



دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی کاربردی

پایان نامه کارشناسی ارشد

همگرایی بدون مش کالوکیشن برای معادلات سه‌موی تمام غیرخطی

هناز جوکار

استاد راهنما

دکتر علی مس فروش

استاد مشاور

دکتر مهدی قوتمند

دی ۱۳۹۴

بارالها...
از کوی تو بیرون نشود...
پای خیالم،
نکنند فرق به عالم...
چه برانی، چه بخوانی...
چه به اوجم برسانی...
چه به حاکم نشانی،
نه من آنم که بر نجم...
نه تو آنی که برانی...
نه من آنم که ز فیض نکست چشم پوشم،
نه تو آنی که کدرا نوازی به نگاهی...
در اگر باز نکرود...
ز روم باز به جانی،
پشت دیوار نشینم چو کدابر سر راهی...
کس به غیر از تو نخواهم...
چه خوابی چه خوابی،
باز کن در که جز این خانه مرا نیست پناهی.

خواجہ عبداللہ انصاری

تقدیم بابوسه به دستان استوارترین تکیه گاهانم، پدر فداکارم و مادر عزیزتر از جانم....

که هر آنچه آموختم در کتب عشق شما آموختم و هر چه بگو شتم قطره ای از دریای بی کران مهربانیان را
پاس نتوانم بگویم. امروز، مستی ام به امید شماست و فردا کلید باغ به شتم رضای شما... باشد که حاصل
تلاش من نیم کوزه، غبار خشکی تان را بزداید و گرنه به پاس زحمات شما جان را سزاوار است.

تقدیم به پناه خشکی هایم و امید بودم، همسر مهربانم...
او که اسوه صبر و تحمل بوده و مشکلات مسیر را برایم تسهیل نمود.

تقدیم به برادر هایم، همرازان، همیشگی زندگیم...
آنان که وجودشان باعث آرامش و اطمینان است.

پروردگارا، حسن عاقبت، سلامت و سعادت را برای آنان مقدر بفرما...

یارب این بنده چه داند که چه می باید جست

داننده تویی هر آنچه دانی ده

سپاس بی‌کران از آن پدر و مادرم که بودنشان تاج افتخاری است بر سرم و حاصل دستان خسته آن‌ها رمز موفقیت من شد. در کمال افتخار تشکر می‌کنم از نشانه‌ی لطف الهی در زندگیم، همسر مهربانم، که با صبرش در تمامی لحظات رفیق راه و سنگ صبورم بود. تشکر ویژه از برادرانم و همسران‌شان و پدر و مادر همسر عزیزم، بابت حضور پرمهرشان که مایه دلگرمی من بودند.

بدون شک زبان بنده، حقیرتر از آن است که بتوانم از استاد راهنمای با کمالات و اندیشمندم جناب آقای دکتر علی مس فروش تقدیر و تشکر کنم. چگونه سپاس گویم تاثیر علم آموزی شما را که چراغ روشن هدایت را بر کلبه‌ی محقر وجودم فروزان ساخت. آری در مقابل این همه عظمت و شکوه، مرا نه توان سپاس است و نه کلام وصف. باشد که برای سپاس ادای دین کنم و خواسته‌ی شما را جامه‌ی عمل ببوشانم. از استاد فرهیخته جناب آقای دکتر مهدی قوتمند که مشاور این بنده بودند و همچنین اساتید عزیز و شایسته جناب آقای دکتر حجت احسنی طهرانی و جناب آقای دکتر علیرضا ناظمی که زحمت داوری این پایان‌نامه را متقبل شدند کمال تشکر و سپاس را دارم. باشد که این خردترین بخش از زحمات آنان را سپاس گوید.

هناز جوکار
ذی ۱۳۹۴

تعمیر نامه

اینجانب بهناز جوکار دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی دانشکده علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان همگرایی بدون مش کالوکیشن برای معادلات سهموی تمام غیر خطی، تحت راهنمایی دکتر علی مس فروش متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های دیگر پژوهشگران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه صنعتی شاهرود “ یا “ Shahrood University Of Technology “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

بهناز جوکار
ذی ۱۳۹۴

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی باشد.

چکیده

در این پایان نامه اثبات همگرایی روش‌های بدون مش کالوکیشن برای مسائل مقدار نهایی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی سهموی خطی و تمام غیر خطی انجام می‌گیرد، که همگرایی جواب‌های چسبندگی^۱ را اثبات می‌کنیم. در این راستا ابتدا به بیان مفاهیم مقدماتی می‌پردازیم. خلاصه قضیه درونیابی بدون مش و روش کالوکیشن عمومی برای معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی سهموی را بیان می‌کنیم. فرضیات به‌طور دقیق بیان می‌شوند و به کمک آنها خاصیت همگرایی را ثابت می‌کنیم. در آخر مثالی عددی ارائه می‌شود، که با روش بدون مش کالوکیشن حل شده است.

کلمات کلیدی: توابع پایه‌ای شعاعی، روش‌های بدون مش، معادلات سهموی، جواب‌های چسبندگی.

^۱Viscosity

فهرست مطالب

خ	لیست تصاویر
۱	لیست جداول
۳	۱ مفاهیم مقدماتی
۳	۱.۱ تاریخچه
۳	۲.۱ مقدمه
۴	۱.۲.۱ شرایط مرزی و اولیه
۵	۳.۱ دسته‌بندی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی
۵	۱.۳.۱ معادلات سهمی
۵	۴.۱ روش‌های حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی
۶	۱.۴.۱ روش تفاضل متناهی
۶	۲.۴.۱ روش عناصر متناهی
۷	۵.۱ روش‌های بدون مش
۸	۱.۵.۱ دسته‌بندی روش‌های بدون مش
۱۳	۶.۱ تعاریف مقدماتی ریاضی
۱۹	۲ روش کالوکیشن بدون مش
۱۹	۱.۲ مقدمه
۱۹	۲.۲ هسته مثبت معین شرطی
۲۲	۳.۲ ساخت توابع شکل
۲۲	۱.۳.۲ روش درونیابی نقطه‌ای
۲۳	۲.۳.۲ روش درونیابی نقطه‌ای شعاعی
۲۶	۴.۲ شرایط مخروط درونی
۲۷	۵.۲ برآورد خطا
۳۱	۶.۲ روش کالوکیشن بدون مش

۳۳	همگرایی	۳
۳۳	مقدمه	۱.۳
۳۳	فرض‌ها	۲.۳
۳۶	همگرایی روش کالوکیشن بدون مش	۳.۳
۳۶	لم‌ها	۱.۳.۳
۴۸	اثبات همگرایی	۴.۳

۵۳	حل عددی	۴
۵۳	مقدمه	۱.۴
۵۳	روش‌های تبدیل معادلات غیر خطی به خطی	۲.۴
۵۳	تبدیل کول هوف	۱.۲.۴
۵۵	مثال	۳.۴
۵۵	حرکت براونی	۴.۴
۵۵	مقدمه	۱.۴.۴
۵۶	تعریف	۲.۴.۴
۵۶	روش مونت-کارلو	۵.۴
۵۷	حل مثال	۶.۴
۵۸	حل معادله به روش کالوکیشن	۱.۶.۴
۶۳	حل معادله به روش مونت-کارلو	۷.۴
۶۴	بررسی خطاها	۸.۴
۶۵	نتیجه‌گیری	۹.۴
۶۵	پیشنهاد برای کارهای آتی	۱۰.۴

۶۷	آ کد متلب	
----	-----------	--

۷۱	مراجع	
----	-------	--

۷۳	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی	
----	----------------------------	--

۷۷	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی	
----	----------------------------	--

لیست تصاویر

۸	مش مثلثی از المان‌ها با سلول‌های زمینه برای دامنه دوبعدی	۱.۱
۱۰	معرفی دامنه دوبعدی و گره‌ها در محمل دامنه وزنی منطقه‌ای	۲.۱
۲۴	مثلث پاسکال چندجمله‌ای‌ها برای دامنه دوبعدی	۱.۲
۵۹	تابع شکل روش درونیابی نقطه‌ای شعاعی در نقطه $(\frac{1}{5}, \frac{1}{5})$	۱.۴
۶۴	حل عددی با $N = 25$ و $h = 10^{-2}$	۲.۴
۶۵	حل تحلیلی با $N = 25$ و $h = 10^{-2}$	۳.۴

لیست جداول

۶۰	مقادیر تابع $f(x_{1j}, x_{2j})$ در محمل x شامل ۲۵ گره.	۱.۴
۶۱	مقادیر توابع v_{k+1}^h و $\tilde{F}_{k+1}(v_{k+1}^h)$ در نقطه (\circ, x_j) .	۲.۴
۶۲	مقادیر تابع v_k^h در نقطه (\circ, x_j) .	۳.۴
۶۵	خطاهای RMS و Max برای انتخاب‌های مختلف از N با $h = 10^{-2}$.	۴.۴

فصل ۱

مفاهیم مقدماتی

۱.۱ تاریخچه

در دهه ۱۹۵۰ روش عناصر متناهی مطرح شد. روش عناصر متناهی برای حل معادلات دیفرانسیل، حاصل از مدل‌سازی سیستم‌های مهندسی، روشی کارا و مناسب است. دامنه مساله با تعداد زیادی از عناصر با اشکال ساده که در نقاطی به نام گره به یکدیگر متصل شده‌اند، نشان داده می‌شود. تقریب به‌دست آمده به ویژگی‌ها و تعداد عنصر به‌کار رفته بستگی دارد و برای به‌دست آمدن نتایج دقیق با این روش باید تعداد عنصر بیشتری در نظر گرفته شود. ایجاد مش از اصلی‌ترین بخش‌های روش عناصر متناهی است. برای دسته خاصی از مسائل، استفاده از مش بندی منجر به پیچیدگی‌های زیادی می‌گردد. استفاده از روش عناصر متناهی در مسائلی که دارای تغییر شکل زیادی در دامنه هستند، به دلیل به هم خوردن عناصر، منجر به کاهش دقت خواهد شد.

بنابراین ایده روش‌های بدون مش [۱۵] به منظور رهایی از پیچیدگی‌های حاصل از اتصال بین گره‌ها مطرح شد، تا مشکلات ناشی از وجود مش را از بین ببرد. جذابیت اصلی روش‌های بدون مش در امکان به‌روز رسانی ساده آن‌ها است. در روش‌های بدون مش دامنه مساله با مجموعه‌ای از گره‌های پراکنده با توزیع دلخواه نمایش داده می‌شود. این گره‌ها احتیاج به هیچ ارتباط و اتصال با یکدیگر ندارند. بنابراین روش‌های بدون مش می‌توانند برای هر مساله یا ناحیه هندسی دلخواه با توزیع گره‌ها، مناسب باشند.

۲.۱ مقدمه

به معادله دیفرانسیلی که در آن مشتق تابع نسبت به متغیرهای گوناگون وجود داشته باشد، معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی می‌گوییم. یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی به شکل (۱.۱) است،

$$F(x, y, \dots, u_x, u_y, \dots, u_{xx}, u_{yy}, \dots) = 0, \quad (1.1)$$

که شامل متغیرهای x, y, \dots و تابع u از این متغیرها و مشتقات جزئی $u_x, u_y, \dots, u_{xx}, u_{yy}, \dots$ می‌باشد. تفاوت معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی و معادله دیفرانسیل معمولی در این است که در معادله دیفرانسیل معمولی مشتق فقط نسبت به یک متغیر ظاهر می‌شود، ولی در معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی مشتق نسبت به چند متغیر وجود دارد. مرتبه یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی برابر با بالاترین مشتق جزئی موجود در معادله است.

۱.۲.۱ شرایط مرزی و اولیه

تعیین جواب معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی نیاز به داشتن اطلاعات بیشتری از معادله دارد، که به آن شرایط مرزی می‌گویند و با تحلیل فیزیکی مساله به دست می‌آید. شرایط مرزی دارای انواع گوناگونی هستند،

(۱) شرط مرزی دیریکله^۱

$$u(x_0, t) = \alpha(t).$$

(۲) شرط مرزی نویمن^۲

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, t) = \beta(t).$$

(۳) شرط مرزی رابین^۳

$$u(x_0, t) + h \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, t) = \gamma(t).$$

شرایط اولیه شرایطی هستند که مقدار معادله در زمان صفر را می‌دهند.

مثال

مساله زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} u_{xx} = u_t, & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u_x(0, t) = 0, & t > 0, \\ u_x(1, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = x^2(1-x)^2, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

معادله اول معادله دیفرانسیل جزئی است و معادله‌های باقی‌مانده شرایط مرزی و شرایط اولیه هستند.

^۱Dirichlet

^۲Neumann

^۳Robin

۳.۱ دسته‌بندی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی خطی مرتبه دوم به شکل زیر است،

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + h \frac{\partial u}{\partial x} + k \frac{\partial u}{\partial y} + eu + f = 0.$$

فرم مبین معادلات به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\Delta(x, y) = b^2(x, y) - 4a(x, y)c(x, y),$$

که از ضرایب a, b, c تشکیل شده است، به شکل زیر دسته‌بندی می‌شود.

برای هر $x, y \in \mathbb{R}$

۱. اگر $\Delta = 0$ معادله را سهموی^۴

۲. اگر $\Delta < 0$ معادله را بیضوی^۵

۳. اگر $\Delta > 0$ معادله را هذلولوی^۶

گوییم. بحث ما روی معادلات سهموی می‌باشد.

۱.۳.۱ معادلات سهموی

معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی سهموی به صورت زیر می‌باشد،

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + F = 0.$$

این نوع از معادلات دیفرانسیل در توصیف طیف گسترده‌ای از مسائل در علوم و مهندسی ظاهر می‌شوند. از معادله حرارت گرفته تا انتشار امواج صوتی در اقیانوس تا توصیف مدل‌های ریاضی و سیستم‌های فیزیکی وابسته به گذر زمان.

۴.۱ روش‌های حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی در مدل‌بندی پدیده‌های گوناگون طبیعی مانند: حرارت، موج و حرکت سیالات به کار می‌روند. با توجه به پیچیدگی این معادلات روش‌های تحلیلی محدودی برای حل دسته خاصی از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی وجود دارند (مانند روش سری فوریه و روش جداسازی متغیرها)، به همین دلیل امروزه روش‌های عددی به اصلی‌ترین ابزار برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی تبدیل شده‌اند. ایده کلی بیشتر روش‌های عددی حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات

^۴Parabolic

^۵Elliptical

^۶Hyperbolic

جزئی به این شکل است، که ابتدا دامنه پیوسته مساله، گسسته‌سازی می‌شود. سپس تابع مجهول با مشتقات آن با تکنیکی عددی تقریب زده می‌شوند. در حقیقت تفاوت بین روش‌های عددی مختلف از تفاوت آنها در نوع تقریب تابع مجهول یا مشتقات آن حاصل می‌شود. ترکیب گسسته‌سازی و تقریب باعث تبدیل معادله دیفرانسیل به یک دستگاه ماتریسی می‌شود، و با حل این دستگاه ماتریسی جواب معادله دیفرانسیل به دست می‌آید.

۱.۴.۱ روش تفاضل متناهی

یکی از روش‌های حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی روش تفاضل متناهی می‌باشد. در این روش دامنه را گسسته‌سازی کرده و به دنبال جواب در دامنه گسسته هستیم. سپس مشتقات تابع مجهول را با فرمول‌های حاصل از بسط تیلور تقریب می‌زنیم، تا دستگاه ماتریسی حاصل شود. در نهایت با حل دستگاه ماتریسی مقادیر تابع مجهول را در دامنه گسسته پیدا می‌کنیم. برتری اصلی این روش به دیگر روش‌ها سادگی و کم هزینه بودن آن است، اما ایراد بزرگ آن این است که روی دامنه‌های نامنظم دچار مشکل می‌شود.

۲.۴.۱ روش عناصر متناهی

یکی دیگر از روش‌های عددی حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی روش عناصر متناهی است. در این روش معادله دیفرانسیل به کمک انتگرال‌گیری به شکل ساده‌تری تبدیل می‌شود، که به "فرم ساده" معروف است. سپس تابع مجهول با جمع تعداد متناهی تابع مشخص (که توابع پایه‌ای نام دارند)، با ضرایب مجهول تقریب زده می‌شود. در واقع هدف ما یافتن ضرایب مجهول است تا تابع مجهول مشخص شود. در نهایت معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی به دستگاهی ماتریسی تبدیل می‌شود. با حل این دستگاه ماتریسی ضرایب مجهول و در نتیجه تابع مجهول مشخص می‌شوند. برتری اصلی این روش این است که روی دامنه‌های نامنظم به خوبی کار می‌کند، اما از روش قبل پیچیده‌تر و پرهزینه‌تر است.

بسیاری از مسائل فیزیکی که با استفاده از معادلات دیفرانسیل بیان می‌شوند، به صورت تحلیلی قابل حل نیستند و برای حل آنها باید از روش‌های عددی کمک گرفت.

در روش‌های عددی مانند: روش تفاضلات متناهی، عناصر متناهی و روش المان‌های مرزی قبل از هر کاری باید دامنه مساله را مشخص نمود. این روش‌ها به دلیل داشتن تئوری قوی و پایدار در حل مسائل جریان گرما، به طور گسترده از آنها استفاده می‌شود. به عنوان مثال در روش عناصر متناهی، ایده اولیه جایگزینی یک تابع تقریب به جای تابع جواب اصلی در هر المان است، اما تقسیم‌بندی کل دامنه به المان‌های به هم چسبیده، فرآیندی پیچیده و زمان‌بر است. علاوه بر آن بعضی از مسائل وجود دارند که تحلیل آنها به کمک روش المان محدود امکان‌پذیر نمی‌باشد. پس در حل این‌گونه مسائل روش‌های

بدون مش می‌توانند کارایی بیشتری داشته باشند. اخیراً روش‌های بدون مش [۱۵] برای حل این مسائل به‌کار می‌روند که دارای دقت بالایی می‌باشند. روش‌های بدون مش گوناگونی در زمینه‌های مختلف ارائه شده است. عدم نیاز به مش‌بندی دامنه محاسباتی خصوصیت اصلی این روش‌ها است. به‌طورکلی در روش‌های بدون مش، مانند روش المان محدود، بین گره‌ها از یک تابع تقریب استفاده می‌شود. به این منظور از تعدادی توابع پایه برای تخمین فاصله در بین گره‌ها، بر اساس مقادیر دقیق گره‌ها کمک گرفته می‌شود تا در نهایت تابع شکل تولید گردد. برای تولید تابع شکل روش‌های مختلفی وجود دارد که در حالت کلی به دو گروه تقسیم‌بندی می‌شوند: روش درونیابی نقطه‌ای^۷ و روش کمترین مربعات متحرک^۸. هر کدام از این روش‌ها از توابع پایه‌ای خاصی استفاده می‌کنند. با استفاده از این توابع پایه و دنبال کردن روند مشخصی در هر گروه، در نهایت توابع شکل تولید می‌گردند. این توابع متناسب با نوع تابع پایه‌ای به‌کار گرفته شده، دارای خصوصیات خاصی هستند.

۵.۱ روش‌های بدون مش

بیشتر پدیده‌ها در طبیعت مانند پدیده‌های مکانیکی، زمین‌شناسی، زیست‌شناسی یا شیمیایی را می‌توان به کمک معادلات جبری، معادلات دیفرانسیل و یا معادلات انتگرال توصیف کرد. ایده‌آل‌ترین حالت پس از مدل‌سازی زمانی رخ می‌دهد که جواب تحلیلی و دقیق معادلات به‌دست آید، ولی به دلیل پیچیدگی بسیاری از مسائل، تنها قادر به حل تحلیلی و دقیق برخی از این معادلات هستیم. ریاضی‌دانان برای حل این معادلات، روش‌های عددی گوناگونی برای حل تقریبی آن‌ها ابداع کردند. امروزه مهندسان و محققان علوم با بسیاری از این روش‌ها و تکنیک‌ها برای انواع مختلف مسائل آشنا می‌باشند. به دلیل پیشرفت سریع تکنولوژی محاسباتی و کامپیوتری، روش‌های شبیه‌ساز عددی با یک مسیر روبه‌کاهش، به‌عنوان ابزاری مهم برای حل مسائل پیچیده در مهندسی و علوم به‌کار می‌روند.

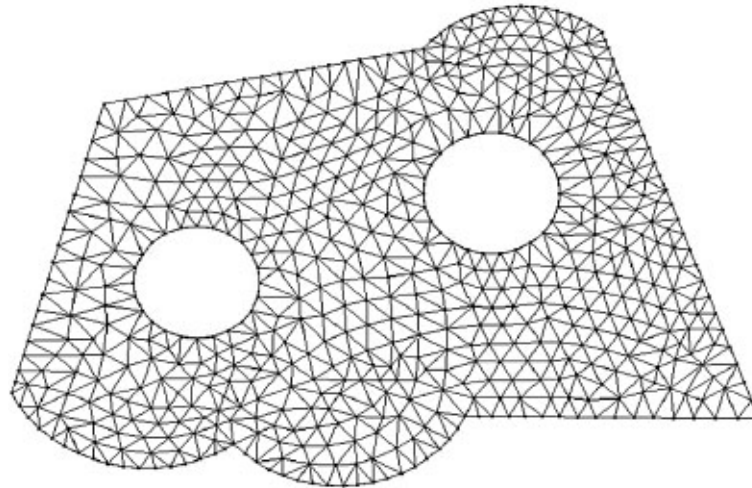
تعریف ۱.۵.۱. شبیه‌سازی عددی، تبدیل مساله‌ای پیچیده به شکل گسسته می‌باشد، به گونه‌ای که بتوان با کامپیوتر آن را حل کرد.

معادلات اصلی مساله به‌صورت مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیل معمولی، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی و معادلات انتگرالی بیان می‌شوند و شرایط مرزی و شرایط اولیه برای تکمیل معادلات اصلی به‌کار می‌روند. بنابراین برای حل یک مساله به روش عددی به‌طوری‌که نتایج حاصل به خوبی نمایانگر فیزیک مساله باشد، باید از روش عددی مناسب استفاده کنیم.

در روش عناصر متناهی توابع پایه‌ای بر اساس عناصر ساخته می‌شوند. این توابع برای عناصر یک شکل، یکسان می‌باشند. در حقیقت معرفی عنصر و ایجاد اتصال بین گره‌ها به منظور محاسبه تابع

^۷Point Interpolation Method

^۸Moving Least Square



شکل ۱.۱: مش مثلثی از المان‌ها با سلول‌های زمینه برای دامنه دوبعدی

پایه‌ای است. در حالی که در روش‌های بدون مش توابع پایه‌ای معمولاً به ازای یک نقطه دلخواه در دامنه تعریف می‌شوند. در روش عناصر متناهی، توابع پایه‌ای، عنصر به عنصر ساخته می‌شوند. توابع پایه‌ای در روش عناصر متناهی در هر گره تنها در همان گره مقدار یک می‌گیرند و در بقیه گره‌های متصل به آن صفر هستند. این ویژگی به خاصیت دلتای کرونکر معروف است. این ویژگی برای اعمال شرایط مرزی دیریکله بسیار مناسب است. این در حالی است که توابع پایه‌ای روش‌های بدون مش که از تقریب کمترین مربعات به دست می‌آیند، در برخی از ویژگی‌های توابع پایه‌ای عناصر متناهی مانند خاصیت افزایش یک^۹ مشترک هستند، اما کل روش‌های بدون مش خاصیت دلتای کرونکر روش عناصر متناهی را ندارند. در مورد تشکیل دستگاه معادلات در روش‌های بدون مش، باید گفت که دستگاه معادلات حاصل از این روش‌ها، اسپارس و نواری بودن مانند روش عناصر متناهی می‌باشد، ولی بسته به روشی که به کار گرفته می‌شود، می‌تواند برخلاف روش عناصر متناهی، نامتقارن باشد.

۱.۵.۱ دسته‌بندی روش‌های بدون مش

به‌عنوان اولین روش‌های بدون مش می‌توان روش گره‌ای، روش تفاضلات متناهی با مش‌های دلخواه و روش هیدرودینامیک ذرات هموار را معرفی کرد. در حالت کلی روش‌های بدون مش بر اساس سه عامل چگونگی فرمول‌بندی، نوع تقریب توابع و نوع نمایش دامنه در دسته‌های مربوط به خود قرار می‌گیرند [۱۵].

^۹Unity Partition

چگونگی فرمول‌بندی

در حالت کلی دو نوع فرمول‌بندی در روش‌های بدون مش وجود دارد: شکل قوی و شکل ضعیف. نوع اول بر اساس شکل قوی یا هم‌مکانی می‌باشد. در این روش معادلات اصلی مساله و معادلات مربوط به شرایط مرزی به طور مستقیم در گره‌ها توزیع شده و با استفاده از روش هم‌مکانی، گسسته‌سازی می‌شوند. به عنوان مثال‌هایی از این نوع می‌توان به روش تفاضلات متناهی تعمیم‌یافته، روش بدون مش هم‌مکانی و روش نقاط متناهی اشاره کرد. این روش‌ها الگوریتم ساده‌ای دارند و کاملاً بی‌نیاز از مش هستند، ولی این روش‌ها غالباً ناپایدار می‌باشند.

در نوع دوم، روش‌های بدون مش بر اساس شکل ضعیف هستند. در روش‌های شکل ضعیف معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی به انتگرال تبدیل می‌شود. روش‌های بدون مش زیادی در این نوع قرار می‌گیرند. از بهترین روش‌های این حالت می‌توان روش گالرکین بدون المان^{۱۰}، روش درونیایی نقطه‌ای شعاعی^{۱۱}، روش‌های درونیایی نقاط^{۱۲}، روش بدون مش پتروف-گالرکین منطقه‌ای^{۱۳} را نام برد [۱۵].

نوع تقریب توابع

در دسته‌بندی روش‌های بدون مش بر اساس نوع تقریب توابع سه دسته کلی وجود دارد:

۰۱. روش‌های مبتنی بر تقریب کمترین مربعات متحرک.

۰۲. روش‌های مبتنی بر نمایش انتگرالی.

۰۳. روش‌های مبتنی بر درونیایی نقاط.

دسته اول، بر اساس تقریب کمترین مربعات متحرک که در سال ۱۹۸۱ برای تقریب رویه‌ها و سطوح در برازش داده‌های پراکنده مطرح شد، عمل می‌کنند. در حقیقت تقریب کمترین مربعات متحرک، تقریبی پیوسته برای تابع مجهول می‌باشد. از روش‌های بدون مش که از این تقریب استفاده می‌کنند، می‌توان روش‌های المان پراکنده^{۱۴}، روش گالرکین بدون المان، روش بدون مش پتروف-گالرکین منطقه‌ای و روش گره‌های مرزی^{۱۵} را نام برد.

در دسته دوم، از شکل انتگرال برای تقریب تابع استفاده می‌شود. از جمله روش‌های این دسته، روش هیدرودینامیک ذرات هموار^{۱۶} و روش درونیایی نقطه‌ای شعاعی می‌باشند.

^{۱۰}Element Free Galerkin

^{۱۱}Radial Point Interpolation Method

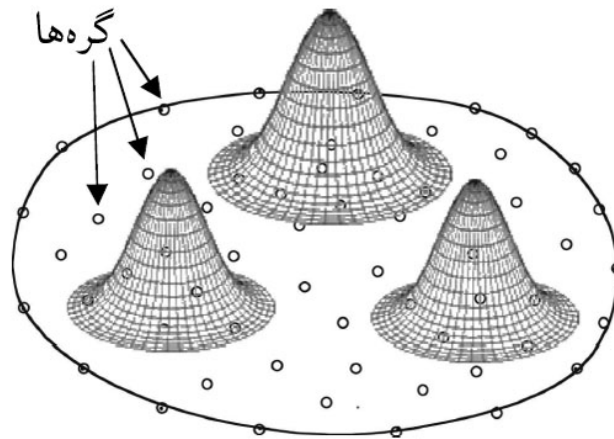
^{۱۲}Point Interpolation Method

^{۱۳}Meshless Local Petrov-Galerkin

^{۱۴}Diffuse Element Method

^{۱۵}Boundary Nodes Method

^{۱۶}Smoothed Particle Hydrodynamics



شکل ۲۰.۱: معرفی دامنه دوبعدی و گره‌ها در محمل دامنه وزنی منطقه‌ای

دسته سوم، روش‌های مبتنی بر روش درونیابی نقاط هستند. در این روش‌ها برای ساخت توابع شکل از درونیابی نقاط استفاده می‌شود و برخلاف روش تقریب کمترین مربعات متحرک، توابع شکل در آن‌ها دارای خاصیت دلتای کرونگر می‌باشند. در این روش‌ها پایه‌های مختلفی شامل پایه‌های چندجمله‌ای و توابع پایه‌ای شعاعی به کار می‌روند [۱۵].

نوع نمایش دامنه

روش‌های بدون مش بر اساس نمایش دامنه به دو دسته کلی تقسیم می‌شوند:

۱. روش‌های بدون مش از نوع دامنه.

۲. روش‌های بدون مش از نوع مرز.

در دسته اول، گره‌های تقریب روی مرز دامنه مساله توزیع می‌شوند. بنابراین هم گره‌های روی مرز و هم گره‌های داخل دامنه مساله برای تشکیل دستگاه و یافتن جواب مساله استفاده می‌شوند. روش گالرکین بدون مش و بسیاری از روش‌های دیگر در این دسته قرار می‌گیرند.

در روش‌های موجود در دسته دوم، تنها مرز مساله توسط گره‌های تقریب نمایش داده می‌شود و هیچ گره‌ای در دامنه مساله توزیع نمی‌شود. از جمله روش‌های موجود در این دسته می‌توان به روش‌های گره‌های مرزی، روش‌های معادله انتگرال مرزی منطقه‌ای^{۱۷} و روش‌های درونیابی نقاط مرزی شعاعی^{۱۸} اشاره کرد. در این پایان‌نامه به روش‌های عددی برای حل مسائل مقدار نهایی^{۱۹} معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

^{۱۷}Local Boundary Integral Equation

^{۱۸}Boundary Radial Point Interpolation Method

^{۱۹}Terminal Value Problem

سه‌می^{۲۰} (۲.۱) می‌پردازیم.

$$\begin{cases} -\partial_t v + F(t, x, v(t, x), Dv(t, x), D^2 v(t, x)) = 0, & (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d, \\ v(T, x) = f(x), & x \in \mathbb{R}^d, \end{cases} \quad (2.1)$$

جایی که $F: [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}$ پایه‌ای برای مجموعه‌ای از ماتریس‌های حقیقی متقارن $d \times d$ است. در این جا عملگر مشتقات جزئی نسبت به متغیر زمانی t را با ∂_t و همچنین در معادله (۲.۱) j امین مرتبه مشتق جزئی نسبت به متغیر x را با $D_x^j \equiv D^j$ نشان داده‌ایم.

مساله مقدار نهایی (۲.۱) بیشتر از مسائل احتمالی^{۲۱} ظاهر شده است. در نمونه‌های خطی جواب برای (۲.۱) به وسیله امید ریاضی^{۲۲} از فرآیند پخش^{۲۳} به دست می‌آید. روش‌های عددی موجود قابل اجرا برای (۲.۱) روش تفاضلات متناهی^{۲۴} [۲، ۱۱] هستند، مانند: عناصر متناهی^{۲۵} [۳، ۵] و روش‌های احتمالی [۷، ۱۲]. به علاوه این روش‌ها برای مسائل گوناگون با بعد بالا در فضا هم صدق می‌کنند، که هر کدام مانند کاربرد از (۲.۱) ظاهر شده است. برای مثال در روش تفاضلات متناهی، برای به دست آوردن همگرایی، ماتریس پخش همیلتون^{۲۶} باید به طور اکید قطری غالب^{۲۷} [۱۱] باشد. روش‌هایی مانند عناصر متناهی نیازمند به درونیابی جواب‌هایی در فضای نمونه است، که شرایط یکنوایی را حفظ می‌کند و به روش‌های محاسباتی پیچیده‌تری برای اجرای آن‌ها در مسائل با بعد بالا نیاز دارد [۴].

روش تفاضلات متناهی، المان‌های مرزی^{۲۸}، حجم‌های متناهی^{۲۹} و روش بدون مش^{۳۰} نمونه‌هایی از روش‌های حل عددی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی هستند. یکی از اولین روش‌های حل عددی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی روش تفاضلات متناهی است. استفاده از این روش برای حل بسیاری از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، با مشکلاتی مواجه است که از جمله می‌توان به پایداری محدود روش تفاضلات متناهی صریح، افزایش هزینه‌های محاسباتی در روش تفاضلات متناهی ضمنی، پیاده‌سازی مشکل برای مسائل غیر خطی و کاهش دقت در رویارویی با مرزهای نامنظم اشاره نمود.

دیگر شیوه‌های ممکن برای به دست آوردن جواب (۲.۱) توسط کانس^{۳۱} پیشنهاد شده است، که به عنوان

^{۲۰}Parabolic Partial Differential Equations

^{۲۱}Probabilistic Problems

^{۲۲}Expectation

^{۲۳}Diffusion Process

^{۲۴}Finite Difference Methods

^{۲۵}Finite Element

^{۲۶}Diffusion Matrix Hamiltonian

^{۲۷}Diagonally Dominate

^{۲۸}Boundary Element Method

^{۲۹}Finite Volume Method

^{۳۰}Meshfree Method

^{۳۱}Kansa

روش بدون مش کالوکیشن^{۳۲} مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این روش، به دنبال جوابی تقریبی به شکل ترکیب خطی از توابع پایه‌ای شعاعی^{۳۳} هستیم. جایگذاری این فرم از معادلات در معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی منجر به معادله‌ای برای نقاط کالوکیشن می‌شود. بنابراین جواب تقریبی به وسیله‌ی درونیابی^{۳۴} بدون مش از این نقاط کالوکیشن ساخته می‌شود. این روش، امکان اجرای عددی ساده با زمان به نسبت کمتر محاسباتی حتی برای مسائل با بعد بالا را به ما می‌دهد. همچنین برای همگرایی، هوانگ^{۳۵} و همکارانش [۸] به صورت عددی نشان دادند که مرتبه اول معادله‌ی همیلتون-ژاکوبی-بلمن^{۳۶} حالت خاصی از معادله (۲.۱) است. فرض می‌کنیم همگرایی دقیق روش کالوکیشن برای (۲.۱) ثابت شده است.

روش خلاصه پیشنهاد شده توسط بارلس^{۳۷} و سوگانیدیس^{۳۸} [۱]، ابزار مفیدی برای بررسی همگرایی جواب یکتای چسبندگی^{۳۹} خانواده‌ای مفروضی از توابع می‌باشد. به طور کلی گفتیم که اگر عملگری جواب‌های تقریبی ممکن را بسازد ویژگی‌های یکنواختی، پایداری و سازگاری را دارا می‌باشد، آنگاه به وسیله‌ی استدلال‌هایی در [۱] می‌توانیم به طور اساسی همگرایی‌اش را ثابت کنیم. در بحث ما، این روش پاسخگو نمی‌باشد و در یک روش جزئی زمانی که روش کالوکیشن شامل شرایط مشتق باشد شرایط یکنوایی منحل می‌شود. راهی برای غلبه کردن بر این مشکل لم (۴.۱) در کاهان^{۴۰} و سرفاتی^{۴۱} [۱۰] می‌باشد.

تعریف ۲.۵.۱. هر تابع Φ که ویژگی $\Phi(x) = \phi(\|x\|)$ را داشته باشد، یک تابع پایه‌ای شعاعی است.

$$y = g(x) = \sum_{i=1}^k \alpha_i G(\|x - t_i\|)$$

توابع پایه‌ای شعاعی گوناگونی وجود دارند، که در ادامه به معرفی برخی از آن‌ها می‌پردازیم.

(۱) توابع پایه‌ای شعاعی گاوسی^{۴۲} به صورت $\phi(r) = e^{-\alpha|r|^2}$ می‌باشد.

(۲) توابع پایه‌ای شعاعی چند ربعی^{۴۳} به صورت $\phi(r) = \sqrt{1 + (cr)^2}$ است.

^{۳۲} Collocation

^{۳۳} Radial Basis Function (RBF)

^{۳۴} Interpolation

^{۳۵} Huang

^{۳۶} Hamilton-Jacobi-Bellman

^{۳۷} Barles

^{۳۸} Souganidis

^{۳۹} Unique Viscosity

^{۴۰} Kohan

^{۴۱} Serfaty

^{۴۲} Gaussian RBF

^{۴۳} Multiquadrics RBF

(۳) توابع پایه‌ای شعاعی چند ربعی معکوس^{۴۴} به صورت $\phi(r) = \frac{1}{\sqrt{1+(cr)^2}}$ تعریف می‌شود.

(۴) توابع پایه‌ای شعاعی ربعی معکوس^{۴۵} به صورت $\phi(r) = \frac{1}{1+(cr)^2}$ می‌باشد.

(۵) توابع پایه‌ای شعاعی اسپلاین چند همساز^{۴۶} به صورت

$$\phi(r) = r^k, \quad k = 1, 3, 5, \dots \quad \phi(r) = r^k(\ln(r)), \quad k = 2, 4, 6, \dots$$

است.

(۶) توابع پایه‌ای شعاعی اسپلاین صفحه نازک^{۴۷} به صورت $\phi(r) = r^2 \ln(r)$ است، که نوع خاصی از تابع پایه‌ای شعاعی اسپلاین چند همساز می‌باشد.

قرارداد

در سراسر این پایان‌نامه برای $a = (a_i) \in \mathbb{R}^\ell$ و $\tilde{a} \in \mathbb{R}^{\ell_1 \times \ell_2}$ و $|a|$ و $|\tilde{a}|$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$|a| = \left(\sum_{i=1}^{\ell} a_i^2 \right)^{1/2}, \quad |\tilde{a}| = \sup_{y \in \mathbb{R}^{\ell_2} \setminus \{0\}} \frac{|\tilde{a}y|}{|y|}.$$

ترانهاده بردار یا ماتریس a را با a^T نشان می‌دهیم. مقدار ثابت مثبت را با c نشان داده که ممکن است با یکدیگر برابر نباشند. منظور از C_{k_1, \dots, k_ℓ} مقدار ثابت مثبت C است که فقط به پارامترهای k_1, \dots, k_ℓ وابسته می‌باشد.

۶.۱ تعاریف مقدماتی ریاضی

تعریف ۱.۶.۱. برای چند اندیشه^{۴۸} $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ از عدد صحیح نامنفی و تابع u ، $D^\alpha u(x)$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$D^\alpha u(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}},$$

که در آن $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$ [۱۶].

تعریف ۲.۶.۱. برای $m \in N$ مجموعه‌ای از تمام چند جمله‌ای‌های \mathbb{R}^ℓ -مقدار از درجه حداکثر m با $\Pi_m(\mathbb{R}^\ell)$ نشان داده می‌شود [۱۴].

^{۴۴}Inverse Multiquadratic RBF

^{۴۵}Inverse Quadratic RBF

^{۴۶}Polyharmonic Spline RBF

^{۴۷}Thin Plate Spline RBF

^{۴۸}Multiindex

تعریف ۳.۶.۱. تبدیل فوریه^{۴۹} [۱۶] برای $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ به شکل زیر تعریف می‌شود.

$$\hat{f}(x) := (\sqrt{2\pi})^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} f(\omega) e^{-ix^T \omega} d\omega.$$

تعریف ۴.۶.۱. فضای محلی^{۵۰} [۱۳] متناظر با هسته متقارن Φ که مثبت معین شرطی روی Ω می‌باشد، نسبت به ρ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\mathcal{N}_\Phi = R(F_\Phi(\Omega)) + \rho,$$

همراه با ضرب نیمه داخلی

$$(f, g)_{\mathcal{N}_\Phi(\Omega)} = (R^{-1}(f - \phi_\rho f), R^{-1}(g - \phi_\rho g))_\Phi.$$

تعریف ۵.۶.۱. ماتریس واندرموند^{۵۱} به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}, \quad \det V = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i), \quad i \neq j.$$

شایان ذکر است که دترمینان ماتریس واندرموند همواره مخالف صفر می‌باشد.

تعریف ۶.۶.۱. نامساوی $|x \cdot y| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ برقرار است. این نامساوی به نامساوی کوشی-شوارتز^{۵۲} موسوم است [۱۶].

تعریف ۷.۶.۱. تابع \mathbb{R} -مقدار وسیع شده‌ی f در نقطه‌ی x_0 ، شبه پیوسته‌ی بالایی^{۵۳} (پایینی)^{۵۴} گوئیم، اگر به طور تقریبی مقدار تابع برای آرگومان نزدیک x_0 یا برای $f(x_0)$ بسته یا کمتر از (بزرگتر از) $f(x_0)$ باشد، که از حالت پیوسته ضعیفتر است و ویژگی‌ای از جدا کردن تابع \mathbb{R} -مقدار f می‌باشد [۱۸].

تعریف ۸.۶.۱. اگر $f(x)$ در نقطه a تا n مرتبه مشتق پذیر باشد، آنگاه بسط تیلور^{۵۵} آن حول نقطه a به صورت زیر نمایش داده می‌شود [۱۷].

$$f(x) = \frac{f(a)}{0!} (x-a)^0 + \frac{f'(a)}{1!} (x-a)^1 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n.$$

تعریف ۹.۶.۱. زوج مرتب (X, d) را که در آن X مجموعه‌ای از نقاط و d تابع حقیقی $d: \mathbb{X} \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ می‌باشد، فضای متریک گویند هرگاه:

^{۴۹} Fourier Transform

^{۵۰} Native Space

^{۵۱} Vandermonde Matrix

^{۵۲} Cauchy-Schwartz Inequality

^{۵۳} Upper-Semicontinuous

^{۵۴} Lower-Semicontinuous

^{۵۵} Taylor Expansion

(۱) $d(p, q) \geq 0$ (فاصله هیچگاه نمی‌تواند منفی باشد).

(۲) $p = q \Leftrightarrow d(p, q) = 0$ (فاصله صفر است اگر و تنها اگر هر دو شی یکسان باشند).

(۳) $d(p, q) + d(q, r) \geq d(p, r)$ (نامساوی مثلث).

تعریف ۱۰.۶.۱. اگر X فضایی متریک و E زیر مجموعه‌ای از آن باشد، آنگاه نقطه p در X نقطه‌ی حدی^{۵۶} [۱۸] مجموعه E است، هرگاه هر همسایگی p شامل نقطه‌ای چون q در E غیر از p باشد.

تعریف ۱۱.۶.۱. فضای سوبولوف^{۵۷} [۱۶] روی دامنه Ω را با نماد $H^k(\Omega)$ نمایش داده می‌شود، که $k \geq 0$ می‌باشد و به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$H^k(\Omega) = H^k = \{v \in L^2(\Omega) : D^\alpha v \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq k\}.$$

تعریف ۱۲.۶.۱. رابطه ترتیب روی مجموعه فرضی S از علامت " $>$ " استفاده می‌کند و دارای دو ویژگی زیر است،

۱. اگر $x, y \in S$ باشند، آنگاه یا $y < x$ یا $y = x$ یا $x < y$ است.

۲. اگر $x, y, z \in S$ باشند و $x < y$ و $y < z$ آنگاه $x < z$ است.

تعریف ۱۳.۶.۱. مجموعه مرتب یعنی مجموعه‌ای مانند S که رابطه ترتیب روی آن تعریف شده باشد.

تعریف ۱۴.۶.۱. اگر S مجموعه‌ای مرتب و E زیر مجموعه‌ای از S باشد، که از بالا کراندار است و همچنین عنصری مانند a از S با خواص زیر وجود داشته باشد.

الف. a کران بالایی از E باشد،

ب. هرگاه $b < a$ ، آنگاه b کران بالای E نباشد.

در این صورت a کوچک‌ترین کران بالای E ^{۵۸} [۱۸] نامیده شده، و به صورت $a = \sup E$ نوشته می‌شود.

تعریف ۱۵.۶.۱. اگر S مجموعه‌ای مرتب و E زیر مجموعه‌ای از S باشد، که از پایین کراندار است و همچنین عنصری مانند a از S با خواص زیر وجود داشته باشد.

الف. a کران پایینی از E باشد،

^{۵۶}Limit Point

^{۵۷}Sobolev Space

^{۵۸}Supremem

ب. هرگاه $b > a$ ، آنگاه b کران پایین E نباشد.

در این صورت a بزرگ‌ترین کران پایین E ^{۵۹} [۱۸] نامیده شده، و به صورت $a = \inf E$ نوشته می‌شود.

تعریف ۱۶.۶.۱. به ازای تابع f و عدد c اگر در هر همسایگی از c نامساوی

$$f(c) \geq f(x),$$

برقرار باشد، آنگاه f در c بیشینه موضعی ^{۶۰} [۱۸] دارد.

تعریف ۱۷.۶.۱. به ازای تابع f و عدد c اگر در هر همسایگی از c نامساوی

$$f(c) \leq f(x),$$

برقرار باشد، آنگاه f در c کمینه موضعی ^{۶۱} [۱۸] دارد.

تعریف ۱۸.۶.۱. تابع f روی بازه I صعودی اکید ^{۶۲} [۱۸] گفته می‌شود، اگر برای هر دو عدد x_1 و x_2

در I با خاصیت $x_1 < x_2$ ، نامساوی $f(x_1) < f(x_2)$ برقرار باشد.

تعریف ۱۹.۶.۱. تابع f روی بازه I نزولی اکید ^{۶۳} [۱۸] گفته می‌شود، اگر برای هر دو عدد x_1 و x_2

در I با خاصیت $x_1 < x_2$ ، نامساوی $f(x_1) > f(x_2)$ برقرار باشد.

تعریف ۲۰.۶.۱. متغیر تصادفی X که دارای تابع چگالی احتمال به صورت زیر باشد را یک توزیع نرمال

یا گاوسی ^{۶۴} با دو پارامتر μ و σ می‌گویند، که یکی تعیین کننده مکان (μ) و دیگری تعیین کننده مقیاس

(σ) توزیع می‌باشد. [۱۹]

$$f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in R.$$

توزیع گاوسی X را با نماد $X : N(\mu, \sigma)$ یا $X : N(\mu, \sigma^2)$ نشان می‌دهند.

تعریف ۲۱.۶.۱. امید ریاضی ^{۶۵} [۱۹] متغیر تصادفی X به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$\mathbb{E}[X] = \int x f_X(x) dx.$$

$f_X(x)$ تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X است.

تعریف ۲۲.۶.۱. عملگر لاپلاس به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$\Delta u = \sum_{j=1}^N \frac{\delta^2}{\delta x_j^2} = D^2 u.$$

^{۵۹} Infimum

^{۶۰} Local Maximum

^{۶۱} Local Mainimum

^{۶۲} Strict Maximum

^{۶۳} Strict Minimum

^{۶۴} Gaussian Distribution

^{۶۵} Expectation

تعریف ۲۳.۶.۱. در دامنه Ω و روی مرز Γ تابع اثر ^{۶۶} برای هر $X \in \Gamma$ به صورت

$$tr(X) = X, \quad \text{on } \Gamma,$$

تعریف می‌شود [۱۶].

تعریف ۲۴.۶.۱. مجموعه‌ای از توابع پیوسته حقیقی $\{g_i\}_i$ روی X را افزایش یک روی X می‌نامیم، هرگاه شرایط زیر برقرار باشند.

$$(۱) \quad \text{برای هر } i \text{ داریم } g_i \geq 0,$$

(۲) برای هر $x \in X$ همسایگی مانند U وجود دارد، به طوری که برای گروهی محدود از g_i ها داریم

$$U \cap \text{sup}(g_i) = \emptyset$$

(۳) برای هر $x \in X$ تساوی زیر برقرار است،

$$\sum_i g_i(x) = 1.$$

تعریف ۲۵.۶.۱. به ماتریسی که بیشتر عناصر آن صفر باشد ماتریس اسپارس یا تنک می‌گویند. برای پردازش تصویر و نمایش تصویر از این ماتریس استفاده می‌شود.

فصل ۲

روش کالوکیشن بدون مش

۱.۲ مقدمه

در این بخش ابتدا به بیان پیش نیازهایی می‌پردازیم، که در ادامه به آن‌ها نیاز پیدا خواهیم کرد، برای اطلاعات بیشتر به [۱۳] مراجعه کنید. در روش بدون مش، به دنبال تابعی تقریبی در فضای تولید شده با هسته‌های از پیش تعیین شده هستیم. در این فصل روش کالوکیشن بدون مش را شرح می‌دهیم.

۲.۲ هسته مثبت معین شرطی

اگر $\Phi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ متقارن^۱ و هموار^۲ باشد، هسته مثبت معین شرطی^۳ از درجه m است، یعنی Φ در شرایط زیر صدق می‌کند،

$$\Phi \in C^{2v}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d) \text{ و } v \geq 2 \bullet$$

$$\Phi(x, y) = \Phi(y, x) \text{ و } x, y \in \mathbb{R}^d \bullet$$

اگر برای هر $\ell \in \mathbb{N}$ و $y_1, \dots, y_\ell \in \mathbb{R}^d$ که دو به دو مجزا هستند، و برای تمام $\alpha \in \mathbb{R}^\ell \setminus \{0\}$ رابطه (۱.۲) برقرار باشد،

$$\sum_{j=1}^{\ell} \alpha_j \pi(y_j) = 0, \quad \pi \in \Pi_{m-1}(\mathbb{R}^d), \quad (1.2)$$

^۱Symmetric

^۲Smooth

^۳Conditionally positive definite kernels

آنگاه

$$\sum_{i,j=1}^{\ell} \alpha_i \alpha_j \Phi(y_i, y_j) > 0. \quad (2.2)$$

اگر رابطه (۲.۲) بدون استفاده از رابطه (۱.۲) به دست آید، آنگاه Φ را هسته مثبت معین می نامند. در ادامه مثال هایی از هسته مثبت معین شرطی بیان می کنیم. در هر کدام تابع پایه ای شعاعی Φ با ضابطه $\mathbb{R} \rightarrow [0, \infty) : \Phi$ با $\Phi(x, y) = \phi(|x - y|)$ به دست می آید. ابتدا به بیان پیش نیازهای برای اثبات این مثال ها می پردازیم.

قضیه ۱.۲.۲. فرض کنید $f, g \in L_1(\mathbb{R}^d)$ ، پس شرایط زیر برقرار است [۱۳].

$$1. \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(x)g(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\hat{g}(x)dx$$

۲. تبدیل فوریه از رابطه زیر را به وسیله $(2\pi)^{\frac{d}{2}} \hat{f}\hat{g}$ به دست می آوریم،

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)g(x - y)dy.$$

۳. برای $\tilde{f}(x) = \overline{f(-x)}$ رابطه $\tilde{f} * \tilde{f} = (2\pi)^{\frac{d}{2}} |f|^2$ برقرار است.

۴. برای $a \in \mathbb{R}^d$ و $T_a f(x) = f(x - a)$ داریم $T_a \widehat{f}(x) = e^{-ix^T a} \widehat{f}(x)$.

۵. برای $\alpha > 0$ و $S_\alpha f(x) = f(x/\alpha)$ داریم $S_\alpha \widehat{f} = \alpha^d S_{1/\alpha} \widehat{f}$.

۶. اگر $X_j f(x) \in L_1(\mathbb{R}^d)$ باشد، آنگاه برای \hat{f} که نسبت به X_j مشتق پذیر است، رابطه زیر حاصل می شود،

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial X_j}(x) = (-iy_j f(y))^{(x)}.$$

اگر $\partial f / \partial X_j$ فقط در $L_1(\mathbb{R}^d)$ باشد، آنگاه داریم،

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial X_j}(x) = iX_j \hat{f}(x).$$

قضیه ۲.۲.۲. تابع $G(x) = e^{-\|x\|^2/2}$ در $\hat{G} = G$ صدق می کند [۱۳].

لم ۳.۲.۲. برای $v \in \mathbb{C}$ توابع بسل تبدیل یافته برای $r > 0$ در زیر صدق می کنند [۱۳].

$$|K_v(r)| \leq \begin{cases} 2^{|\mathcal{R}(v)|-1} \Gamma(|\mathcal{R}(v)|) r^{-|\mathcal{R}(v)|}, & \mathcal{R}(v) \neq 0, \\ \frac{1}{e} - \log \frac{r}{e}, & r < 2, \mathcal{R}(v) = 0. \end{cases}$$

مثال ۴.۲.۲. الف) برای $x \in \mathbb{R}^d$ و $\alpha > 0$ توابع پایه ای شعاعی گاوسی به شکل $\Phi(x) = e^{-\alpha|x|^2}$ تعریف می شود. در این حالت Φ مثبت معین است.

برهان. برای اثبات مثبت معین بودن Φ تابع $G(x)$ را به صورت $G(x) := e^{-\frac{\|x\|_2^2}{\gamma}}$ تعریف می‌کنیم. که در تساوی $G = \hat{G}$ صدق می‌کند. اگر $G_\alpha = G(\cdot/\alpha)$ قرار دهیم، آنگاه طبق قضیه ۱.۲.۲ داریم:

$$\hat{G}_\alpha = \alpha^d \hat{G}(\alpha), \quad \Phi = G_{1/\sqrt{\gamma\alpha}}.$$

بنابراین رابطه زیر طبق تعریف تبدیل فوری حاصل می‌شود [۱۶].

$$\Phi(x) = \gamma^{-d} (\pi\alpha)^{-\frac{d}{\gamma}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{\|\omega\|_2^2}{\gamma\alpha}} e^{-iX^T\omega} d\omega. \quad (۳.۲)$$

رابطه (۳.۲) به معنای مثبت معین بودن Φ است. \square

(ب) برای $\alpha \in \mathbb{R}$ ، $x \in \mathbb{R}^d$ و $\beta \in \mathbb{R} \setminus (N \cup \{0\})$ توابع $\Phi(x) = (\alpha^2 + |x|^2)^\beta$ به توابع پایه‌ای شعاعی چندربعی موسوم هستند، که برای $\beta < 0$ مثبت معین می‌باشند.

برهان. تابع Φ را برای $x \in \mathbb{R}^d$ ، $c > 0$ و $\beta > \frac{d}{2}$ به صورت زیر نشان می‌دهیم.

$$\Phi(x) = (c^2 + \|x\|_2^2)^{-\beta},$$

طبق تعریف تبدیل فوری داریم،

$$\hat{\Phi}(\omega) = \frac{\gamma^{1-\beta}}{\Gamma(\beta)} \left(\frac{\|\omega\|_2}{c} \right)^{\beta-d/2} k_{d/2-\beta}(c\|\omega\|_2). \quad (۴.۲)$$

اگر $\beta > d/2$ باشد، آنگاه تابع Φ در $L_1(\mathbb{R}^d)$ است. تابع Γ را برای $\beta > 0$ به صورت زیر نمایش می‌دهیم.

$$\Gamma(\beta) = \int_0^\infty t^{\beta-1} e^{-t} dt = s^\beta \int_0^\infty u^{\beta-1} e^{-su} du, \quad (۵.۲)$$

برای $s > 0$ در رابطه (۵.۲) اگر $t = su$ را جایگذاری کنیم، و با فرض $s = c^2 + \|x\|_2^2$ ، نتیجه زیر حاصل می‌شود.

$$\Phi(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^\infty u^{\beta-1} e^{-c^2 u} e^{-\|x\|_2^2 u} du. \quad (۶.۲)$$

در تبدیل فوری رابطه (۶.۲) را قرار می‌دهیم. با تغییر مرتبه انتگرال‌گیری روابط زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}(\omega) &= (\gamma\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(x) e^{-iX^T\omega} dx \\ &= (\gamma\pi)^{-d/2} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^\infty u^{\beta-1} e^{-cu^2} e^{-\|x\|_2^2 u} e^{-iX^T\omega} du dx \\ &= (\gamma\pi)^{-d/2} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^\infty u^{\beta-1} e^{-cu^2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\|x\|_2^2 u} e^{-iX^T\omega} dx du \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^\infty u^{\beta-1} e^{-cu^2} (\gamma u)^{-d/2} e^{-\|\omega\|_2^2 / \gamma u} du \\ &= \frac{1}{\gamma^{d/2} \Gamma(\beta)} \int_0^\infty u^{\beta-d/2-1} e^{-cu^2} e^{-\|\omega\|_2^2 / \gamma u} du \end{aligned}$$

با توجه به قضیه‌های ۱.۲.۲ و ۲.۲.۲ و همچنین اثبات لم ۳.۲.۲ برای هر $\alpha > 0$ داریم،

$$k_v(r) = a^{-v} \frac{1}{\Upsilon} \int_0^\infty e^{(-r/\Upsilon)(u/a+a/u)} u^{v-1} du,$$

برای $\omega \neq 0$ اگر $r = c\|\omega\|_2$ ، $a = \frac{\|\omega\|_2}{\Upsilon c}$ و $v = \beta - d/\Upsilon$ قرار دهید، آنگاه رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} k_{\beta-d/\Upsilon}(c\|\omega\|_2) &= \frac{1}{\Upsilon} \left(\frac{\|\omega\|_2}{\Upsilon c} \right)^{d/\Upsilon-\beta} \int_0^\infty e^{-uc^2} e^{(-\|\omega\|_2^2)/(4u)} u^{\beta-d/\Upsilon-1} du \\ &= \Upsilon^{\beta-1} \Gamma(\beta) \left(\frac{\|\omega\|_2}{\Upsilon c} \right)^{d/\Upsilon-\beta} \hat{\Phi}(\omega), \end{aligned} \quad (7.2)$$

با قرار دادن $k_{-v} = k_v$ رابطه (۷.۲) به دست می‌آید، که منجر به تبدیل فوریه برای $\omega \neq 0$ می‌شود. با استفاده از پیوستگی برای $\omega = 0$ همچنان رابطه (۴.۲) برقرار است. هرگاه تابع تبدیل یافته بسط نامنفی باشد، آنگاه Φ مثبت معین است. \square

۳.۲ ساخت توابع شکل

۱.۳.۲ روش درونیابی نقطه‌ای

روش درونیابی نقطه‌ای^۴ یکی از روش‌هایی است که، برای تقریب تابع و ساخت توابع شکل مفید می‌باشد. این روش تابع $u(x)$ را روی دامنه Ω در نقطه دلخواه x به شکل زیر تقریب می‌زند.

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^m B_i(x) a_i.$$

$B_i(x)$ ها توابع پایه‌ای هستند، همچنین m تعداد توابع پایه‌ای است و a_i ها ضرایب این توابع می‌باشند. برای تقریب، ابتدا دامنه محمل منطقه‌ای نقطه x که شامل n گره است، معرفی می‌شود. تاکنون دو نوع از روش‌های درونیابی نقطه‌ای برای ساخت توابع شکل با به کارگیری توابع پایه متفاوت گسترش یافته است.

۱. روش درونیابی نقطه‌ای چندجمله‌ای

۲. روش درونیابی نقطه‌ای شعاعی.

در این بخش به روش درونیابی نقطه‌ای شعاعی می‌پردازیم.

تعریف ۱.۳.۲. برای نقطه x ، گره‌هایی که برای تقریب جواب معادله در x مورد نیاز است را، دامنه محمل منطقه‌ای^۵ تعیین می‌کند. دامنه محمل منطقه‌ای می‌تواند شکل‌های متفاوتی، مانند دایره یا مستطیل داشته باشد.

^۴Point Interpolation Method

^۵Local Support Domain

تعریف ۲.۳.۲. به ماتریس مربعی متقارنی که درایه‌های آن از تک‌جمله‌ای‌ها تشکیل شده باشند، ماتریس ممان یا گشتاور^۶ گفته می‌شود.

۲.۳.۲ روش درونیابی نقطه‌ای شعاعی

روش درونیابی نقطه‌ای شعاعی در سال ۲۰۰۰ توسط وانگ^۷ و لیو^۸ بیان شد. در این روش از توابع پایه‌ای شعاعی برای اجرای این ایده استفاده شده است. روش درونیابی نقطه‌ای شعاعی برای توزیع گره‌ای دلخواه، پایدار و قوی است. بنابراین، روش درونیابی نقطه‌ای شعاعی بیشتر از روش درونیابی نقطه‌ای چندجمله‌ای استفاده می‌شود. این روش در مکانیک جامدات مسائل دوبعدی و سه‌بعدی، مسائل غیرخطی زمین‌شناسی، ساختار هسته‌ای و غشایی و مسائل غیرخطی مواد در مهندسی عمران به‌کار می‌رود. ساختار درونیابی $u(x)$ برای عبور از بین همه گره‌ها با استفاده از تابع پایه‌ای شعاعی $R_i(x)$ و تابع پایه‌ای چندجمله‌ای $P_j(x)$ به صورت (۸.۲) است.

$$u(x) = \sum_{i=1}^n R_i(x)a_i + \sum_{j=1}^m P_j(x)b_j = R^T(x)a + P^T(x)b, \quad (8.2)$$

که در آن a_i و b_j ضرایب ثابت هستند، n تعداد گره‌ها در دامنه x و m تعداد جملات چندجمله‌ای است. معمولاً $m < n$ است، و زمانی که $m = 0$ باشد، فقط توابع پایه‌ای شعاعی به‌کار می‌روند. بنابراین a ، b ، R^T و P^T به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$a = [a_1, a_2, \dots, a_n]^T, \quad b = [b_1, b_2, \dots, b_m]^T,$$

$$R^T(x) = [R_1(x), R_2(x), \dots, R_n(x)], \quad P^T(x) = [P_1(x), P_2(x), \dots, P_m(x)].$$

پایه شعاعی، تابعی برحسب r_i می‌باشد و به صورت زیر بیان می‌شود.

$$R_i(x) = R_i(r_i), \quad r_i = \left[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 \right]^{1/2}.$$

$P_i(x)$ چندجمله‌ای‌های پاسکال در مختصات $x^T = [x, y]$ می‌باشند، که شکل ۱.۲ نشان دهنده حالت دوبعدی است. پایه چندجمله‌ای $P^T(x)$ دارای جملات تکین است،

$$P^T(x) = [1, x, y, x^2, xy, y^2, \dots].$$

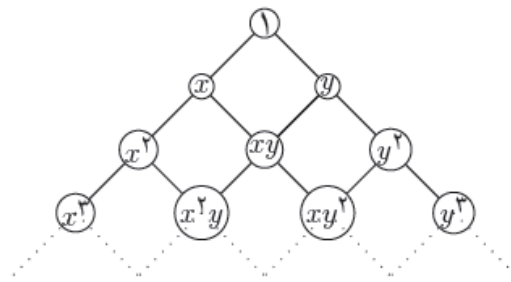
انواع گوناگونی از توابع پایه‌ای شعاعی وجود دارد، که در فصل اول بیان شد. در بیشتر توابع پایه‌ای شعاعی پارامترهای ثابتی وجود دارند که مقدار آن‌ها باید براساس ماهیت مساله مورد نظر تعیین شود تا روش بهینه گردد. برای تعیین ضرایب a_i و b_j در معادله (۸.۲) یک محمل دامنه برای نقطه x تعیین می‌شود، که شامل n گره است. در نهایت برای هر گره معادله‌ای خطی ایجاد می‌شود. شکل ماتریسی این معادله به صورت (۹.۲) است،

$$U_s = R_o a + P_m b. \quad (9.2)$$

^۶Moment Matrix

^۷Wang

^۸Liu



شکل ۱۰۲: مثلث پاسکال چندجمله‌ای‌ها برای دامنه دوبعدی

که در آن $U_s = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n]^T$ برداری از مقادیر تابع است. ماتریس گشتاور R_\circ از توابع پایه‌ای شعاعی به صورت زیر است.

$$R_\circ = \begin{bmatrix} R_1(x_1, y_1) & R_2(x_1, y_1) & \dots & R_n(x_1, y_1) \\ R_1(x_2, y_2) & R_2(x_2, y_2) & \dots & R_n(x_2, y_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_1(x_n, y_n) & R_2(x_n, y_n) & \dots & R_n(x_n, y_n) \end{bmatrix}_{n \times n}$$

همچنین ماتریس گشتاور چندجمله‌ای P_m به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$P_m^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_m(x_1) & p_m(x_2) & \dots & p_m(x_n) \end{bmatrix}_{m \times n}$$

بنابراین $(n + m)$ متغیر در معادله (۹.۲) وجود دارد. m شرط محدودیت را به صورت (۱۰.۲) در نظر می‌گیریم،

$$\sum_{i=1}^n p_j(x_i) a_i = P_m^T a = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (10.2)$$

که منجر به m معادله دیگر می‌شود.

با انجام درونیابی روی n نقطه در دامنه، مجموعه‌ای از معادلات روی ضرایب a_i و b_j به صورت (۱۱.۲) تشکیل می‌شود.

$$u_k = u(x_k, y_k) = \sum_{i=1}^n a_i R_i(x_k, y_k) + \sum_{j=1}^m b_j P_j(x_k, y_k), \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (11.2)$$

معادلات (۱۰.۲) و (۱۱.۲) به شکل ماتریسی (۱۲.۲) قابل بیان است.

$$\begin{bmatrix} R_\circ & P_m \\ P_m^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u^e \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (12.2)$$

با فرض $G = \begin{bmatrix} R_o & P_m \\ P_m^T & o \end{bmatrix}$ داریم،

$$G \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u^e \\ o \end{bmatrix}, \quad (13.2)$$

که در آن

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n \ b_1 \ b_2 \ \dots \ b_m]^T,$$

و بردار مقادیر تابعی در هر گره به صورت زیر است.

$$u^e = [u_1, u_2, \dots, u_n]^T,$$

به دلیل متقارن بودن ماتریس R_o ، ماتریس G نیز متقارن و معکوس پذیر خواهد شد. با حل معادله (۱۳.۲)، داریم:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = G^{-1} \begin{bmatrix} u^e \\ o \end{bmatrix}.$$

درونیایی تابع $u(x)$ به صورت زیر بیان می شود،

$$u(x) = [R^T(x) \ P^T(x)]G^{-1} \begin{bmatrix} u^e \\ o \end{bmatrix} = \varphi(x)u^e.$$

ماتریس توابع شکل $\varphi(x)$ به صورت (۱۴.۲) تعریف می شود.

$$\varphi(x) = [\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_i(x), \dots, \phi_n(x)], \quad (14.2)$$

داریم:

$$\phi_k(x) = \sum_{i=1}^n R_i(x)\bar{G}_{i,k} + \sum_{j=1}^m P_j(x)\bar{G}_{n+j,k}, \quad (15.2)$$

که در آن $\bar{G}_{i,k}$ المان (i, k) از ماتریس G^{-1} است. مشتقات توابع شکل $\Phi(x)$ در رابطه (۱۶.۲) نشان داده شده است.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_k}{\partial x} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial R_i}{\partial x} \bar{G}_{i,k} + \sum_{j=1}^m \frac{\partial P_j}{\partial x} \bar{G}_{n+j,k}, \\ \frac{\partial \phi_k}{\partial y} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial R_i}{\partial y} \bar{G}_{i,k} + \sum_{j=1}^m \frac{\partial P_j}{\partial y} \bar{G}_{n+j,k}. \end{aligned} \quad (16.2)$$

نکته: توابع شکل تعیین شده با روش درونیایی نقطه ای شعاعی، دارای خاصیت دلتای کرونکر، و همچنین یگانه و پیوسته هستند. فرض می کنیم $X = \{x^{(1)}, \dots, x^{(N)}\}$ مجموعه ای از نقاط دو به دو مجزا در Ω است، و π_1, \dots, π_Q پایه ای از $\Pi_{m-1}(\mathbb{R}^d)$ می باشد. Q را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$Q = \dim(\Pi_{m-1}(\mathbb{R}^d)) = (m+d)!/(m!d!)$$

$P = (\pi_k(x^{(j)})) \in \mathbb{R}^{N \times Q}$ است و $A_{\Phi, X} = \{\Phi(x^{(i)}, x^{(j)})\}_{1 \leq i, j \leq N}$ قرار می دهیم. فرض کنید که X مجموعه $\Pi_{m-1}(\mathbb{R}^d)$ تک حل پذیر است، بنابراین دستگاه (۱۷.۲) برای هر $b \in \mathbb{R}^N$ جوابی یکتا

به صورت $(\xi(b), \eta(b)) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^Q$ دارد.

$$\begin{pmatrix} A_{\Phi, X} & P \\ P^T & o \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ o \end{pmatrix}. \quad (17.2)$$

بنابراین رابطه (۱۸.۲) درونیاب g روی X را نشان می‌دهد، که به صورت تقریبی از g به دست می‌آید.

$$I_{g, X}(x) = \sum_{j=1}^N \xi_j(g|_X) \Phi(x, x^{(j)}) + \sum_{i=1}^Q \eta_i(g|_X) \pi_i(x), \quad x \in \Omega. \quad (18.2)$$

برای هر $b \in \mathbb{R}^N$ داریم

$$\xi(b) = (\xi_1(b), \dots, \xi_N(b))^T, \quad \eta(b) = (\eta_1(b), \dots, \eta_Q(b))^T,$$

$$g|_X = (g(x^{(1)}), \dots, g(x^{(N)}))^T.$$

لازم به ذکر است که، اگر Φ مثبت معین باشد، آنگاه ماتریس $A_{\Phi, X}$ معکوس پذیر است و برای $b \in \mathbb{R}^N$

جوابی از (۱۷.۲) به شکل زیر به دست می‌آید،

$$\xi(b) = A_{\Phi, X}^{-1} b, \quad \eta(b) = o. \quad (19.2)$$

در ادامه، نتایج برآورد خطا^۹ را برای درونیابی با هسته مثبت معین شرطی یادآوری می‌کنیم.

فرض می‌کنیم که $\mathcal{N}_{\Phi}(\Omega)$ فضای محلی متناظر با Φ باشد [۱۳]. توجه کنید که $\mathcal{N}_{\Phi}(\Omega)$ زیر فضای خطی از $C(\Omega)$ به همراه ضرب نیمه داخلی $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{N}_{\Phi}(\Omega)}$ است. اگر $g, g' \in C(\Omega)$ باشند، آنگاه برای هر

$x \in \Omega$ داریم،

$$g(x) = \sum_{j=1}^M \alpha_j \Phi(x, y_j), \quad g'(x) = \sum_{j=1}^{M'} \alpha'_j \Phi(x, y'_j),$$

که در آن $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}^N$ ، $M, M' \in \mathbb{N}$ ، $y_1, \dots, y_M, y'_1, \dots, y'_{M'} \in \Omega$ است، همچنین با این خاصیت که برای تمام $\pi \in \Pi_{m-1}(\mathbb{R}^d)$ رابطه زیر برقرار است.

$$\sum_{j=1}^M \alpha_j \pi(y_j) = \sum_{j=1}^{M'} \alpha'_j \pi(y'_j) = o,$$

آنگاه داریم:

$$(g, g')_{\mathcal{N}_{\Phi}(\Omega)} = \sum_{j=1}^M \sum_{\ell=1}^{M'} \alpha_j \alpha'_\ell \Phi(y_j, y'_\ell).$$

۴.۲ شرایط مخروط درونی

زیر مجموعه باز و کراندار Ω از \mathbb{R}^d را در نظر بگیرید. فرض کنید که می‌خواهیم جواب تقریبی برای معادله (۲.۱) را روی Ω حساب کنیم. به علاوه فرض کنید که Ω در شرایط مخروط درونی^{۱۰} صدق کند، یعنی

^۹Error estimation

^{۱۰}Interior cone condition

$\xi(x) \in \mathbb{R}^d$ برای هر $x \in \Omega$ رابطه زیر برای برخی $\theta \in (0, \frac{\pi}{4})$ وجود دارد و $r > 0$ است، به طوری که برای هر $x \in \Omega$ رابطه زیر برای برخی $\xi(x) \in \mathbb{R}^d$ با $|\xi(x)| = 1$ برقرار است.

$$C(x, \xi(x), \theta, r) := \{x + \lambda y : y \in \mathbb{R}^d, |y| = 1, y^T \xi(x) \geq \cos \theta, \lambda \in [0, r]\} \subset \Omega.$$

تعریف ۱.۴.۲. مجموعه $\Pi_{m-1}(\mathbb{R}^d)$ را تک حل پذیر^{۱۱} می نامند، هرگاه برای $\pi \in \Pi_{m-1}(\mathbb{R}^d)$ با $\pi(x) = 0$ روی X چند جمله ای صفر باشد.

۵.۲ برآورد خطا

خطای حاصل از درونیابی برای هر $g \in \mathcal{N}_\Phi(\Omega)$ و هر چنداندیسه α به همراه $|\alpha| \leq v$ ، به صورت زیر برآورد می شود.

$$|D^\alpha g(x) - D^\alpha I_{g,X}(x)| \leq C_{v,R} \Delta_{X,\Omega}^{v-|\alpha|} |g|_{\mathcal{N}_\Phi(\Omega)}, \quad x \in \Omega, \quad (20.2)$$

که $|\cdot|_{\mathcal{N}_\Phi(\Omega)} = (\cdot, \cdot)^{1/2}$ است، و $\Delta_{\Omega,X}$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\Delta_{\Omega,X} = \sup_{x \in \Omega} \min_{j=1, \dots, N} |x - x^{(j)}|.$$

فرض کردیم که Ω در شرایط مخروط درونی صدق کند و X ، $\Pi_{m-1}(\mathbb{R}^d)$ تک حل پذیر باشد. در ادامه برای Ω حالت های مختلفی را در نظر می گیریم، و در قالب گزاره به اثبات آنها می پردازیم.

گزاره ۱.۵.۲. الف) اگر $x_0 \in \mathbb{R}^d$ و $R > 0$ باشد، آنگاه مجموعه $\{x \in \mathbb{R}^d : |x - x_0| < R\}$ در شرایط مخروط درونی صدق می کند.

ب) اگر $a_\ell, b_\ell \in \mathbb{R}$ و $a_\ell < b_\ell$ برای $\ell = 1, \dots, d$ مفروض باشند، آنگاه مجموعه $\Pi_{\ell=1}^d(a_\ell, b_\ell)$ در شرایط مخروط درونی صدق می کند.

ج) فرض کنید $N \geq M$ است، و برای هر $\ell = 1, \dots, d$ دنباله ای از ℓ -امین مختصات $x_\ell^{(1)}, \dots, x_\ell^{(N)}$ دو به دو مجزا باشند. آنگاه $X \subset \Pi_{m-1}(\mathbb{R}^d)$ تک حل پذیر است.

برهان. الف) برای اثبات $r = \frac{R}{(1+\sqrt{2})}$ و $\theta = \frac{\pi}{4}$ قرار می دهیم. گوی باز را با Ω_1 نشان می دهیم. فرض کنید برای هر $\xi(x_0)$ که $x_0 \in \Omega_1$ است، داریم $c(x_0, \xi(x_0), \theta, r) \subset \Omega$. برای $x \in \Omega_1 \setminus \{x_0\}$ ، $\xi(x)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$\xi(x) = -(x - x_0) / |x - x_0|.$$

فرض کنید $\lambda \in [0, r]$ و $y \in \mathbb{R}^d$ با $|y| = 1$ و $y^T \xi(x) \geq \cos \theta$ اگر $|x - x_0| < \sqrt{2}r$ باشد، آنگاه:

$$|x + \lambda y - x_0| \leq |x - x_0| + \lambda |y| \quad (21.2)$$

^{۱۱}Unisolvent

λ مقدار ماکزیمم خود را در r می‌گیرد. طبق تعریف r و این‌که $|y| = 1$ و $|x - x_0| < \sqrt{2}r$ است، در رابطه (۲۱.۲) داریم،

$$|x - x_0| + \lambda|y| \leq \sqrt{2}r + r = R.$$

اگر $|x - x_0| \geq \sqrt{2}r$ پس رابطه زیر برقرار است.

$$|x + \lambda y - x_0|^2 = |x - x_0|^2 + 2\lambda y^T(x - x_0) + \lambda^2|y|^2. \quad (22.2)$$

از طرفی داریم،

$$|y| = 1, \quad \xi(x) = -\frac{(x - x_0)}{|x - x_0|}, \quad \theta = \frac{\pi}{4},$$

طبق فرض شرایط مخروط درونی نامساوی $y^T \xi(x) \geq \cos(\theta)$ را برای $\theta = \frac{\pi}{4}$ به‌کار می‌بریم، بنابراین داریم،

$$y^T \xi(x) \geq \cos\left(\frac{\pi}{4}\right),$$

با استفاده از تعریفی که در ابتدای اثبات برای $\xi(x)$ گفتیم، داریم:

$$-2y^T(x - x_0) \geq \sqrt{2}|x - x_0|. \quad (23.2)$$

با ضرب طرفین رابطه (۲۳.۲) در منفی رابطه زیر حاصل می‌شود.

$$2y^T(x - x_0) \leq -\sqrt{2}|x - x_0|,$$

در نتیجه داریم:

$$|x + \lambda y - x_0|^2 \leq |x - x_0|^2 - \sqrt{2}|x - x_0|\lambda + \lambda^2 = f(\lambda). \quad (24.2)$$

سمت راست نامساوی (۲۴.۲) تابعی درجه دوم برحسب λ است، که مقدار مقدار ماکزیمم خود را روی $[0, r]$ در $\lambda = 0$ می‌گیرد.

$$0 \leq |\sqrt{2}r - r| \leq |\sqrt{2}r| + |r| = R.$$

بنابراین $|x + \lambda y - x_0| \leq R$ است، پس ثابت کردیم که $c(x_0, \xi(x_0), \theta, r) \subset \Omega$ است.

(ب) برای حالت $d = 1$ واضح است. بنابراین برای $d \geq 2$ اثبات می‌کنیم. در ابتدا، نمونه ساده زیر را اثبات می‌کنیم.

$$\sum_{i=1}^d y_i^2 = 1, \quad \sum_{i=1}^d y_i \geq \sqrt{d-1} \quad y_i \geq 0, i = 1, \dots, d. \quad (25.2)$$

برای این‌که رابطه (۲۵.۲) حاصل شود، فرض می‌کنیم $k \in 1, \dots, d$ دلخواه باشد.

$$\sum_{i=1}^d y_i = \sum_{i \neq k} y_i + y_k.$$

بنابراین $\sqrt{d-1} \leq \sum_{i \neq k} y_i + y_k$ است، پس نامساوی زیر حاصل می‌شود.

$$\sqrt{d-1} - y_k \leq \sum_{i \neq k} y_i.$$

با استفاده از نامساوی کوشی شوارتز رابطه زیر حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned} \sum_{i \neq k} y_i &= \sum_{i \neq k} 1 \cdot y_i \\ &= \langle 1, \dots, 1 \rangle \cdot \langle y_1, \dots, y_{k-1}, y_{k+1}, \dots, y_d \rangle \\ &\leq \sqrt{\langle 1^2, \dots, 1^2 \rangle} \cdot \left(\sum_{i \neq k} y_i^2 \right)^{1/2} \\ &= \sqrt{d-1} \cdot \left(\sum_{i \neq k} y_i^2 \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

از طرفی $\sum_{i=1}^d y_i^2 = 1$ است، اگر تساوی زیر برقرار باشد،

$$\sum_{i \neq k} y_i^2 = 1 - y_k^2,$$

آنگاه

$$\sqrt{d-1} - y_k \leq \sum_{i \neq k} y_i \leq \sqrt{(d-1)(1-y_k^2)}.$$

زمانی که $|y_k| \leq 1$ است، رابطه زیر برقرار است.

$$\sqrt{d-1} - y_k \geq 0, \quad (26.2)$$

بنابراین نامساوی (26.2) به شکل (27.2) بیان می‌شود.

$$\sqrt{d-1} - y_k \leq \sqrt{(d-1)(1-y_k^2)}, \quad (27.2)$$

دو طرف رابطه (27.2) را به توان دو می‌رسانیم:

$$d-1 - 2\sqrt{d-1}y_k + y_k^2 \leq (d-1)(1-y_k^2) = d - dy_k^2 + y_k^2 - 1,$$

$$-2\sqrt{d-1}y_k + dy_k^2 \leq 0,$$

پس $y_k(dy_k - 2\sqrt{d-1}) \leq 0$ است. از طرفی گفتیم که $\sqrt{d-1} - y_k \geq 0$ می‌باشد. بنابراین داریم:

$$y_k - \sqrt{d-1} \leq 0,$$

پس $dy_k - 2\sqrt{d-1} \leq 0$ است. در نتیجه نشان دادیم که $y_k \geq 0$ است.

حال مجموعه $r = \min_i (b_i - a_i)/4$ و $\theta \in (0, \frac{\pi}{4})$ را در نظر می‌گیریم، به طوری که برای $\cos \theta$ داشته باشیم،

$$\cos \theta = \sqrt{(d-1)/d},$$

و Ω_2 را مجموعه مستطیلی و باز در نظر می‌گیریم. حال تابع $\xi(x) = (\xi(x)_1, \dots, \xi(x)_d)^T$ را با ضابطه (28.2) تعریف می‌کنیم.

$$\xi_i(x) = \begin{cases} 1, & x_i \leq (a_i + b_i)/2, \\ -1, & \text{سایر جاها.} \end{cases} \quad (28.2)$$

به علاوه مجموعه‌های $I_+(x)$ و $I_-(x)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$I_+(x) = \{k \in \{1, \dots, d\} : \xi_k(x) > 0\}, \quad I_-(x) = \{k \in \{1, \dots, d\} : \xi_k(x) < 0\}.$$

فرض کنید که $x + \lambda y \in c(x, \xi(x), \theta, r)$ است، پس داریم:

$$\sum_{k \in I_-(x)} (-y_k)^2 + \sum_{k \in I_+(x)} y_k^2 = 1, \quad \sum_{k \in I_-(x)} (-y_k) + \sum_{k \in I_+(x)} y_k \geq \sqrt{d-1}.$$

طبق رابطه‌ی (۲۰.۲) نتیجه می‌گیریم که برای $k \in I_+(x)$ ، $y_k \geq 0$ است و برای $k \in I_-(x)$ ، $y_k \leq 0$ می‌باشد.

$$k \in \{1, \dots, d\}, \quad a_\ell < b_\ell, \quad \ell = 1, \dots, d$$

طبق تعریف Ω_2 و نامساوی $a_\ell < b_\ell$ داریم:

$$a_k < x_k < b_k,$$

در حالتی که $k \in I_+(x)$ است، نامساوی زیر برقرار است.

$$x_k + \lambda y_k \geq x_k > a_k,$$

λ در بازه $\lambda \in [0, r]$ مقدار ماکزیم خود را در r می‌گیرد. در حالتی که $k \in I_+(x)$ است، و طبق تعریف $I_+(x)$ نامساوی $\xi(x) > 0$ برقرار است. به این معنا که $x_i \leq (a_i + b_i)/2$ می‌باشد. از طرفی مطابق تعریف r داریم،

$$\begin{aligned} x_k + \lambda y_k &\leq \frac{a_k + b_k}{2} + r \leq \frac{a_k + b_k}{2} + \frac{b_k - a_k}{4} \\ &\leq \frac{a_k + b_k}{2} + \frac{b_k - a_k}{2} = b_k \end{aligned}$$

در حالتی که $k \in I_-(x)$ نامساوی $\xi(x) < 0$ برقرار است، به این معنا که $x_i \geq (a_i + b_i)/2$ نامساوی اخیر منجر به $x_k \leq b_k$ می‌گردد.

$$x_k + \lambda y_k > \frac{(a_k + b_k)}{2} - r \geq \frac{(a_k + b_k)}{2} - \frac{(b_k - a_k)}{2} = a_k$$

بنابراین $a_k < x_k + \lambda y_k < b_k$ است، پس ثابت کردیم $c(x, \xi(x), \theta, r) \subset \Omega_1$ می‌باشد.

(ج) با استقرا روی d حکم را ثابت می‌کنیم. برای $\ell = 1, \dots, d$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$x_\ell = \left\{ (x_1^{(1)}, \dots, x_\ell^{(1)})^T, \dots, (x_1^{(N)}, \dots, x_\ell^{(N)})^T \right\},$$

فرض کنید $\pi \in \Pi_{m-1}(\mathbb{R})$ است، و برای $x \in \mathbb{R}$ به صورت $\pi(x) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j x^j$ نشان می‌دهیم. آنگاه برای $\pi = 0$ روی x_1 داریم،

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1^{(1)} & \dots & (x_1^{(1)})^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_1^{(N)} & \dots & (x_1^{(N)})^{m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_0 \\ \vdots \\ C_{(m-1)} \end{pmatrix} = 0, \quad (29.2)$$

وقتی $x_1^{(j)}$ ها دو به دو مجزا باشند، ماتریس واندرموند در تساوی (۲۹.۲) مرتبه کامل دارد و $N \geq m$ است، بنابراین $c_0 = \dots = c_{m-1} = 0$ است، پس π روی \mathbb{R} مقدار صفر می‌گیرد. حال فرض می‌کنیم که $x_\ell \in \Pi_{m-1}(\mathbb{R}^\ell)$ تک حل‌پذیر باشد. اگر $\pi \in \Pi_{m-1}(\mathbb{R}^{\ell+1})$ باشد، و برای $x = (x_1, \dots, x_\ell)$ ، $j = 0, \dots, m-1$ و $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_\ell)^T$ را به صورت $\pi(x) = \sum_{j=0}^{m-1} \pi_j(\tilde{x})(x_{\ell+1})^j$ نشان می‌دهیم، که $\pi_j \in \Pi_{m-1-j}(\mathbb{R}^\ell)$ است. فرض کنید که π روی $X_{\ell+1}$ برابر صفر باشد. بنابراین داریم،

$$\begin{pmatrix} 1 & x_{\ell+1}^{(1)} & \dots & (x_{\ell+1}^{(1)})^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{\ell+1}^{(N)} & \dots & (x_{\ell+1}^{(N)})^{m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_0(\tilde{x}) \\ \vdots \\ \pi_{(m-1)}(\tilde{x}) \end{pmatrix} = 0,$$

در استدلال بالا نتیجه گرفتیم که، برای هر $\tilde{x} \in X_\ell$ و $j = 0, \dots, m-1$ ، $\pi_j(\tilde{x}) = 0$ است. بنابراین با فرض از استقرا به دست آوردیم که روی \mathbb{R}^ℓ ، $\pi_0 = \dots = \pi_{m-1} = 0$ می‌باشند. به این معنا که π روی $\mathbb{R}^{\ell+1}$ برابر صفر است.

□

۶.۲ روش کالوکیشن بدون مش

در این بخش، روش کالوکیشن بدون مش را برای معادلات سهموی (۲۰.۱) شرح می‌دهیم. همان‌طور که در مقدمه‌ی این فصل ذکر شد، این روش به دنبال تابعی تقریبی است. حال با استفاده از فرمول گسسته‌سازی زمان از معادله (۲۰.۱) شروع می‌کنیم. با استفاده از روش وارون اوایلر [۱۶] داریم:

$$\frac{v^k - v^{k+1}}{h} + \theta v^k = 0, \quad v(t_k) = v^k,$$

$$\frac{v(t_{k+1}, x) - v(t_k, x)}{h} \simeq \theta F(t_{k+1}, x; v(t_{k+1}, \cdot)) + (1 - \theta)F(t_k, x; v(t_k, \cdot)), \quad (30.2)$$

که برای $t_k = kh$ ، $k = 0, \dots, n$ و همچنین $h = T/n$ ، $\theta \in [0, 1]$ و برای هر $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^d)$ رابطه (۳۱.۲) برقرار است.

$$F(t, x; \varphi) = F(t, x; \varphi(x), D\varphi(x), D^2\varphi(x)), \quad x \in \mathbb{R}^d. \quad (31.2)$$

جواب تقریبی از معادله (۲۰.۱) را برای $n = 0, \dots, N$ ، $k = 0, \dots, n$ در $\{t_0, \dots, t_n\} \times X$ با $v_{k,j}$ نشان می‌دهیم. مجموعه $v^h(t_k, \cdot)$ با درونیایی بدون مش روی $\{v_{k,j}\}_{j=1, \dots, N}$ برای $x \in \Omega$ به دست می‌آید،

$$v^h(t_k, x) = \sum_{j=1}^N \xi_j(v_k) \Phi(x, x^{(j)}) + \sum_{\ell=1}^Q \eta_\ell(v_k) \pi_\ell(x),$$

که $v_k = (v_{k,1}, \dots, v_{k,N})^T$ است. علاوه بر این فرض کنید که v^h در تساوی (۳۰.۲) روی X صدق کند. بنابراین برای $j = 1, \dots, N$ و $k = 0, \dots, n-1$ رابطه زیر برقرار است.

$$v_{k+1,j} - v_{k,j} = h\theta \tilde{F}_{k+1,j}(v_{k+1}) + h(1-\theta) \tilde{F}_{k,j}(v_k),$$

بنابراین رابطه (۳۲.۲) حاصل می‌شود. همچنین $\tilde{F}_{k,j}(v_k) = F(t_k, x^{(j)}; v^h(t_k, \cdot))$ است، همچنین $\tilde{F}_k(v_k) = (\tilde{F}_{k,1}(v_k), \dots, \tilde{F}_{k,N}(v_k))^T$ می‌باشد،

$$v_k + h(1-\theta) \tilde{F}_k(v_k) = v_{k+1} - h\theta \tilde{F}_{k+1}(v_{k+1}), \quad k = 0, \dots, n-1. \quad (32.2)$$

شرایط نهایی $v^h(t_n, \cdot)$ در زیر نشان داده شده است.

$$v^h(t_n, x) = I_{f,X}(x), \quad x \in \Omega.$$

خطی بودن $(\xi(b), \eta(b))$ نسبت به b با رابطه زیر حاصل می‌شود.

$$v^h(t_k, x) = v^h(t_{k+1}, x) - h(1-\theta) I_{F(t_k, \cdot; v^h(t_k, \cdot)), X}(x) - h\theta I_{F(t_{k+1}, \cdot; v^h(t_{k+1}, \cdot)), X}(x). \quad (33.2)$$

نکته

در حالتی که $\theta = 1$ معادله (۳۰.۲) با استفاده از فرمول بازگشتی ساده به دست می‌آید، بنابراین تابع v^h با روش‌های درونیابی تکراری برای $x \in \Omega$ به دست می‌آید،

$$v^h(t_k, x) = v^h(t_{k+1}, x) - h I_{F(t_{k+1}, \cdot; v^h(t_{k+1}, \cdot)), X}(x).$$

فصل ۳

همگرایی

۱.۳ مقدمه

هدف اصلی این فصل اثبات همگرایی روش کالوکیشن بدون مش است، که در قالب قضیه‌ای آن را بیان می‌کنیم. به این منظور فرض‌هایی را برای مساله مقدار نهایی سهموی زیر در نظر می‌گیریم.

$$\begin{cases} -\partial_t v + F(t, x, v(t, x), Dv(t, x), D^2 v(t, x)) = 0, & (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d, \\ v(T, x) = f(x), & x \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \quad (1.3)$$

۲.۳ فرض‌ها

فرض ۱.۲.۳. الف) عددهای ثابتی مانند $t \in [0, T]$, $x \in \mathbb{R}^d$, $z \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}^d$ و $\Gamma, \Gamma' \in \mathbb{S}^d$ وجود دارند. اگر $\Gamma \geq \Gamma'$ باشد، آنگاه داریم،

$$F(t, x, z, p, \Gamma) \leq F(t, x, z, p, \Gamma').$$

ب) تابعی پیوسته مانند F روی $[0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ داریم، و همچنین مقدار ثابتی مانند $k_0 \in (0, \infty)$ وجود دارد، به طوری که رابطه زیر برای $t, t' \in [0, T]$, $x, x' \in \mathbb{R}^d$, $z, z' \in \mathbb{R}$, $p, p' \in \mathbb{R}^d$ و $\Gamma, \Gamma' \in \mathbb{S}^d$ برقرار است.

$$\begin{aligned} |F(t, x, z, p, \Gamma) - F(t', x', z', p', \Gamma')| \leq \\ |F_0(t, x, z) - F_0(t', x', z')| + K_0(|p - p'| + |\Gamma - \Gamma'|). \end{aligned}$$

ج) برای هر مجموعه کراندار $B \subset \mathbb{R}^d$ عددی ثابت مانند $K_{1,B} \in (0, \infty)$ وجود دارد، به طوری که برای $t \in [0, T]$, $x \in B$, $z \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}^d$ و $\Gamma \in \mathbb{S}^d$ داریم،

$$|F(t, x, z, p, \Gamma)| \leq K_{1,B}(1 + |z| + |p| + |\Gamma|).$$

تعریف ۲.۲.۳. یک \mathbb{R} مقدار، تابع شبه-پیوسته بالایی u روی $[0, T] \times \mathbb{R}^d$ ، زیر جواب چسبندگی^۱ از مساله مقدار نهایی (۱.۳) نامیده می‌شود، اگر دو شرط زیر برقرار باشند.

۱. برای هر $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$ تابعی هموار مانند φ موجود باشد، به طوری که $u - \varphi$ ماکزیم موضعی در (t, x) داشته باشد، آنگاه نامساوی زیر برقرار باشد:

$$-\partial_t \varphi(t, x) + F(t, x, u(t, x), D\varphi(t, x), D^2\varphi(t, x)) \leq 0,$$

۲. برای هر $x \in \mathbb{R}^d$ نامساوی $u(T, x) \leq f(x)$ برقرار باشد.

تعریف ۳.۲.۳. یک \mathbb{R} مقدار، تابع شبه-پیوسته پایینی u روی $[0, T] \times \mathbb{R}^d$ ، ابر جواب چسبندگی^۲ از مساله مقدار نهایی (۱.۳) نامیده می‌شود، اگر دو شرط زیر برقرار باشند.

۱. برای هر $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$ تابعی هموار مانند φ موجود باشد، به طوری که $u - \varphi$ مینیم موضعی در (t, x) داشته باشد، آنگاه نامساوی زیر برقرار باشد:

$$-\partial_t \varphi(t, x) + F(t, x, u(t, x), D\varphi(t, x), D^2\varphi(t, x)) \geq 0,$$

۲. برای هر $x \in \mathbb{R}^d$ نامساوی $u(x) \geq f(x)$ برقرار باشد.

تعریف ۴.۲.۳. u جوابی چسبندگی^۳ از معادله (۱.۳) است، اگر u هم زیر جواب چسبندگی و هم ابر جواب چسبندگی از معادله (۱.۳) باشد.

فرض ۵.۲.۳. برای هر زیر جواب چسبندگی کراندار و شبه پیوسته بالایی u و ابر جواب چسبندگی کراندار، شبه پیوسته پایینی w از مساله مقدار نهایی (۱.۳) نامساوی (۲.۳) برای $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$ برقرار است.

$$u(t, x) \leq w(t, x). \quad (2.3)$$

فرض ۶.۲.۳. معادله (۳۳.۲) جواب یکتایی مانند $v_{k,j}$ برای $j = 1, \dots, N$ ، $k = 0, \dots, n-1$ دارد.

اگر Φ مثبت معین باشد، آنگاه $L_N = |A_{\Phi, X}^-|$ است، و اگر Φ مثبت معین شرطی از درجه $m \geq 1$ باشد، آنگاه $L_N = |\tilde{A}_{\Phi, X}^-|$ ، که در ماتریس سمت چپ رابطه (۱۷.۲) نشان داده شده است. فرض‌های زیر را برای کنترل کردن کران v^h در نظر می‌گیریم.

فرض ۷.۲.۳. عددهای ثابتی مانند $k_3 \in (0, \infty)$ ، $\delta \in (0, 1/5)$ ، $h_0 \in (0, 1)$ وجود دارند، که برای $N_0 \geq 1$ و همچنین $h \leq h_0$ و $N \geq N_0$ رابطه زیر برقرار است.

$$h^\delta \sqrt{N} L_N \exp(2\sqrt{2}TK_1K_2(1 + \sqrt{N})L_N) \leq k_3,$$

^۱Viscosity Subsolution

^۲Viscosity Supersolution

^۳Viscosity Solution

بر اساس فرض ۱.۲.۳ $k_1 = k_{1,\Omega}$ است و K_2 به شکل زیر تعریف می‌شود.

$$K_2 = \max \left\{ \left(\sum_{|\alpha| \leq 2} \max_{x,y \in \Omega} |D^\alpha \Phi(x,y)|^2 \right)^{1/2}, \left(\sum_{|\alpha| \leq 2} \max_{x \in \Omega} \sum_{\ell=1}^Q |D^\alpha \pi_\ell(x)|^2 \right)^{1/2} \right\}.$$

در این جا $D^\alpha(x,y)$ به عنوان مشتق جزئی از Φ نسبت به اولین آرگومان در نظر گرفته شده است. برای فرض ۷.۲.۳ یادآوری می‌کنیم که مجموعه‌ی X از پایه‌های مختصات نسبت به ثابت c_{qu} با $c_{qu} > 0$ شبه یکنواخت^۴ نامیده می‌شود، اگر نامساوی زیر برقرار باشد.

$$qX \leq \Delta_{\Omega,X} \leq c_{qu} qX,$$

qX تفاضل فاصله از X است، که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$qX = \frac{1}{2} \min_{i \neq j} |x^{(i)} - x^{(j)}|.$$

اگر X نسبت به $c_{qu} > 0$ شبه یکنواخت باشد، آنگاه مقادیر ثابتی مانند $c_1, c_2 > 0$ وجود دارند که فقط به d و c_{qu} بستگی دارند، به طوری که نامساوی (۳.۳) برقرار است.

$$c_1 N^{-1/d} \leq qX \leq c_2 N^{-1/d}. \quad (3.3)$$

مثال ۸.۲.۳. الف) در حالتی که $\Phi(x,y) = e^{-\alpha|x-y|^2}$ است، برای هر $\alpha > 0$ داریم،

$$|A_{\Phi,X}^{-1}| \leq \frac{(2\alpha)^{d/2}}{\tilde{c}_{d,1}} q^d x e^{4\alpha \mathcal{N}^d / (\alpha q^2 X)}$$

به صورت زیر تعریف می‌شوند. $\tilde{c}_{d,2}$ و $\tilde{c}_{d,1}$

$$\tilde{c}_{d,1} = \frac{1}{2\Gamma((d+2)/2)} \left(\frac{\tilde{c}_{d,2}}{\sqrt{\lambda}} \right)^d, \quad \tilde{c}_{d,2} = 12 \left(\frac{\pi\Gamma^2((d+2)/2)}{9} \right)^{1/(d+1)}$$

تابع گاما با Γ [۱۳] نشان داده شده است. اگر X شبه یکنواخت باشد، آنگاه طبق (۳.۳) داریم،

$$L_N = |A_{\Phi,X}^{-1}| \leq \frac{(2\alpha)^{d/2}}{\tilde{c}_{d,1}} c_2^d N^{-1} e^{4\alpha \mathcal{N}^d / (\alpha c_1^2)}$$

ب) در حالتی که $\Phi(x,y) = (\alpha^2 + |x-y|^2)^{-\beta}$ است، برای هر $\alpha, \beta > 0$ داریم،

$$|A_{\Phi,X}^{-1}| \leq \tilde{c}_{d,\alpha,\beta} q^{\beta+d/2-1/2} x \exp(2\alpha \tilde{c}_{d,2} / qX)$$

بنابراین اگر X نسبت به ثابت معین $\tilde{c}_{d,\alpha,\beta}$ [۱۳] شبه یکنواخت باشد، آنگاه رابطه زیر برقرار است.

$$L_N = |A_{\Phi,X}^{-1}| \leq \tilde{c}_{d,\alpha,\beta} c_2^{\beta+d/2-1/2} N^{-(\beta+d/2-1/2)/d} e^{2\alpha \tilde{c}_{d,2} N^{1/d} / c_1}$$

شرایط زیر در رابطه (۲۰.۲) برای به دست آوردن همگرایی از درونیایی استفاده می‌شود.

فرض ۹.۲.۳. الف) مقدار نهایی تابع f و همچنین تابع $F(t_k, \cdot; v^h(t_k, \cdot))$ برای $k = 0, \dots, n-1$ به $\mathcal{N}_\Phi(\Omega)$ تعلق دارند.

^۴Quasi-Uniform

(ب) عدد N از پایه مختصات، تابعی از گام زمانی h است و داریم،

$$\Delta_{X,\Omega}^v \left(1 + \sup_{k=0,\dots,n-1} |F(t_{k,\cdot}; v^h(t_k, \cdot))|_{\mathcal{N}_{\Phi}(\Omega)} \right) \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0.$$

۳.۳ همگرایی روش کالوکیشن بدون مش

در این بخش همگرایی روش کالوکیشن بدون مش را اثبات می‌کنیم. بنابراین برای $s \in (t_k, t_{k+1})$ ، $v^h(s, x)$ را با هر درونیابی پیوسته از $v^h(t_k, x)$ و $v^h(t_{k+1}, x)$ تعریف می‌کنیم.

قضیه ۱.۳.۳. فرض کنید که فرض‌های ۱.۲.۳، ۷.۲.۳ و ۹.۲.۳ برقرار باشند، بنابراین داریم،

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ s \rightarrow 0}} \sup_{x \in \Omega} |v^h(s, x) - v(t, x)| = 0.$$

نکته

فرض می‌کنیم که در قضیه ۱.۳.۳ در مجموع برای فرض‌های ۱.۲.۳، ۷.۲.۳ و ۹.۲.۳ در مجموع Ω زیر مجموعه‌ای باز و کراندار از \mathbb{R}^d است، و در شرایط مخروط درونی صدق می‌کند و X ، $\Pi_{m-1}(\mathbb{R}^d)$ -تک حل‌پذیر است. تمام این شرایط وقتی که Ω مجموعه مستطیلی باز است، و X مجموعه‌ای از نقاط شبکه‌ای شبه یکنواخت از Ω با $N \geq m$ باشد، برقرار هستند.

۱.۳.۳ لم‌ها

برای اثبات قضیه ۱.۳.۳ به بیان پیش‌نیازهای می‌پردازیم، و در قالب چند لم و گزاره بیان می‌کنیم.

لم ۲.۳.۳. فرض کنید که فرض‌های ۱.۲.۳ و ۷.۲.۳ برقرار باشند. آنگاه عدد ثابت $h_1 \in (0, 1)$ وجود دارد و همچنین $N_1 \geq 1$ است، به طوری که برای $h \leq h_1$ و $N \geq N_1$ رابطه (۴.۳) به دست می‌آید.

$$\max_{k=0,\dots,n-1} |v_k| \leq \left(\sup_{x \in \Omega} |f(x)| + \frac{1}{\sqrt{2}K_2} \right) \exp(2\sqrt{2}TK_1K_2\sqrt{N}(1 + \sqrt{N})L_N). \quad (4.3)$$

برهان. نامساوی (۵.۳) برقرار است.

$$|a| + |b| \leq \sqrt{2}\sqrt{a^2 + b^2}, \quad (5.3)$$

همچنین رابطه (۱۷.۲) را به صورت زیر یادآوری می‌کنیم.

$$\begin{pmatrix} A_{\Phi,X} & P \\ P^T & o \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \xi(b) = A_{\Phi,X}^{-1}b, \\ \eta(b) = 0. \end{cases} \quad (6.3)$$

حال طبق نامساوی (۵.۳) و رابطه (۶.۳) داریم:

$$\begin{aligned} |\xi(b)| + |\eta(b)| &\leq \sqrt{2} \sqrt{\xi^2(b) + \eta^2(b)} = \sqrt{2} \sqrt{(A_{\Phi, X}^{-1} b)^2 + 0^2} \\ &= \sqrt{2} |A_{\Phi, X}^{-1} b| = \sqrt{2} |A_{\Phi, X}^{-1}| |b| \end{aligned}$$

از طرفی $L_N = |A_{\Phi, X}^{-1}|$ است، و همچنین v_k جواب است. پس رابطه (۷.۳) به دست می‌آید.

$$|\xi(v_k)| + |\eta(v_k)| \leq \sqrt{2} L_N |v_k|. \quad (7.3)$$

برای هر k ، $\sum_{i=0}^2 |D^i v^h(t_k, x)|$ به صورت زیر است.

$$\sum_{i=0}^2 |D^i v^h(t_k, x)| = v^h(t_k, x) + D v^h(t_k, x) + D^2 v^h(t_k, x),$$

$v^h(t_k, x)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$v^h(t_k, x) = \sum_{j=1}^N \xi_j(v_k) \Phi(x, y) + \sum_{\ell=1}^Q \eta_\ell(v_k) \pi_\ell(x),$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^2 |D^i v^h(t_k, x)| &= \left(\sum_{j=1}^N \xi_j(v_k) \Phi(x, y) + \sum_{\ell=1}^Q \eta_\ell(v_k) \pi_\ell(x) \right) \\ &+ \left(D \sum_{j=1}^N \xi_j(v_k) \Phi(x, y) + D \sum_{\ell=1}^Q \eta_\ell(v_k) \pi_\ell(x) \right) \\ &+ \left(D^2 \sum_{j=1}^N \xi_j(v_k) \Phi(x, y) + D^2 \sum_{\ell=1}^Q \eta_\ell(v_k) \pi_\ell(x) \right) \\ &= \sum_{j=1}^N 1 \cdot \xi_j(v_k) \Phi(x, y) + \sum_{\ell=1}^Q \eta_\ell(v_k) \pi_\ell(x) + D \sum_{j=1}^N 1 \cdot \xi_j(v_k) \Phi(x, y) \\ &+ D \sum_{\ell=1}^Q \eta_\ell(v_k) \pi_\ell(x) + D^2 \sum_{j=1}^N 1 \cdot \xi_j(v_k) \Phi(x, y) + D^2 \sum_{\ell=1}^Q \eta_\ell(v_k) \pi_\ell(x) \\ &\leq \max \left(\sum_{j=1}^N 1 \cdot \xi_j(v_k) \Phi(x, y) + \sum_{\ell=1}^Q \eta_\ell(v_k) \pi_\ell(x) + D \sum_{j=1}^N 1 \cdot \xi_j(v_k) \Phi(x, y) \right. \\ &\quad \left. + D \sum_{\ell=1}^Q \eta_\ell(v_k) \pi_\ell(x) + D^2 \sum_{j=1}^N 1 \cdot \xi_j(v_k) \Phi(x, y) + D^2 \sum_{\ell=1}^Q \eta_\ell(v_k) \pi_\ell(x) \right) \end{aligned}$$

از طرفی ξ و η به صورت $\xi(v_k) = (\xi_1(v_k), \dots, \xi_N(v_k))^T$ و $\eta(v_k) = (\eta_1(v_k), \dots, \eta_Q(v_k))^T$ تعریف می‌شوند. همچنین با استفاده از این تعریف و نامساوی کوشی شوارتز برای $\sum_{j=1}^N \xi_j(v_k)$ رابطه

زیر حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \lambda_j \xi_j(v_k) &= \langle \lambda, \dots, \lambda \rangle \langle \xi_1(v_k), \dots, \xi_N(v_k) \rangle^T \\ &\leq \sqrt{\lambda^2 \dots \lambda^2} (\xi(v_k)^2)^{1/2} \\ &= \sqrt{N} \|\xi(v_k)\| = \sqrt{N} \max |\xi(v_k)| \end{aligned}$$

همچنین داریم،

$$D \sum_{j=1}^N \lambda_j \xi_j(v_k) \Phi(x, y) = \sum_{j=1}^N \lambda_j \xi_j(v_k) D \Phi(x, y).$$

در نتیجه $v^h(t_k, x)$ به صورت زیر حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^2 |D^i v^h(t_k, x)| &\leq \max \left(\sum_{j=1}^N \lambda_j \xi_j(v_k) \Phi(x, y) + \sum_{\ell=1}^Q \eta_\ell(v_k) \pi_\ell(x) + D \sum_{j=1}^N \lambda_j \xi_j(v_k) \Phi(x, y) \right. \\ &\quad \left. + D \sum_{\ell=1}^Q \eta_\ell(v_k) \pi_\ell(x) + D^2 \sum_{j=1}^N \lambda_j \xi_j(v_k) \Phi(x, y) + D^2 \sum_{\ell=1}^Q \eta_\ell(v_k) \pi_\ell(x) \right) \\ &\leq \max \left(\sqrt{N} |\xi(v_k)| + |\eta(v_k)| \right) \left\{ \left(\sum_{|\alpha| \leq 2} \max |D^\alpha \Phi(x, y)|^2 \right)^{1/2}, \right. \\ &\quad \left. \left(\sum_{|\alpha| \leq 2} \max \sum_{\ell=1}^Q |D^\alpha \pi_\ell(x)|^2 \right)^{1/2} \right\} = K_2 (\sqrt{N} |\xi(v_k)| + |\eta(v_k)|) \end{aligned}$$

طبق رابطه (۷.۳) به دست می‌آوریم:

$$\sum_{i=0}^2 |D^i v^h(t_k, x)| \leq K_2 \sqrt{2} L_N |v_k| (1 + \sqrt{N}) \leq \sqrt{2} K_2 (1 + \sqrt{N}) L_N |v_k|. \quad (۸.۳)$$

از (۸.۳) و فرض ۱.۲.۳، $|\tilde{F}_{k,j}(v_k)|$ به صورت زیر حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned} |\tilde{F}_{k,j}(v_k)| &= |F(t_k, x; v^h(t_k, x), Dv^h(t_k, x), D^2v^h(t_k, x))| \\ &\leq K_1 (1 + |v^h(t_k, x)| + |Dv^h(t_k, x)| + |D^2v^h(t_k, x)|) \\ &= K_1 + K_1 \sum_{i=0}^2 |D^i v^h(t_k, x^{(j)})| \\ &\leq K_1 + \sqrt{2} K_1 K_2 (1 + \sqrt{N}) L_N |v_k| \end{aligned} \quad (۹.۳)$$

از طرفی نامساوی $|y| \leq \sqrt{N} \max_{j=1, \dots, N} |y_j|$ برای $y = (y_1, \dots, y_N)^T \in \mathbb{R}^N$ برقرار است، بنابراین رابطه (۱۰.۳) به دست می‌آید.

$$|\tilde{F}_k(v_k)| \leq \sqrt{N} \max |\tilde{F}_{k,j}(v_k)|. \quad (۱۰.۳)$$

پس طبق رابطه (۹.۳) و (۱۰.۳) داریم،

$$|\tilde{F}_k(v_k)| \leq K_1 \sqrt{N} + \sqrt{2} K_1 K_2 \sqrt{N} L_N |v_k| + \sqrt{2} K_1 K_2 N L_N |v_k|.$$

بنابراین طبق رابطه (۳۲.۲) برای v_k داریم،

$$\begin{aligned}
 |v_k| &\leq |v_{k+1}| + h(1 - \theta)|\tilde{F}_k(v_k)| + h\theta|\tilde{F}_{k+1}(v_{k+1})| \\
 &= |v_{k+1}| + (h - h\theta)(K_1\sqrt{N} + \sqrt{\Psi}K_1K_2\sqrt{N}L_N|v_k| + \sqrt{\Psi}K_1K_2NL_N|v_k|) \\
 &\quad + h\theta(K_1\sqrt{N} + \sqrt{\Psi}K_1K_2\sqrt{N}L_N|v_{k+1}| + \sqrt{\Psi}K_1K_2NL_N|v_{k+1}|) \\
 &= |v_{k+1}| + hK_1\sqrt{N} + \sqrt{\Psi}hK_1K_2\sqrt{N}L_N|v_k| + \sqrt{\Psi}hK_1K_2NL_N|v_k| \\
 &\quad - h\theta K_1\sqrt{N} - \sqrt{\Psi}h\theta K_1K_2\sqrt{N}L_N|v_k| - \sqrt{\Psi}h\theta K_1K_2NL_N|v_k| \\
 &\quad + h\theta K_1\sqrt{N} + \sqrt{\Psi}h\theta K_1K_2\sqrt{N}L_N|v_{k+1}| + \sqrt{\Psi}h\theta K_1K_2NL_N|v_{k+1}| \\
 &= \left(1 + \sqrt{\Psi}h\theta K_1K_2\sqrt{N}(\theta + \sqrt{N})L_N\right) |v_{k+1}| \\
 &\quad + \sqrt{\Psi}h(1 - \theta)K_1K_2\sqrt{N}(\theta + \sqrt{N})L_N|v_k| + hK_1\sqrt{N}, \\
 |v_k| - \sqrt{\Psi}h(1 - \theta)K_1K_2\sqrt{N}(\theta + \sqrt{N})L_N|v_k| &\leq \left(1 + \sqrt{\Psi}h\theta K_1K_2\sqrt{N}(\theta + \sqrt{N})L_N\right) \\
 &\quad |v_{k+1}| + hK_1\sqrt{N}, \\
 |v_k|(\theta + \sqrt{N}) &\leq \left(1 + \sqrt{\Psi}h\theta K_1K_2\sqrt{N}(\theta + \sqrt{N})L_N\right) \\
 &\quad |v_{k+1}| + hK_1\sqrt{N},
 \end{aligned} \tag{۱۱.۳}$$

حال دو طرف نامساوی (۱۱.۳) را بر ضریب $|v_k|$ تقسیم می‌کنیم. برای $h_1 \leq h$ و $N_1 \geq N$ رابطه (۱۱.۳) برای هر $k = 0, \dots, n-1$ و $h \leq h_1$ و $N \geq N_1$ به شرح زیر است.

$$\begin{aligned}
 |v_k| &\leq \frac{1 + \sqrt{\Psi}h\theta K_1K_2\sqrt{N}(\theta + \sqrt{N})L_N}{1 - \sqrt{\Psi}h(1 - \theta)K_1K_2\sqrt{N}(\theta + \sqrt{N})L_N} |v_{k+1}| \\
 &\quad + \frac{hK_1\sqrt{N}}{1 - \sqrt{\Psi}h(1 - \theta)K_1K_2\sqrt{N}(\theta + \sqrt{N})L_N}.
 \end{aligned}$$

طبق فرض ۷.۲.۳ برای $\sqrt{\Psi}h(1 - \theta)K_1K_2\sqrt{N}(\theta + \sqrt{N})L_N$ نامساوی زیر حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned}
 \sqrt{\Psi}h(1 - \theta)K_1K_2\sqrt{N}(\theta + \sqrt{N})L_N &\leq h^\delta \sqrt{N}L_N \exp(2\sqrt{\Psi}TK_1K_2(\theta + \sqrt{N})L_N) \\
 &\leq k_3 \leq \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

از طرفی $\theta \in [0, 1]$ است، پس مقدار ماکزیمم خود را در یک می‌گیرد.

$$\sqrt{\Psi}h(1 - \theta)K_1K_2\sqrt{N}(\theta + \sqrt{N})L_N \leq \frac{1}{4}$$

$$1 - \sqrt{\Psi}h(1 - \theta)K_1K_2\sqrt{N}(\theta + \sqrt{N})L_N \geq \frac{1}{4}$$

پس برای v_k رابطه (۱۲.۳) حاصل می‌شود.

$$|v_k| \leq (1 + 2\sqrt{\Psi}hK_1K_2\sqrt{N}(\theta + \sqrt{N})L_N)|v_{k+1}| + 2hK_1\sqrt{N}. \tag{۱۲.۳}$$

$|v_{k+1}|$ را برای هر $k = 0, \dots, n-1$ به شکل زیر می‌نویسیم.

$$(1 + 2\sqrt{2}hK_1K_2\sqrt{N}(1 + \sqrt{N}L_N))|v_1|(1 + 2\sqrt{2}hK_1K_2\sqrt{N}(1 + \sqrt{N}L_N))|v_2|\dots \\ (1 + 2\sqrt{2}hK_1K_2\sqrt{N}(1 + \sqrt{N}L_N))|v_n|,$$

بنابراین

$$|v_{k+1}| \leq (1 + 2\sqrt{2}hK_1K_2\sqrt{N}(1 + \sqrt{N}L_N))^n \sup_{x \in \Omega} |f(x)|,$$

کران بالایی برای v_k به صورت زیر حاصل می‌شود.

$$|v_k| \leq (1 + 2\sqrt{2}hK_1K_2\sqrt{N}(1 + \sqrt{N}L_N))^n \sup_{x \in \Omega} |f(x)| \\ + 2hK_1\sqrt{N} \frac{(1 + 2\sqrt{2}hK_1K_2\sqrt{N}(1 + \sqrt{N}L_N)) - 1}{2\sqrt{2}hK_1K_2\sqrt{N}(1 + \sqrt{N}L_N)}.$$

طبق فرض ۷.۲.۳ رابطه زیر به دست می‌آید.

$$|v_k| \leq (1 + 2\sqrt{2}hK_1K_2\sqrt{N}(1 + \sqrt{N}L_N))^n \sup_{x \in \Omega} |f(x)| \\ + \frac{1}{\sqrt{2}K_2(1 + \sqrt{N}L_N)} (1 + 2\sqrt{2}hK_1K_2\sqrt{N}(1 + \sqrt{N}L_N) - 1) \\ \leq \exp(2\sqrt{2}TK_1K_2\sqrt{N}(1 + \sqrt{N}L_N)) \sup_{x \in \Omega} |f(x)| \\ + \frac{1}{\sqrt{2}K_2(1 + \sqrt{N}L_N)} (\exp(2\sqrt{2}TK_1K_2\sqrt{N}(1 + \sqrt{N}L_N))),$$

در نتیجه حکم ثابت شد.

$$\max_{k=0, \dots, n-1} |v_k| \leq \left(\sup_{x \in \Omega} |f(x)| + \frac{1}{\sqrt{2}K_2} \right) \exp(2\sqrt{2}TK_1K_2\sqrt{N}(1 + \sqrt{N}L_N)).$$

□

لم ۳.۳.۳. فرض کنید فرض‌های ۱.۲.۳، ۶.۲.۳ و ۷.۲.۳ برقرار باشند. آنگاه ثابت‌های $k_4 \in (0, \infty)$ و $h_2 \in (0, 1)$ وجود دارند، به طوری که برای $h \leq h_2$ و $N \geq N_2$ موارد زیر برقرار است.

$$\sum_{|\alpha| \leq 3} |D^\alpha v^h(t_k, x)| \leq K_4 h^{-\delta} \quad \text{برای } k = 0, \dots, n-1 \text{ و } x \in \Omega \text{ داریم}$$

(ب) نامساوی $\sum_{|\alpha| \leq 3} |D^\alpha v^h(t_{k+1}, x) - D^\alpha v^h(t_k, x)| \leq K_4 h^{1-2\delta}$ برای $k = 0, \dots, n-2$ و $x \in \Omega$ برقرار است.

برهان. الف) ثابت $k = 0, \dots, n-1$ را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم که $h \leq h_1$ و $N \geq N_1$ مانند فرض ۷.۲.۳ باشند، با استفاده از لم ۲.۳.۳ و همچنین نامساوی $(1 + \sqrt{N}) \leq 2\sqrt{N}$

رابطه زیر به دست می آید.

$$\begin{aligned}
 \sum_{|\alpha| \leq 3} |D^\alpha v^h(t_k, x)| &\leq \sqrt{2} K_{\Psi} (1 + \sqrt{N}) L_N |v_k| \\
 &\leq 2 \sqrt{2} K_{\Psi} \sqrt{N} L_N |v_k| \\
 &\leq 2 \left(\frac{K_{\Psi}}{K_{\Psi}} + \sqrt{2} K_{\Psi} \sup_{x \in \Omega} |f(x)| \right) \\
 &\quad \sqrt{N} L_N \exp(2 \sqrt{2} T K_{\Psi} K_{\Psi} \sqrt{N} (1 + \sqrt{N}) L_N) \\
 &= 2 \left(1 + \sqrt{2} K_{\Psi} \sup_{x \in \Omega} |f(x)| \right) \\
 &\quad \sqrt{N} L_N \exp(2 \sqrt{2} T K_{\Psi} K_{\Psi} \sqrt{N} (1 + \sqrt{N}) L_N) \\
 &\leq 2 \left(1 + \sqrt{2} K_{\Psi} \sup_{x \in \Omega} |f(x)| \right) K_{\Psi} h^{-\delta} \\
 &= K_{\Psi} h^{-\delta}.
 \end{aligned}$$

بنابراین اولین حکم ثابت شد.

(ب) فرض می کنیم $\xi(b)$ و $\eta(b)$ در b خطی باشند، بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}
 \sum_{|\alpha| \leq 3} |D^\alpha v^h(t_{k+1}, x) - D^\alpha v^h(t_k, x)| &\leq K_{\Psi} \left(\sqrt{N} |\xi(v_{k+1})| + |\eta(v_{k+1})| \right) \\
 &\quad - K_{\Psi} \left(\sqrt{N} |\xi(v_k)| + |\eta(v_k)| \right) \quad (۱۳.۳) \\
 &\leq \sqrt{2} K_{\Psi} (1 + \sqrt{N}) L_N |v_{k+1} - v_k|.
 \end{aligned}$$

$|F_k(v_k)|$ را به صورت (۱۴.۳) تعریف می کنیم.

$$|F_k(v_k)| = \left| \sum_{j=1}^N F_{k,j}(v_k) \right|^{1/2} \quad (۱۴.۳)$$

همچنین $\tilde{F}_{k,j}(v_k) = F(t_k, x^{(j)}; v^h(t_k, \cdot))$ است. بنابراین طبق رابطه (۱۴.۳) و تعریف $\tilde{F}_{k,j}(v_k)$ رابطه زیر حاصل می شود.

$$|\tilde{F}_k(v_k)| = \left| \sum_{j=1}^N \tilde{F}_{k,j}(v_k) \right|^{1/2} = \sum_{j=1}^N |F(t_k, x^{(j)}; v^h(t_k, x))|^{1/2}$$

حال طبق قسمت (ج) فرض ۱.۲.۳ داریم،

$$|F(t, x, z, p, \Gamma)| \leq K_{\Psi, B} (1 + |z| + |p| + |\Gamma|). \quad (۱۵.۳)$$

پس از نامساوی (۱۵.۳) برای $|\tilde{F}_k(v_k)|$ نامساوی زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} |\tilde{F}_k(v_k)| &\leq \left(\sum_{j=1}^N K_1 \left(1 + \sum_{i=0}^2 |D^i v^h(t_k, x)| \right) \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^N K_1^2 \left(1 + \sum_{i=0}^2 |D^i v^h(t_k, x^j)| \right)^2 \right)^{1/2} \quad (16.3) \\ &\leq K_1 \sqrt{N} \left(1 + \sum_{i=0}^2 \sup_{x \in \Omega} |D^i v^h(t_k, x^j)| \right) \end{aligned}$$

نامساوی (۱۶.۳) برای $h \leq h_1$ و $N \geq N_1$ طبق حکم قسمت الف، تعریف نورم و همچنین رابطه $|y| \leq \sqrt{N} \max |y_j|$ به صورت زیر است.

$$|\tilde{F}_k(v_k)| \leq C \sqrt{N} h^{-\delta}.$$

بنابراین برای $\theta = 0$ رابطه زیر برقرار است.

$$|v_{k+1} - v_k| \leq h(1 - \theta) |\tilde{F}_k(v_k)| + h\theta |\tilde{F}_{k+1}(v_{k+1})| \leq C \sqrt{N} h^{1-\delta}. \quad (17.3)$$

با جایگذاری رابطه (۱۷.۳) در نامساوی (۱۳.۳) و همچنین با استفاده از فرض ۷.۲.۳ برای h های به اندازه کافی کوچک و N های بزرگ، داریم

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha| \leq 2} |D^\alpha v^h(t_{k+1}, x) - D^\alpha v^h(t_k, x)| &\leq \sqrt{2} k_2 (1 + \sqrt{N}) L_N |v_{k+1} - v_k| \\ &\leq \sqrt{2} k_2 (1 + \sqrt{N}) L_N C \sqrt{N} h^{1-\delta} \\ &= c(1 + \sqrt{N}) \sqrt{N} L_N h^{1-\delta} \\ &\leq c h^{1-\delta} h^{-\delta} \\ &= c h^{1-2\delta}. \end{aligned}$$

□

بنابراین دومین حکم ثابت شد.

k_4 را مانند لم ۳.۳.۳ در نظر می‌گیریم. برای $h > 0$ و $k > 0$ ، \mathcal{D} و \mathcal{X} را به ترتیب به صورت زیر

تعریف می‌کنیم.

$$\mathcal{D}_{h,\delta} = \{(p, \Gamma) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^d : |p|, |\Gamma| \leq K_4 h^{-\delta}\}, \quad (18.3)$$

$$\mathcal{X}_{h,k} = \{w \in \mathbb{R}^d : |w| \leq h^{-k}\}. \quad (19.3)$$

لم ۴.۳.۳ نوع دیگری از لم (۴.۱) در [۱۰] می‌باشد.

لم ۴.۳.۳. فرض کنید $O \subset \mathbb{R}^d$ باز و کراندار است، آنگاه اعداد ثابت $h_3 \in (0, 1]$ ، $\beta \in (0, \infty)$ ، $\{\varphi^h\}_{h \in (0, h_3]} \subset C^3(O)$ و $(t, x, z) \in [0, T] \times O \times \mathbb{R}$ برای $k \in (0, \infty)$ وجود دارند، به طوری که برای

و همچنین $h \in (0, h_3]$ نامساوی (۲۰.۳) را داریم،

$$\sum_{|\alpha| \leq 3} \sup_{y \in O} |D^\alpha \varphi^h(y)| \leq K_4 h^{-\delta}, \quad (20.3)$$

پس رابطه زیر برقرار است.

$$\begin{aligned} & \left| \varphi^h(x) - hF(t, x, z, D\varphi^h(x), D^2\varphi^h(x)) \right. \\ & \quad - \sup_{(p, \Gamma) \in \mathcal{D}_{h, \delta}} \inf_{w \in \mathcal{X}_{h, k}} \left[\varphi^h(x + \sqrt{h}w) \right. \\ & \quad \left. \left. - \sqrt{h}w^T p - \frac{h}{\nu} w^T \Gamma w - hF(t, x, z, p, \Gamma) \right] \right| \\ & \leq C_{k, \nu} h^{1+\beta} \end{aligned}$$

برهان. طبق صورت همین لم ابتدا ثابت دلخواه $\varphi^h \in C^3(O)$ را در نظر می‌گیریم، همچنین برای $(t, x, z) \in [0, T] \times O \times \mathbb{R}$ نامساوی $\sum_{|\alpha| \leq 3} \sup_{y \in O} |D^\alpha \varphi^h(y)| \leq K_\nu h^{-\delta}$ برقرار است. سپس $\varphi = \varphi^h$ ، $p_0 = D\phi(x)$ ، $\Gamma_0 = D^2\phi(x)$ و همچنین برای سادگی $F(p, \Gamma) = F(t, x, z, p, \Gamma)$ قرار می‌دهیم. برای $(p, \Gamma) \in \mathcal{D}_{h, \delta}$ وقتی که $\delta < 1/5$ است، $\varepsilon > 0$ وجود دارد، به طوری که $\delta < \frac{1}{5+\varepsilon}$ است، آنگاه برای $k > 0$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$k = \frac{1}{3} \left(\frac{5}{10 + 2\varepsilon} - \delta \right).$$

حال ثابت $h_3 \in (0, 1]$ را در نظر می‌گیریم، به طوری که برای $w \in \mathcal{X}_{h, k}$ ، $h \in (0, h_3]$ و $x + \sqrt{h}w \in \Omega$ است. بسط تیلور را روی ϕ در سومین عبارت حکم لم به کار می‌بریم.

$$\begin{aligned} & \sup_{(p, \Gamma) \in \mathcal{D}_{h, \delta}} \inf_{w \in \mathcal{X}_{h, k}} \left[\varphi(x + \sqrt{h}w) - \sqrt{h}w^T p - \frac{h}{\nu} w^T \Gamma w - hF(p, \Gamma) \right] \\ & = \sup_{(p, \Gamma) \in \mathcal{D}_{h, \delta}} \inf_{w \in \mathcal{X}_{h, k}} \left[\varphi(x) + \sqrt{h}w\varphi'(x) + \frac{1}{\nu} (\sqrt{h}w)^2 \varphi''(x) - \sqrt{h}w^T p - \frac{h}{\nu} w^T \Gamma w - hF(p, \Gamma) \right] \\ & = \varphi(x) + \sup_{(p, \Gamma) \in \mathcal{D}_{h, \delta}} \inf_{w \in \mathcal{X}_{h, k}} \left[\sqrt{h}w^T (\varphi'(x) - p) + \frac{h}{\nu} w^T (\varphi''(x) - \Gamma)w - hF(p, \Gamma) \right], \end{aligned} \tag{21.3}$$

با استفاده از نمادگذاری که برای $D\phi(x)$ و $D^2\phi(x)$ در ابتدای اثبات گفتیم، در رابطه (21.3) قرار می‌دهیم.

$$\begin{aligned} & \sup_{(p, \Gamma) \in \mathcal{D}_{h, \delta}} \inf_{w \in \mathcal{X}_{h, k}} \left[\varphi(x + \sqrt{h}w) - \sqrt{h}w^T p - \frac{h}{\nu} w^T \Gamma w - hF(p, \Gamma) \right] \\ & = \varphi(x) + \sup_{(p, \Gamma) \in \mathcal{D}_{h, \delta}} \inf_{w \in \mathcal{X}_{h, k}} \left[\sqrt{h}w^T (p_0 - p) + \frac{h}{\nu} w^T (\Gamma_0 - \Gamma)w - hF(p, \Gamma) \right], \end{aligned} \tag{22.3}$$

بنابراین سمت راست نامساوی (22.3)، طبق تعریف مجموعه $\mathcal{X}_{h, k}$ و نامساوی (20.3) کمتر مساوی

می‌شود. بنابراین رابطه (۲۱.۳) به صورت زیر حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned}
 & \sup_{(p,\Gamma) \in \mathcal{D}_{h,\delta}} \inf_{w \in \mathcal{X}_{h,k}} \left[\varphi(x + \sqrt{h}w) - \sqrt{h}w^T p - \frac{h}{\gamma} w^T \Gamma w - hF(p, \Gamma) \right] \\
 & \geq \varphi(x) - ch^{-\delta + \frac{\gamma}{3} - 2k} + \sup_{(p,\Gamma) \in \mathcal{D}_{h,\delta}} \inf_{w \in \mathcal{X}_{h,k}} \left[\sqrt{h}w^T (p_\circ - p) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{h}{\gamma} w^T (\Gamma_\circ - \Gamma) w - hF(p, \Gamma) \right] \tag{۲۳.۳} \\
 & = \varphi(x) - ch^{1^\circ + \frac{\gamma}{3} / 1^\circ + 2\varepsilon} + \sup_{(p,\Gamma) \in \mathcal{D}_{h,\delta}} \inf_{w \in \mathcal{X}_{h,k}} \left[\sqrt{h}w^T (p_\circ - p) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{h}{\gamma} w^T (\Gamma_\circ - \Gamma) w - hF(p, \Gamma) \right],
 \end{aligned}$$

$p = p_\circ$ و $\Gamma = \Gamma_\circ$ قرار می‌دهیم، همچنین نامساوی $ch^{1^\circ + \frac{\gamma}{3} / 1^\circ + 2\varepsilon} \geq ch^{1^\circ + \frac{\gamma}{3} / 1^\circ + 2\varepsilon}$ برقرار است. پس یافتیم که سمت راست نامعادله (۲۳.۳) بزرگتر از $\varphi(x) - ch^{1^\circ + \frac{\gamma}{3} / 1^\circ + 2\varepsilon} - hF(p, \Gamma)$ است. برای نشان دادن عکس نامساوی، $(p, \Gamma) \in \mathcal{D}_{h,\delta}$ در نظر می‌گیریم. اگر رابطه زیر برقرار باشد، آنگاه می‌توانیم $\lambda \in (0, 2k - \delta)$ در نظر بگیریم.

$$2k - \delta = \frac{2}{3} \left(\frac{5}{1^\circ + 2\varepsilon} - \delta \right) - \delta = \frac{5}{3} \left(\frac{1}{5 + \varepsilon} - \delta \right) > 0.$$

فرض کنید که مینیمم مقدار ویژه μ از $\Gamma_\circ - \Gamma$ بزرگتر از $h^{-\gamma}$ است. پس $h^\gamma I + \Gamma \leq \Gamma_\circ$ می‌باشد، به طوری که طبق فرض ۱.۲.۳ قسمت الف داریم،

$$F(p, \Gamma) \geq F(p_\circ, \Gamma_\circ + h^\gamma I).$$

از طرفی دیگر طبق قسمت ب فرض ۱.۲.۳ نامساوی زیر برقرار است.

$$\begin{aligned}
 |F(t, x, z, p, \Gamma) - F(t, x, z, p_\circ, \Gamma_\circ)| & \leq |F_\circ(t, x, z) - F_\circ(t, x, z)| + k_\circ |p - p_\circ| + k_\circ |\Gamma - \Gamma_\circ| \\
 & \leq k_\circ |p - p_\circ| + k_\circ h^\gamma,
 \end{aligned}$$

$F(p, \Gamma) = F(t, x, z, p, \Gamma)$ قرار دادیم، بنابراین رابطه (۲۴.۳) حاصل می‌شود.

$$|F(p, \Gamma) - F(p_\circ, \Gamma_\circ)| \leq k_\circ |p - p_\circ| + k_\circ h^\gamma. \tag{۲۴.۳}$$

با استفاده از تعریف پیوستگی برای $F(p, \Gamma)$ داریم $|F(t, x, z, p', \Gamma')| \geq |F(t, x, z, p, \Gamma)|$ بنابراین $F(p, \Gamma) \geq F(p_\circ, \Gamma_\circ)$ است. در نتیجه با ضرب منفی در رابطه (۲۴.۳) و جابه‌جایی $F(p_\circ, \Gamma_\circ)$ نامساوی زیر حاصل می‌شود.

$$F(p, \Gamma) \geq F(p_\circ, \Gamma_\circ) - k_\circ |p - p_\circ| - k_\circ h^\gamma,$$

بنابراین داریم،

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{h}w(p_* - p)^T + \frac{h}{\sqrt{\gamma}}w^T(\Gamma_* - \Gamma)w - hF(p, \Gamma) \\
 & \leq \sqrt{h}w(p_* - p)^T + K_{\#}hh^{-\delta}|w|^2 - hF(p_*, \Gamma_*) \\
 & \quad + k_*h|p - p_*| + K_*h^{1+\gamma} \\
 & = \sqrt{h}w(p_* - p)^T + K_{\#}h^{1-\delta}|w|^2 - hF(p_*, \Gamma_*) \\
 & \quad + K_*h|p - p_*| + K_*h^{1+\gamma},
 \end{aligned} \tag{۲۵.۳}$$

در حالتی که $p = p_*$ است، w را مساوی صفر در نظر می‌گیریم. بنابراین سمت راست نامساوی (۲۵.۳) برابر $-hF(p_*, \Gamma_*) + k_*h^{1+\gamma}$ می‌شود. در سایر جاها با انتخاب $w = -h^{\delta} \frac{(p_* - p)}{|p_* - p|}$ در نامساوی (۲۵.۳) داریم،

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{h}w(p_* - p)^T + \frac{h}{\sqrt{\gamma}}w^T(\Gamma_* - \Gamma)w - hF(p, \Gamma) \\
 & = -h^{\frac{1}{2}+\delta}|p_* - p| + K_{\#}h^{1+\delta} - hF(p_*, \Gamma_*) + K_*h|p - p_*| + K_*h^{1+\gamma} \\
 & = |p_* - p|(-h^{\frac{1}{2}+\delta} + K_*h) - hF(p_*, \Gamma_*) + K_{\#}h^{1+\delta} + K_*h^{1+\gamma} \\
 & \leq -hF(p_*, \Gamma_*) + (K_* + K_{\#})h^{1+\min\{\gamma, \delta\}}.
 \end{aligned}$$

برای هر h به اندازه کافی کوچک $h'_* \in (0, h'_*]$ وجود دارد، به طوری که نامساوی $-h^{1/2+\delta} + k_*h \leq 0$ برای تمام $h \in (0, h'_*]$ برقرار است.

فرض کنید که مینیمم مقدار ویژه μ از $\Gamma_* - \Gamma$ کمتر از $-h^{\gamma}$ است. سپس $w \neq 0$ را در نظر می‌گیریم، به طوری که $(p_* - p)^T w \leq 0$ و $|w| = h^{-k}$ است. با این انتخاب نامساوی زیر حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{h}w(p_* - p)^T + \frac{h}{\sqrt{\gamma}}w^T(\Gamma_* - \Gamma)w - hF(p, \Gamma) \\
 & \leq \frac{h}{\sqrt{\gamma}}\mu|w|^2 - hF(p_*, \Gamma_*) + hK_*(|p - p_*| + |\Gamma - \Gamma_*|),
 \end{aligned}$$

بنابراین با استفاده از نامساوی‌های $-h^{\gamma}$ ، $\mu < -h^{\gamma}$ و $|w| < h^{-k}$ و $|p|, |\Gamma| \leq K_{\#}h^{-\delta}$ داریم،

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{h}w(p_* - p)^T + \frac{h}{\sqrt{\gamma}}w^T(\Gamma_* - \Gamma)w - hF(p, \Gamma) \\
 & \leq -\frac{h}{\sqrt{\gamma}}h^{\gamma}h^{-2k} - hF(p_*, \Gamma_*) + 4K_*K_{\#}h^{1-\delta} \\
 & \leq -hF(p_*, \Gamma_*) + \frac{h^{-\delta}}{\sqrt{\gamma}}(-h^{1+\gamma-2k+\delta} + 8K_*K_{\#}h),
 \end{aligned} \tag{۲۶.۳}$$

برای هر h به اندازه کافی کوچک نامساوی (۲۶.۳) برقرار است. بنابراین عدد ثابت $h''_* \in (0, h''_*]$ وجود دارد، به طوری که برای تمام $h \in (0, h''_*]$ نامساوی $-h^{1+\gamma-2k+\delta} + 8K_*K_{\#}h \leq 0$ است. بنابراین سمت راست نامعادله (۲۶.۳) برابر با $-hF(p_*, \Gamma_*)$ می‌شود. در نتیجه اثبات کردیم که برای

هر $(p, \Gamma) \in \mathcal{D}_{h,\delta}$ داریم،

$$\inf_{w \in \mathcal{X}_h} \left[\sqrt{h} w (p_\circ - p)^T + \frac{h}{\varphi} w^T (\Gamma_\circ - \Gamma) w - h F(p, \Gamma) \right] \leq -h F(p_\circ, \Gamma_\circ) + ch^{1+\beta}, \quad (27.3)$$

برای برخی از $\beta = \beta_\delta$ نامساوی (27.3) برقرار است. با استفاده از بسط تیلور φ روی دومین جمله رابطه (27.3) رابطه زیر را به دست می آوریم.

$$\begin{aligned} \sup_{(p, \Gamma) \in \mathcal{D}_{h,\delta}} \inf_{w \in \mathcal{X}_{h,k}} \left[\varphi^h(x + \sqrt{h}w) - \sqrt{h} w^T p - \frac{h}{\varphi} w^T \Gamma w - h F(p, \Gamma) \right] \\ \leq -h F(p_\circ, \Gamma_\circ) + C_{k_\circ, K_\varphi} h^{1+\beta} \end{aligned}$$

□

در نتیجه اثبات لم کامل شد.

توجه کنید که تابع v^h به طور دقیق نسبت به h و x کراندار است.

لم 5.3.3. فرض های زیر در قضیه 1.3.3 اعمال شده است، عدد ثابت $h_\varphi \in (0, 1]$ و مقدار ثابت مثبتی مانند K_5 وجود دارد، به طوری که برای $x \in \Omega$ و $h \leq h_\varphi, k = 0, \dots, n$ نامساوی $|v^h(t_k, x)| \leq K_5$ برقرار است.

برهان. فرض 9.2.3 و $f \in C(\Omega)$ نامساوی زیر را برای $x \in \Omega$ و $h \in (0, 1]$ نتیجه می دهد.

$$|v^h(t_n, x)| \leq B_n, \quad (28.3)$$

برای برخی از عددهای ثابت مثبت B_n نامساوی (28.3) برقرار است. فرض کنید که برای $k \leq n-1$ نامساوی $B_{k+1} > 0$ برقرار است، به طوری که برای $x \in \Omega$ و $h \in (0, h_\varphi]$ رابطه (29.3) به صورت زیر تعریف می شود.

$$|v^h(t_{k+1}, x)| \leq B_{k+1}. \quad (29.3)$$

برای برخی از عدد ثابت $h_\varphi \in (0, 1]$ که در زیر مشخص شده است، نامساوی (29.3) برقرار است. برای این که کرانی از $v^h(t_k, \cdot)$ به دست آوریم، $v^h(t_k, \cdot)$ را به صورت زیر می نویسیم.

$$v^h(t_k, x) = v^h(t_{k+1}, x) - h F(t_{k+1}, x; v^h(t_{k+1}, \cdot)) + h R_\varphi^h + h R_\psi^h + h R_\varphi^h, \quad (30.3)$$

R_φ^h, R_ψ^h و R_φ^h برای $\theta \in [0, 1]$ به صورت زیر تعریف می شوند.

$$R_\varphi^h = (1 - \theta) (F(t_k, x; v^h(t_k, \cdot)) - I_{F(t_k, x; v^h(t_k, \cdot)), X}(x)),$$

$$R_\psi^h = \theta (F(t_{k+1}, x; v^h(t_{k+1}, \cdot)) - \theta I_{F(t_{k+1}, x; v^h(t_{k+1}, \cdot)), X}(x)),$$

$$R_\varphi^h = (1 - \theta) (F(t_{k+1}, x; v^h(t_{k+1}, \cdot)) - F(t_k, x; v^h(t_k, \cdot))).$$

حال طبق قسمت ب فرض 1.2.3 رابطه (31.3) برقرار است.

$$\begin{aligned} |F(t_{k+1}, x; v^h(t_{k+1}, \cdot)) - F(t_k, x; v^h(t_k, \cdot))| \\ \leq |F_\circ(t_{k+1}, x; v^h(t_{k+1}, \cdot)) - F_\circ(t_k, x; v^h(t_k, \cdot))| \\ + K_\circ |Dv^h(t_{k+1}, x) - Dv^h(t_k, x)| + K_\circ |D^\varphi v^h(t_{k+1}, x) - D^\varphi v^h(t_k, x)|. \end{aligned} \quad (31.3)$$

از فرض ۹.۲.۳، لم ۳.۳.۳ و رابطه (۳۱.۳) می‌توان نتیجه گرفت، وقتی h به بی‌نهایت میل می‌کند، $R_1^h, R_2^h, R_3^h \rightarrow 0$ میل می‌کنند. بنابراین $\sum_{i=1}^3 \sup |R_i^h(x)|$ نسبت به h کراندار است. پس از لم ۴.۳.۳ داریم،

$$|\varphi^h(x) - hF(t, x, z, D\varphi^h(x), D^2\varphi^h(x))| \leq \left| \sup_{(p, \Gamma) \in \mathcal{D}_{h, \delta}} \inf_{w \in \mathcal{X}_{h, k}} \left[\varphi^h(x + \sqrt{h}w) - \sqrt{h}w^T p - \frac{h}{\gamma} w^T \Gamma w - hF(t, x, z, p, \Gamma) \right] \right| + Ch \quad (۳۲.۳)$$

$\varphi^h(x) = v^h(t_{k+1}, x)$ قرار می‌دهیم.

$$|v^h(t_{k+1}, x) - hF(t, x, z, Dv^h(t_{k+1}, x), D^2v^h(t_{k+1}, x))| \leq \left| \sup_{(p, \Gamma) \in \mathcal{D}_{h, \delta}} \inf_{w \in \mathcal{X}_{h, k}} \left[v^h(t_{k+1}, x + \sqrt{h}w) - \sqrt{h}w^T p - \frac{h}{\gamma} w^T \Gamma w - hF(t, x, z, p, \Gamma) \right] \right| + Ch$$

طبق تعریف $v^h(t_k, x)$ در رابطه (۳۰.۳) نامساوی زیر حاصل می‌شود.

$$|v^h(t_k, x)| \leq |Q| + Ch,$$

Q را به صورت رابطه (۳۳.۳) تعریف می‌کنیم،

$$Q = \sup_{(p, \Gamma) \in \mathcal{D}_{h, \delta}} \inf_{w \in \mathcal{X}_{h, k}} [v^h(t_{k+1}, x + \sqrt{h}w) - \sqrt{h}w^T p - \frac{h}{\gamma} w^T \Gamma w - hF(t, x, v^h(t_{k+1}, x), p, \Gamma)]. \quad (۳۳.۳)$$

در رابطه (۳۳.۳) $\Gamma = 0$ و $p = 0$ قرار می‌دهیم.

$$Q = \sup_{(p, \Gamma) \in \mathcal{D}_{h, \delta}} \inf_{w \in \mathcal{X}_{h, k}} [v^h(t_{k+1}, x) - hF(t, x, v^h(t_{k+1}, x))] \geq -K_1 h - (\lambda + K_1 h) B_{k+1}, \quad (۳۴.۳)$$

سمت راست نامعادله (۳۴.۳)، طبق قسمت ج فرض ۱.۲.۳ برای $F(t, x, v^h(t_{k+1}, x))$ و همچنین نامساوی (۲۹.۳)، حاصل می‌شود. بنابراین نامساوی (۳۵.۳) را می‌توانیم برای به‌دست آوردن کران بالایی از Q بنویسیم.

$$Q \leq B_{k+1} + \sup_{(p, \Gamma) \in \mathcal{D}_{h, \delta}} \inf_{w \in \mathcal{X}_{h, k}} Q_{p, \Gamma, w}. \quad (۳۵.۳)$$

$$Q_{p, \Gamma, w} = -\sqrt{h}w^T p - \frac{h}{\gamma} w^T \Gamma w - hF(t, x, v^h(t_{k+1}, x), p, \Gamma). \quad (۳۶.۳)$$

اگر برای هر $(p, \Gamma) \in \mathcal{F}_{h, \delta}$ ، $w \in \mathcal{X}_{h, k}$ وجود داشته باشد، که در زیر صدق کند،

$$Q_{p, \Gamma, w} \leq K_1 h B_{k+1} + Ch$$

آنگاه $(p, \Gamma) \in \mathcal{F}_{h, \delta}$ است. ابتدا فرض کنید که مینیمم مقدار ویژه $-\Gamma$ بزرگتر یا مساوی $-h^\gamma$ باشد. در رابطه (۳۶.۳) اگر $p = 0$ باشد، آنگاه می‌توانیم $w = 0$ قرار دهیم و این منجر به رابطه زیر می‌شود.

$$\begin{aligned} Q_{p, \Gamma, w} &\leq -hF(t, x, v^h(t_{k+1}, x), 0, h^\gamma I) \\ &\leq K_1 h B_{k+1} + K_1 h + K_1 h^{1+\gamma}. \end{aligned}$$

در رابطه (۳۶.۳) اگر $p \neq 0$ باشد، $w = h^\delta \frac{p}{|p|}$ قرار می‌دهیم. طبق قسمت ج فرض ۱.۲.۳ نامساوی زیر را داریم،

$$\begin{aligned} Q_{p, \Gamma, w} &\leq -h^{1+\delta} |p| + \frac{1}{\gamma} h^{1+\delta+\gamma} + K_1 h(1 + B_{k+1}) \\ &\quad + K_1 h |p| + K_1 h^{1+\gamma} \quad (37.3) \\ &\leq |p| (-h^{1+\delta} + K_1 h) + Ch + K_1 h B_{k+1}, \end{aligned}$$

برای عدد ثابت $h \in (0, h'_4]$ نامساوی $h^{1+\delta} + K_1 h \leq 0$ به همراه برخی از $h'_4 \in (0, h_3]$ برقرار است. پس رابطه (۳۷.۳) منجر به نامساوی (۳۸.۳) می‌شود.

$$Q_{p, \Gamma, w} \leq Ch + K_1 h B_{k+1} \quad (38.3)$$

حال فرض کنید که مینیمم مقدار ویژه $-\Gamma$ کمتر از $-h^\gamma$ باشد، آنگاه w متناظر با بردار ویژه است، که در نامساوی $-p^T w \leq 0$ صدق می‌کند. همچنین w را به صورت $|w| = h^{-k}$ در نظر می‌گیریم. با این انتخاب داریم،

$$\begin{aligned} Q_{p, \Gamma, w} &\leq -\frac{h^{1+\gamma-2k}}{\gamma} + K_1 h(1 + B_{k+1}) + 2K_1 h^{1-\delta} \\ &= -h^{1+\gamma-2k+\delta} + 4K_1 h + K_1 h(1 + B_{k+1}) \quad (39.3) \\ &\leq K_1 h(1 + B_{k+1}). \end{aligned}$$

عدد ثابت $h \in (0, h'_4]$ وجود دارد، به طوری که برای $h \in (0, h'_4]$ $-h^{1+\gamma-2k+\delta} + 4K_1 h \leq 0$ است. بنابراین با جایگذاری روابط (۳۸.۳) و (۳۹.۳) در نامساوی (۳۵.۳) کران بالایی از Q برای $h \leq h_4$ به صورت زیر به دست می‌آید.

$$|Q| \leq (1 + K_1 h) B_{k+1} + Ch \quad (40.3)$$

سمت راست نامساوی (۴۰.۳) را با B_k نشان می‌دهیم. در نتیجه دنباله‌ای از $\{B_k\}$ های صدق‌پذیر در $B_k = (1 + K_1 h) B_{k+1} + Ch$ به دست آوردیم.

$$|v^h(t_{k+1}, x)| \leq B_k + Ch = K_5.$$

□

۴.۳ اثبات همگرایی

بخش اول قضیه ۱.۲.۳ را در گزاره‌ی زیر ثابت می‌کنیم.

گزاره ۱.۴.۳. فرض کنید فرض‌های ۱.۲.۳ و ۵.۲.۳ برقرار باشند. پس v جواب چسبندگی یکتا برای $v \in C([0, T] \times \mathbb{R}^d)$ از معادله (۲.۱) است.

برهان. خانواده‌ای از توابع $\{\hat{v}^h(t_k, \cdot)\}_{k=0}^n$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\begin{cases} \hat{v}^h(t_n, x) = f(x), & x \in \mathbb{R}^d, \\ \hat{v}^h(t_k, x) = \Phi^h[\hat{v}^h(t_{k+1}, \cdot)](t_k, x), & x \in \mathbb{R}^d, \end{cases}$$

که Φ^h به صورت زیر است.

$$\Phi^h[\varphi](t, x) = \sup_{(\rho, \Gamma) \in \mathcal{D}_{h, \delta}} \inf_{w \in \mathcal{X}_{h, k}} \left[\varphi(x + \sqrt{h}w) - \sqrt{h}w^T p - \frac{h}{\gamma} w^T \Gamma w - hF(t, x, \varphi(x), p, \Gamma) \right].$$

پس با استفاده از لم ۴.۳.۳ و ۵.۳.۳ می‌توان نشان داد که Φ^h ویژگی‌های زیر را دارد.

(الف) یکنوایی: برای توابع $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}^d$ با $\varphi_1 \leq \varphi_2$ نامساوی $\Phi^h[\varphi_1] \leq \Phi^h[\varphi_2]$ برقرار است.

برهان. با استفاده از بسط تیلور داریم:

$$\Phi^h[\varphi_1](t, x) = \varphi_1(x) + \sup_{(\rho, \Gamma) \in \mathcal{D}_{h, \delta}} \inf_{w \in \mathcal{X}_{h, k}} \left[\sqrt{h}w^T(\varphi_1' - p) + \frac{h}{\gamma} w^T(\varphi_1'' - \Gamma)w - hF(p, \Gamma) \right]$$

$$\Phi^h[\varphi_2](t, x) = \varphi_2(x) + \sup_{(\rho, \Gamma) \in \mathcal{D}_{h, \delta}} \inf_{w \in \mathcal{X}_{h, k}} \left[\sqrt{h}w^T(\varphi_2' - p) + \frac{h}{\gamma} w^T(\varphi_2'' - \Gamma)w - hF(p, \Gamma) \right]$$

$$\varphi_1 \leq \varphi_2 \Rightarrow \Phi^h[\varphi_1](t, x) \leq \Phi^h[\varphi_2](t, x).$$

□

(ب) سازگاری: برای $\varphi \in C^2([0, T] \times \mathbb{R}^d)$ رابطه زیر را داریم.

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (t, x) \\ c \rightarrow 0, h \rightarrow 0}} \frac{1}{h} [\Phi^h[\varphi(s+h, \cdot) + c](s, y) - (\varphi(s, y) + c)] = \partial_t \varphi(t, x) - F(t, x, \varphi(t, \cdot)).$$

(ج) پایداری: $\hat{v}^h(t_k, x)$ به طور یکنواخت در h کراندار است، و همچنین به طور موضعی در x کراندار

است. با برقرار بودن این ویژگی‌ها و مانند روش جواب چسبندگی در [۱] نتیجه می‌گیریم که

$$\lim v(t, x) = \lim_{(s, y) \rightarrow (t, x), h \rightarrow 0} v^h(s, y)$$

□

برهان. ۱.۳.۳ روش حل چسبندگی را که در [۱] توضیح داده شده، پذیرفتیم. فرض می‌کنیم که برای

$$v^h(t, x) = v(t, x), \quad (t, x) \in [0, T] \times (\mathbb{R}^d \setminus \Omega)$$

رابطه (۴۱.۲) برقرار است.

$$\bar{v}(t, x) = \limsup_{\substack{h \rightarrow 0 \\ s \rightarrow t \\ y \rightarrow x}} v^h(s, y), \quad (41.3)$$

نشان می‌دهیم که \bar{v} زیر جوابی چسبندگی از معادله (۲.۱) می‌باشد. طبق لم ۵.۳.۳ روی $[0, T] \times \mathbb{R}^d$ است. ثابت $(t, x) \in [0, T] \times \Omega$ و $\varphi \in C^3([0, T] \times \Omega)$ در نظر می‌گیریم، به طوری که $\bar{v} - \varphi$ ماکزیم موضعی در (t, x) داشته باشد، آنگاه $r > 0$ است. برای $(s, y) \in B_r(t, x)$ داریم،

$$(\bar{v} - \varphi)(s, y) \leq (\bar{v} - \varphi)(t, x).$$

که $B_r(t, x)$ گوی بسته‌ای با شعاع r در مرکز می‌باشد. همچنین $B_r(t, x) \subset [0, T] \times \Omega$ است. برای $(s, y) \in B_r(t, x)$ رابطه زیر برقرار است.

$$\bar{\varphi}(s, y) = \varphi(s, y) - (\varphi(t, x) - \bar{v}(t, x)) + |s - t|^2 + |y - x|^2. \quad (۴۲.۳)$$

از رابطه (۴۲.۳) می‌توان نتیجه گرفت که $\bar{v}(t, x) = \bar{\varphi}(t, x)$ است، یعنی (t, x) ماکزیم اکید از $\bar{v} - \bar{\varphi}$ روی $B_r(t, x)$ است. با استفاده از این نکته $\varphi = \bar{\varphi}$ قرار می‌دهیم، در نتیجه $\bar{v}(t, x) = \varphi(t, x)$ با استفاده از تعریف \bar{v} ، h_k ای وجود دارد و $(\tilde{s}_k, \tilde{y}_k) \in B_r(t, x)$ است، به طوری که وقتی $m \rightarrow \infty$ روابط زیر برقرار هستند.

$$h_m \rightarrow 0, \quad (\tilde{s}_m, \tilde{y}_m) \rightarrow (t, x), \quad v^{h_m}(\tilde{s}_m, \tilde{y}_m) \rightarrow \bar{v}(t, x).$$

s_m و y_m را طوری در نظر می‌گیریم که $s_m = ih_m$ برای برخی از $i = i_m = 0, \dots, n-1$ رابطه (۴۳.۳) به صورت زیر حاصل می‌شود.

$$(v^{h_m} - \varphi)(s_m, y_m) \geq \sup_{(s, y) \in B_r(t, x)} (v^{h_m} - \varphi)(s, y) - h_m^{\frac{1}{2}} \quad (۴۳.۳)$$

علاوه بر این دنباله‌ای از (s_m, y_m) برای $m \geq 1$ را می‌توان از مجموعه‌ی کراندار $B_r(t, x)$ در نظر گرفت، پس نقطه‌ای حدی مانند $(\tilde{t}, \tilde{x}) \in B_r(t, x)$ همراه با زیر دنباله‌ای وجود دارد. بنابراین c_m را به صورت $c_m = (v^{h_m} - \varphi)(s_m, y_m)$ تعریف می‌کنیم، داریم:

$$0 = (\bar{v} - \varphi)(t, x) = \lim_{m \rightarrow \infty} (v^{h_m} - \varphi)(\tilde{s}_m, \tilde{y}_m) \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} c_m \leq \limsup_{m \rightarrow \infty} c_m \leq (\bar{v} - \varphi)(\tilde{t}, \tilde{x}).$$

وقتی (t, x) ماکزیم اکید باشد، نتیجه می‌گیریم که $(\tilde{t}, \tilde{x}) = (t, x)$ است. بنابراین وقتی $c_m \rightarrow 0$ میل کند، آنگاه $(s_m, y_m) \rightarrow (t, x)$ میل می‌کند. طبق رابطه (۴۳.۳) برای هر y در همسایگی x داریم،

$$c_m = (v^{h_m} - \varphi)(s_m, y_m) \geq \sup_{(s, y) \in B_r(t, x)} (v^{h_m} - \varphi)(s, y) - h_m^{\frac{1}{2}}$$

$$\varphi(s_m + h_m, y) + c_m + h_m^{\frac{1}{2}} \geq v^{h_m}(s_m + h_m, y) \quad (۴۴.۳)$$

حال با استفاده از لم ۳.۳.۳ وقتی $m \rightarrow \infty$ میل کند، رابطه زیر برقرار است.

$$\sum_{i=0}^2 |D^i v^{h_m}(s_m + h_m, y_m) - D^i v^{h_m}(s_m, y_m)| \rightarrow 0,$$

. در حالت خاص داریم،

$$\lim_{m \rightarrow \infty} v^{h_m}(s_m + h_m, y_m) = \lim_{m \rightarrow \infty} v^{h_m}(s_m, y_m) = \bar{v}(t, x) = \varphi(t, x).$$

همچنین با استفاده از فرض ۱.۲.۳ رابطه (۴۵.۳) برقرار است.

$$\begin{aligned} & \left| F(s_m + h_m, y_m; v^{h_m}(s_m + h_m, \cdot)) - F(s_m, y_m; v^{h_m}(s_m, \cdot)) \right| \\ & \leq \left| F_\circ(s_m + h_m, y_m; v^{h_m}(s_m + h_m, y_m)) - F_\circ(t, x, \varphi(t, x)) \right| \\ & \quad + \left| F_\circ(t, x, \varphi(t, x)) - F_\circ(s_m, y_m; v^{h_m}(s_m, y_m)) \right| \quad (۴۵.۳) \\ & \quad + K_\circ \left| Dv^{h_m}(s_m + h_m, y_m) - Dv^{h_m}(s_m, y_m) \right| \\ & \quad + \left| D^\forall v^{h_m}(s_m + h_m, y_m) - D^\forall v^{h_m}(s_m, y_m) \right|. \end{aligned}$$

$v^h(s_m, y_m)$ را مانند اثبات لم ۵.۳.۳ به صورت زیر داریم،

$$\begin{aligned} v^{h_m}(s_m, y_m) &= v^{h_m}(s_m + h_m, y_m) - h_m F(s_m + h_m, y_m; v^{h_m}(s_m + h_m, \cdot)) \\ & \quad + h_m R_\forall^m + h_m R_\forall^m + h_m R_\forall^m, \end{aligned}$$

که R_\forall^m, R_\forall^m و R_\forall^m برای $\theta \in [0, 1]$ به صورت زیر تعریف می شوند.

$$R_\forall^m = (1 - \theta) \left(F(s_m, y_m; v^{h_m}(s_m, \cdot)) - I_{F(s_m, \cdot; v^h(s_m, \cdot)), X}(y_m) \right),$$

$$R_\forall^m = \theta \left(F(s_m + h_m, y_m; v^{h_m}(s_m + h_m, \cdot)) - I_{F(s_m + h_m, \cdot; v^h(s_m + h_m, \cdot)), X}(y_m) \right),$$

$$R_\forall^m = (1 - \theta) \left(F(s_m + h_m, y_m; v^{h_m}(s_m + h_m, \cdot)) - F(s_m, y_m; v^{h_m}(s_m, \cdot)) \right).$$

فرض ۹.۲.۳، لم ۳.۳.۳ و رابطه (۴۵.۳) نشان می دهند $R_\forall^m, R_\forall^m, R_\forall^m \rightarrow 0$ میل می کنند. فرض کنید که نامساوی (۴۵.۳) و لم ۴.۳.۳ برای خانواده $\{v^h(s_m + h, \cdot), \varphi(s_m + h, \cdot)\}_{h \in (0, 1], m \geq 1}$ برقرار باشند. برای هر m به اندازه کافی بزرگ داریم،

$$\begin{aligned} & v^{h_m}(s_m, y_m) \\ & \leq \sup_{(p, \Gamma) \in \mathcal{D}_{h_m, \delta}} \inf_{w \in \mathcal{X}_{h_m, k}} \left[v^{h_m}(s_m + h_m, y_m + \sqrt{h_m} w) - \sqrt{h_m} p^T w - \frac{h_m}{\forall} w^T \Gamma w \right. \\ & \quad \left. - h_m F(s_m + h_m, y_m, v^{h_m}(s_m + h_m, y_m), p, \Gamma) \right] + h_m R_\forall^m + h_m R_\forall^m + h_m R_\forall^m + Ch_m^{\lambda + \beta} \\ & \leq \sup_{(p, \Gamma) \in \mathcal{D}_{h_m, \delta}} \inf_{w \in \mathcal{X}_{h_m, k}} \left[\varphi(s_m + h_m, y_m + \sqrt{h_m} w) - \sqrt{h_m} p^T w - \frac{h_m}{\forall} w^T \Gamma w \right. \\ & \quad \left. - h_m F(s_m + h_m, y_m, v^{h_m}(s_m + h_m, y_m), p, \Gamma) \right] + c_m + h_m^{\frac{\forall}{\forall}} + h_m R_\forall^m + h_m R_\forall^m + h_m R_\forall^m + Ch_m^{\lambda + \beta} \\ & \leq \varphi(s_m + h_m, y_m) - h_m F(s_m + h_m, y_m, v^{h_m}(s_m + h_m, y_m), D\varphi(s_m + h_m, y_m), \\ & \quad D^\forall \varphi(s_m + h_m, y_m)) + c_m + h_m^{\frac{\forall}{\forall}} + h_m R_\forall^m + h_m R_\forall^m + h_m R_\forall^m + Ch_m^{\lambda + \beta}. \quad (۴۶.۳) \end{aligned}$$

طبق تعریف $(c_m + \varphi(s_m, y_m)) = v^{h_m}(s_m, y_m)$ و همچنین با تقسیم طرفین نامساوی (۴۶.۳) بر

$-h_m$ نامساوی (۴۷.۳) به صورت زیر حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{h_m}(\varphi(s_m + h_m, y_m) - \varphi(s_m, y_m)) \\ & + F(s_m + h_m, y_m, v^{h_m}(s_m + h_m, y_m), D\varphi(s_m + h_m, y_m), D^2\varphi(s_m + h_m, y_m)) \\ & \leq 0 \end{aligned} \quad (47.3)$$

برای هر m به قدر کافی بزرگ فرض می‌کنیم که $m \rightarrow \infty$ میل کند. بنابراین رابطه (۴۸.۳) به دست می‌آید.

$$-\partial_t \varphi(t, x) + F(t, x, \bar{v}(t, x), D\varphi(t, x), D^2\varphi(t, x)) \leq 0 \quad (48.3)$$

ویژگی زیر جواب در (t, x) به دست آمد. در حالتی که $(t, x) \in \{T\} \times \mathbb{R}^d$ است، طبق تعریف v^h و قسمت الف فرض ۹.۲.۳ تساوی $\bar{v}(t, x) = f(x)$ برقرار است. بنابراین ویژگی‌های زیر جواب چسبندگی برقرار است. در ادامه حالتی که $(t, x) \in [0, T] \times \partial\Omega$ است را نشان خواهیم داد. همانند بخش اول اثبات می‌توانیم دنباله‌ای از (h_m, s_m, y_m) در نظر بگیریم برای $m \geq 1$ که در (۴۴.۳) صدق‌پذیر است و $(s_m, y_m) \rightarrow (t, x)$ در نظر می‌گیریم. به علاوه داریم،

$$v^{h_m}(s_m, y_m) = c_m + \varphi(s_m, y_m) \rightarrow \varphi(t, x) = \bar{v}(t, x).$$

پس اگر عدد ثابت $m_0 \geq 1$ وجود داشته باشد، به طوری که برای تمام $m \geq m_0$ $y_m \in \mathbb{R}^d \setminus \Omega$ باشد. وقتی $m \rightarrow \infty$ میل می‌کند، رابطه زیر برقرار است.

$$v^{h_m}(s_m, y_m) = v(s_m, y_m) \rightarrow v(t, x),$$

بنابراین ویژگی زیر جواب برقرار است. در سایر جاها زیر دنباله‌ای مانند $\{y_m\}$ وجود دارد به طوری که برای $y_{m_j} \in \Omega$ ، وقتی $j \rightarrow \infty$ میل می‌کند، $y_{m_j} \rightarrow x$ میل کند. با این دنباله نامساوی (۴۷.۳) را به دست می‌آوریم، و (h_m, s_m, y_m) را با $(h_{m_j}, s_{m_j}, y_{m_j})$ جایگذاری می‌کنیم. سپس فرض کنید که $j \rightarrow \infty$ میل کند، بنابراین رابطه (۴۸.۳) را در $(t, x) \in [0, T] \times \partial\Omega$ به دست آوردیم. با استدلالی مشابه می‌توانیم نشان دهیم که رابطه (۴۹.۳) ابرجواب چسبندگی از معادله (۲.۱) است.

$$\underline{v}(t, x) = \liminf_{\substack{s \rightarrow t, y \rightarrow x \\ h \searrow 0}} v^h(s, y), \quad (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d \quad (49.3)$$

حال با مقایسه دو رابطه (۴۱.۳) و (۴۹.۳) نامساوی $\underline{v} \leq \bar{v}$ برقرار است. به علاوه طبق تعریف، $\bar{v} \leq \underline{v}$ می‌باشد. بنابراین اثبات کردیم که $\bar{v} = \underline{v}$ است. \square

فصل ۴

حل عددی

۱.۴ مقدمه

در این فصل ابتدا روشی برای تبدیل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی غیر خطی به معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی خطی ارائه می‌کنیم. در مورد حرکت براونی [۱۷] و روش مونت کارلو [۱۹] توضیح می‌دهیم، سپس با استفاده از این روش‌ها به حل مثالی عددی می‌پردازیم.

۲.۴ روش‌های تبدیل معادلات غیر خطی به خطی

روش‌هایی برای تبدیل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی غیر خطی به معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی خطی وجود دارد. یکی از این روش‌ها تبدیل کول هوپف^۱ [۶] است.

۱.۲.۴ تبدیل کول هوپف

ابتدا مسائل مقدار مرزی را برای معادله سهموی شبه خطی بررسی می‌کنیم.

$$\begin{cases} u_t - a\Delta u + b|Du|^2 = 0, & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u = g, & \text{on } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}, \end{cases} \quad (1.4)$$

که در معادله (۱.۴) $a > 0$ می‌باشد.

فرض می‌کنیم که u جوابی هموار از معادله (۱.۴) است، w را برای تابع هموار $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \Phi$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$w := \Phi(u).$$

^۱Cole-Hopf

با انتخاب Φ مناسب، w جوابی از معادله خطی (۱.۴) است. بنابراین داریم،

$$w_t = \Phi'(u)u_t, \quad \Delta w = \Phi'(u)\Delta u + \Phi''(u)|Du|^2.$$

در نتیجه با جایگذاری $u_t = a\Delta u - b|Du|^2$ در $w_t = \Phi'(u)u_t$ رابطه زیر به دست می آید.

$$\begin{aligned} w_t &= \Phi'(u)u_t = \Phi'(u)[a\Delta u - b|Du|^2] \\ &= a\Phi'(u)\Delta u - b\Phi'(u)|Du|^2 \\ &= a\Delta w - a\Phi''(u)|Du|^2 - b\Phi'(u)|Du|^2 \\ &= a\Delta w - [a\Phi''(u) + b\Phi'(u)]|Du|^2 \end{aligned}$$

به شرط این که Φ را طوری انتخاب کنیم که در تساوی $b\Phi'(u) + a\Phi''(u) = 0$ صدق کند. این معادله دیفرانسیل را با جایگذاری $\Phi = e^{-\frac{b}{a}z}$ حل می کنیم. بنابراین اگر u جوابی از معادله (۱.۴) باشد، آنگاه رابطه (۲.۴) حاصل می شود.

$$w = e^{-\frac{b}{a}u}, \quad (2.4)$$

به فرمول (۲.۴) تبدیل کول هویف می گویند. با استفاده از این تبدیل معادله (۱.۴) به صورت زیر تبدیل می شود.

$$\begin{cases} w_t - a\Delta w = 0, & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ w = e^{-\frac{b}{a}g}, & \text{on } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases} \quad (3.4)$$

حال جواب یکتای کراندار از معادله (۳.۴) برای $x \in \mathbb{R}^n$ و $t > 0$ به صورت زیر است [۶].

$$w(x, t) = \frac{1}{(\sqrt{\pi at})^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4at}} e^{-\frac{b}{a}g(y)} dy.$$

u از رابطه (۲.۴) به صورت $u = -\frac{a}{b} \log w$ حاصل می شود. بنابراین جوابی از مساله مقدار مرزی (۱.۴) به صورت زیر به دست می آید.

$$u(x, t) = -\frac{a}{b} \log \left(\frac{1}{(\sqrt{\pi at})^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4at}} e^{-\frac{b}{a}g(y)} dy \right), \quad x \in \mathbb{R}^n, t > 0.$$

حال طبق تعریف عملگر لاپلاس، D^α و عملگر اثر، داریم،

$$\Delta u = \text{tr}(D^2 u),$$

بنابراین معادله (۱.۴) به صورت زیر تبدیل می شود.

$$\begin{cases} \partial_t u + \frac{1}{2} \text{tr}(D^2 u) + \frac{1}{2} |Du|^2 = 0, \\ u(0, x) = g(x). \end{cases} \quad (4.4)$$

جوابی از معادله (۴.۴) به شکل زیر می باشد.

$$u(t, x) = -\log \left[(\sqrt{\pi t})^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} \exp \left(-g(y) - \frac{|x-y|^2}{2t} \right) dy \right]. \quad (5.4)$$

w_t را حرکت براونی با توزیع گاوسی همراه با میانگین صفر و واریانس t تعریف می کنیم، همچنین E عملگر امید ریاضی است.

$$w_t \sim N(0, t)$$

امید ریاضی و تابع چگالی نرمال به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\mathbb{E}[w_t] = \int g(w_t) f(w_t) dw, \quad f(w_t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \right)^d e^{-\frac{1}{2t} w_t^2}.$$

با استفاده از تغییر متغیر $w = x - y$ ، $dw = -dy$ در رابطه (۵.۴) تساوی (۶.۴) حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \log \left[(2\pi t)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} \exp \left(-g(x-w) - \frac{1}{2t} w_t^2 \right) dw \right] \\ &= \log \left[(2\pi t)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{1}{2t} w_t^2} e^{-g(x-w)} dw \right] \\ &= \log \mathbb{E}[\exp(-g(x - W_t))] \end{aligned} \quad (6.4)$$

حال چون g متقارن است، پس داریم،

$$u(t, x) = \log \mathbb{E}[\exp(-g(x + W_t))].$$

مثال ۳.۴

معادله KPZ^۲ جبری^۳ دو بعدی^۴ به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\begin{cases} \partial_t v + \frac{1}{2} \text{tr}(D^2 v) + \frac{1}{2} |Dv|^2 = 0, \\ v(1, x) = f(x). \end{cases} \quad (7.4)$$

برای به دست آوردن جوابی از معادله (۷.۴) از تبدیل کول هوفف استفاده می‌کنیم، بنابراین کافی است $v(t, x) = -u(1-t, x)$ قرار دهیم، تا معادله (۷.۴) خطی شود، پس جواب یکتایی به صورت زیر دارد.

$$v(t, x) = \log \mathbb{E}[\exp(f(x + W_{1-t}))], \quad (t, x) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^2, \quad (8.4)$$

$\{W_t\}_{0 \leq t \leq 1}$ حرکت براونی^۵ استاندارد دو بعدی است، و \mathbb{E} عملگر امید ریاضی در فضای احتمالی است.

۴.۴ حرکت براونی

۱.۴.۴ مقدمه

(۱) $N(\mu, \sigma)$ مجموعه‌ای از توزیع تصادفی نرمال یا گاوسی متغیر X با تابع توزیع چگالی $f_X(x)$

است، که μ میانگین و σ^2 واریانس می‌باشد.

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right].$$

^۱Kardar-Parisi-Zhang

^۲Deterministic

^۳Two-Dimensional

^۵Brownian

(۲) $U(a, b)$ مجموعه‌ای یکنواخت از توزیع اعداد تصادفی روی بازه‌ی $[a, b]$ می‌باشد، که $a < b$ است.

۲.۴.۴ تعریف

فرآیند W_t را حرکت براونی در t گوئیم، اگر و فقط اگر خواص زیر برقرار باشند.

۱. اگر N مجموعه‌ای از توزیع اعداد تصادفی نرمال باشد، آنگاه داریم،

$$W_{t+\Delta t} - W_t \in N(0, \sqrt{\Delta t}).$$

۲. برای مقدار مشخص ε رابطه زیر برقرار است،

$$\varepsilon[W_t \cdot dW_t] = \varepsilon[w_t] \varepsilon[dw_t].$$

همچنین برای $\Delta t > 0$ با افزایش dW_t ، حرکت براونی به قبل بستگی دارد. داریم،

$$dW_t = W_{t,\Delta t} - W_t, \quad \Delta t > 0.$$

جواب عددی^۶ را با روش کالوکیشن برای $\theta = 1$ ، $h = 10^{-2}$ و $N = 25$ به همراه توابع پایه‌ای شعاعی گاوسی به دست می‌آوریم. جواب تحلیلی^۷ با روش مونت-کارلو به همراه 10^6 نمونه محاسبه می‌شود. ابتدا توضیحی از روش مونت-کارلو^۸ می‌دهیم.

۵.۴ روش مونت-کارلو

روش مونت-کارلو یکی از راه‌های تقریب مبتنی بر نمونه‌گیری، است. با وارد کردن اعداد تصادفی نمونه‌هایی برای این روش تولید می‌شود. بیشترین استفاده رایج از روش مونت-کارلو برای محاسبه انتگرال‌های چند بعدی می‌باشد. چون تعداد نمونه‌ها زیاد است، بنابراین برای تولید نمونه‌ها از نرم افزارهای مختلف استفاده می‌کنیم. در کل هدف، محاسبه انتگرال J است. در انتگرال J ، X می‌تواند یک بعدی یا چند بعدی باشد. f تابع چگالی و h یک تابع است.

$$J = \mathbb{E}_f[h(x)] = \int_X h(x)f(x)dx$$

جواب انتگرال به روش مونت-کارلو

نمونه (x_1, \dots, x_m) از توزیع f حاصل می‌شوند، که برای تقریب انتگرال J با میانگین نمونه استفاده می‌شود.

$$\bar{h}_m = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m h(x_j)$$

^۶Numerical Solution

^۷Analytical Solution

^۸Monte-Carlo Method

میانگین نمونه‌ای h تقریبی برای انتگرال J است، این میانگین به مقدار انتگرال میل می‌کند. با استفاده از روش مونت-کارلو هرچه تعداد نمونه‌ها بیشتر باشد، خطا کمتر است و برآورد جواب به جواب دقیق نزدیک‌تر می‌شود. تفاوت روش مونت-کارلو با روش مستقیم این است که نمونه‌ها در روش مستقیم مستقل می‌باشند، ولی در روش مونت-کارلو به هم وابسته هستند. روش مونت-کارلو برای معادلات غیرخطی مناسب نیست، ولی برای مسائل با بعد بالا و هندسه‌های مختلط، موثر و مفید است. برای مسائلی که نامساوی $\frac{d}{n} > 2$ برقرار است، روش مونت-کارلو موثرتر از روش تفاضل متناهی یا روش عناصر متناهی می‌باشد.

۶.۴ حل مثال

حالتی از داده‌های نهایی را به شکل زیر بررسی می‌کنیم.

$$f(x_1, x_2) = \cos(x_1) \cos(x_2)$$

جواب عددی را با استفاده از روش کالوکیشن با $\theta = 1$ و توابع پایه‌ای شعاعی گاوسی در $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]^2 \times \{0\}$ محاسبه می‌کنیم. از شبکه‌ها با فضای مساوی روی $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]^2$ استفاده می‌کنیم، که شامل N نقطه برای مجموعه X از پایه مختصات است. توجه کنید که به منظور کارایی بهتر از نمایش مرزهای $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]^2$ ناحیه بزرگتر $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]^2$ را در نظر می‌گیریم.

توابع شکل را با استفاده از توابع پایه‌ای شعاعی گاوسی تولید می‌کنیم.

$$\Phi_j(x_{1j}, x_{2j}) = e^{-\alpha|(x_{1j}-x_1)^2+(x_{2j}-x_2)^2|}$$

که $\alpha = \frac{1}{\varepsilon^2}$ است، همچنین ε نورم اقلیدسی بین نقاط شبکه محاسبه شده است،

$$\varepsilon = \sqrt{(x_{1j} + x_1)^2 + (x_{2j} + x_2)^2}.$$

بنابراین ماتریسی $n \times 25$ از Φ_j ها به شکل زیر تعریف می‌شوند.

$$\Phi_j = \begin{bmatrix} \phi_1(x_{11}, x_{21}) & \phi_2(x_{11}, x_{21}) & \cdots & \phi_{25}(x_{11}, x_{21}) \\ \phi_1(x_{12}, x_{22}) & \phi_2(x_{12}, x_{22}) & \cdots & \phi_{25}(x_{12}, x_{22}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_1(x_{1n}, x_{2n}) & \phi_2(x_{1n}, x_{2n}) & \cdots & \phi_{25}(x_{1n}, x_{2n}) \end{bmatrix}$$

برای (x_{1j}, x_{2j}) ها در محمل ۲۵ گره بازه $[-1, -1] \times [1, 1]$ را در نظر می‌گیریم، پس ماتریس

25×25 زیر را داریم،

$$\Phi_j = \begin{bmatrix} \phi_1(1, 1) & \phi_2(1, 1) & \cdots & \phi_{25}(1, 1) \\ \phi_1(1, 0.5) & \phi_2(1, 0.5) & \cdots & \phi_{25}(1, 0.5) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_1(-1, -1) & \phi_2(-1, -1) & \cdots & \phi_{25}(-1, -1) \end{bmatrix}$$

در ۲۵ نقطه گره‌ای توابع شکل به صورت زیر می‌باشند.

$$\begin{cases} \phi_1(1, 1) = e^{-\frac{1}{\varepsilon}|(1-x_1)^2+(1-x_2)^2|} = e^{-\frac{1}{\lambda}|(1-1)^2+(1-1)^2|} = 0 \\ \phi_2(1, 1) = e^{-\frac{1}{\varepsilon}|(1-x_1)^2+(1-x_2)^2|} = e^{-\frac{1}{\varepsilon\lambda}|(1-1)^2+(1-0.5)^2|} = 0.96078944 \\ \vdots \\ \phi_{25}(1, 1) = e^{-\frac{1}{\varepsilon}|(1-x_1)^2+(1-x_2)^2|} = e^{-\frac{1}{\varepsilon}|(1+1)^2+(1+1)^2|} = \infty \\ \vdots \\ \phi_1(0.5, 0.5) = e^{-\frac{1}{\varepsilon}|(0.5-x_1)^2+(0.5-x_2)^2|} = e^{-\frac{1}{\varepsilon}|(0.5-1)^2+(0.5-1)^2|} = 0.89483932 \\ \phi_2(0.5, 0.5) = e^{-\frac{1}{\varepsilon}|(0.5-x_1)^2+(0.5-x_2)^2|} = e^{-\frac{1}{\varepsilon}|(0.5-1)^2+(0.5-0.5)^2|} = 0.92596108 \\ \vdots \\ \phi_{25}(0.5, 0.5) = e^{-\frac{1}{\varepsilon}|(0.5-x_1)^2+(0.5-x_2)^2|} = e^{-\frac{1}{\varepsilon}|(0.5+1)^2+(0.5+1)^2|} = 0.00012340 \\ \vdots \\ \phi_1(-1, -1) = e^{-\frac{1}{\varepsilon}|(-1-x_1)^2+(-1-x_2)^2|} = e^{-\frac{1}{\varepsilon}|(-1-1)^2+(-1-1)^2|} = \infty \\ \phi_2(-1, -1) = e^{-\frac{1}{\varepsilon}|(-1-x_1)^2+(-1-x_2)^2|} = e^{-\frac{1}{\varepsilon}|(-1-1)^2+(-1-0.5)^2|} = 0.00000138 \\ \vdots \\ \phi_{25}(-1, -1) = e^{-\frac{1}{\varepsilon}|(-1-x_1)^2+(-1-x_2)^2|} = e^{-\frac{1}{\varepsilon}|(-1+1)^2+(-1+1)^2|} = 0 \end{cases}$$

تابع شکل را در نقطه $(0.5, 0.5)$ برای $\alpha = \frac{1}{\varepsilon}$ رسم می‌کنیم (شکل ۱.۴). جدول (۱.۴) مقادیر تابع f در محمل x شامل ۲۵ گره نشان داده شده است.

۱.۶.۴ حل معادله به روش کالوکیشن

حال برای یافتن تابع مجهول v آن را با v^h تقریب می‌زنیم،

$$v^h(t_j, x_j) = \sum_{j=1}^N \Phi_j(t_j, x_j) \alpha_j.$$

طبق فرمول (۳۲.۲) در فصل دوم برای روش کالوکیشن داریم،

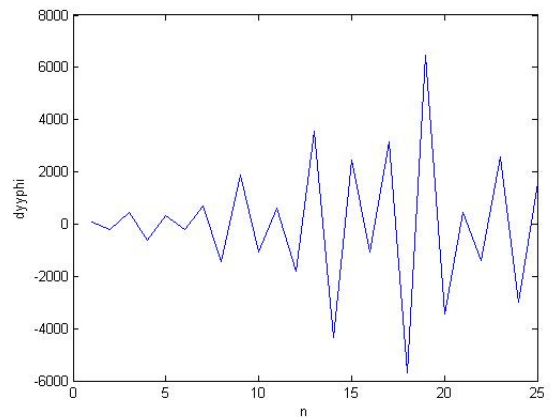
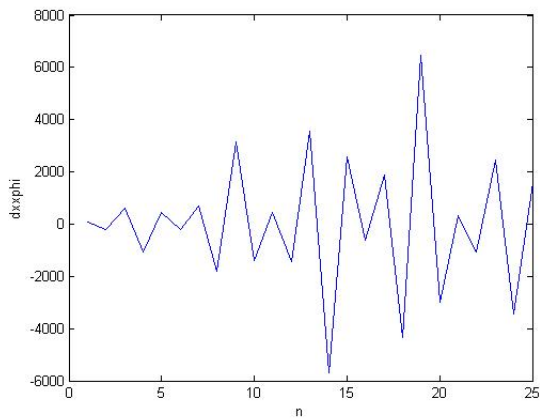
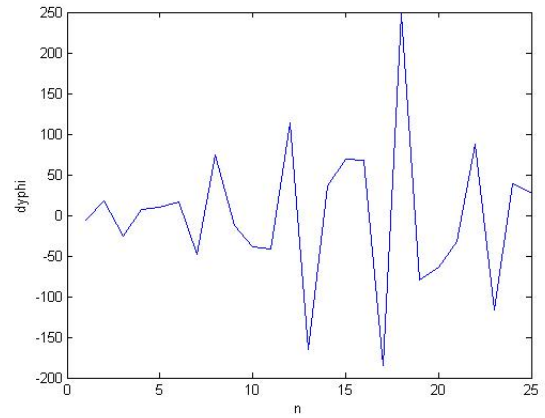
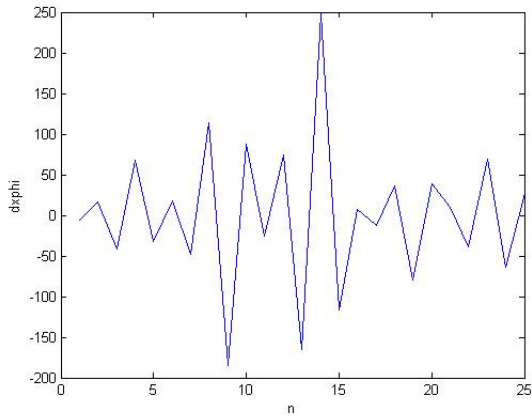
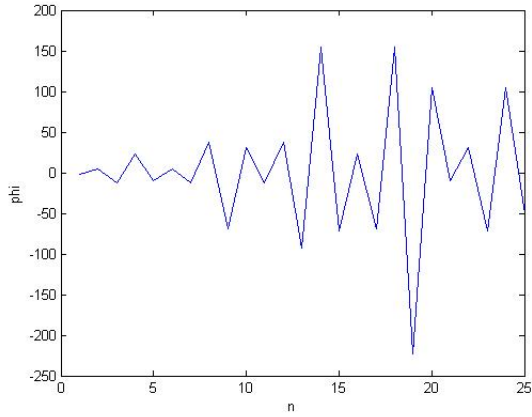
$$v_k = v_{k+1} - h\theta \tilde{F}_{k+1}(v_{k+1}) - h(1-\theta) \tilde{F}_k(v_k), \tag{9.4}$$

$\theta = 1$ و $h = 10^{-2}$ را در فرمول (۹.۴) قرار می‌دهیم.

$$v_k = v_{k+1} - 10^{-2} \tilde{F}_{k+1}(v_{k+1}),$$

همچنین $\tilde{F}_{k,j}(v_k)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$\tilde{F}_{k,j}(v_k) = F(t_k, x^{(j)}; v^h(t_k, \cdot)) = \frac{1}{\varepsilon} \text{tr}(D^2 v^h) + \frac{1}{\varepsilon} |Dv^h|^2.$$



شکل ۱.۴: تابع شکل روش درونیابی نقطه‌ای شعاعی در نقطه $(\frac{0}{5}, \frac{0}{5})$.

جدول ۱۰۴: مقادیر تابع $f(x_{1j}, x_{2j})$ در محمل x شامل ۲۵ گره.

n	x_{1j}	x_{2j}	$\cos(x_{1j})$	$\cos(x_{2j})$	$\cos(x_{1j}) \cos(x_{2j})$
۱	۱	۱	۰٫۵۴۰۳۰۲۳۱	۰٫۵۴۰۳۰۲۳۱	۰٫۲۹۱۹۲۶۵۹
۲	۱	۰٫۵	۰٫۵۴۰۳۰۲۳۱	۰٫۸۷۷۵۸۲۵۶	۰٫۴۷۴۱۵۹۸۸
۳	۱	۰	۰٫۵۴۰۳۰۲۳۱	۱	۰٫۵۴۰۳۰۲۳۱
۴	۱	-۰٫۵	۰٫۵۴۰۳۰۲۳۱	۰٫۸۷۷۵۸۲۵۶	۰٫۴۷۴۱۵۹۸۸
۵	۱	-۱	۰٫۵۴۰۳۰۲۳۱	۰٫۵۴۰۳۰۲۳۱	۰٫۲۹۱۹۲۶۵۹
۶	۰٫۵	۱	۰٫۸۷۷۵۸۲۵۶	۰٫۵۴۰۳۰۲۳۱	۰٫۴۷۴۱۵۹۸۸
۷	۰٫۵	۰٫۵	۰٫۸۷۷۵۸۲۵۶	۰٫۸۷۷۵۸۲۵۶	۰٫۷۷۰۱۵۱۱۵
۸	۰٫۵	۰	۰٫۸۷۷۵۸۲۵۶	۱	۰٫۸۷۷۵۸۲۵۶
۹	۰٫۵	-۰٫۵	۰٫۸۷۷۵۸۲۵۶	۰٫۸۷۷۵۸۲۵۶	۰٫۷۷۰۱۵۱۱۵
۱۰	۰٫۵	-۱	۰٫۸۷۷۵۸۲۵۶	۰٫۵۴۰۳۰۲۳۱	۰٫۴۷۱۴۵۹۸۸
۱۱	۰	۱	۱	۰٫۵۴۰۳۰۲۳۱	۰٫۵۴۰۳۰۲۳۱
۱۲	۰	۰٫۵	۱	۰٫۸۷۷۵۸۲۵۶	۰٫۸۷۷۵۸۲۵۶
۱۳	۰	۰	۱	۱	۱
۱۴	۰	-۰٫۵	۱	۰٫۸۷۷۵۸۲۵۶	۰٫۸۷۷۵۸۲۵۶
۱۵	۰	-۱	۱	۰٫۵۴۰۳۰۲۳۱	۰٫۵۴۰۳۰۲۳۱
۱۶	-۰٫۵	۱	۰٫۸۷۷۵۸۲۵۶	۰٫۵۴۰۳۰۲۳۱	۰٫۴۷۴۱۵۹۸۸
۱۷	-۰٫۵	۰٫۵	۰٫۸۷۷۵۸۲۵۶	۰٫۸۷۷۵۸۲۵۶	۰٫۷۷۰۱۵۱۱۵
۱۸	-۰٫۵	۰	۰٫۸۷۷۵۸۲۵۶	۱	۰٫۸۷۷۵۸۲۵۶
۱۹	-۰٫۵	-۰٫۵	۰٫۸۷۷۵۸۲۵۶	۰٫۸۷۷۵۸۲۵۶	۰٫۷۷۰۱۵۱۱۵
۲۰	-۰٫۵	-۱	۰٫۸۷۷۵۸۲۵۶	۰٫۵۴۰۳۰۲۳۱	۰٫۴۷۴۱۵۹۸۸
۲۱	-۱	۱	۰٫۵۴۰۳۰۲۳۱	۰٫۵۴۰۳۰۲۳۱	۰٫۲۹۱۹۲۶۵۹
۲۲	-۱	۰٫۵	۰٫۵۴۰۳۰۲۳۱	۰٫۸۷۷۵۸۲۵۶	۰٫۴۷۴۱۵۹۸۸
۲۳	-۱	۱	۰	۰٫۵۴۰۳۰۲۳۱	۰٫۵۴۰۳۰۲۳۱
۲۴	-۱	-۰٫۵	۰٫۵۴۰۳۰۲۳۱	۰٫۸۷۷۵۸۲۵۶	۰٫۴۷۴۱۵۹۸۸
۲۵	-۱	-۱	۰٫۵۴۰۳۰۲۳۱	۰٫۵۴۰۳۰۲۳۱	۰٫۲۹۱۹۲۶۵۹

جدول ۳.۴: مقادیر تابع v_k^h در نقطه (\circ, x_j) .

n	k	v_k^h
۲۵	۲۴	۰٫۲۸۳۶۳۱۰۱
۲۴	۲۳	۰٫۲۷۹۳۶۳۴
۲۳	۲۲	۰٫۲۸۱۲۲۶۰۶
۲۲	۲۱	۰٫۲۷۷۴۲۵۲۲
۲۱	۲۰	۰٫۲۹۷۸۹۶
۲۰	۱۹	۰٫۲۹۳۶۲۸۳۹
۱۹	۱۸	۰٫۲۹۰۰۸۸۰۲
۱۸	۱۷	۰٫۲۸۸۹۳۸۷۷
۱۷	۱۶	۰٫۲۸۸۹۳۸۷۷
۱۶	۱۵	۰٫۲۷۹۰۱۳۷۰۹
۱۵	۱۴	۰٫۲۸۰۸۷۶۳۶
۱۴	۱۳	۰٫۲۷۹۷۲۷۱۱
۱۳	۱۲	۰٫۲۷۹۷۲۷۱۱
۱۲	۱۱	۰٫۲۷۸۵۷۷۸۶
۱۱	۱۰	۰٫۲۸۱۲۳۱۹۹
۱۰	۹	۰٫۲۸۸۸۵۸۵۷
۹	۸	۰٫۲۸۸۸۵۸۵۷
۸	۷	۰٫۲۸۷۷۰۹۳۲۶
۷	۶	۰٫۲۸۴۱۶۸۹۵
۶	۵	۰٫۲۷۹۹۰۱۳۴
۵	۴	۰٫۲۸۹۹۰۱۳۴
۴	۳	۰٫۲۹۷۵۲۷۹۲
۳	۲	۰٫۲۹۹۳۹۰۵۷
۲	۱	۰٫۲۹۵۱۲۲۹۶
۱	۰	۰٫۲۸۱۸۶۸۵۱

$v \simeq v^h$ است. بنابراین داریم،

$$v_k^h = v_{k+1}^h - 10^{-2} \tilde{F}_{k+1}(v_{k+1}^h).$$

v_k^h رابطه‌ای بازگشتی برای $k = 0, 1, \dots, n-1$ به صورت زیر است.

$$v_0^h = v_1^h - 10^{-2} \tilde{F}_1(v_1^h)$$

$$v_1^h = v_2^h - 10^{-2} \tilde{F}_2(v_2^h)$$

$$v_2^h = v_3^h - 10^{-2} \tilde{F}_3(v_3^h)$$

$$v_3^h = v_4^h - 10^{-2} \tilde{F}_4(v_4^h)$$

$$v_4^h = v_5^h - 10^{-2} \tilde{F}_5(v_5^h)$$

(۱۰.۴)

⋮

$$v_{24}^h = v_{25}^h - 10^{-2} (\tilde{F}_{25}(v_{25}^h)).$$

همچنین داریم،

$$v_{25}^h = \cos(x_{1 \ 25}) \cos(x_{2 \ 25}).$$

بنابراین v_{24}^h به شکل زیر حاصل می‌شود.

$$v_{24}^h = \cos(x_{1 \ 25}) \cos(x_{2 \ 25}) - 10^{-2} \left(\frac{1}{2} \text{tr}(D^2 v_{25}^h) + \frac{1}{2} |Dv_{25}^h|^2 \right).$$

برای تمام روابط بازگشتی، مشتق مرتبه اول و دوم v_j^h ها برای $(x_{1j}, x_{2j}) \in [1, 1] \times [-1, -1]$ به صورت زیر است.

$$Dv_j^h = -\sin(x_{1j}) \cos(x_{2j}) - \sin(x_{2j}) \cos(x_{1j}),$$

$$D^2 v_j^h = 2(\sin(x_{1j}) \sin(x_{2j}) - \cos(x_{1j}) \cos(x_{2j})).$$

از طرفی طبق تعریف تابع اثر روی Γ داریم،

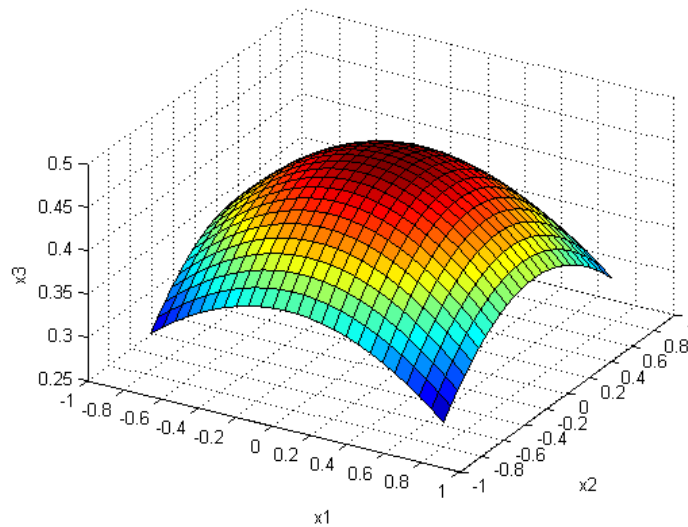
$$\text{tr}(D^2 v) = D^2 v.$$

در جدول ۲.۴ مقادیر تابع v_{k+1}^h و $\tilde{F}_{k+1}(v_{k+1}^h)$ را در بازه $(x_{1j}, x_{2j}) \in [1, 1] \times [-1, -1]$ محاسبه می‌کنیم. مقادیر تابع v_k^h طبق روابط بازگشتی (۱۰.۴) در جدول ۳.۴ نشان داده شده است.

$$v^h(t_j, x_j) = v^h(t_0, x_j) = v^h(0, x_j) = 0.28186851$$

۷.۴ حل معادله به روش مونت-کارلو

با استفاده از روش مونت-کارلو جواب تحلیلی را به دست می‌آوریم. تابع f را یکنواخت استاندارد در نظر می‌گیریم، و $M = 10^6$ نمونه از توزیع گاوسی تولید می‌کنیم، نمونه‌ها را در تابع h قرار می‌دهیم و میانگین، که همان مقدار انتگرال می‌باشد را به دست می‌آوریم. درواقع مقدار $v(0, x_j)$ حاصل شد. با



شکل ۲.۴: حل عددی با $N = 25$ و $h = 10^{-2}$

استفاده از فرمول جواب دقیق (۸.۴)، کافی است که از این لگاریتم بگیریم. با استفاده از نرم افزارهای مختلف از جمله: متلب، پایتون و... می توان v را محاسبه کرد.

$$v(\circ, x_j) = 0.2877$$

حال با استفاده از جواب عددی و جواب تحلیلی که برای معادله KPZ به دست آوردیم، به ترتیب شکل ۲.۴ و شکل ۳.۴ را رسم می کنیم. این دو جواب به هم نزدیک هستند بنابراین تفاوت چندانی در این دو شکل مشاهده نمی شود.

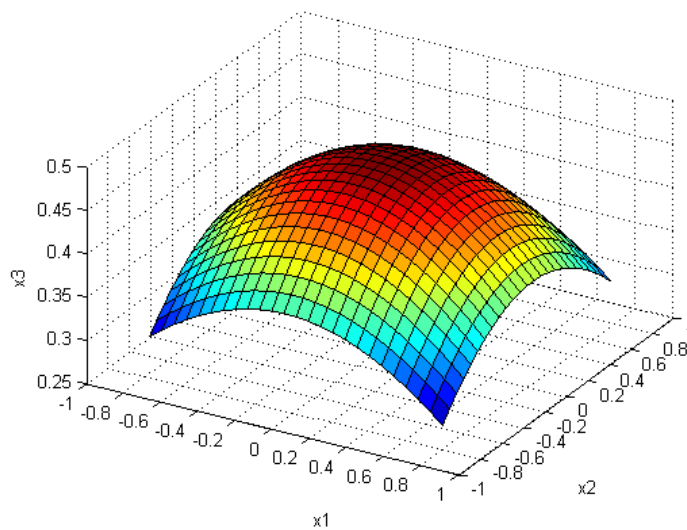
۸.۴ بررسی خطاها

در این بخش دو نوع خطا را مورد بررسی قرار می دهیم. خطای ریشه مربع میانگین و خطای ماکزیمم به ترتیب به صورت زیر تعریف می شوند.

$$\text{RMS} = \sqrt{\frac{1}{625} \sum_{x \in X} |v^{h,N}(\circ, x) - v(\circ, x)|^2}$$

$$\text{Max} = \max_{x \in X} |v^{h,N}(\circ, x) - v(\circ, x)|$$

X مجموعه ای از نقاط ارزیابی شده شامل 25^2 نقطه شبکه ای با فضای مساوی در $[-\pi/4, \pi/4]$ است. در جدول ۴.۴ این خطاها را بررسی می کنیم. با افزایش نقاط گره ای مقادیر هر دو خطا بهم نزدیک تر می شوند، و در نتیجه جواب دقیق تر است.



شکل ۳.۴: حل تحلیلی با $N = 25$ و $h = 10^{-2}$

جدول ۴.۴: خطاهای RMS و Max برای انتخاب‌های مختلف از N با $h = 10^{-2}$.

	$N=9$	$N=16$	$N=25$
RMS error	۰٫۰۴۰۹۹۲۱۴۰۵۱۵۹	۰٫۰۱۲۸۹۶۸۹۴۷۶۴۵	۰٫۰۰۲۷۳۹۱۲۸۳۷۱۰۸
Max error	۰٫۰۴۶۹۱۸۸۴۵۴۷۷۴	۰٫۰۱۶۶۴۲۵۰۰۴۷۵۸	۰٫۰۰۴۹۰۸۹۳۴۷۱۰۴۱

۹.۴ نتیجه‌گیری

در این پایان‌نامه ابتدا تعاریف و مقدماتی از روش تعمیم یافته کانسای همان روش کالوکیشن بیان کردیم. در ادامه به توضیح نحوه عملکرد روش کالوکیشن پرداختیم. همچنین برای اثبات همگرایی روش کالوکیشن به بیان فرض‌ها و لم‌هایی پرداختیم. با بیان مثالی عددی نشان دادیم که روش کالوکیشن بسیار کارآمد و مفید است، به این دلیل که هم از لحاظ عددی پایدار است و از طرفی دیگر دقت بالایی دارد، و هم این‌که دیگر نیازی به محاسبه جواب با انتگرال‌گیری‌های طولانی و زمان‌بر نیست. بنابراین به راحتی جواب معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی غیرخطی سهموی با روش کالوکیشن به دست می‌آید. این روش روی مسائل با بعد بالا هم جواب می‌دهد.

۱۰.۴ پیشنهاد برای کارهای آتی

در این پایان‌نامه روش بدون مش کالوکیشن را برای مسائل مقدار نهایی سهموی به کار بردیم. این روش هم می‌توانیم برای مسائل بیضوی و هذلولوی استفاده کنیم و ببینیم آیا این روش برای این مسائل هم

پاسخگو می‌باشد یا خیر. جواب تحلیلی را می‌توانیم با روش‌های مختلف انتگرال‌گیری امتحان کنیم و بررسی کنیم کدام روش بهتر و کم هزینه‌تر می‌باشد.

پیوست آ کد متلب

```
%Calculate analytical solution
function anal = Analytical(x1,x2)
sigma = 1;
% Variance in Brownian motion.
mu = 0;
% Mean in Brownian motion.
m = 10^6;
% Number of samples for estimating v(t,x).
W = randn(2,m)*sqrt(sigma)+mu;
% Uniform gaussian distribution. (2D standard Brownian motion).
h = exp(Fx(x1+W(1,:),x2+W(2,:)));
% Function "h" in Monte-Carlo method.
J = (1/m)*sum(h);
% Integrate solution by Monte-Carlo method.
anal = log(J);
% Analitical solution by Cole-Hopf transformation method.
end

Calculate f(x1,x2)
function fx = Fx(x1,x2)
fx = cos(x1).*cos(x2);
```

```

% Examine the case of the terminal data
end

clc;
clf;
clear all;
close all;
syms x1 x2;

% Initialization
N = 25;
% Number of points.
x = linspace(-pi/4, pi/4,N);
% Use equi-spaced grids on  $[-\pi/4, \pi/4]^2$  consisting of N points for the set x of data

%Calculating
xx = linspace(-pi/2, pi/2,10^6);
yy = linspace(-pi/2, pi/2,10^6);
fx = Fx(xx,yy)
anal_init = Analytical(xx,yy)

[x1,x2] = meshgrid(x,x);
% rectangular grid in 2d space for x1 and x2.
anal_sol = analytical(x1,x2);
% calculate analitical solution by cole-hopf transformation method.
x3 = subs(anal_sol,{x1,x2},{x1,x2});
% replace all x1 and x2 symbolic variables with x1 and x2 and then evaluate "anal_sol"
x3 = double(x3);
% convert symbolic objects to double precision.
%plotting
figure;

```

```
grid on;
view(30,40);
% set the viewing angle of plot.
v = surface(x1,x2,x3);
% create surface object of analytical solution v(t,x).
set(gca,'xtick',-1:0.2:1);
% customize the locations of tick marks along x axis.
set(gca,'ytick',-1:0.2:1);
% customize the locations of tick marks along y axis.
set(gca,'ztick',0:0.05:0.5);
% customize the locations of tick marks along z axis.
xlabel('x1'); ylabel('x2'); zlabel('x3');
```


مراجع

- [1] G. Barles and P. E. Souganidis, *Convergence of approximation schemes for fully nonlinear second order equation*, Anal. Asymptot (1991), 4:271-283.
- [2] F. Bonnans and H. Zidani, *Consistency of generalized finite difference schemes for the stochastic HJB equation*, SIAM J. Numer. Anal, (2003), 41:1008–1021.
- [3] F. Camilli and M. Falcone, *An approximation scheme for the optimal control of diffusion processes*. Math. Model. Numer. Anal, (1995), 29:97–122.
- [4] E. Carlini, M. Falcone, and R. Ferretti , *An efficient algorithm for Hamilton-Jacobi equations in high dimension*, Comput. Visual. Sci, (2004), 7:15–29 .
- [5] K. Debrabant and E. R. Jakobsen, *Semi-Lagrangian schemes for linear and fully non-linear diffusion equations*, Math. Comp ,(2013), 82:1433–1462.
- [6] L. C. Evans, *Partial differential equations*, American Mathematical Society, Providence ,(1998).
- [7] A. Fahim, N. Touzi, and X. Warin, *A probabilistic numerical method for fully non-linear parabolic PDEs*, Ann. Appl. Probab, (2011), 21:1322–1364.
- [8] C.-S. Huang, S. Wang, C. S. Chen, and Z.-C. Li, *A radial basis collocation method for Hamilton-Jacobi-Bellman equations*, Automatica, (2006),42:2201–2207
- [9] E. J. Kansa, *Multiquadrics-a scattered data approximation scheme with application to computational fluid-dynamics-II*, Computers Math. Applic, (1990), 19:147–161.
- [10] R. V. Kohn and S. Serfaty, *A deterministic-control-based approach to fully nonlinear parabolic and elliptic equations*, Comm. Pure Appl. Math, (2010), 63:1298–1350.
- [11] H. J. Kushner and P. Dupuis, *Numerical methods for stochastic control problems in continuous time*, Springer-Verlag, New York, (2001).
- [12] G. Pagès, H. Pham, and J. Printems, *An optimal Markovian quantization algorithm for multidimensional stochastic control problems*, Stoch. Dyn, (2004), 4:501–545.

-
- [13] H. Wendland, *Scattered data approximation*, Cambridge University Press, Cambridge, 2010.
- [14] Y. Nakano, *Covergence of the meshfree collocation methods for fully nonlinear parabolic equations*, arXiv preprint ,(2014),arXiv:1408.5195.
- [15] Liu, Gui-Rong, and Yuan-Tong Gu, *An introduction to meshfree methods and their programming*, Springer Science and Business Media (2005).
- [16] S. Larsson and V. Thomee, *Partial Differential Equations with Numerical Methods*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (2003).
- [17] A. Jaun, *Numerical methods for partial differential equations*, NADA, Royal Institute of Technology, Stockholm, (1999).
- [18] W. Rudin, *Principles of mathematical analysis*, McGraw-Hill, New york, (1964).
- [19] M. L. Rizzo , *Statistical computing with R*, Chapman Hall CRC The R Series, (2007).

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Supersolution	ابر جواب
Probabilistic	احتمالی
Splin	اسپلاین
Partition	افراز
Strict	اکید
Element	المان
Expectation	امید ریاضی
Integral	انتگرال
Infimum	اینفیمم
Upper	بالایی
Free	بدون
Meshfree	بدون مش
Estimation	برآورد
Dimensional	بعد
Elliptical	بیضوی
Stability	پایداری
Basis	پایه
Lower	پایینی
Diffuse	پخش
Function	تابع
Transform	تبدیل
Analytical	تحلیلی
Difference	تفاضلات
Approximate	تقریبی
Unisolvent	تک حل پذیر

Distribution	توزیع
Deterministic	جبری
Partial	جزیی
Solution	جواب
Multiindex	چند اندیسه
Multiquadrics	چندربعی
Polyharmonic	چندهمساز
Volume	حجم
Limit	حد
Error	خطا
Interior	درونی
Interpolation	درونیابی
Dirichle	دیریکله
Particle	ذرات
Roubin	رابین
Quadratic	ربعی
Method	روش
Subsolution	زیرجواب
Sobolev	سوبولوف
Supremem	سوپریمم
Semicontinuous	شبه پیوسته
Conditionally	شرطی
Radial	شعاعی
Plate	صفحه
Numerical	عددی
Dominate	غالب
Process	فرآیند
Space	فضا
Fourier	فوریه
Diagonally	قطری
Collocation	کالوکیشن
Least	کمترین

Gaussian	گاوسی
Node	گره
Matrix	ماتریس
Maximum	ماکزیمم
Symmetric	متقارن
Finite	متناهی
positive	مثبت
Native	محلی
Con	مخروط
Square	مربعات
Boundary	مرزی
Problem	مسایل
Local	منطقه‌ای
Equation	معادله
Inverse	معکوس
Definite	معین
Mainimum	مینیمم
Thin	نازک
Inequality	نامساوی
Point	نقطه
Terminal	نهایی
Neumann	نیومن
Viscosity	ویسکوسیتی
Hyperbolic	هذلولوی
kernel	هسته
Convergence	همگرایی
Smooth	هموار
Unique	یکتا

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Analytical	تحلیلی
Approximate	تقریبی
Basis	پایه
Boundary	مرزی
Collocation	کالوکیشن
Con	مخروط
Conditionally	شرطی
Convergence	همگرایی
Definite	معین
Deterministic	جبری
Diagonally	قطری
Difference	تفاضلات
Diffuse	پخش، پراکنده
Dimensional	بعد
Dirichle	دیریکله
Distribution	توزیع
Dominate	غالب
Element	المان، عناصر
Elliptical	بیضوی
Equation	معادله
Error	خطا
Estimation	برآورد
Expansion	بسط
Expectation	امید ریاضی
Finite	متناهی

Fourier	فوریه
Free	بدون
Function	تابع
Gaussian	گاوسی
Hyperbolic	هذلولوی
Infimum	اینفیم
Inequality	نامساوی
Integral	انتگرال
Interior	درونی
Interpolation	درونیابی
Inverse	معکوس
kernel	هسته
Least	کمترین
Limit	حد
Local	منطقه‌ای
Lower	پایینی
Mainimum	مینیمم
Matrix	ماتریس
Maximum	ماکزیمم
Meshfree	بدون مش
Method	روش
Multiindex	چند اندیسه
Multiquadrics	چندربعی
Native	محلی
Neumann	نیومن
Node	گره
Numerical	عددی
Parabolic	سهموی
Partial	جزیی
Particle	ذرات
Partition	افراز
Plate	صفحه

Point	نقطه
Polyharmonic	چندهمساز
positive	مثبت
Probabilistic	احتمالاتی
Problem	مسایل
Process	فرآیند
Quadratic	ربعی
Radial	شعاعی
Roubin	رایین
Semicontinuous	شبه پیوسته
Smooth	هموار
Sobolev	سوبولوف
Solution	جواب
Space	فضا
Splin	اسپلاین
Square	مربعات
Stability	پایداری
Strict	اکید
Subsolution	زیرجواب
Supremem	سوپریمم
Supersolution	ابرجواب
Symmetric	متقارن
Terminal	نهایی
Thin	نازک
Transform	تبدیل
Unique	یکتا
Unisolvent	تک حل‌پذیر
Upper	بالایی
Viscosity	ویسکوسیتی
Volume	حجم

Abstract

In this thesis, we prove the convergence of the meshfree collocation methods for the terminal value problems of linear and fully nonlinear parabolic partial differential equations in the frame-work of viscosity solutions. We represent preliminary concepts. We briefly review the meshfree interpolation theory and derive a general collocation method for parabolic partial differential equation. Finally we prove the convergence property.

keywords:Radial basis function, Meshfree method, Parabolic equations, Viscosity solution.



Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

Convergence Of The Meshfree Collocation For Fully Nonlinear Parabolic Equations

Behnaz Jowkar

Supervisor

Dr.Mesforoush

Advisor

Dr.Ghovatmand

January 2016