



دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی محض

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی محض، گرایش آنالیز

عنوان

بررسی خواص توابع دو تک ارز مربوط به عملگر هوهلوف

استاد راهنما

دکتر احمد زیره

دانشجو

آزیتا یک مرادی جبالبارزی

بهمن ۱۳۹۴

تقدیم به...

تقدیم به پدرم، بزرگ معلم زندگیم که استقامت را به من آموخت و مادرم که وجودش برایم همه عشق است و وجودم برایش همه رنج، توانش رفت تا به توانایی برسم، مویش سپیدی گرفت تا روی سپید بمانم. او که فروغ نگاهش، گرمی کلامش و روشنایی رویش سرمایه زندگانی من است. در برابر وجود گرامیش زانوی ادب بر زمین می‌نهم و با دلی مالا مال از عشق و محبت بر دستانش بوسه می‌زنم...

سپاس‌گزاری...

نخست بر خود می‌دانم که پروردگار خود را شکر گویم به پاس لبخندهای محبت‌بار، دوستان یاری
رسان، عشق و محبت و همه آنچه را که از رحمت او دریافت کرده‌ام و از او می‌خواهم که لیاقت
تشکر از استاد را بر من ارزانی کند که

قدر استاد نکو دانستن، حیف! استاد به من یاد نداد،...

از استاد فرهیخته جناب آقای دکتر احمد زیره به خاطر راهنمایی‌های بی‌منتشان کمال تشکر را
دارم،

و برای این استاد گرانقدر آرزوی سربلندی و روزگاری سبز دارم،

هم‌چنین لازم می‌دانم از خانواده و تمامی دوستانی که مرا در این امر مهم یاری نمودند، تقدیر و
تشکر کنم.

آزیتا بیک‌مرادی جالباززی
بهمن ۱۳۹۴

اینجانب آریتا بیگ مرادی جبالبارزی دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض دانشکده علوم ریاضی دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان بررسی خواص توابع دو تک ارز مربوط به عملگر هوهلوف، تحت راهنمایی دکتر احمد زیره متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های دیگر پژوهش گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه شاهرود “ یا “ Shahrood University “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

آریتا بیگ مرادی جبالبارزی
بهمن ۱۳۹۴

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی باشد.

چکیده

در این پایان نامه چند زیر رده جدید از رده توابع دو تک ارز که بر دیسک واحد تعریف شده اند و با عملگر هوهلوف که یک مورد خاص از موارد تحقیق شده ی عملگر خطی دزوک-سریوستا می باشد را بررسی و معرفی می کنیم. علاوه بر این کرانی برای ضرایب $|a_2|$ و $|a_3|$ از توابع این زیر رده های جدید را یافته و نتایجی که در این پایان نامه به دست می آید تعمیمی از کارهایی است که در سال های اخیر چاپ شده اند.

کلمات کلیدی : توابع تحلیلی، توابع تک ارز، توابع دو تک ارز، توابع ستاره گون

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

۱. مقاله اول: Complex of Functions Biunivalent of Estimate Coefficient Operator Salagean the with Associated Order (به مجله ارسال شده است).

۲. مقاله دوم: Complex of Functions Biunivalent of Estimate Coefficient Operator Differential the with Associated Order (به مجله ارسال شده است).

۳. مقاله سوم

فهرست مطالب

۱	تعاریف مقدماتی	۱
۱	۱.۱ نمادگذاری و تعاریف	۱
۲	۲.۱ رده $\mathbb{S}$	۲
۸	۳.۱ رده $\mathbb{S}^*$	۸
۱۱	۴.۱ رده $\mathbb{K}$	۱۱
۱۵	۲ بررسی بعضی عملگرها بر زیر رده‌هایی از توابع دو تک ارز	۱۵
۱۵	۱.۲ عملگر هوهلوف	۱۵
۱۷	۱.۱.۲ رده $\mathcal{S}_{\Sigma}^{a,b,c}(\alpha, \lambda)$	۱۷
۱۷	۲.۱.۲ رده $\mathcal{M}_{\Sigma}^{a,b,c}(\beta, \lambda)$	۱۷
۲۰	۳.۱.۲ کران های ضرایب برای توابع رده $\mathcal{M}_{\Sigma}^{a,b,c}(\beta, \lambda)$	۲۰
۲۲	۲.۲ عملگر دزوک-سریوستا	۲۲
۲۳	۱.۲.۲ رده ${}_l S_m(b, \alpha)$	۲۳
۲۳	۲.۲.۲ رده ${}_l C_m(b, \alpha)$	۲۳
۲۹	۳.۲ عملگر کارلسون-شفر	۲۹
۳۱	۱.۳.۲ رده $Q(m, \lambda, \varphi, \beta; a, c)$	۳۱
۴۱	۳ بررسی عملگر دیفرانسیل سالان بر روی زیر رده‌هایی از توابع دو تک ارز	۴۱
۴۱	۱.۳ عملگر سالان	۴۱
۴۲	۱.۱.۳ رده $\mathcal{S}_{\Sigma}^{k,\lambda}(\alpha)$	۴۲
۴۴	۲.۱.۳ رده $\mathcal{M}_{\Sigma}^{k,\lambda}(\beta)$	۴۴
۴۷	۳.۱.۳ رده $ST_{\Sigma}(b, \phi)$	۴۷
۴۷	۴.۱.۳ رده $CV_{\Sigma}(b, \phi)$	۴۷
۵۲	۲.۳ نتایج*	۵۲
۵۷	۳.۳ عملگر دیفرانسیل	۵۷
۵۸	۱.۳.۳ رده $ST_{\Sigma}(\alpha_1, \beta_1, b, \phi)$	۵۸

۶۲	۴.۳ نتایج*
۶۸	مراجع
۷۱	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی
۷۲	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی
۷۳	نمایه

فصل ۱

تعاریف مقدماتی

۱.۱ نمادگذاری و تعاریف

در این پایان نامه از نمادهای زیر استفاده می شود:

$\mathbb{R}$ مجموعه اعداد حقیقی

$\mathbb{N}$ مجموعه اعداد طبیعی

$\mathbb{C}$ مجموعه اعداد مختلط

Re قسمت حقیقی اعداد مختلط

تعریف ۱.۱.۱. تابع $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ را در z تحلیلی گوئیم هرگاه در یک همسایگی z مشتق پذیر باشد.

تعریف ۲.۱.۱. هر مجموعه باز و همبند در $\mathbb{C}$ ، یک میدان نامیده می شود.

تعریف ۳.۱.۱ (قرارداد). A را ردهای از توابع به شکل $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ گوئیم که در دیسک یکه‌ی باز $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ تحلیلی می باشند.

تعریف ۴.۱.۱ (لم شوارتز^۱). فرض کنیم $f(z)$ تابعی تحلیلی در دیسک $U_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ باشد و برای ثابت M ، رابطه $|f(z)| < M$ برقرار باشد. اگر $z = 0$ صفر مرتبه m تابع f باشد، در این صورت:

$$|f(z)| \leq \frac{M}{R^m} |z|^m \quad (z \in U_R).$$

^۱Schwarz

همچنین در رابطه‌ی فوق، تساوی زمانی برقرار می‌شود که

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{M}{R^m} z^m$$

به‌طوری‌که در آن θ مقداری ثابت است.

تعریف ۵.۱.۱. تابع حقیقی مقدار و پیوسته $U(x, y)$ که در میدان D تعریف شده، در D همساز گویند هرگاه دارای مشتقات نسبی مراتب اول و دوم پیوسته بوده و این مشتقات در تمام D در معادله زیر صادق باشند.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$$

این معادله به معادله لاپلاس مشهور است. با به کار بردن این قضیه که هر تابع تحلیلی در یک میدان، در همه نقاط آن میدان دارای مشتق از تمام مراتب می‌باشد، می‌بینیم که هر دو قسمت حقیقی و موهومی یک تابع تحلیلی توابع همسازند. اگر $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ تحلیلی باشد، آنگاه v مزدوج همساز u نام دارد.

ملاحظه ۶.۱.۱. این خاصیت پادتقارنی زیر را داریم که v مزدوج همساز u است اگر و تنها اگر u مزدوج همساز $-v$ باشد. اثبات این مطلب از توجه به این امر نتیجه می‌شود که هر جا f تحلیلی باشد، $if = i(u + iv) = -v + iu$ نیز تحلیلی است. معادله لاپلاس شرط لازمی را بیان می‌کند که تابعی همساز با قسمت حقیقی (یا موهومی) یک تابع تحلیلی باشد.

قضیه ۷.۱.۱. (نگاشت ریمان^۲) [۲۴] فرض کنیم D میدان همبند ساده‌ای به غیر از تمام صفحه و z_0 نقطه‌ای در این میدان باشد. در این صورت تابع منحصر به فرد، تحلیلی، یک به یک و پوشا $f(z)$ موجود است که D را بر قرص $|z| < 1$ می‌نگارد و $f(z_0) = 0$ و $f'(z_0) > 0$ است.

۲.۱ رده §

توابعی که هم تحلیلی و هم تک ارز (یک به یک) هستند، واجد شرایط جالبی هستند که میدان‌های همبند ساده را بر میدان‌های همبند ساده می‌نگارند. به موجب قضیه نگاشت ریمان، هر تابع تک ارز، که در میدان همبند ساده (به غیر از تمامی صفحه) تعریف شده باشد را می‌توان با تابعی که در قرص واحد تعریف شده است متناظر کرد. بنابراین خود را به توابعی که بر قرص $|z| < 1$ تعریف شده‌اند محدود می‌کنیم و اگر چنانچه فرض کنیم تابع در مبدا صفر است (که تنها صفر تابع نیز خواهد بود) و در مبدا مشتق مخالف صفر دارد، در این صورت نتایج حاصله از شکل زیباتری

^۲Riemann

برخوردار خواهند بود. زیرا مشتق تابع تک ارز هرگز صفر نیست، هر تابع تک ارز $f(z)$ را می‌توان به $\frac{[f(z) - f(0)]}{f'(0)}$ ، که تابعی است از شکل مذکور، تحویل کرد. رده توابعی که در محدودیت‌های مذکور صادق‌اند با یک حرف مشخص می‌شوند.

تعریف ۱.۲.۱. رده همه توابع $f(z)$ را که در قرص واحد $|z| < 1$ تحلیلی و تک ارز بوده و با شرایط $f(0) = 0$ و $f'(0) = 1$ نرمالیزه گردیده‌اند با $\mathbb{S}$ نمایش می‌دهیم. پس تابع $f(z)$ در $\mathbb{S}$ دارای نمایش توانی زیر است:

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots \quad (|z| < 1).$$

لم ۲.۲.۱. اگر $f(z) \in \mathbb{S}$ ، آنگاه $g(z) = z \sqrt{\frac{f(z^2)}{z^2}} \in \mathbb{S}$.

ملاحظه ۳.۲.۱. به جای $\sqrt{f(z^2)}$ ، می‌نویسیم $z \sqrt{\frac{f(z^2)}{z^2}}$ زیرا $f(z^2)$ صفری در مبدا دارد که $\sqrt{f(z^2)} = e^{(\frac{1}{2}) \log f(z^2)}$ را بی‌معنی می‌کند.

برهان. فرض کنید $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ لذا داریم:

$$g(z) = z \sqrt{\frac{f(z^2)}{z^2}} = z \sqrt{1 + a_2 z^2 + a_3 z^4 + \dots} \quad (1.1)$$

(شاخه‌ی اصلی $\sqrt{\cdot}$ را در نظر می‌گیریم)، تابع $g(z)$ بر دیسک واحد تحلیلی می‌باشد و $g(0) = 0$ و $g'(0) = 1$ است. برای اثبات تک ارزی، اگر $g(z_1) = g(z_2)$ یعنی $z_1 \sqrt{\frac{f(z_1^2)}{z_1^2}} = z_2 \sqrt{\frac{f(z_2^2)}{z_2^2}}$ در این صورت $f(z_1^2) = f(z_2^2)$ و چون f یک به یک می‌باشد، داریم $z_1^2 = z_2^2$ ، یعنی $z_1 = z_2$ یا $z_1 = -z_2$. از (۱.۱) ملاحظه می‌شود که $g(z)$ تابع فرد است لذا $z_1 = -z_2$ تساوی $g(z_1) = g(z_2)$ را نتیجه می‌دهد که با فرض در تناقض است. پس $z_1 = z_2$ و تک ارزی $g(z)$ اثبات می‌شود. $\square$

قضیه ۴.۲.۱. [۲۴] اگر $f(z) \in \mathbb{S}$ باشد، آنگاه $|a_2| \leq 2$.

مثال ۵.۲.۱. (تابع کوئب) در قضیه ۴.۲.۱، اگر $a_2 = 2e^{i\alpha}$ و α حقیقی باشد آنگاه

$$g(z) = \frac{z}{(1 - e^{i\alpha} z)^2} = z \sqrt{\frac{f(z^2)}{z^2}} \quad \text{لذا}$$

$$f(z) = \frac{z}{(1 - e^{i\alpha} z)^2} = z + 2e^{i\alpha} z^2 + 3e^{2i\alpha} z^3 + \dots$$

با قرار دادن $\alpha = 0$ به تابع زیر می‌رسیم:

$$k(z) = \frac{z}{(1 - z)^2} = \frac{1}{4} \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^2 - \frac{1}{4}$$

که به تابع کوئب معروف است. این تابع قرص $|z| < 1$ را بر صفحه‌ای که در امتداد محور حقیقی منفی از $\frac{-1}{4}$ تا ∞ بریده شده است، می‌نگارد.

قضیه ۶.۲.۱. (پوشش). اگر $f(z) \in \mathbb{S}$ و برای $|z| < 1$ که $f(z) \neq c$ ، $c \in \mathbb{C}$ ، آنگاه $|c| \geq \frac{1}{4}$.

برهان. می‌دانیم $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ چون $f(z) \neq c$ پس تابع $g(z) = \frac{cf(z)}{c - f(z)}$ نیز متعلق به $\mathbb{S}$ می‌باشد.

$$\frac{cf(z)}{c - f(z)} = z + (a_2 + \frac{1}{c})z^2 + \dots$$

بنا به قضیه ۴.۲.۱ داریم $|a_2 + \frac{1}{c}| \leq 2$. از طرفی:

$$|\frac{1}{c}| - |a_2| \leq |a_2 + \frac{1}{c}| \leq 2 \implies |\frac{1}{c}| \leq 2 + |a_2|$$

چون $f(z) \in \mathbb{S}$ ، پس $|a_2| \leq 2$ است. لذا داریم:

$$|\frac{1}{c}| \leq 4 \implies |c| \geq \frac{1}{4}$$

□

لم ۷.۲.۱. اگر $f(z) \in \mathbb{S}$ و $z = re^{i\theta}$ باشد، آنگاه:

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} = r \frac{\partial}{\partial r} \log |f'(z)|.$$

برهان. چون برای $|z| < 1$ ، $f'(z) \neq 0$ پس می‌توان شاخه‌ای از $\log f'(z)$ را برای $|z| < 1$ در نظر گرفت. حال برای $f(z) = f(re^{i\theta})$ داریم $f'(z) = f'(re^{i\theta})$ لذا:

$$\frac{\partial}{\partial r} \log f'(re^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta} f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})}$$

با ضرب طرفین رابطه‌ی فوق در r داریم:

$$r \frac{\partial}{\partial r} \log f'(re^{i\theta}) = \frac{re^{i\theta} f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})} = \frac{zf''(z)}{f'(z)}$$

با محاسبه‌ی قسمت‌های حقیقی داریم:

$$r \frac{\partial}{\partial r} \log |f'(re^{i\theta})| = \operatorname{Re} \left\{ \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\}.$$

□

قضیه ۸.۲.۱. اگر $f(z) \in \mathbb{S}$ باشد، آنگاه :

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3} \quad (|z| = r < 1).$$

برهان. می‌دانیم تابع $\omega = \frac{z+z_0}{1+\overline{z_0}z}$ تحلیلی، یک به یک و پوشاست و قرص واحد را بر خودش می‌نگارد. لذا تابع $g(z) = f\left(\frac{z+z_0}{1+\overline{z_0}z}\right) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2$ نیز به ازای $(|z| < 1)$ تحلیلی و تک ارزش است، داریم:

$$g(\circ) = b_0 = f(z_0) \quad b_1 = g'(\circ) = f'(z_0)(1 - |z_0|^2)$$

$$b_2 = \frac{g''(\circ)}{2} = \frac{1}{2}(f''(z_0)(1 - |z_0|^2)^2 - 2f'(z_0)\overline{z_0}(1 - |z_0|^2))$$

چون $g(z)$ نرمالیزه نمی‌باشد پس متعلق به $\mathbb{S}$ نیست، با توجه به این که تابع $\frac{g(z) - g(\circ)}{g'(\circ)} = z + \frac{b_2}{b_1}z^2 + \dots$ در S قرار می‌گیرد، لذا بنابر قضیه ۴.۲.۱، $\left|\frac{b_2}{b_1}\right| \leq 2$ ، یعنی:

$$\frac{1}{2} \left| \frac{f''(z_0)}{f'(z_0)}(1 - |z_0|^2) - 2\overline{z_0} \right| \leq 2$$

با قرار دادن $z_0 = re^{i\theta}$ و ضرب طرفین در $\frac{2|z_0|}{1 - |z_0|^2}$ داریم :

$$\left| \frac{z_0 f''(z_0)}{f'(z_0)} - \frac{2|z_0|^2}{1 - |z_0|^2} \right| \leq \frac{4|z_0|}{1 - |z_0|^2}$$

حال چون z_0 دلخواه است، قرار می‌دهیم :

$$\left| \frac{z f''(z)}{f'(z)} - \frac{2r^2}{1 - r^2} \right| \leq \frac{4r}{1 - r^2}$$

یعنی $\frac{z f''(z)}{f'(z)}$ در دایره‌ای به شعاع $\frac{4r}{1 - r^2}$ و به مرکز $\frac{2r^2}{1 - r^2}$ واقع است لذا:

$$\frac{2r^2 - 4r}{1 - r^2} \leq \operatorname{Re} \frac{z f''(z)}{f'(z)} \leq \frac{2r^2 + 4r}{1 - r^2}$$

بنا به لم ۷.۲.۱ می‌دانیم $\operatorname{Re} \frac{z f''(z)}{f'(z)} = r \frac{\partial}{\partial r} \log |f'(z)|$ یعنی :

$$\frac{2r^2 - 4r}{1 - r^2} \leq r \frac{\partial}{\partial r} \log |f'(z)| \leq \frac{2r^2 + 4r}{1 - r^2}$$

$$\Rightarrow \frac{2r - 4}{1 - r^2} \leq \frac{\partial}{\partial r} \log |f'(z)| \leq \frac{2r + 4}{1 - r^2}$$

حال از طرفین نامساوی از $\circ$ تا r انتگرال می گیریم :

$$\log(1-r) - 3\log(1+r) \leq \log|f'(z)| \leq \log(1+r) - 3\log(1-r)$$

در نتیجه :

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3} \quad (|z| = r < 1).$$

□

مثال ۹.۲.۱. مشتق تابع کوئب $k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + \dots$ برابر است با

$$k'(z) = \frac{1+z}{(1-z)^3}$$

لذا کران بالای قضیه ۸.۲.۱، در مورد این تابع در $z = r$ و کران پایین در $z = -r$ تعیین می شود.

قضیه ۱۰.۲.۱. اگر $f(z) \in \mathbb{S}$ باشد، آنگاه :

$$\frac{r}{(1+r)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^2} \quad (|z| = r < 1)$$

برهان. بنا بر قضیه ۸.۲.۱ برای $|z| = r < 1$ داریم $|f'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3}$. نقطه $\circ$ را با یک خط مستقیم به z وصل کرده و روی این پاره خط انتگرال می گیریم:

$$|f(z)| \leq \int_0^r |f'(t)| dt \leq \int_0^r \frac{1+t}{(1-t)^3} dt = \frac{r}{(1-r)^2}$$

نامساوی $\frac{r}{(1+r)^2} \leq \frac{1}{4}$ همواره برقرار است. حال اگر $|f(z)| \geq \frac{1}{4}$ باشد، آنگاه $\frac{r}{(1+r)^2} \leq \frac{1}{4}$ و اگر $|f(z)| < \frac{1}{4}$ باشد، بنا بر قضیه ۶.۲.۱ مسیر c داخل دایره ی یکیه از $\circ$ تا z موجود است که تصویر آن پاره خط مستقیم c از $\circ$ تا $f(z)$ را می پوشاند در این صورت :

$$|f(z)| = \int_{c_0} |d\omega| = \int_c |f'(s)| |ds|$$

از طرفی بنا به قضیه ۸.۲.۱ :

$$|f(z)| = \int_c |f'(s)| |ds| \geq \int_c |f'(s)| d|s| \geq \frac{1-t}{(1+t)^3} dt = \frac{r}{(1+r)^2}$$

لذا داریم :

$$\frac{r}{(1+r)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^2}.$$

□

مثال ۱۱.۲.۱. برای تابع کوئب $k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + \dots$ کران بالای قضیه ۱۰.۲.۱ در $z = r$ و کران پایین در $z = -r$ تعیین می‌شود.

قضیه ۱۲.۲.۱. (لیتلوود^۳) [۲۴] اگر $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ در رده $\mathbb{S}$ باشد آنگاه برای $|a_n| \leq en, n$ هر

قضیه ۱۳.۲.۱. اگر تابع $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ در رده $\mathbb{S}$ باشد و ضرایب حقیقی داشته باشد، آنگاه برای هر n داریم $|a_n| \leq n$.

برهان. برای $1 < r$ ، $z = re^{i\theta}$ قرار می‌دهیم:

$$\operatorname{Im} f(z) = v(re^{i\theta}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k r^k \sin k\theta$$

با ضرب طرفین رابطه‌ی فوق در $\sin n\theta$ و انتگرال‌گیری از 0 تا π داریم:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} v(re^{i\theta}) \sin n\theta d\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} a_n r^n \sin^2 n\theta d\theta = a_n r^n \quad (2.1)$$

با توجه به رابطه‌ی

$$|\sin(n+1)\theta| = |\sin n\theta \cos \theta + \cos n\theta \sin \theta| \leq |\sin n\theta| + |\sin \theta|$$

و به روش استقرایی می‌توان نشان داد که $|\sin n\theta| \leq n|\sin \theta|$ لذا از رابطه‌ی (۲.۱) نتیجه می‌شود که

$$|a_n r^n| \leq \frac{2n}{\pi} \int_0^{\pi} |v(re^{i\theta})| \sin \theta d\theta \quad (3.1)$$

حال نشان می‌دهیم $v(re^{i\theta}) \neq 0$ ، که در آن $(0 < \theta < \pi, 0 < r < 1)$:

$$0 \neq f(re^{i\theta}) - f(re^{-i\theta}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n (e^{in\theta} - e^{-in\theta}) = 2i \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n \sin n\theta = 2iv(re^{i\theta})$$

چون $v(re^{i\theta})$ نسبت به θ تابعی پیوسته است، پس در فاصله $0 < \theta < \pi$ علامت جبری ثابتی دارد. لذا:

$$r = |a_1 r| = \left| \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} v(re^{i\theta}) \sin \theta d\theta \right| = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |v(re^{i\theta})| \sin \theta d\theta. \quad (4.1)$$

با جایگزینی (۴.۱) در (۳.۱)، رابطه $|a_n r^n| \leq nr$ بدست می‌آید و با $r \rightarrow 1$ قضیه ثابت می‌گردد. $\square$

^۳Littlewood's

۳.۱ رده‌ی $\mathbb{S}^*$

تعریف ۱.۳.۱. میدان D را نسبت به z ستاره‌گون گوئیم هرگاه پاره خط مستقیمی که هر نقطه از D را به z وصل می‌کند در D قرار بگیرد. تابع $f(z) \in \mathbb{S}$ را نسبت به مبدا ستاره‌گون گوئیم هرگاه قرص $|z| < 1$ با $f(z)$ بر میدانی نگاشته شود که نسبت به $\omega = 0$ ستاره‌گون است. این زیر رده‌ی $\mathbb{S}$ با $\mathbb{S}^*$ نشان داده می‌شود.

لم ۲.۳.۱. فرض کنیم $f(z) \in \mathbb{S}$ ، در این صورت $f(z) \in \mathbb{S}^*$ اگر و تنها اگر $f(z)$ هر قرص $|z| < r < 1$ را بر میدان ستاره‌گون بنگارد.

برهان. ابتدا فرض کنیم $f(z) \in \mathbb{S}^*$ و D تصویر $|z| < 1$ و D_r تصویر $|z| < r < 1$ در تابع $f(z)$ باشد. اگر $w \in D$ باشد، آنگاه برای $0 < t < 1$ ، $tw \in D$ (چون D ستاره‌گون نسبت به مبدا می‌باشد) لذا تابع $g(z) = f^{-1}(tf(z))$ در $|z| < 1$ تحلیلی است و در نامساوی $|g(z)| < 1$ صدق می‌کند. چون $g(0) = f^{-1}(tf(0))$ ، با توجه به لم شوارتز $|g(z)| \leq |z|$. اکنون نقطه‌ی $w_1 \in D_r$ را انتخاب می‌کنیم. در این صورت برای نقطه‌ی z_1 ای با فرض $|z_1| < 1$ و برای t دلخواه با فرض $0 < t < 1$:

$$|f^{-1}(tw_1)| = |f^{-1}(tf(z_1))| = |g(z_1)| \leq |z_1| < r$$

ولی این بدان معنی است که tw_1 در D_r قرار دارد. چون این مطلب برای همه‌ی w_1 ها در D_r و همه‌ی t ها که $0 < t < 1$ درست است، میدان D_r نسبت به $w = 0$ ستاره‌گون است. بر عکس، اگر $f(z) \in \mathbb{S}^*$ قرار نداشته باشد، آنگاه نقطه $w_0 \in D$ موجود است به‌طوری‌که برای t_0 ای، $(0 < t_0 < 1)$ ، $t_0 w_0$ متعلق به D نمی‌باشد. اینک قرص $|z| < r < 1$ را انتخاب می‌کنیم به‌طوری‌که تصویرش D_r شامل نقطه‌ی w_0 باشد. چون $D_r \subset D$ ، نقطه‌ی $t_0 w_0$ متعلق به D_r نیست. پس $f(z)$ ، $|z| < 1$ را بر میدان ستاره‌گون نمی‌نگارد. $\square$

قضیه ۳.۳.۱. فرض کنیم $f(z) \in \mathbb{S}$ باشد، در این صورت $f(z) \in \mathbb{S}^*$ اگر و تنها اگر:

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > 0.$$

برهان. با توجه به لم ۲.۳.۱ $f(z) \in \mathbb{S}^*$ اگر و تنها اگر تصویر D_r از $|z| < r < 1$ یک میدان ستاره‌گون باشد. به بیان معادل برای هر θ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) بردار شعاعی از $w = 0$ تا $w = f(re^{i\theta})$ باید در D_r باشد ولی این بدان معنی است که $\arg f(re^{i\theta})$ تابعی است که نسبت به θ اکیدا صعودی است، زیرا در غیر این صورت بردار شعاعی می‌بایست مرز D_r را حداقل در دو نقطه قطع کند. پس یک تابع در $\mathbb{S}^*$ با شرط $\frac{\partial}{\partial \theta} \arg f(re^{i\theta}) > 0$ مشخص می‌شود. ولی $\arg f(re^{i\theta}) = \operatorname{Im} \log f(re^{i\theta})$ ، بنابراین:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \operatorname{Im} \log f(re^{i\theta}) \right\} = \operatorname{Im} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \log f(re^{i\theta}) \right\} = \operatorname{Im} \left\{ i \frac{re^{i\theta} f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > 0.$$

□

مثال ۴.۳.۱. تابع کوئب $k(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ در ردهی $\mathbb{S}^*$ قرار دارد، زیرا تصویر $|z| < 1$ صفحهی w می باشد که در امتداد پرتو $\frac{1}{4}$ تا ∞ بریده شده است و همچنین:

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{zk'(z)}{k(z)} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1+z}{1-z} \right\}.$$

قضیه ۵.۳.۱. فرض کنیم برای $|z| < 1$ ، $f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ ، $|a_n| \leq 2$ ، n هر، $\operatorname{Re} f(z) > 0$ ، $|z| < 1$ اگر برای

قضیه ۶.۳.۱. فرض کنیم $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ در $\mathbb{S}^*$ باشد آنگاه برای هر n ، $|a_n| \leq n$.

برهان. چون برای $|z| < 1$ ، $f(z) \neq 0$ ، $0 < |z| < 1$ تابع

$$P(z) = z \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1 + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n z^{n-1}}{1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^{n-1}} \quad (5.1)$$

در $|z| < 1$ تحلیلی است. لذا می توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$P(z) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n z^{n-1} \quad (6.1)$$

از طرفی برای $|z| < 1$ ، $f(z) \in \mathbb{S}^*$ ، پس $\operatorname{Re} \{P(z)\} > 0$. بنا بر قضیه ۴.۲.۱ می دانیم:

$$|\alpha_n| \leq 2 \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (7.1)$$

از (۵.۱) و (۶.۱) داریم:

$$1 + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n z^{n-1} = \left(1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^{n-1}\right) \left(1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n\right)$$

با مساوی قرار دادن ضرایب به رابطه ی زیر می رسیم:

$$k a_k = a_k + a_{k-1} \alpha_1 + a_{k-2} \alpha_2 + \dots + a_2 \alpha_{k-2} + \alpha_{k-1}$$

و یا به صورت معادل:

$$(k-1) a_k = a_{k-1} \alpha_1 + a_{k-2} \alpha_2 + \dots + a_2 \alpha_{k-2} + \alpha_{k-1} \quad (k = 2, 3, \dots) \quad (8.1)$$

با استفاده از کران (۷.۱) می‌توان نامساوی مثلث را در (۸.۱) به کار برد لذا

$$(k-1)|a_k| \leq 2(|a_{k-1}| + |a_{k-2}| + \dots + |a_2| + 1)$$

از رابطه‌ی فوق داریم $|a_2| \leq 2$. سپس فرض کنیم برای $k = 2, 3, \dots, n-1$ داشته باشیم $|a_k| \leq k$. در این صورت :

$$(n-1)|a_n| \leq 2[(n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1] = \frac{2(n-1)n}{2}.$$

و لذا رابطه $|a_n| \leq n$ برقرار می‌باشد لذا به استقرا قضیه برای هر n درست است. $\square$

تعریف ۷.۳.۱. تابع $f(z) \in \mathbb{S}$ ستاره‌گون از مرتبه α ($0 \leq \alpha < 1$) نامیده می‌شود هرگاه :

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > \alpha \quad (|z| < 1).$$

این زیر رده‌ی $\mathbb{S}^*(\alpha)$ را به نشان می‌دهیم.

قضیه ۸.۳.۱. فرض کنیم $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ ، $f(z)$ ($0 \leq \alpha < 1$) اگر

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n-\alpha)|a_n| \leq 1-\alpha$$

آنگاه $f(z) \in \mathbb{S}^*(\alpha)$.

برهان. بنا بر تعریف ۷.۳.۱ کافی است نشان دهیم $z \frac{f'(z)}{f(z)}$ در یک دایره به شعاع $1-\alpha$ و به مرکز ۱ قرار دارد.

$$\left| z \frac{f'}{f} - 1 \right| = \left| \frac{zf' - f}{f} \right| = \left| \frac{\sum_{n=2}^{\infty} (n-1)|a_n|z^n}{z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n} \right|$$

$$\leq \frac{\sum_{n=2}^{\infty} (n-1)|a_n||z|^{n-1}}{1 - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n||z|^{n-1}} \leq \frac{\sum_{n=2}^{\infty} (n-1)|a_n|}{1 - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n|}$$

آخرین جمله قبل دارای کران بالای $1-\alpha$ می‌باشد اگر

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n-1)|a_n| \leq (1-\alpha)(1 - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n|)$$

که معادل است با $\sum_{n=2}^{\infty} (n-\alpha)|a_n| \leq 1-\alpha$. بنا بر فرض، این رابطه برقرار است. بنابراین

$$\left| z \frac{f'}{f} - 1 \right| \leq 1-\alpha \quad \square$$

۴.۱ ردهی $\mathbb{K}$

تعریف ۱.۴.۱. میدان D را محدب گوئیم هرگاه پاره خط مستقیمی که هر دو نقطه از D را به هم وصل می کند در D قرار بگیرد.

تعریف ۲.۴.۱. تابع $f(z) \in \mathbb{S}$ را محدب گوئیم هرگاه قرص $|z| < 1$ با $f(z)$ بر یک میدان محدب نگاشته شود، این زیر ردهی $\mathbb{S}$ را با $\mathbb{K}$ نشان می دهیم.

قضیه ۳.۴.۱. فرض کنیم $f(z) \in \mathbb{S}$ ، در این صورت $f(z) \in \mathbb{K}$ اگر و تنها اگر $f(z)$ هر قرص $|z| < r < 1$ را بر میدان محدب تصویر کند.

برهان. ابتدا فرض می کنیم $f(z) \in \mathbb{K}$ و D تصویر $|z| < 1$ و D_r تصویر $|z| < r < 1$ تحت $f(z)$ باشد. نقاط w_1, w_2 را در D_r انتخاب می کنیم. باید نشان دهیم که پاره خط $(0 < t < 1)$ $tw_1 + (1-t)w_2$ هم در D_r قرار دارد. نقاط z_1 و z_2 در قرص $|z| < 1$ موجود هستند به طوری که $\omega_1 = f(z_1)$ و $\omega_2 = f(z_2)$. بدون از دست دادن کلیت فرض کنیم $|z_1| \leq |z_2|$ آنگاه تصویر $|z| < 1$ تحت تابع $g(z) = tf\left(\frac{z_1}{z_2}z\right) + (1-t)f(z)$ در D واقع است. لذا تابع $h(z) = f^{-1}(g(z))$ در $|z| < 1$ تحلیلی است و چون $f(z) \in \mathbb{S}$ لذا در شرایط $|h(z)| < 1$ و $h(0) = 0$ صدق می کند، به موجب لم شوارتز $|h(z)| \leq |z|$. به ویژه:

$$|h(z_2)| = |f^{-1}(tw_1 + (1-t)w_2)| \leq |z_2| < r \quad (9.1)$$

چون $D_r \subset D$ ، نقطه z_0 ای در قرص $|z| < 1$ موجود است که $tw_1 + (1-t)w_2 = f(z_0)$ و بنا بر (۹.۱) نقطه $z_0 = f^{-1}(f(z_0))$ نیز می بایست در قرص $|z| < 1$ باشد. پس هر نقطه بر پاره خط $tw_1 + (1-t)w_2$ در D_r قرار دارد.

برعکس، اگر $f(z)$ در ردهی $\mathbb{K}$ نباشد آنگاه دو نقطه در D وجود دارند که پاره خط مار بر این دو نقطه در D قرار ندارد. اینک قرصی مانند $|z| < r < 1$ انتخاب می کنیم که تصویرش D_r شامل این دو نقطه باشد. چون $D_r \subset D$ پاره خطی که این دو نقطه را به هم وصل می کند، نمی تواند در D_r قرار داشته باشد، لذا $f(z)$ قرص $|z| < r$ را بر یک میدان محدب تصویر نمی کند. $\square$

قضیه ۴.۴.۱. فرض کنیم $f(z)$ در $|z| < 1$ تحلیلی باشد و $f(0) = 0$ و $f'(0) = 1$. در این صورت $f(z) \in \mathbb{K}$ اگر و تنها اگر:

$$\operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} > 0 \quad (|z| < 1).$$

برهان. بنا بر قضیه ۹.۱، $f(z) \in K$ اگر و تنها اگر تصویر D_r از $|z| < r < 1$ یک میدان محدب باشد. از نظر هندسی این بدان معنی است که تابع $w = f(re^{i\theta})$ دایره $|z| = r < 1$ را بر

یک مرز ساده می‌نگارد و مماس بر این مرز، با افزایش θ در خلاف جهت عقربه‌های ساعت حرکت می‌کند. می‌دانیم زاویه‌ای که خط مماس در صفحه‌ی ω با محور حقیقی می‌سازد برابر است با:

$$\frac{\pi}{4} + \theta + \arg f'(z)$$

لذا تابع محدب با شرط زیر مشخص می‌گردد:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\pi}{4} + \theta + \arg f'(re^{i\theta}) \right) > 0.$$

و لذا:

$$1 + \frac{\partial}{\partial \theta} (\operatorname{Im} \log f'(re^{i\theta})) = 1 + \operatorname{Im} \left\{ (ire^{i\theta}) \frac{f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} > 0.$$

□

قضیه ۵.۴.۱. (۴ الکساندر) فرض کنیم f یک تابع تحلیلی در D باشد با $f(0) = 0$ و $f'(0) \neq 0$.
۱. در این صورت $f(z) \in \mathbb{K}$ اگر و تنها اگر $zf' \in \mathbb{S}^*$.

برهان. اگر $g(z) = zf'(z)$ در این صورت:

$$\left\{ \frac{zg'(z)}{g(z)} \right\} = \left\{ 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} > 0.$$

لذا تابع سمت چپ در D تحلیلی و مثبت است اگر و تنها اگر تابع سمت راست نیز چنین باشد. □

قضیه ۶.۴.۱. فرض کنیم $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ در $\mathbb{K}$ باشد. در این صورت برای هر n ، $|a_n| \leq 1$.

برهان. با توجه به قضیه ۵.۴.۱ تابع $zf'(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} na_n z^n$ در $\mathbb{S}^*$ قرار دارد لذا بنا بر قضیه ۶.۳.۱ برای هر n ، $|na_n| \leq n$ و در نتیجه $|a_n| \leq 1$. □

قضیه ۷.۴.۱. اگر $f(z) \in \mathbb{K}$ برای $|z| < 1$ داشته باشیم $f(z) \neq c$ آنگاه $|c| \geq \frac{1}{4}$.

برهان. ابتدا نشان می‌دهیم تابع کمکی $g(z) = (c - f(z))^2$ در $|z| < 1$ تک ارز است، دو نقطه متمایز z_0 و z_1 در قرص واحد انتخاب می‌کنیم در این صورت:

$$g(z_0) - g(z_1) = ((c - f(z_0))^2 - (c - f(z_1))^2) = (f(z_0) - f(z_1))(f(z_0) + f(z_1) - 2c)$$

اکنون $f(z_0) \neq f(z_1)$ زیرا $f(z)$ تک ارز می‌باشد. همچنین چون $f(z)$ محدب است، نقطه‌ی $\frac{1}{4}[f(z_0) + f(z_1)]$ به تصویر $|z| < 1$ متعلق است لذا نمی‌تواند مساوی c باشد. پس $f(z_0) + f(z_1) - 2c \neq 0$.

^۴Alexander

و لذا تک ارزی $g(z)$ ثابت می‌شود. چون $g(z) = c^2 - 2cz + z^2 + \dots$ تابع نرمال زیر در $\mathbb{S}$ است.

$$h(z) = \frac{g(z) - c^2}{-2c} = z + \left(\frac{-z^2}{2c}\right) + \dots$$

بعلاوه در $|z| < 1$ ، $h(z) \neq \frac{c}{2}$ ، زیرا $g(z)$ هرگز در آن جا صفر نیست. با به کار بردن قضیه‌ی پوششی در می‌یابیم $\frac{1}{4} \leq \left|\frac{c}{2}\right|$ و یا $\frac{1}{4} \leq |c|$. $\square$

قضیه ۸.۴.۱. اگر $f(z) \in \mathbb{K}$ باشد، آنگاه برای $|z| = r < 1$:

$$\frac{1}{(1+r)^2} \leq |f'(z)| \leq \frac{1}{(1-r)^2}$$

برهان. می‌دانیم تابع $w = \frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0 z}$ ($|z_0| < 1$) تحلیلی، یک به یک و پوشاست و قرص واحد را بر خودش می‌نگارد، پس تابع

$$g(z) = f\left(\frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0 z}\right) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2$$

نیز به ازای $|z| < 1$ تحلیلی و تک ارز است. بنابراین:

$$g(\circ) = b_0 = f(z_0) \quad b_1 = g'(\circ) = f'(z_0)(1 - |z_0|^2)$$

$$b_2 = \frac{g''(\circ)}{2} = \frac{1}{2} (f''(z_0)(1 - |z_0|^2)^2 - 2f'(z_0)\bar{z}_0(1 - |z_0|^2)).$$

چون تابع $g(z)$ نرمالیزه نمی‌باشد لذا $g(z)$ در ردهی $\mathbb{S}$ قرار ندارد. با توجه به این که تابع

$$\frac{g(z) - g(\circ)}{g'(\circ)} = z + \frac{b_2}{b_1} z^2 + \dots$$

در $\mathbb{S}$ قرار می‌گیرد لذا در $\mathbb{K}$ نیز وجود دارد پس بنا به قضیه‌ی ۶.۴.۱:

$$\frac{1}{2} \left| \frac{f''(z_0)}{f'(z_0)} (1 - |z_0|^2) - 2\bar{z}_0 \right| \leq 1$$

با قرار دادن $z_0 = re^{i\theta}$ و ضرب طرفین در $\frac{2|z_0|}{1 - |z_0|^2}$ داریم:

$$\left| \frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{2r^2}{1 - r^2} \right| \leq \frac{2|z_0|}{1 - |z_0|^2}.$$

حال چون z دلخواه است داریم:

$$\left| \frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{2r^2}{1 - r^2} \right| \leq \frac{2r}{1 - r^2}$$

$$\Rightarrow \frac{2r^2 - 2r}{1 - r^2} \leq \frac{zf''(z)}{f'(z)} \leq \frac{2r^2 + 2r}{1 - r^2}$$

$$\Rightarrow \frac{2r - 2}{1 - r^2} \leq \frac{\partial}{\partial r} \log |f'(z)| \leq \frac{2r + 2}{1 - r^2}$$

حال از $\circ$ تا r انتگرال می گیریم :

$$-2 \log(1 + r) \leq \log |f'(z)| \leq -2 \log(1 - r)$$

لذا :

$$\frac{1}{(1 + r)^2} \leq |f'(z)| \leq \frac{1}{(1 - r)^2}.$$

□

قضیه ۹.۴.۱. اگر $f(z) \in \mathbb{K}$ باشد آنگاه برای $|z| = r < 1$ ،

$$\frac{r}{1 + r} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{1 - r}$$

برهان. بنا بر قضیه ۸.۴.۱ برای $|z| = r < 1$ داریم $|f'(z)| \leq \frac{1}{(1 - r)^2}$ نقطه $\circ$ را به z با یک خط مستقیم وصل کرده و روی این پاره خط انتگرال می گیریم:

$$|f(z)| = \int_0^r |f'(t)| dt \leq \int_0^r \frac{1}{(1 - t)^2} dt = \frac{r}{1 - r}.$$

نامساوی $\frac{r}{(1 + r)} \leq |f(z)|$ همواره برقرار است، حال اگر $\frac{1}{4} \leq |f(z)|$ لذا $\frac{r}{(1 + r)} \leq |f(z)|$ و اگر $|f(z)| < \frac{1}{4}$ طبق قضیه پوششی مسیر c داخل دایره ی یکه از $\circ$ تا z موجود است که تصویر آن پاره خط مستقیم c از $\circ$ تا $f(z)$ را می پوشاند در این صورت:

$$|f(z)| = \int_{c_0} |dw| = \int_c |f'(s)| |ds|$$

از طرفی بنا بر قضیه ی قبل :

$$|f(z)| = \int_c |f'(s)| |ds| \geq \int_c |f'(s)| d|s| \geq \frac{1}{(1 + t)^2} dt = \frac{r}{1 + r}$$

لذا داریم :

$$\frac{r}{(1 + r)} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(1 - r)}.$$

□

فصل ۲

بررسی بعضی عملگرها بر زیر رده‌هایی از توابع دو تک ارز

مقدمه

در این فصل با استفاده از عملگر هوهلوف^۱، عملگر دزوک-سریوستا^۲ و عملگر کارلسون-شفر^۳ و رده‌های مربوط به این عملگرها به دنبال یافتن کرانی برای ضرایب $|a_2|$ و $|a_3|$ می‌باشیم.

۱.۲ عملگر هوهلوف

تعریف ۱.۱.۲. تابع تحلیلی

$$f(z) = z + \sum_{m=2}^{\infty} a_m z^m \quad (1.2)$$

متعلق به رده A را دو تک ارز گوئیم، هرگاه توابع $f(z)$ و $f^{-1}(z)$ هر دو بر دیسک واحد $\mathbb{U}$ تک ارز باشند. مجموعه توابع دو تک ارز را با نماد Σ نمایش می‌دهیم.

مثال ۲.۱.۲. توابع زیر دو تک ارز می‌باشند:

$$\frac{z}{1-z}, \quad -\log(1-z), \quad \frac{1}{2} \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

^۱ Hohlove

^۲ Dziok-Srivastava

^۳ Carlson-Shaffer

تعریف ۳.۱.۲. فرض کنیم $f(z) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m z^m$ و $g(z) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m z^m$ دو تابع در S باشند، حاصلضرب هادامارد این دو تابع به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(f * g)(z) = f(z) * g(z) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m b_m z^m$$

تعریف ۴.۱.۲. برای مقادیر مختلط a, b, c و c به طوری که $c \neq 0, -1, -2, -3, \dots$ باشد، تابع گاوسی هندسی که با نماد ${}_2F_1(a, b, c, z)$ نمایش می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} {}_2F_1(a, b, c, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_{n-1} (b)_{n-1}}{(c)_{n-1}} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} \quad (z \in \mathbb{U}) \end{aligned} \quad (2.2)$$

به طوری که $(\alpha)_n$ برابر است با:

$$(\alpha)_n = \frac{\Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(\alpha)} = \begin{cases} 1 & \text{اگر } (n = 0) \\ \alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + n - 1) & \text{اگر } (n = 1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

تعریف ۵.۱.۲. با استفاده از تابع گاوسی هندسی و حاصلضرب هادامارد، عملگر هوهلوف را که با نماد $\mathcal{I}_{a,b,c}$ نمایش می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{a,b,c} &= z {}_2F_1(a, b, c, z) * f(z), \\ &= z + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n a_n z^n \quad (z \in \mathbb{U}) \end{aligned}$$

به طوری که φ_n برابر است با:

$$\varphi_n = \frac{(a)_{n-1} (b)_{n-1}}{(c)_{n-1} (n-1)!} \quad (3.2)$$

اگر تابع f تک ارز باشد طبق قضیه پوشی کوئب دارای وارونی به صورت زیر می‌باشد:

$$f^{-1}(f(z)) = z \quad (z \in \mathbb{U})$$

و

$$f(f^{-1}(w)) = w \quad (|w| < r_*(f); r_*(f) \geq \frac{1}{4})$$

به طوری که:

$$f^{-1}(w) = w - a_2 w^2 + (2a_2^2 - a_3) w^3 - (5a_2^3 - 5a_2 a_3 + a_4) w^4 + \dots \quad (4.2)$$

۱.۱.۲ رده $S_{\Sigma}^{a,b,c}(\alpha, \lambda)$

تعریف ۶.۱.۲. تابع f را متعلق به رده $S_{\Sigma}^{a,b,c}(\alpha, \lambda)$ می نامیم هرگاه:

$$f \in \Sigma, \left| \arg \left(\frac{z(\mathcal{I}_{a,b,c}f(z))'}{(1-\lambda)z + \lambda \mathcal{I}_{a,b,c}f(z)} \right) \right| < \frac{\alpha\pi}{2} \quad (0 < \alpha \leq 1; 0 \leq \lambda \leq 1; z \in \mathbb{U}) \quad (5.2)$$

و

$$\left| \arg \left(\frac{w(\mathcal{I}_{a,b,c}g(w))'}{(1-\lambda)w + \lambda \mathcal{I}_{a,b,c}g(w)} \right) \right| < \frac{\alpha\pi}{2} \quad (0 < \alpha \leq 1; 0 \leq \lambda \leq 1; w \in \mathbb{U}). \quad (6.2)$$

که تابع g به صورت زیر می باشد:

$$g(w) = w - a_2 w^2 + (2a_2' - a_3)w^3 - (5a_2' - 5a_2 a_3 + a_4)w^4 + \dots \quad (7.2)$$

ملاحظه ۷.۱.۲. اگر در تعریف ۶.۱.۲ قرار دهیم $b = 1$ و $a = c, \lambda = 0$ به رده $S_{\Sigma}^{a,b,c}(\alpha, \lambda)$ به رده $\mathcal{H}_{\Sigma}^{\alpha}$ هم چنین اگر $a = c, \lambda = 1$ باشند رده $S_{\Sigma}^{a,b,c}(\alpha, \lambda)$ به رده $S_{\Sigma}^*(\alpha)$ تبدیل می شوند.

۲.۱.۲ رده $\mathcal{M}_{\Sigma}^{a,b,c}(\beta, \lambda)$

تعریف ۸.۱.۲. تابع f را متعلق به رده $\mathcal{M}_{\Sigma}^{a,b,c}(\beta, \lambda)$ می نامیم هرگاه:

$$f \in \Sigma, \operatorname{Re} \left(\frac{z(\mathcal{I}_{a,b,c}f(z))'}{(1-\lambda)z + \lambda \mathcal{I}_{a,b,c}f(z)} \right) > \beta \quad (0 \leq \beta < 1; 0 \leq \lambda \leq 1; z \in \mathbb{U}) \quad (8.2)$$

و

$$\operatorname{Re} \left(\frac{w(\mathcal{I}_{a,b,c}g(w))'}{(1-\lambda)z + \lambda \mathcal{I}_{a,b,c}g(w)} \right) > \beta \quad (0 \leq \beta < 1; 0 \leq \lambda \leq 1; w \in \mathbb{U}) \quad (9.2)$$

که تابع g به فرم (۷.۲) داده شده است.

ملاحظه ۹.۱.۲. اگر در تعریف ۸.۱.۲ قرار دهیم $b = 1$ و $a = c, \lambda = 0$ به رده $\mathcal{M}_{\Sigma}^{a,b,c}(\beta, \lambda)$ به رده $\mathcal{H}_{\Sigma}^{\beta}$ هم چنین اگر $a = c, \lambda = 1$ باشند رده $\mathcal{M}_{\Sigma}^{a,b,c}(\beta, \lambda)$ به رده $S_{\Sigma}(\beta)$ تبدیل می شوند.

کران های ضرایب برای توابع رده $S_{\Sigma}^{a,b,c}(\alpha, \lambda)$

هرگاه $f \in S_{\Sigma}^{a,b,c}(\alpha, \lambda)$ طبق قضیه زیر کران هایی برای ضرایب $|a_2|$ و $|a_3|$ به دست می آوریم.

قضیه ۱۰.۱.۲. فرض کنید $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ و $f \in \mathcal{S}_{\Sigma}^{a,b,c}(\alpha, \lambda)$ آنگاه:

$$|a_2| \leq \frac{2\alpha}{\sqrt{[2\alpha(\lambda^2 - 2\lambda) + (1-\alpha)(2-\lambda)^2]\varphi_2^2 + 2\alpha(3-\lambda)\varphi_3}} \quad (10.2)$$

و

$$|a_3| \leq \frac{2\alpha}{(3-\lambda)\varphi_3} \quad (11.2)$$

برهان. طبق (۵.۲) و (۶.۲) وجود دارد $p, q \in \mathcal{P}$ به‌طوری‌که می‌توان نوشت:

$$\frac{z(\mathcal{I}_{a,b,c}f(z))'}{(1-\lambda)z + \lambda\mathcal{I}_{a,b,c}f(z)} = [p(z)]^\alpha \quad (12.2)$$

و

$$\frac{w(\mathcal{I}_{a,b,c}g(w))'}{(1-\lambda)w + \lambda\mathcal{I}_{a,b,c}g(w)} = [q(w)]^\alpha \quad (13.2)$$

که $p(z)$ و $q(w)$ به‌صورت زیر می‌باشند:

$$p(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + \dots \quad (14.2)$$

و

$$q(w) = 1 + q_1 w + q_2 w^2 + \dots \quad (15.2)$$

حال با معادل قرار دادن ضرایب در (۱۲.۲) و (۱۳.۲) داریم:

$$(2-\lambda)\varphi_2 a_2 = \alpha p_1 \quad (16.2)$$

$$(\lambda^2 - 2\lambda)\varphi_2^2 a_2^2 + (3-\lambda)\varphi_3 a_3 = \frac{1}{\gamma}[\alpha(\alpha-1)p_1^2 + 2\alpha p_2], \quad (17.2)$$

$$-(2-\lambda)\varphi_2 a_2 = \alpha q_1 \quad (18.2)$$

و

$$(\lambda^2 - 2\lambda)\varphi_2^2 a_2^2 + (3-\lambda)\varphi_3(2a_2^2 - a_3) = \frac{1}{\gamma}[\alpha(\alpha-1)q_1^2 + 2\alpha q_2] \quad (19.2)$$

طبق (۱۶.۲) و (۱۸.۲) داریم:

$$a_2 = \frac{\alpha p_1}{(2-\lambda)\varphi_2} = -\frac{\alpha q_1}{(2-\lambda)\varphi_2} \quad (20.2)$$

در این صورت:

$$p_1 = -q_1. \quad (21.2)$$

از (۱۷.۲) و (۱۹.۲) به دست می آوریم:

$$[2\lambda^2 - 2\lambda]\varphi_1^2 + 2(3 - \lambda)\varphi_3 a_1^2 = \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2}(p_1^2 + q_1^2) + \alpha(p_2 + q_2). \quad (22.2)$$

با جایگذاری مقادیر a_2 از (۲۰.۲) و (۲۱.۲) در (۲۲.۲) داریم:

$$p_1^2 = \frac{(2 - \lambda)^2 \varphi_1^2 (p_2 + q_2)}{[2\alpha(\lambda^2 - 2\lambda) + (1 - \alpha)(2 - \lambda)^2] \varphi_1^2 + 2\alpha(3 - \lambda)\varphi_3} \quad (23.2)$$

حال طبق قضیه ۵.۳.۱ برای ضرایب p_2 و q_2 داریم:

$$|p_1| \leq \frac{2(2 - \lambda)\varphi_2}{\sqrt{[2\alpha(\lambda^2 - 2\lambda) + (1 - \alpha)(2 - \lambda)^2] \varphi_1^2 + 2\alpha(3 - \lambda)\varphi_3}} \quad (24.2)$$

بنابراین از (۲۰.۲) داریم:

$$|a_2| \leq \frac{2\alpha}{\sqrt{[2\alpha(\lambda^2 - 2\lambda) + (1 - \alpha)(2 - \lambda)^2] \varphi_1^2 + 2\alpha(3 - \lambda)\varphi_3}}$$

که این کرانی برای $|a_2|$ می باشد.

حال کرانی برای $|a_3|$ می یابیم.

با کم کردن (۱۷.۲) و (۱۹.۲) داریم:

$$2(3 - \lambda)\varphi_3 a_3 - 2(3 - \lambda)\varphi_3 a_1^2 = \alpha(p_2 - q_2) + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2}(p_1^2 - q_1^2). \quad (25.2)$$

از (۲۰.۲) و (۲۱.۲) و (۲۵.۲) داریم:

$$\begin{aligned} 2(3 - \lambda)\varphi_3 a_3 = & \left[\frac{2(3 - \lambda)\alpha^2 \varphi_3}{[2\alpha(\lambda^2 - 2\lambda) + (1 - \alpha)(2 - \lambda)^2] \varphi_1^2 + 2\alpha(3 - \lambda)\varphi_3} + \alpha \right] p_2 \\ & + \left[\frac{2(3 - \lambda)\alpha^2 \varphi_3}{[2\alpha(\lambda^2 - 2\lambda) + (1 - \alpha)(2 - \lambda)^2] \varphi_1^2 + 2\alpha(3 - \lambda)\varphi_3} - \alpha \right] q_2. \end{aligned}$$

طبق قضیه ۵.۳.۱ برای ضرایب p_2 و q_2 داریم:

$$|a_3| \leq \frac{2\alpha}{(3 - \lambda)\varphi_3}.$$

□

نتیجه ۱.۱.۱.۲. اگر در قضیه ۱.۲. قرار دهیم $\lambda = 0$ و $f \in S_{\Sigma}^{a,b,c}(\alpha, \lambda)$ آنگاه:

$$|a_2| \leq \alpha \sqrt{\frac{2}{2(1 - \alpha)\varphi_1^2 + 3\alpha\varphi_3}} \quad (26.2)$$

و

$$|a_3| \leq \frac{2\alpha}{3\varphi_3} \quad (27.2)$$

نتیجه ۱۲.۱.۲. اگر درنتیجه ۱۱.۱.۲ قرار دهیم $a = c$ و $b = 1$ آنگاه برای $f \in \mathcal{H}_\Sigma^\alpha$ داریم:

$$|a_2| \leq \alpha \sqrt{\frac{2}{2+\alpha}} \quad (28.2)$$

و

$$|a_3| \leq \frac{2\alpha}{3} \quad (29.2)$$

نتیجه ۱۳.۱.۲. اگر در قضیه ۱۰.۱.۲ قرار دهیم $\lambda = 1$ آنگاه برای $f \in \mathcal{S}_\Sigma^{a,b,c}(\alpha, \lambda)$ داریم:

$$|a_2| \leq \frac{2\alpha}{\sqrt{(1-3\alpha)\varphi_2^2 + 4\alpha\varphi_3}}$$

و

$$|a_3| \leq \frac{\alpha}{\varphi_3} \quad (30.2)$$

۳.۱.۲ کران‌های ضرایب برای توابع رده $\mathcal{M}_\Sigma^{a,b,c}(\beta, \lambda)$

در این بخش هرگاه $f \in \mathcal{M}_\Sigma^{a,b,c}(\beta, \lambda)$ طبق قضیه زیر کران‌هایی برای ضرایب $|a_2|$ و $|a_3|$ به دست می‌آوریم.

قضیه ۱۴.۱.۲. فرض کنید $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ و $f \in \mathcal{M}_\Sigma^{a,b,c}(\beta, \lambda)$ آنگاه:

$$|a_2| \leq \sqrt{\frac{2(1-\beta)}{(\lambda^2 - 2\lambda)\varphi_2^2 + (3-\lambda)\varphi_3}} \quad (31.2)$$

و

$$|a_3| \leq \frac{2(1-\beta)}{(3-\lambda)\varphi_3} \quad (32.2)$$

برهان. طبق (۸.۲) و (۹.۲) وجود دارند به‌طوری‌که:

$$\frac{z(\mathcal{I}_{a,b,c}f(z))'}{(1-\lambda)z + \lambda\mathcal{I}_{a,b,c}f(z)} = \beta + (1-\beta)p(z) \quad (33.2)$$

$$\frac{w(\mathcal{I}_{a,b,c}g(w))'}{(1-\lambda)w + \lambda\mathcal{I}_{a,b,c}g(w)} = \beta + (1-\beta)q(w) \quad (34.2)$$

که $p(z)$ و $q(w)$ به فرم (۱۴.۲) و (۱۵.۲) داده شده‌اند. با معادل قرار دادن ضرایب در (۳۳.۲) و (۳۴.۲) داریم:

$$(2-\lambda)\varphi_2^2 = (1-\beta)p_1 \quad (35.2)$$

$$(\lambda^2 - 2\lambda)\varphi_1^2 a_1^2 + (3 - \lambda)\varphi_3 a_3 = (1 - \beta)p_2 \quad (36.2)$$

$$- (2 - \lambda)\varphi_2 a_2 = (1 - \beta)q_1 \quad (37.2)$$

و

$$(\lambda^2 - 2\lambda)\varphi_1^2 a_1^2 + (3 - \lambda)\varphi_3(2a_1^2 - a_3) = (1 - \beta)q_2 \quad (38.2)$$

از (35.2) و (36.2) داریم:

$$a_2 = \frac{(1 - \beta)}{(2 - \lambda)\varphi_2} p_1 = \frac{-(1 - \beta)}{(2 - \lambda)\varphi_2} q_1 \quad (39.2)$$

در نتیجه:

$$p_1 = -q_1 \quad (40.2)$$

از (36.2) و (38.2) داریم:

$$[2(\lambda^2 - 2\lambda)\varphi_1^2 + 2(3 - \lambda)\varphi_3]a_1^2 = (1 - \beta)(p_2 + q_2) \quad (41.2)$$

همچنین با استفاده از (39.2) و (41.2) به دست می آوریم:

$$p_1^2 = \frac{(2\lambda)^2}{2[(\lambda^2 - 2\lambda)\varphi_1^2 + (3 - \lambda)\varphi_3]a_1^2(1 - \beta)\varphi_1^2(p_2 + q_2)} \quad (42.2)$$

با استفاده از قضیه ۵.۳.۱ داریم:

$$|p_1| \leq (2\lambda)\varphi_2 \sqrt{\frac{2}{[(\lambda^2 - 2\lambda)\varphi_1^2 + (3 - \lambda)\varphi_3]a_1^2(1 - \beta)}} \quad (43.2)$$

مجدداً با استفاده از قضیه ۵.۳.۱، (39.2) و (43.2) داریم:

$$|a_2| \leq \sqrt{\frac{2(1 - \beta)}{(\lambda^2 - 2\lambda)\varphi_1^2 + (3 - \lambda)\varphi_3}} \quad (44.2)$$

لذا این کرانی برای $|a_2|$ می باشد.

حال کرانی برای $|a_3|$ می یابیم.

با کم کردن (38.2) از (36.2) داریم:

$$2(3 - \lambda)\varphi_3 a_3 - 2(3 - \lambda)\varphi_3 a_1^2 = (1 - \beta)(p_2 - q_2) \quad (45.2)$$

لذا از (41.2) و (45.2) داریم:

$$2(3 - \lambda)\varphi_3 a_3 = \frac{2(3 - \lambda)\varphi_3 a_3(1 - \beta)(\lambda^2 - 2\lambda)\varphi_1^2(1 - \beta)}{(\lambda^2 - 2\lambda)\varphi_1^2 + (3 - \lambda)\varphi_3} p_2$$

$$- \frac{(\lambda^2 - 2\lambda)\varphi_1^2(1 - \beta)}{(\lambda^2 - 2\lambda)\varphi_1^2 + (3 - \lambda)\varphi_3} q_2$$

با استفاده از قضیه ۵.۳.۱ بار دیگر برای ضرایب p_2 و q_2 داریم:

$$|a_3| \leq \frac{2(1-\beta)}{(3-\lambda)\varphi_3}$$

□

نتیجه ۱۵.۱.۲. اگر در قضیه ۱۴.۱.۲ قرار دهیم $\lambda = 0$ و $f \in \mathcal{M}_{\Sigma}^{a,b,c}(\beta)$ آنگاه:

$$|a_2| \leq \sqrt{\frac{2(1-\beta)}{3\varphi_3}} \quad (۴۶.۲)$$

و

$$|a_3| \leq \frac{2(1-\beta)}{3\varphi_3} \quad (۴۷.۲)$$

نتیجه ۱۶.۱.۲. اگر در قضیه ۱۴.۱.۲ قرار دهیم $\lambda = 1$ و $f \in \mathcal{S}_{\Sigma}^{a,b,c}(\beta)$ آنگاه:

$$|a_2| \leq \sqrt{\frac{(2-2\beta)}{3\varphi_3 - \varphi_2^2}} \quad (۴۸.۲)$$

و

$$|a_3| \leq \frac{(1-\beta)}{\varphi_3} \quad (۴۹.۲)$$

۲.۲ عملگر دزوک-سریوستا

تعریف ۱۰.۲.۲. برای $a_1, \dots, a_l, d_1, \dots, d_m$ به طوری که $d_j \neq 0, -1, \dots$ و $j = 1, 2, \dots, m$ و $z \in \mathbb{C}$ تابع تعمیم یافته فوق هندسی را با نماد ${}_lF_m$ نمایش می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$${}_lF_m(a_1, \dots, a_l; d_1, \dots, d_m; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \dots (a_l)_n}{(d_1)_n \dots (d_m)_n} \frac{z^n}{n!}$$

به طوری که $l \leq m+1, m \in \mathbb{N} = \mathbb{N} \cup \{0\}$

هم چنین نماد $(\mu)_n$ به فرمی از تابع گاما به صورت زیر می‌باشد:

$$(\mu)_n = \begin{cases} 1 & \text{اگر } n = 0, \mu \in \mathbb{C} - \{0\} \\ \mu(\mu+1)\dots(\mu+n-1) & \text{اگر } n \in \mathbb{N}, \mu \in \mathbb{C} \end{cases}$$

تعریف ۲۰.۲.۲. با استفاده از تابع تعمیم یافته فوق هندسی ${}_lF_m$ و حاصلضرب هادامارد عملگر دزوک-سریوستا را با نماد ${}_lI_m(a_1, \dots, a_l; d_1, \dots, d_m; z)$ نمایش می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} {}_lI_m(a_1 \dots a_l; d_1, \dots, d_m; z) &= z({}_lF_m(a_1, \dots, a_l; d_1 \dots d_m)) * f(z) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\prod_{i=1}^l (a_i)_{n-1}}{\prod_{i=1}^m (d_i)_{n-1}} a_n \frac{z^n}{(n-1)!}. \end{aligned}$$

برای اختصار می‌نویسیم:

$${}_l I_m f(z) = {}_l I_m(a_1, \dots, a_l; d_1, \dots, d_m; z).$$

۱.۲.۲ رده ${}_l S_m(b, \alpha)$

تعریف ۳.۲.۲. تابع $f(z) \in \mathcal{A}$ در رده ${}_l S_m(b, \alpha)$ است، به طوری که
 $(l \leq m+1, l, m \in \mathbb{N}_0, b \in \mathbb{C} - \{0\}, 0 \leq \alpha < 1)$ هرگاه:

$$\operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{1}{b} \left(\frac{z({}_l I_m f(z))'}{{}_l I_m f(z)} - 1 \right) \right\} > \alpha \quad (z \in \mathbb{U}).$$

۲.۲.۲ رده ${}_l C_m(b, \alpha)$

تعریف ۴.۲.۲. تابع $f(z) \in \mathcal{A}$ در رده ${}_l C_m(b, \alpha)$ است، به طوری که
 $(l \leq m+1, l, m \in \mathbb{N}_0, b \in \mathbb{C} - \{0\}, 0 \leq \alpha < 1)$ هرگاه:

$$\operatorname{Re} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{b} \frac{z({}_l I_m f(z))''}{({}_l I_m f(z))'} - 1 \right) \right\} > \alpha \quad (z \in \mathbb{U}).$$

ملاحظه ۵.۲.۲. توجه داشته باشید:

$$f \in {}_l C_m(b, \alpha) \Leftrightarrow zf' \in {}_l S_m(b, \alpha). \quad (5.2)$$

لم ۶.۲.۲. اگر $p(z) = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots$ متعلق به رده $\mathcal{P}$ باشد در این صورت داریم:

$$|c_n| \leq 2 \quad \forall \quad n \geq 1,$$

لم ۷.۲.۲. [۲۲] فرض کنید $p \in \mathcal{P}$ با $p(z) = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots$ آنگاه برای هر عدد مختلط τ داریم:

$$|c_2 - \tau c_1| \leq 2 \max\{1, |\tau - 1|\},$$

لم ۸.۲.۲. [۱۴] فرض کنید $p \in \mathcal{P}$ با $p(z) = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots$ آنگاه برای هر عدد مختلط τ داریم:

$$\left| c_2 - \frac{1}{\tau} \tau c_1 \right| \leq 2 + \frac{1}{\tau} (|\tau - 1| - 1) |c_1|.$$

قضیه ۹.۲.۲. اگر $f \in {}_l S_m(b, \alpha)$ و $l \leq m+1, m \in \mathbb{N}_0, b \in \mathbb{C} - \{0\}, 0 \leq \alpha < 1$ آنگاه:

$$|a_2| \leq 2(1 - \alpha) |b| \frac{\prod_{i=1}^m (d_i)_1}{\prod_{i=1}^l (a_i)_1},$$

$$|a_2| \leq 2(1-\alpha)|b| \frac{\prod_{i=1}^m (d_i)_2}{\prod_{i=1}^l (a_i)_2} \max\{1, |1 + 2b(1-\alpha)|\}$$

و

$$|a_2 - \prod_{i=1}^l \frac{a_i}{a_i + 1} \prod_{i=1}^m \frac{d_i + 1}{d_i} a_2| \leq 2(1-\alpha)|b| \frac{\prod_{i=1}^m (d_i)_2}{\prod_{i=1}^l (a_i)_2}.$$

برهان. داریم:

$${}_l I_m f(z) = z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \dots \quad (51.2)$$

پس طبق (51.2) می‌توان نوشت:

$$A_2 = \frac{\prod_{i=1}^l (a_i)_1}{\prod_{i=1}^m (d_i)_1} a_2, \quad A_3 = \frac{\prod_{i=1}^l (a_i)_2}{\prod_{i=1}^m (d_i)_2} a_3.$$

طبق تعریف رده ${}_l S_m(b, \alpha)$ وجود دارد $p \in \mathcal{P}$ به طوری که:

$$\frac{z({}_l I_m f(z))'}{{}_l I_m f(z)} = b[(1-\alpha)p(z) + \alpha - 1] + 1.$$

لذا:

$$\frac{z(1 + 2A_2 z + 3A_3 z^2 + \dots)}{(z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \dots)} = b[(1-\alpha)(1 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots) + \alpha - 1] + 1,$$

در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned} z + 2A_2 z^2 + 3A_3 z^3 + \dots \\ = z + [b(1-\alpha) + A_2]z^2 + [b(1-\alpha) + (c_2 + c_1 A_2) + A_3]z^3 + \dots \end{aligned}$$

با معادل قرار دادن ضرایب در دو طرف داریم:

$$A_2 = b(1-\alpha)c_1, \quad A_3 = \frac{b(1-\alpha)}{3}[c_2 + b(1-\alpha)c_1^2]. \quad (52.2)$$

بنابراین طبق (52.2) داریم:

$$a_2 = b(1-\alpha) \frac{\prod_{i=1}^m (d_i)_1}{\prod_{i=1}^l (a_i)_1} c_1, \quad a_3 = b(1-\alpha) \frac{\prod_{i=1}^m (d_i)_2}{\prod_{i=1}^l (a_i)_2} [c_2 + b(1-\alpha)c_1^2]. \quad (53.2)$$

با توجه به لم ۶.۲.۲ و (53.2) به دست می‌آوریم:

$$|a_2| \leq 2|b|(1-\alpha) \frac{\prod_{i=1}^m (d_i)_1}{\prod_{i=1}^l (a_i)_1}$$

و طبق لم ۸.۲.۲ داریم:

$$|a_{\mathfrak{r}}| \leq \mathfrak{r}|b|(\mathfrak{r} - \alpha) \frac{\prod_{i=\mathfrak{r}}^m (d_i)_{\mathfrak{r}}}{\prod_{i=\mathfrak{r}}^l (a_i)_{\mathfrak{r}}} \max\{\mathfrak{r}, \mathfrak{r}b(\mathfrak{r} - \alpha)\}.$$

علاوه بر این طبق لم ۶.۲.۲ داریم:

$$\begin{aligned} & \left| a_{\mathfrak{r}} - \prod_{i=\mathfrak{r}}^l \frac{a_i}{a_i + \mathfrak{r}} \prod_{i=\mathfrak{r}}^m \frac{d_i + \mathfrak{r}}{d_i} a_{\mathfrak{r}} \right| = \\ & \left| b(\mathfrak{r} - \alpha) \frac{\prod_{i=\mathfrak{r}}^m (d_i)_{\mathfrak{r}}}{\prod_{i=\mathfrak{r}}^l (a_i)_{\mathfrak{r}}} [c_{\mathfrak{r}} + b(\mathfrak{r} - \alpha)c_{\mathfrak{r}}] - b_{\mathfrak{r}}(\mathfrak{r} - \alpha)_{\mathfrak{r}} \right. \\ & \times \left. \prod_{i=\mathfrak{r}}^l \frac{a_i}{a_i + \mathfrak{r}} \prod_{i=\mathfrak{r}}^m \frac{d_i + \mathfrak{r}}{d_i} \left(\frac{\prod_{i=\mathfrak{r}}^m (d_i)_{\mathfrak{r}}}{\prod_{i=\mathfrak{r}}^l (a_i)_{\mathfrak{r}}} \right)^{\mathfrak{r}} c_{\mathfrak{r}} \right| \\ & = \left| b(\mathfrak{r} - \alpha) \frac{\prod_{i=\mathfrak{r}}^m (d_i)_{\mathfrak{r}}}{\prod_{i=\mathfrak{r}}^l (a_i)_{\mathfrak{r}}} c_{\mathfrak{r}} \right| \leq \mathfrak{r}(\mathfrak{r} - \alpha)|b| \frac{\prod_{i=\mathfrak{r}}^m (d_i)_{\mathfrak{r}}}{\prod_{i=\mathfrak{r}}^l (a_i)_{\mathfrak{r}}} \end{aligned}$$

□

قضیه ۱۰.۲.۲. اگر $f \in {}_l S_m(b, \alpha)$ و $0 \leq \alpha < \mathfrak{r}$ و $b \in \mathbb{C} - \{0\}$, $l, m \in \mathbb{N}_0$, $l \leq m + 1$ آنگاه برای $\tau \in \mathbb{C}$ داریم:

$$\begin{aligned} |a_{\mathfrak{r}} - \tau a_{\mathfrak{r}}| & \leq \mathfrak{r}|b|(\mathfrak{r} - \alpha) \frac{\prod_{i=\mathfrak{r}}^m (d_i)_{\mathfrak{r}}}{\prod_{i=\mathfrak{r}}^l (a_i)_{\mathfrak{r}}} \\ & \times \max \left\{ \mathfrak{r}, \left| \mathfrak{r} + \mathfrak{r}b(\mathfrak{r} - \alpha) - \mathfrak{r}\tau b(\mathfrak{r} - \alpha) \prod_{i=\mathfrak{r}}^l \frac{a_i + \mathfrak{r}}{a_i} \prod_{i=\mathfrak{r}}^m \frac{d_i}{d_i + \mathfrak{r}} \right| \right\}. \end{aligned}$$

برای هر τ یک تابع متعلق به ${}_l S_m(b, \alpha)$ وجود دارد به طوری که برابری بالا را حفظ می‌کند.

برهان. طبق (۵۳.۲) داریم:

$$\begin{aligned} a_{\mathfrak{r}} - \tau a_{\mathfrak{r}} & = b(\mathfrak{r} - \alpha) \frac{\prod_{i=\mathfrak{r}}^m (d_i)_{\mathfrak{r}}}{\prod_{i=\mathfrak{r}}^l (a_i)_{\mathfrak{r}}} [c_{\mathfrak{r}} + b(\mathfrak{r} - \alpha)c_{\mathfrak{r}}] - \tau b_{\mathfrak{r}}(\mathfrak{r} - \alpha)_{\mathfrak{r}} \left(\frac{\prod_{i=\mathfrak{r}}^m (d_i)_{\mathfrak{r}}}{\prod_{i=\mathfrak{r}}^l (a_i)_{\mathfrak{r}}} \right)^{\mathfrak{r}} c_{\mathfrak{r}} \\ & = b(\mathfrak{r} - \alpha) \frac{\prod_{i=\mathfrak{r}}^m (d_i)_{\mathfrak{r}}}{\prod_{i=\mathfrak{r}}^l (a_i)_{\mathfrak{r}}} \left[c_{\mathfrak{r}} + b(\mathfrak{r} - \alpha)c_{\mathfrak{r}} - \tau b(\mathfrak{r} - \alpha) \prod_{i=\mathfrak{r}}^l \frac{a_i + \mathfrak{r}}{a_i} \prod_{i=\mathfrak{r}}^m \frac{d_i}{d_i + \mathfrak{r}} c_{\mathfrak{r}} \right] \\ & = b(\mathfrak{r} - \alpha) \frac{\prod_{i=\mathfrak{r}}^m (d_i)_{\mathfrak{r}}}{\prod_{i=\mathfrak{r}}^l (a_i)_{\mathfrak{r}}} \left[c_{\mathfrak{r}} - \frac{c_{\mathfrak{r}}}{\mathfrak{r}} + \frac{c_{\mathfrak{r}}}{\mathfrak{r}} \right. \\ & \times \left. \left(\mathfrak{r} + \mathfrak{r}b(\mathfrak{r} - \alpha) - \mathfrak{r}\tau b(\mathfrak{r} - \alpha) \prod_{i=\mathfrak{r}}^l \frac{a_i + \mathfrak{r}}{a_i} \prod_{i=\mathfrak{r}}^m \frac{d_i}{d_i + \mathfrak{r}} \right) \right]. \end{aligned}$$

پس طبق لم ۶.۲.۲ و ۸.۲.۲ داریم:

$$\begin{aligned}
 |a_3 - \tau a_2| &\leq |b|(\alpha - 1) \frac{\prod_{i=1}^m (d_i)_2}{\prod_{i=1}^l (a_i)_2} \left[2 - \frac{|c_1|^2}{2} + \frac{|c_1|^2}{2} \right. \\
 &\quad \times \left. \left| 1 + 2b(\alpha - 1) - 2\tau b(\alpha - 1) \prod_{i=1}^l \frac{a_i + 1}{a_i} \prod_{i=1}^m \frac{d_i}{d_i + 1} \right| \right] \\
 &= (\alpha - 1)|b| \frac{\prod_{i=1}^m (d_i)_2}{\prod_{i=1}^l (a_i)_2} \left[2 - \frac{|c_1|^2}{2} \right. \\
 &\quad \times \left. \left(\left| 1 + 2b(\alpha - 1) - 2\tau b(\alpha - 1) \prod_{i=1}^l \frac{a_i + 1}{a_i} \prod_{i=1}^m \frac{d_i}{d_i + 1} \right| - 1 \right) \right] \\
 &\leq 2|b|(\alpha - 1) \frac{\prod_{i=1}^m (d_i)_2}{\prod_{i=1}^l (a_i)_2} \max \{1, |1 + 2b(\alpha - 1) - 2\tau b(\alpha - 1) \\
 &\quad \times \prod_{i=1}^l \frac{a_i + 1}{a_i} \prod_{i=1}^m \frac{d_i}{d_i + 1}| \}.
 \end{aligned} \tag{۵۴.۲}$$

در قضیه فوق در حالت اول با انتخاب $c_1 = 0$ ، $c_2 = 2$ و تابع متعلق به رده ${}_l S_m(b, \alpha)$ به فرم زیر باشد:

$$\frac{z({}_l I_m f(z))'}{{}_l I_m f(z)} = \frac{1 + (2b - 2\alpha b - 1)z^2}{1 - z^2}$$

و در حالت دوم با انتخاب $c_1 = c_2 = 2$ و تابع به صورت زیر باشد:

$$\frac{z({}_l I_m f(z))'}{{}_l I_m f(z)} = \frac{1 + (2b - 2\alpha b - 1)z}{1 - z}$$

□

نامساوی (۵۴.۲) تبدیل به مساوی می‌شود.

در حالت بعد وقتی که τ و b حقیقی باشند کرانی برای $|a_3 - \tau a_2|$ می‌یابیم.

قضیه ۱۱.۲.۲. اگر $f \in {}_l S_m(b, \alpha)$ و $0 < \alpha < 1$ ، $0 < b < 1$ ، $l, m \in \mathbb{N}$ ، $l \leq m + 1$ آنگاه برای $\tau \in \mathbb{R}$ داریم:

$$|a_{\tau} - \tau a_{\tau}^{\vee}| \leq \begin{cases} \tau b(1 - \alpha) \frac{\prod_{i=1}^m (d_i)^{\tau}}{\prod_{i=1}^l (a_i)^{\tau}} [1 + \tau b(1 - \alpha) - \frac{\tau \tau b(1 - \alpha)}{\sigma}]; & \text{اگر } \tau < \sigma \\ \tau b(1 - \alpha) \frac{\prod_{i=1}^m (d_i)^{\tau}}{\prod_{i=1}^l (a_i)^{\tau}}; & \text{اگر } \sigma < \tau < \frac{1 + \tau b(1 - \alpha)}{\tau b(1 - \alpha)} \sigma, \\ \tau b(1 - \alpha) \frac{\prod_{i=1}^m (d_i)^{\tau}}{\prod_{i=1}^l (a_i)^{\tau}} [\frac{\tau \tau b(1 - \alpha)}{\sigma} - \tau b(1 - \alpha) - 1]; & \text{اگر } \tau > \frac{1 + \tau b(1 - \alpha)}{\tau b(1 - \alpha)} \sigma \end{cases}$$

به طوری که:

$$\sigma = \prod_{i=1}^l \frac{a_i}{a_i + 1} \prod_{i=1}^m \frac{d_i + 1}{d_i}$$

برای هر τ یک تابع متعلق به ${}_l S_m(b, \alpha)$ وجود دارد به طوری که برابری بالا را حفظ می کند.

برهان. ابتدا فرض می کنیم:

$$\tau \leq \prod_{i=1}^l \frac{a_i}{a_i + 1} \prod_{i=1}^m \frac{d_i + 1}{d_i} \leq \frac{1 + \tau b(1 - \alpha)}{\tau b(1 - \alpha)} \prod_{i=1}^l \frac{a_i}{a_i + 1} \prod_{i=1}^m \frac{d_i + 1}{d_i}.$$

در این حالت طبق (۵۴.۲) و لم ۶.۲.۲ داریم:

$$\begin{aligned} |a_{\tau} - \tau a_{\tau}^{\vee}| &\leq b(1 - \alpha) \frac{\prod_{i=1}^m (d_i)^{\tau}}{\prod_{i=1}^l (a_i)^{\tau}} \left[\tau - \frac{|c_1|^{\tau}}{\tau} + \frac{|c_1|^{\tau}}{\tau} (1 + \tau b(1 - \alpha)) \right. \\ &\quad \left. - \tau \tau b(1 - \alpha) \prod_{i=1}^l \frac{a_i + 1}{a_i} \prod_{i=1}^m \frac{d_i}{d_i + 1} \right] \\ &\leq \tau b(1 - \alpha) \frac{\prod_{i=1}^m (d_i)^{\tau}}{\prod_{i=1}^l (a_i)^{\tau}} \left[1 + \tau b(1 - \alpha) - \tau \tau b(1 - \alpha) \prod_{i=1}^l \frac{a_i + 1}{a_i} \prod_{i=1}^m \frac{d_i}{d_i + 1} \right]. \end{aligned}$$

حال فرض کنیم:

$$\prod_{i=1}^l \frac{a_i}{a_i + 1} \prod_{i=1}^m \frac{d_i + 1}{d_i} \leq \tau \leq \frac{1 + \tau b(1 - \alpha)}{\tau b(1 - \alpha)} \prod_{i=1}^l \frac{a_i}{a_i + 1} \prod_{i=1}^m \frac{d_i + 1}{d_i}.$$

لذا طبق محاسبات بالا داریم:

$$|a_{\tau} - \tau a_{\tau}^{\vee}| \leq \tau b(1 - \alpha) \frac{\prod_{i=1}^m (d_i)^{\tau}}{\prod_{i=1}^l (a_i)^{\tau}}.$$

سرانجام اگر:

$$\tau > \frac{1 + 2b(1 - \alpha)}{2b(1 - \alpha)} \prod_{i=1}^l \frac{a_i}{a_i + 1} \prod_{i=1}^m \frac{d_i + 1}{d_i}.$$

لذا به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} |a_3 - \tau a_3^*| &\leq b(1 - \alpha) \frac{\prod_{i=1}^m (d_i)^2}{\prod_{i=1}^l (a_i)^2} \left[2 - \frac{|c_1|^2}{2} + \frac{|c_1|^2}{2} \left(2\tau b(1 - \alpha) \prod_{i=1}^l \frac{a_i + 1}{a_i} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \prod_{i=1}^m \frac{d_i}{d_i + 1} - 2b(1 - \alpha) - 1 \right) \right] \\ &= b(1 - \alpha) \frac{\prod_{i=1}^m (d_i)^2}{\prod_{i=1}^l (a_i)^2} \left[2 + \frac{|c_1|^2}{2} \left(2\tau b(1 - \alpha) \prod_{i=1}^l \frac{a_i + 1}{a_i} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \prod_{i=1}^m \frac{d_i}{d_i + 1} - 2b(1 - \alpha) - 2 \right) \right] \\ &= 2b(1 - \alpha) \frac{\prod_{i=1}^m (d_i)^2}{\prod_{i=1}^l (a_i)^2} \left[2\tau b(1 - \alpha) \prod_{i=1}^l \frac{a_i + 1}{a_i} \prod_{i=1}^m \frac{d_i}{d_i + 1} - 2b(1 - \alpha) - 1 \right]. \end{aligned}$$

تساوی حاصل برای سه حالت آخر به ترتیب با انتخاب $c_1 = 0, c_2 = 2$ و $c_1 = c_2 = 2$ به دست می‌آید. بنابراین اثبات کامل است. $\square$

قضیه ۱۲.۲.۲. اگر $f \in {}_l C_m(b, \alpha)$ و $0 \leq \alpha < 1$ و $b \in \mathbb{C} - \{0\}, l, m \in \mathbb{N}_0$ و $l \leq m + 1$ آنگاه برای $\tau \in \mathbb{C}$ داریم:

$$\begin{aligned} |a_3 - \tau a_3^*| &\leq \frac{2|b|(1 - \alpha)}{3} \frac{\prod_{i=1}^m (d_i)^2}{\prod_{i=1}^l (a_i)^2} \\ &\quad \times \max \left\{ 1, \left| 1 + 2b(1 - \alpha) - \frac{3}{2}\tau b(1 - \alpha) \prod_{i=1}^l \frac{a_i + 1}{a_i} \prod_{i=1}^m \frac{d_i}{d_i + 1} \right| \right\}. \end{aligned}$$

برای هر τ یک تابع متعلق به ${}_l C_m(b, \alpha)$ وجود دارد به طوری که برابری بالا را حفظ می‌کند.

$\square$

برهان. مشابه برهان قضیه ۱۰.۲.۲ می‌باشد.

قضیه ۱۳.۲.۲. اگر $f \in {}_l C_m(b, \alpha)$ و $0 < \alpha < 1$ و $b > 0$ ، $l, m \in \mathbb{N}_0$ ، $l \leq m + 1$ آنگاه برای $\tau \in \mathbb{R}$ داریم:

$$|a_3 - \tau a_2| \leq \begin{cases} \frac{2b(1-\alpha)}{3} \frac{\prod_{i=1}^m (d_i)}{\prod_{i=1}^l (a_i)} \left[1 + 2b(1-\alpha) - \frac{3\tau b(1-\sigma)}{2\sigma} \right] \\ \text{اگر } \tau < \frac{4}{3}\sigma, \\ \frac{2b(1-\alpha)}{3} \frac{\prod_{i=1}^m (d_i)}{\prod_{i=1}^l (a_i)} \\ \text{اگر } \frac{4}{3}\sigma < \tau < \frac{2+4b(1-\alpha)}{3b(1-\alpha)}\sigma, \\ \frac{2b(1-\alpha)}{3} \frac{\prod_{i=1}^m (d_i)}{\prod_{i=1}^l (a_i)} \left[\frac{3\tau b(1-\sigma)}{2\sigma} - 2b(1-\alpha) - 1 \right] \\ \text{اگر } \tau > \frac{2+4b(1-\alpha)}{3b(1-\alpha)}\sigma \end{cases}$$

که

$$\sigma = \prod_{i=1}^l \frac{a_i}{a_i + 1} \prod_{i=1}^m \frac{d_i + 1}{d_i}.$$

برای هر τ یک تابع متعلق به ${}_l S_m(b, \alpha)$ وجود دارد به طوری که برابری بالا را حفظ می‌کند.

□

برهان. مشابه برهان قضیه ۱۱.۲.۲ است.

۳.۲ عملگر کارلسون-شفر

کارلسون و شفر عملگر خطی $L(a, c) : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ تعریف شده به وسیله

$$L(a, c) = \phi(a, c; z) * f(z)$$

معرفی کرده‌اند [۶]. نماد $*$ پیچشی از دو تابع در $\mathcal{A}$ و $\phi(a, c; z)$ است، به طوری که تابع $\phi(a, c; z)$ به صورت زیر می‌باشد:

$$\phi(a, c; z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(a)_{n-1}}{(c)_{n-1}} z^n, z \in \mathbb{U}.$$

به‌طوری‌که a و c پارامترهای مختلط غیر صفر و $a, c \neq -1, -2, -3, \dots$ ، هم‌چنین $(\lambda)_n$ به‌صورت زیر می‌باشد:

$$(\lambda)_n = \frac{\Gamma(\lambda + n)}{\Gamma(\lambda)} = \begin{cases} 1 & \text{اگر } n = 0 \\ \lambda(\lambda + 1) \dots (\lambda + n - 1), & \text{اگر } n \in \{1, 2, 3, \dots\} \end{cases}$$

تعریف ۱.۳.۲. [۱۹] مشتق تعمیم یافته راسچوی^۴ را با نماد $D^\delta f(z)$ نمایش می‌دهیم به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$D^\delta f(z) = \frac{z}{(1-z)^{\delta+1}} * f(z), \quad \delta > -1$$

داریم:

$$L(a, a)f(z) = f(z),$$

$$L(2, 1)f(z) = zf'(z)$$

و

$$L(\delta + 1, 1)f(z) = D^\delta f(z)$$

عملگر $L(z, c; z)$ در $\mathbb{U}$ تحلیلی و نقش مهمی در نظریه توابع هندسی ایفا می‌کند برای مثال [۱۲] ، [۱۸] و [۱۱] ببینید.

تعریف ۲.۳.۲. عملگر دیفرانسیل چندگانه خطی را با نماد $D^m(\lambda, \varphi)$ نمایش می‌دهیم به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$D^0(\lambda, \varphi)f(z) = f(z),$$

$$D^1(\lambda, \varphi)f(z) = D(\lambda, \varphi)f(z)$$

$$= \lambda \varphi z^2 (f(z))'' + (\lambda - \varphi) z (f(z))' + (1 - \lambda + \varphi) f(z),$$

$$D^2(\lambda, \varphi)f(z) = D(\lambda, \varphi)(D^1(\lambda, \varphi)f(z)),$$

$\vdots$

$$D^m(\lambda, \varphi)f(z) = D(\lambda, \varphi)(D^{m-1}(\lambda, \varphi)f(z)),$$

که $m \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ و $\lambda \geq \varphi \geq 0$.

لذا می‌توان نوشت:

$$D^m(\lambda, \varphi)f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} [1 + (\lambda \varphi n + \lambda - \varphi)(n-1)]^m a_n z^n \quad (55.2)$$

^۴Ruschewyh derivative

تعریف ۳.۳.۲. عملگر خطی تعمیم یافته $L(m, \lambda, \varphi; a, c) : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$L(m, \lambda, \varphi; a, c)f(z) = \phi(a, c; z) * D^m(\lambda, \varphi)f(z)$$

$$= z + \sum_{n=2}^{\infty} \Phi_n^m(\lambda, \varphi) \frac{(a)_{n-1}}{(c)_{n-1}} a_n z^n$$

به طوری که:

$$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}, \lambda \geq \varphi \geq 0, \Phi_n^m(\lambda, \varphi) = [1 + (\lambda\varphi n + \lambda - \varphi)(n-1)]^m$$

$$a, c \neq -1, -2, -3, \dots$$

بعضی موارد خاص توجه داشته باشیم:

$$L(0, \lambda, \varphi; a, c)f(z) \text{ عملگر خطی کارلسون-شفر است. [۶]}$$

$$L(0, \lambda, \varphi; \delta+1, 1)f(z) \text{ که } \delta \in \mathbb{N}_0 \text{ عملگر مشتق راسچوی است. [۱۹]}$$

$$L(m, \lambda, \varphi; 1, 1)f(z), \lambda \geq \varphi \geq 0 \text{ که } m \in \mathbb{N}_0 \text{ تعمیم یافته عملگر رادوکانو- ارهان^۵ است. [۸]}$$

$$L(m, \lambda, 0; 1, 1)f(z) \text{ که } m \in \mathbb{N}_0 \text{ عملگر خطی ال-ابودی^۶ است. [۱]}$$

$$L(m, 1, 0; 1, 1)f(z) \text{ که } m \in \mathbb{N}_0 \text{ عملگر مشتق سالاکان^۷ است. [۲۰]}$$

۱.۳.۲ رده $Q(m, \lambda, \varphi, \beta; a, c)$

با استفاده از عملگر دیفرانسیل خطی تعمیم یافته $L(m, \lambda, \varphi; a, c)$ یک زیر رده جدید از توابع تحلیلی که با نماد $Q(m, \lambda, \varphi, \beta; a, c)$ نمایش می دهیم تعریف می کنیم.

تعریف ۴.۳.۲. فرض کنید a و c پارامترهای مختلط غیر صفر و $a, c \neq -1, -2, -3, \dots$ ، $\lambda \geq \varphi \geq 0$ و $m \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ باشد، گوییم تابع تحلیلی f داده شده به فرم (۱.۲) متعلق به رده $Q(m, \lambda, \varphi, \beta; a, c)$ است هرگاه:

$$\left| \arg \left(\frac{z(L(m, \lambda, \varphi; a, c)f(z))'}{L(m, \lambda, \varphi; a, c)f(z)} \right) \right| < \frac{\pi}{2} \beta \quad (z \in \mathbb{U}, 0 < \beta \leq 1). \quad (۵۶.۲)$$

^۵Raducanu-Orhan

^۶Al-Oboudi

^۷Salagean

این رده شامل انواعی از زیر رده‌های شناخته شده در $\mathcal{A}$ است. به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۵.۳.۲.

$$Q(\circ, \lambda, \varphi, \beta; a, a) \equiv \mathcal{S}_\lambda^*(\beta) \\ = \left\{ z \in \mathcal{A} : \left| \arg \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right) \right| < \frac{\pi}{\varphi} \beta, z \in U \right\}; [\text{۳}]$$

$$Q(\circ, \lambda, \varphi, \beta; \mathfrak{A}, \mathfrak{A}) \equiv \mathcal{K}_\lambda(\beta) \\ = \left\{ f \in \mathcal{A} : \left| \arg \left(\mathfrak{A} + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) \right| < \frac{\pi}{\varphi} \beta, z \in U \right\}; [\text{۳}]$$

$$Q(\circ, \lambda, \varphi, \beta; \delta + \mathfrak{A}, \mathfrak{A}) \equiv \mathcal{S}_\lambda^*(\beta) \\ = \left\{ f \in \mathcal{A} : \left| \arg \left(\frac{z(D^\delta f(z))'}{D^\delta f(z)} \right) \right| < \frac{\pi}{\varphi} \beta, z \in U \right\}, \delta \geq \circ; [\text{۷}]$$

لم ۶.۳.۲. فرض کنید a و c پارامترهای مختلط غیر صفر و $a, c \neq -\mathfrak{A}, -\mathfrak{B}, -\mathfrak{C}, \dots$ ، $\lambda \geq \varphi \geq \circ$ و $m \in \mathbb{N}_\circ = \mathbb{N} \cup \{\circ\}$ باشد. اگر $f \in Q(m, \lambda, \varphi, \beta; a, c)$ داده شده به فرم (۱.۲) باشد، آنگاه:

$$|a_{\mathfrak{A}}| \leq \frac{\mathfrak{A}\beta|c|}{\phi_\varphi^m(\lambda, \varphi)|a|}, \\ |a_{\mathfrak{B}}| \leq \begin{cases} \frac{\beta|c||c + \mathfrak{A}|}{\phi_\varphi^m(\lambda, \varphi)|a||a + \mathfrak{A}|}, & \text{اگر } \beta \leq \frac{1}{\mathfrak{A}} \\ \frac{\mathfrak{A}\beta^2|c||c + \mathfrak{A}|}{\phi_\varphi^m(\lambda, \varphi)|a||a + \mathfrak{A}|}, & \text{اگر } \beta \geq \frac{1}{\mathfrak{A}}. \end{cases}$$

برهان. تعریف می‌کنیم:

$$F(z) := L(m, \lambda, \varphi; a, c)f(z) := z + A_{\mathfrak{A}}z^{\mathfrak{A}} + A_{\mathfrak{B}}z^{\mathfrak{B}} + \dots$$

از آنجایی که:

$$\frac{zF'(z)}{F(z)} = p^\beta(z), p \in \mathcal{P}$$

بنابراین داریم:

$$\frac{z(z + A_{\mathfrak{A}}z^{\mathfrak{A}} + A_{\mathfrak{B}}z^{\mathfrak{B}} + \dots)}{z + A_{\mathfrak{A}}z^{\mathfrak{A}} + A_{\mathfrak{B}}z^{\mathfrak{B}} + \dots} = (\mathfrak{A} + c_{\mathfrak{A}}z + c_{\mathfrak{B}}z^{\mathfrak{A}} + \dots)^\beta,$$

لذا:

$$\begin{aligned} z + {}_2A_2 z^2 + {}_3A_3 z^3 + \dots &= z + (\beta c_1 + A_2) z^2 \\ &+ (\beta c_2 + \frac{\beta(\beta-1)c_1^2}{2} + \beta c_1 A_2 + A_3) z^3 + \dots \end{aligned}$$

با معادل قرار دادن ضرایب z^2 و z^3 داریم:

$$A_2 = \beta c_1, \quad (57.2)$$

از آنجایی که:

$$A_3 = \frac{\beta}{2}(c_2 - \frac{c_1^2}{2}) + \frac{3}{4}\beta^2 c_1^2. \quad (58.2)$$

$$\begin{aligned} F(z) = \phi(a, c; z) * D^m(\lambda, \varphi) f(z) &= z + \sum_{n=2}^{\infty} \Phi_n^m(\lambda, \varphi) \frac{(a)_{n-1}}{(c)_{n-1}} a_n z^n \\ &= z + \sum_{n=2}^{\infty} \Phi_n^m(\lambda, \varphi) \frac{\Gamma(a+n-1)\Gamma(c)}{\Gamma(c+n-1)\Gamma(a)} a_n z^n \end{aligned} \quad (59.2)$$

بنابراین داریم:

$$\beta c_1 = \Phi_2^m(\lambda, \varphi) \frac{\Gamma(a+1)\Gamma(c)}{\Gamma(c+1)\Gamma(a)} a_2.$$

لذا حاصل برابر است با:

$$a_2 = \frac{\beta c c_1}{a \Phi_2^m(\lambda, \varphi)}. \quad (60.2)$$

طبق [لم ۶.۲.۲](#) داریم:

$$|a_2| \leq \frac{2\beta|c|}{\phi_2^m(\lambda, \varphi)|a|}$$

با مقایسه ضرایب z^2 در [\(۵۹.۲\)](#) داریم:

$$A_3 = \Phi_3^m(\lambda, \varphi) \frac{\Gamma(a+2)\Gamma(c)}{\Gamma(c+2)\Gamma(a)} a_3 = \Phi_3^m(\lambda, \varphi) \frac{a(a+1)}{c(c+1)} a_3.$$

با استفاده از [\(۵۸.۲\)](#) به دست می آوریم:

$$a_3 = \frac{c(c+1)}{\Phi_3^m(\lambda, \varphi)a(a+1)} \left(\frac{\beta}{2}(c_2 - \frac{c_1^2}{2}) + \frac{3}{4}\beta^2 c_1^2 \right) \quad (61.2)$$

بنابراین طبق [لم ۸.۲.۲](#) داریم:

$$\frac{\beta|c||c+1|}{\Phi_3^m(\lambda, \varphi)|a||a+1|} \{4 - |c_1|^2 + 3\beta|c_1|^2\}.$$

□

قضیه ۷.۳.۲. فرض کنید a و c پارامترهای مختلط غیر صفر و $a, c \neq -1, -2, -3, \dots$ ، $\lambda \geq \varphi \geq 0$ و $m \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ باشد. اگر $f \in Q(m, \lambda, \varphi, \beta; a, c)$ و $\beta \in (0, 1]$ و μ یک پارامتر مختلط باشد، آنگاه:

$$|a_3 - \mu a_1^2| \leq \frac{\beta |c| |c+1|}{\phi_3^m(\lambda, \varphi) |a| |a+1|} \times \max \left\{ 1, \frac{\beta v(\phi, \mu; a, c)}{\phi_3^m(\lambda, \varphi) |a| |c+1|} \right\}, \quad (62.2)$$

که:

$$v(\varphi, \mu; a, c) = \Im \phi_3^m(\lambda, \varphi) a(c+1) - \Re \phi_3^m(\lambda, \varphi) \mu(a+1).$$

برهان. طبق (۶۰.۲) و (۶۱.۲) در قضیه قبل داریم:

$$a_3 - \mu a_1^2 = \frac{\beta c(c+1)}{\Im \phi_3^m(\lambda, \varphi) a(a+1)} \left(c_2 - \frac{1}{\Im} c_1^2 \right) \quad (63.2)$$

$$(64.2)$$

$$+ \frac{\beta^2 c [\Im \phi_3^m(\lambda, \varphi) a(c+1) - \Re \phi_3^m(\lambda, \varphi) \mu(a+1)]}{\Re \phi_3^m(\lambda, \varphi) \phi_3^m(\lambda, \varphi) a^2(a+1)} c_1^2. \quad (65.2)$$

بنابراین:

$$|a_3 - \mu a_1^2| \leq \frac{\beta |c| |c+1|}{\Im \phi_3^m(\lambda, \varphi) |a| |a+1|} \left| c_2 - \frac{1}{\Im} c_1^2 \right| + \frac{\beta^2 |c| |v(\phi, \mu; a, c)|}{\Re \phi_3^m(\lambda, \varphi) \phi_3^m(\lambda, \varphi) |a|^2 |a+1|} |c_1|^2.$$

با استفاده از لم ۸.۲.۲ به دست می‌آوریم:

$$|a_3 - \mu a_1^2| \leq \frac{\beta |c| |c+1|}{\Im \phi_3^m(\lambda, \varphi) |a| |a+1|} + \frac{\beta |c| [\beta |v(\varphi, \mu; a, c)| - \phi_3^m(\lambda, \varphi) |a| |c+1|]}{\Re \phi_3^m(\lambda, \varphi) \phi_3^m(\lambda, \varphi) |a|^2 |a+1|} |c_1|^2. \quad (66.2)$$

فرض کنید $\beta |v(\varphi, \mu; a, c)| \leq \phi_3^m(\lambda, \varphi) |a| |c+1|$. بدون کم شدن از کلیت داریم:

$$|a_3 - \mu a_1^2| \leq \frac{\beta |c| |c+1|}{\phi_3^m(\lambda, \varphi) |a| |a+1|}. \quad (67.2)$$

از طرف دیگر اگر $| \beta | v(\varphi, \mu; a, c) | \geq \phi_{\varphi}^m(\lambda, \varphi) |a|c + 1|$ با استفاده از لم ۸.۲.۲ داریم:

$$\begin{aligned}
 |a_{\varphi} - \mu a_{\varphi}^{\varphi}| &\leq \frac{\beta |c| |c + 1|}{\phi_{\varphi}^m(\lambda, \varphi) |a| |a + 1|} \\
 &+ \frac{\beta |c| [|\beta | v(\varphi, \mu; a, c) | - \phi_{\varphi}^m(\lambda, \varphi) |a|c + 1|]}{\phi_{\varphi}^m(\lambda, \varphi) \phi_{\varphi}^m(\lambda, \varphi) |a|^2 |a + 1|} \\
 &= \frac{\beta |a| |c| |c + 1| \phi_{\varphi}^m(\lambda, \varphi) + \beta^2 |c| |v(\varphi, \mu; a, c)| - \beta |a| |c| |c + 1| \phi_{\varphi}^m(\lambda, \varphi)}{\phi_{\varphi}^m(\lambda, \varphi) \phi_{\varphi}^m(\lambda, \varphi) |a|^2 |a + 1|} \\
 &= \frac{\beta^2 |c| |v(\varphi, \mu; a, c)|}{\phi_{\varphi}^m(\lambda, \varphi) \phi_{\varphi}^m(\lambda, \varphi) |a|^2 |a + 1|}. \quad (۶۸.۲)
 \end{aligned}$$

□

طبق (۶۷.۲) و (۶۸.۲) حکم ثابت می‌شود.

در قضیه فوق به ترتیب با انتخاب تابع در رده $Q(m, \lambda, \varphi, \beta; a, c)$ به صورت زیر:

$$\frac{z(L(m, \lambda, \varphi; a, c)f(z))'}{L(m, \lambda, \varphi; a, c)f(z)} = \left(\frac{1 + z^2}{1 - z^2} \right)^{\beta}, \quad \frac{z(L(m, \lambda, \varphi; a, c)f(z))'}{L(m, \lambda, \varphi; a, c)f(z)} = \left(\frac{1 + z}{1 - z} \right)^{\beta}$$

نامساوی (۶۷.۲) و (۶۸.۲) تبدیل به مساوی می‌شود.
در نتیجه بعد موردی را بررسی می‌کنیم که μ یک پارامتر حقیقی باشد.

قضیه ۸.۳.۲. فرض کنید $\lambda \geq \varphi \geq 0, \beta \in (0, 1], a, c \in (0, \infty)$ و $m \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$

باشد. اگر $f \in Q(m, \lambda, \varphi, \beta; a, c)$ و μ یک پارامتر حقیقی باشد، آنگاه:

$$|a_3 - \mu a_4| \leq \begin{cases} \frac{\beta^2 c [3a(c+1)\phi_1^m(\lambda, \varphi) - 4\mu c(a+1)\phi_2^m(\lambda, \varphi)]}{\phi_1^m(\lambda, \varphi)\phi_2^m(\lambda, \varphi)a^2(a+1)}, \\ \text{اگر } \mu \leq \frac{(3\beta - 1)a(c+1)\phi_1^m(\lambda, \varphi)}{4\beta c(a+1)\phi_2^m(\lambda, \varphi)} \\ \frac{\beta c(c+1)}{\phi_1^m(\lambda, \varphi)a(a+1)}, \\ \text{اگر } \frac{(3\beta - 1)a(c+1)\phi_1^m(\lambda, \varphi)}{4\beta c(a+1)\phi_2^m(\lambda, \varphi)} \leq \mu \leq \frac{(3\beta + 1)a(c+1)\phi_1^m(\lambda, \varphi)}{4\beta c(a+1)\phi_2^m(\lambda, \varphi)} \\ \frac{\beta^2 c [4\mu c(a+1)\phi_2^m(\lambda, \varphi) - 3a(c+1)\phi_1^m(\lambda, \varphi)]}{\phi_1^m(\lambda, \varphi)\phi_2^m(\lambda, \varphi)a^2(a+1)}, \\ \text{اگر } \mu \geq \frac{(3\beta + 1)a(c+1)\phi_1^m(\lambda, \varphi)}{4\beta c(a+1)\phi_2^m(\lambda, \varphi)}. \end{cases}$$

برهان. طبق (۶۶.۲) دو حالت را در نظر می‌گیریم:

حالت اول: فرض کنید $\mu \leq \frac{3\phi_1^m(\lambda, \varphi)a(c+1)}{4\phi_2^m(\lambda, \varphi)c(a+1)}$.
پس طبق (۶۶.۲) داریم:

$$|a_3 - \mu a_4| \leq \frac{\beta c(c+1)}{\phi_1^m(\lambda, \varphi)a(a+1)} + \frac{\beta c[(3\beta - 1)a(c+1)\phi_1^m(\lambda, \varphi) - 4\beta \mu c(a+1)\phi_2^m(\lambda, \varphi)]}{4\phi_1^m(\lambda, \varphi)\phi_2^m(\lambda, \varphi)a^2(a+1)} |c_1| \quad (۶۹.۲)$$

از طرفی چون $|c_1| \leq 2$ لذا داریم:

$$|a_3 - \mu a_4| \leq \frac{\beta^2 c [3a(c+1)\phi_1^m(\lambda, \varphi) - 4\mu c(a+1)\phi_2^m(\lambda, \varphi)]}{\phi_1^m(\lambda, \varphi)\phi_2^m(\lambda, \varphi)a^2(a+1)}$$

ثابت شده که:

$$\mu \leq \frac{(3\beta - 1)a(c+1)\phi_1^m(\lambda, \varphi)}{4\beta c(a+1)\phi_2^m(\lambda, \varphi)}.$$

از طرف دیگر اگر:

$$\mu \geq \frac{(\beta - 1)a(c + 1)\phi_{\beta}^m(\lambda, \varphi)}{\beta c(a + 1)\phi_{\beta}^m(\lambda, \varphi)}$$

پس نامساوی (۶۹.۲) تبدیل می شود به:

$$|a_{\beta} - \mu a_{\beta}^m| \leq \frac{\beta c(c + 1)}{\phi_{\beta}^m(\lambda, \varphi)a(a + 1)}$$

$$- \frac{\beta c[\beta \mu \beta c(a + 1)\phi_{\beta}^m(\lambda, \varphi) - (\beta - 1)a(c + 1)\phi_{\beta}^m(\lambda, \varphi)]}{\beta \phi_{\beta}^m(\lambda, \varphi)\phi_{\beta}^m(\lambda, \varphi)a^2(a + 1)}|c_1|^2$$

$$\leq \frac{\beta c(c + 1)}{\phi_{\beta}^m(\lambda, \varphi)a(a + 1)}.$$

حالت دوم: فرض کنیم $\mu \geq \frac{\beta \phi_{\beta}^m(\lambda, \varphi)a(c + 1)}{\beta \phi_{\beta}^m(\lambda, \varphi)c(a + 1)}$ در این حالت توجه داشته باشیم که:

$$v(\phi, \mu; a, c) = \beta \phi_{\beta}^m(\lambda, \varphi)\mu c(a + 1) - \beta \phi_{\beta}^m(\lambda, \varphi)a(c + 1)$$

نامساوی (۶۶.۲) تبدیل می شود به:

$$|a_{\beta} - \mu a_{\beta}^m| \leq \frac{\beta c(c + 1)}{\phi_{\beta}^m(\lambda, \varphi)a(a + 1)}$$

$$+ \frac{\beta c[\beta \mu \beta c(a + 1)\phi_{\beta}^m(\lambda, \varphi) - (\beta + 1)a(c + 1)\phi_{\beta}^m(\lambda, \varphi)]}{\beta \phi_{\beta}^m(\lambda, \varphi)\phi_{\beta}^m(\lambda, \varphi)a^2(a + 1)}|c_1|^2. \quad (70.2)$$

از طرفی چون $|c_1| \leq 2$ داریم:

$$|a_{\beta} - \mu a_{\beta}^m| \leq \frac{\beta^2 c[\beta \mu c(a + 1)\phi_{\beta}^m(\lambda, \varphi) - \beta a(c + 1)\phi_{\beta}^m(\lambda, \varphi)]}{\phi_{\beta}^m(\lambda, \varphi)\phi_{\beta}^m(\lambda, \varphi)a^2(a + 1)}$$

در این صورت داریم:

$$\mu \geq \frac{(\beta + 1)a(c + 1)\phi_{\beta}^m(\lambda, \varphi)}{\beta c(a + 1)\phi_{\beta}^m(\lambda, \varphi)}$$

از طرف دیگر اگر:

$$\mu \leq \frac{(\beta + 1)a(c + 1)\phi_{\beta}^m(\lambda, \varphi)}{\beta c(a + 1)\phi_{\beta}^m(\lambda, \varphi)}$$

سپس حاصل (۷۰.۲) برابر است با:

$$\begin{aligned} |a_3 - \mu a_2| &\leq \frac{\beta c(c+1)}{\phi_3^m(\lambda, \varphi)a(a+1)} \\ &\quad - \frac{\beta c[(3\beta+1)a(c+1)\phi_3^m(\lambda, \varphi) - 4\mu\beta c(a+1)\phi_3^m(\lambda, \varphi)]}{4\phi_3^m(\lambda, \varphi)\phi_3^m(\lambda, \varphi)a^2(a+1)} |c_1|^2 \\ &\leq \frac{\beta c(c+1)}{\phi_3^m(\lambda, \varphi)a(a+1)}. \end{aligned}$$

سرانجام به دست می‌آوریم:

$$\frac{(3\beta-1)a(c+1)\phi_3^m(\lambda, \varphi)}{4\beta c(a+1)\phi_3^m(\lambda, \varphi)} \leq \mu \leq \frac{3a(c+1)\phi_3^m(\lambda, \varphi)}{4c(a+1)\phi_3^m(\lambda, \varphi)} \leq \frac{(3\beta+1)a(c+1)\phi_3^m(\lambda, \varphi)}{4\beta c(a+1)\phi_3^m(\lambda, \varphi)}.$$

□

نتیجه ۹.۳.۲. فرض کنید $\circ, a, c \in (\circ, \infty)$, $\lambda \geq \varphi \geq \circ$, $m \in \mathbb{N}_\circ = \mathbb{N} \cup \{\circ\}$ و

$$\circ < \beta \leq \frac{3a(c+1)\phi_3^m(\lambda, \varphi)}{9a(c+1)\phi_3^m(\lambda, \varphi) - 8c(a+1)\phi_3^m(\lambda, \varphi)}.$$

اگر $f \in Q(m, \lambda, \phi, \beta; a, c)$ و f به فرم (۱.۲) باشد، آنگاه:

$$|a_3| - |a_2| \leq \frac{\beta c(c+1)}{\phi_3^m(\lambda, \varphi)a(a+1)}.$$

برهان. از آنجایی که:

$$\frac{(3\beta-1)a(c+1)\phi_3^m(\lambda, \varphi)}{4\beta c(a+1)\phi_3^m(\lambda, \varphi)} \leq \frac{2}{3}$$

برای

$$\beta \leq \frac{3a(c+1)\phi_3^m(\lambda, \varphi)}{9a(c+1)\phi_3^m(\lambda, \varphi) - 8c(a+1)\phi_3^m(\lambda, \varphi)}$$

و

$$|a_3| - |a_2| \leq \left| a_3 - \frac{2}{3}a_2 \right| + \frac{2}{3}|a_2|^2 - |a_2|.$$

طبق قضیه ۸.۳.۲ داریم:

$$|a_3| - |a_2| \leq \frac{\beta c(c+1)}{\phi_3^m(\lambda, \varphi)a(a+1)} + \frac{2}{3}|a_2|^2 - |a_2|.$$

اگر $|a_2| := x \in [0, 2\beta c/a]$ می‌توان نوشت:

$$|a_3| - |a_2| \leq \frac{\beta c(c+1)}{\phi_3^m(\lambda, \varphi)a(a+1)} + \frac{2}{3}x^2 - x := \Omega(x)$$

□

از این رو $\Omega(x)$ در ماکسیم مقدار $x = 0$ به دست می‌آید.

فصل ۳

بررسی عملگر دیفرانسیل سالانگان بر روی زیررده‌هایی از توابع دو تک ارز

مقدمه

در این فصل با استفاده از عملگر سالانگان^۱ و عملگر دیفرانسیل و رده‌های مربوط به این عملگرها، به دنبال یافتن کرانی برای ضرایب $|a_2|$ و $|a_3|$ می‌باشیم.

۱.۳ عملگر سالانگان

تعریف ۱.۱.۳. تابع $f \in \mathcal{A}$ داده شده به فرم

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \quad (1.3)$$

در رده $\mathcal{S}_{\Sigma}^*(\alpha)$ (توابع دو-ستاره‌گون از مرتبه α) است، هرگاه:

$$f \in \Sigma, \quad \left| \arg \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right) \right| < \frac{\alpha\pi}{2}, \quad (z \in \mathbb{U}; 0 < \alpha \leq 1)$$

و

$$\left| \arg \left(\frac{wg'(w)}{g(w)} \right) \right| < \frac{\alpha\pi}{2}, \quad (w \in \mathbb{U}; 0 < \alpha \leq 1)$$

که تابع g به صورت زیر می‌باشد:

$$g(w) = w - a_2 w^2 + (2a_2^2 - a_3)w^3 - (5a_2^3 - 5a_2 a_3 + a_4)w^4 + \dots \quad (2.3)$$

^۱Salagean

تعریف ۲.۱.۳. تابع $f \in \mathcal{A}$ در رده $\mathcal{K}_\Sigma(\alpha)$ (توابع دو-محدب از مرتبه α) است، هرگاه:

$$f \in \Sigma, \quad \left| \arg \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) \right| < \frac{\alpha\pi}{2}, \quad (z \in \mathbb{U}; 0 < \alpha \leq 1)$$

و

$$\left| \arg \left(1 + \frac{wg''(w)}{g'(w)} \right) \right| < \frac{\alpha\pi}{2}, \quad (w \in \mathbb{U}; 0 < \alpha \leq 1)$$

در سال ۱۹۸۳ سالگان [۲۰] عملگر دیفرانسیل $\mathcal{D} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ تعریف شده به وسیله زیر را معرفی کرد:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^\circ f(z) &= f(z), \\ \mathcal{D}^1 f(z) &= \mathcal{D}f(z) = zf'(z), \\ \mathcal{D}^k f(z) &= \mathcal{D}(\mathcal{D}^{k-1} f(z)) \\ &= z(\mathcal{D}^{k-1} f(z))', \quad k \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}. \end{aligned}$$

به‌طوری‌که:

$$\mathcal{D}^k f(z) = z = \sum_{n=2}^{\infty} n^k a_n z^n, \quad k \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (3.3)$$

۱.۱.۳ رده $\mathcal{S}_\Sigma^{k,\lambda}(\alpha)$

تعریف ۳.۱.۳. تابع $f \in \mathcal{A}$ داده شده به فرم (۱.۳) در رده $\mathcal{S}_\Sigma^{k,\lambda}(\alpha)$ است، هرگاه:

$$f \in \Sigma, \quad \left| \arg \left(\frac{\mathcal{D}^{k+1} f(z)}{(\lambda - 1)\mathcal{D}^k f(z) + \lambda \mathcal{D}^{k+1} f(z)} \right) \right| < \frac{\alpha\pi}{2}, \quad (z \in \mathbb{U}; 0 < \alpha \leq 1, 0 \leq \lambda < 1) \quad (4.3)$$

و

$$\left| \arg \left(\frac{\mathcal{D}^{k+1} g(w)}{(\lambda - 1)\mathcal{D}^k g(w) + \lambda \mathcal{D}^{k+1} g(w)} \right) \right| < \frac{\alpha\pi}{2}, \quad (w \in \mathbb{U}; 0 < \alpha \leq 1, 0 \leq \lambda < 1) \quad (5.3)$$

که تابع g در (۲.۳) داده شده است.

ملاحظه ۴.۱.۳. اگر در تعریف ۳.۱.۳ قرار دهیم $\lambda = 0$ و $f \in \mathcal{S}_\Sigma^{k,0}(\alpha) = \mathcal{S}_\Sigma^k(\alpha)$ در این صورت داریم:

$$f \in \Sigma, \quad \left| \arg \left(\frac{\mathcal{D}^{k+1} f(z)}{\mathcal{D}^k f(z)} \right) \right| < \frac{\alpha\pi}{2}, \quad (z \in \mathbb{U}; 0 < \alpha \leq 1, 0 \leq \lambda < 1) \quad (6.3)$$

و

$$\left| \arg \left(\frac{\mathcal{D}^{k+1} g(w)}{\mathcal{D}^k g(w)} \right) \right| < \frac{\alpha\pi}{2}, \quad (w \in \mathbb{U}; 0 < \alpha \leq 1, 0 \leq \lambda < 1) \quad (7.3)$$

که تابع g در (۲.۳) داده شده است.

همچنین اگر $k = 0$ و $\lambda = 0$ رده $\mathcal{S}_{\Sigma}^{0,0}(\alpha)$ تبدیل به رده $\mathcal{S}_{\Sigma}^*(\alpha)$ و اگر $k = 1$ و $\lambda = 0$ رده $\mathcal{S}_{\Sigma}^{1,0}(\alpha)$ تبدیل به رده $\mathcal{K}_{\Sigma}(\alpha)$ از مرتبه α می شوند...

قضیه ۵.۱.۳. فرض کنید تابع $f(z)$ داده شده به فرم (۱.۳) در رده $\mathcal{S}_{\Sigma}^{k,\lambda}(\alpha)$ باشد، به طوری که $0 < \alpha \leq 1$ و $0 \leq \lambda < 1$ ، آنگاه:

$$|a_2| \leq \frac{2\alpha}{\sqrt{4\alpha(1-\lambda)3^k + [2\alpha(\lambda^2 - 1) - (\alpha - 1)(1-\lambda)^2]2^{2k}}} \quad (۸.۳)$$

و

$$|a_3| \leq \frac{\alpha}{3^k(1-\lambda)} + \frac{4\alpha^2}{2^{2k}(1-\lambda)^2}. \quad (۹.۳)$$

برهان. طبق (۴.۳) و (۵.۳) داریم:

$$\frac{\mathcal{D}^{k+1}f(z)}{(\mathcal{D}^k f(z) + \lambda \mathcal{D}^{k+1}f(z))} = [p(z)]^\alpha \quad (۱۰.۳)$$

و

$$\frac{\mathcal{D}^{k+1}g(w)}{(\mathcal{D}^k g(w) + \lambda \mathcal{D}^{k+1}g(w))} = [q(w)]^\alpha \quad (۱۱.۳)$$

که $p(z)$ و $q(w)$ در $\mathcal{P}$ به صورت زیر می باشند:

$$p(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + \dots \quad (۱۲.۳)$$

و

$$q(w) = 1 + q_1 w + q_2 w^2 + q_3 w^3 + \dots \quad (۱۳.۳)$$

حال با معادل قرار دادن ضرایب در (۱۰.۳) و (۱۱.۳) داریم:

$$2^k(1-\lambda)a_2 = \alpha p_1 \quad (۱۴.۳)$$

$$2^{2k}(\lambda^2 - 1)a_2^2 + 3^k(2 - 2\lambda)a_3 = \frac{1}{2}[\alpha(\alpha - 1)p_1^2 + 2\alpha p_2] \quad (۱۵.۳)$$

$$- 2^k(1-\lambda)a_2 = \alpha q_1 \quad (۱۶.۳)$$

و

$$2(1-\lambda)(2a_2^2 - a_3)3^k + (\lambda^2 - 1)2^{2k}a_2^2 = \frac{1}{2}[\alpha(\alpha - 1)q_1^2 + 2\alpha q_2]. \quad (۱۷.۳)$$

از (۱۴.۳) و (۱۶.۳) داریم:

$$p_1 = -q_1 \quad (۱۸.۳)$$

و

$$2^{2k+1}(1-\lambda)^2 a_2^2 = \alpha^2(p_1^2 + q_1^2). \quad (۱۹.۳)$$

از (۱۵.۳)، (۱۷.۳) و (۱۹.۳) به دست می‌آوریم:

$$a_2^2 = \frac{\alpha^2(p_2 + q_2)}{4\alpha(1-\lambda)3^k + [2\alpha(\lambda^2 - 1) - (\alpha - 1)(1-\lambda)^2]2^{2k}}.$$

طبق لم ۱۳.۱.۳ برای ضرایب p_2 و q_2 داریم:

$$|a_2| \leq \frac{2\alpha}{\sqrt{4\alpha(1-\lambda)3^k + [2\alpha(\lambda^2 - 1) - (\alpha - 1)(1-\lambda)^2]2^{2k}}}$$

حال کرانی برای $|a_3|$ می‌یابیم.

با کم کردن (۱۷.۳) از (۱۵.۳) داریم:

$$3^k(4-4\lambda)a_3 - 3^k(4-4\lambda)a_2^2 = \alpha(p_2 - q_2) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}(p_1^2 - q_1^2). \quad (20.3)$$

از (۱۸.۳)، (۱۹.۳) و (۲۰.۳) نتیجه می‌گیریم که:

$$a_3 = \frac{\alpha(p_2 - q_2)}{3^k(4-4\lambda)} + \frac{\alpha^2(p_1^2 + q_1^2)}{2^{2k+1}(1-\lambda)^2}. \quad (21.3)$$

طبق لم ۱۳.۱.۳ بار دیگر برای ضرایب p_1, p_2, q_1, q_2 داریم:

$$|a_3| \leq \frac{\alpha}{3^k(1-\lambda)} + \frac{4\alpha^2}{2^{2k}(1-\lambda)^2}.$$

□

نتیجه ۶.۱.۳. اگر در قضیه ۱.۲.۳ قرار دهیم $\lambda = 0$ و $f(z)$ داده شده به فرم (۱.۳) در رده $S_\Sigma^k(\alpha)$ باشد، در این صورت داریم:

$$|a_2| \leq \frac{2\alpha}{\sqrt{4\alpha 3^k + (1-3\alpha)2^{2k}}} \quad (22.3)$$

و

$$|a_3| \leq \frac{\alpha}{3^k} + \frac{4\alpha^2}{2^{2k}}. \quad (23.3)$$

۲.۱.۳ رده $\mathcal{M}_\Sigma^{k,\lambda}(\beta)$

تعریف ۷.۱.۳. تابع $f \in \mathcal{A}$ داده شده به فرم (۱.۳) در رده $\mathcal{M}_\Sigma^{k,\lambda}(\beta)$ است، هرگاه:

$$f \in \Sigma, \operatorname{Re} \left(\frac{\mathcal{D}^{k+1}f(z)}{(\lambda-1)\mathcal{D}^k f(z) + \lambda\mathcal{D}^{k+1}f(z)} \right) > \beta, \quad (z \in \mathbb{U}; 0 \leq \beta < 1, 0 \leq \lambda < 1) \quad (24.3)$$

و

$$\operatorname{Re} \left(\frac{\mathcal{D}^{k+1}g(w)}{(\lambda-1)\mathcal{D}^k g(w) + \lambda\mathcal{D}^{k+1}g(w)} \right) > \beta, \quad (w \in \mathbb{U}; 0 \leq \beta < 1, 0 \leq \lambda < 1) \quad (25.3)$$

که تابع g به فرم (۲.۳) داده شده است.

ملاحظه ۸.۱.۳. اگر در تعریف ۷.۱.۳ قرار دهیم $\lambda = 0$ و $f \in \mathcal{M}_{\Sigma}^{k,0}(\beta) = \mathcal{M}_{\Sigma}^k(\beta)$ در این صورت داریم:

$$f \in \Sigma, \quad \operatorname{Re} \left(\frac{\mathcal{D}^{k+1}f(z)}{\mathcal{D}^k f(z)} \right) > \beta, \quad z \in \mathbb{U}; 0 \leq \beta < 1 \quad (26.3)$$

و

$$\operatorname{Re} \left(\frac{\mathcal{D}^{k+1}g(w)}{\mathcal{D}^k g(w)} \right) > \beta, \quad w \in \mathbb{U}; 0 \leq \beta < 1 \quad (27.3)$$

که تابع g به فرم (۲.۳) داده شده است.

همچنین اگر $k = 0$ و $\lambda = 0$ رده $\mathcal{M}_{\Sigma}^{0,0}(\beta)$ تبدیل به رده $\mathcal{S}_{\Sigma}^*(\beta)$ اگر $k = 1$ و $\lambda = 0$ رده $\mathcal{M}_{\Sigma}^{1,0}(\beta)$ تبدیل به رده $\mathcal{K}_{\Sigma}(\beta)$ از مرتبه β می‌شوند.

قضیه ۹.۱.۳. فرض کنید $f(z)$ داده شده به فرم (۱.۳) در رده $\mathcal{M}_{\Sigma}^{k,\lambda}(\beta)$ باشد به طوری که $0 \leq \beta < 1$ و $0 \leq \lambda < 1$ ، آنگاه:

$$|a_2| \leq \sqrt{\frac{2(1-\beta)}{2^{2k}(\lambda^2-1) + 2(1-\lambda)3^k}} \quad (28.3)$$

و

$$|a_3| \leq \frac{4(1-\beta)^2}{2^{2k}(1-\lambda)^2} + \frac{(1-\beta)}{3^k(1-\lambda)}. \quad (29.3)$$

برهان. طبق (۲۴.۳) و (۲۵.۳) وجود دارد $p, q \in \mathcal{P}$ به طوری که:

$$\frac{\mathcal{D}^{k+1}f(z)}{(\lambda-1)\mathcal{D}^k f(z) + \lambda\mathcal{D}^{k+1}f(z)} = \beta + (1-\beta)p(z) \quad (30.3)$$

و

$$\frac{\mathcal{D}^{k+1}g(w)}{(\lambda-1)\mathcal{D}^k g(w) + \lambda\mathcal{D}^{k+1}g(w)} = \beta + (1-\beta)q(w) \quad (31.3)$$

که $p(z)$ و $q(w)$ به ترتیب در (۱۲.۳) و (۱۳.۳) داده شده‌اند. حال با معادل قرار دادن ضرایب در (۳۰.۳) و (۳۱.۳) داریم:

$$2^k(1-\lambda)a_2 = (1-\beta)p_1 \quad (32.3)$$

$$2^{2k}(\lambda^2-1)a_2^2 + 3^k(2-2\lambda)a_3 = (1-\beta)p_2 \quad (33.3)$$

$$-2^k(1-\lambda)a_2 = (1-\beta)q_1 \quad (34.3)$$

و

$$2(1-\lambda)(2a_2^2 - a_3)3^k + (\lambda^2-1)2^{2k}a_2^2 = (1-\beta)q_2. \quad (35.3)$$

از (۳۲.۳) و (۳۴.۳) داریم:

$$p_1 = -q_1 \quad (36.3)$$

و

$$2^{2k+1}(1-\lambda)^2a_2^2 = (1-\beta)^2(p_1^2 + q_1^2). \quad (37.3)$$

هم چنین از (۳۳.۳)، (۳۵.۳) و (۳۷.۳) به دست می‌آوریم:

$$a_2^2 = \frac{(1-\beta)(p_2 + q_2)}{2^{2k+1}(\lambda^2 - 1) + 4(1-\lambda)3^k}.$$

طبق لم ۱۳.۱.۳ برای ضرایب p_2 و q_2 داریم:

$$|a_2| \leq \sqrt{\frac{2(1-\beta)}{2^{2k}(\lambda^2 - 1) + 2(1-\lambda)3^k}}$$

حال کرانی برای $|a_3|$ می‌یابیم.

با کم کردن (۳۵.۳) از (۳۳.۳) داریم:

$$3^k(4-4\lambda)a_3 - 3^k(4-4\lambda)a_2^2 = (1-\beta)(p_2 - q_2) \quad (38.3)$$

از (۳۶.۳)، (۳۷.۳) و (۳۸.۳) نتیجه می‌گیریم که:

$$a_3 = \frac{(1-\beta)^2(p_2^2 + q_2^2)}{2^{2k+1}(1-\lambda)^2} + \frac{(1-\beta)(p_2 - q_2)}{3^k(4-4\lambda)}. \quad (39.3)$$

طبق لم ۱۳.۱.۳ برای ضرایب q_2, p_2, p_1, q_1 داریم:

$$|a_3| \leq \frac{4(1-\beta)^2}{2^{2k}(1-\lambda)^2} + \frac{(1-\beta)}{3^k(1-\lambda)}.$$

□

نتیجه ۱۰.۱.۳. در قضیه ۲.۲.۳ قرار دهیم $\lambda = 0$ و تابع $f(z)$ داده شده به فرم (۱.۳) در رده

$\mathcal{M}_{\Sigma}^k(\beta)$ باشد، به طوری که $0 \leq \beta < 1$ ، در این صورت داریم:

$$|a_2| \leq \sqrt{\frac{(1-\beta)}{3^k - 2^{2k-1}}} \quad (40.3)$$

و

$$|a_3| \leq \frac{4(1-\beta)^2}{2^{2k}} + \frac{(1-\beta)}{3^k}. \quad (41.3)$$

تعریف ۱۱.۱.۳. گوئیم تابع تحلیلی f زیر ترتیب^۲ تابع تحلیلی g است و با نماد $f(z) \prec g(z)$

نمایش می‌دهیم، اگر تابع شوارتز w تعریف شده روی دیسک واحد $\mathbb{U}$ با $w(0) = 0$ و $|w(z)| < 1$

موجود باشد به طوری که $f(z) = g(w(z))$.

ما^۳ و میندا^۴ [۱۳] زیر رده‌های مختلفی از توابع ستاره گون و محدب برای هر دو مقدار $\frac{zf'(z)}{f(z)}$

یا $\frac{zf''(z)}{f'(z)}$ به صورت یک تابع زیرترتیب کلی تر تعریف کرده‌اند. برای این منظور آنها تابع تحلیلی

ϕ با قسمت حقیقی مثبت در دیسک واحد $\mathbb{U}$ ، $\phi(0) = 1$ ، $\phi'(0) > 1$ و نگاشتی از $\mathbb{U}$ به یک

^۲Subordinate

^۳Ma

^۴Minda

ناحیه ستاره گون نسبت به ۱ و متناسب با نسبت محور حقیقی در نظر گرفته اند بسط سری آن به فرم زیر است:

$$\phi(z) = 1 + B_1 z + B_2 z^2 + B_3 z^3 + \dots, (B_1 > 0). \quad (42.3)$$

۳.۱.۳ رده $ST_\Sigma(b, \phi)$

تعریف ۱۲.۱.۳. فرض کنید b یک عدد مختلط غیر صفر باشد. گوئیم تابع f داده شده به فرم (۱.۳) متعلق به رده $ST_\Sigma(b, \phi)$ است، هرگاه:

$$f \in \Sigma, \quad 1 + \frac{1}{b} \left(\frac{z(D^m f(z))'}{D^m f(z)} - 1 \right) \prec \phi(z), z \in \mathbb{U} \quad (43.3)$$

و

$$1 + \frac{1}{b} \left(\frac{w(D^m g(w))'}{D^m g(w)} - 1 \right) \prec \phi(w), w \in \mathbb{U} \quad (44.3)$$

که تابع g به فرم (۲.۳) داده شده است.

۴.۱.۳ رده $CV_\Sigma(b, \phi)$

فرض کنید b یک عدد مختلط غیر صفر باشد. گوئیم تابع f داده شده به فرم (۱.۳) متعلق به رده $CV_\Sigma(b, \phi)$ است هرگاه:

$$f \in \Sigma, \quad 1 + \frac{1}{b} \left(\frac{z(D^m f(z))''}{(D^m f(z))'} - 1 \right) \prec \phi(z), z \in \mathbb{U} \quad (45.3)$$

و

$$1 + \frac{1}{b} \left(\frac{w(D^m g(w))''}{(D^m g(w))'} - 1 \right) \prec \phi(w), w \in \mathbb{U}, \quad (46.3)$$

که تابع g به فرم (۲.۳) داده شده است.

تخمین ضرایب

لم ۱۳.۱.۳. اگر $p \in \mathcal{P}$ باشد در این صورت داریم:

$$|c_n| \leq 2 \quad \forall n,$$

که خانواده‌ای از همه توابع تحلیلی p در $\mathbb{U}$ است به طوری که

$$\operatorname{Re}\{p(z)\} > 0,$$

که $p(z) = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots$ برای $z \in \mathbb{U}$.

قضیه ۱۴.۱.۳. فرض کنید تابع $f(z) \in \mathcal{A}$ به فرم (۱.۳) داده شده، اگر $f \in ST_{\Sigma}(b, \phi)$ آنگاه:

$$|a_2| \leq \frac{B_1 \sqrt{B_1} |b|}{\sqrt{|2(\mathfrak{M}^m) - 2^{\mathfrak{M}^m} B_1^2 b + (B_1 - B_2) 2^{\mathfrak{M}^m}|}} \quad (۴۷.۳)$$

و

$$|a_3| \leq \frac{(B_1 + |B_2 - B_1|) |b|}{2(\mathfrak{M}^m) - 2^{\mathfrak{M}^m}}. \quad (۴۸.۳)$$

برهان. از آنجایی که $f \in ST_{\Sigma}(b, \phi)$ ، دو تابع تحلیلی $r, s : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}$ با $r(\circ) = \circ = s(\circ)$ وجود دارند، به طوری که:

$$1 + \frac{1}{b} \left(\frac{z(\mathcal{D}^m f(z))'}{\mathcal{D}^m f(z)} - 1 \right) = \phi(r(z)) \quad (۴۹.۳)$$

و

$$1 + \frac{1}{b} \left(\frac{w(\mathcal{D}^m g(w))'}{\mathcal{D}^m g(w)} - 1 \right) = \phi(s(z)). \quad (۵۰.۳)$$

توابع p و q در $\mathcal{P}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$p(z) = \frac{1 + r(z)}{1 - r(z)} = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + \dots \quad (۵۱.۳)$$

و

$$q(z) = \frac{1 + s(z)}{1 - s(z)} = 1 + q_1 z + q_2 z^2 + \dots \quad (۵۲.۳)$$

یا به طور معادل داریم:

$$\begin{aligned} r(z) = \frac{p(z) - 1}{p(z) + 1} &= \frac{1}{2} \left(p_1 z + \left(p_2 - \frac{p_1^2}{2} \right) z^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(p_3 + \frac{p_1}{2} \left(\frac{p_1^2}{2} - p_2 \right) - \frac{p_1 p_2}{2} \right) z^3 + \dots \right) \end{aligned} \quad (۵۳.۳)$$

و

$$s(z) = \frac{q(z) - 1}{q(z) + 1} = \frac{1}{2} \left(q_1 z + \left(q_2 - \frac{q_1^2}{2} \right) z^2 + \left(q_3 + \frac{q_1}{2} \left(\frac{q_1^2}{2} - q_2 \right) - \frac{q_1 q_2}{2} \right) z^3 + \dots \right). \quad (۵۴.۳)$$

واضح است که p و q در $\mathbb{U}$ تحلیلی و $p(\circ) = 1 = q(\circ)$. هم چنین p و q قسمت حقیقی مثبت در $\mathbb{U}$ دارند از این رو $|p_i| \leq 2$ و $|q_i| \leq 2$. از (۵۱.۳)، (۵۲.۳)، (۵۳.۳) و (۵۴.۳) داریم:

$$1 + \frac{1}{b} \left(\frac{z(\mathcal{D}^m f(z))'}{\mathcal{D}^m f(z)} - 1 \right) = \phi \left(\frac{p(z) - 1}{p(z) + 1} \right) \quad (۵۵.۳)$$

و

$$1 + \frac{1}{b} \left(\frac{w(\mathcal{D}^m g(w))'}{\mathcal{D}^m g(w)} - 1 \right) = \phi \left(\frac{q(w) - 1}{q(w) + 1} \right). \quad (۵۶.۳)$$

با استفاده از (۵۴.۳)، (۵۵.۳)، (۵۶.۳) و (۴۲.۳) به دست می آوریم:

$$\phi\left(\frac{p(z)-1}{p(z)+1}\right) = 1 + \frac{B_1 p_1}{2} z + \left(\frac{B_1}{2} \left(p_2 - \frac{p_1^2}{2}\right) + \frac{1}{4} B_2 p_1^2\right) z^2 + \dots \quad (57.3)$$

و

$$\phi\left(\frac{q(w)-1}{q(w)+1}\right) = 1 + \frac{B_1 q_1}{2} w + \left(\frac{B_1}{2} \left(q_2 - \frac{q_1^2}{2}\right) + \frac{1}{4} B_2 q_1^2\right) w^2 + \dots \quad (58.3)$$

محاسبات نشان می دهد برای $f \in \Sigma$ داده شده به فرم (۱.۳) معکوس آن یعنی $g = f^{-1}$ به فرم (۲.۳) می باشد. لذا از (۵۵.۳)، (۵۶.۳)، (۵۷.۳) و (۵۸.۳) داریم:

$$2^m a_2 = \frac{1}{2} B_1 p_1 b, \quad (59.3)$$

$$2(3^m) a_3 - (2^m) a_2^2 = \frac{1}{2} B_1 b \left(p_2 - \frac{1}{2} p_1^2\right) + \frac{1}{4} b B_2 p_1^2 \quad (60.3)$$

و

$$-2^m a_2 = \frac{1}{2} B_1 q_1 b, \quad (61.3)$$

$$(4(3^m) - (2^m)) a_2^2 - 2(3^m) a_3 = \frac{1}{2} B_1 q_1 \left(q_2 - \frac{1}{2} q_1^2\right) + \frac{1}{4} b B_2 q_1^2. \quad (62.3)$$

از (۵۹.۳) و (۶۱.۳) نتیجه می گیریم که:

$$p_1 = -q_1. \quad (63.3)$$

حال از (۶۰.۳)، (۶۲.۳) و (۶۳.۳) داریم:

$$a_2^2 = \frac{B_1^2 (p_2 + q_2) b}{4((2(3^m) - 2^m) B_1^2 b + 2^m (B_1 - B_2))}. \quad (64.3)$$

از طرفی چون $|p_2| \leq 2$ و $|q_2| \leq 2$ داریم:

$$|a_2| \leq \frac{B_1 \sqrt{B_1} |b|}{\sqrt{|(2(3^m) - 2^m) B_1^2 b + (B_1 - B_2) 2^m|}}$$

حال با کم کردن (۶۰.۳) از (۶۲.۳) داریم:

$$a_3 = \frac{\frac{b B_1}{2} ((4(3^m) - 2^m) p_2 + 2^m q_2) + 3^m p_1^2 (B_2 - B_1) b}{4(2(3^m) - 3^m 2^m)}. \quad (65.3)$$

طبق نامساوی $|p_2| \leq 2$ و $|q_2| \leq 2$ برای توابع با قسمت حقیقی مثبت، تخمین مورد نظر بر روی $|a_3|$ به صورت زیر است:

$$|a_3| \leq \frac{(B_1 + |B_2 - B_1|) |b|}{2(3^m) - 2^m 2^m}. \quad (66.3)$$

□

اگر $\phi(z) = \frac{1 + Az}{1 + Bz}$ و $-1 \leq B < A \leq 1$ - نتیجه زیر را داریم.

نتیجه ۱۵.۱.۳. فرض کنید $f \in \mathcal{ST}_\Sigma(b, \frac{1 + Az}{1 + Bz})$ و $-1 \leq B < A \leq 1$ ، در این صورت داریم:

$$|a_2| \leq \frac{|b|(A - B)}{\sqrt{|(2(\mathfrak{I}^m) - \mathfrak{I}^{2m})(A - B)b + (1 + B)\mathfrak{I}^{2m}|}}$$

و

$$|a_3| \leq \frac{|A - B|(1 + |1 + B|)|b|}{(2(\mathfrak{I}^m) - \mathfrak{I}^{2m})}.$$

اگر در قضیه فوق فرض کنیم $\phi(z) = \left(\frac{1 + z}{1 - z}\right)^\alpha = 1 + 2\alpha z + 2\alpha^2 z^2 + \dots$ و $0 < \alpha \leq 1$ ، نتیجه زیر را داریم.

نتیجه ۱۶.۱.۳. فرض کنید $f \in \mathcal{ST}_\Sigma(b, \alpha)$ و $0 < \alpha \leq 1$ ، در این صورت داریم:

$$|a_2| \leq \frac{|b|2\alpha}{\sqrt{|2\alpha(2(\mathfrak{I}^m) - \mathfrak{I}^{2m})b + (1 - \alpha)\mathfrak{I}^{2m}|}}$$

و

$$|a_3| \leq \frac{(1 + |\alpha - 1|)2\alpha|b|}{(2(\mathfrak{I}^m) - \mathfrak{I}^{2m})}.$$

قضیه ۱۷.۱.۳. فرض کنید تابع $f(z) \in \mathcal{A}$ به فرم (۱.۳) داده شده، اگر $f \in \mathcal{CV}_\Sigma(b, \phi)$ در این صورت داریم:

$$|a_2| \leq \frac{B_1 \sqrt{B_1} |b|}{\sqrt{|2|(\mathfrak{I}^{m+1}) - \mathfrak{I}^{2m+1})B_1^2 b + 2(B_1 - B_2)\mathfrak{I}^{2m}|}} \quad (۶۷.۳)$$

و

$$|a_3| \leq \frac{(B_1 + |B_2 - B_1|)|b|}{2(\mathfrak{I}^{m+1}) - \mathfrak{I}^{2m+1}}. \quad (۶۸.۳)$$

برهان. از آنجایی که $f \in \mathcal{CV}_\Sigma(b, \phi)$ ، دو تابع تحلیلی $r, s : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}$ با $r(\circ) = \circ = s(\circ)$ وجود دارند، به طوری که:

$$1 + \frac{1}{b} \left(\frac{z(\mathcal{D}^m f(z))''}{(\mathcal{D}^m f(z))'} \right) = \phi(r(z)) \quad (۶۹.۳)$$

و

$$1 + \frac{1}{b} \left(\frac{w(\mathcal{D}^m g(w))''}{(\mathcal{D}^m g(w))'} \right) = \phi(s(z)). \quad (۷۰.۳)$$

با استفاده از (۵۱.۳)، (۵۲.۳)، (۵۳.۳)، (۵۷.۳) و (۵۸.۳) به دست می‌آوریم:

$$\mathfrak{I}^{m+1} a_2 = \frac{1}{\mathfrak{I}} B_1 p_1 b, \quad (۷۱.۳)$$

$$6(\mathfrak{I}^m) a_3 - 4(\mathfrak{I}^{2m}) a_2^2 = \frac{1}{\mathfrak{I}} B_1 b \left(p_2 - \frac{1}{\mathfrak{I}} p_1^2 \right) + \frac{1}{\mathfrak{I}} b B_2 p_1^2 \quad (۷۲.۳)$$

و

$$-2^{m+1}a_2 = \frac{1}{2}B_1q_1b, \quad (73.3)$$

$$(12(3^m)a - 4(2^{2m}))a_2 - 6(3^m)a_3 = \frac{1}{2}B_1b\left(q_2 - \frac{1}{2}q_1\right) + \frac{1}{2}bB_2q_1. \quad (74.3)$$

از (۷۱.۳) و (۷۳.۳) نتیجه می گیریم که:

$$p_1 = -q_1. \quad (75.3)$$

حال از (۷۲.۳)، (۷۴.۳) و (۷۵.۳) داریم:

$$a_2 = \frac{B_1^2(p_2 + q_2)b}{8[(3(3^m) - 2(2^{2m}))B_1^2b + 2(B_1 - B_2)2^{2m}]}. \quad (76.3)$$

از طرفی چون $|p_2| \leq 2$ و $|q_2| \leq 2$ لذا داریم:

$$|a_2| \leq \frac{B_1\sqrt{B_1}|b|}{\sqrt{2|(3^{m+1}) - 2^{2m+1})B_1^2b + (B_1 - B_2)2^{2m}|}}$$

حال با کم کردن (۷۲.۳) از (۷۴.۳) داریم:

$$a_3 = \frac{\frac{bB_1}{2}[(12(3^{2m} - 4(2^{2m}))p_2 + 4(2^{2m})q_2) + 3^{m+1}p_1(B_2 - B_1)b]}{24(3^m) - (3^{m+1} - 2^{2m+1})}. \quad (77.3)$$

طبق نامساوی $|p_1| \leq 2$ ، $|p_2| \leq 2$ و $|q_2| \leq 2$ برای توابع با قسمت حقیقی مثبت، تخمین مورد نظر بر روی $|a_3|$ به صورت زیر است:

$$|a_3| \leq \frac{(B_1 + |B_2 - B_1|)|b|}{2(3^{m+1}) - 2^{2m+1}}. \quad (78.3)$$

□

اگر $\phi(z) = \frac{1 + Az}{1 + Bz}$ و $-1 \leq B < A \leq 1$ - نتیجه زیر را داریم.

نتیجه ۱۸.۱.۳. فرض کنید $f \in ST_\Sigma(b, \frac{1 + Az}{1 + Bz})$ و $-1 \leq B < A \leq 1$ باشد، در این صورت داریم:

$$|a_2| \leq \frac{|b|(A - B)}{\sqrt{2|(3^{m+1}) - 2^{2m+1})(A - B)b + 2(1 + B)2^{2m}|}}$$

و

$$|a_3| \leq \frac{|A - B|(1 + |1 + B|)|b|}{2(3^{m+1}) - 2^{2m+1}}.$$

در قضیه فوق با انتخاب $\phi(z) = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^\alpha = 1 + 2\alpha z + 2\alpha^2 z^2 + \dots$ و $0 < \alpha \leq 1$ نتیجه زیر را داریم.

نتیجه ۱۹.۱.۳. فرض کنید $f \in ST_\Sigma(b, \alpha)$ و $0 < \alpha \leq 1$ باشد، در این صورت داریم:

$$|a_2| \leq \frac{|b|\alpha}{\sqrt{(|3^{m+1}| - 2^{2m+1})\alpha b + (1-\alpha)2^{2m}}}$$

و

$$|a_3| \leq \frac{(1+|\alpha-1|)\alpha|b|}{(|3^{m+1}| - 2^{2m+1})}.$$

۲.۳ نتایج*

در این بخش با استفاده از تعریف زیر به بررسی قضایای بخش قبل پرداخته که منجر به یافتن کرانی کوچکتر و بهتر برای ضریب $|a_3|$ شده است.

کران ضرایب برای تابع رده $ST_\Sigma(b, \phi)$

فرض کنید $p(z)$ و $q(z)$ تعریف شده به صورت زیر توابع تحلیلی در $\mathbb{U}$ با $p(\circ) = \circ = q(\circ)$ و $|p(z)| < 1$ و $|q(z)| < 1$ باشد.

$$p(z) = p_1 z + p_2 z^2 + \dots, \quad q(z) = q_1 z + q_2 z^2 + \dots \quad (|z| < 1). \quad (۷۹.۳)$$

به طوری که:

$$|p_1| < 1, \quad |p_2| \leq 1 - |p_1|^2, \quad |q_1| < 1, \quad |q_2| \leq 1 - |q_1|^2. \quad (۸۰.۳)$$

بنابراین طبق (۴۲.۳) داریم:

$$\phi(p(z)) = 1 + B_1 p_1 z + (B_1 p_2 + B_2 p_1^2) z^2 + \dots, \quad (۸۱.۳)$$

$$\phi(q(w)) = 1 + B_1 q_1 w + (B_1 q_2 + B_2 q_1^2) w^2 + \dots \quad (۸۲.۳)$$

قضیه ۱۰.۲.۳. فرض کنید تابع $f(z) \in \mathcal{A}$ به فرم (۱.۳) داده شده، اگر $f \in ST_\Sigma(b, \phi)$ آنگاه:

$$|a_2| \leq \frac{B_1 \sqrt{B_1} |b|}{\sqrt{(|2(3^m) - 2^{2m})B_1 b + (B_1 - B_2)2^{2m}}}} \quad (۸۳.۳)$$

و

$$|a_3| \leq \begin{cases} \frac{|b|B_1}{2(3^m)} \\ \text{اگر } |b| \leq \frac{2^{2m}}{2(3^m)B_1} \\ |a_3| \leq \frac{|b|B_1[(2(3^m) - 2^{2m})B_1^2|b| + |B_1 - B_2|2^{2m}] + |b|B_1^2(2(3^m)|b|B_1 - (2^{2m}))}{2(3^m)[(2(3^m) - 2^{2m})B_1^2|b| + |B_1 - B_2|2^{2m}]} \\ \text{اگر } |b| > \frac{2^{2m}}{2(3^m)B_1} \end{cases}.$$

برهان. طبق تعریف رده $\mathcal{ST}_\Sigma(b, \phi)$ داریم:

$$1 + \frac{1}{b} \left(\frac{z(\mathcal{D}^m f(z))'}{\mathcal{D}^m f(z)} - 1 \right) = \phi(p(z)) \quad (۸۴.۳)$$

و

$$1 + \frac{1}{b} \left(\frac{w(\mathcal{D}^m g(w))'}{\mathcal{D}^m g(w)} - 1 \right) = \phi(q(w)). \quad (۸۵.۳)$$

به‌طوری‌که $\phi(p(z))$ و $\phi(q(w))$ به ترتیب به شکل (۸۱.۳) و (۸۲.۳) داده شده‌اند. حال با معادل قرار دادن ضرایب در (۸۴.۳) و (۸۵.۳) داریم:

$$2^m a_2 = bB_1 p_1, \quad (۸۶.۳)$$

$$2(3^m) a_3 - (2^{2m}) a_1^2 = b(B_1 p_2 + B_2 P_1^2), \quad (۸۷.۳)$$

و

$$-2^m a_2 = bB_1 q_1, \quad (۸۸.۳)$$

$$(4(3^m) - (2^{2m})) a_1^2 - 2(3^m) a_3 = b(B_1 q_2 + B_2 q_1^2). \quad (۸۹.۳)$$

طبق رابطه (۸۶.۳) و (۸۸.۳) داریم:

$$a_2 = \frac{bB_1 p_1}{2^m} = \frac{-bB_1 q_1}{2^m} \quad (۹۰.۳)$$

لذا طبق رابطه فوق داریم:

$$p_1 = -q_1, \quad (۹۱.۳)$$

و

$$2^{2m} a_1^2 = b^2 B_1^2 p_1^2. \quad (۹۲.۳)$$

با جمع طرفین رابطه (۸۷.۳) و (۸۹.۳) داریم:

$$[4(3^m) - 2(2^{2m})] a_1^2 = bB_1(p_2 + q_2) + bB_2(p_1^2 + q_1^2) \quad (۹۳.۳)$$

طبق (۹۱.۳) و با ضرب طرفین رابطه (۹۳.۳) در bB_1^2 و (۹۰.۳) داریم:

$$\{[\mathcal{F}(\mathfrak{M}) - \mathfrak{Y}(\mathfrak{Y}^m)]bB_1^2 - \mathfrak{Y}(\mathfrak{Y}^m)B_2\}a_1^2 = b^2B_1^3(p_2 + q_2). \quad (94.3)$$

با استفاده از (۸۰.۳) و (۹۱.۳) داریم:

$$\{[|\mathcal{F}(\mathfrak{M}) - \mathfrak{Y}(\mathfrak{Y}^m)]bB_1^2 - \mathfrak{Y}^m B_2|\}|a_1^2| \leq \mathfrak{Y}|b^2|B_1^3(1 - |p_1^2|). \quad (95.3)$$

$$\{[|\mathfrak{Y}(\mathfrak{M}) - (\mathfrak{Y}^m)]bB_1^2 - \mathfrak{Y}^m B_2 + \mathfrak{Y}^m B_1\}|a_1^2| \leq |b^2|B_1^3. \quad (96.3)$$

در نتیجه:

$$|a_2| \leq \frac{B_1\sqrt{B_1}|b|}{\sqrt{|(\mathfrak{Y}(\mathfrak{M}) - \mathfrak{Y}^m)B_1^2b + (B_1 - B_2)\mathfrak{Y}^m|}} \quad (97.3)$$

حال با کم کردن (۸۹.۳) از (۸۷.۳) داریم:

$$\mathcal{F}(\mathfrak{M})a_3 - \mathcal{F}(\mathfrak{M})a_1^2 = bB_1(p_2 - q_2) \quad (98.3)$$

لذا طبق (۸۰.۳) و (۹۱.۳) داریم:

$$|a_3| \leq |a_1^2| + \frac{\mathfrak{Y}bB_1}{\mathcal{F}(\mathfrak{M})}(1 - |p_1|^2) \quad (99.3)$$

در نتیجه طبق (۹۰.۳) داریم:

$$|a_3| \leq \frac{|b|B_1}{\mathfrak{Y}(\mathfrak{M})} + \frac{\mathfrak{Y}(\mathfrak{M})|b|B_1 - \mathfrak{Y}^m}{\mathfrak{Y}(\mathfrak{M})|b|B_1}|a_1^2| \quad (100.3)$$

بنابراین طبق (۹۷.۳) به دست می‌آوریم:

$$|a_3| \leq \begin{cases} \frac{|b|B_1}{\mathfrak{Y}(\mathfrak{M})} \\ \text{اگر } |b| \leq \frac{\mathfrak{Y}^m}{\mathfrak{Y}(\mathfrak{M})B_1} \\ \frac{|b|B_1[(\mathfrak{Y}(\mathfrak{M}) - \mathfrak{Y}^m)B_1^2|b| + |B_1 - B_2|\mathfrak{Y}^m] + |b|B_1^3(\mathfrak{Y}(\mathfrak{M})|b|B_1 - (\mathfrak{Y}^m))}{\mathfrak{Y}(\mathfrak{M})[(\mathfrak{Y}(\mathfrak{M}) - \mathfrak{Y}^m)B_1^2|b| + |B_1 - B_2|\mathfrak{Y}^m]} \\ \text{اگر } |b| > \frac{\mathfrak{Y}^m}{\mathfrak{Y}(\mathfrak{M})B_1} \end{cases}.$$

کران ضرایب برای تابع رده $CV_\Sigma(b, \phi)$

قضیه ۲.۲.۳. فرض کنید تابع $f(z) \in A$ به فرم (۱.۳) داده شده، اگر $f \in CV_\Sigma(b, \phi)$ آنگاه:

$$|a_2| \leq \frac{B_1 \sqrt{B_1} |b|}{\sqrt{|\mathfrak{z}(\mathfrak{z}^{m+1}) - \mathfrak{z}^{2m+1}) B_1^2 b + \mathfrak{z}(B_1 - B_2) \mathfrak{z}^{2m}|}} \quad (۱۰۱.۳)$$

و

$$|a_3| \leq \begin{cases} \frac{|b| B_1}{\mathfrak{e}(\mathfrak{z}^m)} \\ \text{اگر } |b| \leq \frac{\mathfrak{z}^{2m+2}}{\mathfrak{e}(\mathfrak{z}^m) B_1} \\ \frac{|b| B_1 [(\mathfrak{z}^{m+1} - \mathfrak{z}^{2m+1}) B_1^2 |b| + \mathfrak{z} |B_1 - B_2| \mathfrak{z}^{2m}] + |b| B_1^3 \mathfrak{z}(\mathfrak{z}^m)}{\mathfrak{e}(\mathfrak{z}^m) [(\mathfrak{z}^{m+1}) - \mathfrak{z}^{2m+1}) B_1^2 |b| + \mathfrak{z} |B_1 - B_2| \mathfrak{z}^{2m}]} \\ \text{اگر } |b| > \frac{\mathfrak{z}^{2m+2}}{\mathfrak{e}(\mathfrak{z}^m) B_1} \end{cases}$$

برهان. طبق تعریف رده $CV_\Sigma(b, \phi)$ داریم:

$$1 + \frac{1}{b} \left(\frac{z(\mathcal{D}^m f(z))''}{(\mathcal{D}^m f(z))'} \right) = \phi(p(z)) \quad (۱۰۲.۳)$$

و

$$1 + \frac{1}{b} \left(\frac{w(\mathcal{D}^m g(w))''}{(\mathcal{D}^m g(w))'} \right) = \phi(q(w)). \quad (۱۰۳.۳)$$

به طوری که $\phi(p(z))$ و $\phi(q(w))$ به ترتیب به شکل (۸۱.۳) و (۸۲.۳) داده شده‌اند. حال با معادل قرار دادن ضرایب در (۱۰۲.۳) و (۱۰۳.۳) داریم:

$$\mathfrak{z}^{m+1} a_2 = b B_1 p_1, \quad (۱۰۴.۳)$$

$$\mathfrak{e}(\mathfrak{z}^m) a_3 - \mathfrak{z}(\mathfrak{z}^{2m}) a_2^2 = b(B_1 p_2 + B_2 P_1^2), \quad (۱۰۵.۳)$$

و

$$-\mathfrak{z}^{m+1} a_2 = b B_1 q_1, \quad (۱۰۶.۳)$$

$$(\mathfrak{z}(\mathfrak{z}^m) - \mathfrak{z}(\mathfrak{z}^{2m})) a_2^2 - \mathfrak{e}(\mathfrak{z}^m) a_3 = b(B_1 q_2 + B_2 q_1^2). \quad (۱۰۷.۳)$$

طبق رابطه (۱۰۴.۳) و (۱۰۶.۳) داریم:

$$a_2 = \frac{b B_1 p_1}{\mathfrak{z}^{m+1}} = \frac{-b B_1 q_1}{\mathfrak{z}^{m+1}} \quad (۱۰۸.۳)$$

لذا طبق رابطه فوق داریم:

$$p_1 = -q_1, \quad (۱۰۹.۳)$$

و

$$2^{2m+2} a_2^* = b^2 B_1^* p_1^*. \quad (110.3)$$

با جمع طرفین رابطه (۱۰۵.۳) و (۱۰۷.۳) داریم:

$$[12(3^m) - 8(2^{2m})] a_2^* = b B_1(p_2 + q_2) + b B_2(p_1^* + q_1^*) \quad (111.3)$$

طبق (۱۰۹.۳) و با ضرب طرفین رابطه (۱۱۱.۳) در $b B_1^*$ و (۱۰۸.۳) داریم:

$$\{[12(3^m) - 8(2^{2m})] b B_1^* - 2(2^{2m+2}) B_2^*\} a_2^* = b^2 B_1^*(p_2 + q_2). \quad (112.3)$$

با استفاده از (۸۰.۳) و (۱۰۹.۳) داریم:

$$\{|[12(3^m) - 8(2^{2m})] b B_1^* - 2^{2m+2} B_2^*\} |a_2^*| \leq 2 |b^2| B_1^* (1 - |p_1^*|). \quad (113.3)$$

$$\{|[6(3^m) - 4(2^{2m})] b B_1^* - 2^{2m+2} B_2^* + 2^{2m+2} B_1^*\} |a_2^*| \leq |b^2| B_1^*. \quad (114.3)$$

در نتیجه:

$$|a_2| \leq \frac{B_1 \sqrt{B_1} |b|}{\sqrt{|(2(3^{m+1}) - 2^{2m+1}) B_1^* b + 2(B_1 - B_2) 2^{2m}|}} \quad (115.3)$$

حال با کم کردن (۱۰۷.۳) از (۱۰۵.۳) داریم:

$$12(3^m) a_3 - 12(3^m) a_2^* = b B_1(p_2 - q_2) \quad (116.3)$$

لذا طبق (۸۰.۳) و (۱۰۹.۳) داریم:

$$|a_3| \leq |a_2^*| + \frac{2 b B_1}{12(3^m)} (1 - |p_1^*|) \quad (117.3)$$

در نتیجه طبق (۱۰۸.۳) داریم:

$$|a_3| \leq \frac{|b| B_1}{6(3^m)} + \frac{6(3^m) |b| B_1 - 2^{2m+1}}{6(3^m) |b| B_1} |a_2^*| \quad (118.3)$$

بنابراین طبق (۱۱۵.۳) به دست می‌آوریم:

$$|a_3| \leq \begin{cases} \frac{|b| B_1}{6(3^m)} \\ \text{اگر } |b| \leq \frac{2^{2m+2}}{6(3^m) B_1} \\ \frac{|b| B_1 [(3^{m+1} - 2^{2m+1}) B_1^* |b| + 2 |B_1 - B_2| 2^{2m}] + |b| B_1^* 3(3^m)}{6(3^m) [(3^{m+1}) - 2^{2m+1}) B_1^* |b| + 2 |B_1 - B_2| 2^{2m}} \\ \text{اگر } |b| > \frac{2^{2m+2}}{6(3^m) B_1} \end{cases}$$

۳.۳ عملگر دیفرانسیل

سلواراج^۵ و کاردایکین^۶ [۲۱] عملگر $D_\lambda^m(\alpha_1, \beta_1)f : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}$ به صورت زیر تعریف کرده اند:

$$D_\lambda^\circ(\alpha_1; \beta_1)f(z) = f(z) * z {}_qF_s(\alpha_1, \beta_1; z),$$

$$D_\lambda^1(\alpha_1, \beta_1)f(z) = (1 - \lambda)f(z) * z {}_qF_s(\alpha_1, \beta_1; z) + \lambda z(f(z) * z {}_qF_s(\alpha_1, \beta_1; z))',$$

$$D_\lambda^m(\alpha_1, \beta_1)f(z) = D_\lambda^1(D_\lambda^{m-1}(\alpha_1, \beta_1)f(z)) \quad (۱۱۹.۳)$$

که $m \in \mathbb{N}$ و $\lambda \leq 0$.

اگر $f \in \mathcal{A}$ داده شده به فرم (۱.۳) باشد داریم:

$$D_\lambda^m(\alpha_1, \beta_1)f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} [1 + (n-1)\lambda]^m \frac{(\alpha_1)_{n-1} \dots (\alpha_q)_{n-1}}{(\beta_1)_{n-1} \dots (\beta_s)_{n-1}} \frac{a_n z^n}{(n-1)!}. \quad (۱۲۰.۳)$$

اگر در $D_\lambda^m(\alpha_1, \beta_1)f$ قرار دهیم $m = 0$ ، در این صورت داریم:

$$D_\lambda^\circ(\alpha_1, \beta_1)f(z) = \mathcal{H}_q^1(\alpha_1, \beta_1)f(z)$$

که $\mathcal{H}_q^1(\alpha_1, \beta_1)$ عملگر دزوک-سریوستا برای توابع متعلق به رده $\mathcal{A}$ می باشد. [۹]

از تعریف (۱۲۰.۳) به دست می آوریم:

$$z(D_\lambda^m(\alpha_1, \beta_1)f(z))' = (\alpha_1 + 1)D_\lambda^m(\alpha_1 + 1, \beta_1)f(z) - \alpha_1 D_\lambda^m(\alpha_1, \beta_1)f(z) \quad (۱۲۱.۳)$$

تعریف ۱.۳.۳. فرض کنید b یک عدد مختلط غیر صفر باشد، گوئیم تابع f داده شده به فرم (۱.۳) متعلق به رده $ST_\Sigma(b, \phi)$ است هرگاه:

$$f \in \Sigma, \quad 1 + \frac{1}{b} \left(\frac{\mathcal{D}_\lambda^{m+1}(\alpha_1, \beta_1)f(z)}{\mathcal{D}_\lambda^m(\alpha_1, \beta_1)f(z)} - 1 \right) \prec \phi(z), \quad (z \in \mathbb{U}) \quad (۱۲۲.۳)$$

و

$$1 + \frac{1}{b} \left(\frac{\mathcal{D}_\lambda^{m+1}(\alpha_1, \beta_1)g(w)}{\mathcal{D}_\lambda^m(\alpha_1, \beta_1)g(w)} - 1 \right) \prec \phi(w), \quad (w \in \mathbb{U}) \quad (۱۲۳.۳)$$

که تابع g به فرم (۲.۳) داده شده است.

^۵Selvaraj

^۶Karthikeyan

۱.۳.۳ رده $ST_{\Sigma}(\alpha_1, \beta_1, b, \phi)$

تعریف ۲.۳.۳. فرض کنید b یک عدد مختلط غیر صفر باشد، گوئیم تابع f داده شده به فرم (۱.۳) متعلق به رده $ST_{\Sigma}(\alpha_1, \beta_1, b, \phi)$ است هرگاه:

$$f \in \Sigma, \quad 1 + \frac{1}{b} \left(\frac{D_{\lambda}^m(\alpha_1 + 1, \beta_1)f(z)}{D_{\lambda}^m(\alpha_1, \beta_1)f(z)} - 1 \right) \prec \phi(z), \quad (z \in \mathbb{U}) \quad (124.3)$$

و

$$1 + \frac{1}{b} \left(\frac{D_{\lambda}^m(\alpha_1 + 1, \beta_1)g(w)}{D_{\lambda}^m(\alpha_1, \beta_1)g(w)} - 1 \right) \prec \phi(w), \quad (w \in \mathbb{U}) \quad (125.3)$$

که تابع g به فرم (۲.۳) داده شده است.

تخمین ضرایب

قضیه ۳.۳.۳. فرض کنید $f \in ST_{\Sigma}(b, \phi)$ به طوری که تابع $f(z) \in \mathcal{A}$ به فرم (۱.۳) داده شده، در این صورت داریم:

$$|a_2| \leq \frac{B_1 \sqrt{B_1} |b|}{\sqrt{(4(1+2\lambda)^m - (1+\lambda)^{2m}) B_1^2 b \lambda + (B_1 - B_2) \lambda^2 (1+\lambda)^{2m}}} \quad (126.3)$$

و

$$|a_2| \leq \frac{(B_1 + |B_2 - B_1|) |b|}{(4(1+2\lambda)^m - (1+\lambda)^{2m})}. \quad (127.3)$$

برهان. از آنجایی که $f \in ST_{\Sigma}(b, \phi)$ ، دو تابع تحلیلی $r, s: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}$ با $r(\circ) = \circ = s(\circ)$ وجود دارند، به طوری که:

$$1 + \frac{1}{b} \left(\frac{D_{\lambda}^{m+1}(\alpha_1, \beta_1)f(z)}{D_{\lambda}^m(\alpha_1, \beta_1)f(z)} - 1 \right) = \phi(r(z)) \quad (128.3)$$

و

$$1 + \frac{1}{b} \left(\frac{D_{\lambda}^{m+1}(\alpha_1, \beta_1)g(w)}{D_{\lambda}^m(\alpha_1, \beta_1)g(w)} - 1 \right) = \phi(s(z)). \quad (129.3)$$

در نتیجه:

$$1 + \frac{1}{b} \left(\frac{D_{\lambda}^{m+1}(\alpha_1, \beta_1)f(z) - D_{\lambda}^m(\alpha_1, \beta_1)f(z)}{D_{\lambda}^m(\alpha_1, \beta_1)f(z)} - 1 \right) = \phi(r(z)) \quad (130.3)$$

و

$$1 + \frac{1}{b} \left(\frac{D_{\lambda}^{m+1}(\alpha_1, \beta_1)g(w) - D_{\lambda}^m(\alpha_1, \beta_1)g(w)}{D_{\lambda}^m(\alpha_1, \beta_1)g(w)} - 1 \right) = \phi(s(z)). \quad (131.3)$$

توابع p و q را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$p(z) = \frac{1 + r(z)}{1 - r(z)} = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + \dots \quad (132.3)$$

و

$$q(z) = \frac{1 + s(z)}{1 - s(z)} = 1 + q_1 z + q_2 z^2 + \dots \quad (133.3)$$

یا به طور معادل داریم:

$$r(z) = \frac{p(z) - 1}{p(z) + 1} = \frac{1}{2} \left(p_1 z + \left(p_2 - \frac{p_1^2}{2} \right) z^2 + \left(p_3 + \frac{p_1}{2} \left(\frac{p_1^2}{2} - p_2 \right) - \frac{p_1 p_2}{2} \right) z^3 + \dots \right) \quad (134.3)$$

$$s(z) = \frac{q(z) - 1}{q(z) + 1} = \frac{1}{2} \left(q_1 z + \left(q_2 - \frac{q_1^2}{2} \right) z^2 + \left(q_3 + \frac{q_1}{2} \left(\frac{q_1^2}{2} - q_2 \right) - \frac{q_1 q_2}{2} \right) z^3 + \dots \right). \quad (135.3)$$

واضح است که p و q در $\mathbb{U}$ تحلیلی و $p(\circ) = 1 = q(\circ)$. هم چنین p و q قسمت حقیقی مثبت در $\mathbb{U}$ دارند از این رو $|p_i| \leq 2$ و $|q_i| \leq 2$. با استفاده از (۱۳۰.۳)، (۱۳۱.۳)، (۱۳۲.۳)، (۱۳۳.۳)، (۱۳۴.۳) و (۱۳۵.۳) به دست می آوریم:

$$\phi \left(\frac{p(z) - 1}{p(z) + 1} \right) = 1 + \frac{B_1 p_1}{2} z + \left(\frac{B_1}{2} \left(p_2 - \frac{p_1^2}{2} \right) + \frac{1}{4} B_2 p_1^2 \right) z^2 + \dots \quad (136.3)$$

و

$$\phi \left(\frac{q(w) - 1}{q(w) + 1} \right) = 1 + \frac{B_1 q_1}{2} w + \left(\frac{B_1}{2} \left(q_2 - \frac{q_1^2}{2} \right) + \frac{1}{4} B_2 q_1^2 \right) w^2 + \dots \quad (137.3)$$

محاسبات نشان می دهد برای $f \in \Sigma$ داده شده به فرم (۱.۳) معکوس آن یعنی $g = f^{-1}$ به فرم (۲.۳) می باشد. لذا از (۱۳۵.۳)، (۱۳۶.۳) و (۱۳۷.۳) داریم:

$$(1 + \lambda)^m a_2 = \frac{1}{2\lambda} B_1 p_1 b, \quad (138.3)$$

$$4\lambda(1 + 2\lambda)^m a_3 - \lambda(1 + \lambda)^{2m} a_2^2 = \frac{1}{2} b B_1 \left(p_2 - \frac{1}{2} p_1^2 \right) + \frac{1}{4} b B_2 p_1^2 \quad (139.3)$$

و

$$-(1 + \lambda)^m a_2 = \frac{1}{2\lambda} B_1 q_1 b, \quad (140.3)$$

$$\lambda \left(4(1 + 2\lambda)^m - (1 + \lambda)^{2m} \right) a_2^2 - 4\lambda(1 + 2\lambda)^m a_3 = \frac{1}{2} b B_1 \left(q_2 - \frac{1}{2} q_1^2 \right) + \frac{1}{4} b B_2 q_1^2. \quad (141.3)$$

از (۱۳۸.۳) و (۱۴۰.۳) نتیجه می گیریم که:

$$p_1 = -q_1. \quad (142.3)$$

حال از (۱۳۹.۳)، (۱۴۱.۳) و (۱۴۲.۳) داریم:

$$a_2^2 = \frac{B_1^2 (p_2 + q_2) b^2}{4 \left[\left(4(1 + 2\lambda)^m - (1 + \lambda)^{2m} \right) B_1^2 b \lambda + (B_1 - B_2) \lambda^2 (1 + \lambda)^{2m} \right]}. \quad (143.3)$$

با استفاده از این واقعیت که $|p_2| \leq 2$ و $|q_2| \leq 2$ تخمین مورد نظر بر روی $|a_2|$ به صورت زیر است:

$$|a_2| \leq \frac{B_1 \sqrt{B_1} |b|}{\sqrt{\left(4(1+2\lambda)^m - (1+\lambda)^{2m}\right) B_1^2 b \lambda + (B_1 - B_2) \lambda^2 (1+\lambda)^{2m}}}$$

حال با کم کردن (۱۳۹.۳) از (۱۴۱.۳) داریم:

$$a_3 = \frac{\frac{b B_1}{2} \left[\left(4\lambda(1+2\lambda)^m - (1+\lambda)^{2m} \right) p_2 + (1+\lambda)^{2m} q_2 \right]}{\lambda \lambda \left[4(1+2\lambda)^{2m} - (1+\lambda)^{2m} (1+2\lambda)^m \right]} + \frac{2(1+2\lambda)^{2m} p_1^2 (B_1 - B_2) b}{\lambda \lambda \left[4(1+2\lambda)^{2m} - (1+\lambda)^{2m} (1+2\lambda)^m \right]}$$

طبق نامساوی $|p_1| \leq 2$ ، $|p_2| \leq 2$ و $|q_2| \leq 2$ برای توابع با قسمت حقیقی مثبت، تخمین مورد نظر بر روی $|a_3|$ به صورت زیر است:

$$|a_3| \leq \frac{(B_1 + |B_2 - B_1|) |b|}{\left(4(1+2\lambda)^m - (1+\lambda)^{2m} \right)}.$$

□

با انتخاب $\phi(z) = \frac{1 + Az}{1 + Bz}$ ، $-1 \leq B < A \leq 1$ ، نتیجه زیر را داریم.

نتیجه ۴.۳.۳. فرض کنید $f \in ST_{\Sigma}(b, \frac{1 + Az}{1 + Bz})$ و $-1 \leq B < A \leq 1$ ، در این صورت داریم:

$$|a_2| \leq \frac{|b|(A - B)}{\sqrt{\left(4(1+2\lambda)^m - (1+\lambda)^{2m} \right) (A - B) b \lambda + (1 + B) \lambda^2 (1 + \lambda)^{2m}}}$$

و

$$|a_3| \leq \frac{|A - B| (1 + |1 + B|) |b|}{\lambda \left(4(1+2\lambda)^m - (1+\lambda)^{2m} \right)}.$$

قضیه ۵.۳.۳. فرض کنید $f \in ST_{\Sigma}(\alpha_1, \beta_1, b, \phi)$ و تابع $f(z) \in \mathcal{A}$ به فرم (۱.۳) داده شده باشد، در این صورت داریم:

$$|a_2| \leq \frac{(\alpha_1 + 1) B_1 \sqrt{B_1} |b|}{\sqrt{\left(4(1+2\lambda)^m - (1+\lambda)^{2m} \right) B_1^2 b (\alpha_1 + 1) + (B_1 - B_2) (1 + \lambda)^{2m}}} \quad (144.3)$$

و

$$|a_3| \leq \frac{(\alpha_1 + 1) (B_1 + |B_2 - B_1|) |b|}{\left(4(1+2\lambda)^m - (1+\lambda)^{2m} \right)}. \quad (145.3)$$

برهان. از آنجایی که $f \in \mathcal{ST}_\Sigma(\alpha_1, \beta_1, b, \phi)$ ، دو تابع تحلیلی $r, s: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}$ با $r(\circ) = \circ = s(\circ)$ وجود دارند، به طوری که:

$$1 + \frac{1}{b} \left(\frac{\mathcal{D}_\lambda^m(\alpha_1 + 1, \beta_1)f(z)}{\mathcal{D}_\lambda^m(\alpha_1, \beta_1)f(z)} - 1 \right) = \phi(r(z)) \quad (۱۴۶.۳)$$

و

$$1 + \frac{1}{b} \left(\frac{\mathcal{D}_\lambda^m(\alpha_1 + 1, \beta_1)g(w)}{\mathcal{D}_\lambda^m(\alpha_1, \beta_1)g(w)} - 1 \right) = \phi(s(z)). \quad (۱۴۷.۳)$$

لذا از (۱۳۰.۳)، (۱۳۱.۳)، (۱۳۲.۳)، (۱۳۳.۳)، (۱۳۶.۳) و (۱۳۷.۳) داریم:

$$(1 + \lambda)^m a_2 = \frac{(\alpha_1 + 1)}{2} B_1 p_1 b, \quad (۱۴۸.۳)$$

$$4(1 + 2\lambda)^m a_3 - (1 + \lambda)^2 a_2^2 = (\alpha_1 + 1) \left[\frac{1}{2} b B_1 \left(p_2 - \frac{1}{2} p_1^2 \right) + \frac{1}{4} b B_2 p_1^2 \right] \quad (۱۴۹.۳)$$

و

$$-(1 + \lambda)^m a_2 = \frac{(\alpha_1 + 1)}{2} B_1 q_1 b, \quad (۱۵۰.۳)$$

$$\begin{aligned} & (\lambda(1 + 2\lambda)^m - (1 + \lambda)^2) a_2^2 - 4(1 + 2\lambda)^m a_3 \\ &= (\alpha_1 + 1) \left[\frac{1}{2} b B_1 \left(q_2 - \frac{1}{2} q_1^2 \right) + \frac{1}{4} b B_2 q_1^2 \right]. \end{aligned} \quad (۱۵۱.۳)$$

از (۱۴۸.۳) و (۱۵۰.۳) نتیجه می‌گیریم که:

$$p_1 = -q_1. \quad (۱۵۲.۳)$$

حال از (۱۴۹.۳)، (۱۵۱.۳)، (۱۵۲.۳) و $|p_2| \leq 2$ ، $|q_2| \leq 2$ داریم:

$$|a_2| \leq \frac{|\alpha_1 + 1| B_1 \sqrt{B_1} |b|}{\sqrt{4(1 + 2\lambda)^m - (1 + \lambda)^2} B_1 b (\alpha_1 + 1) + (B_1 - B_2)(1 + \lambda)^2 m}$$

حال با کم کردن (۱۴۹.۳) از (۱۵۱.۳) و طبق نامساوی $|p_2| \leq 2$ و $|q_2| \leq 2$ برای توابع با قسمت حقیقی مثبت داریم:

$$|a_3| \leq \frac{|\alpha_1 + 1| (B_1 + |B_2 - B_1|) |b|}{4(1 + 2\lambda)^m - (1 + \lambda)^2 m}.$$

□

“

۴.۳ نتایج*

در این بخش با استفاده از تعریف در بخش نتایج* به بررسی قضایای بخش قبل پرداخته که منجر به یافتن کرانی کوچکتر و بهتر برای ضریب $|a_2|$ شده است.

قضیه ۱.۴.۳. فرض کنید تابع $f(z) \in \mathcal{A}$ به فرم (۱.۳) داده شده باشد. اگر $f \in ST_{\Sigma}(b, \phi)$ آنگاه:

$$|a_2| \leq \frac{B_1 \sqrt{B_1} |b|}{\sqrt{\left| \left(4(1+2\lambda)^m - (1+\lambda)^{2m} \right) B_1^2 b \lambda + (B_1 - B_2) \lambda^2 (1+\lambda)^{2m} \right|}} \quad (153.3)$$

و

$$|a_2| \leq \begin{cases} \frac{|b| B_1}{4\lambda(1+2\lambda)^m} \\ \text{اگر } |b| \leq \frac{\lambda^2(1+\lambda)^{2m}}{4\lambda(1+2\lambda)^m B_1} \\ \frac{|b| B_1 [(4\lambda(1+2\lambda)^m - (1+\lambda)^{2m}) |b| \lambda B_1^2]}{4\lambda(1+2\lambda)^m [(4\lambda(1+2\lambda)^m - (1+\lambda)^{2m}) |b| \lambda B_1^2 + |B_1 - B_2| \lambda (1+\lambda)^{2m}]} \\ + \frac{|B_1 - B_2| \lambda (1+\lambda)^{2m} + 4\lambda(1+2\lambda)^m |b| B_1^2}{4\lambda(1+2\lambda)^m [(4\lambda(1+2\lambda)^m - (1+\lambda)^{2m}) |b| \lambda B_1^2 + |B_1 - B_2| \lambda (1+\lambda)^{2m}]} \\ \text{اگر } |b| > \frac{\lambda^2(1+\lambda)^{2m}}{4\lambda(1+2\lambda)^m B_1} \end{cases}$$

برهان. طبق تعریف رده $ST_{\Sigma}(b, \phi)$ با استفاده از عملگر دیفرانسیل داریم:

$$1 + \frac{1}{b} \left(\frac{D_{\lambda}^{m+1}(\alpha_1, \beta_1) f(z)}{D_{\lambda}^m(\alpha_1, \beta_1) f(z)} - 1 \right) = \phi(p(z)) \quad (154.3)$$

و

$$1 + \frac{1}{b} \left(\frac{D_{\lambda}^{m+1}(\alpha_1 + 1, \beta_1) g(w)}{D_{\lambda}^m(\alpha_1, \beta_1) g(w)} - 1 \right) = \phi(q(w)). \quad (155.3)$$

به‌طوری‌که $\phi(p(z))$ و $\phi(q(w))$ به ترتیب به شکل (۸۱.۳) و (۸۲.۳) داده شده‌اند. حال با معادل قرار دادن ضرایب در (۱۵۴.۳) و (۱۵۵.۳) داریم:

$$\lambda(1+\lambda)^m a_2 = b B_1 p_1, \quad (156.3)$$

$$۲\lambda(1 + ۲\lambda)^m a_۳ - (1 + \lambda)^{۲m} a_۲^۲ = b(B_۱ p_۲ + B_۲ P_۱^۲), \quad (۱۵۷.۳)$$

و

$$- \lambda(1 + \lambda)^m a_۲ = bB_۱ q_۱, \quad (۱۵۸.۳)$$

$$\lambda \left(\lambda(1 + ۲\lambda)^m - (1 + \lambda)^{۲m} \right) a_۲^۲ - ۲\lambda(1 + ۲\lambda)^m a_۳ = b(\alpha_۱ + ۱)(B_۱ q_۲ + B_۲ q_۱^۲). \quad (۱۵۹.۳)$$

طبق رابطه (۱۵۶.۳) و (۱۵۸.۳) داریم:

$$a_۲ = \frac{bB_۱ p_۱}{\lambda(1 + \lambda)^m} = \frac{-bB_۱ q_۱}{\lambda(1 + \lambda)^m} \quad (۱۶۰.۳)$$

لذا طبق رابطه فوق داریم:

$$p_۱ = -q_۱, \quad (۱۶۱.۳)$$

و

$$\lambda^۲(1 + \lambda)^{۲m} a_۲^۲ = b^۲ B_۱^۲ p_۱^۲. \quad (۱۶۲.۳)$$

با جمع طرفین رابطه (۱۵۶.۳) و (۱۵۸.۳) داریم:

$$\begin{aligned} & [\lambda \lambda(1 + ۲\lambda)^m - ۲\lambda(1 + \lambda)^{۲m}] a_۲^۲ \\ & = bB_۱(p_۲ + q_۲) + bB_۲(p_۱^۲ + q_۱^۲) \end{aligned} \quad (۱۶۳.۳)$$

طبق (۱۶۱.۳) و با ضرب طرفین رابطه (۱۶۳.۳) در $bB_۱^۲$ و (۱۶۰.۳) داریم:

$$\begin{aligned} & [\lambda bB_۱^۲ \lambda(1 + ۲\lambda)^m - ۲bB_۱^۲ \lambda(1 + \lambda)^{۲m} - ۲B_۲ \lambda^۲(1 + \lambda)^{۲m}] a_۲^۲ \\ & = b^۲ B_۱^۳ (p_۲ + q_۲). \end{aligned} \quad (۱۶۴.۳)$$

با استفاده از (۸۰.۳) و (۱۶۱.۳) داریم:

$$\begin{aligned} & [\lambda |b| B_۱^۲ \lambda(1 + ۲\lambda)^m - ۲|b| B_۱^۲ \lambda(1 + \lambda)^{۲m} - ۲B_۲ \lambda^۲(1 + \lambda)^{۲m}] |a_۲^۲| \\ & \leq ۲|b^۲| B_۱^۳ (1 - |p_۱^۲|). \end{aligned} \quad (۱۶۵.۳)$$

$$\begin{aligned} & [(\lambda(1 + ۲\lambda)^m - (1 + \lambda)^{۲m}) |b| B_۱^۲ \lambda - (B_۱ - B_۲) \lambda^۲(1 + \lambda)^{۲m}] |a_۲^۲| \\ & \leq |b^۲| B_۱^۳. \end{aligned} \quad (۱۶۶.۳)$$

در نتیجه:

$$|a_۲| \leq \frac{B_۱ \sqrt{B_۱} |b|}{\sqrt{\left| \left(\lambda(1 + ۲\lambda)^m - (1 + \lambda)^{۲m} \right) B_۱^۲ \lambda + (B_۱ - B_۲) \lambda^۲(1 + \lambda)^{۲m} \right|}} \quad (۱۶۷.۳)$$

حال با کم کردن (۱۵۹.۳) از (۱۵۷.۳) داریم:

$$\lambda\lambda(1 + 2\lambda)^m a_3 - \lambda\lambda(1 + 2\lambda)^m a_3^2 = bB_1(p_2 - q_2) \quad (168.3)$$

لذا طبق (۸۰.۳) و (۱۶۱.۳) داریم:

$$|a_3| \leq |a_3^2| + \frac{2bB_1}{\lambda\lambda(1 + 2\lambda)^m} (1 - |p_1|^2) \quad (169.3)$$

در نتیجه طبق (۱۶۰.۳) داریم:

$$|a_3| \leq \frac{|b|B_1}{4\lambda(1 + 2\lambda)^m} + \frac{4\lambda|b|B_1(1 + 2\lambda)^m - \lambda^2(1 + \lambda)^{2m}}{4\lambda|b|B_1(1 + 2\lambda)^m} |a_3^2| \quad (170.3)$$

بنابراین طبق (۱۶۷.۳) به دست می‌آوریم:

$$|a_3| \leq \begin{cases} \frac{|b|B_1}{4\lambda(1 + 2\lambda)^m} \\ \text{اگر } |b| \leq \frac{\lambda^2(1 + \lambda)^{2m}}{4\lambda(1 + 2\lambda)^m B_1} \\ \frac{|b|B_1[(4\lambda(1 + 2\lambda)^m - (1 + \lambda)^{2m})|b|\lambda B_1^2]}{4\lambda(1 + 2\lambda)^m[(4\lambda(1 + 2\lambda)^m - (1 + \lambda)^{2m})|b|\lambda B_1^2 + |B_1 - B_2|\lambda(1 + \lambda)^{2m}]} \\ + \frac{|B_1 - B_2|\lambda(1 + \lambda)^{2m}}{4\lambda(1 + 2\lambda)^m[(4\lambda(1 + 2\lambda)^m - (1 + \lambda)^{2m})|b|\lambda B_1^2 + |B_1 - B_2|\lambda(1 + \lambda)^{2m}]} |b|B_1^2 \\ \text{اگر } |b| > \frac{\lambda^2(1 + \lambda)^{2m}}{4\lambda(1 + 2\lambda)^m B_1} \end{cases}$$

کران ضرایب برای تابع رده $ST_\Sigma(\alpha_1, \beta_1, b, \phi)$

فرض کنید تابع $f(z) \in \mathcal{A}$ به فرم (۱.۳) داده شده باشد. اگر $f \in ST_\Sigma(\alpha_1, \beta_1, b, \phi)$ آنگاه:

$$|a_2| \leq \frac{(\alpha_1 + 1)|B_1\sqrt{B_1}|b|}{\sqrt{\left| \left(4(1 + 2\lambda)^m - (1 + \lambda)^{2m} \right) B_1^2 b(\alpha_1 + 1) + (B_1 - B_2)(1 + \lambda)^{2m} \right|}} \quad (171.3)$$

$$|a_3| \leq \begin{cases} \frac{|(\alpha_1 + 1)||b|B_1}{\mathfrak{F}(1 + 2\lambda)^m} \\ \text{اگر } |b| \leq \frac{(1 + \lambda)^{\mathfrak{F}m}}{\mathfrak{F}(1 + 2\lambda)^m(\alpha_1 + 1)B_1} \\ \frac{(\alpha_1 + 1)|b|B_1[(\mathfrak{F}(1 + 2\lambda)^m - (1 + \lambda)^{\mathfrak{F}m})|b|(\alpha_1 + 1)|B_1^{\mathfrak{F}}]}{\mathfrak{F}(1 + 2\lambda)^m[(\mathfrak{F}(1 + 2\lambda)^m - (1 + \lambda)^{\mathfrak{F}m})|b|(\alpha_1 + 1)|B_1^{\mathfrak{F}} + |B_1 - B_2|(1 + \lambda)^{\mathfrak{F}m}]} \\ + \frac{|B_1 - B_2|(1 + \lambda)^{\mathfrak{F}m}] + \mathfrak{F}(1 + 2\lambda)^m|b|B_1^{\mathfrak{F}}}{\mathfrak{F}(1 + 2\lambda)^m[(\mathfrak{F}(1 + 2\lambda)^m - (1 + \lambda)^{\mathfrak{F}m})|b|(\alpha_1 + 1)|B_1^{\mathfrak{F}} + |B_1 - B_2|(1 + \lambda)^{\mathfrak{F}m}]} \\ \text{اگر } |b| > \frac{(1 + \lambda)^{\mathfrak{F}m}}{\mathfrak{F}(1 + 2\lambda)^m(\alpha_1 + 1)B_1} \end{cases}$$

برهان. طبق تعریف رده $ST_{\Sigma}(\alpha_1, \beta_1, b, \phi)$ داریم:

$$1 + \frac{1}{b} \left(\frac{\mathcal{D}_{\lambda}^m(\alpha_1 + 1, \beta_1)f(z)}{\mathcal{D}_{\lambda}^m(\alpha_1, \beta_1)f(z)} - 1 \right) = \phi(p(z)) \quad (172.3)$$

و

$$1 + \frac{1}{b} \left(\frac{\mathcal{D}_{\lambda}^m(\alpha_1 + 1, \beta_1)g(w)}{\mathcal{D}_{\lambda}^m(\alpha_1, \beta_1)g(w)} - 1 \right) = \phi(q(w)). \quad (173.3)$$

به طوری که $\phi(p(z))$ و $\phi(q(w))$ به ترتیب به شکل (۸۱.۳) و (۸۲.۳) داده شده‌اند. حال با معادل قرار دادن ضرایب در (۱۷۲.۳) و (۱۷۳.۳) داریم:

$$(1 + \lambda)^m a_2 = b(\alpha_1 + 1)B_1 p_1, \quad (174.3)$$

$$\mathfrak{F}(1 + 2\lambda)^m a_3 - (1 + \lambda)^{\mathfrak{F}m} a_3^{\mathfrak{F}} = b(\alpha_1 + 1)(B_1 p_2 + B_2 P_1^{\mathfrak{F}}), \quad (175.3)$$

و

$$- (1 + \lambda)^m a_2 = b(\alpha_1 + 1)B_1 q_1, \quad (176.3)$$

$$\begin{aligned} & \left(\mathfrak{F}(1 + 2\lambda)^m - (1 + \lambda)^{\mathfrak{F}m} \right) a_3^{\mathfrak{F}} - \mathfrak{F}(1 + 2\lambda)^m a_3 \\ & = b(\alpha_1 + 1)(B_1 q_2 + B_2 q_1^{\mathfrak{F}}). \end{aligned} \quad (177.3)$$

طبق رابطه (۱۷۴.۳) و (۱۷۶.۳) داریم:

$$a_2 = \frac{b(\alpha_1 + 1)B_1 p_1}{(1 + \lambda)^m} = \frac{-b(\alpha_1 + 1)B_1 q_1}{(1 + \lambda)^m} \quad (178.3)$$

لذا طبق رابطه فوق داریم:

$$p_1 = -q_1, \quad (179.3)$$

و

$$(1 + \lambda)^{2m} a_1^* = b^2 (\alpha_1 + 1)^2 B_1^* p_1^*. \quad (180.3)$$

با جمع طرفین رابطه (۱۷۵.۳) و (۱۷۷.۳) داریم:

$$\begin{aligned} & [\lambda(1 + 2\lambda)^m - 2(1 + \lambda)^{2m}] a_1^* \\ &= b(\alpha_1 + 1) B_1 (p_2 + q_2) + b(\alpha_1 + 1) B_2 (p_1^* + q_1^*) \end{aligned} \quad (181.3)$$

طبق (۱۷۹.۳) و با ضرب طرفین رابطه (۱۸۱.۳) در $b(\alpha_1 + 1) B_1^*$ و (۱۷۸.۳) داریم:

$$\begin{aligned} & [\lambda b(\alpha_1 + 1) B_1^* (1 + 2\lambda)^m - 2b(\alpha_1 + 1) B_1^* (1 + \lambda)^{2m} - 2B_2 (1 + \lambda)^{2m}] a_1^* \\ &= b^2 B_1^* (p_2 + q_2). \end{aligned} \quad (182.3)$$

با استفاده از (۸۰.۳) و (۱۷۹.۳) داریم:

$$\begin{aligned} & [\lambda |b| B_1^* |\alpha_1 + 1| (1 + 2\lambda)^m - 2|b| B_1^* |\alpha_1 + 1| (1 + \lambda)^{2m} \\ & - 2B_2 (1 + \lambda)^{2m}] |a_1^*| \leq 2|b^2| B_1^* (1 - |p_1^*|). \end{aligned} \quad (183.3)$$

$$\begin{aligned} & [(\lambda(1 + 2\lambda)^m - (1 + \lambda)^{2m}) |b| |\alpha_1 + 1| B_1^* - (B_1 - B_2)(1 + \lambda)^{2m}] |a_1^*| \\ & \leq |b^2| B_1^*. \end{aligned} \quad (184.3)$$

در نتیجه:

$$|a_2| \leq \frac{|(\alpha_1 + 1)| B_1 \sqrt{B_1} |b|}{\sqrt{\left| \left(\lambda(1 + 2\lambda)^m - (1 + \lambda)^{2m} \right) B_1^* b(\alpha_1 + 1) + (B_1 - B_2)(1 + \lambda)^{2m} \right|}} \quad (185.3)$$

حال با کم کردن (۱۷۷.۳) از (۱۷۵.۳) داریم:

$$\lambda(1 + 2\lambda)^m a_3 - \lambda(1 + 2\lambda)^m a_1^* = b(\alpha_1 + 1) B_1 (p_2 - q_2) \quad (186.3)$$

لذا طبق (۸۰.۳) و (۱۷۹.۳) داریم:

$$|a_3| \leq |a_1^*| + \frac{2b(\alpha_1 + 1) B_1}{\lambda(1 + 2\lambda)^m} (1 - |p_1^*|) \quad (187.3)$$

در نتیجه طبق (۱۷۸.۳) داریم:

$$|a_3| \leq \frac{|b||\alpha_1 + 1|B_1}{4(1 + 2\lambda)^m} + \frac{4|b||\alpha_1 + 1|B_1(1 + 2\lambda)^m - (1 + \lambda)^{2m}}{4|\alpha_1 + 1||b|B_1(1 + 2\lambda)^m}|a_2| \quad (178.3)$$

بنابراین طبق (۱۸۵.۳) به دست می آوریم:

$$|a_3| \leq \begin{cases} \frac{(|\alpha_1 + 1|)|b|B_1}{4(1 + 2\lambda)^m} \\ \text{اگر } |b| \leq \frac{(1 + \lambda)^{2m}}{4(1 + 2\lambda)^m(\alpha_1 + 1)B_1} \\ \frac{(\alpha_1 + 1)|b|B_1[(4(1 + 2\lambda)^m - (1 + \lambda)^{2m})|b|(\alpha_1 + 1)|B_1^2]}{4(1 + 2\lambda)^m[(4(1 + 2\lambda)^m - (1 + \lambda)^{2m})|b|(\alpha_1 + 1)|B_1^2 + |B_1 - B_2|(1 + \lambda)^{2m}]} \\ + \frac{|B_1 - B_2|(1 + \lambda)^{2m}] + 4(1 + 2\lambda)^m|b|B_1^2}{4(1 + 2\lambda)^m[(4(1 + 2\lambda)^m - (1 + \lambda)^{2m})|b|(\alpha_1 + 1)|B_1^2 + |B_1 - B_2|(1 + \lambda)^{2m}]} \\ \text{اگر } |b| > \frac{(1 + \lambda)^{2m}}{4(1 + 2\lambda)^m(\alpha_1 + 1)B_1} \end{cases} .$$

- [1] Al-Oboudi, F. M. "On univalent functions defined by a generalized Sălăgean operator." *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences* 2004.27 (2004): 1429-1436.
- [2] Ali, Rosihan M., et al. "Coefficient estimates for bi-univalent Ma-Minda starlike and convex functions." *Applied Mathematics Letters* 25.3 (2012): 344-351.
- [3] Brannan, D. A., and W. E. Kirwan. "On some classes of bounded univalent functions." *Journal of the London Mathematical Society* 2.1 (1969): 431-443.
- [4] Brannan, D. A., and J. G. Clunie. "Aspects of Contemporary Complex Analysis (Proceedings of the NATO Advanced Study Institute held at the University of Durham, Durham; July 1–20, 1979)." (1980).
- [5] Brannan, D. A., J. Clunie, and W. E. Kirwan. "Coefficient estimates for a class of star-like functions." *Canadian Journal of Mathematics* 22.3 (1970): 476.
- [6] Carlson, B. C., and Dorothy B. Shaffer. "Starlike and prestarlike hypergeometric functions." *SIAM Journal on Mathematical Analysis* 15.4 (1984): 737-745.
- [7] Darus, Maslina, and Ajab Akbarally. "Coefficient estimates for Ruscheweyh derivatives." *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences* 2004.36 (2004): 1937-1942.
- [8] Deniz, Erhan, and Halit Orhan. "The Fekete-Szegő problem for a generalized subclass of analytic functions." *Kyungpook mathematical journal* 50.1 (2010): 37-47.
- [9] Dziok, J., and H. M. Srivastava. "Classes of analytic functions associated with the generalized hypergeometric function." *Applied Mathematics and Computation* 103.1 (1999): 1-13.
- [10] Dziok, J., and H. M. Srivastava. "Certain subclasses of analytic functions associated with the generalized hypergeometric function." *Integral Transforms and Special Functions* 14.1 (2003): 7-18.

- [11] Dziok, J. "Classes of functions defined by certain differential–integral operators." *Journal of computational and applied mathematics* 105.1 (1999): 245-255.
- [12] Lashin, A. Y. "Starlike and convex functions of complex order involving a certain linear operator." *INDIAN JOURNAL OF PURE AND APPLIED MATHEMATICS* 34.7 (2003): 1101-1108.
- [13] Lewin, M. "On a coefficient problem for bi-univalent functions." *Proceedings of the American Mathematical Society* 18.1 (1967): 63-68.
- [14] Ma, Wancang, and D. Minda. "A unified treatment of some special classes of univalent functions." *Proceeding of the Conference on Complex Analysis*, Z. Li, F. Ren, L. Yang and S. Zhang (Eds), Int. Press. 1994.
- [15] Magesh, N., and J. Yamini. "Coefficient bounds for certain subclasses of bi-univalent functions." *International Mathematical Forum*. Vol. 8. No. 27. 2013.
- [16] Netanyahu, Elisha. "The minimal distance of the image boundary from the origin and the second coefficient of a univalent function in $|z| < 1$." *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 32.2 (1969): 100-112.
- [17] Pommerenke, Christian, and Gerd Jensen. *Univalent functions*. Vol. 25. Vandenhoeck und Ruprecht, 1975.
- [18] Ravichandran, V., and S. Sivaprasad Kumar. "On a class of analytic functions involving Carlson-Shaffer linear operator." *Riv. Mat. Univ. Parma* (7) 3 (2004): 35-48.
- [19] Ruscheweyh, Stephan. "New criteria for univalent functions." *Proceedings of the American Mathematical Society* (1975): 109-115.
- [20] Salagean, Grigore Stefan. "Subclasses of univalent functions." *Complex Analysis—Fifth Romanian-Finnish Seminar*. Springer Berlin Heidelberg, 1983.
- [21] Selvaraj, C., and K. R. Karthikeyan. "Differential sandwich theorems for certain subclasses of analytic functions." *Mathematical Communications* 13.2 (2008): 311-319.
- [22] Srivastava, H. M. "Some inequalities and other results associated with certain subclasses of univalent and bi-univalent analytic functions." *Nonlinear analysis*. Springer New York, 2012. 607-630.
- [23] Srivastava, H. M., Akshaya Kumar Mishra, and Priyabrat Gochhayat. "Certain subclasses of analytic and bi-univalent functions." *Applied Mathematics Letters* 23.10 (2010): 1188-1192.

-
- [24] Thomas, Rosy, Subramanian Kg, and M. Jahanairi Jay. "Goodman-Ronning-type harmonic univalent functions." *Kyungpook Mathematical Journal* 41.1 (2001): 45-45.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Analytic Function	تابع تحلیلی
Univalent Function	تابع تک‌ارز
bi-Univalent Function	تابع دوتک‌ارز
Starlike Function	تابع ستاره‌گون
Convex Function	تابع محدب
Harmonic Function	تابع همساز
Hadamard Product	حاصل ضرب هادامارد
Salagean Operator	عملگر سالانگان
Dziok-Srivastava Operator	عملگر دزوک-سریوستا
Differential Operator	عملگر دیفرانسیل
Carlson-Shaffer Operator	عملگر کارلسون-شفر
Hohlov Operator	عملگر هولوف
Complex	مختلط
Order	مرتبه

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Analytic Function	تابع تحلیلی
bi-Univalent Function	تابع دو تک ارز
Carlson-Shaffer Operator	عملگر کارلسون-شفر
Complex	مختلط
Convex Function	تابع محدب
Differential Operator	عملگر دیفرانسیل
Dziok-Srivastava Operator	عملگر دزوک-سریوستا
Hadamard Product	حاصل ضرب هادامارد
Harmonic Function	تابع همساز
Hohlov Operator	عملگر هوهلوف
Order	مرتبه
Starlike Function	تابع ستاره‌گون
Salagean Operator	عملگر سالانگان
Univalent Function	تابع تک ارز

Aabstract

we introduce and investigate two new subclasses of the function class Σ of bi-univalent functions defined in the open unit disk, which are associated with the Hohlov operator, that is, a familiar special case of the widely- (and extensively-) investigated Dziok-Srivastava linear operator. Furthermore, we find estimates on the Taylor-Maclaurin coefficients $|a_2|$ and $|a_3|$ for functions in these new subclasses. Several (known or new) consequences of the results are also pointed out.

Keywords: Analytic Function, Starlike Functions, Univalent Function, bi-Univalent Function



Sharood University Of Technology
Faculty Of Mathematical Sciences

Dissertation Submitted in Partial
Fulfillment of The Requirements For The
Degree of Master of Science in
Applied Mathematics

Certain subclasses of bi-univalent functions associated with the Hohlov operator

Supervisor

Dr. Ahmad Zireh

by

Azita Beygmoradi Jabalbarzi

February 2016