



دانشکده علوم ریاضی  
گروه ریاضی کاربردی

پایان نامه کارشناسی ارشد

# روش کودریاشف برای حل معادلات دیفرانسیل کسری

عاطفه تقی پور

استاد راهنما

دکتر علی مس فروش

استاد مشاور

دکتر مصطفی اسلامی

بهمن ۱۳۹۴

تقدیم بہ خدایی کہ ہرچہ دارم از اوست

خدایی کہ سخنوران، دستوں او بماند و شمارندگان، شمردن نعمت ہای او ندانند و  
کوشندگان، حق او را گزاردن نتوانند.

و تقدیم بہ

ہمہ باورم ہمہ یاورم و ہمہ خاطر م

مادر عزیز م

کہ در سایہ لطف پروردگار، ہرچہ دارم از اوست.

## سپاس گزار می...

سپاس خدای را که نام هایش پاک، نعمت هایش سرشار و احسانش وافر است؛  
سپاس از پدر و مادر عزیزم که برایم همه بودند و هیچ نبودم برایشان،  
سپاس از خواهر عزیزم؛ عادله که همراه، همگامی من در کارها بود،  
سپاس از برادر کوچکم؛ محمد امین که مایه دلگرمی ام بود،  
مراتب ارادت خویش را به پدر بزرگ عزیزم حاج آقا نیک پور به پاس ثانیه ثانیه حضورش در محظرات  
زندگیم تقدیم می کنم،

## سپاس گزارى ...

مشكر و سپاس از استاد اهنماى پرمياه ام جناب آقاى دكتر على مس فروش كه از محضر پرفيض تدريسشان و راهنمايى هايشان بهره برده ام،

از استاد مشاور فرميخته جناب آقاى دكتر مصطفى اسلامى به پاس زحمتشان كمال سپاس را دارم،  
از جناب آقاى دكتر حجت احسنى و جناب آقاى دكتر مهدى قوتمند كه داورى اين پايان نامه را بر عهده گرفتند،

مشكر خويش را به استاد ام جناب آقاى دكتر هادى ناصرى به پاس همه راهنمايى هاى ارزنده و زحمانى كه برايم متحمل شدند تقديم مى كنم.

از جناب آقاى دكتر حسين پور، دكتر نيكزاد و دوست مهربانم خانوم حميده بزرگ و بقيه دوستانى كه مرا يارى كردند سپاس گزارم.

عاطفه تقى پور  
بهمن ۱۳۹۴

## تعمدنامه

اینجانب عاطفه تقی پور دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی دانشکده علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان روش کودریاشف برای حل معادلات دیفرانسیل کسری متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های دیگر پژوهشگران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه صنعتی شاهرود “ یا “ Shahrood University Of Technology “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

عاطفه تقی پور  
بهار ۱۳۹۴

## مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی باشد.

## چکیده

بسیاری از پدیده‌های اطراف ما در جهان ذاتاً غیرخطی بوده و قابل توصیف به وسیله معادلات غیرخطی می‌باشند. به دلیل ظهور کامپیوترهای پیشرفته تولید و حل مسائل خطی آسان است اما در حالت کلی جواب دقیق برای مسائل غیرخطی قدری مشکل خواهد بود. هدف در این پایان نامه بررسی جواب دقیق معادلات دیفرانسیل کسری غیرخطی با استفاده از روش کودریاشف است و برای نیل به این هدف ابتدا به معرفی توابع حساب کسری و برخی از خواص آن‌ها پرداخته‌ایم، سپس مفهوم مشتق و انتگرال از مرتبه غیرصحیح را معرفی و همچنین خواص و ارتباط بین آن‌ها را مطرح کرده‌ایم و روش کلاسیک کودریاشف برای معادلات از مرتبه عدد صحیح را توضیح دادیم در آخر انواع معادلات دیفرانسیل کسری غیرخطی را با استفاده از روش‌های تعمیم یافته و اصلاح شده کودریاشف حل کرده‌ایم.

**کلمات کلیدی :** حساب کسری، روش کودریاشف، معادله موج، معادلات دیفرانسیل زمان-کسری، روش تعمیم یافته و اصلاح شده کودریاشف

# فهرست مطالب

۱	مقدمه و مفاهیم اولیه	۱
۱	..... مقدمه	۱.۱
۲	..... توابع پایه حساب کسری	۲.۱
۲	..... تابع گاما	۱.۲.۱
۵	..... تابع بتا	۲.۲.۱
۵	..... تابع میتاگ لفلر	۳.۲.۱
۷	..... حساب دیفرانسیل و انتگرال کسری	۳.۱
۷	..... مشتق و انتگرال کسری ریمان-لیوویل	۴.۱
۷	..... انتگرال کسری ریمان-لیوویل	۱.۴.۱
۸	..... خواص انتگرال کسری ریمان-لیوویل	۲.۴.۱
۹	..... مشتق کسری ریمان-لیوویل	۳.۴.۱
۱۱	..... ترکیب با مشتق مرتبه صحیح	۴.۴.۱
۱۲	..... ترکیب با مشتق مرتبه کسری	۵.۴.۱
۱۴	..... مشتق کسری کاپوتو	۵.۱
۱۴	..... روابط بین مشتق کسری کاپوتو و مشتق ریمان-لیوویل	۱.۵.۱
۱۵	..... مقایسه تعریف کاپوتو و تعریف ریمان-لیوویل	۲.۵.۱
۱۶	..... مشتق کسری گرانوالد-لتنیکوف	۶.۱
۱۹	تبدیل موج	۲
۱۹	..... مقدمه	۱.۲
۱۹	..... معادله دیفرانسیل جزئی	۲.۲
۲۰	..... جواب‌های معادلات دیفرانسیل جزئی	۱.۲.۲
۲۰	..... جواب‌های تحلیلی و عددی معادلات دیفرانسیل جزئی	۲.۲.۲
۲۰	..... تعاریف	۳.۲
۲۰	..... سیگنال	۱.۳.۲
۲۱	..... موج	۲.۳.۲
۲۱	..... امواج سیار	۳.۳.۲

۲۱	.....	جواب موج سیار	۴.۳.۲
۲۵	.....	حل بعضی از معادلات دیفرانسیل جزئی به روش کلاسیک	۴.۲
۲۷		معرفی روش کودریاشف	۳
۲۷	.....	الگوریتم روش	۱.۰.۳
۲۹	.....	پیاده‌سازی روش	۲.۰.۳
۳۵		انواع روش کودریاشف برای حل معادلات دیفرانسیل کسری	۴
۳۵	.....	مقدمه	۱.۴
۳۶	.....	روش تعمیم یافته کودریاشف برای معادلات دیفرانسیل زمان-کسری	۲.۴
۳۷	.....	گام اول	۱.۲.۴
۳۷	.....	گام دوم	۲.۲.۴
۳۸	.....	گام سوم	۳.۲.۴
۳۸	.....	گام چهارم	۴.۲.۴
۳۹	.....	کاربردهایی برای معادلات زمان-کسری	۵.۲.۴
۴۹	.....	روش اصلاح شده کودریاشف برای حل معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری غیرخطی	۳.۴
۴۹	.....	روش اصلاح شده کودریاشف	۱.۳.۴
۵۰	.....	گام اول	۲.۳.۴
۵۰	.....	گام دوم	۳.۳.۴
۵۰	.....	گام سوم	۴.۳.۴
۵۱	.....	گام چهارم	۵.۳.۴
۵۱	.....	کاربردها	۶.۳.۴
۵۱	.....	معادله اصلاح شده مکان-زمان کسری $BBM$	۷.۳.۴
۵۳	.....	معادله پتانسیل مکان-زمان کسری $KP$	۸.۳.۴
۵۴	.....	نتیجه گیری	۴.۴
۵۵		مراجع	



# فصل ۱

## مقدمه و مفاهیم اولیه

### ۱.۱ مقدمه

حساب کسری<sup>۱</sup> از قرن ۱۷ آغاز شد و بحث‌های اولیه در این مورد شامل کارهای لایبنیتز<sup>۲</sup>، اویلر<sup>۳</sup>، لاگرانژ<sup>۴</sup>، آبل<sup>۵</sup>، ریمان<sup>۶</sup>، لیوویل<sup>۷</sup> و بسیاری دیگر بوده است. توسیع مفهوم مشتق  $D^\alpha f(x)$  برای مقادیر غیر صحیح  $\alpha$  که آن را محاسبات کسری می‌نامیم از همان زمان ابداع حساب دیفرانسیل و انتگرال مورد توجه محققین بوده است اما تا دهه‌های اخیر از نظر کاربرد چندان مورد توجه قرار نگرفته است.

نام محاسبات کسری به معنای محاسبه کسرها نیست. همچنین به معنی کسرهایی از محاسبات دیفرانسیل یا انتگرال یا محاسبه تغییرات نیست، بلکه محاسبات کسری نام نظریه‌ای در مورد انتگرال‌ها و مشتقات از مرتبه دلخواه است که مفاهیم مشتق‌گیری از مرتبه صحیح  $n$  و انتگرال‌گیری  $n$ -گانه را تعمیم می‌دهد.

نام اختصاری برای مشتق از مرتبه دلخواه، مشتق کسری و نام اختصاری برای انتگرال از مرتبه دلخواه، انتگرال کسری است.

محاسبات کسری نامی برای تئوری انتگرال‌ها و مشتق‌ها از مرتبه دلخواه است و دارای قدمتی بیش از ۳۰۰ سال است. اولین گزارش مربوط به تعمیم مشتقات معمولی به مشتقات کسری منصوب به لایبنیتز

و هوپیتال در سال ۱۶۹۵ است که در آن هوپیتال از لایبنیتز می‌پرسد که اگر در نماد  $\frac{d^n}{dt^n}$  به جای  $n$  عدد  $\frac{1}{p}$  قرار دهیم چه اتفاقی می‌افتد؟

لایبنیتز در تاریخ ۳۰ سپتامبر ۱۶۹۵ برای هوپیتال<sup>۸</sup> چنین نوشت: این یک پارادوکس آشکار است و یک

<sup>۱</sup>Fractional Calculus

<sup>۲</sup>Leibniz

<sup>۳</sup>Euler

<sup>۴</sup>Lagrange

<sup>۵</sup>Abel

<sup>۶</sup>Riemann

<sup>۷</sup>Liouville

<sup>۸</sup>Hopital

روز پیامد سودمند آن آشکار خواهد شد. تاریخ ۳۰ سپتامبر ۱۶۹۵ تاریخ دقیق تولد حساب دیفرانسیل و انتگرال کسری است.

همانطور که می‌دانیم مفهوم مشتق و انتگرال از مرتبه صحیح توضیح روشن فیزیکی و هندسی دارد ولی برای مرتبه مشتق و انتگرال کسری غیر صحیح، توضیح قابل قبولی وجود ندارد. برخلاف قدمت طولانی محاسبات کسری متاسفانه تا سال‌های اخیر توجه چندانی به آن نشده است. هم‌اکنون مسائل بسیار بزرگ علمی و مهندسی در ارتباط با محاسبات کسری وجود دارد.

معادله دیفرانسیلی که مشتقات موجود در آن از مرتبه غیر صحیح باشند معادله دیفرانسیل کسری نام دارد. در چند دهه گذشته معادلات دیفرانسیل کسری با استفاده از مشتق کسری مورد توجه بسیاری قرار گرفته است که هم بدلیل پیشرفت حساب کسری و هم بدلیل کاربرد آن در ساختارهای مختلف زندگی واقعی است. این گونه معادلات در مدل‌سازی بسیاری از مسائل و پدیده‌های مختلف فیزیکی به کار برده شده‌اند و همچنین در دینامیک غیرخطی نیز استفاده شده‌اند، به این معناست که مدل‌های مرتبه کسری مناسب‌تر از مدل‌های مرتبه عدد صحیح است که قبلاً به کار می‌رفته است. این گونه معادلات کاربردهای متنوعی در زمینه‌های فناوری و مهندسی مثل مهندسی حرارت، مکانیک‌های آماری و پیوستار، مکانیک سیالات، فیزیک جامدات، ریاضیات زیستی، پردازش سیگنال، فیبرهای نوری، شناسایی سیستم، تئوری کنترل بهینه، علم اقتصاد، آشفستگی، رباتیک، ترمودینامیک و غیره دارد.

## ۲.۱ توابع پایه حساب کسری

در این بخش به معرفی توابع گاما،<sup>۹</sup> بتا<sup>۱۰</sup>، میتاگ لفلر<sup>۱۱</sup> می‌پردازیم. این توابع نقش مهمی در مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری از مرتبه دلخواه ایفا می‌کنند.

### ۱.۲.۱ تابع گاما

یکی از توابع پایه حساب کسری تابع گامای اویلر  $\Gamma(z)$  است که در سال ۱۷۲۹ توسط اویلر معرفی شده است. این تابع  $n!$  را تعمیم داده و اجازه می‌دهد که  $n$  مقادیر ناصحیح و حتی مقادیر مختلط را نیز اختیار کند.

تابع گاما به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad (1.1)$$

<sup>۹</sup>Gamma

<sup>۱۰</sup>Beta

<sup>۱۱</sup>MittagLeffler

که در نیمه راست صفحه مختلط،  $Re(z) > 0$  همگرا می‌شود. یعنی داریم:

$$\begin{aligned}\Gamma(x + iy) &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1+iy} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} e^{iy \log(t)} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} [\cos(y \log(t)) + i \sin(y \log(t))] dt\end{aligned}\quad (2.1)$$

عبارت داخل کروشه در (۲.۱) به ازای هر  $t$  کران دار است و همگرایی در بینهایت با  $e^{-t}$  فراهم می‌شود و برای همگرایی در  $t = 0$  باید  $x = Re(z) > 1$  باشد.

### خواص تابع گاما

یکی از خواص پایه‌ای اما مهم تابع گاما به صورت

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z) \quad (3.1)$$

است که به آسانی با استفاده از انتگرال‌گیری جز به جز اثبات می‌شود.

$$\Gamma(z + 1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^z dt = [e^{-t} t^z]_{t=0}^{t=\infty} + z \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = z\Gamma(z)$$

به وضوح  $\Gamma(1) = 1$  است و برای  $z = 1, 2, 3, \dots$  با استفاده از (۳.۱) داریم:

$$\Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1!$$

$$\Gamma(3) = 2 \cdot \Gamma(2) = 2 \times 1!$$

$$\Gamma(4) = 3 \cdot \Gamma(3) = 3 \times 2!$$

⋮

$$\Gamma(n + 1) = n \cdot \Gamma(n) = n \cdot (n - 1)! = n!$$

اگر  $Re(z) < 0$ ، تابع گاما را به صورت زیر تعمیم می‌دهیم:

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z + k)}{z(z + 1) \dots (z + k - 1)}, \quad z \neq 0, -1, -2, \dots, -k + 1 \quad (4.1)$$

که در آن  $k$  عددی صحیح می‌باشد. این رابطه را می‌توان برای تعریف تابع گاما برای هر  $z$  که بخش حقیقی آن منفی و همچنین اعداد صحیح منفی و صفر باشند، استفاده کرد. برخی از این مقادیر را در جدول ۱.۱ می‌بینیم.

برخی از خواص تابع گاما در ادامه آورده شده است:

$$z \neq 0, -1, -2, \dots, -k + 1, \quad \Gamma(z) = \frac{\Gamma(z + k)}{z(z + 1) \dots (z + k - 1)} \bullet$$

جدول ۱.۱: تعدادی از مقادیر گاما

$\Gamma(1) = 1$	$\Gamma(-\frac{3}{2}) = \frac{4}{3}\sqrt{\pi}$
$\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$	$\Gamma(-1) = \pm\infty$
$\Gamma(2) = 1$	$\Gamma(-\frac{1}{2}) = -2\sqrt{\pi}\frac{4}{3}\sqrt{\pi}$
$\Gamma(\frac{5}{2}) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$	$\Gamma(0) = \pm\infty$
$\Gamma(3) = 2$	$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

•  $z \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \Gamma(z)\Gamma(z-1) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$

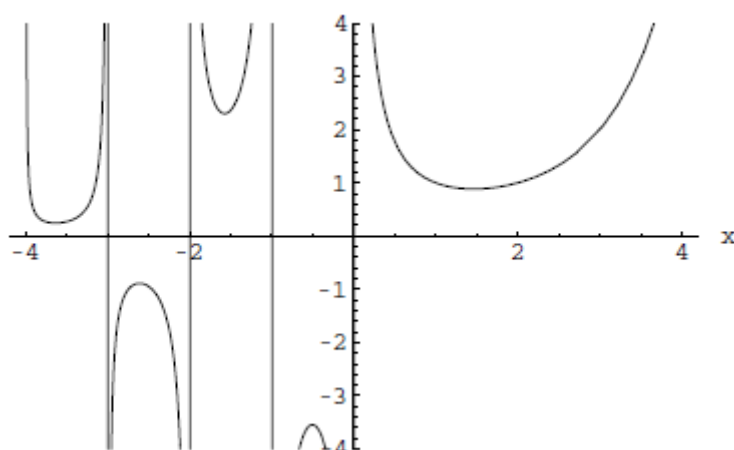
•  $n = 1, 2, \dots, \Gamma(n+1) = n!$

•  $\Gamma(-z) = \frac{-\pi \csc(\pi z)}{\Gamma(z+1)}$

•  $m \in \mathbb{Z}, \Gamma(mz) = \frac{\Gamma^{mz-1}}{(\Gamma\pi)^{\frac{m-1}{z}}} \prod_{k=0}^{m-1} \Gamma(z + \frac{k}{m})$

•  $n \rightarrow \infty, \Gamma(n+1) \approx \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$

به آخرین رابطه فرمول استرلینگ گویند. در شکل ۱.۱ نمودار تابع گاما رسم شده است.



شکل ۱.۱: نمودار تابع گاما

### ۲.۲.۱ تابع بتا

در بسیاری از موارد استفاده از تابعی به نام بتا به جای ترکیب خاصی از مقادیر تابع گاما مناسب تر است. تابع بتا معمولاً به صورت زیر تعریف می شود:

$$\beta(z, w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1} dt, \quad (\operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Re}(w) > 0) \quad (5.1)$$

برای به دست آوردن رابطه بین تعریف تابع گاما در (۱.۱) و تعریف تابع بتا در (۵.۱) از تبدیل لاپلاس کمک می گیریم و به رابطه (۶.۱) می رسمیم که اثبات آن در [۲۱] آورده شده است.

$$\beta(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} \quad (6.1)$$

بنابراین می توان نتیجه گرفت که  $\beta(z, w) = \beta(w, z)$ . به کمک تابع بتا می توان دو رابطه مهم برای تابع گاما به دست آورد که از [۲۱] برگرفته شده است. رابطه

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}, \quad (z \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (7.1)$$

که با قرار دادن  $z = \frac{1}{2}$  در آن به مقدار

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

دست می یابیم و رابطه

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} 2^{2z-1} \Gamma(2z), \quad (2z \neq 0, -1, -2, \dots)$$

که همان فرمول لژاندر است. در حالت خاص اگر قرار دهیم  $z = n + \frac{1}{2}$ ، آنگاه خواهیم داشت:

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(2n+1)}{2^{2n} \Gamma(n+1)} = \frac{\sqrt{\pi} (2n)!}{2^{2n} n!}$$

### ۳.۲.۱ تابع میتاگ لفلر

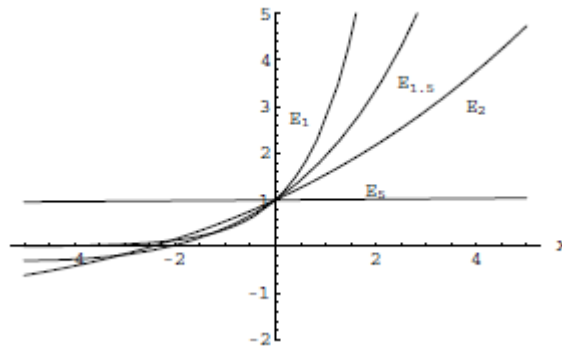
تابع میتاگ لفلر تابع مهمی است که در زمینه حساب کسری استفاده فراوانی دارد. در واقع این تابع تعمیمی از تابع نمایی است. همان طور که تابع نمایی نقش مهمی را در حل معادلات دیفرانسیل بازی می کند، تابع میتاگ لفلر نیز نقش مشابهی را در حل معادلات دیفرانسیل از مرتبه غیر صحیح بازی می کند. تعمیم یک پارامتری تابع نمایی را میتاگ لفلر گویند که به صورت زیر نمایش داده می شود:

$$E_\alpha(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad \alpha \geq 0. \quad (8.1)$$

در حالت خاص، هنگامی که  $\alpha = 1$  و  $\alpha = 2$  خواهیم داشت:

$$E_1(z) = e^z, \quad E_2(z) = \cosh(\sqrt{z}).$$

در شکل ۲.۱ نمودار تابع میتاگ لفلر برای  $\alpha = 1, 1/5, 2/5$  رسم شده است: تابع دو پارامتری از نوع میتاگ لفلر را، که در حساب کسری اهمیت ویژه‌ای دارد، اولین بار آگراوال



شکل ۲.۱: نمودار تابع میتاگ لفلر

<sup>۱۲</sup> به صورت زیر ارائه کرد:

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad (\alpha > 0, \beta > 0). \quad (9.1)$$

با توجه به تعریف دو پارامتری میتاگ لفلر (۹.۱)، روابط زیر حاصل می‌شود: [۴]

$$E_{\alpha, 1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} = E_{\alpha}(z),$$

$$E_{1, 1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k + 1)} = e^z,$$

$$E_{1, 2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k + 2)} = \frac{e^z - 1}{z},$$

$$E_{1, m}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k + m)} = \frac{1}{z^{m-1}} \left\{ e^z - \sum_{k=0}^{m-2} \frac{z^k}{k!} \right\},$$

$$E_{\frac{1}{2}, 1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\frac{k}{2} + 1)} = e^{z^2} \operatorname{erfc}(-z), \quad \operatorname{erfc}(-z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} e^{-t^2} dt.$$

$\sinh$  و  $\cosh$  نیز نمونه‌هایی خاص از تابع میتاگ لفلر دو پارامتری (۹.۱) می‌باشند:

$$E_{2, 1}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k + 1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{2k!} = \cosh(z),$$

<sup>۱۲</sup>R. P. Agrawal

$$E_{\nu, \nu}(z^\nu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{\nu k}}{\Gamma(\nu k + \nu)} = \frac{1}{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{\nu k + 1}}{(\nu k + 1)!} = \frac{\sinh(z)}{z}.$$

### ۳.۱ حساب دیفرانسیل و انتگرال کسری

هنگامی که در حساب دیفرانسیل و انتگرال معمولی مرتبه مشتق‌ها و انتگرال‌ها غیر صحیح (حقیقی و مختلط) باشند، حساب دیفرانسیل معمولی تبدیل به حساب دیفرانسیل کسری می‌شود. تعاریف زیادی در خصوص مفهوم انتگرال و مشتق از مرتبه غیر صحیح وجود دارد، از جمله این تعاریف‌ها می‌توان به گرانوالد-لتنیکوف، ریمان-لیوویل، کاپوتو، نی‌شی موتو، هادامار و ... اشاره کرد. در این بخش تعاریف ریمان-لیوویل، کاپوتو و گرانوالد-لتنیکوف را ارائه می‌دهیم.

### ۴.۱ مشتق و انتگرال کسری ریمان-لیوویل

#### ۱.۴.۱ انتگرال کسری ریمان-لیوویل

عملگر انتگرال ریمان-لیوویل تعمیمی از دستور انتگرال کوشی است. در واقع در دستور انتگرال کوشی مقادیر  $n$  را که متعلق به اعداد صحیح می‌باشند به مقادیر غیر صحیح تعمیم می‌دهیم. در این صورت سمت راست دستور انتگرال کوشی در واقع تعریف انتگرال ریمان لیوویل می‌باشد. دستور انتگرال کوشی چنین است:

$$\int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \dots \int_a^{x_{n-1}} f(t) dt = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-n}} dt. \quad (10.1)$$

عملگر انتگرال کسری ریمان-لیوویل را با  $I_a^\alpha f(x)$  نشان می‌دهیم

$${}_a I_x^\alpha f(x) = \frac{1}{(\alpha-1)!} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt.$$

اگر  $f \in [a, b]$  و  $\alpha > 0$ ، آنگاه:

$$I_{a^+}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, \quad x > a, \quad (11.1)$$

$$I_{b^-}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, \quad x < b. \quad (12.1)$$

به ترتیب، انتگرال کسری چپ و انتگرال کسری راست ریمان-لیوویل نامیده می‌شود.

### ۲.۴.۱ خواص انتگرال کسری ریمان-لیوویل

برخی از خواص انتگرال کسری ریمان-لیوویل به شرح زیر می‌باشد:

۱.  ${}_a I_x^\alpha f(x)$  به ازای هر  $x \in [a, b]$  موجود است.

۲. فرض می‌کنیم  $f \in C[a, b]$  و  $\alpha, \beta \geq 0$  و  $\gamma \geq -1$  آنگاه:

۱.  ${}_a I_x^\circ f(x) = f(x)$

۲.  ${}_a I_x^\alpha {}_a I_x^\beta f(x) = I_a^{\alpha+\beta} f(x)$

۳.  ${}_a I_x^\alpha {}_a I_x^\beta f(x) = I_a^\beta I_a^\alpha f(x)$

۴.  ${}_a I_x^\alpha x^\gamma = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(x+\gamma+1)} x^{\gamma+\alpha}$

که در آن  $C[a, b]$  فضای همه توابع پیوسته بر  $[a, b]$  باشد.

برهان. ۱. از انتگرال‌گیری جز به جز استفاده می‌کنیم

$${}_a I_x^\alpha f(x) = \frac{(x-a)^\alpha f(a)}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^x (x-t)^\alpha f'(t) dt$$

با قراردادن  $\alpha = 0$  داریم:

$${}_a I_x^\circ f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt = f(a) + f(x) - f(a) = f(x)$$

□

برهان. ۲.

$$\begin{aligned} {}_a I_x^\alpha ({}_a I_x^\beta f(x)) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} I_t^\beta f(t) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \int_a^t (\tau-\varepsilon)^{\beta-1} f(\varepsilon) d\varepsilon d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)} \int_a^x f(\varepsilon) \int_\varepsilon^x (x-t)^{\alpha-1} (t-\varepsilon)^{\beta-1} d\tau d\varepsilon \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta+\alpha)} \int_a^x (x-\varepsilon)^{\beta+\alpha-1} f(\varepsilon) d\varepsilon = {}_a I_x^{\alpha+\beta} f(x) \end{aligned}$$

(برای محاسبه انتگرال از  $\varepsilon$  تا  $x$  از تغییر متغیر  $\tau = \varepsilon + \varsigma(x-\varepsilon)$  و سپس تعریف تابع بتا استفاده کردیم.)

□

برای اثبات ۳ کافی است در برهان ۲ جای  $\alpha$  و  $\beta$  را باهم عوض کنیم.



### ۳.۴.۱ مشتق کسری ریمان-لیوویل

یکی از تعاریف مشتق کسری، تعریف ریمان-لیوویل است. ابتدا مشتق ریمان-لیوویل و مشتق ریمان-لیوویل اصلاح شده را معرفی می‌کنیم و سپس به بیان خصوصیات آن می‌پردازیم. به منظور تعریف این مشتق ابتدا فرمول کوشی را معرفی می‌کنیم، در این قسمت عملگر  $D$  را برای مشتق از مرتبه هر عدد حقیقی به کار می‌بریم.

تعریف ۱.۴.۱. فرمول کوشی: انتگرال نامعین از مرتبه  $n$  به صورت زیر کوشی گفته می‌شود.

$${}_c D_x^{-n} f(x) = \int_c^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t) dt, \quad n \in \mathbb{N} \quad (13.1)$$

چون  $\Gamma(n) = (n-1)!$ ، بنابراین با جایگذاری تابع گاما در رابطه (۱۳.۱) داریم:

$${}_c D_x^{-n} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_c^x (x-t)^{n-1} f(t) dt, \quad n \in \mathbb{N}$$

حال اگر مرتبه انتگرال عددی غیرطبیعی باشد تعریف می‌کنیم:

$${}_c D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_c^x (x-t)^{-\alpha-1} f(t) dt, \quad \alpha \in \mathbb{R}^-$$

زمانی که  $\alpha > 0$  باشد می‌توان با استفاده از تعریف مشتق، مشتق کسری را تعریف کرد.

$${}_c D_x^\alpha f(x) = D^n [{}_c D_x^{\alpha-n} f(x)], \quad n = \min\{k \in \mathbb{N} \mid k > \alpha\}, \quad \alpha \in \mathbb{R}^+.$$

به این طریق می‌توان حالت کلی تعریف ریمان-لیوویل را به صورت زیر به دست آورد.

$${}_c D_x^\alpha f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_c^x (x-\xi)^{-\alpha-1} f(\xi) d\xi, & \alpha < 0 \\ D^n [{}_c D_x^{\alpha-n} f(x)] & n = \min\{k \in \mathbb{N} \mid k > \alpha\}, \quad \alpha > 0, \\ f(x), & \alpha = 0. \end{cases}$$

عملگر کسری  ${}_a D_x^\alpha$  را به صورت زیر نیز می‌توان نوشت:

$${}_a D_x^\alpha = \frac{d^n}{dx^n} {}_a I_x^{n-\alpha}, \quad (14.1)$$

همچنین

$${}_x D_b^\alpha = (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} {}_x I_b^{n-\alpha}. \quad (15.1)$$

تعدادی از مشتق‌های کسری ریمان-لیوویل برای برخی از توابع در جدول ۲.۱ ارائه شده است. ژوماری حالت اصلاح شده‌ای از مشتق ریمان-لیوویل از مرتبه  $\alpha$  را به صورت زیر معرفی کرد.

جدول ۲.۱: تعدادی از مشتق‌های کسری

$f(x)$	${}_0D_x^\alpha$	مشخصات
$C$	$\frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha}$	$\alpha, a \in \mathbb{R}$
$(x-a)^\beta$	$\frac{\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(1-\alpha+\beta)}(x-a)^{\beta-\alpha}$	$\alpha > 0, Re(\beta) > -1$

**تعریف ۲.۴.۱.** فرض کنید  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) \rightarrow x$  تابعی پیوسته و نه لزوماً مشتق‌پذیر باشد، آنگاه مشتق ریمان-لیوویل اصلاح شده ژوماری از مرتبه  $\alpha$  به صورت زیر است:

$$D_x^\alpha f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x (x-\xi)^{-\alpha-1} [f(\xi) - f(0)] d\xi, & \alpha < 0, \\ \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x (x-\xi)^{-\alpha} [f(\xi) - f(0)] d\xi, & 0 < \alpha < 1, \\ (f^{(n)}(x))^{(\alpha-n)}, & n \leq \alpha \leq n+1, n \geq 1. \end{cases}$$

برخی از خصوصیات مشتق ریمان-لیوویل اصلاح شده را به طور مختصر در زیر بیان می‌کنیم:

$$D_x^\alpha x^y = \frac{\Gamma(1+y)}{\Gamma(1+y-\alpha)} x^{y-\alpha} \quad y > 0 \quad (16.1)$$

$$D_x^\alpha (f(x)g(x)) = g(x)D_x^\alpha f(x) + f(x)D_x^\alpha g(x) \quad (17.1)$$

$$D_x^\alpha [f(g(x))] = f'_g[g(x)]D_x^\alpha g(x) = D_g^\alpha f[g(x)][g'(x)]^\alpha \quad (18.1)$$

که نتیجه مستقیم از تساوی  $d^\alpha x(t) = \Gamma(1+\alpha)dx(t)$  است. اکنون در ادامه این بخش چگونگی به دست آوردن مشتق کسری تابع  $f(x) = x^y$  از مرتبه  $\alpha$  را بیان می‌کنیم. با توجه به تعریف مشتق کسری ریمان-لیوویل اصلاح شده داریم:

$$D_x^\alpha x^y = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x (x-\epsilon)^{-\alpha} ((\epsilon^y) - (0^y)) d\epsilon, \quad 0 < \alpha < 1,$$

یا

$$D_x^\alpha x^y = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x (x-\epsilon)^{-\alpha} (\epsilon^y) d\epsilon$$

با تغییر متغیر  $\epsilon = x\xi$  داریم  $d\epsilon = x d\xi$ ، لذا نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} D_x^\alpha x^y &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^1 (x-x\xi)^{-\alpha} (x\xi)^y x d\xi \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} x^{-\alpha+y+1} \int_0^1 (1-\xi)^{-\alpha} (\xi)^y d\xi \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} (-\alpha+y+1) x^{-\alpha+y} \int_0^1 (1-\xi)^{-\alpha} (\xi)^y d\xi. \end{aligned}$$

با توجه به تعریف تابع بتا در روابط (۵.۱) و (۶.۱) داریم:

$$D_x^\alpha x^y = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\Gamma(1-\alpha)(y+1)}{\Gamma(y-\alpha+1)} (y-\alpha+1).$$

با توجه به خاصیت تابع گاما در رابطه فوق خواهیم داشت:

$$D_x^\alpha x^y = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\Gamma(1-\alpha)(y+1)}{\Gamma(y-\alpha+1)(y-\alpha+1)} (y-\alpha+1) x^{y-\alpha}.$$

پس از ساده کردن فرمول (۱۶.۱) حاصل می‌شود.

#### ۴.۴.۱ ترکیب با مشتق مرتبه صحیح

مشتق مرتبه صحیح  $n$ ام مشتق کسری مرتبه  $\alpha$  به صورت زیر است:

$$\frac{d^n}{dx^n} ({}_a D_x^\alpha f(x)) = {}_a D_x^{\alpha+n} f(x). \quad (19.1)$$

برای مشتق کسری مرتبه  $\alpha$  مشتق مرتبه صحیح  $n$  داریم:

$${}_a D_x^\alpha \left( \frac{d^n f(x)}{dx^n} \right) = {}_a D_x^{\alpha+n} f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^{k-\alpha-n}}{\Gamma(k+1-\alpha-n)}. \quad (20.1)$$

اگر  $f(x)$  در شرط

$$f^{(k)}(a) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1, \quad (21.1)$$

صدق کند. عملگر مشتق کسری ریمان-لیوویل  ${}_a D_x^\alpha$  با  $\frac{d^n}{dx^n}$  جابجا می‌شود، یعنی:

$$\frac{d^n}{dx^n} ({}_a D_x^\alpha f(x)) = {}_a D_x^\alpha \left( \frac{d^n f(x)}{dx^n} \right) = {}_a D_x^{\alpha+n} f(x). \quad (22.1)$$

### ۵.۴.۱ ترکیب با مشتق مرتبه کسری

به بررسی ترکیب دو مشتق کسری ریمان-لیوویل  ${}_a D_x^\alpha$ ,  $(m-1 \leq \alpha < m)$  و  ${}_a D_x^\beta$ ,  $(n-1 \leq \beta < n)$  می‌پردازیم.

$${}_a D_x^\alpha ({}_a D_x^\beta f(x)) = {}_a D_x^{\alpha+\beta} f(x) - \sum_{j=1}^n [D_a^{\beta-j} f(x)]_{x=a} \frac{(x-a)^{-\alpha-j}}{\Gamma(1-\alpha-j)} \quad (23.1)$$

باجابجا کردن  $\alpha$  و  $\beta$  داریم:

$${}_a D_x^\beta ({}_a D_x^\alpha f(x)) = {}_a D_x^{\alpha+\beta} f(x) - \sum_{j=1}^m [D_a^{\alpha-j} f(x)]_{x=a} \frac{(x-a)^{-\beta-j}}{\Gamma(1-\beta-j)} \quad (24.1)$$

مقایسه روابط (۲۳.۱) و (۲۴.۱) بیان می‌کند که عملگرهای مشتق کسری ریمان-لیوویل خاصیت جابجایی ندارند.

اگر شرط های زیر برقرار باشند:

$$[{}_a D_x^{\alpha-j} f(x)]_{x=a} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

$$[{}_a D_x^{\alpha-j} f(x)]_{x=a} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

داریم:

$${}_a D_x^\alpha ({}_a D_x^\beta f(x)) = {}_a D_x^\beta ({}_a D_x^\alpha f(x)) = {}_a D_x^{\alpha+\beta} f(x). \quad (25.1)$$

**خاصیت ۱:** اولین و مهم‌ترین خاصیت این است که برای  $\alpha > 0$  و  $x > a$  داریم:

$${}_a D_x^\alpha ({}_a I_x^\alpha f(x)) = f(x) \quad (26.1)$$

برهان. برای اثبات این خاصیت ابتدا مورد صحیح  $\alpha = n \geq 1$  را بررسی می‌کنیم

$$\begin{aligned} {}_a D_x^n ({}_a I_x^n f(x)) &= \frac{1}{\Gamma(n)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau \\ &= \frac{d}{dx} \int_a^x f(\tau) d\tau = f(x) \end{aligned} \quad (27.1)$$

اما اگر  $n-1 \leq \alpha < n$  باشد، آنگاه با استفاده از خاصیت انتگرال کسری ریمان-لیوویل رابطه

$${}_a I_x^n f(x) = {}_a I_x^{n-\alpha} ({}_a I_x^\alpha f(x))$$

را می‌توان نوشت. لذا با توجه به (۱۴.۱) داریم:

$$\begin{aligned} {}_a D_x^\alpha ({}_a I_x^\alpha f(x)) &= \frac{d^n}{dx^n} \{ {}_a I_x^{n-\alpha} ({}_a I_x^\alpha f(x)) \} \\ &= \frac{d^n}{dx^n} \{ {}_a I_x^n f(x) \} = f(x). \end{aligned}$$

حالت کلی تر (۲۶.۱) به شکل زیر است:

$${}_a D_x^\alpha ({}_a I_x^\beta) = \begin{cases} {}_a I_x^{\beta-\alpha}, & 0 \leq \alpha \leq \beta \\ {}_a D_x^{\alpha+\beta}, & 0 \leq \beta \leq \alpha \end{cases}$$

□

## خاصیت ۲: مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری مرتبه کسری مانند مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری از مرتبه

صحیح، خاصیت جابه‌جایی ندارند.

اگر مشتق کسری از تابع  $f(x)$  ( $n-1 \leq \alpha < n$ )، انتگرال پذیر باشد، داریم:

$${}_a I_x^\alpha ({}_a D_x^\alpha f(x)) = f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} [{}_a D_x^{\alpha-j} f(x)]_{x=a} \frac{(x-a)^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha-j+1)}. \quad (28.1)$$

در حالت خاص اگر  $[{}_a D_x^{\alpha-j} f(x)]_{x=a} = 0$  برای  $j = 0, 1, \dots, n-1$  داریم:

$${}_a I_x^\alpha ({}_a D_x^\alpha f(x)) = f(x)$$

خاصیت (۲۸.۱) نیز مورد خاصی از خاصیت عمومی است:

$${}_a I_x^\alpha ({}_a D_x^\beta f(x)) = {}_a I_x^{\alpha-\beta} f(x) - \sum_{j=1}^n [{}_a D_x^{\beta-j} f(x)]_{x=a} \frac{(x-a)^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha-j+1)}. \quad (29.1)$$

$$\beta \leq \alpha, \quad 0 \leq n-1 \leq \beta < n \text{ که}$$

اگر  $\alpha \leq \beta$ ، خاصیت بالا به صورت زیر است:

$${}_a I_x^\alpha ({}_a D_x^\beta f(x)) = {}_a D_x^{\beta-\alpha} f(x) - \sum_{j=1}^n [{}_a D_x^{\beta-j} f(x)]_{x=a} \frac{(x-a)^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha-j+1)} \quad (30.1)$$

تعدادی از انتگرال‌های کسری ریمان-لیوویل برخی از توابع در جدول ۳.۱ ارائه شده است.

جدول ۳.۱: تعدادی از انتگرال‌های کسری

$f(x)$	${}_a I_x^\alpha$	مشخصات
$C$	$\frac{C}{\Gamma(1+\alpha)}(x-a)^\alpha$	$\alpha, a \in \mathbb{R}$
$(x-a)^\beta$	$\frac{\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(1+\alpha+\beta)}(x-a)^{\beta+\alpha}$	$\alpha > 0, Re(\beta) > -1$
$e^{bx}$	$b^{-\alpha} e^{bx}$	$a = -\infty, \alpha > 0, Re(b) > 0$

## ۵.۱ مشتق کسری کاپوتو

با اندکی دقت در تعریف مشتق کسری ریمان-لیوویل می‌توان به وجود پاره‌ای کاستی در ساختار این مشتق پی برد. ازین رو کاپوتو فیزیک دان برجسته ایتالیایی با ارائه تعریف زیر توانست بهبود قابل ملاحظه‌ای در خصوص تعریف ریمان-لیوویل پدید آورد. خاطر نشان می‌سازیم شاید بهترین مزیت تعریف کاپوتو نسبت به تعریف ریمان-لیوویل آن است که این تعریف اجازه می‌دهد شرایط کرانه‌ای و اولیه مسئله در فرمول‌بندی مسائل لحاظ گردند.

فرض می‌کنیم  $f \in C^n[a, b]$  و  $n - 1 < \alpha < n$ ، مشتق کسری کاپوتو با عبارات زیر تعریف می‌شود [۱۱].

$${}_a D_{*x}^\alpha = {}_a I_x^{n-\alpha} f^{(n)}(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt, \quad n-1 < \alpha < n \quad (31.1)$$

و دارای خواص زیر است:

$${}_a D_{*x}^\alpha C = 0 \quad (i) \text{ ثابت } C$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow n} {}_a D_{*x}^\alpha f(x) = f^{(n)}(x) \quad (ii)$$

برهان. (i) چون  $C$  عدد ثابت است و مشتق مرتبه  $n$  یک عدد ثابت صفر است، لذا:

$${}_a D_{*x}^\alpha C = {}_a I_x^{n-\alpha} C^{(n)} = {}_a I_x^{n-\alpha} 0 = 0$$

□

برهان. (ii)

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow n} {}_a D_{*x}^\alpha f(x) &= \lim_{\alpha \rightarrow n} \left( \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha} f^{(n+1)}(t) dt \right) \\ &= f^{(n)}(a) + \int_a^x f^{(n+1)}(t) dt = f^{(n)}(x) \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

□

پس برای  $n \rightarrow \infty$  مشتق کاپوتو برابر با مشتق عادی مرتبه  $n$  می‌باشد.

## ۱.۵.۱ روابط بین مشتق کسری کاپوتو و مشتق ریمان-لیوویل

در ادامه روابط بین این دو مشتق را بیان می‌کنیم.

قضیه ۱.۵.۱. فرض می‌کنیم  $f \in C^n[a, b]$  و  $-1 < \alpha \leq n$ ، آنگاه:

$${}_a D_x^\alpha f(x) = {}_a D_{*x}^\alpha f(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a^+)}{\Gamma(1+k-\alpha)} (x-a)^{(k-\alpha)}. \quad (32.1)$$

برهان.

$$\begin{aligned}
{}_a D_x^\alpha f(x) &= \frac{d^n}{dx^n} [{}_a I_x^{n-\alpha} f(x)] \\
&= \frac{d^n}{dx^n} \left[ {}_a I_x^{n-\alpha} \left( {}_a I_x^{n-\alpha} f^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a^+)}{k!} (x-a)^k \right) \right] \\
&= {}_a I_x^{n-\alpha} f^{(n)}(x) + D_{x a}^n I_x^{n-\alpha} \left( \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a^+)}{k!} (x-a)^k \right) \\
&= {}_a D_{*x}^\alpha f(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a^+)}{\Gamma(1+k-\alpha)} (x-a)^{(k-\alpha)}
\end{aligned}$$

□

از قضیه بالا نتایج زیر به دست می آید.

نتیجه ۲.۵.۱. اگر  $\alpha = n \in N$ ، آنگاه  $\frac{d^n}{dx^n} f(x) = {}_a D_{*x}^\alpha f(x) = {}_a D_x^\alpha f(x)$ .

نتیجه ۳.۵.۱. اگر  $f^{(k)}(a) = 0$  برای  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ، آنگاه  ${}_a D_x^\alpha f(x) = {}_a D_{*x}^\alpha f(x)$ .

نتیجه ۴.۵.۱. اگر  $n-1 < \alpha \leq n$ ، آنگاه  ${}_a D_x^\alpha f(x) = {}_a D_{*x}^\alpha f(x) + \frac{f(a)}{\Gamma(1-\alpha)} (x-a)^{-\alpha}$ .

خاصیتی که در زیر تحت عنوان قضیه بیان می شود کاربرد زیادی دارد.

قضیه ۵.۵.۱. فرض می کنیم  $f \in C^n[a, b]$  و  $n-1 < \alpha \leq n$ ، داریم:

$${}_a I_x^\alpha {}_a D_{*x}^\alpha f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a^+)}{k!} (x-a)^k, \quad t \geq a \quad (33.1)$$

$${}_a D_{*x a}^\alpha I_x^\alpha f(x) = f(x) \quad (34.1)$$

## ۲.۵.۱ مقایسه تعریف کاپوتو و تعریف ریمان-لیوویل

تعریف ریمان-لیوویل به شرایط اولیه ای منجر می شود که شامل مقادیر مشتق های کسری ریمان-لیوویل است و تفسیر فیزیکی معمولی برای چنین شرایطی وجود ندارد، اما در تعریف کاپوتو شرایط اولیه معادلات دیفرانسیل کسری به همان شکلی که برای معادلات دیفرانسیل هستند، در می آیند.

اگر تابع مشتق پذیر نباشد (مشتق اول نداشته باشد) مشتق کاپوتو تعریف نمی شود. اما برای ریمان-لیوویل تابعی وجود دارد که مشتق اول ندارد ولی مشتق ریمان-لیوویل آن موجود است.

مشتق کاپوتو یک تابع ثابت صفر است، اما مشتق ریمان-لیوویل یک تابع ثابت، صفر نیست. تفاوت دیگری نیز بین تعاریف ریمان-لیوویل و کاپوتو وجود دارد. برای مشتق کاپوتو داریم:

$${}_a D_{*x}^\alpha ({}_a D_{*x}^m f(x)) = {}_a D_{*x}^{\alpha+m} f(x), \quad m = 0, 1, 2, \dots; n-1 < \alpha < n \quad (35.1)$$

در حالی که برای مشتق ریمان-لیوویل داریم:

$${}_a D_m^\alpha ({}_a D_x^\alpha f(x)) = {}_a D_x^{\alpha+m} f(x), \quad m = 0, 1, 2, \dots; n-1 < \alpha < n \quad (36.1)$$

(35.1) تعویض جای عملگرهای مشتق‌گیری در دستوره‌های (35.1) و (36.1) تحت شرایط متفاوتی ممکن است:

$${}_a D_{*x}^\alpha ({}_a D_{*x}^m f(x)) = {}_a D_{*x}^m ({}_a D_{*x}^\alpha f(x)) = {}_a D_{*x}^{\alpha+m} f(x) \quad (37.1)$$

$$f^{(k)}(0) = 0, \quad m = 0, 1, \dots; n-1 < \alpha < n, \quad k = n, n+1, \dots, m$$

و

$${}_a D_x^m ({}_a D_x^\alpha f(x)) = {}_a D_x^\alpha ({}_a D_x^m f(x)) = {}_a D_x^{\alpha+m} f(x) \quad (38.1)$$

$$f^{(k)}(0) = 0, \quad m = 0, 1, \dots; n-1 < \alpha < n, \quad k = 0, 1, 2, \dots, m$$

برخلاف تعریف ریمان-لیوویل، در مورد مشتق کاپوتو، محدودیتی روی مقادیر  $f^{(k)}(0)$  برای  $k = 0, 1, \dots, n-1$  وجود ندارد.

## ۶.۱ مشتق کسری گرانوالد-لتنیکوف

مشتق کسری گرانوالد-لتنیکوف به صورت زیر بیان می‌شود:

$${}_a^{GL} D_x^\alpha f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\alpha} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{x-a}{h} \rfloor} (-1)^i \binom{\alpha}{i} f(x - ih) \quad (39.1)$$

که [۰] جز صحیح می‌باشد. حد بالایی حاصل جمع، در رابطه فوق باید به بینهایت میل کند و عبارت  $\frac{x-a}{h}$  این خصوصیت را دارد (  $a$  و  $t$  حد بالا و پایین مشتق‌گیری هستند) فرمول مشتق گرانوالد-لتنیکوف را می‌توان برای انتگرال‌گیری کسری مورد استفاده قرار داد. ساده‌ترین تغییر برای استفاده از این فرمول در انتگرال‌گیری، استفاده از آن برای  $\alpha < 0$  می‌باشد. در این حالت باید عبارت  $\binom{\alpha}{i}$  را با استفاده از تابع گاما تعریف کنیم.



بر اساس کاربردهای گوناگون و شرایط مسأله هر کدام از تعاریف فوق می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد. به عنوان مثال تعریف گرانوالد-لتنیکوف بیشتر برای روش‌های عددی مناسب است و تعریف کاپوتو مبتنی بر تلفیق تبدیل لاپلاس می‌باشد. تبدیل لاپلاس این مشتق کسری بر حسب مشتقات صحیح تابع مورد نظر قابل بیان است، لذا مسائل فیزیکی که با مشتقات کسری توصیف می‌شوند را با استفاده از این تعریف بهتر می‌توان تجزیه و تحلیل نمود، از این رو در کاربردهای مهندسی و فیزیکی ترجیح داده می‌شود. تبدیل لاپلاس مشتق کسری کاپوتو را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

$$\ell\{ {}_c D f(x)^\alpha \} = s^\alpha \ell\{ f(x) \} - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0^+) s^{\alpha-1-k} \quad (40.1)$$

که  $m - 1 < \alpha \leq m$  و  $s$  پارامتر تبدیل لاپلاس است.

## خاصیت مشتق‌های کسری

### خطی بودن

عملگر مشتق کسری عملگری خطی است. یعنی برای هر دو تابع دلخواه  $f(x)$  و  $g(x)$  و هر اسکالر  $\mu$  و  $\gamma$  داریم:

$$D^\alpha(\lambda f(x) + \mu g(x)) = \lambda D^\alpha f(x) + \mu D^\alpha g(x) \quad (41.1)$$

که می‌تواند تعریفی از مشتق‌گیری از هر نوعی باشد. خطی بودن مشتق‌گیری کسری مستقیماً از تعریف آن نتیجه می‌شود. برای نمونه، برای مشتق‌گیری کسری ریمان-لیوویل از مرتبه  $\alpha$ ،  $k - 1 \leq \alpha < k$  داریم:

$$\begin{aligned} {}_a D_x^\alpha(\lambda f(x) + \mu g(x)) &= \frac{1}{\Gamma(k-\alpha)} \frac{d^k}{dx^k} \int_a^x (x-t)^{(k-\alpha-1)} (\lambda f(t) + \mu g(t)) dt \\ &= \frac{\lambda}{\Gamma(k-\alpha)} \frac{d^k}{dx^k} \int_a^x (x-t)^{(k-\alpha-1)} f(t) dt \\ &\quad + \frac{\mu}{\Gamma(k-\alpha)} \frac{d^k}{dx^k} \int_a^x (x-t)^{(k-\alpha-1)} g(t) dt \\ &= \lambda {}_a D_x^\alpha f(x) + \mu {}_a D_x^\alpha g(x) \end{aligned}$$

### مرتبه قطب

اگر  $(z - z_0)^{-m}$  بزرگترین توان منفی در این بسط باشد، می‌گویند قطب از مرتبه  $m$  است. به قطب‌های مرتبه اول قطب ساده نیز گفته می‌شود. مجموع همه جملات شامل توان منفی عبارت زیر را قسمت

اصلی  $f(z)$  در  $z = z_0$  می‌گویند.

$$\frac{b_1}{(z - z_0)} + \dots + \frac{b_m}{(z - z_0)^m}$$

به عنوان مثال تابع  $f(z) = \frac{1}{z(z-2)^5} + \frac{3}{(z-2)^2}$  دارای قطب ساده در  $z = 0$  و قطب مرتبه پنجم در  $z = 2$  است.

# فصل ۲

## تبدیل موج

### ۱.۲ مقدمه

در این فصل مفاهیم پایه‌ای از جمله امواج سیار، سیگنال، موج و مفاهیم دیگری که در این پایان نامه به کار رفته گردآوری شده است.

در هر پدیده و فرآیندی در طبیعت پارامترهای مختلفی وجود دارد که مطابق قوانین حاکم بر آن پدیده با هم ارتباط دارند. بیان این ارتباط به زبان ریاضی یک معادله تابعی<sup>۱</sup> است و معادله حاصل از پدیده‌ای که در آن آهنگ تغییرات یک تابع نسبت به یک یا چند متغیر مستقل بررسی شود، معادله دیفرانسیل نامیده می‌شود. به بیان ساده‌تر اگر در معادله‌ای حداقل یکی از مشتقات یا دیفرانسیل تابع مجهول وجود داشته باشد آن معادله را معادله دیفرانسیل می‌نامیم.

### ۲.۲ معادله دیفرانسیل جزئی

یک معادله دیفرانسیل جزئی  $PDE$ <sup>۲</sup>، معادله‌ای است که شامل تابعی مجهول از دو متغیر یا بیشتر و مشتقات جزئی آن نسبت به این متغیرهاست. معادلات دیفرانسیل جزئی در علوم مهندسی و علوم پایه کاربردهای مهمی دارند. این معادلات در مدل ریاضی پدیده‌های طبیعی ظاهر می‌شوند. بیشتر فرآیندهای فیزیکی با معادله‌هایی توصیف می‌شوند که به بیش از یک متغیر مستقل بستگی دارند، مانند جریان گرما و پدیده‌های انتشار موج که توسط معادلات دیفرانسیل جزئی شرح داده می‌شود. معادلات

$$u_t = k(u_{xx} + u_{yy})$$

$$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz})$$

مثال‌هایی از معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی می‌باشند که به ترتیب جریان گرما در فضای دو بعدی و انتشار موج در فضای سه بعدی را توصیف می‌کنند.

<sup>۱</sup>Functional equation

<sup>۲</sup>Partial Differential Equation

**تعریف ۱.۲.۲.** فرض کنید  $n, k = 1, 2, \dots, n, x_k$  متغیر مستقل باشند و  $u = u(x_1, \dots, x_n)$  در این صورت یک معادله دیفرانسیل جزئی در حالت کلی به صورت زیر است:

$$F(x_1, \dots, x_n, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}, u_{x_1 x_1}, \dots, u_{x_n x_n}, \dots) = 0 \quad (1.2)$$

## ۱.۲.۲ جواب‌های معادلات دیفرانسیل جزئی

منظور از یک جواب معادله دیفرانسیل جزئی، تابعی مثل  $u$  است به طوری که در معادله داده شده و همچنین در شرایط داده شده آن صدق می‌کند. به عبارت دیگر تابع  $u$  جواب معادله است هرگاه پس از جایگذاری آن در معادله صدق کنند.

دسته‌بندی مختلفی برای جواب‌های معادلات دیفرانسیل وجود دارد که از آن جمله: جواب بدیهی، جواب خصوصی، جواب عمومی، جواب کامل و جواب غیرعادی را می‌توان نام برد.

## ۲.۲.۲ جواب‌های تحلیلی و عددی معادلات دیفرانسیل جزئی

جواب‌های تحلیلی جواب‌هایی هستند که در آنها تابع مجهول به صورت عبارت ریاضی برحسب متغیرهای مستقل و پارامترهای دستگاه که معمولاً برحسب یک سری نامتناهی یا انتگرال هستند. جواب تحلیلی دارای این برتری است که برای پیدا کردن جواب در نقطه مشخصی مانند  $(x, y)$ ، با قرار دادن این نقطه در فرمول جواب تحلیلی، می‌توان جواب را با هر درجه‌ای از دقت به دست آورد. در حقیقت جواب تحلیلی، جواب را در هر نقطه مطلوب بدون انجام اتمام فرآیند یافتن جواب در سایر نقاط، پیدا می‌کند. جواب عددی، جوابی است که به وسیله تعویض معادله با یک معادله آسان‌تر به دست می‌آید. به عنوان مثال روش تفاضلات متناهی، معادله اصلی را با تفاضلات متناهی عوض می‌کنند و جواب معادله تغییر یافته، جواب معادله اصلی را تقریب می‌زند.

## ۳.۲ تعاریف

### ۱.۳.۲ سیگنال

هر کمیت قابل اندازه‌گیری یا خصوصیتی از محیط که مکان یا سرعت آشوب و برهم ریختگی در محیط را نشان دهد، سیگنال<sup>۳</sup> نامیده می‌شود. [۳۰]

<sup>۳</sup>signal

## ۲.۳.۲ موج

هر سیگنال قابل تشخیص که از مکانی به مکان دیگر با سرعت تکثیر قابل شناختی حرکت کند موج<sup>۴</sup> نامیده می‌شود. ساده‌ترین معادله انتشار موج به شکل زیر است:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx},$$

که در آن  $u(x, t)$  دامنه موج و  $c$  سرعت موج را نشان می‌دهد. این معادله دارای جواب کلی به صورت زیر است:

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct),$$

که  $f$  و  $g$  توابع دلخواه و به ترتیب بیانگر انتشار موج به چپ و راست می‌باشند.

## ۳.۳.۲ امواج سیار

امواجی که به صورت  $u(x, t) = f(x - ct)$  نمایش داده می‌شوند امواج سیار<sup>۵</sup> نامیده می‌شوند که از طریق مطالعه معادلات دیفرانسیل غیرخطی به دست آمده‌اند. چنین تابعی آشفتگی را نشان می‌دهد که با سرعت  $c$  حرکت می‌کند به طوری که اگر  $c < 0$  در جهت منفی محور  $x$  ها و اگر  $c > 0$  در جهت مثبت محور  $x$  ها در حرکت می‌باشد. [۳۰]

## ۴.۳.۲ جواب موج سیار

معادلاتی که از پدیده‌های موج مدل‌سازی شده‌اند نیاز به مطالعه جواب‌های موج سیار دارند. جواب موج سیار جوابی از شکل همواره در حال حرکت با یک سرعت ثابت است. جواب‌های موج سیار معمولاً با کاهش دادن معادلات تکامل<sup>۶</sup> غیرخطی به معادلات دیفرانسیل معمولی<sup>۷</sup> متناظر به دست می‌آیند. در واقع معادله دیفرانسیل جزئی با به کارگیری  $u(x, t) = f(\xi)$  که  $\xi = x - ct$  به معادله دیفرانسیل معمولی بر حسب  $\xi$  تبدیل شده و سپس جواب این معادله از طریق روش‌های مستقیم جبری حاصل می‌گردد. [۳۰]

تعدادی از انواع جواب‌های موج سیار که مورد توجه خاص در نظریه موج انفرادی که به سرعت در بسیاری از زمینه‌های علمی از امواج آب در آب کم عمق در فیزیک پلاسما وجود دارند عبارتند از:

تعریف ۱.۳.۲. امواج انفرادی<sup>۸</sup> و سولیتون‌ها<sup>۹</sup>: امواج انفرادی امواج سیار موضعی با سرعت‌های ثابت هستند و سولیتون‌ها انواع مخصوص از امواج انفرادی می‌باشند. جواب سولیتونی جواب موضعی است با این خاصیت که  $\xi \rightarrow \pm\infty$  هرگاه  $f(\xi), f'(\xi), f''(\xi), \dots$ .

<sup>۴</sup>wave

<sup>۵</sup>travelling wave

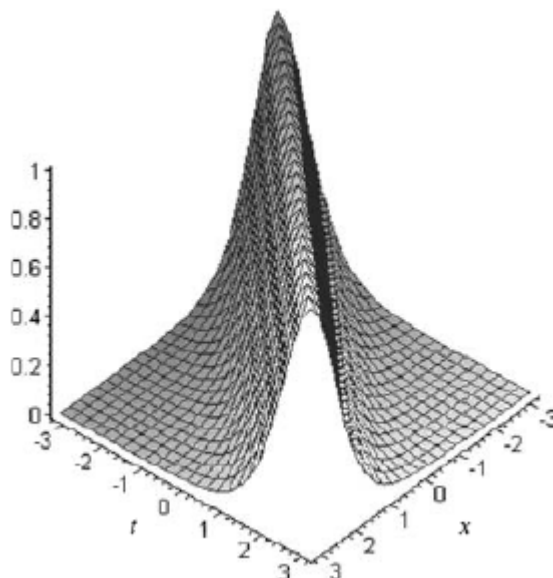
<sup>۶</sup>Evolution Equations

<sup>۷</sup>Ordinary Differential Equations

<sup>۸</sup>Solitary Waves

<sup>۹</sup>Solitons

سولیتون‌ها دارای ویژگی سولیتونی قابل توجهی هستند که آن‌ها هویت خود را در تعامل با سولیتون‌های دیگر حفظ می‌کنند. معادله  $KdV$ <sup>۱۰</sup> یک مدل پیشگام برای جواب‌های موج انفرادی  $sech^2$  بل شکل<sup>۱۱</sup> تحلیلی است. شکل ۱.۰۲ نمودار یک جواب سولیتونی  $sech^2$  بل شکل را نشان می‌دهد.



شکل ۱.۰۲: نمودار جواب سولیتونی  $sech^2(x-t)$ ,  $-\pi \leq x, t \leq \pi$

تعریف ۲.۳.۲. جواب‌های متناوب: جواب‌های متناوب، جواب‌های موج سیاری هستند که به‌طور متناوب تکرار می‌شوند، مانند جواب  $\cos(x-t)$ . معادله موج استاندارد  $u_{tt} = u_{xx}$  دارای جواب متناوب  $u(x,t) = \cos(x-t)$  می‌باشد که نمودار این جواب برای  $-\pi \leq x, t \leq \pi$  به‌صورت شکل ۲.۲ است.

تعریف ۳.۳.۲. امواج تابی<sup>۱۲</sup>: امواج تابی امواج سیاری هستند که از یک حالت مجانبی به حالت دیگر افزایش یا کاهش می‌یابند. جواب تابی در نهایت به صفر میل می‌کند. معادله برگرز پراکندگی استاندارد<sup>۱۳</sup>  $u_t + uu_x = \nu u_{xx}$ ، که در آن  $\nu$  ضریب چسبندگی است، یک معادله مشهور غیرخطی که دارای جواب‌های تابی است، می‌باشد.

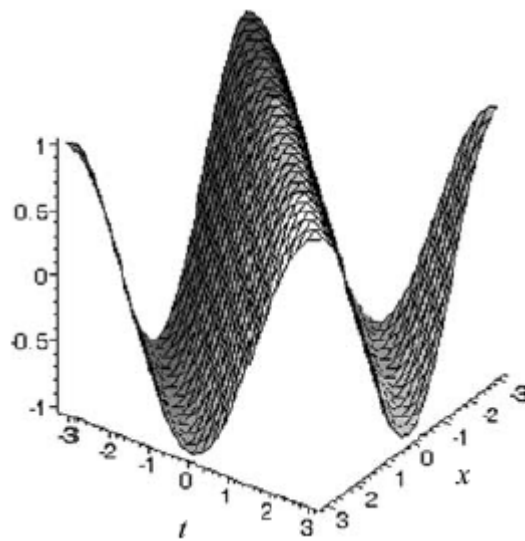
در شکل ۳.۲، جواب  $u(x,t) = 1 - \tanh(x-t)$ ،  $-1 \leq x, t \leq 1$  یک جواب تابی برای معادله برگرز فوق به ازای  $\nu = \frac{1}{4}$  را نشان می‌دهد. همچنین شکل ۴.۲، جواب تابی و سولیتونی را نشان می‌دهد.

<sup>۱۰</sup>Korteweg-de Vries

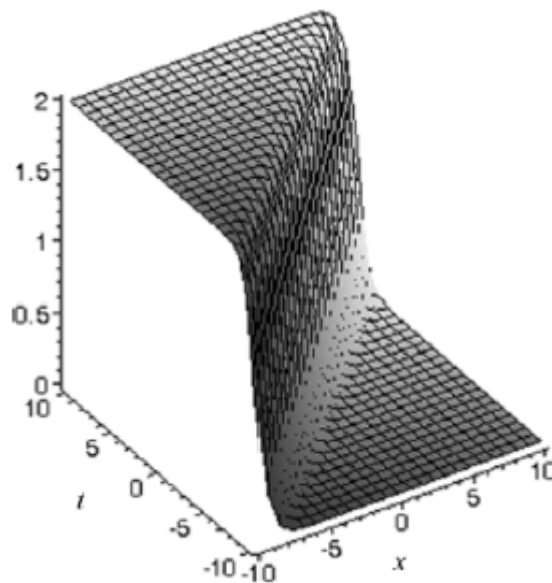
<sup>۱۱</sup>Bell-shaped

<sup>۱۲</sup>Kink Waves

<sup>۱۳</sup>Standard dissipative Burgers equation



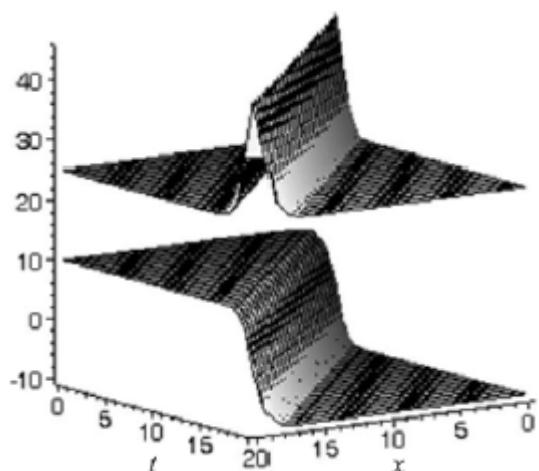
شکل ۲.۲: نمودار جواب متناوب  $u(x, t) = \cos(x - t)$ ,  $-\pi \leq x, t \leq \pi$



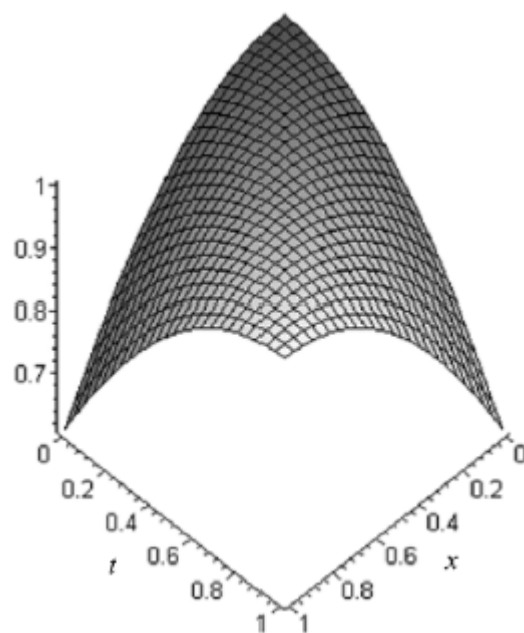
شکل ۳.۲: نمودار جواب تابی  $u(x, t) = 1 - \tanh(x - t)$ ,  $-10 \leq x, t \leq 10$

تعریف ۴.۳.۲. کامپکتون‌ها<sup>۱۴</sup>: کامپکتون‌ها، سولیتون‌هایی با طول موج متناهی هستند به این معنی که کامپکتون‌ها امواجی با پایه فشرده یا سولیتون‌هایی، آزاد از بخش نمایی هستند. جواب کامپکتونی بر خلاف جواب سولیتونی وقتی  $\xi \rightarrow \infty$  لزومی ندارد که  $f(\xi) \rightarrow 0$  معادله  $u_t + (u^n)_{xx} + (u^n)_{xxx} = 0$ ، دارای جواب کامپکتونی  $u(x, t) = \cos^{\frac{1}{n}}(x - t)$  برای  $1 < n$  و  $c = 1$  و  $0 \leq x, t \leq 1$  است که نمودار آن در شکل ۵.۲، نشان داده شده است و همچنین شکل ۶.۲، یک کامپکتون (سمت چپ) و یک سولیتون (سمت راست) را نشان می‌دهد.

<sup>۱۴</sup>Compacton

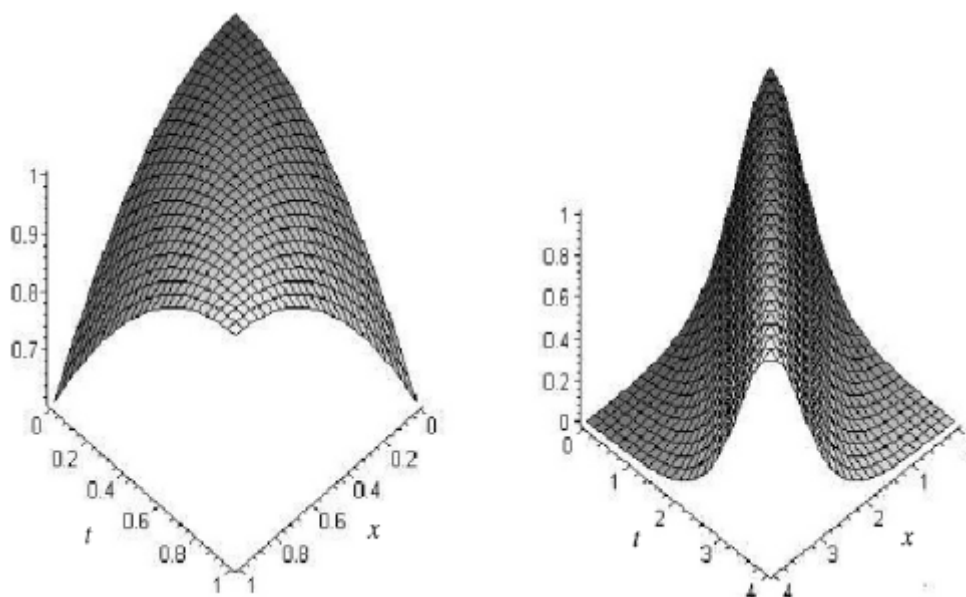


شکل ۴.۲: نمودار جواب تابی (نمودار پایین) و نمودار جواب سولیتونی (نمودار بالا)



شکل ۵.۲: نمودار کامپکتون  $u(x, t) = \cos^{\frac{1}{3}}(x - t)$ ,  $c = 1$ ,  $0 \leq x, t \leq 1$





شکل ۴.۲: نمودار جواب کامپکتون (سمت چپ) و نمودار جواب سولیتون (سمت راست)

## ۴.۲ حل بعضی از معادلات دیفرانسیل جزئی به روش کلاسیک

معادله برگرز را که یک معادله غیرخطی از مرتبه دوم است، در نظر بگیرید:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (۲.۲)$$

می‌خواهیم برای حل آن از تبدیل موج سیار استفاده کنیم، فرض کنید

$$u(x, t) = f(\xi), \quad \xi = x - ct \quad (۳.۲)$$

که در آن  $c$  ثابت است، جواب معادله برگرز باشد. با استفاده از تبدیل موج سیار معادله برگرز به معادله  $ODE$  زیر تبدیل می‌شود:

$$-c \frac{df(\xi)}{d\xi} + (f(\xi)) \frac{df(\xi)}{d\xi} - \frac{d^2 f(\xi)}{d\xi^2} = 0 \quad (۴.۲)$$

با انتگرال‌گیری از معادله فوق نسبت به  $\xi$  داریم:

$$-cf(\xi) + \frac{1}{2}f^2(\xi) - \frac{df(\xi)}{d\xi} = 0 \quad (۵.۲)$$

در این جا ثابت انتگرال گیری را می توان صفر انتخاب نمود.

$$\frac{-2cf(\xi)d\xi + f^2(\xi)d\xi - 2df(\xi)}{2d\xi} = 0$$

و

$$\frac{-2cf(\xi)d\xi + f^2(\xi)d\xi}{2d\xi} - \frac{2df(\xi)}{2d\xi} = 0$$

که منجر به  $f(\xi)(f(\xi) - 2c)d\xi = 2df(\xi)d\xi$  می شود.  
پس معادله (۳.۲) را به صورت زیر داریم:

$$\frac{df(\xi)}{f(\xi)(f(\xi) - 2c)} = \frac{1}{2}d\xi \quad (6.2)$$

از طرفین (۶.۲) رابطه انتگرال می گیریم:

$$\int \frac{df(\xi)}{f(\xi)(f(\xi) - 2c)} = \frac{1}{2}\xi \quad (7.2)$$

در نتیجه

$$\frac{1}{2c} \int \left( \frac{1}{f(\xi) - 2c} - \frac{1}{f(\xi)} \right) df(\xi) = \frac{1}{2}\xi \Rightarrow f(\xi) = \frac{2c}{1 - e^{c\xi}} = c[1 - \coth(\frac{c}{2}\xi)].$$

در این صورت جواب دقیق معادله برگرز از نوع تابعی می شود:

$$u(x, t) = c[1 - \coth(\frac{c}{2}(x - ct))] \quad c > 0.$$

# فصل ۳

## معرفی روش کودریاشف

یکی از اولین و قدیمی‌ترین روش‌ها برای یافتن جواب دقیق معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی، روش بسط تقلیل یافته می‌باشد که اولین بار در سال ۱۹۶۶ به‌کار گرفته شد [۱۳]. اصلاح این روش که بعدها توسط کودریاشف<sup>۱</sup> به همین اسم نامگذاری گردید یکی از موثرین روش‌ها می‌باشد. در روش بسط کودریاشف به دنبال دسته‌ای از جواب‌های دقیق معادله به صورت زیر هستیم:

$$y(z) = \sum_{n=0}^N a_n Q^n, \quad (1.3)$$

که در آن  $n$  و  $N$  اعداد صحیح مثبت و  $a_n$ ها ضرایب ثابت حقیقی هستند. تابع  $Q$  نیز به صورت

$$Q(z) = \frac{1}{1 + \exp(z)}, \quad (2.3)$$

تعریف شده و در معادله دیفرانسیل معمولی غیرخطی مرتبه اول زیر نیز صدق می‌کند:

$$Q_z = Q^2 - Q \quad (3.3)$$

در ادامه از روابط (۱.۳) و (۳.۳) برای محاسبه مشتقات تابع  $y(z)$  نسبت به  $z$  استفاده می‌کنیم. [۱۴، ۲۲، ۲۴]

### ۱.۰.۳ الگوریتم روش

الگوریتم روش شامل شش گام به صورت زیر می‌باشد:

۱. فرض کنید یک معادله دیفرانسیل جزئی در قالب چندجمله‌ای به صورت زیر داشته باشیم:

$$E_1(u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{xx}, \dots) = 0 \quad (4.3)$$

<sup>۱</sup>Kudryashov

در این مرحله با در نظر گرفتن جواب‌های موج متحرک به صورت:

$$u(x, t) = y(z), \quad z = Kx + Wt \quad (۵.۳)$$

معادله (۴.۳) را به یک معادله دیفرانسیل عادی غیرخطی با پارامترهای  $K$  و  $W$  به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$E_{\gamma}(y, Wy_z, Ky_z, W^2 y_{zz}, K^2 y_{zz}) = 0 \quad (۶.۳)$$

۲. در گام دوم عدد تعادل  $N$  در فرمول (۱.۳) که معرف مرتبه قطب جواب عمومی معادله (۶.۳) است را با عمل موازنه کردن بین بالاترین مرتبه عبارت غیر خطی با بالاترین مرتبه مشتق موجود تعیین می‌کنیم.

### عمل موازنه کردن

موازنه بین جملات با بالاترین درجه غیرخطی و بالاترین مرتبه مشتق موجود صورت می‌گیرد. برای ایجاد تعادل بین عبارت سمت چپ رابطه (۱.۳) و سمت راست آن که صفر است، این عمل صورت می‌گیرد. در واقع مقدار عدد تعادل را طوری باید تعیین کنیم که مجموع عبارت صفر شود. توان عبارت‌هایی مثل  $u^p$  را به صورت  $pN$  و مثل  $u^{(q)}$  را به صورت  $N + q$  در نظر می‌گیریم. نکته: اگر مقدار  $N$  حاصل از تبدیل فوق، یک عدد صحیح باشد گام بعدی را اجرا می‌کنیم. در غیر این صورت مثلاً برای حالت  $N = \frac{1}{m}$  که  $m$  یک عدد صحیح است، تبدیل  $y(z) = W(z)^m$  را به کار می‌بریم که  $W(z)$  تابع جدیدی است.

۳. در این گام با توجه به معادله مورد نظر بر حسب نیاز مشتقات تابع  $y(z)$  نسبت به  $z$  را محاسبه کرده و همراه رابطه (۱.۳) در معادله (۶.۳) جانشین می‌کنیم. بنابراین معادله‌ای بر حسب تابع  $Q$ ، ضرایب  $a_n, (n = 0, \dots, N)$  و پارامترهای  $K$  و  $W$  خواهیم داشت.

۴. در این مرحله، مسأله یافتن جواب‌های دقیق معادله دیفرانسیل غیرخطی (۶.۳) را به مسأله یافتن جواب‌های یک دستگاه معادلات جبری تبدیل می‌کنیم. یعنی ضریب توان‌های مختلف  $Q$  در معادله (۶.۳) را برابر صفر قرار می‌دهیم.

۵. در این گام با حل دستگاه معادلات جبری با استفاده از نرم‌افزارهای ریاضی و پیدا کردن ضرایب و پارامترهای مجهول می‌توانیم جواب‌های دقیق معادله (۵.۳) و سپس معادله (۴.۳) را به دست بیاوریم.

۶. در مرحله آخر برای اطمینان از درستی جواب‌ها، از این جهت که هنگام یافتن جواب‌های دقیق معادلات دیفرانسیل غیرخطی ممکن است اشتباهاتی رخ دهد، بررسی می‌کنیم که جواب‌های به دست آمده حتماً در معادله اصلی صدق می‌کنند [۱۴، ۲۲، ۲۴].

### ۲.۰.۳ پیاده‌سازی روش

مثال ۱.۰.۳. شش گام فوق از روش کودریاشف را برای به دست آوردن جواب‌های دقیق معادله دیفرانسیل جزئی غیرخطی زیر که معادله ناگامو نام دارد، اعمال می‌کنیم.

$$u_t = u_{xx} + u(1-u)(u-\alpha), \quad \alpha = -1$$

با جایگذاری  $\alpha = -1$ ، معادله دیفرانسیل جزئی غیرخطی نیوول-وایتهد<sup>۲</sup> را داریم که حالت خاص معادله ناگامو<sup>۳</sup> است و در زمینه‌های مختلف علوم مانند علایم عصبی، نظریه مدارها و ژنتیک جمعیت کاربرد دارد [۱۷].

۱. ابتدا با استفاده از جواب‌های موج سیار به صورت  $u(x, t) = y(z), z = Kx + Wt$ ، معادله فوق را به معادله دیفرانسیل معمولی زیر تبدیل می‌کنیم:

$$K^2 y_{zz} - W y_z + y(1-y) = 0, \quad (7.3)$$

۲. در این گام طبق آنچه گفته شد مقدار  $N$  از رابطه  $N + 2 = 3N$  برابر یک به دست می‌آید.

۳. با توجه به مقدار  $N$  جواب معادله را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$y(z) = u(x, t) = \sum_{n=0}^1 a_n Q^n(\xi) = a_0 + a_1 Q \quad (8.3)$$

مشتقات مرتبه اول و دوم تابع  $y(z)$  نسبت به  $z$  را نیز طبق روابط (۱.۳) و (۳.۳) به ازای  $N$  برابر یک محاسبه می‌کنیم که به ترتیب به صورت زیر هستند:

$$y_z = \sum_{n=0}^{N=1} n a_n Q^{n-1} (Q^2 - Q) = \sum_{n=0}^{N=2} n a_n Q^n (Q - 1) = a_1 Q (Q - 1)$$

$$\begin{aligned} y_{zz} &= \left[ \sum_{n=0}^{N=2} n a_n (n+1) Q^n (Q^2 - Q) - n^2 a_n Q^{n-1} (Q^2 - Q) \right] \\ &= \sum_{n=0}^{N=2} [n a_n (n+1) Q^n (Q - 1) - n^2 a_n Q^n (Q - 1)] \\ &= \sum_{n=0}^{N=2} n a_n Q^n (Q - 1) [(n+1)Q - n] \\ &= a_1 Q (Q - 1) [2Q - 1] \\ &= 2a_1 Q^3 - 3a_1 Q^2 + a_1 Q \end{aligned}$$

<sup>۲</sup>Newell-Whitehead

<sup>۳</sup>Fitzhugh-Nagumo

با جایگذاری روابط فوق در معادله (۷.۳) داریم:

$$K^2(2a_1Q^3 - 3a_1Q^2 + a_1Q) - W(a_1Q^2 - a_1Q) + (a_0 + a_1Q)(1 - a_0^2 - a_1^2Q^2 + 2a_0a_1Q) = 0$$

پس داریم:

$$2a_1K^2Q^3 - 3a_1K^2Q^2 + a_1K^2Q - a_1WQ^2 + a_1WQ + a_0 + a_1Q - a_0^2 - a_1^2Q^2 - 3a_0^2a_1Q - 3a_1^2Q^2a_0 = 0$$

و دسته‌بندی جملات بر حسب توان‌های مختلف  $Q$  به معادله زیر می‌رسیم

$$(2a_1K^2 - a_1^2)Q^3 + (-3a_1K^2 - a_1W - 3a_1^2a_0)Q^2 + (a_1K^2 + a_1W + a_1 - 3a_0^2a_1)Q + (a_0 - a_0^2) = 0 \quad (9.3)$$

۴. یادآوری می‌کنیم که در معادله فوق  $Q$  یک تابع است، بنابراین برای یافتن جواب این معادله باید ضرایب توان‌های مختلف  $Q$  را برابر صفر قرار دهیم. در این صورت یک دستگاه معادلات جبری به شکل زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{cases} 2a_1K^2 - a_1^2 = 0, \\ -3a_1K^2 - a_1W - 3a_1^2a_0 = 0 \\ a_1K^2 + a_1W + a_1 - 3a_0^2a_1 = 0, \end{cases}$$

۵. با حل دستگاه حاصل از مرحله قبل مقادیر مختلف ممکن برای مجهولات مسأله همانند زیر را داریم:

$$\begin{cases} a_0 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{k}}(-3K^2 - W), \\ a_1 = K\sqrt{2}, \\ K = \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \\ W = \pm \sqrt{-6K^4 + 12K^2}. \end{cases}$$

به ازای مقادیر  $K = \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$  دو مقدار برای  $W$  به دست می‌آوریم که به ترتیب به صورت زیر هستند:

$$W_1 = \sqrt{\frac{9}{2}}, \quad W_2 = -\sqrt{\frac{9}{2}}$$

۶. بنابراین جواب‌های مختلف معادله (۷.۳) نظیر پارامترهای فوق، بر طبق رابطه (۸.۳) به صورت‌های

زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned}y_1(z) &= 1 + Q(z), & z &= K_1x + W_1t, \\y_2(z) &= Q(z), & z &= K_1x + W_2t, \\y_3(z) &= -1 - Q(z), & z &= K_2x + W_1t, \\y_4(z) &= -Q(z), & z &= K_2x + W_2t.\end{aligned}$$

مثال ۲۰۰۳. روش کودریاشف را برای به دست آوردن جواب دقیق معادله کادی وی مرتبه پنجم<sup>۴</sup> با ضرایب مستقل زمان و عبارت خطی کاهش داده شده اعمال می‌کنیم،

$$q_t - a_1(t)q_{xxxxx} - a_2(t)qq_{xxx} + a_3(t)q_{xxx} - [a_4(t)q + a_5(t)q_{xx}]q_x + a_6(t)q = 0 \quad (10.3)$$

و

$$q_t - b_1(t)q_{xxxxx} - b_2(t)qq_{xxx} - [b_3(t)q^2 + b_4(t)q_{xx}]q_x + b_5(t)q = 0 \quad (11.3)$$

که  $a_i(t), i = 1, \dots, 6$  و  $b_j(t), j = 1, \dots, 5$  توابع دلخواه حقیقی مقدار از  $t$  هستند. دو عبارت آخر در معادله (۱۰.۳) و (۱۱.۳) به ترتیب اثر عبارت خطی کاهش داده شده با ضرایب مستقل زمانی  $a_6(t)$  و  $a_5(t)$  را نشان می‌دهند.

اکنون جواب دقیق معادله (۱۰.۳) را با روش کودریاشف همانند زیر پیدا می‌کنیم. از تبدیل موج سیار  $\xi = x - v(t)t, q(x, t) = U(\xi)$  استفاده می‌کنیم و معادله بالا را به معادله دیفرانسیل معمولی زیر تبدیل می‌کنیم

$$\begin{aligned}- \left( v(t) + t \frac{dv(t)}{dt} \right) U' - a_1(t)U'''' - a_2(t)UU''' + a_3(t)U''' - a_4(t)UU' \\ - a_5(t)U''U' + a_6(t)U = 0\end{aligned} \quad (12.3)$$

با موازنه کردن بالاترین مرتبه جمله غیرخطی و بالاترین مرتبه مشتق، در معادله بالا مقدار  $N$  را به صورت  $N + 5 = N + N + 3$  داریم که منجر به  $N = 2$  می‌شود. با توجه به مقدار  $N = 2$  جواب موج سیار زیر را به صورت چندجمله‌ای از درجه دو داریم،

$$U = \sum_{n=0}^2 c_n Q^n = c_0 + c_1 Q + c_2 Q^2 \quad (13.3)$$

مشتقات مرتبه اول، دوم، سوم و چهارم تابع  $U$  نسبت به  $\xi$  را به ازای  $N = 2$  حساب می‌کنیم که به

<sup>۴</sup>the fifth-order Korteweg-de Vries

ترتیب به صورت زیر هستند،

$$\begin{aligned}
 U_{\xi} &= 2c_2 Q^{\mathcal{I}} + (c_1 - 2c_2) Q^{\mathcal{J}} - c_1 Q, \\
 U_{\xi\xi} &= 6c_2 Q^{\mathcal{F}} + (-10c_2 + 2c_1) Q^{\mathcal{I}} + (-3c_1 + 4c_2) Q^{\mathcal{J}} + c_1 Q, \\
 U_{\xi\xi\xi} &= 24c_2 Q^{\mathcal{D}} + (-54c_2 + 6c_1) Q^{\mathcal{F}} + (-12c_1 + 38c_2) Q^{\mathcal{I}} + (-8c_2 + 7c_1) Q^{\mathcal{J}} - c_1 Q, \\
 U_{\xi\xi\xi\xi} &= 720c_2 Q^{\mathcal{V}} + (-2400c_2 + 120c_1) Q^{\mathcal{D}} + (-360c_1 + 3000c_2) Q^{\mathcal{F}} \\
 &+ (-1710c_2 + 390c_1) Q^{\mathcal{I}} + (422c_2 - 180c_1) Q^{\mathcal{J}} + (-32c_2 + 31c_1) Q^{\mathcal{K}} - c_1 Q,
 \end{aligned}
 \tag{۱۴.۳}$$

با جانشانی معادلات (۱۴.۳) و (۱۳.۳) در (۱۲.۳) و مساوی صفر قرار دادن تمام توان‌های  $Q(\xi)$  روابط زیر را داریم،

$$\begin{aligned}
 Q^{\mathcal{V}} : & -12a_{\Delta}(t)c_2^{\mathcal{I}} - 24a_{\mathcal{I}}(t)c_2^{\mathcal{J}} - 720a_1(t)c_2 = 0, \\
 Q^{\mathcal{D}} : & -30a_{\mathcal{I}}c_1c_2 - 10a_{\Delta}(t)c_2c_1 - 120a_1(t)c_1 + 54a_{\mathcal{I}}(t)c_2^{\mathcal{F}} + 32a_{\Delta}(t)c_2^{\mathcal{I}} + 2400a_1(t)c_2 = 0, \\
 Q^{\mathcal{F}} : & -38a_{\mathcal{I}}(t)c_2^{\mathcal{I}} - 28a_{\Delta}(t)c_2^{\mathcal{J}} - 2a_{\mathcal{I}}(t)c_2^{\mathcal{K}} + 24a_{\mathcal{I}}(t)c_2 + 26a_{\Delta}(t)c_1c_2 - 24a_{\mathcal{I}}(t)c_1c_2 \\
 & + 66a_{\mathcal{I}}(t)c_1c_2 - 3000a_1(t)c_2 - 6a_{\mathcal{I}}(t)c_1^{\mathcal{I}} + 360a_1(t)c_1 - 2a_{\Delta}(t)c_1^{\mathcal{I}} = 0, \\
 Q^{\mathcal{I}} : & 5a_{\Delta}(t)c_1^{\mathcal{I}} + 12a_{\mathcal{I}}(t)c_1^{\mathcal{J}} - 22a_{\Delta}(t)c_1c_2 - 390a_1(t)c_1 - 6a_{\mathcal{I}}(t)c_1c_2 \\
 & - 45a_{\mathcal{I}}(t)c_1c_2 - 3a_{\mathcal{I}}(t)c_1c_2 + 6a_{\mathcal{I}}(t)c_1 + 54a_{\mathcal{I}}(t)c_1c_2 + 2a_{\mathcal{I}}(t)c_1^{\mathcal{K}} \\
 & + 1710a_1(t)c_2 + 8a_{\Delta}(t)c_2^{\mathcal{I}} + 8a_{\mathcal{I}}(t)c_2^{\mathcal{J}} - 54a_{\mathcal{I}}(t)c_2 = 0, \\
 Q^{\mathcal{J}} : & -2c_2(v(t) + t\frac{dv(t)}{dt}) + 9a_{\mathcal{I}}(t)c_1c_2 + 3a_{\mathcal{I}}(t)c_1c_2 - 2a_{\mathcal{I}}(t)c_1c_2 + 38a_{\mathcal{I}}(t)c_2 \\
 & + 6a_{\Delta}(t)c_1c_2 - 38a_{\mathcal{I}}(t)c_1c_2 - 422a_1(t)c_2 + 12a_{\mathcal{I}}(t)c_1c_2 - 4a_{\Delta}(t)c_1^{\mathcal{I}} - 7a_{\mathcal{I}}(t)c_1^{\mathcal{J}} \\
 & + 180a_1(t)c_1 - 12a_{\mathcal{I}}(t)c_1 - a_{\mathcal{I}}(t)c_1^{\mathcal{K}} = 0, \\
 Q^{\mathcal{K}} : & a_{\Delta}(t)c_1^{\mathcal{I}} + a_{\mathcal{I}}(t)c_1^{\mathcal{J}} + a_{\mathcal{I}}(t)c_1^{\mathcal{K}} + 7a_{\mathcal{I}}(t)c_1 - a_{\mathcal{I}}(t)c_1c_2 - c_1(v(t) + t\frac{dv(t)}{dt}) - 7a_{\mathcal{I}}(t)c_1c_2 \\
 & + 2c_2(v(t) + t\frac{dv(t)}{dt}) + a_{\mathcal{I}}(t)c_2 + 8a_{\mathcal{I}}(t) - 8a_{\mathcal{I}}(t)c_2 + 32a_1(t)c_2 + 2a_{\mathcal{I}}(t)c_1c_2 = 0, \\
 Q^{\mathcal{L}} : & c_1(v(t) + t\frac{dv(t)}{dt}) + a_{\mathcal{I}}(t)c_1c_2 + a_{\mathcal{I}}(t)c_1c_2 - a_{\mathcal{I}}(t)c_1 + a_1(t)c_1 + a_{\mathcal{I}}(t)c_1 = 0, \\
 Q^{\mathcal{M}} : & a_{\mathcal{I}}(t)c_1 = 0,
 \end{aligned}
 \tag{۱۵.۳}$$



با حل دستگاه بالا جواب‌های ویژه زیر را پیدا کردیم،

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{a_2(t)(a_\Delta(t) + 2a_2(t)) + \Delta a_1(t)(a_1(t) - a_2(t))}{a_2(t)(a_\Delta(t) + 2a_2(t))}, \\ c_1 &= \frac{\phi \circ a_1(t)}{a_\Delta(t) + 2a_2(t)}, \\ c_2 &= -\frac{\phi \circ a_1(t)}{a_\Delta(t) + 2a_2(t)}, \\ v(t) &= -\frac{1}{t} \int \left\{ \frac{a_2(t)a_1(t)(a_\Delta(t) + 2a_2(t)) + a_1(t)(\Delta a_1^\vee - 3a_2^\vee(t) + a_2(t)a_\Delta(t))}{a_2(t)(a_\Delta(t) + 2a_2(t))} \right\} dt, \\ a_\phi(t) &= 0 \end{aligned} \quad (16.3)$$

با استفاده از نتیجه (۱۳.۳) جواب موج سیار معادله (۱۲.۳) را مانند زیر داریم،

$$U(\xi) = \frac{a_2(t)(a_\Delta(t) + 2a_2(t)) + \Delta a_1(t)(a_1(t) - a_2(t))}{a_2(t)(a_\Delta(t) + 2a_2(t))} + \frac{\phi \circ a_1(t)}{a_\Delta(t) + 2a_2(t)} \frac{Ke^\xi}{(1 + Ke^\xi)^2} \quad (17.3)$$

در این صورت جواب دقیق جدید معادله (۱۰.۳) می‌تواند به فرم زیر نوشته شود،

$$\begin{aligned} q(x, t) &= \frac{a_2(t)(a_\Delta(t) + 2a_2(t)) + \Delta a_1(t)(a_1(t) - a_2(t))}{a_2(t)(a_\Delta(t) + 2a_2(t))} \times \frac{\phi \circ a_1(t)}{a_\Delta(t) + 2a_2(t)} \\ &\quad Ke^{(x+\int \left\{ \frac{a_2(t)a_1(t)(a_\Delta(t) + 2a_2(t)) + a_1(t)(\Delta a_1^\vee(t) - 3a_2^\vee(t) + a_2(t)a_\Delta(t))}{a_2(t)(a_\Delta(t) + 2a_2(t))} \right\} dt)} \\ &\quad \left( 1 + Ke^{(x+\int \left\{ \frac{a_2(t)a_1(t)(a_\Delta(t) + 2a_2(t)) + a_1(t)(\Delta a_1^\vee(t) - 3a_2^\vee(t) + a_2(t)a_\Delta(t))}{a_2(t)(a_\Delta(t) + 2a_2(t))} \right\} dt)} \right)^2 \end{aligned} \quad (18.3)$$

اگر  $K = 1$  باشد، جواب ۱-سولیتونی زیر را داریم:

$$\begin{aligned} q(x, t) &= \frac{a_2(t)(a_\Delta(t) + 2a_2(t)) + \Delta a_1(t)(a_1(t) - a_2(t))}{a_2(t)(a_\Delta(t) + 2a_2(t))} + \frac{1\Delta a_1(t)}{a_\Delta(t) + 2a_2(t)} \\ &\quad \operatorname{sech}^2 \left[ \frac{1}{2} \left( x \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int \left\{ \frac{a_2(t)a_1(t)(a_\Delta(t) + 2a_2(t)) + a_1(t)(\Delta a_1^\vee(t) - 3a_2^\vee(t) + a_2(t)a_\Delta(t))}{a_2(t)(a_\Delta(t) + 2a_2(t))} \right\} dt \right) \right]. \end{aligned}$$

اگر  $K = -1$  باشد، جواب ۱-سولیتونی زیر را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} q(x, t) &= \frac{a_2(t)(a_\Delta(t) + 2a_2(t)) + \Delta a_1(t)(a_1(t) - a_2(t))}{a_2(t)(a_\Delta(t) + 2a_2(t))} - \frac{1\Delta a_1(t)}{a_\Delta(t) + 2a_2(t)} \\ &\quad \operatorname{csc}^2 \left[ \frac{1}{2} \left( x \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int \left\{ \frac{a_2(t)a_1(t)(a_\Delta(t) + 2a_2(t)) + a_1(t)(\Delta a_1^\vee(t) - 3a_2^\vee(t) + a_2(t)a_\Delta(t))}{a_2(t)(a_\Delta(t) + 2a_2(t))} \right\} dt \right) \right]. \end{aligned}$$

با مقایسه نتایج خود و نتایج پیشین در [۲۳]، خواهیم دید که نتایج ما جدید هستند.

# فصل ۴

## انواع روش کودریاشف برای حل معادلات دیفرانسیل کسری

### ۱.۴ مقدمه

معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی با مرتبه عدد صحیح نقش مهمی را در توصیف بسیاری از پدیده‌های غیرخطی مثل ریاضیات زیستی، نظریه الکترومغناطیس، مکانیک سیالات، پردازش سیگنال، مهندسی، فیزیک جامدات و دیگر حوزه‌های علمی ایفا می‌کنند.

با کمک کامپیوتری کردن محاسبات نمادین، محققان روش‌های بسیاری برای حل معادلات دیفرانسیل غیرخطی مختلف بررسی و ابداع کردند، برای مثال روش بسط تابع بیضوی ژاکوبی [۱۸، ۳۱]، روش جزئی مستقیم [۲۶]، روش اولین انتگرال [۱، ۲۸]، روش بسط  $\frac{G'}{G}$  [۲۹، ۳۳] و...

معادلات دیفرانسیل کسری غیرخطی (NFDEs)<sup>۱</sup> تعمیمی از معادلات دیفرانسیل کلاسیک با مرتبه عدد صحیح هستند. در دهه‌های گذشته نظریه مشتقات کسری عمدتاً به صورت یک حوزه کاملاً نظری در ریاضیات ارائه می‌شده که تنها برای ریاضی‌دانان کارایی داشت.

در سال‌های اخیر این گونه معادلات مورد توجه بسیاری قرار گرفته است، که هم به دلیل پیشرفت خود حساب کسری و هم به دلیل کاربرد آن در ساختارهای مسائل مختلف زندگی واقعی است. با این وجود محققان دریافتند که مشتقات با مرتبه عدد صحیح برای توصیف ویژگی‌های پدیده‌های مختلف فیزیکی مناسب می‌باشند، که بیانگر این است که مدل‌های مرتبه کسری مناسب‌تر از مدل‌های مرتبه عدد صحیح است که قبلاً استفاده می‌شدند. بررسی جواب‌های دقیق و جدید معادلات دیفرانسیل کسری برای درک بهتر رویدادهای موج مفید است و بررسی نوع غیرخطی آن نقش مهمی در علوم مختلف از جمله فیزیک، ویسکوالاستیک سیستم، پردازش سیگنال، آمار و احتمال، سرمایه‌گذاری، فیبرهای نوری، مهندسی مکانیک، هیدرودینامیک، شیمی، فیزیک جامدات، زیست‌شناسی، شناسایی سیستم، مکانیک سیالات، تئوری کنترل الکتریکی، ترمودینامیک، انتقال حرارت و دینامیک ذرات دارد.

<sup>۱</sup>Nonlinear Fractional Differential Equations

افراد زیادی روش‌هایی را برای حل معادلات دیفرانسیل کسری به دست آورده‌اند که از این روش‌ها می‌توان به روش تکرار وردشی کسری محلی، روش تبدیل پیچیده کسری و روش تجزیه هموتوپی اشاره کرد. همچنین جواب دقیق معادلات دیفرانسیل کسری با استفاده از روش‌های بسیاری مطرح شده‌اند که از این روش‌ها می‌توان روش معادله آزمایشی تعمیم‌یافته<sup>۲</sup>، روش معادله آزمایشی اصلاح‌شده<sup>۳</sup>، روش معادله آزمایشی تعمیم‌یافته چندگانه<sup>۴</sup> و روش اصلاح‌شده کودریاشف می‌باشد.

## ۲.۴ روش تعمیم یافته کودریاشف برای معادلات دیفرانسیل زمان-کسری

در این بخش از روش تعمیم یافته کودریاشف برای پیدا کردن جواب دقیق معادله زمان-کسری برگرز، معادله زمان-کسری کان هیلارد و معادله زمان کسری تعمیم یافته مرتبه سوم  $Kdv$ <sup>۵</sup> استفاده شده است. معادله برگرز<sup>۶</sup> که نوعی از معادلات دیفرانسیل جزئی است، اولین بار در سال ۱۹۴۸ توسط برگرز ارائه شد که به صورت مدلی ساده برای آشفتگی، حرکت لایه مرزی، ضربه موجی شکل و انتقال توده‌ای می‌باشد که در دینامیک سیالات، مهندسی شیمی و... به کار می‌رود.

این معادله با استفاده از تبدیل Cole-Hopf به صورت خطی درآمده و به معادله گرما تبدیل می‌شود. همچنین این معادله در حوزه‌های اجرایی بسیاری مطرح و استفاده شده است، از جمله این حوزه‌ها می‌توان جریان ترافیک و تشکیل خوشه‌های بزرگ در کیهان را نام برد.

معادله کان هیلارد که نوعی معادله دیفرانسیل جزئی است، اولین بار در سال ۱۹۵۸ به صورت مدلی برای فرآیند جداسازی آلیاژ دوتایی تحت دمای بحرانی معرفی شد.<sup>[۶]</sup>

مدل‌هایی ایجاد شده که در آن‌ها معادله کان هیلارد برای نشان دادن سیر تکامل دو جز از مواد بین کلهکشانی استفاده شده است. مثال دیگر استفاده این معادله در بوم‌شناسی در مدل‌سازی دینامیک دو جمعیت و یا استفاده این معادله در ریاضی-زیست‌شناسی، در مدل‌سازی و دینامیک‌های زیست توده و اجزای حلال یک غشای میکروبی است [۱۹]. معادله  $Kdv$  نوعی معادله دیفرانسیل جزئی است که برای تعریف دامنه وسیعی از پدیده‌های فیزیکی به صورت مدلی برای سیر تکامل و اثر متقابل امواج غیرخطی مورد استفاده قرار گرفته است.

این معادله به صورت معادله تکامل مشتق شده است که امواج یک بعدی با دامنه‌ی کوتاه و امواج ثقلی سطحی بلند با سطح آب کم را هدایت می‌کند [۱۲].

معادله  $Kdv$ ، در بسیاری از علوم فیزیکی مانند امواج هیدرو مغناطیس بدون برخورد، امواج داخلی طبقه، امواج یون صوتی، فیزیک پلاسما و دینامیک‌های شبکه به کار رفته است.

برخی رویدادهای فیزیک نظری در حوزه‌ی مکانیک کوانتوم با مدل  $Kdv$  بیان شده است. این معادله

<sup>۱</sup>Extended Trial Equation Method

<sup>۲</sup>The modified Trial Equation Method

<sup>۳</sup>Multiple Extended Trial Equation Method

<sup>۵</sup>Time-fractional generalized third-order Korteweg-de Vries equation

<sup>۶</sup>Burgers Equation

در دینامیک‌های سیال، آیرودینامیک و مکانیک‌های کوانتومی به صورت مدلی برای تشکیل رفتار لایه مرزی و انتقال جرم استفاده می‌شود.

این معادلات زمان-کسری را می‌توان از طریق انتقال امواج سیار به معادله دیفرانسیل معمولی غیرخطی دیگری تبدیل کرد. در این کار سعی داریم که تعمیمی از روش کودریاشف را معرفی کنیم. با استفاده از این روش که فرم تعمیم یافته از روش کلاسیک کودریاشف است جواب‌های جدیدی برای تابع هیپربولیک به دست آمده است.

فاز عمومی روش تعمیم یافته کودریاشف به صورت زیر شرح داده شده است. معادله دیفرانسیل غیرخطی زیر را با مرتبه کسری برای تابع  $u$  و دو متغیر حقیقی مکان  $x$  و زمان  $t$  در نظر می‌گیریم:

$$p(u, D_t^\alpha, u_x, u_{xx}, u_{xxx}, \dots) = 0. \quad (1.4)$$

## ۱.۲.۴ گام اول

قبل از هرچیز، باید جواب موج سیار (۱.۴) را در فرم (۲.۴) به دست آوریم،

$$u(x, t) = u(\eta), \quad \eta = kx - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)}, \quad (2.4)$$

که  $k$  و  $\lambda$  ثابت‌های دلخواه هستند. معادله (۱.۴) به معادله دیفرانسیل معمولی غیرخطی به صورت زیر تبدیل می‌شود،

$$N(u, u', u'', u''') = 0. \quad (3.4)$$

## ۲.۲.۴ گام دوم

جواب‌های دقیق پیشنهادی معادله (۳.۴) به صورت زیر است:

$$u(\eta) = \frac{\sum_{i=0}^N a_i Q^i(\eta)}{\sum_{j=0}^M b_j Q^j(\eta)} = \frac{A[Q(\eta)]}{B[Q(\eta)]}, \quad (4.4)$$

که  $Q = \frac{1}{1 \pm e^\eta}$ . توجه داریم که تابع  $Q$  جواب معادله زیر می‌باشد [۱۵].

$$Q_\eta = Q^2 - Q \quad (5.4)$$

با در نظر گرفتن (۴.۴) داریم:

$$\begin{aligned} u'(\eta) &= \frac{A'Q'B - AB'Q'}{B^2} = Q' \left[ \frac{A'B - AB'}{B^2} \right] \\ &= (Q^\alpha - Q) \left[ \frac{A'B - AB'}{B^2} \right], \end{aligned} \quad (۶.۴)$$

و

$$\begin{aligned} u''(\eta) &= \frac{Q^\alpha - Q}{B^2} \\ &\times \left[ (2Q - 1)(A'B - AB') + \frac{Q^\alpha - Q}{B} [B(A''B - AB'') - 2B'A'B + 2A(B')^2] \right], \end{aligned} \quad (۷.۴)$$

و

$$\begin{aligned} u'''(\eta) &= (Q^\alpha - Q)^\alpha \times \left[ ((A'''B - AB''' - 3A''B' - 3B''A')B \right. \\ &\quad \left. + 6B(AB'' + B'A'))(B^\alpha)^{-1} - \frac{6A(B')^\alpha}{B^\alpha} \right] + 3(Q^\alpha - Q)^\alpha (2Q - 1) \\ &\quad \times \left[ \frac{B(A''B - AB'') - 2B'A'B + 2A(B')^2}{B^\alpha} \right] \\ &\quad + (Q^\alpha - Q)(6Q^\alpha - 6Q + 1) \left[ \frac{A'B - AB'}{B^2} \right] \end{aligned} \quad (۸.۴)$$

### ۳.۲.۴ گام سوم

با در نظر گرفتن عباراتی از روش پیشنهادی، فرض می‌کنیم که جواب (۳.۴) می‌تواند به صورت زیر بیان شود:

$$u(\eta) = \frac{a_0 + a_1Q + a_2Q^2 + \dots + a_NQ^N + \dots}{b_0 + b_1Q + b_2Q^2 + \dots + b_MQ^M + \dots} \quad (۹.۴)$$

برای محاسبه مقادیر  $M$  و  $N$  در (۹.۴) که یک مرتبه قطب برای جواب (۳.۴) می‌باشد، روش کودریاشف کلاسیک را برای موازنه کردن عبارات غیرخطی مرتبه بالا روی (۳.۴) اعمال می‌کنیم و می‌توانیم فرمولی از  $M$  و  $N$  را به دست بیاوریم.

### ۴.۲.۴ گام چهارم

چند جمله‌ای  $R(\Omega)$  از  $\Omega$  با جایگذاری (۴.۴) در (۳.۴) به دست می‌آید. با تبدیل ضرایب  $R(\Omega)$  به صفر، دستگاهی از معادله‌های جبری را داریم.

با حل این دستگاه می‌توانیم  $\lambda$  و ضرایب متغیر  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_N, b_0, \dots, b_N$  را توصیف کنیم. در این روش به جواب دقیقی برای (۳.۴) می‌رسیم.

## ۵.۲.۴ کاربردهایی برای معادلات زمان-کسری

در این بخش با استفاده از روش تعمیم‌یافته کودریاشف، جواب‌های دقیق معادله زمان-کسری برگرز، معادله زمان-کسری کان هیلارد و معادله زمان-کسری تعمیم‌یافته مرتبه سوم Kdv را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

مثال ۱۰.۲.۴. معادله زمان-کسری برگرز به صورت (۱۰.۴) را داریم.

$$\frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha} - u_{xx} - \beta u^p u_x = 0, \quad t > 0, p > 0, 0 < \alpha \leq 1. \quad (10.4)$$

گام‌های ذکر شده را روی معادله زمان-کسری برگرز اجرا می‌کنیم. جواب‌های موج سیار (۱۰.۴) را در نظر می‌گیریم و از تبدیل‌های  $u(x, t) = u(\eta)$  و  $\eta = kx - \lambda t$  استفاده می‌کنیم که  $k$  و  $\lambda$  ثابت‌های دلخواه هستند. با انتگرال‌گیری از این معادله نسبت به  $\eta$  و صفر قرار دادن ثابت‌های انتگرال داریم:

$$-\lambda u - k^2 u' - \beta k \frac{u^{p+1}}{p+1} = 0 \quad (11.4)$$

طبق آنچه گفته شد عبارت  $u^{p+1}$  و  $u'$  را در نظر گرفته و با هم موازنه می‌کنیم

$$(p+1)N = N+1$$

که منجر به  $N = \frac{1}{p}$  می‌شود، چون مقدار  $N$  عدد صحیح نیست، از تبدیل  $u(\eta) = v^{\frac{1}{p}}(\eta)$  استفاده می‌کنیم و داریم،

$$-\lambda v^{\frac{1}{p}} - k^2 \frac{1}{p} v' v^{\frac{1-p}{p}} - \frac{\beta k}{p+1} v^{\frac{p+1}{p}} = 0$$

با ضرب معادله بالا در  $v^{\frac{1}{p}} \times v^{\frac{-1}{p}+1}$  و  $p(p+1)$  داریم،

$$\lambda p(p+1)v - k^2(p+1)v' - \beta p k v^2 = 0 \quad (12.4)$$

با جایگذاری (۴.۴) و (۶.۴) در (۱۲.۴) و توازن بیش‌ترین مرتبه عبارت غیرخطی  $v'$  و  $v^2$  در (۱۲.۴)، در نتیجه عبارت زیر به دست آمده است.

$$N - M + 1 = 2N - 2M \quad (13.4)$$

که منجر به  $N = M + 1$  می‌شود. اگر  $M = 1$  و  $N = 2$  را انتخاب کنیم، خواهیم داشت:

$$u(\eta) = \frac{a_0 + a_1 Q + a_2 Q^2}{b_0 + b_1 Q}. \quad (14.4)$$

$$\begin{aligned} u'(\eta) &= (Q^2 - Q) \\ &\times \left[ \frac{(a_1 + 2a_2 Q)(b_0 + b_1 Q) - b_1(a_0 + a_1 Q + a_2 Q^2)}{(b_0 + b_1 Q)^2} \right], \\ u''(\eta) &= \frac{Q^2 - Q}{(b_0 + b_1 Q)^2} (2Q - 1) \times [(a_1 + 2a_2 Q)(b_0 + b_1 Q) - b_1(a_0 + a_1 Q + a_2 Q^2)] \\ &+ \frac{(Q^2 - Q)^2}{(b_0 + b_1 Q)^3} \times [2a_2(b_0 + b_1 Q)^2 - 2b_1(a_1 + 2a_2 Q)(b_0 + b_1 Q) \\ &+ 2b_1^2(a_0 + a_1 Q + a_2 Q^2)], \\ u'''(\eta) &= (Q^2 - Q)(6Q^2 - 6Q + 1) \\ &\times \left[ \frac{(a_1 + 2a_2 Q)((b_0 + b_1 Q) - b_1(a_0 + a_1 Q + a_2 Q^2))}{(b_0 + b_1 Q)^2} \right] + 3(Q^2 - Q)^2(2Q + 1) \\ &\times [(2a_2(b_0 + b_1 Q)^2 - 2b_1(a_1 + 2a_2 Q)(b_0 + b_1 Q) + 2b_1^2(a_0 + a_1 Q + a_2 Q^2))((b_0 + b_1 Q)^3)^{-1}] \\ &+ (Q^2 - Q)^3 \times \left[ \frac{-6a_2 b_1(b_0 + b_1 Q) + 6b_1^2(a_1 + 2a_2 Q)}{(b_0 + b_1 Q)^3} - \frac{6b_1^3(a_0 + a_1 Q + a_2 Q^2)}{(b_0 + b_1 Q)^4} \right]. \end{aligned}$$

جواب دقیق (۱۰.۴) به صورت زیر به دست می‌آید:

حالت ۱: در نظر می‌گیریم

$$a_0 = 0, \quad a_2 = 0, \quad b_1 = -\frac{\beta p a_1}{k(1+p)} - b_0, \quad \lambda = \frac{k^2}{p} \quad (15.4)$$

با جایگذاری (۱۵.۴) در (۱۴.۴)، جواب زیر از معادله زمان-کسری برگز (۱۰.۴) را داریم:

$$\begin{aligned} v_1(x, t) &= \left( a_1 \left( \frac{1}{1 \pm e^{kx - (k^2 t^\alpha / p \Gamma(1+\alpha))}} \right) \right) \\ &\times \left( b_0 - \left( \frac{\beta p a_1}{k(1+p)} + b_0 \right) \left( \frac{1}{1 \pm e^{kx - (k^2 t^\alpha / p \Gamma(1+\alpha))}} \right) \right)^{-1}. \quad (16.4) \end{aligned}$$

با ساده کردن این جواب، جواب دقیق جدیدی برای (۱۰.۴) به دست می‌آید:

$$u_1(x, t) = \left[ \frac{1 - \tanh(k_1 x - \lambda_1 t^\alpha)}{K[1 + \tanh(k_1 x - \lambda_1 t^\alpha)] + L[1 - \tanh(k_1 x - \lambda_1 t^\alpha)]} \right]^{\frac{1}{p}} \quad (17.4)$$



$$u_{\Psi}(x, t) = \left[ \frac{1 - \coth(k_1 x - \lambda_1 t^\alpha)}{K[1 + \coth(k_1 x - \lambda_1 t^\alpha)] + L[1 - \coth(k_1 x - \lambda_1 t^\alpha)]} \right]^{\frac{1}{p}} \quad (18.4)$$

که  $\lambda_1 = \frac{k^2}{2p\Gamma(1+\alpha)}$  و  $k_1 = \frac{k}{\Psi}$ ،  $L = -\frac{\beta p}{k(1+p)}$ ،  $K = \frac{b_0}{a_1}$  می‌باشد.  
حالت ۲: در نظر بگیرید

$$a_0 = \frac{k(1+p)b_0}{\beta p}, \quad a_1 = \frac{-k(a+p)b_0}{\beta p}, \quad a_2 = 0, \quad \lambda = -\frac{k^2}{p} \quad (19.4)$$

وقتی (۱۹.۴) را در (۱۴.۴) قرار دهیم، جواب زیر از (۱۰.۴) را به دست می‌آوریم:

$$v_{\Psi}(x, t) = \left( \frac{k(1+p)b_0}{\beta p} - \frac{k(1+p)b_0}{\beta p} \left( \frac{1}{1 \pm e^{kx - (2k^2 t^\alpha / p\Gamma(1+\alpha))}} \right) \right) \times \left( b_0 + b_1 \left( \frac{1}{1 \pm e^{kx - (2k^2 t^\alpha / p\Gamma(1+\alpha))}} \right) \right)^{-1} \quad (20.4)$$

مانند مرحله قبل با ساده کردن این جواب، جواب دقیق جدیدی برای (۱۰.۴) به دست می‌آوریم:

$$u_{\Psi}(x, t) = \left[ \frac{M[(\frac{1}{\Psi}) + (\frac{1}{\Psi}) \tanh(k_1 x - \lambda_2 t^\alpha)]}{b_0 + b_1[(\frac{1}{\Psi}) - (\frac{1}{\Psi}) \tanh(k_1 x - \lambda_2 t^\alpha)]} \right]^{\frac{1}{p}}, \quad (21.4)$$

$$u_{\Psi}(x, t) = \left[ \frac{M[(\frac{1}{\Psi}) + (\frac{1}{\Psi}) \coth(k_1 x - \lambda_2 t^\alpha)]}{b_0 + b_1[(\frac{1}{\Psi}) - (\frac{1}{\Psi}) \coth(k_1 x - \lambda_2 t^\alpha)]} \right]^{\frac{1}{p}} \quad (22.4)$$

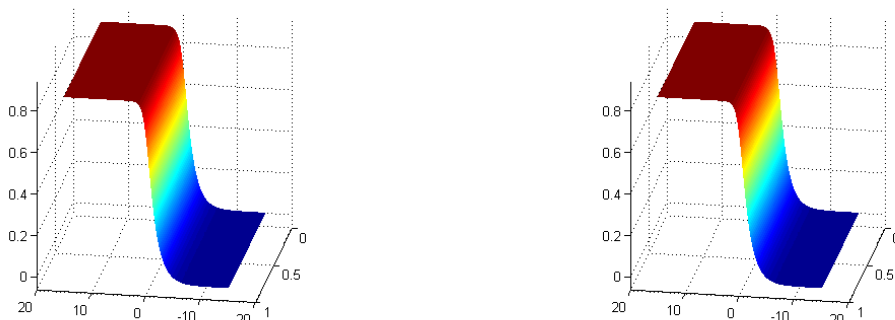
که  $\lambda_2 = \frac{-k^2}{2p\Gamma(1+\alpha)}$  و  $M = \frac{k(1+p)b_0}{\beta p}$  می‌باشد.

همانطور که در فصل دوم توضیح دادیم، معادلاتی که از پدیده‌های موج مدل‌سازی شوند نیاز به مطالعه جواب‌های موج سیار دارند، جواب موج سیار معمولاً با کاهش دادن معادلات تکامل غیرخطی به معادله دیفرانسیل معمولی متناظر به دست می‌آیند. جواب موج سیار جوابی از شکل دائم در حال حرکت با یک سرعت ثابت است. مانند جواب‌های سولیتونی، تابی، انفرادی، متناوب و...

در زیر جواب معادله (۲۱.۴) به ازای  $15 < x < -15$ ،  $\beta = 2$ ،  $b_1 = 1$ ،  $b_0 = 3$ ،  $p = 3$ ،  $k = 1$  و  $0 < t < 1$  را رسم کردیم. همانطور که در شکل می‌بینیم جواب مورد نظر، جواب تابی است.

حالت ۳: در نظر بگیرید

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{-k(1+p)b_1}{\beta p}, \quad b_0 = \frac{-b_1}{2}, \quad \lambda = \frac{2k^2}{p}. \quad (23.4)$$



شکل ۱۰۴: جواب تابی به‌ازای مقدار  $\alpha = 0.85$  و  $\alpha = 0.5$

وقتی (۲۳.۴) را در (۱۴.۴) قرار می‌دهیم، جواب زیر از (۱۰.۴) را به‌دست می‌آوریم:

$$v_3(x, t) = \left( \frac{-k(1+p)b_1}{\beta p} \left( \frac{1}{\sqrt{1 \pm e^{kx - (2k^2 t^\alpha / p \Gamma(1+\alpha))}}} \right)^2 \right) \times \left( \frac{-b_1}{2} + b_1 \left( \frac{1}{\sqrt{1 \pm e^{kx - (2k^2 t^\alpha / p \Gamma(1+\alpha))}}} \right) \right)^{-1} \quad (24.4)$$

با ساده کردن این جواب و جایگذاری فرمول‌ها، جواب دقیق جدیدی برای (۱۰.۴) به‌دست می‌آوریم:

$$u_5(x, t) = \left[ \frac{E \left[ \left( \frac{1}{\sqrt{\cdot}} \right) - \left( \frac{1}{\sqrt{\cdot}} \right) \tanh(k_1 x - \lambda_3 t^\alpha) \right]^2}{\tanh(k_1 x - \lambda_3 t^\alpha)} \right]^{\frac{1}{p}}, \quad (25.4)$$

$$u_6(x, t) = \left[ \frac{E \left[ \left( \frac{1}{\sqrt{\cdot}} \right) - \left( \frac{1}{\sqrt{\cdot}} \right) \coth(k_1 x - \lambda_3 t^\alpha) \right]^2}{\coth(k_1 x - \lambda_3 t^\alpha)} \right]^{\frac{1}{p}} \quad (26.4)$$

که در آن  $E = \frac{2k(1+p)}{\beta p}$  و  $\lambda_3 = \frac{k^2}{p \Gamma(1+\alpha)}$  می‌باشد.

حالت ۴: در نظر بگیرید

$$a_0 = 0, \quad a_1 = \frac{k(1+p)b_1}{2\beta p}, \quad a_2 = \frac{-k(1+p)b_1}{\beta p}, \quad b_0 = \frac{-b_1}{2}, \quad \lambda = \frac{k^2}{p}. \quad (27.4)$$

وقتی (۲۷.۴) را در (۱۴.۴) قرار دهیم جواب زیر از (۱۰.۴) را داریم:

$$\begin{aligned}
 v_{\Psi}(x, t) = & \left( \frac{-k(1+p)b_1}{2\beta p} \left( \frac{1}{1 \pm e^{kx - (2k^\Psi t^\alpha / p\Gamma(1+\alpha))}} \right) \right) \\
 & - \left( \frac{k(1+p)b_1}{\beta p} \left( \frac{1}{1 \pm e^{kx - (2k^\Psi t^\alpha / p\Gamma(1+\alpha))}} \right)^2 \right) \\
 & \times \left( \frac{-b_1}{2} + b_1 \left( \frac{1}{1 \pm e^{kx - (2k^\Psi t^\alpha / p\Gamma(1+\alpha))}} \right) \right)^{-1} \quad (28.4)
 \end{aligned}$$

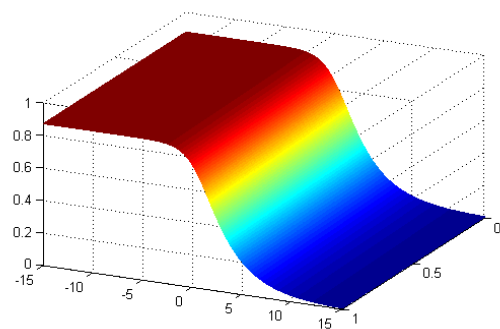
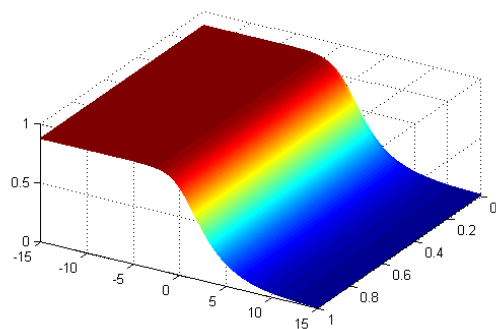
با ساده کردن جواب، جواب دقیق جدیدی برای (۱۰.۴) را خواهیم داشت:

$$u_{\Psi}(x, t) = \left[ N(1 - \tanh(k_1 x - \lambda_1 t^\alpha)) \right]^{\frac{1}{p}}, \quad (29.4)$$

$$u_{\Lambda}(x, t) = \left[ N(1 - \coth(k_1 x - \lambda_1 t^\alpha)) \right]^{\frac{1}{p}} \quad (30.4)$$

که در آن  $N = -\frac{k(1+p)}{2\beta p}$  می باشد.

در زیر جواب معادله (۲۹.۴) به ازای  $k=1, p=3, \beta=-2, -15 < x < 15$  و  $0 < t < 1$  را رسم کردیم. همانطور که در شکل می بینیم جواب مورد نظر، جواب تابی است. حالت ۵: در نظر بگیرید



شکل ۲۰۴: جواب تابی به ازای مقدار  $\alpha = 0.85$  و  $\alpha = 0.5$

$$a_0 = \frac{2k(1+p)b_0}{\beta p}, \quad a_1 = \frac{-2k(1+p)b_0}{\beta p}, \quad a_2 = \frac{2k(1+p)b_0}{\beta p}, \quad b_0 = -2b_1, \quad \lambda = \frac{-2k^\Psi}{p}. \quad (31.4)$$

با جایگذاری (۳۱.۴) در (۱۴.۴)، جواب زیر از معادله زمان-کسری برگز (۱۰.۴) را داریم:

$$v_5(x, t) = \left( \frac{2k(1+p)b_0}{\beta p} - \frac{2k(1+p)b_0}{\beta p} \left( \frac{1}{1 \pm e^{kx+(2k^\gamma t^\alpha/p\Gamma(1+\alpha))}} \right) + \frac{2k(1+p)b_0}{\beta p} \left( \frac{1}{1 \pm e^{kx+(2k^\gamma t^\alpha/p\Gamma(1+\alpha))}} \right)^2 \right) \times \left( b_0 - 2b_0 \left( \frac{1}{1 \pm e^{kx+(2k^\gamma t^\alpha/p\Gamma(1+\alpha))}} \right) \right)^{-1} \quad (32.4)$$

جواب دقیق جدیدی برای معادله (۱۰.۴) با ساده کردن رابطه (۳۲.۴) به صورت زیر خواهیم داشت:

$$u_9(x, t) = \left[ \frac{E[(\frac{1}{\gamma}) + (\frac{1}{\gamma}) \tanh(k_1 x - \lambda_4 t^\alpha)]^2}{\tanh(k_1 x - \lambda_4 t^\alpha)} \right]^{\frac{1}{p}}, \quad (33.4)$$

$$u_{10}(x, t) = \left[ \frac{E[(\frac{1}{\gamma}) + (\frac{1}{\gamma}) \coth(k_1 x - \lambda_4 t^\alpha)]^2}{\coth(k_1 x - \lambda_4 t^\alpha)} \right]^{\frac{1}{p}} \quad (34.4)$$

که در آن  $\lambda_4 = -\frac{k^2}{p\Gamma(1+\alpha)}$  می باشد.  
حالت ۶: در نظر بگیرید

$$a_0 = \frac{k(1+p)b_0}{\beta p}, \quad a_1 = \frac{-3k(1+p)b_0}{\beta p}, \quad a_2 = \frac{2k(1+p)b_0}{\beta p}, \quad b_1 = -2b_0, \quad \lambda = \frac{-k^2}{p}. \quad (35.4)$$

وقتی (۳۵.۴) را در (۳۵.۴) قرار دهیم جواب زیر از (۱۰.۴) را داریم:

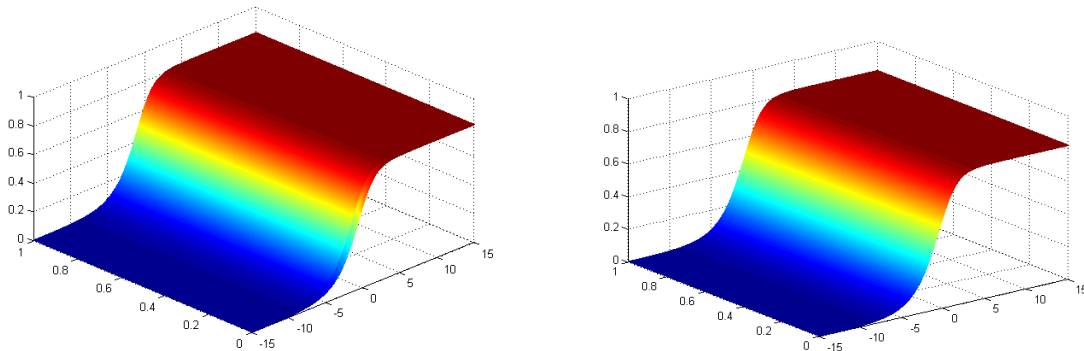
$$v_6(x, t) = \left( \frac{k(1+p)b_0}{\beta p} - \frac{3k(1+p)b_0}{\beta p} \left( \frac{1}{1 \pm e^{kx+(k^\gamma t^\alpha/p\Gamma(1+\alpha))}} \right) + \frac{2k(1+p)b_0}{\beta p} \left( \frac{1}{1 \pm e^{kx+(k^\gamma t^\alpha/p\Gamma(1+\alpha))}} \right)^2 \right) \times \left( b_0 - 2b_0 \left( \frac{1}{1 \pm e^{kx+(k^\gamma t^\alpha/p\Gamma(1+\alpha))}} \right) \right)^{-1} \quad (36.4)$$

با جایگذاری فرمولها در این جواب، جواب تابعی برای (۱۰.۴) به دست می آوریم:

$$u_{11}(x, t) = \left[ D(1 + \tanh(k_1 x - \lambda_2 t^\alpha)) \right]^{\frac{1}{p}} \quad (37.4)$$

$$u_{۱۲}(x, t) = \left[ D(1 + \coth(k_1 x - \lambda_2 t^\alpha)) \right]^{\frac{1}{p}} \quad (۳۸.۴)$$

که در آن  $D = \frac{k(1+p)}{۲\beta p}$  می‌باشد. در زیر جواب معادله (۳۷.۴) به ازای  $k = ۱, p = ۳, \beta = ۲, -۱۵ < x < ۱۵$  و  $۰ < t < ۱$  را رسم کردیم. همانطور که در شکل می‌بینیم جواب مورد نظر، جواب تابی است.



شکل ۳۰۴: جواب تابی به ازای مقدار  $\alpha = ۰.۸۵$  و  $\alpha = ۰.۵$

ملاحظه ۲۰۲.۴. جواب‌های دقیق معادله زمان-کسری برگرز (۱۰.۴) با روش تعمیم یافته کودریاشف پیدا شد. با مقایسه نتایج به دست آمده با نتایج در [۵، ۲۵] می‌توان گفت جواب‌های دقیقی که در این بخش حاصل شد برای اولین بار ارائه شده است. همچنین تعداد جواب‌های دقیق نیز بیشتر است.

مثال ۳۰۲.۴. معادله زمان-کسری کان هیلیارد به صورت (۳۹.۴) را داریم:

$$\frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha} = u_x + ۶u(u_x)^۲ + (۳u^۲ - ۱)u_{xx} - u_{xxxx}, \quad t > ۰, ۰ < \alpha \leq ۱, \quad (۳۹.۴)$$

جواب موج سیار (۳۹.۴) را در نظر می‌گیریم و تبدیل  $u(x, t) = u(\eta)$  و  $\eta = kx - (\lambda t^\alpha / \Gamma(1 + \alpha))$  را انجام می‌دهیم که  $k$  و  $\lambda$  ثابت‌های دلخواه هستند. در نتیجه با انتگرال‌گیری این معادله نسبت به  $\eta$  و صفر قرار دادن ثابت‌های انتگرال به دست می‌آوریم:

$$(\lambda + k)u + ۳k^۲u^۲u' - k^۲u' - k^۴u''' = ۰. \quad (۴۰.۴)$$

با جایگذاری (۴.۴)، (۶.۴) و (۸.۴) در (۴۰.۴) و توازن بیشترین مرتبه عبارت غیرخطی  $u^۲u'$  و  $u'''$  در (۴۰.۴) فرمول زیر را داریم:

$$N - M + ۳ = ۳N - ۳M + ۱ \quad (۴۱.۴)$$

که منجر به  $N = M + 1$  می‌شود، برای به دست آوردن جواب‌های دقیق (۳۹.۴)، اگر در نظر بگیریم:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{a_0 \left[ -(1+k^2)b_0 + \sqrt{(1+k^2)(-3a_0^2 + (1+k^2)b_0^2)} \right]}{(1+k^2)b_0}, \\ a_2 &= 0, \\ b_1 &= -b_0 + \frac{\sqrt{(1+k^2)(-3a_0^2 + (1+k^2)b_0^2)}}{(1+k^2)}, \\ \lambda &= -k \end{aligned} \quad (42.4)$$

(۴۲.۴) را در (۱۴.۴) قرار می‌دهیم جواب زیر از (۳۹.۴) را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \left( a_0 + \left( a_0 \left[ -(1+k^2)b_0 + \sqrt{(k^2+1)(-3a_0^2 + (1+k^2)b_0^2)} \right] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \left( \frac{1}{1 \pm e^{kx+(kt^\alpha/\Gamma(1+\alpha))}} \right) \right) \right) \left( (1+k^2)b_0 \right)^{-1} \\ &\quad \left( b_0 + \left[ -b_0 + \frac{\sqrt{(1+k^2)(-3a_0^2 + (1+k^2)b_0^2)}}{(1+k^2)} \right] \right. \\ &\quad \left. \times \left( \frac{1}{1 \pm e^{kx+(kt^\alpha/\Gamma(1+\alpha))}} \right) \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (43.4)$$

رابطه (۴۳.۴) را ساده می‌کنیم، در نتیجه جواب دقیقی برای (۳۹.۴) داریم:

$$u_1(x, t) = P \left[ \frac{1 + 1 \tanh(k_1 x - \lambda_\delta t^\alpha)}{1 - \tanh(k_1 x - \lambda_\delta t^\alpha)} \right] + R, \quad (44.4)$$

$$u_2(x, t) = P \left[ \frac{1 + 1 \coth(k_1 x - \lambda_\delta t^\alpha)}{1 - \coth(k_1 x - \lambda_\delta t^\alpha)} \right] + R, \quad (45.4)$$

که در آن  $\lambda_\delta = \frac{-k}{2\Gamma(1+\alpha)}$  و  $R = \frac{a_0}{b_0}$ ،  $p = a_0 \sqrt{(1+k^2)/(-3a_0^2 + (1+k^2)b_0^2)}$  می‌باشد.

ملاحظه ۴.۲.۴. جواب‌های دقیق از معادله زمان-کسری کان هیلارد که با روش تعمیم یافته کودریاشف به دست آمد، اگر نتایج را با نتایج موجود در [۷] مقایسه کنیم، خواهیم دید که جواب‌های دقیقی که توسط این روش به دست آمد برای اولین بار ارائه شدند.

مثال ۵.۲.۴. معادله زمان-کسری تعمیم یافته مرتبه سوم Kdv [۲۵، ۲۰]:

$$\frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha} - u_{xxx} - \gamma u^p u_x = 0, \quad t > 0, p > 0, 0 < \alpha \leq 1 \quad (46.4)$$

تبدیل  $u(x, t) = u(\eta)$  و  $\eta = kx - (\lambda t^\alpha / \Gamma(1 + \alpha))$  از جواب موج سیار معادله بالا را که در آن  $K$  و  $\lambda$  ثابت‌های دلخواه هستند، در نظر می‌گیریم. با انتگرال‌گیری از این معادله نسبت به  $\eta$  و صفر قرار دادن ثابت‌های انتگرال داریم.

$$\lambda(p+1)u + k^3(p+1)u'' + \gamma k \frac{u^{p+1}}{p+1} = 0. \quad (47.4)$$

چون مقدار  $N$  عدد صحیح نیست، تبدیل  $u(\eta) = v^{1/\rho}(\eta)$  را در نظر می‌گیریم و فرمول زیر را داریم،

$$\lambda p^2(p+1)v^2 + k^3(1-p^2)(v')^2 + k^3 p(p+1)vv'' + \gamma kv^3 = 0. \quad (48.4)$$

با جایگذاری (۴۰.۴) و (۷۰.۴) در (۴۸.۴) و توازن بیش‌ترین مرتبه عبارت غیرخطی  $vv''$  و  $v^3$  در (۷۰.۴) رابطه زیر به دست می‌آید:

$$2N - 2M + 2 = 3N - 3M + 1 \quad (49.4)$$

که منجر به  $N = M + 2$  می‌شود. اگر  $N = 3$  و  $M = 1$  را در نظر بگیریم:

$$u(\eta) = \frac{a_0 + a_1 Q + a_2 Q^2 + a_3 Q^3}{b_0 + b_1 Q}. \quad (50.4)$$

$$\begin{aligned} u' &= (Q^2 - Q) \\ &\times \left[ ((a_1 + 2a_2 Q + 3a_3 Q^2)(b_0 + b_1 Q) - b_1(a_0 + a_1 Q + a_2 Q^2 + a_3 Q^3)) \right. \\ &\left. \times ((b_0 + b_1 Q)^2)^{-1} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u'' &= \frac{Q^2 - Q}{(b_0 + b_1 Q)^2} (2Q - 1) \\ &\times \left[ (a_1 + 2a_2 Q + 3a_3 Q^2)(b_0 + b_1 Q) - b_1(a_0 + a_1 Q + a_2 Q^2 + a_3 Q^3) \right] \\ &+ \frac{(Q^2 - Q)^2}{(b_0 + b_1 Q)^3} \\ &\times \left[ (b_0 + b_1 Q)^2 (2a_2 + 6a_3 Q) - 2b_1(b_0 + b_1 Q)(a_1 + 2a_2 Q + 3a_3 Q^2) \right. \\ &\left. + 2b_1^2(a_0 + a_1 Q + a_2 Q^2 + a_3 Q^3) \right]. \quad (51.4) \end{aligned}$$

در تلاش برای به دست آوردن جواب‌های دقیق (۴۶.۴)، اگر در نظر بگیریم:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, \\ a_1 &= \frac{2k^\gamma(1+p)(2+p)b_0}{\gamma}, \\ a_2 &= -\frac{2k^\gamma(1+p)(2+p)(b_0 - b_1)}{\gamma}, \\ a_3 &= -\frac{2k^\gamma(1+p)(2+p)b_1}{\gamma}, \\ \lambda &= -\frac{k^\gamma}{p^\gamma} \end{aligned} \quad (52.4)$$

(۵۲.۴) را در (۵۰.۴) قرار داده و جواب زیر را داریم

$$\begin{aligned} v(x, t) &= \left( \frac{2k^\gamma(1+p)(2+p)b_0}{\gamma} \left( \frac{1}{1 \pm e^{kx+(k^\gamma t^\alpha/p^\gamma \Gamma(1+\alpha))}} \right) \right. \\ &\quad - \frac{2k^\gamma(1+p)(2+p)(b_0 - b_1)}{\gamma} \left( \frac{1}{1 \pm e^{kx+(k^\gamma t^\alpha/p^\gamma \Gamma(1+\alpha))}} \right)^2 \\ &\quad \left. - \frac{2k^\gamma(1+p)(2+p)b_1}{\gamma} \left( \frac{1}{1 \pm e^{kx+(k^\gamma t^\alpha/p^\gamma \Gamma(1+\alpha))}} \right)^3 \right) \\ &\quad \times \left( b_0 + b_1 \left( \frac{1}{1 \pm e^{kx+(k^\gamma t^\alpha/p^\gamma \Gamma(1+\alpha))}} \right) \right)^{-1} \end{aligned} \quad (53.4)$$

با ساده کردن این جواب، جواب‌های تابی زیر برای معادله مرتبه سوم تعمیم یافته به دست می‌آید.

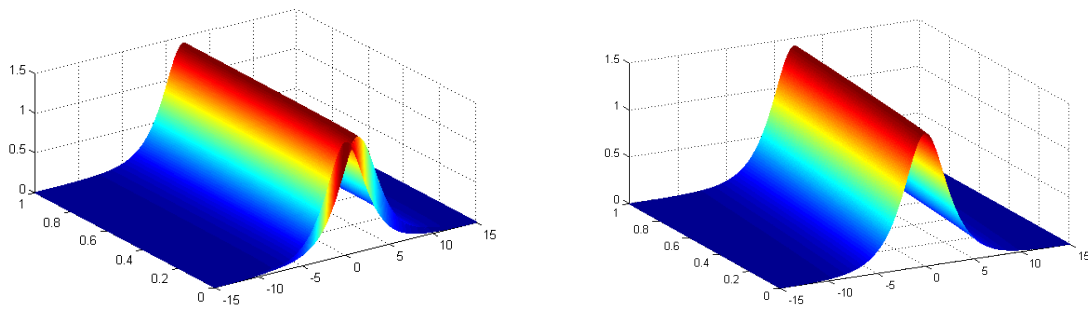
$$u_1(x, t) = \left[ S(1 - [\tanh(k_1 x - \lambda_6 t^\alpha)]^\gamma) \right]^{\frac{1}{p}} \quad (54.4)$$

$$u_2(x, t) = \left[ S(1 - [\coth(k_1 x - \lambda_6 t^\alpha)]^\gamma) \right]^{\frac{1}{p}} \quad (55.4)$$

که در آن  $S = \frac{k^\gamma(1+p)(2+p)}{2\gamma}$  و  $\lambda_6 = \frac{-k^\gamma 2p^\gamma}{\Gamma(1+\alpha)}$  می‌باشد. در زیر جواب معادله (۵۴.۴) به ازای  $15 < x < -15$ ،  $\gamma = 3$ ،  $p = 3$ ،  $k = 1$  و  $0 < t < 1$  را رسم کردیم. همانطور که در شکل می‌بینیم جواب مورد نظر، جواب سولیتونی است.

ملاحظه ۶.۲.۴. طبق مثال‌های قبل، جواب‌های (۵۴.۴) و (۵۵.۴) که با استفاده از این روش به دست آمد که با مقایسه نتایج خود و نتایج موجود در [۲۵، ۲۰] به وضوح روشن است جواب‌های دقیق حاصل از روش تعمیم یافته کوریاشف برای اولین بار ارائه شدند.





شکل ۴.۴: جواب سولیتونی به ازای مقدار  $\alpha = 0.85$  و  $\alpha = 0.5$

### ۳.۴ روش اصلاح شده کوردیاشف برای حل معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری غیرخطی

در این بخش روش اصلاح شده کوردیاشف برای حل کردن معادلات دیفرانسیل کسری پیشنهاد شده و از مشتق ریمان-لیوویل اصلاح شده ژوماری برای تبدیل معادله دیفرانسیل کسری جزئی غیرخطی به معادله دیفرانسیل کسری معمولی غیرخطی استفاده شده است.

از این روش برای محاسبه تقریب در جواب معادله اصلاح شده مکان-زمان کسری بنجامین-بونا-ماهونی و معادله پتانسیل مکان-زمان کسری kadomstev-Petviashvili که به ترتیب و به اختصار با  $BBM$  و  $KP$  نشان می‌دهیم، استفاده شده است. در نتیجه جواب‌های تحلیلی و دقیق زیادی از جمله جواب تابع متقارن فیبوناتچی، جواب تابع هیپربولیک (شبه هذلولوی) و .... به دست آمد.

این روش، روشی قدرتمند و موثر است و می‌توان از آن به عنوان جایگزینی جهت پیدا کردن جواب‌های جدید انواع معادلات دیفرانسیل کاربردی در فیزیک ریاضی استفاده کرد.

تاکنون روش‌های تحلیلی و عددی بسیاری برای به دست آوردن جواب معادلات دیفرانسیل کسری پیشنهاد شده (برای مثال [۳۲] را ببینید). اما تاکنون بر روی کاربرد روش اصلاح شده کوردیاشف برای معادلات دیفرانسیل کسری تحقیق نشده است.

### ۱.۳.۴ روش اصلاح شده کوردیاشف

در این بخش، روش اصلاح شده کوردیاشف را برای حل معادلات دیفرانسیل کسری جزئی در مفهوم مشتق و اصلاح شده ریمان-لیوویل همان‌گونه که توسط ژوماری [۸، ۹] داده شده به کار گرفتیم. برای روشن کردن اعتبار و سودمندی این روش آن را در معادله اصلاح شده مکان-زمان کسری  $BBM$  و معادله پتانسیل مکان-زمان کسری  $KP$  به کار می‌بریم.

مهم‌ترین مراحل روش اصلاح شده کوردیاشف را به طریق [۱۶، ۱۰] ارائه می‌کنیم.

$$P(u, u_t, u_x, u_y, u_z, \dots, D_t^\alpha u, D_x^\alpha u, D_z^\alpha u, \dots) = 0 \quad (56.4)$$

که  $D_z^\alpha u$  و  $D_y^\alpha u$ ،  $D_t^\alpha u$ ،  $D_x^\alpha u$  مشتقات ریمان لیوویل اصلاح شده  $u$  نسبت به  $x, t$ ،  $y$  و  $z$  هستند.  $P$  یک چندجمله‌ای روی  $u = u(x, y, z, \dots, t)$  و مشتقات مختلف آن است که شامل مشتقات بیشترین مرتبه جمله‌های غیرخطی است.

### ۲.۳.۴ گام اول

جواب موج سیار معادله (۵۶.۴) را به فرم زیر بررسی می‌کنیم.

$$u(x, y, z, \dots, t) = u(\xi), \quad \xi = \frac{kx^\beta}{\Gamma(1+\beta)} + \frac{ny^\gamma}{\Gamma(1+\gamma)} + \frac{mz^\delta}{\Gamma(1+\delta)} + \dots + \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \quad (57.4)$$

که  $k$ ،  $n$ ،  $m$  و  $\lambda$  ثابت‌های دلخواه هستند. معادله (۵۶.۴) به فرم معادله دیفرانسیل غیرخطی زیر کاهش پیدا می‌کند.

$$G(u, u_\xi, u_{\xi\xi}, u_{\xi\xi\xi}, \dots) = 0 \quad (58.4)$$

### ۳.۳.۴ گام دوم

فرض می‌کنیم که جواب دقیق معادله (۵۸.۴) می‌تواند به فرم زیر باشد:

$$u(\xi) = \sum_{i=0}^N a_i Q^i(\xi) \quad (59.4)$$

که  $Q = \frac{1}{1 \pm a\xi}$  و تابع  $Q$  جواب معادله زیر است.

$$Q_\xi = \ln a(Q^2 - Q) \quad (60.4)$$

### ۴.۳.۴ گام سوم

طبق روش، جواب معادله (۵۸.۴) می‌تواند به فرم زیر باشد.

$$u(\xi) = a_N Q^N + \dots \quad (61.4)$$

برای تعیین مقدار عدد تعادل  $N$  با توجه به عبارت  $u^l(\xi)u^s(\xi)$  و  $(u^{(p)}(\xi))^r$  که بالاترین مرتبه عبارات غیرخطی معادله (۶۱.۴) هستند و موازنه این عبارات فرمول زیر را داریم که در واقع بیان دیگر موازنه به روش کلاسیک کودریاشف است.

$$N = \frac{s - rp}{r - l - 1} \quad (۶۲.۴)$$

### ۵.۳.۴ گام چهارم

معادله (۵۹.۴) را در معادله (۵۸.۴) جایگذاری کرده، ضرایب  $Q^i$  را مساوی صفر قرار می‌دهیم و دستگاه معادله جبری به دست می‌آید. با حل این دستگاه جواب‌های دقیق معادله (۵۸.۴) حاصل می‌شود. جواب‌های به دست آمده می‌تواند مبتنی بر توابع فیوناتچی هیپربولیک متقارن که به وسیله *Stakhov* و *Rozin* مطرح شده است، باشد [۲۷]. توابع  $\cos$ ،  $\sin$ ،  $\cot$ ،  $\tan$ ،  $\cos$ ،  $\sin$ ،  $\cot$ ،  $\tan$  فیوناتچی متقارن به صورت زیر تعریف شده‌اند.

$${}_sF_s(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{\sqrt{5}} \quad {}_cF_s(x) = \frac{a^x + a^{-x}}{\sqrt{5}} \quad (۶۳.۴)$$

$$\tan F_s(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}} \quad \cot F_s(x) = \frac{a^x + a^{-x}}{a^x - a^{-x}} \quad (۶۴.۴)$$

### ۶.۳.۴ کاربردها

#### ۷.۳.۴ معادله اصلاح شده مکان-زمان کسری *BBM*

ابتدا روش را برای معادله اصلاح شده کسری مکان-زمان بنجامین-بونا-موهانی به فرم زیر به کار می‌بریم

$$D_t^\alpha u + D_x^\alpha u - vu^\lambda D_x^\alpha u + D_t^\alpha (D_t^\alpha (D_t^\alpha u)) = 0, \quad (۶۵.۴)$$

که  $0 < \alpha \leq 1$  و  $t > 0$  و  $u$  تابعی از  $(x, t)$  است و  $v$  یک ثابت دلخواه مخالف صفر است. تبدیل موج سیار زیر را که در آن  $k, c, \xi$  ثابت هستند، در نظر می‌گیریم:

$$u(x, t) = u(\xi), \quad \xi = \frac{kx^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} + \frac{ct^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} + \xi_0. \quad (۶۶.۴)$$

با بکارگیری تبدیل فوق معادله (۵۶.۴) به معادله دیفرانسیل معمولی زیر تبدیل شود.

$$cu' + ku' - vku^\lambda u' + k^\lambda u''' = 0. \quad (۶۷.۴)$$

اگر عبارت  $g''$  و  $g^3$  را در معادله (۶۷.۴) با هم موازنه کنیم، عدد تعادل  $N = 1$  به دست می‌آید. در نتیجه، جواب پیشنهادی معادله فوق به صورت زیر است.

$$g(\xi) = u(\xi) = a_0 + a_1 Q \quad (۶۸.۴)$$

با توجه به مقدار  $Q$  مشتقات زیر را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} u_\xi &= \ln a (a_1 Q^2 - a_1 Q) \\ u_{\xi\xi} &= (\ln a)^2 (2a_1 Q^2 - 2a_1 Q) \\ u_{\xi\xi\xi} &= (\ln a)^3 (4a_1 Q^2 - 4a_1 Q) \end{aligned} \quad (۶۹.۴)$$

با جانشانی روابط (۶۹.۴) در معادله (۶۷.۴) و جمع‌آوری هر کدام از ضرایب  $Q^i$  و مساوی صفر قرار دادن آن‌ها دستگاه معادلات جبری حاصل می‌شود که با حل آن ضرایب زیر را داریم، برای آسانی روند کار دو حالت برای ضرایب در نظر می‌گیریم:

### حالت اول

$$a_0 = \sqrt{\frac{3}{2vk}} k^{\frac{1}{\alpha}} (\ln a), \quad a_1 = -\sqrt{\frac{6}{vk}} k^{\frac{1}{\alpha}} (\ln a), \quad c = \frac{1}{\alpha} k (-2 + k^2 (\ln a)^2), \quad (۷۰.۴)$$

ضرایب بالا را در معادله (۶۸.۴) قرار می‌دهیم و جواب معادله (۶۵.۴) را به صورت زیر به دست می‌آوریم.

$$u_1(x, t) = (\ln a) \sqrt{\frac{3}{2kv}} k^{\frac{1}{\alpha}} \tan F_s \left( \frac{kx^\alpha}{2\Gamma(1+\alpha)} + \frac{ct^\alpha}{2\Gamma(1+\alpha)} + \frac{\xi_0}{2} \right), \quad (۷۱.۴)$$

$$u_2(x, t) = (\ln a) \sqrt{\frac{3}{2kv}} k^{\frac{1}{\alpha}} \cot F_s \left( \frac{kx^\alpha}{2\Gamma(1+\alpha)} + \frac{ct^\alpha}{2\Gamma(1+\alpha)} + \frac{\xi_0}{2} \right). \quad (۷۲.۴)$$

### حالت دوم

$$a_0 = -\sqrt{\frac{3}{2vk}} k^{\frac{1}{\alpha}} (\ln a), \quad a_1 = \sqrt{\frac{6}{vk}} k^{\frac{1}{\alpha}} (\ln a), \quad c = \frac{1}{\alpha} k (-2 + k^2 (\ln a)^2), \quad (۷۳.۴)$$

با جانشانی ضرایب بالا در معادله (۶۸.۴) جواب معادله (۶۵.۴) را همانند زیر داریم:

$$u_3(x, t) = -(\ln a) \sqrt{\frac{3}{2kv}} k^{\frac{1}{\alpha}} \tan F_s \left( \frac{kx^\alpha}{2\Gamma(1+\alpha)} + \frac{ct^\alpha}{2\Gamma(1+\alpha)} + \frac{\xi_0}{2} \right), \quad (۷۴.۴)$$

$$u_4(x, t) = -(\ln a) \sqrt{\frac{3}{2kv}} k^{\frac{1}{\alpha}} \cot F_s \left( \frac{kx^\alpha}{2\Gamma(1+\alpha)} + \frac{ct^\alpha}{2\Gamma(1+\alpha)} + \frac{\xi_0}{2} \right). \quad (۷۵.۴)$$

### ۸.۳.۴ معادله پتانسیل مکان-زمان کسری $KP$

معادله پتانسیل مکان-زمان کسری  $KP$  زیر را در نظر می‌گیریم.

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} D_t^\alpha (D_t^\alpha (D_t^\alpha (D_t^\alpha))) + \frac{3}{\Gamma(\alpha)} D_x^\alpha u D_x^\alpha (D_x^\alpha u) + \frac{3}{\Gamma(\alpha)} D_y^\alpha (D_y^\alpha u) + D_t^\alpha (D_x^\alpha u) = 0, \quad (76.4)$$

که در آن  $0 < \alpha \leq 1, t > 0$  است. تبدیل موج سیار زیر را که در آن  $k, c, \xi$  ثابت هستند، مانند زیر داریم:

$$u(x, t) = u(\xi), \quad \xi = \frac{kx^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{ly^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{ct^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + \xi. \quad (77.4)$$

مانند مثال قبل، با بکارگیری تبدیل فوق معادله (۷۶.۴) به معادله دیفرانسیل معمولی زیر تبدیل می‌شود.

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} k^4 u''' + \frac{3}{\Gamma(\alpha)} k^3 (u')^2 u'' + \frac{3}{\Gamma(\alpha)} l^2 u' + kcu' = 0 \quad (78.4)$$

اگر عبارت و را در معادله بالا با هم موازنه کنیم، عدد تعادل  $N = 1$  به دست می‌آید.

$$g(\xi) = u(\xi) = \sum_{i=0}^N a_i Q^i = \sum_{i=0}^1 a_i Q^i = a_0 + a_1 Q, \quad (79.4)$$

مانند معادله اصلاح شده مکان-زمان کسری  $BBM$  روابط (۶۹.۴) را داریم. با جانشانی این روابط در معادله (۶۷.۴) و جمع‌آوری هر کدام از ضرایب  $Q^i$  و مساوی صفر قرار دادن آن‌ها دستگاه معادلات جبری حاصل می‌شود که با حل آن ضرایب زیر را داریم.

$$a_0 = 0, \quad a_1 = -2k(\ln a), \quad c = \frac{-(\ln a)^2 k^4 - 3l^2}{4}, \quad (80.4)$$

با قرار دادن معادله (۸۰.۴) در (۷۹.۴) جواب‌های زیر را از معادله (۷۶.۴) به دست می‌آوریم.

$$u(x, y, t) = -2k \left( \frac{1}{1 + a^{\frac{kx^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{ly^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{ct^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + \xi}} \right). \quad (81.4)$$

## ۴.۴ نتیجه گیری

روش کودریاشف شیوه‌ای از حل موج سولیتاری برای طبقه وسیعی از معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی در اختیار ما قرار می‌دهد. اخیراً نویسندگان زیادی روش کودریاشف را بررسی کرده‌اند، اما در این پایان نامه فرم کلی روش کودریاشف را ایجاد می‌کنیم. این روش به تازگی جهت جمع‌آوری جواب‌های دقیق معادلات دیفرانسیل کسری غیرخطی در آثار مختلف مورد توجه قرار گرفته است.

بر طبق این اطلاعات می‌توانیم نتیجه بگیریم  $GKM$  نقش مهمی در پیدا کردن جواب‌های تحلیلی معادلات دیفرانسیل کسری غیرخطی دارد. همچنین تأکید می‌کنیم که این روش به‌طور قابل ملاحظه‌ای در پیدا کردن راه‌های جدید تابع شبه هذلولوی موثر و مورد اطمینان است. بر این عقیده هستیم که این روش را می‌توان برای دیگر معادلات دیفرانسیل کسری غیرخطی نیز اجرا کرد.

در این پایان نامه روش اصلاح‌شده کودریاشف را برای حل معادلات دیفرانسیل کسری جزئی توسعه دادیم. برای معادله پتانسیل کسری مکان-زمان  $KP$  مشابه جواب‌های قبلی در [۲، ۳۲] پیدا کردیم. می‌توان نتیجه گرفت که جواب‌های تابع شبه هذلولوی و متقارن فیوناتچی برای معادله اصلاح شده مکان-زمان کسری  $BBM$  تاکنون در هیچ تحقیقی گزارش نشده است چون جواب‌های جدید به‌دست آمده از این روش با جواب‌های قبلی متفاوت است. همچنین اگر  $a = e$  باشد می‌توانیم جواب‌های شبه هذلولوی دیگری مشابه [۳، ۳۲] پیدا کرد. از آنجایی که این روش برای اصول تعادل همگن است، پس می‌تواند در دیگر معادلات دیفرانسیل کسری جزئی که اصل تعادل همگن را دارا می‌باشند نیز به کار رود.

## مراجع

- [1] S Abbasbandy and A Shirzadi. The first integral method for modified benjamin–bona–mahony equation. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 15(7):1759–1764, 2010.
- [2] JF Alzaidy. The fractional sub-equation method and exact analytical solutions for some nonlinear fractional pdes. *American Journal of Mathematical Analysis*, 1(1):14–19, 2013.
- [3] JF Alzaidy. Fractional sub-equation method and its applications to the space-time fractional differential equations in mathematical physics. *British Journal of Mathematics & Computer Science*, 3(2):153, 2013.
- [4] Harry Bateman and Arthur Erdélyi. *Higher transcendental functions*. McGraw-Hill, 1952.
- [5] Hasan Bulut, Hacı Mehmet Baskonus, and Yusuf Pandir. The modified trial equation method for fractional wave equation and time fractional generalized burgers equation. In *Abstract and Applied Analysis*, volume 2013. Hindawi Publishing Corporation, 2013.
- [6] John W Cahn and John E Hilliard. Free energy of a nonuniform system. i. interfacial free energy. *The Journal of chemical physics*, 28(2):258–267, 1958.
- [7] Zoubir Dahmani and Maamar Benbachir. Solutions of the cahn–hilliard equation with time-and space-fractional derivatives. *Int. J. Nonlinear Sci*, 8(1):19–26, 2009.

- [8] Guy Jumarie. Modified riemann-liouville derivative and fractional taylor series of nondifferentiable functions further results. *Computers & Mathematics with Applications*, 51(9):1367–1376, 2006.
- [9] Guy Jumarie. Fractional partial differential equations and modified riemann-liouville derivative new methods for solution. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 24(1-2):31–48, 2007.
- [10] MM Kabir, A Khajeh, E Abdi Aghdam, and A Yousefi Koma. Modified kudryashov method for finding exact solitary wave solutions of higher-order nonlinear equations. *Mathematical methods in the Applied Sciences*, 34(2):213–219, 2011.
- [11] A Anatolii Aleksandrovich Kilbas, Hari Mohan Srivastava, and Juan J Trujillo. *Theory and applications of fractional differential equations*, volume 204. Elsevier Science Limited, 2006.
- [12] DJ Kordeweg and G de Vries. On the change of form of long waves advancing in a rectangular channel, and a new type of long stationary wave. *Philos. Mag*, 39:422–443, 1895.
- [13] NA Kudryashov. Exact soliton solutions of the generalized evolution equation of wave dynamics. *Journal of applied mathematics and mechanics*, 52(3):361–365, 1988.
- [14] Nikolay A Kudryashov. One method for finding exact solutions of nonlinear differential equations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 17(6):2248–2253, 2012.
- [15] Nikolay A Kudryashov. One method for finding exact solutions of nonlinear differential equations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 17(6):2248–2253, 2012.
- [16] Nikolay A Kudryashov. One method for finding exact solutions of nonlinear differential equations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 17(6):2248–2253, 2012.



- [17] Huaying Li and Yucui Guo. New exact solutions to the fitzhugh–nagumo equation. *Applied Mathematics and Computation*, 180(2):524–528, 2006.
- [18] Shikuo Liu, Zuntao Fu, Shida Liu, and Qiang Zhao. Jacobi elliptic function expansion method and periodic wave solutions of nonlinear wave equations. *Physics Letters A*, 289(1):69–74, 2001.
- [19] A Novick-Cohen. The cahn-hilliard equation, handbook of differential equations: Evolutionary equations, vol. iv, 201–228, handb. *Differ. Equat., Elsevier/North-Holland, Amsterdam*, 2008.
- [20] Yusuf Pandir, Yusuf Gurefe, and Emine Misirli. The extended trial equation method for some time fractional differential equations. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2013, 2013.
- [21] Igor Podlubny. *Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*, volume 198. Academic press, 1998.
- [22] Pavel N Ryabov. Exact solutions of the kudryashov–sinelshchikov equation. *Applied Mathematics and Computation*, 217(7):3585–3590, 2010.
- [23] Pavel N Ryabov. Exact solutions of the kudryashov–sinelshchikov equation. *Applied Mathematics and Computation*, 217(7):3585–3590, 2010.
- [24] Pavel N Ryabov, Dmitry I Sinelshchikov, and Mark B Kochanov. Application of the kudryashov method for finding exact solutions of the high order nonlinear evolution equations. *Applied Mathematics and Computation*, 218(7):3965–3972, 2011.
- [25] R Sahadevan and T Bakkyaraj. Invariant analysis of time fractional generalized burgers and korteweg–de vries equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 393(2):341–347, 2012.
- [26] AA Soliman and HA Abdo. New exact solutions of nonlinear variants of the rlw, the phi-four and boussinesq equations based on modified extended direct algebraic method. *arXiv preprint arXiv:1207.5127*, 2012.

- [27] Alexey Stakhov and Boris Rozin. On a new class of hyperbolic functions. *Chaos, Solitons & Fractals*, 23(2):379–389, 2005.
- [28] Filiz Tascan, Ahmet Bekir, and Murat Koparan. Travelling wave solutions of nonlinear evolution equations by using the first integral method. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 14(5):1810–1815, 2009.
- [29] Mingliang Wang, Xiangzheng Li, and Jinliang Zhang. The  $(\ )$ -expansion method and travelling wave solutions of nonlinear evolution equations in mathematical physics. *Physics Letters A*, 372(4):417–423, 2008.
- [30] Abdul-Majid Wazwaz. *Partial differential equations and solitary waves theory*. Springer Science & Business Media, 2010.
- [31] Zhenya Yan. Abundant families of jacobian elliptic function solutions of the  $(2+1)$ -dimensional integrable davey–stewartson-type equation via a new method. *Chaos, Solitons & Fractals*, 18(2):299–309, 2003.
- [32] Elsayed ME Zayed, Yasser A Amer, and Reham MA Shohib. Exact traveling wave solutions for nonlinear fractional partial differential equations using the improved  $(g'/g)$ -expansion method. *International Journal of Engineering*, 4(7):8269, 2014.
- [33] EME Zayed and Khaled A Gepreel. The  $(g/g)$ -expansion method for finding traveling wave solutions of nonlinear partial differential equations in mathematical physics. *Journal of Mathematical Physics*, 50(1):013502, 2009.

**Abstract** Many of around phenomenon in the world are nonlinear and we can describe them by nonlinear equations. with the help of advanced computers; solving the linear problems is easy but in generally, it will be difficult to find the exact solution of nonlinear problems. In this thesis, our goal is to find exact solution of nonlinear fractional differential equations by using of Kudryashov method. For this goal, we first introduce fractional calculus functions and express some of their properties; then we introduce the concept of derivative and integral with noninteger order and their relations and properties. Also we explain the classical Kudryashov method for equations. Finally we solve some type of nonlinear fractional differential equations by using of the generalized and modified Kudryashov method.

**keywords:** Fractional calculus, Kudryashov method, Wave equation, Time-fractional differential equations, The generalized and modified Kudryashov methods



**Shahrood University Of Technology**

**Faculty Of Mathematical Sciences**

**The Kudryashov Method For Solving  
Fractional Differential Equations**

**Atefeh Taghipour**

**Supervisor**

**Dr.mesforush**

**Advisor**

**Dr.Eslami**

**January 2016**