دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

بررسی مسائل زمان‌بندی معکوس

تکتم حاتمی سنگلی

استاد راهنما

دکتر جعفر فتحعلی

استاد مشاور

دکتر فرخ فروهنده

۱۳۹۴

تقدیم به پدر و مادرم

برای همه روزهایی که در کنارم بودند، برای بهترین بودنشان

تقدیم به برادرانم برای حمایت هایشان.

سپاس‌گزاری...

سپاس **خدای** را که شمارندگان بی‌نهایت‌ها، شمردن نعمت‌های او ندانند؛
سپاس از پدر و مادر عزیزم که برایم همه بودند و هیچ نبودم برایشان،
سپاس از برادرانم که بیش از شایدها و بایدها مهربان بودند.
سپاس از استاد فرهیخته جناب آقای دکتر جعفر فتحعلی برای آموخته‌ها و صبوریشان و از استاد فرزانه جناب آقای دکتر فرخ فروهنده برای سایه پدرانه‌شان،
سپاس از جناب آقای دکتر علیرضا ناظمی و جناب آقای دکتر مهرداد غزنوی که داوری این رساله را بر عهده گرفتند.
از دوستان مهربانم آقای رضوان کرمی، خانم‌ها فاطمه سلیمانی، سپیده احمدزاده و در نهایت از دوست همیشگی آقای حمیدرضا رحیمی سپاس‌گزارم.

تکتم حاتمی سنگی
۱۳۹۴

تعهدنامه

اینجانب **تکتم حاتمی سنگلی** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی کاربردی** **دانشکده علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **بررسی مسائل زمان‌بندی معکوس** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تاکنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام " دانشگاه شاهرود " یا " Shahrood University " به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تکتم حاتمی سنگلی

۱۳۹۴

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در این پایان‌نامه به بررسی مسائل زمان‌بندی و زمان‌بندی معکوس پرداخته می‌شود، اهمیت مسائل زمان‌بندی امروزه در دنیای صنعت و تجارت و حتی در مواردی که با نیروی انسانی سر و کار داریم (مثلاً زمان‌بندی در بیمارستان‌ها یا مراکز آموزشی)، واضح است. زمان‌بندی در اغلب سازمان‌ها و ادارات و کارخانجات مورد نیاز است. یک زمان‌بندی مناسب می‌تواند به کاهش هزینه‌ها و افزایش بهره‌وری بیانجامد. همچنین توان رقابتی بالاتر برای تولیدکنندگان نیز از نتایج زمان‌بندی مؤثر است. هدف عمده زمان‌بندی ایجاد تعادل میان اهداف مغایر، به‌کارگیری مؤثر کارگران، تجهیزات و تسهیلات همزمان با کاهش زمان انتظار مشتریان و زمان فرآیندها است.

ضمن یادآوری این مهم، این رساله مسائل معکوس را مورد بررسی قرار می‌دهد .فرض کنید فرآیند تولید مستلزم بعضی مقدمات باشد که تولیدکننده می‌تواند قبل از شروع آنها را فراهم کند و سپس با توجه به اطلاعاتی که در اختیار دارد، بهترین دنباله را انتخاب کند. ممکن است کارهایی که بعد از شروع فرآیند، وارد می‌شوند ویژگی‌های متفاوتی داشته باشند و در نتیجه جایگشت انتخابی دیگر بهینه نباشد و یا تغییری به یک‌باره در روند تولید و پردازش روی دهد. اگر به دلایل زیادی همچون محدودیت تکنولوژی جایگشت قابلیت تغییر نداشته باشد مثل هزینه بالا برای جابه‌جایی ایستگاه‌های کاری، تولیدکننده مجبور می‌شود سرعت انجام بعضی کارها را تنظیم کند، یعنی زمان پردازش را تنظیم کند. هزینه این تنیمات با استفاده از زمان‌بندی معکوس به حداقل خواهد رسید. در ادامه نشان می‌دهیم مسائل زمان‌بندی معکوس می‌توانند به صورت مسائل برنامه‌ریزی خطی دربیایند، حتی در مورد مسائلی که مسئله زمان‌بندی آن‌ها در پیچیدگی زمانی چندجمله‌ای قابل حل نیست، نیز صادق است.

بهینه‌سازی معکوس در خیلی از مسائل، ازجمله در مسائل علوم ژئوفیزیک، عکس‌برداری پزشکی، مسائل مربوط به ترافیک و دیگر موارد کاربرد دارد. کاربرد اصلی مسائل زمان‌بندی معکوس در شرایطی است که پارامترها می‌توانند بین تولیدی‌ها و مشتری‌ها تنظیم شوند. پارامترهای کار اصلی آن‌هایی هستند که مشتری‌ها ترجیح می‌دهند و مقادیر خطای متناظر با آنها، آنهایی هستند که مدیر تولیدی‌ها پیشنهاد می‌کنند.

یکی دیگر از کاربردهای مسائل زمان‌بندی معکوس می‌تواند در سیستم‌هایی باشد که کارها باید به صورت دنباله بیایند تا همواره موجود باشند، اما یک کنترل بر پارامترهای کار وجود دارد. به‌طور خاص در این سیستم‌ها کسی که زمان‌بندی را انجام می‌دهد، زمانی که پارامترهای کار به سیستم داده می‌شوند اطلاعاتی در مورد آن‌ها به‌دست می‌آورد. زمان‌بند می‌تواند مقدار حقیقی پارامترها را با مشتری‌ها تنظیم کند، به ترتیبی که حتی بعد از اینکه پارامترهای جدید به زمان‌بندی بهینه افزوده شد، آن را بهینه نگه دارد. کاربرد زمان‌بندی معکوس کمترین مقدار تغییر در پارامترهای کار ذکر شده را تعیین می‌کند.

کلمات کلیدی : زمان‌بندی، زمان‌بندی معکوس، تک ماشینه، دو ماشینه، زمان پردازش تنظیم‌پذیر

لیست مقالات مستخرج از پایان‌نامه

- Hatami Sangeli. T & Soleimani. F & Fathali. J, (2015), *A new approach for two-objective inverse scheduling single machine problems based on fuzzy distance minimization*, 46^{th} Annual Iranian Mathemathics Conference, 579–582, Yazd.

- Hatami Sangeli. T & Fathali. J, (2015), *Solving inverse scheduling single machine problems by Karush-Kuhn-Tucker condition optimally*, 46^{th} Annual Iranian Mathemathics Conference, 612–615, Yazd.

فهرست مطالب

فصل ۱

مفاهیم اولیه مسائل زمان‌بندی

۱.۱ مقدمه

زمان‌بندی[۱] تخصیص منابع در طول زمان برای اجرای مجموعه‌ای از وظایف است. این تعریف نسبتاً کلی واژه، دو مفهوم مختلف را در بردارد، اولاً زمان‌بندی نوعی تصمیم‌گیری است و فرآیندی است که در جریان آن برنامه زمانی را تعیین می‌کنند. ثانیاً زمان‌بندی مبحثی نظری است که مجموعه‌ای از اصول، مدل‌ها، روش‌ها و نتایج منطقی را در بر می‌گیرد، که برای ما بینشی عمیق در مورد عمل زمان‌بندی فراهم می‌آورد.
زمان‌بندی در لغت به معنی ''فهرست‌بندی'' و ''دارای برنامه‌شدن'' است و ریشه لاتین آن به معنی ''یک برگ از مقاله[۲]'' است و همچنین ریشه فرانسوی آن به معنی '' آگهی، یادداشت و طومار[۳]'' می‌باشد.
مسائل زمان‌بندی در صنعت کاربرد فراوان دارند، بدین جهت امروزه به آنها اهمیت بسیاری داده می‌شود. مسئله زمان‌بندی اولین بار در سال ۱۹۳۶ [۳۳] برای بررسی جدول زمانی راه‌آهن بکار برده شد، و سپس در اوایل سال ۱۹۵۰ این مسئله توجه بسیاری از دانشمندان علوم مختلف را به خود جلب کرد. از آن به بعد صورت‌هایی از این مسئله همراه با فرضیات مختلف بیان شد و دانشمندان زیادی در مورد آنها به بحث و ارائه راه حل پرداختند، به گونه‌ای که امروزه این مسئله به‌صورت یک مبحث گسترده درآمده است که کار در این زمینه مطالعات خاصی را می‌طلبد.

۱.۱.۱ کار زمان‌بندی

مسئله عملی تخصیص منابع در طول زمان برای اجرای مجموعه‌ای از کارها، در وضعیت‌های مختلف مطرح می‌شود اما در بیشتر موارد عمل زمان‌بندی کارها پس از حل برخی مسائل مربوط به برنامه‌ریزی

---

[۱] scheduling

[۲] A Small Leaf of Paper

[۳] Scroll, Note or Bill

اصولی مورد توجه قرار می‌گیرد و باید این نکته را در نظر داشت که تصمیمات مربوط به زمان‌بندی، اهمیت کمتری نسبت به مجموعه وسیع‌تری از تصمیمات مدیریتی دارد.

به عنوان مثال در حل مسائل مربوط به ساخت، مسائل اساسی مدیریتی مربوط به انتخاب محصولی که باید ساخته شود و تعیین میزان تولید هر محصول اولویت دارد. بعد از به کارگیری بررسی بازار و تحلیل‌های اقتصادی برای حل این‌گونه مسائل، برنامه‌ریزی تکنولوژیکی را بر این مسئله که محصول چگونه باید ساخته شود متمرکز می‌کنند. فقط بعد از این‌که جواب این سؤالات مربوط به زمان‌بندی داده شد و در دسترس بودن منابع دانسته شد، زمان برای توجه به مسائل زمان‌بندی مناسب است.

به مثال دیگری توجه کنید، مسائل اساسی مدیریتی در ارائه خدمات درمانی مستلزم طراحی و تعیین تعداد خدمات و میزان کارایی و خدمت‌دهی در هر مورد است. برنامه‌ریزی تکنولوژیکی پس از آن به مسائلی همچون طراحی کارخانه، میزان بهره‌برداری از تجهیزات و گسترش نیروی انسانی در مراحل بعدی مربوط می‌شود. وقتی که با اتخاذ این تصمیمات نموداری از منابع دسترس‌پذیر فراهم شد می‌توان به مسائل زمان‌بندی پرداخت.

این مثال‌ها نشان می‌دهد که چه‌طور تصمیمات اصولی مدیریت به مسائل سه‌گانه زیر مربوط می‌شود.

۱. چه محصول یا خدمتی قرار است عرضه شود؟

۲. در چه مقیاسی قرار است عرضه شود؟

۳.چه منابعی قرار است تأمین شود؟

پاسخ دادن به این پرسش‌ها کار برنامه‌ریزی است. در مقابل، در کار زمان‌بندی فرض بر این است که جواب این پرسش‌ها از پیش فراهم شده است. بنابراین، کار زمان‌بندی صرفاً به وضعیتی مربوط می‌شود که در آن طبیعت کارهایی که باید زمان‌بندی شود، توصیف شده و ترکیب منابع موجود تعیین شده باشد. البته در عمل کارهای برنامه‌ریزی و زمان‌بندی کاملاً مستقل از هم نیست. برای توضیح این دو کار سناریوی نمونه زیر را در نظر بگیرید:

برنامه‌ریز[۴] ابتدا وظایفی را که باید انجام شود مشخص و حدودی برای میزان منابع دسترس‌پذیر تعیین می‌کند سپس زمان‌بند این اطلاعات را می‌گیرد و مشخص می‌کند که منابع موجود چگونه به انجام کارهای تعیین‌شده تخصیص یابد. وقتی یک برنامه زمانی آزمایشی تهیه شد، زمان‌بند[۵] می‌تواند آن را ارزیابی کند و نتایج ارزیابی خود را به برنامه‌ریز ارائه کند. ممکن است برنامه‌ریز از چگونگی عملکرد برنامه زمانی آزمایشی راضی نباشد و ظرفیت منابع برنامه‌ریزی شده (یا حتی خود وظایف) را تغییر دهد و بدین وسیله اطلاعات ورودی تجدیدنظر شده‌ای را در اختیار زمان‌بند قرار دهد. رابطه متقابل میان این دو مقام قبل از دستیابی به یک تصمیم نهایی در مورد برنامه‌ریزی ممکن است طی بارها رد و بدل کردن اطلاعات بین این دو گروه به همین شیوه تکرار شود و در موقعیت‌های این‌چنینی و تغییرات به یک باره، لزوم بررسی زمان‌بندی معکوس بیشتر احساس می‌شود.

به هر حال، سرانجام تصمیمات برنامه‌ریزی بیانگر تعهداتی بلندمدت مانند طراحی یا توسعه امکانات، خرید و نصب تجهیزات و تصمیم‌گیری‌های مربوط به نیروی کار است. درحالی‌که ابتدا می‌توان این

[۴] programmer

[۵] scheduler

تصمیمات را با توجه به چگونگی زمان‌بندی اتخاذ کرد، زمانی که در برنامه‌ها تجدیدنظر شود، حدودی را مشخص می‌کنند که برنامه زمانی با توجه به آن باید در دوره‌ای طولانی اجرا شود. بنابراین فرایند زمان‌بندی را اغلب در شرایطی تهیه می‌کنند که دسترس‌پذیری منابع، اساساً با توجه به تعهدات بلندمدت پذیرفته شده طبق تصمیم برنامه‌ریزی اولیه، ثابت باشد.
با این زمینه فکری می‌توان قدم‌های دستیابی به تصمیمات زمان‌بندی را طبق رویکردی سیستمی توصیف کرد. به طور غیر رسمی ممکن است این واژه به معنای روش عقلایی برای ورود به تصمیم‌گیری تعبیر شود، اما رویکرد سیستمی نشانگر ساختاری رسمی است که در عملکرد مدیریتی امروزی از حمایتی فزاینده برخوردار می‌شود. چهار مرحله اصولی رویکرد سیستمی فرمول‌بندی، تحلیل، ایجاد و ارزیابی را در بر می‌گیرد.
در مرحله اول اساساً مسئله را تعریف و ضابطه‌های حاکم بر تصمیم‌گیری را تعیین می‌کنند. این فعالیت اغلب پیچیده است ولی تصمیمات مناسب و خوب بدون تعریف روش مسئله و مشخص کردن صریح اهداف به‌ندرت ممکن است اتخاذ شود. تحلیل، فرآیند مشروح بررسی عناصر مسئله و روابط متقابل آنها با یکدیگر است. هدف از این مرحله تعریف متغیرهای تصمیم‌گیری و نیز تشخیص روابط آنها با محدودیت‌هایی است که باید از آن پیروی کند، ایجاد فرآیند ساختن گزینه‌های مختلف جواب مسئله و نقش آن تعیین گزینه‌های ممکن است و بالاخره ارزیابی مشتمل بر فرآیند مقایسه گزینه‌های امکان‌پذیر و انتخاب گزینه مطلوب جهت به‌کارگیری است. البته این انتخاب مبتنی بر ضابطه‌هایی است که در وهله نخست تعیین شده است.
آشنایی با مدل‌های مناسب به انجام فرآیندهای تحلیل و ترکیب کمک می‌کند. مدل‌هایی که بررسی می‌شود عناصر و روابط متقابل مهمی دارد که بارها در مسائل زمان‌بندی مشاهده می‌شود و همچنین مشخص می‌کند که جواب‌های ممکن چگونه به‌طور نظام‌مند به‌وجود می‌آید. سرانجام، فرآیند ارزیابی گزینه‌ها، در مسائل بزرگ زمان‌بندی ممکن است پیچیده باشد و به‌کار بردن راه‌حل‌های پیچیده اکثراً قسمت مهمی از وظیفه زمان‌بندی را در برمی‌گیرد.

۲.۱.۱ نظریه زمان‌بندی

نظریه زمان‌بندی اصولاً با مدل‌های ریاضی سروکار دارد و بین کار زمان‌بندی و توسعه مدل‌های زمان‌بندی رابطه برقرار می‌کند و به طور پیوسته آنها را با مسائل نظری و عملی زمان‌بندی محک می‌زند. دیدگاه نظری به طور غالب رویکردی کمی است و سعی آن دست یافتن به ساختار مسئله در قالب شکل فشرده ریاضی است. به ویژه این رویکرد کمی با تفسیر اهداف تصمیم‌گیری در قالب یک تابع هدف صریح و بیان موانع تصمیم‌گیری به‌صورت صریح شروع می‌شود.
تابع هدف آرمانی باید دربرگیرنده تمام هزینه‌های سیستم برای اجرای تصمیمات مربوط به زمان‌بندی باشد. در تابع هدف مسائل زمان‌بندی معکوس بیشتر به تنظیمات و هزینه‌های مرتبط به آن رسیدگی می‌شود. به هر حال، به هنگام اجرای آن در عمل، اندازه‌گیری چنین هزینه‌هایی مشکل است. در حقیقت، هزینه‌های عمده عملیاتی را کار برنامه‌ریزی، تعیین می‌کند در حالی که تفکیک هزینه‌های کوتاه‌مدت دشوار

است و آنها اغلب ثابت به نظر می‌آیند. با وجود این، سه نوع هدف در زمان‌بندی، بهره‌برداری کارا از منابع، پاسخگویی سریع به تقاضا و انطباق دقیق زمان‌های تحویل با موعدهای تحویل تعیین شده عمده‌تر به نظر می‌رسند. غالباً می‌توان از یک ضابطه مهم هزینه‌ای مربوط به سنجش عملکرد سیستم (مانند زمان بیکاری ماشین، زمان انتظار برای انجام کار یا تأخیر کار) به عنوان جانشینی برای هزینه کل سیستم استفاده کرد.

دو نوع از محدودیت‌های مربوط به امکان‌پذیری معمولاً در مسائل زمان‌بندی ظاهر می‌شود. اولاً، محدودیت‌هایی در دسترس‌پذیری منابع وجود دارد، ثانیاً محدودیت‌های تکنولوژیکی در ترتیب انجام کارها وجود دارد. جوابی به هر مسئله زمان‌بندی یافتن راه‌حلی امکان‌پذیر برای این دو نوع محدودیت است، به‌طوری که ''حل'' هر مسئله زمان‌بندی برابر با پاسخگویی به این دو سؤال است:

۱. کدام منبع برای انجام هر وظیفه تخصیص داده خواهد شد؟

۲. هر وظیفه در چه وقت انجام خواهد شد؟

به عبارت دیگر، جوهره مسائل زمان‌بندی به تصمیم‌گیری در مورد تخصیص منابع و توالی عملیات منحصر می‌شود. نوشتارهای زمان‌بندی مملو از مدل‌های ریاضی برای پاسخگویی به این دو سؤال تصمیم‌گیری است.

به‌طور سنتی مسائل زمان‌بندی به‌صورت مسائل بهینه‌سازی محدودیت‌دار به ویژه مسائل مربوط به تخصیص منابع و توالی عملیات مورد بررسی قرار گرفته است. در پاره‌ای از موارد مسئله زمان‌بندی تنها مربوط به تخصیص منابع است و در این حالات مدل‌های برنامه‌ریزی ریاضی معمولاً می‌توانند برای تعیین تصمیمات در زمینه تخصیص منابع بهینه مورد استفاده قرار گیرند.

عناصر مهم مدل‌های زمان‌بندی کارها و منابع‌اند. در نوشتارهای مربوط به زمان‌بندی، منابع نوعاً بر حسب قابلیت‌های کمی و کیفی خود مشخص می‌شوند، به‌طوری که هر مدل نشان‌دهنده نوع و میزان هر منبع است. هر کار مشخص برحسب اطلاعاتی از قبیل منبع مورد احتیاج، مدت انجام کار، زمانی که انجام آن را می‌توان شروع کرد و زمان تحویل آن توصیف می‌شود. به‌علاوه مجموعه‌ای از کارها را می‌توان برحسب محدودیت‌های تکنولوژیکی (روابط تقدمی) که در مورد عناصر تشکیل‌دهنده آن صدق می‌کند بیان کرد.

تئوری زمان‌بندی همچنین شامل شیوه‌های متنوع و مختلفی است که در حل مسائل زمان‌بندی مفید واقع می‌شود. در واقع حوزه زمان‌بندی به‌صورت نقطه کانونی ایجاد، به‌کارگیری و ارزیابی روش‌های ترکیبی، شیوه‌های شبیه‌سازی، روش‌های شبکه‌ای و رویکردهای ابتکاری حل مسائل درآمده است. انتخاب شیوه مناسب به پیچیدگی مسئله، طبیعت مدل و انتخاب معیار کارایی و عوامل دیگر بستگی دارد. در خیلی از حالات بهتر است چند شیوه به عنوان گزینه‌های مختلف برخورد به مسئله درنظر گرفته شود. به همین دلیل نظریه زمان‌بندی شاید به همان اندازه که به امر بررسی روش‌ها بپردازد به بررسی مدل‌ها نیز توجه دارد.

برای رده‌بندی مدل‌های عمده زمان‌بندی لازم است ترکیب منابع و رفتار کارها مشخص شود. برای نمونه

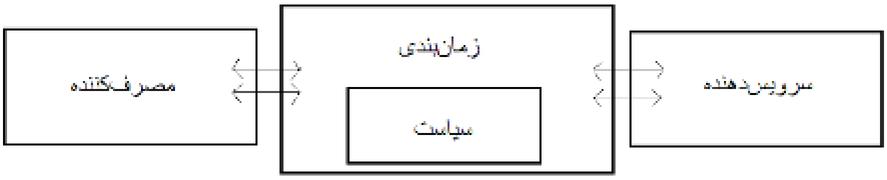
یک مدل ممکن است یک یا چند نوع منبع داشته باشد. اگر یک نوع منبع داشته باشد کار مربوطه احتمالاً یک مرحله‌ای است، درحالی‌که اگر چند منبع داشته باشد کارها معمولاً چند مرحله‌ای انجام می‌شود و در هر دو حالت منابع را می‌توان به‌صورت یک مجموعه واحد یا موازی در نظر گرفت. به‌علاوه اگر مجموعه کارهای در دسترس برای زمان‌بندی در طول زمان تغییر نکند سیستم، ایستا[۶] نامیده می‌شود، در مقابل اگر یک کار جدید به مجموعه کارها در طول زمان افزوده شود سیستم، پویا[۷] نامیده می‌شود.
به طور سنتی ثابت شده است که بررسی مدل‌های ایستا آسانتر از مدل‌های پویا است و بررسی‌های گسترده‌تری در مورد آنها انجام شده است. با وجود این، مدل‌های ایستا اغلب ماهیت پیچیده‌تر سیستم‌های پویا را به خود می‌گیرد و تحلیل مسائل ایستا اغلب اوقات به کشف بینش‌های ارزشمندی و اصول ابتکاری مناسبی انجامیده که در وضعیت‌های کلی سودمند واقع شده است.
بسیاری از پیشرفت‌های اولیه در حوزه زمان‌بندی ناشی از مسائل پدید آمده در زمینه ساخت بوده است. بنابراین، طبیعی است که در توصیف مسائل زمان‌بندی از واژه‌های مربوط به ساخت استفاده شود. هر چند هم‌اکنون زمان‌بندی در بسیاری از حیطه‌هایی که به ساخت مربوط نمی‌شود نیز از اهمیت قابل توجهی برخوردار است ولی همچنان از واژه‌های رشته ساخت نیز در آن استفاده می‌شود. لذا، منابع معمولاً "ماشین" و وظایف اساسی "کار" نامیده می‌شود. در پاره‌ای از موارد کارها خود از چند فعالیت جزئی تشکیل شده است که به‌وسیله محدودیت‌های تقدمی با یکدیگر رابطه متقابل دارد. چنین اجزائی را عملیات[۸] می‌نامند. بنابراین ممکن است مثلاً با یک مسئله زمان‌بندی معاینه بیماران سرپایی در یک کلینیک طبی مواجه شویم و دریابیم که سیستم به مفهوم کلی پردازش "کار" با "ماشین" توصیف شده است.

۲.۱ تعریف و اهداف زمان‌بندی

بعد از مباحث مطرح شده اگر بخواهیم به طور خلاصه زمان‌بندی و هدف آن را بیان کنیم، باید بگوییم یک عامل مؤثر برای انجام بهتر و مدیریت مناسب‌تر فعالیت‌های مختلف، استفاده از الگویی است که اختصاص منابع مورد نیاز به این فعالیت‌ها را به بهترین وجه ممکن انجام دهد. از مسائلی که ما را در این زمینه یاری می‌کند مسئله زمان‌بندی است. در اغلب مسائل زمان‌بندی یک مجموعه از منابع یا سرویس‌دهنده‌ها و مجموعه‌ای از مصرف‌کننده‌ها داریم، که باید سرویس‌دهنده‌ها به مصرف‌کننده‌ها به نحوی اختصاص یابند که یکی از معیارهای عملکرد بهینه شود.
معیار عملکرد رابطه مستقیم با اهداف مسئله دارد و در حقیقت همان تابع هدف مسئله می‌باشد که تابع هدف اغلب مسائل به‌صورت حداقل کردن زمان می‌باشند. همچنین ممکن است حداقل کردن زمان کل سرویس، حداقل کردن میانگین زمان انتظار کارها برای دریافت سرویس، بهینه کردن پیچیدگی زمانی و... باشد.

[۶] static
[۷] dynamic
[۸] opration

سرویس‌دهنده می‌تواند یک منبع، یک پردازشگر[۹]، کارمند، ماشین[۱۰] و... باشد و مصرف‌کننده می‌تواند یک برنامه کامپیوتری، مشتری، کار[۱۱] و... باشد. در این پایان‌نامه ما از کلمه پردازشگر و یا ماشین به جای کلمه سرویس‌دهنده و از کلمه کار به جای کلمه مصرف‌کننده استفاده می‌کنیم.
جهت اجرای کارها توسط پردازشگر، در یک مسئله زمان‌بندی سیاستی اعمال می‌شود که تابع هدف را بهینه کند. یک سیاست زمان‌بندی بهینه باید دو عمل چگونگی ترتیب پردازش کارها و تخصیص پردازشگرها به کارها را مشخص کند. فرم کلی سیستم زمان‌بندی به‌صورت شکل (۱.۱) می‌باشد.



شکل ۱.۱: سیستم زمان‌بندی

دو مشخصه جهت مقایسه و سنجش زمان‌بندی‌های مختلف، عملکرد و کارایی آن‌ها می‌باشد. عملکرد مشخص می‌کند که سیاست تا چه حد به بهینگی نزدیک است، که هر چه عملکرد بهتر باشد سیاست بهتر است و عملکرد بهینه سیاست بهینه را در بر دارد. کارایی نیز بدین معنی است که سیاست زمان‌بندی تمام حالت‌های مسئله را جوابگو باشد.

۳.۱ دسته‌بندی مسائل زمان‌بندی

هر مسئله زمان‌بندی فرضیاتی دارد که بر اساس آنها سیاست زمان‌بندی طرح‌ریزی می‌شود. اعمال فرض‌های مختلف، مسائل زمان‌بندی گوناگونی را به وجود می‌آورد. بعضی از فرضیاتی که موجب ایجاد مسائل زمان‌بندی مختلف می‌شوند در ادامه آمده است.
۱) آیا کارها در ابتدا در سیستم موجودند یا اینکه به تدریج وارد سیستم می‌شوند، در حالت اول زمان‌بندی مسئله به‌صورت ایستا انجام شده و در حالت دوم زمان‌بندی به‌صورت پویا انجام می‌شود. در حالت پویا زمان ورود کارها ممکن است به‌صورت یک تابع احتمالی باشد.
۲) آیا قطع پردازش یک کار مجاز است یا خیر. آیا می‌توان در حین انجام یک کار پردازش آن را متوقف کرد و ادامه کار را در زمان دیگری انجام داد، که بسته به مورد، زمان‌بندی را قابل قطع یا غیر قابل قطع نامند.

[۹] processor
[۱۰] Machine
[۱۱] job

۳)اگر تعداد پردازشگرها یکی باشد زمان‌بندی را تک‌ماشینی[۱۲] و اگر چندین عدد باشد چندماشینی[۱۳] گویند.
۴)جریان پردازش کارها توسط پردازشگرها چگونه است. یعنی هر کار جهت پردازش شدن به چه پردازشگرهایی نیاز دارد. اگر هر کار دارای جریان پردازش مخصوص به خود باشد، مسئله را کارگاهی[۱۴] نامیده و اگر تمام کارها دارای جریان پردازش یکسان باشد، کارگاهی خاص[۱۵] می‌نامند. همچنین اگر ترتیب انجام پردازش توسط پردازشگرهای مختلف روی کارها مهم نباشد، کارگاهی بدون شرط[۱۶] نامند، و اگر در مسئله کارگاهی خاص ترتیب پردازش کارها بر روی ماشین‌ها یکسان باشد، آن را کارگاهی خاص جایگشتی[۱۷] می‌نامند و در غیر این صورت کارگاهی خاص غیرجایگشتی[۱۸] می‌نامند.
۵) آیا کارها از یکدیگر مستقل هستند یا اینکه به هم وابسته‌اند و شروع پردازش بعضی منوط به پایان پردازش بعضی کارهای دیگر است، که در این حالت زمان‌بندی همراه با تقدم کارها را خواهیم داشت.
۶)زمان‌بندی گاهی بر روی پردازشگرهای موازی[۱۹] و گاهی بر روی پردازشگرهای سری[۲۰] انجام می‌شود و بر این اساس نیز به دو دسته تقسیم می‌شود. در حالتی که تعدادی ماشین یا مرکز کاری داشته باشیم که هر یک بتوانند کار دیگری را انجام دهند، به این ماشین‌ها موازی می‌گویند. در غیر این صورت یعنی در حالتی که هر ماشین تنها بتواند کار خودش را انجام دهد، ماشین‌های سری هستند.
یک دسته‌بندی از مسائل زمان‌بندی که در [۱۷] آمده است، به‌صورت شکل ۲.۱ می‌باشد.
در این دسته‌بندی، مسائل برحسب نوع دسترسی به اطلاعات طبقه‌بندی شده‌اند. در زمان‌بندی معین[۲۱] تمام اطلاعات راجع به کارها و روابط بین آن‌ها قبل از زمان اجرا مشخص است، ولی در زمان‌بندی نامعین[۲۲] زمان اجرا، ساختار نمایش گرافی کارها و هزینه ارتباط بین آن‌ها قبل از اجرا مشخص نیست. مثلاً شاخه‌های شرطی و حلقه‌ها در مسئله، حالت‌های نامعین را نشان می‌دهند، زیرا مسیر یک شاخه شرطی و اینکه کدام حالت باید انجام شود ممکن است تا زمانی که برنامه‌های قبل از آن اجرا شوند، مشخص نباشند. همچنین کران بالای یک حلقه می‌تواند تا قبل از شروع اجرای برنامه نامشخص باشد. زمان‌بندی نامعین به سه صورت ایستا، پویا و ترکیبی[۲۳] استفاده می‌شود. در زمان‌بندی نامعین ایستا، اطلاعات راجع به نمایش گرافی کارها و بعضی اطلاعات مورد نیازقبل از اجرا تخمین زده می‌شود. مثلاً احتمال اجرای شاخه‌های مختلف مسئله در حالت شرطی و حداکثر تعداد تکرار حلقه‌ها را می‌توان قبل از اجرا پیش‌بینی کرد و یا تخمین زد.

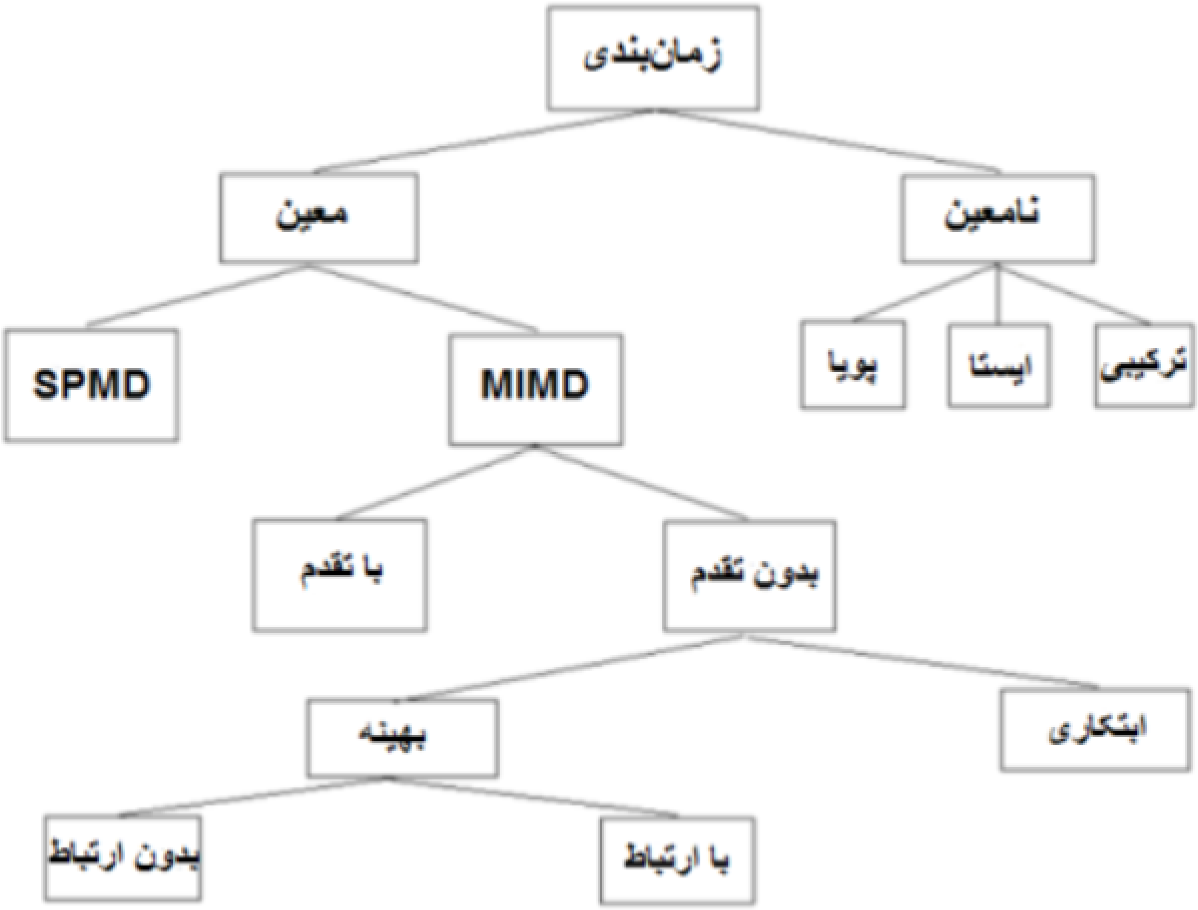
[۱۲] Single machine
[۱۳] Multiple machine
[۱۴] Job shop
[۱۵] Flow shop
[۱۶] Open shop
[۱۷] Permutation flow shop
[۱۸] Non-permutation flow shop
[۱۹] Parallel processor
[۲۰] Series processor
[۲۱] Deterministic
[۲۲] Nondeterministic
[۲۳] Hybrid

در زمان‌بندی نامعین پویا، تصمیمات جهت زمان‌بندی در حین اجرا گرفته می‌شود و زمان اجرا است که مشخص می‌شود کدام شاخه از عبارت شرطی باید اجرا شود و یا تعداد تکرار حلقه چقدر است. در حالت ترکیبی، هر دو روش ایستا و پویا به‌کار می‌رود یعنی قسمتی از اطلاعات قبل از اجرا تخمین زده می‌شود و قسمتی در حین اجرا مشخص می‌شود. همچنین در این روش از بعضی پیش پردازش‌ها که به‌صورت ایستا انجام می‌شوند، برای هدایت زمان‌بندی پویا در جهتی که نامعین بودن اطلاعات کاهش یابد، استفاده می‌شود.

زمان‌بندی معین مستلزم زمان‌بندی ایستا است، که در آن ساختار گرافی کارها، هزینه ارتباط بین کارها و زمان اجرا از قبل مشخص است. در زمان‌بندی ایستا هروقت یک کار ارائه می‌شود، برای اجرا به یک پردازشگر خاص نسبت داده می‌شود. حالتی که همه پردازشگرها برنامه‌های یکسانی را روی داده‌های مختلف اجرا می‌کنند، تک برنامه‌ای همراه با چند داده[۲۴] یا SPMD نامیده می‌شود. اگر پردازشگرها کارهای مختلفی را اجرا کنند آن‌گاه آن را چند دستورالعملی همراه با چند داده[۲۵] یا MIMD می‌نامند.

اگر بین کارها رابطه تقدم اجرا نباشد، یعنی مهم نباشد که کدام کار زودتر انجام شود، آن‌گاه مسئله با عنوان مسئله تخصیص [۲۶] کارها شناخته می‌شود و هنگامی که بین کارها رابطه تقدم و تأخر وجود دارد، اگر الگوریتم مناسبی، یعنی الگوریتمی با پیچیدگی زمانی چندجمله‌ای برای بدست آوردن جواب بهینه مسئله موجود باشد، آن‌گاه مسئله در حالت بهینه [۲۷] بررسی می‌شود و در غیر این صورت روش‌های ابتکاری [۲۸] برای حل آن به‌کار می‌رود که در این روش‌ها راه‌حل‌هایی با پیچیدگی زمانی چندجمله‌ای برای بدست آوردن جواب تقریبی و نزدیک به حالت بهینه ارائه می‌شود. در حالت بهینه ممکن است ارتباط بین کارها دارای هزینه باشد که در این‌صورت کمینه کردن هزینه نیز مورد نظر خواهد بود.

[۲۴] Single Program Multiple Data
[۲۵] Multiple Instruction Multiple Data
[۲۶] Allocation
[۲۷] Optimal
[۲۸] Heuristics



شکل ۱.۲: دسته‌بندی مسائل زمان‌بندی

۱.۳.۱ مسائل کارگاهی

ساده‌ترین مسئله کارگاهی عبارت است از تعیین یک دنباله بهینه (ترتیب پیشنهادی برای کارها) برای مجموعه‌ای شامل n کار که تنها توسط یک ماشین پردازش می‌شوند. فرض کنید $s_۱, s_۲, \ldots, s_n$ به‌ترتیب زمان‌های پردازش کارهای $j_۱, j_۲, \ldots, j_n$ باشند. یک زمان‌بندی می‌تواند تمام جایگشت‌های مختلف از اعداد صحیح $۱, ۲, \ldots, n$ را بررسی کرده و دنباله بهینه را انتخاب کند (می‌دانیم که تعداد جایگشت‌ها $n!$ است). واضح است که برای زمان‌بندی تک‌ماشینه در تمام جایگشت‌ها زمان کل پردازش کارها [۲۹] یکسان است، بنابراین زمان‌بندی بهینه را به‌گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که میانگین زمان انتظار کارها، یعنی میانگین زمانی که یک کار در سیستم از ابتدای ورود تا انتهای پردازش به سر می‌برد، کمترین مقدار شود.
در [۶] به راحتی می‌توان نشان داد که اگر زمان‌های پردازش در دنباله انتخاب شده غیر نزولی باشد، یعنی اگر دنباله کارها به‌صورت $j_۱, j_۲, \ldots, j_n$ با زمان‌های اجرای به‌ترتیب $s_۱, s_۲, \ldots, s_n$ انتخاب شود و داشته باشیم $s_۱ \leq s_۲ \leq \cdots \leq s_n$ آن‌گاه زمان‌بندی با این دنباله کمترین میانگین زمان انتظار را خواهد داشت. این روند انتخاب کارها $S.P.T.$ [۳۰] نامیده می‌شود.
گاهی همه کارها دارای اهمیت یکسان جهت پردازش نمی‌باشند، برای این منظور به کار i وزن w_i را نسبت می‌دهیم که بزرگی w_i نشان‌دهنده اهمیت کار i است. در این حالت اگر بخواهیم زمان‌بندی به‌گونه‌ای باشد که میانگین وزنی زمان انتظار کارها کمترین مقدار شود، باید به دنباله‌ای از کارها را به‌گونه‌ای انتخاب کنیم که داشته باشیم:

$$\frac{s_۱}{w_۱} \leq \frac{s_۲}{w_۲} \leq \cdots \leq \frac{s_n}{w_n}$$

این حالت کلی برای روش $S.P.T.$ نیز می‌باشد.
برای حالت n کار و دو ماشین در مسئله کارگاهی خاص اولین بار الگوریتمی توسط جانسون [۳۱] [۲۵] در سال ۱۹۵۴ ارائه گردید. در این حالت وقتی که هدف کمینه کردن زمان کل اجرا است، مسئله به نام مسئله جانسون شناخته می‌شود. مسئله جانسون، قضیه آن و اثبات قضیه جانسون در [۶] و همچنین در فصل‌های بعدی این پایان‌نامه آمده است.
در مسائل کارگاهی هر کار نیاز به یک دنباله از پردازش‌گرها دارد. m_j را تعداد پردازش‌گرهایی در نظر می‌گیریم که کار j در حین پردازش به آن‌ها نیاز دارد. مسئله کارگاهی در حالت n کار و دو ماشین و $m_j \leq ۲$، $(j = ۱, ۲, \ldots, n)$ را جکسون [۳۲] [۲۴] در سال ۱۹۵۵ به‌وسیله توسعه الگوریتم جانسون حل کرد. روش جکسون دارای پیچیدگی زمانی $O(n \log n)$ می‌باشد همچنین هفتز و آدیری[۳۳] در سال ۱۹۸۲ [۲۰] نشان دادند که حالت n کار و دو ماشین از مسئله کارگاهی، وقتی زمان‌های پردازش کارها توسط ماشین‌ها برابر واحد باشد، می‌تواند در زمان $O(\sum_{j=۱}^{n} m_j)$ حل شود.
برای حالت n کار و سه ماشین ساتسکو[۳۴] در سال ۱۹۹۱ [۴۷] ثابت کرده است که مسئله کارگاهی در

[۲۹] Makespan

[۳۰] Shortest Processing Time

[۳۱] S.M.Johnson

[۳۲] J.R.Jackson

[۳۳] N.Hhefetz and I.Adiri

[۳۴] Y.N.Satakov

حالت کلی NP-سخت است. همچنین در این حالت حتی اگر زمان پردازش برای هر کار توسط ماشین‌ها برابر واحد باشد لنسترا و رینوی‌خان[۳۵] در سال ۱۹۷۹ [۲۹] نشان داده‌اند که باز هم مسئله NP-سخت می‌باشد. توسعه‌ای از الگوریتم جانسون بریا حل تقریبی مسئله کارگاهی در حالت n کار و سه ماشین توسط جیجلیو و وانگر[۳۶] در سال ۱۹۶۳ [۱۹] به کار رفته است. الگوریتم‌هایی تقریبی دیگری نیز توسط ایگنال و اسکراج[۳۷] در سال ۱۹۶۵ [۲۳] با استفاده از روش شاخه و کرانه و نیز توسط استوری و وانگر[۳۸] در سال ۱۹۶۳ با استفاده از روش برنامه‌ریزی صحیح برای فرمول‌بندی مسئله کارگاهی خاص ارائه شده است [۳۹]. در جالت دو کار و n ماشین دو روش مختلف بوسیله اکرز[۳۹] در سال ۱۹۵۵ [۴] و بروکر[۴۰] در سال ۱۹۸۸ [۸] با زمان‌های چندجمله‌ای ارائه شده است.

به طور کلی برای حالت n کار و m ماشین، ما $(n!)^m$ زمان‌بندی ممکن داریم که حداقل یکی از آنها جواب بهینه را به ما می‌دهد. در این حالت بروکز و وایت[۴۱] در سال ۱۹۶۵ [۷] از تکنیک شاخه و کرانه برای حل تقریبی مسئله کارگاهی استفاده کردند ولی کارایی آن بیشتر برای مسائل کوچک بود. اخیراً نیز اشکویز و همکاران[۴۲] در سال ۱۹۹۴ [۳۷] الگوریتمی تقریبی با زمان چندجمله‌ای برای حل این مسئله ارائه کرده‌اند. در [۶]، [۲۶] و [۳۵] بررسی‌هایی از مسائل کارگاهی به عمل آمده است.

[۳۵] J.K.Lenstra and A.H.G.Rinnooy kan

[۳۶] R.H.Jiglio and H.M.Wagner

[۳۷] E.J.Ignall and L.E.Schrage

[۳۸] A.E.Story and H.M.Wagner

[۳۹] S.B.Akers

[۴۰] P.Brucker

[۴۱] G.H.Brooks and G.R.White

[۴۲] D.B.Shmoys and et al.

فصل ۲

مسائل زمان‌بندی کارگاهی

۱.۲ مقدمه

در این فصل به معرفی و بررسی مسئله زمان‌بندی کارگاهی خاص می‌پردازیم، سعی در بدست آوردن مینیمم بیشترین زمان پردازش در مسائل کارگاهی خاص یک ماشینه، دوماشینه و در نهایت در موارد خاصی از سه‌ماشینه داریم. الگوریتم جانسون را مطرح و اثبات می‌کنیم. شرایط لازم و کافی برای بهینگی دنباله‌هایی که بدست می‌آوریم را، بیان می‌کنیم. در این فصل برخی قضایا بیان و به حل برخی مثال‌های عددی پرداخته می‌شود.

۲.۲ معرفی

در فصل قبل در دسته‌بندی زمان‌بندی دیدیم که زمان‌بندی سری آن دسته از مسائل هستند که در آن‌ها کارها باید توسط تک تک ماشین‌ها با ترتیب مشخص و یکسان برای تمام کارها پردازش گردند. این نوع زمان‌بندی مناسب خطوط تولیدی یا مسائل کارگاهی خاص است. پس از آن‌که یک کار توسط یک ماشین پردازش شد وارد صف ماشین بعدی می‌شود. صف غذا در رستوران (غذای اصلی، دسر و ... به‌ترتیب ارائه می‌شود، سپس مشتریان برای پرداخت به قسمت آخر مراجعه می‌کنند) و یا صف ورود به استادیوم (خرید بلیط، بازرسی بدنی و ورود به استادیوم) و یا بازکردن حساب بانکی (ارائه درخواست، بررسی فرم‌ها، استعلام‌های مورد نیاز،تأیید، چاپ دسته چک و ...) از این دسته مسائل هستند. ما در این پایان‌نامه مسائل زمان‌بندی سری را در نظر می‌گیریم.
اگر در زمان‌بندی کارگاهی عمومی شرایط زیر برقرار باشد مسئله را کارگاهی خاص می‌نامند.

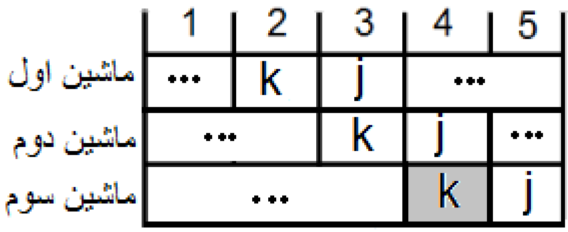
- هر کار j، شامل m عملیات $o_{j,i}$ با زمان پردازش $p_{j,i}$ است، که $i = (۱, \dots, m)$ تعداد ماشین‌ها می‌باشد و هر عملگر باید توسط ماشین M_i پردازش شود.

(در کارگاه‌های دوماشینه زمان پردازش را برای کار j در ماشین اول با a_j و در ماشین دوم با b_j نشان می‌دهیم).

- برای هر $j = ۱, \ldots, n$، محدودیت $o_{j,i} \longrightarrow o_{j,i+۱}$ که $i = ۱, \ldots m - ۱$ وجود داشته باشد به این معنی که هر کار ابتدا در ماشین i و سپس در ماشین $i + ۱$ پردازش می‌شود.

نمادی سه قسمتی برای معرفی مسائل زمان‌بندی در نظر می‌گیریم، $Fm||\{\}$ که بخش اول آن محیط ماشین یا همان تعداد را مشخص می‌کند. بخش میانی نماد مشخصه پارامتر مسئله(پارامتر بخصوص کار) است. بخش انتهایی تابع هدف را معرفی می‌کند. مثلاً با C_{max} زمان کل پردازش[۱]، $\overline{C}$ میانگین زمان پردازش نماد $Fm||\overline{C}$ یا $Fm||C_{max}$ را داریم.
مسئله پیدا کردن بهترین ترتیب کارها برای هر ماشین i در جهت کمینه کردن تابع هدف است، این ترتیب کارها را جایگشت π می‌نامیم.
می‌گوییم عملیات k قبل از j می‌آید $(k < j)$، اگر k توسط تعداد ماشین‌های بیشتری پردازش شده باشد.
شکل ۱.۲ را ببینید.

شکل ۱.۲: مکان کارها



هر سطر نشان دهنده عملیات‌های متفاوت در یک ماشین است و مستطیل‌ها اندازه زمان پردازش کار مربوطه را مشخص می‌کنند (در تمام شکل‌های این پایان نامه همین فرضیات را داریم). فرض کنید در تمام ماشین‌ها کارها در زمان یکسان پردازش شود.
به‌طور مثال ستون چهارم و ماشین سوم را در نظر بگیرید، می‌بینیم کار k توسط هر سه ماشین و در همان زمان کار j تنها توسط دو ماشین اول پردازش شده است.

۳.۲ مسائل زمان‌بندی تک‌ماشینه

با توجه به تعداد ماشین‌هایی که در کارگاه وجود دارد، زمان‌بندی کارهایی که توسط ماشین‌ها انجام می‌شود متفاوت است. در کارگاهی که یک ماشین پردازش کارها را بر عهده دارد، مسئله را تک‌ماشینه می‌نامیم

[۱] makespan

و اگر هدف کمینه کردن میانگین زمان پردازش است مسئله را با $F1||\overline{C}$ نمایش می‌دهیم. مسئله توالی عملیات، یک مسئله خاص زمان‌بندی (تک‌ماشینه) است که در آن تعیین ترتیب کارها یک برنامه زمانی کامل را تشکیل می‌دهد.
ویکسون[۲] در سال ۱۹۸۰ یک مسئله تک‌ماشینه با زمان پردازش‌های قابل کنترل را در نظر گرفت [۴۲]، هدف او این بود که دنباله کارها و زمان واقعی پردازش را به گونه‌ای تعیین کند که هزینه زمان‌بندی را مینیمم کند. بررسی صورت گرفته توسط نویکی[۳] و زدرزالکا[۴] نیز در سال ۱۹۹۰ [۳۲] بر روی همین مسائل با زمان پردازش‌های کار قابل کنترل بود. پانوالکار[۵] در سال ۱۹۸۲ [۳۴] ، چاجد[۶] و چاند[۷] در سال ۱۹۹۲ [۱۳] و دیگران مطالعاتی مشابه بر مسائل زمان‌بندی با کارهای قابل کنترل داشتند.
در زمان‌بندی تک‌ماشینه همین که یک جایگشت زمان‌بندی شده در نظر بگیریم کافی است، حال آن‌که در زمان‌بندی‌های چندماشینه این‌طور نیست و نیاز به در نظر گرفتن جایگشت‌های متفاوت است. هر ماشین جایگشت منحصر به خودش را داراست، گرچه گاهی این جایگشت‌ها را یکسان در نظر می‌گیریم.

تعریف ۱.۳.۲. [۶] مدت جریان ساخت[۸]: مجموع زمان پایان فعالیت‌های زمان‌بندی شده بر یک ایستگاه کاری، زمان جریان انجام آن کار است.

$$F_j = C_j - r_j$$

r_j مبدأ زمانی است که کار، آماده پردازش می‌باشد.
متوسط مدت جریان ساخت: میانگین مدت جریان ساخت برای تمام فعالیت‌های زمان‌بندی شده بر روی یک ایستگاه کاری را متوسط جریان ساخت می‌نامند.

تذکر ۱.۳.۲. زمان تکمیل کار j برای مسئله تک‌ماشینه را در نظر بگیرید. چون فرض کردیم کار j در زمان شروع کار در دسترس می‌باشد $(r_j = 0)$ پس مدت جریان ساخت (F_j) همان زمان تکمیل کار (C_j) است.

تعریف ۲.۳.۲. [۶] موعد تحویل کار j[۹]: زمانی است که در آن می‌بایست کار تحویل داده شود. آن را با q_j نمایش می‌دهیم.

تعریف ۳.۳.۲. [۶] تأخیر کار j[۱۰]:مقدار زمانی که یک فعالیت بیش از موعد تحویل خود طول می‌کشد

[۲] Vickson
[۳] Nowicky
[۴] Zdrzalka
[۵] Panwalkar
[۶] Chhajed
[۷] Chand
[۸] Flow Time
[۹] Tails
[۱۰] Delay

را تأخیر فعالیت می‌نامند و با L_j نمایش می‌دهند که،

$$L_j = C_j - q_j$$

متوسط تأخیر: میانگین زمان تأخیر در میان تمام فعالیت‌هایی که بر روی یک ایستگاه کاری زمان‌بندی می‌شوند، متوسط تأخیر آن کار است.

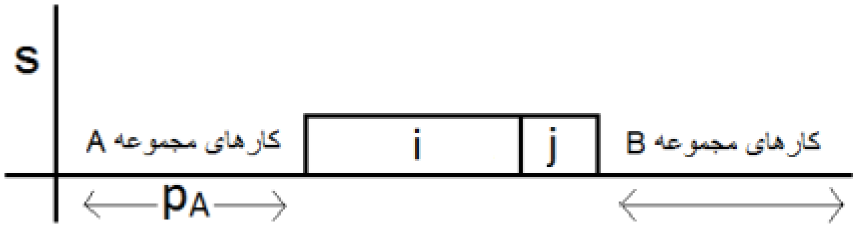
معمولاً اولویت‌بندی فعالیت‌های در انتظار انجام، در یک ایستگاه کاری یا ماشین، بسته به محدودیت و مطالبات مسئله، از طریق روش‌های مختلفی انجام می‌شود. به چند نمونه از آن‌ها اشاره می‌کنیم:

- $F.C.F.S$: فعالیت‌هایی در اولویت انجام هستند که زودتر به صف انتظار معرفی شده باشند (به این روش $FIFO$ نیز می‌گویند).
- $S.P.T$: فعالیت‌هایی با زمان پردازش کوتاه‌تر در اولویت قرار دارند (در فصل قبل به آن شاره شد).
- $E.D.D$: فعالیت‌هایی در اولویت هستند که موعد تحویل زودتری دارند.
- S/O: فعالیت‌هایی که نسبت زمان لنگی (زمان باقیمانده تا موعد تحویل منهای زمان عملیات باقیمانده برای قطعه) کوچکتری دارند. این نسبت با تقسیم زمان لنگی به تعداد فعالیت باقیمانده از یک قطعه به دست می‌آید.
- قواعد غیر کمی: بر اساس تشخیص موارد اورژانسی، رسیدگی به مشتریان مهمتر و ...

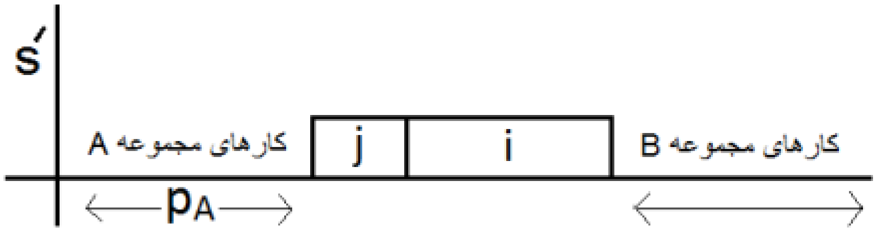
قضیه ۱.۳.۲. *[۶] توالی عملیات $S.P.T$ $(p_1 \leq p_2 \leq \cdots \leq p_n)$، متوسط جریان ساخت را کمینه می‌کند.*

برهان. توالی کاری مثل S را در نظر بگیرید که از نوع $S.P.T$ نباشد یعنی محلی در S باشد که در آن جفت کار مجاور i, j وجود داشته باشد که j بعد از i قرار گیرد و $p_i > p_j$. حال توالی جدید S' را تعریف می‌کنیم که در آن ترتیب کارهای i, j عوض شده است و تمام کارهای دیگر، در همان زمان برنامه S تکمیل شود.

این حالت را در شکل‌های ۲.۲ و ۳.۲ ملاحظه کنید که در آن p_A دلالت بر مبدأیی از زمان دارد که در آن کار i در برنامه زمانی S و کار j در برنامه زمانی S' شروع شده است. به عبارتی p_A مدت جریان ساخت مجموعه کارهای A است. همچنین مجموعه A، مجموعه‌ای از کارها است که در هر دو برنامه زمانی قبل از کارهای i و j اجرا می‌شود. موقتاً از نماد $F_k(S)$ برای نشان دادن مدت جریان ساخت کار k در برنامه زمانی S استفاده می‌کنیم.



شکل ۲.۲: جفت کار متوالی i و j در زمان‌بندی S



شکل ۳.۲: جفت کار متوالی i و j در زمان‌بندی S'

تنها کافی است که با $\sum_{k=1}^{n} F_k$ کار کنیم زیرا تنها تفاوت این مقدار با $\overline{F}$ تقسیم آن بر یک مقدار ثابت است. ابتدا نشان می‌دهیم که مقدار $\sum_{k=1}^{n} F_k$ که در برنامه زمانی S' محاسبه می‌شود، کوچکتر از مقدار مربوطه تحت برنامه زمانی S است.

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{k=1}^{n} F_k(S) &= \textstyle\sum_{k\in A} F_k(S) + F_i(S) + F_j(S) + \sum_{k\in B} F_k(S),\\
&= \textstyle\sum_{k\in A} F_k(S) + (p_A + p_i) + (p_A + p_i + p_j) + \sum_{k\in B} F_k(S).\\
\textstyle\sum_{k=1}^{n} F_k(S') &= \textstyle\sum_{k\in A} F_k(S') + (p_A + p_j) + (p_A + p_j + p_i) + \sum_{k\in B} F_k(S').
\end{aligned}$$

بنابراین داریم:

$$\sum_{k=1}^{n} F_k(S) - \sum_{k=1}^{n} F_k(S') = p_i - p_j > 0$$

به عبارت دیگر جابه‌جا کردن کارهای i و j موجب کاهش مقدار $\overline{C}$ می‌شود. از این رو هر توالی که از نوع $S.P.T$ نباشد، از طریق جابه‌جایی یک جفت کار مجاور می‌توان آن را بهتر کرد و لذا نتیجه می‌شود که ترتیب $S.P.T$ باید بهینه باشد. □

قضیه ۲.۳.۲. *[۶] توالی عملیات $E.D.D$ $(q_1 \leq q_2 \leq \cdots \leq q_n)$، ماکزیمم تأخیر کار را کمینه می‌کند.*

برهان. مجدداً روش جابه‌جایی جفت‌های مجاور را به‌کار می‌گیریم. توالی S را که در $E.D.D$ نیست در نظر بگیرید، یعنی در جایی از S جفت کارهای مجاور i و j که j بعد از i قرار می‌گیرد و $q_i > q_j$ باشد وجود داشته باشد (شکل ۲.۲ را ببینید). حالا توالی جدید S' را در نظر بگیرید که در آن کارهای i

و j جابه‌جا شده است و تمام کارهای دیگر عیناً مانند ترتیب S تکمیل می‌شود (شکل ۳.۲ را ملاحظه کنید). در این‌صورت داریم:

$$L_i(S) = p_A + p_i - q_i \qquad L_j(S') = p_A + p_j - q_j$$
$$L_j(S) = p_A + p_i + p_j - q_j \quad L_i(S') = p_A + p_j + p_i - q_i$$

که از این رابطه‌ها نتیجه می‌گیریم که: $L_j(S) > L_i(S')$ و $L_j(S) > L_j(S')$

از این‌رو خواهیم داشت:

$$L_j(S) > max\{L_i(S'), L_j(S')\}$$

حال اگر $L = max\{L_k | k \in A$ یا $k \in B\}$ باشد، توجه داریم که L در هر دو برنامه زمانی S و S' یکسان است. سپس داریم:

$$L_{max}(S) = max\{L, L_i(S), L_j(S)\} \geq max\{L, L_i(S'), L_j(S')\} = L_{max}(S')$$

به عبارت دیگر، جابه‌جایی کارهای iو j مقدار L_{max} را افزایش نمی‌دهد، بلکه ممکن است آن را کاهش دهد. □

مثال ۱.۳.۲. فعالیت‌هایی که در جدول ۱.۲ آورده شده است، بر روی یک ماشین باید انجام شوند. برای این فعالیت‌ها زمان عملیات و موعد تحویل باقیمانده نیز آورده شده است. توالی این فعالیت‌ها را بر اساس قوانین $F.C.F.S$، $S.P.T$ و $E.D.D$ تعیین می‌کنیم. این روش‌ها را بر اساس متوسط زمان جریان و متوسط تأخیر مقایسه می‌کنیم (زمان عملیات و موعد تحویل را با واحد روز بیان می‌کنیم).
در جدول‌ها، زمان عملیات هر کار، میزان زمان لازم برای پردازش همان کار است و زمان جریان، مجموع زمان انجام کارهای قبل آن و زمان عملیات خود کار است. برای محاسبه تأخیر هر کار، قدرمطلق اختلاف زمان جریان با موعد تحویل کار را در نظر می‌گیریم.

جدول ۱.۲: زمان پردازش‌ها

کار	زمان عملیات	موعد تحویل
A	۲	۷
B	۸	۱۶
C	۴	۴
D	۱۰	۱۷
E	۵	۱۵
F	۱۲	۱۸

بر اساس روش $F.C.F.S$ که در جدول ۲.۲ آمده است، فعالیت‌ها به‌صورت A, B, C, D, E, F زمان‌بندی می‌شوند.

جدول ۲.۲: زمان‌بندی بر اساس $F.C.F.S$

فعالیت	زمان عملیات	زمان جریان	موعد تحویل	تأخیر
A	۲	۲	۷	۰
B	۸	۱۰	۱۶	۰
C	۴	۱۴	۴	۱۰
D	۱۰	۲۴	۱۷	۷
E	۵	۲۹	۱۵	۱۴
F	۱۲	۴۱	۱۸	۲۳
جمع	۴۱	۱۲۰		۵۴

متوسط زمان جریان: ۲۰ روز، $(\frac{۱۲۰}{۶})$،
متوسط مقدار تأخیر: ۹ روز، $(\frac{۵۴}{۶})$،

بر اساس روش $S.P.T$، که در جدول ۳.۲ آمده است، فعالیت‌ها به‌صورت A, C, E, B, D, F زمان‌بندی می‌شوند.
متوسط زمان جریان: ۱۸ روز، $(\frac{۱۰۸}{۶})$،

جدول ۳.۲: زمان‌بندی بر اساس $S.P.T$

فعالیت	زمان عملیات	زمان جریان	موعد تحویل	تأخیر
A	۲	۲	۷	۰
C	۴	۶	۴	۲
E	۵	۱۱	۱۵	۰
B	۸	۱۹	۱۶	۳
D	۱۰	۲۹	۱۷	۱۲
F	۱۲	۴۱	۱۸	۲۳
جمع	۴۱	۱۰۸		۴۰

متوسط مقدار تأخیر: ۶.۶۷ روز، $(\frac{۴۰}{۶})$،

بر اساس روش $E.D.D$، که در جدول ۴.۲ آمده است، فعالیت‌ها به‌صورت C, A, E, B, D, F زمان‌بندی می‌شوند.

جدول ۴.۲: زمان‌بندی بر اساس $E.D.D$

فعالیت	زمان عملیات	زمان جریان	موعد تحویل	تأخیر
C	۴	۴	۴	۰
A	۲	۶	۷	۰
E	۵	۱۱	۱۵	۰
B	۸	۱۹	۱۶	۳
D	۱۰	۲۹	۱۷	۱۲
F	۱۲	۴۱	۱۸	۲۳
جمع	۴۱	۱۱۰		۳۸

متوسط زمان جریان: ۱۸.۳۳ روز، ($\frac{۱۱۰}{۶}$)،
متوسط مقدار تأخیر: ۶.۳۳ روز، ($\frac{۳۸}{۶}$).

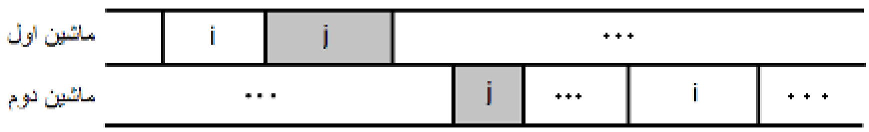
۴.۲ مسائل زمان‌بندی چندماشینه

پیچیدگی مسائل زمان‌بندی چندماشینه از این جهت است که برای هر ماشین باید جداگانه ترتیب کارها را بررسی کرد و شروع هر کار در ماشین بستگی به زمان اتمام آن کار در ماشین قبل دارد. برای هر چه ساده‌تر شدن کار قضیه‌ای را مطرح می‌کنیم.

قضیه ۱.۴.۲. *[۱۵] فرض کنید زمان‌بندی با mماشین و مجموعه n متغیر کار داریم، برای مینیمم شدن زمان انجام کار باید ترتیب انجام کارها در دو ماشین اول یکسان باشد.*

برهان. فرض کنیم این‌طور نیست، بنابراین مثلاً در ماشین اول کار i دقیقاً قبل از کار j آمده باشد در حالیکه در ماشین دوم i بعد از کار j بیاید حتی تعدادی کار دیگر میان این دو آمده باشند، شکل ۴.۲ را ملاحظه کنید.

شکل ۴.۲: زمان‌بندی در دو ماشین اول



واضح است که موقعیت دو کار در ماشین اول می‌تواند برعکس شود بدون اینکه نیاز باشد تا زمان شروع هر کدام از کارها در ماشین دوم را افزایش داد. زیرا در واقع بعد از اتمام هر دو کار در ماشین اول،

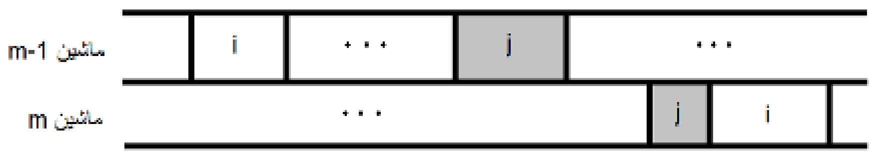
اولین کار در ماشین دوم پردازش می‌شود. بنابراین جابه‌جا کردن کارها در ماشین اول باعث افزایش زمان تکمیل کار نمی‌شود. این کار ممکن است باعث کاهش زمان شروع برخی کارها در ماشین دوم شود (به دلیل امکان کاهش زمان شروع کارها در ماشین دوم) و همین امر ممکن است سبب کاهش زمان کل کار شود. □

این نتیجه این احتمال را کم نمی‌کند که زمان‌بندی با ترتیب کارهای متفاوت در دو ماشین اول هم، ممکن است زمان‌بندی با زمان پردازش کل کم باشد.

قضیه ۲.۴.۲. *[[۱۵]] وقتی زمان‌بندی با m ماشین و مجموعه n متغیر کار داریم، برای مینیمم شدن زمان انجام کار، لازم است زمان‌بندی که در آن ترتیب انجام کارها در دو ماشین اول و همین‌طور در دو ماشین m و $m-1$ یکسان باشد را در نظر بگیریم.*

برهان. برای دو اثبات قضیه در مورد دو ماشین اول، قضیه قبل را به کار می‌بریم و به استناد به آن دیگر نیاز به آوردن برهان نیست، اما برای دو ماشین آخر یعنی m و $m-1$ مشابه دو ماشین اول عمل می‌کنیم. فرض کنیم ترتیب انجام کارها در این دو ماشین یکسان نباشد، بنابراین در ماشین m یک کار مثلاً i، به‌طوری که دقیقاً بعد از کار j آمده باشد وجود دارد، درحالیکه در ماشین $m-1$ قبل از کار j می‌آید و ممکن است بین آنها نیز چندین کار آمده باشد شکل ۵.۲ را ببینید.

شکل ۵.۲: زمان‌بندی در دو ماشین آخر



واضح است که موقعیت دو کار در ماشین m، بدون آنکه زمان پردازش هر کدام از کارها یا زمان پردازش کل کارها افزایش یابد، می‌تواند برعکس شود. مانند برهان قضیه قبل این به این دلیل است که بعد از اتمام هر دو کار در ماشین اول، ابتدا j در ماشین دوم پردازش می‌شود و در نتیجه نیاز نیست زمان شروع هیچ کدام از کارها در ماشین دوم را افزایش داد. همچنین اینکه کار i قبل از j شروع شود در ماشین m می‌تواند باعث کاهش زمان کل پردازش شود. □

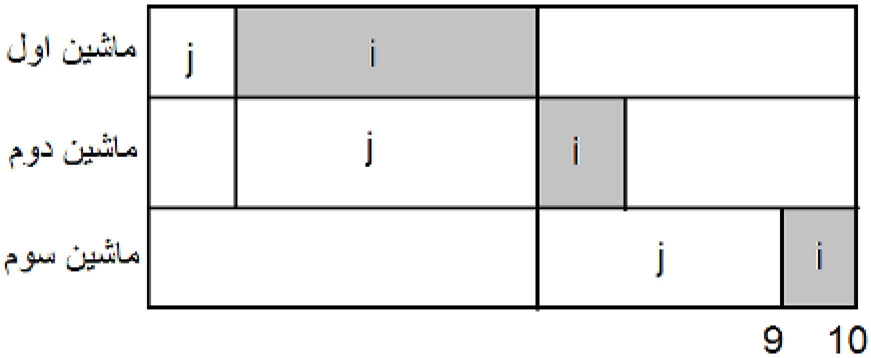
با مثالی نشان می‌دهیم که این قضیه به‌طور قوی برای مینیمم کردن زمان کل هر زمان‌بندی برقرار نیست (یعنی ممکن است جایگشت در دو ماشین اول و در دو ماشین آخر برقرار باشد اما زمان‌بندی در نهایت بهینه نباشد ولی در هر زمان‌بندی بهینه جایگشت یکسانی در دو ماشین اول و دو ماشین آخر می‌بینیم). این شرط، شرط کافی نیست ولی لازم است.

مثال ۱.۴.۲. فرض کنید در یک مسئله کارگاهی خاص سه ماشینه دو کار باید زمان‌بندی شوند، اطلاعات جدول ۵.۲ را داریم.

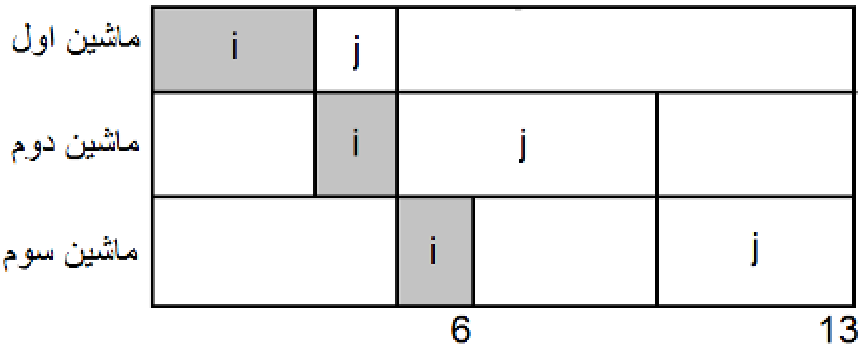
جدول ۵.۲: زمان پردازش در کارگاه سه‌ماشینه

کار	زمان عملیات ماشین ۱	زمان عملیات ماشین ۲	زمان عملیات ماشین ۳
I	۴	۱	۴
J	۱	۴	۴

دو نوع زمان‌بندی با ترتیب یکسان در دو ماشین اول (ماشین اول و دوم) و در دو ماشین آخر (ماشین دوم و سوم) داریم که در هرکدام از آنها مقدار زمان پردازش کل متفاوت است. شکل ۶.۲ و ۷.۲ را ببینید.

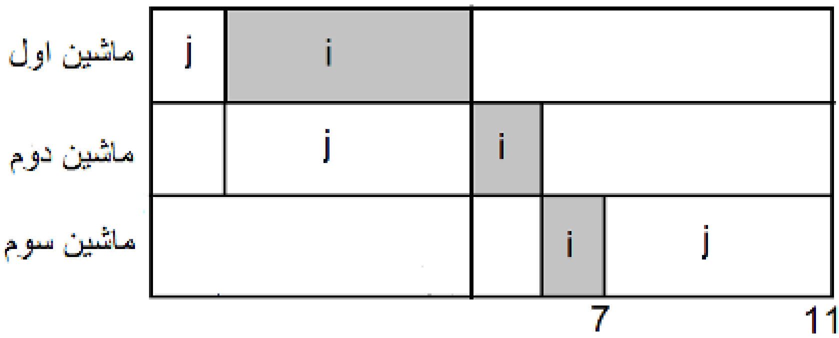


شکل ۶.۲: زمان‌بندی یکسان در دو ماشین اول و دو ماشین آخر



شکل ۷.۲: زمان‌بندی یکسان در دو ماشین اول و دو ماشین آخر

و در زمان‌بندی با ترتیب متفاوت در ماشین دوم و سوم که در شکل ۸.۲ مشاهده می‌کنیم، زمان پردازش کل میان این دو مقدار داریم، یعنی از زمان‌بندی نمونه اول مقداری کمتر دارد، پس تنها با تکیه بر این قضیه نمی‌توانیم زمان‌بندی خوبی را ارئه دهیم.



شکل ۸.۲: زمان‌بندی متفاوت در دو ماشین آخر

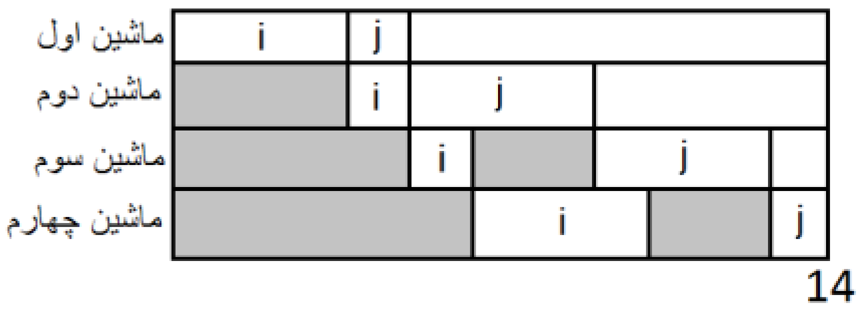
بعد از این مثال متوجه می‌شویم برای بعضی مسائل دوماشینه و سه ماشینه، در جهت زمان‌بندی جایگشت زمان‌بندی یکتایی را در می‌گیریم، اما در موارد با چهار ماشین یا بیشتر باید چیزی بیش از یک نوع معمولی جایگشت زمان‌بندی را در نظر گرفت.

مثال ۲.۴.۲. فرض کنید ۴ ماشین و دو کار i و j، با زمان پردازش‌های داده شده در جدول ۶.۲ داریم. می‌خواهیم مینیمم ماکزیمم زمان پردازش کل را بدست آوریم.

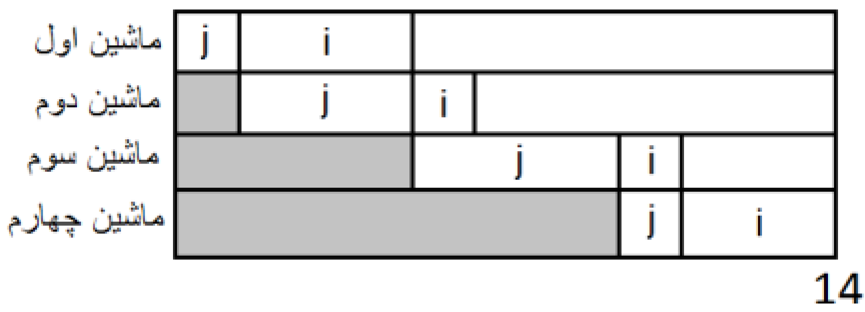
جدول ۶.۲: زمان پردازش i و j

کار	زمان عملیات ماشین ۱	زمان عملیات ماشین ۲	زمان عملیات ماشین ۳	زمان عملیات ماشین ۴
i	۴	۱	۱	۴
j	۱	۴	۴	۱

زمان‌بندی یکسانی را برای همه ماشین‌ها در نظر بگیرید.



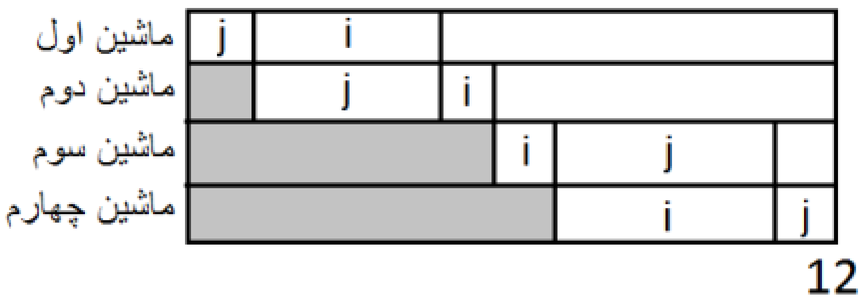
شکل ۹.۲: زمان‌بندی یکسان در تمام ماشین‌ها



شکل ۱۰.۲: زمان‌بندی یکسان در تمام ماشین‌ها

می‌بینیم که در این دو حالت که تنها یک جایگشت یکسان برای هر چهار ماشین داریم مقدار زمان پردازش کل ۱۴ است.

ولی در حالتی که جایگشت را در دو ماشین اول (ماشین اول و دوم) یکسان و در دو ماشین آخر (ماشین سوم و چهارم) یکسان ولی متفاوت با جایگشت ماشین اول و دوم در نظر بگیریم، کمترین ماکزیمم زمان را داریم (شکل ۱۱.۲).



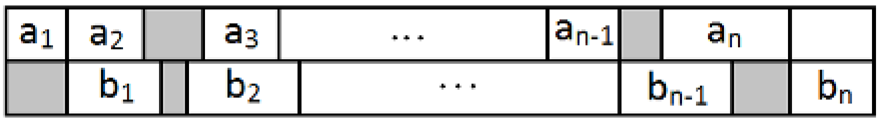
شکل ۱۱.۲: زمان‌بندی یکسان در دو ماشین اول و در دو ماشین دوم

۵.۲ مینیمم بیشترین زمان پردازش در مسائل کارگاهی خاص دوماشینه

در بیشتر موارد مسائل با دو ماشین، با قائده جانسون زمان‌بندی می‌شود. کاری که جانسون انجام داد یک الگوریتم پیشنهادی نیست بلکه ارائه برهان این موضوع است که الگوریتم جواب بهینه می‌دهد.
فرض کنید زمان پردازش کار j در ماشین اول یعنی $p_{j,1}$ را با a_j و زمان پردازش کار j در ماشین دوم یعنی $p_{j,2}$ را با b_j نمایش بدهیم. زمان تکمیل کار j، F_j است (به عبارتی همان C_j).
هر کار شامل زوج مرتب (a_j, b_j) است. بعضی از a_j و b_j ها می‌توانند صفر باشند، یعنی با توجه به محدودیت‌ها و مطلوبات مسئله ممکن است زمان پردازش کار i در هر یک از ماشین‌ها صفر باشد.
اگرچه برای کار j، a_j و b_j همزمان نمی‌توانند صفر باشند، زیرا بر روی هر کار حداقل یک عملیات باید انجام شود.
یک محدودیت معمولی کارگاهی ساده را در نظر بگیرید:

۱. هر ماشین در یک زمان، تنها روی یک کار عملیات انجام می‌دهد.
۲. در یک زمان مشخص هر کار تنها توسط یک ماشین پردازش می‌شود.
۳. برای هر کار j، a_j باید قبل از b_j تکمیل شود.

مقادیر $a_1, a_2, \ldots, a_n$ و $b_1, b_2, \ldots, b_n$ را داریم که تعداد آن‌ها $2n$ می‌باشد. در هر دو ماشین ترتیب انجام کارها را طوری که با هیچ یک از محدودیت‌ها تناقضی نداشته باشد، در جهت اینکه بیشترین مقدار ممکن F_j را به کمترین مقدار ممکن برسانیم، پیدا می‌کنیم. طبق قضیه ۱.۴.۲ یا ۲.۴.۲ برای رسیدن به زمان‌بندی بهینه، ترتیب کارها در هر دو ماشین را یکسان در نظر می‌گیریم.
شکل ۱۲.۲ را ببینید، در این شکل در ماشین اول که در سطر اول نشان داده شده مقادیر زمان پردازش کارها را با مستطیل‌ها نشان دادیم و بین آنها زمان تلف شده نیز داریم. در سطر دوم زمان پردازش کارها در ماشین دوم را داریم و با توجه به زمان اتمام پردازش کار در ماشین اول زمان تلف شده داریم.



شکل ۱۲.۲: زمان‌بندی در دو ماشین با در نظر گرفتن زمان تلف شده در هر دو ماشین

واضح است آخرین کار قبل از اتمام زمان پردازش مورد نیاز همه کارها در ماشین اول و آخرین کار در ماشین دوم نمی‌تواند پردازش شود. یعنی بعد از طی شدن $\sum_{j=1}^{n} a_j + b_n$ کار نهایی تکمیل می‌شود.
b_n با a_n اشتراک ندارد، اگر بیشترین $\sum_{j=1}^{n} F_j$ ممکن را با F_{max} نمایش دهیم، می‌بینیم که:

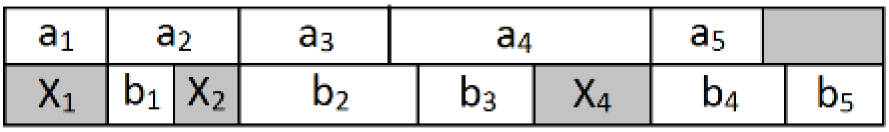
$$F_{max} \geq \sum_{j=1}^{n} a_j + b_n.$$

به‌طور مشابه آخرین کار قبل از اتمام زمان پردازش مورد نیاز همه کارها در ماشین دوم و اولین کار در ماشین اول، نمی‌تواند پردازش شود. یعنی بعد از طی شدن $a_1 + \sum_{j=1}^{n} b_j$ کار نهایی تکمیل می‌شود.

b_1 با a_1 اشتراک ندارد، پس:

$$F_{max} \geq a_1 + \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

می‌بینیم که مجموع a_j و b_j ها بر زمان پردازش کل تأثیر دارد و از طرفی تحت تأثیر ترتیب انجام کارها است. بنابراین کاهش زمان کل وابسته به a_1 و b_n است و آن ارتباط مستقیم با انتخاب دنباله کارها دارد. هم‌چنین در ادامه می‌بینیم که زمان پردازش کل تا حد زیادی تحت تأثیر زمان تلف شده است.
مقادیر در ماشین اول را به راحتی می‌توان به سمت چپ شیفت داد، زیرا در ماشین اول کارها برای پردازش شدن نیاز به تکمیل در مرحله ماقبل ندارند.
زمان تلف شده در ماشین دوم که دقیقاً قبل از کار b_j می‌آید را با X_j نمایش می‌دهیم. آن را می‌توان بر حسب a و b نوشت.



شکل ۱۳.۲: زمان‌بندی در دو ماشین با در نظر گرفتن زمان تلف شده در ماشین دوم

$$X_1 = a_1$$
$$X_2 = max(a_1 + a_2 - b_1 - X_1, 0)$$
$$X_3 = max(a_1 + a_2 + a_3 - b_1 - b_2 - X_1 - X_2, 0).$$

به‌طور کلی داریم:

$$X_I = max(\sum_{j=1}^{I} a_j - \sum_{j=1}^{I-1} b_j - \sum_{j=1}^{I-1} X_j, 0).$$

هم‌چنین X را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\begin{aligned} X_1 &= a_1 \\ X_1 + X_2 &= max(a_1 + a_2 - b_1, a_1) \\ X_1 + X_2 + X_3 &= max(a_1 + a_2 + a_3 - b_1 - b_2, X_1 + X_2) \\ &= max(\textstyle\sum_{j=1}^{3} a_j - \sum_{j=1}^{2} b_j, \sum_{j=1}^{2} a_j - b_1, a_1). \end{aligned}$$

به‌طور کلی،

$$\sum_{j=1}^{I} X_j = max(\sum_{j=1}^{I} a_j - \sum_{j=1}^{I-1} b_j, \sum_{j=1}^{I-1} a_j - \sum_{j=1}^{I-2} b_j, \ldots, \sum_{j=1}^{2} a_j - b_1, a_1)$$

اگر Y_I را به‌صورت زیر تعریف کنیم:

$$Y_I = \sum_{j=1}^{I} a_j - \sum_{j=1}^{I-1} b_j$$

پس،

$$\sum_{j=1}^{I} X_j = max(Y_1, Y_2, \dots, Y_I).$$

حال ماکزیمم زمان پردازش کل، یعنی مجموع مقادیر b_j و X_j را در نظر می‌گیریم،

$$F_{max}(S) = \sum_{j=1}^{n} b_j + \sum_{j=1}^{n} X_j = \sum_{j=1}^{n} b_j + max(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$$

از آنجائیکه مجموع b_j ها مستقل از دنباله کارها است پس ماکزیمم زمان پردازش کل وابسته به مجموع زمان‌های تلف شده یعنی ماکزیمم Y_j ها است. باید دنباله‌ای که به ازای آن Y_j ها کمترین مقدار را بگیرند، بیابیم. قبلاً گفتیم در مسائل کارگاهی خاص دوماشینه برای یافتن این دنباله از قائده جانسون استفاده می‌کنیم.

قائده جانسون را با یک مثال به‌طور مختصر شرح می‌دهیم. ابتدا کمترین مقدار a_j و b_j را انتخاب می‌کنیم، اگر a_j بود آن را در ابتدای دنباله قرار می‌دهیم (a_1 را تا حد امکان کوچک در نظر می‌گیریم) و اگر b_j بود در انتهای دنباله در نظر می‌گیریم تا b_n را در کمترین حالت ممکن در نظر بگیریم. برای $n-1$ کار دیگر همین استدلال را به‌کار می‌بریم.

درحقیقت ما می‌خواهیم جایگشت $L : L(1), \dots, L(n)$ را پیدا کنیم ($L(1)$ کاری است که در اولین جایگاه قرار می‌گیرد، $L(2)$ دومین جایگاه و ...) اگر طبق روند زیر پیش برویم زمان کل پردازش با در نظر گرفتن زمان‌های تلف شده در ماشین دوم، کمترین می‌شود.

سمت چپ دنباله را $T : L(1), \dots, L(t)$ و سمت راست آن را $R : L(t+1), \dots, L(n)$ می‌نامیم. با ترکیب این دو، دنباله مذکور ساخته می‌شود.

$$L = ToR := L(1), \dots, L(n)$$

T و R گام به گام ساخته می‌شوند.

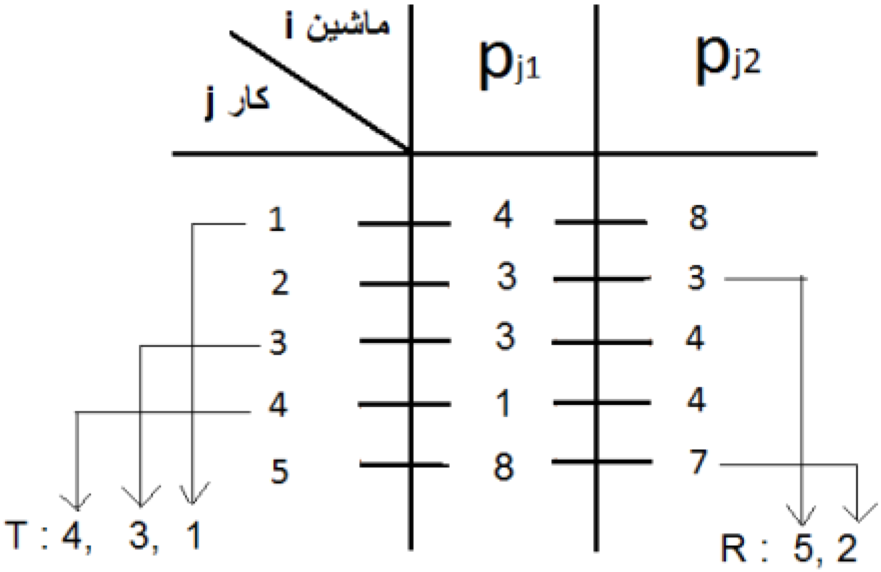
در هر گام عملیات کمترین a_j^* و b_j^* را از میان تمام مقادیر در نظر می‌گیریم، اگر آن مقدار a_j^* بود آن‌گاه کار j^* را در انتهای لیست T قرار می‌دهیم. به این معنی که T را با Toj^* جایگزین می‌کنیم.

در غیر این‌صورت j^* را در ابتدای R قرار می‌دهیم، به این معنی که R را با j^*oR جایگزین می‌کنیم.

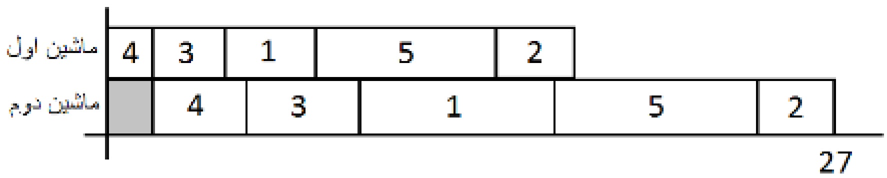
بعد از بررسی کار j^* و زمان‌های پردازش a_j^* و b_j^* را از لیست حذف می‌کنیم.

این روند را در شکل ۱۴.۲ می‌توانیم ببینیم.

زمان‌بندی با قاعده جانسون (بر اساس زمان پردازش‌ها در ۱۴.۲) را در ۱۵.۲ ببینید.



شکل ۲.۱۴: الگوریتم جانسون



شکل ۲.۱۵: زمان‌بندی دوماشینه بر اساس قاعده جانسون

[۹] الگوریتم:

- قرار دهید: $X := \{۱, \dots, n\}; T := \varnothing; R := \varnothing$
- اگر $X = \varnothing$ متوقف می‌شویم در غیر این صورت گام‌های زیر را انجام می‌دهیم.
- $p_{j^*,۱} = a_j^*$ و $p_{j^*,۲} = b_j^*$
  j^*, i^* را پیدا کنید به‌طوری که $p_{j^*,i^*} = min\{p_{j,i} | j \in X; i = ۱, ۲\}$
- اگر $i^* = ۱$ آن‌گاه $T := Toj^*$ در غیر این‌صورت $R := j^*oR$
- $X := X \backslash j^*$
- $L := ToR$

طبق این روند کارها را در ماشین اول می‌توان به چپ فشرده کرد و بنابراین هیچ زمان تلف شده‌ای در ماشین اول نداریم. هم‌چنین با این الگوریتم ترتیب کارها طوری بدست می‌آید که X_j در ماشین دوم به کمترین حالت ممکن خود برسد.

قضیه ۱.۵.۲. *[۹] فرض کنید* $L := L(1), \dots, L(n)$ *لیست ساخته شده توسط الگوریتم جانسون باشد، در این‌صورت اگر*

$$min\{a_i, b_j\} < min\{a_j, b_i\}$$

آن‌گاه در L*، کار* i *قبل از کار* j *می‌آید*

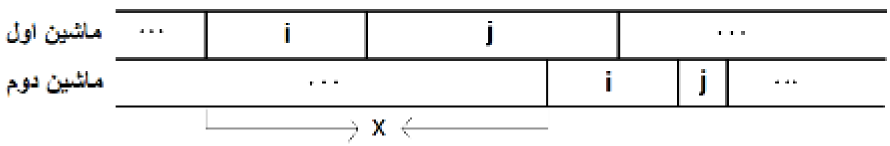
برهان. اگر $a_i < min\{a_j, b_i\}$، پس $a_i < b_i$، در این‌صورت کار i به T یعنی اول لیست تعلق دارد. اگر j به R اضافه شود که کار تمام است یعنی حکم ثابت می‌شود. در غیر این‌صورت j در T بعد از i ظاهر می‌شود زیرا $a_i < a_j$.
اگر $b_j < min\{a_j, b_i\}$، به روش مشابه اثبات می‌شود. □

قضیه ۲.۵.۲. *[۹] یک زمان‌بندی در نظر بگیرید که در آن کار* j *بلافاصله بعد از* i *می‌آید، اگر:*

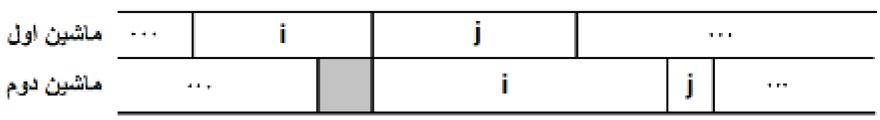
$$min\{a_j, b_i\} \leq min\{a_i, b_j\} \qquad (۱.۲)$$

می‌توان i *و* j *را جابه‌جا کرد، بدون آنکه مقدار زمان کل پردازش افزایش یابد.*

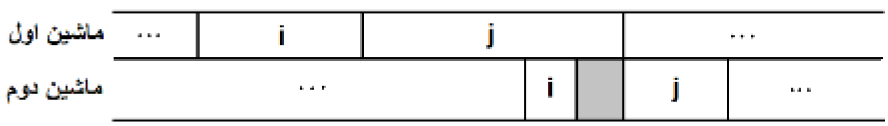
برهان. اگر j بلافاصله بعد از i آمده باشد سه مورد احتمالی برای ترتیب کارها خواهیم داشت که در شکل ۱۶.۲ و ۱۷.۲ و ۱۸.۲ مشاهده می‌کنیم.



شکل ۱۶.۲: (a)



شکل ۱۷.۲: (b)



شکل ۱۸.۲: (c)

در این حالت‌ها فاصله زمانی بین کار i تا به‌طور کامل تمام شدن کار j که با $w_{i,j}$ نمایش می‌دهیم را به بدین صورت داریم:

$$\begin{aligned} w_{i,j} &= max\{a_i + a_j + b_j, a_i + b_i + b_j, x + b_i + b_j\}, \\ &= max\{a_i + b_j + max\{a_j, b_i\}, x + b_i + b_j\}. \end{aligned}$$

به طور مشابه برای حالتی که i بعد از j آمده باشد، داریم:

$$w_{i,j} = max\{a_j + b_i + max\{a_i, b_j\}, x + b_i + b_j\}.$$

طبق رابطه (۱.۲) داریم:

$$max\{-a_i, -b_j\} \leq max\{-a_j, -b_i\}$$

که با اضافه کردن $a_i + b_i + a_j + b_j$ به طرفین آن خواهیم داشت:

$$a_j + b_i + max\{a_i, b_j\} \leq a_i + b_j + max\{a_j, b_i\}$$

که این رابطه $w_{j,i} \leq w_{i,j}$ را می‌رساند. پس کار i با j می‌توانند بدون افزایش C_{max} جابه‌جا شوند. □

قضیه ۳.۵.۲. *[۹] اگر دنباله $L : L(1), \ldots, L(n)$ توسط الگوریتم جانسون ساخته شده باشد، بهینه است.*

برهان. فرض کنید این‌طور نباشد، یعنی اگر ζ مجموعه دنباله‌های بهینه برای مسئله زمان‌بندی باشد، $L \notin \zeta$. حال در نظر بگیرید دنباله $R \in \zeta$ باشد و برای $\nu = 1, \ldots, s-1$

$$L(\nu) = R(\nu) \quad \text{و} \quad i := L(s) \neq R(s) =: j$$

بنابراین کار i به جای کار j در R است.

فرض کنید در R، k کاری باشد که بین i و j قرار می‌گیرد یا $k = j$. در L کار k بعد از کار i زمان‌بندی می‌شود. بنابراین طبق قضیه ۱.۵.۲ برای هر کار k داریم:

$$min\{a_k, b_i\} \geq min\{a_i, b_k\}$$

طبق قضیه ۲.۵.۲ می‌توانیم بدون افزایش زمان پردازش کل، هر کار k که بلافاصله قبل از کار i آمده باشد را با کار i عوض کنیم.

در نهایت دنباله $\overline{R} \in \zeta$ را داریم که برای هر $\nu = 1, \ldots, s$ داریم:

$$\overline{R}(\nu) = L(\nu)$$

و این با $L \notin \zeta$ در تناقض است. □

مثال ۱.۵.۲. ۶ کار که زمان پردازش آن‌ها در جدول ۷.۲ آمده است، باید بر روی ۲ ماشین انجام شوند. هر کار شامل ۲ فعالیت است، می‌بایست ابتدا تمیزکاری و سپس رنگ‌آمیزی بر روی آن انجام شود. می‌خواهیم این فعالیت‌ها را به‌گونه‌ای زمان‌بندی کنیم که کل زمان پردازش آن‌ها کمینه شود.

جدول ۷.۲: زمان پردازش کارها در دو ماشین

فعالیت	زمان عملیات ماشین ۱	زمان عملیات ماشین ۲
A	۵	۵
B	۴	۳
C	۸	۹
D	۲	۷
E	۶	۸
F	۱۲	۱۵

حل: ابتدا فعالیتی که دارای کوتاه‌ترین زمان عملیات است را انتخاب می‌کنیم، که در اینجا فعالیت اول D است که زمان انجام آن ۲ ساعت بر روی ماشین اول است.
از آن‌جا که فعالیت اول D انتخاب شده است، آن را در ابتدای لیست قرار می‌دهیم، این کار را از فرآیند تصمیم‌گیری کنار می‌گذاریم. جدول ۸.۲ را ببینید.

جدول ۸.۲: زمان‌بندی بعد از انتخابD

فعالیت	زمان عملیات ماشین ۱	زمان عملیات ماشین ۲
A	۵	۵
B	۴	۳
C	۸	۹
E	۶	۸
F	۱۲	۱۵

فعالیت دوم B، کوتاه‌ترین زمان بعدی را دارد که باید در انتهای صف برنامه‌ریزی شود و این کار را از فرآیند زمان‌بندی کنار می‌گذاریم. جدول (۹.۲) را ملاحظه کنید.

جدول ۹.۲: زمان‌بندی بعد از انتخابB و D

فعالیت	زمان عملیات ماشین ۱	زمان عملیات ماشین ۲
A	۵	۵
C	۸	۹
E	۶	۸
F	۱۲	۱۵

در مرحله سوم و از بین کارهای باقی‌مانده، فعالیت‌های کار A هر دو کوتاه‌ترین زمان عملیات را دارند، در این حالت تفاوتی نمی‌کند که کدام یک را انتخاب کنیم. ما فعالیت دوم که روی ماشین ۲ انجام می‌شود را انتخاب می‌کنیم و در نتیجه در انتهای صف اضافه می‌شود. این کار را از مجموعه تصمیم‌گیری کنار می‌گذاریم. این را در جدول ۲.۱۰ ببینید.

جدول ۲.۱۰: زمان‌بندی بعد از انتخاب D و B و A

فعالیت	زمان عملیات ماشین ۱	زمان عملیات ماشین ۲
C	۸	۹
E	۶	۸
F	۱۲	۱۵

در مرحله چهارم، فعالیت اول از کار E را انتخاب می‌کنیم. با توجه به این‌که بر روی ماشین اول انجام می‌شود، این کار را در ابتدای صف قرار می‌دهیم. جدول ۲.۱۱ این را نشان می‌دهد.

جدول ۲.۱۱: زمان‌بندی با کارهای باقی‌مانده C و F

فعالیت	زمان عملیات ماشین ۱	زمان عملیات ماشین ۲
C	۸	۹
F	۱۲	۱۵

در مرحله پنجم، فعالیت اول از کار C در ابتدای صف گذاشته می‌شود.
در آخر تنها کار باقی‌مانده F در دنباله قرار داده می‌شود.
حال برای مقایسه دنباله به‌وجود آمده با الگوریتم جانسون و دیگر ترتیب‌ها، مثالی را مطرح می‌کنیم.

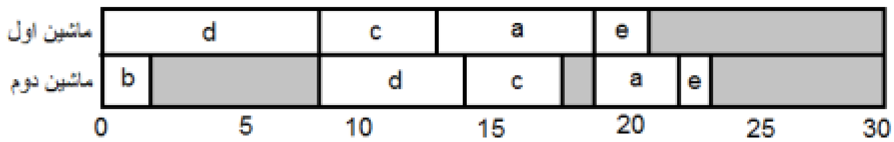
مثال ۲.۵.۲. کارهای $\{a,b,c,d,e\}$ داده شده‌اند، زمان پردازش کارها را در جدول ۲.۵.۲ ببینید. زمان‌بندی‌های متفاوت برای این کارها را، با استفاده از قاعده جانسون و در حالت‌های دیگر بررسی کرده و سپس با یکدیگر مقایسه می‌کنیم.

اگر زمان‌بندی را بر اساس قاعده جانسون انجام دهیم به کمترین ماکزیمم زمان پردازش کل می‌رسیم، این به این معنی نیست که زمان‌بندی دیگری نمی‌تواند همین مقدار را داشته باشد اما در زمان‌بندی با قاعده جانسون بدون شک مینیمم زمان پردازش کل را خواهیم داشت.

جدول ۱۲.۲: زمان پردازش کارها

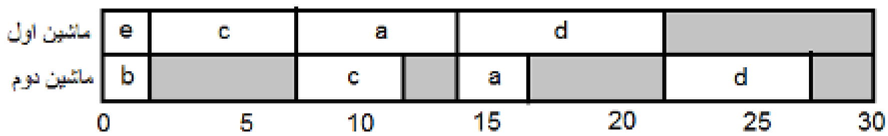
شماره کار	زمان اولین عملیات	زمان دومین عملیات
a	۶	۳
b	۰	۲
c	۵	۴
d	۸	۶
e	۲	۱

در اولین حالت، ترتیب زمان‌بندی با قاعده جانسون را در نظر بگیرید.



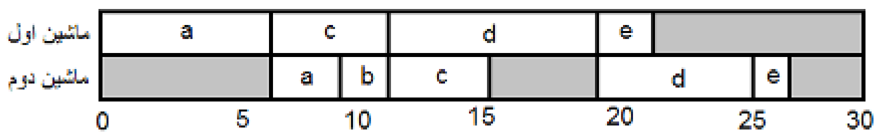
شکل ۱۹.۲: زمان‌بندی بر اساس قاعده جانسون

مقدار بهینه بیشترین زمان پردازش در این زمان‌بندی ۲۳ است. شکل ۱۹.۲ را ببینید.
برای همین زمان پردازش‌ها با زمان‌بندی دیگری ۲۷ را داریم. شکل ۲۰.۲ را ببینید.



شکل ۲۰.۲: زمان‌بندی با ۲۷ $= C_{max}$

ترتیب دیگری را در نظر بگیرید. زمان کل پردازش ۲۶ است. شکل ۲۱.۲ را ببینید.



شکل ۲۱.۲: زمان‌بندی با ۲۶ $= C_{max}$

۶.۲ مینیمم بیشترین زمان پردازش در مسائل کارگاهی خاص سه‌ماشینه

به‌طور کلی می‌توان گفت هیچ راه‌حل بهینه‌ای که بتواند زمان‌بندی مناسبی برای کارهایی که باید توسط بیش از دو ماشین انجام شوند، وجود ندارد (مگر روش‌های ابتکاری یا فرا ابتکاری). قاعده جانسون که برای دو ماشین یا مراکز کاری که به‌صورت سری کارهایی را انجام می‌دهند، راهکار ابتکاری مناسبی است، در صورت وجود شرایط خاصی می‌تواند به زمان‌بندی سه‌ماشینه نیز تعمیم یابد.
در صورتی که کوچکترین زمان عملیات روی یکی از ماشین‌ها مثلاً ماشین اول یا سوم، از بزرگترین عملیات ماشین دیگر مثلاً ماشین دوم، کوچکتر نباشد (شرط برای یکی از ماشین‌ها کافی است)، می‌توان کارهای ماشین دوم با هر یک از دو ماشین دیگر را ادغام نمود و مسئله را از روش جانسون حل کرد [۱۵].

مثال ۱.۶.۲. ۶ کار زیر باید بر روی ۳ ماشین انجام شوند، هر کار شامل ۳ فعالیت است. زمان پردازش کارها در جدول ۱۳.۲ آمده است. این کارها را با استفاده از قاعده جانسون زمان‌بندی کنید.

جدول ۱۳.۲: زمان پردازش کارها در سه ماشین

فعالیت	زمان عملیات ماشین ۱	زمان عملیات ماشین ۲	زمان عملیات ماشین ۳
A	۷	۴	۸
B	۵	۴	۹
C	۱۰	۳	۵
D	۸	۴	۱۰
E	۱۲	۳	۲
F	۸	۲	۷

حل: با در نظر گرفتن اینکه بزرگترین زمان عملیاتی روی ماشین دوم، از کوچکترین زمان عملیاتی روی ماشین اول بزرگتر نیست، پس می‌توانیم با ادغام (تجمیع زمان عملیات) ماشین اول و دوم از یک سو و تجمیع زمان عملیات ماشین دوم و سوم از سوی دیگر، تشکیل دو ماشین مجازی دهیم (جدول ۱۴.۲ را ببینید) و از طریق قانون جانسون زمان‌بندی مناسبی را بدست آوریم.

در جدول ۱۴.۲ زمان عملیات ماشین مجازی اول همان جمع زمان عملیات‌ها در ماشین اول و دوم و زمان عملیات در ماشین مجازی سوم، جمع زمان عملیات در ماشین دوم و سوم است.
در این حالت حل به روش جانسون ترتیب B, A, D, F, C, E است.

جدول ۱۴.۲: زمان پردازش کارها در کارگاه سه‌ماشینه با در نظر گرفتن دو ماشین مجازی

فعالیت	زمان عملیات ماشین مجازی اول	زمان عملیات ماشین مجازی سوم
A	۱۱	۱۲
B	۹	۱۳
C	۱۳	۸
D	۱۲	۱۴
E	۱۵	۵
F	۱۰	۹

۷.۲ شرایط لازم و کافی برای بهینگی دنباله کارها

۱.۷.۲ شرایط لازم و کافی برای بهینگی دنباله کارها در زمان‌بندی جایگشتی دوماشینه

فرض کنید π جایگشت معلوم و البته یکسان برای هر دو ماشین باشد، مجموع زمان‌های پردازش عملیات‌های متوالی $u, u+1, ..., v$ به روی ماشین A و سپس B را اینگونه معرفی می‌کنیم:

$$A_{u,v} = \sum_{j=u}^{v} a_j, \qquad B_{u,v} = \sum_{j=u}^{v} b_j,$$

تعریف ۱.۷.۲. [۱۱] کار h بحرانی است اگر

$$C_{max} = A_{1,h} + B_{h,n} \tag{۲.۲}$$

یا

$$A_{1,h} + B_{h,n} \geq A_{1,j} + B_{j,n} \quad \forall j. \tag{۳.۲}$$

اگر کارهای قبل h یعنی u و کارهای بعد h یعنی v را جداگانه در نظر بگیریم (۳.۲) هم‌ارز است با:

$$A_{u,h} \geq B_{u-1,h-1}, \quad 2 \leq u \leq h, \tag{۴.۲}$$

$$A_{h+1,v} \leq B_{h,v-1}, \quad h+1 \leq v \leq n. \tag{۵.۲}$$

توجه کنید اگر $h = 1$ (۴.۲) را نداریم و اگر $h = n$ (۵.۲) را نداریم.

قضیه جانسون ۳.۵.۲ را برای حالت خاص $h \in N_1$ بیان می‌کنیم.

قضیه ۲.۷.۲. *[۳۰] دنباله کار $\pi = (1, 2, ..., n)$ در کلاسی از زمان‌بندی با کار بحرانی $h \in N_1$ بهینه است اگر و فقط اگر (۵.۲) و (۴.۲) برقرار باشد و داشته باشیم:*

$$min\{a_u, b_v\} \leq min\{b_u, a_v\} \qquad u \leq h \leq v \tag{۶.۲}$$

شرط (۶.۲) را به شکلی مناسب برای برنامه‌ریزی خطی در می‌آوریم.
مجموعه N را به سه مجموعه زیر تقسیم می‌کنیم،

$$N_۰ = \{j|a_j = b_j\},$$

$$N_۱ = \{j|a_j < b_j\},$$

$$N_۲ = \{j|a_j > b_j\}.$$

در قضایایی که در ادامه ذکر می‌کنیم $h \in N_۰$ و $h \in N_۱$ را فرض می‌کنیم، $h \in N_۲$ را با شماره‌گذاری مجدد ماشین‌ها در جهت عکس و جابه‌جایی نام ماشین A با B می‌توان به $h \in N_۱$ تبدیل کرد.

قضیه ۳.۷.۲. *[۱۱] دنباله کار $\pi = (۱,۲,...,n)$ درکلاسی از زمان‌بندی با کار بحرانی $h \in N_۱$ بهینه است اگر و فقط اگر (۵.۲) و (۴.۲) برقرار باشد و داشته باشیم:*
برای $u \in \{۱, ..., h-۱\}$

$$a_u \le b_u \quad و \quad a_u \le a_h \tag{۷.۲}$$

و برای $v \in \{h+۱, ..., n\}$ *یکی از دو رابطه زیر برقرار باشد.*

$$a_h \le a_v < b_v \tag{۸.۲}$$

یا

$$a_v \ge b_v. \tag{۹.۲}$$

برهان. ابتدا ثابت می‌کنیم که شرایط قضیه به رابطه (۶.۲) اشاره دارد، اگر $u = v$ به وضوح رابطه برقرار است. فرض کنید $u < v$، ممکن است سه حالت زیر را داشته باشیم:
۱. برای $u < h = v$: شرط (۷.۲) با $a_h < b_h$ را در نظر بگیرید، $a_u \le a_h = a_v$ و $a_u < b_u$، پس رابطه (۶.۲) برقرار است.
۲. برای $u = h < v$: (۸.۲) را در نظر بگیرید، $a_u = a_h \le a_v$ و $a_u = a_h < b_h = b_u$ را داریم، پس رابطه برقرار است. حال (۹.۲) را در نظر بگیرید، $b_v \le a_v$ و $a_u = a_h < b_h = b_u$، پس رابطه برقرار است.
۳. برای $u < h < v$: داشتن شرط (۷.۲) با یکی از دو شرط (۸.۲) یا (۹.۲) برقراری رابطه را تضمین می‌کند. ابتدا (۸.۲) را با (۷.۲) بررسی می‌کنیم، داریم: $a_u \le b_u$ و $a_u \le a_h \le a_v$ بنابراین رابطه (۶.۲) برقرار است.
و اگر (۹.۲) را با (۷.۲) در نظر بگیریم، داریم: $a_u \le b_u$ و $b_v \le a_v$، پس رابطه (۶.۲) برقرار است.
حال رابطه (۶.۲) را فرض می‌کنیم و ثابت می‌کنیم روابط موجود در قضیه برقرارند.
۱. رابطه (۶.۲) با $u < h = v$ به شرط (۷.۲) اشاره دارد.
فرض کنید:

$$a_h < b_h, \tag{۱۰.۲}$$

$$min\{a_u, b_h\} \le min\{b_u, a_h\}. \tag{۱۱.۲}$$

$a_u > b_u$ و (۱۰.۲) نتیجه می‌دهد $min\{a_h, b_u\} > min\{a_u, b_h\}$ که با رابطه (۱۱.۲) در تناقض است، پس $a_u \leq b_u$ به همین دلیل $b_h < a_u$ هرگز اتفاق نمی‌افتد، زیرا اگر $a_h < b_h < a_u \leq b_u$ آنگاه $a_h = min\{a_h, b_u\} \leq \{a_u, b_h\} = b_h$ که با (۹.۲) در تناقض است. پس تنها حالت ممکن $a_u \leq b_h$ است، با در نظر گرفتن (۶.۲) می‌بینیم $min\{a_h, b_u\} \leq min\{a_u, b_h\} = a_u$ یا $a_u \leq a_h$ و $a_u \leq b_u$ که هر دو شرط (۷.۲) را می‌رساند.

۲.رابطه (۶.۲) با $u = h < v$ ، به (۸.۲) یا (۹.۲) اشاره دارد.

فرض کنید:

$$a_h < b_h, \tag{۱۲.۲}$$

$$min\{a_h, b_v\} \leq min\{b_h, a_v\}. \tag{۱۳.۲}$$

ثابت می‌کنیم یکی از دو رابطه (۸.۲) یا (۹.۲) برقرار است.

اگر (۹.۲) برقرار نباشد یعنی $a_v < b_v$، پس (۱۳.۲) به $a_v \geq a_h$ اشاره دارد پس (۸.۲) برقرار است.

اگر سمت چپ رابطه (۸.۲) برقرار نباشد یعنی $a_v < a_h$ به تناقض می‌رسیم.

$$a_v = min\{a_h, a_v\} < min\{a_h, b_v\} \leq min\{a_v, b_h\} \leq a_v$$

اگر سمت راست رابطه (۸.۲) برقرار نباشد یعنی $a_v > b_v$، پس (۹.۲) برقرار است. □

قضیه ۴.۷.۲. *[۱۱] دنباله کار $\pi = (۱, ۲, ..., n)$ در کلاسی از زمان‌بندی با کار بحرانی $h \in N_۰$ و برای تمام کارهای قبل h، $u \in N_۱ \cup N_۰$ بهینه است اگر و فقط اگر (۷.۲) برای $u \in \{۱, ..., h-۱\}$ و (۸.۲) یا (۹.۲) برای $v \in \{h+۱, ..., n\}$ برقرار باشد.*

برهان. استدلال استفاده شده در اثبات (۳.۷.۲)، که نشان می‌دهد شرط (۶.۲) از شرایط قضیه نتیجه می‌شود، برای $h \in N_۰$ مناسب است.

در ادامه ثابت می‌کنیم شرط (۶.۲) شرایط قضیه را نتیجه می‌دهد. شرط (۶.۲) با $u < h = v$، (۷.۲) را نتیجه می‌دهد. در واقع نمی‌تواند $a_u > a_h$ باشد، زیرا اگر آن را داشته باشیم، شرط (۴.۲) نقض می‌شود:

$$A_{u+۱,h} < A_{u+۱,h-۱} + a_u \leq B_{u+۱,h-۱} + b_u = B_{u,h-۱}.$$

شرط (۶.۲) با $u = h < v$ (۸.۲) و (۹.۲) را نتیجه می‌دهد (اثبات قضیه ۳.۷.۲ را ببینید). □

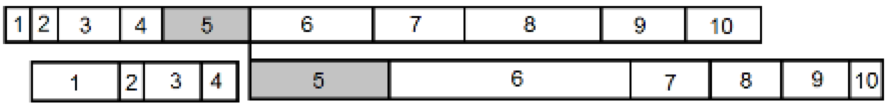
کاملاً مشخص است که قاعده جانسون با استفاده از مرتب کردن کارهای متعلق به $N_۱ \cup N_۰$ به‌طور صعودی با در نظر گرفتن مقدار a آنها و کارهای در $N_۲ \cup N_۰$ به طور نزولی با مقدار b، یک جواب بهینه می‌سازد. همان‌طور که قبلاً گفتیم شرایط جانسون شرایط کافی هستند اما لازم نیستند. در حقیقت ممکن است تعداد زیادی زمان‌بندی بهینه متفاوت با زمان‌بندی جانسون وجود داشته باشد. در قاعده جانسون کارهای متعلق به $N_۰$ نه تنها با کارها در $N_۱$ و $N_۲$ می‌تواند ترکیب شود، بلکه کارها در $N_۱$ و $N_۲$ می‌توانند در خودشان و نیز با یکدیگر ترکیب شوند.

مثال ۱.۷.۲. جدول ۱۵.۲ را در نظر بگیرید که اطلاعات یک زمان‌بندی دوماشینه را در بر دارد.

جدول ۱۵.۲: زمان‌بندی دوماشینه

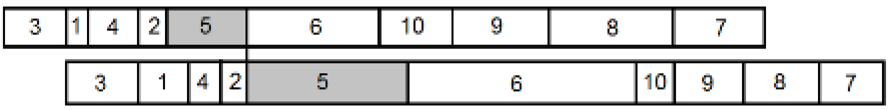
j	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
a_j	۱	۱	۲	۲	۵	۶	۴	۶	۳	۳
b_j	۳	۱	۳	۲	۷	۱۹	۳	۳	۳	۱

با توجه به اطلاعاتی که در اختیار داریم می‌بینیم که $h = ۵$ کار بحرانی است و $C_{max} = ۴۷$، همان‌طور که در شکل ۲۲.۲ می‌بینید زمان‌بندی شماره (۱) با استفاده از قاعده جانسون نوشته شده است.



شکل ۲۲.۲: زمان‌بندی (۱)

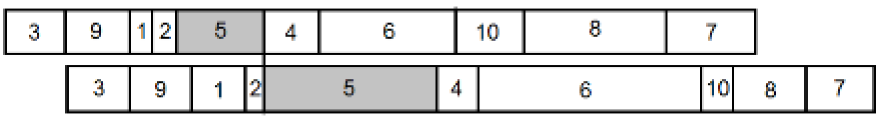
با تغییر در ترتیب شغلها در مجموعه‌های $N_۱ = \{۱,۳,۵,۶\}$ و $N_۲ = \{۷,۸,۱۰\}$ در حالیکه موقعیت نسبی شغلهای $N_۰ = \{۲,۴,۹\}$ نسبت به کار بحرانی $h = ۵$ ثابت باشد می‌توانیم به زمان‌بندی دیگری (زمان‌بندی شماره (۲)) که در شکل ۲۳.۲ می‌بینید برسیم.



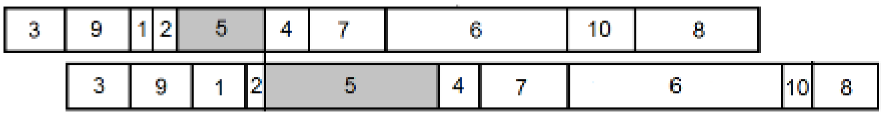
شکل ۲۳.۲: زمان‌بندی (۲)

در این دو زمان‌بندی شرایط لازم و کافی بهینگی ذکر شده در قضیه ۳.۷.۲ برقرار است وهمان‌طور که گفتیم زمان‌بندی شماره (۱) همچنین با قاعده جانسون نوشته شده است.

زمان‌بندی بهینه دیگری که در شرایط قضیه ۳.۷.۲ صدق می‌کند و با جابه‌جایی در کارهای متعلق به $N_۰$ ایجاد شده است را در شکل ۲۴.۲ داریم.



شکل ۲۴.۲: زمان‌بندی شماره (۳)



شکل ۲۵.۲: زمان‌بندی شماره (۴)

زمان‌بندی شماره (۴)، شکل ۲۵.۲ نیز در شرایط قضیه ۳.۷.۲ صدق می‌کند. علاوه بر جابه‌جایی در کارهای N_0، کارهایی که در $N_1 \cup N_2$ هستند و بعد از h آمده‌اند تغییر کرده‌اند. بنابراین $7 \in N_2$ قبل از $6 \in N_1$ آمده است که در قاعده جانسون هرگز اتفاق نمی‌افتد.

مشاهده می‌کنیم در همه زمان‌بندی‌هایی که در مورد آنها بحث کردیم شرایط لازم و کافی قضیه ۳.۷.۲ برقرار است، کار $h = 5$ کار بحرانی است و C_{max} در همه زمان‌بندی‌ها ۴۷ است.

۲.۷.۲ شرایط لازم و کافی برای بهینگی دنباله کارها در زمان‌بندی غیرجایگشتی دوماشینه

در زمان‌بندی غیرجایگشتی بهینه، هیچ کاری وجود ندارد که اگر عملیات اول آن در ماشین A بعد از کار بحرانی باشد، عملیات دوم آن در ماشین B قبل از کار بحرانی باشد. این مطلب نشان می‌دهد که کار بحرانی زمان‌بندی را به دو بخش تقسیم می‌کند که در آن یک مجموعه از کارها قبل از h در هر دو ماشین A و B و مجموعه‌ای دیگر بعد از h پردازش می‌شوند. این تقسیم‌بندی نقش کلیدی را ایفا می‌کند، درحالیکه جایگشت کارها در قبل و بعد h جزئی و بی‌اهمیت است.
زمان کل پردازش به‌صورت جمع زمان‌های پردازش کارهای قبل از h در ماشین A و زمان‌های پردازش کارهای بعد از h در ماشین B، که هر دو عملیات h را شامل می‌شود، محاسبه می‌شود.
فرض کنید زمان‌بندی با دنباله کار $\pi = (1, 2, \dots, n)$ برای ماشین A و $\sigma = (i_1, i_2, \dots, i_n)$ برای ماشین B داده شده باشد، نماد پردازش کارها در ماشین A (B) قبل و بعد از h را به‌ترتیب $N_{A(B)}^{befor(h)}$ و $N_{A(B)}^{after(h)}$ در نظر می‌گیریم.

تعریف ۵.۷.۲. [۱۱] در زمان‌بندی غیرجایگشتی، کار h بحرانی است اگر قبل از دومین عملیاتش در ماشین B زمان تلف شده داشته باشیم (هیچ زمان تلف شده‌ای بعد از کار بحرانی در ماشین دوم نداریم) و

$$C_{max} = A(N_A^{befor(h)}) + a_h + b_h + B(N_B^{after(h)}). \qquad (14.2)$$

واضح است برای هر π و σ کار h وجود دارد و منحصربه‌فرد است.
تعریف کار بحرانی را به‌صورت زیر نیز می‌توان نوشت:

$$\sum_{k=1}^{h} a_k + \sum_{k=h}^{n} b_{\sigma(k)} > \sum_{k=1}^{j} a_k + \sum_{k=j}^{n} b_{\sigma(k)}, \qquad 1 \le j \le h-1, \qquad (15.2)$$

$$\sum_{k=1}^{h} a_k + \sum_{k=h}^{n} b_{\sigma(k)} \geq \sum_{k=1}^{j} a_k + \sum_{k=j}^{n} b_{\sigma(k)}, \qquad h \leq j \leq n. \tag{۱۶.۲}$$

نامساوی اکید در (۱۱.۲) وجود وقت تلف شده قبل از کار h در ماشین B را ضمانت می‌کند.
با استفاده از گزاره بعد ثابت می‌کنیم قضایای ۳.۷.۲ و ۴.۷.۲ برای غیرجایگشتی‌ها نیز برقرار است.

گزاره ۶.۷.۲. *[۱۱] اگر زمان‌بندی با کار بحرانی h بهینه باشد، آنگاه در هر دو ماشین زیردنباله‌هایی یکسان از کارها، قبل h و بعد h پردازش شده‌اند.*

$$N_A^{befor(h)} = N_B^{befor(h)}, N_A^{after(h)} = N_B^{after(h)}.$$

با توجه به گزاره ۶.۷.۲ می‌بینیم که در زمان‌بندی بهینه، دومین عملیات از کار h در مکان یکسان در ماشین A پردازش می‌شود. بنابراین:

$$A_{1,h} = A(N_A^{befor}) + a_h,$$

$$B_{i_h, i_n} = B(N_B^{befor}) + b_h.$$

و زمان کل پردازش بدین ترتیب محاسبه می‌شود:

$$C_{max} = A_{1,h} + B_{i_h, i_n}.$$

زمان‌بندی غیرجایگشتی بهینه اختیاری $S_{\pi,\sigma}$، با کار بحرانی h را در نظر بگیرید، π و σ به‌ترتیب دنباله کار در ماشین A و B است. زمان‌بندی جایگشتی $S_{\pi,\pi}$ را معرفی می‌کنیم، π دنباله یکسان در هر دو ماشین است. در واقع در هر دو زمان‌بندی دنباله کارها در A و B یعنی (N_A, N_B)، قبل از کار h به‌صورت مشابه پردازش می‌شود، اما ترتیب N_B^{befor} در دو زمان‌بندی متفاوت است. ابتدا نشان می‌دهیم که h در زمان‌بندی جایگشتی نیز بحرانی است. واضح است که در هر دو زمان‌بندی $N_A^{after(h)}$ و $N_B^{after(h)}$ یکسان است و فقط ترتیب در $N_B^{after(h)}$ متفاوت است، پس h در مکان یکسانی در هر دو زمان‌بندی قرار دارد. $N_B^{after(h)}$ در زمان‌بندی جایگشتی طولانی‌تر از غیرجایگشتی نیست در نتیجه C_{max} در هردوی آن‌ها یکسان است پس کار h برای $S_{\pi,\pi}$ هم بحرانی است. حال درمی‌یابیم که برای مجموع زمان‌بندی $S_{\pi,\pi}$ رابطه (۱۴.۲) اتفاق می‌افتد و زمان‌بندی‌های جایگشتی و غیرجایگشتی هر دو مقدار بهینه یکسان دارند. حال با توجه به تمام این موارد اگر $S_{\pi,\sigma}$ بهینه باشد، $S_{\pi,\pi}$ هم بهینه است.
بنابراین شرایط قضایای ۲.۷.۲ و ۳.۷.۲ برای هر دو زمان‌بندی $S_{\pi,\pi}$ و $S_{\pi,\sigma}$ برقرار است.
از طرف دیگر اگر شرایط قضیه برای $S_{\pi,\sigma}$ برقرار بود، پس آنها همچنین برای $S_{\pi,\pi}$ برقرارند، پس $S_{\pi,\pi}$ بهینه است. از آنجائیکه هر دو زمان‌بندی دارای زمان پردازش کل یکسان هستند $S_{\pi,\sigma}$ بهینه است.
بنابراین ما نشان دادیم که قضایای ۲.۷.۲ و ۳.۷.۲ برای موارد غیربازگشتی نیز برقرار است.

قضیه ۷.۷.۲. *[۱۱] در زمان‌بندی با کار بحرانی $h \in N_1 \cup N_0$ و همه کارهای قبل h، $u \in N_1 \cup N_0$، دنباله کار $\pi = (1, 2, ..., n)$ بهینه است اگر و فقط اگر شرط (۷.۲) برای کارهای قبل h و شرط (۸.۲) یا (۹.۲) برای کارهای بعد h برقرار باشد.*

فصل ۳

مسائل زمان‌بندی معکوس کارگاهی

۱.۳ مقدمه

در این فصل به معرفی و بررسی مسئله زمان‌بندی معکوس می‌پردازیم، دلایلی برای ضرورت استفاده از این مسئله برمی‌شماریم. مسئله معکوس را برای کارگاه‌های یک و دوماشینه بررسی می‌کنیم. جهت بدست آوردن مینیمم هزینه تنظیمات زمان‌های پردازش در مسائل کارگاهی خاص یک ماشینه، دوماشینه شرایط بهینگی را برای آن‌ها فراهم کرده و در نهایت مسئله را مدل می‌کنیم.

۲.۳ معرفی

مسائل زمان‌بندی لیستی از کارها را مرتب می‌کند با این هدف که اندازه زمان تکمیل کارها مینیمم شود.
در مسائل زمان‌بندی معکوس فرض می‌کنیم این دنباله کارها داده شده و هدف این است که با کمترین تغییر در پارامترها (زمان پردازش) دنباله داده شده بهینه شود.
برای معرفی مسئله زمان‌بندی معکوس INV را در بخش میانی نمادی که در مسائل زمان‌بندی استفاده می‌شود، قرار می‌دهیم. یعنی مسائل معکوس را با نماد $Fm|INV|\{\}$ مثلاً با هدف کمینه کردن زمان پردازش کل با $Fm|INV|C_{max}$ نمایش می‌دهیم که m تعداد ماشین‌های مسئله مطرح شده است. از تمام نمادهایی که تاکنون در مسائل زمان‌بندی داشتیم، همراه با "^" برای پارامترهای تنظیم شده استفاده می‌کنیم.
فرض کنید فرآیند تولید مستلزم بعضی مقدمات باشد که تولیدکننده می‌تواند قبل از شروع آنها را فراهم کند و سپس با توجه به اطلاعاتی که در اختیار دارد، بهترین دنباله را انتخاب کند. گاهی نیز تولیدکننده، دنباله پیشنهادی خود را با توجه به شرایط تولید ارائه می‌کند یا ممکن است کارهایی که بعد از شروع فرآیند، وارد می‌شوند ویژگی‌های متفاوتی داشته باشند و در نتیجه جایگشت انتخابی دیگر بهینه نباشد. اگر به دلایل زیادی همچون محدودیت تکنولوژی جایگشت، قابلیت تغییر نداشته باشد تولیدکننده مجبور

می‌شود سرعت انجام بعضی کارها را تنظیم کند، یعنی زمان پردازش را تنظیم کند. زمان پردازش تنظیم شده را در ماشین A با $\hat{a}_j$ و در ماشین B با $\hat{b}_j$ نمایش میدهیم. می‌خواهیم نشان دهیم مسائل زمان‌بندی معکوس حتی در مورد مسائلی که مسئله زمان‌بندی آن‌ها در پیچیدگی زمانی چندجمله‌ای قابل حل نیست، می‌توانند به‌صورت مسائل برنامه‌ریزی خطی[۱] دربیایند.

در زمان‌بندی مقدار دقیق پارامترها معلوم و هدف پیدا کردن دنباله کار بهینه، برای مینیمم کردن زمان کل پردازش کارهاست. حال آنکه در زمان‌بندی معکوس زمان پردارش‌ها مشخص نیست و ما در پی تنظیماتی برای بهینگی دنباله داده شده هستیم. هدف در زمان‌بندی معکوس تنظیم پارامترها است به شرط آنکه از مقادیر اولیه داده شده زیاد منحرف نشوند و در نهایت هزینه تنظیمات مینیمم شود.

بهینه‌سازی معکوس در خیلی از مسائل، ازجمله در مسائل علوم ژئوفیزیک، عکس‌برداری پزشکی، مسائل مربوط به ترافیک و دیگر موارد کاربرد دارد.

آهوجا[۲] و اورلین[۳] در سال ۲۰۰۱ [۳] مطالعه زیادی در مورد بهینه‌سازی معکوس و کاربردهای آن‌ها شامل برنامه‌ریزی خطی عمومی، کوتاه‌ترین راه‌حل‌ها، کمترین هزینه و مسائل انتقال داشتند. در مقاله مطالعه شده توسط کولاماس [۲۸] در سال ۲۰۰۴ هدف این است که روش‌های بهینه‌سازی معکوس را در مورد مسائل زمان‌بندی به کار گیریم و در مورد کاربردهای بهینه‌سازی معکوس مخصوصاً مسائل زمان‌بندی بحث می‌کنیم. هدف در این مقاله تعیین مقدار پارامترهای کار و دنباله کار است، در جهتی که بعضی از توابع هدف که بر اساس زمان تکمیل یا طول مدت انجام کار است را مینیمم کند. فرق اساسی بین مسائل زمان‌بندی نامبرده و زمان‌بندی معکوس، بیان شده در مقاله مذکور در این است که، برای مسئله معکوس ما فرض می‌کنیم دنباله‌ای از کارها داده شده و تبدیل آن برای رسیدن به بهینگی، با کمترین تغییر و تنظیم ممکن بر پارامترهای قابل کنترل صورت می‌گیرد. کاربرد اصلی مسائل زمان‌بندی معکوس در شرایطی است که پارامترها می‌توانند بین تولیدی‌ها و مشتری‌ها تنظیم شوند. پارامترهای کار اصلی آن‌هایی هستند که مشتری‌ها ترجیح می‌دهند و پیشنهاد مدیر تولیدی‌ها مقادیر خطای متناظر با آنها است.

یکی دیگر از کاربردهای مسائل زمان‌بندی معکوس می‌تواند در سیستم‌هایی باشد که کارها باید به‌صورت دنباله بیایند تا همواره موجود باشند اما یک کنترل بر پارامترهای کار وجود دارد. به‌طور خاص در این سیستم‌ها کسی که زمان‌بندی را انجام می‌دهد، زمانی که پارامترهای کار به سیستم داده می‌شوند اطلاعاتی در مورد آن‌ها به‌دست می‌آورد. زمان‌بند می‌تواند مقدار حقیقی پارامترها را با مشتری‌ها، به‌ترتیبی که حتی بعد از اینکه پارامترهای جدید به زمان‌بندی بهینه افزوده شد، آن را بهینه نگه دارد، تنظیم کند. کاربرد زمان‌بندی معکوس کمترین مقدار تغییر در پارامترهای کار ذکر شده را تعیین می‌کند، درحالی‌که بهینه بودن آن زمان‌بندی را حفظ کند.

ما نشان می‌دهیم که مسائل معکوس را می‌توان به‌صورت برنامه‌ریزی خطی درآورد، حتی آن دسته از مسائل زمان‌بندی که در پیچیدگی زمانی چندجمله‌ای قابل حل نیست.

به غیر از آن‌چه ذکر شد کاربردهای مخصوص دیگری نیز از زمان‌بندی معکوس، مثل استفاده از مسئله

[۱] LP

[۲] Ahuja

[۳] Orlin

معکوس برای بدست آوردن محکی برای بهینگی جواب در مسائل خاص زمان‌بندی NP−سخت داریم.
بخش عظیمی از مطالعات در مورد زمان‌بندی معکوس با پارامترهای قابل کنترل شامل کار و مطالعات تریک[۴] در سال ۱۹۹۴ [۴۱] است که بر زمان‌بندی چند متغیره و چندماشینه بوده است و همین‌طور تحقیق و مطالعه علیدای[۵] و کوچنبرگر[۶] نیز در سال ۱۹۹۶ [۵] است.
مواردی نیز از مطالعات و تحقیقات مختلف بر روی مسائل بهینه‌سازی معکوس وجود دارد، مانند معکوس برنامه‌ریزی خطی که توسط آهوجا[۷] و اورلی[۸] در سال ۲۰۰۱ [۳] انجام شد. یا معکوس مسئله انتقال و کمترین هزینه که ژانگ[۹] و لوو[۱۰] در سال ۱۹۹۶ [۴۸] بررسی کردند. و یانگ[۱۱] که معکوس مسئله برش را در [۴۶] بررسی کرد و معکوس مسئله کوتاه‌ترین راه‌حل هم در این میان توسط زو[۱۲] و ژانگ[۱۳] در [۴۵] بررسی شد.

۳.۳ مسائل معکوس زمان‌بندی تک‌ماشینه

دنباله‌ای از n کار اختیاری را در نظر بگیرید. در فصل قبل دیدیم هر کار j در ماشین i دارای زمان پردازش $p_{j,i}$ است، $j = ۱, ۲, \dots, n$ و برای کارگاه‌های تک‌ماشینه p_j است. فرض کنید $C_j = \sum_{k=۱}^{j} p_k$ زمان تکمیل شدن کار j در دنباله اختیاری داده شده باشد. مسئله‌ای را در نظر بگیرید که با در نظر گرفتن کل $\sum_{j=۱}^{n} C_j$ (یا میانگین، $\overline{C}$) کل زمان تکمیل کارها، دنباله قراردادی را به دنباله‌ای بهینه تبدیل می‌کند.
در فصل قبل برای بهینه کردن تابع هدف در مسئله تک‌ماشینه روش‌های زیادی را معرفی کردیم. که طبق خواسته‌ها و مطالباتی که از زمان‌بند می‌شود آن‌ها را انتخاب می‌کنیم. مثلاً روش $S.P.T$ یا $E.D.D$ را در نظر بگیرید.
با توجه به قضایای ۱.۳.۲ و ۲.۳.۲ ملاحظه کردیم که با روش $S.P.T$ متوسط مدت زمان ساخت کمینه می‌شود. همین‌طور با روش $E.D.D$ ماکزیمم تأخیر (L_{max}) نیز به حداقل می‌رسد. حال ضمن در نظر گرفتن این دو روش مسئله معکوس را برای آن‌ها بررسی می‌کنیم.
با توجه به مسئله معرفی شده توسط اسمیت[۱۴] [۳۸] که جواب بهینه مسئله $۱||\overline{C}$ را با استفاده از مرتب کردن کارها در کوتاه‌ترین زمان ممکن ($S.P.T$) بدست می‌آورد، مسئله معکوس $۱|INV|\overline{C}$ با تعیین کمترین تغییر کل دنباله کارها، دنباله‌ای تبدیل شده به دنباله کمترین زمان پردازش ($S.P.T$) را ارائه

[۴] Trick
[۵] Alidaee
[۶] Kochenberger
[۷] Ahuja
[۸] Orlin
[۹] Zhang
[۱۰] Liu
[۱۱] Yang et al.
[۱۲] Xu
[۱۳] Zhang
[۱۴] Smith

می‌دهد.
طبق این موارد مدل زیر را داریم [۲۸]:

$$\begin{array}{ll} min & \sum_{j=1}^{n} \theta_j|\hat{p}_j - p_j| \\ s.t. & \\ & 0 \leq \hat{p}_1 \leq \hat{p}_2 \leq \cdots \leq \hat{p}_n \end{array} \tag{۱.۳}$$

که برای هر $j = 1, 2, \ldots, n$، $\hat{p}_j$ مقدار جدید زمان پردازش کار j بعد از تنظیم و تغییر نسبت به مقدار اولیه است. θ_j واحد هزینه تغییر p_j است.

تابع هدف در مسئله (۱.۳) به اندازه کافی انعطاف‌پذیر است. می‌بینیم که θ_j می‌تواند خیلی بزرگ باشد، با توجه به مسئله که مینیمم سازی است، θ_j به p_j اجازه نمی‌دهد که تغییر زیادی نسبت به مقدار اولیه داشته باشد (به هر قیمتی تنظیم نمی‌شود).
مسئله (۱.۳) یک برنامه‌ریزی خطی نیست اما با استفاده از تغییر متغیر می‌تواند به مسئله خطی تبدیل شود. می‌دانیم که $|\hat{p}_j - p_j|$ معادل با $x_j + y_j$ است، بنابراین

$$\hat{p}_j - p_j = x_j - y_j \qquad x_j \geq 0, y_j \geq 0$$

پس مسئله (۱.۳) را می‌توان به شکل مسئله زیر نوشت:

$$\min \quad \sum_{j=1}^{n} \theta_j x_j + \sum_{i=1}^{n} \theta_j y_j \tag{۲.۳}$$

$$s.t \quad 0 \leq \hat{p}_1 \leq \hat{p}_2 \leq \cdots \leq \hat{p}_n \tag{۳.۳}$$

$$\hat{p}_j - p_j = x_j - y_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{۴.۳}$$

$$x_j \geq 0, y_j \geq 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{۵.۳}$$

مثال ۱.۳.۳. [۲۸] در نظر بگیرید در کارگاه برای تولید محصول، ۴ کار با $(p_1, p_2, p_3, p_4) = (6, 4, 8, 2)$ در انتظار پردازش هستند، دنباله‌ای که بر اساس این زمان پردازش‌ها داده شده بهینه نیست. می‌خواهیم با استفاده از مسئله $1|INV|\overline{C}$ تنظیمات مورد نیاز برای بهینگی آن‌ها را، با کمترین هزینه انجام دهیم. $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4) = (1, 1, 1, 1)$
برای بهینه کردن دنباله داده شده باید مقادیر $\hat{p}_j$ را بدست آوریم.

حل: طبق مسئله (۲.۳)-(۵.۳) داریم:

$$(\hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{p}_3, \hat{p}_4) = (6, 6, 8, 8)$$

زمان پردازش کار ۲، ۲ واحد افزایش و زمان پردازش کار ۴، ۶ واحد افزایش می‌یابد و در نهایت با این مقادیر دنباله ما به روش $S.P.T$ بهینه است (محدودیت (۳.۳) را ببینید). هزینه تنظیمات ۸ واحد است.

۱.۳.۳ ارائه روش حل با شرایط کاروش-کاهن-تاکر

حال مسئله (۲.۳)-(۵.۳) را در نظر بگیرید، با استفاده از شرایط کاروش-کاهن-تاکر روشی برای حل آن ارائه می‌کنیم.

قضیه ۱.۳.۳. *[۴۴](شرایط کاروش-کاهن-تاکر)*
فرض کنید f و g_i، $i = 1, \cdots, n$، توابع حقیقی مقدار تعریف شده روی $\mathbb{R}^n$ باشند. مسأله بهینه‌سازی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} &min \quad f(\boldsymbol{X}) = f(x_1, \cdots, x_n) \\ &s.t \quad g_i(\boldsymbol{X}) \le 0 \quad i = 1, \cdots, m \end{aligned} \tag{۶.۳}$$

که توابع محدودیت $g_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ برای هر $i = 1, \cdots, m$ روی $\mathbb{R}^n$ محدب باشند. فرض کنید $X = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \quad g_i(\boldsymbol{X}) \le 0 \quad i = 1, \cdots, n\}$ یک مجموعه شدنی و نقطه $\boldsymbol{X}^* \in X$. فرض کنید تابع هدف $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ در $\boldsymbol{X}^*$ محدب و f و g_i، $i = 1, \cdots, m$ در $\boldsymbol{X}^*$ به‌طور پیوسته مشتق پذیر باشند. اگر ضرایب (لاگرانژ) $\mathbb{R} \ni \mu_i \ge 0$ برای $i = 1, \cdots, m$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که

الف. $\bigtriangledown f(\boldsymbol{X}^*) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \bigtriangledown g_i(\boldsymbol{X}^*) = 0$

ب. $\mu_i g_i(\boldsymbol{X}^*) = 0 \quad \forall i = 1, \cdots, m$

در این‌صورت $\boldsymbol{X}^*$ جواب بهینه مسأله (۶.۳) است.

تابع هدف (۲.۳) خطی است درنتیجه تابع محدب و پیوسته مشتق‌پذیر است و محدودیت‌ها نیز همگی خطی‌اند، پس پیوسته مشتق‌پذیرند. در نتیجه می‌توان قضیه ۱.۳.۳ را برای آن به کار برد.
محدودیت (۴.۳) را می‌توان به شکل $\hat{p}_i = x_i - y_i + p_i$ نوشت، پس در مورد محدودیت (۳.۳) داریم:

$$0 \le \hat{p}_1 \le \cdots \le \hat{p}_n \longrightarrow \begin{cases} -\hat{p}_1 \le 0 \\ \hat{p}_1 - \hat{p}_2 \le 0 \\ \vdots \\ \hat{p}_{n-1} - \hat{p}_n \le 0 \end{cases} \tag{۷.۳}$$

g_1 تا g_n،

$$x_i \ge 0 \longrightarrow -x_i \le 0 \tag{۸.۳}$$

g_{n+1} تا g_{2n}،

$$y_i \ge 0 \longrightarrow -y_i \le 0 \tag{۹.۳}$$

g_{2n+1} تا g_{3n} می‌باشند.
به‌ازای هر $i = 1, \ldots, n$، برای n محدودیت واقع در معادلات (۷.۳) ضریب λ_i، برای n محدودیت در (۸.۳) ضریب μ_i و برای n محدودیت باقی‌مانده در (۹.۳) ضریب γ_i قرار می‌دهیم.

شرایط کاروش-کوهن-تاکر را برای این مسئله بررسی می‌کنیم.
با توجه به قسمت الف قضیه ۱.۳.۳ داریم:

$$\begin{cases} 2\theta_1 - \mu_1 - \gamma_1 = 0, \\ 2\theta_2 - \mu_2 - \gamma_2 = 0, \\ \vdots \\ 2\theta_n - \mu_n - \gamma_n = 0. \end{cases}$$

و با توجه به قسمت ب قضیه (۱.۳.۳) داریم:

$$\begin{cases} \lambda_1(-x_1 + y_1 - p_1) = 0, \\ \lambda_2(x_1 - y_1 + p_1 - x_2 + y_2 - p_2) = 0, \\ \vdots \\ \lambda_n(x_{n-1} - y_{n-1} + p_{n-1} - x_n + y_n - p_n) = 0. \end{cases}$$
$$\begin{cases} \mu_1(-x_1) = 0, \\ \mu_2(-x_2) = 0, \\ \vdots \\ \mu_n(-x_n) = 0. \end{cases}$$
$$\begin{cases} \gamma_1(-y_1) = 0, \\ \gamma_2(-y_2) = 0, \\ \vdots \\ \gamma_n(-y_n) = 0. \end{cases}$$

که، $\gamma_i, \lambda_i, \mu_i \geq 0$

پس در نهایت داریم:

$$\Longrightarrow \begin{cases} 2\theta_i - \mu_i - \gamma_i = 0, & \forall i = 1, \cdots, n, \\ \lambda_i(x_{i-1} - y_{i-1} + p_{i-1} - x_i + y_i - p_i) = 0, & \forall i = 1, \cdots, n, \quad x_0, y_0, p_0 = 0, \\ \mu_i(-x_i) = 0, & \forall i = 1, \cdots, n, \\ \gamma_i(-y_i) = 0, & \forall i = 1, \cdots, n, \\ \gamma_i, \lambda_i, \mu_i \geq 0, & \forall i = 1, \cdots, n. \end{cases}$$

با حل این دستگاه، جواب بهینه برای مسئله (۲.۳)-(۵.۳) بدست می‌آید.
مسائل زمان‌بندی معکوس تک‌ماشینه دیگری را در نظر بگیرید. مسئله $1|q|C_{max}$ مینیمم زمان پردازش

کل $C_{max}=max\{C_j+q_j\}$ را با در نظر گرفتن زمان تحویل کار q_j، وقتی همه کارها در زمان شروع (زمان صفر) در دسترس هستند، محاسبه می‌کند [۲۸] (مسئله $1|q|C_{max}$ بهینگی را با استفاده از مرتب کردن کارها به‌صورت غیر افزایشی q_j به دست می‌آورد).
فرض کنید هدف در مسئله‌ای کمینه کردن تأخیر در پردازش و تحویل کارها باشد. جواب بهینه مسئله $1|q|L_{max}$ را با استفاده از مرتب کردن کارها در سریع‌ترین موعد تحویل کار $(E.D.D)$ بدست می‌آوریم، مسئله معکوس $1|INV|L_{max}$ با تعیین کمترین تنظیم کل دنباله کارها، دنباله‌ای تبدیل شده به دنباله $E.D.D$ را ارائه می‌دهد.
مسئله $1|INV|L_{max}$ می‌تواند مشابه مسئله خطی (۲.۳)-(۵.۳)، به وسیله مینیمم کردن مجموع تغییرات و تنظیمات زمان تحویل کار j، فرموله شود.

ما مسئله $1|INV|L_{max}$ را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}
min \quad & \textstyle\sum_{j=1}^{n}\gamma_j|\hat{q}_j-q_j| \\
s.t. \quad & \\
& 0\le\hat{q}_1\le\hat{q}_2\le\cdots\le\hat{q}_n
\end{aligned} \tag{۱۰.۳}$$

که برای هر $j=1,2,\ldots,n$، $\hat{q}_j$ مقدار جدید موعد تحویل کار j بعد از تنظیم نسبت به مقدار اولیه است. γ_j واحد هزینه تغییر q_j است.
مشابه مسئله (۵.۳)-(۲.۳) تابع هدف در مسئله (۱۰.۳) نیز به اندازه کافی انعطاف‌پذیر است، چرا که γ_j می‌تواند خیلی بزرگ باشد. با توجه به این که مسئله مینیمم سازی است، γ_j به q_j اجازه نمی‌دهد که تغییر زیادی نسبت به مقدار اولیه داشته باشد.
مسئله (۱۰.۳) را نیز با استفاده از تغییر متغیر به مسئله خطی تبدیل می‌کنیم. می‌دانیم که $|\hat{q}_j-q_j|$ معادل با $x'_j+y'_j$ است، بنابراین

$$\hat{q}_j-q_j=x'_j-y'_j \qquad x'_j\ge 0, y'_j\ge 0$$

پس مسئله (۱۰.۳) را می‌توان به شکل مسئله زیر نوشت:

$$\begin{aligned}
min \quad & \textstyle\sum_{j=1}^{n}\gamma_j x'_j+\sum_{j=1}^{n}\gamma_j y'_j \\
s.t. \quad & \\
& 0\le\hat{q}_1\le\hat{q}_2\le\cdots\le\hat{q}_n \\
& \hat{q}_j-q_j=x'_j-y'_j, \qquad j=1,2,\ldots,n, \\
& x'_j\ge 0, y'_j\ge 0, \qquad j=1,2,\ldots,n.
\end{aligned} \tag{۱۱.۳}$$

۴.۳ مسائل زمان‌بندی معکوس کارگاهی خاص چندماشینه

در این بخش به مسائل زمان‌بندی چندین عملیاتی توجه می‌کنیم. مشخصه اصلی آن‌ها این است که برای هر کار $m\ge 2$ عملیات نیاز است تا در هر ترتیبی (کارگاهی بدون شرط) یا در ترتیب از قبل مشخص

شده یکسان برای هر کار (کارگاهی خاص) یا در بعضی ترتیب‌های از قبل تعیین شده که در میان کارها متفاوت است (کارگاهی) پردازش شود. بیشترین معیار استفاده شده در بهینه‌سازی در مسائل زمان‌بندی چند عملیاتی، مینیمم کردن زمان کل پردازش‌ها یعنی C_{max} است، وقتی که $C_{j,m}$ زمان تکمیل عملیات m بر روی کار j، برای هر $j = ۱, ۲, \dots, n$ باشد.
در حالت چندماشینه، مسائل زمان‌بندی معکوس را برای دو دسته‌بندی کلی از زمان‌بندی بر اساس پیچیدگی زمانی مسئله زمان‌بندی می‌توان نوشت، در نمونه $F۲|INV|C_{max}$ مسئله زمان‌بندی $F۲||C_{max}$ با پیچیدگی چندجمله‌ای ($O(n \log n)$)، توسط الگوریتم جانسون قابل حل است [۲۵]. درحالیکه در نمونه $Fm|INV|C_{max}$ مسئله زمان‌بندی متناظر $Fm||C_{max}$، NP-سخت است [۱۸].

۱.۴.۳ مسائل زمان‌بندی معکوس کارگاهی خاص جایگشتی دوماشینه

در این بخش برنامه زمان‌بندی دوماشینه کارگاهی خاص را از منظر بهینه‌سازی معکوس بررسی می‌کنیم. در مسئله $F۲|c_{max}$ یک دنباله از کارهای $N = \{۱, ۲, \dots, n\}$ ابتدا توسط ماشین A و سپس توسط ماشین B باید پردازش شوند. همه کارها در زمان شروع در دسترس هستند. بردار زمان پردازش را با $a = (a_۱, a_۲, \dots, a_n)$ و $b = (b_۱, b_۲, \dots, b_n)$ نمادگذاری می‌کنیم.
هدف در مسئله $F۲|_{c_{max}}$ پیدا کردن جایگشت π^* است بطوریکه:

$$C_{max}(\pi^*, a, b) \le C_{max}(\pi, a, b) \qquad \forall \pi$$

اگر کارها در هر دو ماشین پردازش یکسان داشته باشد، آنگاه زمان‌بندی را جایگشتی می‌نامند. گاهی مسئله معکوس کارگاهی خاص جایگشتی دوماشینه را بدین ترتیب نیز نامگذاری می‌کنیم.

$$F۲|a_j, b_j \text{تنظیم‌پذیر}, \ \pi|C_{max}$$

در مسئله زمان‌بندی معکوس زمان پردازش a و b معلوم‌اند و دنباله کار نهایی $\pi = (۱, ۲, \dots, n)$ را داریم، مانند مسئله زمان‌بندی در مسئله معکوس فرض می‌کنیم که کارها روی هر دو ماشین با جایگشت یکسان π پردازش می‌شود، ممکن است این جایگشت برای مقادیر معلوم a_j و b_j بهینه نباشد. هدف بهینه کردن جایگشت با تغییر زمان پردازش در بازه معین است درحالی‌که زمان‌های تغییر یافته تا حد ممکن به مقدار اولیه نزدیک باشد، این موارد را به شکل مدل (۱۲.۳) در [۱۱] ببینید.

$$\begin{aligned} min \quad & \|(\hat{a}, \hat{b}) - (a, b)\| \\ s.t. \quad & C_{max}(\pi, \hat{a}, \hat{b}) \le C_{max}(\sigma, \hat{a}, \hat{b}) \quad \forall \sigma \\ & \underline{a}_j \le \hat{a}_j \le \bar{a}_j, \qquad j \in N, \\ & \underline{b}_j \le \hat{b}_j \le \bar{b}_j, \qquad j \in N. \end{aligned} \tag{۱۲.۳}$$

به ازای نرم منهتن و با هزینه‌های نامنفی $\beta_j^+, \alpha_j^-, \alpha_j^+$ و β_j^- داریم:

$$\begin{aligned}\|(\hat{a},\hat{b})-(a,b)\|_{1,\alpha,\beta} &= \sum_{j=1}^{n}[\alpha_j|\hat{a}_j-a_j|+\beta_j|\hat{b}_j-b_j|]\\ &= \sum_{j=1}^{n}[\alpha_j^+ max\{\hat{a}_j-a_j,0\}+\alpha_j^- max\{a_j-\hat{a}_j,0\}]\\ &+\sum_{j=1}^{n}[\beta_j^+ max\{\hat{b}_j-b_j,0\}+\beta_j^- max\{b_j-\hat{b}_j,0\}].\end{aligned}$$

۲.۴.۳ مسائل زمان‌بندی معکوس کارگاهی خاص غیرجایگشتی دوماشینه

جایگشت کار ترجیحی روی ماشین A را با π_A و روی ماشین B را با π_B نمایش می‌دهیم. برای بهینگی، زمان پردازش باید اینگونه باشد که

$$C_{max}(\pi_A,\pi_B,a,b)\le C_{max}(\sigma_A,\sigma_B,a,b) \qquad \forall \sigma_A \text{و} \sigma_B$$

اگر کارها در هر دو ماشین پردازش یکسان داشته باشد، آنگاه زمان‌بندی را جایگشتی می‌نامند. مسئله معکوس دوماشینه کارگاهی خاص غیرجایگشتی را نیز اینگونه نمایش می‌دهیم:

$$F2|a_j,b_j \text{تنظیم‌پذیر},\ \pi_A,\pi_B|C_{max}$$

پس مسئله معکوس برای این دسته از مسائل نیز همانند مسائل جایگشتی با هدف کمینه کردن هزینه تنظیماتی که بر زمان پردازش‌ها انجام می‌شود است. یعنی:

$$\begin{aligned} min\quad & \|(\hat{a},\hat{b})-(a,b)\|\\ s.t.\quad & C_{max}(\pi_A,\pi_B,\hat{a},\hat{b})\le C_{max}(\sigma_A,\sigma_B,\hat{a},\hat{b}) \qquad \forall \sigma_A \text{و} \sigma_B\\ & \underline{a}_j\le \hat{a}_j\le \bar{a}_j, \qquad j\in N,\\ & \underline{b}_j\le \hat{b}_j\le \bar{b}_j, \qquad j\in N.\end{aligned} \tag{۱۳.۳}$$

۵.۳ پیچیدگی زمانی مسئله معکوس کارگاهی خاص جایگشتی دوماشینه

دیدیم که شرایط کافی و لازم بهینگی برای هر دو زمان‌بندی جایگشتی و غیرجایگشتی یکسان است، پس تنها زمانبندی جایگشتی را با دنباله کار $\pi=(1,2,\dots,n)$، یکسان برای هر دو ماشین در نظر می‌گیریم.

برای اثبات $NP-$سخت بودن مسئله معکوس، با توجه به [۱۱] مثالی از مسئله کوله‌پشتی را در نظر می‌گیریم و نشان می‌دهیم این دو مسئله مشابه یکدیگرند.

مسئله کوله‌پشتی زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} max\quad & \sum_{i=1}^{q}\gamma_i z_i\\ s.t.\quad & \sum_{i=1}^{q} w_i z_i\le C,\\ & z_i\in\{0,1\}, \qquad 1\le i\le q.\end{aligned} \tag{۱۴.۳}$$

با فرض γ_i و w_i برای تمام $1 \le i \le q$ و

$$\sum_{i=1}^{q} w_i > C.$$

$q+3$ کار $h, v_1, ..., v_q, k, l$ را در نظر بگیرید، کارهای h، k و l کارهای خاصی هستند که نمی‌توانند تغییر کنند و تنظیم شوند.

$$\underline{a}_h = a_h = \overline{a}_h, \qquad \underline{b}_h = b_h = \overline{b}_h,$$

$$\underline{a}_k = a_k = \overline{a}_k, \qquad \underline{b}_k = b_k = \overline{b}_k,$$

$$\underline{a}_l = a_l = \overline{a}_l, \qquad \underline{b}_l = b_l = \overline{b}_l.$$

کار $k \in N_0$ طولانی است، با

$$a_k = b_k = E,$$

E مجموع وزن بار کوله‌پشتی بعلاوه q است.

$$E = \sum_{i=1}^{q} w_i + q, \tag{۱۶.۳}$$

کار $h, l \in N_1$ با هم برابرند، با

$$a_h = a_l = 1 + \epsilon,$$

و

$$b_h = b_l = C + q < E,$$

که C ظرفیت کوله‌پشتی است. زمان پردازش باقی کارها $v_1, \ldots, v_q$ نیز بدین ترتیب است.

$$\begin{aligned} a_{v_i} &= \epsilon, & i = 1, \ldots, q, \\ b_{v_i} &= w_{v_i} + 1, & i = 1, \ldots, q, \end{aligned} \tag{۱۷.۳}$$

و ϵ عدد بسیار کوچک است که

$$\epsilon < min\{1, \frac{C}{q}\}.$$

محدوده تنظیمات برای کارهای $v_1, \ldots, v_q$ طبق رابطه زیر است.

$$\underline{a}_{v_i} = a_{v_i}, \quad \overline{a}_{v_i} = a_h, \quad i = 1, \ldots, q,$$

$$\underline{b}_{v_i} = a_{v_i}, \quad \overline{b}_{v_i} = b_{v_i}, \quad i = 1, \ldots, q,$$

a_{v_i} نمی‌تواند کاهش یابد اما می‌تواند تاa_h افزایش یابد. b_{v_i} نمی‌تواند افزایش یابد اما می‌تواند تا a_{v_i} کاهش یابد.

فرض می‌کنیم هزینه تنظیمات در رابطه زیر صادق است.

$$\alpha^+_{v_i} > \beta^-_{v_i}, \qquad i = ۱, \dots, q.$$

اثبات با استفاده از برخی گزاره‌ها در ادامه انجام می‌شود.

گزاره ۱.۵.۳. *[۱۱] در زمان‌بندی با زمان پردازش تنظیم‌ناپذیر، کار h تنها کار بحرانی است.*

برهان. قرار می‌دهیم:

$$B_{v_۱, v_{i-۱}} = ۰ \qquad i = ۱.$$

مشاهده می‌کنیم که $a_{v_۱} < b_h$ و برای هر زوج مرتب کارهای v_i و v_j داریم:

$$a_{v_i} < b_{v_j}.$$

و در نتیجه داریم:

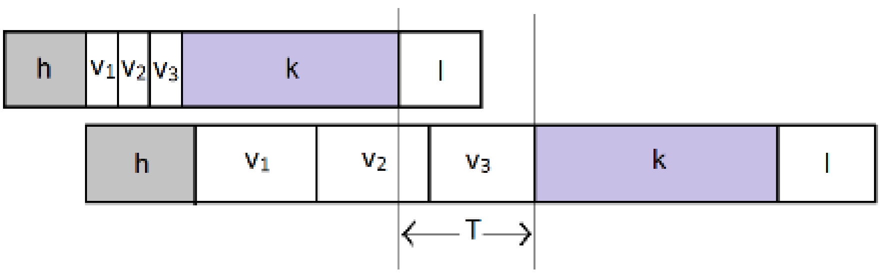
$$A_{v_۱, v_i} < b_h + B_{v_۱, v_{i-۱}}, \qquad ۱ \leq i \leq q,$$

بنابراین هیچ‌کدام از کارهای v_i نمی‌توانند بحرانی باشند زیرا با رابطه (۴.۲) در تناقض است. دو کار نهایی k و l نیز نمی‌توانند بحرانی باشند زیرا برای کار k شکافی به اندازه T بین زمان کامل شدن پردازش در ماشین A و زمان شروع پردازش در ماشین B وجود دارد، شکل ۵.۲ را ببینید.

$$\begin{aligned} T &= b_h + B_{v_۱, v_q} - A_{v_۱, v_q} - a_k &&= (C+q) + \sum_{i=۱}^{q} (w_{v_i} + ۱) - \epsilon q - E \\ &= (C+q) + E - \epsilon q - E &&= C + (۱-\epsilon) q > ۰; \end{aligned}$$

برای کار l این شکاف بزرگتر هم می‌باشد.

$$T + b_k - a_l > T.$$



شکل ۱.۳: زمان‌بندی با کارهای h و k و l و $v_۱, \dots, v_n$

□

گزاره ۲.۵.۳. *[۱۱] زمان‌بندی با زمان پردازش تنظیم‌ناپذیر بهینه نیست.*

برهان. برای هر کار $v_i \in N_1$ که بعد از $h \in N_1$ می‌آید، هیچ کدام از شرایط (۸.۲) یا (۹.۲) برقرار نیست. پس شرایط لازم و کافی بهینگی که در قضیه (۳.۷.۲) آمده است برقرار نیست. □

گزاره ۳.۵.۳. [۱۱] *هیچ تنظیماتی، کار بحرانی جدید را نتیجه نمی‌دهد.*

برهان. هیچ کار v_z نمی‌تواند بحرانی شود درحالیکه

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{z} \hat{a}_{v_i} &\leq \sum_{i=1}^{z} \overline{a}_{v_i} = (1+\epsilon)z \\
&< C + (1+\epsilon)z - \epsilon \\
&\leq (C+z) + (z-1)\epsilon \\
&\leq (C+q) + (z-1)\epsilon \\
&\leq b_h + \sum_{i=1}^{z-1} \underline{b}_{v_i} \\
&\leq \hat{b}_h + \sum_{i=1}^{z-1} \hat{b}_{v_i}.
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{z} \hat{a}_{v_i} < \hat{b}_h + \sum_{i=1}^{z-1} \hat{b}_{v_i}.$$

که این نشان‌دهنده شکاف بین زمان کامل شدن پردازش در ماشین A و زمان شروع پردازش در ماشین B است که با بحرانی بودن کار در تناقض است. □

گزاره ۴.۵.۳. [۱۱] *هیچ تنظیماتی به روی کارهای $\{v_1, \ldots, v_q\}$ نمی‌تواند کار l را بحرانی کند.*

برهان. اثبات با استفاده از این واقعیت انجام می‌شود که کارهای k و l تنظیم‌ناپذیرند. کار l بلافاصله بعد از k می‌آید و $a_l < b_k$، با توجه به این رابطه می‌بینیم که فاصله‌ای بین زمان کامل شدن پردازش کار l در ماشین A و زمان شروع پردازش l در ماشین B وجود دارد که با بحرانی بودن آن در تناقض است. □

گزاره ۵.۵.۳. [۱۱] *هر تنظیمی که موجب بحرانی شدن k شود در حالیکه h دیگر بحرانی نماند، زمان‌بندی را غیربهینه می‌کند.*

برهان. فرض کنیم کار k بحرانی باشد و به طور مثال کارهای v در ماشین A افزایش یابند و در ماشین B کاهش یابند، داریم:

$$\sum_{i=1}^{q} \overline{a}_{v_i} + a_k = (1+\epsilon)q + E > (1+\epsilon)q + (C+q),$$

$$b_h + \sum_{i=1}^{q} \underline{b}_{v_i} = (C+q) + \epsilon q,$$

بنابراین داریم:

$$\sum_{i=1}^{q} \overline{a}_{v_i} + a_k > b_h + \sum_{i=1}^{q} \underline{b}_{v_i}.$$

با توجه به این تنظیمات و رابطه‌ای که بدست آمد می‌بینیم زمان تلف شده قبل از شروع کار k در ماشین B وجود دارد و کار h، دیگر بحرانی نیست
اما بعد از این تنظیمات، زمان‌بندی دیگر بهینه نیست. حال نشان می‌دهیم کار k بدون فشرده شدن عملگرها در ماشین B نمی‌تواند بحرانی باشد، داریم:

$$\sum_{i=1}^{q} \hat{a}_{v_i} + a_k \leq \sum_{i=1}^{q} \overline{a}_{v_i} + a_k = (1+\epsilon)q + E,$$

$$b_h + \sum_{i=1}^{q} \overline{b}_{v_i} = (C+q) + \sum_{i=1}^{q}(w_{v_i}+1) = C + q + E = (C-) = (1+\epsilon)q + E,$$

بنابراین:

$$\sum_{i=1}^{q} \overline{a}_{v_i} + a_k < b_h + \sum_{i=1}^{q} \overline{b}_{v_i}.$$

بنابراین حداقل یک عملگر $\hat{b}_{v_i} < b_{v_i}$ کاهش می‌یابد.

□

با استفاده از این حقیقت که تنها کارهای $\{v_1, \ldots, v_q\}$ می‌توانند تنظیم شوند، گزاره‌های ۲.۵.۳ و ۴.۵.۳ نشان می‌دهند که تمام تنظیمات ممکن h را بحرانی نگه می‌دارد.
در ادامه ما کلاسی از زمان‌بندی با کار بحرانی را در نظر می‌گیریم. برای هر کار v_i یکی از دو رابطه زیر را داریم:

$\hat{a}_{v_i} = a_{v_i} + x_{v_i} \leq a_h \quad \alpha^+_{v_i} x_{v_i}$ با هزینه
$\hat{b}_{v_i} = b_{v_i} - y_{v_i} \geq a_{v_i} \quad \beta^-_{v_i} y_{v_i}$ با هزینه

علاوه بر این برای زمان‌های پردازش شده بایستی شرایط لازم و کافی (۸.۲) و (۹.۲) برقرار باشند:

$\hat{a}_{v_i} = a_{v_i} + x_{v_i} = a_h \quad \alpha^+_{v_i}(a_{v_i} - a_h)$ با هزینه,

یا

$\hat{b}_{v_i} = b_{v_i} - y_{v_i} = a_{v_i} \quad \beta^-_{v_i}(b_{v_i} - a_{v_i})$ با هزینه.

مشاهده می‌شود که تنظیمات همزمان برای هر دو عملکرد کار v_i به شکل زیر است:

$$\hat{a}_{v_i} = a_{v_i} + x_{v_i}, \qquad x_{v_i} > 0,$$
$$\hat{b}_{v_i} = b_{v_i} - y_{v_i}, \qquad y_{v_i} > 0,$$

که نمی‌تواند بهینه باشد. کم کردن $\hat{b}_{v_i}$ به اندازه δ و کاهش دادن $\hat{a}_{v_i}$ تا همان مقدار، شرایط بهینگی را حفظ می‌کند و زمان پردازش را کاهش می‌دهد همچنین هزینه تنظیم را نیز کاهش می‌دهد ($0 < \delta < min\{x_{v_i}, y_{v_i}\}$).

$$\hat{\hat{a}}_{v_i} = a_{v_i} + x_{v_i} - \delta, \qquad x_{v_i} - \delta > 0,$$
$$\hat{\hat{b}}_{v_i} = b_{v_i} - y_{v_i} + \delta, \qquad y_{v_i} - \delta > 0,$$

متغیر صفر و یک z_{v_i} را به‌صورت زیر معرفی می‌کنیم:

$$z_{v_i} = \begin{cases} 0 & \text{اگر} \quad \hat{a}_{v_i} = a_{v_i} + x_{v_i} = a_h, \qquad \hat{b}_{v_i} = b_{v_i}, \\ 1 & \text{اگر} \quad \hat{a}_{v_i} = a_{v_i}, \qquad \hat{b}_{v_i} = b_{v_i} - y_{v_i} = a_{v_i}. \end{cases}$$

زمان پردازش شده می‌تواند به شکل زیر نیز بیان شود.

$$\begin{aligned} \hat{a}_{v_i} &= a_{v_i} z_{v_i} + a_h(1 - z_{v_i}), \\ \hat{b}_{v_i} &= a_{v_i} z_{v_i} + b_{v_i}(1 - z_{v_i}), \end{aligned} \tag{۱۸.۳}$$

و مشابه آن هزینه تنظیمات هم به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\alpha^+_{v_i}(\hat{a}_{v_i} - a_{v_i}) = \alpha^+_{v_i}(a_h - a_{v_i})(1 - z_{v_i}),$$
$$\beta^-_{v_i}(b_{v_i} - \hat{b}_{v_i}) = \beta^-_{v_i}(a_{v_i} - b_{v_i} z_{v_i}).$$

از آنجائیکه کار k نمی‌تواند تنها کار بحرانی باشد، پس تنظیمات کارهای $\{v_1, \dots, v_q\}$ می‌تواند فاصله بین تکمیل کار k در ماشین A و شروع کار در ماشین B را تا صفر کاهش دهد اما قبل از دومین عملیات کار k نباید هیچ زمان تلف شده‌ای ظاهر شود.

$$b_h + \sum_{i=1}^{q} \hat{b}_{v_i} \geq \sum_{i=1}^{q} \hat{a}_{v_i} + a_k.$$

حال با استفاده از رابطه (۱۸.۳) داریم:

$$b_h + \sum_{i=1}^{q} [a_{v_i} z_{v_i} + b_{v_i}(1 - z_{v_i})] \geq \sum_{i=1}^{q} [a_{v_i} z_{v_i} + a_h(1 - z_{v_i})] + a_k \tag{۱۹.۳}$$

یا نامساوی زیر را داریم:

$$\sum_{i=1}^{q} (b_{v_i} - a_h) z_{v_i} \leq b_h + \sum_{i=1}^{q} b_{v_i} - q a_h - a_k$$

بنابراین ما می‌توانیم مسئله پیدا کردن تنظیمات بهینه را به‌صورت زیر مدل کنیم.

$$\begin{aligned} min \quad & \textstyle\sum_{i=1}^{q} [\alpha^+_{v_i}(a_h - a_{v_i})(1 - z_{v_i}) + \beta^-_{v_i}(b_{v_i} - a_{v_i}) z_{v_i}] \\ s.t. \quad & \textstyle\sum_{i=1}^{q} (b_{v_i} - a_h) z_{v_i} \leq b_h + \sum_{i=1}^{q} b_{v_i} - q a_h - a_k, \\ & z_{v_i} \in \{0, 1\}, \qquad 1 \leq i \leq q. \end{aligned}$$

با استفاده از تعریف a_{v_i} و b_{v_i} در (۱۷.۳) و رابطه (۱۶.۳) تابع هدف را مختصر می‌کنیم [۱۱].

$$\begin{array}{lll} max & \sum_{i=۱}^{q}[\alpha_{v_i}^{+} - \beta_{v_i}^{-}(w_{v_i} + ۱ - \epsilon)]z_{v_i} & \\ s.t. & \sum_{i=۱}^{q} w_{v_i} z_{v_i} \leq C, & \\ & z_{v_i} \in \{۰, ۱\}, & ۱ \leq i \leq q. \end{array} \quad (۲۰.۳)$$

اگر هزینه تنظیم را به‌صورت زیر تعریف کنیم.

$$\begin{array}{ll} \alpha_{v_i}^{+} = \gamma_{v_i} + ۱, & ۱ \leq i \leq q, \\ \beta_{v_i}^{-} = \frac{۱}{w_{v_i}+۱-\epsilon}, & ۱ \leq i \leq q, \end{array}$$

که w_{v_i} و γ_{v_i} پارامترهای مسئله کوله‌پشتی هستند. مسئله (۲۰.۳) معادل مسئله (۱۴.۳) خواهد بود پس همانند مسئله کوله‌پشتی، مسئله پیدا کردن تنظیمات بهینه نیز $NP-$سخت است.

۶.۳ چند نمونه از مسائل زمان‌بندی معکوس کارگاهی خاص دوماشینه

اثبات $NP-$سخت بودن در بخش قبل طبق شرایط کارها در مثال، کار h برای زمان‌های داده شده و همچنین زمان‌های پردازش شده بحرانی است. در این بخش ابتدا ثابت می‌کنیم (مثال نقض) که همیشه این‌طور نیست و ممکن است کار بحرانی h، بعد از تنظیمات دیگر بحرانی نباشد. بعد از آن با فرض ثابت بودن کار بحرانی $h = ۱, ۲, \ldots, n$ دو مورد خاص را بررسی می‌کنیم، که چگونه مسئله با کار بحرانی ثابت h می‌تواند حل شود. ابتدا در نظر می‌گیریم تنها در یکی از ماشین‌ها بتوان زمان پردازش را تنظیم کرد و بعد در حالیکه هر دو ماشین تنظیم‌پذیر باشند مسئله را بررسی می‌کنیم.

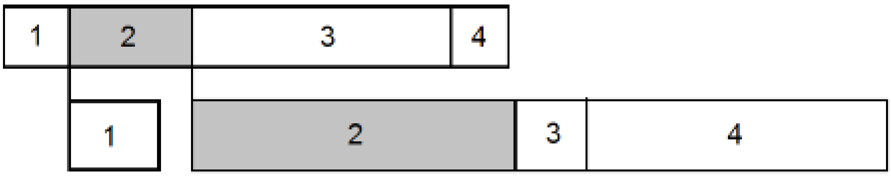
۱.۶.۳ کار بحرانی در زمان‌بندی بهینه

می‌دانیم در زمان‌بندی تک ماشینه کار بحرانی بعد از تنظیم همچنان بحرانی باقی می‌ماند [۱۲]. ولی در مسئله $F۲|INV|\{\}$ (دوماشینه) اینگونه نیست. برای مثال در نظر بگیرید جایگشت نهایی برای مسئله‌ای $\pi = (۱, ۲, ۳, ۴)$ باشد و تنها عملیات تنظیم‌پذیر $a_۲$ باشد که فقط قادر به کاهش زمان پردازش هستیم. دو زمان‌بندی یکسان با دو کار بحرانی متفاوت را در نظر بگیرید.

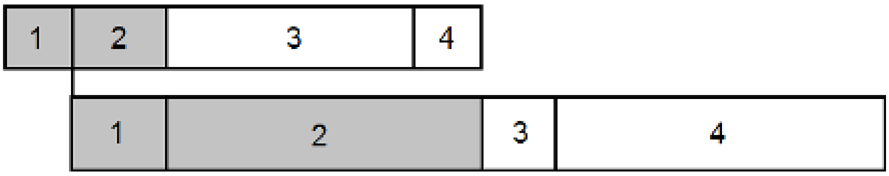
زمان‌بندی اول در شکل (۲.۳) بر این اساس است که زمان پردازش تنظیم نشده است و زمان‌بندی نیز بهینه نیست، زیرا اگر $h = ۲$ و $v = ۴$ را در نظر بگیریم داریم:

$$a_h > a_v, \qquad a_v < b_v$$

و شرایط (۸.۲) و (۹.۲) نقض می‌شود. $a_۲$ را تا مقدار $\hat{a}_۲ > b_۱$ کاهش می‌دهیم، $h = ۲$ تنها کار بحرانی است و شرایط نام برده همچنان برقرار نیستند. حال $a_۲$ را تا مقدار $b_۱$ کاهش می‌دهیم، زمان‌بندی



شکل ۲.۳: زمان‌بندی قبل از تنظیم زمان پردازش



شکل ۳.۳: زمان‌بندی بهینه

دوم در شکل ۳.۳ را ببینید، مشاهده می‌شود برای $h = ۲$ (کار ۲ و ۴ متعلق به $N_۱$ می‌باشند)، زمانی که داریم $\hat{a}_۲ > a_۴$ شرایط بهینگی (۷.۲) و (۹.۲) برقرار نیست. برای $h = ۱$ برقرار است. در نتیجه می‌بینیم که برای زمان‌بندی قبل و بعد از تنظیم، کار بحرانی ثابت نمی‌ماند.

۲.۶.۳ مسئله زمان‌بندی معکوس $\pi|C_{max}$ ،تنظیم‌پذیر $F۲|a_j$ ، با عملگر تنظیم‌پذیر در ماشین A

در نظر بگیرید فقط ماشین A می‌تواند تنظیم شود درحالی‌که زمان در ماشین B نمی‌تواند تغییر کند. در هر کلاس زمان‌بندی ممکن است داشته باشیم:

$$\hat{a}_h \leq b_h$$

یا

$$\hat{a}_h > b_h.$$

ابتدا $h \in N_۱ \cup N_۰$ را در نظر می‌گیریم که قضایای ۳.۷.۲ و ۴.۷.۲ بتواند استفاده شود. با فرض $h \in N_۱ \cup N_۰$ ، $\hat{a}_h \leq b_h$. را داریم. برای مورد دوم با $h \in N_۲$ ابتدا باید ماشین‌های A و B را جابه‌جا کرده و زمان‌های خطی با دنباله کار π را معکوس کنیم تا در نتیجه شرط $a_h < \hat{b}_h$ برقرار باشد و عملکرد ماشین B تنظیم‌پذیر باشد.
برای مقدار ثابت معلوم $\hat{a}_h$ مسئله را حل می‌کنیم، مقدار $\hat{a}_h = \lambda$ را در نظر می‌گیریم، $\lambda \leq b_h$ را داریم. ثابت می‌کنیم مسئله پیدا کردن زمان پردازش تنظیم شده بهینه، می‌تواند مشابه مسئله تخصیص ابتکاری با سه محدودیت باشد که در $o(n \log n)$ قابل حل است [۲۲].
شرایط قضایای ۳.۷.۲ و ۴.۷.۲ را در نظر می‌گیریم، ابتدا کارهای $U(\lambda) \subseteq N$ که قبل از h می‌آیند و شرط $a_u \leq b_u$ یا $a_u \leq a_h$ را نقض می‌کنند و سپس کارهای $V(\lambda) \subseteq N$ که بعد از h می‌آیند و $a_h \leq a_v < b_v$ و $a_v \geq b_v$ را نقض می‌کنند در نظر می‌گیریم.

حال در مورد تنظیم زمان کارهای $U(\lambda)$ و $V(\lambda)$ برای رسیدن به شرایط بهینگی، بحث می‌کنیم، بعد از آن بررسی می‌کنیم چگونه بقیه کارها را تنظیم کنیم تا شرایطی که بر بحرانی بودن h ضمانت می‌کنند یعنی (۴.۲) و (۵.۲) برقرار بمانند. همه این موارد را در جدول ۱.۳ جمع‌آوری کرده و برای نوشتن مدل از آن بهره می‌گیریم.

جدول ۱.۳: جدول تناقضات احتمالی در حالت تنظیم‌پذیری ماشین A

تنظیمات بهینه	تنظیمات ضروری	برای رسیدن به شرایط	نامگذاری	تناقضات ممکن	
$\hat{a_u} = b_u$	$\hat{a_u} = a_u - x_u \le b_u$	$a_u \le a_h$ و $a_u \le b_u$	$u \in U_1(\lambda)$	$\lambda > a_u > b_u$	$a_u > b_u$
$\hat{a_u} = b_u$	$\hat{a_u} = a_u - x_u \le b_u$	$a_u \le a_h$ و $a_u \le b_u$	$u \in U_2(\lambda)$	$a_u \ge \lambda > b_u$	
$\hat{a_u} = \lambda$	$\hat{a_u} = a_u - x_u \le \lambda$	$a_u \le a_h$ و $a_u \le b_u$	$u \in U_3(\lambda)$	$a_u > b_u \ge \lambda$	
$\hat{a_u} = \lambda$	$\hat{a_u} = a_u - x_u \le \lambda$	$a_u \le a_h$ و $a_u \le b_u$	$u \in U_4(\lambda)$	$a_u > \lambda$	$a_u \le b_u$
$\hat{a}_v = b_v$	$\hat{a}_v = a_v + x_v \ge b_v$	$a_v \ge b_v$ یا $a_h \le a_v < b_v$	$v \in V_1(\lambda)$	$a_v < b_v < \lambda$	$a_v < b_v$
$\hat{a}_v = \lambda$	$\hat{a}_v = a_v + x_v \ge \lambda$	$a_v \ge b_v$ یا $a_h \le a_v < b_v$	$v \in V_2(\lambda)$	$a_v < \lambda \le b_v$	

در جدول ۱.۳ در ستون ''نامگذاری'' انواع مختلف از تناقضات بین کارهای $U(\lambda)$ و $V(\lambda)$ را به این صورت که در زیر آمده است دسته‌بندی می‌کنیم.

$$U(\lambda) = U_1(\lambda) + U_2(\lambda) + U_3(\lambda) + U_4(\lambda),$$

$$V(\lambda) = V_1(\lambda) + V_2(\lambda).$$

در ستون ''تنظیم ضروری'' شرایط قضایای ۳.۷.۲ و ۴.۷.۲ ذکر می‌شود که سعی در برقراری آنها داریم. ''تنظیم بهینه'' کمترین تنظیم ممکنی که منجر به شرایط برابری می‌شود را، در خود دارد.
به طور مثال اگر کار $u \in U_3(\lambda)$ در رابطه $a_u > b_u > \lambda$ برقرار باشد و عملگر $\hat{a}_u$ آنقدر کاهش یابد که $\hat{a}_u < \lambda$، می‌بینیم جواب نهایی بهینه نیست، به تأخیر انداختن کار u، یعنی طولانی کردن $\hat{a}_u$ تا مقدار λ تناقضی با شرایط بحرانی بودن h و بهینگی دنباله ندارد، بلکه منجر به کاهش هزینه‌های تنظیم می‌شود.
اگر تنظیمات مورد نیاز نتواند بدون تناقض با بازه‌های $[\underline{a}_h, \overline{a}_h]$ و $[\underline{b}_h, \overline{b}_h]$ انجام شود، آنگاه هیچ زمان‌بندی بهینه‌ای برای کار بحرانی ثابت h وجود ندارد.
تنظیمات باقی کارها که در بازه‌های $U_1(\lambda) \cup U_2(\lambda) \cup U_3(\lambda) \cup U_4(\lambda)$ و $V_1(\lambda) \cup V_2(\lambda)$ نیستند را با

$$U'(\lambda) = U \backslash (U_1(\lambda) + U_2(\lambda) + U_3(\lambda) + U_4(\lambda)),$$

$$V'(\lambda) = V \backslash (V_1(\lambda) + V_2(\lambda)).$$

نشان می‌دهیم، می‌دانیم تأثیر منفی بر شرایط بهینگی ندارند اما در رسیدن به شرایط زیر مؤثرند.

$$A_{u,h} \ge B_{u-1,h-1}, \qquad 2 \le u \le h,$$
$$A_{h+1,v} \le B_{h,v-1}, \qquad h+1 \le v \le n.$$

که این شرایط ضمانت بر بحرانی بودن h دارند.
هزینه کل تنظیماتی که بررسی شد، باید تا حد امکان کوچک باشد.

مسائلی که در مورد آنها بحث شد را به صورت مدل زیر داریم [۱۱].

$$
\begin{array}{llllllllll}
\multicolumn{10}{l}{min \sum_{j\in N} \alpha_j^+ max\{\hat{a}_j - a_j, \circ\} + \alpha_j^- max\{a_j - \hat{a}_j, \circ\}} \\
s.t & & & & & & & & & \\
\hat{a}_۲+ & \hat{a}_۳+ & ...+ & \hat{a}_{h-۱}+ & \lambda & & & & \geq & B_{۱,h-۱} \\
 & \hat{a}_۳+ & ...+ & \hat{a}_{h-۱}+ & \lambda & & & & \geq & B_{۲,h-۱} \\
 & & \ddots & & & & & & \vdots & \\
 & & & \hat{a}_{h-۱}+ & \lambda & & & & \geq & B_{h-۲,h-۱} \\
 & & & & \lambda & & & & \geq & B_{h-۱,h-۱} \\
 & & & & & \hat{a}_{h+۱} & & & \leq & B_{h,h} \\
 & & & & & \hat{a}_{h+۱} & +\hat{a}_{h+۲} & & \leq & B_{h,h+۱} \\
 & & & & & & \ddots & & \vdots & \\
 & & & & & \hat{a}_{h+۱} & +\hat{a}_{h+۲} & +... \quad +\hat{a}_n & \leq & B_{h,n-۱}
\end{array}
\tag{۲۱.۳}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\hat{a}_u = b_u, & u \in U_۱(\lambda) \cup U_۲(\lambda) \\
\hat{a}_u = \lambda, & u \in U_۳(\lambda) \cup U_۴(\lambda)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\hat{a}_v = b_v, & v \in V_۱(\lambda) \\
\hat{a}_v = \lambda, & v \in V_۲(\lambda)
\end{array}
$$

$$
\underline{a}_j \leq \hat{a}_j \leq \overline{a}_j, \qquad j \in N \backslash \{h\}.
$$

در مجموعه‌های $U'(\lambda)$ و $V'(\lambda)$ هر کار $u \in U'(\lambda)$ تنها تا یک واحد می‌تواند با هزینه α_u^+ به تأُخیر بیفتد. در حالیکه هر کار $v \in V'(\lambda)$ تنها یک واحد با هزینه α_v^- کاهش می‌یابد.
تعریف می‌کنیم:

$$
\begin{array}{ll}
z_u = \overline{a}_u - \hat{a}_u, & u \in U'(\lambda), \\
z_v = \hat{a}_v, -\underline{a}_v, & v \in V'(\lambda).
\end{array}
$$

پس مسئله (۲۱.۳) را می‌توان به شکل مسئله (۲۲.۳) نوشت.

$$
\begin{array}{l}
min \sum_{u\in U'} \alpha_u^+(\bar{a}_u - a_u - z_u) + \sum_{v\in V'} \alpha_v^-(a_v - \underline{a}_v - z_v)\\
s.t
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llllllll}
z_2+ & z_3+ & ...+ & z_{h-1} & & & & \leq R_{1,h-1}\\
 & z_3+ & ...+ & z_{h-1} & & & & \leq R_{2,h-1}\\
 & & \ddots & & & & & \vdots\\
 & & & z_{h-1} & & & & \leq R_{h-2,h-1}\\
 & & & & z_{h+1} & & & \leq R_{h,h}\\
 & & & & z_{h+1} & +z_{h+2} & & \leq R_{h,h+1}\\
 & & & & & \ddots & & \vdots\\
 & & & & z_{h+1} & +z_{h+2} & +... \quad +z_n & \leq R_{h,n-1}
\end{array}
\tag{۲۲.۳}
$$

$$
\begin{array}{ll}
0 \leq z_u \leq \bar{a}_u - a_u, & u \in U'\\
0 \leq z_v \leq a_v - \underline{a}_v, & v \in V'\\
\\
z_u = 0, & u \in U_1(\lambda) \cup \cdots \cup U_4(\lambda),\\
z_v = 0, & v \in V_1(\lambda) \cup V_2(\lambda).
\end{array}
$$

مشاهده می‌کنیم مسئله (۲۲.۳) مشابه مسئله تخصیص ابتکاری با سه محدودیت است [۲۲].

۳.۶.۳ مسئله زمان‌بندی معکوس $F2|b_j$ تنظیم‌پذیر$, \pi|C_{max}$ ، با عملگر تنظیم‌پذیر در ماشین B

این‌بار فرض کنید تنها ماشین B اجازه تنظیم دارد. همانند بخش قبل که ماشین A تنظیم‌پذیر بود از میان n کلاس زمان‌بندی با کار بحرانی ثابت h، نمونه‌ای را با $h \in N_1 \cup N_0$ که بوسیله $a_h \leq \hat{b}_h$ تعریف می‌شود، انتخاب می‌کنیم. $\hat{b}_h$ را با μ نمایش می‌دهیم. کارهای متناقض $U(\mu)$ که قبل از h می‌آیند و با شرط (۷.۲) در تناقض است و کارهای $V(\mu)$ که بعد از h آمده و با شروط (۸.۲) و (۹.۲) در تناقض‌اند را در جدول ۲.۳ تعیین می‌کنیم.

جدول ۲.۳: جدول تناقضات احتمالی در حالت تنظیم‌پذیری ماشین B

تنظیم بهینه	تنظیمات ضروری	برای رسیدن به شرایط	نامگذاری	تناقضات ممکن
$\hat{b}_u = a_u$	$\hat{b}_u = b_u + y_u \geq a_u$	$a_u \leq a_h$ و $a_u \leq b_u$	$u \in U_1(\mu)$	$a_u > \mu$
$\hat{b}_v = a_v$	$\hat{b}_v = b_v - y_v \leq a_v$	$a_v \geq b_v$ یا $a_h \leq a_v < b_v$	$v \in V_1(\mu)$	$a_h < a_v$ و $a_v < b_v$

تنظیمات باقی کارها که به $U(\mu)$ و $V(\mu)$ متعلق نیستند، تأثیر منفی بر شرایط (۷.۲) و (۹.۲) ندارند ولی در رسیدن به شرایطی که تضمین بحرانی بودن h هستند ما را کمک می‌کنند. اگر فرض کنیم مقدار μ ثابت باشد، پس مسئله به فرم زیر است [۱۱]:

$$
\begin{array}{l}
min \sum_{j\in N\backslash\{h\}} \beta_j^+ max\{\hat{b_j}-b_j,0\}+\beta_j^- max\{b_j-\hat{b_j},0\} \\
s.t \\
\begin{array}{ccccccccc}
\hat{b}_1+ & \hat{b}_2+ & ...+ & \hat{b}_{h-1} & & & & \leq & A_{2,h} \\
 & \hat{b}_2+ & ...+ & \hat{b}_{h-1} & & & & \leq & A_{3,h} \\
 & & \ddots & & & & & \vdots & \\
 & & & \hat{b}_{h-1} & & & & \leq & A_{h,h} \\
 & & & & \mu & & & \geq & A_{h+1,h+1} \\
 & & & & \mu+ & \hat{b}_{h+1} & & \geq & A_{h+1,h+2} \\
 & & & & & & \ddots & \vdots & \\
 & & & & \mu+ & \hat{b}_{h+1} & +... \quad +\hat{b}_{n-1} & \geq & A_{h,n-1}
\end{array} \\
\hat{b}_u=a_u, \quad u\in U_1(\lambda) \\
\hat{b}_v=a_v, \quad v\in V_1(\lambda) \\
\underline{b}_j\leq \hat{b}_j\leq \bar{b}_j, \quad j\in N\backslash\{h\}.
\end{array}
\tag{۲۳.۳}
$$

مسئله بالا مشابه مسئله (۲۱.۳) است پس مشابه مسئله (۲۲.۳) نیز می‌باشد.

۴.۶.۳ مسئله زمان‌بندی معکوس $\pi|C_{max}$, تنظیم‌پذیر$F2|a_j$ ، با عملگرهایی با قابلیت کاهش یافتن

در این بخش فرض می‌کنیم تنظیمات در دو ماشین مجاز است اما زمان پردازش تنها می‌تواند کاهش یابد. پس به طور طبیعی می‌توان فرض کرد کارهای کندتر از حالت نرمال ممکن است هزینه تولید را افزایش دهند. در این صورت کارهای پردازش شده سریع‌تر می‌توانند در رسیدن به بهینگی ما را یاری کنند.

کلاسی از زمان‌بندی با کار بحرانی ثابت h را در نظر بگیرید که $h\in N_1\cup N_0$، برای مثال فرض کنید $\hat{a}_h\leq\hat{b}_h$ را داریم. مشابه بخش قبل مقدار تنظیم شده ثابت $\hat{a}_h=\lambda$ را در نظر می‌گیریم، تناقضات ممکن و برطرف کردن آن‌ها را مشابه قبل در جدول ۳.۳ تعیین می‌کنیم.

جدول ۳.۳: جدول تناقضات احتمالی در حالت تنظیم‌پذیری هر دو ماشین

تنظیمات بهینه	تنظیمات ضروری	برای رسیدن به شرایط	نامگذاری	تناقضات ممکن	
$\hat{a_u}=\hat{b}_u$	$\hat{a_u}=a_u-x_u\le\hat{b}_u$	$a_u\le a_h$ و $a_u\le b_u$	$u\in U_1(\lambda)$	$\lambda>a_u>b_u$	$a_u>b_u$
$\hat{a_u}=\hat{b}_u$	$\hat{a_u}=a_u-x_u\le\hat{b}_u$	$a_u\le a_h$ و $a_u\le b_u$	$u\in U_2(\lambda)$	$a_u\ge\lambda>b_u$	
$\hat{a_u}=\lambda$	$\hat{a_u}=a_u-x_u\le\lambda$	$a_u\le a_h$ و $a_u\le b_u$	$u\in U_3(\lambda)$	$a_u>b_u\ge\lambda$	
$\hat{a_u}=\lambda$	$\hat{a_u}=a_u-x_u\le\lambda$	$a_u\le a_h$ و $a_u\le b_u$	$u\in U_4(\lambda)$	$a_u>\lambda$	$a_u\le b_u$
$\hat{b}_v=\hat{a}_v$	$\hat{b}_v=b_v-y_v\le\hat{a}_v$	$a_v\ge b_v$ یا $a_h\le a_v<b_v$	$v\in V_1(\lambda)$	$a_v<b_v<\lambda$	$a_v<b_v$
$\hat{b}_v=\hat{a}_v$	$\hat{b}_v=b_v-y_v\le\hat{a}_v$	$a_v\ge b_v$ یا $a_h\le a_v<b_v$	$v\in V_2(\lambda)$	$a_v<\lambda\le b_v$	

می‌بینیم b_h در جدول ظاهر نشده و لازم نیست تا تنظیم شود. $\hat{b}_h=b_h$ را در نظر می‌گیریم، در حقیقت از آن‌جاکه زمان پردازش تنها کاهش می‌یابد مقدار کمتر از b_h می‌تواند منجر به تناقض با $\hat{a}_h\le\hat{b}_h$ شود. بنابراین مدل زیر را داریم [11]:

$$
\begin{array}{l}
\min \sum_{j\in N}\alpha_j^-(a_j-\hat{a}_j)+\sum_{j\in N\setminus\{h\}}\beta_j^-(b_j-\hat{b}_j)\\
s.t
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llllllllllll}
\hat{a}_2+ & \hat{a}_3+ & ...+ & \lambda & & & & \ge & \hat{b}_1+ & \hat{b}_2+ & \cdots+ & \hat{b}_{h-1}\\
 & \hat{a}_3+ & ...+ & \lambda & & & & \ge & & \hat{b}_2+ & \cdots+ & \hat{b}_{h-1}\\
 & & \ddots & & & & & & & & \ddots & \\
 & & \hat{a}_{h-1}+ & \lambda & & & & \ge & & & \hat{b}_{h-2}+ & \hat{b}_{h-1}\\
 & & & \lambda & & & & \ge & & & & \hat{b}_{h-1}\\
 & & & & \hat{a}_{h+1} & & & \le & \hat{b}_h & & & \\
 & & & & \hat{a}_{h+1} & +\hat{a}_{h+2} & & \le & \hat{b}_h+ & \hat{b}_{h+1} & & \\
 & & & & & \ddots & & & & \ddots & & \\
 & & & & \hat{a}_{h+1} & +\hat{a}_{h+2} & +...\;+\hat{a}_n & \le & \hat{b}_h+ & \hat{b}_{h+1}+ & \cdots+ & \hat{b}_{n-1}
\end{array}
\quad (۲۴.۳)
$$

$$
\begin{array}{lll}
\hat{a}_u=\hat{b}_u, & u\in U_1(\lambda)\cup U_2(\lambda) & \\
\hat{a}_u=\lambda, & u\in U_3(\lambda)\cup U_4(\lambda) & \\
 & & \hat{b}_v=\hat{a}_v,\qquad v\in V_1(\lambda)\cup V_2(\lambda)\\
\underline{a}_j\le\hat{a}_j\le a_j, & \underline{b}_j\le\hat{b}_j\le b_j, & j\in N\setminus\{h\},\\
\underline{a}_h\le\lambda\le min\{a_h,b_h\}, & & \\
\hat{b}_h=b_h. & &
\end{array}
$$

هم‌چنین می‌توان مسئله را به فرم زیر بازنویسی کرد:

$$
\begin{array}{l}
min \sum_{j\in N}\alpha_j^-(a_j-\hat{a}_j)+\sum_{j\in N\backslash\{h\}}\beta_j^-(b_j-\hat{b}_j)\\
s.t\\
\begin{array}{cccccccccccc}
-\hat{b}_1 & +\hat{a}_2 & -\ldots & +\hat{a}_{h-1} & -\hat{b}_{h-1} & & & & & & \geq & -\lambda\\
 & & \ddots & & & & & & & & \vdots & \\
 & & -\hat{b}_{h-2} & +\hat{a}_{h-1} & -\hat{b}_{h-1} & & & & & & \geq & -\lambda\\
 & & & & -\hat{b}_{h-1} & & & & & & \geq & -\lambda\\
 & & & & & -\hat{b}_h & +\hat{a}_{h+1} & & & & \leq & 0\\
 & & & & & & & \ddots & & & \vdots & \\
 & & & & & -\hat{b}_h & +\hat{a}_{h+1} & -\hat{b}_{h+1} & +\ldots & +\hat{a}_n & \leq & 0
\end{array}
\end{array}
\tag{۲۵.۳}
$$

$$
\begin{array}{lll}
\hat{a}_u-\hat{b}_u=0, & u\in U_1(\lambda)\cup U_2(\lambda) & \\
\hat{a}_u=\lambda, & u\in U_3(\lambda)\cup U_4(\lambda) & \\
 & & \hat{a}_v-\hat{b}_v=0,\quad v\in V_1(\lambda)\cup V_2(\lambda)\\
\underline{a}_j\leq\hat{a}_j\leq a_j, & \underline{b}_j\leq\hat{b}_j\leq b_j, & j\in N\backslash\{h\},\\
\underline{a}_h\leq\lambda\leq min\{a_h,b_h\}, & & \\
\hat{b}_h=b_h. & &
\end{array}
$$

با فرض λ به عنوان ثابت، مسئله به نمونه‌ای خاص از مسئله زیر تبدیل می‌شود.

$$
\begin{array}{ll}
min & \sum_{v=1}^{m} c_v x_v\\
s.t. & l_{ij}\leq\sum_{v=i}^{j} d_v x_v\leq u_{ij},\quad 1\leq i\leq j\leq n,
\end{array}
\tag{۲۶.۳}
$$

وقتی x_1، ...، x_m مشابه $\hat{b}_1$، $\hat{a}_2$، $\hat{b}_2$، ...، $\hat{a}_{h-1}$، $\hat{b}_{h-1}$، $\hat{b}_h$، $\hat{a}_{h+1}$، $\hat{b}_{h+1}$، ...، $\hat{a}_{n-1}$، $\hat{b}_{n-1}$، $\hat{a}_n$ و ضرایب $\hat{a}_v$ و $\hat{b}_v$ به‌تریتب $+1$ و -1 باشد.

l_{ij} را برابر با $-\infty$ و u_{ij} را $+\infty$ در نظر می‌گیریم، متغیرهای جدید را معرفی می‌کنیم.

$$
\begin{array}{l}
z_0=0,\\
z_k=\sum_{v=1}^{k} d_v x_v,\quad k=1,\ldots,m,
\end{array}
$$

متغیر x_k می‌تواند به شکل $\frac{1}{d_k}(z_k-z_{k-1})$ برای $k=1,\ldots,m$ بیان شود. پس مسئله (۲۶.۳) را می‌توان به شکل زیر بیان کرد:

$$
\begin{array}{ll}
min & \sum_{v=1}^{m}\frac{c_v}{d_k}(z_v-z_{v-1})\\
s.t. & l_{ij}\leq z_j-z_{i-1}\leq u_{ij},\quad 1\leq i\leq j\leq n.
\end{array}
\tag{۲۷.۳}
$$

مسئله (۲۷.۳) مسئله دوگان مسئله حداکثر هزینه جریان است، [۴۳] یا صفحه ۱۷۹ از [۱۰] را ببینید.
از آنجائیکه که الگوریتم‌های زیادی برای مسئله کمترین هزینه و معادل آن بیشترین هزینه وجود دارد بنابراین نمی‌توانیم پیچیدگی زمانی مشخصی برای حل آن ارائه کنیم.
برای حل دوگان مسئله (۲۷.۳) با وجود پارامتر λ در تابع هدف، می‌توان از روش بهینه‌سازی پارامتری که در [۲] بحث شده است، استفاده کرد.

۷.۳ حل مثال برای مسئله زمان‌بندی معکوس کارگاهی خاص دوماشینه

مثال ۱.۷.۳. فرض کنید دو ماشین می‌بایست بر روی ۵ کار پردازش کنند، دنباله‌ای اولیه به‌صورت $(۵, ۲, ۳, ۴, ۱)$ برای انجام کارها به ما داده شده است که بهینه نیست. برای بهینه کردن این دنباله و کمینه کردن زمان کل پردازش کارها تنها مجاز به کاهش در هر دو ماشین می‌باشیم. اطلاعات در جدول ۴.۳ داده شده است.

جدول ۴.۳: زمان پردازش کارها در دو ماشین

کار	زمان پردازش در ماشین A	زمان پردازش در ماشین B
۱	۳	۵
۲	۷	۲
۳	۳	۲
۴	۵	۴
۵	۲	۲

در دنباله داده شده $h = ۴$. با داشتن $u = \{۵, ۲, ۳\}$ و $v = \{۱\}$، $C_{max} = ۲۶$ را خواهیم داشت.
شکل ۴.۳ را ببینید.

شکل ۴.۳: دنباله اولیه

برای کاهش زمان پردازش هر کار حدود مشخصی را داریم که در جدول ۵.۳ اطلاعات لازم داده شده است. هزینه این کاهش برای هر واحد کار ۱+ است.

جدول ۵.۳: زمان مجاز برای کاهش در هر دو ماشین

کار	میزان مجاز کاهش کار در ماشین A	میزان مجاز کاهش کار در ماشین B
۱	۱	۲
۲	۵	۱
۳	۲	۱
۴	۲	۰
۵	۱	۱

مسئله (۲۴.۳) را در بخش قبل را در نظر بگیرید، در این مثال $\alpha_j^- = ۱$ و $\beta_j^- = ۱$. فرض کنید a_h را به اندازه ۲ واحد کاهش دهیم، داریم:

$$\lambda = \hat{a}_h = \hat{a}_۴ = ۳$$

طبق داده‌های مسئله و ستون تناقضات جدول ۳.۳ داریم:

$$\begin{cases} a_۲ > b_۲ \quad \text{و} \quad a_۲ \geq \lambda > b_۲ & \longrightarrow ۲ \in U_۲(\lambda) \\ a_۳ > b_۳ \quad \text{و} \quad a_۳ \geq \lambda > b_۳ & \longrightarrow ۳ \in U_۲(\lambda) \end{cases}$$

از آنجائیکه $۲,۳ \in U_۲(\lambda)$ پس $\hat{a}_۲ = \hat{b}_۲$ و $\hat{a}_۳ = \hat{b}_۳$.

با توجه به آخرین مجموعه محدودیت‌های مسئله (۲۴.۳) نیز داریم:

$$\begin{cases} \underline{a}_j \leq \hat{a}_j \leq a_j, \qquad \underline{b}_j \leq \hat{b}_j \leq b_j, \qquad j \in N \backslash \{h\}. \\ \underline{a}_h \leq \lambda \leq min\{a_h, b_h\}, \\ \hat{b}_h = b_h. \end{cases}$$

$$\Longrightarrow$$

$$\begin{cases} ۱ \leq \hat{a}_۵ \leq ۲ \quad \text{و} \quad ۱ \leq \hat{b}_۵ \leq ۲ \\ ۲ \leq \hat{a}_۲ \leq ۷ \quad \text{و} \quad ۱ \leq \hat{b}_۲ \leq ۲ \\ ۱ \leq \hat{a}_۳ \leq ۳ \quad \text{و} \quad ۱ \leq \hat{b}_۳ \leq ۲ \\ ۲ \leq \hat{a}_۱ \leq ۳ \quad \text{و} \quad ۳ \leq \hat{b}_۱ \leq ۵ \\ \\ ۳ = \underline{a}_۴ \leq \lambda \leq min\{a_۴, b_۴\} = ۴, \\ \hat{b}_۴ = ۴. \end{cases}$$

در مورد کارهای ۲ و ۳ طبق جدول ۳.۳ می‌دانیم باید $\hat{a}_۲$ و $\hat{b}_۳$ را به‌ترتیب تا مقادیر $\hat{b}_۲$ و $\hat{b}_۳$ کاهش دهیم.
حال اگر بخواهیم مدل مسئله (۲۴.۳) را برای این مثال بنویسیم، داریم:

$$\begin{array}{l}
\min \quad \sum_{j\in N}(a_j-\hat{a}_j)+\sum_{j\in N\setminus\{h\}}(b_j-\hat{b}_j)\\
N=\{۱,۲,۳,۴,۵\}\\
s.t\\
\quad \begin{array}{cccccccc}
\hat{a}_۲+ & \hat{a}_۳+ & \hat{a}_۴ & \geq & \hat{b}_۵+ & \hat{b}_۲+ & \hat{b}_۳\\
 & \hat{a}_۳+ & \hat{a}_۴ & \geq & \hat{b}_۲+ & \hat{b}_۳ & \\
 & & \hat{a}_۴ & \geq & \hat{b}_۳ & & \\
 & & \hat{a}_۱ & \leq & \hat{b}_۴ & & \\
\end{array}\\
\quad \hat{a}_۲ = \hat{b}_۲ \qquad ۲\in U_۲(\lambda)\\
\quad \hat{a}_۳ = \hat{b}_۳ \qquad ۳\in U_۲(\lambda)
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
۱\leq \hat{a}_۵\leq ۲ \quad \text{و} \quad ۱\leq \hat{b}_۵\leq ۲\\
۲\leq \hat{a}_۲\leq ۷ \quad \text{و} \quad ۱\leq \hat{b}_۲\leq ۲\\
۱\leq \hat{a}_۳\leq ۳ \quad \text{و} \quad ۱\leq \hat{b}_۳\leq ۲\\
۲\leq \hat{a}_۱\leq ۳ \quad \text{و} \quad ۳\leq \hat{b}_۱\leq ۵\\
۳=\underline{a}_۴\leq\lambda\leq \quad min\{a_۴,b_۴\}=۴,\quad \hat{b}_۴=۴.
\end{array}$$

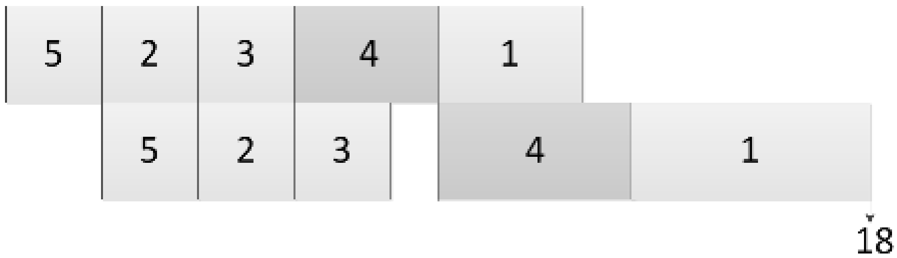
با توجه به اینکه $\hat{a}_۳=\hat{b}_۳$ و $\hat{a}_۲=\hat{b}_۲=۲$ و $\lambda=۳$ داریم:

$$\begin{array}{ll}
min & \{(۲-\hat{a}_۵)+۵+(۳-\hat{a}_۳)+(۳-\hat{a}_۱)+(۲-\hat{b}_۵)+(۲-\hat{b}_۳)+(۵-\hat{b}_۱)\}\\
s.t. & \\
 & ۱\leq \hat{a}_۵\leq ۲ \quad \text{و} \quad ۱\leq \hat{b}_۵\leq ۲\\
 & ۱\leq \hat{a}_۳\leq ۳ \quad \text{و} \quad ۱\leq \hat{b}_۳\leq ۲\\
 & ۲\leq \hat{a}_۱\leq ۳ \quad \text{و} \quad ۳\leq \hat{b}_۱\leq ۵
\end{array} \tag{۲۸.۳}$$

مسئله (۲۸.۳) یک مسئله با متغیر کران‌دار است که با استفاده از نرم‌افزار *Lingo* جواب بهینه زیر را داریم:

$$(\hat{a}_۱,\hat{a}_۲,\hat{a}_۳,\hat{a}_۴,\hat{a}_۵,\hat{b}_۱,\hat{b}_۲,\hat{b}_۳,\hat{b}_۴,\hat{b}_۵)=(۳,۲,۲,۳,۲,۵,۲,۲,۴,۲)$$

با جواب بدست آمده، تابع هدف مسئله ۲۸.۳ مقدار ۶ می‌گیرد. به عبارتی با صرف ۶ واحد هزینه، دنباله اولیه را به دنباله‌ای بهینه (با توجه به قضیه ۳.۷.۲) با همان ترتیب قبل تبدیل کرده‌ایم که در این دنباله ۴ $= h$ و ۱۸ $= C_{max}$ (از مقدار C_{max} قبل از تنظیمات کمتر است). دنباله بهینه بدست آمده به شکل ۵.۳ است.



شکل ۵.۳: دنباله نهایی

فصل ۴

بررسی مسائل ترکیبی از زمان‌بندی معکوس در حالت فازی

۱.۴ یک روش حل برای مسئله معکوس دو هدفه تک‌ماشینه بر اساس روش مینیمم فاصله فازی

۲.۴ مقدمه

با نگاهی به دنیای صنعت و تجارت می‌بینیم گاهی تنظیماتی که در پارامترها انجام می‌دهیم به شکل فازی هستند یعنی سرویس دهنده برای تغییرات محدودیت‌ها و موانعی دارد که زمان‌بند موظف به رعایت آن‌ها می‌باشد. ضرایب هزینه نیز گاهی دارای حداکثر و حداقل میزان مجاز برای تنظیم هستند. مثلاً در روند تولید یک محصول، برای تنظیم پارامتر j در ماشین i، ضریب هزینه وابسته به بودجه، میزان تقاضا یا عرضه، ظرفیت انبار و ... می‌تواند به شکل فازی باشد.
در این بخش دو مسئله زمان‌بندی معکوس تک‌ماشینه با ضرایب هزینه فازی را در نظر می‌گیریم. براساس روش کوتاه‌ترین فاصله فازی، مدلی برای حل این‌گونه مسائل معرفی می‌کنیم. برای اولین تابع هدف مسئله (۱.۳) را با ضرایب فازی $\tilde{\theta}_j$ در نظر می‌گیریم. تابع هدف دوم را از مسئله (۱۰.۳)، با ضریب هزینه فازی $\tilde{\gamma}_j$ داریم.

تعریف ۱.۲.۴. [۴۰] ارزش عدد فازی $\tilde{a}$، به تابع نزولی $s(\alpha) = \alpha$ وابسته است که با $V(\tilde{a})$ نمایش داده می‌شود و به‌صورت $V(\tilde{a}) = \int_{0}^{1} \alpha[a_{\alpha}^{L} + a_{\alpha}^{U}]\mathrm{d}\alpha$ تعریف می‌شود.

تعریف ۲.۲.۴. [۴۰] ابهام عدد فازی $\tilde{a}$، به تابع نزولی $s(\alpha) = \alpha$ وابسته است که با $A(\tilde{a})$ نمایش داده می‌شود و به‌صورت $A(\tilde{a}) = \int_{0}^{1} \alpha[a_{\alpha}^{U} - a_{\alpha}^{L}]\mathrm{d}\alpha$ تعریف می‌شود.

تعریف ۳.۲.۴. [۴۰] میزان فازی بودن عدد فازی $\tilde{a}$، به تابع نزولی $s(\alpha) = \alpha$ وابسته است که با $F(\tilde{a})$ نمایش داده می‌شود و به صورت $F(\tilde{a}) = \int_{0}^{\frac{1}{2}}[a_{\alpha}^{U} - a_{\alpha}^{L}]\mathrm{d}\alpha + \int_{\frac{1}{2}}^{1}[a_{\alpha}^{L} - a_{\alpha}^{U}]\mathrm{d}\alpha$ تعریف می‌شود. اگر اسکالرها نامنفی باشند، همه شاخص‌های بالا خطی هستند.

۳.۴ مدل مسئله

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{j=1}^{n} \tilde{\theta}_j |\hat{p}_j - p_j| \\ \min & \sum_{j=1}^{n} \tilde{\gamma}_j |\hat{q}_j - q_j| \\ s.t & 0 \leq \hat{p}_1 \leq \hat{p}_2 \leq \cdots \leq \hat{p}_n \\ & 0 \leq \hat{q}_1 \leq \hat{q}_2 \leq \cdots \leq \hat{q}_n \end{array} \tag{۱.۴}$$

مسئله (۱.۴) خطی نیست، آن را به مدل خطی تبدیل می‌کنیم.

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{j=1}^{n} \tilde{\theta}_j x_j + \tilde{\theta}_j y_j \\ \min & \sum_{j=1}^{n} \tilde{\gamma}_j x' + \tilde{\gamma}_j y' \\ s.t & 0 \leq \hat{p}_1 \leq \hat{p}_2 \leq \cdots \leq \hat{p}_n \\ & 0 \leq \hat{q}_1 \leq \hat{q}_2 \leq \cdots \leq \hat{q}_n \\ & x_j - y_j = \hat{p}_j - p_j \quad \forall j = 1, \cdots, n \\ & x'_j - y'_j = \hat{q}_j - q_j \quad \forall j = 1, \cdots, n \\ & x_j, y_j, x'_j, y'_j \geq 0 \qquad \forall j = 1, \cdots, n \end{array} \tag{۲.۴}$$

همان‌طورکه در مقاله [۴۰] مشخص است، مینیمم فاصله فازی برای مسئله (۲.۴) مورد مطالعه قرار گرفته است. روش فاصله متریک به‌گونه‌ای تعریف شده است که فاصله یک جواب تا نقطه ایده‌آل که به وسیله DM حاصل شده است را کاهش می‌دهد. در فضای تابع هدف، این نقطه به صورت $(\tilde{f}_1^*, \tilde{f}_2^*)$ نشان داده شده است.

حال تعریف فاصله L_p امکان مدل‌سازی به شکل زیر را فراهم می‌کند:

$$\begin{array}{ll} \min & L_p = \left[\sum_{k=1}^{2} w_k^p \left(\dfrac{\tilde{f}_k(x) - \tilde{f}_k^*}{r_{\tilde{f}_k}} \right)^p \right]^{\dfrac{1}{p}} \\ s.t & 0 \leq \hat{p}_1 \leq \hat{p}_2 \leq \cdots \leq \hat{p}_n \\ & 0 \leq \hat{q}_1 \leq \hat{q}_2 \leq \cdots \leq \hat{q}_n \\ & x_j - y_j = \hat{p}_j - p_j \quad \forall j = 1, \cdots, n \\ & x'_j - y'_j = \hat{q}_j - q_j \quad \forall j = 1, \cdots, n \\ & x_j, y_j, x'_j, y'_j \geq 0 \qquad \forall j = 1, \cdots, n \end{array} \tag{۳.۴}$$

که در آن $r_{\tilde{f}_j}$ ثابت نرمال سازی مربوط به jامین هدف است.

فرض کنید

$$\tilde{d}_j(x) = \frac{\tilde{f}_j(x) - \tilde{f}_j^*}{r_{\tilde{f}_j}} \tag{۴.۴}$$

و

$$\tilde{d}_j(x) = \frac{\tilde{f}_j^* - \tilde{f}_j(x)}{r_{\tilde{f}_j}} \tag{۵.۴}$$

به‌ترتیب درجه اختلاف متناظر با jامین تابع هدف وقتی که jامین هدف مینیمم‌سازی و وقتی که jامین هدف ماکزیمم‌سازی است، باشند.

۴.۴ حل مسئله L_1

در این بخش مدلی شامل دو مرحله را معرفی می‌کنیم. در مرحله اول مینیمم فاصله فازی را تحت متر L_1 محاسبه می‌کنیم و در مرحله دوم نتیجه بهینه را با توجه به مینیمم فاصله فازی به‌دست آمده از مرحله اول، به‌دست می‌آوریم.

۱.۴.۴ محاسبه مینیمم فاصله فازی

در رابطه (۳.۴) قرار می‌دهیم $p = 1$ و مسئله زیر را تعریف می‌کنیم.

$$
\begin{array}{ll}
\min & \sum_{k=1}^{2} w_k \tilde{d}_k(x) \\
s.t & 0 \leq \hat{p}_1 \leq \hat{p}_2 \leq \cdots \leq \hat{p}_n \\
& 0 \leq \hat{q}_1 \leq \hat{q}_2 \leq \cdots \leq \hat{q}_n \\
& x_j - y_j = \hat{p}_j - p_j \quad \forall j = 1, \cdots, n \\
& x'_j - y'_j = \hat{q}_j - q_j \quad \forall j = 1, \cdots, n \\
& x_j, y_j, x'_j, y'_j \geq 0 \qquad \forall j = 1, \cdots, n
\end{array}
\tag{۶.۴}
$$

برای حل مسئله (۶.۴) برای هر $\alpha \in [0, 1]$ دو مسئله معمولی زیر را معرفی می‌کنیم.

$$
\left.
\begin{array}{ll}
\min & d_\alpha^L = \sum_{k=1}^{2} w_k d_{k\alpha}^L(x) \\
s.t & \dfrac{f_{1\alpha}^L(x)}{r_{\tilde{f}_1}} - d_{1\alpha}^L = \dfrac{f_{1\alpha}^{*U}(x)}{r_{\tilde{f}_1}} \\
& \dfrac{f_{2\alpha}^L(x)}{r_{\tilde{f}_2}} - d_{2\alpha}^L = \dfrac{f_{2\alpha}^{*U}(x)}{r_{\tilde{f}_2}} \\
& 0 \leq \hat{p}_1 \leq \hat{p}_2 \leq \cdots \leq \hat{p}_n \\
& 0 \leq \hat{q}_1 \leq \hat{q}_2 \leq \cdots \leq \hat{q}_n \\
& x_j - y_j = \hat{p}_j - p_j \quad \forall j = 1, \cdots, n \\
& x'_j - y'_j = \hat{q}_j - q_j \quad \forall j = 1, \cdots, n \\
& x_j, y_j, x'_j, y'_j \geq 0 \qquad \forall j = 1, \cdots, n
\end{array}
\right\} (P - left_1(\alpha))
\tag{۷.۴}
$$

و

$$\left.\begin{array}{ll} \min & d^{U}_{\alpha}=\sum_{k=1}^{2} w_k d^{U}_{k\alpha}(x) \\ s.t & \dfrac{f^{U}_{1\alpha}(x)}{r_{\tilde{f}_1}}-d^{U}_{1\alpha}=\dfrac{f^{*L}_{1\alpha}(x)}{r_{\tilde{f}_1}} \\ & \dfrac{f^{U}_{2\alpha}(x)}{r_{\tilde{f}_2}}-d^{U}_{2\alpha}=\dfrac{f^{*L}_{2\alpha}(x)}{r_{\tilde{f}_2}} \\ & 0\leq \hat{p}_1\leq \hat{p}_2\leq\cdots\leq \hat{p}_n \\ & 0\leq \hat{q}_1\leq \hat{q}_2\leq\cdots\leq \hat{q}_n \\ & x_j-y_j=\hat{p}_j-p_j \quad \forall j=1,\cdots,n \\ & x'_j-y'_j=\hat{q}_j-q_j \quad \forall j=1,\cdots,n \\ & x_j,y_j,x'_j,y'_j\geq 0 \qquad \forall j=1,\cdots,n \end{array}\right\} (P-right_1(\alpha)) \tag{۸.۴}$$

که در آن $f^{L}_{j\alpha}$ نمایش مقدار jامین تابع هدف در x است وقتی که ضرایب، برابر با کران پایین α–برش باشند، و به‌طور مشابه $f^{U}_{j\alpha}$ برای حالتی که ضرایب، برابر با کران بالای α–برش باشند.

قضیه ۱.۴.۴. *[۴۰] فرض کنید $\tilde{d}$ مجموعه فازی تعریف شده روی خانواده‌ای از مجموعه‌های معمولی $\{[d^{L}_{\alpha},d^{U}_{\alpha}],\alpha\in[0,1]\}$ باشد که در آن d^{L}_{α} و d^{U}_{α} به‌ترتیب جواب‌های مسائل (۸.۴) و (۷.۴) باشند. در این‌صورت $\tilde{d}$ یک عدد فازی است که مینیمم فاصله از نقطه مطلوب تحت متر L_1 را نشان می‌دهد.*

قضیه ۲.۴.۴. *[۴۰] فرض کنید نقطه مطلوب $(\tilde{f}^{*}_{1},\tilde{f}^{*}_{2})$ در هر α–برش برابر یا بهتر از نقطه ایده‌آل باشد و $\tilde{d}$ عدد فازی تعریف شده در قضیه ۱.۴.۴ باشد، در این‌صورت ارزش $\tilde{d}$، $V(\tilde{d})$ بزرگتر یا برابر با صفر است.*

قضیه ۳.۴.۴. *[۴۰] فرض کنید نقطه مطلوب برای هر α–برش برابر یا بهتر از نقطه ایده‌آل باشد و فرض کنید $\tilde{d}$ عدد فازی تعریف شده در قضیه باشد. در این‌صورت ارزش $\tilde{d}$، $V(\tilde{d})$ برابر با صفر است اگر و تنها اگر در هر α–برش هر تابع به سطح مطلوب برسد.*

۲.۴.۴ مدلی برای نتیجه بهینه تحت متر L_1

در این زیر بخش می‌خواهیم یک بردار تصمیم پیدا کنیم به‌طوری‌که فاصله آن نسبت به نقطه مطلوب بیشترین شباهت را به عدد فازی $\tilde{d}$ داشته باشد. ما روشی را برای غیرفازی‌سازی[1] بر پایه ارزش، ابهام و فازی بودن یک عدد فازی انتخاب می‌کنیم. با در نظر گرفتن این شاخص‌های حقیقی مدل زیر را داریم:

[1] Defuzzyfication

$$
\begin{array}{ll}
 & Find\ x \\
s.t & V\left(\sum_{j=1}^{2} w_j\tilde{d}_j(x)\right) \approx V(\tilde{d}) \\
 & A\left(\sum_{j=1}^{2} w_j\tilde{d}_j(x)\right) \approx A(\tilde{d}) \\
 & F\left(\sum_{j=1}^{2} w_j\tilde{d}_j(x)\right) \approx F(\tilde{d}) \\
 & 0 \leq \hat{p}_1 \leq \hat{p}_2 \leq \cdots \leq \hat{p}_n \\
 & 0 \leq \hat{q}_1 \leq \hat{q}_2 \leq \cdots \leq \hat{q}_n \\
 & x_j - y_j = \hat{p}_j - p_j \quad \forall j = 1, \cdots, n \\
 & x'_j - y'_j = \hat{q}_j - q_j \quad \forall j = 1, \cdots, n \\
 & x_j, y_j, x'_j, y'_j \geq 0 \qquad \forall j = 1, \cdots, n
\end{array}
\tag{۹.۴}
$$

که در آن $\approx$ به معنی ''تقریباً برابر با'' و هر یک از $V(\tilde{d})$، $A(\tilde{d})$ و $F(\tilde{d})$ نمایش ایده‌آل یا سطح آرمانی است. این مدل را می‌توان با روش برنامه‌ریزی آرمانی حل کرد.
تصمیم بهینه، جواب مسئله اولیه (۲.۴) است.

مراجع

[۱] فتحعلی. ج. زمان‌بندی اجرای کارهای شرطی روی پردازشگرهای ناوابسته. پایان نامه دوره کارشناسی ارشد. دانشگاه امیرکبیر. ۱۳۷۸.

[2] Ahuja, Ravindra K., Thomas L. Magnanti, and James B. Orlin. ”Network flows.” (1993).

[3] Ahuja, Ravindra K., and James B. Orlin. ”Inverse optimization.” Operations Research 49.5 (2001): 771-783.

[4] Akers Jr, Sheldon B. ”A graphical approach to production scheduling problems.” Oper. Res. 4.2 (1956): 244-245.

[5] Alidaee, Bahram, and Gary A. Kochenberger. ”A framework for machine scheduling problems with controllable processing times.” Production and Operations Management 5.4 (1996): 391-405.

[6] Baker, Kenneth R. Introduction to sequencing and scheduling. John Wiley Sons, 1974.

[7] Brooks, George H., and Charles R. White. ”AN ALGORITHM FOR FINDING OPTIMAL OR NEAR OPTIMAL SOLUTIONS TO PRODUCTION SCHEDULING PROBLEM.” Journal of Industrial Engineering 16.1 (1965): 34.

[8] Brucker, Peter. ”An efficient algorithm for the job-shop problem with two jobs.”Computing 40.4 (1988): 353-359.

[9] Brucker, Peter. ”Scheduling Algorithms.” (2004).

[10] Brucker, P., Knust, S. : Complex Scheduling, Springer, Berlin. (2006)

[11] Brucker, Peter, and Natalia V. Shakhlevich. ”Inverse scheduling: two-machine flowshop problem.” University of leeds. (November 2008).

[12] Brucker, Peter, and Natalia V. Shakhlevich. ”Inverse scheduling with maximum lateness objective.” Journal of Scheduling 12.5 (2009): 475-488.

[13] Chand, Suresh, and Dilip Chhajed. ”A single machine model for determination of optimal due dates and sequence.” Operations Research 40.3 (1992): 596-602.

[14] Chin, Francis Y., and Long-Lieh Tsai. ”On J-maximal and J-minimal flow-shop schedules.” Journal of the ACM (JACM) 28.3 (1981): 462-476.

[15] Conway, R. W., W. L. Maxwell, and L. W. Miller. ”Theory of scheduling. 1967.”Theory of Scheduling, Palo Alto-London (1967).

[16] Dubois, Didier, and Henri Prade. ”Operations on fuzzy numbers.” International Journal of systems science 9.6 (1978): 613-626.

[17] El-Rewini, Hesham, Theodore G. Lewis, and Hesham H. Ali. Task scheduling in parallel and distributed systems. Prentice-Hall, Inc., 1994.

[18] Garey, Michael R., David S. Johnson, and Ravi Sethi. ”The complexity of flowshop and jobshop scheduling.” Mathematics of operations research 1.2 (1976): 117-129.

[19] Giglio, Richard J., and Harvey M. Wagner. ”Approximate solutions to the three-machine scheduling problem.” Operations Research 12.2 (1964): 305-324.

[20] Hefetz, N., and I. Adiri. ”An efficient optimal algorithm for the two-machines unit-time jobshop schedule-length problem.” Mathematics of Operations Research 7.3 (1982): 354-360.

[21] Heuberger, Clemens. ”Inverse combinatorial optimization: A survey on problems, methods, and results.” Journal of Combinatorial Optimization 8.3 (2004): 329-361.

[22] Hochbaum, Dorit S., and Sung-Pil Hong. ”About strongly polynomial time algorithms for quadratic optimization over submodular constraints.”Mathematical programming 69.1-3 (1995): 269-309.

[23] Ignall, Edward, and Linus Schrage. ”Application of the branch and bound technique to some flow-shop scheduling problems.” Operations research 13.3 (1965): 400-412.

[24] Jackson, James R. Scheduling a production line to minimize maximum tardiness. CALIFORNIA UNIV LOS ANGELES NUMERICAL ANALYSIS RESEARCH, 1955.

[25] Johnson, Selmer Martin. ”Optimal two-and three-stage production schedules with setup times included.” Naval research logistics quarterly 1.1 (1954): 61-68.

[26] Johnson, Lynwood A., and Douglas C. Montgomery. Operations research in production planning, scheduling, and inventory control. Vol. 6. New York: Wiley, 1974.

[27] Katoh, Naoki, and Toshihide Ibaraki. ”Resource allocation problems.”Handbook of combinatorial optimization 2 (1998): 159-260.

[28] Koulamas, Christos. "Inverse scheduling with controllable job parameters."Department of Decision Sciences and Information Systems Florida International University, Miami (2004).

[29] Lenstra, Jan Karel, and AHG Rinnooy Kan. "Computational complexity of discrete optimization problems." Annals of Discrete Mathematics 4 (1979): 121-140.

[30] Lin, Yixun, and Xiumei Wang. "Necessary and sufficient conditions of optimality for some classical scheduling problems." European Journal of Operational Research 176.2 (2007): 809-818.

[31] Luhandjula, M. K., and M. J. Rangoaga. "An approach for solving a fuzzy multi-objective programming problem." European Journal of Operational Research 232.2 (2014): 249-255.

[32] Nowicki, Eugeniusz, and Stanisław Zdrzałka. "A survey of results for sequencing problems with controllable processing times." Discrete Applied Mathematics 26.2 (1990): 271-287.

[33] O'Brien, James J. Scheduling handbook. New York: McGraw-Hill, 1969.

[34] Panwalkar, S. S., M. L. Smith, and A. Seidmann. "Common due date assignment to minimize total penalty for the one machine scheduling problem."Operations research 30.2 (1982): 391-399.

[35] Pinson, E. "The job shop scheduling problem: A concise survey and some recent developments." Scheduling Theory and its Applications (1995): 277-294.

[36] Shakhlevich, Natalia V., Akiyoshi Shioura, and Vitaly A. Strusevich. "Single machine scheduling with controllable processing times by submodular optimization."School of Computing, University of Leeds, U.K. (2008)

[37] Shmoys, David B., Clifford Stein, and Joel Wein. "Improved approximation algorithms for shop scheduling problems." SIAM Journal on Computing 23.3 (1994): 617-632.

[38] Smith, Wayne E. "Various optimizers for single-stage production." Naval Research Logistics Quarterly 3.1-2 (1956): 59-66.

[39] Story, ALFRED E., and Harvey M. Wagner. "Computational experience with integer programming for job shop scheduling." Industrial scheduling (1963): 207-219.

[40] Terol, Amelia Bilbao. "A new approach for multiobjective decision making based on fuzzy distance minimization." Mathematical and computer modelling47.9 (2008): 808-826.

[41] Trick, Michael A. ”Scheduling multiple variable-speed machines.” Operations research 42.2 (1994): 234-248.

[42] Vickson, R. G. ”Choosing the job sequence and processing times to minimize total processing plus flow cost on a single machine.” Operations Research 28.5 (1980): 1155-1167.

[43] Wennink, Marc. Algorithmic support for automated planning boards. Diss. Technische Universiteit Eindhoven, 1995.

[44] Wu, Hsien-Chung. ”The Karush–Kuhn–Tucker optimality conditions in multiobjective programming problems with interval-valued objective functions.”European Journal of Operational Research 196.1 (2009): 49-60.

[45] Xu, Shaoji, and Jianzhong Zhang. ”An inverse problem of the weighted shortest path problem.” Japan journal of industrial and applied mathematics 12.1 (1995): 47-59.

[46] Yang, Chao, Jianzhong Zhang, and Zhongfan Ma. ”Inverse maximum flow and minimum cut problems.” Optimization 40.2 (1997): 147-170.

[47] Y, N, Satskov. ”The complexity of scheduling problems with 2 & 3 jobs.” Europe Journal Operation Research 53 (1991): 326-336.

[48] Zhang, Jianzhong, and Zhenhong Liu. ”Calculating some inverse linear programming problems.” Journal of computational and applied mathematics72.2 (1996): 261-273.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

ابتکاری	Initiative
اشتراک	Subscription
افزایش	Increase
اقتصاد	Economic
الگوریتم	Algorithm
ایستا	Static
برنامه‌ریزی خطی	Linear Programming
بهینه	Optimal
پردازش	Process
پردازشگر	Processor
پویا	Dynamic
پیچیدگی زمانی	Complexity time
تابع احتمالی	Possible function
تابع هدف آرمانی	Goal function
تأخیر	Delay
ترتیب	Order
تفسیر هندسی	Geometric interpretation
تک ماشینه	Single machine
تنظیم‌پذیر	Adjustable
توالی عملیات	The sequence of operation
جایگشت	Permutation
چندجمله‌ای	Polynomial
چند ماشینه	Multi machine
جریان پردازش	Processing flow
جواب بهینه	Optimal Solution

مسئله انتقال .... Transmission problem

مسئله برش .... Cutting problem

مسئله تخصیص .... Allocation problem

مسئله کوله پشتی .... Knapsack problem

مصرف کننده .... Consumer

معکوس .... Inverse

موازی .... Parallel

مینیمم‌سازی .... Minimization

هزینه .... Cost

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

تنظیم‌پذیر .... Adjustable
الگوریتم .... Algorithm
مسئله تخصیص .... Allocation problem
شاخه و کران .... Branch and Bound
روش ترکیبی .... Combined method
پیچیدگی زمانی .... Complexity time
شاخه‌های شرطی .... Conditional branch
سری .... Consecutive
مصرف کننده .... Consumer
قابل کنترل .... Controlabele
هزینه .... Cost
کار بحرانی .... Critical job
مسئله برش .... Cutting problem
کاهش .... Decrease
تأخیر .... Delay
زمان تحویل .... Delivery time
زمان‌بندی معین .... Determined scheduling
دوگان .... Dual
پویا .... Dynamic
اقتصاد .... Economic
کارگاهی خاص .... Flow shop
تفسیر هندسی .... Geometric interpretation
تابع هدف آرمانی .... Goal function
زمان بیکاری .... Idle time
افزایش .... Increase

Initiative .... ابتکاری
Interruptible .... قابل قطع
Inverse scheduling .... زمان‌بندی معکوس
Inverse .... معکوس
Job .... کار
Job shop .... کارگاهی
Knapsack problem .... مسئله کوله پشتی
Linear Programming .... برنامه‌ریزی خطی
Machine .... ماشین
Maximization .... ماکسیمم‌سازی
Meta-heuristic .... فرا ابتکاری
Minimization .... مینیمم‌سازی
Minimum cost .... کمترین هزینه
Multi machine .... چند ماشینه
Network method .... روش شبکه‌ای
Non-permutation flow shop .... کارگاهی خاص غیر جایگشتی
Open shop .... کارگاهی بدون شرط
Operation .... عملیات
Optimal Solution .... جواب بهینه
Order .... ترتیب
Parallel .... موازی
Permutation .... جایگشت
Permutation flow shop .... کارگاهی خاص جایگشتی
Polynomial .... چندجمله‌ای
Possible function .... تابع احتمالی
Process .... پردازش
Processing flow .... جریان پردازش
Processor .... پردازشگر
Sequence .... دنباله
Service providers .... سرویس دهنده
Scheduling .... زمان‌بندی
Single machine .... تک ماشینه

Aabstract

In this research, scheduling and inverse scheduling problems have been studied, today the importance of scheduling problems is clear in industry, commercial and in some cases in human resources (for example scheduling in hospitals or educational centers). Scheduling is necessary in most of organizations, offices and factories. A good scheduling can reduce the costs and increase the productivity. Higher competitive atmosphere for producers is also caused by effective scheduling. The main aim of scheduling is to balance different objectives; effective implementation of workers, equipment and facilities while reducing customer waiting time and processes time. This thesis will study inverse scheduling problems. Assume the production process requires some preparations which producer could provide them before producing and then choose the best sequence based on disposal information. It is possible that jobs which enter after process have different characteristics and therefore, chosen permutation is not optimal anymore or sudden change may occur in product process. If the permutation is not able to change, like high cost of workstations movement, because of some reasons such as technology limitation, then producer need to adjust the speed which is actually process time adjustment. The high cost of these settings could become minimal by the use of inverse scheduling problems. In what follows, it will become clear that inverse scheduling problems can transform to linear programming problems even on issues that scheduling problem could not be solved in polynomial time complexity. Inverse optimization is practical in many issues such as geophysical sciences, medical imaging, traffic issues and other applications. The main use of inverse scheduling problems is in a condition that parameters can be set between productive and customers. The main job parameters are those that customers prefer and their corresponding error values, is one that productive manager offer. Another application of inverse scheduling problems could be in trail job systems with a control over the parameters. In particular, the one who do the scheduling in these systems, obtain some information after job parameters enter to the system. Scheduler can adjust the actual amount of parameters with customers, to ensure that even after the new parameters were added to the optimal timing, the system remain optimized. The use of inverse scheduling problems, determines the least amount of change in the job parameters.
keywords: Scheduling, Inverse sheduling, Sigle machine, Two machine, Adjustable parameters

University of Shahrood

Faculty Of Mathematical Sciences

Inverse Scheduling Problem

Toktam Hatami sangeli

Supervisor

Dr.fathali

Advisor

Dr.foroohandeh

2015