



دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی کاربردی

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی کاربردی، گرایش گراف و ترکیبیات

عنوان

عدد گراندی گراف ها

استاد راهنما

دکتر میثم علیشاهی

دانشجو

فاطمه رضامحمدی

بهمن ۱۳۹۴

تقدیم بہ مہربان فرشتگانی کہ

از نگاہشان صلابت

از رفتارشان محبت

و از صبرشان ایستادگی را آموختم

تقدیم بہ پدر و مادر عزیزم

سپاس‌گزاری...

نخستین سپاس و ستایش از آن خداوندی است که بنده کوچکش را در دریای بیکران اندیشه، قطره‌ای ساخت تا وسعت آن را از دریچه اندیشه‌های ناب آموزگارانی بزرگ به تماشا نشیند.

لذا اکنون که در سایه سار بنده‌نوازی‌هایش پایان‌نامه حاضر به انجام رسیده است، بر حسب وظیفه و از باب ”من لم یشکر المنعم من المخلوقین لم یشکر الله عزّ و جلّ“ از پدر و مادر عزیزم... این دو معلم بزرگوارم... که همواره بر کوتاهی و درستی من، قلم عفو کشیده و کریمانه از کنار غفلت‌هایم گذشته‌اند و در تمام عرصه‌های زندگی یار و یآوری بی چشم داشت برای من بوده‌اند سپاس گویم و بر خود لازم می‌دانم از استاد با کمالات و شایسته‌ام، جناب آقای دکتر میثم علیشاهی که در کمال سعه صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و با راهنمایی‌های ارزنده و گهربارشان نقش مهمی در به ثمر رسیدن این پایان‌نامه داشتند، صمیمانه تقدیر و تشکر نمایم. از اساتید فرزانه و دلسوز، آقایان دکتر نادر جعفری راد و دکتر صادق رحیمی شعرباف که زحمت داوری این پایان‌نامه را متقبل شدند، کمال تشکر و قدردانی را دارم. باشد که این خردترین، بخشی از زحمات آنان را سپاس گوید.

فاطمه رضامحمدی
بهمن ۱۳۹۴

تعمدنامه

اینجانب فاطمه رضامحمدی دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی دانشکده علوم ریاضی دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان عدد گراندی گراف ها ، تحت راهنمایی دکتر میثم علیشاهی متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تاکنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه شاهرود “ یا “ Shahrood University “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

فاطمه رضامحمدی

بهمن ۱۳۹۴

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

یک رنگ آمیزی سره از یک گراف، تابعی است که به هر راس، یک رنگ اختصاص می دهد بطوریکه رئوس مجاور رنگ های متفاوتی دریافت کرده باشند. رنگ آمیزی های سره یک مدل طبیعی برای مسائل بسیاری مانند برنامه زمانبندی، انتقال فرکانس و تخصیص ثبات هستند. مسئله پیدا کردن یک رنگ آمیزی سره از یک گراف با کمترین رنگ یک مسئله NP-hard است. در این پایان نامه قصد داریم رنگ آمیزی گراندی را بیان کنیم که یک رنگ آمیزی سره را پیدا می کند. برای بیان رنگ آمیزی گراندی نیاز به تعریف رنگ آمیزی حریصانه است. رنگ آمیزی حریصانه در گراف G یک رنگ آمیزی راسی است بطوریکه ابتدا راسهای گراف n -راسی با اندیسهای $1, 2, \dots, n$ ، اندیس گذاری می کنیم سپس رنگ آمیزی به ترتیب اندیسها طوری انجام می شود که رنگ راس i -ام کوچکترین شماره رنگی باشد که در راسهای قبلی مجاور یعنی راسهای مجاور با اندیس کمتر به کار نرفته باشد. عدد گراندی گراف G ، ماکسیمم مقدار k است که G یک k -رنگ پذیر حریصانه باشد. عدد گراندی گراف G را با $\Gamma(G)$ نشان می دهند. در این پایان نامه به بیان نتایج درباره عدد گراندی گراف ها می پردازیم، همچنین عدد گراندی-بازی و عدد گراندی حاصلضرب گراف ها را معرفی و نتایجی در این زمینه را بررسی می کنیم.

کلمات کلیدی : عدد گراندی، عدد گراندی-بازی، حاصلضرب گراف ها، رنگ آمیزی حریصانه

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

- ۱.۱ . فاطمه رضامحمدی ، ” عدد گراندی - بازی در گراف ها ” ، دومین همایش ملی ریاضیات و کاربردهای آن در علوم مهندسی، جویبار، اردیبهشت ۱۳۹۴.
- ۲.۲ . فاطمه رضامحمدی ، ” نتایجی بر عدد گراندی گراف ها ” ، دومین همایش ملی ریاضیات و کاربردهای آن در علوم مهندسی، جویبار، اردیبهشت ۱۳۹۴.
- ۳.۳ . فاطمه رضامحمدی ، ” کران های جدیدی برای عدد گراندی حاصلضرب گراف ها ” ، دومین همایش ملی ریاضیات و کاربردهای آن در علوم مهندسی، جویبار، اردیبهشت ۱۳۹۴.

پیشگفتار

مهمترین مفهوم این پایان نامه، رنگ آمیزی گراف است. رنگ آمیزی گراف افرازی از رئوس گراف به مجموعه ای از کلاس های رنگی است. این رنگ آمیزی مدل طبیعی مسائلی هستند که عناصر آن برحسب قوانین تعیین شده ای افراز شده باشند. اشیاء و روابط بینشان را می توان با یک گراف مدل سازی کرد و به دنبال افرازی از راس های گراف به کلاس هایی گشت که محدودیت های خاصی از مساله در آن افراز صدق می کنند. برحسب ساختاری که به افرازاها تحمیل می شود رنگ آمیزی های متفاوتی می توان بدست آورد. به عنوان مثال اگر هر کلاس رنگی مطابق با یک مجموعه مستقل از گراف باشد به این رنگ آمیزی، سره می گویند. یکی از کاربردهای این رنگ آمیزی، مدل سازی بعضی مسائل مانند مساله زمانبندی^۱ [۱۸]، انتقال فرکانس^۲ [۲۳]، تخصیص ثبات^۳ [۱۱، ۱۲] و روش عناصر متناهی^۴ [۴۶] به رنگ آمیزی های سره است. بدیهی است که بدست آوردن یک رنگ آمیزی سره ای که هیچ شرطی روی کلاس های رنگی تحمیل نشده باشد کار آسانی خواهد بود. یک مساله چالش انگیز پیدا کردن رنگ آمیزی با کمترین تعداد رنگ ممکن است. به مینیم تعداد رنگ های یک رنگ آمیزی سره گراف G ، عدد رنگی گراف G می گویند که آن را با $\chi(G)$ نشان می دهند.

مساله پیدا کردن یک رنگ آمیزی سره با کمترین تعداد رنگ، یک مساله NP-hard است. تصمیم اینکه یک گراف، رنگ آمیزی سره ای با k رنگ داشته باشد یک مساله NP-complete است حتی اگر k ثابت باشد [۳۸]. بعلاوه تقریب زدن عدد رنگی کار سختی است زیرا برای هر $\epsilon > 0$ ، الگوریتمی وجود ندارد که با ضریب $n^{1-\epsilon}$ ، عدد رنگی را تقریب بزند مگر اینکه $P=NP$ باشد [۶۰]. از طرف دیگر الگوریتم های برای بدست آوردن عدد رنگی پیشنهاد داده شدند. به عنوان مثال می توانید به [۳۴، ۲۵، ۴۴] مراجعه کنید.

بنابراین مشخص کردن عدد رنگی یک گراف مساله ای سخت است، الگوریتم های ابتکاری هستند که رنگ آمیزی های سره تولید می کنند. تعداد زیادی از کران های بالای عدد رنگی از رنگ آمیزی های ابتکاری بدست آمدند. یک الگوریتم ابتکاری ساده و گسترده، الگوریتم رنگ آمیزی حریصانه است که به هر راس گراف، کوچکترین رنگی که در همسایه های آن راس ظاهر نشده باشد را نسبت می دهد. رنگ آمیزی که از این روش بدست می آید را رنگ آمیزی حریصانه^۵ می نامند. به ماکسیم تعداد رنگ در رنگ آمیزی حریصانه، عدد گراندی گفته می شود که آن را با $\Gamma(G)$ نشان می دهند. کریستین و سلکو^۶ [۱۳] اولین کسانی بودند که واژه رنگ آمیزی گراف را تعریف کردند. بعد از آن نویسنده های زیادی در زمینه عدد گراندی فعالیت کردند. بر خلاف عدد رنگی، بدست آوردن رنگ آمیزی حریصانه کار آسانی

^۱Scheduling

^۲Frequency assignment

^۳Register allocation

^۴Finite element method

^۵Greedy coloring

^۶Christen and Selkow

است پس می توان کران بالایی برای عدد رنگی ارائه داد. یکی از کاربردهای رنگ آمیزی حریصانه، حل مسئله تخصیص انبار پویا^۷ است. در این پایان نامه مفاهیم رنگ آمیزی گراندی را بیان می کنیم و به اثبات قضایای مربوط به آن می پردازیم. آنچه پس از مطالعه توانسته ایم بازنویسی نماییم چهار فصلی است که در این نوشتار آورده ایم.

در فصل اول تعریف های ساده و در عین حال بنیادی نظریه گراف مطرح شده است. در فصل دوم مفاهیم عدد بازی-رنگی، بازی نشانه گذاری و عدد گراندی-بازی را بیان کردیم و سپس عدد گراندی-بازی جنگل و ۲-درخت جزئی را مورد محاسبه قرار دادیم. ثابت شده که بدست آوردن عدد گراندی گراف ها مسأله ای NP-complete است. اما در بعضی از گراف ها و با وجود شرایط خاص می توان عدد گراندی گراف را محاسبه کرد. در فصل سوم به مطالعه بعضی از گراف هایی می پردازیم که عدد گراندی آنها قابل محاسبه است. در فصل چهارم این پایان نامه مفاهیم حاصلضرب رسته ای، حاصلضرب الفبایی، حاصلضرب دکارتی و حاصلضرب قوی گراف ها را بیان کردیم و به بررسی روابط بین عدد گراندی حاصلضرب گراف ها پرداخته ایم.

^۷Dynamic storage allocation problem

فهرست مطالب

لیست تصاویر	ذ
لیست جداول	۱
۱ مقدمات و تعاریف	۳
۱.۱ تعاریف و نمادهای مقدماتی	۳
۲.۱ رنگ آمیزی گراف	۲۱
۳.۱ عدد گراندی	۲۵
۲ عدد گراندی - بازی در گراف‌ها	۳۱
۱.۲ مقدمه	۳۱
۲.۲ تعاریف و نتایج مقدماتی	۳۱
۳.۲ بازی عدد گراندی جنگل	۳۶
۴.۲ بازی عدد گراندی ۲-درخت جزیی	۴۷
۵.۲ گراف هایی با عدد بازی رنگی بزرگتر از عدد بازی گراندی	۵۲
۳ نتایج بر عدد گراندی گراف‌ها	۵۹
۱.۳ مقدمه	۵۹
۲.۳ تعاریف و نتایج مقدماتی	۵۹
۳.۳ عدد گراندی با داشتن t -اتم	۶۰
۴.۳ عدد گراندی با داشتن خوشه توسعه یافته	۶۳
۵.۳ عدد گراندی با داشتن مجموعه احاطه گریالی	۶۳
۶.۳ نامعادله نردهوس-گادوم برای اعداد گراندی	۶۵
۴ عدد گراندی حاصلضرب گراف‌ها	۷۱
۱.۴ مقدمه	۷۱

۷۱	تعاریف و نتایج مقدماتی	۲۰۴
۷۷	درخت دودویی	۳۰۴
۸۵	آ جدول نمادها	
۸۷	ب پیچیدگی الگوریتم	
۸۸	۱.ب پیچیدگی حافظه	
۸۹	۲.ب بهبود پیچیدگی یک برنامه	
۹۰	۳.ب الگوریتم کارآمد	
۹۲	۴.ب تبدیل مسائل محاسباتی به مسائل بولی	
۹۳	۵.ب ماشین تورینگ	
۹۳	۶.ب مسائل تصمیم	
۹۷	پ پیشنهادات	
۹۹	مراجع	
۱۰۵	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی	
۱۰۹	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی	
۱۱۲	نمایه	

لیست تصاویر

۴		گراف G	۱.۱
۴		گراف N_4	۲.۱
۵		گراف چندگانه G	۳.۱
۵		گراف ساده	۴.۱
۶		(الف) گراف متناهی و (ب) گراف نامتناهی	۵.۱
۷		گراف خود مکمل G	۶.۱
۷		گراف پترسن	۷.۱
۸		اجتماع، اشتراک و تفاضل دو گراف G و G'	۸.۱
۸		G' یک زیرگراف القایی از G	۹.۱
۹		گراف G و زیرگراف های آن	۱۰.۱
۱۱		گشت، گذر و مسیر در گراف G	۱۱.۱
۱۱		(الف) یک گراف همبند و (ب) یک گراف ناهمبند با سه مولفه	۱۲.۱
۱۲		v, x, y, w برش راسی گراف هستند	۱۳.۱
۱۳		درخت	۱۴.۱
۱۴		گراف های K_4 و K_5	۱۵.۱
۱۴		خوشه	۱۶.۱
۱۵		(الف) یک مجموعه مستقل راسی و (ب) یک مجموعه راسی ماکزیمم	۱۷.۱
۱۵		(الف) یک مجموعه مستقل یالی و (ب) یک مجموعه یالی ماکزیمم	۱۸.۱
۱۶		گراف دوبخشی	۱۹.۱
۱۶		گراف دوبخشی کامل $K_{3,3}$	۲۰.۱
۱۷		(الف) یک تطابق ماکزیمم و (ب) یک تطابق کامل	۲۱.۱
۱۹		(الف) گراف سطح G و (ب) یک نشان دادن سطح G	۲۲.۱
۲۰		کوگراف دو گراف G_1 و G_2	۲۳.۱
۲۱		گراف جهتدار G	۲۴.۱
۲۲		رنگ آمیزی راسی با چهار رنگ	۲۵.۱

۲۴	رنگ آمیزی یالی گراف	۲۶.۱
۲۴	رنگ آمیزی وجهی گراف	۲۷.۱
۲۶	دو رنگ آمیزی حریصانه گراف پترسن	۲۸.۱
۲۸	درخت دودویی B_k به ازای $k = ۱, ۲, \dots, ۵$	۲۹.۱
۲۹	خانواده A_k به ازای $k = ۱, ۲, \dots, ۴$	۳۰.۱
۳۴	$\Gamma_g^A(K_{nn}^*) = n$	۱.۲
۳۴	$\Gamma_g^B(K_{nn}^*) = ۲$	۲.۲
۴۶	$\Gamma_g^A(P_V)$	۳.۲
۴۶	$\Gamma_g^B(P_V)$	۴.۲
۵۳	$G_1 \oplus G_2$	۵.۲
۵۴	$G_1 \oplus G_2$	۶.۲
۶۱	ساخت اتم G با استفاده از اتم H و $m = ۳$	۱.۳
۶۷	رنگ آمیزی گراندی درخت T_t	۲.۳
۷۳	$G[S_2] \square K_2$	۱.۴
۷۴	$G[S_2][K_2]$	۲.۴
۷۵	$G_3[K_2]$	۳.۴
۷۸	مسیر با چهار راس	۴.۴
۹۱	الگوریتم مدرسه ابتدایی	۱.ب
۹۲	مقایسه پیچیدگی زمانی الگوریتم ها	۲.ب
۹۴	الگوریتم قطعی و غیرقطعی	۳.ب
۹۶	کلاس های پیچیدگی زمانی	۴.ب

لیست جداول

۸۵		جدول نمادها	۱.آ
۸۶		جدول نمادها	۲.آ

فصل ۱

مقدمات و تعاریف

در این فصل به تعاریف و مفاهیم اولیه نظریه گراف و همچنین قضایایی که در فصل‌های بعد به آن‌ها نیاز داریم، می‌پردازیم. قسمت اعظم گراف‌های مورد بحث در سرتاسر این پایان‌نامه، گراف‌های ساده هستند یعنی بین هر دو راس این گراف‌ها حداکثر یک یال وجود دارد. در ادامه، گراف ساده به طور دقیق تعریف می‌شود. تعاریف و قضایای این فصل برگرفته از مراجع [۳۹]، [۱۵]، [۱۷]، [۱۴] و [۴۷] می‌باشند.

۱.۱ تعاریف و نمادهای مقدماتی

تعریف ۱.۱.۱. گراف ^۱ G یک سه تایی مرتب $(V(G), E(G), \Psi_G)$ است که $V(G)$ مجموعه متناهی و ناتهی از راس‌ها ^۲، $E(G) \subset [V(G)]^2$ مجموعه متناهی از یال‌ها ^۳ و یک تابع وقوع ^۴ Ψ_G است که $[V(G)]^2$ تمام زیرمجموعه‌های دو عضوی از $V(G)$ است و تابع وقوع Ψ_G به هر یال G ، یک زوج نامرتب از راس‌های G را نسبت می‌دهد. تعداد رئوس یک گراف G را مرتبه ^۵ G می‌نامند و آن را با نماد $|V(G)| = n$ نشان می‌دهند و تعداد یالهای یک گراف G را اندازه ^۶ G می‌نامند و آن را با نماد $|E(G)| = m$ نشان می‌دهند. یک گراف n -راسی، گرافی با مرتبه n است. یال $\{u, v\}$ را با uv نمایش می‌دهند و می‌گویند راس u با راس v مجاور ^۷ است. اگر $uv \in E(G)$ باشد راس‌های u و v را رئوس انتهایی ^۸ آن یال می‌نامند. به دو یال متمایزی که در

^۱ Graph

^۲ Vertices

^۳ Edges

^۴ Incidence function

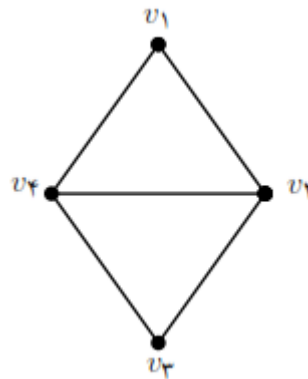
^۵ Order

^۶ Size

^۷ Adjacent

^۸ Endvertices

یک راس انتهایی مشترک باشند، دو یال مجاور می‌گویند. زمانی که فقط یک گراف مورد بحث است معمولاً این گراف را با G نشان می‌دهیم سپس حرف G را از نمادهای مربوط به آن حذف می‌کنیم به عنوان مثال به جای $V(G)$ و $E(G)$ به طور ساده می‌نویسیم: V و E . به عنوان مثال در شکل (۱.۱)، مجموعه راس ها و مجموعه یال های گراف G هستند.



شکل ۱.۱: گراف G

تعریف ۲.۱.۱. گرافی که یک راس داشته باشد، بدیهی^۹ و سایر گراف ها را غیر بدیهی^{۱۰} می‌نامیم. تعریف ۳.۱.۱. به راسی که روی هیچ یالی واقع نشده باشد ایزوله^{۱۱} و یا تنها می‌گوییم و گرافی که دارای هیچ یالی نباشد را گراف تهی^{۱۲} می‌نامند. گراف تهی با n راس را با N_n نشان می‌دهند. شکل (۲.۱)، N_4 را نشان می‌دهد.



شکل ۲.۱: گراف N_4

تعریف ۴.۱.۱. به یالی که یک راس را به خودش وصل می‌کند، طوقه^{۱۳} می‌نامیم و چنانچه بیش از یک یال، دو راس انتهایی یکسانی داشته باشند، گراف را چندگانه می‌نامیم. دو یا چند یالی که دو

^۹Trivial graph

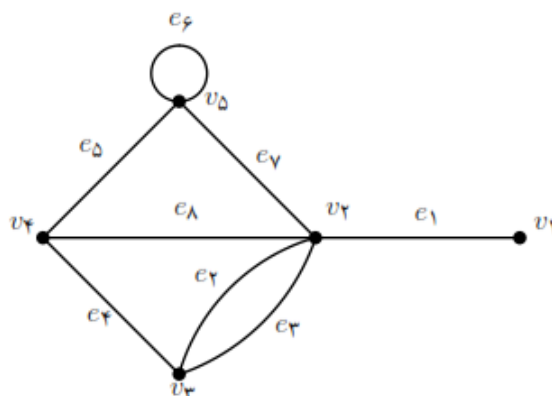
^{۱۰}Nontrivial graph

^{۱۱}Isolated

^{۱۲}Empty graph

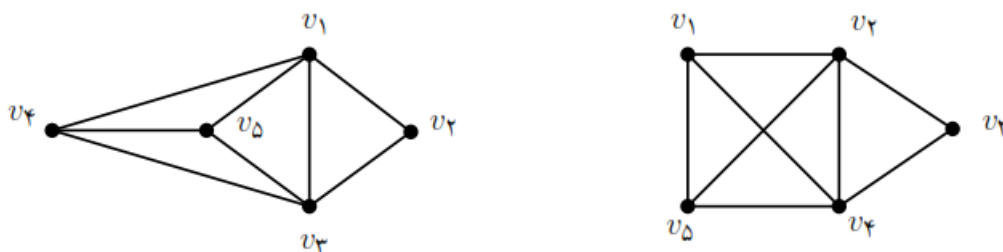
^{۱۳}Loop

راس را به هم وصل کنند، یال های موازی یا چندگانه^{۱۴} نامیده می شوند. در شکل (۳.۱)، e_6 طوقه و e_2, e_3 یال های چندگانه هستند.



شکل ۳.۱: گراف چندگانه G

تعریف ۵.۱.۱. گراف ساده^{۱۵} گرافی است که فاقد طوقه و یال چندگانه است. شکل (۴.۱)، نمونه هایی از گراف های ساده هستند.



شکل ۴.۱: گراف ساده

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف باشد. اگر $uv \in E(G)$ باشد آنگاه u و v در G همسایه^{۱۶} هستند. مجموعه تمام همسایه های $v \in V(G)$ را همسایگی^{۱۷} v می نامند که با $N_G(v)$ نشان می دهند. این نماد به یک مجموعه از رئوس $S \subset V(G)$ توسعه داده می شود که در اینصورت همسایگی رئوس S را میتوان با $N_G(S) = \bigcup_{v \in S} N(v)$ نشان داد.

تعریف ۷.۱.۱. درجه^{۱۸} راس $v \in V(G)$ ، اندازه $N_G(v)$ است. به عبارت دیگر تعداد یال های گذرنده (مار) از یک راس را درجه آن راس می نامیم که آن را با نماد $d_G(v)$ نشان می دهیم. در این تعریف

^{۱۴}Multiple edges

^{۱۵}Simple graphs

^{۱۶}Neighbour

^{۱۷}Neighbourhood

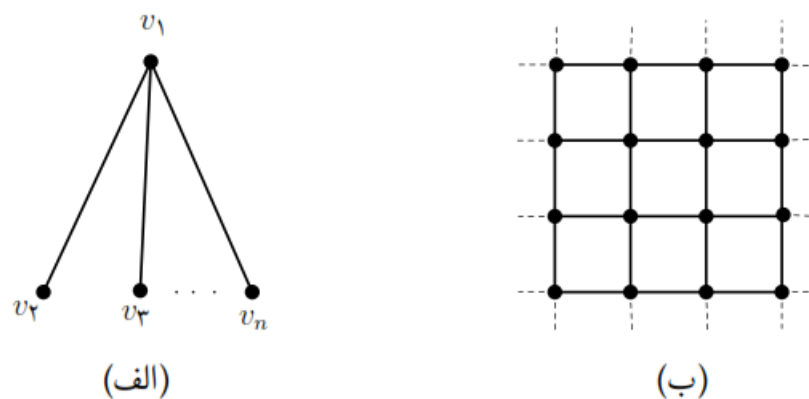
^{۱۸}Degree

هر طوقه به عنوان دو یال شمرده می شود. به عنوان مثال، درجه راس ایزوله، صفر است. چنانچه درجه راس v عددی زوج باشد، v را راسی زوج^{۱۹} و در غیراینصورت آن را راس فرد^{۲۰} می نامیم. مینیم درجه از G ، کوچکترین درجه از یک راس در G است که با $\delta(G)$ نشان داده می شود و همچنین ماکزیم درجه از G ، بزرگترین درجه از یک راس در G است که با $\Delta(G)$ نشان داده می شود. میانگین درجه از G را با $d(G) = \frac{1}{|V|} \sum_{v \in V} d(v)$ نشان می دهند. در نتیجه $\delta(G) \leq d(G) \leq \Delta(G)$ خواهد بود.

گزاره ۸.۱.۱. اگر G گرافی با درجه های $d_1, d_2, \dots, d_n$ باشد، آنگاه $\sum_{i=1}^n d_i = 2E(G)$ است.

گزاره ۹.۱.۱. در هر گراف، تعداد راس های فرد، زوج است.

تعریف ۱۰.۱.۱. اگر مجموعه راس ها و مجموعه یال های یک گراف، متناهی باشند گراف مذکور را متناهی^{۲۱} می نامند در غیر اینصورت گراف نامتناهی^{۲۲} است. تمام گراف های ذکر شده در این پایان نامه، متناهی هستند. شکل (۵.۱) یک گراف متناهی و یک گراف نامتناهی را نشان می دهد.



شکل ۵.۱: (الف) گراف متناهی و (ب) گراف نامتناهی

تعریف ۱۱.۱.۱. برای گراف G ، گرافی با $V(\overline{G}) = V(G)$ و $E(\overline{G}) = \{uv \in [V]^2 \mid uv \notin E(G)\}$ را مکمل^{۲۳} گراف G می نامند و آن را با $\overline{G}$ نشان می دهند. به عبارت دیگر هر دو راس u و v در $\overline{G}$ مجاور اند اگر و فقط اگر در G مجاور نباشند. اگر گراف G ، با مکملش یکرخت باشد گراف G را خود-مکمل^{۲۴} می نامیم. (شکل ۶.۱)

^{۱۹}Even vertex

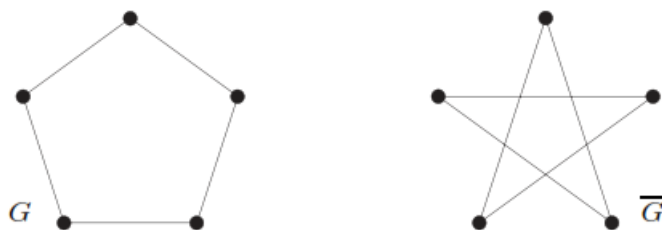
^{۲۰}Odd vertex

^{۲۱}Finite graph

^{۲۲}Infinite graph

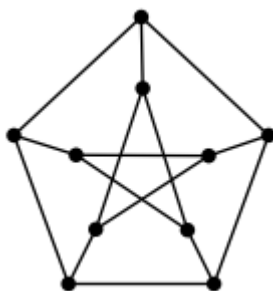
^{۲۳}Complement

^{۲۴}Self-complementary



شکل ۶.۱: گراف خود مکمل G

تعریف ۱۲.۱.۱. گرافی که درجه تمام رئوس آن با هم برابر باشند گراف منتظم نامیده می شود. اگر تمام رئوس یک گراف از درجه k باشند، گراف را k -منتظم می نامند. بنابراین در یک گراف منتظم، بیشترین درجه از گراف، با کمترین درجه از گراف با هم برابرند. مثال معروفی از گراف های ۳-منتظم، گراف پترسن^{۲۵} است که در شکل (۷.۱) مشاهده می شود. توجه کنید که هر گراف تهی، منتظم از درجه صفر، هر گراف کامل K_n ، منتظم از درجه $n - 1$ و گراف دوبخشی کامل $K_{n,n}$ ، منتظم از درجه n است. همچنین اگر G ، n راس داشته باشد و منتظم از درجه k باشد، آن گاه G دارای $\frac{kn}{2}$ یال است.



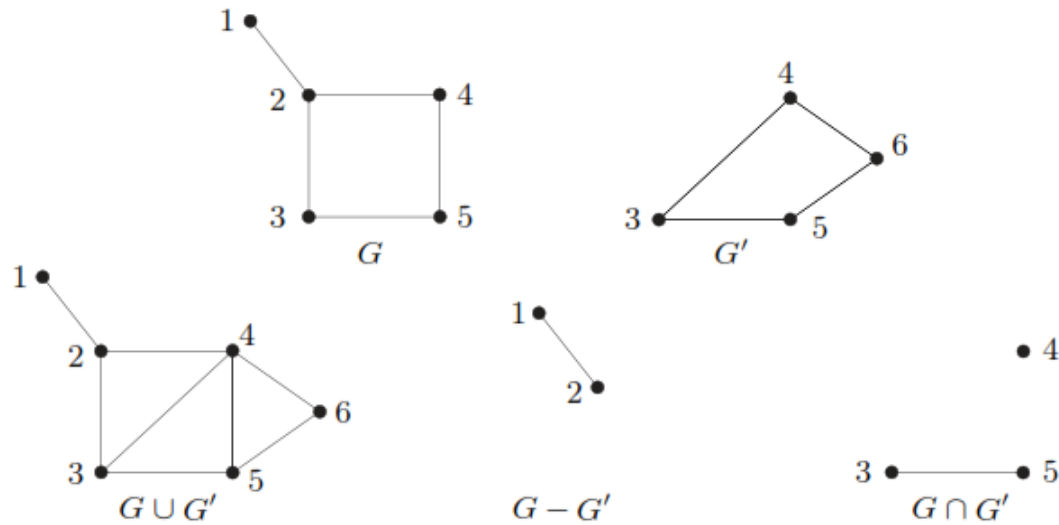
شکل ۷.۱: گراف پترسن

تعریف ۱۳.۱.۱. اجتماع دو گراف G و G' را با $G \cup G' = (V \cup V', E \cup E')$ نشان می دهند. اشتراک دو گراف G و G' را با $G \cap G' = (V \cap V', E \cap E')$ نشان می دهند. اگر $G \cap G' = \emptyset$ باشد دو گراف G و G' متمایز هستند. همچنین تفاضل دو گراف G و G' را با $G - G' = (V \setminus V', E \setminus E')$ نشان می دهند. (شکل ۸.۱)

تعریف ۱۴.۱.۱. اگر دو زیرگراف از گراف G ، هیچ راس مشترکی نداشته باشند، آن دو زیرگراف را مجزا می نامیم و اگر آن دو زیرگراف، هیچ یال مشترکی نداشته باشند، آن دو زیرگراف را یال مجزا می نامیم. **تعریف ۱۵.۱.۱.** اگر $V(H) \subseteq V(G)$ و $E(H) \subseteq \{uv \in E(G) | u, v \in V(H)\}$ باشد گراف H ، یک زیرگراف^{۲۶} از G است (گراف G ، یک ابرگراف^{۲۷} از H است) که آن را با نماد $H \subseteq G$ نشان

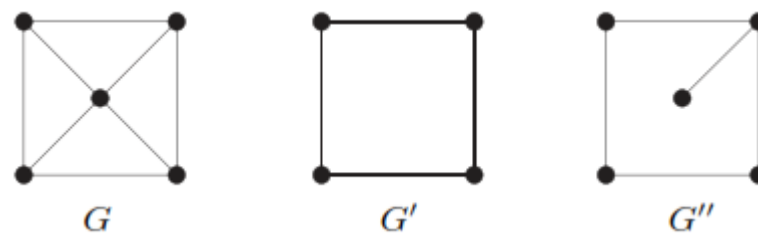
^{۲۵}Petersen graph

^{۲۶}Subgraph



شکل ۸.۱: اجتماع، اشتراک و تفاضل دو گراف G و G'

می دهند و می گویند G شامل H است. برای مثال، هر گراف ساده روی n راس، یک زیرگراف از گراف کامل K_n است. اگر $H \subseteq G$ و $H \neq G$ باشد (یعنی $V(H) \neq V(G)$ یا $E(H) \neq E(G)$) آنگاه H یک زیرگراف سره از G است که آن را با نماد $H \subset G$ نشان می دهند. اگر H یک زیرگراف از G باشد و $V(H) = V(G)$ باشد، H را یک زیرگراف فراگیر G می نامیم. اگر H یک زیرگراف از G باشد و $E(H) = \{uv \in E(G) | u, v \in V(H)\}$ باشد، H یک زیرگراف القایی^{۲۸} از G است. در شکل (۹.۱)، G' و G'' دو زیرگراف از G هستند بعلاوه G' یک زیرگراف القایی از G است در حالیکه G'' یک زیرگراف القایی از G نیست.



شکل ۹.۱: G' یک زیرگراف القایی از G

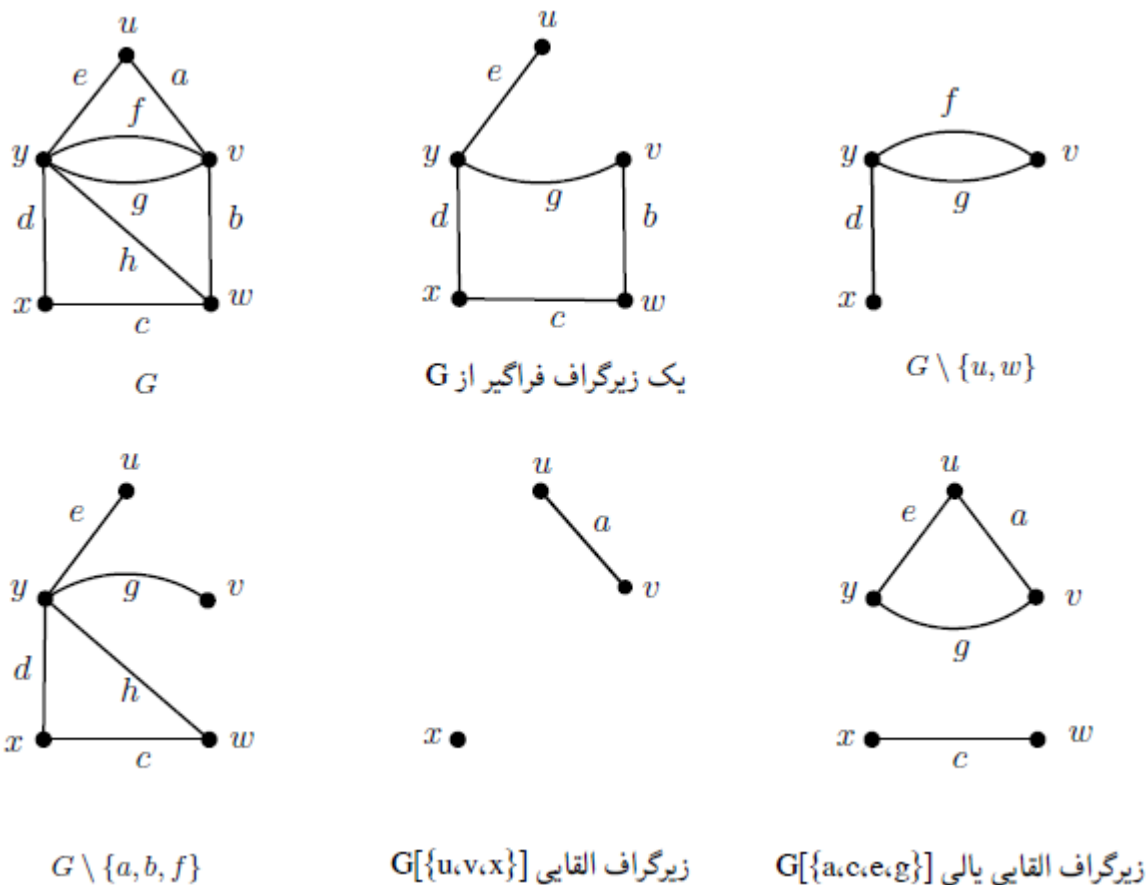
به بیان دیگر زیرگراف G ، القاشده توسط $V' \subset V(G)$ ، زیرگرافی از G است که مجموعه رئوس آن V' و مجموعه یال های آن، یال هایی از گراف G است که دو راس انتهایی آن یال ها در V' باشد. این

^{۲۷}Supergraph

^{۲۸}Induced subgraph

زیرگراف را با $G[V']$ نشان می دهند و آن را زیرگراف القا شده راسی توسط V' می نامیم. زیرگراف القایی $G[V' \setminus V]$ ، زیرگرافی است که با حذف راس های V و یال های واقع بر آن ها، بدست می آید. اگر $V = v$ باشد به جای $G - \{V\}$ ، می نویسیم $G - v$.

فرض کنید E' یک زیرمجموعه ناتهی از یال های گراف G باشد. زیرگرافی از G که مجموعه راس های آن، برابر مجموعه راس های دو سر یال های E' و مجموعه یال هایش برابر E' باشد را زیرگراف القا شده توسط E' نامیده می شود و با $G[E']$ نمایش داده می شود و آن را زیرگراف القا شده یالی توسط E' می نامند. زیرگراف القایی $G[E' \setminus E]$ ، زیرگرافی است که با حذف یال های E بدست می آید و رئوس انتهایی یال های حذف شده، در این زیرگراف حذف نخواهند شد. اگر $E' = e$ باشد به جای $G - \{e\}$ ، می نویسیم $G - e$. (شکل ۱۰.۱)



شکل ۱۰.۱: گراف G و زیرگراف های آن

تعریف ۱۶.۱.۱. فرض کنید G و H دو گراف باشند یک هم ریختی ϕ از H به G ، یک تابع یک به یک $\phi: V(H) \rightarrow V(G)$ است بطوریکه اگر $uv \in E(H)$ باشد آنگاه $\phi(u)\phi(v) \in E(G)$. در این

^{۲۹}Homomorphism

صورت می‌گوییم دو گراف G و H همریخت هستند. تابع ϕ یکرخت^{۳۰} است اگر تابع یک به یک و پوشا $\phi: V(H) \rightarrow V(G)$ باشد بطوریکه $uv \in E(H)$ باشد اگر و فقط اگر $\phi(u)\phi(v) \in E(G)$. در این صورت می‌گوییم G به H یکرخت است و آن را با نماد $G \simeq H$ نشان می‌دهیم. اگر G زیرگرافی داشته باشد که با H یکرخت باشد، در این صورت گفته می‌شود که G شامل زیرگراف H است. اگر G شامل زیرگراف القایی H نباشد، G را H -آزاد^{۳۱} می‌نامند. یکرختی $\phi: V(G) \rightarrow V(G)$ را یک خود ریختی^{۳۲} روی G می‌نامیم.

تعریف ۱۷.۱.۱. یک گشت^{۳۳} از G ، دنباله ناصفر متناهی $W = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots e_k v_k$ است به طوری که جملات آن یک در میان شامل راس‌ها و یال‌ها بوده و به ازای هر $1 \leq i \leq k$ ، $e_i = v_i v_{i-1}$. در اینصورت می‌گوییم W ، یک گشت از v_0 تا v_k یا به عبارت دیگر یک (v_0, v_k) -گشت است. عدد صحیح k را طول W می‌نامیم. یک گشت بدیهی، گشتی است که هیچ یالی نداشته باشد. به بیان دیگر طول گشت بدیهی، صفر است. اگر در یک (v_0, v_k) -گشت، $v_0 = v_k$ باشد گشت را بسته و اگر $v_0 \neq v_k$ باشد گشت را باز می‌نامند.

تعریف ۱۸.۱.۱. اگر یال‌های $e_1, e_2, \dots, e_k$ در گشت W ، متمایز باشند W را گذر^{۳۴} می‌گویند.

تعریف ۱۹.۱.۱. اگر در گشت W ، یال‌های $e_1, e_2, \dots, e_k$ و راس‌های $v_0, v_1, \dots, v_k$ متمایز باشند W را یک مسیر می‌گویند. به عبارت دیگر یک مسیر^{۳۵}، یک گراف ناتهی P با مجموعه رئوس متمایز $V(P) = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ و مجموعه یال‌های $E(P) = \{v_i v_{i+1} | 1 \leq i \leq k-1\}$ است. طول مسیر، اندازه مجموعه یال‌هاست. رئوس v_1 و v_k رئوس انتهایی و $v_2, \dots, v_{k-1}$ رئوس داخلی^{۳۶} P هستند. یک مسیر با رئوس انتهایی v_0 و v_k یک (v_0, v_k) -مسیر نامیده می‌شود. مسیر n راسی را با P_n و مسیر با طول k را با P^k نشان می‌دهیم. (شکل ۱۱.۱)

تعریف ۲۰.۱.۱. اگر یک مسیر، بین هر جفت از رئوس متمایز گراف ناتهی G باشد، گراف G همبند^{۳۷} است. در غیر اینصورت، گراف G را ناهمبند می‌نامیم. بدیهی است که هر گراف ناهمبند متناهی را می‌توان به صورت اجتماع تعداد متناهی از گراف‌های همبند، با مجموعه راس‌های مجزا در نظر گرفت. اگر هر دو راسی از گراف، با k مسیر مستقل به هم متصل شده باشند گراف را k -همبند می‌نامیم. گراف G ، ۱-همبند است اگر و فقط اگر G همبند باشد و حداقل دو راس در G وجود داشته

^{۳۰} Isomorphism

^{۳۱} H-free

^{۳۲} Automorphism

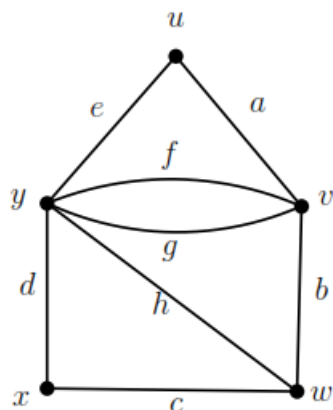
^{۳۳} Walk

^{۳۴} Trail

^{۳۵} Path

^{۳۶} Inner vertices

^{۳۷} Connected



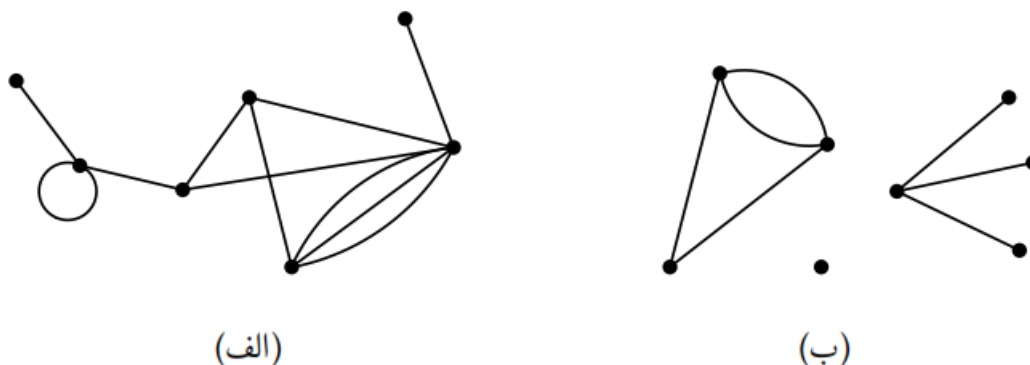
گشت: $uavfyfvgyhwbv$

گذر: $wcxdyhwbgvgy$

مسیر: $xcwhyueuav$

شکل ۱۱.۱: گشت، گذر و مسیر در گراف G

باشد. همچنین گراف G ، ۲-همبند است اگر و فقط اگر G همبند باشد و حداقل سه راس در G وجود داشته باشد. مولفه همبند^{۳۸} در G ، بزرگترین زیرگراف همبند در گراف G است. پس می توان دریافت که هر گراف همبند، یک مولفه دارد. توجه داشته باشید که مولفه ها، همبند هستند پس مولفه ها ناتهی هستند. بنابراین گراف تهی، هیچ مولفه ای ندارد. (شکل ۱۲.۱)



شکل ۱۲.۱: (الف) یک گراف همبند و (ب) یک گراف ناهمبند با سه مولفه

تعریف ۲.۱.۱.۱. فاصله^{۳۹} u و v را با $dist(u, v)$ نشان می دهند که طول کوتاهترین (u, v) -مسیر است. اگر بین دو راس، مسیری وجود نداشته باشد بنا به تعریف فاصله آنها بی نهایت خواهد بود. طول بزرگترین مسیر را قطر^{۴۰} گراف G می گوئیم که آن را با $diam(G)$ نمایش می دهیم. به عبارت دیگر، $diam(G) = \max_{u, v \in V(G)} d(u, v)$ است.

تعریف ۲.۲.۱.۱. یک برش راسی^{۴۱}، یک مجموعه از $S \subset V(G)$ است بطوریکه $G[V(G) \setminus S]$

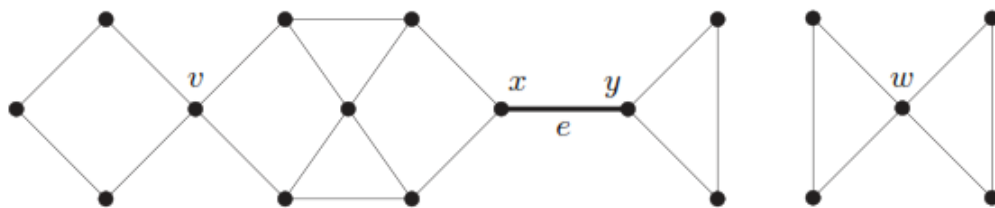
^{۳۸}Connected component

^{۳۹}Distance

^{۴۰}Diameter

^{۴۱}Vertex cut or articulation point

ناهمبند است. به بیان دیگر، $\omega(G - S) > \omega(G)$ است. به عنوان مثال، گراف های کامل هیچ برش راسی ندارند. اندازه کوچکترین مجموعه برش راسی را همبندی G ^{۴۲} می نامند (به بزرگترین مقدار k ، که گراف G یک k -همبند باشد را همبندی می گویند) و آن را با $\kappa(G)$ نشان می دهند. اگر اتصال گرافی، k یا بیشتر از k باشد، گراف k -همبند نامیده می شود. توجه کنید که اگر G گرافی بدیهی یا ناهمبند باشد، $\kappa(G) = 0$ است، اگر G یک برش راسی داشته باشد یا $G = K_2$ باشد، $\kappa(G) = 1$ است و اگر G گراف کامل n راسی باشد، $\kappa(G) = n - 1$ است. بلوک ^{۴۳} ماکسیمال زیرگراف همبندی از گراف است که برش راسی ندارد. اگر گراف G همبند باشد و هیچ برش راسی نداشته باشد گراف G را بلوک می نامند. (شکل ۱۳.۱)



شکل ۱۳.۱: v, x, y, w برش راسی گراف هستند

تعریف ۲۳.۱.۱. یک دور ^{۴۴}، یک گراف C با مجموعه رئوس $V(C) = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ و مجموعه یال های $E(C) = \{v_i v_{i+1} \mid 1 \leq i \leq k-1\} \cup \{(v_k, v_1)\}$ است. طول یک دور، اندازه مجموعه یال هاست. دور به طول k را با C_k نشان می دهند. یک دور با k راس را k -دور می نامیم. یک k -دور را بسته به اینکه k ، زوج یا فرد باشد یک دور زوج یا دور فرد می نامیم. اغلب یک ۳-دور را مثلث ^{۴۵} و ۱-دور را طوقه می نامند. اگر طول دو دور یکسان باشد آن دو دور به هم یکرخت هستند. در شکل (۱۱.۱)، مسیر $wxygvbw$ ، یک دور از گراف G است و مسیر $wcx dyfvg y e u a v b w$ یک گذر بسته از گراف G است.

تعریف ۲۴.۱.۱. اگر زیرگراف های یک گراف، دور نداشته باشد گراف فاقد دور ^{۴۶} نامیده می شود. گراف فاقد دور را جنگل ^{۴۷} می نامند. یک درخت ^{۴۸}، یک جنگل همبند است. بنابراین یک جنگل، گرافی است که مولفه هایش درخت هستند. در یک درخت، به رئوس با درجه یک، برگ می گویند. توجه

^{۴۲}Connectivity

^{۴۳}Block

^{۴۴}Cycle

^{۴۵}Triangle

^{۴۶}Acyclic

^{۴۷}Forest

^{۴۸}Tree

کنید که ریشه درخت، یک راس ثابت در درخت است که هر راس در گراف با یک مسیری به ریشه متصل است. به عبارت دیگر، ریشه راس ابتدایی گراف و برگ راس انتهایی گراف است. یک درخت ریشه دار ^{۴۹}، درختی است که یک ریشه به نام r دارد. برای هر راس v ، (v, r) - مسیر یکتای درخت را با $P(v)$ نشان می دهیم. پدر v ، همسایه راس v در $P(v)$ است. فرزندان v ، دیگر همسایه های راس v هستند. بنابراین برگ ها، رئوسی از گراف هستند که هیچ فرزندی ندارند. اگر ما برگ های درخت را حذف کنیم گراف باقیمانده، یک درخت خواهد بود. درخت ها و جنگل ها هیچ دور فردی در خود ندارند پس یک گراف دوبخشی اند. به عنوان مثال مسیرها در گراف، یک درخت هستند اما یک درخت، زمانی یک مسیر خواهد بود که ماکزیمم درجه رئوس درخت ۲ باشد. (شکل ۱۴.۱)



شکل ۱۴.۱: درخت

قضیه ۲۵.۱.۱. در یک درخت، هر دو راس، تنها با یک مسیر به هم متصل می شوند.

نتیجه ۲۶.۱.۱. در هر درخت غیر بدیهی، حداقل دو راس از درجه یک هستند.

تعریف ۲۷.۱.۱. طول کوچکترین دور گراف را **کمر** ^{۵۰} می نامند. کمر گراف G را با $g(G)$ نشان می دهند. طول بزرگترین دور گراف را **محیط** ^{۵۱} می نامند. اگر هیچ دوری در گراف وجود نداشته باشد کمر گراف طبق تعریف بی نهایت خواهد بود.

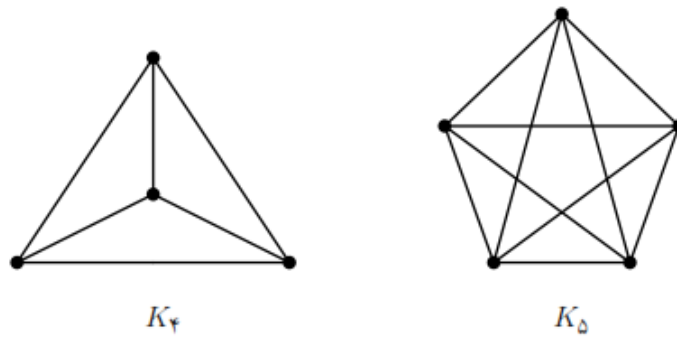
تعریف ۲۸.۱.۱. اگر هر جفت از رئوس متمایز گراف، با یک یال به هم متصل شده باشند گراف حاصل، **گراف کامل** ^{۵۲} نامیده می شود. گراف کامل از مرتبه n را با K_n نشان می دهند. در شکل (۱۵.۱)، K_5 و K_4 را مشاهده می کنید.

^{۴۹}Rooted tree

^{۵۰}Girth

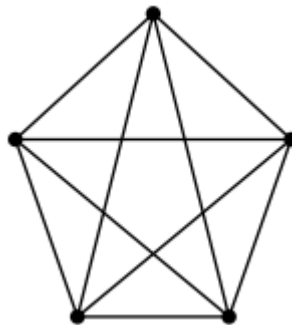
^{۵۱}Circumference

^{۵۲}Complete graph



شکل ۱۵.۱: گراف های K_4 و K_5

تعریف ۲۹.۱.۱. خوشه ^{۵۳} گرافی متشکل از یک مجموعه $S \subset V(G)$ است بطوریکه $G[S]$ گراف کامل باشد. به بیان دیگر یک زیرگراف کامل از گراف G را خوشه G می نامند. تعداد راس های بزرگترین خوشه در G را با $\omega(G)$ نشان می دهند و آن را عدد خوشه ای G می نامند. S یک خوشه در G است اگر و فقط اگر S یک مجموعه مستقل در $\bar{G}$ باشد. شکل (۱۶.۱) یک خوشه است و $\omega(G) = 5$ است.



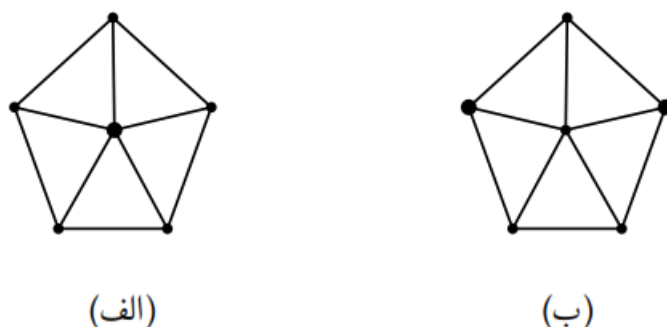
شکل ۱۶.۱: خوشه

تعریف ۳۰.۱.۱. یک مجموعه مستقل راسی ^{۵۴} از یک گراف G ، یک مجموعه $S \subseteq V(G)$ است بطوریکه هیچ دو راسی از S ، در G مجاور نباشند. گرافی که شامل یک مجموعه مستقل از مرتبه n باشد را با S_n نشان می دهند. تعداد راس های بزرگترین مجموعه مستقل راسی را عدد استقلال راسی ^{۵۵} می نامند و آن را با $\alpha(G)$ نشان می دهند. واضح است که $\alpha(G) = \omega(\bar{G})$ و $\omega(G) = \alpha(\bar{G})$. می گوئیم مجموعه مستقل S ، ماکزیمم است اگر هیچ مجموعه مستقل S' با شرط $|S'| > |S|$ وجود نداشته باشد. نمونه هایی از مجموعه های مستقل در شکل (۱۷.۱) نشان داده شده اند.

^{۵۳} Clique

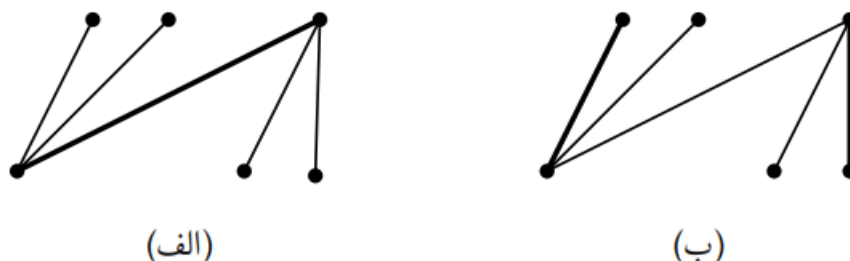
^{۵۴} Vertex stable set

^{۵۵} Vertex independence number



شکل ۱۷.۱: (الف) یک مجموعه مستقل راسی و (ب) یک مجموعه راسی ماکزیمم

حال اگر هیچ دو یالی از $K \subseteq E(G)$ ، در G مجاور نباشند. مجموعه K را یک مجموعه مستقل یالی^{۵۶} می‌نامیم. تعداد یال‌های بزرگترین مجموعه مستقل یالی را عدد استقلال یالی^{۵۷} می‌نامند و آن را با $\alpha'(G)$ نشان می‌دهند. می‌گوییم مجموعه مستقل K ، ماکزیمم است اگر هیچ مجموعه مستقل K' با شرط $|K'| > |K|$ وجود نداشته باشد. در شکل (۱۸.۱) مجموعه مستقل یالی و مجموعه مستقل یالی ماکزیمم نشان داده شده است.



شکل ۱۸.۱: (الف) یک مجموعه مستقل یالی و (ب) یک مجموعه یالی ماکزیمم

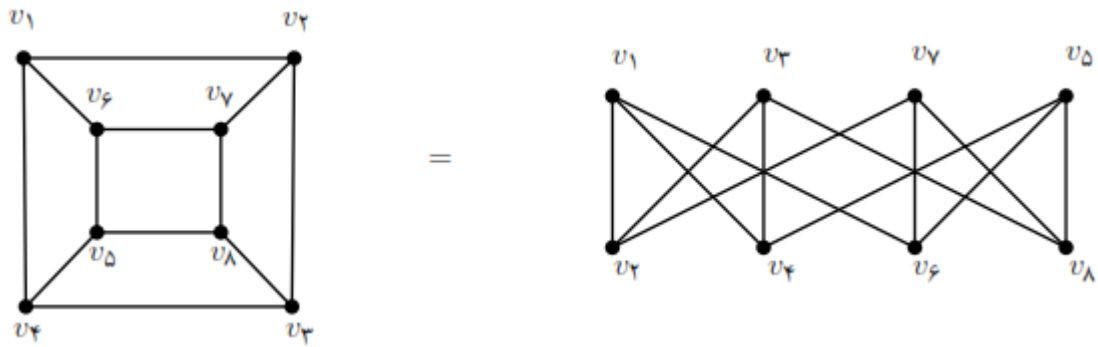
تعریف ۳۱.۱.۱. اگر بتوان مجموعه رئوس یک گراف را به دو مجموعه مستقل افزایش کرد بطوریکه دو راس انتهایی هر یال این گراف، در دو مجموعه مستقل متمایز قرار می‌گیرند. گراف حاصل را دو بخشی^{۵۸} می‌نامند و آن را با $G = (A \cup B, E)$ نشان می‌دهند که A و B بخش‌های گراف G هستند. شکل (۱۹.۱) یک گراف دو بخشی است.

قضیه ۳۲.۱.۱. یک گراف دو بخشی است اگر و تنها اگر زیرگرافی با دور به طول فرد نداشته باشد.

^{۵۶}Edge stable set

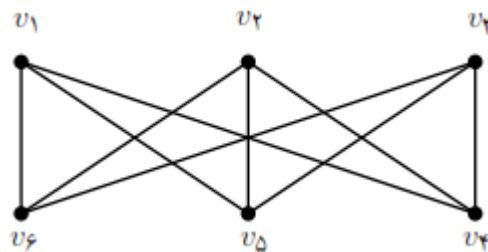
^{۵۷}Edge independence number

^{۵۸}Bipartite



شکل ۱۹.۱: گراف دوبخشی

تعریف ۳۳.۱.۱. اگر $p, q \geq 1$ اعداد طبیعی باشند و بخش هایی به اندازه p و q داشته باشیم به گرافی که بین هر جفت راس از دو بخش متفاوت، یک یال وجود داشته باشد، گراف را **دو بخشی کامل**^{۵۹} می گوئیم و آن را با $K_{p,q}$ نشان می دهیم. در حالت کلی، یک گراف دوبخشی کامل، گراف کامل نیست. $K_{1,1}$ ، تنها گراف دوبخشی کامل است که یک گراف کامل هم هست. برای $p \geq 2$ ، گراف $K_{1,p-1}$ را گراف **ستاره**^{۶۰} از مرتبه p می نامیم. به راسی که به تنهایی در یکی از مجموعه مستقل گراف ستاره قرار دارد، راس مرکزی^{۶۱} ستاره می گویند. شکل (۲۰.۱) یک گراف دوبخشی کامل است.



شکل ۲۰.۱: گراف دوبخشی کامل $K_{3,1}$

تعریف ۳۴.۱.۱. گرافی که بتوان مجموعه راس های آن را به k زیرمجموعه غیرتهی افراز کرد بطوریکه هیچ یالی، دو سرش در یک زیرمجموعه نباشد، گراف **k -بخشی**^{۶۲} نامیده می شود. اگر هر راس از این گراف به تمام راس هایی که در زیرمجموعه ای غیریکسان با آن قرار دارند، وصل شده باشد گراف را **k -بخشی کامل**^{۶۳} می نامیم.

^{۵۹}Complete bipartite graph

^{۶۰}Star

^{۶۱}Centre

^{۶۲} k -partite graph

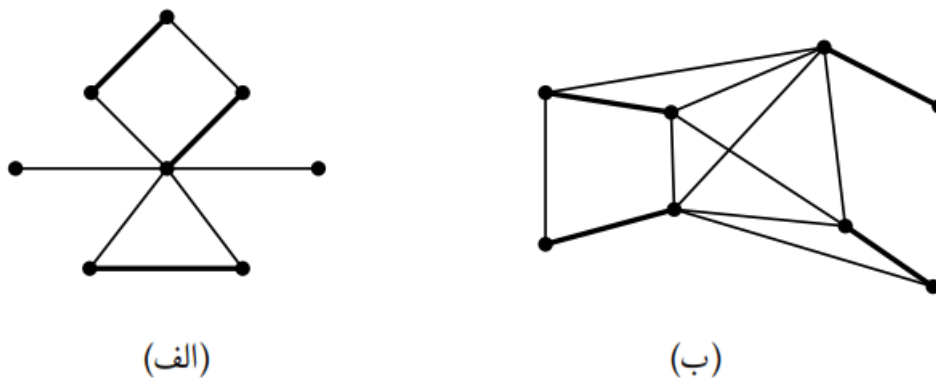
^{۶۳} K -partite complete graph

تعریف ۳۵.۱.۱. یک زیرمجموعه متمایز $A_1, A_2, \dots, A_k$ از مجموعه A ، یک افرازی^{۶۴} از A است اگر برای هر $A_i \in A$ ، $\bigcup A_i = A$ و برای هر i ، $A_i \neq \emptyset$.

تعریف ۳۶.۱.۱. اصل لانه کبوتر. اگر حداقل $n+1$ کبوتر، n لانه را اشغال کنند، آنگاه در حداقل یکی از لانه ها بیش از یک کبوتر خواهد بود. به طور کلی اگر $kn+1$ کبوتر، n لانه را اشغال کنند آنگاه در حداقل یکی از لانه ها بیش از k کبوتر خواهد بود.

مثال ۳۷.۱.۱. در یک امتحان نظریه گراف، ۲۷ نفر حاضر در جلسه، برحسب نمره ای که می گیرند به چهار دسته تقسیم می شوند نتیجه امتحان هر چه باشد، مطابق با اصل لانه کبوتر یکی از دسته ها حداقل ۷ نفر خواهد داشت.

تعریف ۳۸.۱.۱. یک تطابق^{۶۵} یک مجموعه از یال های M در $V' \subseteq V(G)$ است بطوریکه هر رأس در V' ، در یک یال M واقع شده باشد و هر دو یالی از M ، رأس انتهایی مشترکی نداشته باشند. به عبارت دیگر تطابق به یک مجموعه از یال های مستقل گفته می شود. به تعداد یال های در ماکزیمم تطابق، عدد استقلال می گویند. اگر رأس v ، رأس انتهایی یالی از M باشد گفته می شود که v توسط M اشباع می شود^{۶۶} و M ، رأس v را اشباع می کند. اگر M تمام رئوس $V(G)$ اشباع کند M را یک تطابق کامل^{۶۷} می گویند. اگر n تعداد رئوس گراف باشد تطابق کامل، تطابقی با اندازه $\frac{n}{2}$ است. اندازه ماکزیمم تطابق در G را عدد تطابق می گویند و آن را با $\mu(G)$ نمایش می دهند. M یک تطابق ماکزیمم است، اگر هیچ تطابق M' با شرط $|M'| > |M|$ وجود نداشته باشد. به وضوح هر تطابق کامل، تطابق ماکزیمم هم هست. تطابق های کامل و ماکزیمم در گراف شکل (۲۱.۱) مشخص شده اند.



شکل ۲۱.۱: (الف) یک تطابق ماکزیمم و (ب) یک تطابق کامل

^{۶۴}Partition

^{۶۵}Matching

^{۶۶}Saturated

^{۶۷}Perfect matching

تعریف ۳۹.۱.۱. یک پوشش راسی از یک گراف G ، یک مجموعه $C \subseteq V(G)$ است بطوریکه حداقل یکی از رئوس انتهایی هر یال $E(G)$ ، در C باشد. تعداد راس های کوچکترین پوشش راسی در G را عدد پوشش راسی^{۶۸} می نامند و آن را با $\tau(G)$ نمایش می دهند. می گوئیم K یک پوشش راسی مینیم است، اگر هیچ پوشش راسی K' با شرط $|K'| < |K|$ وجود نداشته باشد.

اگر K یک پوشش راسی و M یک تطابق در G باشند آنگاه K شامل حداقل یکی از رئوس انتهایی یال های M است. بنابراین برای هر تطابق M و هر پوشش راسی K ، $|M| \leq |K|$ خواهد بود. زیرا اگر M^* ماکزیم تطابق و $\tilde{K}$ مینیم پوشش راسی باشد آنگاه $|\tilde{K}| \leq |M^*|$ خواهد بود. اما در حالت کلی این معادله برقرار نیست. کونیک^{۶۹} در سال ۱۹۳۱ ثابت کرد که اگر G یک گراف دوبخشی باشد آنگاه $|\tilde{K}| = |M^*|$ است.

قضیه ۴۰.۱.۱. در یک گراف دوبخشی، تعداد یال های یک ماکزیم تطابق برابر با تعداد راس های یک مینیم پوشش راسی است.

لم ۴۱.۱.۱. فرض کنید M یک تطابق و K یک پوشش راسی باشد که $|M| = |K|$ است آنگاه M یک ماکزیم تطابق و K یک مینیم پوشش راسی است.

یک پوشش یالی در G ، یک مجموعه $L \subseteq V(G)$ است بطوریکه هر راس در $V(G)$ راس انتهایی حداقل یک یال در L باشد. اندازه کوچکترین پوشش یالی در G را با $\rho(G)$ نمایش می دهند و آن را عدد پوشش یالی^{۷۰} می نامند.

قضیه زیر ارتباط بین پارامترهای عدد استقلال، عدد تطابق و عدد پوششی در گراف ها را بیان می کند که توسط گالایی^{۷۱} اثبات شده است.

قضیه ۴۲.۱.۱. برای هر گراف G ،

$$\tau(G) + \alpha(G) = |V(G)|$$

• اگر G راسی از درجه صفر نداشته باشد آنگاه $\mu(G) + \rho(G) = |V(G)|$

قضیه ۴۳.۱.۱. اگر G دوبخشی باشد آنگاه $\mu(G) = \tau(G)$

قضیه ۴۴.۱.۱. (قضیه هال) فرض کنید $G = (A \cup B, E)$ یک گراف دوبخشی باشد آنگاه G یک تطابق دارد که هر راس در A را اشباع می کند اگر و تنها اگر برای هر $X \subseteq A$ ، $|N(X)| \geq |X|$ باشد.

^{۶۸}Vertex cover number

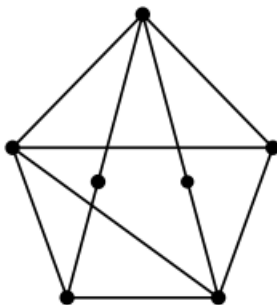
^{۶۹}Konig

^{۷۰}Edge cover number

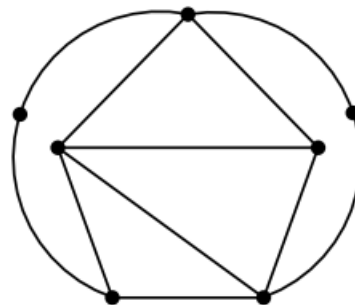
^{۷۱}Gallai

قضیه ۴۵.۱.۱. (قضیه ازدواج) گراف دوبخشی $G = (A \cup B, E)$ یک تطابق کامل دارد اگر و تنها اگر $|A| = |B|$ و برای هر $X \subseteq A$ ، $|X| \leq |N(X)|$ باشد.

تعریف ۴۶.۱.۱. اگر بتوان گراف را طوری در صفحه ترسیم کرد که هیچ دو یالی از هم نگذرند و هر یال، تنها در راس های دو سر خود با یال های دیگر برخورد داشته باشد گراف را **سطح**^{۷۲} می نامیم. این طریقه رسم گراف سطح G ، یک نشان دادن سطح^{۷۳} G ، نامیده می شود که از این گراف به عنوان گراف سطح شده^{۷۴} یاد می شود. شکل (۲۲.۱)، یک نشان دادن از گراف سطح را نشان می دهد.



(الف)



(ب)

شکل ۲۲.۱: (الف) گراف سطح G و (ب) یک نشان دادن سطح G

اگر مسیرهایی در یالهای G جایگذاری شوند گراف حاصل یک زیر تقسیم^{۷۵} از گراف G است. قضیه کاراتوسکی^{۷۶} بیان می کند که یک گراف سطح است اگر و فقط اگر شامل زیرگرافی نباشد که از زیر تقسیم گراف کامل K_5 یا گراف دوبخشی کامل $K_{3,3}$ بدست آمده است. یک گراف **سطح خارجی**^{۷۷} است اگر گراف سطح باشد و بتوان آن را طوری ترسیم کرد که همه رئوس متعلق به وجه نامتناهی باشند. یک گراف سطح خارجی است اگر و فقط اگر شامل زیرگرافی نباشد که از زیر تقسیم گراف کامل K_4 یا گراف دوبخشی کامل $K_{2,3}$ بدست آمده است.

تعریف ۴۷.۱.۱. کلاس K -درخت ها به طور استقرایی به صورت زیر تعریف می شوند :

• گراف کامل با K راس، یک K -درخت است.

^{۷۲}Planar^{۷۳}Planar embedding^{۷۴}Plane graph^{۷۵}Subdivision^{۷۶}Kuratowski^{۷۷}Outer planar

- اگر برای $n \geq k$ به K -درخت H با n راس، یک راس اضافه کنیم و آن را به K راس از K -خوشه در H متصل کنیم گراف حاصل K -درخت با $n + 1$ راس خواهد بود.

به زیرگرافی از K -درخت، K -درخت جزیی^{۷۸} می‌گویند.

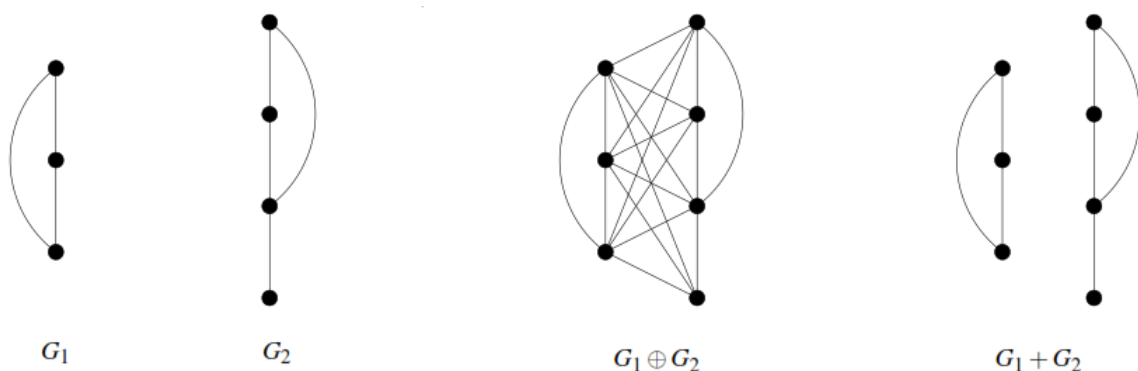
تعریف ۴۸.۱.۱. یک کوگراف^{۷۹} یک گراف P_4 -آزاد است. با استفاده از قوانین زیر می‌توان کوگراف ساخت:

- گرافی با یک راس یک کوگراف است.

• اگر $G_1 = (V_1, E_1)$ و $G_2 = (V_2, E_2)$ کوگراف باشند گراف $G_1 + G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$ یک کوگراف خواهد بود.

• اگر $G_1 = (V_1, E_1)$ و $G_2 = (V_2, E_2)$ کوگراف باشند گراف

$G_1 \oplus G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \cup V_1 \times V_2)$ یک کوگراف خواهد بود. (شکل ۲۳.۱)



شکل ۲۳.۱: کوگراف دو گراف G_1 و G_2

تعریف ۴۹.۱.۱. گراف جهتدار^{۸۰} G ، یک سه تایی مرتب $(V(G), E(G), \Psi_G)$ است که از یک مجموعه متناهی ناتهی $V(G)$ شامل راس‌ها، یک مجموعه متناهی $E(G)$ شامل یال‌ها و یک تابع وقوع^{۸۱} Ψ_G تشکیل شده است که به هر یال G ، یک زوج مرتب از راس‌های G را نسبت می‌دهد. اولین راس این یال را دم^{۸۲} و دومین راس آن را سر^{۸۳} می‌نامند. این دو راس، رئوس انتهایی این یال

^{۷۸}Partial k-tree

^{۷۹}Cograph

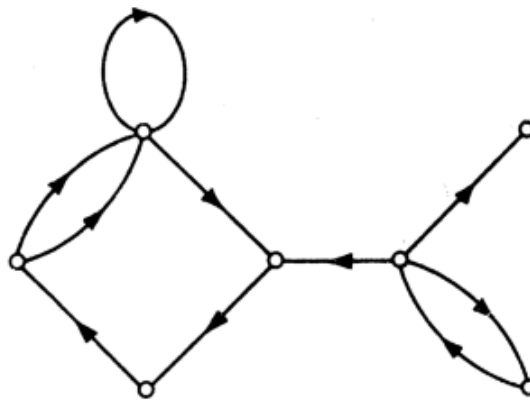
^{۸۰}Directed graph

^{۸۱}Incidence function

^{۸۲}Tail

^{۸۳}Head

هستند. بنابراین یک یال از این گراف، یالی از دم به سر خواهد بود. یک یال از دم u به سر v را با $u \rightarrow v$ نشان می دهند. فرض کنید v یک راس در گراف جهتدار G باشد. تعداد یال های با دم v را درجه خروجی v ^{۸۴} می نامند و آن را با $d^+(v)$ نشان می دهند. بعلاوه تعداد یال های با سر v را درجه ورودی v ^{۸۵} می نامند و آن را با $d^-(v)$ نشان می دهند. همسایگی خروجی v ^{۸۶} برابر با مجموعه $\{x \in V(G) : v \rightarrow x\}$ است که با $N^+(v)$ نشان داده می شود. همسایگی ورودی v ^{۸۷} برابر با مجموعه $\{x \in V(G) : x \rightarrow v\}$ است که با $N^-(v)$ نشان داده می شود. مینیم و ماکزیمم درجه ورودی را به ترتیب با $\delta^-(G)$ و $\Delta^-(G)$ نشان می دهند. همچنین مینیمم و ماکزیمم درجه خروجی را به ترتیب با $\delta^+(G)$ و $\Delta^+(G)$ نشان می دهند. تمام تعاریفی که در بالا بیان شد در گراف های جهتدار هم وجود دارد اما تنها تفاوتی که در تعاریف وجود دارد این است که یال های گراف جهتدار با یک جهت از یک راسی خارج و به راس دیگر وارد می شوند. شکل (۲۴.۱)، یک گراف جهتدار را نشان می دهد.



شکل ۲۴.۱: گراف جهتدار G

۲.۱ رنگ آمیزی گراف

رنگ آمیزی گراف G ^{۸۸} یک افرازی از رئوس یا یال یا وجه گراف به مجموعه مستقلی از کلاس های رنگی k ^{۸۹} است. اگر k کلاس رنگی در افراز استفاده شود برای راحتی آن را k -رنگ پذیر می نامند. اغلب رنگ آمیزی های مورد استفاده قرار می گیرند که شرایط خاصی روی کلاس های رنگی تحمیل شده باشد. رنگ آمیزی مجاز یکی از آنهاست که کلاس های رنگی، مجموعه های مستقلی از گراف هستند.

^{۸۴}Outdegree

^{۸۵}Indegree

^{۸۶}Out-neighborhood or successor set

^{۸۷}In-neighborhood or predecessor set

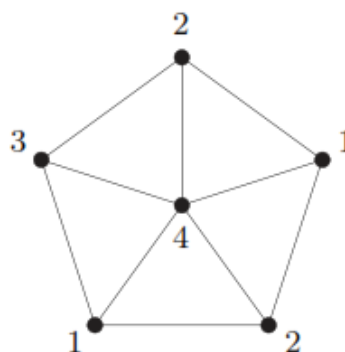
^{۸۸}Graph colouring

^{۸۹}Colour classes

به عبارت دیگر در یک رنگ آمیزی مجاز، رنگ های متمایزی را به رئوس یا یال یا وجه مجاور از گراف نسبت می دهیم. یک رنگ آمیزی مجاز بدیهی، رنگ آمیزی است که هر راس یا هر یال و یا هر وجه، در یک کلاس رنگی مجزا از هم قرار گرفته باشند. اجازه دهید به طور دقیق تر مفاهیم رنگ آمیزی را بیان کنیم.

یکی از رنگ آمیزی های گراف، انتساب رنگ ها به رئوس گراف است. یک k -رنگ آمیزی راسی G ، عبارت است از تخصیص k رنگ $1, 2, \dots, k$ به راس های G است. به بیان دیگر، یک k رنگ آمیزی از گراف $G = (V, E)$ ، یک تابع $c : V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ است. اگر هیچ دو راس مجاور دارای رنگ یکسان نباشند، رنگ آمیزی را مجاز می نامیم. بنابراین یک k -رنگ آمیزی راسی مجاز از گراف بدون طوقه G ، عبارت است از افزایشی مانند $V_1, V_2, \dots, V_k$ از V به k مجموعه مستقل، که راس های واقع در هر V_i دارای رنگ یکسان هستند. اگر G دارای یک k -رنگ آمیزی راسی مجاز باشد آن گاه G ، k -رنگ پذیر راسی نامیده می شود. برای راحتی کار، یک رنگ آمیزی مجاز را به طور ساده، یک رنگ آمیزی و k -رنگ آمیزی راسی مجاز را k -رنگ آمیزی می نامیم. همچنین k -رنگ پذیر راسی را به اختصار k -رنگ پذیر می گوئیم. (شکل ۲۵.۱)

در بحث رنگ آمیزی، فقط به گراف های ساده خواهیم پرداخت. یک گراف ساده، ۱-رنگ پذیر است اگر و تنها اگر تهی باشد و ۲-رنگ پذیر است اگر و تنها اگر دوبخشی باشد. یکی از جالبترین مساله پیدا کردن رنگ آمیزی سره با کمترین رنگ ممکن است. عدد رنگی، کوچکترین مقدار k است که گراف k -رنگ پذیر راسی مجاز باشد. عدد رنگی گراف G را با $\chi(G)$ نشان می دهند. اگر $\chi(G) = k$ باشد در اینصورت G را k -رنگی می نامیم. برای مثال، گراف های دوبخشی، ۲-رنگی هستند. اگر برای هر زیرگراف سره H از گراف G ، $\chi(H) < \chi(G)$ باشد گراف G را بحرانی می نامیم. یک گراف k -بحرانی، گرافی است که k -رنگی و بحرانی باشد. هر گراف k -رنگی، یک زیرگراف k -بحرانی دارد.



شکل ۲۵.۱: رنگ آمیزی راسی با چهار رنگ

قضیه ۱.۲.۱. [۱۴] اگر H یک زیرگراف از گراف G باشد آنگاه $\chi(H) \leq \chi(G)$.

قضیه ۲.۲.۱. فرض کنید G یک گراف ناتهی است، $\chi(G) = 2$ است اگر و فقط اگر G دوبخشی

باشد.

نتیجه ۳.۲.۱. فرض کنید G یک گراف باشد، $\chi(G) \geq 3$ است اگر و فقط اگر G یک دور فرد داشته باشد.

قضیه ۴.۲.۱. برای هر گراف G ، $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

قضیه ۵.۲.۱. (قضیه بروکس) [۷] فرض کنید G یک گراف همبند باشد که ماکزیمم درجه آن حداقل ۳ باشد در این صورت $\chi(G) \leq \Delta(G)$ ، مگر اینکه G یک دور فرد یا یک گراف کامل باشد که در این حالت $\chi(G) = \Delta(G) + 1$.

بنابراین در زمان چندجمله ای میتوان فهمید که یک گراف عدد رنگی $\Delta(G) + 1$ دارد یا نه؟

گزاره ۶.۲.۱. فرض کنید $n \geq 1$ و G یک گراف باشد.

• اگر $G \cong C_n$ و n فرد باشد آنگاه $\chi(G) = \Delta(G) + 1 = 3$ و اگر n زوج باشد آنگاه $\chi(G) = \Delta(G) + 1 = 2$.

• اگر $G \cong K_n$ باشد آنگاه $\chi(G) = \Delta(G) + 1 = n$.

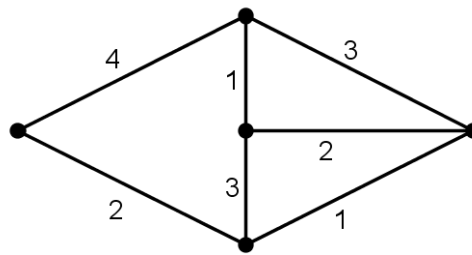
قضیه ۷.۲.۱. [۴۵] فرض کنید G گرافی از مرتبه n باشد. آنگاه $2\sqrt{n} \leq \chi(G) + \chi(\bar{G}) \leq n + 1$.

یکی دیگر از رنگ آمیزی های گراف، انتساب رنگ ها به یال های گراف است. یک k -رنگ آمیزی یالی از گراف بدون طوقه G ، عبارت است از تخصیص k رنگ $1, 2, \dots, k$ به یال های G . به بیان دیگر، یک k رنگ آمیزی از گراف $G = (V, E)$ ، یک تابع $c' : E \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ است. اگر هیچ دو یال مجاور دارای رنگ یکسان نباشند، رنگ آمیزی یالی را مجاز می نامیم. بنابراین یک k -رنگ آمیزی یالی مجاز از گراف بدون طوقه G ، عبارت است از افزایشی مانند $E_1, E_2, \dots, E_k$ از E به k مجموعه مستقل، که یال های واقع در هر E_i دارای رنگ یکسان هستند یعنی هر E_i یک تطابق است. اگر G دارای یک k -رنگ آمیزی یالی مجاز باشد آن گاه G ، k -رنگ پذیر یالی نامیده می شود. برای راحتی کار، یک رنگ آمیزی یالی مجاز را به طور ساده، یک رنگ آمیزی یالی و k -رنگ آمیزی یالی مجاز را k -رنگ آمیزی یالی می نامیم. شکل (۲۶.۱) یک 4 -رنگ آمیزی یالی را نشان می دهد.

واضح است که هر گراف بدون طوقه G ، ε -رنگ پذیر یالی است و اگر G یک k -رنگ پذیر یالی باشد آنگاه برای هر $l > k$ ، گراف G یک l -رنگ پذیر یالی هم خواهد بود. عدد رنگی یالی کوچکترین مقدار k است که گراف k -رنگ پذیر یالی باشد. عدد رنگی یالی گراف G را با $\chi'(G)$ نشان می دهند. اگر $\chi'(G) = k$ باشد در این صورت G را k -رنگی یالی می نامیم. از طرفی هر رنگ آمیزی یالی از گراف G ، یک رنگ آمیزی راسی از گراف خطی G° ، است به عبارت دیگر،

$$\chi'(G) = \chi(L(G)).$$

^{۹۰} Line graph



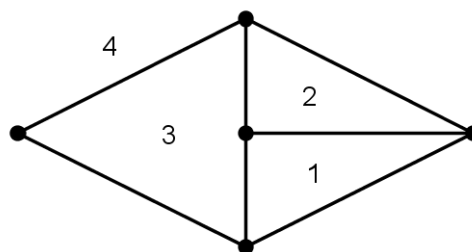
شکل ۲۶.۱: رنگ آمیزی یالی گراف

واضح است که در هر رنگ آمیزی یالی مجاز، باید به یال های واقع بر یک راس، رنگ های متفاوتی را نسبت دهیم پس $\chi'(G) \geq \Delta(G)$.

گزاره ۸.۲۰.۱. برای هر گراف دوبخشی G ، $\chi'(G) = \Delta(G)$.

قضیه ۹.۲۰.۱. برای هر گراف G ، $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

یکی دیگر از رنگ آمیزی های گراف، انتساب رنگ ها به وجه های گراف است. یک k -رنگ آمیزی وجهی از گراف G ، عبارت است از تخصیص k رنگ $1, 2, \dots, k$ به وجه های گراف G . به بیان دیگر، یک k رنگ آمیزی از گراف $G = (V, E)$ ، یک تابع $c'' : F \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ است. اگر هیچ دو وجه مجاور (وجهی که یک یال مشترک دارد) دارای رنگ یکسان نباشند، رنگ آمیزی وجهی را مجاز می نامیم. بنابراین یک k -رنگ آمیزی وجهی مجاز از گراف G ، عبارت است از افزایش مانند $F_1, F_2, \dots, F_k$ از F به k مجموعه مستقل، که وجه های واقع در هر F_i دارای رنگ یکسان هستند. اگر G دارای یک k -رنگ آمیزی وجهی مجاز باشد آن گاه G ، k -رنگ پذیر وجهی نامیده می شود. برای راحتی کار، یک رنگ آمیزی وجهی مجاز را به طور ساده، یک رنگ آمیزی وجهی و k -رنگ آمیزی وجهی مجاز را k -رنگ آمیزی وجهی می نامیم. شکل (۲۷.۱) یک ۴-رنگ آمیزی وجهی را نشان می دهد. عدد رنگی وجهی، کوچکترین مقدار k است که گراف k -رنگ پذیر وجهی مجاز باشد.



شکل ۲۷.۱: رنگ آمیزی وجهی گراف

قضیه ۱۰.۲۰.۱. هر گراف مسطح، ۴-رنگ پذیر وجهی است.

گزاره ۱۱.۲.۱. هر گراف مسطح، ۵-رنگ پذیر وجهی است.

ما در این پایان نامه فقط در مورد رنگ آمیزی راسی گراف ها بحث می کنیم. منظور از رنگ آمیزی گراف ها در این پایان نامه، رنگ آمیزی راسی گراف ها و منظور از عدد رنگی گراف ها، عدد رنگی راسی گراف هاست. مساله مشخص کردن عدد رنگی، یکی از ۲۱ مساله NP-complete است که در سال ۱۹۷۲ مطرح شده بود [۴۱]. یکی از مسائل NP-complete رنگ آمیزی گراف با ۳ رنگ است حتی اگر گراف مسطح ۴-منتظم باشد [۱۶]. لوند^{۹۱} و یاناکاکیس^{۹۲} اولین افرادی بودند که ثابت کردند الگوریتم تقریبی برای عدد رنگی وجود ندارد. آنها نشان دادن که تقریب عدد رنگی گراف با ضریب n^c برای عدد ثابت $c > 0$ ، مساله ای NP-hard است [۱۶]. بعد از آن زوکرمن^{۹۳} با فرض اینکه $P \neq NP$ است، ثابت کرد که برای هر $\epsilon > 0$ ، الگوریتمی وجود ندارد که عدد رنگی را با ضریب $n^{1-\epsilon}$ تقریب بزند [۶۰]. در حال حاضر بهترین الگوریتم تقریبی برای عدد رنگی تقریبی $O(\frac{n(\log \log n)^2}{(\log n)^3})$ دارد که توسط هالدوراس^{۹۴} بیان شد [۳۳]. او حدس زده بود که بهترین ضریب تقریبی ممکن برای رنگ آمیزی گراف $\Theta(\frac{n}{(\log n)^c})$ است.

ساده ترین الگوریتمی که یک رنگ آمیزی مجاز از گراف را ارائه می دهد الگوریتم حریصانه است.

الگوریتم حریصانه

ورودی: گراف G و رئوس مرتب $v_1 < v_2 < \dots < v_n$ از $V(G)$

خروجی: یک رنگ آمیزی مجاز c

۱. برای $1 \leq i \leq n$:

به $c(v_i)$ کوچکترین عدد طبیعی نسبت دهید که در $c(N(v_i))$ ظاهر نشده باشد.

۲. برگرداندن c

شکل (۲۸.۱) دو رنگ آمیزی از گراف پترسن را نشان می دهد که با استفاده از الگوریتم حریصانه رنگ آمیزی شده اند. ممکن است تعداد رنگ های استفاده شده در هر مرتب سازی متفاوت باشند.

۳.۱ عدد گراندی

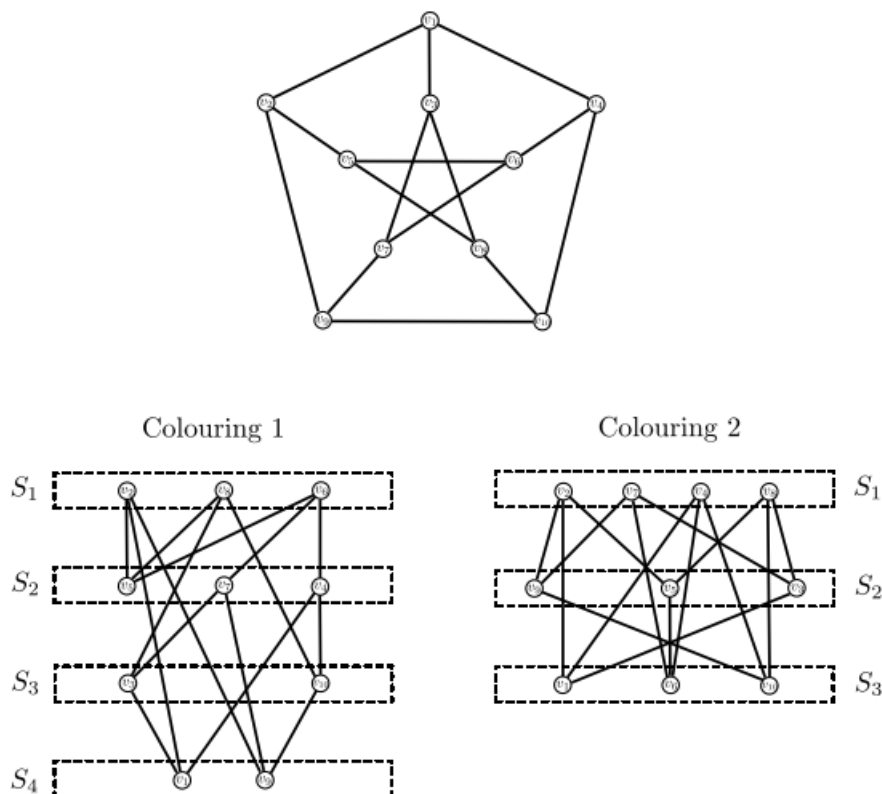
رنگ آمیزی که از الگوریتم حریصانه حاصل می شود در نهایت دارای خاصیت زیر خواهد بود. برای هر (i, j) که $i < j$ است هر راس v در S_i یک همسایه در S_j دارد. رنگ آمیزی که دارای خاصیت بالاست، رنگ آمیزی حریصانه می گویند. به بزرگترین مقدار k که گراف G یک k -رنگ پذیر حریصانه باشد، عدد گراندی G گفته می شود که آن را با $\Gamma(G)$ نشان می دهند.

^{۹۱}Lund

^{۹۲}Yannakakis

^{۹۳}Zuckerman

^{۹۴}Halldorsson



شکل ۲۸.۱: دو رنگ آمیزی حریصانه گراف پترسن

بعلاوه رنگ آمیزی حریصانه یک رنگ آمیزی مجاز است بنابراین $\chi(G) \leq \Gamma(G)$. از طرفی اگر رئوس گرافی که با $\chi(G)$ رنگ، رنگ آمیزی شده، برحسب کلاس های رنگی اش مرتب کنیم الگوریتم حریصانه یک رنگ آمیزی حریصانه با $\chi(G)$ رنگ بدست می آید. پس همیشه یک رنگ آمیزی مجاز با مینیم رنگ هست که رنگ آمیزی حریصانه است. بنابراین خاصیت بالا نتیجه می دهد که اگر یک راس در رنگ آمیزی حریصانه به رنگ i باشد حداقل $i - 1$ همسایه خواهد داشت پس

$$\Gamma(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

حال اجازه دهید که کمی در مورد تاریخچه پیدایش عدد گراندی برایتان بازگو کنیم. تابع گراندی در سال ۱۹۳۹ توسط گراندی در گراف های جهتدار بدون دور تعریف شد [۲۸]. او تابع گراندی را، تابع یکتایی معرفی کرده بود که به هر راس v ، کوچکترین عدد صحیح نامنفی $g(v)$ نسبت میداد که به هیچ یک از همسایه های v یعنی u نسبت نداده بود. اگر رئوس گراف را به صورت $\sigma = v_1 < v_2 < \dots < v_n$ مرتب کنیم و هر یال از u به v که $u < v$ است را با uv نشان دهیم آنگاه تابع گراندی g در گراف جهتدار بدون دور، $g(u) + 1$ است، در حقیقت $g(u) + 1$ تعداد رنگ هایی است که با استفاده از الگوریتم حریصانه به رئوس مرتب گراف نسبت داده شده است. در سال ۱۹۷۹ کریستین^{۹۵} و سلکو^{۹۶} اولین

^{۹۵}Christen

^{۹۶}Selkow

کسانی بودند که عدد گراندی را با رنگ آمیزی گراف تعریف کردند [۱۳]. آنها گرافی را که عدد گراندی هر زیرگراف القایی اش برابر با عدد رنگی همان زیرگراف القایی باشد را گراف $\Gamma\chi - Perfect$ تعریف کردند همچنین آنها گراف $\Gamma\omega - Perfect$ را گرافی تعریف کردند که برای هر زیرگراف القایی از گراف، عدد گراندی برابر با عدد خوشه ای است. سایمون^{۹۷} در [۴۸] به اثبات قضایای در مورد عدد گراندی پرداخت و اردوش^{۹۸} در [۲۰] ثابت کرد که در حقیقت عدد گراندی همان مرتب شده راسی عدد رنگی است. در سال ۱۹۸۲ هدتنمی^{۹۹} و بیر^{۱۰۰} در [۳۷] ثابت کردند که عدد گراندی یک درخت در زمان خطی قابل محاسبه است آنها به این نتیجه رسیدن که عدد گراندی یک درخت T برابر با بزرگترین مرتبه یک درخت دودویی مشمول در T است.

یک درخت دودویی به طور استقرایی به صورت زیر تعریف می شود:

$$B_1 = K_1 \bullet$$

$$B_2 = K_2 \bullet$$

• اگر به ازای هر راس از درخت دودویی B_{k-1} ، یک راس اضافه کنیم و سپس بین رئوس B_{k-1} و یک راس جدید تطابق بسازیم گراف حاصل درخت دودویی B_k از مرتبه k خواهد بود. به عبارت دیگر برای ساخت درخت دودویی B_k ، به ازای هر راس از درخت دودویی B_{k-1} ، یک برگ اضافه می کنیم.

شکل (۲۹.۱)، درخت دودویی B_k به ازای $k = 1, 2, \dots, 5$ است که با الگوریتم حریصانه رنگ آمیزی شده است.

الگوریتم در [۳۷] برای هر راس از درخت، بزرگترین مقدار K را محاسبه می کند بطوریکه درخت، شامل یک درخت دودویی از مرتبه K باشد و راس مفروض، راسی با بیشترین درجه باشد. بنابراین یک الگوریتم زمان خطی برای محاسبه عدد گراندی یک درخت وجود دارد. تل^{۱۰۱} و پروسکروسکی^{۱۰۲} در [۴۹] الگوریتمی ارائه دادند که در زمان خطی، عدد گراندی k -درخت جزیی قابل محاسبه است. همچنین جیارفاس^{۱۰۳} و لهل^{۱۰۴} در [۳۰] ثابت کردند که عدد گراندی کوگراف ها در زمان چندجمله ای قابل محاسبه است. تا سال ۱۹۹۵ محاسبه پیچیدگی عدد گراندی یک مساله باز بود که توسط ینسن

^{۹۷}Simmons

^{۹۸}Erdos

^{۹۹}Hedetniemi

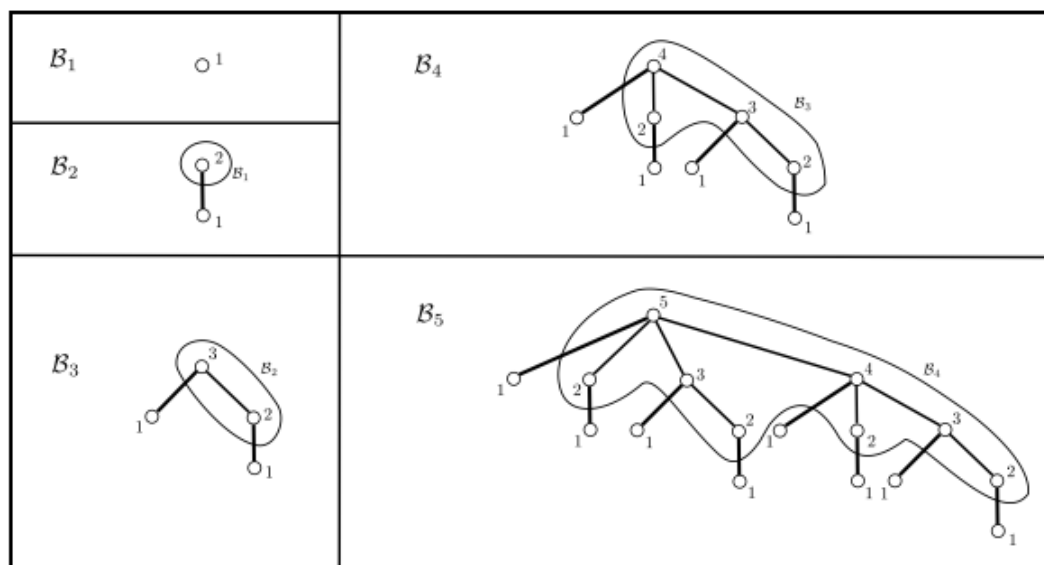
^{۱۰۰}Beyer

^{۱۰۱}Telle

^{۱۰۲}Proskurowski

^{۱۰۳}Gyarfas

^{۱۰۴}Lehel



شکل ۲۹.۱: درخت دودویی B_k به ازای $k = 1, 2, \dots, 5$

^{۱۰۵} و تافت ^{۱۰۶} در [۴۰] مطرح شده بود. تا اینکه در سال ۱۹۹۷ گویال ^{۱۰۷} و ویشواناتان ^{۱۰۸} در [۲۶] ثابت کردند که در حالت کلی بدست آوردن عدد گراندی مساله ای NP-complete است. بعد از آن ذاکر ^{۱۰۹} در [۵۴] ثابت کرد که مساله عدد گراندی مکمل یک گراف دوبخشی، NP-complete است. همچنین در [۴۷] ثابت شده که مساله عدد گراندی گراف دوبخشی هم NP-complete است. در اثبات این قضیه نشان داده شد که گراف هایی با عدد گراندی $\Delta(G) + 1$ در زمان چند جمله ای بررسی نمی شوند به عبارت دیگر قضیه ای مشابه قضیه بروکس ^{۱۱۰} برای عدد گراندی وجود ندارد مگر اینکه $P=NP$ باشد. در حال حاضر به طور کلی هیچ الگوریتم تقریبی با ضریب ثابت برای عدد گراندی گراف ارائه نشده اما برای بعضی از کلاس های خاص مانند گراف های بازه ای، مکمل گراف های دوبخشی، مکمل گراف های کوردال، گراف اسپلیت و کوگراف ^{۱۱۱} می توان عدد گراندی را با یک ضریب ثابت تقریب زد. اگر برای هر زیرگراف القایی H از گراف G ، $\chi(H) = \omega(H)$ باشد گراف G را Perfect می نامیم. در [۲۷] ثابت شد که عدد رنگی یک گراف Perfect می تواند در زمان چندجمله ای تعیین شود. کلاس هایی که در بالا بیان شد گراف Perfect هستند پس می توان الگوریتم تقریبی با یک ضریب ثابت عدد خوشه ای برای عدد گراندی آنها بیان کرد. ذاکر در [۵۴] مفهوم یک k -اتم بیان کرد و نشان داد که برای

^{۱۰۵}Jensen

^{۱۰۶}Toft

^{۱۰۷}Goyal

^{۱۰۸}Vishvanathan

^{۱۰۹}Zaker

^{۱۱۰}Brooks

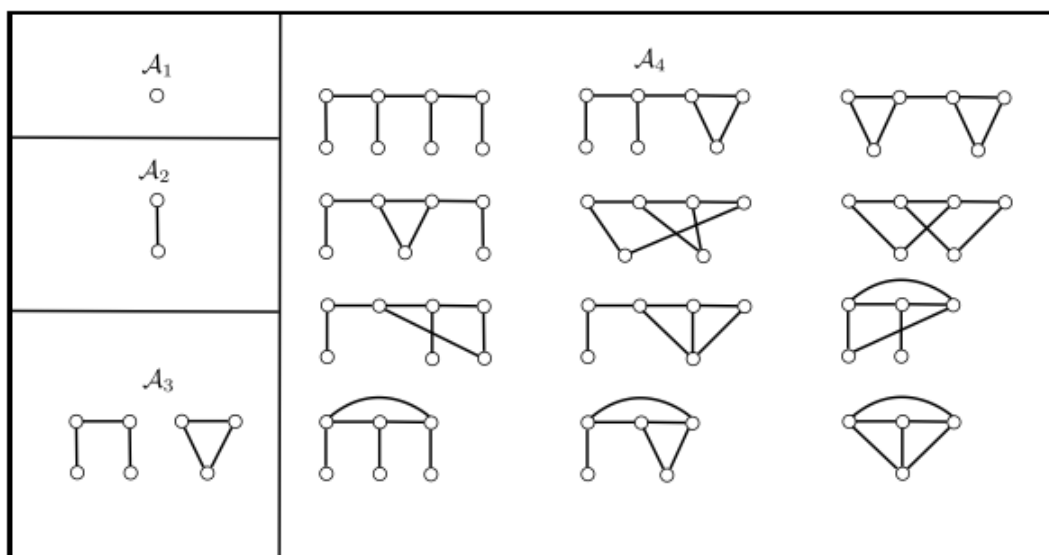
^{۱۱۱}Complement of chordal graphs

k ثابت، عدد گراندی گرافی که شامل یک k -اتم باشد حداقل k خواهد بود.
خانواده k -اتم ها را با A_k نشان می دهند که بصورت زیر تعریف می شوند:

$$A_1 = \{K_1\} \bullet$$

$$A_2 = \{K_2\} \bullet$$

• فرض کنید $H \in A_{k-1}$ باشد. برای ساخت عناصر A_k ، یک مقدار $|V(H)| \leq m \leq 1$ را ثابت در نظر بگیرید و یک کپی از مجموعه مستقل S_m را به H اضافه کنید سپس بین رئوس H و S_m یک تطابق بسازید بطوریکه تمام رئوس S_m توسط H اشباع شود. در انتها هر راسی از H که توسط تطابق ها اشباع نشده را فقط به یک راس از S_m متصل کنید. به عبارت دیگر یک ماکسیمال مجموعه احاطه گر مستقلی را به گراف H اضافه می کنیم. شکل (۳۰۱)، خانواده A_k به ازای $k = 1, 2, \dots, 4$ است.



شکل ۳۰۱: خانواده A_k به ازای $k = 1, 2, \dots, 4$

فصل ۲

عدد گراندی - بازی در گراف‌ها

۱.۲ مقدمه

اولین بار بازی رنگ آمیزی توسط برامز^۱ روی نقشه های مسطح بیان شد. گاردنر^۲ در سال ۱۹۸۱ آن را در [۲۴] منتشر کرد. بعد از ۱۰ سال بدلندر^۳ عدد بازی رنگی در گراف ها را تعریف کرد. او حدس زده بود که عدد بازی رنگی گراف های مسطح برابر با یک مقدار ثابت است. در [۶] عدد بازی رنگی کلاس های مختلفی از گراف ها بدست آمده است. بعد از آن برای اولین بار، عدد بازی رنگ آمیزی گراف در [۵۸] بیان شد که از آن به عنوان ابزاری برای مطالعه عدد بازی رنگی گراف ها استفاده می شد. در مقالات متعددی عدد بازی رنگ آمیزی بعضی گراف ها محاسبه شده است. ما در این فصل عدد گراندی-بازی را بر روی جنگل و ۲-درخت جزیی مورد بررسی قرار می دهیم. بدین منظور ابتدا به تعریف عدد گراندی-بازی می پردازیم و سپس روابط و قضایای مربوط به آن را مطرح می کنیم. این فصل برگرفته از مرجع [۳۶] می باشد.

۲.۲ تعاریف و نتایج مقدماتی

تعریف ۱.۲.۲. فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف و X یک مجموعه از رنگ ها است، آلیس و باب به نوبت رئوس گراف G را رنگ آمیزی می کنند بطوریکه دو راس مجاور هم رنگ نباشند. بازی زمانی به پایان می رسد که تمام رئوس رنگ آمیزی شده باشند یا رئوس، دیگر نتوانند رنگ قانونی^۴ بگیرند یعنی تمام رنگ های مجموعه X ، توسط همسایه های یک راس فاقد رنگ استفاده شده باشند. اگر تمام رئوس گراف، رنگ آمیزی شده باشند آلیس بازی را می برد در غیر این صورت باب بازی را می برد.

^۱Brams

^۲Gardner

^۳Bodlaender

^۴Legal

بازی رنگ آمیزی اول آلیس^۵ بازی رنگ آمیزی است که آلیس حرکت اول را انجام می دهد و بازی رنگ آمیزی اول-باب بازی رنگ آمیزی است که باب حرکت اول را انجام می دهد. عدد بازی-رنگی اول آلیس گراف G ^۶ را با $\chi_g^A(G)$ نشان می دهند که برابر با کمترین تعداد رنگ ها در یک مجموعه رنگ X است که در بازی رنگ آمیزی اول-آلیس در G ، آلیس استراتژی برد دارد و همچنین عدد بازی-رنگی اول باب در گراف G را با $\chi_g^B(G)$ نشان می دهند که برابر با کمترین تعداد رنگ ها در یک مجموعه رنگ X است که در بازی رنگ آمیزی اول-باب در G ، آلیس استراتژی برد دارد. برای کلاس های $\mathcal{H}$ از گراف ها، عدد بازی-رنگی اول آلیس و عدد بازی-رنگی اول باب در $\mathcal{H}$ به ترتیب با $\chi_g^A(\mathcal{H}) = \{\max \chi_g^A(G) : G \in \mathcal{H}\}$ و $\chi_g^B(\mathcal{H}) = \{\max \chi_g^B(G) : G \in \mathcal{H}\}$ تعریف می شوند. ممکن است برای یک گراف G ، اختلاف مقادیر $\chi_g^A(G)$ و $\chi_g^B(G)$ خیلی زیاد باشد. ثابت شده است که برای گراف هایی با کلاس های طبیعی^۷ در یک گراف G ، معمولاً $\chi_g^A(\mathcal{H}) = \chi_g^B(\mathcal{H})$ است. اجتماع دو کپی مجزا از G را با $2G$ نشان می دهیم و گراف حاصل از اضافه کردن یک راس تنها به G را با G^+ نشان می دهیم.

گزاره ۲.۲.۲. [۵۹] فرض کنید $\mathcal{H}$ یک کلاس از گراف است بطوریکه $G \in \mathcal{H}$ ، $2G \in \mathcal{H}$ و $G^+ \in \mathcal{H}$. آنگاه $\chi_g^A(\mathcal{H}) = \chi_g^B(\mathcal{H})$.

بنابراین با مطالعه روی این دسته از گراف ها کافی است که در عدد بازی-رنگی فرض کنیم آلیس حرکت اول انجام می دهد و برای خلاصه نویسی آن را بصورت χ_g نشان می دهیم. در این پایان نامه خانواده جنگل ها را با $\mathcal{F}$ ، خانواده گرافهای بازه ای با k خوشه را با $\mathcal{I}_k$ ، خانواده گرافهای مسطح را با $\mathcal{P}$ ، خانواده گرافهای مسطح خارجی با $\mathcal{Q}$ و خانواده گرافهای k -درخت جزیی با $\mathcal{PT}_k$ نشان می دهیم. در [۲۱]، ثابت شده که $\chi_g(\mathcal{F}) = 4$ ، $\chi_g(\mathcal{I}_k) \leq 3k - 2$ ، در [۲۹، ۴۳]، ثابت شده که $6 \leq \chi_g(\mathcal{Q}) \leq 7$ ، در [۵۷]، برای $K \geq 2$ ثابت شده که $\chi_g(\mathcal{PT}_k) \leq 3k + 2$ و در [۴۳، ۵۶]، ثابت شده که $8 \leq \chi_g(\mathcal{P}) \leq 17$ است.

تعریف ۳.۲.۲. برای بدست آوردن کران بالایی برای عدد بازی-رنگی گراف ها نیاز به تعریف بازی نشانه گذاری^۸ داریم. فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف است، آلیس و باب به نوبت رئوس G را نشانه گذاری می کنند (آلیس حرکت اول انجام می دهد). بازی زمانی به پایان می رسد که تمام رئوس نشانه گذاری شده باشند. برای یک راس x از G ، فرض کنید $b(x)$ تعداد همسایه های x باشد که قبل از نشانه گذاری x ، نشانه گذاری شدند. امتیاز بازی $s = 1 + \max_{x \in V(G)} b(x)$ است. هدف آلیس، مینیم کردن امتیاز و هدف باب، ماکسیم کردن آن است. عدد بازی رنگ آمیزی^۹ در گراف G را با $col_g(G)$ نشان می دهند و برابر است با کوچکترین s که آلیس با کمتر یا مساوی آن برنده است.

^۵Alice-first colouring game

^۶Alice-first game chromatic number of G

^۷Natural classes

^۸Marking game

^۹Game coloring number

برای کلاس های $\mathcal{H}$ از گراف ها، $col_g(\mathcal{H}) = \{\max col_g(G) : G \in \mathcal{H}\}$ در [۲۱، ۴۲]، ثابت شده که $col_g(\mathcal{F}) = ۴$ ، $col_g(\mathcal{I}_k) = ۳k - ۲$ در [۲۹، ۴۲]، ثابت شده که $col_g(\mathcal{Q}) = ۷$ در [۵۱، ۵۷]، برای $K \geq ۲$ ثابت شده که $col_g(\mathcal{PT}_k) = ۳k + ۲$ و در [۵۶، ۵۱]، ثابت شده که $۱۱ \leq col_g(\mathcal{P}) \leq ۱۷$.

واضح است که برای هر گراف G ، $\chi_g(G) \leq col_g(G)$. برای بیشتر کلاسهای طبیعی گراف ها، کران بالای عدد بازی رنگ آمیزی، بهترین کران بالای عدد بازی-رنگی آن گراف است. حال به تعریف بازی رنگ آمیزی حریصانه ^{۱۰} می پردازیم که ترکیبی از بازی رنگ آمیزی و بازی نشانه گذاری است.

تعریف ۴.۲.۲. فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف است، آلیس و باب به نوبت رئوس گراف G رنگ آمیزی می کنند بطوریکه رنگ هر راس، مینیمم رنگی باشد که در رئوس مجاورش ظاهر نشده باشد. هدف آلیس، مینیمم کردن تعداد رنگ های استفاده شده و هدف باب، ماکسیمم کردن آن است. اولین بازی عدد گراندی-آلیس ^{۱۱} از گراف G را با $\Gamma_g^A(G)$ نشان می دهند که برابر با تعداد رنگ های استفاده شده در پایان بازی حریصانه است بطوریکه هر دو بازیکن از استراتژی بهینه استفاده کنند و آلیس آغازگر بازی باشد و اولین بازی عدد گراندی-باب ^{۱۲} از گراف G را با $\Gamma_g^B(G)$ نشان می دهند که برابر با تعداد رنگ های استفاده شده در پایان بازی حریصانه است بطوریکه هر دو بازیکن از استراتژی بهینه استفاده کنند و باب آغازگر بازی باشد. بنابراین بازی عدد گراندی گرافی که آلیس یا باب آغازگر آن باشند بزرگتر یا مساوی عدد رنگی و کوچکتر یا مساوی عدد گراندی آن گراف است. برای کلاس های $\mathcal{H}$ از گراف ها، اولین بازی عدد گراندی-آلیس و اولین بازی عدد گراندی-باب از $\mathcal{H}$ به ترتیب $\Gamma_g^A(\mathcal{H}) = \{\max \Gamma_g^A(G) : G \in \mathcal{H}\}$ و $\Gamma_g^B(\mathcal{H}) = \{\max \Gamma_g^B(G) : G \in \mathcal{H}\}$ تعریف می شوند. همانند بازی عدد رنگی، ممکن است دو مقدار $\Gamma_g^A(G)$ و $\Gamma_g^B(G)$ اختلاف زیادی داشته باشند مانند گراف K_{nn}^* که از حذف یک تطابق کامل در یک گراف دوبخشی کامل K_{nn} بدست می آید.

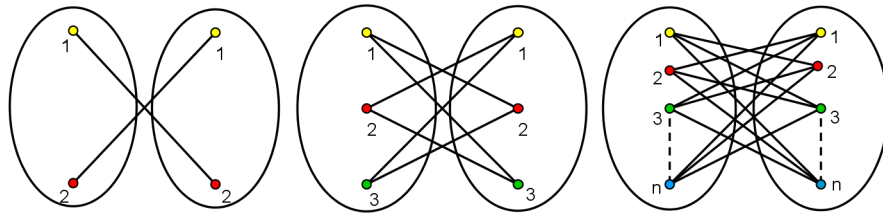
گزاره ۵.۲.۲. [۳۶] اگر $n \geq ۲$ باشد آنگاه $\Gamma_g^A(K_{nn}^*) = n$ و $\Gamma_g^B(K_{nn}^*) = ۲$.

برهان. فرض کنید آلیس آغازگر بازی باشد، باب روی رئوسی بازی می کند که با یک یال به راسی که آلیس بازی کرده، متصل باشد پس $\Gamma_g^A(K_{nn}^*) \geq n$. از طرفی $\Gamma(K_{nn}^*) = n$ ، در نتیجه $\Gamma_g^A(K_{nn}^*) = n$.

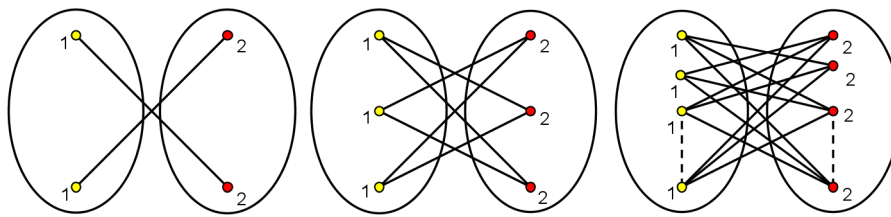
^{۱۰} Greedy colouring game

^{۱۱} Alice - first game Grundy number

^{۱۲} Bob - first game Grundy number

شکل ۱.۲: $\Gamma_g^A(K_{nn}^*) = n$

حال فرض کنید باب آغازگر بازی است، زیرا افزاز دو بخشی (K_{nn}^*) را با (V_1, V_2) نشان می‌دهیم. باب ابتدا یک راس $v \in V_1$ به رنگ ۱ رنگ آمیزی می‌کند چون هدف آلیس مینیم کردن رنگ هاست پس راس $w \in V_1$ را به رنگ ۱ رنگ آمیزی می‌کند. حال هر راس در V_2 مجاور با v یا w است پس رنگ ۱ نخواهند گرفت. اگر بازیکن یک راس از V_1 را انتخاب کند آن راس به رنگ ۱ خواهد بود زیرا همسایه‌ای به رنگ ۱ ندارد و اگر بازیکن یک راس از V_2 را انتخاب کند آن راس به رنگ ۲ خواهد بود زیرا این رئوس فقط مجاور با رئوس به رنگ ۱ هستند. پس در پایان تمام رئوس در V_1 به رنگ ۱ و تمام رئوس در V_2 به رنگ ۲ خواهند بود. پس $\Gamma_g^B(K_{nn}^*) \geq 2$ از طرفی $\chi(K_{nn}^*) = 2$ ، در نتیجه $\Gamma_g^B(K_{nn}^*) = 2$ □

شکل ۲.۲: $\Gamma_g^B(K_{nn}^*) = 2$

در گزاره بالا اولین بازی عدد گراندی - آلیس بزرگتر از اولین بازی عدد گراندی - باب است اما ممکن است برعکس اتفاق بیفتد. گراف $H = K_{nn}^* +$ را در نظر بگیرید. اولین بازیکن می‌تواند روی راس منزوی بازی کند و بازیکن دوم استراتژی گزاره بالا را استفاده کند. پس $\Gamma_g^A(H) = 2$ و $\Gamma_g^B(H) = n$ خواهد بود. ثابت شده که برای کلاس‌های طبیعی گراف‌ها، معمولاً $\Gamma_g^A(\mathcal{H}) = \Gamma_g^B(\mathcal{H})$ است.

گزاره ۶.۲.۲ [۳۶] فرض کنید $\mathcal{H}$ یک کلاس از گراف‌هاست، اگر $G \in \mathcal{H}$ ، $2G \in \mathcal{H}$ و $G^+ \in \mathcal{H}$ آنگاه $\Gamma_g^A(\mathcal{H}) = \Gamma_g^B(\mathcal{H})$.

برهان. فرض کنید $\Gamma_g^B(\mathcal{H}) = K$ باشد پس یک گراف $G \in \mathcal{H}$ وجود دارد بطوریکه $\Gamma_g^B(G) > K - 1$ ، یعنی باب یک استراتژی دارد که ماکسیمم رنگ‌های استفاده شده در بازی رنگ آمیزی حریصانه حداقل K است پس حداقل رنگ لازم برای رنگ آمیزی K است، ما نشان خواهیم داد که $\Gamma_g^A(\mathcal{H}) > K - 1$

و چون $\mathcal{H}$ یک کلاس از گراف هاست می توانیم نشان دهیم که $\Gamma_g^A(2G) \geq K$. ابتدا فرض کنید آلیس آغازگر بازی است و تعداد رئوس G فرد است، دو کپی از G در $2G$ را با G_1 و G_2 نشان می دهیم. فرض کنید آلیس در حرکت اول، یک راس از G_1 رنگ آمیزی کند. پس از آن، باب در حرکت اول، یک راس از G_2 بر طبق استراتژی خود رنگ می کند در ادامه هر زمان آلیس یک راس از G_2 رنگ کند باب یک راس از G_2 بر طبق استراتژی خود رنگ می کند. اگر آلیس یک راس از G_1 رنگ کند چون تعداد رئوس G_1 فرد است حتماً یک راس رنگ نشده در G_1 وجود دارد که باب می تواند آن را رنگ کند. چون باب اولین راس در G_2 را رنگ کرده حتماً آلیس را مجبور می کند که با حداقل K رنگ بازی کند. پس باب بر طبق استراتژی خود مانع برد آلیس می شود و آلیس با $K - 1$ رنگ برنده نمی شود. پس $\Gamma_g^A(2G) > K - 1$.

حال فرض کنید تعداد رئوس G زوج باشد، تنها مشکلی که در حالت بالا ممکن است رخ دهد این است که بعد از بازی آلیس، راس رنگ نشده ای در G_1 باقی نماند، برای رفع این مشکل باب می تواند استراتژی بالا را روی $2G^+$ انجام دهد پس $\Gamma_g^A(\mathcal{H}) \geq K$.

حال فرض کنید $\Gamma_g^A(\mathcal{H}) = K$. پس یک گراف $G \in \mathcal{H}$ وجود دارد بطوریکه $\Gamma_g^A(G) > K - 1$ ، یعنی استراتژی باب این است که آلیس را مجبور می کند با حداقل K رنگ، گراف را رنگ آمیزی کند، ما نشان خواهیم داد که $\Gamma_g^B(\mathcal{H}) \geq K$. فرض کنید باب آغازگر بازی است او ابتدا راس منزوی در گراف G^+ رنگ آمیزی می کند و برای بقیه رئوس باب از استراتژی اش استفاده می کند پس $\Gamma_g^B(\mathcal{H}) \geq K$. $\square$

در این فصل ما در مورد عدد بازی گراندی جنگل و ۲-درخت جزئی بحث خواهیم کرد. جنگل و ۲-درخت جزئی در فرضیات گزاره (۶.۲.۲)، صدق می کنند بنابراین فرض می کنیم که آلیس در تمام بازی ها حرکت اول انجام می دهد. در ادامه برای خلاصه نویسی Γ_g^A (اولین بازی عدد گراندی-آلیس) را به صورت Γ_g (عدد بازی گراندی) نشان می دهیم. می دانیم که $\Gamma_g(G) \leq col_g(G)$ ، زیرا می توان $col_g(G)$ را $1 + \max_{x \in V(G)} \Delta(x)$ در نظر گرفت که این مقدار برابر با $\Gamma_g(G)$ است. ثابت شده که عدد بازی رنگ آمیزی جنگل برابر ۴ است پس عدد بازی گراندی جنگل حداکثر ۴ است ما ابتدا ثابت خواهیم کرد که عدد بازی گراندی جنگل حداکثر ۳ و عدد بازی گراندی درخت برابر ۳ است. از طرفی ثابت شده است که عدد بازی رنگ آمیزی ۲-درخت جزئی ۸ می باشد پس عدد بازی گراندی ۲-درخت جزئی حداکثر ۸ است در انتها ثابت خواهیم کرد که عدد بازی گراندی ۲-درخت جزئی حداکثر ۷ است. اما تا به حال گراف ۲-درخت جزئی با عدد بازی گراندی ۷ ارائه نشده است.

بنا به تعریف می دانیم که $\chi(G) \leq \Gamma(G)$ است زیرا عدد گراندی مینیم رنگی است که در همسایه ها ظاهر نشده باشد پس عدد گراندی گراف بزرگتر از عدد رنگی آن است. اما این رابطه در بازی صدق نمی کند زیرا بازی عدد رنگی جنگل از بازی عدد گراندی آن بزرگتر است. در انتها نشان خواهیم داد که بازی عدد رنگی یک گراف خاص، از بازی عدد گراندی آن بزرگتر است اما در حالت کلی نمی دانیم که آیا می توان بازی عدد رنگی را با تابعی از بازی عدد گراندی محدود کرد یا نه؟ همچنین تا به حال درستی یا نادرستی رابطه $\Gamma_g(G) \leq \chi_g(G)$ برای هر گراف G ، ثابت نشده است.

۳.۲ بازی عدد گراندی جنگل

قضیه ۱.۳.۲. [۳۶] اگر F یک جنگل باشد آنگاه $\Gamma_g(F) \leq 3$.

قبل از اثبات قضیه لازم است به بیان چند تعریف بپردازیم. اگر درجه یک راس از جنگل، حداکثر ۱ باشد آن را برگ^{۱۳} می‌نامیم و اگر درجه آن حداقل ۳ باشد آن را گره^{۱۴} می‌نامیم. اگر یک راس برگ نباشد یک راس داخلی^{۱۵} است. یک رنگ آمیزی جزئی^{۱۶} C از یک جنگل F داده شده، به ماکسیمال زیر درخت‌هایی که هیچ راس داخلی رنگ آمیزی نشده باشند C -مولفه‌ها یا مولفه‌های جنگل می‌نامیم یعنی هر راس رنگ آمیزی شده یک برگ باشد. اگر یک یال، دو راس آن رنگ آمیزی شده باشند مولفه تهی است. هسته یک مولفه، مینیمم زیر درختی است که شامل تمام برگ‌های رنگ آمیزی شده باشد.

برهان. اگر مولفه C یکی از حالت‌های زیر باشد، خوب است.

I: دقیقاً دو برگ به رنگ $\{2, 3\}$ رنگ آمیزی شده باشند که فاصله این دو برگ ۲ نباشد و هیچ برگ دیگری رنگ نشده باشد.

II: دقیقاً یک برگ به رنگ $\{2, 3\}$ رنگ آمیزی شده باشد و هسته C حداکثر یک گره داشته باشد. اگر یک برگ به رنگ ۳ باشد و C یک گره داشته باشد آنگاه برگ به رنگ ۳، مجاور با گره نباشد.

III: هیچ برگ به رنگ $\{2, 3\}$ نباشد و هسته C حداکثر دو گره داشته باشد.

IV: هیچ برگ به رنگ ۳ نباشد، حداقل دو برگ به رنگ ۲ باشد و هسته C یک گره منحصر به فرد داشته باشد که مجاور با تمام برگ‌های به رنگ ۲ باشد.

یک مولفه که خوب نباشد بد نامیده می‌شود. بدیهی است که اگر یک بازیکن یک راس در مولفه خوب انتخاب کند آن راس به رنگ $\{1, 2, 3\}$ خواهد بود زیرا اگر رنگ راس حداقل ۴ باشد این راس باید مجاور با ۳ راس به رنگ $\{1, 2, 3\}$ باشد که امکان پذیر نیست. در ابتدا همه مولفه‌ها از نوع III هستند.

(۱) فرض کنید بعد از اینکه باب بازی کرد تمام مولفه‌ها خوب هستند نشان می‌دهیم که آلیس می‌تواند روی مولفه ای بازی کند که هیچ مولفه بدی ساخته نمی‌شود.

• فرض کنید یک مولفه ناتهی از نوع I وجود دارد پس فاصله بین دو برگ رنگی، حداقل ۳ است. آلیس همسایه یکی از این برگ‌ها را به رنگ ۱ رنگ آمیزی می‌کند چون تنها همسایه رنگی آن

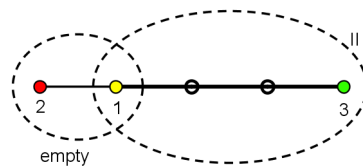
^{۱۳}Leaf

^{۱۴}Node

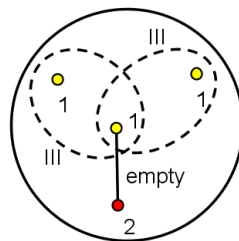
^{۱۵}Inner vertex

^{۱۶}Partial coloring

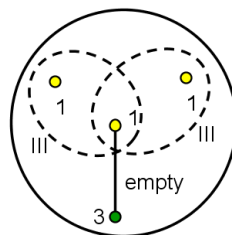
به رنگ ۲ یا ۳ است پس تمام مولفه های جدید خوب هستند.



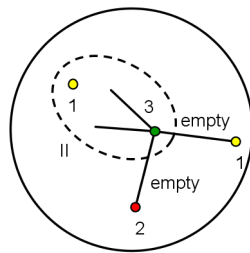
- فرض کنید یک مولفه ناتهی از نوع II وجود دارد. اگر این مولفه برگه به رنگ ۲ داشته باشد، آلیس همسایه این برگه در هسته را به رنگ ۱ رنگ آمیزی می کند در اینصورت تمام مولفه های جدید از نوع III هستند.



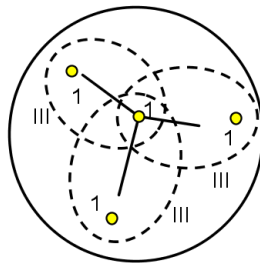
و اگر برگه به رنگ ۳ باشد آلیس باز هم همسایه این برگه را به رنگ ۱ رنگ آمیزی خواهد کرد که در اینصورت تمام مولفه های جدید از نوع III خواهند بود.



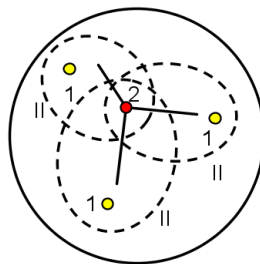
در غیر اینصورت در صورت وجود گره در هسته، آلیس می تواند گره را به رنگ ۲ یا ۳ رنگ آمیزی کند که در اینصورت باید مجاور با یک برگه از C به رنگ ۱ باشد. بنابراین تمام مولفه های ناتهی جدید از نوع II هستند.



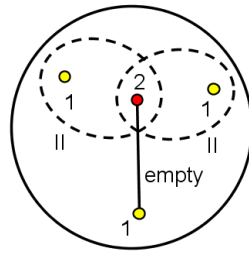
- فرض کنید یک مولفه ناتهی از نوع III وجود دارد. اگر گره ای در هسته وجود داشته باشد آلیس آن را به رنگ ۱ رنگ آمیزی می کند که در اینصورت تمام مولفه های جدید از نوع III هستند.



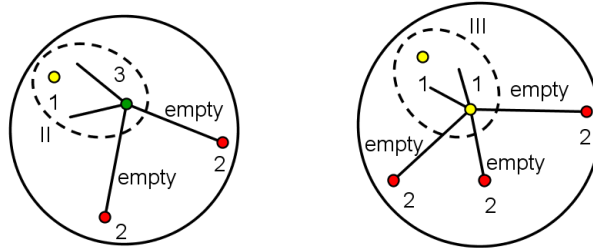
- همچنین آلیس می تواند گره موجود در هسته را به رنگ ۲، رنگ آمیزی کند که در اینصورت تمام مولفه های جدید از نوع II هستند.



- در غیر اینصورت، اگر گره ای در هسته وجود نداشته باشد آلیس همسایه یکی از برگ ها را به رنگ ۲، رنگ می کند که در اینصورت تمام مولفه های جدید از نوع II خواهند بود.

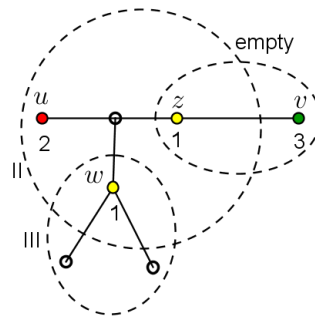


- فرض کنید یک مولفه از نوع IV وجود دارد. آلیس گره موجود در هسته را به رنگ ۱ یا ۳ رنگ می کند که در اینصورت مولفه های ناتهی جدید از نوع II یا III خواهند بود.

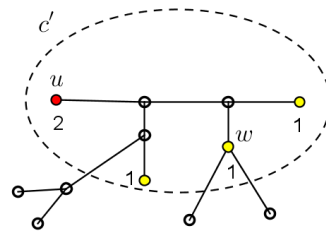


- ۲) حال فرض کنید بعد از بازی باب مولفه ی بدی رخ داده، نشان می دهیم که آلیس می تواند روی آن مولفه طوری بازی کند که بعد از بازی آلیس هیچ مولفه بدی وجود نخواهد داشت.

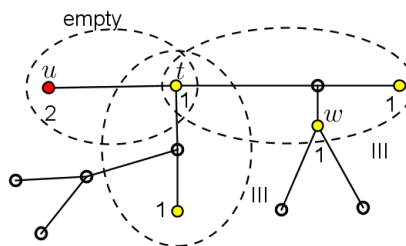
- فرض کنید باب روی یک مولفه C از نوع I بازی می کند. u و v دو برگ رنگ شده در C باشد. هسته C ، مسیر p از u به v است. باب نمی تواند روی راسی از p بازی کند چون در اینصورت تمام مولفه های ساخته شده خوب خواهند بود. بنابراین باب روی راس w ، بیرون از مسیر p بازی می کند که در اینصورت راس w ، رنگ ۱ را دریافت می کند چون اگر w همسایه ای به رنگ ۱ داشت باید این راس در مولفه باشد در حالیکه رئوس رنگ شده در مولفه فقط u و v هستند. پس w هیچ همسایه رنگ شده ای ندارد. تمام مولفه های ساخته شده ای که شامل u و v نباشند از نوع III هستند زیرا تنها برگ رنگ شده آن w است. حال فرض کنید مولفه C' ، شامل u ، v و w است. چون طول p ، حداقل ۳ است پس یک راس از $\{u, v\}$ مانند u ، مجاور با گره ای از هسته C' نیست. آلیس همسایه z آن را به رنگ ۱، رنگ می کند و بنابراین C' یک مولفه تهی، یک مولفه از نوع II (شامل z ، u و w) و مولفه هایی از نوع III خواهد داشت.



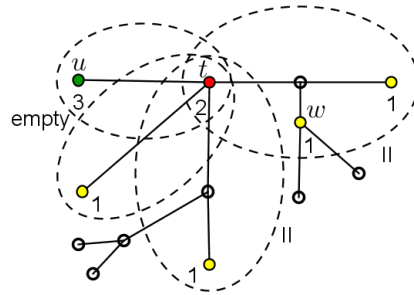
- فرض کنید باب روی یک مولفه C از نوع II بازی می‌کند. u راسی از C به رنگ $\{2, 3\}$ باشد. فرض کنید باب روی راس w بیرون از هسته C بازی می‌کند پس w به رنگ ۱ خواهد بود که در اینصورت C ، مولفه‌های از نوع III و یک مولفه C' شامل w و تمام برگهای رنگ شده از C است. در مولفه C' ، ما دو گره خواهیم داشت.



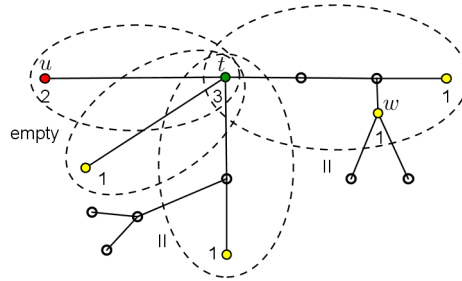
- فرض کنید t همسایه u در هسته C' باشد. اگر t همسایه‌ای به رنگ ۱ نداشته باشد آنگاه آلیس t را به رنگ ۱، رنگ آمیزی می‌کند پس تمام مولفه‌های ناتهی جدید از نوع III هستند.



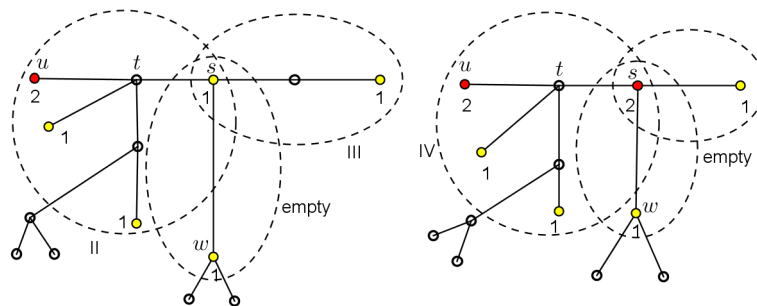
- حال فرض کنید که t یک همسایه به رنگ ۱ داشته باشد پس t یکی از دو گره هسته C' است. اگر u به رنگ ۳ باشد آنگاه آلیس t را به رنگ ۲، رنگ آمیزی می‌کند که در اینصورت تمام مولفه‌های ناتهی جدید از نوع II هستند.



اما اگر u به رنگ ۲ باشد و t مجاور با گره دوم از هسته C' نباشد آنگاه آلیس t را به رنگ ۳، رنگ آمیزی می کند که در اینصورت تمام مولفه های ناتهی جدید از نوع II هستند.



اگر u به رنگ ۲ باشد و t مجاور با گره دوم s از هسته C'' باشد آنگاه آلیس s را به رنگ ۱ یا ۲ رنگ آمیزی می کند چون این راس فقط می تواند در مجاورت رئوسی به رنگ ۱ باشد بنابراین تمام مولفه های جدید از نوع II، III، IV هستند.

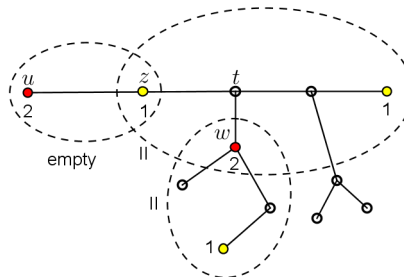


حال فرض کنید باب روی راس w ، درون هسته C بازی می کند.

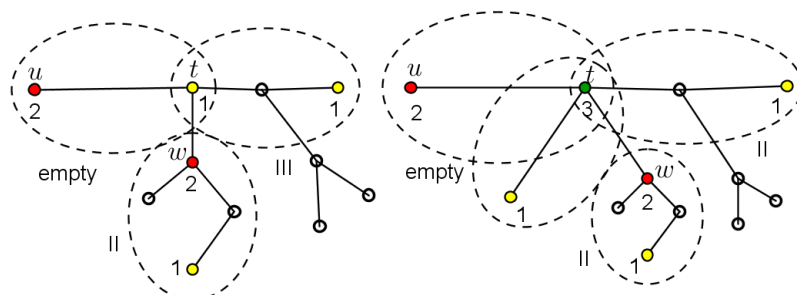
w نمی تواند به رنگ ۱ باشد چون باید یک مولفه بد ساخته شود. همچنین به رنگ ۳ هم نخواهد بود. زیرا اگر w به رنگ ۳ باشد این راس در مجاورت با u و برگی به رنگ ۱ در C است که در اینصورت تمام مولفه های ناتهی جدید از نوع II هستند.

بنابراین w به رنگ ۲ است پس این راس باید در مسیر بین گره t از هسته C و یک برگ مجزا

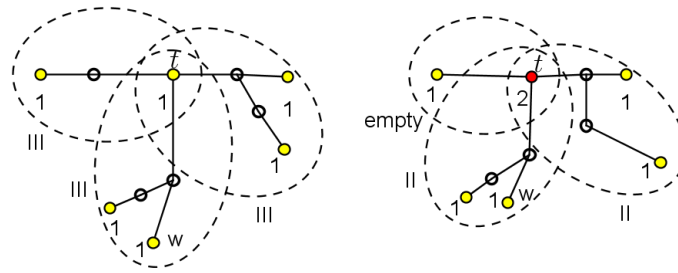
از u باشد. تنها مولفه بد C' شامل u و w است اگر یکی از رئوس u و w همسایه z داشته باشد که گره ای از هسته C' نباشد آنگاه آلیس راس z به رنگ ۱، رنگ آمیزی می کند که در اینصورت تمام مولفه های جدید از نوع II یا I هستند.



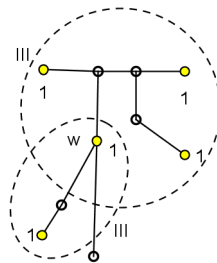
در غیر اینصورت u و w هر دو مجاور با t هستند. در حالت خاص، اگر u به رنگ ۲ رنگ شود آلیس روی t بازی می کند که باید به رنگ ۱ یا ۳ باشد چون این راس مجاور با راسی به رنگ ۳ نیست بنابراین تمام مولفه های ناتهی جدید از نوع II یا III هستند.



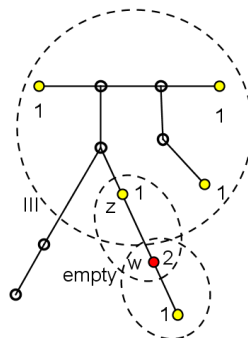
- فرض کنید باب روی یک مولفه C از نوع III بازی می کند. فرض کنید باب روی راس w ، بیرون از هسته C بازی می کند. پس w به رنگ ۱ است. مولفه بد ساخته شده C' باید سه گره در هسته اش داشته باشد. آلیس روی گره t بازی می کند که در مسیر بین دو گره دیگر باشد. راس t فقط می تواند با رئوس به رنگ ۱ مجاور باشد بنابراین به رنگ $\{1, 2\}$ است و تمام مولفه های جدید حداکثر یک گره دارند و از نوع II یا III هستند.



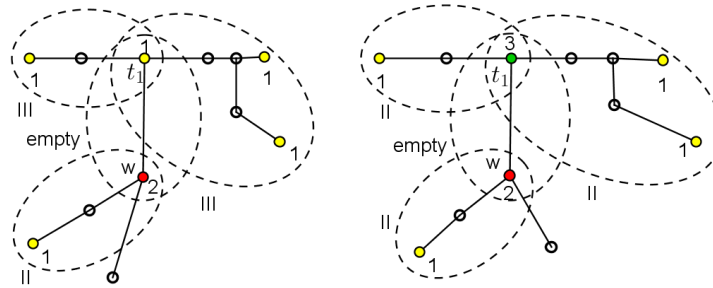
فرض کنید باب روی راس w ، درون هسته C بازی می کند. w نمی تواند به رنگ ۱ باشد زیرا در اینصورت تمام مولفه ها از نوع III هستند.



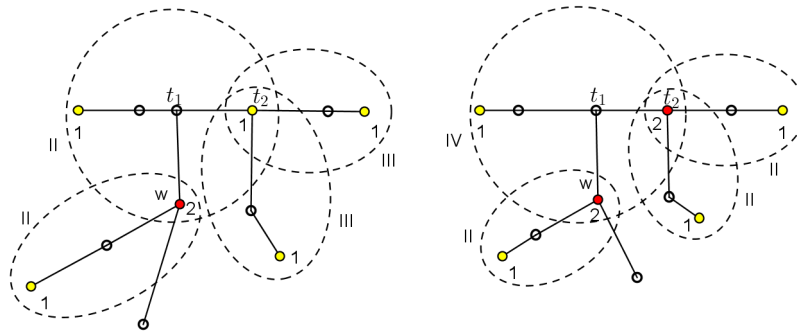
بنابراین w به رنگ ۲ است چون مجاور با راسی به رنگ ۲ نیست. بعد از بازی باب، مولفه بد C' باید شامل w و دو گره t_1 و t_2 در هسته اش باشد. اگر w مجاور با هیچ کدام از گره ها نباشد آنگاه آلیس روی راس z بازی می کند که در هسته C' ، همسایه w است. بنابراین z باید به رنگ ۱، رنگ شود و تمام مولفه های جدید از نوع III هستند.



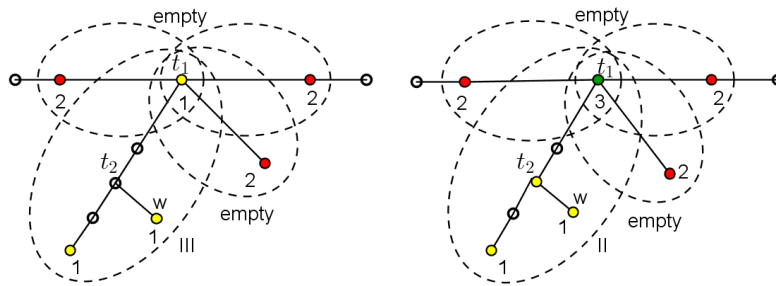
حال فرض کنید که w مجاور با یکی از گره ها به نام t_1 باشد. اگر t_1 مجاور با t_2 نباشد آنگاه آلیس راس t_1 به رنگ ۱ یا ۳ رنگ می کند و تمام مولفه های جدید از نوع II یا III هستند.



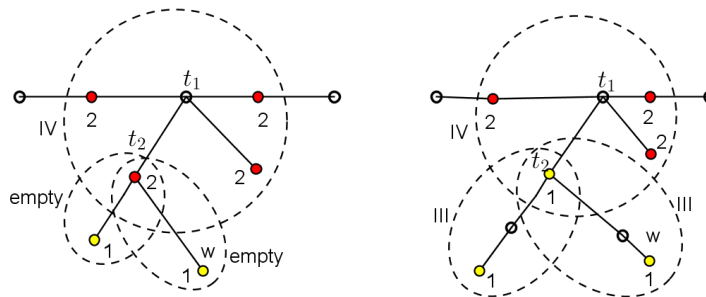
اگر t_1 و t_2 مجاور باشند آنگاه آلیس راس t_2 را به رنگ ۱ یا ۲ رنگ می کند چون این راس مجاور با راسی به رنگ ۲ نیست. بنابراین تمام مولفه های جدید از نوع II، III هستند و احتمالاً یک مولفه از نوع IV است.



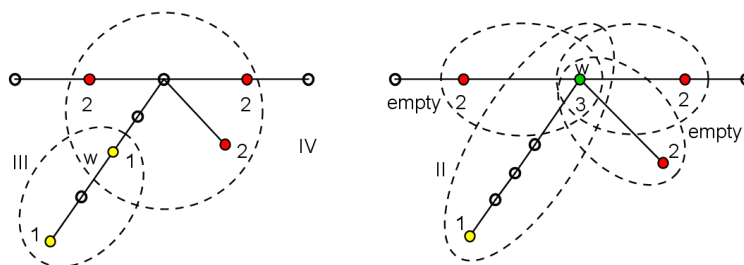
- فرض کنید باب روی یک مولفه C از نوع IV بازی می کند. فرض کنید باب روی راس w ، بیرون از هسته C بازی می کند. پس w به رنگ ۱، رنگ می شود مولفه بد C' دو گره در هسته اش دارد گره t_1 ، همان گره در هسته C است و بنابراین مجاور با تمام برگهای به رنگ ۲ است. فرض کنید t_2 دومین گره از هسته C' باشد. اگر t_1 مجاور با t_2 نباشد آنگاه آلیس t_1 را به رنگ ۱ یا ۳ رنگ می کند چون مجاور با راسی به رنگ ۳ نیست و مجاور با راسی به رنگ ۲ است بنابراین تمام مولفه های ناتهی جدید از نوع III یا II هستند.



اگر t_1 مجاور با t_2 باشد آنگاه آلیس t_2 را به رنگ ۱ یا ۲ رنگ می کند چون مجاور با راسی به رنگ ۳ نیست بنابراین تمام مولفه های جدیدی که شامل t_1 هستند هنوز از نوع IV است و تمام مولفه های جدید دیگر از نوع II یا III هستند.



فرض کنید باب روی راس w ، درون هسته C بازی می کند پس w به رنگ ۱ نیست چون باید یک مولفه بد ساخته شود. همچنین به رنگ ۳ هم نیست زیرا اگر w به رنگ ۳ باشد این راس باید گره ای از هسته C باشد و بنابراین تمام مولفه های ناتهی ساخته شده از نوع II هستند.



پس w به رنگ ۲ است. بنابراین این راس مجاور با گره t در هسته C نیست چون باید یک مولفه بد ساخته شود آلیس راس t را به رنگ ۱ یا ۳ رنگ می کند. بنابراین تمام مولفه های ناتهی جدید از نوع II یا I هستند.

□

شکل ۴.۲: $\Gamma_g^B(P_V)$

۴.۲ بازی عدد گراندی ۲-درخت جزئی

تعریف ۱.۴.۲. یک K -درخت به استقرا به صورت زیر تعریف می شود :

- K_{k+1} یک K -درخت است.
- اگر G یک K -درخت باشد آنگاه هر گراف بدست آمده از اتصال یک راس به K راس از یک خوشه G ، یک K -درخت خواهد بود.

بدیهی است که کلاس ۱-درخت ها، کلاس همه درخت ها است. ترتیب رئوس $(v_1, \dots, v_n)$ از یک K -درخت، متناظر با ترتیب رئوس اضافه شده در ساختار استقرایی است. بنابراین $(v_1, \dots, v_{k+1})$ خوشه اصلی است و برای هر $i \geq k+1$ ، راس v_i دقیقاً K همسایه چپ دارد که به فرم یک خوشه هستند (رئوس به ترتیب از چپ به راست قرار می گیرند). یک K -درخت جزئی^{۱۷}، یک زیرگراف از یک K -درخت است.

قضیه ۲.۴.۲. [۳۶] اگر G ، یک ۲-درخت جزئی باشد آنگاه $\Gamma_g(G) \leq 7$ است.

برهان. فرض کنید G یک ۲-درخت جزئی باشد و H یک ۲-درخت شامل G باشد و $(v_1, \dots, v_n)$ ترتیب رئوس H باشد. ما ترتیب رئوس را به صورت یک خط از چپ به راست در نظر می گیریم پس اگر یک راس، اندیس کوچکتری (بزرگتری) نسبت به دیگری داشته باشد سمت چپ (راست) آن راس قرار می گیرد. استراتژی آلیس همان استراتژی [۵۷] است که برای اثبات $col_g(G) \leq 8$ استفاده شده است. آلیس یک مجموعه از رئوس فعال^{۱۸} را ضبط خواهد کرد. یک راس رنگ شده، فعال است اما بعضی از رئوس فعال، رنگ شده نیستند. یک راس رنگ نشده فقط زمانی فعال خواهد شد که با الگوریتم زیر توسط آلیس فعال شود. در ابتدا هیچ راسی فعال نیست. آلیس راسی با کوچکترین اندیس رنگ آمیزی و فعال می کند. فرض کنید باب راس v رنگ می کند آنگاه آلیس بر طبق الگوریتم زیر بازی می کند. تمام مجاورت های فرض شده در H هستند.

۰. اگر تمام همسایه های چپ v رنگ شده باشند آنگاه آلیس راس رنگ نشده ای در سمت چپ با کوچکترین اندیس رنگ می کند. در غیر این صورت آلیس راس v فعال می کند و به مرحله بعد می رود.

۱. فرض کنید w ، همسایه چپ v با کوچکترین اندیس باشد که رنگ نشده باشد. اگر w فعال نباشد آنگاه آلیس روی راس w می پرد و آن را فعال می کند. آلیس این روند تکرار می کند و به مرحله بعد می رود.

^{۱۷}Partial k-tree

^{۱۸}Active vertices

۲. اگر w فعال باشد یا دو همسایه چپ w رنگ شده باشند آنگاه آلیس راس w را رنگ می کند.

به بیان دیگر آلیس از یک راسی که باب آن را رنگ کرده، به راس رنگ نشده ای که همسایه چپ این راس با کوچکترین اندیس است، می پرد تا زمانی که دیگر نتواند پرشی داشته باشد یعنی آلیس تمام رئوسی که روی آن پرش داشته را فعال می کند و راسی که روی آن متوقف شده را رنگ می کند. زمانی که آلیس از راس v به راس w می پرد، ما یال vw از v به w جهت گذاری می کنیم. F یک مجموعه از یالهای H است که جهت گذاری شده اند. $D = (V(G), F)$ قرار دهید. اولین باری که آلیس روی راس v می پرد راس v را فعال می کند و به همسایه چپش می پرد دومین باری که آلیس روی v می پرد راس v ، تنها می تواند رنگ شود پس آلیس نمی تواند دوباره از v پرش داشته باشد بنابراین آلیس حداکثر یکبار از یک راس می پرد. از طرف دیگر آلیس راسی که برای بار اول روی آن پرش شده را فعال می کند و اگر برای بار دوم روی آن پرش شود آن را رنگ می کند پس آلیس حداکثر دو بار روی یک راس می پرد. پس در حالت خاص، هر راس از D درجه خروجی حداکثر یک و درجه ورودی حداکثر دو دارد. به عبارت دیگر اگر یک راس درجه ورودی دو داشت پس درجه خروجی آن یک است. برای هر راس x ، فرض کنید $P(x)$ مجموعه ای از همسایه های x باشند که قبل از x رنگ شدند و $R(x)$ مجموعه ای از رئوس در $P(x)$ باشد که سمت راست x قرار دارند. همچنین فرض کنید $N^-(x)$ ، رئوسی هستند که به راس x وارد می شوند.

ادعا ۳.۴.۲. فرض کنید x یک راس با همسایه های چپ x_1 و x_2 باشد آنگاه $R(x) = R'(x) \cup R''(x)$ که $R'(x) = R(x) \cap N^-(x)$ و $R''(x) = R(x) \cap (N^-(x_1) \cup N^-(x_2))$.

برهان. فرض کنید z یک راس در $R(x)$ باشد. آلیس زمانی می تواند راس z رنگ کند که دو بار روی آن پریده باشد چون یکی از همسایه های چپش به نام x رنگ نشده است. پس اگر آلیس راس z رنگ کند، اولین باری که او روی z پریده، دوباره از z به راس دیگری پرش داشته است. اگر باب راس z رنگ کند، آنگاه آلیس روی یکی از همسایه های چپ z پریده بنابراین در هر دو حالت آلیس از z پریده است. اگر آلیس از z به x نپریده باشد، پس او به یک راسی در سمت چپ x پریده که آن راس باید با راس x مجاور باشد چون همسایگی چپ هر راس یک خوشه در H است. بنابراین آلیس از z به x_1 یا x_2 پریده است. $\square$

ادعا ۴.۴.۲. برای هر راس x ، $|R'(x)| \leq 2$ ، $|R''(x)| \leq 4$ و $|R(x)| \leq 5$ است.

برهان. آلیس حداکثر دوبار روی هر راس می پرد یعنی حداکثر درجه ورودی ۲ است پس $|R'(x)| = |R(x) \cap N^-(x)| \leq 2$ و $|R''(x)| = |R(x) \cap (N^-(x_1) \cup N^-(x_2))| \leq 4$. بعلاوه اگر $|R'(x)| = 2$ باشد آنگاه $|R''(x)| \leq 3$ است چون اولین باری که آلیس روی x پرید او راس x را رنگ نکرد پس او باید روی یکی از همسایه های چپ x پریده باشد یعنی $x \in N^-(x_1) \cup N^-(x_2)$ ، از طرف دیگر $x \notin R(x)$ بنابراین $3 = 4 - 1 \leq |R''(x)|$ ، به عبارت دیگر حداکثر ۳ راسی که آلیس از آن روی $\{x_1, x_2\}$ پریده، مجزا از x هستند. در نتیجه $|R(x)| = |R'(x) \cup R''(x)| \leq 5$. $\square$

به برهان خلف فرض کنید که یک راس v به رنگ ۸ وجود دارد. فرض کنید v_1 و v_2 دو همسایه چپ v باشند که v_2 سمت چپ v_1 باشد. پس $|P(v)| \geq 7$. از طرفی $R(v) = P(v) \setminus \{v_1, v_2\}$ است چون $\{v_1, v_2\} \subset P(v)$ بنابراین $|R(v)| \geq 5$. با ادعای بالا میتوان نتیجه گرفت که $|R(v)| = 5$. فرض کنید q راسی از $R'(v)$ باشد که آخرین راسی است که رنگ می شود. اگر راس دیگری از $R'(v)$ وجود داشته باشد آن را p فرض کنید. اگر در مجموعه S ، راس p وجود نداشته باشد آن را با $S \setminus \{p\}$ نشان می دهیم.

ادعا ۵.۴.۲. باب قبل از اینکه آلیس راس v رنگ کند، راس q را رنگ کرده و $R'(q) = \emptyset$.

برهان. ما ادعا می کنیم که آلیس بعد از پرش از راس q ، راس v را رنگ کرد. طبق ادعا (۴.۴.۲)، $|R'(v)| \leq 2$ است. اگر $|R'(v)| = 2$ باشد پس آلیس دو بار روی v پرش داشته یعنی آلیس با پرش از q ، راس v را رنگ کرده است. اگر $|R'(v)| = 1$ باشد چون $|R(v)| = 5$ است بنا بر ادعا (۴.۴.۲)، $|R''(v)| = 4$ است. بنابراین آلیس از v به x_1 یا x_2 پرشی نداشته و در نتیجه او اولین باری که روی v پریده، آن را رنگ کرده است. اما آلیس تنها از راس q به v پریده است. توجه کنید که آلیس هیچوقت از یک راس رنگ شده نمی پرد مگر اینکه باب آن راس را رنگ کرده باشد. پس باب راس q را رنگ کرده نه آلیس. از طرفی آلیس حداکثر یکبار از یک راس می پرد که آن راس می تواند رنگ شده باشد اما نباید آلیس آن را رنگ کرده باشد بنابراین آلیس قبل از رنگ آمیزی q ، از آن پرشی نداشته در نتیجه آلیس قبل از رنگ آمیزی q ، روی q پرشی نداشته زیرا در غیر اینصورت چون راس v قابل استفاده است آلیس باید روی q پرش داشته باشد. بنابراین $R'(q) = \emptyset$. $\square$

ادعا ۶.۴.۲. اگر $w \in R''(v)$ باشد آنگاه $|R(w) \setminus \{p\}| \leq 2$.

برهان. فرض کنید $w \in R''(v)$ باشد. پس همسایه های چپ w ، v و همسایه خروجی $v' \in \{v_1, v_2\}$ از w هستند. فرض کنید z در $R''(w)$ باشد. آلیس باید از z به یک همسایه چپی از z ، که سمت چپ w است پرش داشته باشد. چون همسایگی های چپ خوشه ها هستند آلیس باید روی v یا v' بپرد. فرض کنید x_1, x_2 دو همسایه های ورودی v' باشند. چون $|R(v)| = 5$ است پس میتوان نتیجه گرفت که v و v' ، دو همسایه چپ x_1, x_2 هستند. اگر v یک همسایه ورودی یکی از x_1 و x_2 نباشد پس $|R''(v)| \leq 2$. از طرفی $R(v) = R'(v) \cup R''(v)$ در نتیجه $|R(v)| \leq 4$. که تناقض با $|R(v)| = 5$ است. پس v همسایه چپ x_1 یا x_2 است. چون هر راس حداکثر دو همسایه های چپ x_2 نیست. به یاد بیاورید که w یکی از x_1 و x_2 است زیرا در غیر اینصورت v' ، سه همسایه ورودی خواهد داشت که تناقض با این فرض است که درجه ورودی هر راس D حداکثر ۲ است. بعلاوه طبق ادعا (۵.۴.۲)، باب قبل از اینکه آلیس راس v رنگ کند، راس q را رنگ کرده پس w باید قبل از رنگ شده باشد. به عبارت دیگر به ازای هر $z \in R''(w)$ ، راس z نمی تواند q باشد بنابراین $R''(w) \subset \{p\}$. در نتیجه با ادعای (۴.۴.۲)، میتوان نتیجه گرفت که $|R'(w)| \leq 2$ یا $|R(w) \setminus \{p\}| \leq 2$. $\square$

ادعا ۷.۴.۲. $|R''(v)| = ۳$.

برهان. می دانیم که $|R(v)| = ۵$ و $R(v) = R'(v) \cup R''(v)$ است پس

$$|R(v)| = |R'(v)| + |R''(v)| - |R'(v) \cap R''(v)| = |R'(v)| + |R''(v)|.$$

بنابر ادعا (۴.۴.۲)، $|R'(v)| \leq ۲$. در نتیجه $|R''(v)| = |R(v)| - |R'(v)| \geq ۳$. از طرفی بنابر

ادعا (۴.۴.۲)، $|R''(v)| \leq ۴$. برای اثبات این ادعا به برهان خلف فرض کنید که $|R''(v)| = ۴$

باشد. با ادعا (۶.۴.۲)، برای همه $w \in R''(v)$ ، $|R(w)| \leq ۲$ است. همسایگی چپ از هر راس w

در $R''(v)$ ، $\{v, v'_w\}$ است که $v'_w \in \{v_1, v_2\}$ پس $p(w) \subset R(w) \cup \{v'_w\}$ است.

فرض کنید که هیچ راسی از $\{v_1, v_2\}$ به رنگ $\{۱, ۲, ۳\}$ رنگ آمیزی نشده است. برای هر $w \in R''(v)$ ،

یک رنگ از $\{۱, ۲, ۳\}$ به هیچ همسایه رنگ شده w انتساب داده نشده است. پس w حداکثر به رنگ ۳،

رنگ شده است. بنابراین راس v و سه همسایه های v_1, v_2, q ، حداکثر به رنگ های $\{۴, ۵, ۶, ۷\}$ هستند.

در نتیجه آلیس می تواند راس v را با رنگی کوچکتر از ۸ رنگ کند که تناقض با فرض مساله است.

حال فرض کنید که حداقل یک راس v' از $\{v_1, v_2\}$ به رنگ $\{۱, ۲, ۳\}$ رنگ آمیزی شده است. چون

$|P(w)| \leq ۳$ است پس هر راس w از $R''(v)$ ، حداکثر به رنگ ۴، رنگ شده است. بنابراین راس v

و دو همسایه q و $v' \setminus \{v_1, v_2\}$ حداکثر به رنگ های $\{۵, ۶, ۷\}$ هستند. در نتیجه آلیس می تواند راس

v را با رنگی کوچکتر از ۸ رنگ کند که تناقض با فرض مساله است.

□

ادعا ۸.۴.۲. $|P(q) \setminus \{p\}| \leq ۳$.

برهان. فرض کنید r همسایه چپ q ، مجزا از v باشد. با ادعا (۵.۴.۲)، $R'(q) = \emptyset$ است. از طرفی

$P(q) \subset R'(q) \cup N^-(r) \cup N^-(v)$ است که $N^-(v) = \{p, q\}$. پس $P(q) \setminus \{p\} \subset R'(q) \cup N^-(r)$

است. یعنی یک راس در $P(q) \setminus \{p\}$ یا r است یا یکی از حداکثر دو همسایه ورودی r است. □

ادعا ۹.۴.۲. $|P(q)| \leq ۵$.

برهان. فرض کنید r همسایه چپ p ، مجزا از v باشد. رئوس q و v بعد از رنگ شدند بنابراین

$P(p) \subset \{r\} \cup N^-(r) \cup N^-(p)$ در نتیجه $|P(q)| \leq ۵$. □

فرض کنید v_3 همسایه سمت چپ v_1 ، مجزا از v_2 است.

ادعا ۱۰.۴.۲. $|P(v_1) \setminus \{v_2\}| \leq ۴$. بعلاوه اگر $|P(v_1) \setminus \{v_2\}| = ۴$ باشد آنگاه v_2 یک همسایه

خروجی از v و t_3 ، همسایه ورودی v_3 است که مجزا از v_1 در $R(v_1)$ است.

برهان. می دانیم که $|R(v)| = ۵$. بنابر ادعا (۷.۴.۲)، $|R'(v)| = ۲$ است. پس $N^-(v) = ۲$

و بنابراین $N^+(v) = ۱$ است یعنی آلیس از v به یکی از همسایه های چپش پرش داشته در نتیجه

$|N^-(v_1) \cup N^-(v_2)| = |R''(v) \cup \{v\}| = ۴$ پس $|N^-(v_1)| = |N^-(v_2)| = ۲$ در نتیجه

۱. $|N^+(v_1)| = |N^+(v_2)|$. چون همسایه های ورودی v_2 در $\{v\} \cup R''(v)$ هستند. همسایه خروجی از v_1 راس v_3 است. $P(v_1) \subset \{v_2, v_3\} \cup N^-(v_1) \cup N^-(v_2) \cup N^-(v_3)$. هر راس در $N^-(v_2)$ یا v است یا v_2 و همسایه های چپ آنها هستند. حال فرض کنید یک راسی، v و v_2 همسایه چپ آن راس باشند. این راس نباید یک همسایه راست v_1 باشد چون هر راس فقط دو همسایه چپ دارد. از طرف دیگر راس v بعد از v_1 رنگ شده پس $v \notin P(v_1)$ یعنی $v \notin N^-(v_1)$. پس در هر دو حالت این رئوس، همسایه راست v_1 نیستند. بنابراین $P(v_1) \subset \{v_2, v_3\} \cup N^-(v_1) \cup N^-(v_3)$. از طرفی $N^-(v_3) = \{v_1, t_3\}$ است در نتیجه $P(v_1) \subset \{v_2, v_3, t_3\} \cup N^-(v_1)$. پس می توان نتیجه گرفت که $|P(v_1) \setminus \{v_2\}| \leq 4$.

اگر t_3 و دو راس از $N^-(v_1)$ در $P(v_1)$ باشند آنگاه $|P(v_1) \setminus \{v_2\}| = 4$. چون v بعد از v_1 رنگ شده، پس v در $P(v_1)$ نیست پس v در $N^-(v_1)$ نیست. v در $N^-(v_1) \cup N^-(v_2)$ است. در نتیجه $\square$ یک همسایه ورودی v_2 است.

ادعا ۱۱.۴.۲. v_2 به رنگ ۷، p به رنگ ۶، v_1 به رنگ ۵، q به رنگ ۴ و رئوس در $R''(v)$ به رنگ $\{1, 2, 3\}$ هستند.

برهان. می دانیم که $P(v) \subset \{v_1, v_2\} \cup R''(v) \cup p, q$. پس بنا بر ادعای (۹.۴.۲)، هر راس x از $P(v) \setminus \{v_2\}$ در $|P(x)| \leq 5$ صدق می کند پس x حداکثر به رنگ ۶، رنگ شده است. بنابراین v_2 به رنگ ۷ است. بنا بر ادعای (۱۰.۴.۲)، هر راس x از $P(v) \setminus \{p, v_2\}$ در $|P(x) \setminus \{v_2\}| \leq 4$ صدق می کند. پس x حداکثر به رنگ ۵، رنگ شده است. بنابراین p به رنگ ۶ است. بعلاوه بنا بر ادعای (۸.۴.۲)، هر راس x از $P(v) \setminus \{p, v_1, v_2\}$ در $|P(x) \setminus \{p, v_2\}| \leq 3$ صدق می کند. پس x حداکثر به رنگ ۴، رنگ شده است. بنابراین v_1 به رنگ ۵ است. در نهایت، بنا بر ادعای (۶.۴.۲)، هر راس w از $R''(v)$ در $|P(w) \setminus \{p, v_1, v_2\}| \leq 2$ صدق می کند. بنابراین q به رنگ ۴ است و رئوس در $R''(v)$ به رنگ $\{1, 2, 3\}$ هستند. $\square$

فرض کنید y_1 و y_2 دو همسایه چپ v_2 باشند. چون $N^-(v_2) = 2$ است فرض کنید یکی از این دو راس مانند y_1 ، یک همسایه خروجی از v_2 است.

$$P(v_2) \subset \{y_1, y_2\} \cup N^-(y_1) \cup N^-(y_2) \cup N^-(v_2).$$

اما بنا بر ادعا (۱۱.۴.۲)، v_1 به رنگ ۵ است پس $|P(v_1)| \geq 4$ خواهد بود. با ادعا (۱۰.۴.۲)، v یک همسایه ورودی v_2 است. فرض کنید w همسایه ورودی v_2 باشد که مجزا از v است. پس $w \in R''(v)$ است و بنابراین w حداکثر به رنگ ۳، رنگ شده است چون بنا بر ادعا (۱۱.۴.۲)، رئوس در $R''(v)$ به رنگ های $\{1, 2, 3\}$ هستند. v بعد از v_2 رنگ شده در نتیجه

$$P(v_2) \subset \{y_1, y_2, w\} \cup N^-(y_1) \cup N^-(y_2).$$

بعلاوه چون $v_2 \in N^-(y_1) \cup N^-(y_2)$ است بنابراین

$$|P(v_2)| \leq |N^-(y_1)| + |N^-(y_2)| - |N^-(y_1) \cap N^-(y_2)| + 3 \leq 6.$$

اما با ادعا (۱۱.۴.۲)، v_2 به رنگ ۷ است پس $|P(v_2)| = 6$. در نتیجه

$$P(v_2) = \{y_1, y_2, w\} \cup N^-(y_1) \cup N^-(y_2).$$

پس سه همسایه ورودی y_1 و y_2 که مجزا از v_2 هستند در $R''(v_2)$ قرار دارند زیرا این رئوس همسایه چپ v_2 نیستند. ما می دانیم که همسایه چپ راس t_3 (همسایه ورودی v_3)، راس v_1 است به بیان دیگر دو همسایه چپ t_3 ، رئوس v_1 و v_3 هستند پس t_3 یک همسایه راست v_2 نیست یعنی $t_3 \notin R''(v_2)$. در نتیجه با ادعا (۱۰.۴.۲)، v_3 در $R''(v_2)$ نیست. از طرف دیگر همسایه های ورودی y_1 و y_2 در $R''(v_2) \cup \{v_2\}$ قرار دارند. پس $v_3 \notin \{y_1, y_2\}$ یعنی v_3 همسایه چپ v_2 نیست. پس v_3 یک همسایه راست v_2 است که برای اثبات ادعای بعد از آن استفاده خواهیم کرد.

$$z = (N^-(y_1) \cup N^-(y_2)) \setminus \{v_2\}$$

ادعا ۱۲.۴.۲. اگر z یک راس از Z باشد آنگاه $R''(z) = \emptyset$.

برهان. به برهان خلف فرض کنید که یک راس $z \in R''(z)$ وجود دارد. پس t باید یک همسایه ورودی v_2 یا y_i برای $i \in \{1, 2\}$ باشد. اما یک همسایه ورودی y_i (مجزا از v_2)، v_2 و y_i همسایه های چپ این رئوس هستند بنابراین این راس همسایه راست z نیست زیرا تعداد همسایه های چپ آن بیشتر از ۲ خواهد بود. یک همسایه ورودی v_2 ، یا v است که بعد از z رنگ شده است در نتیجه $v \notin R''(z)$ و یا یک راس از $R''(v)$ است. از طرفی $|P(v_2)| = 6$ ، پس همسایه های چپ این راس در $\{v_1, v_2, v\}$ هستند. در نتیجه یک راس در $R''(v)$ ، همسایه راست z نیست. $\square$

ابتدا فرض کنید که هیچ راسی از $\{y_1, y_2\}$ به رنگ $\{1, 2, 3\}$ نباشد. برای هر $z \in Z$ ، یک رنگ از $\{1, 2, 3\}$ به هیچ یک از همسایه رنگ شده z اختصاص نداده شد. پس z حداکثر به رنگ ۳، رنگ آمیزی شده است. بنابراین وقتی آلیس v_2 را رنگ کرد این راس حداکثر دو همسایه به رنگ $\{4, 5, 6\}$ داشت. پس آلیس v_2 را با یک رنگی کمتر از ۷ رنگ آمیزی کرده که تناقض با فرض مساله است. در انتها فرض کنید که حداقل یک راس y' از $\{y_1, y_2\}$ ، به رنگ $\{1, 2, 3\}$ رنگ آمیزی شده باشد. چون $|P(z)| \leq 3$ است. هر راس z از Z ، حداکثر به رنگ ۴، رنگ آمیزی شده است. بنابراین وقتی که آلیس v_2 را رنگ کرد این راس حداکثر یک همسایه $\{y'\} \setminus \{y_1, y_2\}$ به رنگ $\{5, 6\}$ داشت. پس آلیس v_2 را با یک رنگی کمتر از ۷ رنگ آمیزی کرده که تناقض با فرض مساله است. در نتیجه عدد بازی گراندی یک ۲-درخت جزیی که آلیس آغازگر بازی باشد حداکثر ۷ است. $\square$

۵.۲ گراف هایی با عدد بازی رنگی بزرگتر از عدد بازی گراندی

تعریف ۱۰.۵.۲. اجتماع مجزا از دو کپی گراف های G_1 و G_2 را با $G_1 + G_2$ نشان می دهند. اگر در گراف $G_1 + G_2$ ، هر راس از کپی G_1 را به تمام رئوس از کپی G_2 متصل کنیم گراف حاصل را با $G_1 \oplus G_2$ نشان می دهند. برای هر عدد طبیعی p ، اجتماع مجزای p کپی از گراف G را با pG نشان

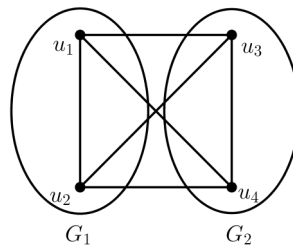
می دهند. یک کوگراف^{۱۹}، گرافی بدون زیر گراف القایی یکرخت با P_4 (مسیری روی ۴ راس) است. در [۱۳] ثابت شده که خانواده کوگراف ها را می توان به استقرا به صورت زیر تعریف کرد :

• K_1 یک کوگراف است.

• اگر G_1 و G_2 کوگراف باشند آنگاه $G_1 + G_2$ و $G_1 \oplus G_2$ کوگراف هستند.

چون $G_1 + G_2$ اجتماع مجزا از دو کپی گراف های G_1 و G_2 است و G_1 و G_2 کوگراف هستند پس $G_1 + G_2$ ، زیر گراف القایی یکرخت به P_4 نخواهد داشت. حال میخواهیم نشان دهیم که اگر G_1 و G_2 کوگراف باشند، $G_1 \oplus G_2$ هم کوگراف خواهد بود. به برهان خلف فرض کنید $G_1 \oplus G_2$ دارای زیرگراف القایی یکرخت به P_4 است. پس این زیر گراف یا کاملاً در G_1 است یا کاملاً در G_2 است و یا قسمتی از آن در G_1 و قسمت دیگر در G_2 است. بنا به فرض می دانیم که G_1 و G_2 کوگراف هستند پس زیرگراف القایی یکرخت به P_4 کاملاً در G_1 و G_2 نیست. از طرفی اگر بخشی از این زیرگراف در G_1 و بخشی دیگر در G_2 باشد مطابق شکل (۵.۲)، هر بخش شامل دو راس نیست چون گراف $G_1 \oplus G_2$ دارای زیر گراف القایی P_4 نخواهد بود.

از طرفی چون در P_4 ، راس u_1 فقط به u_2 متصل است پس یکی از بخش ها تک عضوی و دیگری



شکل ۵.۲: $G_1 \oplus G_2$

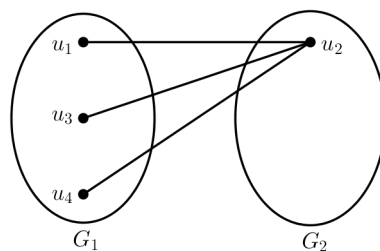
سه عضوی خواهد بود که با اتصال رئوس، در نهایت گراف $G_1 \oplus G_2$ ، زیر گراف القایی P_4 ندارد که تناقض با فرض مساله است. (شکل ۶.۲) پس اگر G_1 و G_2 کوگراف باشند، $G_1 \oplus G_2$ هم کوگراف خواهد بود.

با استقرا می توان ثابت کرد که اگر G یک کوگراف باشد آنگاه $\chi(G) = \Gamma(G)$ است.
ابتدا ثابت می کنیم که اگر G یک کوگراف باشد، آنگاه $\chi(G) \geq \Gamma(G)$ است.

• گراف K_1 یک کوگراف است و همچنین $\chi(G) \geq \Gamma(G)$ است.

• فرض می کنیم که گراف G یک کوگراف است و $\chi(G) \geq \Gamma(G)$ است.

^{۱۹}Cograph

شکل ۶.۲: $G_1 \oplus G_2$

- طبق تعریف کوگراف می‌دانیم که $G + K_1$ یا $G \oplus K_1$ کوگراف هستند. در [۳] ثابت شده که اگر G_1 و G_2 دو گراف باشند آنگاه روابط زیر را خواهیم داشت.

$$\Gamma(G_1 \oplus G_2) = \Gamma(G_1) + \Gamma(G_2)$$

$$\Gamma(G_1 + G_2) = \max(\Gamma(G_1), \Gamma(G_2))$$

$$\chi(G_1 \oplus G_2) = \chi(G_1) + \chi(G_2)$$

$$\chi(G_1 + G_2) = \max(\chi(G_1), \chi(G_2))$$

پس داریم :

$$\Gamma(G \oplus K_1) = \Gamma(G) + \Gamma(K_1) \leq \chi(G) + \chi(K_1) = \chi(G \oplus K_1)$$

$$\Gamma(G + K_1) = \max(\Gamma(G), \Gamma(K_1)) = \Gamma(G) \leq \chi(G) = \max(\chi(G), \chi(K_1)) = \chi(G + K_1)$$

می‌دانیم که برای هر گراف G ، $\chi(G) \leq \Gamma(G)$ است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که $\chi(G) = \Gamma(G)$ است. همچنین می‌دانیم که $\chi(G) \leq \Gamma_g(G) \leq \Gamma(G)$ است. پس ما گزاره زیر داریم.

گزاره ۲.۵.۲. [۳۶] اگر G یک کوگراف باشد، آنگاه $\chi(G) = \Gamma_g(G) = \Gamma(G)$ است.

از طرفی یک کوگراف، Perfect است در نتیجه عدد گراندی آنها در زمان چندجمله‌ای قابل محاسبه است. کمپوس^{۲۰} در [۹] یک الگوریتم چندجمله‌ای برای محاسبه عدد گراندی $(q, q-4)$ -گراف‌ها ارائه داده است. برای یک $q \geq 4$ ثابت، به گراف‌هایی که هر q راس از آن حداکثر $q-4$ ، P_4 القا کند را $(q, q-4)$ -گراف می‌نامیم. کوگراف‌ها و P_4 -تنک‌ها^{۲۱} به ترتیب حالت خاصی از $q=4$ و $q=5$ هستند.

^{۲۰} Compos

^{۲۱} Sparse

قضیه ۳.۵.۲. [۳۶] برای هر عدد صحیح $k \geq 2$ ، یک گراف G_k وجود دارد بطوریکه $\Gamma_g(G_k) = k$ و $\chi_g(G_k) \geq 2^{k-1} + 1$.

برهان. با استقرا یک دنباله G_k از کوگراف ها می سازیم بطوریکه $\Gamma_g(G_k) = k$ و $\chi_g(G_k) \geq 2^{k-1} + 1$ باشد. فرض کنید $p_k = 2^{k-1} + 1$. پس $p_2 = 3$ و $p_k = 2p_{k-1} - 1$ است. همچنین برای هر عدد صحیح q ، فرض کنید S_q گرافی با q راس و بدون یال باشد. با استقرا نشان خواهیم داد که $\Gamma_g(G_k) = k$.

- فرض کنید G_2 دور به طول ۴ است. پس G_2 زیر گراف القایی یکریخت به P_4 نخواهد داشت و $\Gamma_g(G_2) = \chi(G_2) = 2$.

- فرض کنید G_k یک کوگراف است و همچنین $\Gamma_g(G_k) = k$.

- برای هر $k \geq 2$ ، فرض کنید $G_{k+1} = p_k G_k \oplus S_{2p_k-2}$ باشد. با استقرا می توان نشان داد که تعداد رئوس G_k ، عدد زوجی خواهد بود. طبق فرض استقرا می دانیم که G_k یک کوگراف است و تنسور دو کوگراف، کوگراف است پس G_{k+1} کوگراف خواهد بود. از طرفی برای هر گراف G و هر عدد صحیح p ، $\chi(pG) = \chi(G)$ است. پس

$$\Gamma_g(G_{k+1}) = \chi(G_{k+1}) = \chi(p_k G_k) + \chi(S_{2p_k-2}) = \chi(G_k) + 1 = k + 1$$

بنابراین G_{k+1} کوگراف است و $\Gamma_g(G_{k+1}) = K + 1$.

حال با استقرا ثابت می کنیم که برای هر $k \geq 2$ ، $\chi_g(G_k) \geq p_k$ است.

- فرض کنید G_2 دور به طول ۴ است پس کوگراف خواهد بود و $\chi_g(G_2) = 3$.

- فرض کنید برای هر $k \geq 2$ ، G_k یک کوگراف است و همچنین $\chi_g(G_k) > p_k - 1$ یعنی باب یک استراتژی دارد که با مجموعه رنگ های $\{1, \dots, p_k - 1\}$ ، گراف رنگ نخواهد شد و باب برنده بازی است.

- می خواهیم استراتژی ارائه دهیم که گراف G_{k+1} ، با رنگ های $\{1, \dots, p_{k+1} - 1\}$ رنگ نشود و باب برنده بازی شود. می دانیم که گراف G_{k+1} یک کوگراف است. در گراف G_{k+1} ، ابتدا آلیس یک راس رنگ می کند سپس به ازای $k \geq 2$ ، در هر مرحله از $p_k - 1$ ، باب در هر نوبت خود $p_k - 1$ رنگ متفاوت به نام $\{p_k, \dots, p_{k+1} - 1\}$ به رئوس متفاوت S_{2p_k-2} اختصاص می دهد که امری ممکن است زیرا قبل از حرکت $p_k - 1$ باب، آلیس حداکثر $p_k - 1$ بار بازی کرده که در حالت کلی آلیس و باب حداکثر $2p_k - 3$ بار بازی کردند. پس یک رنگ باقی می ماند که باب می تواند آن رنگ را به راسی اختصاص دهد یعنی بازی ادامه خواهد داشت. بنابراین فقط می توان از رنگ های $\{1, \dots, p_k - 1\}$ برای رنگ آمیزی رئوس $p_k G_k$ استفاده کرد. گراف G_k ، p_k بار کپی شده و آلیس p_{k-1} بار بازی کرده پس روی یک کپی از گراف $p_k G_k$ به نام G^* بازی نشده است. استراتژی باب برای حرکت p -ام، این است که اگر آلیس روی G^*

بازی نکند چون تعداد راسهای گراف $G_{k+1} - G^*$ زوج است پس باب هم روی راسی بازی می کند که در G^* نباشد. اما اگر آلیس روی G^* بازی کند باب بر طبق استراتژی اش روی G^* بازی می کند. بنابراین تمام رئوس G^* با مجموعه رنگ های $\{1, \dots, p_{k+1} - 1\}$ رنگ نخواهد شد و باب برنده بازی است پس $1 - p_{k+1} < \chi_g(G_{k+1})$ است.

□

فصل ۳

نتایجی بر عدد گراندی گراف‌ها

۱.۳ مقدمه

در [۲۶، ۵۰] ثابت شده که بدست آوردن عدد گراندی گراف‌ها مسأله ای NP-complete است، بعلاوه در [۵۲] ثابت شده که عدد گراندی مکمل گراف دوبخشی هم مسأله ای NP-complete است. ولی با داشتن مجموعه احاطه گریالی یا خوشه توسعه یافته در مکمل گراف دوبخشی و یا t -اتم می توان عدد گراندی آن گراف‌ها را بدست آورد. در این فصل عدد گراندی را بر روی مجموعه احاطه گریالی، خوشه توسعه یافته در مکمل گراف دوبخشی و t -اتم مورد بررسی قرار می‌دهیم. بدین منظور ابتدا به تعاریف می‌پردازیم و سپس روابط و قضایای مربوط به آن را مطرح می‌کنیم. این فصل برگرفته از مرجع [۵۳] می‌باشد.

۲.۳ تعاریف و نتایج مقدماتی

تعریف ۱.۲.۳. در روش حریصانه، راسهای گراف n راسی را با اندیسهای $1, \dots, n$ اندیس گذاری می‌شوند سپس رنگ آمیزی به ترتیب اندیسها طوری انجام می‌شود که رنگ راس i ام کوچکترین شماره رنگی باشد که در راسهای قبلی مجاورش به کار نرفته باشد. عدد گراندی یک گراف G ، بیشترین مقدار k است که برای آن یک اندیس گذاری $1, \dots, n$ از راس های G وجود دارد به طوری که تعداد رنگ های لازم برای رنگ آمیزی حریصانه G با این اندیس گذاری، k باشد.

اهمیت دیگر اعداد گراندی زمانی اتفاق می‌افتد که رنگ آمیزی حریصانه را درون خطی^۱ در نظر بگیریم. یک الگوریتم رنگ آمیزی درون خطی^۲، یک الگوریتم رنگ آمیزی است که با دریافت رئوس مرتب $\{v_1, \dots, v_n\}$ ، گراف G را طوری رنگ آمیزی می‌کند که راس v_i توسط زیرگراف القایی $\{v_1, \dots, v_i\}$

^۱On - line version of greedy colorings

^۲On - line coloring algorithm

رنگ آمیزی شود و تا انتها رنگ نسبت داده شده به راس v_i تغییر نکند. پس فرایند حریصانه یک رنگ آمیزی درون خطی است چون در هر مرحله از رنگ آمیزی فقط به اطلاعات قبلی گراف نیاز داریم. این مدل درون خطی، رنگ آمیزی فرست فیت^۳ نامیده می شود که آن را با FF نشان می دهند. با توجه به تعریف رنگ آمیزی گراندی، ما تمام اطلاعات گراف نیاز داریم پس رنگ آمیزی گراندی یک رنگ آمیزی برون خطی^۴ از عدد رنگی است. برای هر گراف G ، $FF(G)$ ماکسیمم عددی از رنگ های استفاده شده در یک رنگ آمیزی فرست فیت از G است. در حقیقت $FF(G)$ بدترین رفتار FF روی G را اندازه می گیرد پس برای هر گراف G ، معادله $FF(G) = \Gamma(G)$ برقرار است.

۳.۳ عدد گراندی با داشتن t -اتم

در این بخش ما مفهوم t -اتم ها را معرفی می کنیم و نشان می دهیم که عدد گراندی گرافی که یک t -اتم دارد، حداقل t است.

تعریف ۱.۳.۳. فرض کنید G و H دو گراف و ρ یک افراز از مجموعه رئوس H به مجموعه های مستقل باشد همچنین فرض کنید ρ ، رئوس H به صورت $V(H) = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_t$ افراز می کند. اگر H طوری در G نشانده شود که هر C_i ، یک زیرمجموعه مستقل در G باقی بماند، H را یک ρ -زیرگراف G می نامیم.

عناصر یک خانواده از گراف های A_t به ازای $t = 1, 2, 3, \dots$ را t -اتم ها^۵ می نامند که خانواده A_t به صورت زیر تعریف می شوند :

$$A_1 = \{K_1\} \bullet$$

$$A_2 = \{K_2\} \bullet$$

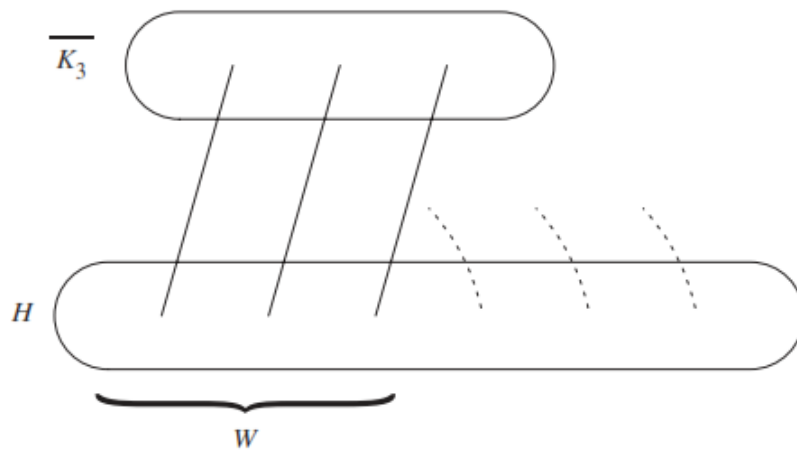
• فرض کنید $H \in A_{t-1}$ باشد. مقدار $|V(H)| \leq m$ را ثابت در نظر بگیرید. همچنین فرض کنید $w \subseteq V(H)$ با $|w| = m$ باشد. عناصر A_t ، بصورت $\bar{K}_m \cup H$ است که یک تطابق تام بین w و $V(\bar{K}_m)$ باشد و هر راس در $V(H) \setminus w$ فقط به یک راس دلخواه در $V(\bar{K}_m)$ متصل باشد. شکل (۱.۳)، ساختاری از اتم G است که با استفاده از اتم H ساخته شده است و $m = 3$ است.

عدد گراندی t -اتم ها حداقل t است چون t -اتم ها به فرم $\bar{K}_m \cup H$ هستند که H یک $t-1$ -اتم است و رئوس $\bar{K}_m$ شامل یک ماکسیمال مجموعه مستقل است. بنابراین اگر $\Gamma(H) \geq t-1$ باشد آنگاه

^۳First-fit coloring

^۴Off-line coloring

^۵T-atoms



شکل ۱۰۳: ساخت اتم G با استفاده از اتم H و $m = 3$

$\Gamma(\bar{k}_m \cup H) \geq t$ است. به عبارت دیگر اگر $V(H) = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_{t-1}$ افزای از رئوس $V(H)$ باشد که یک $t-1$ رنگ آمیزی گراندی در H دارد ($C_1, C_2, \dots, C_{t-1}$ کلاسهای رنگی هستند) آنگاه $V(\bar{k}_m) \cup C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_{t-1}$ یک افزای از $\bar{k}_m \cup H$ است که یک t -رنگ آمیزی گراندی است. زیرا می توان رئوس $\bar{k}_m$ را با رنگ ۱، رنگ آمیزی کرد و رئوس در C_i را با رنگ $i+1$ رنگ آمیزی کرد بنابراین $\Gamma(G) \geq t$. برای هر اتم، به چنین افزایی، افزای مرکزی^۶ می گویند که منحصر به فرد است. در این فصل، یک اتم به همراه افزای مرکزی اش در نظر گرفته می شود.

قضیه ۲۰۳.۳. [۵۳] برای یک گراف G داده شده، $\Gamma(G) \geq t$ است اگر و تنها اگر G شامل یک زیرگراف القایی t -اتم باشد.

برهان. با تعریف اتم ها بدیهی است که t -اتم ها، رنگ آمیزی گراندی با t رنگ دارند. بنابراین عدد گراندی گرافی که شامل یک t -اتم باشد حداقل t است.

حال یک گراف G با $\Gamma(G) \geq t$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $c_1, \dots, c_t$ کلاسهای رنگی یک رنگ آمیزی گراندی از G با t رنگ باشد بطوریکه به ازای هر $1 \leq i \leq t$ ، c_i شامل راسهایی است که به رنگ i هستند. ما با استقرا روی t ثابت می کنیم که G شامل یک t -اتم است. گراف K_1 دارای عدد گراندی ۱ است و یک 1 -اتم می باشد. فرض کنید $H = G \setminus c_1$ باشد. بنابراین $\Gamma(H) \geq t-1$. بنا به فرض استقرا می توانیم نتیجه بگیریم که H شامل یک $t-1$ اتم است که آن را F می نامیم. چون c_1 یک مجموعه ماکسیمال مستقل در G است، پس هر راس از F مجاور با یک راس از c_1 در گراف G است. بنابراین G شامل یک t -اتم می باشد. $\square$

در [۳۱] ثابت شده که ساختار اتم ها مشابه ساختار گراف های بحرانی (در رنگ آمیزی درون خطی فرست فیت) است. یک گراف G با $\Gamma(G) = t$ ، یک گراف t -بحرانی است اگر برای هر $v \in V(G)$

^۶Canonical partition

$\Gamma(G \setminus v) < \Gamma(G)$ باشد. اما یک گراف t -بحرانی ضرورتاً یک t -اتم نیست. برای هر عدد طبیعی t ، تعداد گرافهای t -بحرانی متناهی است [۳۱].

به عنوان مثالی از قضیه بالا، تمام گراف های همبند به جز گراف های دوبخشی کامل، عدد گراندی آنها حداقل ۳ است. گراف K_3 و P_4 (مسیری با چهار راس) تنها ۳-اتمی هستند که عدد گراندی آنها برابر ۳ است.

گزاره ۳.۳.۳. [۲] اگر H یک زیرگراف القایی از G باشد آنگاه $\Gamma(H) \leq \Gamma(G)$.

به عنوان مثال، یک مسیر P_4 یک زیرگراف از دور C_4 است و $\Gamma(P_4) = 3$ و $\Gamma(C_4) = 2$. بنابراین القایی بودن زیرگراف ضروری است.

قضیه ۴.۳.۳. [۴۷] در یک گراف همبند G ، $\Gamma(G) = 2$ است اگر و تنها اگر G یک گراف دوبخشی کامل باشد.

برهان. فرض کنید G همبند است و $\Gamma(G) = 2$. چون یک رنگ آمیزی حریصانه، یک رنگ آمیزی سره است پس G باید دوبخشی باشد. فرض کنید A و B بخش هایی از G باشند. اگر G دوبخشی کامل نباشد یعنی $u \in A$ و $v \in B$ وجود داشته باشد بطوریکه $uv \notin E(G)$. فرض کنید p ، کوتاهترین (u, v) -مسیر باشد. پس p طول فرد دارد بنابراین طول p حداقل ۳ است و چون p کوتاهترین مسیر در گراف است حتماً یک مسیر القایی است. بنابراین G شامل یک P_4 القایی است. با ادغام گزاره فوق میتوان نتیجه گرفت که $\Gamma(G) \geq 3$ که تناقض با فرض مساله است. تنها ۳-اتم ها، P_4 و K_3 هستند. از طرفی یک گراف دوبخشی کامل یک P_4 یا یک K_3 القا نمی کند بنابراین $\Gamma(G) = 2$ خواهد بود. $\square$

قضیه ۵.۳.۳. [۱۳] فرض کنید G یک گراف و k یک عدد صحیح باشد بطوریکه

$$\chi(G) \leq K \leq \Gamma(G).$$

یک رنگ آمیزی حریصانه در G وجود دارد که دقیقاً k رنگ استفاده کرده است.

برهان. ما با استقرا روی $\chi(G)$ این قضیه را ثابت می کنیم. اگر G یک مجموعه مستقل باشد یک رنگ آمیزی حریصانه از G هست که دقیقاً یک رنگ استفاده کرده، حال فرض کنید G گرافی باشد که $\chi(G) > 1$ است. همچنین فرض کنید که $\chi(G) \leq K \leq \Gamma(G)$. اگر $\chi(G) = k$ باشد آنگاه یک k -رنگ آمیزی حریصانه از G وجود دارد. پس فرض می کنیم که $k \geq \chi(G) + 1$. حال فرض کنید که $(S_1, S_2, \dots, S_{\Gamma(G)})$ یک رنگ آمیزی حریصانه از G باشد پس S_1 یک مجموعه احاطه گر مستقل در G است. $G' = G - S_1$ در نظر بگیرید پس $\Gamma(G') = \Gamma(G) - 1$ و $\chi(G') \leq \chi(G)$. بنابراین $\chi(G') \leq k - 1 \leq \Gamma(G')$ و با فرض استقرا G' یک $k - 1$ -رنگ آمیزی حریصانه در $(S'_1, \dots, S'_k)$ دارد. در نتیجه $(S_1, S'_1, \dots, S'_k)$ یک k -رنگ آمیزی حریصانه از G خواهد بود. $\square$

همانطور که می دانیم پیچیدگی محاسبه عدد رنگی NP-complete است ولی در نتیجه زیر نشان می دهیم که پیچیدگی محاسبه عدد گراندی چندجمله ای^۷ است.

نتیجه ۴.۳.۳. [۵۳] برای هرگراف G و عدد صحیح ثابت k ، مساله $\Gamma(G) \geq k$ دارای جواب زمانی چندجمله ای است.

برهان. به جای مشخص کردن وجود یک رنگ آمیزی گراندی با k رنگ، ما به دنبال پیدا کردن یک k -اتم در G هستیم. یک زیرگراف با k راس ثابت، در زمان چندجمله ای $O(n^k)$ از گرافی با مرتبه n بدست می آید. فرض کنید یک تعداد متناهی $f(k)$ از k -اتم ها وجود دارد که فقط به مقدار k وابسته است. از طرفی ماکسیم مرتبه یک k -اتم، حداکثر 2^{k-1} است که مرتبه یک درخت است. بنابراین برای پیدا کردن یک k -اتم در G ، $O(f(k).n^{2^{k-1}}) = O(n^{2^{k-1}})$ مرحله زمان نیاز است. $\square$

۴.۳ عدد گراندی با داشتن خوشه توسعه یافته

تعریف ۴.۳.۱. فرض کنید G مکمل یک گراف دوبخشی با زیرافراز (X, Y) باشد. یک خوشه توسعه یافته^۸ از G ، یک زیرگرافی از G است به طوری که هر خوشه معمولی^۹ از G یک خوشه توسعه یافته از G باشد و یک زیرگراف H یک خوشه توسعه یافته است اگر دو راس غیرمجاور $u \in X$ و $v \in Y$ در H وجود داشته باشد به طوری که $H \setminus \{u, v\}$ یک خوشه توسعه یافته از G باشد. در حقیقت یک خوشه توسعه یافته در G ، یک زیرمجموعه مستقل از راس های گراف دوبخشی $\bar{G}$ مانند I و یک تطابق در $\bar{G} \setminus I$ با m راس معرفی می کند که اندازه این خوشه توسعه یافته، $|I| + m$ است. در [۵۴] ثابت شده که یک خوشه توسعه یافته از G با اندازه t ، یک رنگ آمیزی گراندی از G با حداقل t رنگ خواهد بود.

قضیه ۴.۳.۲. [۵۴] فرض کنید G مکمل یک گراف دوبخشی باشد آنگاه یک رنگ آمیزی گراندی با $\Gamma(G)$ رنگ، توسط یک خوشه توسعه یافته در G بدست می آید.

بنابراین $\Gamma(G)$ برابر با ماکسیمم اندازه از یک خوشه توسعه یافته در G است.

۵.۳ عدد گراندی با داشتن مجموعه احاطه گریالی

یک زیرمجموعه D از یالهای در گراف G ، یک مجموعه احاطه گریالی^{۱۰} می نامند اگر هریال در $E(G) \setminus D$ ، یک راس انتهایی مشترکی با یک یال در D داشته باشد. اندازه D ، تعداد یالهای در D

^۷Polynomial

^۸Extended clique

^۹Ordinary clique

^{۱۰}Edge dominating set

است. یاناکاکیس^{۱۱} و گاوریل^{۱۲} در [۵۲] ثابت کردند که پیدا کردن مینیمم اندازه از یک مجموعه احاطه گریالی در یک گراف دو بخشی با ماکسیمم درجه ۳، یک مساله NP-complete است. قبل از اینکه رابطه بین رنگ آمیزی گراندی و مجموعه احاطه گریالی را بیان کنیم باید یک حقیقتی را در مورد مجموعه احاطه گریالی گراف‌های دوبخشی متذکر شویم. فرض کنید R یک مجموعه احاطه گریالی در یک گراف دو بخشی باشد، آنگاه یک تطابق M هست که یک مجموعه احاطه گریالی است و $|M| \leq |R|$. اثبات آن در [۱] بیان شده، به طور خلاصه می‌توان M را ماکسیمم تطابق در نظر گرفت اگر M احاطه گریالی نباشد حتماً یک یالی وجود دارد که مجموعه احاطه گریالی M ، آن یال را احاطه نمی‌کند که تناقض با ماکسیمم تطابق است.

قضیه ۱.۵.۳. [۵۳] فرض کنید G مکمل یک گراف دوبخشی H باشد آنگاه $\Gamma(G) = n - m$ که n مرتبه G و m مینیمم اندازه یک مجموعه احاطه گریالی در H است.

برهان. فرض کنید D یک مجموعه احاطه گریالی با اندازه k در H باشد پس یک تطابق M با اندازه حداکثر k وجود دارد که یک مجموعه احاطه گریالی است. فرض کنید $M = \{v_1u_1, v_2u_2, \dots, v_mu_m\}$ باشد، همچنین فرض کنید V_0 آن دسته از رئوس در H باشد که در هیچ یالی از M واقع نیست. هیچ یالی بین رئوس در V_0 نیست پس V_0 یک مجموعه مستقل است زیرا در غیر اینصورت باید با راس‌های M و D تلاقی داشته باشد چون آنها مجموعه احاطه گریالی هستند. بنابراین V_0 در اتصال با تطابق‌های $\{v_i, u_i\}$ یک خوشه توسعه یافته در $G = H^c$ معرفی میکند. می‌دانیم که V_0 در H یک مجموعه مستقل است، M و D هم یک مجموعه احاطه گریالی هستند. پس V_0 ، $n - 2m$ راس دارد. از طرفی تطابق M در H یک مجموعه احاطه گریالی است و مینیمم اندازه از یک مجموعه احاطه گریالی m است. بنابراین اندازه این خوشه توسعه یافته $m + (n - 2m) = n - m$ در نتیجه $\Gamma(G) \geq n - m$. حال ثابت می‌کنیم که $\Gamma(G) \leq n - m$. فرض کنید $\Gamma(G) = t$ باشد پس یک تطابق M و یک مجموعه مستقل S در $\bar{G} = H$ وجود دارد به طوری که $|M| + |S| = t$. فرض کنید T راس‌های آلوده شده^{۱۳} با M باشد و $U = V(H) \setminus S \cup T$. باید در H ، یک یال بین هر راس v در U و مجموعه S وجود داشته باشد زیرا در غیر اینصورت با در نظر گرفتن $S \cup \{v\}$ ، ما یک خوشه توسعه یافته در G با اندازه $t + 1$ داریم به بیان دیگر $t + 1 = \Gamma(G = \bar{H}) = |U| + |M| + |S| = t + 1$ که تناقض است. یک یال دلخواه (از $\bar{G}$) واقع شده در هر راس v در U که نقطه پایانی دیگری در S دارد را بگیرید ما $|U|$ یال بدست می‌آوریم که با M به فرم یک مجموعه احاطه گریالی در $\bar{G}$ است بنابراین مینیمم اندازه از یک مجموعه احاطه گریالی در $\bar{G}$ یعنی m حداکثر $|M| + |U|$ است. از طرفی $n = 2|M| + |S| + |U| = t + |M| + |U|$ پس $m \leq |M| + |U| = n - t$ و در نهایت $\Gamma(G) \leq n - m$. $\square$

با قضیه فوق و قضیه NP-complete بودن یاناکاکیس و گاوریل در [۵۲] می‌توان قضیه زیر

^{۱۱}Yannakakis

^{۱۲}Gavril

^{۱۳}Saturated

رانتیجه گرفت.

قضیه ۲.۵.۳. [۵۳] فرض کنید H ، یک گراف دوبخشی با درجه حداکثر ۳ است. مشخص کردن عدد گراندی مکمل H یک مساله NP -complete است.

قضیه ۳.۵.۳. [۳۰، ۵۴] فرض کنید G ، مکمل گراف دوبخشی باشد. آنگاه $\Gamma(G) \leq 3^{\frac{\omega(G)}{4}}$.

گزاره ۴.۵.۳. [۵۳] فرض کنید G ، مکمل یک گراف دو بخشی باشد و K یک ماکسیم خوشه در G باشد بطوری که $\bar{G} \setminus V(K)$ یک تطابق کامل دارد. آنگاه $\Gamma(G) = |K| + m$ که m تعداد تطابق ها در $\bar{G} \setminus V(K)$ است.

برهان. فرض کنید k_1 یک خوشه دلخواه در G با k راس باشد. پس در $\bar{G} \setminus V(k_1)$ حداکثر $\frac{(n-k)}{4}$ یالهای مستقل وجود دارد که n مرتبه G است.

$$| \text{خوشه توسعه یافته در } G | \leq k + \frac{(n-k)}{4} = \frac{(n+k)}{4}$$

بنابراین اندازه خوشه توسعه یافته، حداکثر $\frac{(n+k)}{4}$ است که k یک زیر مجموعه مستقل در $\bar{G}$ و $\frac{(n-k)}{4}$ تعداد رئوس یک تطابق در $\bar{G} \setminus k$ است. ماکسیم خوشه K در قضیه، این کران را ماکسیم می کند. یعنی یک ماکسیم خوشه توسعه یافته در G ، توسط K و تطابق کامل بدست می آید. $\square$

۶.۳ نامعادله نردهوس-گادوم برای اعداد گراندی

در این بخش ما عدد گراندی گرافها و مکملشان را مورد بررسی قرار می دهیم و سعی می کنیم نامعادله های از نوع نردهوس-گادوم برای خانواده ای از گرافها بدست بیاوریم. اگر برای هر گراف G با n راس، نامعادله $\chi(G) + \chi(\bar{G}) \leq n + 1$ برقرار باشد این نامعادله را، نامعادله نردهوس-گادوم^{۱۴} می نامند. به عنوان مثال فرض کنید G شامل p_4 و $n - 4$ راس با درجه صفر باشد. بنابراین $\Gamma(G) = 3$ و $\Gamma(\bar{G}) = \Gamma(k_n \setminus p_4) = n - 1$. بنابراین $\Gamma(G) + \Gamma(\bar{G}) = n + 2$.

لم ۱.۶.۳. [۵۳] برای هر گراف G و راس v ، $\Gamma(G) \leq \Gamma(G \setminus v) + 1$.

برهان. فرض کنید $c_1, c_2, \dots, c_t$ کلاسهای رنگی یک رنگ آمیزی گراندی از G باشد و $\Gamma(G) = t$. همچنین فرض کنید که $v \in c_i$. بدیهی است که $c_1, \dots, c_{i-1}, c_{i+1}, \dots, c_t$ به فرم یک رنگ آمیزی گراندی جزیی از $G \setminus v$ با $t - 1$ رنگ است. این رنگ آمیزی جزیی می تواند به رنگ آمیزی گراندی تمام $G \setminus v$ با حداقل $t - 1$ رنگ توسعه پیدا کند بنابراین $t - 1 \leq \Gamma(G \setminus v)$. $\square$

تعریف ۲.۶.۳. اگر برای هر راس v ، $\Gamma(G) = \Gamma(G \setminus v) + 1$ باشد گراف G ، گراف بحرانی^{۱۵} نامیده می شود.

^{۱۴}Nordhaus-gaddum

^{۱۵}Critical graph

تعریف ۳.۶.۳. گراف تقریباً منتظم^{۱۶}، گرافی است که اختلاف درجات رئوس آن حداکثر ۱ باشد.

گزاره ۴.۶.۳. [۵۳] اگر G گراف منتظم یا گراف تقریباً منتظم روی n راس باشد آنگاه

$$\Gamma(G) + \Gamma(\bar{G}) \leq n + 2.$$

برهان. فرض کنید Δ و δ ماکسیم و مینیم درجه از G باشد آنگاه $\Gamma(G) \leq \Delta + 1$.

از طرفی $\Gamma(\bar{G}) \leq \Delta(\bar{G}) + 1 = n - \delta \leq n - \Delta + 1$ بنابراین $\Gamma(G) + \Gamma(\bar{G}) \leq n + 2$

□

خواهد بود.

برای هر عدد طبیعی t در گراف‌های T_t ، فقط یک اتم درخت با $\Gamma = t$ است. این اتم درخت یکتا را، T_t می‌نامیم.

لم ۵.۶.۳. [۵۳] فرض کنید برای $t \geq 3$ و با n راس، $T = T_t$ باشد آنگاه

$$\Gamma(T) + \Gamma(\bar{T}) = \log_2 n + \frac{3}{4}n + 1.$$

برهان. می‌دانیم که مرتبه T_t ، 2^{t-1} است که شامل 2^{t-2} برگ است. فرض کنید L ، مجموعه تمام برگ‌های در T_t باشد. برگ‌های در T ، یک ماکسیم خوشه در $\bar{T}$ است پس یک ماکسیم خوشه در $\bar{T}$ با 2^{t-2} راس داریم. حال اگر برگ‌های T_t حذف کنیم درخت حاصل T_{t-1} خواهد بود. در T_{t-1} ، یک تطابق کامل وجود دارد. تعداد رئوس تطابق‌های کامل در $T_t \setminus L$ ، 2^{t-2} است. پس تعداد یال‌های این تطابق برابر با 2^{t-3} خواهد بود. از طرفی هر درخت دودویی، یک گراف دوبخشی است پس با استفاده از گزاره (۴.۵.۳)، اندازه یک ماکسیم خوشه توسعه یافته در $\bar{T}$ ،

$$\Gamma(\bar{T}) = 2^{t-2} + 2^{t-3} = \frac{1}{2}2^{t-1} + \frac{1}{4}2^{t-1} = \frac{3}{4}2^{t-1}$$

است برای خلاصه نویسی می‌توان آن را به صورت $\frac{3}{4}n$ نوشت که n مرتبه درخت T_t است. از طرفی با استقرا می‌توان نشان داد که $\Gamma(T) = \log_2 n + 1$ است (شکل ۲.۳). بنابراین

$$\Gamma(T) + \Gamma(\bar{T}) = \log_2 n + \frac{3}{4}n + 1.$$

□

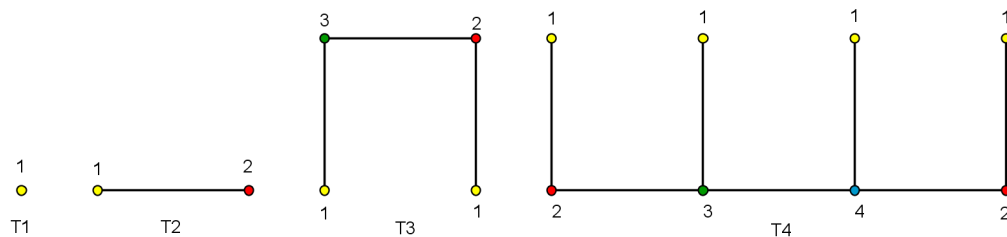
اگر $t \geq 5$ باشد آنگاه $n \geq 16$ و بنابراین $\log_2 n \leq \frac{1}{4}n$ پس اگر $t \geq 5$ باشد نامعادله

بالا بصورت

$$\Gamma(T_t) + \Gamma(\bar{T}_t) \leq \frac{1}{4}n + \frac{3}{4}n + 1 = n + 1$$

خواهد بود.

^{۱۶}Almost regular graph



شکل ۲.۳: رنگ آمیزی گراندی درخت T_t

قضیه ۶.۶.۳. [۵۳] فرض کنید F یک جنگل روی n راس و با k مولفه باشد. آنگاه

$$\Gamma(F) + \Gamma(\bar{F}) \leq n - k + 3.$$

برهان. این قضیه را با استقرا روی تعداد راسهای F ثابت می کنیم. ابتدا فرض کنید F یک درخت است که T نام دارد.

حالت اول: یک راس v هست به طوری که $\Gamma(T \setminus v) = \Gamma(T)$. در این حالت $T_0 = T \setminus v$ یک جنگل است و نامعادله برای آن برقرار است. از طرفی $\bar{T}_0 = \bar{T} \setminus v$. بنابراین

$$\Gamma(T) + \Gamma(\bar{T}) \leq \Gamma(T_0) + \Gamma(\bar{T} \setminus v) + 1 = \Gamma(T_0) + \Gamma(\bar{T}_0) + 1 \leq n + 2$$

حالت دوم: T یک درخت بحرانی است یعنی برای هر راس v ، $\Gamma(T) = \Gamma(T \setminus v) + 1$. نشان می دهیم که تنها درخت با عدد گراندی t ، T_t است. فرض کنید C یک t -رنگ آمیزی گراندی از T است که $\Gamma(T) = t$ و C_i کلاسی از راسهای با رنگ i در C است. چون گراف T بحرانی است پس $|C_t| = 1$ می باشد. از طرفی T بدون دور است و هر راس در C_i باید یک همسایه در C_j برای هر $i \leq j$ داشته باشد. پس برای $1 \leq i \leq t-1$ ، $|C_i| = 2^{t-i-1}$ است. با حل تصاعد هندسی $2^0 + 1 + 2^1 + \dots + 2^{t-2} + 2^{t-3} + \dots + 2^{t-2}$ ، n برابر $t-1$ است و مجموع جملات آن برابر 2^{t-1} است. بنابراین T شامل 2^{t-1} راس است. یک درخت با این مرتبه و با این رنگ آمیزی، به T_t یک ریخت است و شامل t درخت T_t است. حال فرض کنید مولفه های درخت F ، $T_1, T_2, \dots, T_k$ است. فرض کنید T_1 ماکسیمم عدد گراندی را در بین این درختها دارد. پس $\Gamma(F) = \Gamma(T_1)$. همچنین ما $\Gamma(\bar{F}) = \sum_i \Gamma(\bar{T}_i)$ و $1 - k = \sum_{i>1}^k \Gamma(\bar{T}_i) - 1$ داریم. از طرفی بنا به لم (۵.۶.۳)، نامعادله $\frac{3}{4}n \leq n - 1$ ، برای هر t از T_t برقرار بود. بنابراین

$$\begin{aligned} \Gamma(F) + \Gamma(\bar{F}) &= \Gamma(T_1) + \Gamma(\bar{T}_1) + \sum_{i>1} \Gamma(\bar{T}_i) \leq |V(T_1)| + 2 + \sum_{i>1} (|V(T_i)| - 1) \\ &\leq |V(F)| - k + 3. \end{aligned}$$

□

در قضیه زیر ما یک خانواده از گرافهای دوبخشی H معرفی می کنیم که نامعادله

$$\Gamma(H) + \Gamma(\bar{H}) \leq n + 2$$

روی آن برقرار باشد. این قضیه فقط برای حالت خاصی از گراف‌های دو بخشی برقرار است.

قضیه ۷.۶.۳. [۵۳] فرض کنید H یک گراف دوبخشی روی n راس باشد و m تعداد تطابق‌های در H باشد که شرط $\Delta(H) \leq \frac{m+2}{4}$ روی آن صادق باشد، آنگاه $\Gamma(H) + \Gamma(\bar{H}) \leq n + 2$.

برهان. می‌دانیم که یک خوشه توسعه یافته در $G = \bar{H}$ ، شامل یک زیرمجموعه مستقل I در H و یک تطابق با m' یال در $H \setminus I$ است. از طرفی $|I| \leq \alpha(H)$ و $m' \leq \frac{(n-|I|)}{4}$ داریم. پس یک کران بالا برای اندازه هر خوشه توسعه یافته در G ، $|I| + m' \leq \frac{(n+\alpha(H))}{4}$ است که بنابه قضیه (۲.۴.۳)،

$$\Gamma(G) \leq \frac{(n+\alpha(H))}{4}. \Gamma(H) \leq \Delta(H) + 1 \text{ از طرفی } \Gamma(H) + \Gamma(\bar{H}) \leq \Delta(H) + 1 + \frac{(n+\alpha(H))}{4} \leq \frac{m+4}{4} + \frac{2n-m}{4} = n+2$$

گالایی ثابت کرد که برای هر گراف دوبخشی، معادله $\alpha(H) + m = n$ برقرار است. $\square$

نامعادله $\Gamma(G) + \Gamma(\bar{G}) \leq n + 2$ ، برای گراف‌های اسپلیت^{۱۷} هم برقرار است. اگر مجموعه رئوس $V(G)$ ، به دو زیرمجموعه S و T افراز شود بطوریکه رئوس در S یک زیرگراف کامل (یا خوشه) در G القا کند و رئوس در T یک زیرگراف تهی (یا بدون یال) در G القا کند، گراف G را گراف اسپلیت می‌نامند. در [۳۰] ثابت شده که اگر G گراف اسپلیت باشد آنگاه $\Gamma(G) \leq \omega(G) + 1$. از طرفی $\bar{G}$ هم گراف اسپلیت خواهد بود پس $\Gamma(\bar{G}) \leq \omega(\bar{G}) + 1$. در نتیجه $\Gamma(G) + \Gamma(\bar{G}) \leq n + 2$ خواهد بود. اگر G گراف اسپلیت باشد و یک زیرمجموعه مستقل در G وجود داشته باشد که یک ماکسیم خوشه در G را احاطه کند آنگاه $\Gamma(G) = \omega(G) + 1$ است.

قضیه ۸.۶.۳. [۲۲] اگر G ، گراف دوبخشی و یا گرافی با کمتر از ۹ راس باشد آنگاه

$$\Gamma(G) + \Gamma(\bar{G}) \leq n + 2$$

که n مرتبه گراف G است.

سلکو و سارکوزی^{۱۸} معادله نورهوس گادوم اعداد گراندی را برای هر گراف G بدست آوردند که آن را در قضیه زیر بیان می‌کنیم.

قضیه ۹.۶.۳. [۲۲] فرض کنید G گرافی از مرتبه n و $\bar{G}$ مکمل گراف G باشد. آنگاه

$$\Gamma(G) + \Gamma(\bar{G}) \leq \lfloor \frac{5n+2}{4} \rfloor, n \geq 10 \text{ برای } \bullet$$

$$\Gamma(G) + \Gamma(\bar{G}) \leq n + 2, 4 \leq n \leq 8 \text{ برای } \bullet$$

$$\Gamma(G) + \Gamma(\bar{G}) = 12, n = 9 \text{ برای } \bullet$$

^{۱۷}Split

^{۱۸}Sarkozy

فصل ۴

عدد گراندی حاصلضرب گراف‌ها

۱.۴ مقدمه

است ^۱، هوت ^۲ و لینهارس-سیلز ^۳ در [۲] عدد گراندی حاصلضرب الفبایی و دکارتی گراف‌ها را بررسی کردند. بعلاوه کمپوس ^۴ در [۸] عدد گراندی حاصلضرب رسته ای و قوی دو گراف را بدست آورد. در این فصل عدد گراندی حاصلضرب گراف‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم. بدین منظور ابتدا به تعاریف حاصلضرب مستقیم، الفبایی، دکارتی و قوی می‌پردازیم و سپس روابط و قضایای مربوط به آن را مطرح می‌کنیم. این فصل برگرفته از مرجع [۸] می‌باشد.

۲.۴ تعاریف و نتایج مقدماتی

تعریف ۱.۲.۴. گراف‌های مفروض در این فصل بدون جهت و متناهی هستند و هیچ حلقه یا یال چندگانه ندارند. دو گراف G و H را در نظر بگیرید. حاصلضرب رسته ای $G \times H$ ^۵، حاصلضرب الفبایی $G[H]$ ^۶، حاصلضرب دکارتی $G \square H$ ^۷ و حاصلضرب قوی $G \boxtimes H$ ^۸ گراف‌هایی با مجموعه رئوس $V(G) \times V(H)$ هستند که مجموعه یالهای آنها به شرح زیر است :

$$E(G \times H) = \{(a, x)(b, y) \mid ab \in E(G) \text{ و } xy \in E(H)\}$$

^۱Aste

^۲Havet

^۳Linhares-sales

^۴Compos

^۵Direct product

^۶Lexicographic product

^۷Cartesian product

^۸Strong product

$$E(G[H]) = \{(a, x)(b, y) \mid ab \in E(G) \text{ یا } a = b \text{ و } xy \in E(H)\}$$

$$E(G \square H) = \{(a, x)(b, y) \mid a = b \text{ و } xy \in E(H) \text{ یا } ab \in E(G) \text{ و } x = y\}$$

$$E(G \boxtimes H) = E(G \times H) \cup E(G \square H)$$

فرض کنید $\Delta(G)$ ماکسیمم درجه گراف G و K_n گراف کامل n راسی و $K_{p,q}$ گراف دوبخشی کامل با بخش‌هایی به اندازه p و q است. همچنین فرض کنید S_n گرافی n راسی است که هیچ یالی ندارد. است و دیگران^۹ قضایای زیر را در [۲] اثبات کردند. آنها نشان دادند که کران بالای عدد گراندی حاصلضرب الفبایی دو گراف را میتوان با داشتن عدد گراندی گراف‌ها بدست آورد. بعلاوه آنها مقدار دقیق عدد گراندی حاصلضرب الفبایی دو گرافی که یکی از گراف‌ها درخت باشد را بدست آوردند.

قضیه ۲.۲.۴. [۲] برای هر گراف G و H ، $\Gamma(G[H]) \leq 2^{\Gamma(G)-1} \cdot (\Gamma(H) - 1) + \Gamma(G)$.

قضیه ۳.۲.۴. [۲] برای هر گراف H و درخت T ، $\Gamma(T[H]) = \Gamma(T) \cdot \Gamma(H)$.

همچنین است و دیگران نشان دادند که قضیه (۲.۲.۴) برای حاصلضرب دکارتی برقرار نیست. برای مثال در [۲] ثابت شده که $\Gamma(K_{p,p}) = 2$ است در حالی که $\Gamma(K_{p,p} \square K_{p,p}) \geq p + 1$. آنها کران بالایی برای حاصلضرب دکارتی ارائه دادند.

قضیه ۴.۲.۴. [۲] برای هر گراف G و H ، $\Gamma(G \square H) \leq \Delta(G) \cdot 2^{\Gamma(H)-1} + \Gamma(H)$.

حدس ۵.۲.۴. [۲] برای هر گراف G و H ، $\Gamma(G \square H) \leq (\Delta(G) + 1) \cdot \Gamma(H)$.

حدس بالا تعمیمی از حدس بالوق و دیگران^{۱۰} است که در زیر بیان شده است.

حدس ۶.۲.۴. [۵] برای هر گراف H ، $\Gamma(K_2 \square H) \leq 2 \cdot \Gamma(H)$.

هوت و ژو^{۱۱} هم حدس زیر را بیان کردند.

حدس ۷.۲.۴. [۳۵] برای هر گراف G و یک تطابق M در G ، $\Gamma(G) \leq 2 \cdot \Gamma(G \setminus M)$.

هوت حدس (۵.۲.۴) در حالیکه یکی از گراف‌ها، درخت باشد در قضیه زیر بیان کرد.

قضیه ۸.۲.۴. [۳۵] برای هر گراف G و درخت T ، $\Gamma(G \square T) \leq (\Delta(G) + 1) \cdot \Gamma(T)$.

قضیه ۹.۲.۴. [۸] برای هر گراف G و H ، $\Gamma(G \square H) \leq \Gamma(G[K_{\Delta(H)+1}])$.

^۹Aste et al.

^{۱۰}Balogh et al.

^{۱۱}Havet and Zhu

برهان. برای هر عدد طبیعی q ، ثابت می‌کنیم که اگر $G \square H$ یک q -رنگ آمیزی حریصانه داشته باشد آنگاه $G[K_{\Delta(H)+1}]$ هم یک q -رنگ آمیزی حریصانه دارد پس باید یک ترتیب برای رئوس $G[K_{\Delta(H)+1}]$ معرفی کنیم. فرض کنید φ یک q -رنگ آمیزی حریصانه در $G \square H$ است و (x, y) یک راس از $G \square H$ با رنگ q باشد همچنین فرض کنید $x_1, x_2, \dots, x_n$ یک ترتیب از رئوس G باشد بطوریکه

$$\varphi(x_1, y) \leq \varphi(x_2, y) \leq \dots \leq \varphi(x_n, y).$$

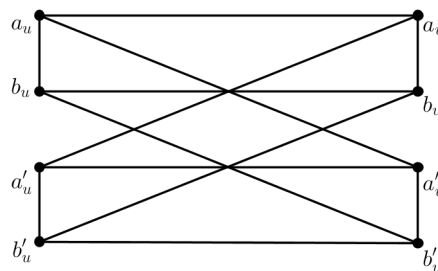
فرض کنید $z_0, \dots, z_{\Delta(H)}$ رئوس $K_{\Delta(H)+1}$ باشد. بنابراین هر راس از $G[K_{\Delta(H)+1}]$ یک زوج مرتب (x_i, z_j) برای $i \in \{1, \dots, n\}$ و $j \in \{0, 1, \dots, \Delta(H)\}$ است. برای هر i در $\{1, \dots, n\}$ ، رنگ $\varphi(x_i, y)$ به رئوس (x_i, z_0) در $G[K_{\Delta(H)+1}]$ اختصاص می‌دهیم. فرض کنید L_i مجموعه تمام رنگ‌های l کمتر از $\varphi(x_i, y)$ است که در هیچکدام از همسایه‌های (x_i, z_0) در $G[K_{\Delta(H)+1}]$ ظاهر نشده‌اند. پس L_i ، یک زیرمجموعه از $\{\varphi(x_i, u) \mid u \in N_H(y)\}$ است بنابراین $|L_i| \leq \Delta(H)$. در نتیجه ما می‌توانیم تمام رنگ‌های L_i به رئوس $\{(x_i, z_j) \mid 1 \leq j \leq \Delta(H)\}$ اختصاص دهیم. q -رنگ آمیزی جزیی بدست آمده در $G[K_{\Delta(H)+1}]$ یک رنگ آمیزی حریصانه است. $\square$

با ادغام قضیه فوق و قضیه (۲.۲.۴) میتوان اثبات کوتاهتری برای قضیه (۴.۲.۴) نوشت. همچنین با ادغام قضیه فوق و قضیه (۳.۲.۴) میتوان قضیه (۸.۲.۴) را اثبات کرد.

لم ۱۰.۲.۴. [۲] برای هر گراف G و هر عدد صحیح n ، $\Gamma(G[S_n]) = \Gamma(G)$.

قضیه ۱۱.۲.۴. [۸] فرض کنید G یک گراف باشد آنگاه $\Gamma(G[S_2] \square K_2) = \Gamma(G[K_2])$.

برهان. ابتدا نشان می‌دهیم که رابطه $\Gamma(G[K_2]) \leq \Gamma(G[S_2] \square K_2)$ برقرار است. فرض کنید φ یک رنگ آمیزی حریصانه در $G[K_2]$ است. هر راس v در G ، متناظر با دو راس متمایز در $G[K_2]$ است. فرض کنید $\varphi_1(v)$ و $\varphi_2(v)$ دو رنگ مجزایی باشند که به این دو راس نسبت داده شدند. در گراف $G[S_2] \square K_2$ ، هر راس v در G متناظر با چهار راس a_v, b_v, a'_v, b'_v با دو یال $a_v b_v$ و $a'_v b'_v$ است پس اگر uv یالی در G باشد آنگاه تمام یالهای بین $\{a_u, a'_u\}$ و $\{b_u, b'_u\}$ و تمام یالهای بین $\{b_v, b'_v\}$ و $\{a_v, a'_v\}$ هستند. (شکل ۱.۴)

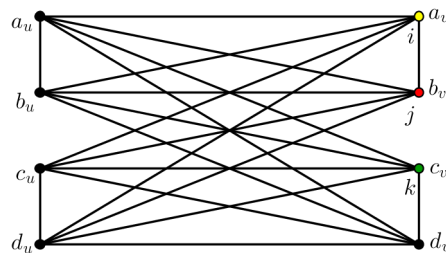


شکل ۱.۴: $G[S_2] \square K_2$

رنگ $\varphi_1(v)$ به a_v و b'_v و رنگ $\varphi_2(v)$ به b_v و a'_v نسبت می‌دهیم این عمل را برای هر راس انجام می‌دهیم در نهایت ما یک رنگ آمیزی حریصانه در $G[S_2] \square K_2$ بدست آوردیم بنابراین

$$\Gamma(G[K_2]) \leq \Gamma(G[S_2] \square K_2).$$

حال نشان می‌دهیم که $\Gamma(G[K_2]) \geq \Gamma(G[S_2] \square K_2)$. از قضیه (۹.۲.۴) می‌دانیم که رابطه $\Gamma(G[S_2][K_2]) \leq \Gamma(G[K_2])$ برقرار است ادعا می‌کنیم که $\Gamma(G[S_2] \square K_2) \leq \Gamma(G[S_2][K_2])$. فرض کنید φ یک رنگ آمیزی حریصانه در $G[S_2][K_2]$ با q رنگ باشد. در $G[S_2][K_2]$ ، هر راس v در G متناظر با چهار راس a_v, b_v, c_v, d_v و $a_v b_v$ و $c_v d_v$ است و برای هر یال uv در G تمام یالهای بین $\{a_u, b_u, c_u, d_u\}$ و $\{a_v, b_v, c_v, d_v\}$ در $G[S_2][K_2]$ وجود دارند. فرض کنید φ حداقل سه رنگ متفاوت به $\{a_v, b_v, c_v, d_v\}$ اختصاص می‌دهد که $\varphi(a_v) = i$ ، $\varphi(b_v) = j$ و $\varphi(c_v) = k$ است. (شکل ۲.۴)



شکل ۲.۴: $G[S_2][K_2]$

b_v هیچ همسایه‌ای به رنگ k ندارد چون به غیر از راس a_v که به رنگ i است تمام همسایه‌های b_v مجاور با c_v هستند از آنجا که φ یک رنگ آمیزی حریصانه است پس $j < k$ خواهد بود. فرض کنید h یک رنگ در $\{i, j\}$ باشد که رنگ d_v نیست، c_v هیچ همسایه‌ای به رنگ h ندارد چون به غیر از راس d_v که به رنگ h نیست تمام همسایه‌های c_v مجاور با a_v و b_v هستند از آنجا که φ یک رنگ آمیزی حریصانه است پس $k < h$ بنابراین $i < j < k < h \in \{i, j\}$ است که تناقض می‌باشد. پس برای هر راس v در G دقیقاً دو رنگ در $\{a_v, b_v, c_v, d_v\}$ ظاهر می‌شود که این دو رنگ در $a_v b_v$ هم ظاهر می‌شود. بنابراین برای هر راس v در G ، زیرگراف در $G[S_2][K_2]$ القاشده توسط $a_v b_v$ یک رنگ آمیزی حریصانه با q رنگ خواهد بود بعلاوه این گراف یکرخت به $G[K_2]$ است. بنابراین ما برای هر رنگ آمیزی حریصانه $G[S_2][K_2]$ ، یک رنگ آمیزی حریصانه در $G[K_2]$ با همان تعداد رنگ خواهیم داشت. پس $\Gamma(G[K_2]) \geq \Gamma(G[S_2] \square K_2)$ است. $\square$

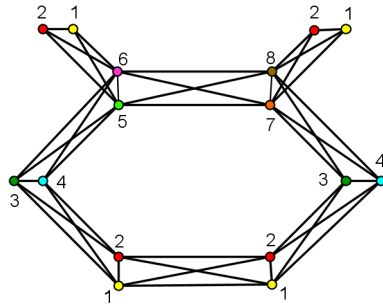
نتیجه زیر تعمیمی از قضیه بالاست.

نکته ۰.۱۲.۲.۴ [۲] برای هر گراف G و هر عدد صحیح p ، $\Gamma(G[K_p]) = \Gamma(G[S_p] \square K_p)$.

اگر $\Gamma(H) = k$ باشد در [۲] ثابت شده که برای هر گراف G ، $\Gamma(G[H]) = \Gamma(G[K_k])$. بعلاوه در نتیجه (۱۲.۲.۴)، ثابت شده که $\Gamma(G[K_k]) = \Gamma(G[S_k] \square K_k)$. پس $\Gamma(G[H]) = \Gamma(G[S_k] \square K_k)$. یعنی عدد گراندی حاصلضرب الفبایی دو گراف G و H را می توان حالت خاصی از عدد گراندی حاصلضرب دکارتی دو گراف دانست.

نتیجه ۱۳.۲.۴. [۸] یک گراف H وجود دارد به طوریکه $\Gamma(H) = ۳$ و $\Gamma(K_۲ \square H) = ۷$ است.

برهان. فرض کنید $G_۳$ گرافی است که شامل یک دور به طول ۶ و دو راس g و h است که راس g مجاور با راسی از دور به نام a و راس h مجاور با راسی از دور به نام b باشد بطوریکه a و b مجاورند. در [۲] ثابت شده که $\Gamma(G_۳) = ۳$ و $\Gamma(G_۳[K_۲]) \geq ۷$ است. از طرف دیگر $\Gamma(G_۳[K_۲]) \leq ۷$ است زیرا اگر راسی به رنگ ۸ داشته باشیم مطابق شکل (۳.۴)، رئوس مجاور هم رنگ خواهند بود.



شکل ۳.۴: $G_۳[K_۲]$

بنابراین $\Gamma(G_۳) = ۳$ و $\Gamma(G_۳[K_۲]) = ۷$ است. حال فرض کنید که $H = G_۳[S_۲]$ باشد بنابر لم (۱۰.۲.۴)، $\Gamma(H) = \Gamma(G_۳[S_۲]) = \Gamma(G_۳) = ۳$ ، و بنا بر قضیه (۱۱.۲.۴)، $\Gamma(K_۲ \square H) = \Gamma(K_۲ \square G_۳[S_۲]) = \Gamma(G_۳[K_۲]) = ۷$.

□

میتوان این نتیجه را بصورت زیر با قضیه (۴.۲.۴) هم اثبات کرد.

$$\Gamma(K_۲ \square H) \leq \Delta(K_۲).۲^{\Gamma(H)-۱} + \Gamma(H) = ۷.$$

فرض کنید $G'_۳$ همان گراف $G_۳$ باشد که دو راس g و h بر هم منطبق شدند همچنین فرض کنید $H' = G'_۳[S_۲]$ باشد میتوان نشان داد که روابط $\Gamma(H') = ۳$ و $\Gamma(K_۲ \square H') = ۷$ برقرار است. میتوان از این نتیجه برای رد حدس های (۶.۲.۴)، (۵.۲.۴) و (۷.۲.۴) استفاده کرد. رد حدس (۵.۲.۴):

$$۷ = \Gamma(K_۲ \square H) \leq (\Delta(K_۲) + ۱).\Gamma(H) = ۶$$

رد حدس (۶.۲.۴) :

$$\gamma = \Gamma(K_2 \square H) \leq 2 \cdot \Gamma(H) = 6$$

رد حدس (۷.۲.۴) : اگر v راسی از گراف H باشد و a_v و b_v دو راس متناظر در $K_2 \square H$ باشد مجموعه $M = \{a_v b_v | v \in V(H)\}$ یک تطابق در $K_2 \square H$ است و $\Gamma(K_2 \square H) \setminus M$ شامل دو کپی متمایز از H است پس $\gamma = \Gamma(K_2 \square H) \leq 2 \cdot \Gamma(K_2 \square H \setminus M) = 6$ بنابراین $\Gamma(K_2 \square H) \setminus M = \Gamma(H) = 3$ که تناقض است.

نتیجه بالا نشان داد که اگر $\Gamma(H) = 3$ باشد حدس (۵.۲.۴) برقرار نیست اما گزاره زیر اثبات می‌کند که اگر $\Gamma(H) = 2$ باشد حدس (۵.۲.۴) درست خواهد بود.

گزاره ۱۴.۲.۴. [۸] فرض کنید G و H دو گراف باشند، اگر $\Gamma(H) = 2$ باشد آنگاه $\Gamma(G \square H) \leq 2(\Delta(G) + 1)$.

برهان. اگر گراف H ناهمبند باشد و برای $(p \geq 2)$ ، $H_1, \dots, H_p$ مولفه‌های گراف H باشند آنگاه $G \square H$ برابر با اجتماع مجزایی از $G \square H_1, \dots, G \square H_p$ است پس ما باید این گزاره را برای هر گراف $G \square H_i$ اثبات کنیم. بنابراین ما فرض می‌کنیم که گراف H همبند است. در [۵۳] ثابت شده که اگر $\Gamma(H) = 2$ باشد آنگاه H یک گراف دوبخشی کامل است که آن را بصورت افزایی از (A, B) نشان می‌دهیم. برای هر راس $v \in V(G)$ ، A_v و B_v را بصورت $A_v = \{(v, a) | a \in A\}$ و $B_v = \{(v, b) | b \in B\}$ تعریف می‌کنیم که زیرمجموعه‌ای از مجموعه رئوس $G \square H$ هستند. زیر گراف القایی $A_v \cup B_v$ در $G \square H$ یکریخت به گراف H است. فرض کنید φ یک رنگ آمیزی حریصانه در $G \square H$ باشد ادعا می‌کنیم که برای هر $v \in V(G)$

$$|\varphi(A_v)| \leq \Delta(G) + 1, |\varphi(B_v)| \leq \Delta(G) + 1.$$

به برهان خلف فرض کنید که $|\varphi(A_v)| \geq \Delta(G) + 2$ است. همچنین فرض کنید χ بزرگترین رنگ در $\varphi(A_v)$ باشد که راسی مانند $x = (v, a)$ به رنگ χ است.

همسایه‌های x در $G \square H$ ، $B_v \cup \{(w, a) | w \in N_G(v)\}$ هستند. درجه راس v در گراف G حداکثر Δ است پس $|\{(w, a) | w \in N_G(v)\}| = d_G(v) \leq \Delta(G)$ است. بنابراین حداکثر $\Delta(G)$ رنگ از رنگ‌های $\varphi(A_v)$ ، در همسایه‌های x ظاهر شده‌اند اما رنگ‌های $\varphi(A_v)$ در B_v ظاهر نمی‌شوند چون رئوس این دو مجموعه به هم متصل هستند پس بنا بر فرض حداقل یک رنگی در $\varphi(A_v) \setminus \chi$ وجود دارد که از χ کوچکتر است و در همسایه‌های x استفاده نشده که این تناقض با رنگ آمیزی حریصانه است بنابراین $|\varphi(A_v)| \leq \Delta(G) + 1$ است. با تکرار مراحل بالا میتوان نشان داد که رابطه $|\varphi(B_v)| \leq \Delta(G) + 1$ هم برقرار است. حال فرض کنید $y = (v, b)$ راسی در $G \square H$ باشد که $\varphi(y)$ بزرگترین رنگ ظاهر شده است بدون کاستن از کلیت فرض می‌کنیم که $b \in B$ است. برطبق ادعا حداکثر $\Delta(G) + 1$ رنگ در A_v ظاهر می‌شود و حداکثر $\Delta(G)$ رنگ در $\{(w, b) | w \in N_G(v)\}$ استفاده شده است پس حداکثر $2\Delta(G) + 1$ رنگ در همسایگی y ظاهر می‌شود بنابراین $\varphi(y) \leq 2\Delta(G) + 2$ خواهد بود. $\square$

نتیجه زیر تعمیمی از گزاره بالاست.

نکته ۱۵.۲۰۴. [۸] اگر H یک گراف چند بخشی کامل باشد، آنگاه $\Gamma(G \square H) \leq (\Delta(G) + 1)\Gamma(H)$.

۳.۴ درخت دودویی

T_1 گرافی یک راسی است. برای $k \geq 2$ ، به ازای هر راس v از T_{k-1} یک راس v' و یک یال vv' اضافه می کنیم گراف T_k بدست آمده، درخت دودویی^{۱۲} نامیده می شود. با استقرا نشان می دهیم که برای $k \geq 2$ ، T_k دو راس مجاور r و s از درجه $k-1$ دارد و درجه بقیه رئوس حداکثر $k-2$ است و هر دو مولفه از $T_k \setminus rs$ به T_{k-1} یکرخت است.

• گراف T_2 دارای دو راس مجاور r و s با درجه یک است و دو مولفه همبند $T_2 \setminus rs$ ، یکرخت با T_1 است.

• فرض کنید برای $k \geq 2$ در گراف T_{k-1} ، دو راس مجاور r و s از درجه $k-2$ هستند و درجه بقیه رئوس حداکثر $k-3$ است و هر دو مولفه از $T_{k-1} \setminus rs$ به T_{k-2} یکرخت است.

• بنابراین با افزودن یک برگ به هر راس T_{k-1} ، دو راس مجاور r و s از درجه $k-1$ و درجه بقیه رئوس حداکثر $k-2$ خواهد بود و هر دو مولفه از $T_k \setminus rs$ به T_{k-1} یکرخت است.

فرض کنید راس r در T_k ، ریشه^{۱۳} است. عدد رنگی این درخت برابر با ۲ است و $\Gamma(T_k) = k$ است یعنی T_k یک رنگ آمیزی حریصانه ψ دارد که هر راس $v \notin rs$ ، رنگی برابر با درجه اش دارد و s و r به ترتیب رنگ $k-1$ و k دارند. به عبارت دیگر در هر رنگ آمیزی T_k ، به رنگ رئوس قبلی یک واحد اضافه و رئوس جدید را به رنگ ۱، رنگ آمیزی می کنیم. همچنین برای هر راس v و رنگ $i < \psi(v)$ ، راس v یک همسایه منحصر به فرد به رنگ i دارد زیرا در غیراینصورت رنگ آمیزی حریصانه نخواهد بود. شعاع^{۱۴} گراف G ، کوچکترین عدد صحیح t است که یک راس a از G وجود دارد بطوریکه برای هر راس از G ، فاصله^{۱۵} رئوس با راس a حداکثر t است. با استقرا میتوان نشان داد که شعاع T_k برابر $k-1$ خواهد بود. در [۳۰، ۳۲] ثابت شد که عدد گراندی یک درخت برابر با عدد گراندی بزرگترین زیردرخت دودویی آن است و در حقیقت شعاع یک زیردرخت از درخت T ، بزرگتر از شعاع T نیست. پس هر درخت با شعاع حداکثر ۲، عدد گراندی حداکثر ۳ دارد چون اگر عدد گراندی یک درخت T ، حداقل ۴ باشد پس این درخت شامل یک زیر درخت T_4 است. از طرفی شعاع T_4 ، ۳ است. بنابراین شعاع T حداقل ۳ است که تناقض با فرض مساله است.

^{۱۲}Binomial tree

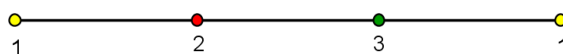
^{۱۳}Root

^{۱۴}Radius

^{۱۵}Distance

قضیه ۱۰.۳.۴ [۸] برای هر $k \geq 3$ ، یک گراف G هست بطوریکه $\Gamma(G) = 3$ ، $\Gamma(G \times G) \geq k$ و $\Gamma(G \boxtimes G) \geq k$.

برهان. فرض کنید گراف G ، از زیرتقسیم هر یال درخت دودویی T_k بدست می‌آید. مجموعه رئوس G به دو مجموعه مستقل A و B افراز می‌شوند که A شامل رئوس اصلی T_k و B شامل رئوس زیرتقسیم است. ریشه T_k همان ریشه G است پس ریشه جزو رئوس اصلی است. درجه رئوس انتهایی یک است بنابراین رئوس انتهایی هم جزو رئوس اصلی است. یک رنگ آمیزی حریصانه در G در نظر بگیرید. درجه هر راس در مجموعه B ، ۲ است و بنابراین رئوس B ، یک رنگ از مجموعه $\{1, 2, 3\}$ دریافت می‌کنند چون در همسایگی رئوس B ، حداکثر دو رنگ ظاهر می‌شود پس از مجموعه $\{1, 2, 3\}$ حتماً رنگی هست که ظاهر نشده باشد. یک راس B ، زمانی رنگ ۳ دریافت می‌کند که همسایه‌هاش به رنگ ۱ و ۲ باشند. از طرفی رنگ هر راس A ، حداکثر ۳ است چون اگر راس A رنگی بزرگتر از ۳ بگیرد پس در همسایه‌اش راسی با رنگ ۳ و ۲ و ۱ وجود دارد که تناقض است بنابراین $\Gamma(G) \leq 3$ است. در شکل (۴.۴)، می‌بینید که اگر G شامل یک مسیر با چهار راس باشد $\Gamma(G) \geq 3$ است.



شکل ۴.۴: مسیر با چهار راس

پس $\Gamma(G) = 3$ است. حال باید نشان دهیم که $G \times G$ و $G \boxtimes G$ یک زیرگراف القایی H_k ، یکرخت به T_k دارد. فرض کنید ریشه r در T_k ، ریشه گراف G باشد پس G یک درخت ریشه دار است، هر راس در B یک پدر و یک فرزند دارد. فرض کنید ψ یک رنگ آمیزی حریصانه از T_k با k رنگ باشد بطوریکه ریشه r رنگ k دارد و راس دوم به نام s از درجه $k-1$ ، رنگ $k-1$ دارد. فرض کنید برای $A_1 = \{r\}$ ، مجموعه رئوسی در A باشد که رنگ $(k+1)-i$ دریافت کرده پس $A_i = \{r\}$ و $A_2 = \{s\}$ است. فرض کنید برای هر B_i ، $i \in \{2, \dots, k\}$ مجموعه رئوسی در B باشد که فرزندش در A_i باشد. یک راس v در $A_i \cup B_i$ برچسب i دارد که برچسب v را با ℓ_v نشان می‌دهیم. فرض کنید q پدر s باشد یعنی q همسایه مشترک s و r باشد. در این قضیه فاصله بین دو راس x و y در G را با $d(x, y)$ نشان می‌دهیم. ما با استقرا روی $i \in \{2, \dots, k\}$ نشان می‌دهیم که $G \times G$ و $G \boxtimes G$ یک زیرگراف القایی H_i دارد بطوریکه :

۱. H_i به T_i یکرخت است و شامل راس (r, q) است.

۲. هر راس از H_i به شکل (a, b) یا (b, a) است که $a \in A$ و $b \in B$ ، بعلاوه $\ell_a < \ell_b \leq i$ ، رئوس

a, b در مولفه‌های مجزایی از $G \setminus rq$ قرار می‌گیرند و $d(a, r) = d(b, q)$.

^{۱۶}Label

برای $i = 2$ ، زیرگراف القایی H_2 شامل دو راس (r, q) و (q, r) است که با یک یال به هم متصل شدند. این زیرگراف القایی یک کپی از T_2 است که شامل راس (r, q) است. از طرفی می دانیم که $r \in A$ ، $q \in B$ ، $\ell_r < \ell_q \leq 2$ و $d(r, r) = d(q, q)$ است. حال فرض کنید برای $i \geq 3$ ، یک زیرگراف القایی H_{i-1} از $G \boxtimes G$ وجود دارد بطوریکه شرایط بالا روی آن صادق است. فرض کنید z راسی از H_{i-1} باشد و $a \in A$ و $b \in B$ باشد بطوریکه z برابر با (a, b) یا (b, a) است. u را فرزند یکتای z در G قرار دهید. بنا به تعریف برچسب می دانیم که برچسب پدر و فرزند با هم برابر است پس $\ell_u = \ell_b$ است بنا به فرض استقرا $\ell_a \leq i - 1$ است. بنابراین در T_k ، a یک همسایه به رنگ $(i - 1) - k$ دارد (چون ψ یک رنگ آمیزی حریصانه است) و در G ، a یک همسایه $v \in B$ با برچسب i دارد. از طرفی طبق فرض استقرا a و b در مولفه های مجزایی از $G \setminus rq$ قرار دارند پس فرزندان نشان هم در مولفه های مجزایی از $G \setminus rq$ قرار خواهند گرفت. (v, u) یا (u, v) یک همسایه از (a, b) در $G \times G$ است که این همسایه را برگ ^{۱۷} z و ^{۱۸} z را پشتیبان برگش می نامیم. همچنین می دانیم که $E(G \times G) \subseteq E(G \boxtimes G)$ است پس هر یال پشتیبان-برگ یک یالی در $G \boxtimes G$ است. از طرفی v برچسب i دارد پس برگ z یک راس در H_{i-1} نیست بنابراین $\ell_u = \ell_b \leq i - 1$ و $\ell_v = i$ در نتیجه $\ell_u < \ell_v \leq i$ است. بنا به فرض، u فرزند b و v فرزند a است اگر a در مولفه G_r از $G \setminus rq$ قرار بگیرد که شامل r باشد و b در مولفه G_q از $G \setminus rq$ قرار بگیرد که شامل q باشد آنگاه $d(u, r) = d(b, q) + 2$ و $d(v, q) = d(a, r) + 2$. بنابر فرض استقرا می دانیم که $d(a, r) = d(b, q)$ است پس $d(u, r) = d(v, q)$ خواهد بود. اما اگر a در مولفه G_q و b در مولفه G_r باشد آنگاه $d(u, r) = d(b, q)$ و $d(v, q) = d(a, r)$. در نتیجه $d(u, r) = d(v, q)$ است. بنابراین هر راس از H_i به شکل (v, u) یا (u, v) است که $u \in A$ و $v \in B$ ، بعلاوه $\ell_u < \ell_v \leq i$ است. همچنین رئوس u, v در مولفه های مجزایی از $G \setminus rq$ قرار دارند و $d(u, r) = d(v, q)$. از طرفی بنا به ساختار استقرایی، زیرگراف القایی H_i حتماً شامل راس (r, q) خواهد بود.

حال می خواهیم نشان دهیم که H_i به T_i یکرخت است. فرض کنید V_{i-1} مجموعه رئوسی از H_{i-1} باشد و W_{i-1} مجموعه ای از برگ های رئوس V_{i-1} باشد. فرض کنید H_i زیرگرافی از $G \boxtimes G$ باشد که توسط رئوس $V_{i-1} \cup W_{i-1}$ القا شده است. به جای اثبات یکرختی زیرگراف القایی H_i به T_i ، می توانیم نشان دهیم:

• هر راس در W_{i-1} یک همسایه منحصر به فرد در V_{i-1} دارد.

• W_{i-1} یک مجموعه مستقل القا می کند.

چون $E(G \times G) \subseteq E(G \boxtimes G)$ است پس با اثبات دو ادعا بالا می توان نتیجه گرفت که H_i یک زیرگراف القایی در $G \times G$ است. برای اثبات ادعای اول، به برهان خلف فرض کنید که برگ $(v, u) \in W_{i-1}$ از راس $(a, b) \in V_{i-1}$ مجاور با یک راس $(x, y) \in V_{i-1}$ است که دو راس $(a, b) \in V_{i-1}$ و

^{۱۷}Leaf

^{۱۸}Support

$(x, y) \in V_{i-1}$ از هم متمایزند. همچنین فرض کنید که $a, u \in A$ و $b, v \in B$ است و a در مولفه G_r و b در مولفه G_q قرار دارد (استدلال آن مشابه حالتی است که b در مولفه G_r و a در مولفه G_q). ما باید نشان دهیم که $x = a$ است زیرا در غیر اینصورت x فرزند v است و $\ell_v = \ell_x = i$ که در اینصورت $(x, y) \notin H_{i-1}$ که تناقض با خاصیت (۲) است. پس $x \in A$ است که با خاصیت (۲) می‌توان نتیجه گرفت که $y \in B$. حال فرض کنید $y \neq b$ و y فرزند u است که در اینصورت $d(y, q) = d(b, q) + 2$ از طرفی $d(x, r) = d(a, r) = d(b, q)$ بنابراین $d(x, r) \neq d(y, q)$ که تناقض با خاصیت (۲) است در نتیجه $x = a$ و $y = b$ خواهد بود یعنی هر راس در W_{i-1} یک همسایه منحصر به فرد در V_{i-1} دارد. برای اثبات ادعای دوم به برهان خلف فرض کنید که (a, b) و (b', a') دو راس مجاور در W_{i-1} هستند. ما می‌توانیم فرض کنیم که $a, a' \in A$ و $b, b' \in B$ است زیرا در غیر اینصورت این دو راس مجاور نخواهند بود. فرض کنید (s_a, s_b) پشتیان برگ (a, b) و $(s_{b'}, s_{a'})$ پشتیان برگ (b', a') باشد. پس $s_b, s_{b'} \in A$ و $s_a, s_{a'} \in B$ است در نتیجه $\ell_{s_b} < \ell_{s_{a'}}$ و $\ell_{s_b} < \ell_{s_a}$ خواهد بود. با توجه به تعریف برجسب‌ها $\ell_{s_a} = \ell_a$ و $\ell_{s_{a'}} = \ell_{a'}$ داریم. بعلاوه هر b و b' برجسب i دارد و در نتیجه یک فرزندی با برجسب i دارد و $\ell_a < \ell_b = i$. پس برای اینکه (a, b) مجاور با (b', a') باشد a باید همسایه b' با برجسبی کمتر از i باشد که همان $s_{b'}$ است. در حالت خاص $\ell_a = \ell_{s_{b'}}$ و با استدلال متقارن $\ell_{a'} = \ell_{s_b}$ است. در نتیجه اگر (a, b) مجاور با (b', a') باشد آنگاه $\ell_a = \ell_{s_a} = \ell_{s_b} < \ell_{s_{a'}} = \ell_{a'} = \ell_{s_b} < \ell_{s_a} = \ell_a$ باشد که تناقض است. $\square$

مجموعه رئوس درخت دودویی T_k را به سه مجموعه X_1, X_2, X_3 افراز می‌کنیم. ریشه T_k در X_1 است. برای هر راس $v \in X_1 \cup X_3$ فرزندان v در X_2 هستند. برای هر راس $v \in X_2$ فرزندان v حسب مکان پدر v یعنی w مشخص می‌شوند: اگر $w \in X_1$ باشد آنگاه فرزندان v در X_3 هستند و اگر $w \in X_3$ باشد آنگاه فرزندان v در X_1 هستند. حال اگر تمام یال‌های بین X_1 و X_3 را به گراف T_k اضافه کنیم گراف حاصل را H_k می‌نامیم که برای اثبات قضایای زیر از آن استفاده خواهیم کرد.

قضیه ۲.۳.۴ [۸] برای $k \geq 1$ ، $\Gamma(H_k) \leq 5$. به علاوه برای $k \geq 9$ ، $\Gamma(H_k) = 5$.

برهان. ابتدا نشان می‌دهیم که برای هر k ، $\Gamma(H_k) \geq 7$ نخواهد بود. در H_k هر مجموعه مستقل مشمول در $A_1 = X_1 \cup X_2$ یا در $A_2 = X_2 \cup X_3$ است. زیرا اگر مجموعه‌ای کاملاً مشمول در A_1 و A_2 نباشد آنگاه X_1 و X_3 متعلق به مجموعه مستقل خواهند بود در حالیکه در H_k ، X_1 و X_3 مجاورند. اگر H_k یک رنگ آمیزی حریصانه با حداقل ۷ رنگ داشته باشد آنگاه بنا به اصل لانه کبوتر حداقل ۴ کلاس رنگی در یکی از دو مجموعه A_1 و A_2 است که آن را A_j می‌نامیم. پس عدد گراندی زیر گراف H^* القاشده توسط A_j در H_k ، حداقل ۴ است. از طرفی هر مولفه H^* یک درخت با شعاع حداکثر ۲ است بنابراین عدد گراندی H^* حداکثر ۳ خواهد بود که تناقض است پس برای هر k ، $\Gamma(H_k) \leq 6$ است. برای اثبات این قضیه از دو خاصیت T_k استفاده می‌کنیم:

۱. هر راس $v \in X_2$ دقیقاً یک همسایه در X_1 یا دقیقاً یک همسایه در X_3 دارد. زیرا اگر پدر v ، در یکی از افرازه‌های X_1 و X_3 باشد آنگاه تمام فرزندان در دو مجموعه دیگر هستند.

۲. برای $i = 1, 3$ ، هیچ مسیری با پنج راس در $X_i \cup X_2$ نیست که دو راس انتهایی اش در X_i باشد. زیرا هر مولفه از $X_i \cup X_2$ ، یا شامل ریشه T_k و فرزندانش است یا شامل بعضی رئوس در X_2 ، فرزندان و نوه هاش است.

فرض کنید که یک ۶-رنگ آمیزی حریصانه φ در H_k وجود دارد.

۱. فرض کنید برای $v \in X_2$ ، $\varphi(v) \in \{5, 6\}$ است. راس v همسایه‌هایی به رنگ ۱، ۲، ۳، ۴ دارد. بنا به خاصیت (۱)، v حداکثر با یک راس از X_1 یا X_3 مجاور است. پس $i \in \{1, 3\}$ هست بطوریکه v ، همسایه‌های X_i با $w_1, w_2, w_3 \in X_i$ با $\varphi(w_1) < \varphi(w_2) < \varphi(w_3) \leq 4$ دارد. بنابراین w_3 یک همسایه w_4 با $\varphi(w_4) = \varphi(w_2)$ دارد و w_4 یک همسایه w_5 با $\varphi(w_5) = \varphi(w_1)$ دارد. در نتیجه $\{w_1, w_5\}$ و $\{w_2, w_4\}$ مجموعه‌های مستقلی هستند. w_4 هم‌رنگ با w_2 است و w_2 در X_i است پس $w_4 \in X_2$ خواهد بود زیرا در غیر اینصورت دو راس هم‌رنگ w_4 و w_2 در مجاورت هم قرار می‌گیرند که تناقض با رنگ آمیزی حریصانه است. بعلاوه همسایه‌های یک راس در X_2 ، در X_i قرار دارد و w_5 یک همسایه از w_4 است پس w_5 باید در X_i باشد زیرا در غیر اینصورت دو راس هم‌رنگ w_5 و w_1 در مجاورت هم قرار دارند. بنابراین $w_4 \in X_2$ و $w_5 \in X_i$ است. اما مسیر $w_1 - v - w_3 - w_4 - w_5$ دو راس انتهایی اش در X_i است که تناقض با خاصیت (۲) است.

۲. فرض کنید برای $v \in X_1 \cup X_3$ ، $\varphi(v) = 6$ است. فرض کنید i اندیس $\{1, 3\}$ باشد بطوریکه $v \in X_i$ است. راس v یک همسایه w با $\varphi(w) = 5$ دارد پس $w \in X_{4-i}$ است زیرا در غیر اینصورت حالت اول رخ خواهد داد. رئوس v و w همسایه‌های u_v و u_w با رنگ ۴ دارد که احتمالاً $u_v = u_w$ است اما نمی‌توان یکی را در X_1 و دیگری را در X_3 در نظر گرفت زیرا اگر یکی در X_1 و دیگری در X_3 باشد باید با هم مجاور باشند در حالیکه این دو راس هم‌رنگ هستند. بنابراین یک راس $u \in \{u_v, u_w\}$ در X_2 است. فرض کنید t همسایه راسی باشد که در X_2 قرار دارد یعنی t یکی از رئوس $\{v, w\}$ باشد و j اندیسی باشد بطوریکه $t \in X_j$. راس u سه همسایه a, b, c دارد بطوریکه $\{\varphi(a), \varphi(b), \varphi(c)\} = \{1, 2, 3\}$ است. بنا به خاصیت (۱)، یا دو عضو از $\{a, b, c\}$ مانند a, b در X_j است یا $\{a, b, c\} \subset X_{4-j}$ است.

• اگر $a, b \in X_j$ باشد. فرض کنید که $\varphi(a) < \varphi(b)$. یک همسایه d از t در نظر بگیرید که $\varphi(d) = \varphi(b)$ و یک همسایه e از d در نظر بگیرید که $\varphi(e) = \varphi(a)$ باشد. با توجه به ساختار H_k ، تمام رئوس در X_1 مجاور با تمام رئوس در X_3 هستند و $j \in \{1, 3\}$ است. چون a و e رنگ مشابهی دارند و b و d هم، هم‌رنگ هستند پس نه d و نه e نمی‌توانند در X_{4-j} باشند.

زیرا a و b هر دو در X_j هستند و ما یک رنگ آمیزی سره داریم بنابراین رئوس مجاور نمی توانند هم رنگ باشند پس d و e فقط می توانند در X_j یا X_2 باشند. از طرفی d مجاور با t است که t در X_j قرار دارد. با توجه به ساختار H_k می دانیم که همسایه های X_j یا در X_2 و یا در X_{4-j} هستند. بنابراین d باید در X_2 باشد. همسایه های یک راس در X_2 ، یا در X_1 و یا در X_3 هستند و e یک همسایه از d است از طرفی چون e در X_{4-j} نیست پس e باید در X_j باشد. بنابراین $d \in X_j$ و $e \in X_2$ است. اما مسیر $e - d - t - u - a$ متناقض با خاصیت (۲) است.

• اگر $\{a, b, c\} \subset X_{4-j}$ باشد. فرض کنید که $\varphi(a) = 1$ ، $\varphi(b) = 2$ و $\varphi(c) = 3$. یک همسایه d از c با $\varphi(d) = 2$ و یک همسایه e از d با $\varphi(e) = 1$ هست. d هم رنگ با b است و b در X_{4-j} است، اگر d در X_j باشد دو راس هم رنگ b و d در مجاورت هم قرار می گیرند. پس d نمی تواند در X_j باشد. از طرفی d یک همسایه از c است و همسایه های c فقط در X_2 یا X_j هستند پس d باید در X_2 باشد. d فقط همسایه هایی در X_1 یا X_3 دارد و e یک همسایه از d است از طرفی e نمی تواند در X_j باشد زیرا در غیر این صورت دو راس هم رنگ a و e در مجاورت هم قرار می گیرند. پس e باید در X_{4-j} باشد. بنابراین $d \in X_2$ و $e \in X_{4-j}$ است. اما مسیر $e - d - c - u - a$ متناقض با خاصیت (۲) است. بنابراین $\Gamma(H_k) \leq 5$ خواهد بود.

حال نشان می دهیم که برای $k \geq 9$ ، $\Gamma(H_k) = 5$ است. می دانیم که $T_k = k$ ، پس T_k شامل یک مسیر $a_1 - a_2 - \dots - a_9$ به ترتیب به رنگهای $k, k-1, \dots, k-8$ است که a_1 ریشه T_k است، یک مسیر $a_2 - b_3 - b_4 - b_5$ به رنگ های $5, k-4, k-3, k-1$ و یک مسیر $a_6 - b_7 - b_8$ به رنگ های $8, k-7, k-5$ خواهیم داشت. با افراز بندی رئوس H_k ، a_1, a_5, a_9, b_5 در X_1 ، رئوس $a_2, a_4, a_6, a_8, b_4, b_8$ در X_2 و رئوس a_3, a_7, b_3, b_7 در X_3 خواهند بود. حال اگر رئوس a_2, a_5, b_5, b_8, b_9 به رنگ ۱، رئوس a_3, b_4, b_7, a_8 به رنگ ۲، رئوس b_3, a_6 به رنگ ۳ و راس a_1 و a_9 را به رنگ ۴ و ۵ رنگ آمیزی کنیم، H_k یک رنگ آمیزی حریصانه با ۵ رنگ خواهد داشت. $\square$

قضیه ۳.۳.۴. [۸] اگر G یک گراف با حداقل یک یال و $k \geq 1$ باشد آنگاه $\Gamma(G \times H_k) \geq k$.

برهان. گراف G حداقل یک یال دارد پس گراف $(K_2 \times H_k)$ یک زیرگراف از $(G \times H_k)$ خواهد بود. کافی است این قضیه را برای $(K_2 \times H_k)$ اثبات کنیم. فرض کنید $G = K_2$ و $V(G) = \{v_1, v_2\}$ است. همچنین فرض کنید $Y_i = \{v_1\} \times X_i$ و $Y_2 = \{v_2\} \times X_2$ است. بنابراین $Y_1 \cup Y_2 \cup Y_3$ یک کپی از T_k در $K_2 \times H_k$ القا می کند که Y_i نقش X_i را در افرازهای H_k بازی می کند. $\square$

قضیه ۴.۳.۴. [۸] اگر G یک گراف همبند غیرکامل و $k \geq 1$ باشد آنگاه $\Gamma(G \boxtimes H_k) \geq k$.

برهان. گراف G یک گراف همبند غیرکامل است یعنی دو راسی در گراف وجود دارد که به هم متصل نیستند ولی در یک مسیر قرار دارند در نتیجه ۳ راس در این مسیر وجود دارد که کوتاهترین فاصله را دارند. پس G شامل یک زیرگراف القایی یکرخت به P_3 است. کافی است این قضیه را برای $(P_3 \boxtimes H_k)$

اثبات کنیم. فرض کنید $G = P_3 = v_1 - v_2 - v_3$ و برای $i \in \{1, 2, 3\}$ $Y_i = \{v_i\} \times X_i$ است. بنابراین $Y_1 \cup Y_2 \cup Y_3$ یک کپی از T_k در $P_3 \boxtimes H_k$ القا می کند که Y_i نقش X_i را در افرازشای H_k بازی می کند. $\square$

اگر G اجتماع مجزایی از گراف های کامل باشد آنگاه با توابع $\Gamma(G)$ و $\Gamma(H)$ میتوان کران بالایی برای $\Gamma(G \boxtimes H)$ بدست آورد. فقط کافی است $G = K_{m+1}$ در نظر بگیرید. از طرف دیگر

$$K_{m+1} \boxtimes H = H[K_{m+1}]$$

بنابراین باقضیه (۲.۲.۴) گزاره زیر نتیجه می شود.

گزاره ۵.۳.۴. [۸] اگر $\Gamma(H) = k \geq 2$ و $m \geq 1$ باشد آنگاه $\Gamma(K_{m+1} \boxtimes H) \leq m \cdot 2^{k-1} + k$.

حدس ۶.۳.۴. [۸] برای هر گراف G و H ،

$$\Gamma(G \square H) \leq \max\{(\Delta(G) + 1) \cdot \Gamma(H), (\Delta(H) + 1) \cdot \Gamma(G)\}.$$

برهان. ابتدا فرض کنید $\Gamma(G) = 1$. پس گراف G یال ندارد. بنابراین با استفاده از قضیه (۴.۲.۴)، نامعادله بالا برابر $\Gamma(H) \leq \max\{\Gamma(H), (\Delta(H) + 1)\} = \Delta(H) + 1$ است که برای هر گراف H برقرار است. حال فرض کنید $\Gamma(G) \geq 2$ و $\Gamma(H) \geq 2$ است. از طرفی

$$\begin{aligned} \max\{(\Delta(G) + 1) \cdot \Gamma(H), (\Delta(H) + 1) \cdot \Gamma(G)\} &\geq \frac{1}{2} \{(\Delta(G) + 1) \cdot \Gamma(H) + (\Delta(H) + 1) \cdot \Gamma(G)\} \\ &\geq \Delta(G) + 1 + \Delta(H) + 1 \end{aligned}$$

بنابراین نامعادله بالا بصورت

$$\Gamma(G \square H) \leq \Delta(G \square H) + 1 = \Delta(G) + \Delta(H) + 1 \leq \Delta(G) + \Delta(H) + 2$$

خواهد بود. بنابراین حدس بالا درست است اما کران معرفی شده ضعیف تر از کران $\Delta(G \square H) + 1$ است. $\square$

پیوست آ

جدول نمادها

مرتبه گراف G	$n(G)$
درجه راس v در گراف G	$d_G(v)$
بیشترین درجه از یک راس	Δ
کمترین درجه از یک راس	δ
مجموعه $\{1, \dots, n\}$	$[n]$
برای هر عدد حقیقی x ، بزرگترین $n \in \mathbb{Z}$ که $n \leq x$	$\lfloor x \rfloor$
برای هر عدد حقیقی x ، کوچکترین $n \in \mathbb{Z}$ که $n \geq x$	$\lceil x \rceil$
میانگین درجه در گراف	$\bar{d}$
فاصله بین دو راس در گراف G	$d_G(u, v)$
قطر گراف	$diam$
مسیر n راسی	P_n
دور n راسی	C_n
یکریختی	$G \cong H$
ماکسیمم اندازه از یک مجموعه مستقل راسی	α
ماکسیمم اندازه از یک مجموعه مستقل یالی	α'
ماکسیمم اندازه از یک خوشه	ω

جدول آ.۱: جدول نمادها

عدد رنگی	χ
عدد رنگی یالی	χ'
عدد گراندی	Γ
G شامل تمام عناصر در H است	$H \subseteq G$
H زیرگراف G و $H \neq G$ است	$H \subset G$
زیرگراف G القا شده توسط S	$G[S]$
گراف دوبخشی کامل با بخش‌های X و Y که $ X = n$ و $ Y = m$	$K_{m,n}$
گراف کامل n راسی	K_n
مکمل گراف G	$\overline{G}$
مجموعه برگ‌ها در درخت T	$L(T)$
مجموعه رئوس پشتیبان در درخت T	$S(T)$
درخت دودویی با مرتبه k	B_k
خانواده k -اتم‌ها	A_k
همسایگی راس u	$N(u)$
همسایگی ورودی راس u	$N^-(u)$
همسایگی خروجی راس u	$N^+(u)$
شامل تمام عناصر در A یا در B و یا هر دو	$A \cup B$
شامل تمام عناصر در A و B	$A \cap B$
شامل تمام عناصر در A که در B نباشد	$A - B$
اجتماع مجزای دو گراف G و H	$G + H$
زوج مرتب دو عضو x و y	(x, y)
زوج مرتب (a, b) که $a \in A$ و $b \in B$	$A \times B$
حاصلضرب الفبایی	$G.H$
حاصلضرب رسته‌ای	$G \times H$
حاصلضرب دکارتی	$G \square H$
حاصلضرب قوی	$G \boxtimes H$

جدول ۲.آ: جدول نمادها

پیوست ب

پیچیدگی الگوریتم

بعد از پیاده سازی الگوریتم با یک زبان برنامه نویسی، آمار حقیقی درباره زمان و حافظه مصرف شده توسط الگوریتم در حین اجرا جمع آوری می شود. زمان اجرای یک برنامه به سخت افزار، سیستم عامل، کامپایلر، نوع الگوریتم و آرایش داده های ورودی بستگی دارد. زمان اجرای برنامه ها بصورت رابطه بین بزرگی سائز ورودی و زمان مورد نیاز برای پردازش ورودی است. زمان اجرا یکی از ملاک های مقایسه چند الگوریتم برای حل یک مساله می باشد. منظور از واحد زمانی، واحدهای زمانی واقعی مانند میکرو یا نانو ثانیه نمی باشد بلکه منظور واحدهای منطقی است که رابطه بین بزرگی یک فایل یا یک آرایه و زمان مورد نیاز برای پردازش داده ها را شرح می دهد. مجموع تعداد عملکردهای اجرایی، زمان اجرای برنامه را می رساند و مستقل از ماشین است. یک گام یا یک مرحله از برنامه، یک قسمت یا بخش با معنی برنامه است (از لحاظ مفهومی یا نحوی) که زمان اجرای آن مستقل از مشخصات نمونه است. بنابراین تعداد مراحل برای هر عبارت یک برنامه، بستگی به نوع عبارت دارد بطوریکه در عبارات توضیحی برابر صفر و در دستور انتسابی بدون فراخوانی برابر یک می باشد و در دستور غیر بازگشتی حلقه *for*، *while* و *repeat until* به تعداد تکرار حلقه در نظر گرفته می شود. هدف از محاسبه پیچیدگی زمانی یک الگوریتم این است که بفهمیم نیازمندی یک الگوریتم به زمان با چه تابعی رشد می کند و هدف اصلی، بدست آوردن این تابع رشد است برای مثال هر چه زبان برنامه نویسی (*compiler*) به زبان ماشینی نزدیکتر باشد برنامه با سرعت بیشتری به جواب می رسد. زمان اجرا، مقدار زمانی از کامپیوتر است که برنامه برای اجرای کامل مصرف می کند. برای محاسبه پیچیدگی زمانی الگوریتم، ابتدا تعداد قدم های الگوریتم به صورت تابعی از اندازه مساله مشخص می شود. برای انجام این کار تعداد تکرار عملیات اصلی الگوریتم محاسبه می شود و به صورت تابع f بیان می شود. پس وقتی اندازه ورودی به اندازه کافی بزرگ باشد تابع g ، مرتبه بزرگی تابع f را بدست می آورد. در نهایت پیچیدگی الگوریتم، رفتار الگوریتم به ازای ورودی های مختلف را نشان می دهد که آن ها را با نمادهای O ، o و Ω نشان می دهند که در بخش بعد آن ها را معرفی می کنیم.

ب.۱ پیچیدگی حافظه

پیچیدگی حافظه میزان فضایی از حافظه است که برنامه برای اجرای کامل به آن نیاز دارد. فضای مورد نیاز در هر برنامه مجموع قسمت های زیر است:

بخش ثابت فضا که معمولاً شامل فضای دستورالعمل، فضای متغیرهایی با اندازه ثابت و فضای لازم برای ذخیره ورودی و خروجی های برنامه است. بخش متغیر فضا شامل فضای پشته و فضای مورد نیاز برای مقادیر متغیرهایی است که اندازه آنها بستگی به مساله و مشخصات ورودی دارد. در تحلیل فضای لازم، روی تخمین بخش متغیر تاکید نداریم زیرا برای هر مساله، ابتدا باید مشخصات ورودی را تعیین کنیم که کار دشواری است. در این پایان نامه ما فقط در مورد پیچیدگی زمانی الگوریتم ها بحث می کنیم. نمایش پیچیدگی الگوریتم

گوییم آهنگ رشد تابع f از آهنگ رشد تابع g کمتر است و می نویسیم $f(n) \ll g(n)$ ، هرگاه

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0.$$

نکته: برای $0 < \varepsilon < 1$ و $a > 1$ ،

$$1 \ll \ln \ln(n) \ll \ln(n) \ll n^\varepsilon \ll n^c \ll n^{\ln(n)} \ll c^n \ll n! \ll n^n \ll c^{a^n}$$

تعریف ب.۱.۱. اگر R مجموعه اعداد حقیقی باشد، $f, g: R \rightarrow R$ دو تابع باشند و $c, c', N_0 \in R$ باشد برای تابع مثبت $g(n)$ ، تعاریف زیر سرعت رشد f و g را با هم مقایسه می کند.

$$f(n) = O(g(n)) \iff \{\exists c > 0, \exists n_0 > 0; \forall n \geq n_0: |f(n)| \leq cg(n)\} \bullet$$

$$f(n) = \Omega(g(n)) \iff \{\exists c > 0, \exists n_0 > 0; \forall n \geq n_0: |f(n)| \geq cg(n)\} \bullet$$

$$f(n) = \theta(g(n)) \iff \{\exists c > 0, \exists c' > 0, \exists n_0 > 0; \forall n \geq n_0: cg(n) \leq f(n) \leq c'g(n)\} \bullet$$

$$f(n) = o(g(n)) \iff \{\forall c > 0, \exists n_0 > 0; \forall n > n_0: |f(n)| \leq cg(n)\} \bullet$$

$$g(n) = o(f(n)) \longrightarrow f(n) = w(g(n)) \bullet$$

$$g(n) = O(f(n)) \longrightarrow f(n) = \Omega(g(n)) \bullet$$

$$g(n) = O(f(n)), f(n) = O(g(n)) \longrightarrow f(n) = \theta(g(n)) \bullet$$

برای درک بهتر مفاهیم بالا به مثال های زیر توجه کنید.

۱. اگر $f(n) = 100n \log n$ و $g(n) = n^2$ باشد آنگاه $f(n) = O(g(n))$ ، $g(n) = \Omega(f(n))$ ، $f(n) = o(g(n))$ و $g(n) = w(f(n))$ است.

۲. اگر $f(n) = 100n^2 + 24n + 2 \log n$ و $g(n) = n^2$ باشد $f(n) = O(g(n))$ و $g(n) = \theta(f(n))$ است.

نماد O حد بالایی برای تابع $f(n)$ می دهد و وقتی به کار می رود که رفتار الگوریتم بدترین حالت و بیشترین زمان اجرا را برای مقادیر معین ورودی دارد. از این پس منظور از $f(n) = O(g(n))$ آن است که $f(n) \in O(g(n))$. نماد Ω حد پایینی برای $f(n)$ می دهد و وقتی به کار می رود که رفتار الگوریتم، بهترین حالت و کمترین زمان اجرا را برای مقادیر معین ورودی دارد. از این پس منظور از $f(n) = \Omega(g(n))$ آن است که $f(n) \in \Omega(g(n))$. نماد θ حد متوسطی برای تابع $f(n)$ می دهد و زمان اجرای الگوریتم را به صورت میانگینی از تعداد عملیات انجام شده با کلیه نمونه ورودی های مساله نشان می دهد. می توان این نماد را به صورت $\theta(f(n)) = O(f(n)) \cap \Omega(f(n))$ هم نشان داد. اگر زمان الگوریتم وابسته به ورودی نباشد آن را با نماد $O(1)$ نشان می دهند. اگر $f \in O(1)$ باشد یعنی f با یک مقدار ثابت کراندار شده است. همچنین اگر $g(n) \leq n^{O(1)}$ باشد می گوییم حداکثر رشد g ، چندجمله ای است. پس برای تحلیل الگوریتم ها باید به اندازه کافی الگوریتم را درک کرده باشیم تا بهترین و بدترین رفتار را تولید و محاسبه کنیم. چون برآورد رفتار آماری ورودی ها، امری دشوار است که در اکثر موارد به بدترین حالت قناعت می کنیم.

تعریف ب.۲.۱. اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$ باشد، f و g را هم ارز می نامیم و می نویسیم $f(n) \sim g(n)$ (یا $f(n) = (1 + o(1))g(n)$).

قضیه ب.۳.۱. اگر $f(n)$ و $g(n)$ دو تابع مثبت باشند،

$$f(n) = o(g(n)) \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \quad \bullet$$

$$f(n) = w(g(n)) \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty \quad \bullet$$

نکته : اگر الگوریتم شامل بخش های مختلفی باشد که هر قسمت پیچیدگی متفاوتی دارد، مرتبه بزرگی هر قسمت را پیدا کرده و بزرگترین مرتبه را به عنوان پیچیدگی کل الگوریتم در نظر می گیریم که یک تابعی از n (تعداد ورودی) است. غالباً پیچیدگی هایی $g(n)$ یکی از توابع زیر خواهد بود:

n (پیچیدگی خطی)، $\log n$ (لگاریتمی)، n^a (چندجمله ای) و a^n که $a \geq 2$ (نمایی).

اما پیچیدگی یک مساله تصمیم، کمترین زمان اجرایی بین همه الگوریتم های حل شده است که تابعی از اندازه مساله است. بعداً مفصل راجع به آن صحبت می کنیم.

ب.۲. بهبود پیچیدگی یک برنامه

الگوریتم ها بر دو مبنای صرفه جویی در زمان و صرفه جویی در هزینه استفاده از حافظه استوارند که اولی تحت عنوان پیچیدگی زمانی و دومی تحت عنوان پیچیدگی حافظه از آن یاد می شود که به ترتیب

هر دو مستقل از سخت افزار و نوع زبان برنامه نویسی است و براین اصل استوار است که دستور کلیدی الگوریتم (دستوری که در تمام تکرارهای الگوریتم وجود دارد) به ازای مقادیر گوناگون پارامتر ورودی در بدترین حالت، بهترین حالت و یا به طور متوسط، چند بار اجرا می شوند و یا چه میزان حافظه را به خود تخصیص می دهند. روش های گوناگونی طراحی شدند که با کمک آنها، می توان الگوریتم هایی بنویسیم و براساس آنها برنامه نویسی کنیم تا بهترین کارایی از لحاظ پیچیدگی زمانی و مکانی حاصل شود که روش های زیر از جمله مهمترین آنهاست که در کتاب طراحی الگوریتم مورد بحث قرار گرفته اند.

- روش تقسیم و غلبه
- برنامه نویسی پویا
- روش حریصانه
- روش عقب گرد
- روش شاخه و حد

ب.۳ الگوریتم کارآمد

در نظریه پیچیدگی محاسباتی، ما به دنبال جواب این سوال هستیم که برای حل یک تکلیف، تعداد منابع محاسباتی مورد نیاز چقدر است؟ محاسبات به مجموعه فرایندهای تولید یک خروجی از یک مجموعه از ورودی در تعداد گام های متناهی گفته می شود. مثال های زیر تکالیف محاسباتی هستند.

- محاسبه حاصلضرب دو عدد صحیح
- پیدا کردن یک راه حلی برای یک مجموعه از n معادله های خطی با n متغیر
- ما می خواهیم در یک مهمانی دوستانی را دعوت کنیم که هیچ دو نفری از آنها با هم صحبت نمی کنند. پیدا کردن راه حلی که شامل بزرگترین مجموعه از این افراد باشد
- فرض کنید که ما می خواهیم دو عدد صحیح را با هم ضرب کنیم. دو مدل یا الگوریتم متفاوت برای انجام این کار وجود دارد.

۱. تکرار جمعی: برای محاسبه $a.b$ ، a را $b - 1$ بار به خودش اضافه می کنیم.

۲. الگوریتم مدرسه ابتدایی:

			5	7	7
			4	2	3
		1	7	3	1
	1	1	5	4	
2	3	0	8		
2	4	4	0	7	1

شکل ب.۱۰: الگوریتم مدرسه ابتدایی

برای حاصل ضرب دو عدد ۵۷۷ و ۴۲۳ با الگوریتم اول، ما به ۴۲۲ عمل جمعی نیاز داریم در حالیکه با الگوریتم دوم، ما فقط برای یک رقم به ۳ عمل ضرب و ۳ عمل جمع نیاز داریم. برای سنجش کارایی الگوریتم ها، تعداد عملگرهای پایه ای اجرا شده در هر الگوریتم را محاسبه می کنیم. برای ضرب دو n -رقم، تعداد عملگرهای پایه ای مورد استفاده با الگوریتم اول حداقل n^{n-1} و با الگوریتم دوم حداکثر $2n^2$ است. بنابراین زمان اجرای محاسباتی الگوریتم دوم کمتر است پس الگوریتم دوم کارایی بهتری در مقابل الگوریتم اول دارد. اما ۴۰ سال پیش الگوریتم تغییر شکل یافته فوریه ای ارائه شد که سریعتر از الگوریتم دوم اجرا می شد برای ضرب دو n -رقم، تعداد عملگرهای مورد استفاده $cn \log n$ است که c یک مقدار ثابتی است که مستقل از n می باشد (الگوریتم تغییر یافته فوریه الگوریتمی با $O(n \log n)$ مرحله است). برای حل n معادله های خطی با n متغیر، تعداد عملگرهای پایه ای حسابی با الگوریتم حذف گوس $O(n^3)$ است. در سال ۱۹۶۰، استراسن الگوریتمی با تعداد عملگرهای $O(n^{2.81})$ ارائه داد که کارایی بهتری نسبت به الگوریتم حذفی گوس داشت. در حال حاضر تعداد عملگرهای بهترین الگوریتم برای حل n معادله با n متغیر، $O(n^{2.376})$ است. یک الگوریتم بسیار ساده اما ناکارآمد برای حل مساله مهمانی این است که تمام زیرمجموعه های ممکن از n فرد را از بزرگ به کوچک می نویسیم و وقتی زیرمجموعه ای پیدا کردیم که در آن دو فرد دعوت شده با هم صحبت نمی کردند راه حل را متوقف می کنیم. تعداد زیر مجموعه های یک گروه با n نفر، 2^n است پس این الگوریتم زمان زیادی را برای حل این مساله نیاز دارد. تا به حال الگوریتم بهتری برای حل این مساله ارائه نشده است. بعلاوه این مساله هم ارزش با مساله مجموعه مستقل است که با هزاران مسائل دیگر NP-complete هستند. جدول (ب.۲)، نشان می دهد که نوشتن الگوریتم هایی با درجه پیچیدگی پایین تا چه اندازه می توانند مفید باشند. در سال ۱۹۳۰ کشف شد که تمام مدل های محاسباتی شناخته شده، قادر به شبیه سازی هستند بنابراین مجموعه مسائل محاسبه پذیر بستگی به مدل محاسباتی ندارند. به نظر می رسد که ماشین تورینگ قادر به شبیه سازی مدل های محاسباتی است که کارآمد هستند بنابراین مجموعه مسائل محاسبه پذیر کارا حداقل به بزرگی ماشین تورینگ هستند.

Time complexity function	Size n					
	10	20	30	40	50	60
n	.00001 second	.00002 second	.00003 second	.00004 second	.00005 second	.00006 second
n^2	.0001 second	.0004 second	.0009 second	.0016 second	.0025 second	.0036 second
n^3	.001 second	.008 second	.027 second	.064 second	.125 second	.216 second
n^5	.1 second	3.2 seconds	24.3 seconds	1.7 minutes	5.2 minutes	13.0 minutes
2^n	.001 second	1.0 second	17.9 minutes	12.7 days	35.7 years	366 centuries
3^n	.059 second	58 minutes	6.5 years	3855 centuries	2×10^8 centuries	1.3×10^{13} centuries

شکل ب.۲: مقایسه پیچیدگی زمانی الگوریتم ها

ب.۴ تبدیل مسائل محاسباتی به مسائل بولی

در این قسمت می خواهیم در مورد پیچیدگی محاسباتی یک تابعی صحبت کنیم که ورودی و خروجی آن رشته هایی از بیت های متناهی هستند. (یک رشته از بیت ها، یک دنباله متناهی از صفرها و یک هاست) مجموعه تمام رشته های به طول n را با $\{0, 1\}^n$ نشان می دهند. مجموعه تمام رشته ها را با $\{0, 1\}^* = \bigcup_{n \geq 0} \{0, 1\}^n$ نشان می دهند. می توان با کدگذاری های ساده، اشیاء را به صورت رشته هایی از بیت ها بیان کرد. برای مثال برای نمایش اعداد صحیح می توانیم از بسط دودویی استفاده کنیم (۱۰۰۰۱۰ → ۳۴). یک گراف را می توان با ماتریس مجاورتش نمایش داد (یک گراف n راسی G را می توان به صورت ماتریس $n \times n$ نمایش داد که درایه های ماتریس A صفر و یک هستند بطوریکه $A_{i,j} = 1$ اگر و تنها اگر یال (i, j) در گراف G باشد). یک حالت بسیار مهم نگاشت توابع از رشته به رشته، توابع بولی هستند که خروجی شان یک بیت تنهاست. ما این تابع f را به صورت مجموعه $L_f = \{x : f(x) = 1\}$ نشان می دهیم که به این مجموعه، زبان ها یا مسائل تصمیم می گویند. ما مساله محاسباتی محاسبه f (برای x داده شده، $f(x)$ را محاسبه می کند) را با مساله تصمیم زبان L_f نشان می دهیم (برای x داده شده آیا $x \in L_f$ ؟).

ب.۵. ماشین تورینگ

ماشین تورینگ یک مدل محاسباتی است که برحسب قوانینی داده ها را کد می کند و روی نوار قرار می دهد. این نوارها به المان هایی تقسیم شدند. ماشین های تورینگ به دو نوع قطعی^۱ و غیرقطعی^۲ تقسیم می شوند. در ماشین تورینگ قطعی همیشه در n مرحله الگوریتم به پایان می رسد و همیشه یک جواب بدست می آورد در این الگوریتم ها $f(n)$ مرحله اجرا می شود. بنابراین ماشین تورینگ فقط توانایی اجرای دستورهای معین و قطعی را دارد. یک مجموعه از توابع محاسبه پذیر است اگر یک ماشین تورینگ قطعی آن را محاسبه کند. اما در الگوریتم های غیرقطعی با $f(n)$ مرحله، ممکن است در هر اجرای متفاوت نتایج یکسانی را ندهد. این الگوریتم ها ممکن است هیچوقت به پایان نرسند. به عبارت دیگر یک ماشین تورینگ غیرقطعی است اگر در هر مرحله ای از محاسبات، به غیر از حالت بعدی یکتایی که در محاسبه ماشین تورینگ قطعی بود، یک مجموعه از حالت های ممکن بعدی باشد. یعنی به غیر از مسیر محاسباتی یکتایی که در محاسبه مساله با ماشین تورینگ قطعی بود، یک مجموعه از مسیرهای محاسباتی ممکن داشته باشیم. بنابراین ماشین تورینگ غیر قطعی افزون بر توانایی اجرای دستورهای معین و قطعی، قادر است برخی دستورهای نامعین را نیز اجرا کند. یک دستور نامعین، دستوری است که نتیجه اجرای آن از قبل قابل پیش بینی نیست. الگوریتم هایی که برای یک کامپیوتر نامعین طراحی می شوند الگوریتم های نامعین نامیده می شوند. برای مثال تشخیص اول یا اول نبودن یک عدد طبیعی، مرتب کردن اطلاعات و صدق پذیری نمونه هایی از مسائلی هستند که می توان الگوریتم های نامعین ساده ای برایشان طراحی کرد. در شکل (ب.۳)، مراحل اجرای ماشین تورینگ قطعی و غیرقطعی را نشان می دهد.

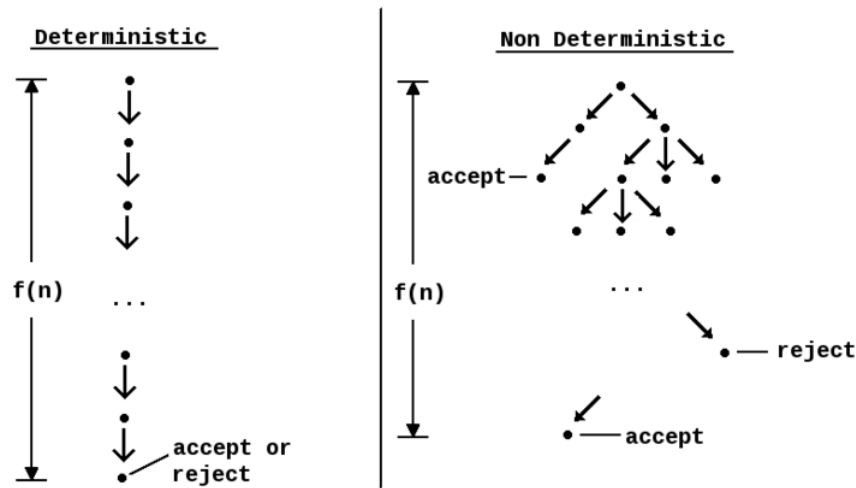
ب.۶. مسائل تصمیم

مسائل تصمیم، مسائلی هستند که ورودی $x \in \{0, 1\}^*$ و خروجی آن ها یک مقدار بولی (بله یا خیر) است به عبارت دیگر خروجی این دسته از مسائل یک بیت تنهای صفر یا یک است. برای مثال مساله ۳-رنگ آمیزی در گراف در این مساله تصمیم اینگونه بیان می شود که آیا یک الگوریتمی وجود دارد که رنگ های $\{1, 2, 3\}$ را به هر راس اختصاص دهیم بطوریکه هیچ دو راس مجاوری رنگ یکسانی نداشته باشند؟ از این مساله فقط می توان خروجی بله یا خیر را انتظار داشت. کلاس های این مساله تصمیم بصورت زیر هستند.

P: مسائلی که برای حل آنها الگوریتم یا الگوریتم هایی با مرتبه زمانی چند جمله ای یافت شده است
 کلاس الگوریتم های معین یا الگوریتم های قطعی را تشکیل می دهند این کلاس را با علامت P

^۱Deterministic

^۲Nondeterministic



شکل ب.۳: الگوریتم قطعی و غیرقطعی

نشان می دهند. الگوریتم هایی که برای کامپیوترهای رایج طراحی می گردند الگوریتم های معین نامیده می شوند در این الگوریتم ها نتیجه هر عمل کاملاً مشخص، معین و قطعی است. P کلاس کلیه مسائل تصمیم گیری است که برای حل آنها الگوریتم معین با مرتبه زمانی چند جمله ای وجود دارد. به بیان دیگر P به دسته ای از مسائل گفته می شود که هم چک کردن جواب و هم پیدا کردن جواب در زمان چندجمله ای مشخص (قطعی) رخ خواهد داد. در بدترین حالت پیچیدگی زمانی الگوریتم های این دسته از مسائل، تابعی چندجمله ای از اندازه ورودی هستند.

NP : مسائلی که اگر بخواهیم یک جواب را چک کنیم این چک کردن توسط ماشین تورینگ در زمان چندجمله ای قابل حصول است ولی اگر بخواهیم جواب مساله را بدست بیاوریم (احتمالاً تک تک چک می کنیم) مشخص نیست (غیر قطعی) که در زمان چندجمله ای به جواب برسیم یا نه؟ به عبارت دیگر این دسته از مسائل در زمان چندجمله ای با ماشین تورینگ غیرقطعی حل می شود. ساده ترین مجموعه از این کلاس، مجموعه P است یعنی این دسته از مسائل در زمان چندجمله ای حل می شوند. از طرفی هر الگوریتم معین توسط یک کامپیوتر نامعین قابل اجراست پس P زیرمجموعه NP است. محققین زیادی سعی کرده اند ثابت کنند که $P=NP$ است اما تا به حال کسی نتوانسته آن را اثبات کند. اگر $P=NP$ باشد یعنی می توان برای هر مساله ای که برای آن الگوریتم نامعین با مرتبه زمانی چندجمله ای وجود دارد، یک الگوریتم معین با مرتبه زمانی چندجمله ای پیدا کرد.

یک مساله NP -hard است اگر یک الگوریتم زمان-چندجمله ای برای این مساله، بتواند یک الگوریتم زمان-چندجمله ای برای هر مساله ای NP بسازد. مساله NP -hard حداقل به سختی، سخت ترین مسائل NP هستند. به بیان دیگر یک مساله H ، NP -hard است اگر هر مساله L در NP بتواند در زمان چندجمله ای به H کاهش یابد.

یک مساله NP-complete است اگر یک مساله NP-hard باشد و این مساله متعلق به کلاس NP باشد. سخت ترین مسائل مجموعه NP (به لحاظ زمانی) مجموعه NP-complete هستند. در این مسائل تا به حال الگوریتم شناخته شده قابل اجرا در زمان چندجمله ای برایشان ارائه نشده و معمولاً حد پایین نمایی برای زمان حل آنها تعریف می شود. اغلب مسائل مجموعه NP، در مجموعه NP-complete قرار دارند. به عنوان مثال، اگر شما پسورد ایمیلتان را وارد کنید با یک مساله ای از نوع P سرو کار دارید ولی اگر پسورد ایمیلتان را ندانید و بخواهید یکی یکی امتحان کنید با یک مساله از نوع NP-complete طرف هستید.

اگر نتوانستیم پیچیدگی الگوریتم را با ابزارها و ماشین تورینگ محاسبه کنیم، می توانیم مسائل بزرگتر را به مسائلی با کلاس پیچیدگی معلوم کاهش دهیم یعنی ساختار یک مساله بزرگتر که پیچیدگی مشخصی دارد را به مساله کوچکتر تقلیل بدهیم به طوریکه تناظر یک به یک برقرار باشد. یک تبدیل از مساله A به مساله B، یک فرایندی است که مثال A به مثال B تبدیل می شود پس جواب A در حالت کلی جوابی از B در مثال تبدیلی است. اگر ما یک تبدیل (زمان چندجمله ای) مناسب از A به B داشته باشیم و همچنین یک الگوریتم مناسب برای B داشته باشیم آنگاه یک الگوریتم مناسب برای A خواهیم داشت در این حالت می گوئیم A به B کاهش یافته و یا تبدیل شده است. اگر مساله A به مساله B کاهش یابد و مساله B در زمان P حل شود آنگاه می توان گفت که مساله A هم در زمان P قابل حل است. بعلاوه اگر مساله A به مساله B کاهش یابد و مساله A در زمان P حل نشود می توان نتیجه گرفت که مساله B هم در زمان P حل نخواهد شد. اگر A در NP-hard باشد و توانسته باشیم با یک تبدیل زمان چندجمله ای، A را به B کاهش دهیم آنگاه B یک مساله NP-hard است (یک الگوریتم چندجمله ای برای B، یک الگوریتم چندجمله ای برای A نتیجه دهد).

co-NP: یک مساله تصمیم x ، یک عضوی از co-NP است اگر و فقط اگر $\bar{x}$ در کلاس پیچیدگی NP باشد. به بیان ساده تر co-NP کلاسی از مسائل تصمیم هستند که مثال های برای رد آنها وجود دارد این مثال ها توسط ماشین تورینگ غیرقطعی در زمان چندجمله ای قابل اجرا هستند. اغلب به این مثال ها counterexamples می گویند. دانستن اینکه عددی مرکب است یا نه، یک مساله NP است یعنی زمانی که یک عدد بخش پذیر بود الگوریتم قطع می شود. ولی مساله دانستن اینکه عددی اول است یا نه، یک مساله co-NP است چون در نهایت جواب نه باید بدهد یعنی تمام اعداد را بایستی چک کند تا جواب نه را بدهد (عدد بخش پذیری وجود ندارد) پس کلاس co-NP سخت تر از کلاس NP است.

می توان این تعاریف را بگونه ای دیگر هم بیان کرد. مساله ای بغرنج^۳ است که حل آن، توسط الگوریتمی با زمان چندجمله ای غیرممکن باشد. بحث G برسر خود مساله است و نه الگوریتم حل مساله. ممکن

^۳Intractable

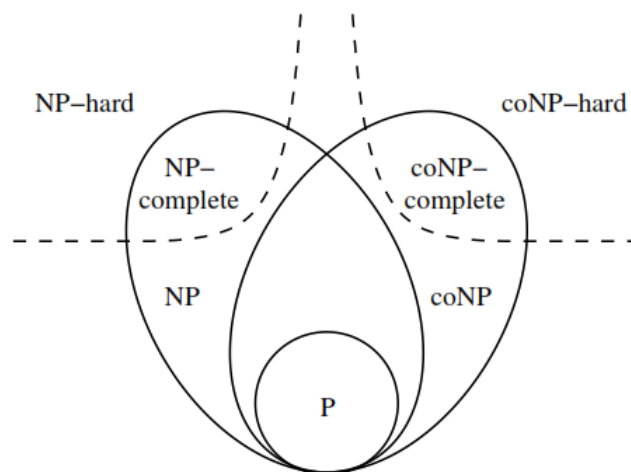
است برای حل مساله، الگوریتم های متعددی با زبان های مختلف وجود داشته باشد مثلاً حل مساله سری فیبوناچی با روش تقسیم و حل از مرتبه نمایی و با روش پویا از مرتبه خطی است، پس مساله فیبوناچی از نوع بغرنج نیست. برای آنکه مساله ای بغرنج باشد باید ثابت کرد که هیچ الگوریتمی با مرتبه چندجمله ای برای آن وجود ندارد. از نظر بغرنج بودن یا نبودن مسائل علوم کامپیوتر به سه دسته تقسیم می شوند.

P: مسائلی که الگوریتم هایی با پیچیدگی زمانی چندجمله ای برای آنها پیدا شده است.

NP: مسائلی که اثبات شده که بغرنج هستند یعنی الگوریتم چندجمله ای برای آن یافت نمی شود.

co-NP: مسائلی که بغرنج بودن آنها ثابت نشده ولی هیچ الگوریتم چندجمله ای هم برای آنها پیدا نشده است.

مثلاً جستجوی دودویی در آرایه مرتب $(\theta(\log n))$ ، مساله مرتب سازی آرایه $(\theta(n \log n))$ ، ضرب زنجیره ای ماتریسها $(\theta(n^3))$ ، مساله کوتاهترین مسیر فلویید $(\theta(n^3))$ ، درخت دودویی بهینه $(\theta(n^3))$ و مساله درخت پوشای کمینه پریم $(\theta(n^2))$ همگی از نوع دسته اول هستند. شکل زیر روابط بین هر کلاس پیچیدگی زمانی را نسبت به هم نشان می دهد.



شکل ب.۴: کلاس های پیچیدگی زمانی

پیوست پ

پیشنهادات

۱. [۴۷] عدد گراندی گراف مثلث-آزاد P_5 -آزاد را محاسبه کنید؟
۲. [۴۷] فرض کنید G یک گراف و $c > 1$ یک مقدار ثابت باشد، پیچیدگی مساله $\Delta(G) + 1 \leq c\omega(G)$ را محاسبه کنید؟
۳. [۴۷] یک الگوریتم تقریبی با ضریب ثابت برای عدد گراندی گراف ارائه دهید و یا نشان دهید که هیچ الگوریتمی وجود ندارد مگر اینکه $P=NP$ باشد؟
۴. [۴۷] پیچیدگی محاسباتی عدد گراندی گراف دوبخشی کوردال را محاسبه کنید؟
۵. [۴۷] پیچیدگی $\Gamma(G) \geq k$ را برای پارامتر k محاسبه کنید؟
۶. [۲] آیا برای $k \geq 1$ رابطه $\Gamma(G) \leq \Delta(G) + 1 - K$ برقرار است؟
۷. [۲] اگر G و H دو گراف و $\Gamma(H) = k$ باشد. آیا رابطه $\Gamma(G \times H) \geq \Gamma(G \times K_k)$ برقرار است؟
۸. [۵۵] آیا کران پایین بهتری نسبت به $\Omega(\frac{n^{\frac{1}{\sqrt{t}-1}}}{\ln n})$ برای عدد گراندی گراف های n راسی که دوری به طول $\sqrt{t}$ ندارند وجود دارد؟
۹. [۵۵] درستی یا نادرستی رابطه زیر را نشان دهید؟
$$\max\{\chi_{FF}(G) : |G| = n, eg(G) = \sqrt{t} + \sqrt{t}\} \geq \max\{\chi_{FF}(G) : |G| = n, C_{\sqrt{t}} \subsetneq G\}$$
۱۰. [۵۵] اگر $g \geq 5$ و $k = \lfloor \frac{g-1}{4} \rfloor$ باشد آیا $\Gamma(n, g) = \Omega(kn^{\frac{1}{k}})$ است؟

مراجع

- [1] Asratian, A. S., Denley, T. M., & Häggkvist, R. (1998). Bipartite graphs and their applications (No. 131). Cambridge University Press.
- [2] Asté, M., Havet, F., & Linhares-Sales, C. (2010). Grundy number and products of graphs. *Discrete Mathematics*, 310(9), 1482-1490.
- [3] Asté, M., Havet, F., & Sales, C. L. (2008). Grundy number and lexicographic product of graphs. In *Proceedings of International Conference on Relations, Orders and Graphs and their Interaction with Computer Science (ROGICS 2008)* (p. 9).
- [4] Arora, S., & Barak, B. (2009). Computational complexity: a modern approach. Cambridge University Press.
- [5] Balogh, J., Hartke, S. G., Liu, Q., & Yu, G. (2008). On the first-fit chromatic number of graphs. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 22(3), 887-900.
- [6] Bartnicki, T., Grytczuk, J., Kierstead, H. A., & Zhu, X. (2007). The map-coloring game. *The American Mathematical Monthly*, 793-803.
- [7] Brooks, R. L. (1941, April). On colouring the nodes of a network. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* (Vol. 37, No. 02, pp. 194-197). Cambridge University Press.
- [8] Campos, V., Gyárfás, A., Havet, F., Sales, C. L., & Maffray, F. (2012). New bounds on the Grundy number of products of graphs. *Journal of Graph Theory*, 71(1), 78-88.
- [9] Campos, V., Sales, C. L., Maia, K., Martins, N., & Sampaio, R. (2011). Restricted coloring problems on graphs with few. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 37, 57-62.
- [10] Caro, Y., Sebo, A., & Tarsi, M. (1996). Recognizing greedy structures. *Journal of Algorithms*, 20(1), 137-156.
- [11] Chow, F., & Hennessy, J. (1984, June). Register allocation by priority-based coloring. In *ACM Sigplan Notices* (Vol. 19, No. 6, pp. 222-232). ACM.

- [12] Chow, F. C., & Hennessy, J. L. (1990). The priority-based coloring approach to register allocation. *ACM Transactions on Programming Languages and Systems (TOPLAS)*, 12(4), 501-536.
- [13] Christen, C. A., & Selkow, S. M. (1979). Some perfect coloring properties of graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 27(1), 49-59.
- [14] Clark, J., & Holton, D. A. (1991). *A first look at graph theory* (Vol. 1). Teaneck, NJ: World Scientific.
- [15] D.B. West, *Introduction to graph theory*, Prentice Hall, 2000.
- [16] Dailey, D. P. (1980). Uniqueness of colorability and colorability of planar 4-regular graphs are NP-complete. *Discrete Mathematics*, 30(3), 289-293.
- [17] Diestel, R. (2000). *Graph theory graduate texts in mathematics*; 173. Springer-Verlag Berlin and Heidelberg GmbH & amp.
- [18] de Werra, D. (1985). An introduction to timetabling. *European Journal of Operational Research*, 19(2), 151-162.
- [19] Erdős, P., Hedetniemi, S. T., Laskar, R. C., & Prins, G. C. (2003). On the equality of the partial Grundy and upper ochromatic numbers of graphs. *Discrete mathematics*, 272(1), 53-64.
- [20] Erdős, P., Hare, W. R., Hedetniemi, S. T., & Laskar, R. (1987). On the equality of the Grundy and ochromatic numbers of a graph. *Journal of Graph Theory*, 11(2), 157-159.
- [21] Faigle, U., Kern, W., Kierstead, H., & Trotter, W. T. (1991). On the game chromatic number of some classes of graphs.
- [22] Füredi, Z., Gyárfás, A., Sárközy, G. N., & Selkow, S. (2008). Inequalities for the first-fit chromatic number. *Journal of Graph Theory*, 59(1), 75-88.
- [23] Gamst, A. (1986). Some lower bounds for a class of frequency assignment problems. *Vehicular Technology, IEEE Transactions on*, 35(1), 8-14.
- [24] Gardner, M. (1970). Mathematical games: The fantastic combinations of John Conway's new solitaire game "life". *Scientific American*, 223(4), 120-123.
- [25] González-Velarde, J. L., & Laguna, M. (2002). Tabu search with simple ejection chains for coloring graphs. *Annals of Operations Research*, 117(1-4), 165-174.
- [26] Goyal, N., & Vishwanathan, S. (1997). NP-completeness of undirected Grundy numbering and related problems. *Manuscript, Bombay*.

- [27] Grötschel, M., Lovász, L., & Schrijver, A. (2012). Geometric algorithms and combinatorial optimization (Vol. 2). Springer Science & Business Media.
- [28] Grundy, P. M. (1939). Mathematics and games. Eureka, 2(5), 6-8.
- [29] Guan, D. J., & Zhu, X. (1999). Game chromatic number of outerplanar graphs. Journal of Graph Theory, 30(1), 67-70.
- [30] Gyárfás, A., & Lehel, J. (1988). On-line and first fit colorings of graphs. Journal of Graph theory, 12(2), 217-227.
- [31] Gyárfás, A., Király, Z., & Lehel, J. (1997). On-line 3-chromatic graphs-II critical graphs. Discrete Mathematics, 177(1), 99-122.
- [32] Gyárfás, A., Király, Z., & Lehel, J. (1993). On-line graph colouring and finite basis problems. Combinatorics, Paul Erdos is eighty, Bolyai Math. Studies, 1, 207-214.
- [33] Halldórsson, M. M. (1993). A still better performance guarantee for approximate graph coloring. Information Processing Letters, 45(1), 19-23.
- [34] Hamiez, J. P., & Hao, J. K. (2002, January). Scatter search for graph coloring. In Artificial Evolution (pp. 168-179). Springer Berlin Heidelberg.
- [35] Havet, F., Kaiser, T., & Stehlik, M. Grundy number of the Cartesian product of a tree and a graph.
- [36] Havet, F., & Zhu, X. (2011). The game Grundy number of graphs.
- [37] Hedetniemi, S. M., Hedetniemi, S. T., & Beyer, T. (1982). A linear algorithm for the Grundy (coloring) number of a tree. Congr. Numer, 36, 351-363.
- [38] Holyer, I. (1981). The NP-completeness of edge-coloring. SIAM Journal on Computing, 10(4), 718-720.
- [39] J.A. Bondy and U.S.R. Murty, *Graph theory with applications*, Springer, 2008.
- [40] Jensen, T. R., & Toft, B. (2011). Graph coloring problems (Vol. 39). John Wiley & Sons.
- [41] Karp, R. M. (1972). Reducibility among combinatorial problems (pp. 85-103). springer US.
- [42] Kierstead, H. A., & Yang, D. (2005). Very asymmetric marking games. Order, 22(2), 93-107.
- [43] Kierstead, H. A., & Trotter, W. T. (1994). Planar graph coloring with an uncooperative partner. Journal of Graph Theory, 18(6), 569-584.

- [44] Lucet, C., Mendes, F., & Moukrim, A. (2006). An exact method for graph coloring. *Computers & operations research*, 33(8), 2189-2207.
- [45] Nordhaus, E. A., & Gaddum, J. W. (1956). On complementary graphs. *American Mathematical Monthly*, 175-177.
- [46] Saad, Y. (2003). *Iterative methods for sparse linear systems*. Siam.
- [47] Sampaio, L. (2012). *Algorithmic aspects of graph colourings heuristics* (Doctoral dissertation, Université Nice Sophia Antipolis).
- [48] Simmons, G. J. (1983). On the chromatic number of a graph. *Congr. Numer*, 40, 339-366.
- [49] Telle, J. A., & Proskurowski, A. (1997). Algorithms for vertex partitioning problems on partial k-trees. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 10(4), 529-550.
- [50] van Leeuwen, J. (1976). Having a Grundy-numbering is NP-complete.
- [51] Wu, J., & Zhu, X. (2008). Lower bounds for the game colouring number of partial k-trees and planar graphs. *Discrete Mathematics*, 308(12), 2637-2642.
- [52] Yannakakis, M., & Gavril, F. (1980). Edge dominating sets in graphs. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 38(3), 364-372.
- [53] Zaker, M. (2006). Results on the Grundy chromatic number of graphs. *Discrete Mathematics*, 306(23), 3166-3173.
- [54] Zaker, M. (2005). Grundy chromatic number of the complement of bipartite graphs. *Australas. J. Combin*, 31, 325-329.
- [55] Zaker, M., & Soltani, H. (2015). First-Fit colorings of graphs with no cycles of a prescribed even length. *Journal of Combinatorial Optimization*, 1-9.
- [56] Zhu, X. (2008). Refined activation strategy for the marking game. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 98(1), 1-18.
- [57] Zhu, X. (2000). The game coloring number of pseudo partial k-trees. *Discrete Mathematics*, 215(1), 245-262.
- [58] Zhu, X. (1999). The game coloring number of planar graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 75(2), 245-258.
- [59] Zhu, X. (2008). Game coloring the Cartesian product of graphs. *Journal of Graph Theory*, 59(4), 261-278.

- [60] Zuckerman, D. (2006, May). Linear degree extractors and the inapproximability of max clique and chromatic number. In Proceedings of the thirty-eighth annual ACM symposium on Theory of computing (pp. 681-690). ACM.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

الف

domination	احاطه‌گری
join	اتصال
induced	القا شده

ب

leaf	برگ
cycle-free	بدون دور

ت

matching	تطابق
perfect matching	کامل تطابق

خ

clique	خوشه
--------	------

د

degree	درجه
cycle	دور
tree	درخت

ر

support vertex	راس پشتیبان
isolated vertex	راس تنها
coloring	رنگ آمیزی
proper coloring	رنگ آمیزی سره
root	ریشه

ز

subdividing	زیرتقسیم
subtree	زیردرخت

زیرگراف subgraph
 زیرگراف القایی induced subgraph

ط

طوقه loop
 طول length

ع

عدد استقلال independence number
 عدد رنگی chromatic number

ف

فاصله distance

ک

کران بالا upper bound
 کمر girth

گ

گراف k -بخشی k-partite graph
 گراف k -بخشی کامل complete k-partite graph
 گراف k -منتظم k-regular graph
 گراف تهی empty graph
 گراف دوبخشی bipartite graph
 گراف دوبخشی کامل complete bipartite graph
 گراف ساده simple graph
 گراف کامل complete graph
 گراف مسطح خارجی outerplanar graph
 گراف مکمل complement graph
 گراف منتظم regular graph
 گراف نامتناهی infinity graph
 گراف ناهمبند disconnected graph
 گراف همبند connected graph

م

مجاور adjacent
 مجموعه مستقل independent set
 مسیر path

component مولفه

د

neighborhood همسایگی

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

A

adjacent مجاور

B

bipartite graph گراف دوبخشی

binomial tree درخت دودویی

C

chromatic number عدد رنگی

coloring رنگ آمیزی

complement graph گراف مکمل

complete bipartite graph گراف دوبخشی کامل

complete graph گراف کامل

complete k -partite graph گراف k -بخشی کامل

clique خوشه

component مولفه

connected graph گراف همبند

cycle دور

cycle-free بدون دور

colouring game بازی رنگ آمیزی

D

disconnected graph گراف ناهمبند

domination احاطه‌گری

distance فاصله

degree درجه

disjoint subgraphs زیرگراف های مجزا

E

edge.....	یال
empty graph	گراف تهی
F	
forest.....	جنگل
G	
girth.....	کمر
I	
independence number	عدد استقلال
independent set	مجموعه مستقل
induced subgraph	زیرگراف القایی
infinity graph	گراف نامتناهی
isolated vertex	راس تنها
K	
k-partite graph.....	گراف k -بخشی
k-regular graph.....	گراف k -منتظم
L	
length.....	طول
loop.....	طوقه
leaf.....	برگ
label.....	برچسب
M	
matching	تطابق
N	
neighborhood	همسایگی
O	
outerplanar graph.....	گراف مسطح خارجی
P	
path	مسیر
perfect matching	تطابق کامل
planar graph.....	گراف مسطح
proper coloring.....	رنگ آمیزی مجاز
product.....	حاصلضرب

R

regular graph گراف منتظم

root ریشه

radius شعاع

S

sharp دقیق

simple graph گراف ساده

subdividing زیرتقسیم

subgraph زیرگراف

support vertex راس پشتیبان

T

tree درخت

U

upper bound کران بالا

نمایه

ا	اصل لانه کبوتر، ۱۵	ش	شعاع، ۶۹
ب	بازی رنگ آمیزی اول - آلیس، ۲۹ بازی رنگ آمیزی حریصانه، ۳۱ بازی عدد رنگ آمیزی، ۳۰ بازی عدد رنگی اول - آلیس، ۲۹ بازی عدد گراندی، ۳۱ بازی نشانه گذاری، ۳۰ برچسب، ۷۰	ف	فاصله، ۶۹
پ	پشتیبان، ۷۱	ق	قانونی، ۲۹
ح	حاصلضرب القبایی، ۶۳ حاصلضرب دکارتی، ۶۳ حاصلضرب قوی، ۶۳ حاصلضرب مستقیم، ۶۳	م	مجموعه احاطه گریالی، ۵۶ مسیر، ۹
د	درخت- K ، ۴۴ درخت دودویی، ۶۹ دور، ۱۰	ن	نامعادله نردهوس-گادوم برای اعداد گراندی، ۵۸
ر	رنگ آمیزی جزیی، ۳۴ روش حریصانه، ۵۲ ریشه، ۶۹	T	t -اتم ها، ۵۳

Abstract

Given a graph $G = (V, E)$, a k -coloring of G is an assignment of k colors to the vertices of G in such a way that adjacent vertices have distinct colors. the chromatic number of G , $\chi(G)$, is the minimum integer k such that G admits a k -coloring. the problem of determining $\chi(G)$ is NP-hard. therefore the evaluation of the performance of fast vertex coloring algorithms is a relevant problem. the greedy coloring algorithm is a linear vertex coloring algorithm. given an order $\theta = v_1, \dots, v_n$ over V , the greedy algorithm to color the vertices of G assigns to v_i the minimum positive integer that was not already assigned to its neighbors in the set $\{v_1, \dots, v_{i-1}\}$. a coloring obtained by an execution of this algorithm is usually called as a greedy coloring. the maximum number of colors of a greedy coloring of a graph G , over all the orders θ of $V(G)$, is the Grundy number of G and it is denoted by $\Gamma(G)$.

In chapter 1, we review theory graph concepts that we need them in the future chapters. In chapter 2, we represent game Grundy number concepts in graphs and we prove some theorems about it. In chapter 3, we represent some results on Grundy number. In chapter 4, we represent some upper bounds for the Grundy number of product graphs.

Keywords: Greedy coloring , Grundy number , The game Grundy number , Product graphs .



Shahrood University of Technology
Faculty Of Mathematical Sciences

Dissertation Submitted in Partial
Fulfillment of The Requirements For The
Degree of Master of Science in
Applied Mathematics

Grundy number in graphs

Supervisor

Dr. Meysam Alishahi

by

Fatemeh Rezamohammadi

January 2016