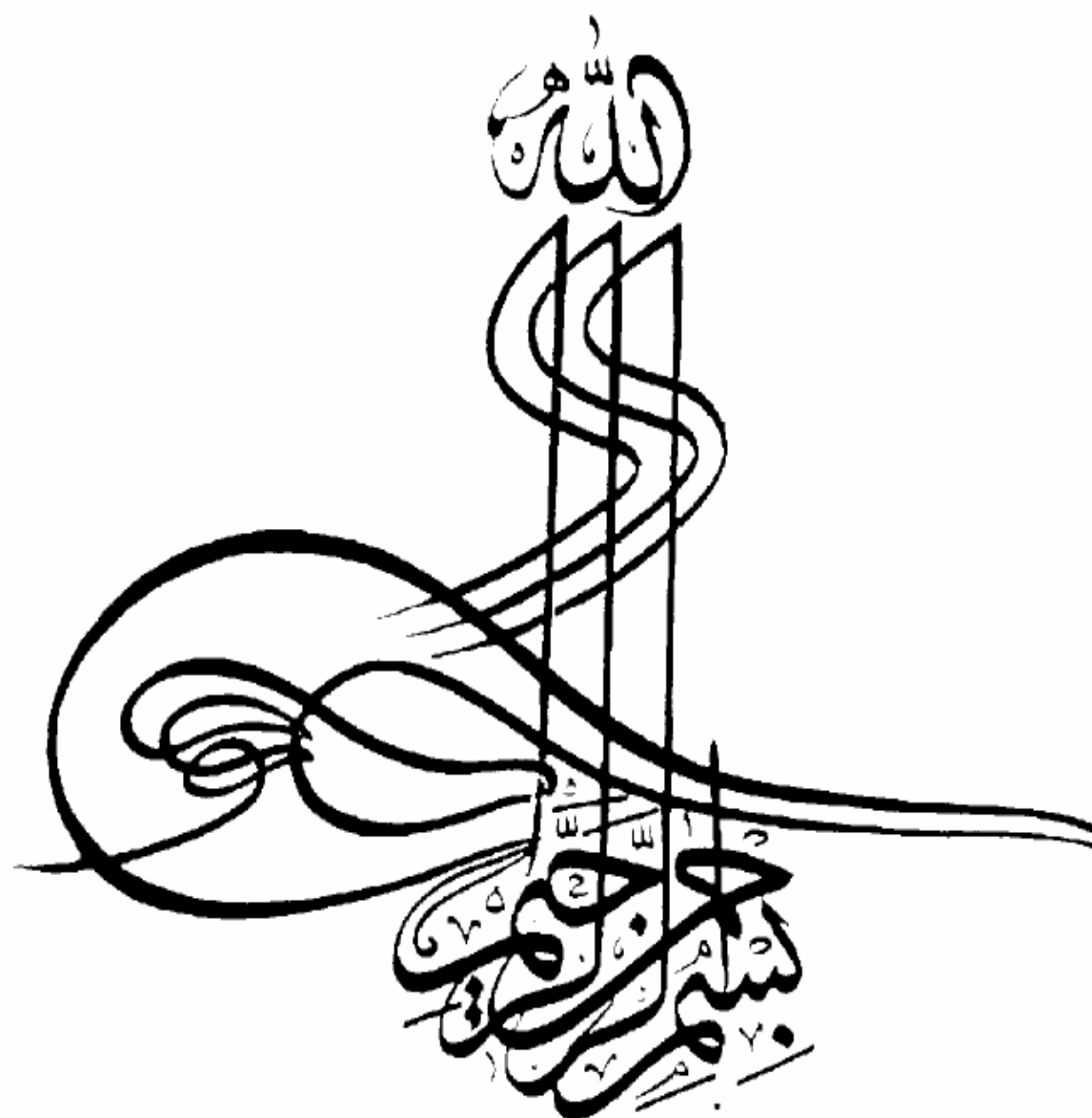






دانشکده : ریاضی

گروه : ریاضی

زیرگروه‌های به طور مرکزی بزرگ در P -گروه‌های متناهی

دانشجو : پری پناهی

استاد راهنمای اول :

دکتر میرحیدر جعفری

استاد راهنمای دوم :

دکتر احمد زیره

استاد مشاور

دکتر ابراهیم هاشمی

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

ماه و سال انتشار : بهمن ۱۳۸۸

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده : ریاضی

گروه : ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد خانم پری پناهی

تحت عنوان: زیرگروههای به طور مرکزی بزرگ در p -گروههای متناهی

در تاریخ ۱۳۸۸/۱۱/۱۱ توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض مورد ارزیابی و با درجه عالی مورد پذیرش قرار گرفت.

امضاء	اساتید مشاور	امضاء	اساتید راهنما
	نام و نام خانوادگی : ابراهیم هاشمی		نام و نام خانوادگی : میرحیدر جعفری
	نام و نام خانوادگی :		نام و نام خانوادگی : احمد زیره

امضاء	نماینده تحصیلات تکمیلی	امضاء	اساتید داور
	نام و نام خانوادگی : مهدی ایرانمنش		نام و نام خانوادگی : نادر جعفری راد
			نام و نام خانوادگی : محسن پرویزی
			نام و نام خانوادگی :
			نام و نام خانوادگی :

تقدیم به مادر عزیزم، کسی که به من زندگی و عشق آموخت.

*Dedicated to My Beloved Mother who
taught me to live and love.*

سپاس خداوند منان را که توفیق نگارش این پایان نامه را بر ما ارزانی داشت.

شایسته است از استاد ارجمند دکتر میرحیدر جعفری که راهنمایی این پایان نامه را به عهده داشتند و در این زمینه راهکارها، پیشنهادات و انتقادات ایشان بسیار غنی، کارا و تأثیرگذار بوده و حق بزرگی بر گردن بنده دارند، تشکر و قدردانی نمایم.

همچنین از دکتر ابراهیم هاشمی به خاطر مشاوره های مؤثر ایشان بالاخص در زمینه مقالات بین رشته ای به خصوص شیمی-گروه که نمایانگر افق زیبای تحقیقات کاربردی ریاضیات محض است، بسیار سپاسگزارم.

برحق است مراتب سپاسگزاری خود را نسبت به آقای علی قدرتی فرد ریاست محترم اداره برنامه ریزی و بودجه شرکت مخابرات خراسان شمالی که در طی دوره تحصیل از مساعدات و کمکهای ایشان بسیار بهره مند بوده ام، ابراز دارم.

در پایان از کلیه اساتید محترم دانشکده ریاضی، بالاخص دکتر نزاکتی، ریاست محترم دانشکده و دکتر احمد زیره، مدیر گروه محترم، که مرا در طی دوره تحصیل یاری نموده اند بسیار ممنون و سپاسگزارم.

بهمن ۱۳۸۸

پری پناهی

دانشجو تأیید می نماید که مطالب مندرج در این پایان نامه نتیجه تحقیقات خودش می باشد و در صورت استفاده از نتایج دیگران مرجع آن را ذکر نموده است.

کلیه حقوق مادی مترتب از نتایج مطالعات ، آزمایشات و نوآوری ناشی از تحقیق موضوع این پایان نامه متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد .

ماه و سال : بهمن ۱۳۸۸

چکیده

فرض کنید S یک p -گروه متناهی باشد، زیرگروه آبدی A در S را زیرگروه آبدی بزرگ S

گوییم، اگر برای هر زیرگروه آبدی A^* در S داشته باشیم، $|A| \geq |A^*|$.

زیرگروه Q در S را به طور مرکزی بزرگ گوییم، اگر برای هر زیرگروه Q^* در S داشته باشیم:

$$|Q| |Z(Q)| \geq |Q^*| |Z(Q^*)|$$

مطالعه روی زیرگروههای آبدی بزرگ و اختلاف روی آنها در سال ۱۹۶۴ با قضیه p -متمم نرمال دوم

تامپسون آغاز گردید، که زیرگروههای به طور مرکزی بزرگ دارای خواص مشابهی هستند.

در سال ۱۹۸۹ سرمک و دلگادو، چند خانواده از زیرگروههای شامل زیرگروههای به طور مرکزی

بزرگ را به عنوان حالت خاص، مورد مطالعه قرار دادند.

سرمک و دلگادو مفهوم بحث شمردن برای گروههای متناهی را به بحث اندازه برای گروه متناهی G ،

که روی گروه متناهی H عمل می کند، تعمیم دادند. آنها در نهایت به نتایج قابل توجه و کاربردهای

بسیار قوی در این زمینه دست یافتند.

در این پایان نامه، کار آنها را گسترش می دهیم و خواص زیرگروههای به طور مرکزی بزرگ در p -

گروههای متناهی را بدست خواهیم آورد. این برهان به طور مشابه برای p -گروههای متناهی در

قضیه نقطه ثابت برل در گروههای جبری استفاده می شود.

فهرست مطالب

مقدمه	۱
فصل اول : تعاریف و قضایای مقدماتی.....	۶
۱-۱ تعاریف مقدماتی.....	۷
۲-۱ چند قضیه کاربردی	۲۲
۳-۱ خودریختی های خودتوان از جبرها	۲۴
۴-۱ کاربرد قضیه ای از جبر در p -گروهها	۳۶
۵-۱ گروه نوتینگهام	۴۱
۶-۱ زیرگروههای مشخص برای پوشینگ-آپ در گروههای متناهی	۴۶
۷-۱ حلقه لی وابسته	۵۴
فصل دوم : CL - زیرگروهها	۶۰
۱-۲ بعضی نتایج اساسی	۶۱
۲-۲ CL - زیرگروهها و زیرگروههای آبدی بزرگ	۶۷
فصل سوم : CL - زیرگروههای مینیمال	۶۹
فصل چهارم : CL - زیرگروه اکسترمال	۸۰
فصل پنجم : نتیجه گیری	۸۸
نمادگذاری	۹۹
واژه نامه	۱۰۱
کتابنامه	۱۰۲

مقدمه

۱. مقدمه

در ابتدا فرض کنید S یک p -گروه متناهی باشد، زیرگروه آبدی A در S را یک زیرگروه آبدی

بزرگ S گوییم، اگر برای هر زیرگروه آبدی A^* در S ، $|A| \geq |A^*|$.

زیرگروه Q در S را به طور مرکزی بزرگ گوییم، اگر برای هر زیرگروه Q^* در S داشته باشیم:

$$|Q| |Z(Q)| \geq |Q^*| |Z(Q^*)|.$$

زیرگروه به طور مرکزی بزرگ را برای سادگی CL -زیرگروه می نامیم. (اولین بار جاناتان آلپرین^۱

این تعریف را پیشنهاد کرد.)

مطالعه روی زیرگروههای آبدی بزرگ در سال ۱۹۶۴ با قضیه p -متمم نرمال دوم تامپسون^۲ [۱۶]

آغاز گردید، که زیرگروههای به طور مرکزی دارای خواص مشابهی هستند. در سال ۱۹۸۹ سرمک^۳ و

دلگادو^۴ [۱]، چند خانواده از زیرگروههای شامل زیرگروههای به طور مرکزی بزرگ را به عنوان حالت

خاص، مورد مطالعه قرار دادند. سرمک و دلگادو مفهوم بحث شمردن برای گروههای متناهی را به

بحث اندازه برای گروه متناهی G ، که روی گروه متناهی H عمل می کند، تعمیم دادند. آنها بالاخره

به نتایج قابل توجه و کاربردهای بسیار قوی در این زمینه دست یافتند.

سرمک و دلگادو نشان دادند، که برای هر دو زیرگروه به طور مرکزی بزرگ Q و R در S ،

$QR = RQ$ و QR یک زیرگروه به طور مرکزی بزرگ در S است. لذا S شامل یک زیرگروه به طور

مرکزی بزرگ ماکسیمال منحصر به فردی است، که آنرا S_{CL} می نامیم.

در این پایان نامه، کار آنها را گسترش می دهیم، تا به نتایج بهتر و کاربردهای قویتری برسیم.

همچنین کاربردهای زیرگروه تامپسون، $J(S)$ ، در p -گروه متناهی S ، را بدست خواهیم آورد. بویژه،

^۱ Jonathan Alperin

^۲ J.G.Thompson

^۳ A.Chermak

^۴ A.delgado

شرایط کافی برای اثبات $J(S) < S$ را بدست می آوریم. این برهان به طور مشابه برای p -گروههای متناهی در قضیه نقطه ثابت برل^۵ در گروههای جبری استفاده می شود.

در بخش ۲-۲، قضیه ۱-۲-۲، نشان می دهیم که برای هر زیرگروه به طور مرکزی بزرگ Q در S و هر زیرگروه آبدی بزرگ A در S ، داریم $QA = AQ$ و QA یک زیرگروه به طور مرکزی بزرگ در S است. بنابراین $S_{CL} \geq J(S)$ (نتیجه ۲-۲-۲). و این به ما کمک می کند با محاسبه ای کوتاه نشان دهیم که $S > J(S)$.

در فصل ۳، زیرگروههای به طور مرکزی بزرگ مینیمال S را بررسی می کنیم، که دارای گروههای مشتق یکسانی هستند، لذا یک زیرگروه مشخص S می باشد، (نتیجه ۲-۳) و این زیرگروه مشتق در G نرمال است (قضیه ۳-۶).

به وسیله قضیه های قوی ایتو^۶ و تامپسون [۴۳ص ۱۴] و قضیه ۸-۵ نشان می دهیم، که یک زیرگروه به طور مرکزی بزرگ مینیمال در S موجود است، که به وسیله $J(S)$ و هر زیرگروه نرمال S از رده پوچتوانی حداکثر $p-1$ نرمال می شود، یعنی $J(S) \subseteq N_G(S)$ (قضیه ۷-۴ و نتیجه ۵-۱۰). در قضیه ۸-۵ فرضهای زیر را در نظر می گیریم.

۷-۵ فرضها

(۱) S یک p -گروه متناهی است.

(۲) Q یک زیرگروه S از رده پوچتوانی حداکثر $p-1$ است.

(۳) g یک عنصر S است که Q را نرمال می کند، یعنی $g \in N_S(Q)$.

(۴) α خودریختی ای از Q است که به وسیله مزدوج g القاء می شود. یعنی

$$x \mapsto x^g \quad \alpha: Q \rightarrow Q \quad \text{به طوریکه}$$

^۵ Borel

^۶ N.Ito

(۵) Q را می توان به عنوان یک حلقه لی در نظر گرفت . به ازای اعداد صحیح j, i که

$$i + j \geq p \text{ داریم:}$$

$$(\alpha - 1)^p(Q) = 0, \quad [(\alpha - 1)^i(Q), (\alpha - 1)^j(Q)] = 0$$

در اینجا قضیه لازارد^۶ (قضیه ۶-۱) نشان می دهد، که Q می تواند به عنوان یک حلقه لی منظم

باشد، به طوری که $\alpha - 1$ یک درونریختی خوش تعریف از گروه جمعی خودش باشد .

قضیه ۵-۸ ، به طور کلی بیان می کند، که با این شرایط، یک نگاشت φ وجود دارد، که هر

زیرگروه T در Q را به یک زیرگروه T^* در Q می برد، که خیلی شبیه T بوده و به وسیله g نرمال

می شود، علاوه بر این اگر T تحت یک ترتیب جزئی معینی از زیرگروههای Q ماکسیمال باشد، آنگاه

g باید T را نرمال کند.

این نتایج مبنی بر بعضی نتایج از مرجع [۴] است، که به عنوان قضایای (۴-۳) و (۴-۴) در این

پایان نامه ظاهر می گردند. که این نتایج شبیه کاربردهای قضیه نقطه ثابت برل برای گروههای جبری

هستند. همچنین قضیه (۵-۸) نیز چنین شباهتی دارد.

نمادهای زیر را برای p - گروه متناهی S نیاز داریم.

فرض کنید:

$$d(S) = \max \{ |A| \mid A \leq S \text{ و } A \text{ آبدلی است} \}$$

$$f(S) = \max \{ |R| \cdot |Z(R)| \mid R \leq S \}$$

$$f_1(S) = \max \{ |R| \cdot |C_S(R)| \mid R \leq S \}$$

$$\mathcal{A}(S) = \{ A \leq S \mid |A| = d(S) \text{ و } A \text{ آبدلی است} \}$$

$$\mathcal{F}(S) = \{ R \leq S \mid |R| \cdot |Z(R)| = f(S) \}$$

$$\mathcal{F}_1(S) = \{ R \leq S \mid |R| \cdot |C_S(R)| = f_1(S) \}$$

$$\mathcal{H} \langle J(S) = (S) \rangle$$

$$\mathcal{F} \langle S_{CL} = (S) \rangle$$

$$S' = [S, S]$$

بنابراین عناصر $\mathcal{H}(S)$ زیرگروههای آبدی بزرگ S هستند، عناصر $\mathcal{F}(S)$ زیرگروههای به طور مرکزی بزرگ S می باشند و $J(S)$ ، همانند مرجع [۱۵]، زیرگروه تامپسون S نامیده می شود. یک CL -زیرگروه S که تحت شمول در $\mathcal{F}(S)$ مینیمال است، یک CL -زیرگروه مینیمال S نامیده می شود.

در فصل ۲، (گزاره ۲-۱-۴)، نشان می دهیم، که $f(S) = f_1(S)$ و $\mathcal{F}(S)$ یک زیرمجموعه $\mathcal{F}_1(S)$ است.

همه گروهها در این پایان نامه متناهی هستند. در سراسر این پایان نامه p یک عدد اول دلخواه ثابت فرض شده و S یک p -گروه متناهی دلخواه ثابت می باشد.

فصل اول

تعاریف و قضایای

مقدماتی

۱-۱ تعاریف مقدماتی

ما برای شروع مبحث نیاز به مفاهیم اساسی در نظریه گروهها داریم، لذا حائز اهمیت است که در ابتدا تعاریف و قرارداد های مختلفی را معرفی کنیم که در سراسر این پایان نامه استفاده می شود. فرض کنیم G یک گروه متناهی دلخواه باشد.

۱-۱-۱ تعریف : خودریختی φ از گروه G را π -خودریختی گوئیم اگر مرتبه اش فقط بر

اعضای مجموعه π قابل قسمت باشد و π' -خودریختی گوئیم اگر مرتبه اش بر هیچ عضو مجموعه π قابل قسمت نباشد.

۱-۱-۲ تعریف : عنصر x در G را یک π -عنصر گوئیم اگر $|x|$ فقط بر اعداد مجموعه π

قابل قسمت باشد و به طور مشابه گروه G را π -گروه نامیم اگر $|G|$ فقط بر اعداد مجموعه π قابل قسمت باشد. همچنین $\pi(G)$ مجموعه اعداد اول بخش کننده $|G|$ را نشان می دهد.

۱-۱-۳ تعریف : $O_\pi(G)$ بزرگترین زیرگروه نرمال منحصر به فرد G را نشان می دهد، که

مرتبه آن فقط بر اعداد مجموعه π بخش پذیر است و زیرگروه تولید شده توسط اجتماع تمام زیرگروههای نرمال G با این خاصیت می باشد.

۱-۱-۴ تعریف : $O^\pi(G)$ کوچکترین زیرگروه نرمال منحصر به فرد H در G را نشان

می دهد، به طوریکه مرتبه G/H فقط بر اعداد مجموعه π بخش پذیر باشد و اشتراک تمام زیرگروههای نرمال G است به طوریکه گروه خارج قسمت متناظر دارای این خاصیت باشد.

۱-۱-۵ تعریف : $O_{p'}(G)$ -چنبره p' نامیده می شود، به عبارتی بزرگترین زیرگروه

نرمال منحصر به فرد G که مرتبه آن نسبت به p اول است.

۶-۱-۱ تعریف : $O_3(G) = O(G)$ چنبره G نامیده می شود، به عبارتی بزرگترین زیرگروه

نرمال منحصر به فرد از مرتبه فرد.

۷-۱-۱ تعریف : H بخش G است اگر $H = A/B$ که $A, B \leq G$ و $B \triangleleft A$.

۸-۱-۱ تعریف : H, K را نرمال می کند، اگر $K \subseteq N_G(H)$ و به طور مشابه عنصر g ، H

را نرمال می کند، یعنی $g \in N_G(H)$.

۹-۱-۱ تعریف : H را زیرگروه مشخص G گوئیم اگر H تحت تمام خودریختی های G

ثابت است.

۱۰-۱-۲ تعریف : زیرگروه ماکسیمال H در گروه G یک زیرگروه سره است به طوریکه هیچ

زیرگروه سره دیگری مانند K اکیداً شامل H نباشد.

۱۱-۱-۱ تعریف : کوچکترین مضرب مشترک مرتبه های عناصر G را توان^۹ G می نامیم.

۱۲-۱-۱ ریختی^{۱۰} : یک کاتگوری مانند C شامل دو کلاس می باشد یکی اشیاء و دیگری

ریختی ها. روی هر ریختی دو عمل وجود دارد یکی دامنه (مبدأ) و دیگری هم دامنه (مقصد). اگر

ریختی f دارای دامنه X و هم دامنه Y باشد، می نویسیم $X \rightarrow Y$. لذا یک ریختی عبارتست از یک

پیکان از دامنه به هم دامنه اش.

۱۳-۱-۱ تعریف : گروه G روی مجموعه X (از چپ) عمل می کند در صورتیکه یک تابع

مانند $*$ از $G \times X$ به X که وجود داشته باشد که در شرایط زیر صدق کند:

$$(۱) \text{ برای هر } g, h \text{ در } G \text{ و } x \text{ در } X, (gh).x = g.(h.x).$$

$$(۲) \text{ برای هر } x \text{ در } X, 1.x = x.$$

به ویژه اگر $H \triangleleft G$ آنگاه G با عمل تزویج روی H عمل می کند.

^۹ Exponent

^{۱۰} Morfism

۱-۱-۱۴ **تعریف :** یک درونریختی گروه G عبارتست از یک همریختی $f: G \rightarrow G$.

۱-۱-۱۵ **تعریف :** اگر G یک گروه و X یک مجموعه باشد عمل G روی X را :

(۱) **متعدی** نامیم، اگر برای هر دو عنصر x, y در X یک عضو g در G موجود باشد که $gx = y$.

(۲) **باوفا** (مؤثر) نامیم، اگر برای دو عضو متمایز g و h در G یک عضو x در X موجود باشد، به

طوری که $gx \neq hx$ یا به طور معادل برای هر $e \neq g \in G$ یک x در X موجود باشد، که $gx \neq ex$.

(۳) **آزاد** (نیم منظم) نامیم، اگر برای هر دو عضو متمایز g و h در G و تمام عناصر x در X

داشته باشیم، $gx \neq hx$ یا به طور معادل اگر $gx = x$ آنگاه $g = e$.

(۴) **منظم** (کاملاً متعدی) نامیم، اگر متعدی و آزاد باشد. بعبارتی برای هر دو عنصر x, y در X

دقیقاً یک عضو g در G موجود باشد، که $gx = y$. در این حالت X به فضای همگن اصلی G

یا G -تورسور^{۱۱} معروف است.

(۵) **ساده نشدنی** نامیم، اگر X یک مدول روی حلقه R و عمل G ، R -خطی باشد و دارای

هیچ زیرمدول ثابت سره ناصفری نباشد.

۱-۱-۱۶ **تعریف :** زنجیری از زیرگروههای $G \supseteq G' \supseteq (G')' \supseteq \dots$ را سری مشتق G

می نامیم و بسادگی می توان دید، که G حل پذیر است اگر و تنها اگر سری مشتق آن به عضو همانی ختم شود.

۱-۱-۱۷ **تعریف :** زنجیری از زیرگروههای $G \supseteq G' \supseteq [G', G] \supseteq \dots$

را سری مرکزی پائینی G می نامیم، می توان نشان داد که G پوچتوان است اگر و تنها اگر سری

مرکزی پائینی آن به عضو همانی ختم شود. اگر G پوچتوان باشد، کلاس G یکی کمتر از تعداد

جملات در سری مرکزی پائینی آن می باشد، لذا یک گروه آبلی، پوچتوان از کلاس یک است.

^{۱۱} G-Torsor

۱۸-۱-۱ تعریف : زنجیری از زیرگروههای $G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq G_2 \supseteq \dots \supseteq G_n = 1$ را سری نرمال

G گوئیم، در صورتی که برای هر i ، $1 \leq i \leq n$ ، $G_i \triangleleft G_{i-1}$ ، گروههای خارج قسمت G_{i-1}/G_i را فاکتورهای سری نرمال و عدد صحیح n را طول آن نامیم. اگر هر G_i زیرگروه نرمال سره ماکسیمال G_{i-1} باشد، سری نرمال را سری ترکیبی و فاکتورهای G_{i-1}/G_i را فاکتورهای ترکیبی گوئیم. در این حالت G_{i-1}/G_i هیچ زیرگروه نرمال سره به جز همانی ندارد، لذا یک گروه ساده است.

۱۹-۱-۱ تعریف : یک گروه از مرتبه توانی از یک عدد اول p را یک p -گروه می گوئیم.

۲۰-۱-۱ گروه هایزنبرگ^{۱۲}: گروه ماتریسهای $\begin{pmatrix} a & c \\ b & 1 \end{pmatrix}$ بالا مثلثی به شکل

می باشد، که آنها تحت عمل ضرب ماتریسها در نظر می گیرند. عناصر a, b, c می توانند از حلقه جابجایی دلخواه گرفته شوند، اغلب آنها از حلقه اعداد حقیقی یا حلقه اعداد صحیح گرفته می شوند.

۲۱-۱-۱ تعریف : گروه آبلی مقدماتی یک گروه آبلی متناهی است، که هر عنصر غیر بدیهی

آن دارای مرتبه p باشد، که p یک عدد اول است.

بنا به طبقه بندی گروههای آبلی به طور متناهی تولید شده، هر گروه آبلی مقدماتی باید به شکل $(Z/pZ)^n$ باشد، که n یک عدد صحیح نامنفی است (اغلب n را رتبه گروه می نامند). در اینجا Z/pZ ، گروه دوری از مرتبه p (یا بطور معادل اعداد صحیح به هم نهشتی p) را نشان می دهد.

۲۲-۱-۱ تعریف : اگر G یک p -گروه باشد، رتبه G با $m(G)$ نشان داده می شود، که

رتبه ماکسیمم بین زیرگروههای آبلی مقدماتی G است.

۲۳-۱-۱ تعریف : حاصلضرب مرکزی زیرگروههای A و B است اگر،

$$[A, B] = \langle [a, b] \rangle \text{ و } G = AB.$$

و این حاصلضرب مستقیم است اگر داشته باشیم، $A \cap B = \{1\}$ ، در حالت اخیر می نویسیم $G = A \times B$.

این مفاهیم و علامتگذاریها به طور طبیعی به حاصلضربهای متناهی از زیرگروههای G تعمیم می یابد.

۱-۱-۲۴ تعریف: اگر A و B دو گروه باشند و $\varphi: A \rightarrow \text{Aut}(B)$ یک همریختی باشد، آنگاه $A \times B$ با عمل زیر یک گروه است.

$$(h, k) * (h', k') = (hh', k \varphi(h') k') = (hh', k \varphi_{h'} k').$$

که آنرا حاصلضرب نیم مستقیم خارجی A و B می نامیم.

۱-۱-۲۵ تعریف: اگر $X = AB$ که $A \triangleleft X$ و $A \cap B = 1$ آنگاه X حاصلضرب نیم مستقیم داخلی A و B است، همچنین B را متمم A می گوئیم.

۱-۱-۲۶ تعریف: زیرگروه موضعی عبارتست از نرمالساز زیرگروه حل پذیر غیرهمانی. همچنین زیرگروه موضعی، یک نرمال کننده برای یک p -زیرگروه سیلو در گروه G می باشد.

برای عدد اول p ، زیرگروه p -موضعی را نرمالساز p -زیرگروه غیر همانی تعریف می کنیم. می گوئیم زیرگروه $L \subseteq G$ ، p -موضعی است اگر L نرمال کننده $N_G(P)$ باشد، که P زیرگروه سره G است، به طوری که $P > \{1\}$ و $|P|$ توانی از عدد اول p است.

۱-۱-۲۷ تعریف: زیرگروه نرمال C در G زیرگروه p -متمم نرمال G می باشد، اگر $|C| = p$ و $|G : C|$ توانی از p باشد.

به عبارتی اگر $P \in \text{Syl}_p(G)$ باشد و $G = PO_{p'}(G)$ می گوئیم، G دارای یک p -متمم نرمال است.

۲۸-۱-۱ تعریف : اگر $O_{p'}(G) = 1$ آنگاه G را p -فشرده گوئیم در صورتیکه ،

$C_G(O_p(G)) \leq O_p(G)$ در حالت کلی G ، p -فشرده است اگر $G/O_{p'}(G)$ چنین باشد.
(توجه کنید که $(O_{p'}(G/O_{p'}(G))) = 1$.)

۲۹-۱-۱ تعریف : از تعریف کلاس واضح است که کلاس یک p -گروه مانند P از مرتبه

p^n ، حداکثر $n-1$ است و اگر تساوی برقرار باشد، می گوئیم P از کلاس ماکسیمال است.

۳۰-۱-۱ تعریف : یک p -گروه G ، خاص^{۱۳} است اگر یا G آبلی مقدماتی باشد یا G از

کلاس ۲ بوده و $G' = \Phi(G) = Z(G)$ آبلی مقدماتی باشد. توجه کنید که در هر مورد $G' = \Phi(G)$ و G دارای کلاس ۱ یا ۲ است.

بعلاوه گروه G را فوق العاده خاص^{۱۴} نامیم اگر G خاص ناآبلی بوده و $|G'| = p$. بعبارتی

اگر G دارای کلاس ۲ بوده و $|G| = p$.

۳۱-۱-۱ تعریف : G را شبه ساده^{۱۵} گوئیم اگر G کامل^{۱۶} و $G/Z(G)$ ساده باشد.

۳۲-۱-۱ مثال : اگر $G = SL(2, q)$ که q فرد است و $q > 3$ آنگاه G شبه ساده است اما

ساده نیست. $Z(G)$ از مرتبه ۲ است و به وسیله $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ تولید می شود. $SL(2, \mathbb{F}_q)$ حل پذیر است اما این کافی نیست).

۳۳-۱-۱ تعریف : G را نیم ساده^{۱۷} گوئیم اگر یا G یک حاصلضرب مرکزی از گروههای

شبه ساده باشد یا $G = \mathbb{F}_q$. اگر $G \neq \mathbb{F}_q$ نیم ساده باشد، عاملهای شبه ساده G دقیقاً مجموعه

^{۱۳} Special

^{۱۴} Extra- Special

^{۱۵} Quasisimple

^{۱۶} Perfect

^{۱۷} Semisimple

زیرگروههای نرمال G هستند که نسبت به حل ناپذیری مینیمال می باشند و مؤلفه های G نامیده می شوند.

۳۴-۱-۱ تعریف : بزرگترین زیرگروه پوچتوان نرمال منحصر به فرد G را زیرگروه

فیتینگ^{۱۸} G گوئیم ، که زیرگروه تولید شده توسط اجتماع تمام زیرگروههای پوچتوان نرمال G می باشد و آنرا با $F(G)$ نشان می دهیم.

۳۵-۱-۱ تعریف : مقطع زیرگروههای ماکسیمال G را زیرگروه فراتینی G گوئیم که یکی

از زیرگروههای مشخص مهم G می باشد و با $\Phi(G)$ نشان می دهیم. همچنین $G/\Phi(G)$ را گروه فاکتور فراتینی G می نامیم.

۳۶-۱-۱ تعریف : برای زیرمجموعه های دلخواه A و B در G تعریف می کنیم:

$$A^B = \{ b^{-1}ab \mid a \in A, b \in B \}.$$

۳۷-۱-۱ تعریف : G را کامل گوئیم اگر $G = G'$ و همواره داریم $G' = [G, G]$.

۳۸-۱-۱ تعریف : برای هر عدد اول p ، $|G|_p$ بالاترین توان عدد اول p که بر $|G|$ بخش

پذیر است را نشان می دهد.

۳۹-۱-۱ تعریف : گروه متناهی G دارای یک زیرگروه نیم ساده نرمال ماکسیمال

منحصری فرد است، که آنرا لایه^{۱۹} G گوئیم و با $L(G)$ نمایش می دهیم. بنا به تعریف، $L(G)$ با $F(G)$ جابجا می شود.

۴۰-۱-۱ تعریف : زیرگروه فیتینگ تعمیم یافته G را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$F^*(G) = L(G)F(G)$$

^{۱۸} Fiting Subgroup

^{۱۹} Layer

۴۱-۱-۱ تعریف : فرض کنید G یک گروه باشد، p یک عدد اول، P یک p -زیرگروه سیلو

G و k عدد صحیح مثبتی باشد که $k \leq m(P)$ آنگاه تعریف می کنیم:

$$\Gamma_{P,k}(G) = \langle N_G(Q) \mid Q \leq P, m(Q) \geq k \rangle$$

$\Gamma_{P,k}(G)$ را p -چنبره k -تولیدشده G می نامیم. اگر $p = \mathbb{F}$ از چنبره k -تولید شده صحبت

می کنیم.

۴۲-۱-۱ تعریف : اگر G یک p -گروه باشد و p یک عدد اول، رتبه نرمال G را که با

$n(G)$ نمایش می دهیم عبارتست از رتبه ماکسیمم یک زیرگروه نرمال آبدی در G ، که به وضوح

$$n(G) \leq m(G).$$

۴۳-۱-۱ تعریف : گروه G را از نوع مشخصه p گوییم اگر $F^*(H)$ برای هر زیرگروه p -

موضعی H در G یک p -گروه باشد.

۴۴-۱-۱ تعریف : گروه جایگشت عبارتست از یک گروه G که عناصرش جایگشتهای

مجموعه M هستند و عمل گروه ترکیب جایگشتها در G می باشد و اغلب آنرا به صورت (M, G)

نشان می دهند.

۴۵-۱-۱ تعریف : یک گروه جایگشت G که روی مجموعه S عمل می کند را روی S

انتقالی گوییم، در صورتیکه برای $s, s' \in S$ یک x در G موجود باشد به طوری که $(s)x = s'$.

انتقالی مضاعف گوییم، در صورتیکه برای هر مجموعه از جفتهای $\{s_1, s_2\}$ و $\{s'_1, s'_2\}$ که

$$1 \leq i \leq 2, s_1 \neq s_2, s'_1 \neq s'_2 \text{ عنصر } x \text{ در } G \text{ موجود باشد به طوری که } (s_i)x = s'_i, 1 \leq i \leq 2$$

و انتقالی سه تایی و به طور کلی n -تایی به صورت مشابه تعریف می شود.

۴۶-۱-۱ تعریف : در هر گروه جایگشت G که روی مجموعه S عمل می کند، عدد صحیح

$$|S| \text{ را درجه } G \text{ می نامیم.}$$

۴۷-۱-۱ تعریف گروه فروبنیوس^{۲۰} : گروه فروبنیوس یک گروه جایگشت انتقالی

(متعدی) روی یک مجموعه متناهی است، به طوریکه هیچ عنصر غیرهمانی بیش از یک نقطه را ثابت نگه ندارد و عنصری غیربدیهی موجود باشد که یک نقطه را ثابت نگه دارد.

زیرگروه H از یک گروه فروبنیوس که یک نقطه از مجموعه X را ثابت نگه می دارد را متمم فروبنیوس می نامیم. عنصر همانی همراه با همه عناصری که با H مزدوج نیستند (به عبارتی آن عناصری که هیچ علامتی را ثابت نگه نمی دارند) تشکیل یک زیرگروه نرمال K در G از مرتبه $|G:H|$ را می دهند، که آنرا هسته فروبنیوس می نامیم. لذا گروه فروبنیوس G حاصلضرب نیم مستقیم K و H است.

۴۸-۱-۱ تعریف فضای هاسدورف : فضای توپولوژیک X را هاسدورف گوئیم اگر برای

هر x_1, x_2 که $x_1 \neq x_2$ همسایگی های U_1 از x_1 و U_2 از x_2 موجود باشند، که $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

۴۹-۱-۱ تعریف فضای همبند : فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد، یک جداساز

از X عبارتست از دو مجموعه باز ناتهی و مجزا از هم که اجتماع آنها برابر X باشد.

فضای توپولوژیک X را ناهمبند گوئیم اگر برای آن چنین جداسازی موجود باشد، در غیر این

صورت X را همبند گوئیم.

۵۰-۱-۱ تعریف فضای فشرده : گردایه $\{V_\alpha\}_{\alpha \in I}$ از زیرمجموعه های X را یک

پوشش برای فضای X نامیم اگر $X = \bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha$. اگر برای هر α ، V_α در X باز باشد، گردایه $\{V_\alpha\}$

را یک پوشش باز برای X گوئیم.

فضای توپولوژیک X را فشرده گوئیم هرگاه هر پوشش باز از X حاوی یک زیر پوشش متناهی

باشد.

^{۲۰} Frobenius group

۵۱-۱-۱ تعریف گروه توپولوژیک : یک گروه توپولوژیک G عبارتست از، یک فضای

توپولوژیک و یک گروه. به طوریکه عمل دوتایی گروه یعنی $(x, y) \mapsto xy$ و $G \times G \rightarrow G$ تابع وارون گروه یعنی $x \mapsto x^{-1} : G \rightarrow G$ توابعی پیوسته باشند. در اینجا $G \times G$ با استفاده از توپولوژی ضربی همانند یک فضای توپولوژیک می باشد.

۵۲-۱-۱ تعریف : گروه فشرد ، همبند ، هاسدورف و گسسته گروهی است که توپولوژی

وابسته به آن بترتیب فشرد ، همبند ، هاسدورف و گسسته باشد.

۵۳-۱-۱ تعریف فرم دو خطی : یک فرم دو خطی روی فضای برداری V یک نگاشت

دو خطی $V \times V \rightarrow F$ می باشد که F میدان اسکالر است. یعنی یک فرم دو خطی تابع $B: V \times V \rightarrow F$ است که در هر مؤلفه به تفکیک زیر خطی است.

$$B(u+u', v) = B(u, v) + B(u', v) \quad (۱)$$

$$B(u, v+v') = B(u, v) + B(u, v') \quad (۲)$$

$$B(\lambda u, v) = B(u, \lambda v) = \lambda B(u, v) \quad (۳)$$

فرم دو خطی $B: V \times V \rightarrow F$ انعکاسی است اگر

$$B(v, w) = \overline{B(w, v)}.$$

فرم دو خطی B را متناوب نامیم اگر برای هر $v \in V$ داشته باشیم، $B(v, v) = 0$.

اگر برای تمام $u, v \in V$ داشته باشیم، $B(u, v) = \overline{B(v, u)}$ آنگاه B متقارن است.

B را نامنفرد نامیم اگر برای تمام $v \in V$ عبارت $B(u, v) = 0$ ، نتیجه دهد که $u = 0$. به

طورمشابه زیرفضای U در V نامنفرد (نسبت به B) است اگر تحدید B به U یک فرم دو خطی نامنفرد روی U باشد.

۱-۱-۵۴ فرمول بیکر - کامبل - هاسدورف^{۲۱}

برای هر X و Y در گروه لی و Z در جبر لی، فرمول بیکر - کامبل - هاسدورف، معادله زیر می باشد. که X و Y با هم جا به جا نمی شوند.

$$Z = \text{Log}(e^X e^Y)$$

این معادله، گروههای لی را به وسیله بیان لگاریتم ضرب دو عنصر گروه لی، به عنوان یک عنصر جبر لی در مختصات متعارف به جبرهای لی پیوند می زند.

این فرمول مشهور به هنری فردریک بیکر^{۲۲}، جان ادوارد کامبل^{۲۳} و فلیکس هاسدورف^{۲۴} می باشد، که در ابتدا به وسیله کامبل (۱۸۹۷) جهت چاپ و انتشار مورد ملاحظه قرار گرفت، سپس استادانه به وسیله هنری پوینکار^{۲۵} (۱۸۹۹) و بیکر (۱۹۰۲) شرح داده شد و به طور هندسی اسلوب بندی گردید. و در نهایت به وسیله هاسدورف (۱۹۰۶) به اتحاد ژاکوبی پیوند داده شد.

۱-۱-۵۵ جبر لی: جبر لی یک ساختار جبری است، که استفاده اصلی آن در مطالعه

موضوعات هندسی مانند گروههای لی و منیفلدهای تشخیص پذیر می باشد. مطالعه جبرهای لی، مفهوم تبدیلات بینهایت کوچک را مطرح نمود.

واژه "جبر لی" توسط هرمن ویل^{۲۶} در سال ۱۹۳۰ مطرح گردید، به طوریکه در متون قدیمی برای آن از عبارت "گروه بینهایت کوچک"^{۲۷} استفاده می شد.

تعریف: جبر لی یک نوع جبر روی یک میدان است. یعنی یک فضای برداری V روی میدان F

همراه با عمل دوتایی $[\cdot, \cdot]: V \times V \rightarrow V$ می باشد به طوریکه

$[\cdot, \cdot]$ را براکت لی می نامیم، که قواعد زیر برایش برقرار است:

^{۲۱} Baker–Campbell–Hausdorff formula

^{۲۲} Henry Frederick Baker

^{۲۳} John Edward Campbell

^{۲۴} Felix Hausdorff

^{۲۵} Henri Poincaré

^{۲۶} Hermann Weyl

^{۲۷} Infinitesimal group

۱- خاصیت دو خطی

$$[ax+by, z] = a[x, z] + b[y, z] \quad , \quad [z, ax+by] = a[z, x] + b[z, y]$$

برای اسکالرهای a و b در F و عناصر x ، y و z در V .

۲- خاصیت تناوبی روی V

$$[x, x] = \mathcal{L} \quad \text{برای هر } x \text{ در } V$$

که این رابطه خاصیت ضد جا به جایی یا متقارن کج را نتیجه می دهد. یعنی، برای هر x, y در

$$V \text{ داریم، } [x, y] = -[y, x].$$

هر جبر شرکت پذیر A با عمل ضرب $*$ می تواند یک جبر لی $L(A)$ ایجاد نماید. $L(A)$ به

عنوان یک فضای برداری شبیه A است. براکت لی دو عنصر از $L(A)$ به وسیله جابجاگرشان در A

$$\text{تعریف می شود، یعنی } [a, b] = a * b - b * a.$$

خاصیت شرکت پذیری عمل ضرب $*$ در A ، اتحاد ژاکوبی جابجاگر در $L(A)$ را نتیجه می دهد.

به ویژه جبر شرکت پذیر از ماتریسهای $n \times n$ روی میدان F ، جبر لی خطی عمومی $GL_n(F)$ را

ایجاد می نماید.

همریختی ها، زیرجبرها و ایده آلهای در جبر لی

در حالت کلی براکت لی یک عمل شرکت پذیر نیست، یعنی $[x, y], z$ لزوماً با $[x, [y, z]]$

مساوی نیست، با این حال بسیاری از اصطلاحاتی که به تئوری حلقه ها یا جبرهای شرکت پذیر

تعمیم یافته است، معمولاً در جبرهای لی به کار گرفته شده اند.

زیرفضای $W \subseteq V$ که تحت براکت لی بسته است را یک زیرجبر لی می نامیم، اگر برای

$$I \subseteq V \text{ شرط قوی } [V, I] \subseteq I \text{ برقرار باشد، } I \text{ را یک ایده آل در جبر لی } V \text{ می نامیم.}$$

یک جبر لی جابجایی غیرصفر که هیچ ایده آلی نداشته باشد را ساده نامیم.

یک همریختی بین دو جبر لی، (روی یک میدان واحد) عبارتست از یک نگاشت خطی که با

جابجاگرها همساز می باشد. یعنی

$$f : V \rightarrow V \quad , \quad f([x, y]) = [f(x), f(y)] \quad , \quad \forall x, y \in V$$

همچنین در تئوری حلقه های شرکت پذیر، ایده آلهای دقیقاً هسته های همریختی ها هستند.

جبر لی V و ایده آل I در آن جبر خارج قسمت V/I را ایجاد می کنند و اولین قضیه

یکریختی برای جبرهای لی برقرار است.

۵۶-۱-۱ مثال : جبر هایزنبرگ یک جبر لی سه بعدی با مولدهای

$$x = \begin{pmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{pmatrix} \quad , \quad y = \begin{pmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{pmatrix} \quad , \quad z = \begin{pmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{pmatrix}$$

$$[x, y] = z \quad , \quad [x, z] = \square, \quad [y, z] = \square \quad \text{است به طوری که :}$$

که دقیقاً فضای ماتریسهای $\mathbb{M}_3(\mathbb{M})$ بالا مثلثی را نشان می دهد.

۵۷-۱-۱ تعریف جبرلی آزاد : فرض کنید X یک مجموعه در کتگوری جبرهای لی

باشد و $i : X \rightarrow L$ یک تابع از X به توی جبر لی L باشد. جبر لی L را روی X آزاد گوییم اگر

برای هر جبر لی A با نگاشت $f : X \rightarrow A$ ، ریختی جبر لی منحصر به فرد $g : L \rightarrow A$ موجود باشد

$$\text{به طوریکه داشته باشیم : } f = g \circ i$$

۵۸-۱-۱ تعریف p-گروه منظم : p -گروه متناهی G را منظم گوییم اگر، هر یک از

شرایط معادل زیر برقرار باشد:

(۱) برای هر a, b در G ، $H \leq G$ و $H = \langle a, b \rangle$ ، عنصر c در H' موجود باشد، به طوریکه

$$a^p \cdot b^p = (ab)^p \cdot c^p$$

(۲) برای هر a, b در G ، $H \leq G$ و $H = \langle a, b \rangle$ ، عناصر c_i در H' موجود باشند، به طوریکه

$$a^p \cdot b^p = (ab)^p \cdot c_1^p \dots c_k^p$$

(۳) برای هر a, b در G و هر عدد صحیح مثبت n ، $H \leq G$ و $H = \langle a, b \rangle$ ، عناصر c_i در H'

$$\text{موجود باشد، به طوریکه } a^q \cdot b^q = (ab)^q \cdot c_1^q \dots c_k^q \text{ که } q = p^n$$

۵۹-۱-۱ تعریف گروه پرومتناهی^{۲۸}: گروه پرومتناهی گروه توپولوژی هاسدورف فشرده

است که زیرگروههای باز آن، برای همسایگی های همانی تشکیل یک پایه دهند، یا به عبارتی هر مجموعه باز شامل ۱، شامل یک زیرگروه باز باشد.

گروه پرومتناهی یک گروه توپولوژی کاملاً همبند، فشرده و هاسدورف است، یعنی یک گروه توپولوژی که یک فضای استون است.

۶۰-۱-۱ مثال (۱): گروههای متناهی، پرومتناهی اند اگر توپولوژی آنها گسسته باشد.

(۲) گروه گسسته پرومتناهی است اگر متناهی باشد.

۶۱-۱-۱ تعریف پرو p -گروه: پرو p -گروه (برای عدد اول p) یک گروه پرومتناهی G

می باشد، به طوری که برای هر زیرگروه نرمال باز $N \triangleleft G$ گروه خارجی قسمتی G/N یک p -گروه باشد.

توجه کنید که گروههای پرومتناهی فشرده هستند. لذا زیرگروه باز آن باید از اندیس متناهی باشد، به طوریکه گروه خارج قسمتی گسسته، متناهی است.

۶۲-۱-۱ مثال: هر p -گروه متناهی یک پرو p -گروه است.

۶۳-۱-۱ تعریف پوشینگ-آپ^{۲۹}: پوشینگ-آپ یکی از قابل توجه و مهم ترین مباحث

در قضایای آنالیز موضعی است، که مسائل رده بندی گروههای p -فشرده را نمایش می دهد. و غالباً پایه ای برای طبقه بندی گروههای ساده از نوع مشخصه ۲ می باشد.

در اینجا خود را به عدد اول ۲ محدود می کنیم، اما با این وجود تمام مسائل می توانند برای گروههای p -فشرده به ازای هر p دلخواه فرمول بندی شوند.

گروه G از نوع مشخصه ۲ را در نظر می گیریم. بنابراین هر زیرگروه ۲-موضعی G ، ۲-فشرده با

چنبره بدیهی است.

^{۲۸} Profinite group
^{۲۹} Pushing-up

مسئله پوشینگ-آپ اصلی می تواند به صورت زیر بیان شود:

اگر H یک زیرگروه ۲-موضعی G باشد که شامل ۲-سیلو زیرگروه G نیست، تحت چه شرایطی H مشمول در یک زیرگروه ۲-موضعی H^* در G (۱-۱) است. در حالیکه ۲-سیلو زیرگروهها دارای مرتبه بزرگتری نسبت به مرتبه H هستند؟

فرض کنید $T \in Syl_2(H)$ و T را به $S \in Syl_2(G)$ بسط دهید به طوریکه $T < S$ لذا لازم است

بپرسیم :

آیا زیرگروه غیر بدیهی R در T وجود دارد که :

(الف) $R \triangleleft H$.

(ب) $N_S(R) > T$. (۲-۱)

قرار می دهیم $H^* = N_G(R)$. توجه کنید که $N_S(T) > T$ به طوریکه اگر $R \text{ ch } T$ آنگاه

$$N_S(R) \geq N_S(T) > T$$

لذا برای زیرگروه مشخص ، عبارت (۲-۱) به مسئله زیر تبدیل می شود:

آیا زیرگروه مشخص غیر بدیهی R در T وجود دارد که در H نرمال باشد؟ (۳-۱)

مسئله پوشینگ-آپ اغلب در جملات منفی به صورت دیگری عنوان می شود:

چه محدودیتهایی روی ساختار H باید تحمیل شود، اگر T دارای هیچ زیرگروه R نباشد که در

عبارات (۳-۱) یا (۲-۱) صدق کند؟

اکنون عبارت (۱-۱) را به صورت زیر تغییر می دهیم:

اگر H و K دو زیرگروه ۲-موضعی در G دارای یک ۲-سیلو زیرگروه

مشترک T باشند، تحت چه شرایطی یک زیرگروه ۲-موضعی واحد در G (۴-۱)

شامل H و K وجود دارد؟ به ویژه چه موقع زیرگروه غیر بدیهی R در T

وجود دارد که هم در H و هم در K نرمال باشد؟

به عنوان مثال : فرض کنید $S \in Syl_p(G)$ و S مشمول در یک زیرگروه ۲-موضعی ماکسیمال منحصر به فرد M در G باشد.

آیا می توان ادعا کرد که $N_G(R) \leq M$ برای هر $R \leq S$ ؟ به طور معادل آیا

$$\Gamma_S(G) \leq M. \quad (5-1)$$

فرض کنید عبارت (۵-۱) نادرست باشد. لذا بلافاصله می توان یک زیرگروه ۲-موضعی X در G با شرایط زیر تولید نمود:

$$(الف) \quad X \not\leq M.$$

$$(ب) \quad T = S \cap X \in Syl_p(X). \quad (6-1)$$

(ج) اگر H یک زیرگروه ۲-موضعی G باشد، به طوریکه $|S \cap H| > |T|$ آنگاه $H \leq M$.
برای پاسخ مثبت دادن به (۵-۱) باید برای وجود زیرگروه ۲-موضعی X که در (۶-۱) صدق می کند به تناقض برسیم. که این شرایط به طور مستقیم به ساختار X محدود می شود.

بحث فوق اشاره کوتاهی است به مفهوم بنیادی مسئله پوشینگ-آپ برای مطالعه گروههای ساده.

۱-۱-۶۴ تعریف : اگر G یک p -گروه آبلی متناهی آنگاه $\Omega_n(G)$ عبارتست از مجموعه

$$\{g \in G \mid g^{p^n} = 1\}.$$

۲-۱ چند قضیه کاربردی

۱-۲-۱ قضیه (لاگرانژ). مرتبه زیرگروه H در گروه G مقسوم علیهی از مرتبه G است ،

لذا $|G|/|H|$ یک عدد صحیح است که با $|G:H|$ نشان می دهیم و آنرا اندیس H در G می گوئیم. $|G:H|$ تعداد هم مجموعه های راست (یا چپ) H در G است.

۲-۲-۱ قضیه. اگر X و Y زیرگروههای G باشند آنگاه

$$|XY| = |YX| = |X| |Y| / |X \cap Y|.$$

به علاوه XY یک زیرگروه G است اگر و تنها اگر YX زیرگروه باشد.

۳-۲-۱ قضیه. فرض کنید H و K زیرگروههای G باشند و $K \triangleleft G$ ، در این صورت داریم:

(الف) KH زیرگروه G است.

(ب) KH/K با $H/(K \cap H)$ یکرخت است.

استدلال فراتینی^{۳۰}: قضیه بعدی، نتیجه ساده ای از قضیه سیلو است که گاهی آنرا استدلال

فراتینی گویند.

این قضیه با وجود سادگی اش ، دارای اهمیت بنیادی می باشد.

۴-۲-۱ قضیه. اگر $H \triangleleft G$ و P که $P \in \text{Syl}_p(H)$ ، آنگاه $G = N_G(P)H$.

برهان : واضح است که $N_G(P)H \subseteq G$. برای x در G چون $H \triangleleft G$ داریم:

$$P^x \subseteq H^x = x^{-1}Hx = H .$$

از طرفی $|P^x| = |P|$ لذا $P^x \in \text{Syl}_p(H)$ و بنا به قضیه سیلو، P^x به وسیله عنصر y در H با

P مزدوج است. لذا $P^x = P^y$. پس $P^{xy^{-1}} = P$ و از آنجا $xy^{-1} \in N_G(P)$ ، چون $x = (xy^{-1})y$

و x دلخواه است لذا حکم قضیه نتیجه می شود.

۵-۲-۱ قضیه (لم سه - زیرگروه^{۳۱})

فرض کنید x, y و z عناصری از G باشند و H, K و L زیرگروههای G باشند آنگاه داریم:

$$[x, y^{-1}, z]^y [y, z^{-1}, x]^z [z, x^{-1}, y]^x = 1 \quad (۱)$$

$$[L, H, K] = 1 \quad \text{آنگاه} \quad [K, L, H] = 1, [H, K, L] = 1 \quad (۲)$$

برهان: داریم :

$$\begin{aligned} [x, y^{-1}, z]^y &= y^{-1} [x^{-1} y x y^{-1}, z] y = y^{-1} (y x^{-1} y^{-1} x) z^{-1} (x^{-1} y x y^{-1}) z y \\ &= x^{-1} y^{-1} x z^{-1} x^{-1} y x y^{-1} z y \end{aligned}$$

^{۳۰} Frattini argument
^{۳۱} Three-Subgroup Lemma

قرار می دهیم، $a = xzx^{-1}yx$ ، $b = yxy^{-1}zy$ و $c = zyz^{-1}xz$.

و توجه کنید که b و c به وسیله جایگشت دوری عناصر y, x و z از a به دست می آیند، و

داریم:

$$[x, y^{-1}, z] = a^{-1}b$$

همچنین با جایگشت دوری y, x و z داریم :

$$[y, z^{-1}, x]^z = b^{-1}c \quad , \quad [z, x^{-1}, y]^x = c^{-1}a$$

$$\text{چون } (a^{-1}b)(b^{-1}c)(c^{-1}a) = 1$$

لذا نتیجه می گیریم (۱) برقرار است.

حال فرض کنیم $[H, K, L] = [K, L, H] = 1$. آنگاه برای تمام $x \in H$ ، $y \in k$ و $z \in L$

$$\text{داریم } [x, y^{-1}, z] = [y, z^{-1}, x] = 1 \text{ . لذا بنا به (۱) داریم : } [z, x^{-1}, y] = 1$$

اما $[L, H, K]$ به وسیله مجموعه تمام جابجاگرهای به شکل $[z, x^{-1}, y]$ و مزدوجهای آن

تولید می شود در نتیجه $[L, H, K] = 1$.

۳-۱ خود ریختی های خودتوان از جبرها

۱-۳-۱ فرضها

(۱) n یک عدد صحیح مثبت است.

(۲) R یک حلقه آرتینی است به طوریکه :

(الف) برای هر عدد اول $q < n$ وارون پذیر است، که ۱ عنصر همانی در R می باشد.

(ب) هر ایده آل راست ماکسیمال R ، یک ایده آل دو طرفه است.

(۳) L یک R -مدول راست به طور متناهی تولید شده است (لذا دارای یک R -سری ترکیبی

است).

(۴) برای هر R -زیرمدول M در L ، $C(M)$ طول سری ترکیبی M را نمایش می دهد.

(۵) α یک خودریختی R -مدولی از L است.

(۶) λ ، درونریختی R -مدولی α^{-1} از L است. (یعنی برای هر $x \in L$ داریم،

$$(\lambda(x) = \alpha(x) - x$$

$$\lambda^n = 0 \quad (۷)$$

$$\delta = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+1} \lambda^i / i \quad (۸)$$

توجه کنید که اگر R یک حلقه جا به جایی یا یک حلقه تقسیم باشد آنگاه شرط (۲ب) همواره

برقرار است. همچنین $\delta^n = 0$. چون $\delta^n = 0 = (\alpha - 1)^n$ لذا با علامتگذاری مرجع [۱] داریم :

$$\delta = \text{Log } \alpha, \quad \text{Exp } \delta = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\delta^i}{i!}$$

۱-۳-۲ گزاره. برای درونریختی های δ, α داریم :

$$\alpha = \text{Exp}(\text{Log } \alpha) = \text{Exp } \delta = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\delta^i}{i!}$$

برهان: به قضیه ۱-۲ از مرجع [۱] مراجعه شود.

توجه: فرض کنید t یک متغیر حول R باشد و $L[t]$ ، مدول $L \otimes_R R[t]$ روی حلقه

چندجمله ای $R[t]$ باشد. همواره نشانیدن معمولی R به توی $R[t]$ را داریم، و اکنون L را به وسیله

یکی کردن $x \in L$ با $x \otimes 1 \in L[t]$ توی $L[t]$ می نشانیم.

برای هر عنصر u در مرکز $R[t]$ ، نگاشت $\tau_u : L[t] \rightarrow L[t]$ را به صورت زیر تعریف

$$\tau_u(x) = (\text{Exp}(u\delta))(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{u^i}{i!} \delta^i(x). \quad \text{می کنیم:}$$

توجه کنید که τ_u یک درونریختی $R[t]$ -مدولی از $L[t]$ است که

$$\alpha = \text{Exp } \delta = \tau_1.$$

قرار می دهیم $\sigma = \tau_1$. فرض کنیم f عنصر غیر صفری از $L[t]$ باشد، به طوریکه

$$f = \sum_{i=0}^k c_i t^i.$$

برای عدد صحیح نامنفی k و $c_0, c_1, \dots, c_k \in L$ که $c_k \neq 0$ ، قرار می دهیم:

$$c(f) = c_k \quad \text{و} \quad \deg f = k.$$

برای هر R -زیرمدول M از L فرض کنید $S(M)$ ، $R[t]$ -زیرمدول از $L[t]$ ، تولید شده به

$$S(M) = \langle \sigma(x), x \mid x \in M \rangle \quad \text{یعنی} \quad \sigma(x) \text{ باشد، } x \in M,$$

قرار می دهیم،

$$M^* = \{0\} \cup \{c(f) \mid 0 \neq f \in S(M)\}.$$

لذا M^* یک R -زیرمدول L است.

۳-۳-۱ قضیه. فرض کنید فرضهای ۱-۳-۱ و علامتگذاری فوق برقرار باشد و M یک R -

زیرمدول L باشد.

آنگاه R -زیرمدول M^* از L دارای خواص زیر است:

(الف) M^* تحت α ثابت است.

(ب) اگر M تحت α ثابت باشد آنگاه $M^* = M$.

(ج) M و M^* دارای طول ترکیبی یکسانی هستند یعنی $C(M) = C(M^*)$.

(د) برای هر R -زیرمدول N از M داریم، $N^* \leq M^*$.

(ه) اگر $L = L_m \leq \dots \leq L_1 \leq L_0$ یک سری افزایشی از R -زیرمدولهای L باشد که

برای $i = 0, \dots, m$ داریم:

$$\lambda(L_i) \leq L_{i-1}.$$

آنگاه برای $1 \leq i \leq m$ خواهیم داشت:

$$M^* \cap L_i > M \cap L_i.$$

مگر اینکه M تحت α ثابت باشد.

خلاصه سازی قضیه ۳-۳-۱: قسمت (د) بدیهی است. اگر M تحت α ثابت باشد، آنگاه

$$M^* \leq M, \quad S(M) \leq M[t] \quad \text{لذا (ب) از (ج) نتیجه می شود.}$$

برهان قضیه ۳-۳-۱ (ج): قسمت (ج) را به وسیله استقراء روی طول ترکیبی $C(M)$

اثبات می کنیم. به وضوح داریم $C(M) \geq 1$.

یک R -مدول α -ثابت X در L را در نظر می گیریم که تحت رابطه " X شامل M نیست"

ماکسیمال باشد. آنگاه $L/X \neq \emptyset$. از طرفی چون $\lambda^n = \emptyset$ لذا λ یک R -درونریختی پوچتوان λ' روی

L/X القاء می کند. هسته λ' غیرصفر است و بنابراین شامل یک R -زیرمدول ساده نشدنی

$X \not\subseteq L/X$ در L/X می باشد. بنا به خاصیت ماکسیمال X ، داریم، $X \not\subseteq M$. همچنین

$$X \not\subseteq M+X > X \quad \text{و} \quad X \not\subseteq X \quad \text{ساده نشدنی است و}$$

$$X \not\subseteq M+X.$$

فرض کنیم $N = X \cap M$ و قرار می دهیم $c \in M - N$ آنگاه $M = N + cR$ و M/N ساده

نشدنی است. چون σ یک R -همریختی می باشد داریم:

$$S(M) = \sigma(M)R[t] = \sigma(c)R[t] + \sigma(N)R[t] = \sigma(c)R[t] + S(N) \quad (۱-۳-۱)$$

به وضوح $M^* \geq N^*$. بنا به استقراء، $C(N^*) = C(N)$ بنابراین

$$C(M^*) \geq C(N^*) = C(N) = C(M) - \emptyset. \quad (۲-۳-۱)$$

چون X یک R -زیرمدول α -ثابت از L است لذا

$$\forall i=0, \dots, n-1 \quad \lambda(X) \leq X \quad \text{و} \quad \delta^i(N) \leq \delta^i(X) \leq X.$$

بنابراین

$$S(N) \leq X R[t] = \sum_{i \geq 0} X t^i.$$

همچنین $N = M \cap X$ و $c \in M \setminus N$ پس $c \notin X$.

یادآور می شویم که

$$\sigma(c) = c + \sum_{i=\square}^{n-\square} \frac{\delta^i(c)}{i!} t^i.$$

اکنون چندجمله ای دلخواه f را به صورت $f = \sigma(c)t^k + g$ که $k \geq \square$ و $g \in S(N)$ در نظر می گیریم. فرض کنید b ضریب t^k در g باشد. آنگاه ضریب t^k در f عبارتست از $c+b$ که غیرصفر می باشد چون

$$c+b \equiv c \not\equiv 0 \pmod{X}.$$

لذا $\deg f \geq k$. چندجمله ای $f_{\square}$ را همانند بالا طوری انتخاب می کنیم که $(\deg f_{\square}) - k$ مینیمال باشد. فرض کنید

$$g_0 = f_0 - \sigma(c)t^k, \quad d = \deg f_0 \quad \text{و} \quad f_0 = \sum_{i=0}^d a_i t^i. \quad (3-3-1)$$

اکنون $a_d = c(f_0) \in M^*$ فرض کنیم a_d در N^* قرار بگیرد. $h \in S(N)$ را طوری در نظر می گیریم که $c(h) = a_d$ و فرض کنیم $e = \deg h$ اگر $d \geq e$ قرار می دهیم:

$$f^* = f_{\square} h t^{d-e} = \sigma(c)t^k + (g_{\square} h t^{d-e})$$

آنگاه f^* دارای شکلی همانند بالاست. (تعریف شده برای $f_{\square}$) همچنین داریم:

$$\deg f^* < \deg f_0 \quad \text{و} \quad (\deg f^*) - k < \deg f_0 - k$$

که برخلاف انتخاب f می باشد لذا باید $d < e$. در این حالت نیز تناقضی مشابه به دست خواهیم آورد اگر قرار دهیم:

$$f^* = f_{\square} t^{e-d} - h = \sigma(c)t^{k+e-d} + (g_{\square} t^{e-d} - h).$$

چون

$$(\deg f^*) - (k + e - d) < \deg f_0 + (e - d) - (k + e - d) = (\deg f_0) - k.$$

این نشان می دهد که a_d در N^* قرار ندارد، لذا $M^* > N^*$. بنا به رابطه (2-3-2) داریم.

$$C(M^*) \geq C(N^*) + \not\leq C(M). \quad (۴-۳-۱)$$

برای کامل کردن برهان قضیه ۳-۳-۲ (ج)، باید نشان دهیم که $C(M^*) \leq C(M)$ یا به طور

معادل M^*/N^* ساده نشدنی است.

اکنون $f_{\square}$ ، k و a_d را همانند رابطه (۳-۳-۲) در نظر می گیریم. قرار دهید

$$M_1 = a_d R + N^* \quad \text{و} \quad A = \{r \in R \mid cr \in N\}. \quad (۵-۳-۱)$$

چون $M = N + cR$ و M/N ساده نشدنی است، A یک ایده آل راست ماکسیمال در R است

و M/N به عنوان یک R -مدول با R/A یکرخت است. بنا به فرض ۳-۱-۱ (ب)، A در واقع یک

ایده آل دوطرفه است، برای $r \in A$ داریم $cr \in N$ و از رابطه (۳-۳-۱) داریم:

$$f_{\square} r = \sum_{i=\square}^d (a_i r) t^i \quad \text{و} \quad f_{\square} r = \sigma(cr) t^k + g_{\square} r \in S(N).$$

این نشان می دهد که یا $a_d r = \square \notin N^*$ یا $a_d r = c(f_{\square}) \in N^*$. در هر دو مورد $a_d r \in N^*$.

بنابراین $a_d A \leq N^*$. همچنین a_d در $M^* \setminus N^*$ واقع است، رابطه (۵-۳-۱) نتیجه می دهد که

M_1/N^* ساده نشدنی است و

$$\forall r \in R, a_d r \in N^* \Leftrightarrow r \in A. \quad (۶-۳-۱)$$

بنابراین کافیت نشان دهیم که $M_1 = M^*$.

$f \neq 0$ را در $S(M)$ در نظر می گیریم. باید نشان دهیم $c(f)$ در M_1 واقع است. از رابطه

(۱-۳-۱) داریم:

$$f = \sigma(c)g + h, \quad g \in R[t] \quad \text{و} \quad h \in S(N).$$

از رابطه (۳-۳-۱) داریم:

$$f t^k = \sigma(c) t^k g + t^k h = f_0 g - g_0 g + t^k h.$$

که $f_{\square}$ ، g و k همانند بالا هستند. به ویژه $g_{\square} \in S(N)$. لذا

$$g_{\square} g, t^k h \in S(N). \quad (۷-۳-۱)$$

اکنون g مجموعی از جملات به شکل $b_i t^i$ است که b_i در R واقع است.

فرض کنید g_1 مجموعه ای از جملات $b_i t^i$ باشد که $b_i \in R \setminus A$ ، اگر وجود داشته باشد، در غیر

این صورت فرض کنید $g_1 = 0$ و قرار دهید $g_2 = g - g_1$ آنگاه

$$f t^k = f_0 g_1 + f_0 g_2 - g_0 g + t^k h \quad , \quad f_0 g_2 \in S(M)A$$

از رابطه (۱-۳-۱) داریم، $S(M) = \sigma(c)R[t] + S(N)$ همچنین $RA \leq A$ ، $cA \leq N$ و

$$f_0 g_2 \in S(M)A \leq \sigma(c)A[t] + S(N) \leq \sigma(cA)R[t] + S(N) = S(N) \quad .$$

بنابراین از رابطه (۷-۳-۱) داریم:

$$f t^k = f_0 g_1 + g^* \quad , \quad g^* \in S(N) \quad . \quad (۸-۳-۱)$$

توجه کنید که $c(f t^k) = c(f)$

اگر $g_1 = 0$ یا $\deg(f_0 g_1) < \deg g^*$ آنگاه:

$$c(f) = c(f t^k) = c(g^*) \in N^* \leq M_1 \quad .$$

که همان مطلوب ماست.

بنابراین فرض می کنیم $g_1 \neq 0$ ، $\deg(f_0 g_1) \geq \deg g^*$ قرار می دهیم $r = c(g_1)$ لذا

$r \in R \setminus A$ بنا به روابط (۳-۳-۱) و (۶-۳-۱)، $c(f) = a_d r$ و $a_d r \notin N^*$ به ویژه $a_d r \neq \bar{c}$ هرگاه

$$c(f_0 g_1) = a_d r \notin N^* \quad .$$

بنا به رابطه (۵-۳-۱)، $a_d r \in M_1$ یادآور می شویم که $\deg(f_0 g_1) < \deg g^*$ لذا بنا به رابطه

$$c(g^*) \in N^* \quad , \quad (۸-۳-۱) \quad \text{و}$$

$$c(f) = \begin{cases} c(f t^k) = a_d r \in M_1 & , \quad \text{اگر } \deg(f_0 g_1) > \deg g^* \\ c(f) = a_d r + c(g^*) \in M_1 \setminus N^* & , \quad \text{اگر } \deg(f_0 g_1) > \deg g^* \end{cases}$$

در هر دو حالت $c(f) \in M_1$ که همان مطلوب ماست. و این برهان قضیه ۱-۳-۳(ج) را کامل

می نماید.

اکنون قسمتهای (الف) و (هـ) قضیه ۱-۳-۳ را ثابت می کنیم.

برهان قضیه ۱-۳-۳(الف): یادآور می شویم که δ, α, R -درونریختی های L هستند.

ابتدا به وسیله تعیین δ به عنوان یک $R[t]$ -درونریختی از $L[t]$ ، دامنه δ را به تمام $L[t]$

گسترش می دهیم، لذا δ به وسیله ضرب با هر عنصر $R[t]$ ، به ویژه با t ، جا به جا می شود.

اکنون تابع مشتق روی $R[t]$ و روی $L[t]$ را برای هر $f = \sum_{i \geq 0} a_i t^i$ ، با فرمول معمول زیر

تعریف می کنیم :

$$f' = \sum_{i \geq 0} (i+1) a_{i+1} t^i .$$

یادآور می شویم که برای $x \in M$ داریم:

$$\sigma(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\delta^i(x)}{i!} t^i .$$

بنابراین

$$\delta(\sigma(x)) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\delta^{i+1}(x)}{i!} t^i = (\sigma(x))' .$$

(یعنی $(e^{\delta t})' = \delta e^{\delta t}$ همچنان که انتظار می رفت).

عنصر f در $S(M)$ را در نظر می گیریم. فرض کنید $d = \deg f$ آنگاه $x_i \in M$ ، $c_j \in L$ و

$f_i \in R[t]$ داریم:

$$f = \sum_{j=0}^d c_j t^j = \sum_i \sigma(x_i) f_i .$$

چون δ یک $R[t]$ -درونریختی است، لذا برای هر i :

$$\delta(\sigma(x_i) f_i) = \delta(\sigma(x_i)) f_i = \sigma(x_i)' f_i .$$

بنابراین برای هر i داریم:

$$\delta(f) = \sum_{j=\overline{1}}^d \delta(c_j) t^j = \sum_i \delta(\sigma(x_i)) f_i = \sum_i \sigma(x_i)' f_i . \quad (9-3-1)$$

بنا به خواص مشتق می دانیم، $(\sigma(x_i) f_i)' = \sigma(x_i)' f_i + \sigma(x_i) f_i'$ ، لذا داریم:

$$\delta(f) = \sum_i (\sigma(x_i) f_i)' - \sum_i \sigma(x_i) f_i' = f' - g . \quad (10-3-1)$$

به طوریکه $g \in S(M)$.

برای نشان دادن $\alpha(M^*) = M^*$ کفایت نشان دهیم که $\delta(M^*) \leq M^*$.

چون $\alpha = \text{Exp}(\delta)$ ، برای اینکار نیاز است که در پاراگراف قبل داشته باشیم، $\delta(c_d) \in M^*$.

اگر $\delta(c_d) = \overline{1}$ این بدیهی است. پس فرض می کنیم چنین نباشد. آنگاه از رابطه (9-3-1) داریم:

$$\deg \delta(f) = d , \quad \delta(c_d) = c(\delta(f)).$$

بوضوح، $\deg f' \leq d-1$ چون $\deg(f' - g) = \deg \delta(f) = d$ از رابطه (10-3-1) داریم:

$$\deg(g) = d , \quad C(\delta(f)) = -C(g) \in M^*$$

که همان مطلوب ماست.

برهان قضیه ۳-۳-۱(هـ): در اینجا از استقراء روی $C(L)$ استفاده می کنیم.

توجه کنید که $M \cap L_0 = 0 = M^* \cap L_0$. اکنون عدد صحیح i به اندازه کافی بزرگ را طوری

اختیار می کنیم که:

$$\forall j = 0, 1, \dots, i , \quad M \cap L_j = M^* \cap L_j . \quad (11-3-1)$$

آنگاه $i < m$ و

$$M \cap L_{i+1} \neq M^* \cap L_{i+1} . \quad (12-3-1)$$

قرار می دهیم $X = N + W$ ، $W = \lambda(N) + \lambda^2(N) + \dots + \lambda^{n-1}(N)$ و $N = M \cap L_{i+1}$.

آنگاه W و X تحت α ثابت هستند و $W = \lambda(X)$. از فرض ۳-۱-۱(۸) و تعریف N^* برای

زیرمدول N داریم:

$$N^* \leq N + \delta(N) + \dots + \delta^{n-1}(N) \leq N + W = X. \quad (13-3-1)$$

اکنون $X \leq L_{i+\mathbb{L}}$ و $W \leq \lambda(X) \leq \lambda(L_{i+\mathbb{L}}) \leq L_i$ لذا

$$N \cap W = (M \cap L_{i+1}) \cap (L_i \cap W) = (M \cap L_i) \cap W.$$

آنگاه از رابطه (11-3-1) داریم:

$$N \cap W = (M^* \cap L_i) \cap W = M^* \cap W$$

که تحت α ثابت است. لذا بنا به قسمت‌های (ب) و (د) این قضیه داریم:

$$N \cap W = (N \cap W)^* \leq N^* \cap W^* = N^* \cap W$$

$$. \quad = (M \cap L_{i+\mathbb{L}})^* \cap W \leq M^* \cap W = N \cap W$$

به وضوح باید تساوی در همه جا برقرار باشد و

$$N \cap W = N^* \cap W. \quad (14-3-1)$$

از (14-3-1) داریم:

$$(N^* + W) / W \cong N^* / (N^* \cap W) = N^* / (N \cap W)$$

بنا به قسمت (ج) این قضیه، $C(N) = C(N^*)$. بنابراین

$$\begin{aligned} C((N^* + W) / W) &= C(N^* / (N \cap W)) = C(N / (N \cap W)) \\ &= C((N + W) / W) = C(X / W). \end{aligned}$$

بنا به رابطه (13-3-1)، $N^* \leq X$ لذا $N^* + W \leq X$ پس داریم:

$$N^* + W = X. \quad (15-3-1)$$

چون N^*, X و W تحت α ثابت هستند، رابطه (15-3-1) نتیجه می دهد که :

$$X / N^* = (N^* + W) / N^* = (N^* + \lambda(X)) / N^* = \lambda(X / N^*)$$

همچنین λ پوچتوان است و داریم :

$$X / N^* = \mathbb{L} \quad \text{و} \quad X = N^*.$$

آنگاه بنا به قسمت‌های (ب) و (د) داریم:

$$M \cap L_{i+\mathbb{N}} = N \leq X = N^* = (M \cap L_{i+\mathbb{N}})^* \leq M^* \cap L_{i+\mathbb{N}}^* = M^* \cap L_{i+\mathbb{Z}}.$$

در نتیجه بنا به رابطه (۱۲-۳-۱)، $M \cap L_{i+\mathbb{N}} < M^* \cap L_{i+\mathbb{Z}}$ ، که این (ه) را نتیجه می دهد و برهان قضیه ۳-۳-۱ کامل می شود.

۴-۳-۱ نتیجه. با علامتگذاری قضیه ۳-۳-۱، برای هر R -زیرمدول α -ثابت X در L

داریم:

$$(M \cap X)^* \leq M^* \cap X \quad \text{و} \quad C(M \cap X) \leq C(M^* \cap X)$$

۵-۳-۱ قضیه. با علامتگذاری قضیه ۳-۳-۱، فرض کنید R یک حلقه جا به جایی، L

یک جبر لی روی R ، α یک R -خودریختی L ، M یک زیرجبر L و N یک ایده آل M باشد.

همچنین برای هر $x, y \in M$ ، هرگاه j, i اعداد طبیعی باشند که $i+j \geq n$ ، فرض کنید،

$$[\lambda^i(x), \lambda^j(y)] = 0.$$

آنگاه :

(الف) M^* یک زیرجبر L است.

(ب) $[M^*, N^*] \leq [M, N]^*$.

(ج) $(Z(M))^* \leq Z(M^*)$.

(د) اگر k یک عدد طبیعی و M پوچتوان از رده حداکثر k باشد، آنگاه M^* نیز چنین است.

(ه) اگر $b \in R$ و $Mb = \mathbb{C}$ آنگاه $M^*b = \mathbb{C}$.

توجه: معمولاً، ایده آل N در L یک R -زیرجبر L است به طوریکه $[N, L] \leq N$.

حال فرض کنیم فرضها و علامتگذاری قضیه ۳-۳-۱ برقرار باشند. به ویژه $\lambda = \alpha - \mathbb{C} \lambda^n = \mathbb{C}$ ،

$$\delta = \text{Log } \alpha = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+1} \frac{\lambda^i}{i}, \quad \alpha = \text{Exp } \delta = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\delta^i}{i!}$$

$$\forall x \in L, \quad \sigma(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{t^i}{i!} \delta^i(x)$$

برای هر عنصر غیرصفر $f = \sum_{i=0}^k c_i t^i$ که $c_k \neq 0$ ، قرار می دهیم، $C(f) = c_k$ ، $k = \deg f$ ، $C(f) = c_k$.

۱-۳-۶ فرضها.

(۱) λ, α, R, n, L و δ در فرضهای ۱-۳-۱ صدق کنند.

(۲) R حلقه جا به جایی و L جبر لی روی R باشد.

(۳) α یک خودریختی جبر لی L باشد.

(۴) M یک زیرجبر L روی R باشد.

(۵) برای هر $u, v \in M$ و اعداد طبیعی i و j که $i+j \geq n$ ، داریم، $[\lambda^i(u), \lambda^j(v)] = 0$.

۱-۳-۷ گزاره. فرض کنید فرضهای ۱-۳-۶ و علامتگذاری قضیه ۱-۳-۳ برقرار باشد به ویژه:

$$\forall x \in L, \quad \sigma(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{t^i}{i!} \delta^i(x)$$

آنگاه:

(الف) برای هر عدد طبیعی k و هر u و v در M ،

$$\delta^k([u, v]) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} [\delta^i(u), \delta^{k-i}(v)].$$

(ب) برای هر u و v در M ، $\sigma([u, v]) = [\sigma(u), \sigma(v)]$.

برهان قضیه ۱-۳-۵: در اینجا فرضهای ۱-۳-۶ برقرار است. قرار می دهیم $P = [M, N]$ و

فرض کنید $x \in M^*$ و $y \in N^*$ مخالف صفر باشند. بنا به تعریف M^* و N^* چندجمله ایهای

$f \in S(M)$ و $g \in S(N)$ موجودند به طوری که x ضریب پیشرو f و y ضریب پیشرو g است

یعنی،

$$C(f) = x, \quad C(g) = y. \quad (۱-۳-۵)$$

همچنین اعداد طبیعی r ، s و عناصر

$$u_1, \dots, u_r \in M \text{ و } v_1, \dots, v_s \in N, \quad f_1, \dots, f_r, g_1, \dots, g_s \in R[t]$$

موجودند به طوریکه

$$f(t) = \sum_{i=1}^r \sigma(u_i) f_i(t) \quad \text{و} \quad g(t) = \sum_{j=1}^s \sigma(v_j) g_j(t). \quad (17-3-1)$$

بنا به گزاره ۷-۳-۱ (ب) برای هر i و j داریم:

$$[\sigma(u_i), \sigma(v_j)] = \sigma([u_i, v_j]) \in S(P).$$

بنابراین $[f, g] \in S(P)$. چون x و y به ترتیب ضرایب پیشرو f و g هستند، لذا یا

$[x, y] = \bar{c}$ یا $[x, y]$ ضریب پیشرو $[f, g]$ است، بنابراین $[x, y] \in P^*$ و قطعاً

$$[\bar{c}, N^*] = [M^*, \bar{c}] = \bar{c}.$$
 این (ب) را نتیجه می دهد.

قسمت (الف) با قرار دادن $N=M$ در (ب) و قسمت (ج) با قرار دادن $N=Z(M)$ در (ب)

بدست می آیند. یک استدلال استقرائی بدیهی با شروع از (ب)، قسمت (د) را نتیجه می دهد و (ه) را

ثابت می کنیم،

توجه کنید که اگر $mb = \bar{c}$ آنگاه $S(M)b = \bar{c}$.

۴-۱ کاربرد قضیه ای از جبر در p-گروهها

۱-۴-۱ تعریف. فرض کنید L یک جبر (نه لزوماً شرکت پذیر) روی میدان F از مشخصه p

باشد، α یک خودریختی خودتوان از L باشد، (لذا $\alpha - 1$ پوچتوان است.) ترتیب جزئی $<$ را روی

مجموعه زیرجبرهای آبدی L با دامنه d به صورت زیر تعریف می کنیم. قرار می دهیم $B < B'$ اگر به

ازای هر L_i به عنوان زیرجبر آبدی L داشته باشیم:

$$\forall i > 0, \quad \dim(B \cap L_i) \leq \dim(B' \cap L_i).$$

$$\exists j > 0, \quad \dim(B \cap L_j) < \dim(B' \cap L_j)$$

۲-۴-۱ قضیه. اگر B تحت ترتیب جزئی $<$ ماکسیمال باشد آنگاه B ، α -ثابت است، در

صورتی که شرایط زیر برقرار باشند.

$$(1) \quad (\alpha - \mathbb{Z})^p = \mathbb{Z}.$$

(۲) به ازای هر u و v در B و $i, j \geq \mathbb{Z}$ که $i + j \geq p$ داشته باشیم:

$$((\alpha - \mathbb{Z})^i u) ((\alpha - \mathbb{Z})^j v) = \mathbb{Z}.$$

اکنون قضیه ۲-۴-۱، که یک نتیجه در مورد جبرهاست را، به قضیه ۷-۴-۱ که یک نتیجه در

مورد p -گروهها می باشد تبدیل می کنیم.

ابزار اصلی ما برای به کارگیری قضیه ۲-۴-۱ در p -گروهها، فرمول بیکر-کامپل-هاسدورف

است.

با جبر لی L روی میدان F از مشخصه صفر شروع می کنیم و L با تعریف زیر به یک گروه

تبدیل می شود که برای $x, y \in L$:

$$xy = x + y + \frac{1}{2}[x, y] + \dots \quad (1-4-1)$$

همچنین لازم است نشان داد که:

(۱) اگر F به ازای هر p دارای مشخصه اول p و L پوچتوان از رده حداکثر $p - \mathbb{Z}$ باشد،

معادله (۱-۴-۱) می تواند برای تعریف یک گروه مفید باشد.

(۲) در بسیاری موارد، ممکن است با گروه G شروع کنیم که وارون معادله (۱-۴-۱)، G را به

یک جبر لی تبدیل می کند.

خط مشی ما در اینجا کاربرد (۲) است و آنگاه استفاده از قضیه ۲-۴-۱ که ثابت می کند یک

زیرگروه آبدی خاص از G در G نرمال است، یا تحت بعضی از گروه خودریختی های G ثابت

می باشد.

۳-۴-۱ فرضها. شرایط زیر را روی سه تایی (Q, R, A) در نظر می گیریم:

(الف) R یک p -گروه است و $Q \triangleleft R$ و A زیرگروه آبدی مقدماتی Q است.

(ب) یک سری مرکزی از Q به صورت زیر وجود دارد

$$Q(1) \leq Q(2) \leq \dots \leq Q(s) = Q$$

که می تواند به یک سری مرکزی R گسترش یابد ، به طوریکه هرگاه B یک زیرگروه آبدی

مقدماتی Q باشد و به ازای هر i که $1 \leq i \leq s$ ، داشته باشیم :

$$|B| = |A| \text{ و } |B \cap Q(i)| \geq |A \cap Q(i)|$$

و برای یک i ، $(1 \leq i \leq s)$ ، $B \cap Q(i) > A \cap Q(i)$.

۴-۴-۱ گزاره. فرض کنید برای سه تایی (Q, R, A_0) فرض ۳-۴-۱ (الف) برقرار باشد. آنگاه:

(الف) برای هر سری مرکزی Q که می تواند به یک سری مرکزی R گسترش یابد یک زیرگروه

آبدی مقدماتی A از Q وجود دارد که $|A| = |A_0|$ و برای (Q, R, A) فرضهای ۳-۴-۱ برقرار است.

(ب) برای انتخاب سری مرکزی Q و A در (a) ، $A \leq \langle A_0^R \rangle$.

برهان: (الف) مجموعه تمام زیرگروههای آبدی مقدماتی Q از مرتبه $|A_0|$ را در نظر بگیرید.

همانند رابطه به طور جزئی مرتب قضیه ۲-۴-۱ (با جایگزینی مرتبه به جای بعد) یک ترتیب جزئی

روی این مجموعه در نظر بگیرید. آنگاه یک عنصر ماکسیمال A را در نظر بگیرید که $A_0 \leq A$ یا

$$A_0 = A$$

(ب) سری $\langle A_0^R \rangle \leq Q \leq R$ را به یک سری مرکزی برای R گسترش دهید. و قسمت ۱ تا

Q را به عنوان سری مرکزی در فرض ۳-۴-۱ (ب) در نظر بگیرید. آنگاه A را همانند (الف) در نظر

گرفته، داریم :

$$|A \cap \langle A_0^R \rangle| \geq |A_0 \cap \langle A_0^R \rangle| = |A_0| = |A|.$$

لذا $A \leq \langle A_0^R \rangle$ و برهان کامل می شود.

اکنون حالت خاصی از نتایج لازارد را شرح می دهیم که به قضیه زیر نیاز داریم :

۱-۴-۵ قضیه. فرض کنید گروه P دارای توان ۱ یا p و از رده پوچتوانی حداکثر $p-1$

باشد، آنگاه به وسیله وارون سازی فرمول (۱-۴-۱)، P می تواند به عنوان جبر لی روی F_p در نظر گرفته شود. در این نمادگذاری، زیرگروه و زیرگروه نرمال به ترتیب بر زیرجبر و ایده آل منطبق اند. همچنین، برای $x, y \in P$ و هر عدد صحیح n ، x^n در گروه مساوی با nx در جبر است. توجه کنید که هر خودریختی P به عنوان یک گروه، یک خودریختی P به عنوان یک جبر لی است و به ویژه یک تبدیل خطی از P می باشد.

نمادگذاری: برای $x, y \in P$ فرض کنید $(x, y) = x^{-1}y^{-1}xy$ حال تعریف می کنیم:

$$(y, x; 1) = (y, x) \quad \text{و} \quad \forall i = 2, 3, \dots \quad (y, x; i+1) = ((y, x; i), x).$$

۱-۴-۶ لم. فرض کنید $Q \leq P$ و $g \in P$ و Q دارای توان ۱ یا p و از رده پوچتوانی حداکثر

$p-1$ باشد و g ، Q را نرمال کند. فرض کنید α یک خودریختی روی Q داده شده به وسیله مزدوج g در گروه P باشد. یعنی $\alpha(x) = g^{-1}xg$.

α را به عنوان تبدیل خطی Q (به عنوان یک جبر لی) در نظر بگیرید. آنگاه:

(الف) (Q, g) به وسیله Q نرمال می شود.

(ب) $(\alpha-1)Q$ مشمول در (Q, g) است.

برهان: (الف) برای $x, y \in Q$ داریم:

$$(xy, g) = y^{-1}x^{-1}g^{-1}xyg = y^{-1}x^{-1}g^{-1}xyy^{-1}y^{-1}g = (x, g)^y(y, g)$$

لذا

$$(x, g)^y = (xy, g)(y, g)^{-1} \in (Q, g)$$

(ب) $x \in Q$ را در نظر می گیریم و فرض می کنیم $y = x^{-1}x^g$ آنگاه $y \in (Q, g)$ و

$$\alpha(x) = g^{-1}xg = x^g = xx^{-1}x^g = xy$$

بنا به (الف) و قضیه ۴-۴-۱، (Q, g) یک ایده آل جبر لی Q است. لذا بنا به (۱-۴-۱)، به مدول

این ایده آل همنهشتی های زیر را داریم:

$$\alpha(x) \equiv xy \equiv x + y + \frac{1}{2}[x, y] + \dots \equiv x$$

$$(\alpha - \text{Id})x \equiv \alpha(x) - x \equiv 0$$

در نتیجه $(\alpha - 1)x \in (Q, g)$.

۷-۴-۱ قضیه. فرض کنید فرضهای ۳-۴-۱ برقرار باشند. و فرض کنیم Q دارای رده

پوچتوانی حداکثر $p-1$ باشد و R تولید شده به وسیله مجموعه S از عناصر g باشد که:

$$(A, g^p) = 1 \quad \text{یا} \quad g^p \text{ با } A \text{ جابجا شود} \quad (2-4-1)$$

و برای هر $u, v \in A$ و اعداد صحیح مثبت i و j که $i + j \geq p$ داریم:

$$((u, g^i), (v, g^j)) = 1. \quad (3-4-1)$$

آنگاه $A \triangleleft R$.

برهان: فرض کنید $Q_0 = \{x \in Q \mid x^p = 1\}$. چون Q دارای رده پوچتوانی حداکثر $p-1$

است، Q یک p -گروه منظم است هرگاه Q_0 یک زیرگروه Q باشد. بنا به قضیه ۵-۴-۱ می توان Q_0

را به یک جبر لی روی F_p تبدیل نمود. قرار می دهیم $g \in S$ و فرض می کنیم:

$$R_0 = \langle A, g \rangle \quad \text{و} \quad Q_0 = \langle A^{g^i} \mid i \geq 0 \rangle$$

آنگاه Q_0 یک زیرگروه Q است. مانند لم ۶-۴-۱ فرض کنیم α خودریختی Q_0 داده شده به

وسیله مزدوج g باشد. اگر g^p با A جابجا شود، آنگاه

$$\alpha^p = \text{Id} \quad \text{و} \quad (\alpha^p - \text{Id})A = (\alpha - \text{Id})^p A$$

در غیر این صورت بنا به رابطه (۲-۴-۱)، لم ۶-۴-۱ و استدلال استقرائی داریم:

$$(\alpha - \text{Id})^p A \leq (A, g^p) = 1$$

لذا در این مورد هم داریم $(\alpha - \text{Id})^p A = 1$.

حال فرض کنیم،

$$Q_2 = A + (\alpha-1)A + (\alpha-1)^2 A + \dots + (\alpha-1)^{p-1} A$$

آنگاه Q_2 تحت $\alpha-1$ ثابت است، لذا تحت α و مزدوج y نیز ثابت است.

چون $A \leq Q_2 \leq Q_1$ داریم $Q_2 = Q_1$. بنابراین $(\alpha-1)^p = 1$. اکنون از قضیه قبل به ازای هر

$u, v \in A$ و اعداد صحیح مثبت j, i که $i+j \geq p$ داریم:

$$[(\alpha-1)^j u, (\alpha-1)^i v] = 0. \quad (4-4-1)$$

اکنون زیرگروههای $Q(0), Q(1), Q(2), \dots, Q(s)$ از فرضهای ۳-۴-۱ را به یاد آورید. با

استفاده از رابطه (۴-۴-۱)، قضیه ۲-۴-۱ را با جایگزینی Q_L و A به ترتیب با L و B_L به کار

می بریم که به ازای هر $i=0,1,\dots,s$ داریم:

$$L_i = Q(i) \cap Q_L$$

بنا بر فرضهای ۳-۴-۱، A نسبت به رابطه به طور جزئی مرتب در این قضیه ماکسیمال است.

بنابراین A تحت α ثابت است، یعنی تحت مزدوج g ثابت است. چون g یک عنصر دلخواه از S

است لذا $A \triangleleft R$ ، که همان مطلوب ماست.

۵-۱ گروه نوتینگهام^{۳۲}

برای حلقه R ، $R[[t]]$ حلقه سری توانی صوری روی متغیر t حول R را نشان می دهد.

۱-۵-۱ تعریف. فرض کنید R یک حلقه جا به جایی با عضو همانی باشد. گروه نوتینگهام

حول R را با $\mathcal{N}(R)$ نشان می دهیم و عبارتست از گروهی از سری های توانی صوری به شکل

$$f = t(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k t^k) \in R[[t]]$$

تحت جانشانی صوری برای $g \in \mathcal{N}(R)$ قرار می دهیم: $f g = g(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k g^k)$

به طور معادل می توان $\mathfrak{N}(R)$ را به عنوان یک گروه از خودریختی های حلقه $R[[t]]$ در نظر گرفت.

به وسیله نشانیدن $f := f(t)$ تعریف می کنیم $f \in \text{Aut}(R[[t]])$ و عمل f را به کل $R[[t]]$ تعمیم می دهیم. با محاسبه ای ساده داریم $f(t)g = fg$ لذا $\mathfrak{N}(R)$ به عنوان یک زیرگروه از $\text{Aut}(R[[t]])$ می باشد.

در اینجا خود را به گروه نوتینگهام کلاسیک یعنی $R = F_q$ به عنوان یک میدان متناهی، محدود می کنیم و سراسر این پایان نامه $\mathfrak{N}$ یعنی $\mathfrak{N}(F_q)$ و عناصر $\mathfrak{N}$ همان خودریختی های $F_q[[t]]$ می باشند.

فرض کنیم $R = F_q$ یک میدان متناهی از مشخصه p باشد که $q = p^e$.
 $A(F_q)$ را گروه سری توانی صوری به شکل زیر تحت جانشانی تعریف می کنیم :

$$F = \sum \alpha_k t^k \in F_q[[t]] \quad , \quad \alpha_k \in F_q$$

$A(F_q)$ را گروه کامل سری توانی صوری روی F_q ، تحت جانشانی می نامیم. همچنین $A(F_q)$ را می توان همانند یک زیرگروه از خودریختی های $F_q[[t]]$ در نظر گرفت.
 حال توجه کنید که

$$A_n(F_q) := \left\{ f : (t) f = \sum_{k=0}^n \alpha_k t^k \quad , \quad \alpha_k \in F_q \text{ و } \alpha_n \neq 0 \right\}.$$

یک زیرگروه از $\text{Aut}(F_q[[t]]/t^{n+1}F_q[[t]])$ از مرتبه $q^{n+1} - q$ می باشد. نگاشت طبیعی زیر را در نظر می گیریم.

$$\Phi_n : A(F_q) \rightarrow A_n(F_q)$$

$$(f : t \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i t^i) \mapsto (f_n : t \mapsto \sum_{i=0}^n \alpha_i t^i)$$

قرار دهید $\aleph_n = \ker(\Phi_n)$. آنگاه $\aleph_1 = \aleph$ و بدینگونه، یک زنجیر از زیرگروههای نرمال بسته

گروه نوتینگهام تعریف می کنیم که رابطه $|\aleph_n : \aleph_{n+1}| = q$ برقرار باشد.

همچنین $\aleph$ یک پرو p -گروه است و $\aleph_n$ برای همسایگی های همانی در $\aleph$ تشکیل یک پایه

می دهند. توجه کنید که $|A(F_q) : \aleph| = q-1$.

۲-۵-۱ تعریف. برای $n \geq 1$ و $\alpha \in F_q$ ، $e_n[\alpha] \in \aleph_n$ را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$(t)e_n[\alpha] = t(\sum_{i=0}^{n-1} \alpha t^i).$$

که داریم:

$$(t)e_n[\alpha]e_n[\beta] \equiv t(1+(\alpha+\beta)t^n) \pmod{t^{n+1}}.$$

و در نتیجه برای همه اعداد صحیح k داریم:

$$(t)e_n[\alpha]^k \equiv t(1+k\alpha t^n) \pmod{t^{n+1}}.$$

اکنون $\gamma_i \in F_q$ برای $1 \leq i \leq e$ را طوری انتخاب می کنیم که F_q بطور جمعی به وسیله مجموعه

$\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_e\}$ تولید شود، آنگاه نتیجه می دهد که،

$$\forall n \geq 1, \quad \langle e_n[\gamma_1]\aleph_{n+1}, e_n[\gamma_2]\aleph_{n+1}, \dots, e_n[\gamma_e]\aleph_{n+1} \rangle = \aleph_n / \aleph_{n+1}.$$

لذا

$$\aleph / \aleph_n = \langle e_i[\gamma_j]\aleph_n \mid 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq e \rangle.$$

در نتیجه $\aleph$ به طور توپولوژی به وسیله مجموعه $\{e_i[\gamma_j] \mid 1 \leq i, 1 \leq j \leq e\}$ تولید می شود.

۳-۵-۱ تعریف. اگر $g \in \aleph$ آنگاه عدد صحیح $n \geq 1$ وجود دارد به طوریکه

$g \in \aleph_n / \aleph_{n+1}$ ، عدد n را ژرفای g می نامیم و با $D(g)$ نشان می دهیم. همچنین ژرفای همانی

را ∞ تعریف می کنیم.

۴-۵-۱ گزاره. فرض کنید $g, h \in \aleph$ که $D(g) = m$ ، $D(h) = n$ آنگاه :

$$D([g, h]) = m+n \quad , \quad m \not\equiv n \pmod{p} \quad \text{اگر}$$

$$D([g, h]) > m+n \quad , \quad m \equiv n \pmod{p} \quad \text{اگر}$$

به طور دقیق اگر برای $\alpha_i, \beta_j \in F_q$ و $\alpha_m \neq \beta_n$ داشته باشیم :

$$(t)h = t(1 + \sum_{j=n}^{\infty} \beta_j t^j) \quad \text{و} \quad (t)g = t(1 + \sum_{i=m}^{\infty} \alpha_i t^i) .$$

آنگاه:

$$(t)[g, h] \equiv t(1 + \alpha_m \beta_n (m-n) t^{m+n}) \pmod{\langle t^{m+n+2} \rangle} . \quad (۱-۵-۱)$$

برهان: داریم:

$$\begin{aligned} (t)gh &= t(1 + \sum_{j=n}^{m+n} \beta_j t^j) (1 + \sum_{i=m}^{\infty} \alpha_i t^i (1 + \sum_{j=n}^{\infty} \beta_j t^j)^i) \\ &\equiv t(1 + \sum_{j=n}^{m+n} \beta_j t^j + \sum_{i=m}^{m+n} \alpha_i t^i + (m+1)\alpha_m \beta_n t^{m+n}) \pmod{\langle t^{m+n+2} \rangle} . \end{aligned}$$

به طور مشابه،

$$(t)hg \equiv t(1 + \sum_{i=m}^{m+n} \alpha_i t^i + \sum_{j=n}^{m+n} \beta_j t^j + (n+1)\beta_n \alpha_m t^{m+n}) \pmod{\langle t^{m+n+2} \rangle} .$$

اکنون $s \in \mathbb{N}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم ،

$$(t)s = t(1 + \alpha_m \beta_n (m-n) t^{m+n}) .$$

آنگاه داریم:

$$(t)hgs \equiv (t)gh \pmod{\langle t^{m+n+2} \rangle} .$$

و نتیجه حاصل می شود.

گزاره ۱-۵-۴، برای $\alpha, \beta \in F_q$ نتیجه می دهد که،

$$[e_m[\alpha], e_n[\beta]] \equiv e_{m+n}[\alpha\beta]^{m-n} \pmod{\mathbb{N}_{m+2n} \mathbb{N}_{2m+n}} . \quad (۲-۵-۱)$$

۵-۵-۱ قضیه. برای $p \neq 2$ داریم:

$$[\aleph_r, \aleph_s] = \overline{[\aleph_r, \aleph_s]} = \begin{cases} \aleph_{r+s} & , \quad r \not\equiv s \pmod{p} \quad \text{اگر} \\ \aleph_{r+s+1} & , \quad r \equiv s \pmod{p} \quad \text{اگر} \end{cases}$$

برهان: فرض کنید $n \geq r+s$ اگر $r \not\equiv s \pmod{p}$ و در غیر اینصورت $n > r+s$. چون $p \neq 2$ ،

لذا برای $u+v=n$ و $u \not\equiv v \pmod{p}$ عناصر $e_u[1] \in \aleph_r$ و $e_v[1] \in \aleph_s$ وجود دارند به طوریکه از

معادله (۲-۵-۲) داریم:

$$\langle [e_u[\gamma_j], e_v[\gamma_k]] \rangle_{\aleph_{n+1}} = \aleph_n / \aleph_{n+1}$$

لذا نتیجه برای $[\aleph_r, \aleph_s]$ بدست می آید.

اما این نتیجه می دهد که $\aleph_n$ یک پرو p -گروه متناهیاً تولید شده است. لذا نتیجه می گیریم که

زیرگروه $[\aleph_r, \aleph_s]$ بسته است. در نتیجه برهان کامل می شود.

گزاره زیر، ساختار زیرگروههای نرمال در گروه نوتینگهام را شرح می دهد.

به ویژه نشان می دهد که گروه نوتینگهام عیناً نامتناهی^{۳۴} است. یعنی هر زیرگروه نرمال بسته

غیر بدیهی آن، دارای اندیس متناهی است.

۶-۵-۱ گزاره. فرض کنید $p \neq 2$ و $g \in N$ که $D(g)=n$ آنگاه

$$\langle g \rangle^\aleph = \overline{\langle g \rangle^\aleph} = \begin{cases} \langle g, \aleph_{n+1} \rangle & , \quad n \not\equiv 1 \pmod{p} \quad \text{اگر} \\ \langle g, \aleph_{n+2} \rangle & , \quad n \equiv 1 \pmod{p} \quad \text{اگر} \end{cases}$$

لذا $\aleph$ عیناً نامتناهی است.

توجه کنید که اگر $p=q$ و $D(g)=n$ آنگاه $\langle g, \aleph_{n+1} \rangle = \aleph_n$

۱-۶ زیرگروههای مشخص برای پوشینگ-آپ در گروههای متناهی

۱-۶-۱ فرضها. شرایط زیر را در نظر بگیرید:

(۱) G یک گروه متناهی غیرهمانی باشد.

(۲) p یک عدد اول است.

(۳) S یک p -سیلو زیرگروه G است.

$$(۴) C_G(O_p(G)) \subseteq O_p(G).$$

(۵) S مشمول یک زیرگروه ماکسیمال منحصر به فرد است و برای بعضی زیرگروههای نرمال

$$K \text{ در } G \text{ و بعضی اعداد طبیعی } n \text{ داریم، } G/K \cong PSL(2, p^n).$$

۱-۶-۲ فرضها. شرایط زیر را در نظر بگیرید:

$$(۱) Z(S) \neq Z(G).$$

$$(۲) M = O_p(G).$$

$$(۳) C_S(Z(J(S))) = \tilde{J}(S) \not\leq G.$$

۱-۶-۳ لم. فرض کنید p یک عدد اول n یک عدد طبیعی و S یک p -سیلو زیرگروه

G و K یک p' -زیرگروه نرمال G باشد و فرض کنید.

(۱) S مشمول یک زیرگروه ماکسیمال منحصر به فرد G باشد.

$$(۲) G/K \cong PSL(2, p^n).$$

آنگاه :

$$(الف) K = \Phi(G).$$

(ب) اگر $G/L \cong SL(2, p^n)$ که L یک زیرگروه نرمال در G است، آنگاه $L \leq K$.

برهان: فرض کنیم $q = p^n$. توجه کنید که $|G/K|_p = q$.

(الف) به برهان خلف فرض کنیم $K \not\subseteq \Phi(G)$. آنگاه یک زیرگروه ماکسیمال H در G موجود است که $K \not\subseteq H$. چون $H \subset HK$ ، لذا $HK = G$. همچنین K یک p' -گروه است و H شامل یک p -سیلو زیرگروه G می باشد.

قرار می دهیم $g \in G$ به طوریکه $H^g \supseteq S$ بنا به (۱)، H^g زیرگروه ماکسیمال منحصر به فرد G است که شامل S می باشد و بنا به (۲)، $SK \subset G$. لذا

$$H^g \supseteq SK, \quad K = K^{g^{-1}} \subseteq H.$$

این تناقض است، در نتیجه $K \subseteq \Phi(G)$ که همان مطلوب ماست، از طرفی چون $\Phi(G/K) = 1$ لذا (الف) به دست می آید.

(ب) فرض کنیم $L < G$ و $G/L \cong SL(2, q)$ قرار می دهیم $K_1 < G$ به طوری که $K_1 \supseteq L$ و $K_1/L = Z(G/L)$. آنگاه $K_1/K \cong PSL(2, q) \cong G/K$. لذا $|K_1| = |K|$ ، که بر p بخش پذیر نیست. در نتیجه، فرض لم برای K_1 به جای K برقرار است.
و بنا به (الف)، $K_1 = \Phi(G) = K$ آنگاه $L \subseteq K_1 = K$.

۱-۶-۴ لم. فرض کنید n یک عدد طبیعی باشد، K یک p' -زیرگروه نرمال گروه H باشد. A یک p -زیرگروه غیرهمانی H و V یک p -گروه آبلی مقدماتی باشد که روی H عمل می کند. فرض کنید شرایط زیر برقرار باشند.

$$(۱) \quad H/K \cong PSL(2, p^n).$$

(۲) بعضی از p -سیلو زیرگروه های H در یک زیرگروه ماکسیمال منحصر به فرد H قرار دارند.

$$(۳) \quad [V, A, A] = 1.$$

$$(۴) \quad |V/C_V(A)| \leq |A|, \quad C_V(A) \neq C_V(H).$$

آنگاه :

(الف) A یک p -سیلو زیرگروه H است.

$$(ب) H/C_H(V) \cong SL(2, p^n).$$

(ج) $V/C_V(H)$ یک مدول استاندارد برای $H/C_H(V)$ است.

(د) اگر p فرد یا $n=1$ باشد، آنگاه $V=[V, H] \times C_V(H)$.

برهان: فقط قسمت (د) را ثابت می کنیم. اگر p عدد اول فرد باشد یا $n=1$ آنگاه

$O_{p'}(H/C_H(V)) \neq 1$. چون $H/C_H(V)$ روی مدولهای استانداردش به طور باوفا عمل می کند و

$$چون \quad V=[V, O_{p'}(H/C_H(V))] \times C_V(O_{p'}(H/C_H(V)))$$

لذا (د) بدست می آید.

۱-۶-۵ لم. فرض کنید فرضهای ۱-۶-۱ برقرار باشد. آنگاه :

(الف) K/M یک p' -گروه است.

(ب) $N_G(SK)$ زیرگروه ماکسیمال منحصر به فرد G است که شامل S می باشد.

(ج) هرگاه $T \subseteq S$ و $T \triangleleft N_G(S)$ ، $T \not\subseteq M$ ، آنگاه $S=TM$.

(د) برای هر $x \in S-M$ داریم $G=\langle x^G \rangle M$.

(هـ) برای هر $y \in G-N_G(SK)$ داریم $G=\langle S, S^y \rangle$.

برهان: فرض کنید H زیرگروه ماکسیمال منحصر به فرد G باشد که شامل S است.

چون $SK \subset G, G/K \cong SL(2, p^n)$. لذا $K \subset KS \subseteq H$ پس هرگاه $S \subseteq G^* \subseteq G$ و

$$G=KG^* \text{ آنگاه :}$$

$$G^*=G. \quad (۱-۶-۱)$$

بنا به ساختار G/K قسمت (ب) بدست می آید.

بنا به استدلال فراتینی، $G=KN_G(K \cap S)$. چون $N_G(K \cap S) \supseteq S$ ، از رابطه (۱-۶-۱)

$$\text{داریم، } N_G(K \cap S)=G \text{ لذا}$$

$$K \cap S \triangleleft G \text{ و } K \cap S \subseteq O_p(G) = M.$$

که این (الف) را ثابت می کند.

همچنین باز بنا به استدلال فراتینی، $N_G(SK) = N_G(S)K$. لذا

$$N_{G/K}(SK/K) = N_G(S)K/K .$$

پس بنا به ساختار G/K ، $N_G(S)$ روی SK/K به طور تقلیلی (ساده نشدنی) به وسیله تزویج

عمل می کند و بنا به (الف) داریم:

$$SM/M \cong S/(S \cap M) = S/(S \cap M) \cong SK/K$$

لذا $N_G(S)$ به طور ساده نشدنی روی SM/M عمل می کند. این نتیجه می دهد که

$S = TM$. در قسمت (ج) قرار می دهیم $x \in S - M$ و فرض می کنیم $N = \langle x^G \rangle M$ آنگاه

$N \triangleleft G$ و بنا به (الف)، $x \in S - K$ ، لذا NK/K یک زیرگروه نرمال G/K است، که شامل یک p -

عنصر غیرهمانی می باشد. چون $G/K \cong PSL(2, p^n)$ و $NK/K = G/K$ لذا $G = NK$. بنا به

(الف) داریم:

$$|G/N|_p = |NK/N|_p = |K/(K \cap N)|_p \leq |K/M|_p = 1 .$$

در نتیجه $N \supseteq S$. لذا بنا به رابطه (۱-۲-۲۳)، $N = G$. این (د) را ثابت می کند.

برهان (هـ) شبیه برهان (د) است و وابسته به این حقیقت می باشد که، به دلیل ساختار G/K ،

$$G = \langle S, S^y \rangle K \text{ داریم}$$

۱-۶-۶ لم. فرض کنید فرضهای ۱-۶-۱ برقرار باشند و $Z(S) \ntriangleleft G$ آنگاه فرضهای ۱-۶-۲

برقرار است اگر و فقط اگر $J(S) \ntriangleleft G$.

برهان : فرض کنیم $J(S) \ntriangleleft G$. چون $J(S) = J(\tilde{J}(S))$ داریم $\tilde{J}(S) \ntriangleleft G$. به علاوه

$$Z(S) \neq Z(G) \text{ چون } Z(S) \ntriangleleft G .$$

حال فرض کنیم $J(S) \triangleleft G$ (به برهان خلف) . و فرض کنیم H زیرگروه ماکسیمال منحصر به

فرد G باشد که شامل S است. چون $Z(S) \ntriangleleft G$ ، $Z(S) \ntriangleleft H$ ، $S \subseteq C_G(Z(S)) \subset G$ ، لذا

$$H \supseteq C_G(Z(S)) \supseteq C_G(ZJ(S)) .$$

چون $J(S) \triangleleft G$ داریم:

$$J(S) \subseteq O_p(G) = M \quad \text{و} \quad J(S) = J(M) \triangleleft G .$$

لذا $C_G(ZJ(S)) \triangleleft G$. اکنون $\tilde{J}(S) = C_S(ZJ(S))$.

اگر $\tilde{J}(S) \not\subseteq M$ آنگاه بنا به لم ۱-۲-۳۰ (د) داریم:

$$G = \langle \tilde{J}(S)^G \rangle M \subseteq C_G(ZJ(S))M \subseteq H \subset G$$

که تناقض است. لذا $\tilde{J}(S) \subseteq M$ ، آنگاه $\tilde{J}(S) = \tilde{J}(M) \triangleleft G$.

که با فرض لم در تناقض است. لذا فرض خلف باطل و حکم ثابت می شود.

۱-۶-۷ لم. فرض کنید فرضهای ۱-۶-۲ برقرار باشند. و $Z = Z(M)$ ، $L = C_G(Z)$ آنگاه:

(الف) $L \subseteq K$ و $Z \supseteq Z(S) \supseteq Z(G)$

(ب) $G/L \cong SL(2, p^n)$ و $Z/Z(G)$ یک مدول استاندارد برای G/L است.

برهان: چون $C_G(M) \subseteq M$. لذا M شامل $Z(S)$ و $Z(G)$ می باشد. بنابراین $Z(G)$ یک

p -گروه است. لذا

$$Z(G) \subseteq Z(G) \subseteq Z(M) = Z. \quad (۱-۶-۲)$$

بنا به فرضهای ۱-۶-۲ داریم:

$$Z(S) \neq Z(G) \quad \text{و} \quad \tilde{J}(S) \ntriangleleft G. \quad (۱-۶-۳)$$

به وضوح $G = SO^p(G) = C_G(Z(S))O^p(G)$ بنابراین $O^p(G)$ با $Z(S)$ جا به جا

نمی شود و بنا به رابطه (۱-۶-۲)،

$$O^p(G) \text{ با } Z \text{ جا به جا نمی شود.} \quad (۱-۶-۴)$$

فرض کنید $V = \Omega_1(Z)$ و $L^* = C_G(V)$ آنگاه $L^* \triangleleft G$ و $L^* \supseteq L \supseteq M$.

L^*/L به طور باوفا روی Z عمل می کند و با $\Omega_1(Z)$ جا به جا می شود. چون Z آبدلی است ، خواهیم داشت L^*/L یک p -گروه است. لذا اگر $L^* \supset L$ ، آنگاه $L^* \cap S \supset L \cap S \cong M$ و بنا به لم ۵-۶-۱(د)، $G = \langle (L^* \cap S)^G \rangle M \subseteq L^*$.
در این حالت داریم:

$$O^p(G) \subseteq O^p(L^*) \subseteq L = C_G(Z).$$

که با رابطه (۱-۶-۱) در تناقض است. لذا $L^* = L$ یعنی

$$C_G(V) = L \subseteq C_G(Z). \quad (۵-۶-۱)$$

با استدلالی مشابه داریم $L \cap S = M$. لذا

L/M یک p' -گروه است. (۶-۶-۱)

بنا به لم ۵-۶-۱(ه)، $G = \langle S^G \rangle$. پس روابط (۲-۶-۱) و (۳-۶-۱) نشان می دهند که $Z(S) \ntriangleleft G$ و بنا به لم ۶-۶-۱، $J(S) \ntriangleleft G$. لذا $A \in A(S)$ موجود است به طوریکه $A \not\subseteq M$ و $[Z, A, A] = \mathcal{L}$.

چون $V \subseteq Z(M)$ ، گروه خارج قسمت G/M به وسیله تزویج روی V عمل می کند (نه لزوماً به طور باوفا). فرض کنید $H = G/M$. ادعا می کنیم، فرض لم ۴-۶-۱ برای $K/M, H$ ، AM/M و V به جای H, K, A و V برقرار است.

بنا به لم ۵-۶-۱(الف)، K/M یک p' -گروه است. بنا به فرضهای ۲-۶-۱ داریم:

$$PSL(2, P^n) \cong G/K \cong H/(K/M).$$

و S/M مشمول در یک زیرگروه ماکسیمال منحصر به فرد در G/M یعنی در H است.

چون $V \subseteq Z$ لذا بنا به انتخاب A خواهیم داشت، $[V, A, A] \subseteq [Z, A, A] = \mathcal{L}$.

اکنون کافیت فرض (۴) از لم ۴-۶-۱ را بررسی کنیم.

فرض کنید $B = (A \cap M)Z$ آنگاه B آبدلی است بنابراین

$$\begin{aligned}
|A| &\geq |B| = |A \cap M| \mid Z/(Z \cap A \cap M) \mid \\
&= |A \cap M| \mid Z/C_Z(A) \mid \\
&\geq |A \cap M| \mid V/C_V(A) \mid
\end{aligned}$$

بنا به رابطه (۶-۲-۱)، $A \cap L = A \cap M$ لذا

$$\begin{aligned}
|V/C_V(A)| &\leq |Z/C_Z(A)| \leq |B/(A \cap M)| \leq |A/(A \cap M)| \\
&= |AM/M| = |A/A \cap L| = |AL/L| \quad (۷-۶-۱)
\end{aligned}$$

فرض کنیم $C_V(A) = C_V(H)$ آنگاه A با $V/C_V(H)$ جا به جا می شود. بنا به لم ۵-۶-۱(د)

داریم:

$$G = \langle A^G \rangle M \subseteq C_G(V/C_V(H)).$$

آنگاه $O^p(G)$ زنجیر $V \supseteq C_V(H) \supseteq \mathcal{L}$ را پایا می سازد. لذا با V جا به جا می شود. اما این بنا

به روابط (۴-۶-۱) و (۵-۶-۱) غیرممکن است. بنابراین باید $C_V(A) \neq C_V(H)$.

اکنون تمام شرایط لم ۴-۶-۱ را برقرار کردیم و این لم نتیجه می دهد که

$$AM/M = S/M. \quad (۸-۶-۱)$$

$$G/L \cong H/C_H(V) \cong SL(2, P^n). \quad (۹-۶-۱)$$

$V/C_V(G)$ یک مدول استاندارد برای G/L است. (۱۰-۶-۱)

اگر p فرد یا $n=1$ باشد، آنگاه $V = [V, G] \times C_V(G)$. (۱۱-۶-۱)

بنا به ساختار مدول استاندارد داریم :

$$p^n = |(V/C_V(G))/C_{V/C_V(G)}(A)| \leq |V/C_V(A)|. \quad (۱۲-۶-۱)$$

بنا به رابطه (۱۱-۶-۱) و لم ۳-۶-۱(ب)، $L \subseteq K$. بنابراین رابطه (۲-۶-۱) قسمت (الف) را

نتیجه می دهد. از رابطه (۸-۶-۱) داریم :

$$AM = S. \quad (۱۳-۶-۱)$$

آنگاه از رابطه (۹-۶-۱) داریم:

$$|AL/A| = |AML/L| = |SL/L| = p^n.$$

بنابراین از روابط (۷-۶-۱) و (۱۲-۶-۱) داریم:

$$p^n = |V/C_V(A)| = |Z/C_Z(A)| \quad \text{و} \quad |A| = |B|. \quad (۱۴-۶-۱)$$

آنگاه $B \in A(S)$ و از (۱۲-۶-۱) خواهیم داشت :

$$C_{V/C_V(G)}(A) = C_V(A)/C_V(G). \quad (۱۵-۶-۱)$$

قرار می دهیم $y \in G - N_G(SK)$. بنا به (۱۳-۶-۱) و لم ۵-۴-۱ (هـ) داریم:

$$G = \langle S, S^y \rangle = \langle A, A^y, M \rangle.$$

از رابطه (۲-۶-۱)، $Z(G) \subseteq Z(M) = Z$ ، لذا $Z(G) = C_Z(A) \cap C_Z(A^y)$.

آنگاه :

$$\begin{aligned} |Z/Z(G)| &= |Z/(C_Z(A) \cap C_Z(A^y))| \\ &\leq |Z/C_Z(A)| \cdot |Z/C_Z(A^y)| \\ &= |Z/C_Z(A)|^2 \end{aligned}$$

از روابط (۱۴-۶-۱) و (۱۰-۶-۱) داریم :

$$|Z/Z(G)| \leq p^{2n} = |V/(C_V(G))| = |V/(V \cap Z(G))| \leq |Z/Z(G)|.$$

این نتیجه می دهد که :

$$Z = VZ(G). \quad (۱۶-۶-۱)$$

از روابط (۱۶-۶-۱) و (۹-۶-۱) و (۱۰-۶-۱) قسمت (ب) را نتیجه می گیریم.

۸-۶-۱ لم. فرض کنید فرضهای ۲-۶-۱ برقرار باشند و $Z = Z(M)$ آنگاه

$$Z = \Omega_2(Z)Z(G).$$

برهان: فرض کنید $W = Z(G)$ و $L = C_G(Z)$. بنا به لم ۷-۶-۱ داریم:

(۱۷-۶-۱) $G/L \cong SL(2, p^n)$ و Z/W یک مدول استاندارد برای G/L است.

$$Z(S)/W = C_{Z/W}(S/W). \quad (۱۸-۶-۱)$$

در نتیجه $OP(G)$ روی Z بطور غیربدیهی عمل می کند. لذا روی $\Omega_1(Z)$ نیز به طور غیر بدیهی عمل می کند. بنابراین $\Omega_1(Z) \not\subseteq W$. چون $\Omega_1(Z)W/W \triangleleft G/W$ ، لذا رابطه (۱۷-۶-۱) نتیجه می دهد که $Z = \Omega_1(Z)Z(G)$ ، همان مطلوب ماست.

۷-۱ حلقه لی وابسته

بسیاری از مشکلات در مورد p -گروهها، به ویژه سؤالاتی در مورد خودریختی های آنها می تواند به مسائلی مشابه در مورد حلقه لی وابسته که اغلب رفتار ساده تری دارند، تبدیل گردد. اکنون باید این حلقه را شرح داده و سپس تعدادی از کاربردهای این تکنیک را ارائه دهیم.

۱-۷-۱ تعریف. حلقه لی یک مجموعه R همراه با دو عمل دوتایی است، جمع و ضرب لی

را به ترتیب با $x+y$ و $[x, y]$ نمایش می دهیم و برای x, y در R شرایط زیر برقرار است.

$$R \text{ یک گروه آبدی تحت جمع می باشد.} \quad (۱-۷-۱)$$

$$[x, y+z] = [x, y] + [x, z], \quad [x+y, z] = [x, z] + [y, z] \quad (۲-۷-۱)$$

$$[x, x] = 0 \quad (۳-۷-۱)$$

$$[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0 \quad (۴-۷-۱)$$

برای تمام $x, y, z \in R$. در اینجا $\cdot$ (صفر) عنصر همانی در جمع است و به طور معمول $-x$

معکوس جمعی x را نشان می دهد. فرمول (۴-۷-۱) به اتحاد ژاکوبی معروف است.

هر حلقه شرکت پذیر R می تواند با تعریف ضرب لی بصورت $[x, y] = xy - yx$ به یک

حلقه لی تبدیل شود.

حلقه لی R را یک جبر لی روی میدان F نامیم اگر F روی R عمل کند، به طوریکه R نسبت

به عمل جمع فوق و ضرب اسکالر زیر یک فضای برداری روی F باشد.

$$a[x, y] = [ax, y] = [x, ay]. \quad \forall x, y \in R, \forall a \in F \quad (5-7-1)$$

برای هر گروه، یک روش طبیعی برای مرتبط کردن یک حلقه لی با این گروه وجود دارد که عمدتاً برای مطالعه p -گروهها (و گروههای پوچتوان) بسیار با ارزش است. به این دلیل آنرا فقط برای p -گروه P تعریف می کنیم. فرض کنیم $P = P_1 \supseteq \dots \supseteq P_n = 1$ سری مرکزی پائینی P باشد، به طوریکه، $(i$ فاکتور $) P_i = L_i(P) = [P_{i-1}, P] = [P, P, \dots, P]$ این ساختار به لم ذیل وابسته است، که در اینجا علامت $x \equiv y \pmod{H}$ برای $xy^{-1} \in H$ استفاده می شود. قبل از بیان این لم، چند قضیه کاربردی را عنوان می کنیم.

۲-۷-۱ قضیه. فرض کنید x, y, z عناصری در گروه G و H, K, L زیرگروههای آن

باشند. آنگاه

$$[xy, z] = [x, z]^y [y, z] \quad (1)$$

$$[x, yz] = [x, z][x, y]^z \quad (2)$$

$$[H, K] \text{ یک زیرگروه نرمال در } \langle H, K \rangle \text{ است.} \quad (3)$$

$$[H, K] = [K, H] \quad (4)$$

$$[H, K] \subseteq K \text{ اگر و فقط اگر } H \text{ را نرمال می کند} \quad (5)$$

$$G/K \text{ نرمال و } G/K \text{ آبدی است اگر و تنها اگر } G' \subseteq K \quad (6)$$

$$(7) \text{ اگر } K \subseteq H, \text{ و } K \text{ در } G \text{ نرمال باشد، آنگاه:}$$

$$[H, G] \subseteq K \text{ اگر و تنها اگر } H/K \subseteq Z(G/K)$$

$$(8) \text{ اگر } H, K, L \text{ در } G \text{ نرمال باشند، آنگاه } [HK, L] = [H, K][K, L]$$

$$(9) \text{ اگر } \varphi \text{ یک درونیختی از } G \text{ باشد، آنگاه } [H, K]^\varphi = [H^\varphi, K^\varphi]$$

به ویژه، اگر H و K هر دو در G نرمال باشند آنگاه $[H, K]$ در G نرمال است.

۳-۷-۱ قضیه. اگر x, y, z عناصری در G باشند، آنگاه

$$[xy, z] = [x, z][x, z, y][y, z] \quad (۱)$$

$$[x, yz] = [x, z][x, y][x, y, z] \quad (۲)$$

$$[x, y]^{-1} = [y, x] \quad (۳)$$

۴-۷-۱ قضیه. فرض کنید A یک p' -گروه از خودریختی های p -گروه P باشد که

پایاساز بعضی از سریهای نرمال P است. آنگاه $A = \mathcal{L}$.

۵-۷-۱ لم. فرض کنید $x, x' \in P_i$, $y' \in P$, $y \in P_j$ و $z \in P_k$. آنگاه داریم:

$$[x, y] \in P_{i+j} \quad (۱)$$

$$(۲) \text{ اگر } x \equiv x' \pmod{P_{i+1}} \text{ و } y \equiv y' \pmod{P_{j+1}} \text{ آنگاه}$$

$$[x, y] \equiv [x', y'] \pmod{P_{i+j+1}}$$

$$(۳) [xx', y] \equiv [x, y][x', y] \pmod{P_{i+j+1}} \text{ و}$$

$$[x, yy'] \equiv [x, y][x, y'] \pmod{P_{i+j+1}}$$

$$(۴) [x, y, z][y, z, x][z, x, y] \equiv 0 \pmod{P_{i+j+k+1}}$$

$$(۵) \text{ برای هر عدد صحیح نامنفی } a \text{ داریم:}$$

$$[x, y]^a \equiv [x^a, y] \equiv [x, y^a] \pmod{P_{i+j+1}}$$

برهان: باید به وسیله استقراء روی j ثابت کنیم که $[P_i, P_j] \subseteq P_{i+j}$ و این (۱) را برقرار

می کند. برای $j=1$ بلافاصله از تعریف نتیجه می شود. سپس فرض می کنیم $j > 1$ و قرار می دهیم،

$$H = [P_i, P_j, P_j] [P_i, P_j, P_j]$$

حال فقط کفایت نشان دهیم که $[P_i, P_j] \subseteq H$. اما بنا به قضیه ۷-۱-۲ (۹)،

$H \triangleleft P$. لذا می توانیم لم سه زیرگروه را در مورد P/H به کار ببریم که نشان میدهد،

$$[P_j, P_j, P_i] \subseteq H$$

از طرفی $[P_i, P_j] = [[P_j, P_i], P_i] = [P_i, P_j]$ لذا نتیجه پایانی که
 $[P_i, P_j] \subseteq H$ حاصل می شود.

اکنون (۲) را ثابت می کنیم. فرض کنید $x' = xu$ ، $u \in P_{i+1}$. آنگاه بنا به لم (۱)۳-۷-۱ داریم:

$$[x', y] = [xu, y] = [x, y][x, y, u][u, y].$$

اما بنا به (۱)، $[x, y, u]$ و $[u, y]$ هر دو در P_{i+j+1} قرار دارند. لذا

$$[x', y] \equiv [x, y] \pmod{P_{i+j+1}}.$$

به طور مشابه $[x', y'] \equiv [x', y] \pmod{P_{i+j+1}}$ و (۲) نتیجه می شود.

باز هم بنا به لم (۱)۳-۷-۱ و قسمت (۱) این لم داریم:

$$[x', y] \equiv [x, y][x', y] \pmod{P_{i+j+1}} \text{ و } [xx', y] = [x, y][x, y, x']$$

به طور مشابه دومین رابطه در (۳) نتیجه می شود. همچنین (۵) به وسیله استقراء روی a از (۳)

نتیجه می شود.

برای اثبات (۴) از تساوی زیر استفاده می کنیم.

$$[x, y^{-1}, z]^y [y, z^{-1}, x]^z [z, x^{-1}, y]^x = 1. \quad (۶-۷-۱)$$

قرار می دهیم $w = [x, y^{-1}, z]$ آنگاه بنا به (۱)، $w \in P_{i+j+1}$ ، چون $w^y = w[w, y]$ ،

دوباره (۱) نتیجه می دهد که $w^y \equiv w \pmod{P_{i+j+1}}$ به علاوه چون P_{i+j} / P_{i+j+1} آبلی است،

عناصر $[x, y]^{-1}$ ، $[x, y^{-1}, z]$ دارای تصاویر یکسانی در گروه خارج قسمت هستند. لذا

$$w^y \equiv [[x, y]^{-1}, z] \pmod{P_{i+j+k+1}}.$$

بنا به تقارن، نتیجه مشابهی برای دو جمله دیگر رابطه (۶-۷-۱) برقرار است. در نتیجه:

$$[x, y, z]^{-1} [y, z, x]^{-1} [z, x, y]^{-1} \equiv 1 \pmod{P_{i+j+k+1}}. \quad (۷-۷-۱)$$

در پایان، با در نظر گرفتن معکوس رابطه (۷-۷-۱)، (۴) را به دست می آوریم.

اکنون قرار می دهیم $L_i = P_i / P_{i+1}$ ، $i \leq n$ ، آنگاه هر L_i یک گروه آبدلی است که به عنوان یک گروه جمعی در نظر می گیریم. فرض کنیم L جمع مستقیم گروههای L_i ، $1 \leq i \leq n$ ، باشد به طوریکه L یک گروه آبدلی است. اکنون L را به وسیله معرفی یک ضرب لی روی L به یک حلقه لی تبدیل می کنیم. ابتدا برای $\bar{x}$ در L_i و $\bar{y}$ در L_j ، $[\bar{x}, \bar{y}]$ را به صورت تصویر $[x, y]$ در L_{i+j} تعریف می کنیم. که x و y نماینده های $\bar{x}$ و $\bar{y}$ به ترتیب در P_i و P_j می باشند. بنا به قسمت (۱) و (۲) از این لم، $[\bar{x}, \bar{y}]$ موجود است و این عمل خوش تعریف می باشد یعنی به طور مستقل از انتخاب نماینده های هم مجموعه های $\bar{x}$ و $\bar{y}$ معین می شود. (بدیهی است که $L_k = \emptyset$ اگر $k > n$). برای $\bar{x}$ در L_i ، $\bar{y}$ در L_j و $\bar{z}$ در L_k شرط خطی بودن (۱-۷-۲) از قسمت (۳) و اتحاد ژاکوبی (۱-۷-۴) از قسمت (۴) لم به دست می آیند. چون $[x, x] = \emptyset$ ، لذا برای هر $\bar{x}$ در L_i داریم، $[\bar{x}, \bar{x}] = \emptyset$.

اکنون ضرب لی را به وسیله خاصیت خطی بودن به تمام L تعمیم می دهیم. هرگاه اینکار صورت پذیرد، شرایط (۱-۷-۲) ، (۱-۷-۳) و (۱-۷-۴) برای هر $\bar{x}$ ، $\bar{y}$ و $\bar{z}$ دلخواه در L برقرار خواهند بود، لذا L یک حلقه لی است.

L را حلقه لی وابسته به P می نامیم و آنرا با $L(P)$ نشان می دهیم. اگر هر L_i از توان p باشد ، آنگاه $L(P)$ دقیقاً یک جبر لی روی Z_p خواهد بود. در واقع در این حالت L یک فضای برداری روی Z_p می باشد. همچنین شرط (۱-۷-۵) از قسمت (۵) این لم نتیجه می شود.

حلقه لی L بشکل $L = L_1 \oplus L_2 \oplus \dots \oplus L_n$ را یک حلقه لی همگن از مشخصه p می نامیم، که در آن $[L_i, L_j] \subseteq L_{i+j}$ و هر L_i یک p -گروه است، و می توان نشان داد چنین حلقه های لی که به شکل $L(P)$ (به ازای p -گروه P) نیستند وجود دارند .

اکنون فرض کنیم φ یک خودریختی P باشد. چون $P_i \subset P$ ، لذا φ یک خودریختی از هر L_i و همچنین از $L(P)$ (به عنوان گروه آبدلی) را القاء می کند.

اگر $L(P)$ یک جبر لی حول Z_p باشد و φ خودریختی ای باشد که یک تبدیل خطی از $L(P)$ را القاء می کند که یک فضای برداری روی Z_p است، آنگاه چون برای هر x, y در P ،

$$[x, y]\varphi = [x\varphi, y\varphi]$$

بلافاصله از تعریف $L(P)$ داریم :

$$[\bar{x}, \bar{y}]\varphi = [\bar{x}\varphi, \bar{y}\varphi].$$

لذا φ ضرب لی $L(P)$ را حفظ می کند و همچنین بنا به تعریف ، φ یک خودریختی $L(P)$ (به عنوان حلقه لی یا جبر لی روی Z_p) می باشد. به علاوه اگر φ یک p' -خودریختی P باشد و φ^h خودریختی همانی $L(P)$ را القاء کند. آنگاه φ^h به طور بدیهی روی هر $L_i = P_i / P_{i+\mathbb{Z}}$ عمل می کند. لذا φ^h ، سری مرکزی پایینی P را پایا می سازد. اما آنگاه بنا به قضیه ۱-۷-۳ ، φ^h روی P همانی است. لذا φ دارای مرتبه یکسانی روی $L(P)$ و P می باشد.

فصل دوم

CL- زیرگروهها

۲ CL-زیرگروهها

۱-۲ نتایج اساسی

این بخش را با بعضی نتایج اساسی در مورد عناصر $\mathcal{F}(S)$ ، $\mathcal{H}(S)$ و $\mathcal{K}(S)$ شروع می کنیم، ابتدا دو نتیجه سرمک و دلگادو که موارد خیلی خاص هستند را بیان می کنیم و برای آنها برهان هایی زیبا و کوتاه می آوریم.

۱-۱-۲ قضیه. فرض کنید $Q, R \in \mathcal{K}(S)$ آنگاه :

(الف) $QR, Q \cap R \in \mathcal{K}(S)$ و $QR = RQ$.

(ب) $C_S(Q \cap R) = C_S(Q)C_S(R)$.

برهان: فرض کنید T زیرگروه $\langle Q, R \rangle$ باشد. یادآور می شویم که کاردینال زیرمجموعه QR

از S به صورت زیر است.

$$|QR| = |Q||R|/|Q \cap R|$$

در نتیجه :

$$\begin{aligned} |Q||C_S(Q)| &= f(S) \geq |T||C_S(T)| \geq |QR||C_S(T)| \\ &= |Q||R||C_S(Q) \cap C_S(R)|/|Q \cap R|. \end{aligned} \quad (۱-۱-۲)$$

بنابراین

$$|C_S(Q)|/|C_S(Q) \cap C_S(R)| \geq |R|/|Q \cap R| \quad (۲-۱-۲)$$

به وضوح $|C_S(Q \cap R)| \geq |C_S(Q)C_S(R)|$ و بنا به رابطه (۲-۱-۲) داریم:

$$\begin{aligned} |C_S(Q \cap R)| &\geq |C_S(Q)C_S(R)| = |C_S(Q)||C_S(R)|/|C_S(Q) \cap C_S(R)| \\ &\geq |R||C_S(R)|/|Q \cap R| \end{aligned} \quad (۳-۱-۲)$$

آنگاه داریم:

$$f_{\Delta}(S) \geq |Q \cap R| |C_S(Q \cap R)| \geq |R| |C_S(R)| = f_{\Delta}(S)$$

این نتیجه می دهد که همه نامساویها در رابطه (۳-۱-۲) و به طور مشابه در روابط (۲-۱-۲) و

(۱-۱-۲) تساویند. و در نتیجه $T=QR$. لذا (الف) و (ب) برقرار است.

۲-۱-۲ نتیجه. مجموعه $\mathcal{T}_1(S)$ دارای بزرگترین و کوچکترین عنصر منحصر به فرد است

(تحت شمول).

گزاره بعدی از لمهای ۳-۱ و ۳-۲ در مرجع [۱] بدست می آید.

۳-۱-۲ گزاره. فرض کنید $Q \in \mathcal{T}_1(S)$ آنگاه

$$C_S(Q) \in \mathcal{T}_1(S) \quad , \quad Q = C_S(C_S(Q)).$$

برهان: فرض کنید $R = C_S(Q)$, $T = C_S(R)$ آنگاه $Q \leq T$ و داریم:

$$f_{\Delta}(S) = |Q| |R| \leq |T| |R| = |C_S(R)| |R| \leq f_{\Delta}(S).$$

و نتیجه حاصل می شود.

۴-۱-۲ گزاره. شرایط زیر برقرار هستند:

$$(الف) \quad f_L(S) = f(S).$$

(ب) $\mathcal{T}(S)$ زیرمجموعه $\mathcal{T}_1(S)$ است.

(ج) برای $Q \in \mathcal{T}_1(S)$ ، یک CL -زیرگروه S است (یعنی $(S) \Leftrightarrow Q \in \mathcal{T}$)

$$(Q \geq C_S(Q)).$$

(د) S_{CL} بزرگترین عنصر منحصر به فرد $\mathcal{T}(S)$ و $\mathcal{T}_1(S)$ است (تحت شمول).

برهان: به یاد آورید که S_{CL} برابر $\langle (S) \rangle \mathcal{T}$ می باشد. بنا به نتیجه ۲-۱-۲، $\mathcal{T}_1(S)$ دارای

بزرگترین عنصر است، که آنرا R می نامیم. آنگاه بنا به گزاره ۳-۱-۲، $C_S(R) \leq R$ ، به وضوح

$$C_S(R) = Z(R) \text{ پس}$$

$$f(S) \geq |R| |Z(R)| = |R| |C_S(R)| = f_{\Delta}(S).$$

از طرف دیگر برای هر زیرگروه Q در $\mathcal{F}(S)$ داریم:

$$f(S) = |Q||Z(Q)| \leq |Q||C_S(Q)| \leq f(S)$$

که این (الف)، (ب) و (ج) را نتیجه می دهد. بنا به (ج) داریم $\mathcal{F}R \in (S)$. در نتیجه $R = S_{CL}$ و قسمت (د) نتیجه می شود.

۵-۱-۲ گزاره. فرض کنید $Q \in \mathcal{F}_1(S)$ آنگاه $QC_S(Q)$ یک CL -زیرگروه S است و

داریم:

$$Q \cap C_S(Q) = Z(C_S(Q)) = Z(Q)$$

برهان: فرض کنید $C = C_S(Q)$. بوضوح داریم:

$$Z(Q) = Q \cap C \leq Z(C_S(Q))$$

بنا به گزاره ۳-۱-۲، $Q = C_S(C_S(Q))$ لذا $Q \cap C = Z(C_S(Q)) \leq Z(Q)$ و این

تساوی را نتیجه می دهد.

فرض کنیم $Q^* = QC$ آنگاه $Q^* = QC = Z(Q) = C_S(Q^*)$ چون $Q \in \mathcal{F}_1(S)$. بنا به

گزاره ۳-۱-۲ و قضیه ۱-۱-۲ داریم، $C, Q^* \in \mathcal{F}_1(S)$ و بنا به گزاره ۴-۱-۲، Q^* یک CL -زیرگروه S است.

۶-۱-۲ نتیجه. اگر Q یک CL -زیرگروه S باشد آنگاه $C_S(Q) = Z(Q)$.

برهان: با استفاده از گزاره ۴-۱-۲ (الف) و (ب) نتیجه حاصل می شود.

۷-۱-۲ مثال. فرض کنید S آبلی باشد. به آسانی می توان نتیجه گرفت که

$$\mathcal{F}(S) = \mathcal{F}_1(S) = \{S\} \text{ و } S \text{ تنها } CL\text{-زیرگروه } S \text{ است.}$$

۸-۱-۲ مثال. فرض کنیم n یک عدد طبیعی مثبت و p یک عدد اول باشد و S یک گروه

فوق العاده خاص از مرتبه p^{2n+1} باشد. آنگاه نگاشتی از $S/S' \times S/S'$ بر روی S' یک فرم متناوب

نامنفرد روی S/S' را نتیجه می دهد (مانند یک فضای برداری روی F_p). با استفاده از خواص استاندارد فرمهای متناوب به آسانی می بینیم .

$$\bullet \quad d(S) = p^{n+\frac{1}{2}}, \quad f(S) = p^{n+\frac{1}{2}}.$$

$$\bullet \quad \mathcal{H}(S) \text{ شامل تمام زیرگروههای } S \text{ است که شامل } S' \text{ هستند.}$$

$$\bullet \quad \mathcal{F}(S) \text{ شامل تمام زیرگروههای } S \text{ است که شامل عنصری از } \mathcal{H}(S) \text{ اند.}$$

به ویژه ، زیرگروههای آبدی بزرگ S همان CL -زیرگروههای مینیمال S می باشند و $S_{CL} = S$. (همچنین از قضیه ۳-۱ (الف) و نتیجه ۳-۲ در فصل بعد نتیجه می شود که $J(S) = S$)

۹-۱-۲ لم. فرض کنید برای هر زیرگروه آبدی نرمال A از S که به طوره سره شامل

$Z(S)$ است، داشته باشیم:

$$|A||C_S(A)| < |S||Z(S)|.$$

آنگاه S یک CL -زیرگروه مینیمال خودش است.

برهان: به برهان خلف فرض می کنیم S دارای یک زیرگروه سره T باشد، که یک CL -

زیرگروه S می باشد. فرض کنیم

$$A = Z(T^*) \quad \text{و} \quad T^* = \langle T^S \rangle = \langle T^g \mid g \in S \rangle.$$

آنگاه $T^* < S$ و $T^* < S$. در نتیجه $A < S$. بنا به قضیه ۲-۱-۱ و گزاره ۲-۱-۴ ، T^* یک

CL -زیرگروه است. لذا از گزاره ۲-۱-۳ و نتیجه ۲-۱-۶ داریم:

$$A = C_S(T^*) \geq Z(S), \quad T^* = C_S(C_S(T^*)) = C_S(A)$$

9

$$|A||C_S(A)| = |A||T^*| = f(T^*) \geq f(S) = |Z(S)||S|$$

چون $A \geq Z(S)$ و $C_S(A) = T^* < S$ لذا $A > Z(S)$ و بنا به فرض داریم،

$|A||C_S(A)| < |Z(S)||S|$ که یک تناقض است.

۲-۱-۱۰ مثال. فرض کنید p یک عدد اول فرد باشد. مثالی ارائه می دهیم (پیشنهاد شده

به وسیله اسکاپولا^{۳۵}) که S از رده پوچتوانی p و تنها CL -زیرگروه خودش است (در نتیجه یک

CL -زیرگروه مینیمال خودش است). قرار دهید $S = \mathbb{N} / \mathbb{N}_{p+3}$ ، که $\mathbb{N}$ گروه نوتینگهام (تعریف ۱-

۵-۱) برای میدان متناهی F_p است و $\mathbb{N}_1 \supseteq \mathbb{N}_2 \supseteq \dots$ یک سری نزولی از زیرگروههای نرمال $\mathbb{N}$

می باشد و همانند شرحی که در قضیه ۱-۵-۵ داده شده است داریم:

$$|\mathbb{N}_i / \mathbb{N}_{i+1}| = p \quad , \quad \mathbb{N}_1 = \mathbb{N} \quad \text{و} \quad \text{برای هر عدد صحیح مثبت } i \quad (۴-۱-۲)$$

$$[\mathbb{N}_r, \mathbb{N}_s] = \begin{cases} \mathbb{N}_{r+s} & , \quad \text{اگر } r \not\equiv s \pmod{p} \\ \mathbb{N}_{r+s+1} & , \quad \text{اگر } r \equiv s \pmod{p} \end{cases} \quad (۵-۱-۲)$$

و بنا به قضیه ۱-۵-۶ برای g در $\mathbb{N}_n / \mathbb{N}_{n+1}$ داریم:

$$\langle g^{\mathbb{N}} \rangle = \begin{cases} \langle g, \mathbb{N}_{n+1} \rangle = \mathbb{N}_n & , \quad \text{اگر } n \not\equiv 1 \pmod{p} \\ \langle g, \mathbb{N}_{n+2} \rangle & , \quad \text{اگر } n \equiv 1 \pmod{p} \end{cases} \quad (۶-۱-۲)$$

فرض کنید به ازای $i = 1, 2, \dots, p+2$ ، $S_i = \mathbb{N}_i / \mathbb{N}_{p+3}$. آنگاه یک سری نزولی از زیرگروههای

نرمال S بدست می آوریم،

$$S = S_1 > S_2 > \dots > S_{p+3} = 1$$

از روابط (۴-۱-۲) و (۵-۱-۲) داریم:

$$\forall i = 1, 2, \dots, p+2 \quad , \quad |S_i / S_{i+1}| = p \quad . \quad (۷-۱-۲)$$

و برای $1 \leq i \leq j \leq p+2$ داریم:

$$[S_i, S_j] = \begin{cases} S_{2i+1} & , \quad i = j \leq (p+1)/2 \quad \text{اگر} \\ 1 & , \quad j = p+1 \text{ یا } i+j \geq p+3 \quad \text{اگر} \\ S_{i+j} & , \quad \text{در غیر اینصورت} \end{cases} \quad (۸-۱-۲)$$

و تنها زیرگروههای نرمال S که شامل S_{p+2} می باشند عبارتند از

$S_{p+1}, \dots, S_5, S_4$ و زیرگروههایی از S که شامل S_3 هستند. (۹-۱-۲)

لذا

$$\forall i=1, 2, \dots, p+3, \quad |S_i| = p^{p+3-i}.$$

و سری مرکزی کاهشی S بصورت زیر بدست می آید:

$$S = S_1 > S_3 > S_4 > \dots > S_{p+1} > S_{p+3} = 1. \quad (10-1-2)$$

بنا به روابط (۷-۱-۲) و (۱۰-۱-۲)، S/S_{p+1} یک p -گروه از مرتبه p^p و رده پوچتوانی $p^{-\infty}$ است و لذا از کلاس ماکسیمال می باشد، این مثال شبیه مثالهای شیرد^{۳۶} در مرجع [۱۳] و کواکس^{۳۷} و لیدهام-گرین^{۳۸} در مرجع [۱۷] می باشد. در نتیجه:

$$Z(S/S_{p+1}) = S_p/S_{p+1}, \quad Z(S) = S_{p+1}. \quad (11-1-2)$$

فرض کنید $r = (p+3)/2$ ، به وسیله روابط (۸-۱-۲) و (۹-۱-۲) و (۱۱-۱-۲) به آسانی درمی یابیم که، S_r ، S_{r+1} ، ... و S_{p+1} تنها زیرگروههای آبلی نرمال S هستند که شامل $Z(S)$ می باشند و برای $i=r, r+1, \dots, p$ داریم:

$$|S_i| |C_S(S_i)| = p^{p+3-i} p^i = p^{p+3} \quad \text{و} \quad C_S(S_i) = S_{p+3-i}$$

و از رابطه (۱۱-۱-۲) خواهیم داشت .

$$|Z(S)| |S| = p^2 |S| = p^{p+4}$$

لذا بنا به لم ۹-۱-۲، S یک CL -زیرگروه مینیمال خودش است.

۲-۲. CL -زیرگروهها و زیرگروههای آبلی بزرگ

یک رابطه نزدیکی بین CL -زیرگروهها و زیرگروههای آبلی بزرگ وجود دارد. به ویژه هر CL -

زیرگروه یک زیرگروه آبلی بزرگ است که اکنون نشان خواهیم داد.

Shepherd^{۳۶}
Covacs^{۳۷}
Leedham-Gerin^{۳۸}

۱-۲-۲ قضیه. فرض کنید Q یک CL -زیرگروه S و A یک زیرگروه آبلی بزرگ از S

باشد آنگاه :

(الف) $(Q \cap A)Z(Q)$ یک زیرگروه آبلی بزرگ S است.

(ب) $QA = AQ$.

(ج) AQ یک CL -زیرگروه S است.

(د) $C_{QA}(Q \cap A) = Z(Q)A$.

برهان: فرض کنید

$$R = \langle Q, A \rangle, \quad k = |A : A \cap Q|, \quad z = |Z(Q)| \text{ و } z' = |Z(Q) \cap A|.$$

آنگاه بنا به نتیجه ۱-۲-۶ داریم $C_S(A) = A$ و $C_S(Q) = Z(Q)$ بنابراین

$$C_S(R) = Z(R) = Z(Q) \cap A.$$

چون $(A \cap Q)Z(Q)$ آبلی است داریم:

$$\begin{aligned} k |A \cap Q| &= |A| \geq |(A \cap Q)Z(Q)| \\ &= |A \cap Q| |Z(Q)| / |Z(Q) \cap A| = |A \cap Q| z / z'. \end{aligned} \quad (1-2-2)$$

لذا $k z' \geq z$ اکنون داریم:

$$\begin{aligned} f(S) &\geq |R| |Z(R)| = |R : Q| |Q| z' \geq |A : A \cap Q| |Q| z' \\ &= |Q| k z' \geq |Q| z = f(S). \end{aligned} \quad (2-2-2)$$

بنابراین روابط (۱-۲-۲) و (۲-۲-۲) هر دو تساوی می باشند. به ویژه ،

$$|A| = |(A \cap Q)Z(Q)|, \quad f(S) = |R| |Z(R)| \quad \text{و} \quad |R : Q| = |A : A \cap Q|$$

و این (الف) تا (ج) را نتیجه می دهد.

حال قرار دهید $C = C_{QA}(Q \cap A)$. آنگاه $C = C \cap QA = (C \cap Q)A$.

بنا به (الف) داریم:

$$Q \cap C = C_Q(Q \cap A) = C_Q((Q \cap A)Z(Q))$$

$$= (Q \cap A)Z(Q) = Z(Q)(Q \cap A)$$

لذا $C = (C \cap Q)A = Z(Q)A$ در نتیجه (د) ثابت می شود .

از قسمت (ج) قضیه قبل بلافاصله نتیجه زیر بدست می آید.

۲-۲-۲ نتیجه. گروه S_{CL} شامل $J(S)$ است.

۳-۲-۲ نتیجه. فرض کنید S دارای زیرگروه R باشد بطوریکه،

$$|S : C_S(R)| > |R|/|Z(S)| \text{ آنگاه } S > S_{CL} \geq J(S).$$

برهان: داریم :

$$|S||Z(S)| < |R||C_S(R)| \leq f(S) = f(S).$$

بنابراین S یک CL -زیرگروه خودش نیست.

۴-۲-۲ تذکر. نتیجه ۳-۲-۲ ممکن است در حالت خاص برای $R = Z_2(S)$ به کار برده

شود اگر $|Z_2(S)/Z(S)| > |S/C_S(Z_2(S))|$.

حال مثالی ارائه می دهیم.

۵-۲-۲ مثال. فرض کنید $p \geq \frac{11}{5}$ و n یک عدد طبیعی است که $n \geq \frac{11}{5}$. فرض کنید L

جبر لی نسبتاً آزاد از رده پوچتوانی ۳ روی میدان اول F_p با n مولد $x_1, \dots, x_n$ باشد و فرض

کنید $L_2 = [L, L]$ ، $L_3 = [L_2, L]$ به آسانی می توان دید L_2/L_3 دارای یک پایه شامل تصاویر

حاصلضربهای $[x_i, x_j]$ است که $i < j \leq n$ و

$$L_2 = \{x \in L \mid [L_2, x] = 0\} \text{ و } L_2/L_3 = Z(L/L_3), \dots, L_3 = Z(L)$$

بنابر قضیه لازارد (قضیه ۵-۱) L را با گروه S از توان p یکی می گیریم به طوریکه

$$L_3 = Z(S), \quad L_2 = [S, S] = Z_2(S), \quad C_S(L_2) = L_2$$

اکنون $[S / L_2] = p^n$ و $[L_2 / Z(S)] = p^d$ که $d = (n^2 - n)/2 > n$ لذا برای این گروهها $S > S_{CL} \geq J(S)$.

فصل سوم

CL-زیرگروههای مینیمال

۳. CL- زیرگروههای مینیمال

در این فصل، بعضی از خواص CL-زیرگروههای مینیمال را ثابت می کنیم، به ویژه نشان می دهیم دو CL-زیرگروه مینیمال هم مرتبه اند (نتیجه ۳-۶) و دارای زیرگروه مشتق یکسانی هستند (نتیجه ۳-۲). بنابراین یک زیرگروه مشخص S است و در بعضی مواقع که S یک p -سیلو زیرگروه G است این زیرگروه مشخص در G نرمال است (تذکر ۳-۹).

۳-۱ قضیه. فرض کنید Q یک CL-زیرگروه S و $R \in \mathcal{F}(S)$ باشد و

$$Q^* = (Q \cap R)Z(Q)C_Q(R).$$

آنگاه :

(الف) Q^* یک CL-زیرگروه S است.

(ب) اگر R یک CL-زیرگروه S باشد آنگاه $Q^* = (Q \cap R)Z(Q)$.

(ج) اگر Q و R ، CL-زیرگروههای مینیمال S باشند آنگاه :

$$Q = (Q \cap R)Z(Q) \quad , \quad Q' = (Q \cap R)' = R'$$

و

$$QR = (Q \cap R)Z(Q)Z(R) = (Q \cap R)C_S(Q \cap R).$$

برهان: فرض کنید

$$P^* = \langle Q \cap R, C \rangle, \quad C = C_S(Q \cap R) \quad \text{و} \quad P = \langle Q, R \rangle.$$

از قضیه ۱-۱-۲ و گزاره ۳-۱-۲ داریم:

$$P = QR, \quad P^* = (Q \cap R)C \quad \text{و} \quad Q \cap R, C, P, P^*, Q \cap P^* \in \mathcal{F}_1(S).$$

و

$$C = C_S(Q)C_S(R) = Z(Q)C_S(R) \quad (۱-۳)$$

لذا

$$Q \cap P^* = Q \cap (Q \cap R)C = (Q \cap R)(Q \cap C)$$

$$= (Q \cap R)(Q \cap Z(Q)C_S(R)) = (Q \cap R)(Z(Q)C_Q(R)) = Q^*$$

بنابراین $Q^* = Q \cap P^* \in \mathcal{F}_1(S)$ ، بنا به گزاره ۳-۱-۲ داریم :

$$C_S(P^*) = C_S(Q \cap R) \cap C_S(C) = C \cap C_S(C_S(Q \cap R))$$

$$= C_S(Q \cap R) \cap (Q \cap R) = Z(Q \cap R)$$

لذا از قضیه ۱-۱-۲ ، داریم:

$$C_S(Q^*) = C_S(Q \cap P^*) = C_S(Q)C_S(P^*) = Z(Q)Z(Q \cap R) \leq Q^*$$

بنا به گزاره ۴-۱-۲ (ج) ، Q^* یک CL -زیرگروه S است که (الف) را نتیجه می دهد.

حال فرض کنید R یک CL -زیرگروه S باشد، بنا به نتیجه ۶-۱-۲ ، $C_S(R) = Z(R)$. لذا

$$C_Q(R) = Q \cap Z(R) \leq Q \cap R \quad \text{و (ب) از (الف) نتیجه می دهد.}$$

در پایان فرض کنیم Q و R هر دو CL -زیرگروههای مینیمال S باشند، به وضوح Q شامل

Q^* است.

بنا به (الف) و (ب) ، $Q = Q^* = (Q \cap R)Z(Q)$. و بنا به تقارن $R = (Q \cap R)Z(R)$ این

تساویها به همراه تساوی (۱-۳) قسمت (ج) نتیجه می شود.

۲-۳ نتیجه. تمام CL -زیرگروههای مینیمال S دارای گروه مشتق یکسانی هستند که یک

زیرگروه مشخص S است.

برهان: از قضیه ۱-۳ بلافاصله نتیجه می شود.

۳-۳ لم. فرض کنید $K, L \triangleleft S$ ، $S = KL$ ، $K = C_S(L)$ ، $L = C_S(K)$ و K

مشمول در تعدادی CL -زیرگروه مینیمال S باشد. آنگاه یک دو سوئی بین مجموعه تمام CL -

زیرگروههای مینیمال Q از S شامل K و مجموعه تمام CL -زیرگروههای مینیمال Q^* از L که

$$Q^* = Q \cap L \text{ و } Q = KQ^* \text{، برقرار است.}$$

$$\text{در این دو سوئی } |Q| = |K/Z| \text{ و } |Q^*| = |L/Z| \text{ که } Z = Z(S) = Z(K) = Z(L).$$

برهان: فرض کنید $Z = Z(S)$ ، آنگاه :

$$Z = C_S(K) \cap C_S(L) = L \cap K = C_S(K) \cap K = Z(K)$$

بطور مشابه $Z = Z(L)$ ، پس :

$$Z = K \cap L = Z(K) = Z(L). \quad (۲-۳)$$

بنابراین Z مشمول در هر CL -زیرگروه S و L می باشد. (۳-۳)

فرض کنیم $\bar{T} = T/Z$ برای هر زیرگروه T از S (که شامل خود S می باشد)، بنا به رابطه

$$(۲-۳)، \quad \bar{S} = \bar{K} \times \bar{L} \text{ . به وضوح یک دوسویی بین مجموعه تمام زیرگروههای } T \text{ از } S \text{ که شامل } K$$

هستند و مجموعه تمام زیرگروههای T^* از L که شامل Z هستند وجود دارد. به طوریکه

$$\bar{T} = \bar{K} \times \bar{T}^* \text{ , } (T = KT^* \text{ , } T^* = T \cap L).$$

در این دو سوئی $T^* \cap K = L \cap K = Z$ و بنا به رابطه (۲-۳) داریم:

$$|T| = |KT^*| = |K| |T^*| / |K \cap T^*| = |K/Z| |T^*|. \quad (۴-۳)$$

و

$$Z(T) = C_T(KT^*) = C_T(K) \cap C_T(T^*) = C_S(K) \cap T \cap C_T(T^*)$$

$$= L \cap T \cap C_T(T^*) = T^* \cap C_T(T^*) = Z(T^*) . \quad (5-3)$$

بنابراین

$$|T| |Z(T)| = |K / Z| |T^*| |Z(T^*)| .$$

اکنون واضح است که، این دو سویی به دو سویی مورد نظر برای CL -زیرگروههای مینیمال محدود می شود.

۴-۳ قضیه. فرض کنید $T \in \mathcal{N}(S)$ و Q یک CL -زیرگروه مینیمال S باشد که شامل T است آنگاه:

(الف) $Q = TC_Q(T)$ ، $C_Q(T)$ یک CL -زیرگروه مینیمال $C_S(T)$ است.

(ب) برای هر CL -زیرگروه مینیمال Q^* از $C_S(T)$ ، گروه TQ^* یک CL -زیرگروه مینیمال

$$\text{در } S \text{ است ، } Q^* = C_{TQ^*}(T) \text{ و } |Q^*| = |T / Z(T)| |TQ^*| .$$

برهان: فرض کنید $C = C_S(T)$ ، بنا بر قضیه ۱-۱-۲ و گزاره ۳-۱-۲، $T = C_S(C)$ و $\mathcal{N}(S)$

شامل C و TC می باشد. چون $C \leq TC$ و $C_S(TC) \leq C_S(T) = C$ لذا گزاره ۴-۱-۲ (ج) نتیجه می

دهد که TC یک CL -زیرگروه S است. اکنون TC شامل CL -زیرگروه مینیمال Q در S است و

$$Z(Q) \leq C_S(T) = C .$$

$$Q = (Q \cap Q) Z(Q) \leq TC$$

آنگاه $Q = Q \cap TC = T(Q \cap C) = TC_Q(T)$. اکنون می بینیم که نتیجه از لم ۳-۳، به وسیله

جا به جا کردن L ، K و S به ترتیب با T ، C و TC به دست می آید. (توجه کنید که CL -

زیرگروههای TC دقیقاً CL -زیرگروههای S هستند که مشمول در TC می باشند).

۵-۳ قضیه. فرض کنید Q و R ، CL -زیرگروههای مینیمال S باشند و $C = C_S(Q \cap R)$

آنگاه :

$$(الف) (C) \text{ و } Z(Q) = C_Q(Q \cap R) \text{ ، } Z(Q) \in Q = (Q \cap R) Z(Q) .$$

(ب) هر گاه $Q \cap R \leq U \leq (Q \cap R)C$ آنگاه U یک CL -زیرگروه مینیمال S است اگر و

تنها اگر $\mathcal{H}U \cap C \in (C)$.

$$(ج) \quad |Q| = |R| \quad و \quad |Z(Q)| = |Z(R)|$$

برهان: بنا بر قضایای ۱-۲ و ۱-۳، $Q \cap R \in \mathcal{F}_1(S)$ ، $Q = (Q \cap R)Z(Q)$. بنابراین

$$Z(Q) = C_Q(Q \cap R). \text{ فرض کنید } T = Q \cap R, \text{ از قضیه ۳-۴، } Z(Q) \text{ یک } CL\text{-زیرگروه}$$

مینیمال C است. بنابراین برای هر زیرگروه آبدی A از C داریم:

$$|A|^2 = |A||Z(A)| \leq f(C) = |Z(Q)||Z(Z(Q))| = |Z(Q)|^2$$

لذا $|A| \leq |Z(Q)|$. این نشان می دهد که $\mathcal{H}Z(Q) \in (C)$ و برهان (الف) را کامل می کند.

برای هر CL -زیرگروه مینیمال P در C قضیه ۳-۱، نتیجه می دهد که $P' = (Z(Q))' = 1$

لذا P آبدی است و پاراگراف قبل نشان می دهد که $\mathcal{H}P \in (C)$. این نتیجه می دهد که $\mathcal{H}(C)$

دقیقاً مجموعه تمام CL -زیرگروههای مینیمال C می باشد. اکنون قضیه ۳-۴، قسمت (ب) را نتیجه

می دهد و $|Q| = |T/Z(T)||Z(Q)|$

همچنین بنا به تقارن بین Q و R داریم، $\mathcal{H}Z(R) \in (C)$. پس $|Z(Q)| = |Z(R)|$ و

$$|R| = |T/Z(T)||Z(R)| = |T/Z(T)||Z(Q)| = |Q|$$

۳-۶ نتیجه. فرض کنید T یک CL -زیرگروه S باشد و

$$m = \min \{ |Q| \mid Q \text{ یک } CL\text{-زیرگروه از } S \text{ است.} \}$$

آنگاه شرایط زیر هم ارزند.

$$(الف) \quad |T| = m$$

(ب) T یک CL -زیرگروه مینیمال S است.

(ج) T یک CL -زیرگروه مینیمال خودش است.

برهان: فرض کنید Q یک CL -زیرگروه S از مرتبه m باشد. به وضوح Q یک CL -زیرگروه

مینیمال S است. بنا بر قضیه ۳-۵، می بینیم (الف) و (ب) هم ارزند. از تعریف CL -زیرگروه (ب) و (ج) نیز هم ارزند.

۷-۳ قضیه. فرض کنید T یک زیرگروه نرمال سره S باشد و Q یک CL -زیرگروه

مینیمال S باشد و فرض کنید شرایط زیر برقرار باشد:

(۱) S/T آبلی است.

(۲) $|Z(T)/Z(S)| = |S/T|$ و $Z(S) < Z(T)$

(۳) برای هر $x \in Z(T)/Z(S)$ ، $C_S(x) = T$

(۴) $Q \not\subseteq T$ یعنی T نیست.

فرض کنید $Q^* = (Q \cap T)Z(T)$ آنگاه:

(الف) $Q \cap Z(T) = Z(S)$ و $S = QT = Z(Q)T$

(ب) Q^* یک CL -زیرگروه مینیمال S است.

(ج) $Q' = Q^* ch T$

برهان: توجه کنید که $Q \cap T < Q$ و $Z(T) \leq Z(Q^*)$ بنا به (۳)، $Z(S) \leq T$. پس

$Z(S) \leq Q \cap Z(T)$. فرض کنید $q = |S/T|$ آنگاه:

$$|Q|/|Q^*| \leq |Q|/|Q \cap T| \leq |S/T| = q. \quad (۶-۳)$$

ابتدا فرض کنید $Q \cap Z(T) > Z(S)$ ، لذا از (۳) داریم:

$$Z(Q) \leq C_Q(Q \cap Z(T)) \leq Q \cap T \leq Q^* \text{ و } Z(Q) \cap Z(T) = Z(S). \quad (۷-۳)$$

بنابراین $Z(Q) \leq Z(Q^*)$ و از (۲) داریم:

$$|Z(Q^*)/Z(Q)| \geq |Z(T)/(Z(T) \cap Z(Q))| = |Z(T)/Z(S)| = q.$$

در نتیجه از رابطه (۶-۳) داریم:

$$|Q^*||Z(Q^*)| \geq (|Q|/q)(q|Z(Q)|) = |Q||Z(Q)| = f(S).$$

پس Q^* یک CL -زیرگروه S است و تمام روابط فوق تساوی خواهند بود، به ویژه

$$|Q^*| = |Q|/q < |Q| \quad \text{، که این با نتیجه ۳-۶ تناقض دارد. این تناقض نشان می دهد:}$$

$$Q \cap Z(T) = Z(S) \quad (۴-۸)$$

از رابطه (۳-۸) و (۲) داریم:

$$|Q^*/(Q \cap T)| = |(Q \cap T)Z(T)/(Q \cap T)| = |Z(T)/Z(T) \cap Q|$$

$$= |Z(T)/Z(S)| = q = |S/T| \geq |Q/(Q \cap T)|$$

لذا $|Q^*| \geq |Q|$ ، همچنین ،

$$|Z(Q^*)/(Z(Q) \cap T)| \geq |Z(Q^*)/Z(Q) \cap Z(Q^*)| \geq |Z(T)/(Z(Q) \cap Z(T))|$$

$$= |Z(T)/Z(S)| = q = |S/T| \geq |Z(Q)/(Z(Q) \cap T)|$$

لذا $|Z(Q^*)| \geq |Z(Q)|$ و دوباره خواهیم داشت :

$$|Q^*||Z(Q^*)| \geq |Q||Z(Q)| = f(S).$$

چون Q^* یک CL -زیرگروه S است، تمام نامساویهای فوق تساوی هستند به ویژه

$$|Q| = |Q^*| \quad \text{و} \quad |S/T| = |Z(Q)/(Z(Q) \cap T)|.$$

اکنون از رابطه (۳-۸)، نتیجه ۳-۶ و قضیه ۳-۱ (ج) گزاره های (الف) تا (ج) بدست می آیند.

۳-۸ نتیجه. فرض کنید T زیرگروه نرمال سره S باشد و فرض کنید.

(۱) S/T آبلی است.

(۲) $Z(S) < Z(T)$ و $|Z(T)/Z(S)| = |S/T|$

(۳) برای هر $x \in Z(T) \setminus Z(S)$ ، $C_S(x) = T$

فرض کنید Q یک CL -زیرگروه S باشد ، آنگاه

(الف) Q^* زیرگروه مشخص S و یک زیرگروه مشخص T است .

(ب) اگر بعضی از CL -زیرگروههای مینیمال S مشمول در T نباشند، آنگاه $S = TC_S(Q')$.

برهان: بنا بر نتیجه ۲-۳، $Q' \text{ ch } S$ و به طور مشابه اگر Q مشمول در T باشد، آنگاه بنا به

قضیه ۷-۴، $Q' \text{ ch } T$.

حال فرض کنیم R یک CL -زیرگروه مینیمال S باشد که مشمول در T نیست، بنا به نتیجه

۲-۳ و قضیه ۷-۴ داریم:

$$S = RT = Z(R)T \quad \text{و} \quad R' = Q'.$$

پس $S = C_S(R')T = C_S(Q')T$.

۹-۳ تذکر. در مسائل پوشینگ-آپ S یک p -سیلو زیرگروه در گروه متناهی G است و

ساختار G را به وسیله مطالعه نرمالسازهای زیرگروههای غیرهمانی S ، مخصوصاً زیرگروههای

مشخص، مورد بررسی قرار می دهد. در بسیاری مواقع این موضوع به مورد خاص زیر ساده می شود:

S یک p -سیلو زیرگروه یک گروه متناهی G است؛

T بزرگترین p -زیرگروه نرمال G است؛

$$C_G(T) \leq T;$$

S مشمول در یک زیرگروه ماکسیمال منحصر به فرد از G است؛

$G/K \cong PSL(2, p^n)$ برای بعضی زیرگروههای نرمال K در G و عدد طبیعی n ؛

$$Z(S) \neq Z(G) \quad \text{و} \quad C_S(Z(J(S))) \quad \text{در} \quad G \quad \text{نرمال نیست.} \quad (9-3)$$

در اینجا به وسیله لم ۷-۶-۱ (برای $T=M$) فرض نتیجه ۸-۳ برقرار است و

$$Z(T) = \Omega_1(Z(T))Z(S). \quad (10-3)$$

بنابراین زیرگروه مشخص Q' در S (و T)، مذکور در نتیجه ۸-۳، در G نرمال است.

قرار می دهیم :

$\{ Q \text{ یک } CL\text{-زیرگروه مینیمال } S \text{ است.} \mid \mid \Omega_1(Z(Q)) \mid \mid \}$. $m = \max$

و شرط زیر را روی یک زیرگروه Q در S در نظر می گیریم،

(M) Q یک $CL\text{-زیرگروه مینیمال } S$ است و $m = \mid \Omega_1(Z(Q)) \mid$

برای هر زیرگروه Q در S فرض کنید $\Phi(Q)$ زیرگروه فراتینی Q باشد و

$\langle Q \text{ فرض } (M) \text{ را برقرار کند} \mid \Phi(Q) \rangle = S_M$.

برای هر زیرگروه R در S نیز R_M را به طور مشابه تعریف می کنیم. بنا به (۳-۱۰) و کمی

تغییرات در برهان قضیه ۳-۷ موضوع در شرط ۳-۹ بدست می آید و داریم:

$$S_M = T_M \triangleleft G.$$

بنابراین اگر رابطه (۳-۹) برقرار باشد، آنگاه یک زیرگروه مشخص غیرهمانی در S وجود دارد که

در G نرمال است، مگر اینکه $S_M = \mathbb{Z}$ ، که در این حالت بنا به نتایج ۳-۲ و ۳-۶، یا $CL\text{-زیرگروه}$

های S بر زیرگروههای آبدی بزرگ S منطبقند یا آبدی مقدماتی هستند. همچنین در حالت اخیر،

قضیه ۲-۱-۱ نتیجه می دهد که برای تمام زیرگروههای آبدی بزرگ A و B در S داریم،

$AB = BA = C_S(A \cap B)$ و (بنا به قضیه ۴-۷ و نتیجه ۵-۱۰ در فصلهای بعد) زیرگروه آبدی

بزرگ S به وسیله $J(S)$ و هر زیرگروه نرمال S از رده پوچتوانی حداکثر $p - \mathbb{Z}$ نرمال می شود.

فصل چهارم

CL- زیرگروه اکسترمال

۴. CL- زیرگروه اکسترمال

در میان CL- زیرگروهها، CL- زیرگروههای مینیمال بنا به تعریف نسبت به رابطه شمول و بنا به نتیجه ۳-۶ نسبت به کاردینال مینیمال هستند. در این فصل باز هم به وسیله مقایسه زیرگروهها، نوع دیگری از ترتیب جزئی را معرفی می کنیم و با استفاده از آن یک CL- زیرگروه مینیمال در S ارائه می دهیم که به وسیله $J(S)$ و تمام CL- زیرگروههای مینیمال S نرمال می شود. در این فصل نشان می دهیم که این زیرگروه همچنین به وسیله هر زیرگروه نرمال S از رده پوچتوانی حداکثر $p - \ell$ نرمال می شود.

۴-۱ تعریف. فرض کنید T یک زیرگروه S و φ سری مرکزی $1 = T_0 \leq T_1 \leq \dots \leq T_k = T$

از T باشد. ترتیب جزئی $\prec_\varphi$ را روی مجموعه تمام زیرگروههای T به صورت زیر تعریف می کنیم،

$$A \prec_\varphi B \text{ اگر } |A| = |B| \text{ و}$$

$$(\text{الف}) \quad |A \cap T_i| \leq |B \cap T_i| \quad , \quad \forall i = 1, \dots, k$$

$$(\text{ب}) \quad |A \cap T_i| < |B \cap T_i| \quad , \quad \exists i, 1 \leq i \leq k$$

۴-۲ تعریف. فرض کنید T یک زیرگروه S و Q یک CL- زیرگروه مینیمال T باشد آنگاه

Q یک CL- زیرگروه اکسترمال (ECL- زیرگروه T) است اگر یک سری مرکزی φ از T موجود باشد که $Z(Q)$ یک عنصر مینیمال مجموعه

$$\{ Z(R) \mid R \text{ یک CL- زیرگروه مینیمال } T \text{ است.} \}$$

تحت ترتیب جزئی $\prec_\varphi$ باشد. در این حالت می گوییم Q با رابطه $\prec_\varphi$ اکسترمال است.

توجه کنید که اگر یک CL- زیرگروه اکسترمال Q از S مشمول در یک زیرگروه T در S باشد،

آنگاه Q یک CL- زیرگروه اکسترمال از T است.

همچنین هر CL- زیرگروه مینیمال Q از S که در S نرمال می باشد، یک CL- زیرگروه

اکسترمال از S است. چون این زیرگروه یک سری مرکزی از S دارد که شامل $Z(Q)$ است.

اکنون به دو قضیه مهم زیر نیاز داریم.

۳-۴ قضیه. فرض کنید A و B زیرگروههای آبدی در یک گروه باشند و $AB=BA$ آنگاه

$$(AB)' \text{ آبدی است.}$$

برهان: به [۲ ص ۶۷۴] مراجعه شود.

۴-۴ قضیه. فرض کنید A یک زیرگروه آبدی S باشد، $x \in S$ ،

$$M = [x, A] = \langle x^{-1}a^{-1}xa \mid a \in A \rangle \text{ و } B = MC_A(M)$$

و فرض کنید M آبدی باشد آنگاه :

$$(الف) \text{ برای هر زیرگروه نرمال } N \text{ از } S, |B \cap N| \geq |A \cap N|.$$

(ب) اگر $1 = S_0 \leq S_1 \leq \dots \leq S_k = S$ یک سری مرکزی S باشد و $B \neq A$ آنگاه

$$\exists i, |B \cap S_i| > |A \cap S_i|.$$

برهان: به [۳ ص ۱۹] مراجعه شود.

۵-۴ قضیه. فرض کنید Q یک CL -زیرگروه مینیمال S باشد، $x \in S$ و فرض کنید

$$[x, Z(Q)] \text{ آبدی باشد و}$$

$$T = (Q \cap Q^x)Y, \quad Y = MC_Z(M), \quad M = [x, Z] \text{ و } Z = Z(Q).$$

آنگاه،

(الف) T یک CL -زیرگروه مینیمال S است.

$$(ب) \quad T = C_S(Y), \quad Y = Z(T).$$

(ج) اگر x, Q را نرمال نکنند، آنگاه به ازای هر سری مرکزی φ از S داریم، $Z \prec_{\varphi} Y$.

برهان: فرض کنید $R = Q^x$ و $C = C_S(Q \cap R)$ آنگاه $Z^x = Z(R)$ و

$$(۱-۵) \quad Y = MC_Z(M) \leq \langle x^{-1}z^{-1}xz, w \mid z, w \in Z \rangle \leq \langle Z^x, Z \rangle \leq C_S(Q \cap R) = C.$$

بنا به فرض، M آبدلی است. همچنین Y نیز آبدلی است. چون

$$Y \leq Z(T) \leq T \cap C \text{ و } Y \leq C \text{ و } T = (Q \cap R)Y.$$

بنابراین $T \cap C$ با Y ، $Q \cap R$ و همچنین T جا به جا می شود. بنابراین

$$Y \leq Z(T) = T \cap C. \quad (2-4)$$

بنا به قضیه ۴-۴ برای هر زیرگروه نرمال N از S داریم:

$$|Y \cap N| \geq |Z \cap N|. \quad (3-4)$$

و اگر $Y \neq Z$ آنگاه برای هر سری مرکزی ϕ از S داریم:

$$\exists U \in \phi, |Y \cap U| > |Z \cap U|. \quad (4-4)$$

بنا به قضیه ۵-۳، Z در $\mathcal{H}(C)$ قرار می گیرد، بنا به (۳-۴) (با $N=S$) و (۲-۴) داریم:

$$|Z| \leq |Y| \text{ و } Y \leq Z(T) = T \cap C = C.$$

بنابراین

$$|Y| = |Z|, \quad \mathcal{H}Y \in (C) \text{ و } Y = Z(T) = T \cap C. \quad (5-4)$$

بنا به قضیه ۵-۴ (ب)، T یک CL -زیرگروه مینیمال S است. و بنا به گزاره ۳-۲-۲،

$$T = C_S(C_S(T)) = C_S(Z(T)) = C_S(Y)$$

این (الف) و (ب) را ثابت می کند.

حال فرض کنید x ، Q را نرمال نکند، چون $Q = C_S(Z)$ این نتیجه می دهد که x ، Z را

نرمال نمی کند. آنگاه Z^x مشمول در Z نیست. لذا M و Y مشمول در Z نیستند. پس بنا به

(۵-۴)، (۳-۴) و (۴-۴) داریم: به ازای هر سری نرمال ϕ از S ، $Z \prec_{\phi} Y$ و این (ج) را می دهد.

از قضیه ۵-۴ بلافاصله نتیجه زیر بدست می آید.

۴-۶ نتیجه. فرض کنید Q یک CL -زیرگروه اکسترمال S باشد، $x \in S$ و $[x, Z(Q)]$

آبدلی باشد. آنگاه x ، Q را نرمال می کند.

۴-۷ قضیه. فرض کنید Q یک CL -زیرگروه اکسترمال S باشد آنگاه

(الف) اگر B یک زیرگروه آبدی S و $BZ(Q)$ یا $Z(Q)B$ زیرگروه S باشد آنگاه B ، Q را نرمال می کند.

(ب) Q به وسیله $J(S)$ و هر CL -زیرگروه مینیمال S نرمال می شود.

برهان: فرض کنید $Z = Z(Q)$.

(الف) در اینجا $BZ = ZB$ پس بنا به قضیه ۳-۴ ، $[B, Z]$ آبدی است، همچنین $[x, Z]$ برای هر $x \in B$ آبدی است، اکنون نتیجه ۶-۴ را بکار می گیریم.

(ب) ابتدا A را عضوی از $\mathcal{A}(S)$ در نظر بگیرید بنا به قضیه ۱-۲-۲ ، $C_{QA}(Q \cap A) = ZA$.

بنا به (الف) ، A ، Q را نرمال می کند. چون عناصر $\mathcal{A}(S)$ ، $J(S)$ را تولید می کنند، لذا $J(S)$ ، Q را نرمال می کند.

سپس R را CL -زیرگروه مینیمال S در نظر بگیرید و فرض کنید $Y = Z(R)$ بنا به قضیه ۱-۱-۲ و گزاره ۴-۱-۲ (ج) داریم:

$$C_S(Q \cap R) = C_S(Q)C_S(R) = ZY .$$

بنا به (الف) ، Y ، Q را نرمال می کند ، لذا بنا به قضیه ۱-۳ (ج) داریم :

$$R = (Q \cap R)Y \leq N_S(Q)$$

و لذا R ، Q را نرمال می کند.

قضیه ۷-۴ نشان می دهد که یک CL -زیرگروه اکستریمال Q از S به وسیله هر زیرگروه آبدی نرمال S ، نرمال می شود. نتیجه اصلی ما در فصل ۵ نشان می دهد که Q به وسیله هر زیرگروه نرمال S از رده پوچتوانی حداکثر $p - \epsilon$ نرمال می شود. در ادامه این فصل چندین نتیجه مقدماتی در جهت این هدف ثابت خواهیم نمود.

۸-۴ لم. فرض کنید A یک زیرگروه آبدی S باشد و

$$T \leq S \text{ , } x \in N_S(T) \text{ و } A \triangleleft T .$$

فرض کنید $[A, x; p] = 1$ و برای تمام اعداد طبیعی j, i که $i + j \geq p$ ، داشته باشیم،

$$[[A, x; i], [A, x; j]] = 1$$
 آنگاه:

(الف) اگر $p = \infty$ آنگاه $\langle x^A \rangle = \langle x^y \mid y \in A \rangle$ آبلی است.

(ب) اگر p فرد باشد، آنگاه رده پوچتوانی

$$\langle A^{x^i} \mid i \text{ عدد صحیح است} \rangle.$$

حداکثر $p - \infty$ است.

برهان: (الف) در اینجا نیاز نیست فرض کنید S یک ۲-گروه است. فرض کنید، $S^* = \langle A, x \rangle$

$$U = \langle x^A \rangle \text{ آنگاه:}$$

$$[A, x, x] = 1 \text{ (بنا به فرض) و } U \triangleleft \langle A, x \rangle = S^*.$$

بنابراین، برای هر g در A داریم:

$$x \text{ با } g x^{-1} g^{-1} \text{ و همچنین با } (x^{-1})^g \text{ و } x^g \text{ جابجا می شود.}$$

لذا x با U جابجا می شود و در $Z(U)$ قرار دارد. همچنین $U \triangleleft S^*$ ،

$$Z(U) \triangleleft S^*, \quad U = \langle x^A \rangle \leq Z(U).$$

یعنی U آبلی است.

(ب) به لم ۲-۵ در مرجع [۱۴] مراجعه شود.

۹-۴ لم. فرض کنید Q یک CL -زیرگروه اکسترمال S باشد، $x \in S$ و $Z = Z(Q)$

همچنین فرض کنید:

$$(۱) \quad [Z, x; p] = 1.$$

(۲) به ازای هر عدد صحیح j, i که $i + j \geq p$ ، $[[z, x; i], [z, x; j]] = 1$ فرض کنید

$$I = \bigcap \{ Q^{x^i} \mid i \text{ عدد صحیح است} \} \text{ و } C = C_S(I).$$

آنگاه :

(الف) برای هر عدد صحیح i ، $Z^{x^i} \triangleleft C$ و $C = \prod Z^{x^i}$.

(ب) اگر p فرد باشد، آنگاه C دارای رده پوچتوانی حداکثر $p-1$ است.

(ج) یک دو سویی از مجموعه تمام CL -زیرگروههای مینیمال S که شامل I هستند، به توی

مجموعه تمام CL -زیرگروههای مینیمال C وجود دارد، که به صورت زیر داده شده است:

$$\varphi(R) = R^* = R \cap C = C_R(I) , \quad \varphi^{-1}(R^*) = R = IR^* , \quad Z(R) = Z(R^*) .$$

(د) سری مرکزی φ از S که Q ، با رابطه φ اکسترمال باشد را در نظر بگیرید، و فرض کنید

$$\psi = \{ T \cap C \mid T \in \varphi \} .$$

آنگاه ψ یک سری مرکزی از C است و $C_Q(I)$ با رابطه ψ ، اکسترمال است.

برهان: (الف) برای هر عدد صحیح i ، Q^{x^i} یک CL -زیرگروه اکسترمال S است و همچنین

متعلق به $\mathcal{F}_1(S)$ می باشد و

$$C_S(Q^{x^i}) = Z(Q^{x^i}) = Z^{x^i} . \quad (۴-۶)$$

بنا به قضیه ۴-۷ (ب) به ازای هر عدد صحیح i, j داریم:

$$Q^{x^i} , Q^{x^j} \text{ را نرمال می کند.} \quad (۴-۷)$$

بنا به قضیه ۲-۱-۱ ، رابطه (۴-۶) و مقدمه، برای هر عدد مثبت k داریم:

$$Q \cap Q^x \cap \dots \cap Q^{x^k} \in F_1(S) .$$

$$C_S(Q \cap Q^x \cap \dots \cap Q^{x^k}) = Z Z^x \dots Z^{x^k} .$$

بنا به (۴-۷)، به ازای هر عدد صحیح i و j ، Z^{x^i} ، Z^{x^j} را نرمال می کند. بنابراین I متعلق به

$\mathcal{F}_1(S)$ است . پس (الف) را بدست می آوریم.

(ب) با استفاده از (الف) و لم ۴-۸ بدست می آید.

(ج) از قضیه ۳-۴ استفاده می کنیم. فرض کنید برای هر CL -زیرگروه مینیمال S مانند R شامل I ، $\varphi(R) = R \cap C = C_R(I)$ ، بنا به قضیه ۳-۴(الف) ، $C_R(I)$ یک CL -زیرگروه مینیمال C است و $R = I C_R(I)$. (این نشان می دهد که برای $R_1 \neq R_2$ ، $\varphi(R_1) \neq \varphi(R_2)$). و بنا به قضیه ۳-۴(ب) این برای هر CL -زیرگروه مینیمال C برقرار است. بنابراین φ همان دوسویی خواسته شده است. به علاوه برای هر CL -زیرگروه مینیمال C مانند R^* داریم،

$$C_C(R^*) = Z(R^*) \text{ لذا}$$

$$Z(R^*) = IR^* \cap C_C(R^*) = IR^* \cap C_S(I) \cap C_S(R^*) = Z(IR^*) .$$

و نتیجه حاصل می شود.

(د) به وضوح ψ یک سری مرکزی C است. حال فرض کنید R^* یک CL -زیرگروه C باشد و $R = IR^*$. بنا به (ج) ، R یک CL -زیرگروه مینیمال S است و $C_Q(I)$ یک CL -زیرگروه مینیمال C است.

$$Z(Q) = Z(C_Q(I)) \leq C \quad \text{و} \quad Z(R) = Z(R^*) \leq C. \quad (\lambda-4)$$

اکنون فرض کنید $R^* \prec_{\psi} C_Q(I)$. بنا به (۴-۸) و به وسیله تعریف $\prec_{\psi}$ ، به ازای هر N در φ داریم:

$$|Z(Q) \cap N| = |Z(C_Q(I)) \cap C \cap N| \leq |Z(R^*) \cap C \cap N| = |Z(R) \cap N|$$

و به طور مشابه یک $N \in \varphi$ وجود دارد که ،

$$|Z(Q) \cap N| < |Z(R) \cap N| .$$

بنابراین $R \prec_{\varphi} Q$ ، اما Q یک CL -زیرگروه اکسترمال S با رابطه φ می باشد، که یک تناقض است.

فصل پنجم

نتیجه گیری

۵. نتیجه گیری

فرض کنید Q یک CL -زیرگروه اکسترمال S باشد. در فصل قبل نشان دادیم که Q به وسیله $J(S)$ و هر CL -زیرگروه مینیمال S نرمال می شود، در این فصل نشان می دهیم Q به وسیله هر زیرگروه نرمال S از رده پوچتوانی حداکثر $p - \mathbb{Z}$ نرمال می شود.

برای آن، به نقل قضیه قوی لازارد و بعضی کاربردهای گرفته شده از مرجع [۹] نیاز داریم.

قضیه ۵-۱. فرض کنید T یک p -گروه از رده پوچتوانی حداکثر $p - \mathbb{Z}$ باشد، آنگاه با استفاده

از وارون سازی فرمول بیکر کامبل-هاسدورف، T را به عنوان یک حلقه لی در نظر می گیریم. که در این حالت، مفهوم زیرگروه و زیرگروه نرمال به ترتیب با زیرحلقه و ایده آل یکی هستند. و جایگشت T یک خودریختی گروه است اگر و فقط اگر خودریختی یک حلقه باشد. بنابراین فرض کنید $x, y \in T$ ، آنگاه $xy = yx$ (در گروه) اگر و فقط اگر $[x, y] = \mathbb{Z}$ (در حلقه لی) و در این حالت xy (در گروه) مساوی با $x + y$ (در حلقه لی) است. به خصوص برای هر عدد صحیح n ، x^n (در گروه) با nx (در حلقه لی) برابر است.

توجه کنید که به طور معمول یک ایده آل U از یک حلقه لی T ، یک زیرگروه جمعی T است که $[U, T] \leq U$.

۵-۲ فرضها: فرض کنید:

(۱) e یک عدد صحیح مثبت و R حلقه $Z/p^e Z$ است.

(۲) L یک R -مدول متناهی است.

(۳) α یک خودریختی L است.

(۴) λ درونریختی $\alpha - \mathbb{Z}$ از L است. (یعنی $\lambda(x) = \alpha(x) - x$ برای هر $x \in L$).

(۵) $\lambda^p = \mathbb{Z}$.

توجه کنید که چون $p^e L = \mathbb{Z}$ ، R -مدول L فقط یک گروه جمعی است. بنابراین یک R -زیرمدول M از L فقط یک زیرگروه L است، اگر $p^c = |M|$ ، آنگاه طول ترکیب M به عنوان یک R -مدول برابر c است. همچنین هر درونریختی L یک درونریختی R -مدولی L است. به طور مشابه در قضیه ۵-۱، گروه T ممکن است به عنوان یک جبر لی روی $Z/p^e Z$ در نظر گرفته شود، به طوریکه به ازای هر $x \in T$ ، $x^{p^e} = 1$.

فرضهای ۵-۲ حالت خاص فرضهای ۱-۳-۱ است. (که در اینجا می گیریم $n = p$) و به وسیله تعریف یک نگاشت که هر زیرگروه L مانند M را به یک زیرگروه L مانند M^* می برد، به دست می آید. بنا به قضیه ۱-۳-۳، نتیجه ۱-۳-۴ و قضیه ۱-۳-۵ این نگاشت دارای خواص زیر است.

۵-۳ قضیه. فرض کنید فرضهای ۵-۲ و علامتگذاری فوق برقرار باشد و فرض کنید M

زیرگروهی در L باشد. آنگاه زیرگروه M^* در L دارای خواص زیر است.

(الف) M^* تحت α ثابت است.

(ب) اگر M تحت α ثابت باشد آنگاه $M^* = M$.

(ج) $|M^*| = |M|$.

(د) برای هر زیرگروه M مانند N داریم $N^* \leq M^*$.

(ه) برای هر زیرگروه α -ثابت L مانند X داریم:

$$(M \cap X)^* \leq M^* \cap X, \quad |M \cap X| \leq |M^* \cap X|$$

(و) اگر

$$0 = I_0 \leq I_1 \leq \dots \leq I_m = L$$

یک سری صعودی از زیرگروههای L باشد که

$$\forall i = 1, \dots, m, \quad \lambda(L_i) \leq L_{i-1}$$

آنگاه وجود دارد $i \leq m$ ، i به طوریکه

$$.M^* \cap L_i > M \cap L_i$$

مگر اینکه M تحت α ثابت باشد.

۴-۵ قضیه. با نمادگذاری قضیه ۳-۵، فرض کنید که L یک جبر لی تحت R باشد و α

یک خودریختی L باشد. M یک زیرگروه L و N یک ایده آل M باشد. و فرض کنید برای

تمام $x, y \in M$

$$[\lambda^i(x), \lambda^j(y)] = \mathcal{L}$$

هرگاه i, j اعداد صحیحی باشند که $i + j \geq n$ آنگاه:

(الف) M^* یک زیرگروه L است.

(ب) $[M^*, N^*] \leq [M, N]^*$.

(ج) $(Z(M))^* \leq Z(M^*)$.

(د) اگر k یک عدد طبیعی و M پوچتوان از رده حداکثر k باشد. آنگاه M^* نیز اینگونه است.

(ه) اگر $b \in R$ و $Mb = \mathcal{L}$ آنگاه $M^*b = \mathcal{L}$.

اکنون نتایج خود روی جبرهای لی را برای p -گروههای متناهی به کار می گیریم. در نتایج زیر،

گروه H هم به عنوان گروه و هم به عنوان جبر لی مطرح می شود. در جایی که ممکن است این دو

با هم اشتباه شوند، نماد H_G یعنی H را به عنوان گروه در نظر می گیریم و نماد H_L یعنی H را

به عنوان جبر لی در نظر می گیریم.

۵-۵ لم. فرض کنید S یک p -گروه متناهی باشد، Q و R زیرگروههای S باشند و $g \in S$.

فرض کنید R دارای رده پوچتوانی حداکثر $p - \mathcal{L}$ باشد، $Q \leq R$ و g ، R را نرمال کند، فرض کنید

α خودریختی R داده شده به وسیله مزدوج g در گروه S باشد. یعنی $\alpha(x) = g^{-1}xg$.

همچنین R را به عنوان یک حلقه لی R_L و α را به عنوان خودریختی (و یک درونیختی) R_L

در نظر می گیریم، آنگاه:

(الف) $[Q_G, g]$ به وسیله Q_G نرمال می شود.

(ب) برای هر عدد صحیح مثبت i ، $(\alpha - 1)^i Q_L$ مشمول در $[Q_G, g; i]$ است.

برهان: قسمت (الف) و (ب) برای حالت $i = \infty$ حالت خاص لم ۱-۴-۵ هستند. اکنون برهان را

گسترش می دهیم.

(الف) برای $x, y \in Q_G$ داریم:

$$[xy, g] = y^{-1} x^{-1} x^g y^g = y^{-1} x^{-1} y^g = [x, g]^y [y, g]$$

بنابراین

$$[x, g]^y = [xy, g][y, g]^{-1} \in [Q_G, g].$$

(ب) فرض کنید $i = \infty$ ، ابتدا R را به عنوان یک گروه در نظر می گیریم. فرض کنیم $x \in Q$ و

$$T_0 = T \cap [Q_G, g] \quad \text{و} \quad T = \langle x, z \rangle, \quad z = x^{-1} x^g.$$

آنگاه z متعلق به T_∞ است و بنا به (الف) داریم:

$$T_0 \triangleleft T = \langle T_0, x \rangle, \quad \alpha(x) = g^{-1} x g = x^g = x z.$$

پس T/T_0 دوری و همچنین آبلی است.

اکنون R را به عنوان حلقه لی در نظر می گیریم، بنا به قضیه ۵-۱، T_0 یک ایده آل در حلقه

لی T است و به پیمانه T_0 همنهشتی های زیر را داریم (چون T/T_0 گروه آبلی است).

$$\alpha(x) \equiv x + z \equiv x, \quad (\alpha - 1)x \equiv \alpha(x) - x \equiv 0.$$

پس $(\alpha - 1)x$ متعلق به $[Q_G, g]$ است همان طوریکه خواسته شده است.

حال فرض کنید $k \geq \infty$ و (ب) برای $i \leq k$ برقرار باشد. فرض کنید $P = [Q_G, g; k]$ آنگاه

$$(\alpha - 1)^k Q_L \subseteq P \quad \text{چون (ب) برای } i = \infty \text{ برقرار است داریم:}$$

$$(\alpha - 1)^{k+1} Q_L = (\alpha - 1)((\alpha - 1)^k Q_L) \subseteq (\alpha - 1)P \subseteq [P_L, g] = [Q_L, g; k+1]$$

و این برهان (ب) را بنا به استقراء کامل می کند.

۵-۶ نتیجه. در لم ۵-۵ اگر p فرد باشد، رابطه شمول می تواند یک رابطه سره باشد. برای

این منظور مثال زیر را در نظر بگیرید.

مثال: فرض کنید M یک حلقه لی ۶ بعدی روی میدان اول F_p با پایه

$$v_i, w_{jk} \quad \text{که} \quad i \leq j \quad \text{و} \quad j < k \leq 6$$

باشد و ضرب w_{12}, w_{13}, w_{23} در مرکز M واقع شوند و برای $i \leq j \leq 6$ $[v_i, v_j] = w_{ij}$

(به آسانی می توان دید که چنین M وجود دارد).

فرض کنید α تبدیل خطی M روی F_p باشد بطوری که

$$v_1^\alpha = v_1 + v_2, \quad v_2^\alpha = v_2 + v_3 \quad \text{و} \quad v_3^\alpha = v_3$$

$$w_{12}^\alpha = w_{12} + w_{13} + w_{23}, \quad w_{13}^\alpha = w_{13} + w_{23} \quad \text{و} \quad w_{23}^\alpha = w_{23}$$

به وضوح α یک خودریختی L است و

$$(\alpha - 1)^3(M) = 0 \quad (1-5)$$

اکنون M یک جبر لی پوچتوان از رده ۲ است. چون $p > 6$ ، فرمول بیکر-کامبل-هاسدورف،

M را به یک p -گروه متناهی از مرتبه p^6 تبدیل می کند، که یک تبدیل جبر لی اصلی M بوسیله

قضیه لازارد است. آنگاه α یک خودریختی گروه M_G می باشد.

فرض کنید S حاصلضرب نیم مسقیم گروههای $\langle \alpha \rangle$ و M_G باشد.

چون $v_1^\alpha - v_1 = v_2$ ، $v_2^\alpha - v_2 = v_3$. لذا برای گروه جابجاگر $[M_G, \alpha]$ داریم:

$$[M_G, \alpha] Z(M_G) = \langle v_2, v_3, Z(M_G) \rangle.$$

چون $[M_G, \alpha]$ در M_G نرمال است، بنا به لم ۵-۵ داریم:

$$[M_G, \alpha] \geq [M_G, \alpha, M_G] = [[M_G, \alpha] Z(M_G), M_G] \geq [v_2, v_3, M_G]$$

$$= \langle w_{12}, w_{13}, w_{23} \rangle.$$

بنابراین

$$[M_G, \alpha; 3] \geq [\langle w_{12}, w_{13}, w_{23} \rangle, \alpha, \alpha] = [\langle w_{13}, w_{23} \rangle, \alpha] = \langle w_{23} \rangle > 1.$$

$$. (\alpha-1)^3 (M_L) = 0, (\alpha-1) \text{ به } (1-5).$$

اکنون فرض اساسی به کارگیری قضایای ۳-۵ و ۴-۵، در p - گروهها را توضیح می دهیم.

۷-۵ فرضها.

(۱) S یک p - گروه متناهی است.

(۲) Q یک زیرگروه S از رده پوچتوانی حداکثر $p-1$ است.

(۳) g عنصر S است که Q را نرمال می کند.

(۴) α خودریختی Q است که به وسیله مزدوج g القاء می شود.

(۵) چون Q به عنوان یک حلقه لی در نظر گرفته شده است داریم:

$$(\alpha - \text{ad}_g)^p(Q) = 0$$

و برای هر عدد صحیح j, i که $i+j \geq p$ ، $[(\alpha - \text{ad}_g)^i(Q), (\alpha - \text{ad}_g)^j(Q)] = 0$

۸-۵ قضیه. فرض کنید فرضهای ۷-۵ برقرار باشد. آنگاه یک نگاشت وجود دارد که هر

زیرگروه T در Q را به یک زیرگروه T^* در Q می برد و با شرایط زیر برای هر زیرگروه T در Q برقرار است.

(۱) T^* به وسیله g نرمال می شود.

(۲) اگر g ، T را نرمال کند آنگاه $T = T^*$.

$$|T| = |T^*| \quad (3)$$

(۴) برای هر زیرگروه T مانند U داریم $U^* \leq T^*$.

(۵) هر زیرگروه W در Q ، به وسیله g نرمال می شود و

$$|T \cap W| \leq |T^* \cap W|, \quad (T \cap W)^* \leq T^* \cap W.$$

(۶) اگر $1 = Q_0 \leq Q_1 \leq \dots \leq Q_m = Q$ یک سری صعودی از زیرگروههای Q باشد که به

وسیله g نرمال می شود و برای $i = 1, \dots, m$ ، $[Q_i, g] \leq Q_{i-1}$ ، آنگاه برای $i \leq m$

$$T^* \cap Q_i > T \cap Q_i \text{ مگر آنکه، } T \text{ به وسیله } g \text{ نرمال شود.}$$

(۷) برای هر زیرگروه نرمال T مانند U ، $[T^*, U^*] \leq [T, U]^*$

$$(Z(T))^* \leq Z(T^*) \quad (۸)$$

(۹) رده پوچتوانی T^* بزرگتر یا مساوی رده پوچتوانی T است.

(۱۰) توان T^* بزرگتر یا مساوی توان T است.

برهان: فرض می کنیم $Q > P^e$ و توان Q باشد، یعنی کوچکترین عدد صحیح مثبت k ، به

طوری که برای هر $x \in Q$ ، $x^k = 1$ ، فرض کنیم α خودریختی Q باشد که به وسیله مزدوج g القاء

می شود بنا به قضیه لازارد (قضیه ۵-۱) Q را به عنوان یک حلقه لی در نظر می گیریم. می خواهیم

قضایای ۳-۵ و ۴-۵ را بکار گیریم. پس ابتدا شرایط را برای فرضهای ۲-۵ بررسی می کنیم.

فرض کنیم $\lambda = \alpha - 1$ (چون α به عنوان یک درونریختی جمعی Q در نظر گرفته شده است)

آنگاه چون $R = Z / P^e Z$ و $L = Q$ ، لذا قضیه لازارد، تمام فرضهای ۲-۵ به جز (۵) را نتیجه

می دهد. به ویژه Q را به عنوان یک جبر لی روی R در نظر می گیریم. بنا به فرض ۵-۷(۵)،

چون $\lambda^p(Q) = 1$ ، لذا $\lambda^p = 1$ که این (۵) را نیز نتیجه می دهد. پس فرضهای ۲-۵ برقرار هستند. بنا

به فرض ۲-۵(۵)، برای تمام اعداد صحیح j, i که $i + j \geq p$ داریم:

$$[\lambda^i(x), \lambda^j(g)] = 1. \quad (۲-۵)$$

بنا به قضیه لازارد، یک زیرمجموعه T در Q یک زیرگروه Q_G است اگر و فقط اگر یک زیرجبر

لی Q_L باشد، یعنی یک زیرگروه جمعی Q_L است. در این حالت بنا به (۲-۵) و قضیه ۴-۵

(با $M = T$) زیرگروه جمعی T^* در Q_L یک زیرجبر لی است. در نتیجه بنا به قضیه لازارد یک

زیرگروه Q_G است. اکنون شرایط قضایای ۳-۵ و ۴-۵ شرایط این قضیه را تفسیر می کند.

در اینجا نتیجه اصلی را بیان می کنیم.

۹-۵ قضیه. فرض کنید Q یک CL -زیرگروه اکسترمال S باشد، $x \in S$ ،

$[Z(Q), x; p] = 1$ و برای تمام اعداد صحیح j, i که $i + j \geq p$ رابطه زیر برقرار باشد،

$$[[Z(Q), x; i], [Z(Q), x; j]] = 1$$

آنگاه، x ، Q را نرمال می کند.

برهان: فرض کنید $Z = Z(Q)$. همانند لم ۹-۴ فرض کنید

$$Q^{x^i} \mid = \{I \mid i \text{ عدد صحیح است.}\} \quad \text{و} \quad C = C_S(I).$$

توجه کنید که x ، I و C را نرمال می کند. قرار دهید، $R = C_Q(I) = Q \cap C$. آنگاه بنا به لم

۹-۴، داریم:

$$R \text{ یک } CL\text{-زیرگروه مینیمال } C \text{ است. و } Z(R) = Z \quad (۳-۵)$$

ابتدا فرض کنیم $p=2$ یا $S=1$. آنگاه بنا به لم ۸-۵، $\langle x^Z \rangle$ ، آبدی است. چون Z ، $\langle x^Z \rangle$ را

نرمال می کند. قضیه ۷-۵، نشان می دهد که Z به وسیله $\langle x^Z \rangle$ نرمال می شود لذا به وسیله x

نیز نرمال می شود. همان طور که خواسته شده بود.

برای تکمیل برهان، فرض کنیم p فرد باشد و $S > \bar{L}$. فرض کنیم p^e توان S باشد. از روند

برهان قضیه ۷-۴-۱، استفاده می کنیم. بنا به لمهای ۸-۵ و ۹-۴، رده پوچتوان C حداکثر $p - \bar{L}$

است و به ازای هر عدد صحیح i داریم:

$$Z^{x^i} \triangleleft C \quad \text{و} \quad C = \prod Z^{x^i} \quad (۴-۵)$$

فرض کنید α خودریختی Q باشد، آنگاه به ازای هر عدد صحیح i ، $\alpha^i(Z) = Z^{x^i}$. بنا به

(۴-۵) و قضیه لازارد، C را به عنوان یک جبر لی روی $Z/P^e Z$ و برای $i \in C$ ، $\alpha^i(Z)$ را به عنوان

ایده آل C در نظر می گیریم. فرض کنید به ازای هر عدد صحیح i ، $D = \sum \alpha^i(Z)$. چون

$x^{p^e} = \bar{x}^{p^e}$ داریم $\alpha^{p^e} = \bar{\alpha}^{p^e}$. با استفاده از استقراء داریم:

$$\sum_{0 \leq i \leq p^e - 1} (\alpha - 1)^i(Z) = \sum_{0 \leq i \leq p^e - 1} \alpha^i(Z) = D. \quad (5-5)$$

چون هر $\alpha^i(Z)$ یک ایده آل C است. زیرمجموعه D یک زیرگروه جمعی جبرلی C است و

$[D, C] \leq D$. بنابراین D یک ایده آل C و در نتیجه یک زیرگروه در C است. چون برای هر i ، D

شامل $(Z^{x^i}) = \alpha^i(Z)$ ، لذا (5-4) نشان می دهد که $D = C$. بنا به فرض و لم 5-5 داریم:

$$(\alpha - 1)^p(Z) = 0 = [(\alpha - 1)^i(Z), (\alpha - 1)^j(Z)].$$

که $i + j \geq p$ بنا به (5-5)، $C = D = \sum_{i+j \geq p} (\alpha - 1)^i(Z)$ در نتیجه

$$\forall i, j, \quad (\alpha - 1)^p(C) = 0 = [(\alpha - 1)^i(C), (\alpha - 1)^j(C)].$$

بنابراین فرضهای 5-7، برای $g = x$ و C به جای Q برقرار هستند. اکنون همانند قضیه 5-8

یک نگاشت داریم که هر زیرگروه T در C را به زیرگروه T^* در C می برد و شرایط (1) تا (10) در

این قضیه برقرار است. به ویژه چون $Z(R) = Z$ (بنا به (5-3))، داریم:

$$|R^*| = |R|, \quad |Z^*| = |Z|, \quad Z^* = (Z(R))^* \leq Z(R^*)$$

چون R یک CL -زیرگروه C است (بنا به (6-3))، لذا داریم:

$$|R||Z| = |R||Z(R)| \geq |R^*||Z(R^*)| \geq |R^*||Z^*| = |R||Z|$$

بنابراین تمام نامساویها، تساوی خواهند بود و R^* یک CL -زیرگروه C است چون $Z(R^*) = Z^*$.

اکنون همانند لم 4-9، سریهای مرکزی φ و ψ را به ترتیب از S و C در نظر می گیریم. چون x ،

$$C \text{ را نرمال می کند لذا } \varphi \text{ یک سری مرکزی } S \text{ است، و } \psi = \{N \cap C \mid N \in \varphi\}$$

این نتیجه می دهد که ψ فرض (6) در قضیه 5-8 (با $g = x$) را برقرار می کند، بنابراین از

قضیه 5-8(5) و (6) داریم:

$$\forall W \in \psi \quad , \quad |Z \cap W| \leq |Z^* \cap W| \quad .$$

و اگر Z به وسیله x نرمال شود آنگاه :

$$\exists W \in \psi \quad , \quad |Z \cap W| < |Z^* \cap W| \quad .$$

این به آن معنی است که ، $R \prec_{\psi} R^*$ اگر Z به وسیله x نرمال شود. اما بنا به لم ۴-۹ ، R با

رابطه ψ اکسترمال است، در نتیجه x ، Z را نرمال می کند.

۵-۱۰ نتیجه. فرض کنید Q یک CL -زیرگروه اکسترمال S و B زیرگروه S نرمال شده با

$Z(Q)$ باشد. فرض کنیم B دارای رده پوچتوانی حداکثر p -باشد، آنگاه B ، Q را نرمال می کند.

برهان: هر عضو x در B فرض قضیه ۵-۹ را برقرار می کند.

توجه کنید که نتیجه ۵-۱۰ ، آن قسمت از قضیه ۵-۷ را که توضیح می دهد، " Q به وسیله هر

زیرگروه آبدی S نرمال شده به وسیله $Z(Q)$ ، نرمال می شود. " تعمیم می دهد.

نمادگذاری

Gگروه متناهی	•
p عدد اول	•
$Z(G)$مرکز G	•
$H \leq G$ H زیرگروه G	•
$H < G$ H زیرگروه سره G	•
$H \triangleleft G$ H زیرگروه نرمال G	•
$F(G)$زیرگروه فیتینگ G	•
$\Phi(G)$زیرگروه فراتینی G	•
$\ker \varphi$ هسته همریختی φ	•
$ S $ کاردینال مجموعه S	•
$[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab = a^{-1}a^b$ جابجاگر b, a در G	•
$[A, B] = \langle [a, b] \mid a \in A, b \in B \rangle$ زیرگروه جابجاگر A و B در G	•
$[a, b, c] = [[a, b], c]$ جابجاگر b, a و c در G	•
$G' = [G, G]$ زیرگروه جابجاگر G	•
Z_n گروه دوری از مرتبه n	•
$\langle H^G \rangle$ بستار نرمال H در G	•
$H \text{ ch } G$ زیرگروه مشخص H در G	•
$ G:H $ اندیس زیرگروه H در G	•
$\text{Aut}(G)$ گروه خودریختی های G	•
H^α تصویر H تحت نگاشت α	•

G^n	•	مجموعه $\{g^n \mid g \in G\}$
π	•	مجموعه ای از اعداد اول
π'	•	متمم مجموعه π
1	•	عنصر همانی، زیرگروه همانی G
$\langle X \rangle$	•	زیرگروه تولید شده بوسیله X
$C_G(H)$	•	مرکز ساز زیرمجموعه H از G
$N_G(H)$	•	نرمال ساز زیرمجموعه H از G
$Syl_p(G)$	•	مجموعه p -سیلو زیرگروههای G
$ G _p$	•	بالاترین توان عدد اول p بخش پذیر بر $ G $
$Sol(G)$	•	بزرگترین زیرگروه حل پذیر نرمال منحصر بفرد G
$GL(n, F)$	•	گروه ماتریس های $n \times n$ وارون پذیر با درایه ها در میدان F
$SL(n, F)$	•	ماتریسهایی از $GL(n, F)$ با دترمینان یک
$PSL(n, F)$	•	گروه $SL(n, F)/Z(SL(n, F))$
$\Omega_n(G)$	•	مجموعه $\{g \in G \mid g^{p^n} = 1\}$ برای p -گروه آبلی متناهی G
$d(S)$	•	$\max\{ A \mid A \leq S \text{ و } A \text{ آبلی است}\}$
$f(S)$	•	$\max\{ R \cdot Z(R) \mid R \leq S\}$
$f_1(S)$	•	$\max\{ R \cdot C_S(R) \mid R \leq S\}$
$\mathcal{A}(S)$	•	$\{A \leq S \mid A = d(S) \text{ و } A \text{ آبلی است}\}$
$\mathcal{F}(S)$	•	$\{R \leq S \mid R \cdot Z(R) = f(S)\}$
$\mathcal{F}_1(S)$	•	$\{R \leq S \mid R \cdot C_S(R) = f_1(S)\}$
$J(S)$	•	$\mathcal{A} \langle (S) \rangle$
S_{CL}	•	$\mathcal{F} \langle (S) \rangle$

واژه نامه

Core	p' -	p' - چنبره
Exponent		توان
G-Torsor		G-تورسور
Heisenberg Groups		گروه هایزنبرگ
Special		خاص
Extra- Special		فوق العاده خاص
Quasisimple		شبه ساده
Perfect		کامل
Frobenius group		گروه فروبنیوس
Baker-Campbell-Hausdorff formula		فرمول بیکر - کامل - هاسدورف
Infinitesimal group		گروه بینهایت کوچک
Profinite group		گروه پرومتناهی
Pushing -up		پوشینگ-آپ
Three-Subgroup Lemma		لم سه - زیرگروه
Nottingham Group		گروه نوتینگهام
Depth		ژرفا
Just infinite		عیناً نامتناهی
Frattni argument		استدلال فراتینی
Semisimple		نیم ساده
Morfism		ریختی
Layer		لایه

کتابنامه

- [1] A. Chermak , A. Delgado, (1989) , A measuring argument for finite groups, **Proc. Amer. Math. Soc.** **107**, 907–914.
- [2] B. Huppert, (1967), **Endliche Gruppen I**, Springer-Verlag, Berlin,.
- [3] B. Huppert, N. Blackburn, (1982) , **Finite Groups III**, Springer-Verlag, Berlin.
- [4] D. Gorenstein, (1980), **Finite Groups** , second ed., Chelsea, New York.
- [5] D. Gorenstein, (1982) , **Finite Simple Groups** : An Introduction to their Classification, Plenum, New York.
- [6] E.I. Khukhro, (1998) , **p -Automorphisms of Finite p -Groups**, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 246, Cambridge, Univ. Press, Cambridge.
- [7] E. B. Dynkin, (1947), Calculation of the coefficients in the Campbell-Hausdorff formula, **Doklady Akad Nauk USSR**, **57** , 323–326.
- [8] Ernst Binz & Sonja Pods (2008), **Geometry of Heisenberg Groups**, American Mathematical Society.
- [9] G. Glauberman , (2004) , Large subgroups of small class in finite p -groups, **J. Algebra** **272** , 128–153.
- [10] G. Glauberman, R. Niles, (1983) , A pair of characteristic subgroups for pushing-up in finite groups, Proc. London. **Math. Soc.** (3) **46** , 411–453.
- [11] Hall, Brian C, (2003). **Lie Groups, Lie Algebras, and Representations: An Elementary Introduction**, Springer.
- [12] Husain, Taqdir (1981). **Introduction to Topological Groups**. Philadelphia: R.E. Krieger Pub. Co.

- [13] Hofmann, Karl H , Morris, Sidney A. (1998), **The structure of compact groups**, Berlin: de Gruyt.
- [14] J.L. Alperin, G. Glauberman, (1998), Limits of abelian subgroups in finite p -groups, **J. Algebra** 203 , 533–566.
- [15] J.G. Thompson, (1964), Normal p -complements for finite groups, **J. Algebra** 1 , 43–46.
- [16] J.D.Dixon, M.P.F. du Sautoy, A. Mann, D. Segal, (1991), **Analytic Pro- p groups**, 15-29 .
- [17] L. Kovács, C. Leedham-Green, (1986) , Some normally monomial p -groups of maximal class and large derived length, *Quart. J. Math. Oxford* (2) 37, 49–54.
- [18] M. Lazard, (1954) , Sur les groupes nilpotents et les anneaux de Lie, **Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)** 71, 101–190.
- [19] N. Bourbaki, (1989), **Lie Groups and Lie Algebras**, Chapter II: Free Lie Algebras, Springer.
- [20] R. Camina, (2000), **New Horizons in pro- p Groups** , The Nottingham group , in: M. du Sautoy, et al. (Eds.), Birkhäuser Boston, Boston, 205–222.
- [21] Shilov, Georgi E, Silverman, Richard A. (1977), ed , **Linear Algebra**, Dover.

Abstract

Let S be a finite p -group. We say that an abelian subgroup A of S is a *large abelian subgroup* of S if $|A| \geq |A^*|$ for every abelian subgroup A^* of S . We say that a subgroup Q of S is a *centrally large subgroup*, or *CL-subgroup*, of S if $|Q||Z(Q)| \geq |Q^*||Z(Q^*)|$ for every subgroup Q^* of S .

The study of large abelian subgroups and variations on them began in 1964 with Thompson's second normal p -complement theorem [J.G. Thompson, Normal p -complements for finite groups, J. Algebra 1 (1964) 43–46]. Centrally large subgroups possess some similar properties.

In 1989, A. Chermak and A. Delgado [A. Chermak, A. Delgado, A measuring argument for finite groups, Proc. Amer. Math. Soc. 107 (1989) 907–914] studied several families of subgroups that include centrally large subgroups as a special case. A. Chermak and A. Delgado generalized the concept of a counting argument for finite groups to a “measuring argument” for a finite group G acting on a finite group H .

In this thesis, we extend their work to prove some further properties of centrally large subgroups. The proof uses an analogue for finite p -groups of an application of Borel's Fixed Point Theorem for algebraic groups.