کند.

- اگر قرار دهیم $\tau = 1$ و $\varphi = \frac{1+(1-2\beta)z}{1-z}$ که $0 \leq \beta < 1$ ، در این صورت ردهی $B_\Sigma(\varphi, \tau, \lambda)$ به تعریف ۹.۲ تقلیل پیدا می‌کند.
- اگر قرار دهیم $\tau = 1$ و $\varphi = \frac{1+(1-2\beta)z}{1-z}$ که $0 \leq \beta < 1$ ، در این صورت ردهی $B_\Sigma(\varphi, \tau, \lambda)$ به ردهی $B_\Sigma(\beta, \lambda)$ (معرفی شده و مطالعه شده توسط فراسین و آووف [۱۴]) تقلیل پیدا می‌کند.
- اگر قرار دهیم $\tau = \lambda = 1$ و $\varphi = \frac{1+(1-2\beta)z}{1-z}$ که $0 \leq \beta < 1$ ، در این صورت ردهی $B_\Sigma(\varphi, \tau, \lambda)$ به ردهی $\mathcal{H}_\Sigma(\beta)$ (معرفی شده و مطالعه شده توسط سریواستاوا [۳۲]) تقلیل پیدا می‌کند.

۲.۴ کران ضرایب برای ردهی توابع $B_\Sigma(\varphi, \tau, \lambda)$

برای دست یافتن به هدفمان، به لم ۱.۱ نیاز داریم.

قضیه ۱.۴. * فرض کنید $f(z) \in B_\Sigma(\varphi, \tau, \lambda)$ به صورت (۱.۲) باشد. در این صورت

$$|a_2| \leq \min \left[\frac{|\tau|B_1}{h_2(1+\lambda)}, \frac{1}{h_2} \sqrt{\frac{|\tau|(B_1 + |B_1 - B_2|)}{(1+2\lambda)}}, \frac{|\tau|B_1 \sqrt{B_1}}{h_2 \sqrt{|(B_1 - B_2)(1+\lambda)^2 + \tau B_1^2(1+2\lambda)|}} \right], \quad (3.4)$$

$$|a_3| \leq \min \left[\frac{|\tau|(B_1 + |B_1 - B_2|)}{h_3(1+2\lambda)}, \frac{|\tau|^2|B_1^2|}{h_3(1+\lambda)^2} + \frac{|\tau|B_1}{h_3(1+2\lambda)} \right], \quad (4.4)$$

که ضرایب B_1 و B_2 به صورت (۴.۲) می‌باشند.

برهان. فرض کنید $f \in B_\Sigma(\varphi, \tau, \lambda)$. در این صورت توابع تحلیلی $u, v : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}$ وجود دارند که $u(0) = v(0) = 0$ و شرایط زیر برقرار است

$$1 + \frac{1}{\tau} \left[(1-\lambda) \frac{(f * h)(z)}{z} + \lambda(f * h)'(z) - 1 \right] = \varphi(u(z)) \quad (z \in \mathcal{U}) \quad (5.4)$$

و

$$1 + \frac{1}{\tau} \left[(1-\lambda) \frac{(f * h)^{-1}(w)}{w} + \lambda((f * h)^{-1})'(w) - 1 \right] = \varphi(v(w)) \quad (w \in \mathcal{U}). \quad (6.4)$$

توابع p_1 و p_2 را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$p_1(z) = \frac{1+u(z)}{1-u(z)} = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots \quad (7.4)$$

و

$$p_2(z) = \frac{1+v(z)}{1-v(z)} = 1 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots \quad (8.4)$$

در این صورت p_1 و p_2 در $\mathbb{U}$ تحلیلی هستند و $p_1(0) = 1 = p_2(0)$.

چون $u, v : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}$ ، هر یک از توابع p_1 و p_2 دارای قسمت حقیقی مثبت در $\mathbb{U}$ هستند. بنابراین

طبق لم ۱.۱ داریم

$$|b_n| \leq 2, \quad |c_n| \leq 2 \quad (n \in \mathbb{N}), \quad (9.4)$$

حال $u(z)$ و $v(z)$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$u(z) = \frac{p_1(z) - 1}{p_1(z) + 1} = \frac{1}{\tau} \left[c_1 z + \left(c_2 - \frac{c_1^2}{\tau} \right) z^2 + \dots \right] \quad (z \in \mathbb{U}) \quad (10.4)$$

و

$$v(z) = \frac{p_2(z) - 1}{p_2(z) + 1} = \frac{1}{\tau} \left[b_1 z + \left(b_2 - \frac{b_1^2}{\tau} \right) z^2 + \dots \right] \quad (z \in \mathbb{U}). \quad (11.4)$$

به توضوح با جای‌گذاری (۱۰.۴) و (۱۱.۴) به ترتیب در (۵.۴) و (۶.۴) و استفاده از (۴۲.۲) در می‌یابیم

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{\tau} \left[(1 - \lambda) \frac{(f * h)(z)}{z} + \lambda (f * h)'(z) - 1 \right] &= \varphi \left(\frac{p_1(z) - 1}{p_1(z) + 1} \right) \\ &= 1 + \frac{1}{\tau} B_1 c_1 z + \left[\frac{1}{\tau} B_1 \left(c_2 - \frac{c_1^2}{\tau} \right) + \frac{1}{\tau} B_2 c_1^2 \right] z^2 + \dots \end{aligned} \quad (12.4)$$

و

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{\tau} \left[(1 - \lambda) \frac{(f * h)^{-1}(w)}{w} + \lambda ((f * h)^{-1})'(w) - 1 \right] &= \varphi \left(\frac{p_2(w) - 1}{p_2(w) + 1} \right) \\ &= 1 + \frac{1}{\tau} B_1 b_1 w + \left[\frac{1}{\tau} B_1 \left(b_2 - \frac{b_1^2}{\tau} \right) + \frac{1}{\tau} B_2 b_1^2 \right] w^2 + \dots \end{aligned} \quad (13.4)$$

با استفاده از (۱.۲) و (۴.۲) در (۱۲.۴) و (۱۳.۴) خواهیم داشت

$$\frac{(1 + \lambda) a_2 h_2}{\tau} = \frac{1}{\tau} B_1 c_1, \quad (14.4)$$

زیرا

$$(f * h)(z) = z + a_2 h_2 z^2 + a_3 h_3 z^3 + \dots,$$

و

$$(f * h)'(z) = 1 + 2a_2 h_2 z + 3a_3 h_3 z^2 + \dots.$$

با استفاده از (۱۲.۴) داریم

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{\tau} \left[(1 - \lambda) \frac{z + a_2 h_2 z^2 + a_3 h_3 z^3 + \dots}{z} + \lambda (1 + 2a_2 h_2 z + 3a_3 h_3 z^2 + \dots) - 1 \right] &= 1 + \frac{1}{\tau} B_1 c_1 z + \left[\frac{1}{\tau} B_1 \left(c_2 - \frac{c_1^2}{\tau} \right) + \frac{1}{\tau} B_2 c_1^2 \right] z^2 + \dots, \\ 1 + \frac{1}{\tau} \left[(1 - \lambda) (1 + a_2 h_2 z + a_3 h_3 z^2 + \dots) + \lambda (1 + 2a_2 h_2 z + 3a_3 h_3 z^2 + \dots) - 1 \right] &= 1 + \frac{1}{\tau} B_1 c_1 z + \left[\frac{1}{\tau} B_1 \left(c_2 - \frac{c_1^2}{\tau} \right) + \frac{1}{\tau} B_2 c_1^2 \right] z^2 + \dots, \\ 1 + \frac{1}{\tau} \left[(1 + \underbrace{a_2 h_2 z + a_3 h_3 z^2 + \dots}_{\lambda a_2 h_2 z + \lambda a_3 h_3 z^2 + \dots} - \lambda - \underbrace{\lambda a_2 h_2 z - \lambda a_3 h_3 z^2 - \dots}_{2\lambda a_2 h_2 z + 3\lambda a_3 h_3 z^2 + \dots}) + (\lambda \right. & \\ \left. + \underbrace{2\lambda a_2 h_2 z + 3\lambda a_3 h_3 z^2 + \dots}) - 1 \right] &= 1 + \frac{1}{\tau} B_1 c_1 z + \left[\frac{1}{\tau} B_1 \left(c_2 - \frac{c_1^2}{\tau} \right) + \frac{1}{\tau} B_2 c_1^2 \right] z^2 + \dots, \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\tau} \left[(a_{\tau} h_{\tau} - \lambda a_{\tau} h_{\tau} + \tau \lambda a_{\tau} h_{\tau}) z \right] = \frac{1}{\tau} B_1 c_1 z \implies \frac{(1 + \lambda) a_{\tau} h_{\tau}}{\tau} = \frac{1}{\tau} B_1 c_1.$$

$$\frac{(1 + \tau \lambda) a_{\tau} h_{\tau}}{\tau} = \left[\frac{1}{\tau} B_1 \left(c_{\tau} - \frac{c_1^{\tau}}{\tau} \right) + \frac{1}{\tau} B_{\tau} c_1^{\tau} \right], \quad (15.4)$$

زیرا

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{1}{\tau} \left[(1 + a_{\tau} h_{\tau} z + \underbrace{a_{\tau} h_{\tau} z^{\tau}} + \dots - \lambda - \lambda a_{\tau} h_{\tau} z - \underbrace{\lambda a_{\tau} h_{\tau} z^{\tau}} - \dots) + (\lambda \right. \\ & \quad \left. + \tau \lambda a_{\tau} h_{\tau} z + \underbrace{\tau \lambda a_{\tau} h_{\tau} z^{\tau}} + \dots) - 1 \right] \\ & = 1 + \frac{1}{\tau} B_1 c_1 z + \underbrace{\left[\frac{1}{\tau} B_1 \left(c_{\tau} - \frac{c_1^{\tau}}{\tau} \right) + \frac{1}{\tau} B_{\tau} c_1^{\tau} \right] z^{\tau} + \dots}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} \left[(a_{\tau} h_{\tau} - \lambda a_{\tau} h_{\tau} + \tau \lambda a_{\tau} h_{\tau}) z^{\tau} \right] & = \left[\frac{1}{\tau} B_1 \left(c_{\tau} - \frac{c_1^{\tau}}{\tau} \right) + \frac{1}{\tau} B_{\tau} c_1^{\tau} \right] z^{\tau}, \\ \implies \frac{(1 + \tau \lambda) a_{\tau} h_{\tau}}{\tau} & = \left[\frac{1}{\tau} B_1 \left(c_{\tau} - \frac{c_1^{\tau}}{\tau} \right) + \frac{1}{\tau} B_{\tau} c_1^{\tau} \right]. \end{aligned}$$

$$\frac{-(1 + \lambda) a_{\tau} h_{\tau}}{\tau} = \frac{1}{\tau} B_1 b_1, \quad (16.4)$$

$$\frac{(1 + \tau \lambda)(\tau a_{\tau}^{\tau} h_{\tau}^{\tau} - a_{\tau} h_{\tau})}{\tau} = \left[\frac{1}{\tau} B_1 \left(b_{\tau} - \frac{b_1^{\tau}}{\tau} \right) + \frac{1}{\tau} B_{\tau} b_1^{\tau} \right]. \quad (17.4)$$

از (۱۴.۴) و (۱۶.۴) نتیجه می‌شود

$$c_1 = -b_1 \quad (18.4)$$

و

$$\frac{\tau(1 + \lambda)\tau a_{\tau}^{\tau} h_{\tau}^{\tau}}{\tau^{\tau}} = \frac{1}{\tau} B_1^{\tau} (c_1^{\tau} + b_1^{\tau}). \quad (19.4)$$

با استفاده از لم ۱.۱ مشاهده می‌کنیم

$$|a_{\tau}| \leq \frac{|\tau| B_1}{h_{\tau}(1 + \lambda)}. \quad (20.4)$$

با جمع کردن (۱۵.۴) با (۱۷.۴) داریم

$$\frac{(1 + \tau \lambda)\tau a_{\tau}^{\tau} h_{\tau}^{\tau}}{\tau} = \left[\frac{1}{\tau} B_1 (b_{\tau} + c_{\tau}) - \frac{1}{\tau} B_1 (b_1^{\tau} + c_1^{\tau}) + \frac{1}{\tau} B_{\tau} (b_1^{\tau} + c_1^{\tau}) \right], \quad (21.4)$$

$$\frac{(1 + \tau \lambda)\tau a_{\tau}^{\tau} h_{\tau}^{\tau}}{\tau} = \frac{\tau B_1 (b_{\tau} + c_{\tau}) - B_1 (b_1^{\tau} + c_1^{\tau}) + B_{\tau} (b_1^{\tau} + c_1^{\tau})}{\tau},$$

$$a_{\tau}^{\tau} = \frac{\tau [\tau B_1 (b_{\tau} + c_{\tau}) - B_1 (b_1^{\tau} + c_1^{\tau}) + B_{\tau} (b_1^{\tau} + c_1^{\tau})]}{\lambda(1 + \tau \lambda)h_{\tau}^{\tau}},$$

چون $B_1 > 0$ ، $h_2 > 0$ ، $0 \leq \lambda \leq 1$ و با استفاده از لم ۱.۱ خواهیم داشت

$$|a_2|^2 \leq \frac{|\tau|(B_1 + |B_1 - B_2|)}{(1 + 2\lambda)h_2^2},$$

$$|a_2| \leq \frac{1}{h_2} \sqrt{\frac{|\tau|(B_1 + |B_1 - B_2|)}{(1 + 2\lambda)}}. \quad (22.4)$$

از سوی دیگر، با استفاده از (۱۹.۴) در (۲۱.۴) مشاهده خواهیم کرد

$$\frac{2(1 + 2\lambda)a_2^2 h_2^2}{\tau} = \left[\frac{1}{2} B_1 (b_2 + c_2) - \frac{2(B_1 - B_2)(1 + \lambda)^2 a_1^2 h_1^2}{\tau^2 B_1^2} \right], \quad (23.4)$$

زیرا

$$\begin{aligned} \frac{2(1 + 2\lambda)a_2^2 h_2^2}{\tau} &= \left[\frac{1}{2} B_1 (b_2 + c_2) - \frac{(B_1 - B_2)(b_1^2 + c_1^2)}{4} \right] \\ &= \left[\frac{1}{2} B_1 (b_2 + c_2) - \frac{(B_1 - B_2)B_1^2 (b_1^2 + c_1^2)}{4B_1^2} \right] \\ &= \left[\frac{1}{2} B_1 (b_2 + c_2) - \frac{2(B_1 - B_2)(1 + \lambda)^2 a_1^2 h_1^2}{\tau^2 B_1^2} \right]. \end{aligned}$$

همچنین داریم

$$\frac{2a_2^2 h_2^2}{\tau^2 B_1^2} ((B_1 - B_2)(1 + \lambda)^2 + \tau B_1^2 (1 + 2\lambda)) = \frac{1}{2} B_1 (b_2 + c_2), \quad (24.4)$$

پس

$$a_2^2 = \frac{\tau^2 B_1^2 (b_2 + c_2)}{4h_2^2 ((B_1 - B_2)(1 + \lambda)^2 + \tau B_1^2 (1 + 2\lambda))}.$$

یکبار دیگر با به‌کاربردن لم ۱.۱ خواهیم داشت

$$|a_2|^2 \leq \frac{4\tau^2 B_1^2}{4h_2^2 |(B_1 - B_2)(1 + \lambda)^2 + \tau B_1^2 (1 + 2\lambda)|},$$

$$|a_2| \leq \frac{|\tau| B_1 \sqrt{B_1}}{h_2 \sqrt{|(B_1 - B_2)(1 + \lambda)^2 + \tau B_1^2 (1 + 2\lambda)|}}. \quad (25.4)$$

به‌طور مشابه با کم کردن (۱۷.۴) از (۱۵.۴) و استفاده از (۱۸.۴) داریم

$$\frac{2(1 + 2\lambda)a_3 h_3}{\tau} - \frac{2(1 + 2\lambda)a_2^2 h_2^2}{\tau} = \frac{1}{2} B_1 (c_2 - b_2). \quad (26.4)$$

زیرا

$$\begin{aligned} &\frac{(1 + 2\lambda)a_3 h_3}{\tau} - \frac{(1 + 2\lambda)(2a_2^2 h_2^2 - a_3 h_3)}{\tau} \\ &= \left[\frac{1}{2} B_1 \left(c_2 - \frac{c_1^2}{2} \right) + \frac{1}{4} B_2 c_1^2 - \frac{1}{2} B_1 \left(b_2 - \frac{b_1^2}{2} \right) + \frac{1}{4} B_2 b_1^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} B_1 (c_2 - b_2), \end{aligned}$$

$$\frac{(\lambda + 2\lambda)a_3h_3 - 2(\lambda + 2\lambda)a_1^2h_1^2 + (\lambda + 2\lambda)a_3h_3}{\tau} = \frac{1}{4}B_1(c_2 - b_2),$$

$$\frac{2(\lambda + 2\lambda)a_3h_3 - 2(\lambda + 2\lambda)a_1^2h_1^2}{\tau} = \frac{1}{4}B_1(c_2 - b_2).$$

حال اگر از (۱۹.۴) در (۲۶.۴) استفاده کنیم، خواهیم داشت

$$\frac{2(\lambda + 2\lambda)a_3h_3}{\tau} = \frac{\tau B_1^2(\lambda + 2\lambda)(c_1^2 + b_1^2)}{4(\lambda + \lambda)^2} + \frac{1}{4}B_1(c_2 - b_2). \quad (27.4)$$

در نتیجه

$$a_3 = \frac{\tau^2 B_1^2(\lambda + 2\lambda)(c_1^2 + b_1^2)}{\lambda(\lambda + \lambda)^2(\lambda + 2\lambda)h_3} + \frac{\tau B_1(c_2 - b_2)}{4(\lambda + 2\lambda)h_3},$$

با استفاده از لم ۱.۱ داریم

$$|a_3| \leq \frac{|\tau|^2 |B_1^2|}{h_3(\lambda + \lambda)^2} + \frac{|\tau| |B_1|}{h_3(\lambda + 2\lambda)}. \quad (28.4)$$

اگر از (۲۱.۴) در (۲۶.۴) استفاده کنیم، داریم

$$\frac{2(\lambda + 2\lambda)a_3h_3}{\tau} = \left[\frac{1}{4}B_1(c_2 + c_2) - \frac{1}{4}B_1(b_1^2 + c_1^2) + \frac{1}{4}B_2(b_1^2 + c_1^2) \right], \quad (29.4)$$

$$a_3 = \frac{\tau (2B_1(c_2 + c_2) - B_1(b_1^2 + c_1^2) + B_2(b_1^2 + c_1^2))}{\lambda(\lambda + 2\lambda)h_3}.$$

چون $0 < B_1$ ، $h_3 > 0$ و $0 \leq \lambda \leq 1$ با استفاده از لم ۱.۱ داریم

$$|a_3| \leq \frac{|\tau|(B_1 + |B_1 - B_2|)}{h_3(\lambda + 2\lambda)}. \quad (30.4)$$

□

۳.۴ نتیجه‌گیری

اگر در قضیه ۱.۴ قرار دهیم $\tau = 1$ و

$$\varphi = \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^\alpha = 1 + 2\alpha z + 2\alpha^2 z^2 + \dots \quad (0 < \alpha \leq 1),$$

نتیجه‌ی زیر حاصل می‌شود که بهبودی از قضیه ۱.۲ است.

نتیجه ۱.۴. فرض کنید $f(z) \in B_\Sigma(h, \alpha, \lambda)$ به صورت (۱.۲) باشد. در این صورت

$$|a_2| \leq \min \left[\frac{2\alpha}{h_2(\lambda + \lambda)}, \frac{1}{h_2} \sqrt{\frac{4\alpha - 2\alpha^2}{(\lambda + 2\lambda)}}, \frac{2\alpha}{h_2 \sqrt{(\lambda + \lambda)^2 + \alpha(\lambda + 2\lambda - \lambda^2)}} \right], \quad (31.4)$$

$$|a_3| \leq \min \left[\frac{4\alpha - 2\alpha^2}{h_3(\lambda + 2\lambda)}, \frac{4\alpha^2}{h_3(\lambda + \lambda)^2} + \frac{2\alpha}{h_3(\lambda + 2\lambda)} \right]. \quad (32.4)$$

اگر در قضیه‌ی ۱.۴ قرار دهیم $\tau = ۱$ و

$$\varphi = \frac{۱ + (۱ - ۲\beta)z}{۱ - z} = ۱ + ۲(۱ - \beta)z + ۲(۱ - \beta)z^۲ + \dots \quad (0 \leq \beta < ۱),$$

نتیجه‌ی زیر حاصل می‌شود که بهبودی از قضیه‌ی ۲.۲ است.

نتیجه ۲.۴. فرض کنید $f(z) \in \mathcal{B}_\Sigma(h, \beta, \lambda)$ به صورت (۱.۲) باشد. در این صورت

$$|a_۲| \leq \min \left[\frac{۲(۱ - \beta)}{h_۲(۱ + \lambda)}, \frac{۱}{h_۲} \sqrt{\frac{۲(۱ - \beta)}{(۱ + ۲\lambda)}} \right], \quad (۳۳.۴)$$

$$|a_۳| \leq \min \left[\frac{۲(۱ - \beta)}{h_۳(۱ + ۲\lambda)}, \frac{۴(۱ - \beta)^۲}{h_۳(۱ + \lambda)^۲} + \frac{۲(۱ - \beta)}{h_۳(۱ + ۲\lambda)} \right]. \quad (۳۴.۴)$$

مراجع

- [1] R. M. Ali, S. K. Lee, V. Ravichandran, and S. Supramaniam, "Coefficient estimates for bi-univalent Ma-Minda starlike and convex functions," *Applied Mathematics Letters*, vol. 25, no. 3, pp. 344-351, (2012).
- [2] D. A. Brannan, J. G. Clunie (Eds.), *Aspects of Contemporary Complex Analysis* (Proceedings of the NATO Advanced Study Institute held at the University of Durham, Durham; July 1-20, (1979)), Academic Press, New York and London, (1980).
- [3] D. A. Brannan, J. Clunie, W. E. Kirwan, Coefficient estimates for a class of starlike functions, *Can. J. Math.* 22 (1970) 476-485.
- [4] D. A. Brannan, T.S. Taha, on some classes of bi-univalent functions, in: S.M. Mazhar, A. Hamoui, N.S. Faour (Eds.), *Mathematical Analysis and Its Applications*, Kuwait, February 18-21, (1985).;
D.A. Brannan, T.S. Taha, On some classes of bi-univalent functions, *KFAS Proceedings Series*, vol. 3, Pergamon Press (Elsevier Science Limited), Oxford, (1988), pp. 53-60;
D.A. Brannan, T. S. Taha, *Studia Univ. Babes-Bolyai Math.* 31 (2) (1986) 70-77 (see also).
- [5] D. A. Brannan and T. S. Taha, "On some classes of bi-univalent functions," *Studia Universitatis Babes-Bolyai Mathematica*, vol. 31, no. 2, pp. 70-77, (1986).
- [6] A. Catas, G.I. Oros, G. Oros, Differential subordinations associated with multiplier transformations, *Abstr. Appl. Anal.* (2008), ID 845724: 1-11.
- [7] M. Chen, On the regular functions satisfying $Re(f(z)/z) > \alpha$, *Bull. Inst. Math. Acad. Sinica* 3 (1975) 65-70.
- [8] P. N. Chichra, New subclasses of the class of close-to-convex functions. *Proc. Am. Math. Soc.* (62) (1977) 37-43.

- [9] E. Deniz, "Certain subclasses of bi-univalent functions satisfying subordinate conditions," *Journal of Classical Analysis*, vol. 2, no. 1, pp. 49-60, (2013).
- [10] L. De Branges, A proof of the Bieberbach conjecture, *Acta Math.* 154 (1985) 137-152.
- [11] S. S. Ding, Y . Ling, G.J. Bao Some properties of a class of analytic functions, *J. Math. Anal. Apple.* 195 (1) (1995) 71-81.
- [12] P. L. Duren, *Univalent Functions*, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo, (1938).
- [13] J. Dziok, H.M. Srivastava, Classes of analytic functions associated with the generalized hypergeometric function, *Appl. Math. comput.* 103 (1999) 1-13.
- [14] B. A. Frasin, M.K. Aouf, New subclasses of bi-univalent functions. *Appl. Math. Lett.* 24 (9) (2011) 1569-1573.
- [15] T. Hayami and S. Owa, Coefficient bounds for bi-univalent functions, *Pan Amer. Math. J.* 22 (4) (2012), 15-26.
- [16] Y. E. Khokhlov, "Convolution operators that preserve univalent functions," *Ukrainski Matematicheski Zhurnal*, vol. 37, no. 2, pp. 220-226, (1985).
- [17] Y. E. Khokhlov, "Hadamard convolutions, hypergeometric functions and linear operators in the class of univalent functions," *Doklady Akademiyi Nauk Ukrainskoi SSR. A. Fiziko Matematicheskie i Tekhnicheskie Nauki*, no. 7, pp. 25-27, (1984).
- [18] W. E. Kirwan, G. Schober, Inverse coefficients for functions of bounded boundary rotation, *J. Anal. Math.* 36 (1979) 167-178.
- [19] J. G. Krzyz, R.J. Libera, E. J. Zotkiewicz, Coefficients of inverses of regular starlike functions, *Ann. Univ. Mariae Curie of regular starlike functions*, *Ann. Univ. Mariae Curie Sklodowska Sect. A* 33 (1979) 103-110.
- [20] M. Lewin, On a coefficient problem for bi-univalent functions, *Proc. Amer. Math. Soc.* 18 (1967) 63-68.
- [21] X.-F. Li and A.-P. Wang, Two new subclasses of bi-univalent functions, *Internat. Math. Forum* 7 (2012), 1495-1504.
- [22] K. Lowner, Untersuchungen uber schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises, *Math. Ann.* 89 (1923) 103-121.
- [23] T. H. Mac Gregor, Functions whose derivative has a positive real part, *Trans. Am. Math. Soc.* (1962) 532-537.

- [24] W. C. Ma and D. Minda, "A unified treatment of some special classes of functions," in Proceedings of the Conference on Complex Analysis, Tianjin, (1992), 157-169, vol. 1 of Conference Proceedings and Lecture Notes in Analysis, International Press, Cambridge, Mass, USA, (1994).
- [25] E. Netanyahu, The minimal distance of the image boundary from the origin and the second coefficient of a univalent function in $|z| < 1$, Arch. Rational Mech. Anal. 32 (1969) 100-112.
- [26] T. Panigrahi and G. Murugusundaramoorthy, "Coefficient bounds for bi-univalent analytic functions associated with Hohlov operator," Proceedings of the Jangjeon Mathematical Society, vol. 16, no. 1, pp. 91-100, (2013).
- [27] Z. Peng and Q. Han, "On the coefficients of several classes of bi-univalent functions," Acta Mathematica Scientia B, vol. 34, no. 1, pp. 228-240, (2014).
- [28] C. Pommerenke, Univalent Functions (with a Chapter on Quadratic Differentials by Gerd Jensen), Vandenhoeck and Ruprecht, Gottingen, (1975).
- [29] G. S. Salagean, Subclasses of univalent functions, in: Complex Analysis - Fifth Romanian Finish Seminar, Bucharest, vol. 1, (1983), pp. 362-372.
- [30] G. Schober, Coefficient estimates for inverses of schlicht functions, aspects of contemporary complex analysis, in: proceedings of the NATO Advanced Study Institute (University of Durham, Durham (1979)) Academic Press, New York and London, (1980), pp. 503-513.
- [31] H. Silverman, Complex variables with application. Houghton Mifflinco., Boston. (1975), 270-300.
- [32] H. M. Srivastava, A.k. Mishra, P. Gochhayat, Certain subclasses of analytic and bi-univalent functions. Appl. Math. Lett. 23 (2010) 1188-1192.
- [33] H. M. Srivastava, G. Murugusundaramoorthy, and N. Magesh, "Certain subclasses of bi-univalent functions associated with the Hohlov operator," Global Journal of Mathematical Analysis, vol. 1, no. 2, pp. 67-73, (2013).
- [34] D. Styer, J. Wright, Result on bi-univalent functions, Proc. Amer. Math. Soc. 82 (1981) 243-248.
- [35] T. S. Taha, Topics in Univalent Function Theory, Ph.D. Thesis, University of London, (1981).
- [36] D. -L. Tan, coefficient estimates for bi-univalent functions, Chinese Ann. Math. Ser. A 5 (1984) 559-568.

-
- [37] N. Tuneski, Some simple sufficient conditions for starlikeness and convexity, Appl. Math. Lett. 22 (2009) 693-697.
 - [38] Q. -H. Xu, Y.-C. Gui, H.M. Srivastava, Coefficient estimates for a certain subclass of analytic and bi-univalent functions, Appl. Math. Lett. 25 (6) (2012) 990-994.
 - [39] Q. -H Xu, H.-G. Xiao, H.M. Srivastava, A certain general subclass of analytic and bi-univalent functions and associated coefficient estimate problems, Appl. Math. comput. 218 (23) (2012) 11461-11465.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Strongly	به‌طور قوی
Expansion	بسط
Function	تابع
Koebe function	تابع کوئب
Analytic	تحلیلی
Estimate	تخمین
Univalent	تک‌ارز
Convolution	تلفیق
Conjecture	حدس
Real	حقیقی
Sharp	دقیق
Bi-univalent	دوطرف-تک‌ارز
Class	رده
Subordinate	زیرترتیبی
Subclass	زیررده
Starlike	ستاره‌گون
Radius	شعاع
Coefficient	ضریب
Operator	عملگر
Hypergeometric	فوق هندسی
Bound	کران
Extension	گسترش
Origin	مبدا
Operator	عملگر
Convex	محدب

Complex	مختلط
Derivative.....	مشتق
Inverse	معکوس
Field	میدان
Map.....	نگاشت

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Analytic	تحلیلی
Bi-univalent	دوطرف-تک‌ارز
Bound	کران
Class	رده
Coefficient	ضریب
Complex	مختلط
Conjecture	حدس
Convex	محدب
Convolution	تلفیق
Derivative	مشتق
Estimate	تخمین
Expansion	بسط
Extension	گسترش
Field	میدان
Function	تابع
Hadamard product	ضرب هادامارد
Harmonic	همساز
Hypergeometric	فوق هندسی
Inverse	معکوس
Koebe function	تابع کوئب
Map	نگاشت
Operator	عملگر
Origin	مبدا
Radius	شعاع
Real	حقیقی

Sharp	دقیق
Strongly	به‌طور قوی
Starlike	ستاره‌گون
Subclass	زیررده
Subordinate	زیرترتیبی
Univalent	تک‌ارز

Aabstract

The interest in finding estimates on the Taylor-Maclaurin coefficients $|a_2|$ and $|a_3|$ for analytic and bi-univalent functions in the function class Σ , caused that many mathematicians are active in this field. They couldn't find sharp estimates yet, but their aim are to improve these bounds.

In this thesis, we introduce several subclasses of the function class Σ of bi-univalent functions analytic in the open unit disc. Furthermore, we find estimates on the coefficients $|a_2|$ and $|a_3|$ for functions in these new subclasses.

Keywords: analytic function, univalent, bi-univalent, class, subclass, subordinate



Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

**Coefficient estimates for some subclasses of
analytic and bi-univalent functions**

Sima Zaker

Supervisor

Dr. Ahmad Zireh

February 2016