
supports package The Description: XeTeX) over LaTeX for (Persian package xepersian
Vafa 2008–2012 © Copyright distribution. the in provided fonts using typesetting, Persian
higher or 1.3c version License, Public Project LaTeX License: 2012/01/01 v1.3.2, Khalighi



دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان نامه کارشناسی ارشد

فرایندهای نقطه‌ای مدرن

اراز محمد ارازی

استاد راهنما

دکتر الهام دسترنج

بهمن ۱۳۹۴

تقدیم ہے

پدر و مادر بزرگوارم

و

ہمسفر مہربانم

سپاس‌گزاری...

سپاس بی‌کران پروردگار یکتا را که هستی مان بخشید و به طریق علم و دانش رهنمونمان شد و به همنشینی رهروان علم و دانش مفتخرمان نمود و خوشه‌چینی از علم و معرفت را روزیمان ساخت. تشکرو سپاس از استاد دانشمند و پرمایه‌ام سرکار خانم دکتر الهام دسترنج که از محضر پرفیض راهنمایی ایشان در پایان نامه بهره‌برده‌ام. با سپاس بی‌کران از مساعدت‌های بی‌شائبه‌ی جناب آقای دکتر ابراهیم هاشمی ریاست محترم دانشکده ریاضی با تقدیر و درود فراوان خدمت پدر و مادر و همسر عزیز و فداکارم که پیوسته جرعه‌نوش جام‌تعلیم و تربیت فضیلت و انسانیت آنها بوده‌ام و همواره چراغ وجودشان روشنگر راه من در سختیها و مشکلات بوده‌است. با سپاس بی‌دریغ از زن‌داداش و خواهرانم خانم‌ها ساری‌قیز، جهان‌گل و شهناز ارازی و سحر بهمنی و آقایان قاسم، ابراهیم و عبدالله ارازی که مرا صمیمانه یاری داده‌اند به مصداق « من لم یشکرالمخلوق لم یشکرالخالق » بسی شایسته‌است. در انتها از لطف آقای دکتر احمد زیره و سرکار خانم دکتر نگار اقبال استادان دانشگاه صنعتی شاهرود که زحمت داوری این پایان‌نامه را برعهده داشته‌اند و از آقای دکتر سید حیدر جعفری نماینده تحصیلات تکمیلی نهایت سپاس‌گذاری را دارم.

اراز محمد ارازی

بهمن ۱۳۹۴

تعمیر نامه

اینجانب اراز محمد ارازی دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض دانشکده علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان **فرایندهای نقطه‌ای مدرن**، تحت راهنمایی دکتر الهام دسترنج متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “دانشگاه صنعتی شاهرود” یا “Shahrood University Of Technology” به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

اراز محمد ارازی

بهمن ۱۳۹۴

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

برای مدلسازی احتمالاتی الگوهای نقطه‌ای و استنباط آماری در مورد پدیده‌های مورد بررسی، لازم است الگوهای نقطه‌ای تحقیقی از یک عنصر تصادفی تلقی شوند و برای این عنصر تصادفی خانواده‌ای معقول از توزیع‌های ممکن در نظر گرفته شود، سپس بر اساس داده‌ها و مدل آماری مفروض استنباط آماری راجع به پدیده مورد بررسی را پیش برد. فرایندهای نقطه‌ای فضایی برای مدلسازی الگوهای نقطه‌ای فضایی استفاده می‌شوند. در این پایان‌نامه، به بحث در مورد رویکردی از نظریه فرایند نقطه‌ای مدرن می‌پردازیم که هدف از آن معرفی کلی موضوعاتی است که در مدلسازی فضایی نقش عمده ای ایفا می‌کنند. در مورد فرایندهای نقطه‌ای مدرن، فرایند کاکس معرفی و تمامی مفاهیم لازم در این زمینه و تمایز آن با فرایند پواسون بیان شده و در نهایت به بیان دو نمونه از فرایندهای کاکس با عنوان فرایند لگ گاوسی و نوفه شلیک پرداخته می‌شود. در ادامه فرایندهای تجمعی، دافعی و پواسون نشاندار تعریف و خواص آنها ذکر می‌گردد. سپس یک مشخصه اساسی برای فرایندهای نقطه‌ای با عنوان شدت شرطی پاپانگلو تعریف و در نهایت شبیه‌سازی، و روش‌های مدلسازی فرایند کاکس لگ گاوسی ارائه می‌شود.

کلمات کلیدی: فرایند نقطه‌ای، فرایند پواسون، فرایند کاکس، ، شدت شرطی پاپانگلو

فهرست مطالب

۱	مفاهیم مقدماتی	۱
۱ مقدمه	۱.۱
۱ اندازه ها	۲.۱
۳ فرایندهای تصادفی	۳.۱
۴ دسته بندی فرایندهای تصادفی	۱.۳.۱
۵ فرایندهای نقطه‌ای	۲.۳.۱
۵ مروری بر فرایند نقطه‌ای یک بعدی و فضایی	۳.۳.۱
۸ فضای برآمدها	۴.۱
۱۰ مشخص سازی توزیع فرایند نقطه‌ای	۱.۴.۱
۱۲ الگوهای نقطه ای	۲.۴.۱
۱۲ فرایند پواسون	۳.۴.۱
۱۸ فرایند نقطه ای نشاندار	۴.۴.۱
۲۱	کاربردهای فرایندهای نقطه ای	۲
۲۱ مقدمه	۱.۲
۲۱ شدت	۲.۲
۲۴ شدت برای فرایند نقطه ای نشاندار	۳.۲
۲۷ اندازه های گشتاور دوم	۴.۲
۲۸ توزیع پالم از فرایند نقطه ای	۱.۴.۲
۳۰ نزدیکترین تابع همسایگی	۲.۴.۲
۳۳	معرفی فرایندهای نقطه ای فضایی مدرن	۳
۳۳ مقدمه	۱.۳
۳۴ فرایندهای کاکس فضایی	۲.۳
۳۷ فرایند کاکس لگ-گاوسی	۱.۲.۳
۳۸ فرایند کاکس نوفه شلیک	۲.۲.۳

۳۹	فرایند نقطه ای تجمعی، دافعی و نشان دار	۳.۳
۳۹	فرایندهای تجمعی	۱.۳.۳
۴۱	فرایندهای دافعی	۴.۳
۴۲	شدت شرطی پاپانگلو	۱.۴.۳
۴۵	فرایند پواسون نشان دار	۲.۴.۳
۴۹		شبیه سازی و روش های بیزی	۴
۴۹	مقدمه	۱.۴
۴۹	شبیه سازی سریع برای فرایند کاکس لگ-گوسی	۲.۴
۵۵	مدلسازی بیزی از فرایند کاکس لگ-گوسی	۳.۴
۵۷	تحلیل بیزی فرایند خوشه ای و الگوریتم فرایند مرگ و تولد فضایی	۴.۴
۵۹	الگوریتم مرگ و تولد فضایی	۱.۴.۴
۶۳		مراجع	
۶۵		واژه‌نامه فارسی به انگلیسی	
۶۹		واژه‌نامه انگلیسی به فارسی	

نمادها

(Ω, \mathcal{F}, P)	فضای احتمال پایه
W	فضای مشاهده کراندار
S	فضای مورد بررسی
\mathbb{R}^d	فضای اقلیدسی d -بعدی
ξ, η	زیرمجموعه های S
x, y	الگوی های نقطه ای در S
X, Y	فرایندهای نقطه ای در S
x_B	تحدید الگوی نقطه ای x به مجموعه B
X_B	تحدید فرایند نقطه ای X به مجموعه B
B	σ -میدان بورل روی S
B_0	خانواده همه مجموعه های بورل کراندار S
\mathbb{N}	مجموعه اعداد طبیعی
\mathbb{N}_0	مجموعه اعداد طبیعی و صفر
λ^*	شدت شرطی پاپانگلو
$N(\cdot)$	تابع شمارش X
$Poisson(S, \rho)$	فرایند نقطه ای پواسون با شدت ρ روی S
f	تابع چگالی
Z	شدت
μ	اندازه شدت
$binomial(B, n, f)$	فرایند نقطه ای دو جمله ای از n نقطه در B با تابع چگالی f
$(\mathbf{N}, \mathcal{N})$	فضای برآمد
N_{if}	پیکربندی نقاط موضعا متناهی
$C(s, t)$	تابع همبستگی فرایند
c	تابع افراز
h	تابع تقابل

فصل ۱

مفاهیم مقدماتی

۱.۱ مقدمه

فرایندهای نقطه‌ای مطالعات مفیدی از موضوعات احتمالاتی در نظریه احتمال است و موضوع و ابزار نیرومندی در آمار برای مدل بندی و آنالیز داده‌های فضایی است و کاربردهای متفاوتی دارد مانند احداث جنگل‌ها، اکولوژی گیاهان، اپیدمیولوژی، جغرافیا، اقتصاد و غیره.

در بخش‌های ابتدایی این فصل ابتدا به بیان نظریه اندازه و فرایندهای تصادفی می‌پردازیم. سپس فرایند نقطه‌ای را به طور شهودی بیان می‌کنیم.

۲.۱ اندازه‌ها

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید X یک مجموعه ناتهی و A گردایه‌ای ناتهی از زیرمجموعه‌های

X باشد، A را یک جبر روی X گویند هرگاه

$E_1, E_2, \dots, E_n \in A$ آنگاه $\bigcup_{i=1}^n E_i \in A$ ؛

(ii) $E \in A$ آنگاه $E^c \in A$.

A را یک σ -جبر گویند، هرگاه $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ دنباله‌ای شمارا از اعضای A باشد در این صورت

$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in A$ با توجه به اینکه $\bigcap_i E_i = (\bigcup_i E_i^c)^c$ نتیجه می‌شود که جبرها (σ -جبرها) نسبت به اشتراک‌های متناهی بسته‌اند.

تعریف ۲.۲.۱. اگر X یک فضای متری و یا در حالت کلی یک فضای توپولوژیکی باشد، آنگاه σ -جبر تولید شده توسط گردایه تمام زیرمجموعه‌های باز X را σ -جبر بورل روی X گویند و آن را با نماد B_X نمایش داده و اعضای B_X را مجموعه‌های بورل گویند. لذا تمامی مجموعه‌های باز، مجموعه‌های بسته، اشتراک شمارا از مجموعه‌های باز و اجتماع شمارا از مجموعه‌های بسته همگی مجموعه‌های بورل هستند.

تعریف ۳.۲.۱. اگر X یک مجموعه ناتهی و M ، σ -جبری از زیرمجموعه‌های X باشد، در این صورت (X, M) را یک فضای اندازه‌پذیر گوئیم. یک اندازه روی (X, M) تابعی است مانند $\mu : M \rightarrow [0, \infty)$ بطوری‌که دارای خواص زیر باشد:

$$\mu(\phi) = 0 \quad (i)$$

(ii) اگر $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک دنباله مجزا از اعضای M باشد آنگاه

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n);$$

خاصیت فوق را خاصیت شمارا جمعی μ گویند به طوریکه خاصیت سوم نیز یکی از نتایج آن به شمار می‌رود؛

(iii) اگر در خاصیت دوم برای $k > n$ قرار دهیم $E_k = \phi$ در این صورت خاصیت

متناهی جمعی زیر حاصل می گردد

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^n E_n\right) = \sum_{n=1}^n \mu(E_n).$$

اگر μ یک اندازه روی (X, M) باشد آنگاه (X, M, μ) را یک فضای اندازه گوئیم.

اگر (X, M, μ) یک فضای اندازه و $\mu(X) < \infty$ ، آنگاه μ را یک فضای متناهی

گوئیم در این صورت برای هر $E \in M$ نیز همواره $\mu(E) < \infty$.

تعریف ۴.۲.۱. اگر دنباله ای مانند $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ موجود باشد به طوری که برای هر n

همواره $E_n \in M$ ، همچنین $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ و $\mu(E_n) < \infty$ باشد، در این صورت

μ را اندازه σ -متناهی گویند. به علاوه اگر به ازای هر $E \in M$ همواره $\mu(E) = \infty$

و مجموعه $F \subseteq E$ موجود باشد به طوری که $F \in M$ و $0 < \mu(F) < \infty$ آنگاه μ را

اندازه نیمه متناهی می نامند. هر اندازه σ -متناهی، نیمه متناهی است.

مثال ۵.۲.۱. فرض کنید X یک مجموعه ناتهی، M مجموعه توانی از X باشد. E

را عضوی از M در نظر گرفته و f را تابعی از X به توی $(0, \infty]$ قرار دهید. در این

صورت μ که به صورت زیر تعریف شده است یک اندازه روی M است.

$$\mu(E) = \begin{cases} 0 & \text{if } E = \phi \\ \sum_{x \in E} f(x) & \text{if } E \neq \phi \end{cases}$$

۳.۱ فرایندهای تصادفی

فرض کنید T مجموعه ای دلخواه و به ازای هر $X_t, t \in T$ یک متغیر تصادفی باشد.

فرض کنید $E \subset R$ مجموعه ثابتی باشد و مقادیر متغیرهای تصادفی X_t در داخل این

مجموعه است، در این صورت تعریف زیر را خواهیم داشت:

تعریف ۱.۳.۱. دسته‌ی $\{X_t\}$ از متغیرهای تصادفی را یک فرایند تصادفی گوئیم اگر T مجموعه‌ای شمارا باشد، فرایند را گسسته و در غیراینصورت پیوسته می‌گوئیم.

تعریف ۱.۳.۱ (i). در فرایند تصادفی $\{X_t : t \geq 0\}$ تفاضل $X_t - X_s$ ، $t > s$ را نمو فرایند در فاصله (s, t) نامند.

(ii) فرایند تصادفی $\{X_t : t \geq 0\}$ را با نمو مانا گوئیم هرگاه به ازای هر $s < t$ ، توزیع نمو $X_t - X_s$ فقط به تفاضل s, t بستگی داشته باشد. یعنی نمو‌های فرایند در فاصله با طول‌های برابر از نظر احتمالاتی دارای یک ساختار باشند. لذا در این گونه فرایندهای تصادفی مبدا زمان تاثیر ندارد.

(iii) فرایند تصادفی $\{X_t : t \geq 0\}$ را ایستا (پایا) گوئیم هرگاه به ازای هر $n \geq 1$ و هر t_1, t_2, \dots, t_n و هر $h \geq 0$ توزیع توام

$$X_{t_1}, \dots, X_{t_n}$$

همان توزیع توام متغیرهای تصادفی $X_{t_1+h}, \dots, X_{t_n+h}$ باشند.

۱.۳.۱ دسته بندی فرایندهای تصادفی

تعریف ۱.۳.۱. فرایند تصادفی $\{X_t : t \geq 0\}$ ، دارای نمو‌های مستقل است هرگاه مقدارش در هر لحظه و کلیه نمو‌هایش در فاصله زمانی بدون اشتراک، تواما مستقل باشند، به عبارت دیگر به ازای هر n و هر $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$ ، نمو‌های

$$X_0, X_{t_1} - X_0, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

به عنوان متغیرهای تصادفی مستقل باشند.

تعریف ۱.۳.۱. به فرایندهای تصادفی که با اطلاع از وضعیت کنونی، وضعیت‌های

گذشته آنها اثری بر احتمال‌های شرطی پیشامدهایی که در آینده رخ می‌دهند، ندارد را فرایند مارکف گویند. به عبارتی هرگاه $t_1 < t_2 < \dots < t_n < t$

$$\begin{aligned} P(a < X_t \leq b \mid X_{t_1} = x_1, X_{t_2} = x_2, \dots, X_{t_n} = x_n) \\ = P(a < X_t \leq b \mid X_{t_n} = x_n) \end{aligned}$$

تعریف ۵.۳.۱. فرایند تصادفی که مقدار امید ریاضی آن در هر لحظه مشروط به معلوم بودن مقدارش در چند لحظه قبل، همان آخرین مقدار معلوم فرایند باشد را فرایند مارتینگل گویند، به عبارتی برای هر $t_{n+1} \geq t_n \geq \dots \geq t_1$

$$\mathbb{E}[X_{t_{n+1}} \mid X_{t_1} = x_1, X_{t_2} = x_2, \dots, X_{t_n} = x_n] = x_n$$

۲.۳.۱ فرایندهای نقطه‌ای

هدف عمده فرایندهای نقطه‌ای، مطالعه و تحلیل ساختار الگوهایی است که پدیده‌های تصادفی در فضای چند بعدی به وجود می‌آورند. به عنوان مثالهایی دیگر از این ساختار می‌توان به موقعیت درختان در یک جنگل، مکان چاه‌های نفت، موقعیت ناقلین یک بیماری در یک شهر، موقعیت کهکشان‌ها در جهان هستی و غیره اشاره نمود. درختان، چاه‌های نفت، بیماران و کهکشان‌ها در این مثال همان پدیده‌هایی هستند که مدل بندی الگوی حاصل از توزیع تصادفی آنها مورد نظر است.

۳.۳.۱ مروری بر فرایند نقطه‌ای یک بعدی و فضایی

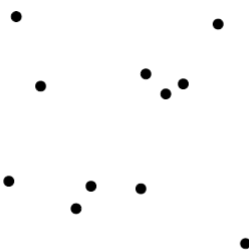
فرایند نقطه‌ای در یک بعد (مانند زمان) مدل مفیدی برای دنباله‌ای از زمانهای تصادفی برای وقوع یک وضعیت خاص می‌باشد. برای نمونه زمان‌های تصادفی دریافت

تماس‌های ضروری در یک بیمارستان را می‌توان به صورت فرایند نقطه‌ای مدلسازی نمود. هر تماس ضروری را می‌توان به عنوان یک نقطه از زمان در نظر گرفت به طوریکه تعداد تصادفی از چنین تماس‌هایی در هر دوره زمانی وجود دارد.



شکل ۱. فرایند نقطه‌ای در زمان

فرایند نقطه فضایی نیز یک مدل مفید برای الگوی تصادفی از نقاط در فضای d -بعدی برای $d \geq 2$ می‌باشد. در مورد وضعیت اخیر، اگر یک نقشه از محل افرادی که تماس ضروری به بیمارستان داشته‌اند را در طول روز تشکیل دهیم، این نقشه یک الگو از نقاط تصادفی در دو بعد می‌باشد.



شکل ۲. فرایند نقطه‌ای در دو بعد

برخی تفاوتها بین تئوری فرایندهای نقطه‌ای یک بعدی و بعدهای بالاتر وجود دارد. این تفاوت به خاطر ترتیب طبیعی زمان در حالت یک بعدی است که در ابعاد بالاتر وجود ندارد.

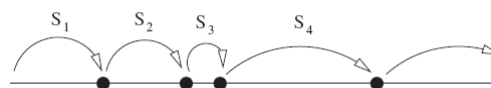
فرایند نقطه‌ای یک بعدی را می‌توان از منظر ریاضی جهت دستیابی به الگوی مورد نظر به روشهای متفاوت بررسی نمود. در روش اول می‌توان زمان‌های ورود $T_1 < T_2 < \dots$ را مورد مطالعه قرار داد که در آن T_i بیانگر رسیدن زمان i امین نقطه می‌باشد. استفاده از این متغیرهای تصادفی کوتاهترین راه برای نیل به الگوی نقطه‌ای

است. اما با توجه به اینکه $T_i < T_{i+1}$ ، لذا وابستگی این متغیرها سبب ایجاد برخی پیچیدگیها در طراحی الگو می گردد.



شکل ۳. زمانهای ورود

در روش دیگر، می توان مطالعه خود را به فواصل بین زمانهای دو ورود متوالی یعنی $S_i = T_{i+1} - T_i$ معطوف نمود. از مزایای این روش در برخی مدلها ویژه از قبیل فرایندهای پواسون و تکراری، می توان به استقلال متغیرهای S_1, S_2, \dots اشاره نمود.

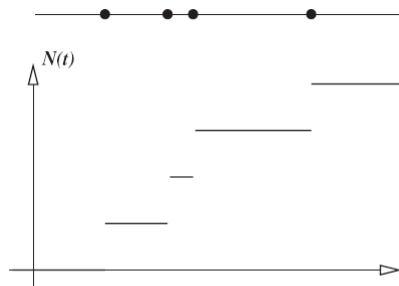


شکل ۴. زمانهای بین دو ورود متوالی

روش بعدی که در نظریه مارتینگل برای فرمولبندی فرایند نقطه ای نقش اساسی دارد، بر مبنای فرایند شمارشی تجمعی می باشد که در آن N_t تعداد نقاط تا زمان ورود به زمان t را بیان می دارد، به عبارت دیگر برای هر $t \geq 0$ ،

$$N_t = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{1}\{T_i \leq t\}$$

که در آن $\mathbb{1}\{\dots\}$ بیانگر تابع شاخص می باشد که اگر گزاره \dots همواره برقرار باشد مقدار تابع برابر یک و در غیر اینصورت برابر صفر خواهد بود.

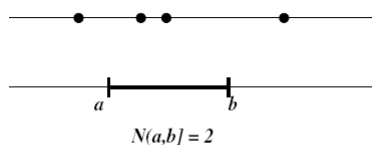


شکل ۵. فرایند شمارشی N_t متناظر با فرایند نقطه ای

روش بعدی که بر اساس شمارش بازه ای طرح ریزی می گردد، به طوریکه برای هر $0 \leq a \leq b$ تعداد نقاط ورود در بازه $(a, b]$ شمرده می شود بصورت زیر است.

$$N(a, b] = N_b - N_a$$

در این روش برای برخی فرایندهای ویژه از قبیل فرایند پواسون و نمو مستقل، شمارش بازه ای برای بازه های مجزا مستقل تصادفی هستند.



شکل ۶. تعداد بازه $N(a, b]$ برای فرایند نقطه ای

۴.۱ فضای برآمدها

فرایندهای نقطه ای به مدل بندی آن دسته از پدیده های تصادفی می پردازند که تحقق از یک بردار تصادفی نیستند، بلکه یک پیکربندی از نقاط در ناحیه معین از فضا هستند. برخی از ابزارهای آمار کلاسیک همچون روشهای نمونه گیری، تحلیل اکتشافی داده ها، برآورد پارامترها، برازش مدل، آزمون فرض ها و غیره در تحلیل فرایندهای نقطه ای همچنان کاربرد دارند.

مشابه هر پدیده تصادفی، فرایند نقطه ای را به زبان آماری با تعریف فضای برآمدهای ممکن و سپس فضای احتمال پیشامدهای مختلف می توان تعریف نمود. فضای وقوع یک فرایند نقطه ای در \mathbb{R}^d را N تعریف می نماییم که در واقع مجموعه همه اندازه های شمارا روی \mathbb{R}^d است. هر اندازه شمارا یک اندازه نامفی با مقادیر صحیح است که روی هر مجموعه فشرده مقدار متناهی دارد.

پیشامد اصلی درباره فرایند نقطه ای پیشامدی است که دقیقا k نقطه در ناحیه B وجود دارد. یعنی:

$$E_{B,k} = \{N(B) = k\} = \{N \in \mathcal{N} \mid N(B) = k\}$$

برای هر مجموعه فشرده $B \subset \mathbb{R}^d$ و هر عدد صحیح $k = 0, 1, 2, \dots$.

تعریف ۱.۴.۱. فرض کنید \mathbf{N} مجموعه همه اندازه های شمارا روی \mathbb{R}^d باشد. فرض کنید \mathcal{N} نیز σ -میدانی از زیرمجموعه های \mathbf{N} که توسط پیشامدهایی به فرم $E_{B,k}$ تولید شده باشند. فضای \mathbf{N} مجهز به σ -میدان \mathcal{N} ، فضای برآمد برای یک فرایند نقطه ای در \mathbb{R}^d نامیده می شود.

لازم به ذکر است σ -میدان \mathcal{N} شامل پیشامدهائی به صورت زیر می باشد:

$$E_{B_1, k_1} \cap \dots \cap E_{B_m, k_m} = \{N \in \mathbf{N} : N(B_1) = k_1, \dots, N(B_m) = k_m\}$$

چنین میدانی همچنین شامل پیشامدی است که فرایند نقطه ای آن هیچ نقطه ای ندارد با مقدمه بالا می توان فرایند نقطه ای را به عنوان یک تابع اندازه پذیر از فضای

احتمال $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ تعریف کرد به فضای برآمد $(\mathbf{N}, \mathcal{N})$ تعریف کرد.

تعریف ۲.۴.۱. توزیع فرایند نقطه ای X یعنی اندازه احتمال P_X روی فضای برآمد

$(\mathbf{N}, \mathcal{N})$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$P_X(A) = \mathbb{P}(N_X \in A), \quad A \in \mathcal{N}.$$

تعریف ۳.۴.۱. فرض کنید X فرایند نقطه ای باشد همچنین $n(x)$ نشان دهنده عدد اصلی زیرمجموعه x از B باشد. اگر x متناهی نباشد در این صورت $n(x) = \infty$. برای هر $B \subseteq S$ فرض کنید $x \cdot x_B = x \cap B$ را موضعا متناهی گوییم، هرگاه برای هر B ی کراندار، $n(x_B) < \infty$.

قرار می دهیم:

$$N_{lf} = \{x \subseteq S : n(x_B) < \infty\}.$$

فرض کنید S یک مجموعه متریک تفکیک پذیر کامل نسبت به متریک d و مجهز به σ -جبر بول B باشد. همچنین فرض کنید B بیانگر کلاس مجموعه های کراندار بول باشد. N_{lf} را به σ جبر زیر مجهز می کنیم.

$$\mathcal{N}_{lf} = \sigma(\{x \in N_{lf} : n(x_B) = m\}) : B \in B_\circ, m \in \mathbb{N}_\circ.$$

به عبارت دیگر، N_{lf} کوچکترین σ -جبر تولید شده توسط مجموعه های به فرم

$$\{x \in N_{lf} : n(x_B) = m\} : B \in B_\circ, m \in \mathbb{N}_\circ.$$

است به طوری که $\mathbb{N}_\circ = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

تعریف ۴.۴.۱. فرایند نقطه ای X روی S را می توان همچنین یک نگاشت اندازه پذیر از فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ به $(N_{lf}, \mathcal{N}_{lf})$ تعریف کرد.

۱.۴.۱ مشخص سازی توزیع فرایند نقطه ای

در این بخش به مشخص سازی توزیع فرایند نقطه ای با استفاده از توزیع توام متغیرهای $N(B)$ می پردازیم.

تعریف ۵.۴.۱. منظور از توزیع‌های با بعد متناهی از یک فرایند نقطه‌ای برای هر $m > 0$ و مجموعه‌های فشرده B_1, B_2, \dots, B_m ، توزیع‌های احتمال توام از $N(B_1), N(B_2), \dots, N(B_m)$ می‌باشد.

تعریف ۶.۴.۱. خانواده توزیع‌های با بعد متناهی از یک فرایند نقطه‌ای X روی فضای متریک کامل تفکیک پذیر، مجموعه‌ای از توزیع‌های تجمعی $(N(B_1), \dots, N(B_m))$ است هرگاه B_1, \dots, B_m مجموعه‌های بورل کراندار S باشند.

تعریف ۷.۴.۱. فرایند نقطه‌ای روی S یک فرایند نقطه‌ای ساده نامیده می‌شود هرگاه برای هر $\xi \in S$ داشته باشیم $N(\{\xi\}) \in \{0, 1\}$.
تابع ظرفیت از فرایند نقطه‌ای ساده X برای مجموعه‌ای فشرده مانند K به صورت $T(K) = P(N(K) > 0)$ تعریف می‌گردد.

قضیه ۸.۴.۱. فرض کنید X و Y دو فرایند نقطه‌ای ساده باشند به طوری که تابع ظرفیت آنها یکسان باشند. در این صورت توزیع‌های آنها نیز یکسان است.

تابع مولد احتمال برای فرایند نقطه‌ای نقشی مشابه تابع مولد احتمال برای متغیرهای تصادفی با مقادیر صحیح بازی می‌کند.

قضیه ۹.۴.۱. فرض کنید X فرایندی نقطه‌ای باشد. تابع مولد احتمال آن به صورت زیر خواهد بود

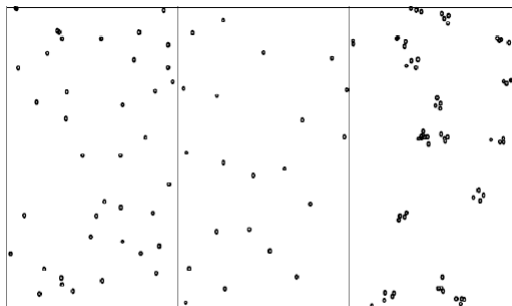
$$G_X(u) = \mathbb{E}[\exp\{\int_S \ln u(\xi) dN(\xi)\}] = \mathbb{E}[\prod_{\xi \in X} u(\xi)],$$

که در آن u تابعی از S به $[0, 1]$ با شرط $\{ \xi \in S : u(\xi) < 1 \}$ است.

مثال ۱۰.۴.۱. به عنوان مثالی ساده، برای مجموعه بورل $B \in B$ و هر $0 \leq t \leq 1$ قرار دهید $u(\xi) = t^{I(\xi \in B)}$. در این صورت $G_X(u) = \mathbb{E}[t^{N(B)}]$.

۲.۴.۱ الگوهای نقطه ای

الگوهای نقطه ای را بنا بر نحوه ی قرار گرفتن پیشامدها در فضا و میزان وابستگی آنها به یکدیگر به سه رده تصادفی کامل، منظم (یکنواخت) و خوشه ای تقسیم می کنند. الگوی نقطه ای تصادفی کامل فضایی، الگوهای حاصل از پراکنش پیشامدهائی هستند که هیچگونه ساختاری در آنها مشاهده نمی شود. در مقابل، دو رده ی دیگر، هر یک نوعی از ساختارهای پراکنش پیشامدها را تشریح می کنند. بدین ترتیب که الگوهای نقطه ای خوشه ای اغلب مبین ساختار پراکنش پیشامدهائی هستند که تمایل به تجمع در ناحیه یا ناحیه هایی از فضا را دارند؛ حال آن که الگوهای نقطه ای منظم، حاصل از پراکنش منظم تر پیشامدها هستند. شکل زیر نمونه ی از هر یک از این الگوها را معرفی می نماید.



شکل ۷. تصادفی کامل (سمت چپ)، منظم (میانی)، خوشه ای (سمت راست)

۳.۴.۱ فرایند پواسون

فرایندهای نقطه ای پواسون یکی از مهمترین انواع فرایندهای نقطه ای هستند. اهمیت آنها از این جهت است که این گونه فرایندها یکی از متداولترین مدل های شمارش و اندازه های شمارشی محسوب می شوند و علاوه بر آن بسیاری دیگر از فرایندهای نقطه

ای مفید مانند فرایند کاکس را می توان بر اساس آن تعریف نمود. این فرایند برای مدل بندی آن دسته از الگوهای نقطه ای به کار می رود که میان عناصر تشکیل دهنده ی آن هیچگونه برهم کنشی وجود ندارد و اصطلاحاً یک الگوی تصادفی کامل فضایی هستند. معمولاً پیش از آغاز مدل بندی یک الگوی نقطه ای، آزمودن کاملاً تصادفی بودن آن می تواند خط مشی ادامه ی تحلیل را به دست دهد؛ بدین ترتیب که در صورت رد شدن فرضیه ی تصادفی بودن کامل، می توان با اطمینان و سهولت بیشتر به سر نخ هایی کلیدی در تعیین نوع الگو دست یافت. در این بخش فرایند نقطه ای X را ساده و فضای $S \subseteq \mathbb{R}^d$ را در نظر بگیرید. فرض کنید تابع شدت $\rho : S \rightarrow [0, \infty)$ برای هر مجموعه کراندار مانند $B \subseteq S$ موضعا انتگرالپذیر باشد، به عبارت دیگر $\int_B \rho(\xi) d\xi < \infty$ باشد. در این صورت اندازه شدت به صورت زیر تعریف می شود.

$$\mu(B) = \int_B \rho(\xi) d\xi.$$

این اندازه برای مجموعه های کراندار موضعا متناهی می شود هرگاه $\mu(B) < \infty$. به علاوه μ را پخشی گویند هرگاه برای هر $\xi \in S$ همواره $\mu(\{\xi\}) = 0$. با مقدمات بالا، اکنون می توان فرایند پواسون را به صورت زیر تعریف کرد.

تعریف ۱۱.۴.۱. فرایند نقطه ای X روی $S \subseteq \mathbb{R}^d$ فرایند نقطه ای پواسون با تابع شدت ρ (و اندازه شدت μ) نامیده می شود هرگاه شرایط زیر برقرار باشد.

(i) برای هر $B \subseteq S$ به طوریکه $\mu(B) < \infty$ ، دارای توزیع پواسون با میانگین $\mu(B)$ باشد، یعنی

$$N(B) \sim \text{Poisson}(\mu(B)).$$

(ii) برای هر $n \in \mathbb{N}$ و $B \subseteq S$ که $0 < \mu(B) < \infty$ ، داشته باشیم

$$[X_B | N(B) = n] \sim \text{binomial}(B, n, f)$$

که در آن f تابع چگالی فرایند نقطه‌ای عبارت است از $f(\xi) = \rho(\xi)/\mu(B)$. در این صورت می‌نویسیم

$$X \sim \text{Poisson}(S, \rho).$$

توجه داشته باشید که برای هر مجموعه کراندار مانند $B \subseteq S$ ، μ توسط امید ریاضی تعداد نقاط B تعیین می‌شود. یعنی

$$\mathbb{E}(N(B)) = \mu(B).$$

فرایندهای پواسون را بر اساس تابع شدت به دو رده ی فرایندهای نقطه ای پواسون همگن و فرایندهای نقطه ای پواسون ناهمگن دسته بندی می‌کنند.

تعریف ۱۲.۴.۱. اگر $X \sim \text{Poisson}(S, \rho)$ ، آنگاه X را فرایند پواسون همگن گویند، هرگاه ρ ثابت باشد، در غیر اینصورت ناهمگن نامیده می‌شود. اگر $X \sim \text{Poisson}(S, 1)$ ، آنگاه X فرایند پواسون استاندارد روی S نامیده می‌شود.

فرایند نقطه ای مانا کاربرد بسیاری در فیزیک دارد. با این تفاوت که معمولاً استفاده از اصطلاح میدانهای نقطه ای را به فرایندهای نقطه ای ترجیح می‌دهند و به جای واژه مانایی معمولاً از اصطلاح همگنی استفاده می‌کنند.

تعریف ۱۳.۴.۱. فرایند نقطه ای X در \mathbb{R}^d مانا نامیده می‌شود هرگاه برای هر بردار ثابت مانند $v \in \mathbb{R}^d$ ، توزیع فرایند نقطه ای انتقال یافته $X + v$ که از انتقال هر نقطه مانند $x \in X$ به $x + v$ بدست می‌آید با توزیع X یکسان باشد. به عبارت دیگر توزیع فرایند تحت انتقال پایا باشد. به علاوه یک فرایند نقطه ای را همسانگرد گوئیم، هرگاه توزیع آن تحت دوران حول مبدا پایا باشد.

لم ۱۴.۴.۱. فرایند نقطه ای مانا است اگر و تنها اگر تابع ظرفیت برای هر مجموعه فشرده $K \subseteq \mathbb{R}^d$ و هر $v \in \mathbb{R}^d$ تحت انتقال $T(K) = T(K + v)$ ناوردا باشد.

□

برهان. به مرجع [۱۰] رجوع کنید.

تعریف ۱۵.۴.۱. برای هر مجموعه کراندار مانند $B \subseteq S$ ، احتمال پیشامدهای پوچ از فرایند پواسون به صورت زیر تعریف می شود.

$$v(B) = P(N(B) = \circ) = \frac{\exp(-\mu(B))\mu^\circ(B)}{\circ!} = \exp(-\mu(B)),$$

به طوریکه در آن $N(B) \sim \text{Poisson}(\mu(B))$.

چگالی فرایند پواسون نسبت به اندازه لبگ موجود نمی باشد. البته چگالی نسبت به فرایند پواسون تحت برخی شرایط موجود نمی باشد. اگر فضای S کراندار باشد، چگالی هر فرایند پواسون نسبت به نرخ واحد فرایند پواسون موجود است. گزاره ذیل با هدف فراهم نمودن شرایط لازم برای تعریف چگالی فرایند پواسون بیان می شود به طوریکه اثبات آن به سادگی از تعریف فرایند نقطه ای پواسون نتیجه می گردد.

قضیه ۱۶.۴.۱. فرایند پواسون $X \sim \text{Poisson}(S, \rho)$ را در نظر بگیرید. این فرایند توسط احتمالهای پوچ از مجموعه های کراندار تعیین می شود، یعنی

$$v(B) = \exp(-\mu(B)) \quad , \quad B \subseteq S.$$

برهان. فرض کنید $\xi \in S$ نقطه ای دلخواه باشد. مجموعه

$$B_i = \{\eta \in S : i - 1 \leq \|\eta - \xi\| < i\}$$

را برای هر $i \in \mathbb{N}$ در نظر بگیرید. می دانیم که S به صورت اجتماع مجزا از مجموعه های کراندار B_i می باشد. فرض کنید $X = \bigcup_1^\infty X_i$ باشد به طوریکه $X_i \sim \text{Poisson}(B_i, \rho_i)$ برای هر $i = 1, 2, \dots$ مستقل از یکدیگر باشند، به طوریکه

ρ_i تحدید ρ به B_i باشد. در این صورت برای هر مجموعه کراندار مانند $B \subseteq S$ داریم:

$$\begin{aligned} P(X \cap B = \phi) &= \prod_{i=1}^{\infty} P(X_i \cap B = \phi) \\ &= \prod_{i=1}^{\infty} \exp(-\mu(B \cap B_i)) \\ &= \exp\left(-\sum_{i=1}^{\infty} \mu(B \cap B_i)\right) \\ &= \exp(-\mu(B)). \end{aligned}$$

□ رابطه فوق احتمال پوچ فرایند پواسون با اندازه شدت μ می باشد.

تبصره ۱۷.۴.۱. فرض کنید X_1 و X_2 دو فرایند پواسون مستقل روی S با اندازه شدت μ_1 و μ_2 باشد. توزیع (X_1, X_2) به طور منحصر بفردی توسط احتمالهای پوچ برای مجموعه های کراندار $A, B \subseteq S$ زیر تعیین می شود، یعنی

$$P(X_1 \cap A = \phi, X_2 \cap B = \phi) = \exp(-\mu_1(A) - \mu_2(B)) \quad (1.1)$$

گزاره ۱۸.۴.۱. فرض کنید $X \sim Poisson(S, \rho)$. تابع مولد احتمال X به صورت زیر خواهد بود.

$$G_X(u) = \exp\left\{-\int_S (1 - u(\xi))\rho(\xi)d\xi\right\}$$

□ برهان. به [۴] رجوع کنید.

تعریف ۱۹.۴.۱. اجتماع $\cup_{i=1}^{\infty} X_i$ از فرایند نقطه ای X_1, X_2, \dots یک برهمنش نامیده می شود.

تعریف ۲۰.۴.۱. فرض کنید $p : S \rightarrow [0, 1]$ یک تابع و X فرایند نقطه ای روی S باشد. فرایند نقطه ای $X_{thin} \subseteq X$ بدست آمده توسط اعضای ξ از X در X_{thin}

با احتمال $p(\xi)$ (به طوریکه نقاط شامل و غیر شامل در آن نسبت به یکدیگر مستقل باشند) را فرایند نقطه‌ای نازک شده مستقل از X می‌گوییم.

گزاره ۲۱.۴.۱. اگر متغیرهای تصادفی $X_i \sim \text{Poisson}(S, \rho_i)$ ، برای $i = 1, 2, \dots$ ، متقابلاً مستقل باشند و $\rho = \sum \rho_i$ نیز موضعا انتگرال پذیر باشد، آنگاه با احتمال یک، $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$ یک اجتماع دو به دو جدا از هم است و $X \sim \text{Poisson}(S, \rho)$.

برهان. برهان قسمت اول روشن است. برای برهان قسمت دوم، طبق قضیه ۱۶.۴.۱،

برای هر مجموعه کراندار مانند B داریم:

$$P(X_B = \phi) = \prod_{i=1}^{\infty} P(X_i \cap B = \phi) = \prod_{i=1}^{\infty} \exp(-\mu_i(B)) = \exp(-\mu(B))$$

□

به طوریکه در آن $\mu_i(B) = \int_B \rho_i(\xi) d\xi$

تعریف ۲۲.۴.۱. اگر X_1 و X_2 دو فرایند نقطه‌ای تعریف شده روی فضای S باشند،

در این صورت توزیع X_1 نسبت به توزیع X_2 مطلقاً پیوسته است اگر و تنها اگر

$P(X_2 \in F) = 0$ ، برای هر $F \subseteq N_{lf}$ ، $P(X_1 \in F) = 0$ را نتیجه دهد. به طور

معادل، با استفاده از قضیه رادن-نیکودیم، هرگاه تابعی مانند $f : N_{lf} \rightarrow [0, \infty]$

موجود باشد به طوریکه

$$P(X_1 \in F) = \mathbb{E}[I(X_2 \in F)] \quad , \quad F \subseteq N_{lf}.$$

در این صورت تابع f چگالی X_1 نسبت به X_2 نامیده می‌شود.

گزاره ۲۳.۴.۱. فرض کنید $X_1 \sim \text{Poisson}(\mathbb{R}^d, \rho_1)$ و $X_2 \sim \text{Poisson}(\mathbb{R}^d, \rho_2)$.

در این صورت توزیع X_1 نسبت به X_2 مطلقاً پیوسته است اگر و تنها اگر برای اعداد

مثبت ρ_1, ρ_2 همواره $\rho_1 = \rho_2$.

□ برهان. به [۴] رجوع کنید.

طبق گزاره فوق دو فرایند پواسون لزوما نسبت به یکدیگر مطلقا پیوسته نیستند. گزاره ذیل نیز شرایط لازم برای اینکه دو توزیع یک فرایند پواسون نسبت به هم مطلقا پیوسته باشد را بیان می کند.

گزاره ۲۴.۴.۱. فرض کنید $X_1 \sim Poisson(S, \rho_1)$ و $X_2 \sim Poisson(S, \rho_2)$. به علاوه برای $i = 1, 2$ فرض کنید برای S کراندار $\mu_i(S) < \infty$ و $\rho_i(\xi) > 0$ هرگاه $\rho_1(\xi) > 0$ ، در این صورت برای هر x توزیع X_1 نسبت به X_2 با تابع چگالی

$$f(x) = \exp[\mu_2(S) - \mu_1(S)] \prod_{\xi \in x} \frac{\rho_1(\xi)}{\rho_2(\xi)}$$

مطلقا پیوسته است.

برهان. اگر Y فرایند پواسون $Poisson(S, \rho_2)$ باشد، در این صورت برای هر $F \subseteq N_{lf}$ داریم

$$P(X \in F) = \mathbb{E}[\mathbb{1}[Y \in F]f(Y)]$$

□ و این حکم گزاره را نتیجه می دهد.

۴.۴.۱ فرایند نقطه ای نشاندار

فرایند نقطه ای نشاندار، گونه ای از فرایندهای نقطه ای هستند که در طبیعت به وفور با آنها مواجه می شویم. در این گونه فرایندها به هر x_i ، یک کمیت دیگر نیز ضمیمه می شود که حاوی اطلاعاتی بیشتر در باره ی پیشامدهائی است که مختصات مکانی آنها توسط x_i ، موجود در پیکربندی نشان داده شده اند. به عنوان مثال، موقعیت آتش سوزی در یک جنگل را که الگویی از یک فرایند نقطه ای است در نظر بگیرید و فرض

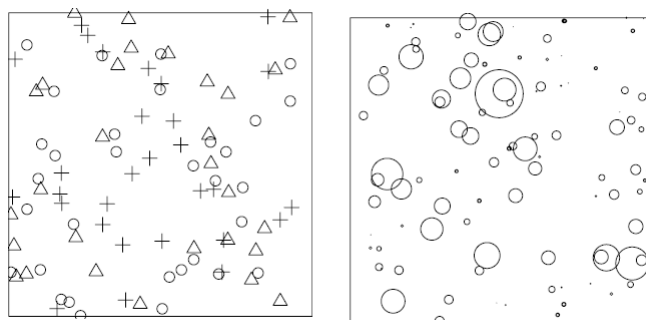
کنید ارتفاع موقعیت مذکور در دسترس باشد. در چنین مواقعی به جای چشم پوشی از این اطلاع، آن را نیز وارد مدل می‌نمائیم. در این صورت با یک فرایند نقطه‌ای نشاندار مواجه خواهیم بود که علاوه بر موقعیت درختان، ارتفاع آنها را نیز به عنوان نشانی برای پیشامدها در نظر می‌گیرد.

تعریف ۲۵.۴.۱. فرض کنید Y یک فرایند نقطه‌ای روی $T \subseteq \mathbb{R}^d$ باشد. یک فضا مانند M را اختیار کنید. اگر نشان تصادفی مانند $m_\xi \in M$ متناظر با هر نقطه $\xi \in Y$ باشد در این صورت

$$X = \{(\xi, m_\xi) : \xi \in Y\}$$

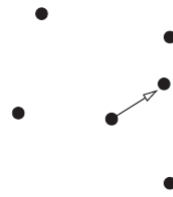
را فرایند نقطه‌ای نشاندار می‌گویند. نشان‌های می‌توانند به عنوان داده اضافی و یا اطلاعات مرتبط با هر نقطه در Y نیز در نظر گرفته شوند.

مثال ۲۶.۴.۱. شکل زیر نمونه ایی از فرایند نقطه‌ای نشان دار، در حالتی که فضای نشان متناهی باشد را بیان می‌نماید. به طوریکه شکل سمت چپ برای $M = \{a, b, c\}$ بوده و شکل سمت راست در صورتی که فضای نشانها بازه ی پیوسته مانند $M = [1, \infty)$ باشد را نشان می‌دهد.



شکل ۸. فرایند نقطه‌ای نشاندار

برای یک فرایند نقطه‌ای نمودار نزدیکترین فاصله همسایگی به صورت زیر است.



شکل ۱۰. مفهوم نزدیکترین فاصله همسایگی

اگر X فرایند پواسون یکنواخت در \mathbb{R}^d با شدت β باشد، آنگاه توزیع $dist(u, X)$ به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(dist(u, X) \leq r) &= \mathbb{P}(N(b(u, r)) > 0) \\ &= 1 - \exp(-\beta \lambda_d(b(u, r))) \\ &= 1 - \exp(-\beta \kappa_d r^d)\end{aligned}$$

که در آن $\kappa_d = \lambda_d(b(\circ, 1))$ اندازه گوی واحد در \mathbb{R}^d است و $b(u, r)$ گویی به مرکز u و شعاع r است.

تعریف ۲۷.۴.۱. فرض کنید X فرایند نقطه ای مانا در \mathbb{R}^d باشد. تابع توزیع برخورد F تابع توزیع تجمعی فاصله $R = dist(u, X)$ از یک نقطه ثابت u به نزدیکترین نقطه از X است. به عبارت دیگر

$$\begin{aligned}F(r) &= \mathbb{P}(dist(u, X) \leq r) \\ &= \mathbb{P}(N(b(u, r)) > 0).\end{aligned}$$

با توجه به مانایی فرایند نقطه ای مقدار این تابع به u بستگی ندارد.

توجه داشته باشید که $F(r) = T(b(\circ, r)) = T(b(u, r))$ که در آن T تابع ظرفیت از X است.

فصل ۲

کاربردهای فرایندهای نقطه ای

۱.۲ مقدمه

در این فصل مفهوم گشتاور و گشتاورهای بالاتر برای فرایند نقطه ای مورد بحث قرار می گیرند. همچنین اندازه شدت و اندازه گشتاور دوم بررسی می شوند. این فصل مباحث مربوط به فرمول کمبل برای امید ریاضی را نیز تحت پوشش قرار می دهد. در ادامه به توزیع پالم و بیان پاره ای نتایج مرتبط می پردازیم.

۲.۲ شدت

تعریف ۱.۲.۲. فرض کنید X فرایند نقطه ای روی $S = \mathbb{R}^d$ (یا هر فضای متریک موضعا فشرده S) باشد. اندازه ν روی S را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$\nu(B) = \mathbb{E}(N_X(B)) \quad , \quad B \subset S$$

ν را اندازه شدت X گویند به طوری که برای هر مجموعه فشرده B همواره $\nu(B) < \infty$.

مثال ۲.۲.۲. فرایند نقطه ای پواسون یکنواخت با $\beta > 0$ را در نظر بگیرید

$$N(B) \sim \text{Poisson}(\beta \lambda_d(B))$$

در اینصورت $\nu(B) = \lambda_d(B)$ ، که $\nu(B)$ متناسب با ظرفیت B می باشد.

اگر X فرایند نقطه ای مانا در \mathbb{R}^d باشد، در این صورت برای هر $v \in \mathbb{R}^d$ ،

$$\nu(B + v) = \mathbb{E}N(B + v) = \mathbb{E}N(B) = \nu(B)$$

به عبارت دیگر، اندازه شدت فرایند نقطه ای تحت انتقال پایاست. لازم به ذکر است

چنین اندازه هایی مضربی از اندازه لبگ هستند.

قضیه ۳.۲.۲. اگر ν اندازه پایا تحت انتقال روی \mathbb{R}^d باشد آنگاه برای مقادیر $c \geq 0$

$$\nu(B) = c \lambda_d(B) \text{ همواره}$$

نتیجه ۴.۲.۲. اگر X فرایند نقطه ای مانا در \mathbb{R}^d باشد، در این صورت تحت انتقال

پایاست، لذا طبق قضیه قبل، اندازه شدت ν ، یک ثابت مضربی از اندازه لبگ λ_d است.

این ثابت c شدت X نامیده می شود.

تعریف ۵.۲.۲. فرض کنید اندازه شدت ν از فرایند نقطه ای X در \mathbb{R}^d برای برخی

توابع مانند β در شرط زیر صدق کند.

$$\nu(b) = \int_B \beta(u) du$$

در اینصورت β تابع شدت X نامیده می شود.

اگر چنین ν ای موجود باشد در این صورت تابع شدت در ناحیه کوچک $dx \subset \mathbb{R}^d$

به صورت زیر بیان می گردد:

$$\mathbb{P}(N(dx) > 0) \sim \mathbb{E}N(dx) \sim \beta(x) dx.$$

قضیه ۶.۲.۲. (فرمول کمپبل)^۱ فرض کنید X فرایند نقطه ای روی S باشد، به علاوه

$T = \sum_{x \in X} f(x)$ جمع تصادفی $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی اندازه پذیر باشد. در این صورت

متغیری تصادفی با امید ریاضی زیر است.

$$\mathbb{E}[\sum_{x \in X} f(x)] = \int_S f(x) \nu(dx). \quad (1.2)$$

برهان. رابطه ۱.۲ زمانی برقرار است که f تابعی پله ای باشد؛ به عبارت دیگر f یک

تابع به فرم زیر باشد

$$f = \sum_{i=1}^m c_i \mathbb{1}_{B_i}$$

که در آن برای $i = 1, \dots, m$ ، $B_i \subset S$ مجموعه ای فشرده و $c_i \in \mathbb{R}$. لذا در این

حالت داریم

$$T = \sum_{x \in X} f(x) = \sum_x \sum_i c_i \mathbb{1}_{B_i}(x) = \sum_i c_i N_X(B_i)$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \mathbb{E}T &= \mathbb{E} \left[\sum_i c_i N_X(B_i) \right] \\ &= \sum_i c_i \mathbb{E}N(B_i) \\ &= \sum_i c_i \nu(B_i) \\ &= \int_S f(x) \nu(dx). \end{aligned}$$

□

مثال ۷.۲.۲. (انتگرال مونت کارلو) فرض کنید برای $W \subset \mathbb{R}^d$ ، هدف محاسبه

انتگرال زیر باشد.

$$I = \int_W f(x) dx$$

که در آن f تابعی نامنفی، حقیقی مقدار و انتگرالپذیر باشد. فرایند نقطه ای X با شدت زیر را در نظر بگیرید:

$$\lambda(x) = \begin{cases} c & \text{if } x \in W \\ 0 & \text{if } x \notin W \end{cases}$$

اگر تابع f را در نقاط تصادفی X فراخوانی کنیم، خواهیم داشت

$$\hat{I} = \frac{1}{c} \sum_{x \in X} f(x) dx.$$

در این صورت با استفاده از رابطه ۱.۲ داریم:

$$\mathbb{E}[\hat{I}] = \frac{1}{c} \mathbb{E} \left[\sum_{x \in X} f(x) dx \right] = \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \lambda(x) dx = \int_W f(x) dx = I \quad (2.2)$$

در نتیجه \hat{I} برآورد نااریبی از I است.

۳.۲ شدت برای فرایند نقطه ای نشاندار

فرض کنید Y فرایند نقطه ای نشان دار روی فضای S با نشان هایی در فضای M باشد. با در نظر گرفتن Y به عنوان فرایند نقطه ای روی $S \times M$ ، می توان تعریف اندازه شدت را به فرایند نقطه ای نشاندار بدون اعمال شرایط دیگر، تعمیم داد. اندازه شدت از فرایند نقطه ای نشاندار Y را می توان یک اندازه مانند ν روی $S \times M$ به صورت زیر تعریف نمود:

$$\nu(U) = \mathbb{E}N_Y(U), \quad U \subset S \times M.$$

به طوریکه مقادیر آن برای هر مجموعه فشرده مانند $B \subset S$ و هر مجموعه اندازه پذیر مانند $C \subset M$ ، به صورت زیر تعیین شوند

$$\begin{aligned} \nu(B \times C) &= \mathbb{E} N_Y(B \times C) \\ &= \mathbb{E} \sum_{(x,m) \in Y} \mathbf{1}\{x \in B\} \mathbf{1}\{m \in C\} \end{aligned}$$

برای فرایند نقطه ای نشاندار فرمول کمپبل به فرم زیر بیان می شود

$$\mathbb{E} \sum_{(x,m) \in Y} f(x, m) = \int_{S \times M} f(x, m) \nu(dx, dm) \quad (۳.۲)$$

که در آن $f : S \times M \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی اندازه پذیر است.

تفاوت بارز بین فرایند نقطه ای نشان دار و بی نشان در مفهوم مانایی است.

تعریف ۱.۳.۲. فرایند نقطه ای نشان دار روی \mathbb{R}^d با نشان هایی در M مانا نامیده می شود هرگاه توزیع آن تحت انتقال

$$(x, m) \mapsto (x + v, m)$$

از \mathbb{R}^d برای هر $v \in \mathbb{R}^d$ ناورد باشد.

توجه داشته باشید که عمل انتقال محل نقاط را تغییر می دهد ولی عملاً بر روی نشان الحاقی آنها تاثیری ندارد.

قضیه ۲.۳.۲. فرض کنید Y فرایند نقطه ای نشان دار مانا در \mathbb{R}^d باشد و فرایند متناظر نقاط بی نشان، شدت متناهی داشته باشند به عبارت دیگر، برای هر مجموعه فشرده

$$\mathbb{E} N_Y(K \times M) < \infty, K \subset \mathbb{R}^d.$$

در اینصورت اندازه شدت ν از Y به فرم زیر می باشد:

$$\nu(A \times B) = \beta \lambda_d(A) Q(B) \quad (۴.۲)$$

برای هر $A \subset \mathbb{R}^d$ ، $B \subset M$ ، شدت $\beta \geq 0$ (تعداد مورد نیاز از نقاط در واحد سطح) و اندازه احتمال Q روی M باشد که این اندازه توزیع نشان نمونه‌ای^۲ است.

برهان. با توجه به اینکه Y فرایند ماناست و v تحت انتقال در \mathbb{R}^d پایاست، بنابراین

$$v(A \times B) = v((A + v) \times B)$$

که در آن $A \subset \mathbb{R}^d$ و $B \subset M$ و $v \in \mathbb{R}^d$ بردارهای انتقال هستند. حال اگر B را ثابت در نظر بگیریم و μ_B را برای هر $A \subset \mathbb{R}^d$ به صورت زیر تعریف کنیم

$$\mu_B(A) = v(A \times B)$$

در این صورت μ_B روی \mathbb{R}^d تحت انتقال پایاست. لذا با توجه به قضیه ۳.۲.۲، برای هر ثابت B و هر بردار پایا تحت انتقال داریم

$$v(A \times B) = c_B \lambda_d(A)$$

که در آن c_B ثابت وابسته به B می باشد.

از سوی دیگر، A را به صورت مکعب واحد و κ را به صورت زیر بگیرد

$$\kappa(B) = v(A \times B) = c_B \lambda_d(A) = c_B$$

در این صورت κ یک اندازه روی M می باشد که طبق فرض در شرط زیر صدق می کند

$$\kappa(M) = v(A \times M) = \mathbb{E} N_Y(A \times M) < \infty$$

اگر قرار دهید $\beta = \kappa(M)$ و $Q(B) = \kappa(B)/\beta$ حکم قضیه حاصل می گردد. □

برای یک فرایند نقطه ای نشاندار مانا، فرمول کمپبل به صورت زیر بیان می شود

$$\mathbb{E} \left[\sum_{(x,m) \in Y} f(x, m) \right] = \beta \mathbb{E}_Q \left[\int_{\mathbb{R}^d} f(x, K) \right]$$

بطوریکه در آن K بیانگر نشان تصادفی (یک عضو تصادفی از M) با توزیع Q است.

۴.۲ اندازه های گشتاور دوم

فرض کنید X یک فرایند نقطه ای باشد. واریانس شمار $N(B)$ به صورت ذیل بیان می شود:

$$\text{var}N(B) = \mathbb{E}[N(B)^2] - [\mathbb{E}N(B)]^2$$

به علاوه کوواریانس دو شمار $N(B)$ نیز بدین شکل تعریف می شود:

$$\text{cov}[N(B_1), N(B_2)] = \mathbb{E}[N(B_1)N(B_2)] - [\mathbb{E}N(B_1)][\mathbb{E}N(B_2)].$$

با توجه به مطالب بیان شده $N(B_1)N(B_2)$ با تعداد زوج مرتبهای به فرم (x, x') از نقاط در فرایند X هم ارز است به طوریکه در آن $x \in B_1$ و $x \in B_2$.

تعریف ۱.۴.۲. فرض کنید X یک فرایند نقطه ای روی فضای S باشد. در این صورت $X \times X$ فرایند نقطه ای روی $S \times S$ شامل همه زوجهای مرتب به فرم (X, X') از نقاط $x, x' \in X$ می باشد. اندازه شدت ν_2 از $X \times X$ یک اندازه روی $S \times S$ است که در شرط زیر صدق می کند.

$$\nu_2(A \times B) = \mathbb{E}[N_X(A)N_X(B)].$$

اندازه ν_2 اندازه گشتاوری دوم از X نامیده می شود.

به وضوح، اندازه گشتاوری دوم شامل همه اطلاعات در مورد واریانس و کوواریانس متغیرهای $N_X(A)$ است. فرمول کمپبل برای $X \times X$ برای هر تابع اندازه پذیر مانند $f : S \times S \rightarrow \mathbb{R}$ به صورت زیر بیان می شود.

$$\mathbb{E}\left[\sum_{x \in X} \sum_{y \in X} f(x, y)\right] = \int_S \int_S f(x, y) \nu_2(dx, dy).$$

تعریف ۲.۴.۲. فرایند نقطه ای X روی \mathbb{R}^d دارای چگالی گشتاور دوم g_2 است هرگاه

$$\nu_{[2]}(C) = \int_C g_2(x, y) dx dy$$

برای هر مجموعه فشرده مانند $C \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$.

تعریف ۳.۴.۲. فرض کنید X فرایند نقطه ای روی \mathbb{R}^d دارای تابع شدت $\beta(x)$ و چگالی گشتاور دوم $g_2(x)$ باشد. در این صورت تابع همبستگی زوج از X به صورت زیر تعریف می شود.

$$\rho_2(x) = \frac{g_2(x, y)}{\beta(x)\beta(y)}.$$

مثال ۴.۴.۲. فرایند پواسون یکنواخت با شدت β را در نظر بگیرید. در این صورت برای $\beta(x) \equiv \beta$ و $g_2 \equiv \beta^2$ تابع همبستگی ρ با یک هم ارز است.

مثال ۵.۴.۲. (فرایند نقطه ای مرکب) فرض کنید Γ متغیر تصادفی حقیقی مقدار نامنفی روی Ω باشد به طوری که برای $\Gamma = \gamma$ فرایند نقطه ای X یک فرایند پواسون با شدت γ باشد. اندازه شدت فرایند ترکیبی به صورت زیر تعریف می شود.

$$\mathbb{E}N(B) = \mathbb{E}[\mathbb{E}[N(B) | \Gamma]] = \mathbb{E}[\Gamma]\lambda_d(B).$$

۱.۴.۲ توزیع پالم از فرایند نقطه ای

توزیع پالم از فرایند نقطه ای X را با نماد P^x نشان داده و روی N به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$P^x(A) = \mathbb{P}^x(X \in A), A \in N.$$

همچنین گاهی توزیع پالم X با نماد P_X^x نیز نشان می دهند.

لم ۶.۴.۲. اگر X فرایند نقطه ای مانا در \mathbb{R}^d باشد، آنگاه

$$X^x \stackrel{d}{=} X^\circ + x$$

که در آن X^x بیانگر فرایند حاصل از اندازه احتمال پالم \mathbb{P}^x و $\stackrel{d}{=}$ معرف هم ارزی توزیع ها است.

به علاوه فرض کنید T_x بیانگر اثر تبدیل به وسیله بردار $x \in \mathbb{R}^d$ روی اندازه شمارای

N باشد. یعنی

$$T_x N(B) = N(B - x), \quad B \subset \mathbb{R}^d,$$

و برای هر پیشامد E از N ، نیز متناظر با رابطه زیر باشد

$$T_x(E) = \{N \in \mathbf{N} : T_x N \in E\},$$

و برای هر توزیع فرایند نقطه ای \mathbf{Q} ،

$$T_x \mathbf{Q}(E) = \mathbf{Q}(T_x E), \quad E \in \mathbf{N}.$$

در اینصورت طبق لم ۶.۴.۲، رابطه $P_X^x = T_x P_X^\circ$ برای هر فرایند نقطه ای دلخواه برقرار است. زیرا طبق [۲]، برای هر تابع مانند $Y : S \rightarrow \mathbb{R}^+$ که نسبت به اندازه کمپبل انتگرال پذیر است داریم:

$$\mathbb{E} \sum_{x \in X} Y(x) = \int_S \mathbb{E}^x [Y(x)] v(dx).$$

در حالت خاص، اگر $Y(x) = f(x, X)$ ؛ به عبارت دیگر $Y(x, w) = f(x, X(w))$ ، داریم

$$\mathbb{E} \left[\sum_{x \in X} f(x, X) \right] = \int_S \mathbb{E}^x [f(x, X)] v(dx).$$

حال فرمول مذکور را که به فرمول کمپبل مشهور است، برای $A \in \mathcal{N}$ به عنوان یک

پیشامد و مجموعه $B \subset \mathbb{R}^d$ به کار می بریم، داریم

$$f(x, X) = \mathbf{1}\{x \in B\} \mathbf{1}\{X - x \in A\}$$

که در آن $X - x = X + (-x)$ یکی از نتایج انتقال X توسط بردار $-x$ می باشد. بنابراین

$$\mathbb{E} \left[\sum_{x \in X \cap B} \mathbb{1}\{X - x \in A\} \right] = \beta \int_B \mathbb{P}^x(X - x \in A) dx.$$

با توجه به مانایی X ، توزیع $X + v$ برای هر بردار مانند v مشابه توزیع X است. در نتیجه

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sum_{x \in X \cap B} \mathbb{1}\{X - x \in A\} \right] &= \mathbb{E} \left[\sum_{x \in (X+v) \cap B} \mathbb{1}\{(X+v) - x \in A\} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\sum_{x \in X \cap T_{-v}B} \mathbb{1}\{X - x \in A\} \right]. \end{aligned}$$

در نهایت عبارت زیر حاصل می گردد.

$$\int_B \mathbb{P}^x(X - x \in A) dx = c \lambda_2(B)$$

پس $\mathbb{P}^x(X - x \in A)$ ثابت بوده و خواهیم داشت $P_X^x = T_x P_X^\circ$.

۲.۴.۲ نزدیکترین تابع همسایگی

تعریف ۷.۴.۲. فرض کنید X فرایند نقطه ای مانا در \mathbb{R}^d باشد. نزدیکترین تابع

همسایگی G تابع توزیع تجمعی فاصله

$$R' = \text{dist}(x, X \setminus x)$$

از یک نوع نقطه مانند $x \in X$ با نزدیکترین نقاط دیگر از X است. به عبارت دیگر،

$$G(r) = \mathbb{P}^x(\text{dist}(x, X \setminus x) \leq r)$$

$$= \mathbb{P}^x(N(b(x, r) \setminus x) > 0).$$

با توجه به مانایی این فرایند، تابع مذکور به x وابسته نمی باشد.

مثال ۸.۴.۲. برای هر فرایند پواسون مانا در \mathbb{R}^d ، با توجه به اینکه $X^x \equiv X \cup \{x\}$ بنابراین داریم

$$\begin{aligned} G(r) &= \mathbb{P}^x(\text{dist}(x, X) \leq r) \\ &= \mathbb{P}(\text{dist}(x, X) \leq r) \\ &= 1 - \exp(-\beta \kappa_d r^d). \end{aligned}$$

لذا در این حالت $G(r) \equiv F(r)$.

یک ترکیب جالب از تابع فضای خالی F و نزدیکترین تابع همسایگی G به صورت زیر بیان می‌گردد:

تعریف ۹.۴.۲. فرض کنید X فرایند نقطه ای مانا در \mathbb{R}^d باشد. تابع J از X برای هر

$r \geq 0$ که $F(r) < 1$ به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$J(r) = \frac{1 - G(r)}{1 - F(r)}$$

تبصره ۱۰.۴.۲. برای فرایند پواسون یکنواخت، می‌دانیم همواره $F(r) \equiv G(r)$ لذا $J(r) \equiv 1$. به علاوه تابع J خواص قابل توجهی نسبت به بسیاری از اعمال روی فرایند نقطه ای دارد. به عنوان نمونه، فرض کنید X و Y فرایندهای مانای مستقل با شدت α_X و α_Y و توابع J به صورت J_X و J_Y باشند. در این صورت داریم

$$J_{X \cup Y}(r) = \frac{\alpha_X}{\alpha_X + \alpha_Y} J_X(r) + \frac{\alpha_Y}{\alpha_X + \alpha_Y} J_Y(r).$$

فصل ۳

معرفی فرایندهای نقطه ای فضایی مدرن

۱.۳ مقدمه

پیشینه نظریه فرایندهای نقطه ای مدرن را می توان در کارهای تحقیقاتی پواسون در سال ۱۸۳۷ ردیابی نمود. با این حال، بیشتر این نظریه نوین که وابستگی تنگاتنگی با نظریه اندازه دارد در نیمه های قرن بیستم توسعه یافت. در این فصل به ارائه رویکردی از این نظریه می پردازیم، لازم به ذکر است این فصل شامل گزیده ای از مباحث مربوط و کاربردهای این نظریه می باشد. هدف از این فصل معرفی کلی موضوعاتی است که در مدلسازی فضایی نقش عمده ای ایفا می کنند. در بخش اول این فصل فرایند کاکس معرفی و تمامی مفاهیم لازم در این زمینه و تمایز آن با فرایند پواسون بیان شده و در نهایت به بیان و نمونه‌هایی از فرایندهای کاکس با عنوان فرایند لگ گاوسی ونوفه شلیک مورد مطالعه قرار گرفته است.

در ادامه فرایندهای تجمعی، دافعی و پواسون نشاندار تعریف و خواص آنها ذکر و سپس یک مشخصه اساسی برای فرایندهای نقطه ای با عنوان شدت شرطی پاپانگلو تعریف شده است.

۲.۳ فرایندهای کاکس فضایی

در بسیاری از پدیده های طبیعی که با فرایندهای نقطه ای مدلسازی می شوند، می دانیم که نقاط فرایند با یکدیگر اثر متقابل دارند و به عنوان نمونه در نظر گرفتن مدل پواسون برای الگوی نقطه ای مکان درختان در یک جنگل طبیعی مناسب نیست، زیرا به دلیل ساز و کار تکثیر دانه ها توسط درختان و توزیع آنها در اطرافشان، اثر متقابل بین نقاط از نوع جذبی است و الگوی نقطه ای مکان درختان خوشه ای است. اما شاید تعمیم فرایند پواسون الگوی مناسبی باشد.

طبیعی ترین تعمیم فرایند پواسون حالتی است که تابع شدت آن تصادفی باشد. این فرایند اولین بار توسط کاکس در سال ۱۹۵۵ تحت عنوان ”فرایندهای پواسون تصادفی مضاعف” مورد مطالعه قرار گرفت.

تعریف ۱.۲.۳. فرض کنید $Z = \{Z(\xi) : \xi \in S\}$ یک میدان تصادفی نامنفی باشد که قریب به یقین موضعا انتگرال پذیر است؛ یعنی برای هر $B \in \mathcal{B}$ ، با احتمال یک $\mu(B) = \int_B Z(\xi) \rho d\xi < \infty$. فرایند نقطه ای X را روی S یک فرایند کاکس با میدان هادی Z گویند هرگاه

$$[X | Z] \sim \text{Poisson}(S, Z).$$

مثال ۲.۲.۳. فرایند کاکس ساده، فرایند پواسون ترکیبی است. فرض کنید $Z(\xi) \equiv Z_0$ مقدار ثابت روی S باشد. در این صورت $[X | Z_0] \sim \text{Poisson}(S, Z_0)$. حالت خاص زمانی رخ می دهد که $Z_0 \sim G(\alpha, \beta)$. در این صورت $N(B)$ از توزیع دوجمله ای منفی پیروی می کند. قابل ذکر است که برای مجموعه های کراندار جدا از هم $A, B \subset S$ و $N(A)$ و $N(B)$ همبسته مثبت هستند.

مثال ۳.۲.۳. نازک شدن مستقل تصادفی از فرایند کاکس X فرایند کاکس دیگری به نام X^{thin} را نتیجه می دهد. فرض کنید X فرایند کاکس با میدان هادی Z باشد. به علاوه فرض کنید

$$\Pi = \{\Pi(\xi) : \xi \in S\} \subseteq [0, 1]$$

یک میدان تصادفی مستقل از X و Z باشد. همچنین X^{thin} فرایند نقطه ای بدست آمده از نقاط نازک شده مستقل در X با $p(\zeta) = \pi(\zeta)$ باشد. در این صورت X^{thin} فرایند کاکس با میدان هادی $Z^{thin}(\xi) = \Pi(\xi)Z(\xi)$ است. روند تحلیل مثال مستقیماً از تعریف فرایند کاکس و خواص نازک شدن فرایند پواسون نتیجه می گردد.

در واقع تعریف فرایند کاکس از کاربردها سرچشمه گرفته است و تابع شدت تصادفی Z تفسیر خاصی دارد. فرض کنید می دانیم فرایند نقطه ای مورد بررسی X با میدان تصادفی نامنفی Z (یا یک تبدیل از آن) رابطه دارد. یک مدلسازی از این رابطه می تواند به صورت $[X | Z] \sim \text{Poisson}(S, Z)$ باشد. به عبارت دیگر برای داده های (X, Z) ، مدل $[X | Z] \sim \text{Poisson}(S, Z)$ را در نظر گرفته ایم. اما Z یک فرایند پنهان است. X یک فرایند کاکس با میدان هادی Z است. تعیین مدل مناسب که در آن Z تصادفی است یا پنهان می باشد به عوامل زیر بستگی دارد:

(i) دانش قبلی.

(ii) ممکن است بخواهیم به بررسی وابستگی متغیرهای کمکی خاصی در ارتباط با Z پردازیم. متغیرهای کمکی می توانند به عنوان شرایط سیستماتیک برطرف شوند. در حالی که اثرات مشاهده نشده ممکن است به عنوان شرایط تصادفی برطرف گردند.

(iii) ممکن است مدلسازی یک الگوی نقطه ای برهنهش با کلاس پارامتریک فرایندهای پواسون ناهمگن به عنوان نمونه رده توابع شدت چند جمله ای مشکل باشد. در این

حالت فرایند کاکس یک مدل مقرون به صرفه و منعطف می باشد. به عنوان مثال، ضرایب در تابع شدت چندجمله ای را می توان تصادفی به عنوان نقطه مقابل ثابت در نظر گرفت. مشابه روند فرایندها می بایست شدت و تابع مولد نیز برای فرایند کاکس تعریف شود. با توجه به اینکه خواص فرایند کاکس X به سادگی توسط اعمال شرایط بر شدت تصادفی Z بدست می آید پس تابع شدت X به فرم $\rho(\xi) = \mathbb{E}[Z(\xi)]$ می باشد. اگر فرایند کاکس به مجموعه $B \subseteq S$ با شرط $|B| < \infty$ محدود شود و $X_B = X \cap B$ ، برای پیکربندی نقطه متناهی $x \subset B$ داریم:

$$\pi(x) = \mathbb{E} \left[\exp \left(|B| - \int_B Z(\xi) d\xi \right) \prod_{\xi \in x} Z(\xi) \right].$$

برای مجموعه کراندار $B \subseteq S$ نیز احتمالهای پوچ به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{aligned} v(B) = P(N(B) = \circ) &= \mathbb{E}[P(N(B) = \circ \mid Z)] \\ &= \mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_B Z(\xi) d\xi \right) \right]. \end{aligned}$$

برای تابع $u : S \rightarrow [0, 1]$ تابع مولد به صورت زیر تعریف می گردد.

$$G_X(u) = \mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_S (1 - u(\xi)) Z(\xi) d\xi \right) \right].$$

رده فرایندهای کاکس توسیعی از رده های فرایند پواسون است، زیرا اگر Z بر S ثابت باشد، X یک فرایند پواسون است. در واقع رده فرایندهای کاکس، رده بسیار بزرگ و متنوعی از فرایندهای نقطه ای را فراهم می آورد؛ اما دو زیر رده مهم فرایندهای کاکس لگ-گوسی^۱ و فرایندهای کاکس نوفه شلیک بیشتر از سایر انواع فرایندهای کاکس مورد توجه اند [۱۱].

^۱ Log Gaussian

۱.۲.۳ فرایند کاکس لگ-گوسی

فرض کنید $Y = \ln Z$ میدان تصادفی گاوسی در \mathbb{R}^d باشد. هر میدان تصادفی گاوسی یک فرایند تصادفی است که توزیع های با بعد متناهی آن توزیع گاوسی هستند.

تعریف ۴.۲.۳. فرض کنید X فرایند کاکس روی \mathbb{R}^d با میدان هادی $Z = \exp(Y)$ باشد، به طوریکه Y میدان تصادفی گاوسی است. در این صورت X فرایند کاکس لگ-گاوسی یا به طور خلاصه **LGCP** نامیده می شود.

توزیع (X, Y) توسط میانگین و تابع کوواریانس مطابق زیر تعیین می شوند.

$$m(\xi) = \mathbb{E}(Y(\xi)) \quad , \quad c(\xi, \eta) = Cov(Y(\xi), Y(\eta)).$$

تابع شدت فرایند کاکس لگ-گاوسی نیز به صورت زیر بیان می گردد:

$$\rho(\xi) = \exp(m(\xi) + c(\xi, \xi)/2).$$

فرض کنید $c(\xi, \eta) = c(\|\xi - \eta\|)$ تبدیل پایا و همسانگرد به فرم ذیل باشد

$$c(\|\xi - \eta\|) = \sigma^2 r(\|\xi - \eta\|/\alpha)$$

به طوریکه در آن $\sigma^2 > 0$ واریانس و r تابع همبستگی با پارامتر همبسته $\alpha > 0$ باشد.

تابع $r : \mathbb{R}^d \rightarrow [-1, 1]$ با شرط $r(0) = 1$ برای هر $\xi \in \mathbb{R}^2$ تابع همبستگی برای میدان تصادفی گاوسی است اگر و تنها اگر r تابع شبه معین مثبت باشد؛ یعنی برای

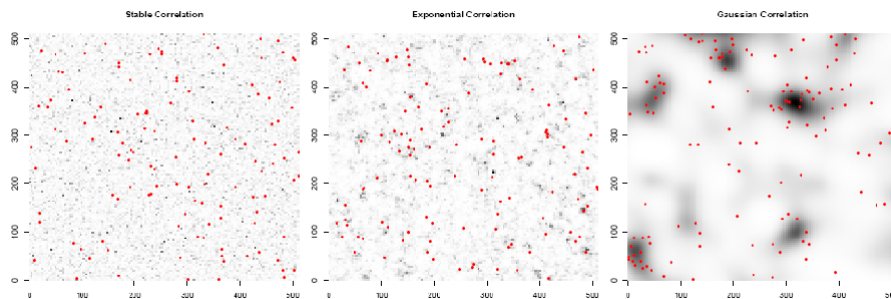
$$i = 1, \dots, n, \quad \xi_i \in \mathbb{R}^d, \quad a_i \in \mathbb{R}$$

$$\sum_{i,j} a_i a_j r(\xi_i, \xi_j) \geq 0.$$

خانواده مفیدی از توابع همبسته خانواده نمائی توانی است که به صورت زیر بیان می گردد:

$$r(\|\xi - \eta\|/\alpha) = \exp(-\|\xi - \eta\|^\delta/\alpha) \quad , \quad \delta \in [0, 2].$$

پارامتر δ میزان همواری تحقق میدان تصادفی گاوسی را کنترل می نماید. به عنوان نمونه برای $\delta = 1$ تابع همبسته نمائی شکل می گیرد و برای $\delta = 1/2$ تابع همبسته پایا و برای $\delta = 2$ تابع همبسته گاوسی رخ می دهد. شکل زیر مدلسازی تحقق فرایند کاکس لگ گاوسی را روی $S = [0, 512]^2$ با $m(\xi) = 4/25$ و $\sigma^2 = 1$ و $\alpha = 0/01$ را به ترتیب از چپ به راست برای توابع همبسته پایا، همبسته نمائی و همبسته گاوسی نشان می دهد.



۲.۲.۳ فرایند کاکس نوفه شلیک

فرض کنید $Y \sim \text{Poisson}(S \times \mathbb{R}^+, \xi)$ و f چگالی یک اندازه احتمال بر (S, B) باشد. فرایند کاکس با میدان هادی

$$Z(u) = \sum_{(c, \gamma) \in Y} \gamma f(\xi - c) \quad (1.3)$$

را یک فرایند کاکس نوفه شلیک با فرایند والد Y و چگالی تغییر وضعیت f می نامند. میدان تصادفی ۱.۳، یک هموار سازی تصادفی از نقاط c توسط چگالی f و با وزن های γ است که نقاط و وزن های (c, γ) توسط فرایند پنهان Y تولید می شوند.

۳.۳ فرایند نقطه ای تجمعی، دافعی و نشان دار

۱.۳.۳ فرایندهای تجمعی

شناسائی مراکز خوشه ای در بسیاری از حیطه های علوم از قبیل باستان شناسی، معدن، جنگلداری و نجوم مورد توجه قرار می گیرد. به عنوان نمونه درختان جوان در یک جنگل طبیعی و کهکشان ها در جهان از نمونه های الگوهای خوشه ای هستند. در الگوهای خوشه ای تراکم نقاط به شدت در فضا تغییر می کنند. در برخی مناطق تراکم بیشتر و در برخی مناطق کمتر می باشد.

تعریف ۱.۳.۳. یک خوشه گروهی از نقاط هستند که فاصله نقاط درونی نسبت به کل الگو کمتر است.

برخی ابهامات اساسی بین ناهمگونی و خوشه بندی وجود دارد. اولین ابهام مربوط به تغییرات فضایی تابع شدت $\lambda(x)$ است و دومین ابهام نیز به استقلال تصادفی نقاط فرایند بستگی دارد [۵].

خوشه بندی توسط مکانیسم های متفاوت رخ می دهد به طوری که نمی توان بر اساس روشهای آماری تمایزی قائل شد. حال به ارائه کلی ترین نوع فرایند خوشه ای می پردازیم:

تعریف ۲.۳.۳. فرض کنید X فرایند نقطه ای متناهی روی \mathbb{R}^d و برای هر $x \in X$ فرایند نقطه ای متناهی Z_x از نقاط به عنوان مرکز خوشه در نقطه x باشد به طوریکه فرایند های مذکور مستقل از یکدیگر باشند. در اینصورت $Z = \bigcup_{x \in X} Z_x$ فرایند خوشه ای مستقل می باشد.

جدول زیر خلاصه ای از فهرست استاندارد برای فرایند های خوشه ای متفاوت که

حالت خاصی از فرایند خوشه ای مستقل می باشند را ارائه می دهد:

عنوان فرایند	خوشه ها	والدین
فرایند خوشه ای مستقل	کلی	کلی
فرایند خوشه ای پواسون	کلی	پواسون
فرایند خوشه ای کاکس	پواسون	کلی
فرایند اسکات-نیمن	پواسون	پواسون
فرایند خوشه ای مترن	پواسون (یکنواخت در گوی)	پواسون (همگن)
فرایند توماس اصلاح شده	پواسون (گاسی)	پواسون (همگن)

مثال ۳.۳.۳. (فرایند توماس) فرایند توماس حالت خاصی از فرایند کاکس می باشد که در آن تابع چگالی به صورت زیر است.

$$f(\xi - c; \theta) = (\sqrt{2\pi}\sigma)^{-d/2} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \|\xi - c\|^2 \right]$$

که در آن $\xi \sim N_d(c, \sigma^2 I)$.

قضیه ۴.۳.۳. (اسلیوینیاک-مک) فرض کنید $X \sim \text{Poisson}(S, \rho)$. برای هر تابع $h : S \times N_{lf} \rightarrow [0, \infty)$ داریم:

$$\mathbb{E} \left[\sum_{\xi \in X} h(\xi, X \setminus \xi) \right] = \int_S \mathbb{E}[h(\xi, X)] \rho(\xi) d\xi.$$

برهان. برای اثبات حالتی را در نظر بگیرید که $\sum_{\xi \in X} h(\xi, X \setminus \xi)$ فقط به X وابسته باشد و برای هر $B \subseteq S$ شرط زیر برقرار باشد:

$$\int_B \rho(\xi) d\xi < \infty$$

با به کارگیری گزاره ۳.۲ از مرجع [۱۰] روابط زیر حاصل می‌گردد:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sum_{\xi \in X} h(\xi, X \setminus \xi) \right] &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(-\mu(B))}{n!} \int_B \cdots \int_B \\ &\quad \sum_{i=1}^n h(x_i, \{x_1, \dots, x_n\} \setminus x_i) \prod_{i=1}^n \rho(x_i) dx_1 \cdots dx_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(-\mu(B))}{(n-1)!} \int_B \cdots \int_B h(x_n, \{x_1, \dots, x_{n-1}\}) \\ &\quad \prod_{i=1}^n \rho(x_i) dx_1 \cdots dx_n \\ &= \int_S \mathbb{E}[h(\xi, X)] \rho(\xi) d\xi \end{aligned}$$

□

۴.۳ فرایندهای دافعی

فرایندهای دافعی به طور طبیعی در کاربردهای بیولوژیکی نمود پیدا می‌کنند. به عنوان نمونه، درختان بالغ در یک جنگل برای رقابت در بدست آوردن نور و مواد مغذی یک فرایند دافعی از خود نشان می‌دهند. محل قرارگیری تمساح‌های مذکر در طول یک رودخانه نیز نمادی از فرایند دافعی می‌باشد. فرایندهای دافعی عموماً به وسیله فرایند نقطه‌ای مارکف مدلسازی می‌شوند. اجرای فرایند نقطه‌ای مارکف تا حدودی از اجرای فرایندهای نقطه‌ای که تاکنون مورد مطالعه قرار گرفته‌اند متفاوت می‌باشد.

فرایند نقطه‌ای X روی $S \subseteq \mathbb{R}^d$ را با چگالی f تعریف شده نسبت به نرخ واحد فرایند پواسون در نظر بگیرید. به علاوه برای خوش تعریفی f می‌بایست $|S| < \infty$ باشد. چگالی مذکور روی مجموعه پیکربندی با نقاط متناهی در S متمرکز باشد، به

طوری که N_f به گونه ای مشابه با N_{lf} که قبلا معرفی شده است، بیان می گردد.

$$N_f = \{x \subset S : n(x) < \infty\}.$$

برای هر $F \subseteq N_f$ داریم:

$$P(X \in F) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp(-|S|)}{n!} \int_S \cdots \int_S I(\{x_1, \dots, x_n\} \in F) f(\{x_1, \dots, x_n\}) dx_1 \cdots dx_n.$$

بر طبق گزاره ۲۴.۴.۱ در فصل های پیشین مشاهده گردید که هرگاه $X \sim \text{Poisson}(S, \rho)$

با شرط $\mu(S) = \int_S \rho(\xi) d\xi < \infty$ باشد در این صورت داریم

$$f(x) = \exp(|S| - \mu(S)) \prod_{\xi \in x} \rho(\xi).$$

در بیشتر موارد به ویژه برای فرایند نقطه ای مارکف، چگالی f به صورت $f = ch$ شناخته

می شود که در آن $h : N_f \rightarrow [0, \infty)$ و ثابت c به صورت زیر تعریف می شود:

$$c^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp(-|S|)}{n!} \int_S \cdots \int_S h(\{x_1, \dots, x_n\}) dx_1 \cdots dx_n.$$

اگر از مدل مارکف در فیزیک آماری استفاده شود، در این صورت c را تابع افراز می نامند.

۱.۴.۳ شدت شرطی پانگلو

بر مبنای اهداف استنتاجی احتمالات، چگالی های فرایندهای نقطه ای مارکف به عنوان ثابت نرمال کننده برای تقریب تا حدودی پیچیده به نظر می رسد. البته می توان با کمک تکنیک هایی احتمالات تقریبی و برآوردهای پیشین از پارامترها را با استفاده از شدت شرطی محاسبه نمود. شدت شرطی یک مشخصه اساسی برای فرایندهای نقطه ای به شمار می آید و در فرایند مارکف نقش کلیدی دارد.

تعریف ۱.۴.۳. شدت شرطی پاپانگلو^۲ برای یک فرایند نقطه ای X با چگالی f به صورت زیر تعریف می شود:

$$\lambda^*(x, \xi) = \frac{f(x \cup \xi)}{f(x)}, \quad x \in N_f, \xi \in S \setminus x$$

در این تعریف منظور از نماد $S \setminus x$ ، مجموعه S منهای مجموعه x است.

تعریف ۲.۴.۳. فرایند نقطه ای X با تابع چگالی f را در نظر بگیرید.

(i) فرایند X (یا f) را جاذب می نامند هرگاه

$$\lambda^*(x, \xi) \leq \lambda^*(y, \xi), \quad x \subset y;$$

(ii) فرایند X (یا f) را دافع می نامند هرگاه

$$\lambda^*(x, \xi) \geq \lambda^*(y, \xi), \quad x \subset y.$$

به طور شهودی با داشتن $X \setminus \xi$ ، جاذب بودن بدین معناست که شانس قرار داشتن ξ در X یک تابع افزایشی از x است در حالی که دافع بودن معنایی عکس دارد. در بحث فوق، f برای هر $x \in X$ یک تابع نسبتاً عمومی به شمار می رود. با این حال تجربه های آماری نشان می دهد که اغلب تقابل دو بدو برای مدلسازی بسیاری از انواع الگوی نقطه ای ضروری می باشد. لذا در شدت شرطی پاپانگلو، محدود نمودن تابع f به صورت زیر کارایی بهتر را بیان می نماید.

$$f(x) = c \prod_{\xi} g(\xi) \prod_{\{\xi, \eta\} \subseteq x} h(\{\xi, \eta\}) \quad (2.3)$$

به طوریکه در آن h تابع تقابل می باشد. به عبارت دیگر؛ h تابعی نامنفی است که برای آن سمت راست رابطه ۲.۳ نسبت به فرایند پواسون با نرخ واحد انتگرال پذیر است. برد تقابل مذکور نیز به صورت زیر تعریف می شود:

$$R = \inf\{r > 0 : \forall\{\xi, \eta\} \subset S, h(\{\xi, \eta\}) = 1 \text{ if } \|\xi - \eta\| > r\}.$$

فرایند نقطه ای تقابل به خاطر ثابت نرمال کننده ناشناخته c ، از نظر تحلیلی محدودیت هایی دارد. در این مورد فقط یک استثنا وجود دارد و این مربوط به فرایند نقطه ای پواسون است که $h(\{\xi, \eta\}) \equiv 1$ و $R = \circ$.

شدت شرطی پاپانگلو، برای $f(x) > \circ$ و $\xi \notin x$ به کمک تابع تقابل مذکور به صورت زیر تعریف می گردد

$$\lambda^*(x, \xi) = g(\xi) \prod_{\eta \in x} h(\{\xi, \eta\}).$$

بر طبق تعریف فرایند دافعی، f دافع است اگر و تنها اگر $h(\{\xi, \eta\}) \leq 1$. اغلب فرایندهای تقابل دو بدو دافعی هستند. برای حالت جاذب، برای $\xi, \eta \in S$ مجزا، هرگاه $h(\{\xi, \eta\}) \geq 1$ ، در این صورت همواره f خوش تعریف نمی باشند.

حال یک حالت خاص را برای $g(\xi)$ که ثابت و $h(\{\xi, \eta\}) = h(\|\xi - \eta\|)$ در نظر بگیرید. در این حالت فرایند تقابل دو بدو همگن نامیده می شود.

مثال ۳.۴.۳. (فرایند اشتراس) فرایند تقابل دو بدو ساده اما غیر بدیهی فرایند اشتراس^۳ نامیده می شود به طوریکه

$$h(\|\xi - \eta\|) = \gamma^{I(\|\xi - \eta\| \leq R)}$$

که در آن $\circ = 1$ در نظر گرفته می شود. پارامتر تقابل $\gamma \in [\circ, 1]$ و $R > \circ$ برد تقابل هستند. چگالی فرایند اشتراس نیز به صورت ذیل بیان می گردد:

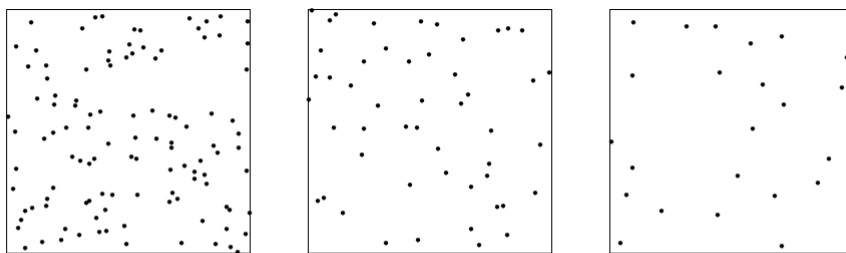
$$f(x) \propto \beta^{n(x)} \gamma^{S_R(x)}$$

همچنین

$$S_R(x) = \sum_{\{\xi, \eta\} \subseteq x} I(\|\xi - \eta\| \leq R)$$

تعداد فرایند نقطه ای در x که مجزا از R یا نسبتاً جدا هستند، می باشند. دو حالت خاص از فرایند اشتراس بیشتر مورد توجه قرار دارند. حالت اول وقتی $\gamma = 1$ ، لذا در این حالت چگالی پواسون (S, β) نسبت به نرخ واحد بیان می شود. حال اگر $\gamma < 1$ در این صورت فرایند با برد تقابل R دافعی است. به علاوه اگر $\gamma = 0$ از نزدیک شدن نقاط از فاصله کمتر از R ممانعت به عمل می آید. در این حالت فرایند را فرایند هسته سخت می نامند.

نمودارهای زیر تحقق فرایند اشتراس را روی $S = [0, 1]^2$ نشان می دهند. در این دیاگرام، $\beta = 100$ ، $R = 0.1$ و به ترتیب از چپ به راست $\gamma = 1/0, 0.5, 0/0$ در نظر گرفته می شود.



نمودار ۱۵. سه حالت مختلف فرایند اشتراس

۲.۴.۳ فرایند پواسون نشان دار

آخرین مطلب در این بخش به فرایندهای پواسون نشاندار مربوط می شود. در فصلهای گذشته در مورد فرایند نشان دار مطالبی ارائه گردیده است، در این بخش پس از معرفی فرایند نشان دار پواسون به مدلسازی سه نوع از نشان ها پرداخته می شود.

تعریف ۴.۴.۳. فرض کنید Y یک فرایند پواسون $Poisson(T, \rho)$ باشد به طوریکه ρ

تابع شدت موضعا انتگرال پذیر باشد. همچنین شرط بر روی Y اعمال شده و نشانهای

$$\{m_\xi : \xi \in Y\}$$

متقابلا مستقل در نظر بگیرید. در این صورت $X = \{m_\xi : \xi \in Y\}$ فرایند پواسون نشان دار خوانده می شود. اگر نشان ها توزیع های مستقل و منحصر بفردی با توزیع معمولی Q داشته باشند، در این صورت Q توزیع نشان نامیده می شود.

تبصره ۵.۴.۳. فرض کنید X فرایند پواسون نشاندار با $M \subseteq \mathbb{R}^d$ با شرط Y تعریف شده است. هر نشان m_ξ چگالی پیوسته یا ناپیوسته مانند p_ξ دارد که به $Y \setminus \xi$ وابسته نمی باشد. قرار دهید $\rho(\xi, m) = \phi(\xi)p_\xi(m)$. در این صورت $X \sim \text{Poisson}(T \times M, \rho)$.

همچنین به کمک فرایند مذکور، اگر تابع چگالی تعریف شده روی M یعنی

$$\kappa(m) = \int_T \rho(\xi, m) d\xi$$

موضعا انتگرال پذیر باشد، در این صورت برای هر مجموعه بورد کراندار مانند B از M

داریم

$$\begin{aligned} P(\{m_\xi : \xi \in Y\} \cap B = \phi) &= 1 - P(X \cap (T \times B) \neq \phi) \\ &= \exp\left(-\int_B \kappa(m) dm\right) \end{aligned}$$

لذا با به کارگیری قضیه ۱۶.۴.۱، $\{m_\xi : \xi \in Y\} \sim \text{Poisson}(M, \kappa)$.

حال پس از معرفی فرایند پواسون نشان دار، در مورد سه نوع مدل نشان تحت عنوان نشان های مستقل، مدل میدان تصادفی و نشان های شدت وزن دار بحث خواهیم کرد.

(i) ساده ترین نوع مدل برای نشان ها، مدل نشان های مستقل می باشد. در این مدل، نشان ها متغیرهای تصادفی مستقل و منحصر بفرد هستند (مستقل از محل الگوی نقاط

می باشند). اگر $X = \{m_\xi : \xi \in Y\}$ در این صورت چگالی X به صورت ذیل تعیین می شود:

$$\pi(X) = \pi(Y)\pi(m).$$

(ii) مدل میدان تصادفی یا بطور معادل نشان زمین آماری، سطح بعدی از توسیع ها می باشد. در مدل مذکور، نشان ها همبسته در نظر گرفته می شوند اما مستقل از فرایند نقطه ای Y هستند. نشان ها میدان هادی از میدان تصادفی زیر می باشند

$$m_\xi = Z(\xi)$$

به طوری که در آن Z میدان تصادفی مانا از قبیل میدان تصادفی گاوسی است. (iii) در سطح بعدی از تعمیم ها، فرض کنید یک همبستگی بین چگالی نقاط و نشان ها وجود داشته باشد. به عنوان مثال از چنین مدل هایی می توان مدل کاکس لگ- گاوسی شدت وزن دار را متصور شد. Y یک $LGCP$ مانا با میدان هادی Z است. هر نقطه $\xi \in Y$ نیز با یک نشان که به صورت زیر علامت گذاری شده است متناظر می باشد:

$$m_\xi = a + bZ(\xi) + \epsilon(\xi)$$

که در آن ξ توزیع منحصر بفرد $N(0, \sigma_\epsilon^2)$ و a و b پارامترهای مدل هستند.

فصل ۴

شبیه سازی و روش های بیزی

۱.۴ مقدمه

در این فصل با توجه به فرایندهای نقطه ای مدرن که در فصل سوم ارائه گردید، شبیه سازی و روشهای تحلیل بیزی عنوان گردیده و روش های مدلسازی فرایند کاکس لگ - گاوسی ارائه می شود. همچنین فرایندهای خوشه ای و الگوریتم فرایند مرگ و زندگی بر اساس استباط بیزی مطالعه می شود.

۲.۴ شبیه سازی سریع برای فرایند کاکس لگ-گاوسی

مطالب این فصل با اقتباس از تحقیقات مولر و واگپترسن در سال ۱۹۹۸ می باشد. بر طبق آنچه در فصلهای پیشین ارائه شد، میدان تصادفی گاوسی به طور کامل توسط توزیع های با بعد متناهی تعیین می گردد. لذا برای شبیه سازی میدان تصادفی گاوسی، آن را به شبکه های یکنواخت تجزیه نموده و توزیع گاوسی با بعد متناهی مناسب روی این شبکه تعریف می شود. در این راستا میدان تصادفی گاوسی Y روی مربع واحد

$S = [0, 1]^2$ را در نظر بگیرید. اینک مربع واحد به یک شبکه $M \times M$ با عنوان I با عناصر

$$D_{ij} = [(i-1)/M, i/M] \times [(j-1)/M, j/M]$$

تجزیه می نماییم، به طوریکه مرکز هر عنصر D_{ij} به صورت زیر می باشد

$$(c_i, c_j) = ((2i+1)/2M, (2j+1)/2M)$$

حال تقریب میدان تصادفی گاوسی $\{Y(s)\}_{s \in [0, 1]^2}$ توسط مقادیر $Y((c_i, c_j))$ در مرکز هر عنصر D_{ij} صورت می گیرد. پروسه مذکور را به راحتی می توان به شبکه های مثلثی نیز تعمیم داد.

حال ترتیب قاموسی از اندیس های $k = 2Mi + M(2Mj - 1)$ را انتخاب کنید به طوریکه $Y_k = Y((c_i, c_j))$. فرض کنید $Y = (Y_1, \dots, Y_{M^2})^T$. لذا هدف شبیه سازی $Y \sim N_{M^2}(\mu, \Sigma)$ است بطوری که بدون اینکه خللی به کلیت مساله وارد شود فرض کنید میانگین میدان تصادفی گاوسی مانا برابر صفر است. در عبارت مذکور، Σ عناصری به شکل

$$C(\|(c_i - c_j) - (c'_i - c'_j)\|) = \sigma^2 r(\|(c_i, c_j) - (c'_i, c'_j)\| / \alpha)$$

دارد و یا می توان هر نوع تابع همبسته همسانگرد دیگر نیز در نظر گرفت. در تئوری فوق، اگر Σ ماتریس قطعی مثبت متقارن باشد شبیه سازی با استفاده از تجزیه کلسکی^۱ از Σ به سادگی صورت می گیرد. به عنوان یک نمونه از تجزیه Σ ، GG^T را در نظر بگیرید که در آن G ماتریس پایین مثلثی، شبیه سازی M^2 با متغیرهای با میانگین ۰ و واریانس ۱، به علاوه $x = (x_1, \dots, x_{M^2})^T$ و $Y = Gx$ می باشد. همچنین لازم

^۱Cholesky

است با معکوس Σ برای فراخوانی دترمینان نیز در دسترس باشد.

لازم به ذکر است برای تعداد زیاد شبکه، مدل سازی M می بایست در سطح وسیعی صورت پذیرد. به عنوان نمونه برای مقدار ۱۲۸، Σ یک ماتریس $128^2 \times 128^2$ است. لذا شبیه سازی میدان تصادفی گاوسی روی مجموعه کراندار $S \subset \mathbb{R}^2$ برای $d \geq 3$ منطقی به نظر نمی رسد. زیرا تجزیه کلسکی از نظر بهینه سازی مقرون به صرفه نمی باشد و هزینه محاسباتی بالایی دارد. همچنین هر چه M بزرگتر باشد حافظه مناسب برای کامپیوترها جهت مدل سازی موجود نخواهد بود.

حال Σ را به عنوان ماتریس قطعی نا منفی متقارن در نظر بگیرید و برای سادگی شبیه سازی Y روی بازه $[0, 1]$ به عنوان فضای اقلیدسی یک بعدی فرض کنید. روش ذیل که توسط هلد^۲ و همکاران با تغییرات جزئی، برای هر نوع ابر مکعب مستطیل در فضای اقلیدسی کارایی دارد.

فرض کنید برای هر ثابت دلخواه مثبت مانند n همواره $M = 2^n$. همچنین M را ماتریس توپلیتس؛ ماتریسی که در آن هر زیر قطر از سمت چپ به سمت راست دارای مقدار ثابت است را قرار دهید. سپس Σ به یک ماتریس دوری از اندازه $2M \times 2M$ طبق روند زیر جانشانی می گردد. بازه $[0, 1]$ را به بازه $[0, 2]$ و نگاشت $[0, 2]$ به توی یک دایره با طول محیط ۲ را بسط دهید. همچنین شبکه را از I با M عنصر به I_{ext} با $2M$ عنصر توسعه دهید. d_{ij} را به عنوان کمترین فاصله روی این دایره بین c_i و c_j قرار دهید. در این صورت

$$\Sigma_{ext} = (C(d_{ij}))_{(i,j) \in I_{ext}}$$

و ماتریس دوری از اندازه $2M \times 2M$ می باشد.

سوالی که در اینجا به ذهن می رسد این است که چرا راه حل هموار نمودن مشکل مدلسازی، توسیع ماتریس حتی به میزان چهار برابر می باشد. برای پاسخ به این ابهام، به جهت وجود رابطه بین مقدار ویژه و بردار ویژه ماتریس دوری و تبدیل فوریه گسسته این راه حل منطقی به نظر می رسد. لذا با استفاده از تبدیل فوریه سریع، مقادیر ویژه و بردار ویژه ماتریس دوری محاسبه می گردند. حال با در دست داشتن این مقادیر، همه اعمال ماتریسی مورد نیاز را می توان ارائه نمود. به ویژه روند فوق طراحی یک مقدار از $N_M(\circ, \Sigma)$ با استفاده از طراحی $N_{2M}(\circ, \Sigma_{ext})$ و با اولین مقدار M میسر می سازد. **تعریف ۱.۰۲.۴.** ماتریس C از مرتبه $M \times M$ دوری است اگر و تنها اگر به شکل زیر باشد.

$$C = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_{M-1} \\ c_{M-1} & c_0 & c_1 & \dots & c_{M-2} \\ c_{M-2} & c_{M-1} & c_0 & \dots & c_{M-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_0 \end{pmatrix}$$

لازم به یادآوری است که $c = (c_0, c_1, \dots, c_M)^T$ مبنای C است.

فرض کنید λ مقدار ویژه از C با بردار ویژه نظیر e باشد. در این صورت $Ce = \lambda e$.

رابطه فوق را می توان سطر به سطر برای M با معادلات تفاضلی بازنویسی نمود

$$\sum_{i=0}^{j-1} c_{M-j+i} e_i + \sum_{i=j}^{M-1} c_{i-j} e_i = \lambda e_j \quad j = 0, \dots, M-1 \tag{1.4}$$

$$\implies \sum_{i=0}^{M-1-j} c_i e_{i+j} + \sum_{i=M-j}^{M-1} c_{i-(M-j)} e_i = \lambda e_j$$

این دستگاه از M معادله تفاضلی خطی ضرایب ثابت دارند، لذا با دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت مشابهت دارند. در نتیجه حدس می زنیم برای اسکالر

مختلط به فرم ρ ریشه ای به فرم $e_j \propto \rho^j$ داشته باشند. حال رابطه ۱.۴ را به صورت زیر بازنویسی می کنیم

$$\sum_{i=0}^{M-1-j} c_i \rho^i + \rho^{-M} \sum_{i=M-j}^{M-1} c_i \rho^i = \lambda.$$

اینک ρ را به صورت $\rho^{-M} = 1$ انتخاب کنید در این صورت

$$\lambda = \sum_{i=0}^{M-1} c_i \rho_i$$

و

$$\mathbf{e} = \frac{1}{\sqrt{M}} (1, \rho, \rho^2, \dots, \rho^{M-1})^T,$$

به طوریکه در آن عامل \sqrt{M} در دسترس بوده و \mathbf{e} متعامد است به عبارت دیگر $\mathbf{e}^T \mathbf{e} = 1$. با توجه به اینکه $\rho^M = 1$ و ρ مختلط است، M ریشه های ۱ به صورت

$$\{\exp(i\pi \nu j / M), \quad j = 0, \dots, M-1, \quad \nu = \sqrt{-1}\}$$

بنابراین بردارهای ویژه M به صورت زیر هستند.

$$\lambda_j = \sum_{i=0}^{M-1} c_i \exp(-i\pi \nu i j / M), \quad j = 0, \dots, M-1$$

که متناظر با بردارهای ویژه به فرم زیر هستند

$$\mathbf{e}_j = \frac{1}{\sqrt{M}} (1, \exp(-i\pi \nu j / M), \exp(-i\pi \nu j^2 / M), \dots, \exp(-i\pi \nu j(n-1) / M))^T$$

برای $j = 0, \dots, M-1$.

قرار دهید $\omega = \exp(-2\pi i/M)$ و فرض کنید

$$F = (\mathbf{e}_0 | \mathbf{e}_1 | \cdots | \mathbf{e}_{M-1}) = \frac{1}{\sqrt{M}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega^0 & \omega^1 & \omega^2 & \dots \\ \omega^{M-1} & & & & \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \dots & \omega^{2(M-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & \omega^{M-1} & \omega^{2(M-1)} & \dots & \omega^{(M-1)(M-1)} \end{pmatrix}$$

ماتریس تبدیل فوریه گسسته به طور خلاصه (DFT) باشد و Λ را به صورت $\Lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{M-1})$ تعریف نمایید.

F یک ماتریس یکانی است که $F^{-1} = F^H$ که در آن F^H ترانپوز الحاقی مختلط از F بوده و داریم

$$\Lambda = \sqrt{M}(F\mathbf{c}).$$

با محاسبه ساده می توان نشان داد که $C = F\Lambda F^H$ است. بنابراین هر ماتریس دوری توسط Λ قطری شده است.

با توجه به اینکه F ماتریس تبدیل فوریه گسسته می باشد، F_v را می توان توسط تبدیل فوریه از برخی بردارها مانند v محاسبه نمود در نتیجه $F^H v$ نیز از معکوس تبدیل فوریه (یا به طور خلاصه $IDFT$) از v محاسبه می گردد.

حال فرض کنید X_{ext} یک بردار از $2M$ توزیع های منحصربفرد و مستقل متغیرهای تصادفی $N(0, 1)$ باشد. در این صورت Y_{ext} در توزیع با $\Sigma_{ext}^{1/2} X_{ext}$ هم ارز است.

حال $\Sigma_{ext} = F\Lambda F^H$ قطری می‌شود که نتیجه‌های زیر حاصل می‌شود.

$$\Sigma_{ext}^{1/2} = F\Lambda^{1/2}F^H, \quad Y_{ext} \stackrel{d}{=} \Sigma_{ext}^{1/2} X_{ext} = F\Lambda^{1/2}F^H X_{ext}$$

در نتیجه $F^H X_{ext}$ تبدیل فوریه گسسته معکوس از X_{ext} است و

$$\Lambda^{1/2} = \sqrt{\sqrt{M}DFT(c)}.$$

فرض کنید $b = \Lambda^{1/2}F^H X_{ext}$ باشد در این صورت

$$b = \sqrt{\sqrt{M}DFT(c)} \odot IDFT(X_{ext})$$

که در آن \odot نشان دهنده حاصلضرب عناصر می‌باشد. در نهایت قرار دهید

$$Y_{ext} \stackrel{d}{=} \Sigma_{ext}^{1/2} X_{ext} = DFT(b)$$

$$= DFT\left(\sqrt{\sqrt{M}DFT(c)} \odot IDFT(X_{ext})\right)$$

Y از قرار دادن اولین عناصر M از Y_{ext} بدست می‌آید.

روند مشروح، وقتی که تعداد عناصر زیاد باشد برای تجزیه کلسکی از Σ روش سریعی به نظر می‌رسد. لذا وقتی بخواهیم میدان تصادفی گاوسی را در \mathbb{R}^2 شبیه‌سازی نماییم، توسیع ماتریس کوواریانس در اطراف یک چنبره برای تعریف فاصله انجام می‌گیرد. این روش تا انتها با یک بلوک از ماتریس دوری و $DFT - 2D$ انجام می‌پذیرد. به طریق مشابه، برای شبیه‌سازی میدان تصادفی گاوسی در \mathbb{R}^d از توسیع ماتریس کوواریانس به عنوان بلوک ماتریس دوری تو در تو و با استفاده از $DFT - 3D$ انجام می‌پذیرد.

۳.۴ مدل‌سازی بیزی از فرایند کاکس لگ-گوسی

حال مجدداً فرایند کاکس لگ-گوسی را در نظر بگیرید. فرض کنید تحقق x از الگوی نقطه‌ای فضایی X در $S \subset \mathbb{R}^d$ را داریم، به طوریکه هدف تعیین تابع شدت می‌باشد.

در این راستا مدل فرایند کاکس لگ - گاوسی برای داده های موجود مناسب می باشد. شدت تعریف شده به صورت

$$Z(\xi) = \exp(Y^*(\xi) + \mu)$$

می باشد که در آن Y^* میدان تصادفی گاوسی با میانگین صفر و مانا است. فرض کنید $Y(\xi) = Y^*(\xi) + \mu$ و μ را با کمک تابع کوواریانس همسانگرد و α و σ^2 با ضابطه $c(\cdot) = \sigma^2 r(\cdot/\alpha)$ مشخص می شود. چگالی فرایند نسبت به نرخ واحد پواسون به صورت ذیل نوشته می شود

$$\pi(x | Y, \mu) \propto \exp\left(-\int_S \exp(Y(\xi)) d\xi\right) \prod_{x_i \in X} \exp(Y(x_i)).$$

بعد از گسسته سازی به شبکه مناسب و سپس توسیع، لگاریتم چگالی به صورت زیر تعریف می شود.

$$\ln[\pi(x | Y = y)] \propto \sum_{(i,j) \in I_{ext}} (-A_{ij} \exp(y_{ij}) + n_{ij} y_{ij})$$

به طوریکه در آن A_{ij} سطح هر عنصر D_{ij} بوده و n_{ij} تعداد نقاط x موجود در عنصر D_{ij} است. به علاوه مقدار فرایند گاوسی در مرکز عنصر D_{ij} است. اگر $(i, j) \notin I$ قرار دهید $A_{ij} = n_{ij} = 0$. مولر و همکاران در سال ۱۹۹۸ نشان داده اند که انجام محاسبات با استفاده از $\Sigma^{-1/2} W_{ext}$ که در آن $W_{ext} \sim N_d(0, I)$ و $d = (2M)^2$ مقرون به صرفه است. حال $[W | x]$ لگاریتم چگالی به صورت زیر دارد:

$$\ln[\pi(w | x)] \propto -1/2 \|w\|^2 + \sum_{(i,j) \in I_{ext}} [-A_{ij} \exp((\Sigma^{1/2} w)_{ij}) + n_{ij} ((\Sigma^{1/2} w)_{ij})].$$

با توجه به اینکه فرایند مذکور فرم ساده شده ای ندارد، لذا نیاز است در هر بار مقدار w به روز رسانی شود. از این رو به جای این متد، مولر و همکاران در سال ۱۹۹۸ با

استفاده از روشی با عنوان $MALA$ ^۳ را پیشنهاد داده و در ادامه روبرت و همکاران در سال ۱۹۹۷ تحقیقات موجود را ادامه دادند.

روش $MALA$ مستلزم محاسبه گرادیان پسین می باشد که آن را با نماد $\nabla(w)$ نشان داده و با هم ارزی زیر بیان می گردد

$$\nabla(w) \equiv \frac{\partial \ln[\pi(w | x)]}{\partial w} = -w + \Sigma^{1/2} (n_{ij} - \exp(\Sigma^{1/2} w) A_{ij})_{(i,j) \in I_{ext}}$$

$MALA$ در دو گام مشخص می گردد. گام اول، اگر $w^{(t)}$ تصویر اخیر باشد، یک تصویر جدید $w^{(t+1)}$ از توزیع نرمال چند متغیره مستقل با واریانس معمولی h و میانگین زیر پیشنهاد می شود

$$m(w^{(t)}) = w^{(t)} + (h/2)\nabla(w^{(t)})$$

گام دوم، با احتمال

$$1 \wedge \frac{\pi(\omega^{(t+1)} | x) \exp(-\|\omega^{(t+1)} - m(\omega^{(t+1)})\|^2 / (2h))}{\pi(w^{(t)} | x) \exp(-\|w^{(t)} - m(w^{(t)})\|^2 / (2h))}$$

برای $w^{(t+1)} = \omega^{(t+1)}$ ، در غیر اینصورت $w^{(t+1)} = w^{(t)}$.

۴.۴ تحلیل بیزی فرایند خوشه ای و الگوریتم فرایند مرگ و تولد

فضایی

در این بخش فرض کنید X فرایند نقطه ای متناهی روی \mathbb{R}^d و با شرط روی X که برای هر $\xi \in X$ یک فرایند نقطه ای متناهی مانند Y_ξ از نقاط به مرکز ξ در ارتباط باشد به طوریکه هر دو فرایند مستقل از یکدیگر باشند. در این صورت فرایند به صورت

$$Y = \cup_{\xi \in X} Y_\xi$$

فرایند خوشه ای مستقل می باشد. همچنین فرض کنید فرایند والد X مشاهده نمی شود. برای سادگی نمایش، فرض می کنیم که فرایندهای X و Y هر دو بر روی زیر مجموعه کراندار S از \mathbb{R}^d در نظر گرفته شوند و برای جلوگیری از اثرات لبه، فرایند Y روی کل S قابل مشاهده باشد.

قرار دهید هر Y_ξ فرایند پواسون با شدت $h(\cdot, \xi)$ باشد. داده های مشاهده شده را با $y = \{y_1, y_2, \dots\}$ نشان می دهیم. همچنین فرض می کنیم برخی از نقاط در y هیچ خوشه ای با دیگر نقاط ندارند و این نقاط صرفاً از یک فرایند پواسون همگن با شدت ϵ پیروی می کنند. در این صورت تابع شدت برای Y ، با شرط روی $X = x =$ $\{x_1, \dots, x_n\}$ به صورت زیر بیان می گردد

$$\lambda(\cdot | x) = \epsilon + \sum_{i=1}^n h(\cdot; x_i),$$

همچنین چگالی شرطی Y برای هر x داده شده نسبت به نرخ واحد پواسون به صورت زیر نشان داده می شود

$$\pi(y | x) = \exp \int_S [\lambda(\eta | x) - \lambda(\eta)] d\eta \prod_{\eta \in y} \lambda(\eta; x).$$

هدف از تحلیل تعیین $\lambda(\cdot | x)$ می باشد. با توجه به اینکه x مشاهده نمی شود و داده پنهان است لذا می بایست تعیین گردد. برای دستیابی به این هدف، لازم است پسین X توسط y داده شده تعیین گردد

$$\begin{aligned} \pi(x | y) &\propto \pi(y | x) \pi(x) \\ &= \pi(x) \exp \left(\int_S [\lambda(\eta | x) - \lambda(\eta)] d\eta \right) \prod_{\eta \in y} \lambda(\eta; x), \end{aligned}$$

$\pi(x)$ چگالی پسین برای X است. برای اینکه موضوع ملموس تر باشد، قرار دهید $X \sim \text{Poisson}(S, \rho)$ به طوریکه لزوماً همگن نیست.

شدت شرطی پاپانگلو پسین نیز به صورت زیر تعریف می شود:

$$\lambda_{X|Y}^*(x | y, \xi) = \lambda_X^*(x, \xi) \exp \left[- \int_S h(s | \xi) ds \right] \prod_{\eta \in y} \left[1 + \frac{h(\eta; \xi)}{\lambda(\eta | x)} \right]$$

در بحث مذکور، استفاده از الگوریتم هایی که در بخش های پیشین معرفی گردید مقرون به صرفه به نظر نمی رسد. یکی از الگوریتم هایی پیشنهادی که توسط گرین در سال ۱۹۹۵ معرفی گردید، یک چالش برای روند اخیر می باشد به طوریکه حداقل چهار الگوریتم امکان پذیر بیان شده است که نام این الگوریتم *RJMCMC* است. همچنین در این بخش، فقط یکی از موارد مورد مطالعه قرار گرفت، در حالیکه توسیع های بیشتر توسط پرستون در سال ۱۹۷۷ ارائه شده است.

۱.۴.۴ الگوریتم مرگ و تولد فضایی

فرایند مرگ و تولد فضایی در سال ۱۹۷۷ توسط پرستون^۴، معرفی گردید و در سال ۲۰۰۴ توسط مولر و همکاران مورد مطالعه و توسیع قرار گرفت. اساس این فرایند بر پایه فرایند مارکف زمان پیوسته می باشد که انتقالها هم تولد و هم مرگ می باشند، به طوری که برای شبیه سازی فرایند نقطه ای فضایی مورد استفاده قرار می گیرند. هدف از این بخش، ساخت یک فرایند مرگ و تولد فضایی برای شبیه سازی یک فرایند نقطه ای والد پنهان X از پسین $\pi(x | y)$ است، به طوریکه فرزندان یا دخترها داده شده باشند. اگر نرخ مرگ و تولد بر اساس نظریه پرستون در معادله تعادل تفضیلی صدق کند

$$\pi(x | y)b(x, \xi) = \pi(x \cup \{\xi\} | y)d(x \cup \{\xi\}, \{\xi\}), \quad (۲.۴)$$

در این صورت زنجیر زمان برگشت پذیر است و فرایند مرگ و تولد فضایی توزیع تعادل منحصر بفرد $\pi(x | y)$ را دارد به طوری که در هر توزیع از عبارت شهودی همگراست. در معادله ۲.۴، $b(x, \xi)$ نرخ تولد برای افزودن یک نقطه جدید مانند ξ به پیکربندی اخیر x از فرایند نقطه ای X می باشد. به علاوه، $d(x, \xi)$ بیانگر نرخ مرگ برای برداشتن یک نقطه مانند ξ از x است. استراتژی معمولی بر این اساس است که نرخ مرگ ثابت در نظر گرفته شود و از نرخ تولد متناسب با شدت شرطی پاپانگلو پسین استفاده می گردد. البته، ممکن است محاسبه نرخ تولد کلی، کمی مشکل باشد و ممکن است تعداد زیادی از عبارات در هر فراورده بدست آید. نرخ تولد جایگزین، توسط ون لی شات^۵ در سال ۲۰۰۲ به صورت زیر معرفی گردید:

$$b(x, \xi) = \lambda_X^*(x, \xi) \left[1 + \sum_{\eta \in y} \frac{h(\eta; \xi)}{\epsilon} \right].$$

برای تصدیق معادله تعادل تفضیلی، نرخ مرگ برای حذف ξ از $x \cup \{\xi\}$ به صورت زیر است

$$d(x \cup \{\xi\}, \xi) = \frac{\exp[\int_S h(s; \xi) ds]}{\prod_{\eta \in y} \left[1 + \frac{h(\eta; \xi)}{\lambda(\eta|x)} \right]} \left[1 + \sum_{\eta \in y} \frac{h(\eta; \xi)}{e} \right]. \quad (3.4)$$

نرخ تولد کلی نیز به صورت زیر بیان می گردد:

$$\begin{aligned} B(x) &= \int_S b(x, \xi) d\xi \\ &= \int_S \lambda_X^*(x, \xi) \left[1 + \sum_{\eta \in y} \frac{h(\eta; \xi)}{\epsilon} \right] \end{aligned}$$

همچنین نرخ مرگ در حالت کلی نیز به صورت $D(x) = \sum_{\xi \in x} d(x, \xi)$ است.

شرایط اعمال شده بر روی نرخ تولد کلی و نرخ مرگ کلی از طریق اعمال شرط کراننداری

می باشد، به عبارت دیگر، نرخ تولد می بایست توسط ثابت B از بالا کراندار باشد و نرخ مرگ نیز توسط ثابت $D \geq 0$ می بایست از پایین کراندار باشد. محاسبه نرخ تولد کلی ممکن است قدری مشکل باشد، همچنین ادغام $\lambda_X^*(x, \xi)$ نسبت به ξ روی S آسان به نظر نمی رسد. بنابراین، مجبور به رد نمونه می شویم. اگر $\lambda_X^*(x, \xi) \leq \lambda$ در x و ξ یکنواخت باشد و $h(\eta; \xi) \leq H$ در η و ξ یکنواخت باشد، در این صورت نرخ تولد کلی کراندار است:

$$\begin{aligned} B(X) &\leq \lambda \left[|S| + \frac{1}{\epsilon} \sum_{\eta \in y} \int_S h(\eta; \xi) d\xi \right] \\ &\leq \lambda |S| \left[1 + \frac{n(y)H}{\epsilon} \right] \equiv B \end{aligned}$$

نرخ مرگ کلی توسط $n(x)(1 + H/\epsilon)^{-n(y)}$ از بالا کراندار است. جهت اطلاعات بیشتر در این زمینه به کارهای تحقیقاتی لی شات و همکاران در سال ۲۰۰۲ مراجعه شود.

فرض کنید $h(\eta; \xi)$ روی S به سادگی ادغام شود. در اینجا نرخ تولد در حالتی که فرایند مترن و فرایند توماس اصلاح شده مدنظر است مورد بررسی قرار می گیرد.

$$B = \lambda \left[|S| + \frac{1}{\epsilon} \sum_{\eta \in y} \int_S h(\eta; \xi) d\xi \right].$$

اگر وضعیت موجود x است، بعد از زمان انتظار توزیع یافته به صورت نمائی با نرخ $B + D(X)$ ، مرگ یک نقطه در x با احتمال $D(X)/[B + D(x)]$ اتفاق می افتد. اگر یک مرگ اتفاق افتد، نقطه ξ از x با احتمال $d(x, \xi)/D(X)$ حذف می گردد. یک تولد با احتمال متمم $B/[B + D(x)]$ پیشنهاد می گردد. نمونه یک کاندیدا مانند ξ از چگالی ترکیبی به صورت زیر است

$$\frac{\lambda}{B} \left[1 + \sum_{\eta \in y} \frac{h(\eta | \xi)}{\epsilon} \right]$$

همچنین احتمال پذیرش کاندیدای ξ به عنوان فرایند والد با شدت شرطی پاپانگلو ارتباط مستقیمی دارد و این احتمال به صورت زیر می باشد.

$$\frac{\lambda_X^*(x, \xi)}{\lambda}$$

برای ترسیم کاندیدای ξ از معادله ۱.۴.۴ را می توان به صورت زیر بازنویسی نمود

$$\frac{\lambda|S|}{B} \frac{1}{|S|} + \sum_{\eta \in y} \frac{\lambda \int_S h(\xi | \eta) d\xi}{\epsilon B} \frac{h(\xi | \eta)}{\int_S h(\xi | \eta) d\xi}$$

بنابراین با احتمال $\lambda|S|/B$ یک نقطه یکنواخت روی S ترسیم می شود و با احتمال

$$\lambda \int_S h(\eta | \xi) d\xi / (\epsilon B)$$

نقطه ξ از $h(\xi | \eta) / \int_S h(\xi | \eta) d\xi$ را رسم نمود.

مراجع

- [1] J. E. Basage. *Discussion of the paper by grender and miller*, Journal of the Royal Statistical Society, Series B 56, pp. 591-592.
- [2] A. Baddeley, *Spatial Point Processes and their Applications*, School of Mathematics Statistics, University of Western Australia Nedlands WA 6009, Australia, pp. 1-75.
- [3] D. R. Cox, *Some statistical Some statistical models related with series of events*. Journal of the Royal Statistical Society, Series B 17.
- [4] D. J. Daley, D. Vere-Jones, *An Introduction to the Theory of Point Processes*, Volume I: Elementary Theory and Methods. 2 edition. Springer, (2003).
- [5] P. J. Diggle, *Spatio-temporal point process: methods and applications*, In Finkenstad, B., Held, L., and Isham, V., editors, *Statistical Methods for Spatiotemporal Systems*, .Chapman Hall/CRC., pp. 1-45, (2007).
- [6] P. J. Green, *Reversible jump markov chain monte carlo computation and bayesian model determination*. *Biometrika* 82, pp. 711-732, (1995).
- [7] J. Illian, et al. *Statistical Analysis and Modelling of Spatial Point Patterns*, John Wiley Sons, (2008).
- [8] J. F. C. Kingman, *Poisson Processes*, Oxford University Press, Oxford, (1993).
- [9] J. Moller, A. R. Syversveen, and R. P. Waagepetersen, *Log gaussian cox processes*, *Scand. J. Statist.* 25, pp. 451-482, (1998).

-
- [10] J. Moller, R. P. Waagepetersen, *Statistical Inference and Simulation for Spatial Point Processes*, Chapman and Hall / CRC. (2004).
- [11] J. Moller, R. P. Waagepetersen, *Modern statistics for spatial point processes*, Scandinavian Journal of Statistics, 34, pp. 643-684, (2007).
- [12] C. Palm, *Intensitätsschwankungen im Fernsprechverkehr*, Ericsson Technics, 44, 1943, pp. 1-189, (1943).
- [13] C. J. Preston, *Spatial birth-and-death processes*, Bulletin of the International Statistical Institute, 46, pp. 371-391, (1977).
- [14] G. O. Roberts and R. L. Tweedie, *Exponential convergence of langevin diffusions and their approximations*. Bernoulli 2, pp. 341-363, (1997).
- [15] H. Rue, and H. Held, *Gaussian Markov Random Fields*, Chapman Hall/CRC, (2005).
- [16] M. N. M. van Lieshout and A. J. Baddeley, *Extrapolating and interpolating spatial patterns*, In Lawson, A. B. and Denison, D. G. T., (2002).
- .

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Subject.....	آزمودنی
Retention.....	احتباس
Probability.....	احتمال
Superposition.....	برهم‌نهی
Window.....	پنجره
Poisson.....	پواسون
Configuration.....	پیکربندی
Partition function.....	تابع افراز
Interaction function.....	تابع تقابل
Stable correlation function.....	تابع همبستگی پایا
Functional.....	تابعی
Aggregated.....	تجمعی
Realization.....	تحقق
Random.....	تصادفی
Separable.....	تفکیک پذیر
Joint distribution.....	توزیع توام
Constant.....	ثابت
Attractive.....	جاذب
Density.....	چگالی
Power exponential family.....	خانواده نمائی توانی
Clustering.....	خوشه ای
Repulsive.....	دافعی
binomial.....	دوجمله ای
Rotation.....	دوران

simple	ساده
Simulation	شبیه سازی
Intensity	شدت
Papangelou Conditional Intensity	شدت شرطی پاپانگلو
Latent process	فرایند پنهان
Cox process	فرایند کاکس
Missing process	فرایند گمشده
Point process	فرایند نقطه ای
Marked point process	فرایند نقطه ای نشاندار
Hard core process	فرایند هسته سخت
Spatial	فضایی
Bounded	کراندار
Circulate matrix	ماتریس دوری
Toeplitz matrix	ماتریس توپلیتس
Stationary	مانا
Disjoint	مجزا
Independent	مستقل
Absolutely continuous	مطلقا پیوسته
Coincident	منطبق
Locally finite	موضعا متناهی
Generating	مولد
Field	میدان
Driven	میدان هادی
Thinning	نازک شده
Invariant	ناوردا
heterogeneity	ناهمگن
Geostatistical marking	نشان زمین آماری
Daughter point	نقطه دختر
Parent point	نقطه والد
Equivalent	هم ارزی
Gaussian correlation function	تابع همبستگی گاوسی
Isotropic	همسانگرد

Homogeneous همگن

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Absolutely continuous	مطلقاً پیوسته
Aggregated	تجمعی
Attractive	جاذب
Binomial	دوجمله ای
Bounded	کراندار
Circulate matrix	ماتریس دوری
Clustering	خوشه ای
Coincident	منطبق
Configuration	پیکربندی
Constant	ثابت
Cox process	فرایند کاکس
Daughter point	نقطه دختر
Density	چگالی
Disjoint	مجزا
Driven	میدان هادی
Equivalent	هم ارزی
Field	میدان
Functional	تابعی
Gaussian correlation function	تابع همبستگی گاوسی
Generating	مولد
Geostatistical marking	نشان زمین آماری
Hard core process	فرایند هسته سخت
Heterogeneity	ناهمگن
Homogeneous	همگن

Independent	مستقل
Intensity	شدت
Interaction function	تابع تقابل
Invariant	ناوردا
Isotropic	همسانگرد
Joint distribution	توزیع توام
Latent process	فرایند پنهان
Locally finite	موضعا متناهی
Marked point process	فرایند نقطه ای نشاندار
Missing process	فرایند گمشده
Papangelou Conditional Intensity	شدت شرطی پایانگلو
Parent point	نقطه والد
Partition function	تابع افراز
Point process	فرایند نقطه ای
Poisson	پواسون
Power exponential family	خانواده نمائی توانی
Probability	احتمال
Random	تصادفی
Realization	تحقق
Repulsive	دافعی
Retention	احتباس
Rotation	دوران
Separable	تفکیک پذیر
Simple	ساده
Simulation	شبیه سازی
Spatial	فضایی
Stable correlation function	تابع همبستگی پایا
Stationary	مانا
Subject	آزمودنی
Superposition	برهمنش
Thinning	نازک شده
Toeplitz matrix	ماتریس توپلیتس

Window پنجره

Aabstract

Modern point processes are the random patterns of points in d -dimensional space (where usually $d = 2$ or $d = 3$ in applications). Such processes are useful as statistical models in the analysis of observed patterns of points, where the points represent the locations of some object of study (e.g. trees in a forest, bird nests, disease cases, or petty crimes). Point processes play a special role in stochastic geometry, as the building blocks of more complicated random set models (such as the Boolean model), and as instructive simple examples of random sets.



Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

Modern Point Processes

Araz Mohammad Arazi

Supervisor

Dr. Elham Dastranj

Feburary 2016