



دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

پایان نامه کارشناسی ارشد

نتایجی در خصوص مونوپولی‌های پویا در گراف‌ها

زبیده ساداتی

استاد راهنما

دکتر میثم علیشاهی

بهمن ۱۳۹۴

تقدیم به

پدر و مادر عزیزتر از جانم

به پاس تعبیر عظیم و انسانی شان از کلمه ایثار و از خودگذشتگی

به پاس عاطفه سرشار و گرمای امید بخش وجودشان که در این سردترین روزگار ان
بهترین پشتیبان است

و به پاس محبت های بی دریغشان که هرگز فروکش نمی کند

و، همسر مهربانم

اسطوره زندگیم، پناه خستگیم و امید بودم. به پاس قدردانی از قلبی آکنده از عشق و معرفت که محیطی سرشار از سلامت و
امنیت و آرامش و آسایش برای من فراهم آورده است.

و برادر و خواهران نازنینم

که وجودشان شادی بخش و مایه دلگرمی من است. قلمم لبریز از عشق به آن هاست و خوشبختی شان منتهای آرزویم.

سپاس گزارمی...

سپاس بی کران پروردگاریت را که هستی مان بخشید و به طریق علم و دانش رهنمونان شد و به بهمشینی رهروان علم و دانش مفتخران نمود و خوشه چینی از علم و معرفت را روزیمان ساخت. شکر خداوند متعال را به جای آورده که توفیق نصیب من کرد تا این پایان نامه را به پایان برسانم.

سپاسگذار کسانی، بستم که سرآغاز تولد من هستند. از یکی زاده می شوم و از دیگری جاودانه. استادی که سپیدی را بر تخته سیاه زندگیم نگاشت و مادری که تار مویی از او پای من سیاه نماند. از پدر و مادر عزیزم... این دو معلم بزرگوارم... که همواره بر کوتاهی و درشتی من، قلم عفو کشیده و گریانه از کنار غفلت هایم گذشته اند و در تمام عرصه های زندگی یار و یاور می بی چشم داشت برای من بوده اند؛ از استاد با کمالت و شایسته و دلسوزم جناب آقای دکتر شتم علی شاهی که در کمال سعه صدر، با حسن خلق، فروتنی و صبر و حوصله، از هیچ گلی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این رساله را بر عهده گرفتند، کمال شکر و قدر دانی را دارم. باشد که این خرد، بخشی از زحمات ایشان را پاس گوید. از خداوند متعال آرزوی طول عمری با عزت و توفیق روز افزون برای ایشان مسئلت می نمایم.

از اساتید فرزانه، آقایان دکتر نادر جعفری راد و دکتر صادق رحیمی شهربانف که زحمت مطالعه و داوری این پایان نامه را متقبل شدند، نهایت شکر و قدر دانی را می نمایم.

هم چنین از استاد محترم جناب آقای دکتر مهدی قوتمند نماینده تحصیلات تکمیلی که در جلسه دفاعیه اینجانب شرکت فرمودند، بسیار سپاسگزارم.

از دوست عزیز و مهربانم خانم فاطمه سلیمانی به خاطر حمایت ایشان و نیردستان عزیزم سپیده احمدزاده و انیسه فیاضی که در طول دوران تحصیل برای من خاطراتی زیبا آفریدند، صمیمانه تشکر نموده و برای تمامی این عزیزان آرزوی سلامتی، پیروزی و موفقیت روزافزون از خداوند متعال مسئلت می‌نمایم.

زبیده ساقی
بهمن ۱۳۹۴

تعمدنامه

اینجانب زبیده یساقی دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی دانشکده علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان نتایجی در خصوص مونوپولی‌های پویا در گراف‌ها، تحت راهنمایی دکتر میثم علیشاهی متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه صنعتی شاهرود “ یا “ Shahrood University of Technology “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

زبیده یساقی
بهار ۱۳۹۴

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

فرض کنید G یک گراف و $\tau : V(G) \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ یک انتساب اعداد صحیح نامنفی به رئوس G باشد. یک زیرمجموعه از رئوس چون D مونوپولی τ -پویا گفته می‌شود اگر بتوان رئوس G را به زیرمجموعه‌های D_0, \dots, D_k افراز کرد به طوری که $D_0 = D$ و برای هر $0 \leq i \leq k-1$ ، هر رأس v در D_{i+1} حداقل $\tau(v)$ همسایه در $D_0 \cup \dots \cup D_i$ داشته باشد. اندازه کوچکترین مونوپولی τ -پویا توسط $\text{dyn}_\tau(G)$ نشان داده می‌شود.

در این پایان‌نامه مونوپولی‌های پویا را با آستانه‌های متوسط، اکثریت اکید و عمومی در نظر می‌گیریم و نتایجی در مورد کران این مونوپولی‌های پویا به دست می‌آوریم. به علاوه سعی می‌کنیم نتایجی در خصوص $\text{dyn}_\tau(G)$ با توجه به ساختار گراف G و همچنین انتساب آستانه τ ارائه دهیم. همچنین پیچیدگی محاسباتی $\text{dyn}_\tau(G)$ را برای برخی از خانواده‌های گراف‌ها بررسی می‌کنیم.

کلمات کلیدی: مونوپولی پویا، بزرگ‌ترین مونوپولی پویا، مونوپولی پویا-نامحدود، مونوپولی پویا

برگشت‌ناپذیر

پیشگفتار

مسأله پیدا کردن مجموعه مونوپولی پویا یکی از مشهورترین و پرکاربردترین مسائل مربوط به شبکه‌های اجتماعی است. مونوپولی‌های پویا در واقع مدل‌سازی از گسترش تأثیر در شبکه‌های اجتماعی هستند. مشکلات مختلف در شبکه‌های اجتماعی و مجازی از جمله شبکه جهانی وب یا مدل‌های محاسبات توزیع شده، در اصطلاح گسترش تأثیر نامیده می‌شود. گسترش نوآوری و یا یک محصول جدید در جامعه، گسترش رأی در انتخابات بله-خیر، انتشار ویروس در اینترنت و افزایش بیماری در بین جمعیت برخی از نمونه‌های این پدیده می‌باشند. در سال‌های اخیر، مونوپولی‌های پویا برگشت‌ناپذیر و مفاهیم معادل انتخاب مجموعه هدف و مجموعه‌های تبدیل، موضوع تحقیقات فعال بسیاری از محققان و دانشمندان قرار گرفته است. علاوه بر این مونوپولی‌های پویا برنامه‌های کاربردی در بازاریابی و بررسی دارند. در این پایان‌نامه مونوپولی‌های پویا در گراف‌ها را با آستانه‌های متوسط، اکثریت اکید و عمومی مورد بررسی قرار می‌دهیم. مونوپولی‌های پویا با آستانه‌های متوسط، بخش عمده‌ای از این پایان‌نامه را به خود اختصاص داده است.

در فصل اول مقدمه‌ای در خصوص مونوپولی‌های پویا در گراف‌ها و همچنین تعاریف اولیه نظریه گراف و اصطلاحات و نمادهای مورد استفاده مطرح شده است.

در فصل دوم که پایه آن [۱۸، ۲۰] است، به مطالعه مونوپولی‌های پویا با آستانه‌های متوسط می‌پردازیم

و در آن متوسط آستانه‌ها یعنی $\bar{\tau} = \frac{\sum_{v \in V(G)} \tau(v)}{|G|}$ و برخی از مفاهیم مربوط به آستانه متوسط را معرفی می‌کنیم. سپس کران‌هایی برای $dyn_{\tau}(G)$ (اندازه کوچک‌ترین مونوپولی پویا) برحسب آستانه متوسط و مرتبه گراف به دست می‌آوریم. در این فصل بزرگ‌ترین مونوپولی پویا $(Ldyn_t(G))$ با آستانه متوسط داده شده را تعریف کرده و نتایجی در خصوص این مونوپولی پویا ارائه می‌دهیم. همچنین مطالعاتی بر روی خانواده‌های L مونوپولی پویا-محدود از گراف‌ها انجام می‌دهیم و نتایجی را کسب می‌کنیم.

فصل سوم این پایان‌نامه که در آن مونوپولی‌های پویا با آستانه اکثریت اکید در نظر گرفته شده‌اند، با توجه به این‌که از نظر نوشتاری فصلی کوتاه است، اما در مقایسه با دیگر آستانه‌ها کاربرد بیشتری دارد. در این فصل آستانه هر رأس برابر با $\tau(v) = \left\lceil \frac{deg(v) + 1}{2} \right\rceil$ در نظر گرفته شده است. همچنین زمانی که

گراف G شامل حداقل یک رأس فرد است، کران بالای $\frac{|G|}{2}$ را برای کوچک‌ترین اندازه هر مونوپولی پویا با آستانه اکثریت اکید ارائه می‌دهیم. این کران، بهترین کران شناخته شده برای آستانه اکثریت اکید را بهبود می‌بخشد. در انتها نشان می‌دهیم $\alpha'(G) + 1$ یک کران بالا برای مونوپولی پویا با آستانه اکثریت اکید است که در آن $\alpha'(G)$ عدد جورسازی G نامیده می‌شود. مرجع این فصل [۱۸] می‌باشد.

در فصل چهارم این پایان‌نامه که بر مبنای [۲۶] نوشته شده است مونوپولی‌های پویا با آستانه عمومی در نظر گرفته شده‌اند. فرض کنید یک گراف G با مجموعه رئوس $V(G)$ و مجموعه یالی $E(G)$ همراه با یک انتساب آستانه $\tau: V(G) \rightarrow \mathbb{N}$ به رئوس G داده شده است. این فرآیند پویا زمان گسسته متناظر

با انتساب آستانه τ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم. فرآیند با یک زیرمجموعه D از رئوس که شامل رئوس فعال در زمان صفر هستند، شروع می‌شود. مجموعه رئوس فعال در زمان گسسته $t \geq 0$ را با D_t نشان می‌دهیم. بنابراین در آغاز فرآیند به عنوان مثال در زمان صفر $D_0 = D$. سپس در هر زمان $i \geq 1$ ، رأس غیرفعال v در صورتی که حداقل $\tau(v)$ همسایه فعال در $D_{i-1} \cup D_{i-2} \cup \dots \cup D_0$ داشته باشد، فعال می‌شود. اگر در پایان فرآیند با شروع از زیرمجموعه D همه رئوس فعال شوند، به آن مونوپولی پویا گویند. توجه داشته باشید که این فرآیند، تصاعدی یا برگشت‌ناپذیر است. یعنی زمانی که یک رأس در مرحله‌ای از فرآیند فعال می‌شود، در این صورت تا پایان فرآیند فعال باقی می‌ماند.

در این فصل، ابتدا ارتباط بین زیرگراف‌های مقاوم و مونوپولی‌های پویا را نشان می‌دهیم. سپس برخی از کران‌های بالا و پایین را برای اندازه مونوپولی پویا از گراف‌ها با انواع مختلفی از آستانه‌ها به دست می‌آوریم. همچنین جامعه همگن، خانواده‌های مونوپولی پویا-نامحدود از گراف‌ها و گراف‌های یالی را معرفی کرده و برخی نتایج در این زمینه را به دست می‌آوریم.

فهرست مطالب

ز	لیست تصاویر
س	لیست جداول
۱	۱ مقدمه‌ای بر مونوپولی‌های پویا در گراف‌ها
۱	۱.۱ مقدمه
۲	۲.۱ قضیه‌ها و تعاریف اولیه
۱۳	۲ مونوپولی‌های پویا با آستانه‌های متوسط
۱۳	۱.۲ مقدمه
۱۴	۲.۲ کران‌های پایین برای مونوپولی‌های پویا
۱۷	۳.۲ بزرگ‌ترین مونوپولی‌های پویا در گراف‌ها با آستانه متوسط داده شده
۱۷	۱.۳.۲ برخی کران‌های بالا و بررسی زمان چندجمله‌ای مونوپولی‌های پویا
۲۴	۲.۳.۲ نتایجی در خصوص بزرگ‌ترین مونوپولی پویا
۳۵	۳.۳.۲ نتایج الگوریتمی
۳۸	۴.۳.۲ راه‌حل زمان-چندجمله‌ای برای جنگل‌ها
۴۳	۳ مونوپولی‌های پویا در گراف‌ها با آستانه‌های اکثریت اکید
۴۳	۱.۳ مقدمه
۴۴	۲.۳ کران‌هایی برای کوچک‌ترین مونوپولی پویا
۵۱	۴ مونوپولی‌های پویا در گراف‌ها با آستانه‌های عمومی
۵۱	۱.۴ مقدمه
۵۱	۲.۴ برخی کران‌ها برای اندازه مونوپولی پویا از گراف‌ها
۶۵	۱.۲.۴ کوچک‌ترین مونوپولی پویا در گراف پترسن تعمیم‌یافته
۶۷	۳.۴ خانواده‌های مونوپولی پویا-نامحدود از گراف‌ها
۷۲	۴.۴ مونوپولی‌های پویا در گراف‌های یالی
۷۵	۱.۴.۴ مونوپولی‌های پویا در گراف‌های یالی از گراف‌های دوبخشی

۷۹	آ جدول نمادها
۸۱	مراجع
۸۳	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی
۸۷	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی
۹۱	نمایه

لیست تصاویر

۲	گراف G	۱.۱
۳	گراف G	۲.۱
۳	گراف ساده	۳.۱
۴	گراف پترسن	۴.۱
۵	گراف دوبخشی	۵.۱
۵	گراف دوبخشی کامل $K_{۳,۳}$	۶.۱
۶	گراف G و یک زیرگراف فراگیر از آن	۷.۱
۶	زیرگراف القایی $G[\{u, v, x\}]$	۸.۱
۷	(الف) گراف همبند و (ب) گراف ناهمبند با سه مولفه	۹.۱
۷	درخت‌های شش رأسی	۱۰.۱
۸	یک جورسازی ماکزیمم از گراف G	۱۱.۱
۸	یک پوشش از G	۱۲.۱
۸	مینیمم پوشش از G	۱۳.۱
۹	مجموعه مستقل رأسی ماکزیمم	۱۴.۱
۱۰	گراف ۳-منتظم پترسن	۱۵.۱
۲۸	گراف G_n	۱.۲
۳۱	گراف G_n	۲.۲
۶۰	دوره‌های فرد C_i و C_j و یال بین آن‌ها	۱.۴
۶۱	دور فرد C_i و دور زوج C_i و یال بین آن‌ها	۲.۴
۶۲	دور فرد C_i در مجاورت رأس x	۳.۴
۶۲	دوره‌های فرد C_i و C_j و دور زوج فعال C_i	۴.۴
۶۵	گراف $GP(۹, k)$ برای $k = ۲, ۴, ۵, ۷$	۵.۴
۷۲	گراف G ساخته شده توسط تعداد q کپی مجزا از گراف \bar{K}_r	۶.۴
۷۳	گراف G و گراف یالی آن	۷.۴

لیست جداول

۷۹	جدول نمادها	۱.آ
۸۰	جدول نمادها	۲.آ

فصل ۱

مقدمه‌ای بر مونوپولی‌های پویا در گراف‌ها

۱.۱ مقدمه

در این پایان‌نامه گراف‌های ساده^۱ (از این نظر ساده که بین هر دو رأس تنها یک یال وجود داشته باشد) و بدون جهت^۲ را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در بخش بعد، گراف^۳ ساده را به‌طور دقیق تعریف می‌کنیم. برای هر گراف $G(V, E)$ ، تعداد عناصر مجموعه رئوس (مرتبه گراف) را با $|G|$ یا $|V(G)|$ ، هم‌چنین مجموعه یالی و چگالی یالی^۴ را به‌ترتیب توسط $|E(G)|$ و $\epsilon(G) = \frac{|E(G)|}{|V(G)|}$ و درجه رأس v در گراف G را با $deg_G(v)$ یا $d_G(v)$ نشان می‌دهیم. هم‌چنین توسط (G, τ) ، یک گراف G و یک انتساب آستانه به رئوس G را در نظر می‌گیریم. انگیزه مهم برای مطالعه مونوپولی‌های پویا کاربرد آن‌ها در تدوین گسترش تأثیر در شبکه‌های اجتماعی است. گسترش تأثیر^۵ در شبکه‌ها با مدل‌های انتشار مختلف توسط محققان در زمینه علوم کامپیوتر مورد مطالعه قرار گرفته است. کاربردهایی که می‌توان برای این مدل در نظر گرفت شامل مشخص کردن روند گسترش تأثیر دوستان در مورد موضوع خاصی می‌باشند. مطالعه این روند گسترش تأثیر یا از بین رفتن تأثیر در این شبکه‌ها می‌تواند کمک زیادی به شرکت‌ها و سازمان‌های مختلف برای پیشینه‌کردن گسترش تأثیر کند. مسئله گسترش تأثیر را می‌توان به‌عنوان یکی از سئوالات مهم در نظریه بازی‌ها^۶ در نظر گرفت. برای گسترش تأثیر در شبکه‌ها دو نوع مدل معروف معرفی شده است، مدل پیش‌رونده و غیر پیش‌رونده با تابع اکثریت اکید. در مدل غیر پیش‌رونده، در زمان $t \geq 1$ هر رأس v در صورتی که حداقل به تعداد $\lceil \frac{deg(v) + 1}{2} \rceil$ از همسایه‌هایش تأثیر را پذیرفته باشند، تحت تأثیر قرار می‌گیرد و در غیر این صورت تأثیر نمی‌پذیرد. در مدل پیش‌رونده، رئوسی که تأثیر را پذیرفته‌اند برای

^۱ Simple graph

^۲ Undirected

^۳ Graph

^۴ Edge density

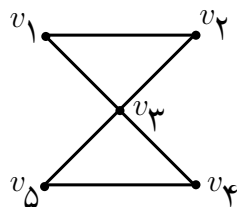
^۵ Spread of influence

^۶ Game Theory

همیشه تحت تأثیر باقی می‌مانند. گسترش نوآوری یا یک محصول جدید در یک جامعه، انتشار ویروس در اینترنت، گسترش بیماری در بین جمعیت برخی از نمونه‌های این پدیده می‌باشند. گسترش تأثیر با نام مونوپولی پویا توسط ریاضیدانانی که در ریاضیات گسسته تحقیق می‌کنند، در برخی مقالات مورد مطالعه قرار گرفته است [۴، ۸، ۱۳، ۱۵، ۲۳، ۲۴]. مونوپولی پویا به حالت خاصی از گسترش تأثیر گفته می‌شود که در آن مدل غیر پیش‌رونده فرض شده است. در [۲۶] برخی از کران‌ها برحسب مینیم یا ماکزیمم آستانه‌ها برای کوچک‌ترین اندازه مونوپولی‌های پویا به دست آمده است. هم‌چنین گراف‌ها با آستانه‌های احتمالی در نظر گرفته شده‌اند و اهمیت امید ریاضی (متوسط) آستانه‌ها در کران پایین اندازه مونوپولی‌های پویا نشان داده شده است. به دست آوردن کران‌ها برحسب آستانه متوسط مفیدتر می‌باشد. آستانه متوسط در برنامه‌های کاربردی قابل دسترس‌تر از مینیمم یا ماکزیمم آستانه‌هاست. به عبارت دیگر در اکثر برنامه‌های کاربردی، اطلاعات ما تنها درباره میانگین آستانه‌ها در یک شبکه می‌باشد. در این فصل برخی از تعاریف و مفاهیم اولیه و هم‌چنین قضیه‌هایی که در فصل‌های بعد به آن‌ها نیاز داریم را بیان می‌کنیم. آنچه از تعریف‌هایی که بدون ذکر منبع آورده شده از [۵] گرفته شده است.

۲.۱ قضیه‌ها و تعاریف اولیه

تعریف ۱.۲.۱. گراف G یک سه تایی مرتب $(V(G), E(G), \psi_G)$ ، متشکل از مجموعه ناتهی $V(G)$ شامل رئوس، مجموعه متناهی $E(G)$ مجزا از رئوس شامل یال‌ها و یک تابع وقوع ψ_G^V می‌باشد به طوری که به هر یال G ، یک زوج نامرتب از رأس‌های G را (که لزوماً متمایز نیستند) نسبت می‌دهد. اگر e یک یال u و v دو رأس باشند به طوری که $\psi_G(e) = uv$ ، در این صورت گفته می‌شود e ، رأس‌های u و v را به یکدیگر متصل کرده است، رأس‌های u و v دو سر یال e نامیده می‌شوند. به طور معمول گراف $G = (V(G), E(G), \psi_G)$ را توسط $(V(G), E(G))$ یا $G(V, E)$ نشان می‌دهند. اگر $\{u, v\}$ یالی از گراف G باشد آن را با uv نشان می‌دهند. اگر $uv \in E(G)$ ، آن‌گاه u و v مجاور هستند. به عنوان مثال در شکل ۱.۱، $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ مجموعه رأس‌ها و $\{v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3, v_3v_4, v_3v_5, v_4v_5\}$ مجموعه یال‌های گراف G می‌باشند.

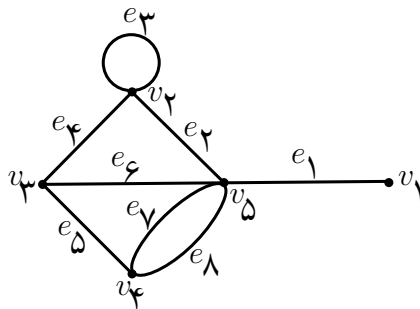


شکل ۱.۱: گراف G

^YIncidence function

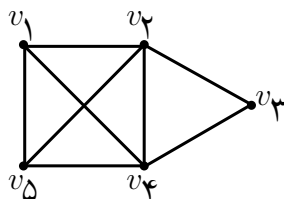
تعریف ۲.۲.۱. یک یال با دو سر یکسان طوقه^۸ و یک یال با دو سر متمایز، یال پیوندی^۹ نامیده می‌شود. دو یا چند یال پیوندی با دو سر یکسان، یال‌های چندگانه^{۱۰} را تشکیل می‌دهند.

در شکل ۲.۱، طوقه e_3 و یال‌های پیوندی $e_1, e_2, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8$ هستند و یال‌های چندگانه تشکیل می‌دهند.



شکل ۲.۱: گراف G

تعریف ۳.۲.۱. گراف فاقد طوقه و یال چندگانه را گراف ساده^{۱۱} می‌نامیم. گراف شکل ۲.۱ ساده نیست در صورتی که گراف شکل ۳.۱ ساده است. قسمت اعظم نظریه گراف، روی مطالعه گراف‌های ساده متمرکز است.



شکل ۳.۱: گراف ساده

در تمام این پایان‌نامه G نشان‌دهنده یک گراف ساده است. هم‌چنین زمانی که فقط در مورد یک گراف بحث می‌کنیم، معمولاً این گراف را با G نمایش می‌دهیم.

تعریف ۴.۲.۱. گرافی که یک رأس داشته باشد، بدیهی^{۱۲} و سایر گراف‌ها را نابديهی^{۱۳} می‌نامیم.

^۸Loop

^۹Link

^{۱۰}Multiple edges

^{۱۱}Simple graph

^{۱۲}Trivial graph

^{۱۳}Nontrivial graph

تعریف ۵.۲.۱. درجه 14 رأس v در گراف G که توسط $deg_G(v)$ یا $d_G(v)$ نشان داده می‌شود، برابر تعداد یال‌های واقع بر v است. در این تعریف هر طوقه، دو یال محسوب می‌شود. مینیم و ماکزیمم درجه‌های رئوس G به ترتیب با $\delta(G)$ و $\Delta(G)$ نمایش داده می‌شود.

قضیه ۶.۲.۱. [۵] در هر گراف G داریم:

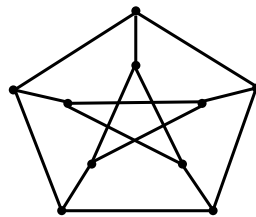
$$\sum_{v \in V(G)} deg(v) = 2|E(G)|.$$

تعریف ۷.۲.۱. اگر درجه رأسی در گراف زوج باشد به آن رأس زوج 15 و اگر درجه رأسی در گراف فرد باشد به آن رأس فرد 16 گفته می‌شود.

نتیجه ۸.۲.۱. [۵] در هر گراف، تعداد رئوس فرد، زوج است.

تعریف ۹.۲.۱. گراف G ، k -منتظم است هرگاه به ازای هر رأس $v \in V(G)$ ، $deg_G(v) = k$. گرافی که درجه تمام رأس‌های آن با هم برابر باشند گراف منتظم 17 نامیده می‌شود.

گراف پترسن 18 یک مثال مشهور از گراف‌های 3 -منتظم است (شکل ۴.۱). توجه داشته باشید که هر گراف کامل K_n ، $(n-1)$ -منتظم و هر گراف تهی، منتظم از درجه صفر است. هم‌چنین در نظر داشته باشید که اگر G دارای n رأس و k -منتظم باشد آن‌گاه G تعداد $\frac{kn}{2}$ یال دارد.



شکل ۴.۱: گراف پترسن

تعریف ۱۰.۲.۱. اگر در یک گراف، مجموعه رئوس و مجموعه یال‌ها متناهی باشند، آن گراف را متناهی 19 می‌نامیم.

تعریف ۱۱.۲.۱. گراف دوبخشی 20 گرافی است که می‌توان مجموعه رئوس آن را به دو زیرمجموعه X و Y چنان افراز کرد به طوری که یک سر تمام یال‌های آن در X و سر دیگر آن‌ها در Y باشد. شکل ۵.۱ را مشاهده کنید.

¹⁴degree

¹⁵Even vertex

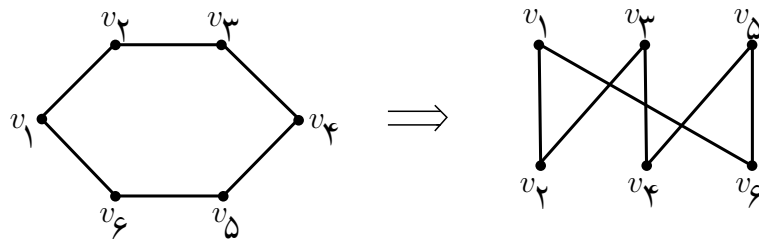
¹⁶Odd vertex

¹⁷Regular graph

¹⁸Petersen graph

¹⁹Finite graph

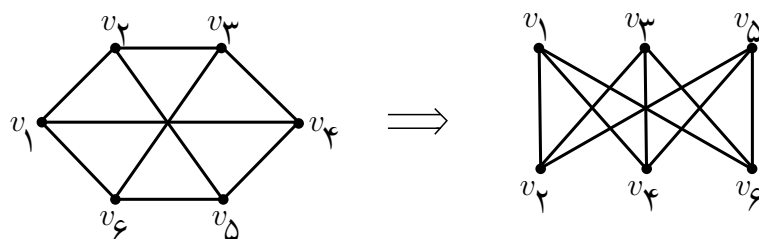
²⁰Bipartite graph



شکل ۵.۱: گراف دوبخشی

تعریف ۱۲.۲.۱. گراف دوبخشی کامل^{۲۱} گرافی است دوبخشی با بخش‌های X و Y به طوری که در آن هر رأس X به هر رأس Y متصل شده باشد. اگر $|X| = m$ و $|Y| = n$ ، در این صورت گراف دوبخشی کامل را با $K_{m,n}$ نشان می‌دهیم. (شکل ۶.۱)

ملاحظه کنید که گراف دوبخشی کامل دارای mn یال می‌باشد. همچنین توجه داشته باشید که K_2 تنها گراف کاملی است که دوبخشی کامل می‌باشد.



شکل ۶.۱: گراف دوبخشی کامل $K_{3,3}$

تعریف ۱۳.۲.۱. گراف H زیرگراف^{۲۲} G است (می‌نویسیم $H \subseteq G$)، هرگاه $V(H) \subseteq V(G)$ و $E(H) \subseteq E(G)$ و ψ_H از محدود کردن ψ_G به $E(H)$ حاصل شده باشد. در صورتی که زیرگراف H از G در شرط $V(H) = V(G)$ صدق کند، به آن یک زیرگراف فراگیر^{۲۳} از G گفته می‌شود. زیرگراف فراگیر از گراف G را در شکل ۷.۱ رسم کرده‌ایم.

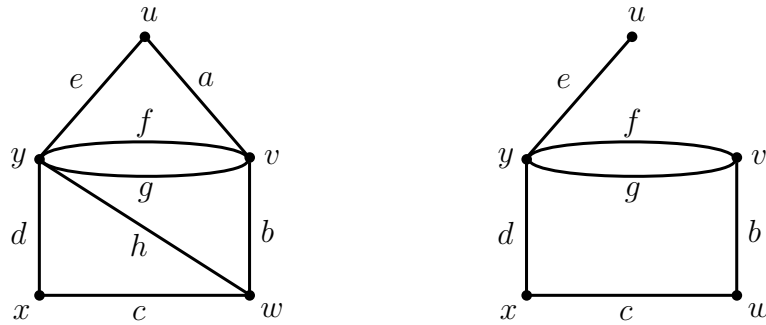
تعریف ۱۴.۲.۱. گراف $G = (V, E)$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنید V' زیرمجموعه ناتهی از V باشد. زیرگرافی از G را که مجموعه رئوس آن V' و مجموعه یال‌هایش، مجموعه‌ای از آن یال‌های G باشد که هر دو انتهای آن‌ها در V' قرار دارد، زیرگراف القاشده به وسیله V' نامیده شده و با $G[V']$ نشان داده می‌شود. هم‌چنین گوئیم $G[V']$ یک زیرگراف القایی^{۲۴} از G می‌باشد. زیرگراف القایی $G[\{u, v, x\}]$ از G گراف G در شکل ۷.۱ در شکل ۸.۱ نشان داده شده است.

^{۲۱}Complete bipartite graph

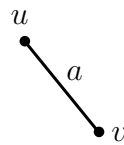
^{۲۲}Subgraph

^{۲۳}Spanning subgraph

^{۲۴}Induced subgraph



شکل ۷.۱: گراف G و یک زیرگراف فراگیر از آن



$x \bullet$

شکل ۸.۱: زیرگراف القایی $G[\{u, v, x\}]$

تعریف ۱۵.۲.۱. فرض کنید افزایی از رأس‌های V به زیرمجموعه‌های ناتهی V_1, V_2, \dots, V_i وجود دارد به طوری که در آن دو رأس u و v مجاور هستند اگر و تنها اگر u و v هر دو به مجموعه V_i یکسانی تعلق داشته باشند. در این صورت زیرگراف‌های $G[V_1], G[V_2], \dots, G[V_i]$ مولفه‌های G نامیده می‌شوند.^{۲۵}

تعریف ۱۶.۲.۱. گراف $G(V, E)$ را همبند^{۲۶} می‌نامیم، هرگاه برای هر افزای مجموعه رئوس V به دو زیرمجموعه ناتهی X و Y ، یالی با یک سر در X و یک سر در Y موجود باشد، در غیر این صورت گراف G ناهمبند^{۲۷} می‌باشد. بدیهی است هر گراف ناهمبند متناهی را می‌توان به صورت اجتماع تعداد متناهی از گراف‌های همبند ماکسیمال با مجموعه رئوس مجزا در نظر گرفت. در این صورت هر یک از این گراف‌های همبند را یک مولفه گراف G می‌نامند. به عبارت دیگر اگر G دارای دقیقاً یک مولفه باشد، G همبند است و در غیر این صورت گراف G ناهمبند است. گراف‌هایی همبند و ناهمبند را در شکل ۹.۱ رسم کرده‌ایم.

تعریف ۱۷.۲.۱. به گراف همبند فاقد دور، درخت^{۲۸} می‌گویند. یک جنگل^{۲۹}، گرافی است که هر مولفه آن، یک درخت باشد. درخت‌های شش رأسی را در شکل ۱۰.۱ نمایش داده‌ایم.

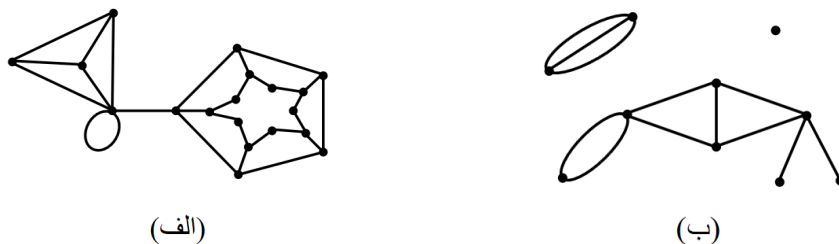
^{۲۵}Component

^{۲۶}Connected graph

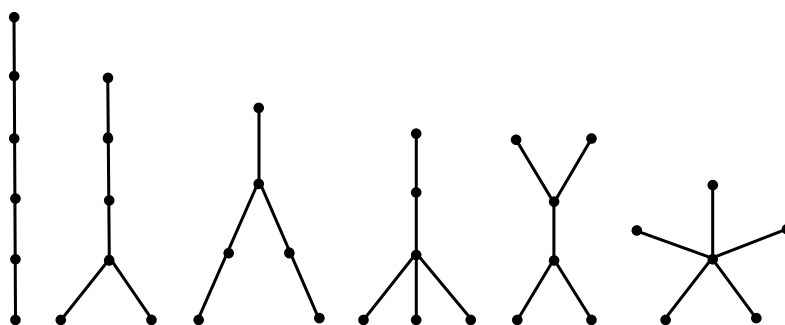
^{۲۷}Disconnected graph

^{۲۸}Tree

^{۲۹}Forest



شکل ۹.۱: (الف) گراف همبند و (ب) گراف ناهمبند با سه مولفه



شکل ۱۰.۱: درخت‌های شش راسی

تعریف ۱۸.۲.۱. یک k -رنگ آمیزی راسی گراف G عبارت است از تخصیص k رنگ $1, 2, \dots, k$ به رئوس G . اگر هیچ دو رأس مجاور هم‌رنگ نباشند، رنگ آمیزی را مجاز^{۳۰} (واقعی) می‌نامند. به مینیمم رنگ به کار رفته برای رنگ آمیزی گراف، عدد رنگی^{۳۱} گراف G می‌گویند و با $\chi(G)$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۱۹.۲.۱. زیرمجموعه M از $E(G)$ را یک جورسازی^{۳۲} در G نامند، اگر عناصرشان پیوندها بوده و هیچ دو پیوندی در G مجاور نباشند. این جورسازی رأس v را اشباع می‌کند، اگر یالی از M از v بگذرد یا یالی از M مجاور رأس v باشد و v را نیز M -اشباع می‌نامیم.

تعریف ۲۰.۲.۱. M یک جورسازی ماکزیمم^{۳۳} است، هرگاه هیچ جورسازی M' با شرط $|M'| > |M|$ در G وجود نداشته باشد. در شکل ۱۱.۱، خطوط (یال‌های) پررنگ نشان‌دهنده جورسازی ماکزیمم در گراف G می‌باشد.

تعریف ۲۱.۲.۱. یک پوشش^{۳۴} از گراف G ، زیرمجموعه K از V است به طوری که هر یال G دارای لاًقل یک انتها در K باشد. در شکل ۱۲.۱، رئوس v_1, \dots, v_5 یک پوشش از گراف G می‌باشند.

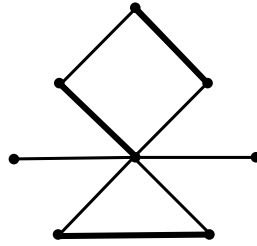
^{۳۰}Proper

^{۳۱}Chromatic number

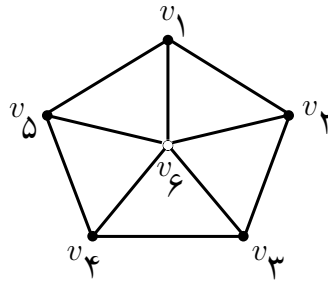
^{۳۲}Matching

^{۳۳}Maximum matching

^{۳۴}Covering

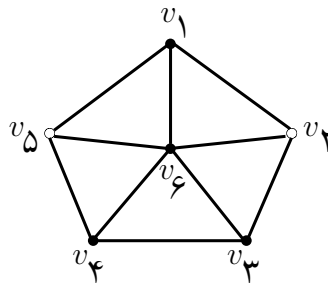


شکل ۱۱.۱: یک جورسازی ماکزیمم از گراف G



شکل ۱۲.۱: یک پوشش از G

تعریف ۲۲.۲.۱. یک پوشش K از V ، مینیمم پوشش^{۳۵} است اگر G دارای پوشش K' با $|K'| < |K|$ نباشد. در شکل ۱۳.۱، رئوس v_1, v_3, v_4, v_6 یک پوشش مینیمم از گراف G می‌باشند.



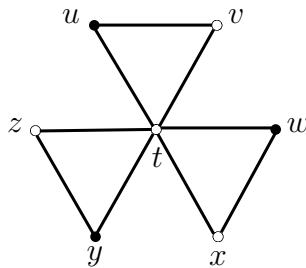
شکل ۱۳.۱: مینیمم پوشش از G

تعریف ۲۳.۲.۱. زیرمجموعه S از رئوس گراف G که هیچ دو رأس آن در G مجاور نباشند (رئوسی که بین آن‌ها یالی وجود نداشته باشد)، یک مجموعه مستقل^{۳۶} از G نامیده می‌شود. مجموعه مستقل S ماکزیمم است هرگاه هیچ مجموعه مستقل S' با شرط $|S'| < |S|$ وجود نداشته باشد. تعداد رأس‌ها در یک مجموعه مستقل ماکزیمم G ، عدد استقلال رأسی^{۳۷} G نامیده می‌شود و با $\alpha(G)$ نمایش داده می‌شود. (شکل ۱۴.۱)

^{۳۵}Minimum covering

^{۳۶}Independent set

^{۳۷}Vertex independence number



شکل ۱۴.۱: مجموعه مستقل رأسی ماکزیمم

در گراف شکل ۱۴.۱، ماکزیمم اندازه مجموعه مستقل برابر با ۳ است لذا $\alpha(G) = ۳$. یک مجموعه مستقل سه رأسی $\{u, w, y\}$ را در این شکل نشان داده‌ایم.

تعریف ۲۴.۲.۱. دو گراف G و H **یکریخت**^{۳۸} می‌باشند هرگاه تابع یک‌به‌یک و پوشای f تعریف شده به صورت $f : V(G) \rightarrow V(H)$ بین مجموعه رئوس دو گراف G و H وجود داشته باشد به طوری که $uv \in E(G)$ اگر و تنها اگر $f(u)f(v) \in E(H)$. در این صورت f یک **یکریختی**^{۳۹} از G به H نامیده می‌شود.

تعریف ۲۵.۲.۱. **یکریختی** $f : V(G) \rightarrow V(G)$ را یک **خودریختی**^{۴۰} روی G می‌نامیم. مجموعه همه خودریختی‌های روی G ، ناتهی و متناهی می‌باشد زیرا تعداد رئوس، متناهی است.

تعریف ۲۶.۲.۱. گراف G و انتساب آستانه $\tau : V(G) \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ به رئوس G را در نظر بگیرید به طوری که $\tau(v) \leq \deg_G(v)$. یک زیرمجموعه از رئوس چون D **مونوپولی** τ -**پویا**^{۴۱} گفته می‌شود اگر بتوان رئوس G را به زیرمجموعه‌های D_0, \dots, D_k افزایش کرد به طوری که $D_0 = D$ و برای هر $i \in \{0, \dots, k-1\}$ ، هر رأس v در D_{i+1} حداقل $\tau(v)$ همسایه در $D_0 \cup \dots \cup D_i$ داشته باشد. در این جا، \mathbb{N} همان مجموعه اعداد طبیعی می‌باشد.

در گراف شکل ۱۵.۱، با در نظر گرفتن $\tau(v) = ۲$ برای هر رأس v و افزایش‌های

$$D_0 = \{v_1, v_3, v_{10}\}, \quad D_1 = \{v_2, v_4, v_7\}$$

$$D_2 = \{v_5, v_8, v_9\}, \quad D_3 = \{v_6\}$$

برای مجموعه رئوس گراف مفروض، زیرمجموعه $D = D_0$ **مونوپولی** τ -**پویا** می‌باشد. زیرا برای هر رأس $v \in D_{i+1}$ که $i = 0, 1, 2$ داریم

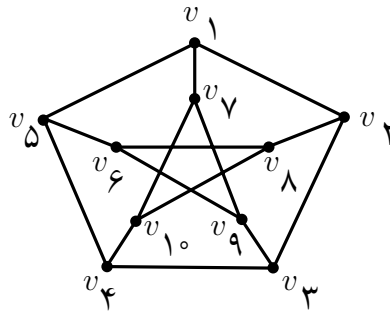
$$\deg_{\bigcup_{j=0}^i D_j} (v) \geq \tau(v) = ۲.$$

^{۳۸}Isomorphis

^{۳۹}Isomorphism

^{۴۰}Automorphism

^{۴۱}Dynamic monopoly(dynamo)



شکل ۱۵.۱: گراف ۳-منتظم پترسن

به عبارت دیگر برای هر $i = 0, 1, 2$ ، هر رأس v در D_{i+1} حداقل $\tau(v) = 2$ همسایه در $D_0 \cup \dots \cup D_i$ دارد.

تعریف ۲۷.۲.۱. برای هر انتساب آستانه τ از گراف G ، آستانه متوسط τ عبارت است از

$$\bar{\tau} = \frac{\sum_{v \in V(G)} \tau(v)}{|G|}.$$

تعریف ۲۸.۲.۱. با توجه به گراف G و یک انتساب آستانه τ به رؤس آن، مینیمم مونوپولی پویا^{۴۳} یعنی مینیمم تعداد رؤس در هر مونوپولی پویا از G را توسط $\text{dyn}_\tau(G)$ نشان می‌دهیم.

به عنوان مثال در شکل ۱۵.۱ برای اندازه مینیمم مونوپولی پویا از گراف مفروض داریم

$$|D| = |D_0| = \text{dyn}_\tau(G) = 3.$$

تعریف ۲۹.۲.۱. فرض کنید G یک گراف و t عددی مثبت باشد، در این صورت بزرگ‌ترین مونوپولی پویا^{۴۴} را تعریف می‌کنیم

$$L\text{dyn}_t(G) = \max \left\{ \text{dyn}_\tau(G) \mid \bar{\tau} \leq t \right\}.$$

تعریف ۳۰.۲.۱. فرض کنید $D \subseteq V(G)$ و یک τ_0 وجود داشته باشند به طوری که $\bar{\tau}_0 \leq t$ و $|D| = \text{dyn}_{\tau_0}(G) = L\text{dyn}_t(G)$ در این صورت (D, τ_0) یک $L-t$ مونوپولی پویا^{۴۵} از G می‌باشد.

تعریف ۳۱.۲.۱. فرض کنید برای هر $n, n \in \mathbb{N}$ یک گراف G_n و t_n یک عدد باشد به طوری که $0 \leq t_n \leq 2\epsilon(G_n)$ گوئیم $\{(G_n, t_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ یک L مونوپولی پویا-محدود^{۴۶} است هرگاه یک $\lambda < 1$ و ثابت موجود باشد به طوری که برای هر n ،

$$L\text{dyn}_{t_n}(G_n) \leq \lambda |G_n|.$$

^{۴۲} Average threshold

^{۴۳} Minimum dynamo

^{۴۴} Largest dynamo

^{۴۵} t -Ldynamo

^{۴۶} Ldynamo-bounded

فرض کنید یک خانواده F از گراف‌ها داده شده است به طوری که هر گراف G از F دارای یک انتساب آستانه است. حال تعریف زیر را ارائه می‌دهیم.

تعریف ۳۲.۲.۱. خانواده F مونوپولی پویا-نامحدود^{۴۷} نامیده می‌شود اگر یک تابع $f(x)$ وجود داشته باشد به طوری که هرگاه $x \rightarrow \infty$ در این صورت $f(x) \rightarrow \infty$ و برای هر گراف G از F ، یکی هست که در شرط $f(n) \leq \text{dyn}(G)$ صدق کند که در آن $n = |G|$.

تعریف ۳۳.۲.۱. با توجه به (G, τ) ، هر زیرگراف القایی $K \subseteq G$ ، یک زیرگراف τ -مقاوم^{۴۸} در G است، اگر برای هر رأس $v \in V(K)$ نامساوی زیر برقرار باشد

$$\text{deg}_K(v) \geq \text{deg}_G(v) - \tau(v) + 1.$$

^{۴۷}Dynamo-unbounded family

^{۴۸}Resistant subgraph

فصل ۲

مونوپولی‌های پویا با آستانه‌های متوسط

۱.۲ مقدمه

در این فصل برخی از مفاهیم مربوط به آستانه متوسط را معرفی می‌کنیم و برخی از نتایج پایه‌ای و کران‌هایی برای اندازه مونوپولی‌های پویا با آستانه‌های متوسط را اثبات می‌کنیم. ابتدا یک کران پایین برای کوچک‌ترین اندازه هر مونوپولی پویا برحسب آستانه متوسط و مرتبه گراف به دست می‌آوریم. هم‌چنین یک کران بالا برحسب مینیمم پوشش رأس از گراف‌ها به دست می‌آوریم. در نهایت یک کران بالای اساسی برای کوچک‌ترین اندازه هر مونوپولی پویا برحسب آستانه متوسط و درجه‌های رأس به دست می‌آوریم. نشان می‌دهیم این کران توسط یک الگوریتم زمان-چندجمله‌ای به دست می‌آید. هم‌چنین با توجه به این کران، برخی از کران‌های بالا را نتیجه می‌گیریم. با استفاده از این کران نشان می‌دهیم که با توجه به هر گراف (G, τ) با n رأس و با آستانه متوسط $\bar{\tau}$ ، یک مونوپولی τ -پویا با حداکثر $\frac{n\bar{\tau}}{\delta(G)+1}$ رأس وجود دارد که در آن $\delta(G)$ مینیمم درجه از گراف G است. با در نظر گرفتن تعریف ۲۶.۲.۱ در فصل ۱، آستانه هر رأس v در گراف G را با $\tau(v)$ نشان می‌دهیم. توجه داشته باشید که ممکن است برای برخی از $D_i = \emptyset$ ، $i \geq 0$. ماکزیمم آستانه و مینیمم آستانه در G را به ترتیب با t_M و t_m نشان می‌دهیم. در این فصل، نشان می‌دهیم مقادیر $dyn_\tau(G)$ روی همه انتساب‌های آستانه با آستانه متوسط یکسان، مجموعه‌ای پیوسته از اعداد صحیح می‌باشد (گزاره ۱۱.۳.۲). عنصر ماکزیمم این مجموعه اولین بار در [۲۷] بررسی شده است که در آنجا نماد زیر معرفی شده است. فرض کنید t یک عدد نامنفی گویا باشد به طوری که $t|G|$ عددی صحیح است، پس $Dyn_t(G)$ به صورت $Dyn_t(G) = \max_{\tau: \bar{\tau}=t} dyn_\tau(G)$ تعریف می‌شود. در تعریف $Dyn_t(G)$ فرض بر این است که $t|G|$ عددی صحیح است. به منظور در نظر گرفتن تمام مقادیر t ، نماد جدید $Ldyn_t(G)$ (بزرگ‌ترین مونوپولی پویا) را می‌سازیم. در ادامه یک شرط لازم و کافی برای یک خانواده از گراف‌ها تا L مونوپولی پویا-محدود شوند، به دست می‌آوریم. هم‌چنین نشان می‌دهیم الگوریتمی برای محاسبه $Ldyn_t(F)$ که F یک جنگل است، در زمان چندجمله‌ای وجود دارد. هدف ما در این فصل، مطالعه مونوپولی‌های پویا و گسترش برخی از نتایج قبلی برحسب آستانه متوسط می‌باشد. برای هر عدد گویا t ، یک پارامتر اصلی مطالعه شده در این فصل بزرگ‌ترین مونوپولی پویا

است که در فصل ۱ به تعریف آن اشاره کرده‌ایم.

۲.۲ کران‌های پایین برای مونوپولی‌های پویا

در آغاز این بخش، یک لم از [۲۶] را لازم داریم لذا تنها به بیان آن پرداخته و در فصل ۴ به‌طور کامل شرح می‌دهیم.

لم ۱.۲.۲. فرض کنید (G, τ) یک گراف از مرتبه n و $\epsilon(G)$ چگالی یالی از گراف G باشد. قرار دهید $t_m = \min\{\tau(v) : v \in V(G)\}$ در این صورت

$$n\left(1 - \frac{\epsilon(G)}{t_m}\right) \leq \text{dyn}(G).$$

در این بخش کران پایین لم ۱.۲.۲ را برحسب آستانه متوسط تعمیم می‌دهیم.

قضیه ۲.۲.۲. فرض کنید G یک گراف با ماکزیمم درجه Δ و τ یک انتساب آستانه به رئوس G باشد. همچنین فرض کنید $\bar{\tau}$ آستانه متوسط τ و t_M ماکزیمم آستانه‌ها باشد. در این صورت برای هر مونوپولی τ -پویا M از G داریم

$$|M| \geq |G| \left(1 - \frac{\epsilon(G)}{\bar{\tau}}\right) \left(\frac{\bar{\tau}}{t_M}\right) \geq |G| \left(1 - \frac{\epsilon(G)}{\bar{\tau}}\right) \left(\frac{\bar{\tau}}{\Delta}\right).$$

برهان. فرض کنید $n = |G|$. یک افراز D_0, D_1, \dots, D_i از $V(G)$ وجود دارد به‌طوری‌که $D_0 = M$ و برای هر $i \geq 1$ و هر رأس $v \in D_i$ ، حداقل $\tau(v)$ یال بین v و $D_{i-1} \cup \dots \cup D_0$ وجود دارد. بنابراین حداقل $\sum_{v \in V(G) \setminus M} \tau(v)$ یال در G وجود دارد. یعنی

$$\sum_{v \in V(G) \setminus M} \tau(v) \leq |E(G)|.$$

در این صورت می‌توان نوشت

$$|E(G)| \geq \sum_{v \in V(G) \setminus M} \tau(v) = \sum_{v \in V(G)} \tau(v) - \sum_{v \in M} \tau(v). \quad (1.2)$$

از آن‌جا که $t_M = \max\{\tau(v) : v \in V(G)\}$ پس $t_M \geq \tau(v)$.

$$-\tau(v) \geq -t_M. \quad (2.2)$$

با جای‌گذاری نامساوی (۲.۲) در (۱.۲) و این‌که t_M ثابت است داریم

$$|E(G)| \geq \sum_{v \in V(G)} \tau(v) - \sum_{v \in M} t_M = \sum_{v \in V(G)} \tau(v) - t_M |M|.$$

در نتیجه

$$t_M |M| \geq \sum_{v \in V(G)} \tau(v) - |E(G)|.$$

با ضرب نامساوی اخیر در $\frac{|G|}{t_M|G|}$ به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} |M| &\geq \frac{1}{t_M} \left(\frac{|G|}{|G|} \right) \left(\sum_{v \in V(G)} \tau(v) - |E(G)| \right) \\ &= |G| \left(\frac{1}{t_M} \right) (\bar{\tau} - \epsilon(G)) \\ &= |G| \left(\frac{\bar{\tau}}{t_M} \right) \left(1 - \frac{\epsilon(G)}{\bar{\tau}} \right). \end{aligned}$$

بنابراین نامساوی اول از حکم قضیه را ثابت کردیم. یعنی

$$|M| \geq |G| \left(1 - \frac{\epsilon(G)}{\bar{\tau}} \right) \left(\frac{\bar{\tau}}{t_M} \right).$$

حال چون $\tau(v) \leq \deg(v) \leq \Delta$ و از طرفی t_M ماکزیمم آستانه‌هاست، لذا t_M حداکثر می‌تواند $\deg(v)$ باشد. در نتیجه

$$t_M \leq \Delta \implies \frac{1}{t_M} \geq \frac{1}{\Delta}.$$

پس نامساوی دوم از حکم قضیه نیز اثبات گردید. یعنی

$$|M| \geq |G| \left(1 - \frac{\epsilon(G)}{\bar{\tau}} \right) \left(\frac{\bar{\tau}}{\Delta} \right).$$

□

نتیجه زیر یک کران پایین برحسب چگالی یالی گراف‌ها به ما می‌دهد.

نتیجه ۳.۲.۲. فرض کنید δ هر ثابت مثبت و G گرافی با چگالی یالی ϵ باشد. هم‌چنین فرض کنید $\bar{\tau}$ هر ثابت با $\bar{\tau} \geq (1 + \delta)\epsilon$ و τ هر انتساب آستانه با متوسط $\bar{\tau}$ و M هر مونوپولی τ -پویا برای G باشد. در این صورت

$$|M| \geq \delta\epsilon.$$

برهان. فرض کنید $n = |G|$. با استفاده از کران پایین قضیه ۲.۲.۲ می‌دانیم

$$|M| \geq |G| \left(1 - \frac{\epsilon(G)}{\bar{\tau}} \right) \left(\frac{\bar{\tau}}{t_M} \right),$$

که در آن t_M ماکزیمم آستانه‌ها می‌باشد. هم‌چنین با استفاده از فرض $\bar{\tau} \geq (1 + \delta)\epsilon$ و کران فوق برای $|M|$ می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} |M| &\geq |G| \left(1 - \frac{\epsilon(G)}{\bar{\tau}} \right) \left(\frac{\bar{\tau}}{t_M} \right) \geq |G| \left(1 - \frac{\epsilon(G)}{(1 + \delta)\epsilon(G)} \right) \left(\frac{(1 + \delta)\epsilon(G)}{t_M} \right) \\ &\geq |G| \left(1 - \frac{\epsilon(G)}{\epsilon(G) + \delta\epsilon(G)} \right) \left(\frac{\epsilon(G) + \delta\epsilon(G)}{t_M} \right) \\ &\geq |G| \left(\frac{\epsilon(G) + \delta\epsilon(G) - \epsilon(G)}{\epsilon(G) + \delta\epsilon(G)} \right) \left(\frac{\epsilon(G) + \delta\epsilon(G)}{t_M} \right) \\ &\geq |G| \left(\frac{\delta\epsilon(G)}{t_M} \right). \end{aligned} \tag{۳.۲}$$

از طرف دیگر $t_M = \max\{\tau(v) : v \in V(G)\}$ و $\tau(v) \leq t_M \leq \deg(v) < n$ لذا

$$t_M < n \implies \frac{1}{t_M} > \frac{1}{n} = \frac{1}{|G|}.$$

با جای‌گذاری این نامساوی در (۳.۲) داریم

$$|M| \geq |G| \left(\frac{\delta\epsilon(G)}{|G|} \right) \implies |M| \geq \delta\epsilon(G).$$

□

با استفاده از قضیه ۲.۲.۲ نتیجه زیر را داریم.

نتیجه ۴.۲.۲. فرض کنید G یک گراف $(2r+1)$ -منتظم با n رأس باشد. همچنین فرض کنید τ یک انتساب آستانه به رئوس G با آستانه متوسط $\bar{\tau} = r+1$ باشد. در این صورت هر مونوپولی پویا برای (G, τ) حداقل $\frac{n}{4r+2}$ رأس دارد.

برهان. با توجه به قضیه ۲.۲.۲ داریم

$$|M| \geq |G| \left(1 - \frac{\epsilon(G)}{\bar{\tau}} \right) \left(\frac{\bar{\tau}}{\Delta} \right). \quad (4.2)$$

از آن جا که G گرافی $(2r+1)$ -منتظم است پس

$$\Delta = 2r+1.$$

همچنین چگالی یالی گراف عبارت است از

$$\epsilon(G) = \frac{|E(G)|}{|V(G)|}.$$

اما

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2|E(G)|.$$

در این صورت

$$|E(G)| = \frac{\sum_{v \in V(G)} \deg(v)}{2} = \frac{|V(G)|(2r+1)}{2}.$$

لذا مقدار چگالی یالی برابر با $\frac{2r+1}{2}$ محاسبه شد.

با قراردادن مقادیر به دست آمده برای Δ و $\epsilon(G)$ در (۴.۲) داریم

$$\begin{aligned} |M| &\geq |G| \left(1 - \frac{(2r+1)/2}{r+1} \right) \left(\frac{r+1}{2r+1} \right) \\ &= |G| \left(\frac{2r+2-2r-1}{2(r+1)} \right) \left(\frac{r+1}{2r+1} \right) \\ &= |G| \frac{1}{2(2r+1)} = \frac{n}{4r+2}. \end{aligned}$$

□

۳.۲ بزرگ‌ترین مونوپولی‌های پویا در گراف‌ها با آستانه متوسط داده شده

۱.۳.۲ برخی کران‌های بالا و بررسی زمان چندجمله‌ای مونوپولی‌های پویا

این بخش به برخی از کران‌های بالای موجود برای اندازه‌ی مونوپولی‌های پویا در شرایط آستانه متوسط اختصاص داده شده است. ابتدا در گزاره زیر یک کران بالای عمومی برحسب مینیم پوشش رأس از گراف G برای $Ldyn_{\bar{\tau}=2\epsilon}(G)$ زمانی که آستانه متوسط $\bar{\tau}$ مقداری دل‌خواه است به‌طوری‌که $0 \leq \bar{\tau} \leq 2\epsilon(G)$ به‌دست می‌آوریم. توجه داشته باشید که آستانه متوسط در G نمی‌تواند از $2\epsilon(G)$ بیشتر باشد. با توجه به تعریف ۲۱.۲.۱ کوچک‌ترین اندازه هر پوشش رأس در گراف G با $\beta(G)$ نشان داده می‌شود.

گزاره ۱.۳.۲. فرض کنید G گرافی بدون رأس تنها باشد.

(i) فرض کنید τ هر انتساب آستانه با متوسط $\bar{\tau} = 2\epsilon$ باشد. در این صورت هر مونوپولی τ -پویا دارای

$$\beta(G) \text{ رأس می‌باشد. به‌خصوص } Ldyn_{\bar{\tau}=2\epsilon}(G) = \beta(G).$$

$$(ii) \text{ برای هر ثابت } t \leq 2\epsilon, Ldyn_{\bar{\tau}=t}(G) \leq \beta(G).$$

برهان. (i) فرض کنید $\tau : V(G) \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ انتساب آستانه به رؤس G باشد به‌طوری‌که

$$\tau(v) \leq deg_G(v), \quad v \text{ هر رأس } v, \quad \bar{\tau} = 2\epsilon(G)$$

$$\sum_{v \in V(G)} \tau(v) \leq \sum_{v \in V(G)} deg_G(v) = 2|E(G)|.$$

اما

$$\sum_{v \in V(G)} \tau(v) = n\bar{\tau} = n2\epsilon(G) = 2|E(G)|.$$

لذا

$$2|E(G)| \leq 2|E(G)|.$$

با توجه به این‌که طرفین نامساوی فوق با یک‌دیگر برابر شده‌اند، لذا برای هر رأس v داریم

$$\tau(v) = deg_G(v). \quad (5.2)$$

حال M را یک مونوپولی پویا و یال uv را خارج از M در نظر می‌گیریم. فرض کنید زیرمجموعه‌های D_0, D_1, \dots, D_t افزاینده‌ی رؤس G باشند به‌طوری‌که

$$(D_0 \cup D_1 \cup \dots \cup D_{i-1}) \cap \{u, v\} = \emptyset.$$

$i \geq 1$ را کوچک‌ترین اندیسی می‌گیریم که $D_i \cap \{u, v\} \neq \emptyset$. بدون کاسته شدن از کلیت می‌توان فرض

کرد $u \in D_i$ در این صورت

$$\tau(u) \leq deg_{\bigcup_{j=1}^{i-1} D_j}(u). \quad (6.2)$$

از آن‌جا که رأس v یک همسایه u است یعنی $v \in N(u)$ ولی $v \notin \bigcup_{j=1}^{i-1} D_j$ پس داریم

$$\deg_{\bigcup_{j=1}^{i-1} D_j}(u) \leq \deg_G(u) - 1.$$

بنابر رابطه (۵.۲)، نامساوی فوق به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\deg_{\bigcup_{j=1}^{i-1} D_j}(u) \leq \deg_G(u) - 1 \leq \tau(u) - 1. \quad (7.2)$$

با توجه به روابط (۶.۲) و (۷.۲) تناقض زیر را داریم

$$\tau(u) \leq \tau(u) - 1.$$

تناقض بالا نشان دهنده این است که یک رأس u یا v بایستی در M قرار داشته باشد. لذا هر یال، لااقل یک رأس در M دارد. بنابراین M یک پوشش رأس است پس باید حداقل به اندازه β رأس داشته باشد. لذا

$$|M| \geq \beta(G). \quad (8.2)$$

حال بایستی ثابت کنیم هر مینیم پوشش رأس از گراف G یک مونوپولی پویا است. توجه کنید که اگر $D_0 = M$ یک پوشش رأسی مینیمال باشد و $D_1 = V(G) \setminus M$ ، از آن‌جا که بین رئوس D_1 یالی وجود ندارد پس همه همسایه‌های هر رأس در M است. در این صورت D_1 یک مجموعه مستقل در G است. لذا برای هر رأس $v \in D_1$ و با توجه به رابطه (۵.۲) داریم

$$\deg_{D_1}(v) = \deg_G(v) = \tau(v).$$

پس D_0 یک مونوپولی پویا می‌باشد. لذا

$$|M| \leq \beta(G). \quad (9.2)$$

از رابطه (۸.۲) و (۹.۲) داریم

$$|M| = \beta(G).$$

بنابراین $\text{dyn}_\tau(G) = \beta(G)$. در نتیجه

$$L\text{dyn}_{\bar{\tau}=\tau\epsilon}(G) = \max\{\text{dyn}_\tau(G) | \bar{\tau} = \tau\epsilon\} = \beta(G).$$

(ii) فرض کنید $L\text{dyn}_{\bar{\tau}=t}(G)$ توسط مجموعه خاصی از آستانه‌ها به دست آمده است (با یک τ خاصی اتفاق می‌افتد). فرض کنید D_0 یک پوشش رأسی برای G باشد. لذا D_0 یک مونوپولی پویا برای آستانه‌هاست. از طرفی در این‌جا بایستی مینیم‌ها را در نظر بگیریم. اگر یکی از اندازه β بگیریم، برای آن یک مونوپولی وجود دارد. پس

$$\text{dyn}_\tau(G) \leq \beta(G).$$

به عبارت دیگر برای هر τ به طوری که $\bar{\tau} = t$ داریم $\text{dyn}_\tau(G) \leq \beta(G)$. در نتیجه

$$L\text{dyn}_{\bar{\tau}=t}(G) = \max\{\text{dyn}_\tau(G) | \bar{\tau} = t\} \leq \beta(G).$$

□

قضیه‌های زیر در [۵] نشان داده شده است.

قضیه ۲.۳.۲. مجموعه $S \subseteq V(G)$ یک مجموعه مستقل از G است اگر و تنها اگر $S \setminus V(G)$ پوشش G باشد.

همان‌طور که در فصل ۱ ذکر شد، در گراف G ، ماکزیمم تعداد رئوس مجموعه مستقل (عدد استقلال) و عدد رنگی به ترتیب با $\alpha(G)$ و $\chi(G)$ نشان داده می‌شوند.

$$\alpha(G) + \beta(G) = |G|. \quad \text{قضیه ۳.۳.۲}$$

از آن‌جا که $\chi(G)$ افراز رئوس G به مجموعه‌های مستقل است، پس حداکثر می‌تواند $\alpha(G)$ باشد. بنابراین

$$|G| \leq \alpha(G)\chi(G).$$

با توجه به این توضیحات و گزاره ۱.۳.۲ نتیجه زیر به دست می‌آید.

نتیجه ۴.۳.۲. برای هر ثابت $t \leq 2\epsilon$ داریم

$$L_{\text{dyn}_{\bar{\tau}=t}}(G) \leq |G| \left(1 - \frac{1}{\chi(G)}\right).$$

برهان. بنا بر گزاره ۱.۳.۲ برای هر ثابت $t \leq 2\epsilon$ داریم

$$L_{\text{dyn}_{\bar{\tau}=t}}(G) = \max\{\text{dyn}_{\tau}(G) \mid \bar{\tau} = t\} \leq \beta(G).$$

با توجه به قضیه ۳.۳.۲ رابطه فوق به شکل زیر تبدیل می‌شود

$$L_{\text{dyn}_{\bar{\tau}=t}}(G) \leq |G| - \alpha(G). \quad (۱۰.۲)$$

از طرفی از نابرابری $|G| \leq \alpha(G)\chi(G)$ داریم

$$\alpha(G) \geq \frac{|G|}{\chi(G)}.$$

لذا

$$-\alpha(G) \leq \frac{-|G|}{\chi(G)}.$$

با جای‌گذاری مقدار به دست آمده برای $-\alpha(G)$ از نامساوی بالا در (۱۰.۲) داریم

$$L_{\text{dyn}_{\bar{\tau}=t}}(G) \leq |G| - \frac{|G|}{\chi(G)} = |G| \left(1 - \frac{1}{\chi(G)}\right).$$

□

این نتیجه نشان می‌دهد اگر خانواده‌ای از گراف‌ها با ماکزیمم درجه محدود را در نظر بگیریم، آن‌گاه برای برخی λ ثابت و برای هر خانواده از G داریم

$$L_{\text{dyn}_{\bar{\tau}}}(G) \leq \lambda|G|.$$

در ادامه یک کران بالای اساسی برحسب آستانه متوسط و درجه‌های رأس به دست می‌آوریم و با استفاده از این کران، برخی از کران‌های بالای دیگر را نتیجه می‌گیریم. فرض کنید G یک گراف و t عددی مثبت باشد به طوری که $t|G|$ عددی صحیح است. فرض کنید τ هر انتساب با میانگین $\bar{\tau}$ باشد به طوری که برای هر رأس v ، $\tau(v) \leq \text{deg}_G(v)$. فرض کنید $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$ یک دنباله درجه از G به صورت

صعودی باشد. در این خصوص قضیه‌ای از [۱۸] را بیان و اثبات می‌کنیم که در آن برای هر رأس v و زیرمجموعه S از رئوس گراف G ، مجموعه همسایه‌های v در S را توسط $N_S(v)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۵.۳.۲. فرض کنید G یک گراف با دنباله درجه $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$ به شکل صعودی باشد. همچنین فرض کنید τ هر انتساب آستانه به رئوس G با آستانه متوسط $\bar{\tau}$ باشد. در این صورت

$$Ldyn_{\bar{\tau}=t}(G) \leq \max \left\{ k : \sum_{i=1}^k (d_i + 1) \leq n\bar{\tau} \right\}.$$

برهان. آستانه و درجه هر رأس v در G را به ترتیب با $\tau(v)$ و $deg(v)$ نشان دهید. فرض کنید M هر مونوپولی τ -پویا از G با کم‌ترین تعداد رأس و D_1, \dots, D_l, M افزازهایی از $V(G)$ باشد. $V(G) \setminus M$ را به دو زیرمجموعه A و $B = V(G) \setminus M \setminus A$ افزاز می‌کنیم که در آن $A = \{v \in V(G) \setminus M : |N_M(v)| \leq \tau(v)\}$.

توجه داشته باشید که اگر $v \in B$ آن‌گاه $|N_M(v)| > \tau(v)$. ادعای زیر را ساخته و اثبات می‌کنیم. ادعا: برای هر رأس $x \in M$

$$|N_{A \cup B}(x)| \geq |N_B(x)| + deg(x) - \tau(x) + 1.$$

اثبات ادعا: فرض کنید برای برخی از رئوس x ، $|N_{A \cup B}(x)| \leq |N_B(x)| + deg(x) - \tau(x)$. داریم

$$\begin{aligned} |N_M(x)| &= deg(x) - |N_{A \cup B}(x)| \geq deg(x) - (|N_B(x)| + deg(x) - \tau(x)) \\ &= deg(x) - |N_B(x)| - deg(x) + \tau(x) \\ &= \tau(x) - |N_B(x)|. \end{aligned}$$

در نتیجه

$$|N_M(x)| + |N_B(x)| \geq \tau(x).$$

به عبارت دیگر

$$|N_{M \cup B}(x)| \geq \tau(x).$$

این به معنی آن است که رأس غیرفعال x می‌تواند با فعال شدن همه رئوس در $M \cup B$ فعال شود. از طرفی با توجه به تعریف مجموعه B برای هر $x \in B$ داریم

$$|N_M(x)| > \tau(x) \implies |N_M(x)| \geq \tau(x) + 1 \implies |N_M(x)| - 1 \geq \tau(x).$$

یعنی همه رئوس B می‌توانند با فعال شدن رئوس $M \setminus \{x\}$ فعال شوند. با این توضیحات نتیجه می‌گیریم $B, \{x\}, D_1 \setminus B, \dots, D_l \setminus B, M \setminus \{x\}$ هم یک مونوپولی می‌باشد. لذا $M \setminus \{x\}$ یک مینیمم مونوپولی پویا می‌شود که با کمینه‌بودن M در تناقض است.

در زیر داریم

$$\sum_{y \in A \cup B} |N_M(y)| = \sum_{y \in A} |N_M(y)| + \sum_{y \in B} |N_M(y)|$$

هم‌چنین از تعریف مجموعه A داریم

$$\sum_{y \in A \cup B} |N_M(y)| \leq \sum_{y \in A} \tau(y) + \sum_{y \in B} |N_M(y)| \quad (11.2)$$

از ادعا می‌دانیم

$$\sum_{x \in M} |N_{A \cup B}(x)| \geq \sum_{x \in M} |N_B(x)| + \sum_{x \in M} (deg(x) + 1) - \sum_{x \in M} \tau(x). \quad (۱۲.۲)$$

از طرفی تساوی زیر را داریم

$$\sum_{y \in A \cup B} |N_M(y)| = \sum_{x \in M} |N_{A \cup B}(x)|.$$

بنابراین از (۱۱.۲) و (۱۲.۲) و تساوی فوق داریم

$$\begin{aligned} \sum_{x \in M} |N_B(x)| + \sum_{x \in M} (deg(x) + 1) - \sum_{x \in M} \tau(x) &\leq \sum_{y \in A \cup B} |N_M(y)| \\ &\leq \sum_{y \in A} \tau(y) + \sum_{y \in B} |N_M(y)|. \end{aligned}$$

هم‌چنین تساوی $\sum_{x \in M} |N_B(x)| = \sum_{x \in B} |N_M(x)|$ برقرار است. این نشان می‌دهد که

$$\sum_{x \in M} (deg(x) + 1) - \sum_{x \in M} \tau(x) \leq \sum_{y \in A} \tau(y)$$

پس

$$\begin{aligned} \sum_{x \in M} (deg(x) + 1) &\leq \sum_{x \in M} \tau(x) + \sum_{y \in A} \tau(y) \\ &= \sum_{y \in A \cup M} \tau(y) \leq \sum_{v \in V(G)} \tau(v) = n\bar{\tau} \end{aligned}$$

بنابراین

$$(d_1 + 1) + (d_2 + 1) + \dots + (d_{|M|} + 1) \leq (d_{i_1} + 1) + (d_{i_2} + 1) + \dots + (d_{i_{|M|}} + 1) \leq n\bar{\tau}.$$

لذا نتیجه می‌گیریم

$$|M| \leq \max \left\{ k : \sum_{i=1}^k (d_i + 1) \leq n\bar{\tau} \right\}.$$

□

در گزاره زیر نشان می‌دهیم کران قضیه ۵.۳.۲ توسط یک الگوریتم کارآمد به دست می‌آید.

گزاره ۶.۳.۲. یک الگوریتم $O(n^3)$ وجود دارد که در آن برای هر گراف G با n رأس و هر انتساب آستانه از G با میانگین $\bar{\tau}$ ، یک مونوپولی پویا چون M را به‌عنوان خروجی می‌دهد به‌طوری‌که

$$|M| \leq \max \left\{ k : \sum_{i=1}^k (d_i + 1) \leq n\bar{\tau} \right\}.$$

برهان. الگوریتم را به‌شرح زیر ارائه می‌دهیم. در هر مرحله زمانی از الگوریتم یک مونوپولی پویا داریم که توسط M نشان می‌دهیم. در شروع الگوریتم قرار می‌دهیم $M = V(G)$. مجموعه M را از میان اجرای الگوریتم اصلاح می‌کنیم به‌طوری‌که در هر مرحله از الگوریتم، M یک مونوپولی پویا است و در مرحله نهایی یک مونوپولی پویا با اندازه موردنظر به دست می‌آوریم. در هر مرحله یک مونوپولی پویا M و مجموعه‌های A و B متناظرش را داریم. مجموعه A به‌صورت $A = \{v \in V(G) \setminus M : |N_M(v)| \leq \tau(v)\}$ و

۰۲. مونوپولی‌های پویا با آستانه‌های متوسط. فرض کنید در یک مرحله مشخص از فرآیند M ، A و B را داریم. M را به شرح زیر اصلاح می‌کنیم.

همه رئوس M را بررسی می‌کنیم تا یک رأس v پیدا کنیم به طوری که v در شرط زیر صدق نکند

$$|N_{A \cup B}(x)| \geq |N_B(x)| + \deg(x) - \tau(x) + 1.$$

دو حالت ممکن وجود دارد:

حالت ۱: چنین رأسی وجود ندارد که در نامساوی فوق صدق کند.

لذا با توجه به اثبات قضیه ۵.۳.۲ تعداد M حداکثر $\max \left\{ k : \sum_{i=1}^k (d_i + 1) \leq n\bar{\tau} \right\}$ است. از این رو M مونوپولی مورد نظر می‌باشد.

حالت ۲: الگوریتم رأسی مانند v پیدا می‌کند به طوری که

$$|N_{A \cup B}(x)| \leq |N_B(x)| + \deg(x) - \tau(x).$$

در این حالت، اثبات قضیه ۵.۳.۲ نشان می‌دهد $M \setminus \{v\}$ هنوز هم یک مونوپولی پویا است. $M \setminus \{v\}$ را به جای M قرار می‌دهیم و مجموعه‌های A و B متناظرش را به دست می‌آوریم. اکنون به مرحله بعد می‌رویم (به عنوان مثال مرحله آزمایش رأس). این فرآیند را تکرار می‌کنیم و در پایان یک مونوپولی پویا چون M که در شرایط گزاره صدق می‌کند، به دست می‌آوریم. در زیر زمان اجرای الگوریتم را تخمین می‌زنیم. هر مرحله آزمایش در زمان $O(n^2)$ انجام می‌گیرد. از آن جا که در هر مرحله، یک رأس از مونوپولی پویا M حذف می‌شود، لذا تعداد مراحل حداکثر n می‌باشد. این نشان می‌دهد که کل زمان اجرای الگوریتم $O(n^3)$ است. در زیر خلاصه الگوریتم را به صورت یک شبه‌کد آورده‌ایم:

while $|N_{A \cup B}(v)| < |N_B(v)| + \deg(v) - \tau(v) + 1$ *do*

$M = M \setminus \{v\}$

update A

update B

end while

□

توسط یک مونوپولی کمینه M ، هر مونوپولی پویا را در نظر می‌گیریم به طوری که هیچ زیرمجموعه محضی از M یک مونوپولی پویا نباشد. با استفاده از اثبات قضیه ۵.۳.۲ ملاحظه زیر را داریم.

ملاحظه ۷.۳.۲. فرض کنید G یک گراف با دنباله درجه صعودی $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$ باشد. هم‌چنین فرض کنید τ هر انتساب آستانه به رئوس G با آستانه متوسط $\bar{\tau}$ باشد. فرض کنید M هر مونوپولی τ -پویا کمینه باشد. در این صورت

$$|M| \leq \max \left\{ k : \sum_{i=1}^k (d_i + 1) \leq n\bar{\tau} \right\}.$$

بلافاصله از قضیه ۵.۳.۲، نتیجه زیر به دست می‌آید.

نتیجه ۸.۳.۲. فرض کنید G گرافی با n رأس و با مینیمم درجه δ باشد. در این صورت

$$Ldyn_{\bar{\tau}=t}(G) \leq \frac{n\bar{\tau}}{\delta + 1}.$$

برهان. بنابر قضیه ۵.۳.۲ داریم

$$Ldyn_{\bar{\tau}=t}(G) \leq \max \left\{ k : \sum_{i=1}^k (d_i + 1) \leq n\bar{\tau} \right\}.$$

از طرفی $\delta \leq \deg(v_i)$ پس

$$n\bar{\tau} \geq \sum_{i=1}^k (\deg(v_i) + 1) \geq k(\delta + 1) \implies \frac{n\bar{\tau}}{\delta + 1} \geq k.$$

در نتیجه

$$Ldyn_{\bar{\tau}=t}(G) \leq \max \left\{ k : k \leq \frac{n\bar{\tau}}{\delta + 1} \right\} \implies Ldyn_{\bar{\tau}=t}(G) \leq \frac{n\bar{\tau}}{\delta + 1}.$$

□

در زیر مقدار دقیق $Ldyn_{\bar{\tau}=t}(K_n)$ را تعیین می‌کنیم.

گزاره ۹.۳.۲. برای گراف کامل K_n داریم، $Ldyn_{\bar{\tau}=t}(K_n) = \lfloor t \rfloor$.

برهان. از آن‌جا که درجه هر رأس در گراف K_n برابر با $n - 1$ است لذا با توجه به قضیه ۵.۳.۲ داریم

$$\begin{aligned} Ldyn_{\bar{\tau}=t}(K_n) &\leq \max \left\{ k : \sum_{i=1}^k (\deg(v_i) + 1) \leq n\bar{\tau} \right\} \\ &= \max \left\{ k : k((n - 1) + 1) \leq n\bar{\tau} \right\} \\ &= \max \left\{ k : kn \leq n\bar{\tau} \right\} \\ &= \max \left\{ k : k \leq \bar{\tau} = t \right\} = t. \end{aligned}$$

در نتیجه ثابت کردیم

$$Ldyn_{\bar{\tau}=t}(K_n) \leq t. \quad (۱۳.۲)$$

برای اثبات این‌که $Ldyn_{\bar{\tau}=t}(K_n) \geq t$ ، آستانه‌های زیر را در نظر می‌گیریم که در آن میانگین برابر $\bar{\tau}$ است. $n(t - \lfloor t \rfloor)$ رأس از K_n را با آستانه $\lfloor t \rfloor + 1$ و $n(1 - (t - \lfloor t \rfloor))$ رأس از K_n را با آستانه $\lfloor t \rfloor$ در نظر بگیرید. توجه داشته باشید که nt عددی صحیح است، زیرا $nt = \sum_{v \in V(K_n)} \tau(v)$ از طرفی

میانگین این آستانه‌ها به صورت زیر به دست می‌آید

$$\sum_{v \in V(K_n)} \tau(v) = n(t - \lfloor t \rfloor)(\lfloor t \rfloor + 1) + n(1 - (t - \lfloor t \rfloor))(\lfloor t \rfloor).$$

پس

$$\frac{\sum_{v \in V(K_n)} \tau(v)}{n} = t\lfloor t \rfloor + t - (\lfloor t \rfloor)^2 - \lfloor t \rfloor + \lfloor t \rfloor - t\lfloor t \rfloor + (\lfloor t \rfloor)^2 = t.$$

لذا متوسط این آستانه‌ها برابر با t است. واضح است هر مونوپولی پویا برای این مجموعه از آستانه‌ها حداقل $\lfloor t \rfloor$ رأس لازم دارد. زیرا اگر D را یک مینیمم مونوپولی با D, D_1, \dots, D_l در نظر بگیریم، در این صورت برای هر $x \in D_1$

$$\deg_D(x) = |D| \geq \tau(x) \geq \lfloor t \rfloor. \quad (۱۴.۲)$$

در نتیجه از (۱۳.۲) و (۱۴.۲) داریم

$$Ldyn_{\bar{\tau}=t}(K_n) = \lfloor t \rfloor.$$

□

۲.۳.۲ نتایجی در خصوص بزرگ‌ترین مونوپولی پویا

در ابتدا برای این‌که نشان دهیم مقادیر $dyn_{\tau}(G)$ روی همه انتساب‌های آستانه با آستانه متوسط یکسان، مجموعه‌ای پیوسته از اعداد صحیح می‌باشد، لم زیر را بیان و اثبات می‌کنیم.

لم ۰.۱۰.۳.۲ [۲۵] فرض کنید G یک گراف و τ و τ' دو انتساب آستانه به رئوس G باشند به طوری‌که برای همه رئوس u از G به‌جز دقیقاً یک رأس v ، $\tau(u) = \tau'(u)$. در این صورت

$$\begin{cases} dyn_{\tau}(G) - 1 \leq dyn_{\tau'}(G) \leq dyn_{\tau}(G), & \tau(v) > \tau'(v), \\ dyn_{\tau}(G) \leq dyn_{\tau'}(G) \leq dyn_{\tau}(G) + 1, & \tau(v) < \tau'(v). \end{cases}$$

به عبارت دیگر $|dyn_{\tau'}(G) - dyn_{\tau}(G)| \leq 1$.

برهان. فرض کنید v تنها رأسی باشد که $\tau(v) \neq \tau'(v)$. بدون کاستن از کلیت فرض کنیم $\tau(v) < \tau'(v)$. حال فرض کنید M یک مونوپولی پویا با کوچک‌ترین اندازه برای (G, τ) باشد. چون برای همه رئوس G به‌جز رأس v ، آستانه‌های τ و τ' با هم یکسان هستند، واضح است که

$$dyn_{\tau}(G) \leq dyn_{\tau'}(G). \quad (۱۵.۲)$$

از طرف دیگر $M' = M \cup \{v\}$ یک مونوپولی پویا برای (G, τ') است. در این صورت

$$dyn_{\tau'}(G) \leq |M| + 1 = dyn_{\tau}(G) + 1. \quad (۱۶.۲)$$

در نتیجه از (۱۵.۲) و (۱۶.۲) داریم

$$dyn_{\tau}(G) \leq dyn_{\tau'}(G) \leq dyn_{\tau}(G) + 1. \quad (۱۷.۲)$$

حال فرض می‌کنیم $\tau(v) > \tau'(v)$. فرض کنید M' یک مونوپولی پویا با کوچک‌ترین اندازه برای (G, τ') باشد. از آن‌جا که برای همه رئوس G جز رأس v ، آستانه‌های τ و τ' با هم برابر هستند، واضح است که

$$dyn_{\tau}(G) \geq dyn_{\tau'}(G). \quad (۱۸.۲)$$

از طرفی $M = M' \cup \{v\}$ یک مونوپولی پویا برای (G, τ) است. پس

$$dyn_{\tau}(G) \leq |M'| + 1 = dyn_{\tau'}(G) + 1.$$

در نتیجه

$$\text{dyn}_\tau(G) - 1 \leq \text{dyn}_{\tau'}(G). \quad (19.2)$$

بنابراین از (۱۸.۲) و (۱۹.۲) داریم

$$\text{dyn}_\tau(G) - 1 \leq \text{dyn}_{\tau'}(G) \leq \text{dyn}_\tau(G). \quad (20.2)$$

□ از این رو با توجه به روابط (۱۷.۲) و (۲۰.۲)، $|\text{dyn}_{\tau'}(G) - \text{dyn}_\tau(G)| \leq 1$ به دست می‌آید.

در این پایان‌نامه پیوسته بودن مقادیر $\text{dyn}_\tau(G)$ را به صورت زیر بیان می‌کنیم. همه آستانه‌ها را در نظر می‌گیریم. اگر $\tau \equiv 0$ (آستانه ثابت صفر) آن‌گاه کوچک‌ترین مونوپولی پویا دارای اندازه صفر است ($\text{dyn}_\tau(G) = 0$). به عبارت دیگر اگر $V(G)$ را به زیرمجموعه‌های $D_0 = \emptyset$ و $D_1 = V(G)$ افزایش کنیم، در این صورت هر رأس در D_1 هیچ همسایه‌ای در D_0 ندارد. حال اگر $\tau \equiv n$ در این صورت باید $D_0 = V(G)$ و $D_1 = \emptyset$ چون اگر $D_0 \subset V(G)$ پس بایستی در خارج از D_0 رأسی وجود داشته باشد، یعنی $v \in D_1$ که این v باید دارای $\tau(v)$ همسایه در D_0 باشد ($\tau(v) = n$ همسایه در D_0 داشته باشد) که این تناقض است. لذا $D_1 = \emptyset$ در نتیجه $\text{dyn}_\tau(G) = n$. بنابراین توانستیم برای $\tau \equiv 0$ یک $\text{dyn}_\tau(G)$ و برای $\tau \equiv n$ هم یک $\text{dyn}_\tau(G)$ بیابیم. حال اگر یک τ از بین این دو بگیریم، برای آن می‌توان $\text{dyn}_\tau(G)$ تعریف کرد. این، پیوسته بودن را نتیجه می‌دهد، یعنی می‌توانیم کل بازه $0 \leq \tau \leq n$ را با اعداد صحیح پوشش دهیم. حال نتیجه پیوستگی به شرح زیر است.

گزاره ۱۱.۳.۲. فرض کنید τ و τ' انتساب‌های آستانه به رئوس G باشند به طوری که $\bar{\tau} = \bar{\tau}'$. هم‌چنین فرض کنید r عددی صحیح باشد که $\text{dyn}_\tau(G) \leq r \leq \text{dyn}_{\tau'}(G)$. در این صورت τ_0 با شرط $\bar{\tau} = \bar{\tau}'$ وجود دارد به طوری که $\text{dyn}_{\tau_0}(G) = r$.

برهان. اگر $\text{dyn}_\tau(G) = r$ یا $\text{dyn}_{\tau'}(G) = r$ آن‌گاه چیزی برای اثبات باقی نمی‌ماند. پس می‌توان فرض کرد $\text{dyn}_\tau(G) < r < \text{dyn}_{\tau'}(G)$. برای هر دو انتساب آستانه τ و τ' تعریف می‌کنیم

$$\delta(\tau, \tau') = \sum_{v: \tau(v) > \tau'(v)} (\tau(v) - \tau'(v))$$

اکنون با استقرا روی گزاره $\delta(\tau, \tau')$ اثبات می‌کنیم. اگر $\delta(\tau, \tau') = 0$ آن‌گاه برای هر رأس دلخواه v دو حالت داریم:

حالت ۱: $\tau(v) > \tau'(v)$. در این حالت بنا به تعریف δ ، $\delta(\tau, \tau') > 0$ که با $\delta(\tau, \tau') = 0$ در تناقض است. لذا هیچ v وجود ندارد که دارای این خاصیت باشد.

حالت ۲: $\tau(v) \leq \tau'(v)$. چون آستانه متوسط هر دو یکسان است پس

$$\begin{aligned} \sum_{v \in V(G)} \tau(v) &= \sum_{v \in V(G)} \tau'(v) \implies 0 = \sum_{v \in V(G)} \tau'(v) - \sum_{v \in V(G)} \tau(v) \\ &\implies 0 = \sum_{v \in V(G)} (\tau'(v) - \tau(v)) \end{aligned}$$

از طرفی $\tau'(v) - \tau(v) \geq 0$ در نتیجه برای هر $v \in V(G)$

$$\tau'(v) - \tau(v) = 0 \implies \tau'(v) = \tau(v).$$

لذا حکم بدیهی است. (فرض استقرا) $k \geq 0$ را در نظر بگیرید و فرض کنید این گزاره برای τ و τ' با آستانه متوسط یکسان برقرار است به طوری که $\delta(\tau, \tau') \leq k$. برای $\delta(\tau, \tau') = k + 1$ و $\tau \neq \tau'$ آن را اثبات می‌کنیم. فرض کنیم τ و τ' داده شده‌اند به طوری که $\delta(\tau, \tau') = k + 1$ و $\tau \neq \tau'$ ، چون اگر $\tau = \tau'$ آن‌گاه مانند قبل $\delta = 0$. تعریف می‌کنیم $W = \{v : \tau(v) > \tau'(v)\}$ ناتهی است چون از آن‌جا که آستانه‌های متوسط با هم برابرند پس در یک مکان $\tau(u) < \tau'(u)$ و این یعنی مکانی هست که $\tau(u) > \tau'(u)$ ، لذا $W \neq \emptyset$. $w \in W$ را در نظر بگیرید. پس $\tau(w) > \tau'(w)$. حال یک آستانه جدید τ'' به شرح زیر تعریف می‌کنیم. برای هر رأس v که $v \notin \{u, w\}$ قرار می‌دهیم $\tau''(v) = \tau(v)$. هم‌چنین قرار می‌دهیم $\tau''(w) = \tau(w) - 1$ و $\tau''(u) = \tau(u) + 1$. داریم

$$\begin{aligned} \delta(\tau'', \tau') &= \sum_{v: \tau''(v) > \tau'(v)} (\tau''(v) - \tau'(v)) \\ &= \sum_{\substack{v \notin \{u, w\} \\ \tau''(v) > \tau'(v)}} (\tau''(v) - \tau'(v)) + \sum_{\substack{v \in \{u, w\} \\ \tau''(v) > \tau'(v)}} (\tau''(v) - \tau'(v)) \\ &= \sum_{\substack{v \notin \{u, w\} \\ \tau(v) > \tau'(v)}} (\tau(v) - \tau'(v)) + (\tau''(w) - \tau'(w)) \\ &\leq \underbrace{\left[\sum_{\tau(v) > \tau'(v)} (\tau(v) - \tau'(v)) \right]}_{\delta(\tau, \tau')} - 1 = (k + 1) - 1 = k \end{aligned}$$

باتوجه به این‌که دو شرط

$$\delta(\tau'', \tau') \leq k$$

و $\bar{\tau}'' = \bar{\tau}'$ برقرار است، پس در فرض استقرا صدق می‌کند. کافی است نشان دهیم شرط سوم یعنی $dyn_{\tau''}(G) \leq r \leq dyn_{\tau'}(G)$ هم برقرار است. بنابر لم ۱۰.۳.۲ داریم: برای همه رئوس v از G به جز دقیقاً یک رأس مانند u ، $\tau(v) = \tau'(v)$. پس

$$\tau(u) \neq \tau''(u) \implies \begin{cases} \tau(u) < \tau''(u), \\ \tau(u) > \tau''(u). \end{cases}$$

می‌دانیم $\tau(u) < \tau''(u)$ پس باید داشته باشیم

$$dyn_{\tau}(G) \leq dyn_{\tau''}(G) \leq dyn_{\tau}(G) + 1 \leq r \leq dyn_{\tau'}(G).$$

یعنی شرط سوم هم برقرار است. بنابراین باتوجه به فرض استقرا یک τ_0 وجود دارد که $\bar{\tau}_0 = \bar{\tau}'$ و $dyn_{\tau_0}(G) = r$. \square

تعریف ۱۲.۳.۲. اگر برای یک رأس v داشته باشیم $\tau(v) = deg_G(v) + 1$ ، در این صورت رأس v باید به هر مونوپولی پویا از (G, τ) تعلق داشته باشد. چنین رأسی را خود-رأی می‌نامیم (به بیان دیگر v یک رأس واکسینه^۱ نامیده می‌شود).

اثبات قضیه ۵.۳.۲ در بخش ۱.۳.۲ نشان می‌دهد اگر برای برخی رئوس v از G داشته باشیم $\tau(v) = deg_G(v) + 1$ ، آن‌گاه حکم هنوز برقرار است. در گزاره زیر این مورد را بحث می‌کنیم.

^۱Vaccinated vertex

گزاره ۱۳.۳.۲. فرض کنید t یک عدد مثبت باشد. فرض کنید در تعریف $Ldyn_t(G)$ ، انتساب‌های آستانه مجاز هستند رئوس واکسینه داشته باشند. در این صورت می‌توان $Ldyn_t(G)$ را توسط یک الگوریتم زمان-چندجمله‌ای به دست آورد.

برهان. فرض کنید $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$ یک دنباله درجه از G به صورت صعودی باشد. بنابر قضیه ۵.۳.۲ داریم

$$k_0 = \max \left\{ k : \sum_{i=1}^k (d_i + 1) \leq nt \right\}. \quad (21.2)$$

باتوجه به فرض گزاره یک انتساب آستانه τ به شرح زیر می‌سازیم.

$$\tau(v) = \begin{cases} \tau(v_i) = \deg_G(v_i) + 1 & i \leq k_0, \\ 0 & O.W. \end{cases}$$

از تعریف بزرگ‌ترین مونوپولی پویا می‌دانیم $Ldyn_t(G) = \max \{ dyn_\tau(G) \mid \bar{\tau} \leq t \} \leq k_0$. حال اگر D یک مینیمم مونوپولی پویا باشد به طوری که $|D| = dyn_\tau(G) = k_0$ آن‌گاه واضح است که $Ldyn_t(G) = \max \{ dyn_\tau(G) \mid \bar{\tau} \leq t \} \geq k_0$. پس $Ldyn_t(G) = k_0$. به عبارت دیگر

$$|D| = Ldyn_t(G) = k_0.$$

از طرفی

$$\sum_{i=1}^{k_0} \tau(v) = \sum_{i=1}^{k_0} (\deg_G(v_i) + 1) \quad (22.2)$$

چون عبارت (۲۲.۲) در شرط (۲۱.۲) صدق می‌کند، پس

$$\sum_{i=1}^{k_0} (\deg_G(v_i) + 1) \leq nt. \quad (23.2)$$

با تقسیم طرفین نامساوی (۲۳.۲) بر n داریم

$$\bar{\tau} = \frac{\sum_{i=1}^{k_0} (\deg_G(v_i) + 1)}{n} \leq \frac{nt}{n} = t \implies \bar{\tau} \leq t$$

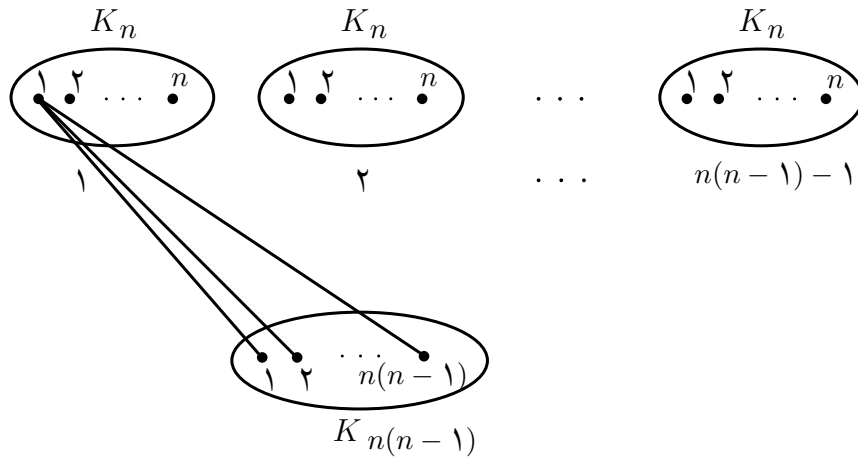
که در تعریف $Ldyn_t(G)$ صدق می‌کند. بنابراین $D \subseteq V(G)$ به صورت $D = \{v_1, v_2, \dots, v_{k_0}\}$ و یک انتساب آستانه τ وجود دارند به طوری که $|D| = |D_0| = k_0$. واضح است (D, τ) یک $L-t$ مونوپولی پویا از G است. \square

گزاره زیر توسط ذاکر [۱۸] ثابت شده است.

گزاره ۱۴.۳.۲. یک دنباله نامتناهی از گراف‌های G_1, G_2, \dots وجود دارد به طوری که $|G_n| \rightarrow \infty$ و

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Ldyn_{\epsilon(G_n)}(G_n)}{|G_n|} = 1$$

برهان. قرار دهید $G_1 = K_2$. برای هر عدد صحیح $n \geq 2$ گراف G_n را با $[n(n-1) + n(n(n-1) - 1)]$ رأس به شرح زیر می‌سازیم. یک کپی از $K_{n(n-1)}$ و $n(n-1) - 1$ رأس از کپی‌های مجزا از K_n را در نظر می‌گیریم. هیچ یالی بین این کپی‌ها از K_n وجود ندارد. هر رأس از هر کپی K_n را به هر رأس از $K_{n(n-1)}$ توسط دقیقاً یک یال متصل می‌کنیم (شکل ۱.۲).



شکل ۱.۲: گراف G_n

بنابراین G_n شامل

$$\binom{n(n-1)}{2} + [n(n-1) - 1] \binom{n}{2} + n(n-1)[n(n-1) - 1]n \quad (24.2)$$

یال می‌باشد که با توجه به روابط زیر به دست آمده است. تعداد یال‌های گراف $K_{n(n-1)}$ برابر است با:

$$\binom{n(n-1)}{2}$$

تعداد یال‌های $n(n-1) - 1$ کپی مجزا از گراف کامل K_n برابر است با:

$$[n(n-1) - 1] \binom{n}{2}$$

و تعداد یال‌های بین کپی‌ها از K_n و گراف $K_{n(n-1)}$ برابر است با:

$$n(n-1)[n(n-1) - 1]n.$$

حال از رابطه (۲۴.۲) داریم

$$\begin{aligned} |E(G_n)| &= \frac{(n(n-1))!}{2!(n(n-1) - 2)!} + \frac{(n(n-1) - 1)n!}{2!(n-2)!} + (n^2 - n)(n^2 - n - 1)n \\ &= \frac{(n^2 - n)(n^2 - n - 1)}{2} + \frac{(n^2 - n - 1)n(n-1)}{2} + (n^2 - n - 1)n(n^2 - n) \\ &= (n^2 - n)(n^2 - n - 1) + (n^2 - n - 1)(n^2 - n)n \\ &= (n^2 - n - 1)(n^2 - n)[1 + n] = (n^2 - n - 1)(n^3 - n). \end{aligned}$$

بنابراین

$$|E(G_n)| = (n^2 - n - 1)(n^3 - n). \quad (25.2)$$

حال یک انتساب آستانه مناسب برای G_n با میانگین $\epsilon(G_n)$ به دست می‌آوریم. برای هر رأس v از کپی $K_{n(n-1)}$ از $G(n)$ قرار دهید

$$\tau(v) = 0.$$

لذا

$$\sum_{v \in V(K_{n(n-1)})} \tau(v) = 0.$$

هم‌چنین برای هر رأس u از کپی‌های K_n از G_n قرار دهید

$$\tau(u) = \deg_{G_n}(u) = [n(n-1) + (n-1)].$$

پس

$$\sum_{v \in V(K_n)} \tau(v) = n[n(n-1) - 1][n(n-1) + (n-1)].$$

لذا با توجه به این روابط و تساوی (۲۵.۲) داریم

$$\begin{aligned} \sum_{v \in V(G_n)} \tau(v) &= \sum_{v \in V(K_{n(n-1)})} \tau(v) + \sum_{v \in V(K_n)} \tau(v) \\ &= 0 + n[n(n-1) - 1][n(n-1) + (n-1)] \\ &= (n^2 - n - 1)(n^3 - n) = |E(G_n)|. \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\bar{\tau} = \frac{\sum_{v \in V(G_n)} \tau(v)}{|G_n|} = \frac{|E(G_n)|}{|G_n|} = \epsilon(G_n).$$

یعنی آستانه متوسط دقیقاً مساوی با چگالی یالی گراف G_n به دست آمده است. حال فرض کنید M هر مونوپولی پویا متناظر با انتساب آستانه داده شده از G_n باشد و $M, D_1, D_2, \dots, D_{i-1}, D_i, \dots, D_t$ افرازهای $V(G_n)$ باشند. یک کپی از K_n را در نظر بگیرید. فرض کنید این کپی و M باهم اشتراک دارند. اگر یال uv خارج از این اشتراک وجود داشته باشد در این صورت فرض کنید رأس u اولین بار در D_i ظاهر شده باشد و چون رأس v یک همسایه رأس u است پس v در $M \cup D_1 \cup \dots \cup D_{i-1}$ ظاهر نشده است، لذا یکی از تعداد رئوس کم می‌شود. در این صورت

$$\tau(u) \leq \deg_{\bigcup_{j=0}^{i-1} D_j}(u) \leq \deg_{G_n}(u) - 1.$$

اما با توجه به این‌که آستانه هر رأس در هر کپی از K_n در کل گراف G_n برابر است با درجه آن رأس در کل گراف یعنی $\tau(u) = \deg_{G_n}(u)$ ، لذا

$$\deg_{G_n}(u) \leq \deg_{G_n}(u) - 1.$$

این عبارت تناقض دارد. بنابراین M باید شامل یک پوشش رأسی از هر کپی K_n باشد. از آن‌جا که تعداد رئوس در پوشش گراف کامل K_n برابر با $(n-1)$ است، پس

$$M \geq [n(n-1) - 1](n-1).$$

لذا برای اندازه کوچک‌ترین مونوپولی پویا در G_n داریم

$$dyn_{\tau}(G_n) = [n(n-1) - 1](n-1).$$

از این رو داریم

$$Ldyn_{\bar{\tau}=\epsilon}(G_n) \geq dyn_{\tau}(G_n) = [n(n-1) - 1](n-1). \quad (۲۶.۲)$$

از آن جا که $M \subseteq V(G_n)$ پس $|M| \leq |G_n|$. لذا

$$Ldyn_{\bar{\tau}=\epsilon}(G_n) \leq |G_n| \implies \frac{Ldyn_{\bar{\tau}=\epsilon}(G_n)}{|G_n|} \leq \frac{|G_n|}{|G_n|} = 1. \quad (۲۷.۲)$$

در نتیجه با استفاده از نامساوی‌های (۲۶.۲) و (۲۷.۲) داریم

$$\begin{aligned} 1 &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Ldyn_{\epsilon}(G_n)}{|G_n|} \\ &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[n(n-1) - 1](n-1)}{n(n-1) + n[n(n-1) - 1]} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[n^2 - n - 1](n-1)}{(n^2 - n) + n(n^2 - n - 1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - n^2 - n^2 + n - n + 1}{n^2 - n + n^3 - n^2 - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 2n^2 + 1}{n^3 - 2n} = 1. \end{aligned}$$

بنابراین حکم گزاره اثبات شد یعنی

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Ldyn_{\epsilon}(G_n)}{|G_n|} = 1.$$

□

گزاره ۱۴.۳.۲ نشان می‌دهد اگر $\Delta \rightarrow \infty$ آن‌گاه هیچ کران بالایی برای $Ldyn_{\bar{\tau}}(G)$ به صورت $\lambda|G|$ که در آن λ یک ثابت است و $\lambda < 1$ ، وجود ندارد. در زیر نشان می‌دهیم یک نتیجه قوی‌تر برقرار است. در حقیقت نشان می‌دهیم این نتیجه نه تنها برای $Ldyn_{k\epsilon(G_n)}(G_n)$ که در آن k هر ثابت با $0 < k \leq 2$ برقرار است، بلکه برای هر دنباله k_n که در آن $k_n|G_n| \rightarrow \infty$ نیز برقرار می‌باشد. در مقابل گزاره

$$۱۶.۳.۲ \text{ نشان می‌دهد اگر } k_n = O\left(\frac{1}{|G_n|}\right) \text{ آن‌گاه } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Ldyn_{k_n\epsilon(G_n)}(G_n)}{|G_n|} \neq 1$$

گزاره ۱۵.۳.۲. یک دنباله نامتناهی از گراف‌های $\{(G_n, \tau_n)\}_{n=1}^{\infty}$ وجود دارد که در $|G_n| \rightarrow \infty$ و

$$\frac{\epsilon(G_n)}{|G_n|} = o(\bar{\tau}_n) \text{ صدق می‌کند، به طوری که}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Ldyn_{\bar{\tau}}(G_n)}{|G_n|} = 1.$$

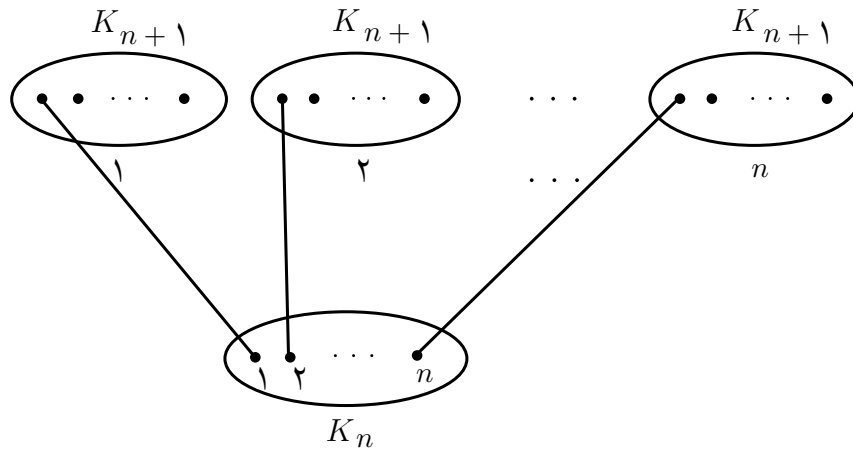
برهان. گراف G_n را به شرح زیر می‌سازیم. مجموعه رئوس G_n را از اجتماع مجزای یک گراف کامل K_n و K_{n+1} کپی از گراف‌های کامل K_{n+1} به دست می‌آوریم. دقیقاً یک یال بین هر کپی از K_n و K_{n+1} وجود دارد (شکل ۲.۲).

برای هر رأس v در K_n قرار دهید

$$\tau_n(v) = 0$$

و برای هر رأس v در هر کپی از K_{n+1} قرار دهید

$$\tau_n(v) = deg(v).$$



شکل ۲.۲: گراف G_n

واضح است که هر مونوپولی پویا از G_n شامل حداقل n رأس از هر کپی از K_{n+1} می‌باشد. زیرا در غیراین صورت فرض کنید D حداکثر $(n - 1)$ رأس از یکی از کپی‌های K_{n+1} داشته باشد. لذا فرض کنید $i_0 \geq 1$ کوچک‌ترین اندیسی باشد که لاًقل یک رأس v_0 از این کپی را در خود دارد. بنابراین درجه

$$deg(v_0) = \tau(v_0) \text{ باشد. دو حالت در نظر می‌گیریم:}$$

حالت اول: اگر $deg(v_0) = n$. در این صورت همه همسایه‌های v_0 در همان کپی شامل v_0 هستند. لذا با توجه به انتخاب i_0 همه این n همسایه باید در D باشند که این تناقض است.

حالت دوم: اگر $deg(v_0) = n + 1$. در این صورت v_0 در کپی شامل خود دارای n همسایه است که همگی باید در D باشند. لذا با توجه به انتخاب i_0 همه این n همسایه باید در D باشند که این تناقض است.

باتوجه به تناقض بوجودآمده هر مونوپولی پویا از G_n شامل حداقل n رأس از هر کپی از K_{n+1} می‌باشد و ازین رو

$$Ldyn_{\bar{\tau}}(G_n) \geq n^2. \quad (28.2)$$

باتوجه به G_n ساخته شده، تعداد رئوس و تعداد یال‌های G_n به صورت زیر به دست می‌آید.

$$|V(G_n)| = |G_n| = n(n + 1) + n = n(n + 2). \quad (29.2)$$

و

$$|E(G_n)| = \binom{n}{2} + n \binom{n+1}{2} + n = \frac{n^2 + n + n(n^2 + n)}{2}. \quad (30.2)$$

از آن جا که $D \subseteq V(G_n)$ پس $|D| \leq |G_n|$ لذا

$$Ldyn_{\bar{\tau}}(G_n) \leq |G_n| \implies \frac{Ldyn_{\bar{\tau}}(G_n)}{|G_n|} \leq \frac{|G_n|}{|G_n|} = 1. \quad (31.2)$$

بنابراین با استفاده از (۲۸.۲) و (۲۹.۲) و (۳۱.۲) داریم

$$1 \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Ldyn_{\bar{\tau}}(G_n)}{|G_n|} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n(n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+2} = 1$$

برای تکمیل اثبات نشان می‌دهیم

$$\frac{\bar{\tau}_n}{|E(G_n)|/|V(G_n)|^2} \rightarrow \infty. \quad (۳۲.۲)$$

از طرفی

$$\sum_{v \in V(G_n)} \tau_n(v) = \sum_{v \in V(G_n)} \deg(v) = n[1(n+1) + n(n)] = n(n^2 + n + 1). \quad (۳۳.۲)$$

پس با توجه به (۳۳.۲) مقدار آستانه متوسط به صورت زیر حاصل می‌شود

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_n &= \frac{\sum_{v \in V(G_n)} \tau_n(v)}{|V(G_n)|} \\ &= \frac{n(n^2 + n + 1)}{n(n+2)} = \frac{(n^2 + n + 1)}{n+2}. \end{aligned} \quad (۳۴.۲)$$

از جای‌گذاری (۲۹.۲) و (۳۰.۲) و (۳۴.۲) در معادله (۳۲.۲) خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{\tau}_n}{|E(G_n)|/|V(G_n)|^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 + n + 1)/(n+2)}{((n^2 + n + n(n^2 + n))/2)/(n(n+2))^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2(n^2 + n + 1)(n+2)}{n^2 + n + n(n+n^2)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^5 + 2n^2(3n^2 + 3n + 2)}{n^3 + 2n^2 + n} = \infty. \end{aligned}$$

□

گزاره زیر نشان می‌دهد اگر عدد مثبت c موجود باشد به طوری که t_n در رابطه $t_n \leq \frac{c\epsilon(G_n)}{|G_n|}$ صدق کند، آن‌گاه هر خانواده $\{(G_n, t_n)\}_n$ یک L مونوپولی پویا-محدود است.

گزاره ۱۶.۳.۲. فرض کنید G یک گراف و c و t دو ثابت باشند به طوری که $t \leq c \frac{\epsilon(G)}{|G|}$. در این صورت

$$Ldyn_t(G) < \frac{c}{c+1}|G|.$$

برهان. قرار دهید $|G| = n$. دو حالت در نظر می‌گیریم:

حالت اول: اگر $n < \frac{c}{4}$ آن‌گاه $n \left\lceil \frac{cn}{c+1} \right\rceil = n$ زیرا

$$\frac{c}{4} > n \implies c > 4n \implies c > n - 1$$

$$\implies c + cn > cn + n - 1 \implies cn > cn + n - c - 1$$

$$\implies cn > c(n-1) + (n-1) = (n-1)(c+1) \implies n \geq \frac{cn}{c+1} > n-1.$$

لذا باید ثابت کنیم

$$Ldyn_t(G) \leq n-1. \quad (۳۵.۲)$$

بنابر تعریف ۳۱.۲.۱ می‌دانیم $0 \leq t \leq 2\epsilon(G)$ پس

$$0 \leq t \leq \underbrace{\frac{2|E(G)|}{|V(G)|}}_{\text{میانگین درجات}} \leq \Delta \quad (36.2)$$

لذا

$$0 \leq t \leq \Delta.$$

هم‌چنین از تعریف ۲۹.۲.۱ داریم $\bar{\tau} \leq t$. لذا

$$\bar{\tau} \leq t \leq \frac{2|E(G)|}{|V(G)|}.$$

در نتیجه

$$\exists v \in V(G); \tau(v) \leq \deg(v).$$

برهان خلف: فرض کنید چنین نباشد. در این صورت

$$\begin{aligned} \tau(v) > \deg(v) &\implies \sum_{v \in V(G)} \tau(v) > \sum_{v \in V(G)} \deg(v) \\ &\implies \sum_{v \in V(G)} \tau(v) > 2|E(G)|. \end{aligned}$$

با تقسیم هر دو طرف نامساوی فوق بر $|G|$ و با استفاده از رابطه (۳۶.۲) داریم

$$\bar{\tau} = \frac{\sum_{v \in V(G)} \tau(v)}{|G|} > \frac{2|E(G)|}{|G|} \geq t,$$

که با تعریف ۲۹.۲.۱ در تناقض است. لذا فرض کنید افزایش‌های $V(G)$ به صورت $D_0 = V(G) \setminus \{v\}$ و $D_1 = \{v\}$ باشند. برای مونوپولی بودن بایستی $\tau(v) \leq \deg(v)$ پس D_0 مونوپولی است و $|D_0| = n - 1$. بنابراین ثابت کردیم برای هر τ به طوری که $\bar{\tau} \leq t$ ، یک مونوپولی D_0 که $|D_0| = n - 1$ وجود دارد. در نتیجه

$$\text{dyn}_{\tau}(G) \leq n - 1.$$

پس

$$\max \{ \text{dyn}_{\tau}(G) \mid \bar{\tau} \leq t \} \leq n - 1.$$

لذا نامساوی (۳۵.۲) اثبات گردید و حکم بدیهی است.

حالت دوم: فرض کنید $n \geq \frac{c}{\bar{p}}$. در این صورت دنباله درجه از G را به شکل $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$ در

نظر بگیرید و قرار دهید $k_0 = \max \left\{ k : \sum_{i=1}^k (d_i + 1) \leq nt \right\}$. بنابر قضیه ۵.۳.۲ داریم

$$L \text{dyn}_t(G) \leq k_0.$$

فرض $t \leq c \left(\frac{\epsilon(G)}{n} \right)$ نشان می‌دهد که

$$nt \leq c\epsilon(G) \implies nt \leq c \frac{|E(G)|}{n}. \quad (37.2)$$

می‌دانیم

$$\sum_{i=1}^n d_i = 2|E(G)|.$$

پس نامساوی (۳۷.۲) به شکل زیر تغییر می‌کند.

$$nt \leq \left(\frac{c}{2n}\right) \sum_{i=1}^n d_i \quad (38.2)$$

در نتیجه با توجه به تعریف k_0 داریم

$$\sum_{i=1}^{k_0} (d_i + 1) \leq \left(\frac{c}{2n}\right) \sum_{i=1}^n d_i.$$

لذا

$$\left(\frac{2n}{c}\right) \leq \frac{\sum_{i=1}^n d_i}{\sum_{i=1}^{k_0} (d_i + 1)}. \quad (39.2)$$

برای تکمیل اثبات کافی است نشان دهیم $|G| < \frac{c}{c+1} k_0$. به برهان خلف فرض کنیم $k_0 \geq \frac{c}{c+1} n$ از آن جا که

$$d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_{k_0} \leq \underbrace{d_{k_0+1} \leq \dots \leq d_n}_{n-k_0}$$

پس

$$\sum_{i=k_0+1}^n d_i \leq (n - k_0)n \leq \left(n - \frac{cn}{c+1}\right)n = n^2 - \frac{cn^2}{c+1} = \frac{n^2}{c+1}. \quad (40.2)$$

در معادله (۳۹.۲) به جای $\sum_{i=1}^n d_i$ می‌توان قرار داد

$$\sum_{i=1}^{k_0} d_i + \sum_{i=k_0+1}^n d_i. \quad (41.2)$$

با جای‌گذاری (۴۱.۲) در نامساوی (۳۹.۲) و با استفاده از مقدار به‌دست آمده در (۴۰.۲) داریم

$$\frac{2n}{c} \leq \frac{\sum_{i=1}^{k_0} (d_i) + \sum_{i=k_0+1}^n d_i}{\sum_{i=1}^{k_0} (d_i) + k_0} \leq \frac{\sum_{i=1}^{k_0} (d_i) + \frac{n^2}{c+1}}{\sum_{i=1}^{k_0} (d_i) + \frac{c}{c+1}n}.$$

در نتیجه

$$\frac{2n}{c} \sum_{i=1}^{k_0} (d_i) + \frac{2n^2}{c+1} \leq \sum_{i=1}^{k_0} (d_i) + \frac{n^2}{c+1}.$$

بنابراین

$$\underbrace{\left(\frac{2n}{c} - 1\right) \sum_{i=1}^{k_0} (d_i)}_{\text{مثبت}} \leq \frac{n^2}{c+1} - \frac{2n^2}{c+1} = \underbrace{\frac{-n^2}{c+1}}_{\text{منفی}}. \quad (42.2)$$

تناقض در (۴۲.۲) ایجاب می‌کند که $k_0 < \frac{c}{c+1}n$. بنابراین داریم

$$Ldyn_t(G) \leq k_0 < \frac{cn}{c+1} = \frac{c}{c+1}|G|$$

در نتیجه

$$Ldyn_t(G) < \frac{c}{c+1}|G|.$$

□

۳.۳.۲ نتایج الگوریتمی

نتایج الگوریتمی در مورد $dyn_\tau(G)$ ، با انواع مختلفی از انتساب‌های آستانه مانند آستانه‌های ثابت و آستانه‌های اکثریت در [۷، ۱۰، ۱۲] مطالعه شده است. در ابتدا لازم است برخی پیش‌شروط را به یاد آوریم. یکی از این پیش‌شروط مفهوم زیرگراف‌های مقاوم^۲ است (تعریف ۳۳.۲.۱). در ادامه یک لم را بیان و اثبات می‌کنیم که اطلاعات بیشتری در مورد زیرگراف‌های مقاوم که مثلث-آزاد^۳ هستند، به ما می‌دهد.

لم ۱۷.۳.۲. فرض کنید (G, τ) داده شده است. همچنین فرض کنید H یک زیرگراف τ -مقاوم و مثلث-آزاد در G باشد و $e = uv$ هر یال دل‌خواه باشد که $u, v \in V(H)$. فرض کنید τ' به شرح زیر تعریف شده باشد

$$\tau'(w) = \begin{cases} \tau(w) & ; w \notin V(H), \\ \circ & ; w \in V(H) \setminus \{u, v\}, \\ deg_G(v) & ; w = v, \\ deg_G(u) & ; w = u, \end{cases}$$

در این صورت $\bar{\tau}' \leq \bar{\tau}$.

برهان. از آن جا که H مثلث-آزاد (بدون مثلث) است و u, v به یک‌دیگر متصل هستند پس

$$N_H(u) \cap N_H(v) = \emptyset \quad (۴۳.۲)$$

همچنین

$$N_H(u) \cup N_H(v) \subseteq V(H)$$

در نتیجه

$$|V(H)| \geq |N_H(u) \cup N_H(v)| = |N_H(u)| + |N_H(v)| - |N_H(u) \cap N_H(v)|.$$

با استفاده از (۴۳.۲) داریم

$$|V(H)| \geq deg_H(u) + deg_H(v). \quad (۴۴.۲)$$

^۲Resistant subgraph

^۳Triangle-free

از طرفی بنابه تعریف زیرگراف مقاوم، چون H یک زیرگراف τ -مقاوم است پس برای هر رأس w که $w \in V(H)$ داریم

$$\deg_H(w) \geq \deg_G(w) - \tau(w) + 1 \implies \tau(w) \geq \deg_{G \setminus H}(w) + 1$$

از این رو نامساوی زیر برقرار است.

$$\begin{aligned} \sum_{w \in V(H)} \tau(w) &\geq \sum_{w \in V(H)} (\deg_{G \setminus H}(w) + 1) \\ &\geq \sum_{w \in V(H)} \deg_{V(G) \setminus V(H)}(w) + \sum_{w \in V(H)} 1 \\ &\geq |V(H)| + \deg_{G \setminus H}(u) + \deg_{G \setminus H}(v) \end{aligned} \quad (۴۵.۲)$$

بنابه رابطه (۴۴.۲) داریم

$$\begin{aligned} \sum_{w \in V(H)} \tau(w) &\geq \deg_H(u) + \deg_H(v) + \deg_{G \setminus H}(u) + \deg_{V(G) \setminus V(H)}(v) \\ &= \deg_G(u) + \deg_G(v) = \sum_{w \in V(H)} \tau'(w). \end{aligned}$$

را به سمت چپ نامساوی فوق و $\sum_{w \in V(G) \setminus V(H)} \tau'(w)$ را به سمت راست نامساوی فوق اضافه می‌کنیم. در نتیجه داریم

$$\sum_{w \in V(G)} \tau'(w) \leq \sum_{w \in V(G)} \tau(w) \implies \frac{\sum_{w \in V(G)} \tau'(w)}{|G|} \leq \frac{\sum_{w \in V(G)} \tau(w)}{|G|} \implies \bar{\tau}' \leq \bar{\tau}.$$

□

تعریف ۱۸.۳.۲. توسط یک (صفر و درجه)-انتساب^۴، هر انتساب آستانه τ به رئوس G را در نظر می‌گیریم به طوری که برای هر رأس $v \in V(G)$ ، $\tau(v) = 0$ یا $\tau(v) = \deg_G(v)$.

با در نظر گرفتن تعریف ۱۸.۳.۲ و تعاریف ۲۱.۲.۱ و ۱۴.۲.۱ در فصل ۱ به بیان یک ملاحظه در زیر می‌پردازیم.

ملاحظه ۱۹.۳.۲. فرض کنید (G, τ) داده شده است که در آن τ یک (صفر و درجه)-انتساب است. فرض کنید G_1 زیرگراف القایی از G روی $\{v \in V(G) \mid \tau(v) = \deg_G(v)\}$ باشد. در این صورت هر مینیم پوشش رأس از G_1 یک مینیم پوشش رأس از G است و برعکس.

برهان. (\Leftarrow) فرض کنید D, D_1, D_2 افزای‌های رئوس G باشند و D یک مینیم پوشش رأس از G_1 باشد. قرار دهید $D_1 = V(G) \setminus V(G_1)$. لذا برای هر $x \in D_1$ ، $x \notin V(G_1)$ در نتیجه

$$\deg_D(x) \geq \tau(x) = 0.$$

پس شرایط برقرار است. حال قرار دهید $D_2 = V(G_1) \setminus D$. در این صورت برای هر $x \in D_2$ ، داریم

$$\deg_{D \cup D_1}(x) \geq \tau(x) = \deg_G(x).$$

^۴(zero, degree)-assignment

باتوجه به تعریف پوشش گراف، هر یال D_2 دارای یک انتها در D است. لذا می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \tau(x) &= \deg_G(x) \\ &= \deg_{G_1}(x) + \deg_{G \setminus G_1}(x) \\ &= \deg_D(x) + \deg_{D_1}(x) = \deg_{D \cup D_1}(x). \end{aligned}$$

بنابراین D یک مونوپولی τ -پویا می‌باشد. لذا مینیمم پوشش رأس از G_1 ، یک مینیمم مونوپولی τ -پویا از G است.

(\implies) فرض کنید D یک مینیمم مونوپولی τ -پویا از G باشد. به عبارت دیگر $|D| = \text{dyn}_\tau(G)$. ابتدا ثابت می‌کنیم D یک پوشش است. یعنی می‌خواهیم ثابت کنیم

$$D \cap (V(G) \setminus V(G_1)) = \emptyset \implies D \subseteq V(G_1).$$

اگر $T = D \cap (V(G) \setminus V(G_1)) \neq \emptyset$ ، در این صورت فرض کنید $x \in T$ لذا $\tau(x) = 0$.

ادعا می‌کنیم $D', D'_1, D'_2, \dots, D'_{t+1}$ یک مونوپولی پویا می‌باشد که در آن

$$D' = D \setminus T, \quad D'_1 = T, \quad D'_2 = D_1, \dots, \quad D'_{t+1} = D_t.$$

اگر $x \in D'_1 = T$ ، آن‌گاه

$$\tau(x) = 0 \leq \deg_{D'}(x).$$

لذا در این حالت شرط برقرار است. در حالت کلی اگر $x \in D'_i$ که $i \geq 2$ ، در این صورت

$$\deg_{\bigcup_{j=0}^i D'_j}(x) = \deg_{\bigcup_{j=0}^{i-1} D'_j}(x) \geq \tau(x).$$

لذا مشاهده می‌شود که D' یک مونوپولی پویا است. در نتیجه

$$|D'| < |D|,$$

که این با کوچک‌ترین اندازه بودن D در تناقض است. بنابراین D یک پوشش می‌باشد.

حال فرض کنید D یک مونوپولی τ -پویا از G با کم‌ترین اندازه باشد. لذا افرازهای D, D_1, D_2, \dots, D_t را در نظر می‌گیریم. ادعا می‌کنیم D یک پوشش برای G_1 است.

برهان خلف: فرض کنید D پوششی از G_1 نباشد. در این صورت یال $uv \in E(G_1)$ وجود دارد

به طوری که $\{u, v\} \cap D = \emptyset$. از طرفی بایستی

$$\{u, v\} \subseteq \bigcup_{i=1}^t D_i.$$

فرض کنید i_0 اولین اندیسی باشد که

$$D_{i_0} \cap \{u, v\} \neq \emptyset.$$

بدون کاستن از کلیت می‌توان فرض کرد $u \in D_{i_0}$. لذا برای $0 \leq i < i_0$ داریم

$$\{u, v\} \cap D_i = \emptyset.$$

از آن‌جا که u به v متصل است و v در $\bigcup_{i=0}^{i_0-1} D_i$ قرار ندارد پس

$$\deg_{\bigcup_{i=0}^{i_0-1} D_i}(u) \leq \deg_G(u) - 1. \quad (46.2)$$

از طرفی با توجه به این که D یک مونوپولی τ -پویا است داریم

$$\tau(u) \leq \deg_{\bigcup_{i=0}^{i_{\tau}-1} D_i}(u). \quad (47.2)$$

هم چنین با توجه به فرض ملاحظه می‌دانیم

$$\tau(u) = \deg_G(u).$$

لذا از این تساوی و دو نامساوی (۴۶.۲) و (۴۷.۲) به دست می‌آوریم

$$\deg_G(u) \leq \deg_G(u) - 1.$$

که این تناقض است. بنابراین D یک پوشش برای G_1 است. لذا ثابت کردیم هر پوشش رأس از G_1 یک مونوپولی τ -پویا از G است و برعکس. این یعنی پوشش‌ها برای G_1 شامل همه مونوپولی‌های τ -پویا هستند. در نتیجه کوچک‌ترین پوشش همان کوچک‌ترین مونوپولی τ -پویا از G می‌باشد. \square

بیان قضیه زیر در رابطه با (صفر و درجه)-انتساب‌ها در جنگل‌ها جهت به دست آوردن یک الگوریتم برای $L-t$ مونوپولی پویا از جنگل‌ها با یک t داده شده، ضروری است.

قضیه ۲۰.۳.۲. [۲۰] فرض کنید F یک جنگل و t یک ثابت مثبت باشد. در این صورت یک (صفر و درجه)-انتساب τ' وجود دارد به طوری که $\bar{\tau}' \leq t$ و $L \text{dyn}_t(F) = \text{dyn}_{\tau'}(F)$.

گزاره زیر نشان می‌دهد برای هر جنگل، یک (صفر و درجه)-انتساب موجود است که خارج از رئوس یک جورسازی، صفر می‌باشد.

گزاره ۲۱.۳.۲. [۲۰] فرض کنید F یک جنگل و t یک ثابت مثبت باشد. در این صورت یک جورسازی M وجود دارد به طوری که برای (صفر و درجه)-انتساب τ تعریف شده در زیر داریم

$$L \text{dyn}_t(F) = \text{dyn}_{\tau}(F) = |M|, \quad \bar{\tau} \leq t$$

$$\tau(w) = \begin{cases} \deg_F(w) & , w \text{ رأس اشباع شده توسط } M \text{ باشد,} \\ 0 & , O.W. \end{cases}$$

۴.۳.۲ راه حل زمان-چندجمله‌ای برای جنگل‌ها

در این بخش طی قضیه ۲۴.۳.۲ یک راه حل زمان-چندجمله‌ای برای جنگل‌ها به دست می‌آوریم که برای اثبات آن به گزاره ۲۲.۳.۲ نیاز داریم. لذا ابتدا این گزاره را بیان کرده و آن را توسط الگوریتم مینیم هزینه جریان اثبات می‌کنیم. لازم می‌دانیم الگوریتم مینیم هزینه جریان را شرح دهیم.

مسأله مینیم هزینه جریان^۵

^۵Minimum Cost Flow Problem

مسئله مینیمم هزینه جریان ($MCFP$) به شرح زیر می‌باشد (برای جزئیات بیشتر [۳] را ببینید). فرض کنید $G(V, E)$ یک شبکه جهت‌دار برای هر یک از یال‌های (i, j) با هزینه $c(i, j) \geq 0$ باشد. همچنین برای هر یال $(i, j) \in E$ یک ظرفیت $u(i, j) \geq 0$ وجود دارد. به هر رأس $i \in V$ یک عدد $b(i)$ نسبت می‌دهیم که چشمه^۶ یا چاه^۷ مربوطه‌اش را نشان می‌دهد، خواه $b(i) > 0$ یا $b(i) < 0$. مسئله مینیمم هزینه جریان ($MCFP$) منجر می‌شود به تعیین یک نگاشت جریان

$$f : E \rightarrow \mathbb{R}$$

با مینیمم هزینه جریان

$$z(f) = \sum_{(i,j) \in E} c(i,j)f(i,j)$$

با دو شرط زیر:

۱- (محدودیت ظرفیت)

$$\forall (i,j) \in E; \quad 0 \leq f(i,j) \leq u(i,j);$$

۲- (محدودیت تقاضا)

$$\forall i \in V; \quad \sum_{\{j:(i,j) \in E\}} f(i,j) - \sum_{\{j:(j,i) \in E\}} f(j,i) = b(i).$$

در [۳] یک الگوریتم زمان-چندجمله‌ای داده شده است به طوری که اگر چنین نگاشت f وجود داشته باشد، تعیین کننده است و در صورت وجود، الگوریتم f را به عنوان خروجی می‌دهد. علاوه بر این، اگر همه مقادیر $b(i)$ و $u(i, j)$ صحیح باشند در این صورت الگوریتم یک نگاشت صحیح-مقدار f را به دست می‌دهد.

حال به بیان و اثبات گزاره ۲.۳.۲ می‌پردازیم.

گزاره ۲.۳.۲. فرض کنید G یک گراف دوبخشی باشد که در آن هر یال ij دارای هزینه^۸ $cost(ij) \geq 0$ است و d عددی مثبت باشد. در این صورت یک الگوریتم زمان-چندجمله‌ای وجود دارد به طوری که یک ماکزیمم جورسازی M در G با $cost(M) \leq d$ به دست می‌آید، که در آن

$$cost(M) = \sum_{e \in M} c(e).$$

برهان. یک شبکه جهت‌دار H از گراف دوبخشی $G[X, Y]$ به صورت زیر بسازید. دو رأس جدید s و t را به ترتیب به عنوان منبع و مقصد از H و یال‌های جهت‌دار (s, x) را برای هر رأس $x \in X$ و (y, t) را برای هر رأس $y \in Y$ را اضافه کنید. جهت همه یال‌های دیگر را از X به Y در نظر بگیرید. برای هر یال (i, j) قرار دهید $u(i, j) = 1$ و $c(i, j)$ را به صورت زیر تعریف کنید.

$$c(i, j) = \begin{cases} 0 & i = s \text{ یا } j = t, \\ cost(ij) & i \in X, j \in Y. \end{cases}$$

^۶Source

^۷Sink

^۸Cost

برای هر رأس $i \in X \cup Y$ قرار دهید $b(i) = 0$ و تعریف کنید $b(s) = -b(t) = k$ که در آن k عدد صحیح مثبت دل‌خواه است. حال یک نمونه از $MCFP$ را داریم.

فرض کنید یک نگاشت مینیم هزینه جریان برای این نمونه وجود دارد. از آن‌جا که $u(i, j)$ و $b(i)$ صحیح هستند لذا f یک نگاشت صحیح-مقدار است. بنابر شرط ۱ (محدودیت ظرفیت) از الگوریتم مینیم هزینه جریان برای هر $(i, j) \in E$ داریم

$$0 \leq f(i, j) \leq u(i, j).$$

از آن‌جا که $u(i, j) = 1$ ، لذا $f(i, j) = 0$ یا $f(i, j) = 1$.
 M را مجموعه‌ای از یال‌های (i, j) که $f(i, j) = 1$ و در آن $i \in X$ و $j \in Y$ ، در نظر بگیرید. در این صورت نگاشت جریان f به شکل

$$f(i, j) : E = (i, j) \rightarrow \mathbb{R} = 1$$

می‌باشد. واضح است که M یک جورسازی با $|M| = k$ و $cost(M) = z(f)$ است که در آن

$$z(f) = \sum_{(i,j) \in E} c(i, j) f(i, j) = \sum_{(i,j) \in M} cost(ij) = cost(M).$$

بنابراین یک جریان پیدا کردیم و نشان دادیم که این جریان یک جورسازی است. حال می‌خواهیم از یک جورسازی، یک جریان به‌دست آوریم.

لذا فرض کنید M' یک جورسازی دل‌خواه در G با $|M'| = k$ باشد. یک نگاشت جریان f به شرح زیر می‌سازیم.

$$f(i, j) = \begin{cases} 1 & i \in X, j \in Y, ij \in M', \\ 1 & i = s, jl \in M' \text{ برای برخی } l \in Y, \\ 1 & j = t, li \in M' \text{ برای برخی } l \in X, \\ 0 & O.W. \end{cases}$$

شروط $MCFP$ برای f صدق می‌کند. هم‌چنین

$$z(f) = \sum_{(i,j) \in E} c(i, j) f(i, j) = \sum_{(i,j) \in M'} cost(ij) = cost(M').$$

نتیجه می‌گیریم که به‌دست آوردن یک جورسازی با اندازه k و مینیم هزینه معادل است با به‌دست آوردن یک نگاشت مینیم هزینه جریان برای نمونه $MCFP$ مرتبط (توجه کنید که k پارامتری از این نمونه است). در نتیجه به‌منظور پیدا کردن یک جورسازی با ماکزیمم اندازه که در شرط $cost(M) \leq d$ صدق کند، کافی است الگوریتم متناظر را برای نمونه $MCFP$ ساخته شده در بالا برای هر k اجرا کرد که در آن $\frac{|G|}{4} \leq k \leq 1$. به این ترتیب، الگوریتم تمام مقادیر k را از $k = 1$ تا نصف تعداد رئوس G بررسی کرده و در انتها بین این مقادیر، آن k ای را که دارای خاصیت $cost(M) \leq d$ می‌باشد، پیدا می‌کند. توجه کنید که $\frac{|G|}{4}$ یک کران بالا برای اندازه هر جورسازی است. زیرا در هر جورسازی هر دو رأس تنها توسط یک یال باهم مجاور می‌شوند و این یال‌ها موازی یک‌دیگرند. این اثبات را کامل می‌کند. \square

در اثبات قضیه ۲۴.۳.۲ از صورت قضیه کونیگ^۹ استفاده می‌کنیم و تنها به بیان آن می‌پردازیم.

قضیه ۲۳.۳.۲. [۵] این قضیه هم ارزی بین مسأله جورسازی ماکزیمم و مسأله مینیمم پوشش رأسی در گراف‌های دوبخشی را شرح می‌دهد. به عبارت دیگر در هر گراف دوبخشی ماکزیمم اندازه یک جورسازی برابر است با مینیمم اندازه از یک پوشش.

اکنون قضیه ۲۴.۳.۲ را ارائه می‌دهیم.

قضیه ۲۴.۳.۲. با توجه به جنگل F و عدد مثبت t ، الگوریتمی برای محاسبه $Ldyn_t(F)$ در زمان چندجمله‌ای وجود دارد.

برهان. برای هر یال $e = uv$ از F تعریف کنید

$$cost(e) = deg_F(u) + deg_F(v) \quad (۴۸.۲)$$

و برای هر $M \subseteq E(F)$ تعریف کنید

$$cost(M) = \sum_{e \in E(M)} cost(e). \quad (۴۹.۲)$$

فرض کنید M هر جورسازی دل‌خواه و τ یک (صفر و درجه) -انتساب ساخته شده از M در گزاره ۲۱.۳.۲ باشد. یعنی

$$\tau(w) = \begin{cases} deg_F(w) & \text{رأس اشباع شده توسط } M \text{ باشد,} \\ 0 & O.W. \end{cases}$$

ابتدا فرض کنید $\bar{\tau} \leq t$ پس

$$\begin{aligned} \bar{\tau} \leq t &\implies \frac{\sum_{w \in V(F)} \tau(w)}{|V(F)|} \leq t \\ &\implies \sum_{w \in V(F)} \tau(w) \leq t|V(F)| \end{aligned}$$

بنابر تعریف $\tau(w)$ در گزاره ۲۱.۳.۲ می‌توان نوشت

$$\sum_{w \in V(F)} \tau(w) = \sum_{w \in M} deg_F(w) \leq t|V(F)|$$

به عبارت دیگر

$$\begin{aligned} t|V(F)| &\geq \sum_{w \in M} deg_F(w) \\ &\geq deg_F(u) + deg_F(v) \end{aligned} \quad (۵۰.۲)$$

با توجه به روابط (۴۸.۲) و (۴۹.۲) داریم

$$t|V(F)| \geq \sum_{e \in M} cost(e) = cost(M) \geq cost(e) \implies cost(M) \leq t|V(F)|.$$

^۹Koonig Theorem

حال فرض کنید $cost(M) \leq t|V(F)|$ پس

$$\begin{aligned} cost(M) \leq t|V(F)| &\implies \sum_{e \in M} cost(e) = \sum_{e \in M} (deg_F(u) + deg_F(v)) \\ &= \sum_{u \in M} deg_F(u) + \sum_{v \in M} deg_F(v) \\ &= \sum_{w \in F} \tau(w) \leq t|V(F)| \end{aligned}$$

در نتیجه داریم

$$\frac{\sum_{w \in V(F)} \tau(w)}{|V(F)|} \leq t \implies \bar{\tau} \leq t.$$

مشاهده می‌شود که

$$\bar{\tau} \leq t \iff cost(M) \leq t|V(F)|.$$

حال اگر M یک ماکزیمم جورسازی باشد که در شرط $cost(M) \leq t|V(F)|$ صدق می‌کند، آنگاه با استفاده از گزاره ۲۱.۳.۲ نتیجه می‌گیریم

$$Ldyn_t(F) = dyn_\tau(F) = |M|.$$

بنابه گزاره ۲۲.۳.۲ یک الگوریتم زمان-چندجمله‌ای وجود دارد که در آن ماکزیمم جورسازی M در F با شرط $cost(M) \leq c$ برای هر مقدار c ، یافت می‌شود. در این صورت با استفاده از گزاره ۲۱.۳.۲ برای جنگل F و ثابت t داده شده، یک الگوریتم زمان چندجمله‌ای وجود دارد که یک (صفر و درجه)-انتساب τ پیدا می‌کند به طوری که $Ldyn_t(F) = dyn_\tau(F)$. از جهت دیگر پیدا کردن یک مینیمم پوشش رأس در گراف‌های دوبخشی، یک مسأله زمان-چندجمله‌ای است. چون ثابت شده است که ماکزیمم جورسازی یک مسأله چندجمله‌ای است. از طرفی بنابر قضیه کونیگ، ماکزیمم جورسازی برابر است با مینیمم پوشش رأسی. در نتیجه مینیمم پوشش رأسی، یک مسأله چندجمله‌ای است. بنابراین با توجه به ملاحظه ۱۹.۳.۲ می‌توان یک مینیمم مونوپولی τ -پویا برای F در زمان چندجمله‌ای یافت. \square

فصل ۳

مونوپولی‌های پویا در گراف‌ها با آستانه‌های اکثریت اکید

۱.۳ مقدمه

با توجه به کاربردهای مختلفی که مونوپولی‌های پویا دارند می‌توان از مدل‌های ساختاری متفاوتی برای رئوس G استفاده کرد. یکی از مهم‌ترین و پرکاربردترین مدل‌ها، مدل با آستانه اکثریت است. این نوع مدل آستانه مورد مطالعه بسیاری از محققان قرار گرفته است [۹، ۱]. شاید دلیل عمده این باشد که در دنیای واقعی فرض بر این است که نظریک فرد بر اساس نظر اکثریت آشنایان او شکل می‌گیرد. این مدل به این صورت است که یک رأس در صورتی فعال می‌شود که حداقل نیمی از همسایه‌هایش فعال باشند. این مدل به دو صورت آستانه اکثریت ساده و آستانه اکثریت اکید قابل استفاده می‌باشد. در آستانه اکثریت ساده در صورتی که حداقل نصف همسایه‌های هر رأس فعال باشد، آن رأس فعال می‌شود. یعنی برای هر رأس v از G داریم $\tau(v) = \frac{\deg(v)}{2}$. اما در آستانه اکثریت اکید تنها در صورتی که اکیداً، یعنی بیشتر از نصف همسایه‌های یک رأس از G فعال باشد، آن رأس فعال می‌شود. به عبارتی در این حالت برای هر رأس v از G داریم $\tau(v) = \left\lceil \frac{\deg(v) + 1}{2} \right\rceil$. در سال‌های اخیر، بسیاری از پژوهش‌گران به مطالعه و بررسی مونوپولی‌های پویا در گراف‌ها علاقه‌مند شده‌اند. مونوپولی‌های پویا با آستانه اکثریت اکید در برخی از خانواده‌های خاص از گراف‌ها در [۱۳، ۱۴، ۱۵] مورد مطالعه قرار گرفته است. نویسندگان در [۸] مونوپولی‌های پویا با آستانه اکثریت اکید را در گراف‌های جهت‌دار و بدون جهت مطالعه کرده‌اند. در این فصل توسط (G, τ) یک گراف G و یک انتساب آستانه τ به رئوس G و توسط یک مونوپولی پویا اکثریت اکید، هر مونوپولی پویا را متناظر با آستانه اکثریت اکید در نظر می‌گیریم.

۲.۳ کران‌هایی برای کوچک‌ترین مونوپولی پویا

همان‌طور که در آغاز این فصل اشاره کردیم، برای هر رأس v از G مقدار آستانه را $\lceil \frac{deg(v)+1}{2} \rceil$ قرار می‌دهیم. ما در این بخش، ابتدا زمانی که گراف G شامل حداقل یک رأس فرد است، کران بالای $\frac{|G|}{2}$ را برای کوچک‌ترین اندازه هر مونوپولی پویا با آستانه اکثریت اکید نتیجه می‌گیریم. این کران، بهترین کران شناخته شده برای آستانه اکثریت اکید را بهبود می‌بخشد.

تعریف ۱.۲.۳. فرض کنید G یک گراف و σ هر ترتیب^۱ از G باشد. مرتبه^۲ رأس v (شماره رأس v در ترتیب) در G را با $\sigma(v)$ نشان می‌دهیم. برای هر دو رأس u و v ، اگر u قبل از رأس v در ترتیب σ قرار گیرد، به صورت $\sigma(u) < \sigma(v)$ نشان داده می‌شود.

مجموعه همسایگی^۳ هر رأس v را با $N(v)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲.۲.۳. برای هر رأس v ، $f_\sigma(v)$ را به شرح زیر تعریف می‌کنیم

$$f_\sigma(v) = |N(v) \cap \{u : \sigma(u) > \sigma(v)\}| - |N(v) \cap \{u : \sigma(u) < \sigma(v)\}|.$$

قضیه ۳.۲.۳. فرض کنید G هر گراف همبند باشد.

(i) اگر G شامل حداقل یک رأس از درجه فرد باشد، در این صورت یک ترتیب σ وجود دارد به طوری که برای هر رأس v ، $f_\sigma(v) \neq 0$.

(ii) اگر همه درجات در G زوج باشند، آنگاه یک ترتیب σ وجود دارد به طوری که برای همه به جز حداکثر یک رأس v از G ، $f_\sigma(v) \neq 0$. علاوه بر این، اگر برای برخی از رئوس v داشته باشیم $f_\sigma(v) = 0$ ، در این صورت رأس v می‌تواند هر رأس دل‌خواه از گراف G در نظر گرفته شود.

برهان. به منظور اثبات این قضیه، ادعای زیر را که قوی‌تر است اثبات می‌کنیم. ادعا: یک ترتیب σ که در شروط قضیه صدق می‌کند، وجود دارد که هم‌چنین دارای خاصیت قوی‌تر زیر است.

برای هر u, v, w ، اگر $f_\sigma(u) > 0$ ، $f_\sigma(v) < 0$ و $f_\sigma(w) = 0$ آنگاه $\sigma(u) < \sigma(w) < \sigma(v)$. ادعا را به استقرا روی $|G|$ اثبات می‌کنیم. به‌طور بدیهی، حکم برای $|G| = 1$ یا $|G| = 2$ برقرار است. حال فرض کنید حکم برای همه گراف‌های با کم‌تر از n رأس برقرار باشد و G گرافی با $|G| = n$ باشد. اگر G شامل رأس از درجه فرد باشد، آنگاه فرض کنید x رأسی از درجه فرد در G باشد در غیر این صورت x را یک رأس دل‌خواه از G فرض می‌کنیم. رأس x را از G برداشته و مولفه‌های همبند از $G \setminus x$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنید A_1, \dots, A_k این مولفه‌های همبند باشند. با توجه به این‌که تعداد رئوس A_i ‌ها، $1 \leq i \leq k$ از تعداد رئوس G کم‌تر است، لذا هر یک از این A_i ‌ها در فرض استقرا صدق می‌کنند. لذا بنابر فرض استقرا، برای هر A_i یک ترتیب σ^i متناظر است به طوری که تابع متناظر f_{σ^i} در شرایط ادعا

^۱Ordering

^۲Order

^۳Neighborhood set

صدق می‌کند. اگر یک رأس مانند u در A_i وجود داشته باشد که $f_{\sigma^i}(u) = 0$ در این صورت u می‌تواند به عنوان یک همسایه از x در G انتخاب شود (چون رأس با $f_{\sigma} = 0$ می‌تواند هر رأس دل‌خواه در G در نظر گرفته شود). فرض کنید A_i^+ دنباله رئوس در A_i باشد که در آن f_{σ^i} مثبت است. به‌طور مشابه فرض کنید A_i^- دنباله رئوس در A_i باشد که در آن f_{σ^i} منفی است. همچنین فرض کنید A_i^0 رأسی در A_i با $f_{\sigma^i} = 0$ باشد (در صورت وجود). حال یک ترتیب σ روی $V(G)$ تعریف می‌کنیم که توسط دنباله رئوس خاصی در لیست زیر از چپ به راست به‌دست آمده است

$$A_1^+, \dots, A_k^+, A_1^0, \dots, A_k^0, x, A_1^-, \dots, A_k^-.$$

توجه داشته باشید که ترتیب رئوس در A_i در هر دو ترتیب σ و σ^i یکسان است (همان ترتیب σ^i را برای ترتیب σ در نظر می‌گیریم). فرض کنید u هر رأس از A_i باشد. رأس u تنها می‌تواند در مجاورت رأس x باشد. چون در غیر این صورت اگر در مجاورت رأسی از A_j باشد آن‌گاه A_j و A_i با هم یک مولفه همبندی محسوب می‌شوند. در حالی که A_j و A_i هر یک به تنهایی یک مولفه همبندی از $x \setminus G$ می‌باشند. از آن‌جا که موقعیت مکانی x در ترتیب σ بعد از A_i^+ و قبل از A_i^- است، لذا علامت $f_{\sigma}(u)$ همان علامت $f_{\sigma^i}(u)$ می‌باشد. فرض کنید $u \in A_i$ وجود دارد به‌طوری‌که $f_{\sigma^i}(u) = 0$. حال چون در ترتیب σ ، رأس x بعد از u قرار دارد پس $f_{\sigma}(u) \neq 0$. \square

در [۸] نشان داده شده است که هر گراف G شامل یک مونوپولی پویا با آستانه اکثریت اکید با حداکثر $\left\lfloor \frac{|G|}{4} \right\rfloor$ رأس می‌باشد. نتیجه زیر را که نتیجه قوی‌تری ارائه می‌دهد بیان می‌کنیم.

نتیجه ۴.۲.۳. فرض کنید G یک گراف از مرتبه n و τ یک تابع آستانه باشد که توسط رابطه

$$\tau(v) = \left\lceil \frac{\deg(v) + 1}{4} \right\rceil \quad \text{برای هر رأس } v \text{ به‌دست آمده است. در این صورت یک مونوپولی } \tau\text{-پویا } M \text{ وجود دارد به‌طوری‌که } |M| \leq \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil.$$

علاوه بر این، اگر G شامل یک رأس از درجه فرد باشد آن‌گاه این‌چنین مجموعه M وجود دارد که $|M| \leq \frac{n}{4}$.

برهان. فرض کنید σ یک ترتیب از رئوس G باشد که در شروط قضیه ۳.۲.۳ صدق می‌کند. فرض کنید M_1 مجموعه‌ای از رئوس V باشد به‌طوری‌که $f_{\sigma}(v) \geq 0$. به‌عبارت‌دیگر

$$M_1 = \{v \in V(G) : f_{\sigma}(v) \geq 0\}. \quad (۱.۳)$$

مشاهده می‌کنیم که M_1 یک مونوپولی پویا با آستانه اکثریت اکید است. زیرا اگر ترتیب σ را از چپ به راست در نظر بگیریم و به اندازه $|M_1|$ که $f_{\sigma}(v) \geq 0$ پیش برویم، به اولین رأسی می‌رسیم که $f_{\sigma}(v) < 0$. فرض کنید این رأس، v_{i_1} باشد. قرار دهید $D_1 = \{v_{i_1}\}$. سپس به v_{i_2} می‌رسیم و قرار دهید $D_2 = \{v_{i_2}\}$. در واقع رئوس با f_{σ} منفی به نوبت و طبق ترتیب خود، در σ فعال شده‌اند. با ادامه این روش، افزای از رئوس G را به‌صورت زیر داریم

$$M_1, D_1, D_2, \dots$$

که یک مونوپولی پویا می‌باشد. لذا M_1 یک مونوپولی پویا با آستانه اکثریت اکید است. به‌طور مشابه اگر M_2 مجموعه‌ای از رئوس V باشد به‌طوری‌که $f_\sigma(v) \leq 0$. به عبارت دیگر

$$M_2 = \{v \in V(G) : f_\sigma(v) \leq 0\}. \quad (2.3)$$

در این صورت M_2 نیز یک مونوپولی پویا با آستانه اکثریت اکید خواهد بود. چون اگر ترتیب σ را از راست به چپ در نظر بگیریم و به اندازه $|M_2|$ که $f_\sigma(v) \leq 0$ به سمت چپ پیش برویم، به اولین رأس مانند v_{i_1} می‌رسیم که $f_\sigma(v) > 0$. قرار دهید $D_1 = \{v_{i_1}\}$. سپس به v_{i_2} می‌رسیم و قرار دهید $D_2 = \{v_{i_2}\}$. در واقع رئوسی که دارای f_σ مثبت هستند، به نوبت و طبق برعکس کردن ترتیب خود، در σ فعال شده‌اند. مانند قبل با ادامه این روش، افرازی از رئوس G را به صورت زیر به دست می‌آوریم

$$M_2, D_1, D_2, \dots$$

که یک مونوپولی پویا می‌باشد. لذا M_2 یک مونوپولی پویا با آستانه اکثریت اکید است. با در نظر گرفتن مجموعه‌های روابط (۱.۳) و (۲.۳) داریم

$$M_1 \cap M_2 = \{v \in V(G) : f_\sigma(v) = 0\}.$$

دو حالت وجود دارد:

حالت ۱: اگر G دارای رئوس از درجه فرد باشد، آنگاه بنابر قضیه ۳.۲.۳ داریم

$$f_\sigma(v) \neq 0.$$

در این صورت

$$|M_1 \cap M_2| = 0.$$

در نتیجه داریم

$$2 \min \{|M_1|, |M_2|\} \leq |M_1| + |M_2| \leq n.$$

لذا

$$\min \{|M_1|, |M_2|\} \leq \frac{n}{2}.$$

این یعنی یکی از مونوپولی‌های M_1 یا M_2 دارای حداکثر $\frac{n}{2}$ رأس می‌باشد. حالت ۲: اگر G دارای رئوس از درجه زوج باشد، در این صورت

$$|M_1| + |M_2| \leq n + 1 \implies |M| \leq \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil.$$

□

ملاحظه زیر بلافاصله از قضیه ۳.۲.۳ و اثبات نتیجه ۴.۲.۳ به دست می‌آید.

ملاحظه ۵.۲.۳. [۱۸] فرض کنید G یک گراف با تعداد رئوس زوج و v هر رأس از G باشد. در این صورت G یک مونوپولی پویا با آستانه اکثریت اکید با حداکثر $\frac{|G|}{2}$ رأس می‌پذیرد که شامل رأس v است.

این بخش را با ارتباط مونوپولی‌های پویا با آستانه اکثریت اکید و عدد جورسازی گراف‌ها به پایان می‌رسانیم. جهت به‌دست آوردن نتیجه بعد، لازم است از یک قضیه از [۱۹] استفاده کنیم که توسط ذاکر^۴ و هم‌کاران اثبات شده است. بدین منظور به بیان برخی اصطلاحات می‌پردازیم. در فصل ۱ مفهوم جورسازی را بیان کردیم. در ادامه، ماکزیمم تعداد یال‌های مستقل در G را عدد جورسازی G در نظر می‌گیریم و با $\alpha'(G)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۶.۲.۳. توسط یک p پارامتر گراف^۵، هر تابع p از مجموعه همه گراف‌ها به اعداد صحیح نامنفی را در نظر بگیرید به طوری که اگر G و H دو گراف یکریخت باشند آن‌گاه $p(G) = p(H)$.

تعریف ۷.۲.۳. یک p پارامتر از گراف، یک زیرجمع‌پذیر^۶ نامیده می‌شود هرگاه

$$p(G \cup H) \leq p(G) + p(H),$$

که در آن $G \cup H$ اجتماع مجزای رئوس دو گراف G و H است.

قضیه ۸.۲.۳. [۱۹] فرض کنید p هر پارامتر از گراف زیرجمع‌پذیر باشد به طوری که برای هر گراف G و هر رأس $v \in V(G)$ ، $p(G) \leq p(G \setminus v) + 1$ ، فرض کنید یک ثابت $1 \leq t < 2$ وجود دارد به طوری که برای هر گراف G با تعداد رئوس فرد، $p(G) \leq \frac{t(|G| - 1)}{2}$. در این صورت برای هر گراف G ،

$$p(G) \leq \lfloor t\alpha'(G) \rfloor.$$

نتیجه بعد به شرح زیر است.

قضیه ۹.۲.۳. هر گراف همبند G یک مونوپولی پویا با آستانه اکثریت اکید به اندازه حداکثر $\alpha'(G) + 1$ می‌پذیرد. علاوه بر این اگر G دارای c مولفه همبند باشد در این صورت G یک مونوپولی پویا با آستانه اکثریت اکید به اندازه حداکثر $\alpha'(G) + c$ می‌پذیرد.

برهان. یک p پارامتر از گراف G به شرح زیر تعریف می‌کنیم. برای هر گراف همبند G تعریف می‌کنیم:

$$p(G) = \begin{cases} dyn(G) - 1 & ; dyn(G) = \left\lceil \frac{|G|+1}{2} \right\rceil, \\ dyn(G) & O.W. \end{cases} \quad (3.3)$$

که در آن $dyn(G)$ اندازه کوچک‌ترین مونوپولی پویا با آستانه اکثریت اکید در G است. برای یک گراف ناهمبند G متشکل از مولفه‌های همبند H_1, H_2, \dots, H_k ، پارامتر گراف را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$p(G) = \sum_{i=1}^k p(H_i).$$

^۴Zaker

^۵Graph parameter

^۶Subadditive

توجه داشته باشید پارامتر p یک پارامتر زیرجمع‌پذیر گراف است. از آن‌جا که $|K_1| = 1$ پس

$$\text{dyn}(K_1) = \left\lceil \frac{1+1}{2} \right\rceil = \lceil 1 \rceil = 1.$$

با جای‌گذاری در (۳.۳) داریم

$$p(K_1) = \text{dyn}(K_1) - 1 = 1 - 1 = 0.$$

در زیر نشان می‌دهیم که p در نامساوی لیپ‌شیتز^۷ صدق می‌کند. یعنی برای هر $v \in V(G)$

$$p(G) \leq p(G \setminus v) + 1.$$

با توجه به زیرجمع‌پذیر بودن پارامتر p و این‌که برای هر $v \in V(G)$ $(G \cup H) \setminus v = (G \setminus v) \cup H$ کافی است خاصیت لیپ‌شیتز را برای گراف‌های همبند اثبات کنیم.

حال فرض کنید G یک گراف همبند و $v \in V(G)$ باشد. فرض کنید مولفه‌های همبند $G \setminus v$ به صورت G_1, G_2, \dots, G_t باشند. در زیر یک مونوپولی پویا با آستانه اکثریت اکید M برای G می‌سازیم به طوری که $v \in M$ و

$$|M \cap G_i| \leq \frac{|G_i|}{2}.$$

بدین منظور فرض کنید M یک مینیمم مونوپولی پویا با آستانه اکثریت اکید از G و شامل رأس v باشد. نشان می‌دهیم برای هر i ,

$$|M \cap G_i| \leq \frac{|G_i|}{2}.$$

به برهان خلف فرض کنید برای برخی j ,

$$|M \cap G_j| > \frac{|G_j|}{2}.$$

بنابر نتیجه ۴.۲.۳، G_j یک مونوپولی پویا با آستانه اکثریت اکید مانند D_{G_j} با حداکثر $\lceil \frac{|G_j|}{2} \rceil$ رأس می‌پذیرد، یعنی

$$|D_{G_j}| \leq \left\lceil \frac{|G_j|}{2} \right\rceil.$$

از طرف دیگر $|M \cap G_j| \leq |D_{G_j}|$. چون در غیراین صورت فرض کنید $|M \cap G_j| > |D_{G_j}|$. لذا $M' = (M \setminus (M \cap G_j)) \cup D_{G_j}$ یک مینیمم مونوپولی پویا با آستانه اکثریت اکید شامل v است و $|M'| < |M|$. این با فرض مینیمم بودن M در تناقض است. لذا $|M \cap G_j| \leq |D_{G_j}|$. در نتیجه

$$|M \cap G_j| \leq |D_{G_j}| \leq \left\lceil \frac{|G_j|}{2} \right\rceil. \quad (۴.۳)$$

پس از رابطه (۴.۳) می‌توان نوشت

$$|M \cap G_j| = \left\lceil \frac{|G_j| + 1}{2} \right\rceil.$$

توجه داشته باشید در این مورد $|G_j|$ فرد است.

زیرگرافی از G القاشده توسط $V(G_j) \cup \{v\}$ را در نظر می‌گیریم. با توجه به ملاحظه ۵.۲.۳، چون گراف اخیر دارای تعداد رئوس زوج است لذا یک مونوپولی پویا به نام M شامل رأس v با حداکثر

^۷Lipschitz inequality

رأس می‌پذیرد. توجه داشته باشید که $|M \cap G_j| < \lceil \frac{|G_j| + 1}{2} \rceil$.
 حال یک مونوپولی جدید برای G به صورت زیر به دست می‌آوریم

$$M_{new} = (M \setminus G_j) \cup (M_0 \setminus \{v\}).$$

M_{new} یک مونوپولی پویا شامل رأس v و با تعداد کمتر از M می‌باشد و این یعنی $|M_{new}| < |M|$ که با کمینه بودن M در تناقض است. در نتیجه

$$|M \cap G_i| \leq \frac{|G_i|}{2}.$$

برای هر i ، کوچک‌ترین اندازه هر مونوپولی پویا با آستانه اکثریت اکید در زیرگرافی از G القاشده توسط $V(G_i) \cup \{v\}$ را با $dyn'(G_i)$ نشان دهید که در آن v یک رأس فعال است. با استفاده از مونوپولی پویا با آستانه اکثریت اکید M که پیش از این، به دست آمده بود داریم

$$d_{yn}'(G_i) \leq \frac{|G_i|}{2}.$$

در ادامه نشان می‌دهیم

$$d_{yn}'(G_i) \leq p(G_i).$$

واضح است که $d_{yn}'(G_i) \leq dyn(G_i)$.

اگر $d_{yn}'(G_i) = dyn(G_i)$ ، در این صورت چون $d_{yn}'(G_i) \leq \frac{|G_i|}{2}$ لذا $d_{yn}(G_i) \leq \frac{|G_i|}{2}$. در نتیجه با توجه به تعریف پارامتر p در شروع اثبات، داریم $p(G_i) = dyn(G_i)$ یا $p(G_i) = d_{yn}'(G_i)$. اما اگر $d_{yn}'(G_i) < dyn(G_i)$ آن‌گاه

$$d_{yn}'(G_i) + 1 \leq dyn(G_i) \implies d_{yn}'(G_i) \leq dyn(G_i) - 1.$$

در این حالت نیز با توجه به تعریف پارامتر p در شروع اثبات، داریم

$$p(G_i) = dyn(G_i) - 1 \geq d_{yn}'(G_i) \implies d_{yn}'(G_i) \leq p(G_i).$$

حال نامساوی زیر را داریم که در آن M همان مونوپولی جدید ساخته شده یعنی M_{new} می‌باشد.

$$\begin{aligned} 1 + p(G \setminus v) &= 1 + p(G_1) + p(G_2) + \dots + p(G_t) \\ &= 1 + \sum_{i=1}^t p(G_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^t d_{yn}'(G_i). \end{aligned}$$

از آن‌جا که $|M \cap G_i| = d_{yn}'(G_i) = dyn(G_i)$ ، پس

$$\begin{aligned} 1 + p(G \setminus v) &\geq 1 + \sum_{i=1}^t |M \cap G_i| \\ &= |M| \geq dyn(G) \geq p(G). \end{aligned}$$

این نامساوی نشان می‌دهد شرط لیپ‌شیتز برای گراف‌های همبند برقرار است.

با استفاده از قضیه ۸.۲.۳، برای هر گراف G متشکل از مولفه‌های همبند G_1, G_2, \dots, G_c و با وجود

$1 \leq t < 2$ داریم

$$p(G) \leq \lfloor t\alpha'(G) \rfloor \implies p(G) \leq \alpha'(G). \quad (5.3)$$

از طرفی از تعریف پارامتر p داریم

$$p(G) = \text{dyn}(G) - 1.$$

با جای‌گذاری تساوی فوق در (۵.۳) داریم

$$\text{dyn}(G) - 1 \leq \alpha'(G) \implies \text{dyn}(G) \leq \alpha'(G) + 1.$$

از سوی دیگر $p(G) = \sum_{i=1}^c p(G_i)$ هم‌چنین با تعریف p برای گراف‌های همبند داریم

$$p(G_i) \geq \text{dyn}(G_i) - 1.$$

لذا

$$\alpha'(G) \geq p(G) = \sum_{i=1}^c p(G_i) \geq \sum_{i=1}^c (\text{dyn}(G_i) - 1) = \sum_{i=1}^c \text{dyn}(G_i) - c.$$

پس $\alpha'(G) \geq \sum_{i=1}^c \text{dyn}(G_i) - c$ در نتیجه

$$\alpha'(G) \geq \text{dyn}(G) - c \implies \text{dyn}(G) \leq \alpha'(G) + c.$$

بنابراین گراف G یک مونوپولی پویا با آستانه اکثریت اکید با حداکثر $\alpha'(G) + c$ می‌پذیرد. \square

فصل ۴

مونوپولی‌های پویا در گراف‌ها با آستانه‌های عمومی

۱.۴ مقدمه

با توجه به کاربرد مونوپولی‌های پویا، مدل‌های متفاوتی را برای مجموعه رئوس G می‌توان استفاده کرد. مدلی که در این فصل به بررسی آن پرداخته‌ایم، مدل با آستانه عمومی^۱ می‌باشد. در این فصل، ابتدا ارتباط بین زیرگراف‌های مقاوم و مونوپولی‌های پویا را نشان می‌دهیم. سپس برخی از کران‌های بالا و پایین را برای اندازه مونوپولی پویا از گراف‌ها با انواع مختلفی از آستانه‌ها به دست می‌آوریم. هم‌چنین جامعه همگن، خانواده‌های مونوپولی پویا-نامحدود از گراف‌ها و گراف‌های یالی را معرفی کرده و برخی نتایج در این زمینه را به دست می‌آوریم.

۲.۴ برخی کران‌ها برای اندازه مونوپولی پویا از گراف‌ها

با توجه به (G, τ) داده شده و تعریف زیرگراف مقاوم (تعریف ۳۳.۲.۱) در فصل ۱، گزاره زیر را بیان می‌کنیم. این گزاره یک شرط لازم و کافی برای گراف‌هایی که زیرگراف‌های مقاوم ندارند، اثبات می‌کند.

گزاره ۱.۲.۴. یک زیرگراف H از (G, τ) شامل هیچ زیرگراف مقاوم از G نیست اگر و تنها اگر رئوس H به v_1, v_2, \dots, v_n برچسب‌گذاری شوند به طوری که v_i دارای حداکثر $deg_G(v_i) - \tau(v_i)$ همسایه در میان $\{v_i, \dots, v_n\}$ باشد.

برهان. (\Leftarrow) ابتدا فرض کنید H شامل هیچ زیرگراف مقاوم از G نباشد. در این صورت H خودش یک گراف مقاوم نیست. بنابراین یک رأس $v_1 \in V(H)$ وجود دارد به طوری که

$$deg_H(v_1) < deg_G(v_1) - \tau(v_1) + 1 \implies deg_H(v_1) \leq deg_G(v_1) - \tau(v_1).$$

^۱General threshold

قرار می‌دهیم $H_1 = H \setminus \{v_1\}$. از آن‌جا که H_1 نیز مقاوم نیست پس رأس $v_2 \in V(H_1)$ وجود دارد به طوری که

$$\deg_{H_1}(v_2) < \deg_G(v_2) - \tau(v_2) + 1 \implies \deg_{H_1}(v_2) \leq \deg_G(v_2) - \tau(v_2).$$

این بدین معنی است که رأس v_2 دارای حد اکثر $\deg_G(v_2) - \tau(v_2)$ همسایه در $H_1 = H[v_2, v_3, \dots, v_n]$ است.

با تکرار این استدلال، v_1, v_2, \dots, v_n را به دست می‌آوریم به طوری که

$$\deg_{H_{i-1}}(v_i) \leq \deg_G(v_i) - \tau(v_i),$$

که در آن $H_{i-1} = H[v_i, v_{i+1}, \dots, v_n]$.

(\implies) حال فرض کنید رئوس H همان‌طور که در گزاره ذکر شد، به v_1, v_2, \dots, v_n برچسب‌گذاری شده باشند به طوری که برای هر i ،

$$\deg_{H_{i-1}}(v_i) \leq \deg_G(v_i) - \tau(v_i), \quad (1.4)$$

که در آن $H_{i-1} = H[v_i, v_{i+1}, \dots, v_n]$. نشان می‌دهیم زیرگراف H شامل هیچ زیرگراف مقاوم نیست. به برهان خلف فرض کنید H دارای زیرگراف مقاوم K باشد. لذا برای هر $v \in V(K)$ داریم

$$\deg_K(v) \geq \deg_G(v) - \tau(v) + 1.$$

هم‌چنین $v_1 \notin V(K)$. چون در غیر این صورت اگر $v_1 \in V(K)$ آن‌گاه

$$\deg_K(v_1) \geq \deg_G(v_1) - \tau(v_1) + 1. \quad (2.4)$$

از طرفی

$$\deg_K(v_1) \leq \deg_H(v_1) = \deg_{H[v_1, \dots, v_n]}(v_1). \quad (3.4)$$

با توجه به رابطه (۱.۴)، نامساوی (۳.۴) به صورت زیر تغییر می‌کند

$$\deg_K(v_1) \leq \deg_G(v_1) - \tau(v_1). \quad (4.4)$$

در نتیجه از (۲.۴) و (۴.۴) داریم

$$\deg_G(v_1) - \tau(v_1) + 1 \leq \deg_K(v_1) \leq \deg_G(v_1) - \tau(v_1)$$

که تناقض است. پس $v_1 \notin V(K)$.

هم‌چنین $v_2 \notin V(K)$. در غیر این صورت فرض کنید $v_2 \in V(K)$ آن‌گاه

$$\deg_K(v_2) \geq \deg_G(v_2) - \tau(v_2) + 1. \quad (5.4)$$

از طرفی

$$\deg_K(v_2) \leq \deg_{H_1}(v_2) = \deg_{H[v_2, \dots, v_n]}(v_2). \quad (6.4)$$

با توجه به رابطه (۱.۴)، نامساوی (۶.۴) به صورت زیر تبدیل می‌شود

$$\deg_K(v_2) \leq \deg_G(v_2) - \tau(v_2). \quad (7.4)$$

لذا از (۵.۴) و (۷.۴) داریم

$$\deg_G(v_2) - \tau(v_2) + 1 \leq \deg_K(v_2) \leq \deg_G(v_2) - \tau(v_2)$$

که تناقض است. پس $v_2 \notin V(K)$.

در نهایت $v_i \notin V(K)$ در غیر این صورت فرض کنید i کوچک‌ترین اندیسی باشد که $v_i \in V(K)$ در این صورت

$$\deg_K(v_i) \geq \deg_G(v_i) - \tau(v_i) + 1. \quad (۸.۴)$$

از طرفی

$$\deg_K(v_i) \leq \deg_{H_{i-1}}(v_i) = \deg_{H[v_1, \dots, v_{i-1}]}(v_i). \quad (۹.۴)$$

بنابر رابطه (۱۰.۴)، نامساوی (۹.۴) به شکل زیر تبدیل می‌شود

$$\deg_K(v_i) \leq \deg_G(v_i) - \tau(v_i). \quad (۱۰.۴)$$

در نتیجه از (۸.۴) و (۱۰.۴) داریم

$$\deg_G(v_i) - \tau(v_i) + 1 \leq \deg_K(v_i) \leq \deg_G(v_i) - \tau(v_i)$$

□ که تناقض است. لذا $v_i \notin V(K)$ در نتیجه $K = \emptyset$. بنابراین H دارای زیرگراف مقاوم نیست.

ذکر در گزاره زیر ارتباط بین زیرگراف‌های مقاوم و مونوپولی‌های پویا را نشان می‌دهد.

گزاره ۲.۲.۴. $D \subseteq V(G)$ یک مونوپولی τ -پویا از گراف G است اگر و تنها اگر $D \setminus G$ شامل هیچ زیرگراف مقاوم نباشد.

برهان. (\Leftarrow) فرض کنید $D \subseteq V(G)$ یک مونوپولی پویا از گراف G باشد. به برهان خلف فرض کنید یک زیرگراف K از $D \setminus G$ وجود دارد که یک زیرگراف مقاوم است. حال فرض کنید D_i مجموعه‌ای از رئوس G باشد که در زمان i فعال شده‌اند، با شروع از $D_0 = D$. فرض کنید v هر رأس دل‌خواه از K باشد. بدیهی است $v \notin D_0$. چون از ابتدا $v \in V(K)$ انتخاب شده بود. هم‌چنین $v \notin D_1$ چون اگر $v \in D_1$ بایستی

$$\deg_{D_0}(v) \geq \tau(v). \quad (۱۱.۴)$$

از طرفی $D_0 \subseteq (V(G) \setminus V(K))$. پس

$$\deg_{D_0}(v) \leq \deg_{G \setminus K}(v). \quad (۱۲.۴)$$

اما از آن‌جا که K زیرگرافی مقاوم است، لذا برای هر $v \in V(K)$

$$\deg_G(v) - \tau(v) + 1 \leq \deg_K(v) \implies \deg_G(v) - \deg_K(v) \leq \tau(v) - 1$$

$$\implies \deg_{G \setminus K}(v) \leq \tau(v) - 1.$$

با استفاده از رابطه فوق در نامساوی (۱۲.۴) به دست می‌آوریم

$$\deg_{D_0}(v) \leq \tau(v) - 1,$$

که این با نامساوی (۱۱.۴) در تناقض است. هم‌چنین $v \notin D_2$ چون اگر $v \in D_2$ در این صورت

$$\deg_{D_0 \cup D_1}(v) \geq \tau(v). \quad (۱۳.۴)$$

از طرفی $(D_0 \cup D_1) \subseteq (V(G) \setminus V(K))$. در نتیجه

$$\deg_{D_0 \cup D_1}(v) \leq \deg_{G \setminus K}(v) \leq \tau(v) - 1. \quad (۱۴.۴)$$

روابط (۱۳.۴) و (۱۴.۴) باهم متناقض هستند. لذا برای هر i ، رأس v به هیچ‌یک از D_i ها تعلق ندارد. یعنی D نمی‌تواند یک مونوپولی پویا باشد که با فرض در تناقض است. پس $G \setminus D$ شامل هیچ زیرگراف مقاوم نیست.

(\implies) حال فرض کنید $H_1 = G \setminus D$ شامل هیچ زیرگراف مقاوم نباشد. این نشان می‌دهد که H_1 خودش مقاوم نیست. در این صورت یک رأس $v_1 \in V(H_1)$ وجود دارد به طوری که

$$\begin{aligned} \deg_{H_1}(v_1) < \deg_G(v_1) - \tau(v_1) + 1 &\implies \deg_{H_1}(v_1) \leq \deg_G(v_1) - \tau(v_1) \\ &\implies \deg_{G \setminus H_1}(v_1) \geq \tau(v_1). \end{aligned}$$

اما $G \setminus H_1 = D$. لذا

$$\deg_D(v_1) \geq \tau(v_1).$$

پس $v_1 \in V(D_1)$. قرار می‌دهیم

$$D_1 = \{v_1\}.$$

هم‌چنین فرض کنید $H_2 = G \setminus (D \cup D_1) = H_1 - \{v_1\} \subseteq H_1$. لذا رأس $v_2 \in V(H_2)$ وجود دارد به طوری که

$$\begin{aligned} \deg_{H_2}(v_2) < \deg_G(v_2) - \tau(v_2) + 1 &\implies \deg_{H_2}(v_2) \leq \deg_G(v_2) - \tau(v_2) \\ &\implies \deg_{G \setminus H_2}(v_2) \geq \tau(v_2). \end{aligned}$$

می‌دانیم $G \setminus H_2 = D \cup D_1$. پس

$$\deg_{D \cup D_1}(v_2) \geq \tau(v_2).$$

لذا $v_2 \in V(D_2)$. قرار می‌دهیم

$$D_2 = \{v_2\}.$$

اگر $|D| = t$ آن‌گاه با این تکنیک زیرمجموعه‌های D_3, \dots, D_{n-t} را می‌سازیم. در نتیجه توانستیم افزای‌های D, D_1, \dots, D_{n-t} از $V(G)$ را بسازیم. لذا شرایط مونوپولی پویا را دارد، بنابراین زیرمجموعه D در (G, τ) یک مونوپولی پویا می‌باشد. \square

ملاحظه مفید زیر را بیان و اثبات می‌کنیم.

ملاحظه ۳.۲.۴. اگر رأس $v \in V(G)$ باشد به طوری که $\tau(v) \geq \deg_G(v) + 1$ در این صورت زیرگرافی از G شامل رأس تنها v یک زیرگراف مقاوم است.

$$\begin{aligned} \text{برهان. با توجه به فرض } \tau(v) \geq \deg_G(v) + 1 \text{ داریم} \\ -\deg_G(v) - 1 \geq -\tau(v). \end{aligned} \quad (۱۵.۴)$$

با جای‌گذاری (۱۵.۴) در عبارت $\deg_G(v) - \tau(v) + 1$ داریم

$$\deg_G(v) - \tau(v) + 1 \leq \deg_G(v) - \deg_G(v) - 1 + 1 = 0.$$

این رابطه همیشه برای هر زیرگرافی از G برقرار است. چون برای هر رأس دل‌خواه $v \in V(K)$ داریم

$$\deg_K(v) \geq 0.$$

لذا

$$\deg_K(v) \geq \deg_G(v) - \tau(v) + 1.$$

این یعنی K یک زیرگراف مقاوم از G است. این بدیهی است، زیرا بنا بر گزاره ۲.۲.۴، $D \subseteq V(G)$ یک مونوپولی پویا از گراف G است اگر و تنها اگر $G \setminus D$ شامل هیچ زیرگراف مقاوم نباشد. در این جا چون برای هر رأس v ، $\tau(v) \geq \deg_G(v) + 1$ ، لذا تنها مونوپولی موجود، تمام رأس‌های گراف G می‌باشد. از آن جا که هر زیرگراف از G یک زیرگراف مقاوم است، حتی با در نظر گرفتن کوچک‌ترین زیرمجموعه از $G \setminus D$ باز هم $G \setminus D$ زیرگراف مقاوم دارد. پس نمی‌تواند مونوپولی باشد.

اما برای این که نشان دهیم فقط کل G مونوپولی پویا است، یک $D \subseteq V(G)$ در نظر می‌گیریم. اگر قرار باشد این D مونوپولی باشد و از طرفی تمام G هم نباشد پس بایستی یک زیرمجموعه D_1 هم بعد از آن باشد. لذا فرض کنید یک $v \in D_1$ وجود داشته باشد به طوری که

$$\deg_D(v) \geq \tau(v).$$

با توجه به فرض گزاره، $\tau(v) \geq \deg_G(v) + 1$ پس

$$\deg_D(v) \geq \deg_G(v) + 1.$$

اما $\deg_D(v)$ نمی‌تواند بیشتر از $\deg_G(v)$ باشد. لذا تنها راه این است که D_1 تهی باشد. در نتیجه \square $D = |G|$ تنها مونوپولی پویا در گراف G است.

در ادامه، برای هر زیرمجموعه $S \subseteq V(G)$ زیرگراف القایی روی S را با $G[S]$ و مینیمم درجه از G را با $\delta(G)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۴.۲.۴. فرض کنید D یک مونوپولی پویا با اندازه k در G باشد. قرار دهید $H = G \setminus D$ و فرض کنید t_{\max} ماکزیمم آستانه در بین رئوس H باشد. در این صورت

$$\sum_{v \in V(H)} \tau(v) \leq |E(G)| - |E(G[D])| - \delta(G) + t_{\max} \quad (i)$$

(ii) اگر برای هر $v \in V(H)$ ، $\tau(v) \leq \deg_G(v)$ در این صورت

$$\sum_{v \in V(H)} \tau(v) \leq |E(G)|.$$

برهان. بنا بر گزاره ۲.۲.۴، $H = G \setminus D$ شامل هیچ زیرگراف مقاوم نیست. لذا با استفاده از گزاره ۱.۲.۴، رئوس H می‌توانند به v_1, v_2, \dots, v_n برچسب‌گذاری شوند به طوری که برای هر i ،

$$\deg_{H_i}(v_i) \leq \deg_G(v_i) - \tau(v_i), \quad (۱۶.۴)$$

که در آن $H_i = H[v_i, v_{i+1}, \dots, v_n]$. به ویژه $H_1 = H$ و $H_n = H \setminus \{v_1\}$.

اکنون تعداد یال‌های H_i را به دست می‌آوریم.

از آن جا که با حذف یک رأس از گراف، از تعداد کل یال‌های گراف مورد نظر به اندازه تعداد درجات همان رأس (یال‌های متصل به آن رأس) کاسته می‌شود، لذا

$$|E(H_i)| = |E(H_{i-1})| - \deg_{H_{i-1}}(v_{i-1}). \quad (۱۷.۴)$$

با توجه به رابطه (۱۶.۴) داریم

$$\deg_{H_{i-1}}(v_{i-1}) \leq \deg_G(v_{i-1}) - \tau(v_{i-1}) \implies -\deg_{H_{i-1}}(v_{i-1}) \geq -\deg_G(v_{i-1}) + \tau(v_{i-1}). \quad (18.4)$$

با قراردادن نامساوی (۱۸.۴) در (۱۷.۴) داریم

$$\begin{aligned} |E(H_i)| &\geq \underbrace{|E(H_{i-1})| - \deg_G(v_{i-1}) + \tau(v_{i-1})}_{\geq |E(H_{i-2})| - \deg_G(v_{i-2}) + \tau(v_{i-2})} \\ &\geq |E(H_{i-2})| - \deg_G(v_{i-2}) + \tau(v_{i-2}) - \deg_G(v_{i-1}) + \tau(v_{i-1}). \end{aligned} \quad (19.4)$$

هم‌چنین برای $|E(H_{i-2})|$ داریم

$$|E(H_{i-2})| \geq |E(H_{i-3})| - \deg_G(v_{i-3}) + \tau(v_{i-3}).$$

با جای‌گذاری مقدار فوق در (۱۹.۴) داریم

$$\begin{aligned} |E(H_i)| &\geq |E(H_{i-3})| - \deg_G(v_{i-3}) + \tau(v_{i-3}) \\ &\quad - \deg_G(v_{i-2}) + \tau(v_{i-2}) - \deg_G(v_{i-1}) + \tau(v_{i-1}). \end{aligned} \quad (20.4)$$

با تکرار این روند، صورت بازگشتی نامساوی (۲۰.۴) را به دست می‌آوریم. لذا داریم

$$|E(H_i)| \geq |E(H)| - \sum_{j=1}^{i-1} \deg_G(v_j) + \sum_{j=1}^{i-1} \tau(v_j). \quad (21.4)$$

حال اگر قرار دهیم $i = |H|$ ، در این صورت $i = |G \setminus D| = n - k$. لذا

$$H_i = H_{n-k} = H \setminus \{v_1, v_2, \dots, v_{(n-k)-1}\} = \{v_{n-k}\}.$$

بنابراین $|H_i| = 1$. پس

$$|E(H_i)| = 0.$$

لذا با قراردادن مقدار صفر به جای $|E(H_i)|$ در رابطه (۲۱.۴) داریم

$$0 \geq |E(H)| - \sum_{j=1}^{i-1} \deg_G(v_j) + \sum_{j=1}^{i-1} \tau(v_j).$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} |E(H)| &\leq \sum_{j=1}^{i-1} \deg_G(v_j) - \sum_{j=1}^{i-1} \tau(v_j) \\ &= \sum_{v \in V(H)} \deg_G(v) - \deg_G(v_n) - \left(\sum_{v \in V(H)} \tau(v) - \tau(v_n) \right) \\ &= \sum_{v \in V(H)} \deg_G(v) - \deg_G(v_n) - \sum_{v \in V(H)} \tau(v) + \tau(v_n). \end{aligned} \quad (22.4)$$

حال تعداد یال‌های G را تخمین می‌زنیم.

فرض کنید e تعداد یال‌های بین H و D باشد. لذا

$$|E(G)| = |E(G[D])| + |E(H)| + e. \quad (23.4)$$

با استفاده از نامساوی (۲۲.۴) داریم

$$|E(G)| \leq |E(G[D])| + e + \sum_{v \in V(H)} \deg_G(v) - \deg_G(v_n) - \sum_{v \in V(H)} \tau(v) + \tau(v_n). \quad (24.4)$$

از طرفی توجه داشته باشید که

$$\sum_{v \in V(H)} \deg_G(v) - e = 2|E(H)| \implies \sum_{v \in V(H)} \deg_G(v) = 2|E(H)| + e. \quad (25.4)$$

این مقدار را در (۲۴.۴) قرار می‌دهیم. پس

$$\begin{aligned} |E(G)| &\leq |E(G[D])| + e + 2|E(H)| + e - \deg_G(v_n) - \sum_{v \in V(H)} \tau(v) + \tau(v_n) \\ &= |E(G[D])| + 2e + 2|E(H)| - \deg_G(v_n) - \sum_{v \in V(H)} \tau(v) + \tau(v_n). \end{aligned} \quad (26.4)$$

از آن جا که t_{\max} ماکزیمم آستانه در بین رئوس H است، لذا

$$t_{\max} \geq \tau(v_n).$$

از طرف دیگر

$$\delta(G) \leq \deg_G(v_n) \implies -\delta(G) \geq -\deg_G(v_n).$$

هم‌چنین از تساوی (۲۳.۴) داریم

$$|E(H)| = |E(G)| - |E(G[D])| - e. \quad (27.4)$$

در نتیجه با توجه به این توضیحات، نامساوی (۲۶.۴) به شکل زیر تبدیل می‌شود

$$\begin{aligned} |E(G)| &\leq |E(G[D])| + 2e + 2(|E(G)| - |E(G[D])| - e) - \delta(G) - \sum_{v \in V(H)} \tau(v) + t_{\max} \\ &= |E(G[D])| + 2e + 2|E(G)| - 2|E(G[D])| - 2e - \delta(G) - \sum_{v \in V(H)} \tau(v) + t_{\max} \\ &= 2|E(G)| - |E(G[D])| - \delta(G) - \sum_{v \in V(H)} \tau(v) + t_{\max}. \end{aligned}$$

بنابراین

$$\sum_{v \in V(H)} \tau(v) \leq |E(G)| - |E(G[D])| - \delta(G) + t_{\max}.$$

لذا قسمت (i) اثبات شد.

برای اثبات قسمت (ii)، چون برای هر $v \in V(H)$ داریم $\tau(v) \leq \deg_G(v)$ در این صورت

$$\tau(v_n) \leq \deg_G(v_n) \implies \tau(v_n) - \deg_G(v_n) \leq 0.$$

پس نامساوی (۲۲.۴) با توجه به روابط (۲۷.۴) و (۲۵.۴) به صورت زیر حاصل می‌شود

$$\begin{aligned}
 |E(H)| &\leq \sum_{v \in V(H)} \deg_G(v) - \sum_{v \in V(H)} \tau(v) \implies \sum_{v \in V(H)} \tau(v) \leq \sum_{v \in V(H)} \deg_G(v) - |E(H)| \\
 &= e + 2|E(H)| - |E(H)| \\
 &= e + |E(H)| \\
 &= e + |E(G)| - |E(G[D])| - e \\
 &= |E(G)| - |E(G[D])| \\
 &\leq |E(G)|.
 \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\sum_{v \in V(H)} \tau(v) \leq |E(G)|.$$

□

پس اثبات قسمت (ii) نیز تمام شد.

به عنوان یک نتیجه از قضیه ۴.۲.۴ قسمت (i)، نتیجه زیر را برای گراف‌های منتظم داریم.

نتیجه ۵.۲.۴. فرض کنید G یک گراف منتظم از درجه $2r + 1$ باشد. همچنین فرض کنید برای هر رأس v از G داریم $\tau(v) = r + 1$. در این صورت هر مونوپولی پویا از G دارای حداقل $\frac{n + 2r}{2(r + 1)}$ رأس می‌باشد.

برهان. با توجه به قضیه ۴.۲.۴ قسمت (i)، می‌دانیم

$$\sum_{v \in V(H)} \tau(v) \leq |E(G)| - |E(G[D])| - \delta(G) + t_{\max}. \quad (28.4)$$

از طرفی روابط زیر را داریم.

$$|E(G[D])| \geq 0 \implies -|E(G[D])| \leq 0.$$

از آنجا که G گرافی $(2r + 1)$ -منتظم است، پس

$$\delta(G) \leq \deg_G(v) = 2r + 1.$$

می‌دانیم $|E(G)| = \frac{1}{2} \sum_{v \in V(G)} \deg_G(v)$ ، لذا داریم

$$|E(G)| = \frac{\sum_{v \in V(G)} \deg_G(v)}{2} = \frac{n(2r + 1)}{2}.$$

همچنین

$$t_{\max} = \max\{\tau(v) : v \in V(G)\} = r + 1.$$

مقدار سمت چپ نامساوی (۲۸.۴) برابر است با

$$\sum_{v \in V(H)} \tau(v) = (n - |D|)(r + 1).$$

با جای‌گذاری این روابط در نامساوی (۲۸.۴) داریم

$$\begin{aligned} (n - |D|)(r + 1) &\leq \frac{n(2r + 1)}{2} - 0 - (2r + 1) + (r + 1) \\ &= \frac{n(2r + 1)}{2} - r = \frac{2nr + n - 2r}{2}. \end{aligned}$$

در نتیجه با تقسیم طرفین بر $(r + 1)$ داریم

$$\begin{aligned} (n - |D|) &\leq \frac{2nr + n - 2r}{2(r + 1)} \implies |D| \geq n - \frac{2nr + n - 2r}{2(r + 1)} \\ &= \frac{2n(r + 1) - 2nr - n + 2r}{2(r + 1)} \\ &= \frac{2nr + 2n - 2nr - n + 2r}{2(r + 1)} = \frac{n + 2r}{2(r + 1)}. \end{aligned}$$

□

در قضیه ۷.۲.۴، یک کران بالا برای مونوپولی پویا از گراف‌ها که در آن آستانه هر رأس برابر با ۲ است را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۶.۲.۴. برای هر گراف $G = (V, E)$ زیرمجموعه‌ای از رئوس به نام S یک مجموعه احاطه‌گر^۲ است هرگاه به ازای هر رأس خارج از S ، حداقل یک رأس مجاور داخل مجموعه وجود داشته باشد.

قضیه ۷.۲.۴. فرض کنید G یک گراف با n رأس باشد به طوری که هیچ مولفه همبند از G یکرخت با یک دور فرد^۳ نیست، با $\delta(G) \geq 2$ و برای هر رأس $v \in V(G)$ ، $\tau(v) = 2$. هم‌چنین فرض کنید S هر مجموعه احاطه‌گر از G باشد و c تعداد مولفه‌های همبند از $G \setminus S$ باشد. در این صورت کران‌های زیر برقرار می‌باشند.

$$\begin{aligned} \text{dyn}(G) &\leq \frac{n}{2} \quad (i) \\ \text{dyn}(G) &\leq \text{dyn}(G[S]) + c \quad (ii) \end{aligned}$$

برهان. فرض کنید G گرافی همبند است. برای اثبات (i) فرض کنید $\{C_1, \dots, C_k\}$ بیش‌ترین تعداد از دوره‌های رأس مجزا در G باشد. این مجموعه ناتهی است یعنی حتماً یک دور دارد، زیرا $\delta(G) \geq 2$. از طرفی اگر گرافی دور نداشته باشد پس $\delta(G) = 0$ یا $\delta(G) = 1$ ، لذا یک جنگل خواهد بود در این صورت $\delta(G) \leq 1$. در حالی که $\delta(G) \geq 2$. در نتیجه گراف حتماً شامل یک دور می‌باشد. در زیر یک مونوپولی پویا مانند D با حداکثر اندازه $\frac{n}{2}$ به دست می‌آوریم.

زیرگراف $G \setminus (C_1 \cup \dots \cup C_k)$ را در نظر بگیرید. از آن‌جا که تمام دوره‌ها را به‌طور رأسی از گراف G حذف کرده‌ایم، لذا یک جنگل به دست می‌آوریم. در غیر این صورت فرض کنید وقتی دوره‌ها را به‌طور رأسی از گراف G حذف کردیم، هنوز هم دوری وجود داشته باشد که با هیچ‌یک از دوره‌های C_1, \dots, C_k اشتراک ندارد. در این صورت می‌توان این دور را نیز به بقیه دوره‌های رأس مجزا اضافه کرد. اما چون

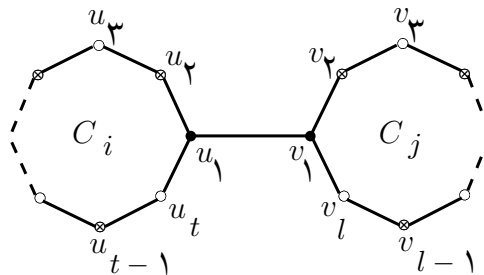
^۲Domination set

^۳اگر تعداد یال‌های دور، فرد باشد.

$\{C_1, \dots, C_k\}$ بیش‌ترین تعداد از دورهای رأس مجزا در G در نظر گرفته شده بود، پس هیچ دور رأس مجزا دیگری وجود نخواهد داشت. در نتیجه $G \setminus (C_1 \cup \dots \cup C_k)$ یک جنگل است و ما آن را با F نشان می‌دهیم.

فرض کنید T هر مولفه همبندی از F با حداقل دو رأس باشد (رأس‌های تنها در نظر گرفته نشده‌اند). درخت T شامل یک مجموعه احاطه‌گر S با حداکثر اندازه $\frac{|T|}{۲}$ است. از هر مولفه همبندی T از F یک مجموعه احاطه‌گری مینیم آن را که شامل رأس درجه یک از T نباشد به‌جز حالتی که $T = K_۲$ (تنها درختی که دارای ۲ رأس درجه یک است، $K_۲$ می‌باشد)، در نظر می‌گیریم و S برای T می‌نامیم. حال رئوس S را به D اضافه می‌کنیم. توجه داشته باشید که $|S| \leq \frac{|T|}{۲}$. اکنون دورهای فرد از $\{C_1, \dots, C_k\}$ را در نظر بگیرید و فرض کنید C_i هریک از این دورها باشد. چهار حالت وجود دارد.

حالت ۱: یک یال بین دور فرد C_i و دور فرد دیگر C_j وجود دارد. (شکل ۱.۴)



شکل ۱.۴: دورهای فرد C_i و C_j و یال بین آن‌ها

فرض کنید $u_1 \in C_i$ و $v_1 \in C_j$ و $u_1 v_1 \in E(G)$ باشد. یکی از u_1 یا v_1 را در D قرار می‌دهیم. حال پیدا کردن $\frac{|C_i| + |C_j|}{۲}$ رأس مناسب از $C_i \cup C_j$ برطبق فعال کردن تمام رئوس $C_i \cup C_j$ به راحتی امکان‌پذیر است. زیرا فرض کنید u_1, u_2, \dots, u_t رئوس دور C_i و v_1, v_2, \dots, v_l رئوس دور C_j باشند. هم‌چنین فرض کنید u_1 و v_1 به یک‌دیگر متصل هستند، به عبارت دیگر $u_1 v_1 \in E(G)$ باشد. ابتدا u_1 را انتخاب کرده و در D قرار می‌دهیم. از آن‌جا که هدف، فعال کردن رئوس این دورها است لذا باید تعداد رئوس مناسب از $C_i \cup C_j$ را به‌دست آوریم.

از طرف دیگر با توجه به فرض گزاره می‌دانیم برای هر رأس v از G ، $\tau(v) = ۲$. لذا هر رأس از این دورها در صورتی فعال می‌شود که دو همسایه فعال داشته باشد. با این توضیحات، رأس u_2 را در D قرار می‌دهیم. رأس u_3 در D قرار نمی‌گیرد. به همین ترتیب رئوس u_4, u_6, \dots, u_{t-1} را در D قرار داده و رئوس u_5, u_7, \dots, u_t با توجه به این‌که هرکدام دارای دو همسایه فعال هستند، فعال می‌شوند. لذا دور C_i توسط $\frac{|C_i| - ۱}{۲}$ رأس از خودش فعال شده است.

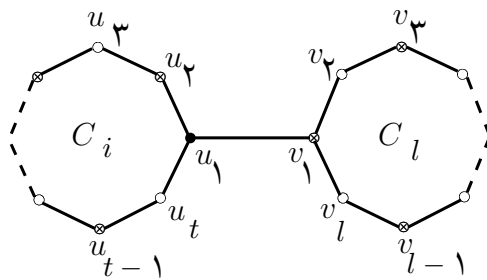
برای دور C_j نیز به همین صورت v_i ها را انتخاب کرده و در D قرار می‌دهیم. یعنی ابتدا رئوس v_2, v_4, \dots, v_{l-1} را انتخاب می‌کنیم سپس رئوس v_3, v_5, \dots, v_{l-2} به دلیل این‌که هرکدام دو همسایه فعال در C_j دارند، فعال می‌شوند. رأس‌های v_1 و v_l به‌صورت زیر در C_j فعال خواهند شد. از آن‌جا

که رئوس u_1 و v_2 قبلاً در D قرار گرفته و فعال شده بودند، لذا v_1 دو همسایه فعالش را دارد. در نتیجه ابتدا رأس v_1 فعال شده و سپس رأس v_l با توجه به فعال بودن رئوس v_1 و v_{l-1} فعال می‌شود. بنابراین دور C_j هم توسط $\frac{|C_j| - 1}{2}$ رأس از خودش فعال شده است.

در نتیجه تعداد رئوسی که $C_i \cup C_j$ را فعال کرده‌اند به صورت زیر به دست می‌آید

$$1 + \frac{|C_i| - 1}{2} + \frac{|C_j| - 1}{2} = \frac{|C_i| + |C_j|}{2}.$$

حالت ۲: دور فرد C_i تنها با دور (دورها) زوج مجاور است. (شکل ۲.۴)



شکل ۲.۴: دور فرد C_i و دور زوج C_l و یال بین آن‌ها

فرض کنید C_i با C_l مجاور باشد که در آن C_l یک دور زوج است و در حال حاضر هم فعال نیست. فرض کنید $v_1 \in C_l$ یک رأس مجاور به دور C_i و به رأس $u_1 \in C_i$ متصل باشد. v_1 را به D اضافه می‌کنیم. حال می‌توانیم همه رئوس $C_i \cup C_l$ را با استفاده از $\frac{|C_i| + |C_l| - 1}{2}$ رأس مناسب شامل رأس v_1 فعال کنیم. این کار به صورت زیر امکان دارد.

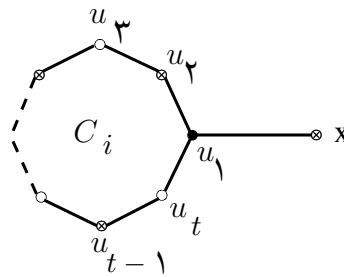
فرض کنید u_1, u_2, \dots, u_t رئوس دور فرد C_i و v_1, v_2, \dots, v_l رئوس دور زوج C_l باشند. هم‌چنین فرض کنید $v_1 \in C_l$ یک رأس مجاور به دور C_i و به رأس $u_1 \in C_i$ متصل باشد. v_1 را به D اضافه می‌کنیم. هم‌چنین از فرض گزاره می‌دانیم برای هر رأس v از G ، $\tau(v) = 2$. لذا هر رأس از این دورها در صورتی فعال می‌شود که دو همسایه فعال داشته باشد. در ادامه رأس v_3 از C_l را انتخاب می‌کنیم و در D قرار می‌دهیم. رأس v_4 در D قرار نمی‌گیرد. به همین ترتیب رئوس v_5, v_7, \dots, v_{l-1} را در D قرار داده و رئوس v_6, v_8, \dots, v_l با توجه به این‌که هر کدام دارای دو همسایه فعال هستند، فعال می‌شوند. لذا دور زوج C_l توسط $\frac{|C_l|}{2}$ رأس فعال شده است.

برای دور C_i نیز به همین صورت u_i ها را انتخاب کرده و در D قرار می‌دهیم. یعنی ابتدا رئوس u_2, u_4, \dots, u_{t-1} را انتخاب می‌کنیم سپس رئوس u_3, u_5, \dots, u_{t-2} به این دلیل که هریک دو همسایه فعال در C_i دارند، فعال می‌شوند. رأس‌های u_1 و u_t به صورت زیر در C_i فعال خواهند شد. چون رئوس v_1 و u_2 قبلاً در D قرار گرفته و فعال شده بودند، لذا u_1 دو همسایه فعالش را دارد. در نتیجه ابتدا رأس u_1 فعال شده و سپس رأس u_t با توجه به فعال بودن رئوس u_1 و u_{t-1} فعال می‌شود. پس دور فرد C_i با استفاده از $\frac{|C_i| - 1}{2}$ رأس از خودش فعال شده است.

بنابراین تعداد رئوسی که $C_i \cup C_l$ را فعال کرده‌اند به صورت زیر به دست می‌آید

$$\frac{|C_i| - 1}{2} + \frac{|C_l|}{2} = \frac{|C_i| + |C_l| - 1}{2} = \left\lfloor \frac{|C_i| + |C_l|}{2} \right\rfloor.$$

حالت ۳: دور فرد C_i تنها با رأس x (یک رأس تنها) از F مجاور است. (شکل ۳.۴)



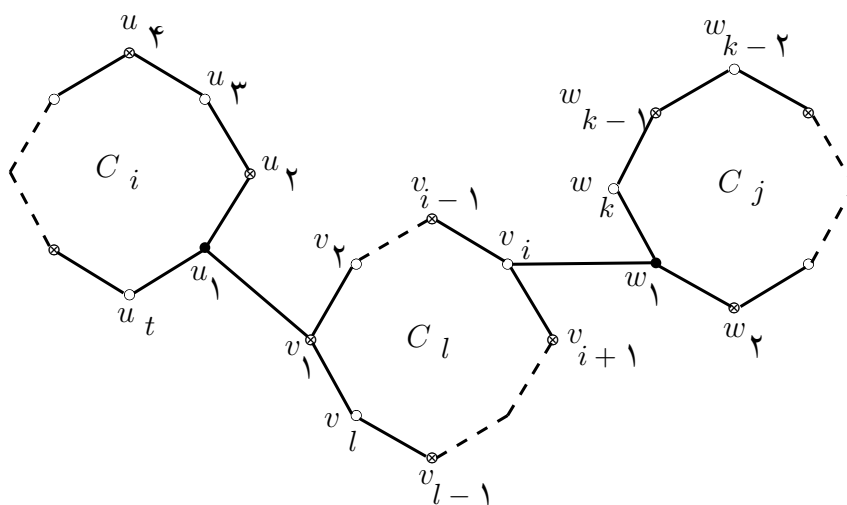
شکل ۳.۴: دور فرد C_i در مجاورت رأس x

در این حالت رأس x را در D قرار می‌دهیم. سپس فرض کنید u_1, u_2, \dots, u_t رئوس دور فرد C_i باشند. هم‌چنین فرض کنید x به رأس $u_1 \in C_i$ متصل باشد. در ادامه رئوس u_2, u_4, \dots, u_{t-1} را انتخاب می‌کنیم و در D قرار می‌دهیم. رئوس u_3, u_5, \dots, u_{t-2} به این دلیل که هرکدام دو همسایه فعال در C_i دارند، فعال می‌شوند. اما رأس‌های u_t و u_1 در دور فرد C_i باقی مانده‌اند که هنوز فعال نشده‌اند و به شکل زیر در C_i فعال خواهند شد. چون رئوس x و u_2 قبلاً در D قرار گرفته و فعال شده بودند، لذا u_1 دو همسایه فعالش را دارد. در نتیجه ابتدا رأس u_1 فعال شده و سپس رأس u_t با توجه به فعال بودن رئوس u_1 و u_{t-1} فعال می‌شود. پس دور فرد C_i با استفاده از $\frac{|C_i| - 1}{2}$ رأس از خودش فعال شده است.

بنابراین تعداد رئوسی که $C_i \cup \{x\}$ را فعال کرده‌اند به صورت زیر به دست می‌آید

$$\frac{|C_i| - 1}{2} + 1 = \frac{|C_i| - 1 + 2}{2} = \frac{|C_i| + 1}{2}.$$

حالت ۴: زمانی که ۲ دور فرد به یک دور زوج که قبلاً فعال شده است، متصل باشند. (شکل ۴.۴)



شکل ۴.۴: دورهای فرد C_i و C_j و دور زوج فعال C_l

در این حالت، فرض کنید C_i و C_j دورهای فرد باشند که به ترتیب دارای مجموعه رئوس u_1, u_2, \dots, u_t

و w_1, w_2, \dots, w_k هستند. همچنین C_l را یک دور زوج با مجموعه رأس‌های v_1, v_2, \dots, v_l در نظر بگیرید. اگر u_1 به رأس فعال v_1 متصل باشد، در این صورت همان حالت (۲) است و در آن تعداد رئوسی که باید به D اضافه کنیم را به دست آورده‌ایم. پس کافی است تنها رئوس دور فرد C_j را توسط دور زوج C_l فعال کنیم.

برای دور فرد C_j فرض کنید رأس غیرفعال w_1 به رأس v_i که قبلاً در دور زوج C_l فعال شده و در D قرار گرفته بود، متصل باشد. حال رئوس w_2, w_4, \dots, w_{k-1} را انتخاب کرده و به D اضافه می‌کنیم. لذا چون هریک از رئوس w_3, w_5, \dots, w_{k-2} دو همسایه فعال در C_j دارند، فعال می‌شوند. رأس‌های w_1 و w_k به ترتیب زیر در C_j فعال خواهند شد. از آن‌جا که رئوس v_i و w_2 قبلاً در D قرار گرفته و فعال شده بودند، لذا w_1 دو همسایه فعالش را دارد. در نتیجه ابتدا رأس w_1 فعال شده و سپس رأس w_k با توجه به فعال بودن رئوس w_1 و w_{k-1} فعال می‌شود. پس دور فرد C_j نیز با استفاده از $\frac{|C_j| - 1}{2}$ رأس از خودش فعال شده است.

بنابراین تعداد رئوسی که $C_i \cup C_j \cup C_l$ را فعال کرده‌اند به صورت زیر می‌باشد

$$\frac{|C_j| - 1}{2}.$$

تاکنون همه دورهای فرد از $\{C_1, \dots, C_k\}$ و برخی از دورهای زوج مجموعه در طول مراحل بالا فعال شده است. هم‌چنین همه رئوس جنگل F به جز احتمالاً برخی از رئوس برگ^۴ آن را فعال کرده‌ایم. دورهای زوج باقی‌مانده به عنوان مثال C_1, \dots, C_r به راحتی می‌توانند با استفاده از نصف رئوس خود (برای هر $1 \leq i \leq r$) $\frac{|C_r|}{2}$ فعال شوند. این رئوس جدید را که توسط دورهای زوج فعال کردیم، به D اضافه می‌کنیم. بنابراین فرآیند ساخت مونوپولی D به پایان رسید.

تنها بایستی رأس‌های برگ F را بررسی کنیم. فرض کنید v هر رأس از درجه یک (رأس برگ) در یک مولفه همبندی T از F باشد. می‌دانیم رأس v دارای یک همسایه فعال در درخت T می‌باشد. از آن‌جا که درجه v در کل گراف بنابر فرض قضیه حداقل ۲ است، لذا باید همسایه دیگری در $C_1 \cup \dots \cup C_k$ داشته باشد. اما مجموعه اخیر قبلاً توسط D فعال شده است. از این‌رو دو همسایه فعال برای رأس v به دست می‌آوریم.

اما حکم دیگری را در این‌جا باید ثابت کنیم که به صورت زیر می‌باشد:

برای هر درخت T یک مجموعه احاطه‌گر وجود دارد به طوری که اندازه‌اش حداکثر نصف تعداد رأس‌ها است و دارای این خاصیت است که هر رأس به جز رئوس درجه یک، در مجموعه احاطه‌گر است یا ۲ همسایه در مجموعه احاطه‌گر دارد.

برای اثبات این حکم، فرض کنید T یک درخت دل‌خواه باشد. اگر این درخت، مسیر باشد آن‌گاه حکم به استقرا واضح است. از درختی با سه یا چهار رأس شروع می‌کنیم. از آن‌جا که این رئوس در هر دو درخت، روی یک مسیر قرار دارند، پس با در نظر گرفتن رأس وسط در درخت سه رأسی (مرتبه ۳) و رئوس دوم و سوم در درخت چهار رأسی (مرتبه ۴) به عنوان مجموعه احاطه‌گر، حکم بدیهی است.

^۴رأسی است که از درجه یک باشد.

مجموعه S را به صورت زیر تعریف کنید:

$$S = \{v \in V(T) \mid \deg(v) \geq 3\}.$$

حال اگر رئوس مجموعه S را از T حذف کنیم، در این صورت $T \setminus S$ شامل مولفه‌های همبندی است که این مولفه‌ها همه مسیر می‌باشند. چون اگر یک مولفه غیرهمبندی در این مسیرها وجود داشته باشد، در این صورت حتماً یک رأس $v \in V(T)$ وجود دارد که $\deg(v) \geq 3$. لذا بایستی این رأس را انتخاب کرده و از T حذف کنیم. حال می‌خواهیم از این مسیرها، مجموعه احاطه‌گر را به دست آوریم. رئوس درجه یک را کنار می‌گذاریم. بعد از رأس درجه یک، به رأسی با درجه ۲ می‌رسیم. اگر تعداد رئوس مسیر، فرد باشد آن‌گاه حداکثر نصف تعداد رئوس مسیر در مجموعه احاطه‌گر قرار می‌گیرند. زیرا اگر از رأس دوم به بعد، یک درمیان رئوس را انتخاب کرده و در مجموعه احاطه‌گر قرار دهیم، حکم اثبات می‌شود. هم‌چنین زمانی که تعداد رئوس مسیر، زوج باشد آن‌گاه دقیقاً نصف تعداد رئوس مسیر در مجموعه احاطه‌گر قرار می‌گیرد. در هر دو حالت، این خاصیت که هر رأس به جز رأس درجه یک در T ، یا در احاطه‌گر است و یا دو همسایه در احاطه‌گر دارد، برقرار می‌باشد.

حال یک یال دل‌خواه از یک مولفه همبندی (مسیر) $T \setminus S$ را در نظر بگیرید به طوری که هیچ‌یک از دو سر آن، رأس درجه یک نباشد. پس می‌توان فرض کرد که $|V| \geq 4$. زیرا اگر قرار باشد رأسی را حذف کنیم که دو سرش رأس درجه یک باشد، آن‌گاه باید گراف ستاره باشد. حال چون برای گراف ستاره، $|V| \geq 4$ و با در نظر گرفتن رأس وسط به عنوان مجموعه احاطه‌گر، حکم برقرار است، لذا گراف، ستاره نیست. بنابراین یالی را در نظر می‌گیریم که هیچ‌یک از دو سر آن، رأس درجه یک نباشد. این یال (به عنوان مثال یال uv) را حذف کنید. در این صورت در دو طرف یال حذف شده دو درخت T_1 و T_2 ساخته می‌شود. از آن‌جا که برطبق فرض قضیه، درجه رأس در کل گراف حداقل ۲ است، لذا در درخت T_1 ، $\deg_{T_1}(u) \geq 1$ و در درخت T_2 ، $\deg_{T_2}(v) \geq 1$. حال اگر مولفه همبندی T_1 درخت K_2 یا مولفه همبندی T_2 درخت K_2 باشد، در این صورت به ترتیب رأس u و رأس v در احاطه‌گر قرار می‌گیرد. در غیر این صورت اگر K_2 نباشد، لذا رئوس $u \in V(T_1)$ یا $v \in V(T_2)$ در احاطه‌گر قرار دارند و هر رأس به جز رأس درجه یک، در احاطه‌گر است یا ۲ همسایه در مجموعه احاطه‌گر دارد. در نتیجه حکم اثبات گردید.

توجه داشته باشید که مجموعه D حداکثر $\frac{n}{3}$ رأس توسط ساختن خودش دارد. زیرا در هر حالتی که در نظر گرفتیم، لاًقل نصف تعداد رأس‌هایش را به D اضافه کرده‌ایم. لذا در نهایت در کل گراف G داریم

$$|D| = \text{dyn}(G) \leq \frac{n}{3}.$$

بنابراین در این‌جا اثبات (i) کامل شد.

برای اثبات قسمت (ii)، فرض کنید D هر مونوپولی پویا به اندازه $\text{dyn}(G[S])$ باشد. با استفاده از D می‌توانیم همه رئوس $G[S]$ را فعال کنیم. فرض کنید T هر مولفه همبند از $G \setminus S$ باشد. از آن‌جا که S یک مجموعه احاطه‌گر است پس هر رأس از T یک همسایه فعال در S دارد. هم‌چنین چون T همبند است، لذا یک رأس اضافی از T برای این‌که همه رئوس T فعال شوند، کافی است. پس نتیجه می‌گیریم که یک مونوپولی پویا به اندازه $\text{dyn}(G[S]) + c$ وجود دارد که در آن c ، تعداد مولفه‌های $G \setminus S$ می‌باشد. \square

۱.۲.۴ کوچک‌ترین مونوپولی پویا در گراف پترسن تعمیم‌یافته

در قضیه ۹.۲.۴ با تعیین مینیمم مونوپولی پویا از گراف‌های پترسن تعمیم‌یافته نشان می‌دهیم کران پایین به دست آمده از نتیجه ۵.۲.۴ زمانی که $r = 1$ (آستانه هر رأس برابر ۲ است) به عنوان مثال برای گراف‌های مکعبی، یک کران سخت است. در ابتدا تعریف گراف پترسن تعمیم‌یافته را یادآوری می‌کنیم.

تعریف ۸.۲.۴. برای هر عدد صحیح و مثبت n و k با $k \leq n - 2$ و $\gcd(n, k) = 1$ گراف پترسن تعمیم‌یافته^۵ را با $GP(n, k)$ نشان داده و به شرح زیر تعریف می‌شود:

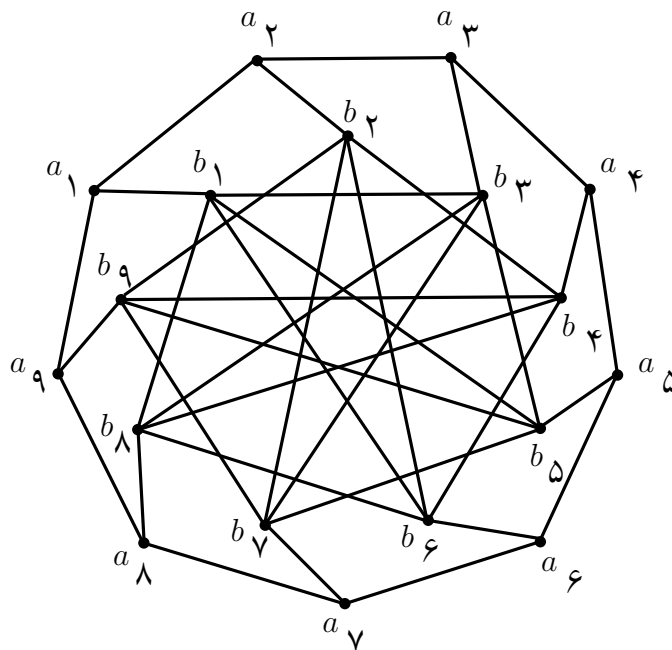
مجموعه رئوس $GP(n, k)$ برابر است با

$$\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \cup \{b_1, b_2, \dots, b_n\}.$$

یال‌های $GP(n, k)$ به صورت زیر می‌باشند:

$a_i a_{i+1}$ ، $a_1 a_n$ ، $i = 1, 2, \dots, n$ برای $a_i b_i$ ، $i = 1, 2, \dots, n - 1$ و همچنین $b_i b_j$ برای هر i و j که $|i - j| = k$.

گراف پترسن تعمیم‌یافته $GP(9, k)$ که $k = 2, 4, 5, 7$ در شکل ۵.۴ نشان داده شده است.



شکل ۵.۴: گراف $GP(9, k)$ برای $k = 2, 4, 5, 7$

توجه داشته باشید که $GP(n, k)$ یک گراف مکعبی با مرتبه $2n$ می‌باشد.

قضیه ۹.۲.۴. اندازه کوچک‌ترین مونوپولی پویا در گراف پترسن تعمیم‌یافته $GP(n, k)$ با $\tau(v) = 2$

برای هر رأس v ، برابر است با $\lceil \frac{n+1}{2} \rceil$.

^۵Generalized Petersen graph

برهان. از آن‌جا که $|GP(n, k)| = 2n$ ، لذا با استفاده از نتیجه ۵.۲.۴ و با توجه به این‌که

$$\tau(v) = r + 1 = 2 \implies r = 1,$$

کافی است نشان دهیم $GP(n, k)$ شامل یک مونوپولی پویا به‌اندازه زیر است

$$\text{dyn}_\tau(G) \geq \frac{|GP(n, k)| + 2r}{2(r+1)} = \frac{2n + 2(1)}{2(1+1)} = \frac{2(n+1)}{4} = \frac{n+1}{2}.$$

$$\text{یا به عبارت دیگر } \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$$

دو حالت در نظر می‌گیریم:

حالت ۱: فرض کنید n یک عدد زوج باشد. در این حالت از قضیه ۷.۲.۴ به‌طور مستقیم استفاده می‌کنیم. زیرمجموعه $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ یک مجموعه احاطه‌گر در $GP(n, k)$ تشکیل می‌دهد.

حال چون $\gcd(n, k) = 1$ در این صورت

$$GP(n, k) \setminus S = G[b_1, b_2, \dots, b_n]$$

تنها زیرگراف همبند در گراف G می‌باشد. لذا تعداد مولفه‌های همبند از $GP(n, k) \setminus S$ برابر با یک است. از طرفی برای $G[b_1, \dots, b_n]$ فقط یک رأس کافی است تا همه رئوس b_1, \dots, b_n فعال شوند.

هم‌چنین مجموعه S یک دور زوج است پس اگر رأس‌های آن را یک‌درمیان انتخاب کرده و در مونوپولی پویا قرار دهیم در این صورت با نصف این تعداد، می‌توانیم همه رئوس S را فعال کنیم. به عنوان مثال

رئوس a_1, a_3, \dots, a_{n-1} را در مونوپولی پویا قرار می‌دهیم. بنابراین

$$\text{dyn}(G[S]) = \frac{|V(S)|}{2} = \frac{n}{2}.$$

در نتیجه با افزودن یک رأس b_{n-1} به این تعداد، مجموعه $\{a_1, a_3, \dots, a_{n-1}, b_{n-1}\}$ یک مونوپولی پویا خواهد بود. از این‌رو بنا بر قضیه ۷.۲.۴ داریم

$$\text{dyn}(G) \leq \text{dyn}(G[S]) + 1 = \frac{n}{2} + 1 = \frac{n+2}{2} \implies \text{dyn}(G) = \lceil \frac{n+2}{2} \rceil = \lceil \frac{n+1}{2} \rceil.$$

به عبارت دیگر یک مونوپولی پویا به‌اندازه $\lceil \frac{n+1}{2} \rceil$ برای $GP(n, k)$ وجود دارد که در آن n زوج است.

حالت ۲: فرض کنید n یک عدد فرد باشد. مانند حالت ۱ قضیه ۷.۲.۴ را به‌کار می‌بریم. زیرمجموعه $S' = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ یک مجموعه احاطه‌گر در $GP(n, k)$ می‌باشد. از آن‌جا که $\gcd(n, k) = 1$

در این صورت

$$GP(n, k) \setminus S' = G[b_1, b_2, \dots, b_n]$$

تنها زیرگراف همبند در گراف G می‌باشد. لذا تعداد مولفه‌های همبند از $GP(n, k) \setminus S'$ برابر با یک است. هم‌چنین برای $G[b_1, \dots, b_n]$ فقط یک رأس کافی است تا همه رأس‌های b_1, \dots, b_n فعال شوند.

از طرفی مجموعه S' یک دور فرد است لذا رأس‌های آن را یک‌درمیان تا رأس a_{n-2} انتخاب کرده و در مونوپولی پویا قرار می‌دهیم. یعنی رئوس a_1, a_3, \dots, a_{n-2} در مونوپولی پویا قرار می‌گیرند. بنابراین با

توجه به فرد بودن n داریم

$$\text{dyn}(G[S']) = \lceil \frac{n-2}{2} \rceil = \frac{n-1}{2}.$$

در نتیجه اگر رأس b_{n-1} را به این تعداد اضافه کنیم، با این کار ابتدا رأس a_{n-1} و سپس a_n و b_i ‌های باقی‌مانده فعال می‌شوند. لذا مجموعه $\{a_1, a_3, \dots, a_{n-2}, b_{n-1}\}$ یک مونوپولی پویا خواهد بود. از این رو بنابر قضیه ۷.۲.۴ داریم

$$\text{dyn}(G) \leq \text{dyn}(G[S']) + 1 = \frac{n-1}{2} + 1 = \frac{n+1}{2} \implies \text{dyn}(G) = \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil.$$

بنابراین یک مونوپولی پویا به اندازه $\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$ برای $GP(n, k)$ وجود دارد که در آن n فرد است. \square

۳.۴ خانواده‌های مونوپولی پویا-نامحدود از گراف‌ها

یک انتخابات که در آن مردم برای یک نامزد خاص، رأی بله یا خیر می‌دهند را در نظر بگیرید. هر شخص (توسط یک رأس v در گراف زمینه نمایش داده شده است) رأی بله می‌دهد، اگر حداقل به تعداد $\tau(v)$ از دوستانش تصمیم به رأی بله داشته باشند. یک مونوپولی پویا مانند D برای شبکه زمینه در این انتخابات، دارای این خاصیت است که اگر رأی اعضای D بله باشد در این صورت کل جامعه به آن کاندید (نامزد) رأی خواهند داد. پرسش زیر مطرح می‌شود: اگر جمعیت جامعه افزایش یابد نشان‌دهنده این است که اندازه کوچک‌ترین مونوپولی پویا، افزایش زیادی داشته است (به عنوان تابعی از اندازه جامعه)؟ مثال دیگری که همین سوال در آن مهم است، قبول یک محصول جدید در بازاریابی و بررسی است. در زیر با معرفی مفهوم خانواده‌های مونوپولی پویا-نامحدود، روشی برای تجزیه و تحلیل سوال مطرح شده در بالا ارائه می‌دهیم.

توسط یک الگوی آستانه، هر انتساب آستانه τ را در نظر می‌گیریم به طوری که برای هر گراف G و هر $v \in V(G)$ ، τ یک مقدار نامنفی $\tau(v)$ را به رئوس G نسبت می‌دهد به طوری که اگر σ هر خودریختی^۶ از G با $\sigma(u) = v$ برای برخی از رئوس $u \in G$ باشد، آن‌گاه $\tau(v) = \tau(u)$. بدون کاستن از کلیت، الگوی آستانه τ را محدود می‌کنیم به طوری که $\tau(v) \leq \text{deg}_G(v)$. نمونه‌های رایج، زمانی هستند که $\tau(v)$ برای هر رأس v تابعی از $\text{deg}_G(v)$ است. در این بخش توسط یک خانواده F ، هر مجموعه از گراف‌ها مجهز به یک الگوی آستانه را در نظر می‌گیریم. چنین خانواده‌ای مونوپولی پویا-نامحدود^۷ نامیده می‌شود هرگاه یک تابع $f(x)$ وجود داشته باشد که اگر $x \rightarrow \infty$ پس $f(x) \rightarrow \infty$ به طوری که برای هر گراف G از F ، یکی دارای شرط $f(n) \leq \text{dyn}(G)$ باشد که در آن $n = |G|$.

نتیجه ۵.۲.۴ نشان می‌دهد خانواده گراف‌های $(2r+1)$ -منتظم با آستانه $\tau(v) = r+1$ برای هر رأس v ، خانواده مونوپولی پویا-نامحدود است. در این بخش نتایج بیشتری در رابطه با گراف‌های مونوپولی پویا-نامحدود به دست می‌آوریم.

لم ۱.۳.۴. فرض کنید (G, τ) یک گراف از مرتبه n و $\epsilon(G)$ چگالی یالی از گراف G باشد. قرار دهید $t_m = \min\{\tau(v) : v \in V(G)\}$ در این صورت

$$n\left(1 - \frac{\epsilon(G)}{t_m}\right) \leq \text{dyn}(G).$$

^۶Automorphism

^۷Dynamo-unbounded family

برهان. گراف G از مرتبه n را در نظر بگیرید. فرض کنید D هر مونوپولی پویا به اندازه $k = \text{dyn}(G)$ باشد. قرار دهید $H = G \setminus D$ لذا $|H| = n - k$. در این صورت بنابر قسمت (ii) از قضیه ۴.۲.۴

داریم

$$\sum_{v \in V(H)} \tau(v) \leq |E(G)| \implies (n - k)\tau(v) \leq |E(G)|. \quad (29.4)$$

با توجه به فرض داریم $t_m \leq \tau(v)$ پس با قراردادن در نامساوی (۲۹.۴) داریم

$$(n - k)t_m \leq \sum_{v \in V(H)} \tau(v) \leq |E(G)|.$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} (n - k)t_m \leq |E(G)| &\implies nt_m - kt_m \leq |E(G)| \\ &\implies nt_m - |E(G)| \leq kt_m \\ &\implies n - \frac{|E(G)|}{t_m} \leq k \\ &\implies n\left(1 - \frac{|E(G)|}{nt_m}\right) \leq k. \end{aligned}$$

با توجه به تعریف چگالی یالی گراف، قرار می‌دهیم $\frac{|E(G)|}{n} = \epsilon(G)$ و همچنین با توجه به فرض داریم $k = \text{dyn}(G)$. در این صورت داریم

$$n\left(1 - \frac{|E(G)|}{nt_m}\right) \leq k \implies n\left(1 - \frac{\epsilon(G)}{t_m}\right) \leq \text{dyn}(G).$$

□

قضیه ۴.۳.۴ در ارتباط با گراف‌هایی با آستانه احتمالی^۸ می‌باشد. برای اثبات این قضیه بایستی از نتیجه تمرکز^۹ استفاده کنیم. لذا فقط به بیان آن می‌پردازیم.

نتیجه ۲.۳.۴ [۲۲] فرض کنید X_1, X_2, \dots, X_n یک دنباله از متغیرهای تصادفی مستقل نامنفی باشد و قرار دهید $X = \sum X_i$. در این صورت برای هر $\lambda \geq 0$,

$$\mathbb{P}(X \leq (\mathbb{E}(X) - \lambda)) \leq e^{-\frac{\lambda^2}{2 \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i^2)}}.$$

در اثبات قضیه زیر، از تکنیک شمارش در احتمالات نیز استفاده می‌کنیم که به صورت یک ملاحظه آورده شده است.

ملاحظه ۳.۳.۴ [۱۷] اگر $\{A_i\}_i$ ها پیشامد باشند در این صورت

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_i A_i\right) \leq \sum_i \mathbb{P}(A_i).$$

بنابراین اگر $\sum_i \mathbb{P}(A_i) < 1$ آن‌گاه $\mathbb{P}\left(\bigcap_i A_i^c\right) > 0$.

^۸Probabilistic threshold

^۹Concentration result

قضیه ۴.۳.۴. فرض کنید هر رأس v از G یک آستانه تصادفی $a \leq i \leq b$ را با احتمال p_i انتخاب می‌کند که در آن p_i مستقل از رأس v است. قرار دهید $\alpha = \sum_a^b ip_i$. اگر $\alpha > \epsilon(G)$ در این صورت برای هر ثابت مثبت δ ، با احتمال زیاد هیچ مونوپولی پویا از G شامل کمتر از $n^{1-\delta}$ رأس نیست.

برهان. فرض کنید n یک عدد صحیح به اندازه کافی بزرگ باشد به طوری که $n^\delta < \frac{\alpha}{(\alpha - \epsilon)}$. فرض کنید D هر زیرمجموعه از رئوس به تعداد k باشد که در آن $k < n^{1-\delta}$ و قرار دهید $H = G \setminus D$. برای هر رأس $v \in V(H)$ ، یک متغیر تصادفی X_v به عنوان آستانه $\tau(v)$ که توسط رأس v انتخاب شده است، تعریف کنید. قرار دهید $X = \sum_{v \in V(H)} X_v$. هم‌چنین اگر افزایش‌های D, D_1, \dots, D_t از $V(G)$ را در نظر بگیرید، پس D_1 دارای $\tau(v)$ همسایه در D می‌باشد. یعنی همه رئوس D_1 ، $\tau(v)$ همسایه در D دارند. لذا تعداد یال‌هایی که از D_1 به D هستند حداقل $\tau(v)$ است. هم‌چنین از D_2 به $D \cup D_1$ تعداد یال‌ها، حداقل $\tau(v)$ می‌باشد. در نتیجه برای هر رأس تعداد $\tau(v)$ همسایه پیدا می‌کنیم (یال می‌شماریم) که تکراری نیستند. لذا اگر همه این یال‌ها را باهم جمع کنیم بازهم از تعداد کل یال‌های گراف کمتر می‌باشد. به عبارت دیگر داریم

$$\sum_{v \in V(H)} \tau(v) \leq |E(G)| \implies X = \sum_{v \in V(H)} X_v \leq |E(G)|.$$

لذا اگر D یک مونوپولی پویا باشد آن‌گاه $X \leq |E(G)|$. بنابراین

$$\mathbb{P}(D \text{ مونوپولی بودن}) \leq \mathbb{P}(X \leq |E(G)|). \quad (۳۰.۴)$$

اطلاعات زیر را برای X داریم:

از آن‌جا که $H = G \setminus D$ پس $|H| = n - k$. هم‌چنین از فرض قضیه داریم $i \in [a, b]$ و $\alpha = \sum_a^b ip_i$ در نتیجه داریم

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \mathbb{E}\left(\sum_{v \in V(H)} X_v\right) = \sum_{v \in V(H)} \mathbb{E}(X_v) \\ &= (n - k)\mathbb{E}(X_v) = (n - k) \sum_{i \in [a, b]} ip_i = \alpha(n - k). \end{aligned} \quad (۳۱.۴)$$

هم‌چنین داریم

$$\sum_{v \in V(H)} \mathbb{E}(X_v^2) = (n - k)\mathbb{E}(X_v^2) = (n - k) \sum_{i \in [a, b]} i^2 p_i.$$

برای راحتی قرار دهید $\beta = \sum_{i \in [a, b]} i^2 p_i$. لذا

$$\sum_{v \in V(H)} \mathbb{E}(X_v^2) = \beta(n - k). \quad (۳۲.۴)$$

با توجه به فرض $k < n^{1-\delta}$ و این‌که $\frac{\alpha}{(\alpha - \epsilon)} < n^\delta$ داریم

$$k < n^{1-\delta} = \frac{n}{n^\delta} \implies k < n\left(\frac{\alpha - \epsilon}{\alpha}\right) = n\left(1 - \frac{\epsilon}{\alpha}\right).$$

لذا با جای‌گذاری مقدار به‌دست آمده از بالا برای k ، در (۳۱.۴) داریم

$$\mathbb{E}(X) = \alpha(n - k) > \alpha\left(n - n\left(1 - \frac{\epsilon}{\alpha}\right)\right) = \alpha\left(n - n + \frac{n\epsilon}{\alpha}\right) = n\epsilon = |E(G)|.$$

بنابراین داریم

$$\mathbb{E}(X) > |E(G)| \implies \mathbb{E}(X) - |E(G)| > 0.$$

با در نظر گرفتن $\lambda = \mathbb{E}(X) - |E(G)|$ پس

$$|E(G)| = \mathbb{E}(X) - \lambda. \quad (33.4)$$

و چون $\lambda > 0$ لذا می‌توان از نتیجه تمرکز (نتیجه ۲.۳.۴) استفاده کرد. هم‌چنین با توجه به روابط (۳۱.۴)، (۳۲.۴) و (۳۳.۴)، نامساوی (۳۰.۴) به صورت زیر تبدیل می‌شود

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(D \text{ بودن}) &\leq \mathbb{P}(X \leq |E(G)|) \\ &\leq \mathbb{P}(X \leq (\mathbb{E}(X) - \lambda)) \\ &\leq e^{-\frac{\lambda^2}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i^2)}}} \\ &= e^{-\frac{(\mathbb{E}(X) - |E(G)|)^2}{\sqrt{\beta(n-k)}}} \\ &= e^{-\frac{(\alpha(n-k) - n\epsilon)^2}{\sqrt{\beta(n-k)}}} \\ &= e^{-\frac{(n(\alpha - \epsilon) - k\alpha)^2}{\sqrt{\beta(n-k)}}} \\ &\leq e^{-\frac{(n(\alpha - \epsilon) - \alpha n^{1-\delta})^2}{\sqrt{\beta n}}}. \end{aligned}$$

بنابراین داریم

$$\mathbb{P}(D \text{ بودن}) \leq e^{-\frac{(n(\alpha - \epsilon) - \alpha n^{1-\delta})^2}{\sqrt{\beta n}}}. \quad (34.4)$$

طبق فرض $\alpha > \epsilon$ پس $\alpha - \epsilon > 0$. لذا اگر یک c' به صورت $0 < c' < \alpha - \epsilon$ در نظر بگیرید، پس

$$\alpha - \epsilon - c' > 0. \quad (35.4)$$

در این صورت داریم

$$nc' < n(\alpha - \epsilon) \implies nc' \leq n(\alpha - \epsilon) - \alpha n^{1-\delta}.$$

حال اگر n به اندازه کافی بزرگ باشد آنگاه

$$n(\alpha - \epsilon) - \alpha n^{1-\delta} - nc' = n(\alpha - \epsilon - c') - \alpha n^{1-\delta} \geq 0. \quad (36.4)$$

با توجه به رابطه (۳۵.۴) و این‌که توان عبارت $n^{1-\delta}$ کمتر از توان n است پس مرتبه $\alpha n^{1-\delta}$ کمتر از مرتبه $n(\alpha - \epsilon - c')$ می‌باشد. در نتیجه برای n به اندازه کافی بزرگ، رابطه (۳۶.۴) به سمت بی‌نهایت میل می‌کند. لذا نامساوی (۳۴.۴) نشان می‌دهد برای برخی ثابت‌های مثبت c و c'' ،

$$\mathbb{P}(D \text{ بودن}) \leq e^{-\frac{c''^2 n^2}{\sqrt{\beta n}}}.$$

حال به جای $\frac{c''^2}{\sqrt{\beta}}$ قرار می‌دهیم c . پس

$$\mathbb{P}(D \text{ بودن}) \leq e^{-cn}.$$

از آن‌جا که $D \subseteq V(G)$ و $|D| = k$ لذا تعداد k تایی‌ها برابر با $\binom{n}{k}$ است. برای هر $D \subseteq V(G)$ به طوری که $|D| = k$ ، فرض کنید A_D یک پیشامد با احتمال $\mathbb{P}(A_D) \leq e^{-cn}$ باشد. در این صورت با

توجه به ملاحظه ۳.۳.۴ داریم

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcup_{\substack{D \subseteq V(G) \\ |D|=k}} A_D\right) &\leq \sum_{\substack{D \subseteq V(G) \\ |D|=k}} \mathbb{P}(A_D) \\ &\leq \binom{n}{k} e^{-cn} \leq n^k e^{-cn}. \end{aligned}$$

حال با توجه به این که n^k یک چندجمله‌ای و e^{-cn} نمایی است و $e \geq 1$ ، پس عبارت $n^k e^{-cn}$ کم‌تر از یک می‌باشد، لذا

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{\substack{D \subseteq V(G) \\ |D|=k}} A_D\right) < 1.$$

در نتیجه

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{\substack{D \subseteq V(G) \\ |D|=k}} A_D^c\right) > 0.$$

این یعنی هیچ داینامو از G با $|D| < n^{1-\delta}$ نداریم. \square

هر گرافی که در فرضیات قضیه ۴.۳.۴ صدق می‌کند را یک جامعه همگن^{۱۰} (یکنواخت) می‌نامیم. اثبات قضیه ۴.۳.۴ نشان می‌دهد که اگر G یک جامعه همگن و D هر زیرمجموعه از G باشد که $|D| < n(1 - \frac{\epsilon}{\alpha})$ ، در این صورت با احتمال زیاد D یک مونوپولی پویا نیست.

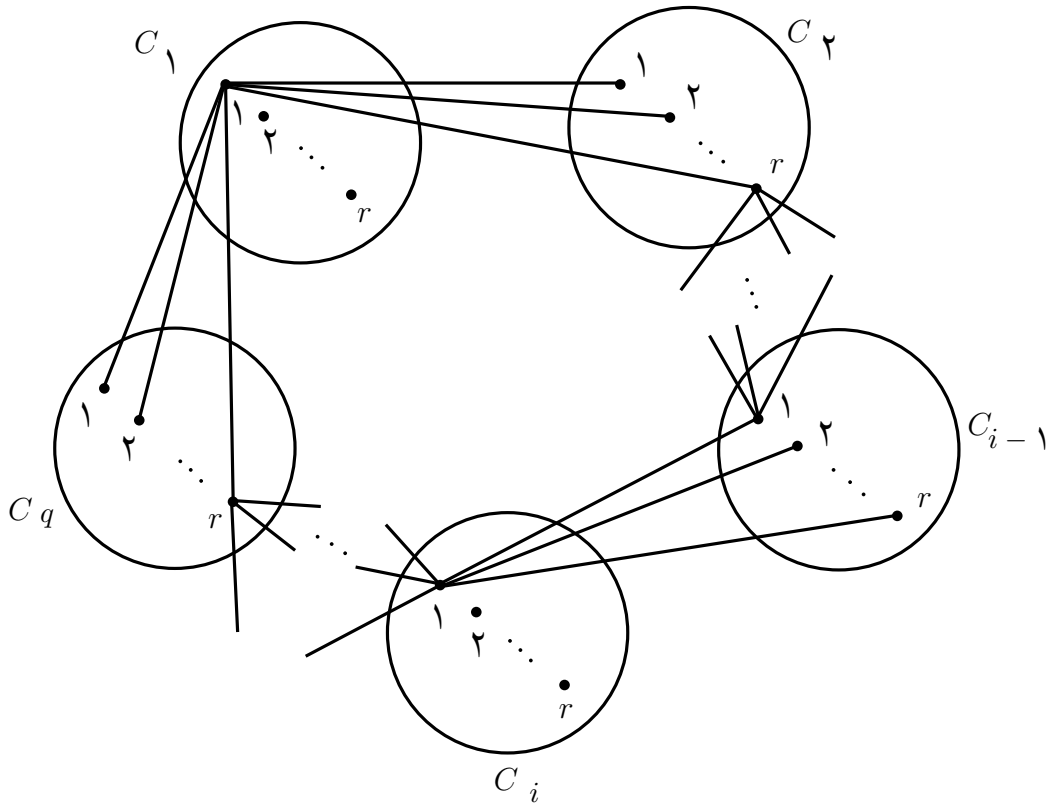
گزاره ۵.۳.۴. برای هر عدد صحیح و مثبت n و r با $r|n$ ، یک گراف r -منتظم با n رأس وجود دارد که شامل یک مونوپولی پویا به اندازه r است که در آن آستانه هر رأس r می‌باشد.

برهان. با توجه به فرض، چون $r|n$ پس می‌توان نوشت برای برخی از $n = rq$ ، $q > 0$. هم‌چنین فرض کنید C_1, \dots, C_q کپی مجزا از گراف K_r باشند که در آن گراف تهی با r رأس است. مجموعه رئوس C_i را با V_i نشان دهید. یک گراف G به شرح زیر تعریف می‌کنیم. (شکل ۶.۴) مجموعه رئوس G برابر است با $V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_q$. در G زیرگراف القاشده روی $V_i \cup V_{i+1}$ برای هر $i = 1, 2, \dots, q$ (زمانی که $i = q$ را به یک می‌بریم) یک زیرگراف دوبخشی کامل است که بخش‌های آن V_i و V_{i+1} هستند. آستانه هر رأس G را برابر با r قرار دهید. یکی از این کپی‌ها را در نظر بگیرید (مثلاً C_i). این کپی یک مونوپولی پویا است، زیرا هر رأس از این کپی $\tau(v) = r$ همسایه در کپی C_{i-1} دارد. لذا همه رئوس کپی C_i فعال می‌شوند. بنابراین

$$\text{dyn}(G) \leq r. \quad (۳۷.۴)$$

از طرفی فرض کنید یک مونوپولی پویا مانند D وجود دارد که با هریک از کپی‌ها تقاطعی (اشتراک) دارد. حال چون D یک مونوپولی پویا است پس بعضی از رئوس گراف بایستی فعال باشند. افزایش D_1, \dots, D_i را در نظر بگیرید. D_1 ناتهی است، در غیر این صورت اگر D_1 تهی باشد آن‌گاه

^{۱۰} Homogeneous society



شکل ۶.۴: گراف G ساخته شده توسط تعداد q کپی مجزا از گراف \bar{K}_r

D_2, \dots, D_l همه تهی هستند یعنی باید $D = n$ که نادرست است. لذا D_1 ناتهی است. پس $x \in D_1$ در نظر بگیرید در این صورت داریم

$$\deg_D(x) \geq \tau(x) = r.$$

در نتیجه

$$|D| = \text{dyn}(G) \geq r. \quad (38.4)$$

از (۳۷.۴) و (۳۸.۴) داریم

$$\text{dyn}(G) = r.$$

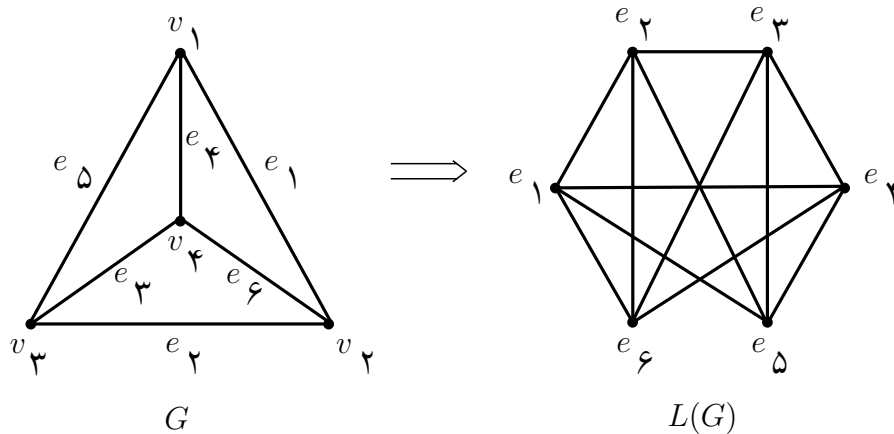
□

۴.۴ مونوپولی‌های پویا در گراف‌های یالی

تعریف ۱.۴.۴. گراف یالی^{۱۱} از گراف G که توسط $L(G)$ نشان داده می‌شود، گرافی است که مجموعه رئوس آن، مجموعه یالی از G است که در آن دو رأس e و e' از $L(G)$ (همان دو یال در G) مجاور هستند اگر و تنها اگر e و e' در G متقاطع باشند.

^{۱۱}Line graph

در شکل ۷.۴، گراف ۳-منتظم G و گراف یالی آن را رسم کرده‌ایم.



شکل ۷.۴: گراف G و گراف یالی آن

یک مونوپولی پویا از $L(G)$ می‌تواند به عنوان مونوپولی پویا از یال‌های G در نظر گرفته شود. در این بخش مونوپولی‌های پویا را در گراف‌های یالی زمانی که G گرافی منتظم است، بررسی می‌کنیم که در آن به جای رئوس $L(G)$ با یال‌های گراف G کار می‌کنیم. توجه داشته باشید اگر e هر یال بین u و v در گراف G باشد آن‌گاه درجه e به عنوان یک رأس از $L(G)$ برابر است با $deg_G(u) + deg_G(v) - 2$. برای اثبات قضیه ۳.۴.۴ به قضیه زیر نیاز داریم و فقط به بیان آن می‌پردازیم.

قضیه ۲.۴.۴ [۵] اگر G گرافی r -منتظم و دارای n رأس باشد در این صورت $L(G)$ منتظم و از درجه $2(r-1)$ می‌باشد.

همان‌طور که در شکل ۷.۴ مشاهده می‌کنید، گراف یالی از G ($L(G)$) یک گراف ۴-منتظم است.

قضیه ۳.۴.۴. فرض کنید گراف r -منتظم G با انتساب آستانه‌ها به یال‌های G داده شده باشد. قرار دهید $t = \min\{\tau(e) : e \in E(G)\}$. فرض کنید $D \subseteq E(G)$ یک مونوپولی پویا به اندازه k در $L(G)$ باشد. در این صورت

$$k \geq \left\lfloor \frac{4(t-r+1)n + (2r-t)^2}{8} \right\rfloor.$$

برهان. بنابر قضیه ۲.۴.۴ چون G یک گراف r -منتظم است لذا $L(G)$ گرافی $(2r-2)$ -منتظم است. قرار دهید $H = G \setminus D$. حال چون D زیرمجموعه یال‌های G است پس تعداد رئوس H و G با هم برابر است. در نتیجه گراف H دارای n رأس و $|E(G)| - k = \frac{rn}{2} - k$ یال می‌باشد. از آن‌جا که D یک مونوپولی پویا است پس $e_1 \in E(H)$ وجود دارد به طوری که

$$deg_H(e_1) = deg_G(e_1) - deg_D(e_1). \quad (39.4)$$

می‌دانیم $deg_D(e_1) \geq \tau(e_1)$ پس

$$-\tau(e_1) \geq -deg_D(e_1).$$

هم‌چنین از فرض داریم

$$t \leq \tau(e_1) \implies -t \geq -\tau(e_1).$$

بنابراین

$$-deg_D(e_1) \leq -t.$$

با قراردادن این نامساوی در رابطه (۳۹.۴) داریم

$$deg_H(e_1) \leq deg_G(e_1) - t. \quad (۴۰.۴)$$

توجه کنید اگر $e_1 = uv$ در این صورت

$$deg_H(e_1) = deg_H(u) + deg_H(v) - ۲. \quad (۴۱.۴)$$

حال قرار دهید $H_1 = H \setminus \{u, v\}$. لذا $|V(H_1)| = n - ۲$ و هنگامی که u و v را از H برمی‌داریم، دقیقاً تعداد $deg_H(u) + deg_H(v) - ۱$ یال از H را از دست می‌دهیم. لذا با استفاده از (۴۰.۴) و (۴۱.۴) داریم

$$\begin{aligned} |E(H_1)| &= |E(H)| - (deg_H(u) + deg_H(v) - ۱) \\ &= |E(H)| - (deg_H(e_1) + ۲ - ۱) \\ &= |E(H)| - deg_H(e_1) - ۱ \\ &\geq |E(H)| - deg_G(e_1) + t - ۱ = |E(H)| - (۲r - ۲) + (t - ۱). \end{aligned}$$

روش فوق را تکرار می‌کنیم تا H_i را با $۲i$ رأس به دست آوریم به طوری که

$$|E(H_i)| \geq |E(H)| - i(۲r - ۲) + i(t - ۱). \quad (۴۲.۴)$$

حال کران بالای بدیهی $|E(H_i)| \leq \binom{n-۲i}{۲}$ را به کار می‌بریم و برای هر i نامساوی زیر را به دست می‌آوریم. بنابر رابطه (۴۲.۴) داریم

$$\begin{aligned} |E(H)| &\leq |E(H_i)| + i(۲r - ۲) - i(t - ۱) \\ &\leq \binom{n-۲i}{۲} + i(۲r - t - ۱) \\ &= \frac{(n-۲i)(n-۲i-۱)}{۲} + i(۲r - t - ۱) \\ &= \frac{n^2 - n}{۲} + ۲i^2 + i(۲r - ۲n - t). \end{aligned}$$

اگر از سمت راست نامساوی فوق نسبت به i مشتق بگیریم، داریم

$$۴i + ۲r - ۲n - t = ۰ \implies i = \frac{۲n - ۲r + t}{۴}.$$

لذا مقدار سمت راست در $i = \frac{2n - 2r + t}{4}$ مینیمم می‌شود. پس مقدار مینیمم آن برابر است با

$$\begin{aligned} \frac{n^2 - n}{2} + 2i^2 + i(2r - 2n - t) &= \frac{n^2 - n}{2} + 2\left(\frac{2n - 2r + t}{4}\right)^2 \\ &\quad + \left(\frac{2n - 2r + t}{4}\right)(2r - 2n - t) \\ &= \frac{\lambda rn - 4nt - 4n + 4rt - 4r^2 - t^2}{8}. \end{aligned}$$

حال چون به ازای هر i ,

$$|E(H)| \leq \frac{\lambda rn - 4nt - 4n + 4rt - 4r^2 - t^2}{8},$$

و از طرفی $|E(H)|$ یک عدد صحیح است، پس

$$|E(H)| \leq \left\lfloor \frac{\lambda rn - 4nt - 4n + 4rt - 4r^2 - t^2}{8} \right\rfloor.$$

با جای‌گذاری تعداد یال‌های H در نامساوی بالا و این‌که $\frac{rn}{2}$ عددی صحیح است، داریم

$$\frac{rn}{2} - k \leq \left\lfloor \frac{\lambda rn - 4nt - 4n + 4rt - 4r^2 - t^2}{8} \right\rfloor.$$

لذا

$$\begin{aligned} k &\geq \frac{rn}{2} - \left\lfloor \frac{\lambda rn - 4nt - 4n + 4rt - 4r^2 - t^2}{8} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{4rn - \lambda rn + 4nt + 4n - 4rt + 4r^2 + t^2}{8} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{4n(t - r + 1) - 4rt + 4r^2 + t^2}{8} \right\rfloor. \end{aligned}$$

□

۱.۴.۴ مونوپولی‌های پویا در گراف‌های یالی از گراف‌های دوبخشی

در این بخش قضیه‌ای را ارائه می‌دهیم که در ارتباط با گراف‌های یالی از گراف‌های دوبخشی^{۱۲} می‌باشد.

قضیه ۴.۴.۴. فرض کنید G یک گراف دوبخشی r -منتظم با n رأس و τ یک انتساب آستانه به یال‌های G باشد. قرار دهید $t = \min\{\tau(e) | e \in E(G)\}$. فرض کنید $D \subseteq E(G)$ یک مونوپولی پویا به اندازه k در $L(G)$ باشد. در این صورت

$$k \geq \frac{n(2t - 2r + 2) + (2r - t)^2 - 4r + 2t}{4} + \epsilon.$$

که در آن $\epsilon = \frac{1}{4}$ ، اگر $n - 2r + t + 1$ عدد صحیح زوج باشد و در غیر این صورت $\epsilon = 0$.

^{۱۲}Bipartite graph

برهان. اثبات مشابه قضیه ۳.۴.۴ می‌باشد. از آن جا که G گرافی منتظم و دوبخشی است پس n زوج می‌باشد، لذا هر بخش از G شامل $\frac{n}{۲}$ رأس است. قرار دهید $H = G \setminus D$. با توجه به این که D یک مونوپولی پویا است لذا $e_i \in E(H_{i-1})$ وجود دارد به طوری که

$$\deg_{H_{i-1}}(e_i) = \deg_G(e_i) - \deg_D(e_i) \leq \deg_G(e_i) - t.$$

توجه داشته باشید که اگر $e_i = u_i v_i$ در این صورت

$$\deg_{H_{i-1}}(e_i) = \deg_{H_{i-1}}(u_i) + \deg_{H_{i-1}}(v_i) - ۲.$$

حال قرار دهید $H_i = H_{i-1} \setminus \{u_i, v_i\}$ که در آن $e_i = u_i v_i$. لذا به دست می‌آوریم $|V(H_i)| = n - ۲i$ و

$$|E(H_i)| \geq |E(H)| - i(۲r - ۲) + i(t - ۱) = |E(H)| - i(۲r - t - ۱).$$

در نتیجه داریم

$$|E(H)| \leq |E(H_i)| + i(۲r - t - ۱). \quad (۴۳.۴)$$

از آن جا که H_i یک گراف دوبخشی است و هر بخش آن $i - \frac{n}{۲}$ رأس دارد، در نهایت اگر گراف دوبخشی کامل هم باشد، داریم

$$|E(H_i)| \leq \left(\frac{n}{۲} - i\right)\left(\frac{n}{۲} - i\right) = \left(\frac{n}{۲} - i\right)^۲.$$

با استفاده از این کران و برای هر i ، نامساوی زیر را به دست می‌آوریم. در نتیجه بنابر رابطه (۴۳.۴) داریم

$$\begin{aligned} |E(H)| &\leq |E(H_i)| + i(۲r - t - ۱) \\ &\leq \left(\frac{n}{۲} - i\right)^۲ + i(۲r - t - ۱) \\ &= \frac{n^۲}{۴} + i^۲ + i(۲r - t - n - ۱). \end{aligned}$$

اگر از سمت راست نامساوی نسبت به i مشتق بگیریم، در این صورت

$$۲i + ۲r - n - t - ۱ = ۰ \implies i = \frac{n - ۲r + t + ۱}{۲}.$$

لذا مقدار سمت راست در $i = \frac{n - ۲r + t + ۱}{۲}$ مینیمم می‌شود و مقدار مینیمم آن برابر است با

$$\begin{aligned} \frac{n^۲}{۴} + i^۲ + i(۲r - t - n - ۱) &= \frac{n^۲}{۴} + \left(\frac{n - ۲r + t + ۱}{۲}\right)^۲ \\ &\quad + \left(\frac{n - ۲r + t + ۱}{۲}\right)(۲r - n - t - ۱) \\ &= \frac{n^۲}{۴} - \frac{(n - ۲r)^۲ + (t + ۱)^۲ + ۲(n - ۲r)(t + ۱)}{۴} \\ &= \frac{n^۲}{۴} - \frac{(n - ۲r + t + ۱)^۲}{۴}. \end{aligned}$$

این مقدار دست‌یافتنی است هرگاه i عددی صحیح است، یعنی زمانی که $n - ۲r + t + ۱$ یک عدد زوج باشد.

بنابراین زمانی که $n - 2r + t + 1$ زوج است، داریم

$$|E(H)| \leq \frac{n^2}{4} - \frac{(n - 2r + t + 1)^2}{4}.$$

اما زمانی که $n - 2r + t + 1$ فرد است، چون n عددی زوج است در نتیجه مقدار $\frac{n^2}{4}$ عددی صحیح خواهد بود. حال در مورد صحیح بودن مقدار $\frac{(n - 2r + t + 1)^2}{4}$ بحث می‌کنیم. اگر $n - 2r + t + 1$ زوج باشد پس حتماً به ۴ بخش پذیر است. در صورتی که $n - 2r + t + 1$ فرد باشد، باقی‌مانده آن مهم است. لذا برای پیدا کردن نزدیک‌ترین عدد صحیح به این مقدار یا باید $\frac{3}{4}$ به آن اضافه یا $\frac{1}{4}$ از آن کم کنیم. حال چون مقدار مینیمم دارای اهمیت است پس $\frac{1}{4}$ از $\frac{(n - 2r + t + 1)^2}{4}$ کم می‌کنیم. در نتیجه داریم

$$\begin{aligned} |E(H)| &\leq \frac{n^2}{4} - \left(\frac{(n - 2r + t + 1)^2}{4} - \frac{1}{4} \right) \\ &= \frac{n^2}{4} - \frac{(n - 2r + t + 1)^2}{4} + \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

بنابراین

$$|E(H)| \leq \frac{n^2}{4} - \frac{(n - 2r + t + 1)^2}{4} + \varphi, \quad (44.4)$$

که در آن زمانی که $n - 2r + t + 1$ زوج است، $\varphi = 0$ و زمانی که $n - 2r + t + 1$ فرد است، $\varphi = \frac{1}{4}$. هم‌چنین $k = \frac{rn}{2} - |E(G)| = |E(H)| - k = \frac{rn}{2} - k$ با جای‌گذاری تعداد یال‌های H در نامساوی (۴۴.۴) و این‌که $\frac{rn}{2}$ عددی صحیح است، داریم

$$\begin{aligned} k &= \frac{rn}{2} - |E(H)| \\ &\geq \frac{rn}{2} - \frac{n^2}{4} + \frac{(n - 2r + t + 1)^2}{4} - \varphi \\ &= \frac{rn}{2} - \frac{n^2}{4} + \frac{n^2 + 4r^2 + t^2 + 1 - 4nr + 2nt + 2n - 4tr - 4r + 2t}{4} - \varphi \\ &= \frac{n(2t - 2r + 2) + (2r - t)^2 - 4r + 2t}{4} + \frac{1}{4} - \varphi. \end{aligned}$$

پس

$$k \geq \frac{n(2t - 2r + 2) + (2r - t)^2 - 4r + 2t}{4} + \frac{1}{4} - \varphi.$$

اگر قرار دهیم $\epsilon = \frac{1}{4} - \varphi$ در این صورت با $\varphi = 0$ داریم $\epsilon = \frac{1}{4}$ و با $\varphi = \frac{1}{4}$ داریم $\epsilon = 0$. بنابراین اثبات کامل شد. \square

پیوست آ

جدول نمادها

جدول آ.۱: جدول نمادها

گراف	G
درجه رأس v در G	$deg_G(v)$
مجموعه یالها	E
مجموعه رأسها	V
زیرگراف G القاشده توسط S	$G[S]$
گراف کامل n رأسی	K_n
گراف دوبخشی کامل با بخشهای X و Y که $ X = n$ و $ Y = m$	$K_{m,n}$
عدد استقلال رأسی	α
عدد استقلال یالی (عدد جورسازی)	α'
عدد پوششی	β
مینیمم درجه	δ
ماکزیمم درجه	Δ
عدد رنگی	χ
یکریختی	$H \cong G$
H زیرگراف G	$H \subseteq G$
مجموعه همسایگی رأس v	$N(v)$

جدول آ.۲: جدول نمادها

گراف یالی از G	$L(G)$
گراف پترسن تعمیم یافته	$GP(n, k)$
مرتبه رأس v	$\sigma(v)$
آستانه رأس v	$\tau(v)$
آستانه متوسط τ	$\bar{\tau}$
چگالی یالی G	$\epsilon(G)$
مینیم مونوپولی پویا از G	$dyn_{\tau}(G)$

مراجع

- [1] E. Ackerman, O. Ben-Zwi, G. Wolfvitz, Combinatorial Model and Bounds for Target Set Selection, *Theoret. Comput. Sci.* 411 (2010), pp. 4017-4022.
- [2] S.S. Adams, Z. Brass, C. Stokes, D.S. Troxell, Irreversible k-threshold and majority conversion processes on complete multipartite graphs and graph products, arXiv:1102.5361v1, 2011.
- [3] R.K. Ahuja, T.L. Magnanti, J.B. Orlin, *Network flows: theory, algorithms, and applications*, Prentice Hall 1993.
- [4] E. Berger, Dynamic monopolies of constant size, *J. Combin. Theor. Series B*, 83 (2001), pp. 191-200.
- [5] J.A. Bondy, U.S.R. Murty, *Graph Theory*, Springer-Verlag, 2008.
- [6] C.C. Centeno, D. Rautenbach, Remarks on dynamic monopolies with average thresholds, manuscript 2013.
- [7] C.C. Centeno, M.C. Dourado, L.D. Penso, D. Rautenbach , J.L. Szwarcfiter, Irreversible conversion of graphs, *Theoret. Comput. Sci.* 412 (2011) 3693–3700.
- [8] C-L. Chang, Y-D. Lyuu, On irreversible dynamic monopolies in general graphs, arXiv:0904.2306v3, 2010.
- [9] C-L. Chang, Y-D. Lyuu, Spreading messages, *Theoret. Comput. Sci.* 410 (2009), pp. 2714-2724.
- [10] N. Chen, On the approximability of influence in social networks, *SIAM J. Discrete Math.* 23 (2009) 1400-1415.
- [11] P. Domingos and M. Richardson, Mining the network value of customers, in: *Proceedings of the 7th ACM International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining, KDD*, 2001, pp. 5766.
- [12] P.A. Dreyer, F.S. Roberts, Irreversible k-threshold processes: Graph theoretical threshold models of the spread of disease and of opinion, *Disc. Appl. Math.* 157(2009) 1615–1627.

-
- [13] P. Flocchini, R. Kralovic, A. Roncato, P. Ruzicka, N. Santoro, On time versus size for monotone dynamic monopolies in regular topologies, *J. Discrete Algorithms*, 1 (2003) 129–150.
- [14] P. Flocchini, F. Geurts, N. Santoro, Irreversible dynamos in chordal rings, *Disc. Appl. Math.* 112 (2001), pp. 23-42.
- [15] P. Flocchini, E. Lodi, F. Luccio, L. Pagli, N. Santoro, Dynamic Monopolies in Tori, *Disc. Appl. Math.* 137 (2004), pp. 197-212.
- [16] M.R. Garey, D.S. Johnson, *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*, W. H. Freeman Co., New York, NY, USA, 1979.
- [17] S. Jukna, *Extremal Combinatorics*, Springer-Verlag, 2001.
- [18] K. Khoshkhah, H. Soltani, M. Zaker, On dynamic monopolies of graphs: The average and strict majority thresholds, *Discrete Optim.* 9 (2012) 77–83.
- [19] K. Khoshkhah, M. Nemati, H. Soltani, M. Zaker, A study of monopolies in graphs, submitted.
- [20] K. Khoshkhah, M. Zaker, On the largest dynamic monopolies of graphs with a given average threshold, arXiv:1405.6138v1, 2014.
- [21] T. Kulich, Dynamic monopolies with randomized starting configuration, arXiv:1007.4154 2010.
- [22] C. McDiarmid, Concentration, in: *Probabilistic Methods for Algorithmic Discrete Mathematics*, Springer, 1998, pp. 1–46.
- [23] D. Peleg, Size bounds for dynamic monopolies, *Disc. Appl. Math.*, 86 (1998), pp. 263-273.
- [24] D. Peleg, Local majorities, coalitions and monopolies in graphs, *Theoret. Comput. Sci.* 282 (2002) 231–257.
- [25] H. Soltani, M. Zaker, Dynamic monopolies of graphs with probabilistic thresholds, submitted.
- [26] M. Zaker, On dynamic monopolies of graphs with general thresholds, *Disc. Math.* 312 (2012) 1136–1143.
- [27] M. Zaker, Generalized degeneracy, dynamic monopolies and maximum degenerate subgraphss, *Disc. Appl. Math.* 161 (2013) 2716-2723.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

الف

assignment	انتساب
strict majority	اکثریت اکید
induced	القاشده
threshold	آستانه
general threshold	آستانه عمومی

پ

covering	پوشش
minimum covering	پوشش مینیمم
vertex cover	پوشش رأسی

ت

ordering	ترتیب
demand	تقاضا

ج

homogeneous society	جامعه همگن
matching	جورسازی
maximum matching	جورسازی ماکزیمم
flow	جریان
forest	جنگل

چ

edge density	چگالی یالی
--------------	------------

خ

automorphism	خودریختی
--------------	----------

د

degree	درجه
tree	درخت
cycle	دور
odd cycle	دور فرد
even cycle	دور زوج

ر

vertex	رأس
active vertex	رأس فعال

ز

subgraph	زیرگراف
induced subgraph	زیرگراف القایی
resistant subgraph	زیرگراف مقاوم

ش

directed network	شبکه جهت‌دار
------------------	--------------

ط

loop	طوقه
------	------

ظ

capacity	ظرفیت
----------	-------

ع

independence number	عدد استقلال
matching number	عدد جورسازی
chromatic number	عدد رنگی

ک

disjoint copy	کپی مجزا
---------------	----------

گ

graph	گراف
generalized Petersen graph	گراف پترسن تعمیم‌یافته
empty graph	گراف تهی
bipartite graph	گراف دوبخشی
complete bipartite graph	گراف دوبخشی کامل
simple graph	گراف ساده

complete graph	گراف کامل
regular graph	گراف منتظم
disconnected graph	گراف ناهمبند
connected graph	گراف همبند
isomorphic graph	گراف یکریخت
line graph	گراف یالی
spread of influence	گسترش تأثیر

م

dynamic monopoly	مونوپولی پویا
dynamo-unbounded	مونوپولی پویا-نامحدود
irreversible monopolies	مونوپولی‌های برگشت‌ناپذیر
triangle-free	مثلث-آزاد
restriction	محدودیت
domination set	مجموعه احاطه‌گر
independent set	مجموعه مستقل
adjacent	مجاور
component	مولفه
path	مسیر

ن

mapping	نگاشت
---------	-------

ه

neighbor	همسایه
cost	هزینه

ی

edge	یال
isomorphism	یکریختی

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

A

assignment انتساب
active vertex رأس فعال
adjacent مجاور

B

bipartite graph گراف دوبخشی

C

capacity ظرفیت
chromatic number عدد رنگی
complete graph گراف کامل
complete bipartite graph گراف دوبخشی کامل
component مولفه
connected graph گراف همبند
cost هزینه
covering پوشش
cycle دور

D

degree درجه
demand تقاضا

disjoint copy	کپی مجزا
directed network	شبکه جهت‌دار
disconnected graph	گراف ناهمبند
domination set	مجموعه احاطه‌گر
dynamic monopoly	مونوپولی پویا
dynamo-unbounded	مونوپولی پویا-نامحدود

E

edge	یال
edge density	چگالی یالی
empty graph	گراف تهی
even cycle	دور زوج

F

flow	جریان
forest	جنگل

G

general threshold	آستانه عمومی
graph	گراف
generalized Petersen graph	گراف پترسن تعمیم‌یافته

H

homogeneous society	جامعه همگن
---------------------	------------

I

induced	القاشده
independence number	عدد استقلال

independent set مجموعه مستقل
 induced subgraph زیرگراف القایی
 irreversible monopolies مونوپولی‌های برگشت‌ناپذیر
 isomorphic graph گراف یکرخت
 isomorphism یکریختی

L

line graph گراف یالی
 loop طوقه

M

mapping نگاشت
 matching جورسازی
 maximum matching جورسازی ماکزیمم
 matching number عدد جورسازی
 minimum covering پوشش مینیمم

N

neighbor همسایه

O

odd cycle دور فرد
 ordering ترتیب
 outomorphism خودریختی

P

path مسیر

R

regular graph	گراف منتظم
resistant subgraph	زیرگراف مقاوم
restriction	محدودیت

S

simple graph	گراف ساده
spread of influence	گسترش تأثیر
strict majority	اکثریت اکید
subgraph	زیرگراف

T

threshold	آستانه
tree	درخت
triangle-free	مثلث-آزاد

V

vertex	رأس
vertex cover	پوشش رأسی

نمایه

- p پارامتر، ۴۵
صفر و درجه)-انتساب، ۳۴
 $L-t$ مونوپولی پویا، ۹
آستانه متوسط، ۱، ۹
بزرگ‌ترین مونوپولی پویا، ۹، ۱۱
جامعه همگن، ۶۹
جنگل، ۶
جورسازی، ۷
جورسازی ماکزیمم، ۷
خودریختی، ۸، ۶۵
درخت، ۶
رأس زوج، ۳
رأس فرد، ۳
رأس واکسینه، ۲۴
رنگ‌آمیزی رأسی، ۶
زیر جمع‌پذیر، ۴۵
زیرگراف القایی، ۵
زیرگراف مقاوم، ۹
زیرگراف، ۴
زیرگراف فراگیر، ۴
طوقه، ۲
عدد استقلال، ۷
عدد جورسازی، ۴۴
عدد رنگی گراف، ۶
قضیه کونینگ، ۳۹
مجموعه احاطه‌گر، ۵۷
- مجموعه مستقل، ۷
مرتبه رأس، ۴۲
مولفه، ۶
مونوپولی τ -پویا، ۹
مونوپولی پویا، ۱
مونوپولی پویا-محدود، ۹
مونوپولی پویا-نامحدود، ۹، ۶۵
مینیمم مونوپولی پویا، ۹
مینیمم پوشش، ۷
نامساوی لیپ‌شیتز، ۴۵
نتیجه تمرکز، ۶۶
پوشش، ۷
چگالی یالی، ۱
گراف، ۲
گراف بدیهی، ۳
گراف دوبخشی، ۴
گراف دوبخشی کامل، ۴
گراف ساده، ۲
گراف متناهی، ۴
گراف منتظم، ۳
گراف نابديهی، ۳
گراف ناهمبند، ۶
گراف همبند، ۶
گراف پترسن تعمیم‌یافته، ۶۳
گراف یالی، ۷۰
یال پیوندی، ۲

يال چندگانه، ۲

يکريختي، ۸

Aabstract

Let G be a graph and $\tau : V(G) \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ be an assignment of nonnegative integer thresholds to the vertices of G . A subset of vertices D is said to be a τ -dynamic monopoly (dynamo), if $V(G)$ can be partitioned into subsets D_0, D_1, \dots, D_k such that $D_0 = D$ and for any $i \in \{0, \dots, k-1\}$, each vertex v in D_{i+1} has at least $\tau(v)$ neighbors in $D_0 \cup \dots \cup D_i$. Denote the size of smallest τ -dynamic monopoly by $dyn_\tau(G)$.

In this thesis, we consider dynamic monopolies with strict majority, average and general thresholds. In this regard, we present some results about $dyn_\tau(G)$ with respect to the structure of graph G . Also, the Complexity of $dyn_\tau(G)$ will be discussed for some family of graphs.

keywords: Dynamic monopoly, The largest dynamo, Dynamo-unbounded, Irreversible dynamic monopolies



Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

On dynamic monopolies of graphs

Zobeideh Yasaghi

Supervisor

Dr. Meysam Alishahi

February 2016