دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

توابع همساز ستاره‌گون از مرتبه‌ی عدد مختلط

حمیده عامری

استاد راهنما

دکتر احمد زیره

بهمن ۱۳۹۴

سپاس‌گزاری...

با تشکر و سپاس بی‌حد به درگاه باریتعالی که نخستین و بزرگترین یاریگر بندگان در آغاز و پایان هر کاریست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر احمد زیره، صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم که قطعا بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگار مهر و مهربانی، مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدسش را و تشکر می‌کنم از برادر عزیزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودش، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بود.

حمیده عامری
بهمن ۱۳۹۴

تعهدنامه

اینجانب **حمیده عامری** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی محض** **دانشکده علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **توابع همساز ستاره‌گون از مرتبه‌ی عدد مختلط** ، تحت راهنمایی **دکتر احمد زیره** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهشگران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تاکنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام " دانشگاه شاهرود " یا " Shahrood University " به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

حمیده عامری
بهمن ۱۳۹۴

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در این پایان نامه رده‌هایی از توابع همساز، ستاره‌گون، تک‌ارز و حافظ جهت در دیسک واحد را تعریف می‌کنیم و به بررسی زیر رده‌هایی از آن می‌پردازیم، همچنین عملگر تلفیق و انتگرال تلفیق را معرفی کرده و به بررسی زیر رده‌هائی که با استفاده از تلفیق و انتگرال تعریف می‌شوند می‌پردازیم، در پایان محک تک‌ارزی و شرایط لازم کافی برای اینکه توابع نرمال همساز ستاره‌گون از مرتبه‌ی عدد مختلط شوند ارائه می‌دهیم.

کلمات کلیدی: توابع تحلیلی، توابع همساز، توابع تک‌ارز، ستاره‌گون.

لیست مقالات مستخرج از پایان‌نامه

۱. مقاله اول

۲. مقاله دوم

۳. مقاله سوم

فهرست مطالب

فصل ۱

تعاریف مقدماتی

۱.۱ تعاریف و قضایای مقدماتی

تعریف ۱.۱.۱. تابع f را در $z_\circ$ تحلیلی گوییم هرگاه در یک همسایگی $z_\circ$ مشتق پذیر باشد.یا به‌طور موضعی به‌صورت یک سری توانی همگرا مشخص شود. تابعی که در دامنه‌ی $\mathbb{C}$ تحلیلی باشد را تابع تام می‌گوییم.

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنیم $f(z)$ بر مسیر ساده و بسته‌ی C و درون آن تحلیلی باشد و $Z_\circ$ نقطه‌ی درونی C باشد آنگاه:

$$f(z_\circ) = \frac{۱}{۲\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z - z_\circ}dz$$

و در حالت کلی برای هر $n \in \mathbb{N}$:

$$f^n(z_\circ) = \frac{n!}{۲\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z - z_\circ)^{n+۱}}dz$$

این فرمول را فرمول انتگرال کوشی f می‌گوییم.

قضیه ۳.۱.۱. ([۱] **نامساوی کوشی**) فرض کنیم $f(z)$ بر دایره‌ی C به مرکز $z_\circ$ و شعاع r و درون آن تحلیلی باشد، اگر برای هر $z \in C$، $|f(z)| \le M$ آنگاه:

$$|f^{(n)}(z_\circ)| \le \frac{n!M}{r^n}$$

برهان. از فرمول انتگرال کوشی استفاده کرده به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} f^{(n)}(z_\circ) &= \frac{n!}{۲\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z - z_\circ)^{n+۱}}dz \\ |f^{(n)}(z_\circ)| &= \left|\frac{n!}{۲\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z - z_\circ)^{n+۱}}dz\right| < \frac{n!}{۲\pi}\int_C \frac{|f(z)|}{|z - z_\circ|^{n+۱}}|dz| \\ &\le \frac{n!M}{۲\pi r^{n+۱}}\int_C |dz| = \frac{n!M۲\pi r}{۲\pi r^{n+۱}} = \frac{n!M}{r^n} \end{aligned}$$

---

[۱] cauchy inequality

□

تعریف ۴.۱.۱. اگر تابع $f(z)$ بر دیسک بسته‌ی $|z-z_\circ| \leq r$ تحلیلی باشد، آنگاه برای هر z که $|z-z_\circ|<r$ داریم:

$$f(z)=f(z_\circ)+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(z-z_\circ)^n;$$
$$a_n=\frac{f^n(z_\circ)}{n!}$$

این معادله را بسط تیلور $f(z)$ حول نقطه‌ی $z_\circ$ می‌نامیم.

قضیه ۵.۱.۱. (**[۲]ماکسیمم قدر مطلق**) فرض کنیم $f(z)$ بر دامنه‌ی D تحلیلی باشد، اگر به ازای نقطه‌ی درونی $z_\circ \in D$ و هر نقطه‌ی $z\in D$ داشته‌باشیم $|f(z)|<|f(z_\circ)|$ آنگاه تابع $f(z)$ تابعی ثابت است.

قضیه ۶.۱.۱. (**[۳]قضیه‌ی روشه**) فرض کنیم تابع $f(z)$ بر مرز بسته‌ی C و درون آن تحلیلی باشد، اگر برای هر $z\in C$، $|f(z)|<|g(z)|$ آنگاه تعداد صفرهای توابع $f(z)$ و $f(z)+g(z)$ درون C با هم برابرند.

لم ۷.۱.۱. (**[۴]لم شوارتز**) فرض کنیم $f(z)$ تابعی تحلیلی در دیسک $U_R=\{z\in\mathbb{C}:|z|<R\}$ باشد و برای ثابت M، رابطه $|f(z)|<M$ برقرار باشد. اگر $f(\circ)=\circ$ آنگاه برای $|z|=r$ که $r<R$ داریم:

$$|f(z)|\leq\frac{r}{R}M$$

برهان. طبق بسط تیلور داریم:

$$f(z)=f(\circ)+\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^n$$

پس تابع تحلیلی $g(z)$ موجود است که $f(z)=zg(z)$، یعنی تابع $g(z)=\frac{f(z)}{z}$ بر ناحیه‌ی $|z|<R$ تحلیلی است. حال اگر $r<r'<R$ آنگاه طبق اصل ماکریمم:

$$\forall|z|=r,\quad |g(z)|\leq\max_{|z|=r'}|g(z)|\Longrightarrow\left|\frac{f(z)}{z}\right|\leq\max_{|z|=r'}\frac{|f(z)|}{|z|}$$
$$\Longrightarrow\frac{|f(z)|}{|z|}\leq\frac{M}{r'}$$

چون $r'<R$ دلخواه است پس می‌توان برای $r'\to R$ نوشت:

$$\forall|z|=r\qquad\left|\frac{f(z)}{r}\right|\leq\frac{M}{R}\Longrightarrow|f(z)|\leq\frac{r}{R}M$$

□

[۲] Maximum modulus theorem

[۳] Roshe theorem

[۴] Schwartz

نتیجه‌ای از لم شوارتز: فرض کنیم $f(z)$ تابعی تحلیلی در دیسک $U_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ باشد و برای ثابت M، رابطه $|f(z)| < M$ برقرار باشد. اگر $z = ۰$ صفر مرتبه n تابع f باشد، در این‌صورت:

$$|f(z)| \leq \frac{M}{R^n}|z|^n \quad (z \in U_R)$$

همچنین در رابطه‌ی فوق، تساوی زمانی برقرار می‌شود که:

$$f(z) = e^{i\theta}\frac{M}{R^n}z^n$$

به‌طوری‌که در آن θ مقداری ثابت است.

برهان. تابع تحلیلی $g(z)$ موجود است که $f(z) = z^n g(z)$ زیرا:

$$f(z) = f(۰) + \cdots + f^{n-۱}(۰) + a_n z^n + a_{n+۱}z^{n+۱} + \cdots = z^n(a_n + a_{n+۱}z + \cdots)$$

پس تابع $g(z) = \dfrac{f(z)}{z^n}$ بر ناحیه‌ی $|z| < R$ تحلیلی است، حال اگر $r < r' < R$ آنگاه:

$$\forall |z| = r \qquad |g(z)| \leq \max_{|z|=r'} |g(z)| \Longrightarrow \left|\frac{f(z)}{z^n}\right| \leq \max_{|z|=r'} \frac{|f(z)|}{|z^n|}$$

$$\Longrightarrow \frac{|f(z)|}{r^n} \leq \frac{M}{r'^n}$$

چون $r' < R$ دلخواه است،پس فرض می‌کنیم $r' \to R$،

$$\frac{|f(z)|}{r^n} \leq \frac{M}{R^n} \Longrightarrow |f(z)| \leq \frac{Mr^n}{R^n}$$

برای اثبات تساوی توجه می‌کنیم اگر $|f(z)| = \dfrac{r}{R}M$ آنگاه تابع $g(z) = \dfrac{f(z)}{z}$ برای مقادیر از $|g(z)| = \dfrac{M}{R}$ روی دایره‌ی $|z| = r$ است، پس تابع تحلیلی $g(z)$ بر ناحیه‌ی $|z| < R$ دارای مقدار قدر مطلق ثابت است، در نتیجه خود تابع $g(z)$ برابر مقدار ثابت است پس $g(z) = \dfrac{M}{R}e^{i\theta}$ در نتیجه:

$$\frac{f(z)}{z} = \frac{M}{R}e^{i\theta} \Longrightarrow f(z) = \frac{M}{R}e^{i\theta}z$$

□

لم ۸.۱.۱. اگر $f(z)$ بر ناحیه‌ی D تحلیلی شود و برای هر $z \in D$، $|f(z)| = c$ آنگاه $f(z)$ تابعی ثابت است.

برهان. اگر $f(z) = u + iv$ آنگاه برای اثبات کافیست ثابت کنیم، $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial y} = ۰$.
اگر $|f(z)| = c$ آنگاه $u^۲ + v^۲ = c^۲$. از این معادله نسبت به x و y مشتق می‌گیریم داریم:

$$\begin{cases} ۲uu_x + ۲vv_x = ۰ \Longrightarrow uu_x + vv_x = ۰, \\ ۲uu_y + ۲vv_y = ۰ \Longrightarrow uu_y + vv_y = ۰ \end{cases} \qquad (۱.۱)$$

چون تابع تحلیلی است پس در معادلات کوشی ریمان صدق می‌کند یعنی $u_x = v_y$ و $u_y = -v_x$ این مقادیر را در (۱.۰) جایگزین می‌کنیم داریم:

$$\begin{cases} uu_x - vv_y = 0 \\ uu_y + vu_x = 0 \end{cases}$$

با ضرب معادله‌ی اول در u و معادله دوم در $-v$ و جمع دو معادله داریم:

$$u^2 u_x + v^2 u_x = 0 \Longrightarrow (u^2 + v^2) u_x = 0$$

چون $u^2 + v^2 = c$ پس $u_x = 0$ و به‌طریق مشابه $v_x = u_y = v_y = 0$.

□

قضیه ۹.۱.۱. فرض کنید $f(z)$ تابعی تام باشد و برای $|z| = r$، $|f(z)| \leq Mr^\lambda$ که λ عددی حقیقی مثبت است. در این صورت $f(z)$ از درجه حداکثر λ است.

برهان. بسط تیلور $f(z)$حول مبدأ به‌صورت زیر است:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!} z^n$$

حال طبق نامساوی کوشی:

$$\left| \frac{f^n(0)}{n!} \right| \leq \frac{Mr^\lambda}{r^n} = \frac{M}{r^{n-\lambda}}$$

حال اگر $n > \lambda$ آنگاه برای $r \to \infty$ داریم $\frac{M}{r^{n-\lambda}} \to 0$ یعنی در بسط تیلور $f(z)$ ضرایب $\frac{f^n(0)}{n!}$ بیشتر از λ همگی برابر صفر است، در نتیجه $f(z)$ یک چند جمله‌ای از درجه‌ی حداکثر λ است. □

تعریف ۱۰.۱.۱. تابع حقیقی مقدار و پیوسته $U(x, y)$ را که در میدان D تعریف شده است در D همساز گویند هرگاه دارای مشتقات نسبی مراتب اول و دوم پیوسته بوده و این مشتقات در تمام D در معادله زیرصادق باشند.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$$

این معادله به معادله لاپلاس مشهور است.

ملاحظه ۱۱.۱.۱. تابع $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$تحلیلی است اگر مشتقات جزئی آن از هر مرتبه موجود و پیوسته بوده و در معادلات زیر که به معادلات کوشی‌ریمان مشهور است صدق کند.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

قضیه ۱۲.۱.۱. فرض کنید $U(x, y)$ بر میدان D همساز باشد آنگاه تابع تحلیلی $f(z)$ بر D موجود است که $Ref(z) = U(x, y)$.

برهان. تابع $g(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}$ را در نظر می‌گیریم کافیست ثابت کنیم معادلات کوشی‌ریمان برای این تابع صادق است، یعنی:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$$

بدیهی است که:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$$

از طرفی چون $u(x,y)$ همساز است پس معادله لاپلاس برای آن برقرار است:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$
$$\Longrightarrow\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

چون معادلات کوشی ریمان برای تابع $g(z)$ برقرار است و مشتقات جزئی آن از هر مرتبه موجود و پیوسته است پس تابع $g(z)$ تحلیلی است. حال نقطه‌ی z_0 را ثابت در نظر می‌گیریم چون D همبند ساده است هر $z\in D$ را می‌توان توسط مسیر ساده و بسته‌ی C به z_0 وصل کرد، بنابراین تابع $f(z)=\int_C g(u)du$ بر دامنه‌ی D تحلیلی است، از طرفی طبق فرض:

$$f'(z)=g(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}$$

پس $\mathrm{Re}f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}$ در نتیجه $\mathrm{Re}f=u+c$ با تعریف $F=f-c$ داریم $\mathrm{Re}F=u$. □

اگر $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ تحلیلی باشد، آنگاه v مزدوج همسازی از u نام دارد.

ملاحظه ۱۳.۱.۱. v مزدوج همساز u است اگرو تنها اگر u مزدوج همساز $-v$ باشد. زیرا هر جا f تحلیلی باشد، $if=i(u+iv)=-v+iu$ نیز تحلیلی است.

در واقع معادله لاپلاس شرط لازمی را بیان می‌کند که تابعی قسمت حقیقی (یا موهومی) یک تابع تحلیلی باشد.

قضیه ۱۴.۱.۱. (**لیوویل**[5]) هر تابع تام و کراندار ثابت است.

قضیه ۱۵.۱.۱. اگر $u(z)$ بر صفحه‌ی $\mathbb{C}$ همساز و کراندار باشد،آنگاه $u(z)$ تابع ثابت است.

برهان. چون $u(z)$ بر صفحه‌ی $\mathbb{C}$ همساز است، بنابراین تابع تام $f(z)$ موجود است که $\mathrm{Re}f(z)=u(z)$، با قرار دادن $h(z)=e^{f(z)}$ ملاحظه می‌کنیم که $h(z)$ نیز تام است، از طرفی:

$$|h(z)|=|e^{f(z)}|=e^{\mathrm{Re}f(z)}=e^{u(z)}$$

چون $u(z)$ کراندار است، پس تابع تام $h(z)$ نیز کراندار است، در نتیجه طبق قضیه‌ی لیویل تابع $h(z)$ تابع ثابت می‌باشد پس تابع $u(z)$ تابع ثابت است. □

[5] Liouville

قضیه ۱۶.۱.۱. فرض کنید $u(z)$ بر دامنه‌ی $|z-z_\circ| \leq r$ همساز باشد، آنگاه:

$$u(z_\circ) = \frac{1}{2\pi}\int_\circ^{2\pi} u(z_\circ + re^{i\theta})d\theta$$

این قضیه به قضیه‌ی مقدار میانگین برای توابع همساز مشهور است.

برهان. دامنه‌ی همبند ساده‌ی D_1 موجود است که، $|z-z_\circ| \leq r \subseteq D_1 \subset D$ حال طبق فرمول انتگرال کوشی:

$$f(z_\circ) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_\circ|=r} \frac{f(z)}{z-z_\circ}dz$$

با قرار دادن $z - z_\circ = re^{i\theta}$ داریم:

$$\begin{aligned} dz =& ire^{i\theta}d\theta \\ \Longrightarrow & f(z_\circ) = \frac{1}{2\pi}\int_\circ^{2\pi} f(z_\circ + re^{i\theta})d\theta \\ \Longrightarrow & \mathrm{Re}f(z_\circ) = \frac{1}{2\pi}\int_\circ^{2\pi} \mathrm{Re}f(z_\circ + re^{i\theta})d\theta \\ \Longrightarrow & u(z_\circ) = \frac{1}{2\pi}\int_\circ^{2\pi} u(z_\circ + re^{i\theta})d\theta \end{aligned}$$

□

قضیه ۱۷.۱.۱. ([6]**نگاشت باز**) اگر $f(z)$ بر دامنه‌ی D تحلیلی و غیر ثابت باشد در این صورت تصویر هر زیر مجموعه‌ی باز در D تحت تابع $f(z)$ یک مجموعه‌ی باز است.

قضیه ۱۸.۱.۱. اگر $u(z)$ بر دامنه‌ی D تابع همساز و غیر ثابت باشد، آنگاه $u(z)$ مقادیر ماکسیمم و مینیمم خود را در نقاط درونی نمی‌گیرد و فقط در مرز نقاط ماکسیمم و مینیمم دارد.

برهان. اگر تابع حقیقی مقدار $u(z)$ همساز باشد، آنگاه $-u(z)$ نیز تابع همساز است پس کافیست قضیه را برای حالت ماکسیمم ثابت کنیم. فرض کنیم تابع $u(z)$ در نقطه‌ی درونی $z_\circ$ مقدار ماکسیمم خود را بگیرد در این صورت دیسک $|z-z_\circ| \leq r$ را داخل D در نظر می‌گیریم طبق قضیه‌ی ۱۲.۱.۱ تابع تحلیلی $f(z)$ موجود است که $\mathrm{Re}f(z) = u(z)$ حال طبق قضیه‌ی نگاشت باز، دیسک باز $|z-z_\circ| < r$ تحت $f(z)$ بر مجموعه‌ی باز شامل نقطه‌ی $f(z_\circ)$ نگاشته می‌شود پس $\delta > \circ$ موجود است که $f(z_\circ)+\delta$ داخل تصویر قرار بگیرد یعنی $z_1 \in D$ موجود است که $f(z_1) = f(z_\circ) + \delta$ از طرفی $\mathrm{Re}f(z_1) = \mathrm{Re}f(z_\circ) + \delta$ یعنی $u(z_1) = u(z_\circ) + \delta$ چون $\delta > \circ$ پس $|u(z_1)| > |u_(z_\circ)|$ که با فرض ماکسیمم بودن $u(z_\circ)$ در تناقض است. پس فرض خلف باطل است و $u(z)$ مقادیر ماکسیمم خود را در مرز D می‌گیرد. □

نتیجه ۱۹.۱.۱. فرض کنیم $u(z)$ در دامنه‌ی کراندار D با مرز ساده و بسته‌ی C همساز باشد اگر $u(z)$ بر $D \cup C$ پیوسته باشد و برای عدد ثابت k و هر $z \in C$ داشته باشیم $u(z) = k$ آنگاه $u(z)$ بر C تابع ثابت است.

[6] Open mapping theorem

قضیه ۲۰.۱.۱. (**بورل کاراتئودوری**[۷]) اگر $f(z)$ بر دیسک $|z| \leq R$ تحلیلی باشد و $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$ و $A(r) = \max_{|z|=r} \mathrm{Re} f(z)$ آنگاه برای $۰ < r < R$،

$$M(r) \leq \frac{۲r}{R-r} A(r) + \frac{R+r}{R-r} |f(۰)|$$

برهان. اگر $f(z) = k$ تابعی ثابت باشد، در این‌صورت $A(r) \geq -k$ و

$$\frac{-۲r}{R-r} k + \frac{R+r}{R-r} k = k = M(r)$$

اگر $f(z)$ ثابت نباشد و $f(۰) = ۰$ چون $\mathrm{Re} f(z)$ تابع همساز غیر ثابت است پس $A(r) > A(۰)$ از طرفی برای $|z| \leq R$، $\mathrm{Re}(۲A(R) - f(z)) \geq A(r) > ۰$ پس تابع $g(z) = \dfrac{f(z)}{۲A(R) - f(z)}$ در ناحیه‌ی $|z| \leq R$ تحلیلی است و $g(۰) = ۰$ با قرار دادن $f = u + iv$ داریم:

$$\begin{aligned} |g(z)|^۲ =& \frac{|f(z)|^۲}{|۲A(R) - u - iv|^۲} \\ =& \frac{u^۲ + v^۲}{(۲A(r) - u^۲)^۲ + v^۲} \leq \frac{u^۲ + v^۲}{u^۲ + v^۲} = ۱ \end{aligned}$$

در نتیجه $|g(z)| \leq ۱$ و $g(۰) = ۰$ حال با استفاده از لم شوارتز:

$$\max_{|z|=r} |g(z)| \leq \frac{r}{R}$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} g(z) =& \frac{f(z)}{۲A(R) - f(z)} \\ \Longrightarrow& |f(z)| = \frac{|۲A(R) g(z)|}{|۱ + g(z)|} \\ \leq& \frac{\frac{۲r}{R} A(R)}{۱ - |g(z)|} \leq \frac{\frac{۲r}{R} A(R)}{۱ - \frac{r}{R}} = \frac{۲r}{R} A(R) \end{aligned}$$

حال اگر $f(۰) \neq ۰$ در این حالت با قرار دادن $h(z) = f(z) - f(۰)$ داریم $h(۰) = ۰$ پس طبق حالت اول:

$$\begin{aligned} |h(z)| \leq& \frac{۲r}{R-r} \max_{|z|} |\mathrm{Re} h(z)| \\ \Longrightarrow& |f(z) - f(۰)| \leq \frac{۲r}{R-r} (A(R) + |f(۰)|) \\ \Longrightarrow& |f(z)| - |f(۰)| \leq \frac{۲r}{R-r} A(R) + \frac{۲r}{R-r} |f(۰)| \\ \Longrightarrow& |f(z)| \leq \frac{۲r}{R-r} A(R) + \frac{R+r}{R-r} |f(۰)| \end{aligned}$$

□

[۷] Borel-caratheodory

قضیه ۲۱.۱.۱. فرض کنیم $u(z)$ بر ناحیه‌ی $|z| \leq R$ همساز باشد، آنگاه برای $z = re^{i\theta}$ که $r < R$ داریم:

$$u(re^{i\theta}) = \frac{۱}{۲\pi}\int_{۰}^{۲\pi} \frac{R^۲ - r^۲}{R^۲ - ۲rR\cos(\theta - \varphi) + r^۲} u(Re^{i\varphi})d\varphi$$

(فرمول انتگرال پواسون[۸])

برهان. طبق قضیه‌ی ۱۲.۱.۱ تابع تحلیلی $f(z)$ موجود است که $u(z) = \mathrm{Re} f(z)$. حال طبق فرمول انتگرال کوشی داریم:

$$f(z) = \frac{۱}{۲\pi i}\int_{|s|=R} \frac{f(s)}{s-z}ds \tag{۲.۱}$$

حال دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

- اگر $z = ۰$ در این‌صورت $s = Re^{i\varphi}$ پس داریم $ds = iRe^{i\varphi}d\varphi$ یعنی:

$$\begin{aligned} f(۰) =& \frac{۱}{۲\pi i}\int_{۰}^{۲\pi} \frac{f(Re^{i\varphi})}{Re^{i\varphi}} iRe^{i\varphi}d\varphi = \frac{۱}{۲\pi}\int_{۰}^{۲\pi} f(Re^{i\varphi})d\varphi \\ &\Longrightarrow Ref(۰) = \frac{۱}{۲\pi}\int_{۰}^{۲\pi} Ref(Re^{i\varphi})d\varphi \\ &\Longrightarrow u(۰) = \frac{۱}{۲\pi}\int_{۰}^{۲\pi} u(Re^{i\varphi})d\varphi \end{aligned}$$

  در نتیجه برای مقادیر $z = ۰$ به فرمول انتگرال پواسون رسیدیم.

- اگر $z \neq ۰$ و $z = re^{i\theta}$ نقطه‌ی $z_۱$ خارج از دایره‌ای به شعاع R باشد در این حالت نقطه‌ی $z_۱ = \frac{R^۲}{\bar{z}} = \frac{R^۲}{r}e^{i\theta}$ را در نظر می‌گیریم که $z_۱$ خارج از دایره‌ای به شعاع R است. چون $\frac{f(s)}{s-z_۱}$ داخل دایره‌ی $|z| \leq R$ تحلیلی است پس طبق قضیه‌ی کوشی :

$$\int_{|s|=R} \frac{f(s)}{s-z_۱}ds = ۰ \tag{۳.۱}$$

  از (۲.۱) و (۳.۱) نتیجه می‌گیریم که:

$$\begin{aligned} f(z) =& \frac{۱}{۲\pi i}\int_{|s|=R}\left(\frac{۱}{s-z} - \frac{۱}{s-z_۱}\right)f(s)ds \\ \overset{z_۱=\frac{R^۲}{\bar{z}}}{=}& \frac{۱}{۲\pi i}\int_{|s|=R}\left(\frac{۱}{s-z} - \frac{\bar{z}}{s\bar{z}-R^۲}\right)f(s)ds \\ =& \frac{۱}{۲\pi i}\int_{|s|=R}\left(\frac{۱}{s-z} + \frac{\bar{z}}{R^۲-s\bar{z}}\right)f(s)ds \\ =& \frac{۱}{۲\pi i}\int_{|s|=R}\frac{R^۲-r^۲}{(s-z)(R^۲-s\bar{z})}f(s)ds \end{aligned}$$

[۸] Poisson integral

با قرار دادن $s = Re^{i\phi}$ و $z = re^{i\theta}$ داریم:

$$\begin{aligned} f(re^{i\theta}) =& \frac{1}{2\pi i}\int_{0}^{2\pi}\frac{(R^2-r^2)f(re^{i\varphi})iRe^{i\varphi}}{(Re^{i\varphi}-re^{i\varphi})(R^2-rRe^{i(\varphi-\theta)})}d\varphi \\ =& \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\frac{R^2-r^2}{(Re^{i\varphi}-re^{i\varphi})(Re^{-i\varphi}-re^{-i\theta})}f(Re^{i\varphi})d\varphi \\ =& \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2-2rR\cos(\theta-\varphi)+r^2}f(Re^{i\varphi})d\varphi \end{aligned}$$

با در نظر گرفتن قسمت‌های حقیقی نتیجه به‌دست می‌آید.

□

تعریف ۲۲.۱.۱. نگاشت $f : D \to \mathbb{C}$ را بر دامنه‌ی D همدیس می‌نامیم اگر f جهت و اندازه‌ی زاویه بین دو مسیر را حفظ می‌کند. اگر $f(z)$ در z_0 تحلیلی و $f'(z_0) \neq 0$ آنگاه $f(z)$ اندازه‌ی زاویه‌ی بین دو مسیر را حفظ می‌کند اما برای همدیس بودن باید جهت دو مسیر را هم بررسی کنیم.

مثال ۲۳.۱.۱. تابع $f(z) = z$ بر $\mathbb{C}$ همدیس است اما $f(z) = \bar{z}$ بر $\mathbb{C}$ همدیس نیست.

تعریف ۲۴.۱.۱. اگر $\mathbb{C}$ مجموعه‌ی اعداد مختلط و $D \subset \mathbb{C}$ یک میدان باشد، تابع تحلیلی و یک‌به‌یک $f : D \to \mathbb{C}$ را تک‌ارز می‌نامیم.

هرتابع تک‌ارز یک نگاشت همدیس است اما هر تابع همدیس تک‌ارز نیست به‌عنوان مثال تابع $f(z) = e^z$ تابعی همدیس است که تک‌ارز نیست.

قضیه ۲۵.۱.۱. (**نگاشت ریمان**[۹]) [۱۶] فرض کنیم D میدان همبند ساده‌ای به غیر از تمام صفحه و z_0 نقطه‌ای در این میدان باشد. در این‌صورت تابع منحصر به فرد و تک ارز $f(z)$ موجود است که D را بر قرص $|z| < 1$ می‌نگارد و $f(z_0) = 0$ و $f'(z_0) > 0$ است.

قضیه ۲۶.۱.۱. فرض کنیم $f(z)$ در نقطه‌ی z_0 تحلیلی و $f'(z_0) \neq 0$ آنگاه $f(z)$ در یک همسایگی z_0 یک‌به‌یک است.

برهان. طبق بسط تیلور در یک همسایگی حول z_0 داریم:

$$f(z) - f(z_0) = f'(z_0)(z - z_0) + f''(z_0)\frac{(z-z_0)^2}{2!} + \cdots$$

چون $f'(z_0) \neq 0$ پس $f(z) - f(z_0)$ در نقطه‌ی z_0 صفر ساده دارد،از طرفی صفرهای توابع تحلیلی مجزا هستند، پس وجود دارد $\delta > 0$ که برای همسایگی $|z - z_0| \leq \delta$داریم:

$$f(z) - f(z_0) \neq 0$$

[۹] Riemann mapping

با قرار دادن $m = \min|f(z)-f(z_0)|$ داریم $m > 0$، حال به‌ازای دو نقطه‌ی w_0 و w_1 که $|w_1-w_0| < m$ داریم:

$$|w_1 - w_0| < m \leq |f(z) - f(z_0)|$$

پس طبق قضیه‌ی روشه تابع $f(z) - w_1$ دقیقا یک ریشه دارد یعنی نقطه‌ی z_1 که $|z_1 - z_0| < \delta$ موجود است که $f(z_1) - w_1 = 0$ حال اشتراک تصویر وارون ناحیه‌ی $|w - w_0| < m$ تحت تابع $f(z)$ را بر ناحیه‌ی $|z - z_0| < \delta$ را U می‌نامیم بنابراین تابع f بر U یک‌به‌یک است.

$$U := \left(f^{-1}(|w - w_0| < m)\right) \cap (|z - z_0| < \delta)$$

□

قضیه ۲۷.۱.۱. اگر f بر دامنه‌ی D تک‌ارز باشد، آنگاه به‌ازای هر $Z_0 \in D$ ، $f'(z_0) \neq 0$.

برهان. فرض کنیم $z_0 \in D$ موجود باشد و $f'(z_0) = 0$ طبق بسط تیلور داریم:

$$f(z) - f(z_0) = \frac{f''(z_0)}{2}(z - z_0)^2 + \cdots$$

(اگر $f''(z_0)$ هم صفر شود و $f^3(z_0) \neq 0$ آنگاه صفر مرتبه‌ی ۳ دارد) پس تابع $f(z) - f(z_0)$ صفر حداقل مرتبه‌ی ۲ دارد. از طرفی صفرهای توابع تحلیلی مجزا هستند، پس شعاع $\delta > 0$ وجود دارد که در $0 < |z - z_0| \leq \delta$ توابع $f(z) - f(z_0)$ و $f'(z)$ ریشه نداشته باشند. با قرار دادن $m = \min_{|z-z_0|=\delta} |f(z)-f(z_0)|$ و برای مقادیر مختلط a که $0 < |a| < m$ تابع $g(z) = f(z)-f(z_0)-a$ درناحیه‌ی $|z - z_0| < \delta$ حداقل دو ریشه دارد، از طرفی $g(z_0) = -a \neq 0$ و برای نقاط zای که $0 < |z - z_0| < \delta$ چون $g'(z) = f'(z) \neq 0$ پس $g(z)$ تحلیلی است بنابراین صفرهای $g(z)$ مجزا هستند یعنی نقاط $z_1 \neq z_2 \in D$ موجودند که $g(z_1) = g(z_2) = 0$ در نتیجه:

$$f(z_1) - f(z_0) - a = f(z_2) - f(z_0) - a$$

در نتیجه:

$$f(z_1) = f(z_2)$$

که با فرض یک‌به‌یک بودن f در تناقض است. □

۲.۱ رده‌ی $\mathbb{S}$

چون توابعی که هم تحلیلی و هم تک ارز (یک به یک) هستند، میدان‌های همبند ساده را بر میدان‌های همبند ساده می‌نگارند. به موجب قضیه نگاشت ریمان، هر تابع تک ارز، که در میدان همبند ساده (به غیر از تمامی صفحه) تعریف شده باشد را می‌توان با تابعی که در قرص واحد تعریف شده است متناظر

کرد. بنابراین خود را به توابعی که بر قرص $|z| < ۱$ تعریف شده‌اند محدود می‌کنیم و اگر چنانچه فرض کنیم تابع در مبدأ صفر است (که تنها صفر تابع نیز خواهد بود) و در مبدأ مشتق مخالف صفر دارد، در این‌صورت نتایج حاصله از شکل زیباتری برخوردار خواهند بود. زیرا مشتق تابع تک ارز هرگز صفر نیست، هر تابع تک ارز $f(z)$ را می‌توان به $\frac{[f(z)-f(۰)]}{f'(۰)}$، که تابعی است از شکل مذکور، تحویل کرد. رده‌ی توابعی که در محدودیت‌های مذکور صادق‌اند با یک حرف مشخص می‌شوند.

تعریف ۱.۲.۱. رده‌ی همه‌ی توابع $f(z)$ را که در قرص واحد $|z| < ۱$ تحلیلی و تک ارز بوده و با شرایط $f(۰) = ۰$ و $f'(۰) = ۱$ نرمالیزه گردیده‌اند با $\mathbb{S}$ نمایش می‌دهیم. پس تابع $f(z)$ در $\mathbb{S}$ دارای نمایش توانی زیر است:

$$f(z) = z + a_۲ z^۲ + a_۳ z^۳ + \dots \qquad (|z| < ۱).$$

لم ۲.۲.۱. اگر $f(z) \in \mathbb{S}$، آنگاه $g(z) = z\sqrt{\frac{f(z^۲)}{z^۲}} \in \mathbb{S}$.

برهان. فرض کنیم $f(z) = z + \sum_{n=۲}^{\infty} a_n z^n$ در نتیجه:

$$g(z) = z\sqrt{\frac{f(z^۲)}{z^۲}} = z\sqrt{۱ + a_۲ z^۲ + a_۳ z^۴ + \dots}$$

تابع $g(z)$ تحلیلی است و $g(۰) = ۰$ و $g'(۰) = ۱$ نشان می‌دهیم $g(z)$ یک‌به‌یک است.

$$g(z_۱) = g(z_۲) \Longrightarrow z_۱\sqrt{\frac{f(z_۱^۲)}{z_۱^۲}} = z_۲\sqrt{\frac{f(z_۲^۲)}{z_۲^۲}}$$
$$\Longrightarrow f(z_۱^۲) = f(z_۲^۲) \xrightarrow[\text{تک‌ارز}]{f(z)} z_۱^۲ = z_۲^۲ \Longrightarrow z_۱ = \pm z_۲$$

اما طبق تعریف $g(z)$ تابعی فرد است، بنابراین اگر $z_۱ = -z_۲$ آنگاه $g(z_۱) = -g(z_۲)$ که با فرض در تناقض است پس $z_۱ = z_۲$ یعنی $g(z) \in \mathbb{S}$. □

ملاحظه ۳.۲.۱. به جای $\sqrt{f(z^۲)}$، می‌نویسیم $z\sqrt{\frac{f(z^۲)}{z^۲}}$. زیرا $f(z^۲)$ صفری در مبدا دارد که $\sqrt{f(z^۲)} = e^{(\frac{۱}{۲})\log f(z^۲)}$ را بی‌معنی می‌کند.(یادآوری: $\sqrt{z} = z^{\frac{۱}{۲}} = e^{\frac{۱}{۲}\log z} = e^{\frac{۱}{۲}(\ln|z| + iarg(z))}$)

۳.۱ رده‌ی $\mathbb{T}$

رده‌ی توابعی که در دامنه‌ی $|z| > ۱$ تحلیلی و تک‌ارز بوده و به‌صورت (۴.۱) می نویسیم را رده‌ی $\mathbb{T}$ می‌نامیم.

$$g(z) = z + b_۰ + \frac{b_۱}{z} + \frac{b_۲}{z^۲} + \cdots \qquad (۴.۱)$$

لم ۱.۳.۱. اگر $f(z) \in \mathbb{S}$ آنگاه $g(z) = \frac{۱}{f(\frac{۱}{z})} \in \mathbb{T}$.

برهان. بدیهی است که $g(z)$ تحلیلی و یک‌به‌یک در دامنه‌ی $|z| > ۱$ است. □

قضیه ۲.۳.۱. اگر $g(z) = z + b_۰ + \frac{b_۱}{z} + \frac{b_۲}{z^۲} + \cdots \in \mathbb{T}$ آنگاه:

$$\sum_{n=۱}^{\infty} n|b_n|^۲ \leq ۱ \tag{۵.۱}$$

قضیه ۳.۳.۱. [۱۶] اگر $f \in \mathbb{S}$ و $g(z) = z\sqrt{\frac{f(z^۲)}{z^۲}}$ باشد، آنگاه $|a_۲| \leq ۲$.

برهان.

$$g(z) = z\sqrt{۱ + a_۲ z^۲ + \cdots}$$

$$g(۰) = ۰, \quad g'(۰) = ۱, \quad g''(۰) = ۰, \quad g^۳(۰) = ۳a_۲$$

$$g(z) = z + \frac{a_۲}{۲} z^۳ + \cdots$$

طبق لم ۱.۳.۱، اگر $g(z) \in \mathbb{S}$ آنگاه:

$$\frac{۱}{g(\frac{۱}{z})} = \frac{۱}{\frac{۱}{z}(۱ + \frac{a_۲}{۲z^۲} + \cdots)} = z - \frac{a_۲}{۲}\frac{۱}{z} + \cdots \in \mathbb{T}$$

در نتیجه طبق قضیه‌ی ۲.۳.۱، $\sum_{n=۱}^{\infty} n|b_n| \leq ۱$ بنابراین $\left|\frac{a_۲^۲}{۴}\right| \leq ۱ \Longrightarrow |a_۲| \leq ۲$. □

اگر در قضیه‌ی قبل قرار دهیم $a_۲ = ۲e^{i\alpha}$، $\alpha \in \mathbb{R}$ آنگاه داریم:

$$\begin{aligned}
&\frac{۱}{g(\frac{۱}{z})} = z - \frac{۲e^{i\alpha}}{۲}\frac{۱}{z} = z - e^{i\alpha}\frac{۱}{z} \\
\Longrightarrow &g(\frac{۱}{z}) = \frac{۱}{z - e^{i\alpha}\frac{۱}{z}} \\
\Longrightarrow &g(z) = \frac{z}{(۱ - e^{i\alpha}z^۲)} = z\sqrt{\frac{f(z^۲)}{z^۲}} \\
\Longrightarrow &\frac{f(z^۲)}{z^۲} = \frac{z^۲}{(۱ - e^{i\alpha}z^۲)^۲} \\
\Longrightarrow &f(z) = \frac{z}{(۱ - e^{i\alpha}z)^۲} \\
\Longrightarrow &f(z) = f(۰) + f'(۰)z + \frac{f''(۰)}{۲!}z^۲ + \cdots \\
\Longrightarrow &f(z) = z + ۲e^{i\alpha}z^۲ + ۳e^{۲i\alpha}z^۳ + \cdots \\
\Longrightarrow &|۲e^{i\alpha}| = ۲
\end{aligned} \tag{۶.۱}$$

مثال ۴.۳.۱. (**تابع کوئب**[۱۰]) در قضیه۳.۳.۱، اگر $a_۲ = ۲e^{i\alpha}$ و α حقیقی باشد آنگاه $g(z) = \frac{z}{(۱-e^{i\alpha}z)^۲} = z\sqrt{\frac{f(z^۲)}{z^۲}}$. لذا طبق (۶.۱) داریم:

$$f(z) = \frac{z}{(۱-e^{i\alpha}z)^۲} = z + ۲e^{i\alpha}z^۲ + ۳e^{۲i\alpha}z^۳ + \cdots$$

با قرار دادن $\alpha = ۰$ به تابع زیر میرسیم :

$$k(z) = \frac{z}{(۱-z)^۲} = \frac{۱}{۴}(\frac{۱+z}{۱-z})^۲ - \frac{۱}{۴}$$

که به تابع کوئب معروف است. این تابع قرص $|z| < ۱$ را بر صفحهای که در امتداد محور حقیقی منفی از $\frac{-۱}{۴}$ تا ∞ بریده شده است، مینگارد.

قضیه ۵.۳.۱. (**قضیهی پوشش**[۱۱]) اگر $f(z) \in \mathbb{S}$ و برای $|z| < ۱$، $f(z) \neq c$ که $c \in \mathbb{C}$، آنگاه $|c| \geq \frac{۱}{۴}$.

برهان. میدانیم $f(z) = z + a_۲z^۲ + \cdots$ چون $f(z) \neq c$ پس تابع $g(z) = \frac{cf(z)}{c - f(z)}$ نیز متعلق به $\mathbb{S}$ میباشد.

$$\frac{cf(z)}{c-f(z)} = z + (a_۲ + \frac{۱}{c})z^۲ + \cdots$$

بنا به قضیه۳.۳.۱داریم $|a_۲ + \frac{۱}{c}| \leq ۲$. از طرفی:

$$|\frac{۱}{c}| - |a_۲| \leq |a_۲ + \frac{۱}{c}| \leq ۲ \Longrightarrow |\frac{۱}{c}| \leq ۲ + |a_۲|$$

چون $f(z) \in \mathbb{S}$، پس $|a_۲| \leq ۲$ است. لذا داریم :

$$|\frac{۱}{c}| \leq ۴ \Longrightarrow |c| \geq \frac{۱}{۴}$$

□

لم ۶.۳.۱. اگر $f(z) \in \mathbb{S}$ و $z = re^{i\theta}$ باشد، آنگاه :

$$\text{Re}\left\{\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} = r\frac{\partial}{\partial r}\log|f'(z)|$$

برهان. چون برای $|z| < ۱$، $f'(z) \neq ۰$ پس میتوان شاخهای از $\log f'(z)$ را برای $|z| < ۱$ در نظر گرفت. حال برای $f(z) = f(re^{i\theta})$ داریم $f'(z) = f'(re^{i\theta})$ لذا :

$$\frac{\partial}{\partial r}\log f'(re^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta}f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})}$$

[۱۰] Köbe functıon
[۱۱] Covering theorem

با ضرب طرفین رابطه‌ی فوق در r داریم:

$$r\frac{\partial}{\partial r}\log f'(re^{i\theta}) = \frac{re^{i\theta}f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})} = \frac{zf''(z)}{f'(z)}$$

با محاسبه‌ی قسمت‌های حقیقی داریم:

$$r\frac{\partial}{\partial r}\log|f'(re^{i\theta})| = \mathrm{Re}\left\{\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}$$

□

قضیه ۱.۳.۷. اگر $f(z) \in \mathbb{S}$ باشد، آنگاه :

$$\frac{۱-r}{(۱+r)^۳} \leq |f'(z)| \leq \frac{۱+r}{(۱-r)^۳} \quad (|z| = r < ۱)$$

برهان. می‌دانیم تابع $\omega = \dfrac{z+z_۰}{۱+\overline{z_۰}z}$ تحلیلی، یک به یک و پوشاست و قرص واحد را بر خودش می‌نگارد. لذا تابع $g(z) = f(\dfrac{z+z_۰}{۱+\overline{z_۰}z}) = b_۰ + b_۱z + b_۲z^۲$ نیز به ازای $(|z| < ۱)$ تحلیلی و تک‌ارز است، و قرص واحد را بر خودش می‌نگارد، بنابراین بسط تیلور دارد. برای به‌دست آوردن ضرایب در بسط تیلور مقادیر زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}
b_۰ =& g(۰) = f(z_۰)\\
b_۱ =& g'(۰) = f'(z_۰)(۱-|z_۰|^۲)\\
b_۲ =& \frac{g''(۰)}{۲} = \frac{۱}{۲}(f''(z_۰)(۱-|z_۰|^۲)^۲ - ۲f'(z_۰)\bar{z}_۰(۱-|z_۰|^۲))
\end{aligned}$$

چون $g(z)$ نرمالیزه نمی‌باشد پس متعلق به $\mathbb{S}$ نیست، با توجه به این‌که تابع $\dfrac{g(z)-g(۰)}{g'(۰)} = z + \dfrac{b_۲}{b_۱}z^۲ + \cdots$ در $\mathbb{S}$ قرار می‌گیرد، لذا بنابر قضیه‌ی ۱.۳.۳، $|\dfrac{b_۲}{b_۱}| \leq ۲$ یعنی:

$$\frac{۱}{۲}\left|\frac{f''(z_o)}{f'(z_۰)}(۱-|z_۰|^۲) - ۲\overline{z_۰}\right| \leq ۲$$

با قرار دادن $z_۰ = re^{i\theta}$ و ضرب طرفین در $\dfrac{۲|z_۰|}{۱-|z_۰|^۲}$ داریم :

$$\left|\frac{z_۰f''(z_۰)}{f'(z_۰)} - \frac{۲|z_۰|^۲}{۱-|z_۰|^۲}\right| \leq \frac{۴|z_۰|}{۱-|z_۰|^۲}$$

حال چون $z_۰$ دلخواه است، قرار می‌دهیم :

$$\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{۲r^۲}{۱-r^۲}\right| \leq \frac{۴r}{۱-r^۲}$$

یعنی $\frac{zf''(z)}{f'(z)}$ در دایره‌ای به شعاع $\frac{۴r}{۱-r^۲}$ و به مرکز $\frac{۲r^۲}{۱-r^۲}$ واقع است لذا:

$$\frac{۲r^۲-۴r}{۱-r^۲} \leq \mathrm{Re}\frac{zf''(z)}{f'(z)} \leq \frac{۲r^۲+۴r}{۱-r^۲}$$

بنا به لم ۶.۳.۱ می‌دانیم $\mathrm{Re}\frac{zf''(z)}{f'(z)} = r\frac{\partial}{\partial r}\log|f'(z)|$ یعنی :

$$\begin{aligned} &\frac{۲r^۲-۴r}{۱-r^۲} \leq r\frac{\partial}{\partial r}\log|f'(z)| \leq \frac{۲r^۲+۴r}{۱-r^۲} \\ \Longrightarrow &\frac{۲r-۴}{۱-r^۲} \leq \frac{\partial}{\partial r}\log|f'(z)| \leq \frac{۲r+۴}{۱-r^۲} \end{aligned}$$

حال از طرفین نامساوی از ۰ تا r انتگرال می‌گیریم :

$$\log(۱-r) - ۳\log(۱+r) \leq \log|f'(z)| \leq \log(۱+r) - ۳\log(۱-r)$$

و لذا داریم:

$$\log\frac{۱-r}{(۱+r)^۳} \leq \log|f'(z)| \leq \log\frac{۱+r}{(۱-r)^۳}$$

در نتیجه :

$$\frac{۱-r}{(۱+r)^۳} \leq |f'(z)| \leq \frac{۱+r}{(۱-r)^۳} \qquad (|z| = r < ۱).$$

□

مثال ۸.۳.۱. مشتق تابع کوئب $k(z) = \frac{z}{(۱-z)^۲} = z + ۲z^۲ + \cdots$ برابر است با:

$$k'(z) = \frac{۱+z}{(۱-z)^۳}$$

لذا کران بالای قضیه‌ی ۷.۳.۱، در مورد این تابع در $z = r$ و کران پایین در $z = -r$ تعیین می‌شود.

قضیه ۹.۳.۱. اگر $f(z) \in \mathbb{S}$ باشد، آنگاه :

$$\frac{r}{(۱+r)^۲} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(۱-r)^۲} \quad (|z| = r < ۱)$$

برهان. بنابر قضیه‌ی ۷.۳.۱ برای $|z| = r < ۱$ داریم $|f'(z)| \leq \frac{۱+r}{(۱-r)^۳}$. نقطه‌ی ۰ را با خطی مستقیم به z وصل کرده و روی این پاره خط انتگرال می‌گیریم:

$$|f(z)| \leq \int_۰^r |f'(t)|\mathrm{d}t \leq \int_۰^r \frac{۱+t}{(۱-t)^۳}\mathrm{d}t = \frac{r}{(۱-r)^۲}$$

نامساوی $\frac{۱}{۴} \leq \frac{r}{(۱+r)^۲}$ همواره برقرار است. حال اگر $|f(z)| \geq \frac{۱}{۴}$ باشد، آنگاه $|f(z)| \geq \frac{r}{(۱+r)^۲}$ و اگر $|f(z)| < \frac{۱}{۴}$ باشد، بنا بر قضیه‌ی ۵.۳.۱ مسیر c داخل دایره‌ی یکه از ۰ تا z موجود است که تصویر آن پاره خط مستقیم $c_۰$ از ۰ تا $f(z)$ را می‌پوشاند در این‌صورت :

$$|f(z)| = \int_{c_۰} |\mathrm{d}\omega| = \int_c |f'(s)||\mathrm{d}s|$$

از طرفی بنا به قضیه‌ی ۷.۳.۱ :

$$|f(z)| = \int_c |f'(s)||\mathrm{d}s| \geq \int_c |f'(s)|\mathrm{d}|s| \geq \frac{۱-t}{(۱+t)^۳}\mathrm{d}t = \frac{r}{(۱+r)^۲}$$

لذا داریم:

$$\frac{r}{(۱+r)^۲} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(۱-r)^۲}$$

□

مثال ۱۰.۳.۱. برای تابع کوئب $k(z) = \frac{z}{(۱-z)^۲} = z + ۲z^۲ + \cdots$ کران بالای قضیه‌ی ۹.۳.۱ در $z = r$ و کران پایین در $z = -r$ تعیین می‌شود.

قضیه ۱۱.۳.۱. ([۱۲]لیتل وود)[۱۶] اگر $f(z) = z + \sum_{n=۲}^{\infty} a_n z^n$ در رده‌ی $\mathbb{S}$ باشد آنگاه برای هرn، $|a_n| \leq en$.

قضیه ۱۲.۳.۱. اگر تابع $f(z) = z + \sum_{n=۲}^{\infty} a_n z^n$ در رده‌ی $\mathbb{S}$ باشد و ضرایب حقیقی داشته باشد، آنگاه برای هر n داریم $|a_n| \leq n$.

برهان. برای $r < ۱$، $z = re^{i\theta}$ قرار می‌دهیم:

$$\mathrm{Im} f(z) = v(re^{i\theta}) = \sum_{k=۱}^{\infty} a_k r^k \sin k\theta$$

با ضرب طرفین رابطه‌ی فوق در$\sin n\theta$ و انتگرال‌گیری از ۰ تا π داریم :

$$\frac{۲}{\pi}\int_۰^{\pi} v(re^{i\theta}) \sin n\theta d\theta = \frac{۲}{\pi}\int_۰^{\pi} a_n r^n \sin^۲ n\theta \mathrm{d}\theta = a_n r^n \tag{۷.۱}$$

با توجه به رابطه‌ی:

$$|\sin(n+۱)\theta| = |\sin n\theta \cos\theta + \cos n\theta \sin\theta| \leq |\sin n\theta| + |\sin\theta|$$

و به روش استقرایی می‌توان نشان داد که $|sin n\theta| \leq n|sin\theta|$ لذا از رابطه‌ی (۷.۱) نتیجه می‌شود:

$$|a_n r^n| \leq \frac{۲n}{\pi}\int_۰^{\pi} |v(re^{i\theta})| \sin\theta \mathrm{d}\theta \tag{۸.۱}$$

[۱۲] Littlewood

حال نشان می‌دهیم $\upsilon(re^{i\theta}) \neq ۰$ ، که در آن $(۰ < \theta < \pi, ۰ < r < ۱)$:

$$۰ \neq f(re^{i\theta}) - f(re^{-i\theta}) = \sum_{n=۱}^{\infty} a_n r^n (e^{in\theta} - e^{-in\theta}) = ۲i \sum_{n=۱}^{\infty} a_n r^n \sin n\theta = ۲i\upsilon(re^{i\theta})$$

چون $\upsilon(re^{i\theta})$ نسبت به θ تابعی پیوسته است، پس در فاصله‌ی $۰ < \theta < \pi$ علامت جبری ثابتی دارد. لذا :

$$r = |a_۱ r| = \left| \frac{۲}{\pi} \int_۰^{\pi} \upsilon(re^{i\theta}) \sin\theta \mathrm{d}\theta \right| = \frac{۲}{\pi} \int_۰^{\pi} |\upsilon(re^{i\theta})| \sin\theta \mathrm{d}\theta. \qquad (۹.۱)$$

با جایگزینی (۹.۱)در (۸.۱) ، رابطه $|a_n r^n| \leq nr$ بدست می‌آید و با $r \to ۱$ قضیه ثابت می‌گردد. □

۴.۱ رده‌ی $\mathbb{S}^*$

تعریف ۱.۴.۱. میدان D را نسبت به $z_۰$ ستاره‌گون گوییم هرگاه پاره خط مستقیمی که هر نقطه از D را به $z_۰$ وصل می‌کند در D قرار بگیرد. تابع $f(z) \in \mathbb{S}$ را نسبت به مبدأ ستاره‌گون گوییم هرگاه قرص $|z| < ۱$ با $f(z)$ بر میدانی نگاشته شود که نسبت به $\omega = ۰$ ستاره‌گون است. این زیر رده‌ی $\mathbb{S}$ با $\mathbb{S}^*$ نشان داده می‌شود.

لم ۲.۴.۱. فرض کنیم $f(z) \in \mathbb{S}$، در این‌صورت $f(z) \in \mathbb{S}^*$ اگر و تنها اگر $f(z)$ هر قرص $|z| < r < ۱$ را بر میدان ستاره‌گون بنگارد.

برهان. ابتدا فرض کنیم$f(z) \in \mathbb{S}^*$ و D تصویر $|z| < ۱$ و D_r تصویر $|z| < r < ۱$ در تابع $f(z)$ باشد. اگر $w \in D$ باشد، آنگاه برای $۰ < t < ۱$، $tw \in D$ (چون D ستاره‌گون نسبت به مبدأ می‌باشد) لذا تابع $g(z) = f^{-۱}(tf(z))$ در $|z| < ۱$ تحلیلی است و در نامساوی $|g(z)| < ۱$ صدق می‌کند. چون $g(۰) = f^{-۱}(tf(۰))$، با توجه به لم شوارتز $|g(z)| \leq |z|$. اکنون نقطه‌ی $w_۱ \in D_r$ را انتخاب می‌کنیم. در این‌صورت برای نقطه‌ی $z_۱$ ای با فرض $|z_۱| < ۱$ و برای t دلخواه با فرض $۰ < t < ۱$ داریم :

$$|f^{-۱}(t\omega_۱)| = |f^{-۱}(tf(z_۱))| = |g(z_۱)| \leq |z_۱| < r$$

ولی این بدان معنی است که $tw_۱$ در D_r قرار دارد. چون این مطلب برای همه‌ی $w_۱$ ها در D_r و همه‌ی tها که $۰ < t < ۱$ درست است، میدان D_r نسبت به $w = ۰$ ستاره‌گون است.
برعکس، اگر $f(z)$ در رده‌ی $\mathbb{S}^*$ قرار نداشته باشد، آنگاه نقطه $w_۰ \in D$ موجود است به‌طوری‌که برای $t_۰$ای، $(۰ < t_۰ < ۱)$، $t_۰ w_۰$ متعلق به D نمی‌باشد. اینک قرص $|z| < r < ۱$ را انتخاب می‌کنیم به‌طوری‌که تصویرش D_r شامل نقطه‌ی $w_۰$ باشد. چون $D_r \subset D$، نقطه‌ی $t_۰ w_۰$ متعلق به D_r نیست. پس $f(z)$ ، $|z| < ۱$ را بر میدان ستاره‌گون نمی‌نگارد. □

قضیه ۳.۴.۱. فرض کنیم $f(z) \in \mathbb{S}$ باشد، در این‌صورت $f(z) \in \mathbb{S}^*$ اگرو تنها اگر:

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > ۰$$

برهان. با توجه به لم ۲.۴.۱، $f(z) \in \mathbb{S}^*$ اگر و تنها اگر تصویر D_r از $۱ > r > |z|$ یک میدان ستاره‌گون باشد. به بیان معادل برای هر θ $(۰ \leq \theta \leq ۲\pi)$ بردار شعاعی از $w = ۰$ تا $w = f(re^{i\theta})$ باید در D_r باشد ولی این بدان معنی است که $\arg f(re^{i\theta})$ تابعی است که نسبت به θ اکیداً صعودی است، زیرا در غیر این‌صورت بردار شعاعی می‌بایست مرز D_r را حداقل در دو نقطه قطع کند. پس یک تابع در $\mathbb{S}^*$ با شرط $\frac{\partial}{\partial\theta}\arg f(re^{i\theta}) > ۰$ مشخص می‌شود. ولی $\arg f(re^{i\theta}) = \operatorname{Im}\log f(re^{i\theta})$، بنابراین:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\operatorname{Im}\log f(re^{i\theta})\right\} = \operatorname{Im}\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(re^{i\theta})\right\} = \operatorname{Im}\left\{i\frac{re^{i\theta}f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})}\right\} = \operatorname{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > ۰$$

□

مثال ۴.۴.۱. تابع کوئب $k(z) = \frac{z}{(۱-z)^۲}$ در رده‌ی $\mathbb{S}^*$ قرار دارد، زیرا تصویر $|z| < ۱$ صفحه‌ی ω می‌باشد که در امتداد محور حقیقی از $-\frac{۱}{۴}$ تا ∞ بریده شده است و همچنین:

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{zk'(z)}{k(z)}\right\} = \operatorname{Re}\left\{\frac{۱+z}{۱-z}\right\}$$

شرط $\operatorname{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > ۰$ حاکی از آن است که برد $f(z)$ یک میدان ستاره‌گون است اما تک‌ارز بودن $f(z)$ را تضمین نمی‌کند.

قضیه ۵.۴.۱. فرض کنیم $f(z) = a_۱z + a_۲z^۲ + \cdots$ در $|z| < ۱$ تحلیلی باشد و $f'(z) = a_۱ \neq ۰$ اگر $\operatorname{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > ۰$ آنگاه $f(z)$ تک‌ارز است.

قضیه ۶.۴.۱. فرض کنیم $f(z) = z + \sum_{n=۲}^{\infty} a_n z^n$ در $\mathbb{S}^*$ باشد آنگاه برای هر n، $|a_n| \leq n$.

برهان. چون برای $۰ < |z| < ۱$، $f(z) \neq ۰$ تابع

$$P(z) = z\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{۱ + \sum_{n=۲}^{\infty} n a_n z^{n-۱}}{۱ + \sum_{n=۲}^{\infty} a_n z^{n-۱}} \tag{۱۰.۱}$$

در $|z| < ۱$ تحلیلی است. لذا می‌توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$P(z) = ۱ + \sum_{n=۲}^{\infty} \alpha_n z^n \tag{۱۱.۱}$$

از طرفی برای $|z| < ۱$، $f(z) \in \mathbb{S}^*$ پس $\mathrm{Re}\{P(z)\} > ۰$. بنابر قضیهٔ ۳.۳.۱ می‌دانیم:

$$|\alpha_n| \leq ۲ \quad n = ۱, ۲, ۳, \cdots \tag{۱۲.۱}$$

از (۱۰.۱) و (۱۱.۱) داریم:

$$۱ + \sum_{n=۲}^{\infty} n a_n z^{n-۱} = (۱ + \sum_{n=۲}^{\infty} a_n z^{n-۱})(۱ + \sum_{n=۲}^{\infty} a_n z^n)$$

با مساوی قرار دادن ضرایب به رابطهٔ زیر می‌رسیم:

$$k a_k = a_k + a_{k-۱}\alpha_۱ + a_{k-۲}\alpha_۲ + \cdots + a_۲\alpha_{k-۲} + \alpha_{k-۱}$$

و یا به‌صورت معادل :

$$(k-۱)a_k = a_{k-۱}\alpha_۱ + a_{k-۲}\alpha_۲ + \cdots + a_۲\alpha_{k-۲} + \alpha_{k-۱} \quad (k = ۲, ۳, \cdots) \tag{۱۳.۱}$$

با استفاده از کران (۱۲.۱) می‌توان نامساوی مثلث را در (۱۳.۱)به‌کار برد لذا:

$$(k-۱)|a_k| \leq ۲(|a_{k-۱}| + |a_{k-۲}| + \cdots + |a_۲| + ۱)$$

از رابطهٔ فوق در می‌یابیم $|a_۲| \leq ۲$. سپس فرض کنیم برای $k = ۲, ۳, \cdots, n-۱$ داشته باشیم $|a_k| \leq k$. در این‌صورت :

$$(n-۱)|a_n| \leq ۲\left[(n-۱) + (n-۲) + \cdots + ۲ + ۱\right] = \frac{۲(n-۱)n}{۲}$$

و لذا رابطهٔ $|a_n| \leq n$ برقرار می‌باشد لذا به استقرا قضیه برای هر n درست است. □

تعریف ۷.۴.۱. تابع $f(z) \in \mathbb{S}$ ستاره‌گون از مرتبهٔ α، $(۰ \leq \alpha < ۱)$ نامیده می‌شود هرگاه :

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > \alpha \quad (|z| < ۱)$$

این زیر ردهٔ $\mathbb{S}$ را به $\mathbb{S}^*(\alpha)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۸.۴.۱. فرض کنیم $f(z) = z + \sum_{n=۲}^{\infty} a_n z^n$، $(۰ \leq \alpha < ۱)$ اگر

$$\sum_{n=۲}^{\infty}(n-\alpha)|a_n| \leq ۱ - \alpha$$

آنگاه $f(z) \in S^*(\alpha)$.

برهان. بنا بر تعریف ۷.۴.۱کافی است نشان دهیم $z\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ در یک دایره به شعاع $۱-\alpha$ و به مرکز ۱ قرار دارد، زیرا:

$$\left|z\frac{f'(z)}{f(z)} - ۱\right| < ۱ - \alpha \Rightarrow \left|۱ - z\frac{f'(z)}{f(z)}\right| < ۱ - \alpha \Rightarrow ۱ - \left|z\frac{f'(z)}{f(z)}\right| < ۱ - \alpha$$

بنابراین:

$$\begin{aligned}\left|z\frac{f'}{f}-۱\right| &= \left|\frac{zf'-f}{f}\right| = \left|\frac{\sum_{n=۲}^{\infty}(n-۱)|a_n|z^n}{z+\sum_{n=۲}^{\infty}a_nz^n}\right| \\ &\le \frac{\sum_{n=۲}^{\infty}(n-۱)|a_n||z|^{n-۱}}{۱-\sum_{n=۲}^{\infty}|a_n||z|^{n-۱}} \le \frac{\sum_{n=۲}^{\infty}(n-۱)|a_n|}{۱-\sum_{n=۲}^{\infty}|a_n|}\end{aligned}$$

آخرین جمله‌ی قبل دارای کران بالای $۱-\alpha$ می‌باشد اگر:

$$\sum_{n=۲}^{\infty}(n-۱)|a_n| \le (۱-\alpha)(۱-\sum_{n=۲}^{\infty}|a_n|)$$

که معادل است با $\sum_{n=۲}^{\infty}(n-\alpha)|a_n| \le ۱-\alpha$. بنا بر فرض، این رابطه برقرار است. بنابراین $|z\frac{f'}{f}-۱| \le ۱-\alpha$. □

۵.۱ رده‌ی $\mathbb{K}$

تعریف ۱.۵.۱. میدان D را محدب گوییم هرگاه پاره خط مستقیمی که هر دو نقطه از D را به‌هم وصل می‌کند در D قرار بگیرد.

تعریف ۲.۵.۱. تابع $f(z) \in \mathbb{S}$ را محدب گوییم هرگاه قرص $|z| < ۱$ با $f(z)$ بر یک میدان محدب نگاشته شود، این زیر رده‌ی $\mathbb{S}$ را با $\mathbb{K}$ نشان می‌دهیم .

قضیه ۳.۵.۱. فرض کنیم $f(z) \in \mathbb{S}$، در این‌صورت $f(z) \in \mathbb{K}$ اگرو تنها اگر $f(z)$ هر قرص $|z| < r < ۱$ را بر میدان محدب تصویر کند.

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم $f(z) \in \mathbb{K}$ و D تصویر $|z| < ۱$ و D_r تصویر $|z| < r < ۱$ تحت $f(z)$ باشد. نقاط $w_۱$، $w_۲$ را در D_r انتخاب می‌کنیم. باید نشان دهیم که پاره خط $tw_۱+(۱-t)w_۲$، $(۰ < t < ۱)$ هم در D_r قرار دارد. نقاط $z_۱$ و $z_۲$ در قرص $|z| < ۱$ موجود هستند به‌طوری که $\omega_۱ = f(z_۱)$ و $\omega_۲ = f(z_۲)$. بدون از دست دادن کلیت فرض کنیم $|z_۲| \le |z_۱|$ آنگاه تصویر $|z| < ۱$ تحت تابع $g(z) = tf\left((\frac{z_۱}{z_۲})z\right) + (۱-t)f(z)$ در D واقع است. لذا تابع $h(z) = f^{-۱}(g(z))$ در $|z| < ۱$ تحلیلی است و چون $f(z) \in \mathbb{S}$ لذا در شرایط $|h(z)| < ۱$ و $h(۰) = ۰$ صدق می‌کند، به موجب لم شوارتز $|h(z)| \le |z|$. به‌ویژه :

$$|h(z_۲)| = |f^{-۱}(t\omega_۱ + (۱-t)\omega_۲)| \le |z_۲| < r \tag{۱۴.۱}$$

چون $D_r \subset D$ ، نقطه‌ی $z_۰$ای در قرص $|z| < ۱$ موجود است که $tw_۱ + (۱-t)\omega_۲ = f(z_۰)$ ولی بنابر(۱۴.۱) نقطه‌ی $f^{-۱}(f(z_۰)) = z_۰$ نیز می‌بایست در قرص $|z| < ۱$ باشد. پس هر نقطه بر پاره خط $tw_۱ + (۱-t)\omega_۲$ در D_r قرار دارد.

برعکس، اگر $f(z)$ در رده‌ی $\mathbb{K}$ نباشد آنگاه دو نقطه در D وجود دارند که پاره‌خط مار بر این دو نقطه در

D قرار ندارد. اینک قرصی مانند $|z| < r < ۱$ انتخاب میکنیم که تصویرش D_r شامل این دو نقطه باشد. چون $D_r \subset D$ پاره خطی که این دو نقطه را بههم وصل میکند، نمیتواند در D_r قرار داشته باشد، لذا $f(z)$ قرص$r > |z|$ را بر یک میدان محدب تصویر نمیکند. □

قضیه ۴.۵.۱. فرض کنیم $f(z)$ در $|z| < ۱$ تحلیلی باشد و $f(۰) = ۰$ و $f'(۰) = ۱$. در اینصورت $f(z) \in \mathbb{K}$ اگر و تنها اگر:

$$\mathrm{Re}\left\{ ۱ + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} > ۰ \qquad (|z| < ۱).$$

برهان. $f(z) \in K$اگر و تنها اگر تصویر D_r از $|z| < r < ۱$ یک میدان محدب باشد. از نظر هندسی این بدان معنی است که تابع $w = f(re^{i\theta})$ دایره $|z| = r < ۱$ را بر یک مرز ساده مینگارد و مماس بر این مرز، با افزایش θ در خلاف جهت عقربههای ساعت حرکت میکند، یعنی ضریب زاویهی مماس بر این مرز نسبت به θ تابعی صعودیست، میدانیم زاویهای که خط مماس در صفحهی ω با محور حقیقی میسازد برابر است با:

$$\frac{\pi}{۲} + \theta + \arg f'(z)$$

چون این تابع صعودیست، لذا تابع محدب با شرط زیر مشخص میگردد:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\pi}{۲} + \theta + \arg f'(re^{i\theta}) \right) > ۰$$

و لذا:

$$۱ + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{Im} \log f'(re^{i\theta}) \right) = ۱ + \mathrm{Im}\left\{ (ire^{i\theta}) \frac{f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})} \right\} = \mathrm{Re}\left\{ ۱ + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} > ۰$$

□

قضیه ۵.۵.۱. **(الکساندر[۱۳])** فرض کنیم f یک تابع تحلیلی و نرمال در D باشد، در اینصورت $f(z) \in \mathbb{K}$ اگر و تنها اگر $zf' \in \mathbb{S}^*$.

برهان. اگر $g(z) = zf'(z)$ در اینصورت :

$$\left\{ \frac{zg'(z)}{g(z)} \right\} = \left\{ ۱ + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} > ۰$$

لذا تابع سمت چپ درD تحلیلی و مثبت است اگر و تنها اگر تابع سمت راست نیز چنین باشد. □

قضیه ۶.۵.۱. فرض کنیم $f(z) = z + \sum_{n=۲}^{\infty} a_n z^n$ در $\mathbb{K}$ باشد. در اینصورت برای هر n، $|a_n| \leq ۱$.

برهان. با توجه به قضیه ۵.۵.۱ تابع $zf'(z) = z + \sum_{n=۲}^{\infty} na_n z^n$ در $\mathbb{S}^*$ قرار دارد لذا بنا بر قضیهی ۶.۴.۱ برای هرn، $|na_n| \leq n$ و در نتیجه $|a_n| \leq ۱$. □

[۱۳] Alexander

قضیه ۷.۵.۱. اگر $f(z) \in \mathbb{K}$ برای $|z| < ۱$ داشته باشیم $f(z) \neq c$ آنگاه $|c| \geq \frac{۱}{۲}$.

برهان. ابتدا نشان می‌دهیم تابع کمکی $g(z) = (c - f(z))^۲$ در $|z| < ۱$ تک ارز است ، دو نقطه متمایز $z_۰$ و $z_۱$ در قرص واحد انتخاب می‌کنیم در این‌صورت :

$$\begin{aligned} g(z_۰) - g(z_۱) =& \Big((c - f(z_۰))^۲ - (c - f(z_۱))^۲ \Big) \\ =& \Big(f(z_۰) - f(z_۱) \Big) \Big(f(z_۰) + f(z_۱) - ۲c \Big) \end{aligned}$$

اکنون $f(z_۰) \neq f(z_۱)$ زیرا $f(z)$ تک ارز می‌باشد. همچنین چون $f(z)$ محدب است، نقطه‌ی $\frac{۱}{۲}[f(z_۰) + f(z_۱)]$ به تصویر $|z| < ۱$ متعلق است لذا نمی‌تواند مساوی c باشد. پس:

$$f(z_۰) + f(z_۱) - ۲c \neq ۰$$

و لذا تک ارزی $g(z)$ ثابت می‌شود. چون $g(z) = c^۲ - ۲cz + z^۲ + \cdots$ است بنابراین، تابع نرمال زیر در $\mathbb{S}$ است.

$$h(z) = \frac{g(z) - c^۲}{-۲c} = z + (\frac{-z^۲}{۲c}) + \cdots$$

به‌علاوه در $|z| < ۱$ ، $h(z) \neq \frac{c}{۲}$ ، زیرا $g(z)$ هرگز در آن‌جا صفر نیست. با به‌کار بردن قضیه‌ی پوششی در می‌یابیم:

$$|\frac{c}{۲}| \geq \frac{۱}{۴} \text{ یا و } |c| \geq \frac{۱}{۲}.$$

□

قضیه ۸.۵.۱. اگر $f(z) \in \mathbb{K}$ باشد، آنگاه برای $|z| = r < ۱$:

$$\frac{۱}{(۱ + r)^۲} \leq |f'(z)| \leq \frac{۱}{(۱ - r)^۲}$$

برهان. می‌دانیم تابع $(|z_۰| < ۱)$ $w = \frac{z + z_۰}{۱ + \bar{z}_۰ z}$ تحلیلی، یک به یک و پوشاست و قرص واحد را بر خودش می‌نگارد، پس تابع:

$$g(z) = f\left(\frac{z + z_۰}{۱ + \bar{z}_۰ z}\right) = b_۰ + b_۱ z + b_۲ z^۲$$

نیز به ازای $|z| < ۱$ تحلیلی و تک ارز است. بنابراین :

$$\begin{aligned} &g(۰) = b_۰ = f(z_۰) \qquad b_۱ = g'(۰) = f'(z_۰)(۱ - |z_۰|^۲) \\ &b_۲ = \frac{g''(۰)}{۲} = \frac{۱}{۲}\left(f''(z_۰)(۱ - |z_۰|^۲)^۲ - ۲f'(z_۰)\bar{z}_۰(۱ - |z_۰|^۲)\right). \end{aligned}$$

چون تابع $g(z)$ نرمالیزه نمی‌باشد لذا $g(z)$ در رده‌ی $\mathbb{S}$ قرار ندارد. با توجه به اینکه تابع

$$\frac{g(z)-g(\circ)}{g'(\circ)} = z + \frac{b_{۲}}{b_{۱}}z^{۲} + \cdots$$

در$\mathbb{S}$ قرار می‌گیرد لذا در $\mathbb{K}$ نیز وجود دارد پس بنا به قضیه‌ی۶.۵.۱داریم:

$$\frac{۱}{۲}\Big|\frac{f''(z_\circ)}{f'(z_\circ)}(۱-|z_\circ|^{۲}) - ۲\bar{z}_\circ\Big| \leq ۱$$

با قرار دادن $z_\circ = re^{i\theta}$ و ضرب طرفین در $\dfrac{۲|z_\circ|}{۱-|z_\circ|^{۲}}$ داریم:

$$\Big|\frac{z_\circ f''(z_\circ)}{f'(z_\circ)} - \frac{۲|z_\circ|^{۲}}{۱-|z_\circ|^{۲}}\Big| \leq \frac{۲|z_\circ|}{۱-|z_\circ|^{۲}}.$$

حال چون $z_\circ$ دلخواه است داریم:

$$\begin{aligned}
&\Big|\frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{۲r^{۲}}{۱-r^{۲}}\Big| \leq \frac{۲r}{۱-r^{۲}}\\
&\Longrightarrow \frac{۲r^{۲}-۲r}{۱-r^{۲}} \leq \frac{zf''(z)}{f'(z)} \leq \frac{۲r^{۲}+۲r}{۱-r^{۲}}\\
&\Longrightarrow \frac{۲r-۲}{۱-r^{۲}} \leq \frac{\partial}{\partial r}\log|f'(z)| \leq \frac{۲r+۲}{۱-r^{۲}}
\end{aligned}$$

حال از $\circ$ تا r انتگرال می‌گیریم :

$$-۲\log(۱+r) \leq \log|f'(z)| \leq -۲\log(۱-r)$$

لذا :

$$\frac{۱}{(۱+r)^{۲}} \leq |f'(z)| \leq \frac{۱}{(۱-r)^{۲}}.$$

□

قضیه ۹.۵.۱. اگر $f(z) \in \mathbb{K}$ باشد آنگاه برای $|z| = r < ۱$،

$$\frac{r}{۱+r} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{۱-r}$$

برهان. ابتدا طرف راست نامعادله را اثبات می‌کنیم، بنابر قضیه‌ی ۸.۵.۱ برای $|z| = r < ۱$ داریم $|f'(z)| \leq \dfrac{۱}{(۱-r)^{۲}}$ نقطه‌ی $\circ$ را به z با یک خط مستقیم وصل کرده و روی این پاره خط انتگرال می‌گیریم:

$$\begin{aligned}
|f(z)| =& |f(z_\circ) - f(\circ)| = \int_\circ^r |f'(t)|\mathrm{d}t\\
&\leq \int_\circ^r \frac{۱}{(۱-t)^{۲}}\mathrm{d}t = \frac{r}{۱-r} \Longrightarrow |f(z)| \leq \frac{r}{۱-r}
\end{aligned}$$

برای اثبات طرف چپ نامعادله چون $f(z_\circ) \in \mathbb{K}$ بنابراین $|f(z_\circ)| < \frac{۱}{۲}$ و چون برد $f(z)$ محدب است پس هر پاره‌خطی که مبدأ را به $f(z_\circ)$ وصل می‌کند در برد $f(z)$ قرار دارد این پاره‌خط را L می‌نامیم، حال اگر C تصویر وارون پاره‌خط فوق باشد آنگاه با قرار دادن $w = f(z)$ داریم:

$$\begin{aligned}|f(z_\circ)| &= \int_L |\mathrm{d}w| = \int_c |f'(z)\mathrm{d}z| \geq \int_c |f'(z)||\mathrm{d}z| \\ &\geq \int_c \frac{۱}{(۱+r)^۲}\mathrm{d}r = \frac{r}{۱+r} \\ \Longrightarrow &|f(z)| \geq \frac{r}{۱+r} \\ \Longrightarrow &\frac{r}{۱+r} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{۱-r}\end{aligned}$$

□

فصل ۲

توابع همساز تک‌ارز

۱.۲ رده‌ی $\mathbb{S}_H$ و زیر رده‌های آن

هر تابع مختلط مقدار همساز در دیسک واحد U را می‌توان به‌صورت $f = h + \bar{g}$ نوشت که h و g در U تحلیلی هستند، h را قسمت تحلیلی و g را قسمت مزدوج تحلیلی از f می‌نامیم. تابع تحلیلی $f = u + iv$ مختلط مقدار همساز در دامنه‌ی $D \subset C$ است اگر u و v حقیقی مقدار همساز باشند.

تعریف ۱.۱.۲. رده‌ی توابع $f = h + \bar{g}$ که مختلط مقدار، تک‌ارز، همساز، حافظ‌جهت و نرمال $(f(\circ) = \circ, f_z(\circ) = ۱)$در دیسک واحد باز هستند را با S_H نشان می‌دهیم. هر $f \in S_H$ را می‌توان به‌صورت $f = h + \bar{g}$ نوشت که در آن h و g به‌صورت زیر هستند:

$$h(z) = z + \sum_{n=۲}^{\infty} a_n z^n \quad , \quad g(z) = \sum_{n=۱}^{\infty} b_n z^n \qquad (۱.۲)$$

ملاحظه می‌کنیم که در (۱.۲) ضرایب دلخواه هستند، و h و g در U تحلیلی هستند، اگر $|h'(z)| > |g'(z)|$ آنگاه این شرط شرطی لازم و کافیست برای اینکه f موضعا تک‌ارز و حافظ جهت در U باشد ، کلونی و شیل -اسمال در [۳] برخی خواص هندسی زیررده‌هائی از S_H رابررسی کردند.
برای مقادیر $|z| = r < ۱$ اگر:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(arg f(re^{i\theta})) = \mathrm{Re}\left\{\frac{zh'(z) - \overline{zg'(z)}}{h(z) + \overline{g(z)}}\right\} > \circ$$

(نگاه کنید به [۱۲]) آنگاه تابع f به‌صورت (۱.۲) همساز ستاره‌گون است.
در سال ۱۹۸۴، کلونی [۱] ، شیل -اسمال [۲] رده‌ی $\mathbb{S}_H$ را به همراه زیررده‌های آن بررسی کردند. پس از آن، چندین مقاله در رابطه با $\mathbb{S}_H$ و زیررده‌های آن نوشته شد. در این فصل، به بررسی چند زیررده از $\mathbb{S}_H$ می‌پردازیم و شرایط تک ارزی، نقاط فرین و کران‌های رشد توابع در این زیررده‌ها را مشخص می‌کنیم.

[۱] Clunie

[۲] Sheil-Small

تعریف ۲.۱.۲. برای $۰ \leq \alpha < ۱$، زیرردهای از $\mathbb{S}_H$ که شامل توابع همساز ستاره‌گون از مرتبه‌ی α است را با $\mathbb{S}_H^*(\alpha)$ نمایش می‌دهیم. چنانچه در فصل قبل گفته شد تابع $f = h + \bar{g}$ به‌صورت (۱.۳) را همساز ستاره‌گون از مرتبه‌ی α که $۰ \leq \alpha < ۱$ و $|z| = r < ۱$ می‌نامیم، اگر:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(arg f(re^{i\theta})) \geq \alpha, \quad |z| = r < ۱ \tag{۲.۲}$$

تعریف ۳.۱.۲. $\mathbb{TS}_H^*(\alpha)$ زیرردهای از $\mathbb{S}_H^*(\alpha)$ است که توابع h و g در $f = h+\bar{g}$ به‌صورت زیر هستند:

$$h(z) = z - \sum_{n=۲}^{\infty} |a_n| z^n, \quad g(z) = \sum_{n=۱}^{\infty} |b_n| z^n \tag{۳.۲}$$

تعریف ۴.۱.۲. زیرردهای از $\mathbb{S}_H$ که در آن $\alpha = b_۱ = ۰$ است را با $\mathbb{S}_H^{\circ}$ نمایش می‌دهیم.

در بخش نخست، به بررسی زیررده‌های مختلف $\mathbb{S}_H$ می‌پردازیم. فرض می‌کنیم $\mathbb{S}_H^{*\circ}$ و $\mathbb{K}_H^{\circ}$ زیررده‌هایی از $\mathbb{S}_H^{\circ}$ باشند که شامل توابعی مانند f هستند که U را به‌ترتیب روی میدان‌های ستاره‌گون و محدب می‌نگارند. به‌علاوه، زیررده‌های $\mathbb{S}_H^{*\circ}$ و $\mathbb{K}_H^{\circ}$ را با $\mathbb{TS}_H^{*\circ}$ و $\mathbb{TK}_H^{\circ}$ نمایش می‌دهیم. که ضرایب $f = h+\bar{g}$ به‌صورت زیر هستند:

$$h(z) = z - \sum_{n=۲}^{\infty} a_n z^n, \quad a_n \geq ۰; \quad g(z) = -\sum_{n=۲}^{\infty} b_n z^n, \quad b_n \geq ۰ \tag{۴.۲}$$

۱.۱.۲ زیر رده‌هائی از $\mathbb{S}_H$

در این بخش به بررسی دو زیررده از $\mathbb{S}_H$ می‌پردازیم. آوجی [۳] و زلوتکیویچ [۴] در [۱] ثابت کردند که شرایط ضریبی $\sum_{n=۲}^{\infty} n(|a_n| + |b_n|) \leq ۱$ برای قرار گرفتن تابع $f = h + \bar{g}$ در $\mathbb{S}_H^{*\circ}(\alpha)$ کافیست. سیلورمن[۱۳][۵] ثابت کرد اگر در (۱.۲)، $b_۱ = ۰$ و a_n و b_n منفی باشند نیز این شرایط ضریبی شرطی لازم است. توجه کنید که در هر دو نتیجه بدست آمده، موضوع به محدودیت $b_۱ = ۰$ بستگی دارد. برهان ارائه شده در این بخش شرایط ضریبی کافی برای قرارگیری تابع $f = h+\bar{g}$ به‌صورت (۱.۲) در $\mathbb{S}_H^*(\alpha)$ را فراهم می‌کند که $۰ \leq \alpha < ۱$ و $b_۱$ لزوماً صفر نیست.

قضیه ۵.۱.۲. اگر ضرایب تابع $f \in \mathbb{S}_H$ در شرط $\sum_{n=۲}^{\infty} n(|a_n| + |b_n|) \leq ۱$ صدق کند، آنگاه f همساز ستاره‌گون است.

برهان. ابتدا توجه کنید که:

$$|h'(z)| \geq ۱ - \sum_{n=۱}^{\infty} n|a_n| r^{n-۱} > \sum_{n=۲}^{\infty} n|b_n| r^{n-۱} \geq |g'(z)|,$$

---

[۳] Avci

[۴] Zlotkiewicz

[۵] Silverman

بنابراین f موضعا تک ارز و حافظ جهت است.کافیست نشان دهیم، اگر $۰ < r < ۱$ و $۰ \leq \theta < ۲\pi$ آنگاه $\frac{\partial}{\partial\theta}(\arg f(re^{i\theta})) > ۰$ است. داریم:

$$\begin{aligned}
&f(re^{i\theta}) = re^{i\theta} + \sum_{n=۲}^{\infty}(a_n e^{in\theta} + \bar{b}_n e^{-in\theta})r^n,\\
&\frac{\partial}{\partial\theta}(\arg f(re^{i\theta})) = \operatorname{Im}\Big(\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(re^{i\theta})\Big)\\
&= \operatorname{Re}\Big\{\frac{۱ + \sum_{n=۲}^{\infty} n(a_n e^{i(n-۱)\theta} - \bar{b}_n e^{-i(n+۱)\theta})r^{n-۱}}{۱ + \sum_{n=۲}^{\infty}(a_n e^{i(n-۱)\theta} + \bar{b}_n e^{-i(n+۱)\theta})r^{n-۱}}\Big\}\\
&:= \operatorname{Re}\frac{۱ + A(z)}{۱ + B(z)}
\end{aligned}$$

حال اگرقرار دهیم:

$$\frac{۱ + A(z)}{۱ + B(z)} = \frac{۱ + w(z)}{۱ - w(z)}$$

و همچنین $|w(z)| \leq r$ باشد، آنگاه $\frac{\partial}{\partial\theta}(arg f(re^{i\theta})) > ۰$ خواهد بود، ولی

$$w(z) = \frac{A - B}{۲ + A + B} = \frac{\sum_{n=۲}^{\infty}\Big[(n-۱)(a_n e^{i(n-۱)\theta} - (n+۱)\bar{b}_n e^{-i(n+۱)\theta}\Big]r^{n-۱}}{۲ + \sum_{n=۲}^{\infty}\Big[(n+۱)(a_n e^{i(n-۱)\theta} - (n-۱)\bar{b}_n e^{-i(n+۱)\theta}\Big]r^{n-۱}}$$

بنابراین:

$$|w(z)| \leq \frac{\sum_{n=۲}^{\infty}\Big[(n-۱)|a_n| + (n+۱)|b_n|\Big]r}{۲ - \sum_{n=۲}^{\infty}\Big[(n+۱)|a_n| + (n-۱)|b_n|\Big]r}.$$

عبارت آخر از بالا توسط r کراندار است اگر و تنها اگر، $\sum_{n=۲}^{\infty} n(|a_n| + |b_n|) \leq ۱$ باشد. □

نتیجه ۶.۱.۲. اگر ضرایب تابع $f \in \mathbb{S}_H$ به‌صورت (۵.۲) در شرط $\sum_{n=۲}^{\infty} n^۲(|a_n| + |b_n|) \leq ۱$ صدق کند آنگاه f همساز محدب است.

برهان. با استفاده از قضیه ۵.۵.۱ (الکساندر) و قضیه ۵.۱.۲ نتیجه حاصل می‌شود. □

نتیجه ۷.۱.۲. تحت شرایط قضیه‌ی ۵.۱.۲، تابع f در دیسک واحد U همساز تک ارز نیز است.

برهان. اگر $g(z) \equiv ۰$ باشد، آنگاه $f(z)$ تحلیلی است و تک‌ارزی f از ستاره‌گون بودن آن نتیجه می‌شود.
اگر $g(z) \not\equiv ۰$ و $z_۱ \neq z_۲$ باشد، آنگاه:

$$\left|\frac{f(z_۱)-f(z_۲)}{h(z_۱)-h(z_۲)}\right| \geq ۱ - \left|\frac{g(z_۱)-g(z_۲)}{h(z_۱)-h(z_۲)}\right|$$
$$= ۱ - \left|\frac{\sum_{n=۲}^{\infty} b_n(z_۱^n - z_۲^n)}{(z_۱-z_۲)+\sum_{n=۲}^{\infty} a_n(z_۱^n - z_۲^n)}\right|$$
$$> ۱ - \frac{\sum_{n=۲}^{\infty} n|b_n|}{۱-\sum_{n=۲}^{\infty} n|a_n|} \geq ۰$$

که تک‌ارزی را اثبات می‌کند. □

۲.۱.۲ زیر رده‌هایی از توابع همساز تک‌ارز با ضرایب منفی

دراین بخش ابتدا رده‌ی $HP(\beta)$ را معرفی کرده و سپس شرط لازم و کافی برای اینکه توابع همساز و نرمالیزه در این رده باشند را ارائه می‌دهیم. این شرایط نشان می‌دهند برای اینکه توابع همساز تک‌ارز باشند باید ضرایب در h و g منفی باشند.

تعریف ۸.۱.۲. زیر رده‌هایی از S_H که در شرط زیرصدق کنند را با $HP(\beta)$ نشان می‌دهیم:

$$\text{Re}\{h'(z)+g'(z)\} > \beta, \quad ۰ \leq \beta < ۱ \tag{۵.۲}$$

و به‌علاوه $THP(\beta)$ را زیر رده‌هایی از $HP(\beta)$ می‌گیریم که h و g در $f = h + \bar{g}$ به‌صورت زیر باشند:

$$h(z) = z - \sum_{n=۲}^{\infty} |a_n| z^n \quad , \quad g(z) = -\sum_{n=۱}^{\infty} |b_n| z^n \tag{۶.۲}$$

بدیهی است اگر $۰ \leq \beta_۱ \leq \beta_۲ < ۱$ آنگاه $HP(\beta_۲) \subseteq HP(\beta_۱)$.
با استفاده از قضایای زیر ضرایب دقیق برای h و g در $f = h + \bar{g} \in HP(\beta)$ به‌دست می‌آوریم.

قضیه ۹.۱.۲. فرض کنیم $f = h + \bar{g}$ به‌صورت (۱.۲) داده شده باشد و به‌علاوه:

$$\sum_{n=۱}^{\infty} n(|a_n| + |b_n|) \leq ۲ - \beta, \tag{۷.۲}$$

که $a_۱ = ۱$ و $۰ \leq \beta < ۱$. آنگاه f همساز، تک‌ارز و حافظ جهت در U است و $f \in HP(\beta)$.

برهان. برای $|z_۱| \leq |z_۲| < ۱$ داریم با استفاده از (۷.۲)

$$|f(z_۱)-f(z_۲)| \geq |h(z_۱)-h(z_۲)| - |g(z_۱)-g(z_۲)|$$
$$\geq |z_۱ - z_۲| \left(۱ - \sum_{n=۲}^{\infty} n|a_n||z_۲|^{n-۱} - \sum_{n=۱}^{\infty} n|b_n||z_۲|^{n-۱}\right)$$
$$> |z_۱ - z_۲| \left[۱ - |z_۲| \left(\sum_{n=۲}^{\infty} n|a_n| + \sum_{n=۱}^{\infty} n|b_n|\right)\right]$$
$$\geq |z_۱ - z_۲|[۱ - |z_۲|(۱-\beta)] > ۰$$

بنابراین f در U تک‌ارز است. f در U حافظ جهت است زیرا:

$$\begin{aligned}|h'(z)| &\geq ۱ - \sum_{n=۲}^{\infty} n|a_n||z|^{n-۱}\\ &> ۱ - \sum_{n=۲}^{\infty} n|a_n| \geq \beta + \sum_{n=۱}^{\infty} n|b_n|\\ &> \sum_{n=۱}^{\infty} n|b_n||z|^{n-۱} \geq |g'(z)|.\end{aligned}$$

حال نشان می‌دهیم $f \in HP(\beta)$، می دانیم که:

$$\mathrm{Re}w \geq \beta \Longleftrightarrow |۱-\beta+w| \geq |۱+\beta-w|$$

زیرا فرض کنیم، $w = x+iy$ در نتیجه:

$$\begin{aligned}|۱-\beta+w|^۲ =&(۱-\beta+x)^۲+y^۲\\ |۱+\beta-w|^۲ =&(۱+\beta-x)^۲+y^۲\end{aligned}$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}&(۱-\beta+x)^۲+y^۲ \geq(۱+\beta-x)^۲+y^۲\\ &\Longleftrightarrow (۱-\beta+x)^۲ \geq(۱+\beta-x)^۲ \Longleftrightarrow x \geq \beta\end{aligned}$$

پس کافیست نشان دهیم که:

$$|۱-\beta+h'(z)+g'(z)| - |۱+\beta-h'(z)-g'(z)| \geq ۰ \tag{۸.۲}$$

با جایگذاری $h'(z)$ و $g'(z)$ در (۸.۲) به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}&|۱-\beta+h'(z)+g'(z)| - |۱+\beta-h'(z)-g'(z)|\\ &=\left|۲-\beta+\sum_{n=۲}^{\infty} na_nz^{n-۱}+\sum_{n=۱}^{\infty} nb_nz^{n-۱}\right| - \left|\beta-\sum_{n=۲}^{\infty} na_nz^{n-۱}-\sum_{n=۱}^{\infty} nb_nz^{n-۱}\right|\\ &\geq ۲\left[(۱-\beta)-\left(\sum_{n=۲}^{\infty} n|a_n||z|^{n-۱}+\sum_{n=۱}^{\infty} n|b_n||z|^{n-۱}\right)\right]\\ &\quad > ۲\left[۱-\beta-\left(\sum_{n=۲}^{\infty} n|a_n|+\sum_{n=۱}^{\infty} n|b_n|\right)\right] \geq ۰\end{aligned}$$

تابع همساز:

$$f(z) = z + \sum_{n=۲}^{\infty} \frac{۱-\beta}{n} x_n z^n + \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱-\beta}{n} \overline{y_n z^n}, \tag{۹.۲}$$

برای مقادیر:

$$\sum_{n=۲}^{\infty}|x_n|+\sum_{n=۱}^{\infty}|y_n|=۱$$

نشان می‌دهد کران‌های تعریف شده در (۷.۲) دقیق هستند. (یعنی حالت تساوی در (۷.۲) برقرار است) توابعی که به‌صورت (۹.۲) تعریف می‌شوند در $HP(\beta)$ هستند زیرا:

$$\sum_{n=۱}^{\infty}n(|a_n|+|b_n|)=۱+(۱-\beta)\left(\sum_{n=۲}^{\infty}|x_n|+\sum_{n=۱}^{\infty}|y_n|\right)=۲-\beta.$$

محدودیت قرارداده شده در قضیه‌ی ۱۰.۱.۲ روی قدر مطلق ضرایب از $f=h+\bar{g}$ باعث می‌شود تصمیم بگیریم با چرخش دلخواه ضرایب از f هنوز تمایل دارند در رده‌ی $HP(\beta)$ بمانند. در قضیه‌ی بعدی ثابت می‌کنیم که کران‌های ضرایب نمی‌توانند حرکت کنند. □

قضیه ۱۰.۱.۲. فرض کنیم $f=h+\bar{g}$ به‌صورت (۶.۲) داده شده باشد، آنگاه $f\in THP(\beta)$ اگر و تنها اگر:

$$\sum_{n=۱}^{\infty}n(|a_n|+|b_n|)\leq ۲-\beta \qquad (۱۰.۲)$$

که $a_۱=۱$ و $۰\leq\beta<۱$.

برهان. برای اثبات طرف اول توجه می‌کنیم با استفاده از قضیه‌ی ۹.۱.۲ چون $f=h+\bar{g}\in HP(\beta)$ است و f به‌صورت (۶.۲) است پس $f\in THP(\beta)$. برای اثبات عکس نشان می‌دهیم اگر $f\in THP(\beta)$ آنگاه شرط (۱۰.۲) برقرار است. چون شرط زیر شرطی لازم و کافیست برای اینکه تابع به‌صورت (۶.۲) در رده‌ی $THP(\beta)$ باشد:

$$\mathrm{Re}\{h'(z)+g'(z)\}>\beta$$

بنابراین:

$$\mathrm{Re}\left\{۱-\sum_{n=۲}^{\infty}n|a_n||z|^{n-۱}-\sum_{n=۱}^{\infty}n|b_n|z|^{n-۱}\right\}>\beta$$

حال با انتخاب مقادیر حقیقی از z که $z\to ۱^-$ داریم:

$$۱-\sum_{n=۲}^{\infty}n|a_n|-\sum_{n=۱}^{\infty}n|b_n|\geq\beta,$$

که دقیقا حکم قضیه است. □

قضیه ۱۱.۱.۲. اگر $f\in THP(\beta)$، آنگاه:

$$|f(z)|\leq(۱+|b_۱|)r+\frac{۱}{۲}(۱-|b_۱|-\beta)r^۲,\quad |z|=r<۱$$

و

$$|f(z)|\geq(۱-|b_۱|)r-\frac{۱}{۲}(۱-|b_۱|-\beta)r^۲,\quad |z|=r<۱$$

برهان. فرض کنیم $f \in THP(\beta)$، با قدرمطلق گرفتن از f به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}|f(z)| &\leq (1+|b_1|)r + \sum_{n=2}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)r^n \\ &\leq (1+|b_1|)r + \sum_{n=2}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)r^2 \\ &\leq (1+|b_1|)r + \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}n(|a_n|+|b_n|)r^2 \\ &\leq (1+|b_1|)r + \frac{1}{2}(1-|b_1|-\beta)r^2\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}|f(z)| &\geq (1-|b_1|)r - \sum_{n=2}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)r^n \\ &\geq (1-|b_1|)r - \sum_{n=2}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)r^2 \\ &\geq (1-|b_1|)r - \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}n(|a_n|+|b_n|)r^2 \\ &\geq (1-|b_1|)r - \frac{1}{2}(1-|b_1|-\beta)r^2\end{aligned}$$

اگر شرط (۷.۲) برقرار باشد آنگاه کران‌های داده شده در قضیه‌ی ۱۳.۲ برای توابع به‌صورت (۱.۲) نیز برقرار است. □

توابع:

$$f(z) = z - |b_1|\bar{z} - \frac{1}{2}(1-|b_1|-\beta)\bar{z}^2$$

و

$$f(z) = z - |b_1|\bar{z} - \frac{1}{2}(1-|b_1|-\beta)z^2$$

برای $|b_1| \leq 1-\beta$ و طرف چپ نامعادلات نشان می‌دهند، کران‌های قضیه‌ی ۱۰.۱.۲ دقیق هستند.

نتیجه ۱۲.۱.۲. اگر $f \in THP(\beta)$، آنگاه:

$$\{w : |w| < \frac{1}{2}(1-|b_1|+\beta)\} \subset f(U)$$

در قضیه‌ی بعدی نقاط اکسترمال پوسته‌ی محدب $THP(\beta)$ را که با $clcoTHP(\beta)$ نشان می‌دهیم بررسی می‌کنیم.

قضیه ۱۳.۱.۲. $f \in clcoTHP(\beta)$ اگر و تنها اگر:

$$f(z) = \sum_{n=۱}^{\infty}(\lambda_n h_n + \gamma_n g_n) \tag{۱۱.۲}$$

که

$$h_۱(z) = z, \quad h_n(z) = z - \frac{۱-\beta}{n} z^n; \quad n = ۲, ۳, \cdots$$

و

$$g_n(z) = z - \frac{۱-\beta}{n}\bar{z}^n; \qquad n = ۱, ۲, ۳, \cdots$$

و

$$\sum_{n=۱}^{\infty}(\lambda_n + \gamma_n) = ۱ \qquad \lambda_n \geq ۰, \gamma_n \geq ۰$$

به‌ویژه نقاط فرین از $THP(\beta)$ ، h_n و g_n هستند.

برهان. برای تابع f به‌صورت (۱۱.۲) ثابت می‌کنیم:

$$\sum_{n=۱}^{\infty} n(|a_n| + |b_n|) < ۱ - \beta$$

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=۱}^{\infty}(\lambda_n h_n + \gamma_n g_n) = \sum_{n=۱}^{\infty}\lambda_n h_n + \sum_{n=۱}^{\infty}\gamma_n g^n \\ &= \lambda_۱ z + \sum_{n=۲}^{\infty}\lambda_n z - \sum_{n=۲}^{\infty}\frac{۱-\beta}{n}\lambda_n z^n + \sum_{n=۱}^{\infty}\gamma_n z^n - \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱-\beta}{n}\gamma_n \bar{z}^n \\ &= \sum_{n=۱}^{\infty}(\lambda_n + \gamma_n)z - \sum_{n=۲}^{\infty}\underbrace{\frac{۱-\beta}{n}\lambda_n}_{a_n} z^n - \sum_{n=۱}^{\infty}\underbrace{\frac{۱-\beta}{n}\gamma_n}_{b_n}\bar{z}^n \end{aligned}$$

آنگاه:

$$\begin{gathered} \sum_{n=۲}^{\infty}\frac{n}{۱-\beta}\left(\frac{۱-\beta}{n}\lambda_n\right) + \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{n}{۱-\beta}\left(\frac{۱-\beta}{n}\gamma_n\right) \\ \sum_{n=۲}^{\infty}\lambda_n + \sum_{n=۱}^{\infty}\gamma_n = ۱ - \lambda_۱ \leq ۱ \end{gathered}$$

بنابراین $f \in clcoTHP(\beta)$.

برعکس فرض کنیم $f \in clcoTHP(\beta)$ ، مجموعه‌ی:

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \frac{n}{۱-\beta}|a_n| \Longrightarrow |a_n| = \frac{۱-\beta}{n}\lambda_n \quad n = ۲, ۳, \cdots \\ \gamma_n &= \frac{n}{۱-\beta}|b_n| \Longrightarrow |b_n| = \frac{۱-\beta}{n}\gamma_n \quad n = ۱, ۲, ۳, \cdots \end{aligned}$$

را در نظر می‌گیریم، آنگاه طبق قضیه‌ی ۱۰.۱.۲ چون $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(|a_n|+|b_n|\right) \leq 2-\beta$ پس داریم: $0 \leq \lambda_n \leq 1$ و $0 \leq \gamma_n \leq 1$، بنابراین :

$$\begin{aligned}
&1+\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n|+\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n| \\
&= \lambda_1+\sum_{n=2}^{\infty} n\frac{1-\beta}{n}\lambda_n+\sum_{n=1}^{\infty} n\frac{1-\beta}{n}\gamma_n \\
&= 2-\beta \Longrightarrow \lambda_1+(1-\beta)\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n|+\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n = 1-\beta \\
&\Longrightarrow \lambda_1+\sum_{n=2}^{\infty}\lambda_n+\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n = 1 \Longrightarrow \lambda_1 = 1-\sum_{n=2}^{\infty}\lambda_n-\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n
\end{aligned}$$

توجه می‌کنیم که با استفاده از قضیه‌ی ۱۰.۱.۲، $\lambda_1 \geq 0$، بنابراین داریم:

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_n h_n+\gamma_n g_n)$$

□

با استفاده از قضیه‌ی ۱۰.۱.۲ به آسانی می‌توان دید که $THP(\beta)$ محدب و بسته است. بنابراین $clcoTHP(\beta)=THP(\beta)$.

قضیه ۱۴.۱.۲. هر عضو از $THP(\beta)$ از U به یک دامنه‌ی ستاره‌گون نگاشته می‌شود.

برهان. کافیست ثابت کنیم اگر $f \in THP(\beta)$ آنگاه:

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{zh'(z)-\overline{zg'(z)}}{h(z)+\overline{g(z)}}\right\} > 0$$

با استفاده از این حقیقت که $\operatorname{Re}w > 0$ اگرو تنها اگر $|1-w| < |1+w|$کافیست نشان دهیم که:

$$|h(z)+\overline{g(z)}+zh'(z)-\overline{zg'(z)}|-|h(z)+\overline{g(z)}-zh'(z)+\overline{zg'(z)}| \geq 0$$

زیرا تعریف می‌کنیم:

$$w:=\left\{\frac{zh'(z)-\overline{zg'(z)}}{h(z)+\overline{g(z)}}\right\}, \quad A:=zh'(z)-\overline{zg'(z)}, \quad B:=h(z)+\overline{g(z)}$$

بنابراین داریم:

$$|1+w|=\left|1+\frac{A}{B}\right|=\left|\frac{B+A}{B}\right|>\left|\frac{B-A}{B}\right|$$

در نتیجه کافیست نشان دهیم:

$$\begin{aligned}
&|B+A|-|B-A|>0\\
&|h(z)+\overline{g(z)}+zh'(z)-\overline{zg'(z)}|\\
&-|h(z)+\overline{g(z)}-zh'(z)+\overline{zg'(z)}|\\
&=\left|2z-\sum_{n=2}^{\infty}(n+1)|a_n|z^n+\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)|b_n|\bar{z}^n\right|\\
&-\left|\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)|a_n|z^n-\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)|b_n|\bar{z}^n\right|\\
&\geq 2|z|\left[1-\sum_{n=2}^{\infty}n|a_n||z|^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}n|b_n||z|^{n-1}\right]\\
&>2|z|\left[1-\left(\sum_{n=2}^{\infty}n|a_n|-\sum_{n=1}^{\infty}n|b_n|\right)\right]\\
&\geq 2|z|[1-(1-\beta)]=2|z|\beta\geq 0
\end{aligned}$$

□

قضیه ۱۵.۱.۲. برای مقادیری از β که $|b_1|<1-\beta$ هر تابع در رده‌ی $THP(\beta)$ از دیسک U_r که $r<\dfrac{1}{2(1-\beta-|b_1|)}$ به دامنه‌ی محدب نگاشته می‌شود.

برهان. فرض کنیم $f\in THP(\beta)$ و $0<r<1$ آنگاه $r^{-1}f(rz)\in THP(\beta)$ و طبق ۶.۱.۲داریم:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=2}^{\infty}n^2(|a_n|+|b_n|)r^{n-1}\\
&=\sum_{n=2}^{\infty}n(|a_n|+|b_n|)(nr^{n-1})\\
&\leq\sum_{n=2}^{\infty}n(|a_n|+|b_n|)\leq 1-\beta-|b_1|\leq 1
\end{aligned}$$

به‌شرط آنکه $nr^{n-1}\leq\dfrac{1}{1-\beta-|b_1|}$ و این نامعادله صادق است زیرا:

$$r<\frac{1}{2(1-\beta-|b_1|)}$$

□

تعریف ۱۶.۱.۲. فرض کنیم $f(z)=z-\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|z^n-\sum_{n=1}^{\infty}\bar{z}$ مجموعه‌ی تعریف شده در زیر را δ همسایگی از f می‌نامیم:

$$N_\delta(f)=\left\{F:F(z)=z-\sum_{n=2}^{\infty}|A_n|z^n-\sum_{n=1}^{\infty}|B_n|\bar{z}^n;\sum_{n=1}^{\infty}n(|a_n-A_n|+|b_n-B_n|)\leq\delta\right\}$$

قضیه ۱۷.۱.۲. فرض کنیم $f \in THP(\beta)$ و $\delta \le \beta + ۲|b_۱|$ اگر $F \in N_\delta(f)$ آنگاه F تابعی همساز و ستاره‌گون است.

برهان. فرض کنیم:

$$F(z) = z - \sum_{n=۲}^{\infty} |A_n| z^n - \sum_{n=۱}^{\infty} |B_n| \bar{z}^n$$

متعلق به N_δ، در نتیجه:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=۱}^{\infty} n(|A_n| + |B_n|) \\
&\le \sum_{n=۲}^{\infty} n(|a_n - A_n| + |b_n - B_n|) \\
&+ \sum_{n=۲}^{\infty} n(|a_n| + |b_n|) + |B_۱ - b_۱| - |b_۱| \\
&\le \delta - |b_۱| + (۱ - \beta - |b_۱|) \le ۱.
\end{aligned}$$

بنابراین $F(z)$ یک تابع همساز ستاره‌گون است. □

۳.۱.۲ زیر رده‌هائی از توابع تک‌ارز با استفاده از تلفیق و انتگرال تلفیق

مقدمه

در این بخش زیررده‌هائی از توابع همساز تک‌ارز که به وسیله تلفیق و انتگرال تلفیق تعریف می‌شوند را تعریف می‌کنیم و خواص پایه‌ای از آن‌ها همچون ویژگی‌های ضرایب، نقاط فرین و شرایط تلفیق را بررسی می‌کنیم.

در سراسر این بخش فرض می‌کنیم f تعریف شده در (۱.۲) ، $|b_۱| < ۱$ باشد.

تعریف ۱۸.۱.۲. TS_Hرا زیر رده‌هائی از S_H می‌گیریم که h و g در $f = h + \bar{g}$ به‌صورت زیر باشند:

$$h(z) = z - \sum_{n=۲}^{\infty} |a_n| z^n \quad , \quad g(z) = \sum_{n=۱}^{\infty} |b_n| z^n; \quad |b_۱| < ۱ \qquad (۱۲.۲)$$

اخیراً آرسوزلا و کاناس[۶] در [۱۸] رده‌ای از توابع تحلیلی $k-$ محدب یکنواخت را که به‌نام $k-UCV$ ، $(K \ge ۰)$ بررسی کردند ، بنابراین $k-UCV$ را رده‌ی توابع fقرار دادند اگر و تنها اگر:

$$\mathrm{Re}\left\{۱ + \frac{(z-\zeta)f''(z)}{f'(z)}\right\} \ge ۰ \quad (|\zeta| \le k; z \in U) \qquad (۱۳.۲)$$

[۶] Urszula and Kanas

برای $\theta \in \mathbb{R}$ اگر $\zeta = -kze^{i\theta}$، آنگاه شرط (۱۳.۲) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\mathrm{Re}\left\{1 + (1 + ke^{i\theta})\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} \geq 0 \tag{۱۴.۲}$$

کیم[7] در [۸] رده‌ی $HCV(k,\alpha)$ را معرفی کرد که شامل توابع $f = h + \bar{g}$ که h و g به‌صورت (۱.۲) هستند و در شرط زیر صدق می‌کنند:

$$\mathrm{Re}\left\{1 + (1 + ke^{i\theta})\frac{z^2h''(z) + \overline{2zg'(z) + z^2g''(z)}}{zh'(z) - \overline{zg'(z)}}\right\} \geq \alpha \quad (0 \leq \alpha < 1; \theta \in \mathbb{R}; k \geq 0) \tag{۱۵.۲}$$

تعریف ۱۹.۱.۲. رده‌ی $K - UST$ را رده‌ای از توابع ستاره‌گون می‌گیریم، که اگر داشته‌باشیم $\psi(z) = zf'(z)$ چنانچه $f \in K - UCV$ آنگاه، $\psi \in K - UST$ اگر و تنها اگر:

$$\mathrm{Re}\left\{(1 + ke^{i\theta})\frac{z\psi'(z)}{\psi(z)} - ke^{i\theta}\right\} \geq 0 \qquad \text{(با استفاده از شرط (۲۶.۲))} \tag{۱۶.۲}$$

رده‌ی $K - UST$، را به توابع همساز تعمیم می‌دهیم.

تعریف ۲۰.۱.۲. رده‌ی $HST(k,\alpha)$ را رده‌ی توابعی می‌گیریم که h و g به‌صورت (۱.۲) هستند و شرط زیر را دارند:

$$\mathrm{Re}\left\{(1 + ke^{i\theta})\frac{zf'(z)}{f(z)} - ke^{i\theta}\right\} \geq \alpha \quad (0 \leq \alpha < 1; \theta \in \mathbb{R}; k \geq 0) \tag{۱۷.۲}$$

اگر به‌جای f در (۱۷.۲) $h + \bar{g}$ ، قرار دهیم داریم:

$$\mathrm{Re}\left\{(1 + ke^{i\theta})\frac{zh'(z) - \overline{zg'(z)}}{h(z) + \overline{g(z)}} - ke^{i\theta}\right\} \geq \alpha \tag{۱۸.۲}$$

تعریف ۲۱.۱.۲. تلفیق دو تابع $f = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ و $F = z + \sum_{n=2}^{\infty} A_n z^n$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(f * F)(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n A_n z^n, \tag{۱۹.۲}$$

و انتگرال تلفیق آن به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(f \diamond F)(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n A_n}{n} z^n \tag{۲۰.۲}$$

با استفاده از (۱۹.۲) و (۲۰.۲) داریم:

$$(f \diamond F)(z) = \int_0^z \frac{(f * F)(t)}{t} dt.$$

[7] Kim

تعریف ۲۲.۱.۲. اکنون مشاهده می‌کنیم زیر رده‌ی $HST(\phi, \chi, k, \alpha)$ شامل توابع $f = h + \bar{g}$ چنانچه h و g به‌صورت (۱.۲) باشند و شرط زیر برقرار باشد:

$$\operatorname{Re}\left\{(1 + ke^{i\theta})\frac{h(z) * \phi(z) - \overline{g(z) * \chi(z)}}{h(z) \diamond \chi(z) + \overline{g(z) \diamond \chi(z)}} - ke^{i\theta}\right\} \geq \alpha \quad (0 \leq \alpha < 1; k \geq 0; \theta \in \mathbb{R}) \tag{۲۱.۲}$$

که ϕ و χ به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\phi(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n z^n \quad (\lambda_n \geq 0) \quad \chi(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \mu_n z^n, \quad (\mu_n \geq 0) \tag{۲۲.۲}$$

به‌علاوه توجه می‌کنیم که رده‌ی $\overline{HST}(\phi, \chi, k, \alpha)$ زیر رده‌هایی از $HST(\phi, \chi, k, \alpha)$ است که در آن h و g به‌صورت (۱۲.۲) هستند.

در این بخش خواص رده‌ی $HST(\phi, \chi, k, \alpha)$ و $\overline{HST}(\phi, \chi, k, \alpha)$ و زیررده‌های آن‌ها را بررسی می‌کنیم.

۴.۱.۲ قضیه‌ی رشد قدرمطلق و کران برای ضرایب

اگر موارد دیگر قید نشده باشد در سراسر این بخش فرض می‌کنیم $\phi(z)$ و $\chi(z)$ در (۲۲.۲) هستند و $0 \leq \alpha < 1$ و $k \geq 0$ و $\theta \in \mathbb{R}$.

قضیه ۲۳.۱.۲. فرض کنیم $f = h + \bar{g}$ چنانچه h و g به‌صورت (۱.۲) باشند و به‌علاوه فرض کنیم:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\lambda_n}{n}\left(\frac{(1+k)n - (k+\alpha)}{1-\alpha}\right)|a_n| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n}{n}\left(\frac{(1+k)n + (k+\alpha)}{1-\alpha}\right)|b_n| \leq 1 \tag{۲۳.۲}$$

که

$$\begin{aligned} &n^2(1-\alpha) \leq \lambda_n[(1+k)n - (k+\alpha)], \\ &n^2(1-\alpha) \leq \mu_n[(1+k)n + (k+\alpha)]; \qquad n \geq 2 \end{aligned}$$

آنگاه f تک‌ارز، همساز و حافظ جهت در دیسک واحد باز U است و همچنین $f \in HST(\phi, \chi, k, \alpha)$.

برهان. ابتدا نشان می‌دهیم f حافظ جهت و موضعا تک‌ارز در U است،

$$\begin{aligned}
|h'(z)| &\geq 1 - \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| r^{n-1} \\
&> 1 - \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \geq 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\lambda_n}{n}\left(\frac{(1+k)n-(k+\alpha)}{(1-\alpha)}\right)|a_n| \\
&\geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n}{n}\left(\frac{(1+k)n+(k+\alpha)}{(1-\alpha)}\right)|b_n| \geq \sum_{n=1}^{\infty} n|b_n| \\
&\geq \sum_{n=1}^{\infty} n|b_n| r^{n-1} > |g'(z)|
\end{aligned}$$

حال نشان می‌دهیم f در U تک‌ارز است، فرض کنیم $z_1, z_2 \in U$ و $z_1 \neq z_2$ آنگاه:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(z_1)-f(z_2)}{h(z_1)-h(z_2)}\right| &\geq 1 - \left|\frac{g(z_1)-g(z_2)}{h(z_1)-h(z_2)}\right| \\
&= 1 - \left|\frac{\sum_{n=1}^{\infty} b_n(z_1^n - z_2^n)}{(z_1-z_2)+\sum_{n=2}^{\infty} a_n(z_1^n-z_2^n)}\right| \\
&\geq 1 - \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|}{1-\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n|} \\
&> 1 - \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n}{n}(\frac{(1+k)n+(k+\alpha)}{(1-\alpha)})|b_n|}{1-\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\lambda_n}{n}(\frac{(1+k)n-(k+\alpha)}{(1-\alpha)})|a_n|} \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

حال نشان می‌دهیم $f \in HST(\phi, \chi, k, \alpha)$، با استفاده از تعریف کافیست نشان دهیم اگر شرط (۲۳.۲) برقرار باشد، آنگاه شرط (۲۱.۲) برقرار است:

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{(1+ke^{i\theta})(h(z)*\phi(z)-\overline{g(z)*\chi(z)})-(ke^{i\theta}+\alpha)(h(z)\diamond\chi(z)+\overline{g(z)\diamond\chi(z)})}{h(z)\diamond\chi(z)+\overline{g(z)\diamond\chi(z)}}\right\} \geq 0 \tag{۲۴.۲}$$

با جایگذاری h ، ϕ ، χ در (۲۴.۲) و تقسیم بر $(1-\alpha)z$ به‌دست می‌آوریم $\operatorname{Re}\frac{A(z)}{B(z)} \geq 0$ برای مقادیر $A(z)$ و $B(z)$ قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned}
A(z) = 1 &+ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\lambda_n(1+ke^{i\theta})n-(ke^{i\theta}+\alpha)}{n(1-\alpha)} a_n z^{n-1} \\
&- \frac{\overline{z}}{z}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n(1+ke^{i\theta})n+(ke^{i\theta}+\alpha)}{n(1-\alpha)} b_n \overline{z}^{n-1}
\end{aligned}$$

و

$$B(z)=۱+\sum_{n=۲}^{\infty}\frac{\lambda_n}{n}a_nz^{n-۱}+\frac{\bar{z}}{z}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\mu_n}{n}b_n\bar{z}^{n-۱}$$

می‌دانیم $\mathrm{Re}(w)\geq ۰$ اگر و تنها اگر $|۱-w|\geq|۱+w|$ در U، زیرا اگر $w=x+iy$ آنگاه:

$$\begin{aligned}&|۱+w|^۲=(۱+x)^۲+y^۲\\&|۱-w|^۲=(۱-x)^۲+y^۲\\&\Leftrightarrow(۱+x)^۲+y^۲\geq(۱-x)^۲+y^۲\Leftrightarrow(۱+x)^۲\geq(۱-x)^۲\Leftrightarrow x\geq ۰\end{aligned}$$

بنابراین کافیست نشان دهیم:

$$|A(z)+B(z)|-|A(z)-B(z)|\geq ۰$$

با جایگذاری $A(z)$ و $B(z)$ به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}&|A(z)+B(z)|-|A(z)-B(z)|\\&=\Bigg|۲+\sum_{n=۲}^{\infty}\frac{\lambda_n}{n}\frac{(۱+ke^{i\theta})n-(ke^{i\theta}+۲\alpha-۱)}{(۱-\alpha)}a_nz^{n-۱}\\&-\left(\frac{\bar{z}}{z}\right)\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\mu_n}{n}\frac{(۱+ke^{i\theta})n+(ke^{i\theta}+۲\alpha-۱)}{(۱-\alpha)}b_n\bar{z}^{n-۱}\Bigg|\\&-\Bigg|\sum_{n=۲}^{\infty}\frac{\lambda_n}{n}\frac{(۱+ke^{i\theta})n-(ke^{i}+۱)}{(۱-\alpha)}a_nz^{n-۱}\\&-\left(\frac{\bar{z}}{z}\right)\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\mu_n}{n}\frac{(۱+ke^{i\theta})n+(ke^{i}+۱)}{(۱-\alpha)}b_n\bar{z}^{n-۱}\Bigg|\\&\geq ۲-\sum_{n=۲}^{\infty}\frac{\lambda_n}{n}\frac{(۱+k)n-(k+۲\alpha-۱)}{(۱-\alpha)}|a_n||z|^{n-۱}\\&-\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\mu_n}{n}\frac{(۱+k)n+(k+۲\alpha-۱)}{(۱-\alpha)}|b_n||z|^{n-۱}\\&-\sum_{n=۲}^{\infty}\frac{\lambda_n}{n}\frac{(۱+k)n-(k+۱)}{(۱-\alpha)}|a_{n+۱}||z|^{n-۱}\\&-\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\mu_n}{n}\frac{(۱+k)n+(k+۱)}{(۱-\alpha)}|b_n||z|^{n-۱}\\&\geq ۲\left\{۱-\sum_{n=۲}^{\infty}\frac{\lambda_n}{n}\frac{(۱+k)n-(k+\alpha)}{(۱-\alpha)}|a_n|-\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\mu_n}{n}\frac{(۱+k)n-(k+\alpha)}{(۱-\alpha)}|b_n|\right\}\\&\geq ۰\qquad \text{با استفاده از (۲.۲۳)}\end{aligned}$$

در این برهان از این حقیقت که $Rew \geq ۰$ اگر و تنها اگر $|۱-w| \geq |۱+w|$ استفاده کردیم .

تابع همساز:

$$f(z) = z + \sum_{n=۲}^{\infty} \underbrace{\frac{n}{\lambda_n} \frac{(۱-\alpha)}{(۱+k)n-(k+\alpha)} x_n}_{a_n} z^n + \sum_{n=۱}^{\infty} \underbrace{\frac{n}{\mu_n} \frac{(۱-\alpha)}{(۱+k)n+(k+\alpha)} \bar{y}_n}_{b_n} \bar{z}^n \quad (۲۵.۲)$$

که $\sum_{n=۲}^{\infty} |x_n| + \sum_{n=۱}^{\infty} |y_n| = ۱$، نشان می‌دهد کران‌های ضرایب (۲۳.۲) دقیق هستند.
توابع به‌صورت (۲۵.۲) در رده‌ی $HST(\phi, \chi, k, \alpha)$ هستند زیرا:

$$\sum_{n=۲}^{\infty} \left[\frac{\lambda_n}{n} \frac{(۱+k)n-(k+\alpha)}{(۱-\alpha)} |a_n| + \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{\mu_n}{n} \frac{(۱+k)n+(k+\alpha)}{(۱-\alpha)} |b_n| \right]$$
$$= \sum_{n=۲}^{\infty} |x_n| + \sum_{n=۱}^{\infty} |y_n| = ۱$$

و این برهان را کامل می‌کند. $\square$

قضیه ۲۴.۱.۲. اگر $f = h + \bar{g}$ که h و g به‌صورت (۱۲.۲) باشند آنگاه، $f \in \overline{HST}(\phi, \chi, k, \alpha)$ اگر و تنها اگر:

$$\sum_{n=۲}^{\infty} \frac{\lambda_n}{n} \left(\frac{(۱+k)n-(k+\alpha)}{(۱-\alpha)} \right) |a_n| + \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{\mu_n}{n} \left(\frac{(۱+k)n+(k+\alpha)}{(۱-\alpha)} \right) |b_n| \leq ۱ \quad (۲۶.۲)$$

برهان. چون $\overline{HST}(\phi, \chi, k, \alpha) \subset HST(\phi, \chi, k, \alpha)$ ما نیاز داریم قسمت (فقط اگر) را ثابت کنیم، توجه می‌کنیم شرط لازم و کافی برای اینکه $f \in \overline{HST}(\phi, \chi, k, \alpha)$ این‌است‌که:

$$\mathrm{Re}\left\{ (۱+ke^{i\theta}) \frac{h(z)*\phi(z) - \overline{g(z)*\chi(z)}}{h(z)\diamond\chi(z) + \overline{g(z)\diamond\chi(z)}} - ke^{i\theta} \right\} \geq \alpha \quad (۰ \leq \alpha < ۱; k \geq ۰; \theta \in \mathbb{R})$$

که معادل است با:

$$\mathrm{Re}\left\{ \frac{(۱+ke^{i\theta})(h(z)*\phi(z) - \overline{g(z)*\chi(z)}) - (ke^{i\theta}+\alpha)(h(z)\diamond\chi(z) + \overline{g(z)\diamond\chi(z)})}{h(z)\diamond\chi(z) + \overline{g(z)\diamond\chi(z)}} \right\} \geq ۰,$$

بنابراین:

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{(۱-\alpha)z-\sum_{n=۲}^{\infty}\frac{\lambda_n}{n}[(۱+ke^{i\theta})n-(ke^{i\theta}+\alpha)]|a_n|z^n}{z-\sum_{n=۲}^{\infty}\frac{\lambda_n}{n}|a_n|z^n+\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\mu_n}{n}|b_n|\bar{z}^n}\right.$$
$$\left.-\frac{\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\mu_n}{n}[(۱+ke^{i\theta})n+(ke^{i\theta}+\alpha)]|b_n|\bar{z}^n}{z-\sum_{n=۲}^{\infty}\frac{\lambda_n}{n}|a_n|z^n+\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\mu_n}{n}|b_n|\bar{z}^n}\right\}$$
$$=\mathrm{Re}\left\{\frac{(۱-\alpha)z-\sum_{n=۲}^{\infty}\frac{\lambda_n}{n}[(۱+ke^{i\theta})n-(ke^{i\theta}+\alpha)]|a_n|z^{n-۱}}{۱-\sum_{n=۲}^{\infty}\frac{\lambda_n}{n}|a_n|z^{n-۱}+\frac{\bar{z}}{z}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\mu_n}{n}|b_n|\bar{z}^{n-۱}}\right.$$
$$\left.-\frac{(\frac{\bar{z}}{z})\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\mu_n}{n}[(۱+ke^{i\theta})n+(ke^{i\theta}+\alpha)]|b_n|\bar{z}^{n-۱}}{۱-\sum_{n=۲}^{\infty}\frac{\lambda_n}{n}|a_n|z^{n-۱}+\frac{\bar{z}}{z}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\mu_n}{n}|b_n|\bar{z}^{n-۱}}\right\}>۰ \qquad (۲۷.۲)$$

چون $\mathrm{Re}(e^{i\theta})\le|e^{i\theta}|=۱$ پس شرط (۲۷.۲) معادل است با:

$$\left\{\frac{۱-\sum_{n=۲}^{\infty}\frac{\lambda_n}{n}\frac{(۱+k)n-(k+\alpha)}{۱-\alpha}|a_n|r^{n-۱}}{۱-\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\lambda_n}{n}|a_n|r^{n-۱}+\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\mu_n}{n}|b_n|r^{n-۱}}\right.$$
$$\left.-\frac{\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\mu_n}{n}\frac{(۱+k)n+(k+\alpha)}{۱-\alpha}|b_n|r^{n-۱}}{۱-\sum_{n=۲}^{\infty}\frac{\lambda_n}{n}|a_n|r^{n-۱}+\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\mu_n}{n}|b_n|r^{n-۱}}\right\}\ge۰ \qquad (۲۸.۲)$$

اگر شرط (۲۶.۲) برقرار نباشد آنگاه صورت کسر (۲۸.۲) برای مقادیر $z=r\to۱$ منفی میشود، که متناقض است با $f\in\overline{HST}(\phi,\chi,k,\alpha)$ ، بنابراین برهان قضیه کامل شد. □

قضیه ۲۵.۱.۲. فرض کنیم $f\in\overline{HST}(\phi,\chi,k,\alpha)$، آنگاه برای $|z|=r<۱$ و $|b_۱|<\dfrac{۱-\alpha}{۲k+\alpha+۱}$ و

$$D_n\le\frac{\lambda_n}{n},\quad E_n\le\frac{\mu_n}{n},\quad \text{برای}\, n\ge۲,\quad C=\min\{D_n,E_n\} \qquad (۲۹.۲)$$

داریم:

$$|f(z)|\le(۱+|b_۱|)r+\left\{\frac{(۱-\alpha)}{C(۲+k-\alpha)}-\frac{۲k+۱+\alpha}{C(۲+k-\alpha)}|b_۱|\right\}r^۲$$

و

$$|f(z)|\ge(۱-|b_۱|)r-\left\{\frac{(۱-\alpha)}{C(۲+k-\alpha)}-\frac{۲k+۱+\alpha}{C(۲+k-\alpha)}|b_۱|\right\}r^۲$$

ثابت میکنند نتایج دقیق هستند.

برهان. برای برهان طرف چپ نامعادله را ثابت میکنیم ، سمت راست نامعادله بهطور مشابه اثبات میشود.

فرض کنیم $f \in \overline{HST}(\phi,\chi,k,\alpha)$ بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}
|f(z)| &= \left| z - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| z^n + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| \bar{z}^n \right| \\
&\geq r - |b_1| r - \sum_{n=2}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) r^2 \\
&\geq r - |b_1| r - \frac{(1-\alpha)}{C(2+k-\alpha)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{C((1+k)n-(k+\alpha))}{(1-\alpha)} (|a_n| + |b_n|) r^2 \\
&\geq r - |b_1| r - \frac{(1-\alpha)}{C(2+k-\alpha)} \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \frac{C((1+k)n-(k+\alpha))}{(1-\alpha)} |a_n| \right. \\
&\left. + \frac{C((1+k)n-(k+\alpha))}{(1-\alpha)} |b_n| \right\} r^2 \\
&\geq (1-|b_1|) r - \frac{(1-\alpha)}{C(2+k-\alpha)} \left\{ 1 - \frac{2k+1+\alpha}{(1-\alpha)} |b_1| \right\} r^2 \\
&\geq (1-|b_1|) r - \left\{ \frac{(1-\alpha)}{C(2+k-\alpha)} - \frac{2k+1+\alpha}{C(2+k-\alpha)} |b_1| \right\} r^2
\end{aligned}$$

کران‌های به‌دست آمده در این قضیه نشان می‌دهد توابع زیر در $\overline{HST}(\phi,\chi,k,\alpha)$ هستند:

$$f(z) = z + |b_1| \bar{z} + \left(\frac{(1-\alpha)}{C(2+k-\alpha)} - \frac{2k+1+\alpha}{C(2+k-\alpha)} |b_1| \right) \bar{z}^2$$

و

$$f(z) = (1-|b_1|) z - \left(\frac{(1-\alpha)}{C(2+k-\alpha)} - \frac{2k+1+\alpha}{C(2+k-\alpha)} |b_1| \right) z^2$$

بنابراین در شرط این قضیه برای حالت تساوی صدق می‌کنند. □

نتیجه ۲۶.۱.۲. اگر $f \in \overline{HST}(\phi,\chi,k,\alpha)$ آنگاه برای $|b_1| < \frac{1-\alpha}{2k+\alpha+1}$ مجموعه‌ی:

$$\left\{ w : |w| < 1 - \frac{(1-\alpha)}{C(2+k-\alpha)} - \left(1 - \frac{2k+1+\alpha}{C(2+k-\alpha)} \right) |b_1| \right\}$$

درون $f(U)$ است، (مقادیر C در (۲۹.۲) تعریف شده است).

تعریف ۲۷.۱.۲. نقاط فرین از پوسته‌ی محدب از $\overline{HST}(\phi,\chi,k,\alpha)$ را با $\mathrm{clco}\overline{HST}(\phi,\chi,k,\alpha)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۲۸.۱.۲. فرض کنیم $f = h + \bar{g}$ که h و g به‌صورت (۱۲.۲) داده‌شده باشد، آنگاه $f \in \mathrm{clco}\overline{HST}(\phi,\chi,k,\alpha)$ است اگر و تنها اگر f به‌صورت زیر باشد:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (X_n h_n(z) + Y_n g_n(z)) \qquad (۳۰.۲)$$

که

$$\begin{aligned}
h_۱(z) &= z,\\
h_n(z) &= z - \frac{n(۱-\alpha)}{\lambda_n((۱+k)n-(k+\alpha))} z^n \qquad (n \geq ۲)\\
g_n(z) &= z + \frac{n(۱-\alpha)}{\mu_n((۱+k)n-(k+\alpha))} \bar{z}^n \qquad (n \geq ۱)\\
X_n \geq ۰, \qquad & Y_n \geq ۰, \qquad \sum_{n=۱}^{\infty}(X_n+Y_n) = ۱
\end{aligned}$$

بهویژه نقاط فرین از ردهی $\mathrm{clco}\overline{HST}(\phi,\chi,k,\alpha)$، h_n و g_n هستند.

برهان. برای توابعی که بهصورت (۳۰.۲) تعریف میشوند با جایگذاری h و g داریم:

$$\begin{aligned}
f(z) = &\sum_{n=۱}^{\infty}(X_n+Y_n)z\\
&- \sum_{n=۲}^{\infty} \frac{n(۱-\alpha)}{\lambda_n((۱+k)n-(k+\alpha))} X_n z^n + \frac{n(۱-\alpha)}{\mu_n((۱+k)n-(k+\alpha))} Y_n \bar{z}^n
\end{aligned}$$

آنگاه:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=۲}^{\infty} \frac{\lambda_n((۱+k)n-(k+\alpha))}{n(۱-\alpha)} \left(\frac{n(۱-\alpha)}{\lambda_n((۱+k)n-(k+\alpha))}\right) X_n\\
&+ \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{\mu_n((۱+k)n-(k+\alpha))}{n(۱-\alpha)} \left(\frac{n(۱-\alpha)}{\mu_n((۱+k)n-(k+\alpha))}\right) Y_n\\
&= \sum_{n=۲}^{\infty} x_n + \sum_{n=۱} Y_n = ۱ - X_۱ \leq ۱,
\end{aligned}$$

بنابراین $f \in \mathrm{clco}\overline{HST}(\phi,\chi,k,\alpha)$. برعکس فرض کنیم $f \in \mathrm{clco}\overline{HST}(\phi,\chi,k,\alpha)$ مجموعههای:

$$X_n = \frac{\lambda_n((۱+k)n-(k+\alpha))}{n(۱-\alpha)} |a_n| \qquad (n \geq ۲)$$

و

$$Y_n = \frac{\lambda_n((۱+k)n+(k+\alpha))}{n(۱-\alpha)} |b_۱| \qquad (n \geq ۱),$$

را داریم. با استفاده از قضیهی ۲۴.۱.۲ به آسانی میتوان دید که ردهی $\overline{HST}(\phi,\chi,k,\alpha)$ محدب و بسته است بنابراین $\mathrm{clco}\overline{HST}(\phi,\chi,k,\alpha) = \overline{HST}(\phi,\chi,k,\alpha)$. □

ملاحظه ۲۹.۱.۲. چنانچه در ابتدای بخش گفتهشد، تلفیق دو تابع همساز:

$$f(z) = z - \sum_{n=۲}^{\infty} |a_n| z^n + \sum_{n=۲}^{\infty} |b_n| \bar{z}^n \qquad (۳۱.۲)$$

و

$$G(z) = z - \sum_{n=۲}^{\infty} A_n z^n + \sum_{n=۱}^{\infty} B_n \bar{z}^n \qquad (۳۲.۲)$$

را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(f * G)(z) = f(z) * G(z) = z - \sum_{n=۲}^{\infty} a_n A_n z^n + \sum_{n=۱}^{\infty} b_n B_n \bar{z}^n$$

با استفاده از این تعریف، نشان می‌دهیم رده‌ی $\mathrm{clco}\overline{HST}(\phi, \chi, k, \alpha)$ نسبت به تلفیق بسته است.

قضیه ۳۰.۱.۲. برای $۰ \le \alpha < ۱$ فرض کنیم $f, G \in \overline{HST}(\phi, \chi, k, \alpha)$ آنگاه:

$$f(z) * G(z) \in \overline{HST}(\phi, \chi, k, \alpha)$$

برهان. فرض کنیم تابع $f(z)$ به‌صورت (۳۱.۲) در رده‌ی $\overline{HST}(\phi, \chi, k, \alpha)$ باشد و تابع $G(z)$ به‌صورت (۳۲.۲) در رده‌ی $\overline{HST}(\phi, \chi, k, \alpha)$ باشند، بدیهی است که برای ضرایب توابع f و G شرط قضیه‌ی ۲۴.۱.۲ برقرار است بنابراین برای ضرایب $f(z) * G(z)$ می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=۲}^{\infty} \frac{\lambda_n}{n} \frac{(۱+k)n - (k+\alpha)}{(۱-\alpha)} |a_n| A_n + \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{\mu_n}{n} \frac{(۱+k)n + (k+\alpha)}{(۱-\alpha)} |b_n| B_n \\
&\le \sum_{n=۲}^{\infty} \frac{\lambda_n}{n} \frac{(۱+k)n - (k+\alpha)}{(۱-\alpha)} |a_n| + \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{\mu_n}{n} \frac{(۱+k)n + (k+\alpha)}{(۱-\alpha)} |b_n|,
\end{aligned}$$

طرف راست نامعادله کمتر یا مساوی یک است زیرا $f \in \overline{HST}(\phi, \chi, k, \alpha)$ بنابراین:

$$f(z) * G(z) \in \overline{HST}(\phi, \chi, k, \alpha)$$

□

در پایان نشان می‌دهیم رده‌ی $\overline{HST}(\phi, \chi, k, \alpha)$ نسبت به ترکیب محدب بسته است.

قضیه ۳۱.۱.۲. رده‌ی $\overline{HST}(\phi, \chi, k, \alpha)$ نسبت به ترکیب خطی محدب بسته است.

برهان. برای $i = ۱, ۲, ۳, \cdots$ فرض کنیم $f_i \in \overline{HST}(\phi, \chi, k, \alpha)$ که f_i به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f_i(z) = z - \sum_{n=۲}^{\infty} |a_{n,i}| z^n + \sum_{n=۱}^{\infty} |b_{n,i}| \bar{z}^n$$

که $\sum_{i=۱}^{\infty} t_i = ۱; ۰ \le t_i \le ۱$ ، ترکیب خطی محدب از f_i را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\sum_{i=۱}^{\infty} t_i f_i(z) = z - \sum_{n=۲}^{\infty} \left(\sum_{i=۱}^{\infty} t_i |a_{n,i}| \right) z^n + \sum_{n=۱}^{\infty} \left(\sum_{i=۱}^{\infty} t_i |b_{n,i}| \right) \bar{z}^n.$$

چون $f \in \overline{HST}(\phi, \chi, k, \alpha)$ بنابراین شرط ۲۶.۲ برقرار است، در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=۲}^{\infty} \frac{\lambda_n}{n} \frac{(۱+k)n-(k+\alpha)}{(۱-\alpha)} \sum_{i=۱}^{\infty} t_i|a_{n,i}| + \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{\mu_n}{n} \frac{(۱+k)n+(k+\alpha)}{(۱-\alpha)} \sum_{i=۱}^{\infty} t_i|b_{n,i}| \\
&= \sum_{i=۱}^{\infty} t_i \left\{ \sum_{n=۲}^{\infty} \frac{\lambda_n}{n} \frac{(۱+k)n-(k+\alpha)}{(۱-\alpha)}|a_{n,i}| + \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{\mu_n}{n} \frac{(۱+k)n+(k+\alpha)}{(۱-\alpha)}|b_{n,i}| \right\} \\
&\leq \sum_{i=۱}^{\infty} t_i = ۱
\end{aligned}$$

بنابراین شرط (۲۶.۲) برقرار است و همچنین $\sum_{i=۱}^{\infty} t_i f_i(z) \in \overline{HST}(\phi, \chi, k, \alpha)$ بنابراین برهان کامل است. $\square$

فصل ۳

توابع همساز ستاره‌گون

۱.۳ توابع همساز ستاره‌گون از مرتبه α

همانطور که در فصل قبل گفته شد، تابع پیوسته $f = u + iv$ در میدان مختلط $\mathbb{C}$ یک تابع همساز مختلط مقدار است هرگاه u و v همساز حقیقی مقدار باشند. در هر دامنه همبند ساده $D \subset \mathbb{C}$ می‌توان f را به‌صورت $f = h + \bar{g}$ نوشت، که h و g در D تحلیلی هستند.
یک شرط لازم و کافی برای موضعا تک ارز و حافظ جهت بودن تابع همساز f در D این است که رابطه $|h'(z)| > |g'(z)|$ برقرار باشد.

تعریف ۱.۱.۳. رده‌ی توابع $f = h + \bar{g}$ که در دیسک واحد $U = \{z : |z| < ۱\}$ همساز تک ارز و حافظ جهت هستند، به‌طوری‌که $h(۰) = f(۰) = f_z(۰) - ۱ = ۰$ را با $\mathbb{S}_H$ نمایش می‌دهیم.

$$h(z) = z + \sum_{n=۲}^{\infty} a_n z^n, \quad g(z) = \sum_{n=۱}^{\infty} b_n z^n \qquad (۱.۳)$$

تعریف ۲.۱.۳. برای $۰ \leq \alpha < ۱$ رده‌ی $\mathbb{S}_{\mathbb{H}}^*(\alpha)$ را زیررده‌ای از $\mathbb{S}_{\mathbb{H}}$ که در دیسک U شرط زیر را داشته باشد:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(\arg f(re^{i\theta})) \geq \alpha \qquad (۲.۳)$$

تعریف ۳.۱.۳. زیر رده‌ای از توابع $\mathbb{S}_{\mathbb{H}}^*(\alpha)$ که به‌صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$h(z) = z - \sum_{n=۲}^{\infty} |a_n| z^n, \qquad g(z) = \sum_{n=۱}^{\infty} |b_n| z^n \qquad (۳.۳)$$

را $\mathbb{TS}_{\mathbb{H}}^*(\alpha)$ می‌نامیم.

قضیه ۴.۱.۳. فرض کنیم ضرایب تابع $f \in \mathbb{S}_H$ به‌صورت داده شده در (۱.۳) باشد. همچنین داشته‌باشیم:

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \left(\frac{n-\alpha}{۱-\alpha}|a_n| + \frac{n+\alpha}{۱-\alpha}|b_n| \right) \leq ۲ \qquad (۴.۳)$$

که $a_۱ = ۱$ و $۰ \le \alpha < ۱$ باشد. در این‌صورت f در U همساز تک ارز و $f \in \mathbb{S}^*_H(\alpha)$ است.

برهان. ابتدا توجه کنید که f در U موضعاً تک ارز و حافظ جهت است. زیرا:

$$\begin{aligned}|h'(z)| &\ge ۱ - \sum_{n=۲}^{\infty} n|a_n|r^{n-۱} > ۱ - \sum_{n=۲}^{\infty} n|a_n| \\ &\ge ۱ - \sum_{n=۲}^{\infty} \frac{n-\alpha}{۱-\alpha}|a_n| \\ &\ge \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{n+\alpha}{۱-\alpha}|b_n| \ge \sum_{n=۱}^{\infty} n|b_n| \\ &> \sum_{n=۱}^{\infty} n|b_n|r^{n-۱} \ge |g'(z)|\end{aligned}$$

برای نشان دادن تک‌ارز بودن f در U ملاحظه می‌کنیم که اگر $g(z) = ۰$ آنگاه $f(z)$ تحلیلی است و تک‌ارزی f از ستاره‌گون بودن آن نتیجه می‌شود.(مراجعه شود به [۶]) اگر $g(z) \neq ۰$ باشد، آنگاه نشان می‌دهیم که وقتی $z_۱ \neq z_۲$ باشد، $f(z_۱) \neq f(z_۲)$ است.

فرض کنیم $z_۱, z_۲ \in U$ باشد که $z_۱ \neq z_۲$ است. چون U همبند ساده و محدب است، داریم $z(t) = (۱-t)z_۱ + tz_۲ \in U$ که $۰ \le t \le ۱$ است. در این‌صورت می‌توان نوشت:

$$f(z_۲) - f(z_۱) = \int_۰^۱ \Big[(z_۲ - z_۱)h'(z(t)) + \overline{(z_۲ - z_۱)g'(z(t))}\Big]\mathrm{d}t$$

با تقسیم معادله فوق بر $z_۲ - z_۱ \neq ۰$ و در نظر گرفتن بخش حقیقی داریم:

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\frac{f(z_۲) - f(z_۱)}{z_۲ - z_۱} &= \int_۰^۱ \mathrm{Re}\Big[h'(z(t)) + \frac{\overline{z_۲ - z_۱}}{z_۲ - z_۱}\overline{g'(z(t))}\Big]\mathrm{d}t \\ &> \int_۰^۱ [\mathrm{Re}h'(z(t)) - |g'(z(t))|]\mathrm{d}t. \qquad (۵.۳)\end{aligned}$$

از سوی دیگر:

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}h'(z) - |g'(z)| &\ge \mathrm{Re}h'(z) - \sum_{n=۱}^{\infty} n|b_n| \\ &\ge ۱ - \sum_{n=۲}^{\infty} n|a_n| - \sum_{n=۱}^{\infty} n|b_n| \\ &\ge ۱ - \sum_{n=۲}^{\infty} \frac{n-\alpha}{۱-\alpha}|a_n| - \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{n+\alpha}{۱-\alpha}|b_n| \\ &\ge ۰ \quad \text{با استفاده از ۴.۳}\end{aligned}$$

با استفاده از رابطه اخیر و نامساوی ۵.۳، تک‌ارز بودن f نتیجه می‌شود. حال نشان می‌دهیم که

$f\in \mathbb{S}^{*}_{\mathbb{H}}(\alpha)$ است. طبق شرط (۲.۲) فقط کافیست نشان دهیم که اگر قضیه ۴.۳ برقرار باشد، آنگاه :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\arg f(re^{i\theta})\Big)&=\mathrm{Im}\Big(\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(re^{i\theta})\Big)\\&=\mathrm{Re}\Big(\frac{zh'(z)-\overline{zg'(z)}}{h(z)+\overline{g(z)}}\Big)\geq\alpha,\end{aligned}$$

که $z=re^{i\theta}$، $0\leq\theta\leq 2\pi$، $0\leq r<1$ و $0\leq\alpha<1$ است.
با استفاده از این گزاره که $\mathrm{Re}w\geq\alpha$ اگر و تنها اگر $|1+\alpha-w|\geq|1-\alpha+w|$، کافیست ثابت کنیم:

$$|A(z)+(1-\alpha)B(z)|-|A(z)-(1+\alpha)B(z)|\geq 0 \tag{۶.۳}$$

که $B(z)=h(z)+\overline{g(z)}$ و $A(z)=zh'(z)-\overline{zg'(z)}$ است.
با جایگذاری $B(z)$ و $A(z)$ در (۶.۳) داریم:

$$\begin{aligned}&|A(z)+(1-\alpha)B(z)|-|A(z)-(1+\alpha)B(z)|\\&=|(1-\alpha)h(z)+zh'(z)+\overline{(1-\alpha)g(z)-zg'(z)}|\\&-|(1+\alpha)h(z)-zh'(z)+\overline{(1+\alpha)g(z)+zg'(z)}|\\&=\Big|(2-\alpha)z+\sum_{n=2}^{\infty}(n+1-\alpha)a_nz^n-\overline{\sum_{n=1}^{\infty}(n-1+\alpha)b_nz^n}\Big|\\&-\Big|-\alpha z+\sum_{n=2}^{\infty}(n-1-\alpha)a_nz^n-\overline{\sum_{n=1}^{\infty}(n+1+\alpha)b_nz^n}\Big|\\&\geq(2-\alpha)|z|-\sum_{n=2}^{\infty}(n+1-\alpha)|a_n||z|^n-\sum_{n=1}^{\infty}(n-1+\alpha)|b_n||z^n|\\&-\alpha|z|-\sum_{n=2}^{\infty}(n-1-\alpha)|a_n||z|^n-\sum_{n=2}^{\infty}(n+1+\alpha)|b_n||z|^n\\&=2(1-\alpha)|z|\Big\{1-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-\alpha}{1-\alpha}|a_n||z|^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+\alpha}{1-\alpha}|b_n||z|^{n-1}\Big\}\\&\geq 2(1-\alpha)|z|\Big\{1-\Big(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-\alpha}{1-\alpha}|a_n|-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+\alpha}{1-\alpha}|b_n|\Big)\Big\}\geq 0\qquad \text{با استفاده از ۴.۳}\end{aligned}$$

نگاشت همساز ستاره‌گون:

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1-\alpha}{n-\alpha}x_nz^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\alpha}{n+\alpha}\bar{y}_n\bar{z}^n \tag{۷.۳}$$

که $\sum_{n=۲}^{\infty}|x_n|+\sum_{n=۲}^{\infty}|y_n|=۱$، نشان می‌دهد که در (۴.۳) تساوی نیز برقرار است.
توابع به‌صورت (۷.۳) در $\mathbb{S}_{\mathbb{H}}^{*}(\alpha)$ هستند، زیرا:

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\left(\frac{n-\alpha}{۱-\alpha}|a_n|+\frac{n+\alpha}{۱-\alpha}|b_n|\right)=۱+\sum_{n=۲}^{\infty}|x_n|+\sum_{n=۱}^{\infty}|y_n|=۲$$

شرطی که در قضیه‌ی قبل برای ضرایب تابع $f=h+\bar{g}$ قرار داده شده، ما را قادر می‌سازد تا نتیجه‌گیری کنیم توابعی که حاصل دوران ضرایب تابع f هستند نیز همساز ستاره‌گون و تک‌ارز هستند. قضیه‌ی بعد ثابت می‌کند که کران‌هایی که برای ضرایب در قضیه‌ی قبل بدست آمده‌اند، قابل بهبود نیستند. □

قضیه ۵.۱.۳. فرض کنیم $f=h+\bar{g}$ به‌صورت (۳.۳) باشند. در این‌صورت $f\in\mathbb{TS}^{*}{}_{\mathbb{H}}(\alpha)$ است اگر و تنها اگر:

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\left(\frac{n-\alpha}{۱-\alpha}|a_n|+\frac{n+\alpha}{۱-\alpha}|b_n|\right)\leq ۲ \tag{۸.۳}$$

که $a_۱=۱$ و $۰\leq\alpha<۱$ است.

برهان. قسمت (اگر) از قضیه قبل و این نکته نتیجه می‌شود که اگر قسمت تحلیلی و مزدوج تحلیلی $f=h+\bar{g}$ به‌صورت (۳.۳) باشند، آنگاه $f\in\mathbb{TS}^{*}{}_{\mathbb{H}}(\alpha)$ است.
برای شرط کافی، نشان می‌دهیم که اگر شرط (۸.۳) برقرار نباشد، آنگاه $f\notin\mathbb{TS}^{*}{}_{\mathbb{H}}(\alpha)$.
توجه کنید که یک شرط لازم و کافی برای این‌که تابع $f=h+\bar{g}$ به صورت(۳.۳) از مرتبه α که $۰\leq\alpha<۱$ ستاره‌گون باشد، شرط زیر است:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(\arg f(re^{i\theta}))-\alpha>۰ \qquad ۰\leq\alpha<۱$$

این شرط هم ارز است با:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Re}\frac{zh'(z)-\overline{zg'(z)}}{h(z)+\overline{g(z)}}-\alpha\\
&\quad=\operatorname{Re}\frac{(۱-\alpha)z-\sum_{n=۲}^{\infty}(n-\alpha)|a_n|z^n-\sum_{n=۱}^{\infty}(n+\alpha)|b_n|\bar{z}^n}{z-\sum_{n=۲}^{\infty}|a_n|z^n+\sum_{n=۱}^{\infty}|b_n|\bar{z}^n}\\
&\quad\geq ۰
\end{aligned}$$

شرط فوق باید برای تمام مقادیر z که $|z|=r<۱$ برقرار باشد. با انتخاب مقادیری از z که روی محور حقیقی مثبت که $۰\leq|z|=r<۱$ قرار دارند باید داشته باشیم:

$$\frac{(۱-\alpha)-\sum_{n=۲}^{\infty}(n-\alpha)|a_n|r^{n-۱}-\sum_{n=۱}^{\infty}(n+\alpha)|b_n|r^{n-۱}}{۱-\sum_{n=۲}^{\infty}|a_n|r^{n-۱}+\sum_{n=۱}^{\infty}|b_n|r^{n-۱}}\geq ۰ \tag{۹.۳}$$

اگر شرط (۸.۳) برقرار نباشد، آنگاه برای r به اندازه کافی نزدیک به ۱، صورت کسر در (۹.۳) منفی خواهد بود. بنابراین $z_۰=r_۰$ در $(۰,۱)$ موجود است که مخرج کسر در (۹.۳) منفی است و این یک تناقض با شرایط لازم برای $f\in\mathbb{TS}^{*}{}_{\mathbb{H}}(\alpha)$ است و اثبات کامل می‌شود. □

در ادامه نقاط فرین پوسته محدب بسته‌ی $\mathbb{TS}^*{}_{\mathbb{H}}(\alpha)$ را تعیین می‌کنیم. این پوسته محدب بسته را با $clco\mathbb{TS}^*{}_{\mathbb{H}}(\alpha)$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۶.۱.۳. $f \in clco\mathbb{TS}^*{}_{\mathbb{H}}(\alpha)$ است اگرو تنها اگر:

$$f(z) = \sum_{n=۱}^{\infty}(X_n h_n + Y_n g_n). \tag{۱۰.۳}$$

که

$$h_۱(z) = z, \quad h_n(z) = z - \frac{۱-\alpha}{n-\alpha}z^n \quad (n = ۲, ۳, \ldots)$$

و

$$g_n(z) = z + \frac{۱-\alpha}{n+\alpha}\bar{z}^n \quad (n = ۱, ۲, ۳, \ldots)$$

و

$$\sum_{n=۱}^{\infty}(X_n + Y_n) = ۱, X_n \geq ۰, Y_n \geq ۰$$

است. به‌خصوص $\{h_n\}$ و $\{g_n\}$ نقاط فرین $\mathbb{TS}^*{}_{\mathbb{H}}(\alpha)$ هستند.

برهان. برای توابعی مانند f که به‌صورت (۱۰.۳) هستند داریم:

$$\begin{aligned}
f(z) =& \sum_{n=۱}^{\infty}(X_n h_n + Y_n g_n) \\
=& \sum_{n=۱}^{\infty}(X_n + Y_n)z - \sum_{n=۲}^{\infty}\frac{۱-\alpha}{n-\alpha}X_n z^n \\
&+ \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱-\alpha}{n+\alpha}Y_n \bar{z}^n.
\end{aligned}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=۲}^{\infty}\frac{n-\alpha}{۱-\alpha}\Big(\frac{۱-\alpha}{n-\alpha}X_n\Big) + \sum_{n=۲}^{\infty}\frac{n+\alpha}{۱-\alpha}\Big(\frac{۱-\alpha}{n+\alpha}Y_n\Big) \\
&= \sum_{n=۲}^{\infty}X_n + \sum_{n=۱}^{\infty}Y_n = ۱ - X_۱ \leq ۱
\end{aligned}$$

لذا $f \in clco\mathbb{TS}^*{}_{\mathbb{H}}(\alpha)$ است.

برعکس، فرض کنیم $f \in clco\mathbb{TS}^*{}_{\mathbb{H}}(\alpha)$ باشد، قرار می‌دهیم:

$$X_n = \frac{n-\alpha}{۱-\alpha}|a_n|, \quad (n = ۲, ۳, \ldots) \tag{۱۱.۳}$$

و

$$Y_n = \frac{n+\alpha}{1-\alpha}|b_n|, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{۱۲.۳}$$

در این‌صورت با استفاده از قضیه‌ی قبل برای $0 \leq X_n \leq 1$ که $(n = 2, 3, \ldots)$ و $0 \leq Y_n \leq 1$ که $(n = 1, 2, 3, \ldots)$، تعریف می‌کنیم:

$$X_1 = 1 - \sum_{n=2}^{\infty} X_n - \sum_{n=1}^{\infty} Y_n$$

و توجه کنید طبق قضیه‌ی قبل $X_1 \geq 0$ است. در نتیجه $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}(X_n h_n + Y_n g_n)$ را طبق آنچه خواسته شده بود به‌دست می‌آوریم.
با استفاده از قضیه‌ی قبل، به آسانی می‌توان دید که $\mathbb{TS}^*{}_{\mathbb{H}}(\alpha)$ محدب و بسته است. بنابراین $clco\mathbb{TS}^*{}_{\mathbb{H}}(\alpha) = \mathbb{TS}^*{}_{\mathbb{H}}(\alpha)$ است. لذا حکم قضیه برای $f \in \mathbb{TS}^*{}_{\mathbb{H}}(\alpha)$ برقرار است. □

حال کران‌هایی برای توابع در $\mathbb{TS}^*{}_{\mathbb{H}}(\alpha)$ ارائه می‌دهیم.

قضیه ۷.۱.۳. اگر $f \in \mathbb{TS}^*{}_{\mathbb{H}}(\alpha)$ باشد، آنگاه:

$$|f(z)| \leq (1 + |b_1|)r + \Big(\frac{1-\alpha}{2-\alpha} - \frac{1+\alpha}{2-\alpha}|b_1|\Big)r^2. \quad |z| = r < 1.$$

و

$$|f(z)| \geq (1 - |b_1|)r - \Big(\frac{1-\alpha}{2-\alpha} - \frac{1+\alpha}{2-\alpha}|b_1|\Big)r^2. \quad |z| = r < 1.$$

برهان. فرض کنیم $f \in \mathbb{TS}^*{}_{\mathbb{H}}(\alpha)$ باشد. با قدرمطلق گرفتن از f داریم:

$$\begin{aligned}
|f(z)| &\leq (1 + |b_1|)r + \sum_{n=2}^{\infty}(|a_n| + |b_n|)r^n \\
&\leq (1 + |b_1|)r + \sum_{n=2}^{\infty}(|a_n| + |b_n|)r^2 \\
&= (1 + |b_1|)r + \frac{1-\alpha}{2-\alpha}\sum_{n=2}^{\infty}\Big(\frac{2-\alpha}{1-\alpha}|a_n| + \frac{2-\alpha}{1-\alpha}|b_n|\Big)r^2 \\
&\leq (1 + |b_1|)r + \frac{1-\alpha}{2-\alpha}\sum_{n=2}^{\infty}\Big(\frac{n-\alpha}{1-\alpha}|a_n| + \frac{n+\alpha}{1-\alpha}|b_n|\Big)r^2 \\
&\leq (1 + |b_1|)r + \frac{1-\alpha}{2-\alpha}\Big(1 - \frac{1+\alpha}{1-\alpha}|b_1|\Big)r^2, \text{ (۸.۳) با استفاده از} \\
&= (1 + |b_1|)r + \Big(\frac{1-\alpha}{2-\alpha} - \frac{1+\alpha}{2-\alpha}|b_1|\Big)r^2,
\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}
|f(z)| \geq & (1-|b_1|)r - \sum_{n=2}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)r^n \\
\geq & (1-|b_1|)r - \sum_{n=2}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)r^2 \\
= & (1-|b_1|)r - \frac{1-\alpha}{2-\alpha}\sum_{n=2}^{\infty}\Big(\frac{2-\alpha}{1-\alpha}|a_n| + \frac{2-\alpha}{1-\alpha}|b_n|\Big)r^2 \\
\geq & (1-|b_1|)r - \frac{1-\alpha}{2-\alpha}\sum_{n=2}^{\infty}\Big(\frac{n-\alpha}{1-\alpha}|a_n| + \frac{n+\alpha}{1-\alpha}|b_n|\Big)r^2 \\
\geq & (1-|b_1|)r + \frac{1-\alpha}{2-\alpha}\Big(1 - \frac{1+\alpha}{1-\alpha}|b_1|\Big)r^2, \quad \text{(8.3) با استفاده از} \\
= & (1-|b_1|)r - \Big(\frac{1-\alpha}{2-\alpha} - \frac{1+\alpha}{2-\alpha}|b_1|\Big)r^2,
\end{aligned}$$

□

کران‌هایی که برای تابع $f=h+\bar{g}$ به‌صورت (۳.۲) در قضیه‌ی ۷.۱.۳ ارائه شد، برای توابع به‌صورت (۱.۳) نیز صدق می‌کند، در صورتی‌که شرط قضیه‌ی ۶.۱.۲ برقرار باشد. توابع

$$f(z) = (z+|b_1|)\bar{z} + \Big(\frac{1-\alpha}{2-\alpha} - \frac{1+\alpha}{2-\alpha}|b_1|\Big)\bar{z}^2$$

و

$$f(z) = (z-|b_1|)z - \Big(\frac{1-\alpha}{2-\alpha} - \frac{1+\alpha}{2-\alpha}|b_1|\Big)z^2$$

به ازای $|b_1| \leq \frac{(1-\alpha)}{(1+\alpha)}$، دقیق هستند. (یعنی حالت تساوی برای کران‌ها در قضیه ۷.۱.۳ برقرار می‌شود) این نتیجه از نامساوی سمت چپ در قضیه‌ی ۷.۱.۳ به‌دست می‌آید.

نتیجه ۸.۱.۳. اگر $f \in \mathbb{TS}^*{}_{\mathbb{H}}(\alpha)$ باشد، آنگاه:

$$\Big\{w : |w| < \frac{1}{2-\alpha}(1+(2\alpha-1)|b_1|)\Big\} \subset f(U).$$

۲.۳ توابع همساز ستاره‌گون از مرتبه مختلط

تعریف ۱.۲.۳. $\mathbb{S}_H$ رده‌ای از توابع به شکل $f=h+\overline{g}$ می‌باشد که در دیسک واحد $U=\{z : |z|<1\}$ با نرمال سازی زیر، همساز و حافظ جهت و تک ارز می‌باشند.

$$h(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, \qquad g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n, \qquad |b_1|<1 \tag{۱۳.۳}$$

تعریف ۳.۲.۲. رده‌ای از توابع $f = h + \overline{g}$ که در U همساز هستند را با TS_H نشان می‌دهیم، که h و g به‌صورت زیر می‌باشند:

$$h(z) = z - \sum_{n=۲}^{\infty} a_n z^n, \qquad g(z) = \sum_{n=۱}^{\infty} b_n z^n, \quad a_n, b_n \geq ۰, b_۱ < ۱ \tag{۳.۱۴}$$

تعریف ۳.۲.۳. زیر رده‌ای از TS_H شامل توابع $f = h + \overline{g}$ را با $TS_H^*(\gamma)$ نشان می‌دهیم، که در شرط زیر صدق می‌کند:

$$\operatorname{Re}\left\{۱ + \frac{۱}{\gamma}\left(\frac{zh'(z) - \overline{zg'(z)}}{h(z) + \overline{g(z)}} - ۱\right)\right\} > ۰, \quad \gamma \in C \setminus \{۰\} \tag{۳.۱۵}$$

به‌علاوه فرض کنید $OS_H^*(\gamma)$ نشان دهنده‌ی زیر رده‌ای از TS_H است، که شامل توابع:

$$f = h + \overline{g} \in TS_H$$

می‌باشند و در شرط زیر صدق می‌کنند:

$$\sum_{n=۱}^{\infty} [۲(n - ۱ + |\gamma|)a_n + (n + ۱ + |n + ۱ - ۲\gamma|)b_n] \leq ۴|\gamma|. \tag{۳.۱۶}$$

تعریف ۳.۲.۴. زیر رده‌ای از TS_H شامل توابع $f = h+\overline{g}$ که در شرط زیر صدق می‌کند را با $PS_H^*(\gamma)$ نشان می‌دهیم.

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\left[(n - ۱)\frac{Re(\gamma)}{|\gamma|} + |\gamma|\right] a_n + \left[(n + ۱)\frac{Re(\gamma)}{|\gamma|} - |\gamma|\right] b_n \leq ۲|\gamma| \tag{۳.۱۷}$$

سیلورمن[۱] ، جهانگیری[۲] در [۶] توابع همساز ستاره‌گون را مطالعه کردند
. سیلورمن ثابت کرد اگر $b_۱ = ۰$ و a_n و b_n منفی باشند نیز این شرط ضریب ، شرطی لازم است.
جهانگیری نشان داد اگر تابع $f = h + \overline{g}$ به‌صورت(۳.۱) باشد و اگر شرایط زیر برقرار باشد.

$$\sum_{n=۲}^{\infty} \frac{n - \alpha}{۱ - \alpha}|a_n| + \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{n + \alpha}{۱ - \alpha}|b_n| \leq ۱, \quad ۰ \leq \alpha < ۱ \tag{۳.۱۸}$$

آنگاه f تابع همساز ستاره‌گون از مرتبه‌ی α در U است.
هدف اصلی این بخش این است که نشان دهیم:

$$OS_H^*(\gamma) = TS_H^*(\gamma)$$

قضیه ۳.۲.۵.

$$OS_H^*(\gamma) \subset TS_H^*(\gamma). \tag{۳.۱۹}$$

[۱] Silverman
[۲] Jahangiri

برهان. فرض کنیم $f \in OS^*_H(\gamma)$ باشد. طبق شرایط (۱۴.۳) کافیست نشان دهیم اگر رابطه‌ی (۱۶.۳) برقرار باشد، آنگاه:

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{(\gamma-1)(h(z)+\overline{g(z)})+zh'(z)-\overline{zg'(z)}}{\gamma(h(z)+\overline{g(z)})}\right\}>0, \tag{۲۰.۳}$$

که $\gamma \in C\setminus\{0\}$. با استفاده از این گزاره که $\mathrm{Re}w>0$ اگر و تنها اگر $|1+w|>|1-w|$، کافیست ثابت کنیم که:

$$|(2\gamma-1)(h(z)+\overline{g(z)})+zh'(z)-\overline{zg'(z)}|-|h(z)+\overline{g(z)}-zh'(z)+\overline{zg'(z)}|>0 \tag{۲۱.۳}$$

با جایگذاری $h(z)$ و $g(z)$ در (۲۱.۳)، نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{aligned}
&|(2\gamma-1)(h(z)+\overline{g(z)})+zh'(z)-\overline{zg'(z)}|-|h(z)+\overline{g(z)}-zh'(z)+\overline{zg'(z)}|\\
&=|2\gamma z-\sum_{n=2}^{\infty}(2\gamma-1+n)a_nz^n-\sum_{n=1}^{\infty}(n+1-2\gamma)b_n\overline{z}^n|\\
&-|\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)a_nz^n+\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)b_n\overline{z}^n|\\
&\geq 2|\gamma||z|-\sum_{n=2}^{\infty}2(n-1+|\gamma|)a_n|z|^n-\sum_{n=1}^{\infty}(n+1+|n+1-2\gamma|)b_n|z|^n\\
&>2|\gamma|-\left(\sum_{n=2}^{\infty}2(n-1+|\gamma|)a_n+\sum_{n=1}^{\infty}(n+1+|n+1-2\gamma|)b_n\right)\geq 0.
\end{aligned} \tag{۲۲.۳}$$

توابع

$$f(z)=z-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{|\gamma|}{n-1+|\gamma|}x_nz^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2|\gamma|}{n+1+|n+1-2\gamma|}y_n\overline{z}^n \tag{۲۳.۳}$$

که x_n و y_n نامنفی هستند و

$$\sum_{n=2}^{\infty}x_n+\sum_{n=1}^{\infty}y_n=1 \tag{۲۴.۳}$$

نشان می‌دهد کران‌هایی که برای ضرایب با توجه به رابطه‌ی (۱۶.۳) داده شده دقیق است. توابع به‌صورت (۲۳.۳) در رده‌ی $TS^*_H(\gamma)$ هستند، زیرا:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=2}^{\infty}2(n-1+|\gamma|)a_n+\sum_{n=1}^{\infty}(n+1+|n+1-2\gamma|)b_n\\
&=2|\gamma|\left(1+\sum_{n=2}^{\infty}x_n+\sum_{n=1}^{\infty}y_n\right)=4|\gamma|
\end{aligned} \tag{۲۵.۳}$$

□

قضیه ۶.۲.۳.

$$TS_H^*(\gamma) \subset PS_H^*(\gamma) \tag{۲۶.۳}$$

برهان. فرض کنیم $f \in TS_H^*(\gamma)$ باشد، با توجه به (۱۵.۳) داریم:

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{\gamma}\left(\frac{-\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)a_n z^n - \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)b_n \overline{z}^n}{1-\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty}b_n\overline{z}^n}\right)\right\} > -1 \tag{۲۷.۳}$$

با انتخاب مقادیری از z روی محور حقیقی که $z \to 1^-$، قرار می‌دهیم:

$$\frac{\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)a_n + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)b_n}{1-\sum_{n=2}^{\infty}a_n + \sum_{n=1}^{\infty}b_n}\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\gamma}\right) \le 1, \tag{۲۸.۳}$$

زیرا:

$$\frac{\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)a_n + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)b_n}{1-\sum_{n=2}^{\infty}a_n + \sum_{n=1}^{\infty}b_n}\frac{\mathrm{Re}(\gamma)}{|\gamma|^2} \le 1, \tag{۲۹.۳}$$

و بنابراین:

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)a_n + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)b_n \le \frac{|\gamma|^2}{\mathrm{Re}(\gamma)}\left(1-\sum_{n=2}^{\infty}a_n + \sum_{n=1}^{\infty}b_n\right) \tag{۳۰.۳}$$

که با رابطه‌ی (۱۷.۳) هم ارز است. لذا نتیجه می‌گیریم که $f \in PS_H^*(\gamma)$ می‌باشد.

□

قضیه ۷.۲.۳. اگر $\gamma \in (0, 1]$ باشد، آنگاه $OS_H^*(\gamma) = TS_H^*(\gamma) = PS_H^*(\gamma)$.

برهان. اگر $\gamma \in (0, 1]$ باشد، آنگاه نامساوی (۱۶.۳) و (۱۷.۳) هم ارز هستند. بنابراین

$$OS_H^*(\gamma) = PS_H^*(\gamma)$$

□

با استفاده از قضایای ۵.۲.۳ و ۶.۲.۳، قضیه‌ی زیر را به‌دست می‌آوریم.

قضیه ۸.۲.۳. اگر $\mathrm{Re}(\gamma) \le 0$ یا $\gamma \in (\frac{3}{2}, +\infty)$ باشد، آنگاه:

$$PS_H^*(\gamma) \nsubseteq TS_H^*(\gamma) \tag{۳۱.۳}$$

برهان. فرض کنیم:

$$f(z) = z - z^2 \tag{۳۲.۳}$$

بنابراین، $a_1 = 1, a_2 = -1, b_n = 0$ وقتی $\gamma \in C \setminus \{0\}$ و $\operatorname{Re}(\gamma) < 0$ آنگاه $f \in PS_H^*(\gamma)$. زیرا:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[(n-1)\frac{\operatorname{Re}(\gamma)}{|\gamma|} + |\gamma|\right] a_n + \left[(n+1)\frac{\operatorname{Re}(\gamma)}{|\gamma|} - |\gamma|\right] b_n$$
$$= |\gamma| \cdot 1 + \frac{\operatorname{Re}(\gamma)}{|\gamma|} + |\gamma| = 2|\gamma| + \frac{\operatorname{Re}(\gamma)}{|\gamma|} \leq 2|\gamma|$$

حال فرض کنیم $r = \operatorname{Re}(\gamma) < 0$ باشد و s را عدد حقیقی منفی در نظر می‌گیریم به‌طوری‌که:

$$1 + 2r(1-s) > 0$$

با انتخاب $z = \dfrac{\gamma(1-s)}{1+\gamma(1-s)}$ آنگاه $z \in U$ می‌باشد و برای f در رابطه‌ی (۳۲.۳) داریم:

$$1 + \frac{1}{\gamma}\left(\frac{zh'(z) - \overline{zg'(z)}}{h(z) + \overline{g(z)}} - 1\right) = s < 0, \tag{۳۳.۳}$$

بنابراین $f \notin TS_H^*(\gamma)$. به‌طور مشابه فرض کنیم:

$$f(z) = z + \overline{z}^2. \tag{۳۴.۳}$$

یعنی $a_1 = 1, a_n = 0, b_2 = 1$ وقتی $\gamma \in (\frac{3}{2}, +\infty)$، آنگاه $f \in PS_H^*(\gamma)$ می‌باشد زیرا:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[(n-1)\frac{\operatorname{Re}(\gamma)}{|\gamma|} + |\gamma|\right] a_n + \left[(n+1)\frac{\operatorname{Re}(\gamma)}{|\gamma|} - |\gamma|\right] b_n$$
$$= |\gamma| \cdot 1 + \left(3\frac{\operatorname{Re}(\gamma)}{|\gamma|} - |\gamma|\right) \cdot 1 = 3\frac{\operatorname{Re}(\gamma)}{|\gamma|} \leq 2|\gamma| \tag{۳۵.۳}$$

حال فرض کنیم $\gamma \in (\frac{3}{2}, +\infty)$ و s عدد حقیقی منفی باشد به‌طوری‌که $\gamma + \gamma(s-1) < 0$. با انتخاب $z = -\dfrac{\gamma(s-1)}{3+\gamma(s-1)}$ آنگاه $z \in U$ می‌باشد و برای f در رابطه‌ی (۳۴.۳) داریم:

$$1 + \frac{1}{\gamma}\left(\frac{zh'(z) - \overline{zg'(z)}}{h(z) + \overline{g(z)}} - 1\right) = s < 0 \tag{۳۶.۳}$$

بنابراین $f \notin TS_H^*(\gamma)$. □

قضیه ۹.۲.۳. اگر $\gamma \in (-\infty, -1) \cup (-\frac{1}{2}, 0)$ باشد، آنگاه:

$$TS_H^*(\gamma) \nsubseteq OS_H^*(\gamma) \tag{۳۷.۳}$$

برهان. فرض کنیم $\gamma \in (-\infty, -۱)$ باشد، نشان می‌دهیم تابع:

$$f_\lambda(z) = z - \lambda z^{۲} \tag{۳۸.۳}$$

برای $\lambda > \frac{\gamma}{۱+\gamma}$ متعلق به $TS^*_H(\gamma)$ می‌باشد که $f \notin OS^*_H$ داریم:

$$\sum_{n=۱}^{\infty} [۲(n-۱+|\gamma|)a_n + (n+۱+|n+۱-۲\gamma|)b_n] = ۲|\gamma| + ۲(۱+|\gamma|)\lambda > ۴|\gamma| \tag{۳۹.۳}$$

زیرا $۱ > \frac{\gamma}{۱+\gamma} > \lambda$ می‌باشد. همچنین داریم:

$$\mathrm{Re}\left\{۱ + \frac{۱}{\gamma}\left(\frac{zh'_\lambda(z) - \overline{zg'_\lambda(z)}}{h_\lambda(z) + \overline{g_\lambda(z)}} - ۱\right)\right\} = \mathrm{Re}\left\{۱ + \frac{\lambda z}{\gamma(\lambda z - ۱)}\right\} > ۰, \quad z \in U, \tag{۴۰.۳}$$

برای $\lambda > \frac{\gamma}{۱+\gamma}$ و $\gamma < -۱$، بنابراین $f_\lambda \in TS^*_H(\gamma)$. حال فرض می‌کنیم $\gamma \in (-\frac{۱}{۲}, ۰)$ باشد و f_λ در رابطه‌ی (۳۸.۳) تعریف شده باشد، در این‌صورت:

$$-\frac{\gamma}{۱-\gamma} < \lambda < -\frac{\gamma}{۱+\gamma}. \tag{۴۱.۳}$$

آنگاه $\lambda > -\frac{\gamma}{۱-\gamma}$ می‌باشد و نتیجه می‌گیریم $f_\lambda \notin OS^*_H(\gamma)$ و برای $\lambda < -\frac{\gamma}{۱+\gamma}$ نامساوی برقرار است، بنابراین $f_\lambda \in TS^*_H(\gamma)$. □

مراجع

[1] Avci, Y. and Zlotkiewicz, E. 1990. On harmonic univalent mappings. Ann. Universitatis Mariae Curie-Sklodowska, pp.1-7.

[2] Bednarz, U. and Kanas, S. 2004. Stability of the integral convolution of k-uniformly convex and k-starlike functions. Journal of Applied Analysis, 10(1), pp.105-115.

[3] Clunie, J. and Sheil-Small, T. 1984. Harmonic univalent functions. Suomalainen Tiedeakatemia Ann. of the Sci. Acad. of Finland, Ser. A, 1, Math., 9, pp.3-26.

[4] Duren, P. 1992. A survey of harmonic mappings in the plane. Mathematics Series Visiting Scholars Lectures.

[5] Goodman, A.W. and Saff, E.B. 1979. On univalent functions convex in one direction. Proceedings of the American Mathematical Society, 73(2), pp.183-187.

[6] Jahangiri, J.m. and Silverman, H. 2002. Harmonic univalent functions with varying arguments. International Journal of Applied Mathematics, 8(3), pp.267-276.

[7] Jahangiri, J.m. 1999. Harmonic functions starlike in the unit disk. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 235(2), pp.470-477.

[8] Kim, Y.c. Jahangiri, J.m. and Choi, J.H., 2002. Certain convex harmonic functions. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 29(8), pp.459-465.

[9] Murugusundaramoorthy, G., 2003. A class of Ruscheweyh-type harmonic univalent functions with varying arguments. Southwest J. Pure Appl. Math, 2, pp.90-95.

[10] Ruscheweyh, S. 1975. New criteria for univalent functions. Proceedings of the American Mathematical Society, pp.109-115.

[11] Ruscheweyh, S. 1981. Neighborhoods of univalent functions. Proceedings of the American Mathematical Society, 81(4), pp.521-527.

[12] Sheil-Small, T. 1990. Constants for planar harmonic mappings. Journal of the London Mathematical Society, 2(2), pp.237-248.

[13] Silverman, H. 1975. Univalent functions with negative coefficients. Proceedings of the American Mathematical Society, 51(1), pp.109-116.

[14] Silverman, H. 1998. Harmonic univalent functions with negative coefficients. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 220(1), pp.283-289.

[15] Silverman, H. 1999. Subclasses of harmonic univalent functions. New Zealand J. Math., 28, pp.275-284.

[16] Thomas, R. Kg, S. and Jay, M.j. 2001. Goodman-Ronning-type harmonic univalent functions. Kyungpook Mathematical Journal, 41(1), pp.45-45.

[17] Vijaya, K. 2006. Studies on certain subclasses of harmonic functions (Doctoral dissertation, Ph. D. thesis, VIT University, 2006. 1 School of Science and Humanities, VIT University Vellore-632014.

[18] Yalçin, S. and Oztürk, M. 2006. Harmonic functions starlike of the complex order. , 58, pp.7-11.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

پوسته‌ی محدب	Convex hull
تابع	Function
تحلیلی	Analytic
جهت‌نگهدار	Sence-preserving
ستاره‌گون	Starlike
شرط	Condition
ضریب	Coefficient
قابل قیاس	Analogous
کافی	Sufficient
کران	Bound
متناظر	Corresponding
محک تک‌ارزی	Univalence criteria
مختلط	Complex
مرتبه	Order
مزدوج تحلیلی	Co-analytic
منطبق شدن	Coincide
واحد	Unit

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

تحلیلی	Analytic
قابل قیاس	Analogous
کران	Bound
مزدوج تحلیلی	Co-analytic
ضریب	Coefficient
منطبق شدن	Coincide
مختلط	Complex
شرط	Condition
بسته	Connected
پوسته‌ی محدب	Convex hulls
متناظر	Corresponding
تابع	Function
مرتبه	Order
حافظ‌جهت	Sense-preserving
ستاره‌گون	Starlike
کافی	Sufficient
واحد	Unit
محک تک‌ارزی	Univalence criteria

Aabstract

Abestract In the present thesis the class of functions that are harmonic univalentand sense-preserving in the unit disc and study subclass of univalent harmonic functions defined by convolution and integral convoulution. Finally,we give univalence criteria and sufficient coefficient conditions for normalized harmonic function that are starlike of order complex.

Keywords: Analytic Function, Univalent Function, Harmonic Function, Starlike.

Shahrood University Of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

Harmonic Functions Starlike Of Complex Order

Hamideh Amery

Supervisor

Dr zireh

February 2016