دانشگاه شاهرود

دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

کنترل‌پذیری سیستم‌های خطی مرتبه بالا و کاربرد آن

حمیده ابراهیمی

استاد راهنما

دکتر حجت احسنی طهرانی

استاد مشاور

دکتر مهدی قوتمند جزی

شهریور۱۳۹۴

الهی...

مرا مدد کن تا دانش اندک من، نه نردبانی باشد برای فزونی تکبر و غرور،

و نه حلقه ای باشد برای اسارت، و نه دست مایه ای برای تجارت،

بلکه گامی باشد برای تجلیل از تو و متعالی ساختن خود و دیگران.

آمین.

سپاس گزاری...

حمد و سپاس یکتای بی همتا را که فضلش بر ما عیان است، ادای شکرش را هیچ زبان و دریای فضلش را هیچ کران نیست.

و اگر در این وادی، هستیم همه محبت اوست.

این پایان نامه را ضمن تشکر و سپاس بی کران و در کمال افتخار و امتنان تقدیم می نمایم به:

استاد عالی قدرم جناب اقای دکتر احسنی طهرانی که در کمال سعه صدر، با حسن خلق و فروتنی، زحمت راهنمایی این رساله را بر عهده گرفتند.

پدر و مادر عزیزتر از جانم به پاس زحماتی که در تمام سال های تحصیلم متقبل شده اند و پوزش تحمیل رنج دوری در این دوره تحصیلی در روزهایی که باید کنارشان می بودم و نبودم.

برادر و خواهران مهربانم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امید بخش وجودشان که بهترین پشتیبانم بودند.

سرکار خانم طهماسبی عزیزم به پاس راهنمایی های بی چشم داشتشان که بسیاری از سختی ها را برایم آسان نمودند.

باشد که این خردترین، بخشی از زحمات آنان را سپاس گوید.

حمیده ابراهیمی

شهریور ۱۳۹۴

تعهدنامه

اینجانب **حمیده ابراهیمی** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی کاربردی** **دانشکده علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **کنترل‌پذیری سیستم‌های خطی مرتبه بالا و کاربرد آن** ، تحت راهنمایی **دکتر حجت احسنی طهرانی** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام " دانشگاه شاهرود " یا " Shahrood University " به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

حمیده ابراهیمی

شهریور ۱۳۹۴

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در این پایان‌نامه، به کنترل‌پذیری سیستم‌های خطی مرتبه بالا می‌پردازیم. هدف یافتن ماتریس پس‌خورد حالت است به‌گونه‌ای که سیستم پایدار شود. همچنین به دنبال کنترل‌پذیری سیستم‌های خطی مرتبه بالا مانند سیستم‌های توسعه یافته هستیم. ابتدا به معرفی سیستم‌های خطی مرتبه بالا و سیستم‌های خطی توصیف‌گر مرتبه بالا می‌پردازیم، سپس شرایط کنترل‌پذیری آن‌ها را بررسی می‌کنیم، و با استفاده از تبدیلات تشابهی روی سیستم‌های ذکر شده به محاسبه ماتریس پس‌خورد حالت می‌پردازیم. از آن‌جایی که مینیمم سازی نورم ماتریس پس‌خورد حالت در بهینه سازی سیستم کنترل خطی، دارای اهمیت فراوانی است، لذا یک روش جدید با استفاده از مسئله تخصیص مقادیر ویژه جزئی روی سیستم‌های خطی مرتبه بالا و سیستم‌های خطی توصیف‌گر مرتبه بالا به‌کار می‌بریم و به محاسبه ماتریس پس‌خورد حالت که دارای کمترین نورم است می‌پردازیم.

کلمات کلیدی: سیستم‌های خطی مرتبه بالا، کنترل‌پذیری، سیستم‌های خطی توصیف‌گر مرتبه بالا، تخصیص مقادیر ویژه جزئی

لیست مقالات مستخرج از پایان‌نامه

۱. ابراهیمی.ح، احسنی طهرانی.ح،"محاسبه پس‌خورد در سیستم‌های خطی مرتبه بالا با استفاده از تخصیص مقادیر ویژه جزئی" ، دومین همایش ملی پژوهش‌های کاربردی در علوم ریاضی و فیزیک، دانشگاه تهران، بهمن ماه ۱۳۹۳.

۲. ابراهیمی.ح، احسنی طهرانی.ح،"تخصیص مقادیر ویژه جزئی در سیستم‌های خطی توصیف‌گر مرتبه بالا و تعیین ماتریس پس‌خورد حالت" ، دومین همایش ملی پژوهش‌های کاربردی در علوم ریاضی و فیزیک، دانشگاه تهران، بهمن ماه ۱۳۹۳.

فهرست مطالب

فصل ۱

تعاریف و مقدمات

۱.۱ مقدمه

در جامعه صنعتی و پیشرفته امروز سیستم‌های کنترل جزئی از زندگی ما به‌شمار می‌آیند. اگرچه تاریخچه اولین سیستم کنترل ساخت بشر را به چند صد سال قبل از میلاد نسبت می‌دهند، لیکن تحول اساسی در زمینه طراحی و ساخت سیستم‌های کنترل اتوماتیک، در دوران انقلاب صنعتی توسط دانشمندان زیادی رخ داده است. امروزه اکثر وسائل خانگی مانند، لباس‌شویی، آبگرمکن، خشک‌کن، توستر، حرارت مرکزی ساختمان‌ها و یا در اتومبیل‌ها، هواپیماهای مسافربری و جنگنده، کشتی‌های بزرگ و کوچک، ربات‌ها، وسائل پیشرفته مهندسی و پزشکی و... همگی از نوعی سیستم کنترل بهره‌مند هستند و عملکرد آن‌ها بدون سیستم کنترل، به کلی مختل و یا ضعیف می‌گردد.

کنترل‌پذیری سیستم های خطی مرتبه بالا، یکی از مسائل اساسی در نظریه کنترل و بهینه سازی می‌باشد که از دیرباز مورد توجه نویسندگان و محققان بوده است. و کاربردهای زیادی در زمینه مختلف از جمله، ارتعاشات، تجزیه و تحلیل ساختاری، کنترل فضاپیما، کنترل رباتیک و... دارد. اگرچه کنترل‌پذیری سیستم‌های خطی مرتبه بالا نتایج به‌دست آمده را روی پایداری نشان می‌دهد و در چند دهه اخیر روش‌های مختلفی برای حل این مسئله پیشنهاد شده است. یک روش پیشنهادی برای حل معادله ماتریس سیلوستر و کاربرد آن در سیستم‌های خطی مرتبه بالا و همچنین در سیستم‌های خطی توصیف‌گر مرتبه بالا توسط دوان [۱] ارائه شده است. داتا [۲] و سعد [۳] الگوریتم آرنولدی ارائه داده‌اند، که به حل معادله سیلوستر [۴] می‌پردازد، سپس مسئله تخصیص مقدار ویژه جزئی را توسط جواب این معادله حل می‌نماید. کرس. ا [۵] و اینمان. [۶] با استفاده از روش مقدار ویژه معکوس به

[۱] Duan

[۲] B. N. Datta

[۳] Yosef Saad

[۴] Silvester equation

[۵] A. Kress

[۶] D. j. Inman

تخصیص ساختار ویژه پرداختند. کیم. [۷] الگوریتمی برای تخصیص ساختار ویژه در سیستم‌های مرتبه دوم ارائه می‌دهد. محمد. رمادان [۸] و ال-سعید [۹] الگوریتمی را ارائه دادند که در آن با تعریف $f^T = \beta Y_1^H A$ (Y_1^H ماتریس بردار ویژه چپ وابسته به $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$) و محاسبه پارامتر β، بردار پس‌خورد حالت را می‌توان به‌صورتی به‌دست آورد که مقادیر ویژه مورد نظر را به دستگاه اختصاص می‌دهد، ودر ادامه نیز نشان دادند که بردار پس‌خورد حالت حقیقی است.
در این پایان‌نامه نیز روشی جدید برای محاسبه ماتریس پس‌خورد حالت با استفاده از مسئله تخصیص مقادیر ویژه جزئی در سیستم‌های خطی مرتبه بالا و سیستم‌های خطی توصیف‌گر مرتبه بالا شرح می‌دهیم.

- در فصل یک، تعاریف مقدماتی مورد نیاز را شرح می‌دهیم.

- در فصل دوم، مسئله تخصیص ساختار ویژه در سیستم‌های خطی مرتبه بالا را مورد بررسی قرار داده‌ایم و الگوریتمی برای حل این مسئله ارائه می‌دهیم، و به محاسبه پس‌خورد حالت می‌پردازیم و در ادامه نیز مثال آورده‌ایم.

- در فصل سوم، با استفاده از عملیات تشابهی ماتریس افزوده را به فرم استاندارد اشلون و سپس به فرم همدم برداری تبدیل می‌کنیم. و با استفاده از این مفاهیم، به محاسبه ماتریس پس‌خورد حالت در سیستم‌های خطی مرتبه بالا با استفاده از تخصیص مقادیر ویژه جزئی می‌پردازیم. و در ادامه نیز مثالی برای شرح روش می‌آوریم.

- در فصل چهارم، ماتریس پس‌خورد حالتی که کمترین نورم را دارد به‌دست می‌آوریم. و در انتهای فصل نیز با مثال عددی این روش را شرح می‌دهیم.

- در فصل پنجم، به محاسبه ماتریس پس‌خورد حالت در سیستم‌های خطی توصیف‌گر مرتبه بالا می‌پردازیم. و با استفاده از عملیات تشابهی و تخصیص مقادیر ویژه جزئی که در فصل سوم شرح داده‌ایم، ماتریس پس‌خورد حالتی را به‌دست می‌آوریم که مقادیر ویژه مورد نظر را به سیستم حلقه بسته اختصاص دهد.

---

[۷] Y. Kim

[۸] Mohammed.A. Ramadan

[۹] El-Sayed

۲.۱ تعاریف مقدماتی

۱.۲.۱ بردار

برای توضیحات بیشتر این مبحث به [۱۱] مراجعه کنید.

تعریف ۱.۲.۱. مجموعه منظم از اعداد را بردار می‌نامند و این اعداد عناصر بردار نامیده می‌شوند.
بردار v با داشتن n عنصر به صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}, \tag{۱.۱}$$

بردار v بالا به‌صورت $v = (v_1, v_2, \cdots, v_n)^T$ نیز نوشته می‌شود.
بردار اشاره شده به فرم (۱.۱)، بردار ستونی و ترانهاده آن، بردار ردیف نامیده می‌شود. مجموعه همه بردارهای n حقیقی را با $\mathbb{R}^n$ نشان می‌دهند. ترانهاده بردار v را با v^T و ترانهاده- مزدوج مختلط v را با v^H نشان می‌دهند.

تعریف ۲.۲.۱. ضرب داخلی دو بردار v و u، ضرب اسکالر نامیده می‌شود:

$$< u, v >= u * v = \overline{u_1}v_1 + \overline{u_1}v_1 + \cdots + \overline{u_n}v_n = \overline{u}^T v.$$

تعریف ۳.۲.۱. طول بردار v با $\| v \|$ نشان داده می‌شود و برابر $\sqrt{v^H v}.$ است.

$$\| v \| = \sqrt{| v_1 |^2 + | v_2 |^2 + \cdots + | v_n |^n}.$$

۲.۲.۱ ماتریس

تعریف ۴.۲.۱. A مجموعه‌ای از mn عنصر مرتبط در یک آرایه مستطیلی، متشکل از m سطر و n ستون است که یک ماتریس مرتبه $m \times n$ نامیده می‌شود و به فرم زیر نمایش داده می‌شود:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{22} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

که به‌صورت $A = (a_{ij})$، $(j = 1, 2, \cdots, n \;, i = 1, 2, \cdots, m)$ نشان داده می‌شود. ماتریسی که تعداد سطرها و ستون‌هایش با هم برابر باشد را ماتریس مربعی می‌نامند.

تعریف ۵.۲.۱. ماتریس مربعی که تمام عناصر روی قطر اصلی آن یک و بقیه عناصر آن صفر باشد را ماتریس واحد می‌نامند و با I نشان می‌دهند.

تعریف ۶.۲.۱. فرض کنید A ماتریسی $n \times n$ باشد، در این‌صورت دترمینان A که با علامت $\det(A)$ یا $\mid A \mid$ نشان داده می‌شود را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\det(A) = \mid A \mid = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\det A_{ij},$$

که در آن A_{ij}، ماتریس مربعی $(n-1)\times(n-1)$ است که از حذف سطر iام و ستون jام ماتریس $A_{n\times n}$ به‌دست می‌آید.

۳.۲.۱ خواص مهم دترمینان

۱. اگر ماتریس B حاصل تعویض دو سطر یا دو ستون ماتریس A باشد، آنگاه:

$$\det(B) = -\det(A).$$

۲. اگر ماتریس B از ضرب اسکالر λ در یک سطر A حاصل شده باشد، آنگاه:

$$\det(B) = \lambda\det(A).$$

۳. اگر ماتریس A بالا مثلثی، پایین مثلثی یا قطری باشد، آنگاه دترمینان A برابر با حاصل‌ضرب عناصر قطر اصلی A است.

۴. اگر A ماتریسی نامنفرد (معکوس پذیر) باشد، آنگاه $\det(A) \neq 0$.

۵. برای دو ماتریس مربعی $A_{n\times n}$ و $B_{n\times n}$ داریم: $\mid AB \mid = \mid A \mid \cdot \mid B \mid$.

۶. اگر تمامی درایه‌های ماتریس مربعی A در اسکالر λ ضرب شوند، آنگاه دترمینان آن ماتریس نیز در λ^n ضرب خواهد شد: $\mid \lambda A \mid = \lambda^n \mid A \mid$.

۷. $\det(A) = \det(A^T)$.

تعریف ۷.۲.۱. ماتریس حاصل از تعویض سطرهای A با ستون‌های A را ترانهاده ماتریس A گوییم و آن را با A^T نشان می‌دهیم. و ترانهاده مزدوج ماتریس A، ماتریس $A^H = (\bar{A})^T$ است که در آن $\bar{A}$ ماتریس تشکیل شده از ماتریس A است که عناصر آن، مزدوج مختلط شده‌اند.

۴.۲.۱ معرفی چند ماتریس خاص

۱. ماتریس قطری [۱۰]: ماتریس مربعی است، که تمام درایه‌های آن به جز درایه‌های روی قطر اصلی صفر باشد.

$$A = \operatorname{diag}(a_{۱۱}, a_{۲۲}, \cdots, a_{nn}), \quad a_{ij} = ۰, \quad i \neq j.$$

۲. ماتریس بالا مثلثی [۱۱]: ماتریسی مربعی است که تمام درایه‌های زیر قطر اصلی آن صفر است.

$$a_{ij} = ۰, \quad i > j.$$

۳. ماتریس پایین مثلثی [۱۲]: ماتریس مربعی است که تمام درایه‌های بالای قطر اصلی آن صفر است.

$$a_{ij} = ۰, \quad i < j.$$

۴. ماتریس متعامد [۱۳]: ماتریس A را متعامد گوییم هرگاه داشته باشیم:

$$A^T A = A A^T = I.$$

۵. ماتریس نامنفرد [۱۴]: ماتریس مربعی A را نامنفرد (معکوس‌پذیر) گوییم، هرگاه داشته باشیم:

$$\det(A) \neq ۰.$$

۶. ماتریس بلوکی: یک ماتریس را می‌توان با رسم خطوط افقی و عمودی به ماتریس‌هایی با مراتب پایین‌تر که زیر ماتریس نامیده می‌شود افراز نمود. به این ماتریس افراز شده ماتریس بلوکی می‌گوییم.

۷. ماتریس‌های متشابه: دو ماتریس A و B را متشابه گوییم، هرگاه ماتریس نامنفرد T موجود باشد به‌طوری‌که:

$$T^{-۱} A T = B.$$

یک خاصیت مهم ماتریس‌های متشابه این است که دارای مقادیر ویژه یکسان هستند.

[۱۰] Diagonal

[۱۱] Upper Triangular

[۱۲] Lower Trianguler

[۱۳] Orthogonal

[۱۴] Nonsingular

۵.۲.۱ برخی از تجزیه‌های ماتریسی

قضیه ۸.۲.۱ [۳] (تجزیه مقدار تکین SVD [۱۵]): *فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ با $\operatorname{rank}(A) = r$ باشد. آنگاه ماتریس‌های متعامد $U_{m\times m}$ و $V_{n\times n}$ وجود دارند به‌طوری‌که:*

$$A = U \sum V^T, \tag{۲.۱}$$

که در آن $\sum$ یک ماتریس $m \times n$ به‌صورت زیر است:

$$\sum = \begin{bmatrix} D & \circ \\ \circ & \circ \end{bmatrix},$$

که در آن D یک ماتریس قطری به‌صورت زیر است:

$$D = \operatorname{diag}(\sigma_۱, \sigma_۲, \cdots, \sigma_r), \quad \sigma_۱ \geq \sigma_۲ \geq \cdots \geq \sigma_r > \circ,$$

و همچنین $\sigma_۱, \sigma_۲, \cdots, \sigma_r$ مقادیر تکین غیر صفر ماتریس A می‌باشند. تجزیه (۲.۱) تجزیه مقدار تکین یا به اختصار (SVD) گوییم.

قضیه ۹.۲.۱ [۱۱] تجزیه (QR) : *هر ماتریس $A \in mathbf{R}^{m\times n}$ را می‌توان به صورت زیر:*

$$A = QR \tag{۳.۱}$$

تجزیه کرد، که در آن $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ یک ماتریس متعامد و $R \in \mathbb{R}^{m\times n}$ یک ماتریس بالا مثلثی است.

قضیه ۱۰.۲.۱ [۱۱] *مقدمه‌ای از فرم کانونیکال جردن [۱۶]: هر ماتریس مربعی $A_{n\times n}$ با یک تغییر اساسی می‌تواند به فرم کانونیکال جردن تبدیل شود. ماتریس ناتکین $T_{n\times n}$، وجود دارد به‌طوری‌که:*

$$J = (T^{-۱}AT) = \begin{bmatrix} j_۱ & & & \\ & j_۲ & & \\ & & \ddots & \\ & & & j_r \end{bmatrix}, \tag{۴.۱}$$

که در آن زیر ماتریس‌های $J_k \in \mathbb{R}^{n_k\times n_k}$ به‌صورت زیر:

$$J_k = \begin{bmatrix} \lambda_k & ۱ & & \\ & \lambda_k & \ddots & ۱ \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_k \end{bmatrix}, \quad k = ۱, ۲, \cdots, r. \tag{۵.۱}$$

[۱۵] Singular Value Decomposition

[۱۶] Jordan Canonical Form

می‌باشند.

۶.۲.۱ نورم ماتریس

تعریف ۱۱.۲.۱. [۱۱] نورم ماتریس [۱۷]، نگاشت $\|\cdot\|: \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ است به‌طوری‌که:

۱. $\| A \| \geq \circ$، به ازای $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ و $\| A \| = \circ$ اگر و فقط اگر $A = \circ$،

۲. $\| \alpha A \| = | \alpha | \| A \|$ به ازای $\alpha \in \mathbb{R}$ و $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ (خاصیت همگنی)،

۳. $\| A + B \| \leq \| A \| + \| B \|$ به ازای $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ (نامساوی مثلثی)،

۴. $\| A \cdot B \| \leq \| A \| \cdot \| B \|$.

تعریف ۱۲.۲.۱. [۱۱] نورم

$$\| A \|_F = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} \| a_{ij} \|^2} = tr(AA^H),$$

یک نورم ماتریسی است، نورم فروبینیوس [۱۸] (یا نورم اقلیدسی [۱۹] در $(C^{n^2}$ نامیده می‌شود.

تعریف ۱۳.۲.۱. [۱۱] فرض کنید $\|\cdot\|$ یک نورم برداری باشد، تابع

$$\| A \| = \sup_{x\neq \circ} \frac{\|Ax\|}{\|x\|},$$

یک نورم ماتریسی است که نورم ماتریس القایی [۲۰] (نورم ماتریس طبیعی [۲۱]) نامیده می‌شود.

تعریف ۱۴.۲.۱. نورم یک [۲۲] و نورم بینهایت [۲۳] به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\| A \|_1 = \max_{j=1,\cdots,n} \sum_{j=1}^{m} | a_{ij} | \;\; ; \| A \|_\infty = \max_{i=1,\cdots,m} \sum_{j=1}^{n} | a_{ij} | .$$

و به‌ترتیب نورم مجموع ستونی [۲۴] و نورم مجموع سطری [۲۵] نیز نامیده می‌شوند.

[۱۷] Matrix norm
[۱۸] Frobenius norm
[۱۹] Euclidean norm
[۲۰] Induced matrix norm
[۲۱] Natural matrix norm
[۲۲] 1-norm
[۲۳] Infity norm
[۲۴] Column sum norm
[۲۵] Row sum norm

۷.۲.۱ فضای برداری

تعاریف و قضایای این بخش از [۵] گرفته شده است.

تعریف ۱۵.۲.۱. یک فضای برداری مانند V، بر روی میدان F، مجموعه‌ای از بردارها است که با دو عمل (+، ·) شرایط زیر را برآورده می‌سازد:

۱. $\forall u, v \in V \Rightarrow u + v \in V$.

۲. $\forall u \in V, \forall \alpha \in F \Rightarrow \alpha u \in V$.

۳. $\forall u, v \in V \Rightarrow u + v = v + u$.

۴. $\forall u, v, w \in V \Rightarrow u + (v + w) = (u + v) + w$.

۵. $\forall u \in V, \exists 0 \in V \Rightarrow u + 0 = 0 + u = u$.

۶. $\forall u \in V, \exists - u \in V \Rightarrow u + (-u) = (-u) + u = 0$.

۷. $\forall u, v \in V, \forall \alpha, \beta \in F \Rightarrow (\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u, \alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$.

۸. $\forall u \in V, \forall \alpha, \beta \in F \Rightarrow \alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$.

۹. $\forall u \in V, \forall 1 \in F \Rightarrow 1u = u$.

تعریف ۱۶.۲.۱. اگر V یک فضای برداری بر روی میدان F باشد و W زیر مجموعه‌ای از V باشد، آنگاه W زیر فضای V نامیده می‌شود، هرگاه با جمع و ضرب اسکالر روی V یک فضای برداری روی میدان F باشد.

تعریف ۱۷.۲.۱. فرض کنید V فضای برداری و S یک زیر مجموعه نامتناهی از V باشد. بردار $v \in V$ را ترکیب خطی از اعضای V گوییم اگر تعداد متناهی از بردارهای S مانند $u_1, u_2, \cdots, u_n$ و اسکالرهای $a_1, a_2, \cdots, a_n$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که:

$$v = a_۱u_۱ + a_۲u_۲ + \cdots + a_nu_n.$$

قضیه ۱۸.۲.۱. [۱۱] *فرض کنید S زیرمجموعه ناتهی از فضای برداری V روی میدان F باشد، آنگاه مجموعه تمام ترکیبات خطی از اعضای S زیرفضای V است.*

تعریف ۱۹.۲.۱. فرض کنید S زیرمجموعه ناتهی از فضای برداری V باشد. زیرفضای شامل تمام ترکیبات خطی از اعضای S را زیرفضای تولید شده توسط S نامیده می‌شود.

تعریف ۲۰.۲.۱. فرض کنید V فضای برداری روی میدان F باشد، بردارهای $a_۱, a_۲, \cdots, a_n$ عضو V را وابسته خطی می‌نامیم هرگاه اسکالرهای $c_۱, c_۲, \cdots, c_n$ که همگی صفر نیستند، موجود باشند به‌طوری‌که:

$$c_۱a_۱ + c_۲a_۲ + \cdots + c_na_n = ۰.$$

و مجموعه‌ای که وابسته خطی نباشد، مستقل خطی می‌نامیم.

تعریف ۲۱.۲.۱. فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان F باشد. مجموعه S را پایه V گوییم هرگاه S یک زیر مجموعه مستقل خطی V باشد که V را تولید می‌کند.

تعریف ۲۲.۲.۱. فرض کنید V یک فضای برداری با بعد متناهی باشد تعداد بردارهای پایه V را بعد فضای V نامیده و با dimV نشان می‌دهند.

۸.۲.۱ رتبه، برد و فضای پوچ ماتریس

تعریف ۲۳.۲.۱. فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ باشد. زیرفضای تولید شده به وسیله ستون یا سطرهای ماتریس A را فضای ستونی یا سطری A می‌گوییم.

تعریف ۲۴.۲.۱. بعد فضای ستونی A را رتبه ماتریس A می‌نامیم، و با $\mathrm{rank(A)}$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲۵.۲.۱. ماتریس A را رتبه کامل ستونی یا سطری می‌نامیم، هرگاه ستون یا سطرهایش مستقل خطی باشند.

تعریف ۲۶.۲.۱. ماتریس A را رتبه کامل می‌نامیم، هرگاه رتبه کامل سطری یا رتبه کامل ستونی باشد.

ملاحظه ۲۷.۲.۱. *رتبه یک ماتریس معادل با بعد آن ماتریس است.*

$$\dim[R(A)] = \mathrm{rank(A)}.$$

تعریف ۲۸.۲.۱. فضای پوچ ماتریس $A_{m\times n}$، نگاشت خطی به‌صورت زیر است:

$$N(A) = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = ۰\}.$$

ملاحظه ۲۹.۲.۱. *فضای پوچ، مجموعه جوابهای غیر صفر معادله همگن $Ax = 0$ است و اگر جواب معادله $Ax = 0$، جواب بدیهی صفر باشد، رتبه A، کامل است.*
برای هر ماتریس A، از مرتبه $m \times n$، زیرفضای پوچ ماتریس وجود دارد که برد A نام دارد و توسط $R(A)$ نمایش داده می‌شود.

$$R(A) = \{\, b \in \mathbb{R}^m | b = Ax \quad x \in \mathbb{R}^n\}.$$

تعریف ۳۰.۲.۱. مجموعه بردارهای $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ در $\mathbb{R}^n$ متعامد است اگر $v_i{}^T v_j = 0$ و به‌علاوه اگر $v_i{}^T v_j = 1$ به ازای هر i، آنگاه آن‌ها یکا متعامد نامند. یک پایه برای زیرفضا که یکامتعامد نیز باشد، پایه یکامتعامد برای زیرفضا نامیده می‌شود.

۹.۲.۱ بردار ویژه و مقادیر ویژه

تعریف ۳۱.۲.۱. فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ باشد. چند جمله‌ای $P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$، چند جمله‌ای مشخصه نامیده می‌شود. صفرهای چند جمله‌ای مشخصه، مقادیر ویژه A هستند. این معادل است با، $\lambda \in \mathbb{C}$، یک مقادیر ویژه از ماتریس A است، اگر وتنها اگر، بردار غیر صفر x وجود داشته باشد، به‌طوری‌که:

$$Ax = \lambda x.$$

تعریف ۳۲.۲.۱. بردار $x \neq 0$ بردار ویژه ماتریس A است، اگر:

$$Ax = \lambda x.$$

تعریف ۳۳.۲.۱. بردار $y \neq 0$، بردار ویژه چپ نامیده می‌شود، اگر:

$$y^H A = \lambda y^H.$$

۱۰.۲.۱ سیستم کنترل خطی

تعاریف و قضایای این بخش از [۳] و [۵] انتخاب شده است.

۱۱.۲.۱ سیستم دینامیکی

برای بسیاری از سیستم‌های فیزیکی، معادله سیستم دینامیکی آن را به‌صورت زیر می‌توان در نظر گرفت:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t). \end{aligned} \tag{۶.۱}$$

که در آن

- t متغییر زمان،

- $x(t)$ یک بردار ستونی n بعدی موسوم به بردار حالت [۲۶]،

- $u(t)$ یک بردار ستونی m بعدی موسوم به بردار ورودی یا متغییر کنترل،

- $y(t)$ یک بردار r بعدی متغییر با زمان به‌نام بردار خروجی،

است. در حالتی‌که ماتریس‌های A و B و C و D مستقل از t و ثابت باشند، سیستم حاصل را سیستم خطی ناوردای زمانی [۲۷] می‌نامیم. معادله (۶.۱) را معادله سیستم پیوسته گویند.
اگر در معادله (۶.۱) با جایگذاری $x(i+1)$ به‌جای $\dot{x}(t)$ معادله فوق را معادله سیستم گسسته گویند. و سیستم گسسته زمانی خطی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} x(i+1) &= Ax(i) + Bu(i), \\ y(i) &= Cx(i) + Du(i). \end{aligned} \tag{۷.۱}$$

برای برخی از سیستم‌ها، بردار حالت یا بردار ورودی و یا هر دو در هر لحظه از زمان قابل محاسبه یا اندازه‌گیری نیستند، بلکه در دنباله‌ای از نقاط $t_i, \quad i = 0, 1, \cdots, n$ این کمیت‌ها در دسترس است. در این موارد، معادله دیفرانسیل حالت سیستم به طور هم‌ارز به‌صورت معادله تفاضلی مرتبه اول است:

$$\begin{aligned} x(i) &= Ax(i) + Bu(i), \\ y(i) &= Cx(i) + Du(i). \end{aligned} \tag{۸.۱}$$

که در آن $x(i)$ و $u(i)$ به ترتیب، بردارهای حالت و ورودی در زمان t_i هستند.

۱۲.۲.۱ کنترل‌پذیری

سیستم توصیف شده با معادله (۶.۱)، کنترل‌پذیر [۲۸]، نامیده می‌شود، اگر بتوان حالت سیستم را از بردار دلخواه $x(0)$ (حالت اولیه در لحظه t_0)، به بردار دلخواه دیگر مانند $x(v)$ (حالت تعادل در لحظه t_v) رساند. معمولا $x(v)$ را برابر صفر در نظر می‌گیرند.

ملاحظه ۳۴.۲.۱. *کنترل‌پذیری سیستم (۶.۱) اغلب به کنترل‌پذیری زوج (A, B) اشاره دارد.*

[۲۶] Vector State
[۲۷] Invariant Time
[۲۸] Controllable

۱۳.۲.۱ ماتریس کنترل‌پذیری

تعریف ۳۵.۲.۱. برای سیستم توصیف شده با معادله تفاضلی (۶.۱) ماتریس کنترل‌پذیری را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Q = \begin{bmatrix} B & AB & A^{2}B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}. \tag{۹.۱}$$

قضیه ۳۶.۲.۱. [۱۱] *سیستم خطی پیوسته زمانی (۶.۱) کاملا کنترل‌پذیر است اگر و فقط اگر ستون‌های ماتریس کنترل‌پذیر (۹.۱) سیستم فضای $\mathbb{R}^n$ را تولید کند.* ($\mathrm{rank(Q)} = n$).

۱۴.۲.۱ مشاهده‌پذیری

تعریف ۳۷.۲.۱. سیستم خطی ناوردای

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t). \end{aligned} \tag{۱۰.۱}$$

که در آن A و B و C به‌ترتیب ماتریس‌های $n \times n$ و $n \times m$ و $r \times r$ هستند را در نظر می‌گیریم، اگر بتوان هر حالت $x(t_0)$ را با مشاهده $y(t)$، در فاصله زمانی محدود $t_0 \leq t \leq t_1$ تعیین کرد، سیستم را کاملا مشاهده‌پذیر [۲۹] گوییم.

قضیه ۳۸.۲.۱. [۸] *سیستم تعریف شده (۱۰.۱) را کاملا مشاهده‌پذیر گوییم، اگر و تنها اگر برای ماتریس مشاهده‌پذیری*

$$E = \begin{bmatrix} C^T & A^TC^T & \cdots & (A^T)^{n-1}C^T \end{bmatrix}, \tag{۱۱.۱}$$

داشته باشیم: $\mathrm{rank(E)} = n$.

۱۵.۲.۱ کنترل سیستم خطی با پس‌خورد حالت

سیستم کنترل خطی ناوردای زمانی (۱۰.۱) با بردار ورودی

$$u(t) = Kx(t), \tag{۱۲.۱}$$

موسوم به قانون کنترل که در آن $u(t)$ متناسب با بردار حالت $x(t)$ انتخاب شده است، را در نظر می‌گیریم. در این‌صورت سیستم کنترل را یک سیستم کنترل با پس‌خورد حالت [۳۰] و $K \in \mathbb{R}^{m\times n}$ را ماتریس پس‌خورد حالت گوییم. اگر $u(t)$ متناسب با بردار خروجی $y(t)$ انتخاب شود، یعنی:

$$u(t) = Ky(t), \tag{۱۳.۱}$$

آنگاه سیستم کنترل را یک سیستم کنترل با پس‌خورد خروجی و $K \in \mathbb{R}^{m\times r}$ را ماتریس پس‌خورد خروجی گوییم.

---

[۲۹] Observable

[۳۰] State Feedback

تعریف ۳۹.۲.۱. سیستمی که خروجی بر عمل کنترل آن تاثیری ندارد، سیستم حلقه باز گویند.

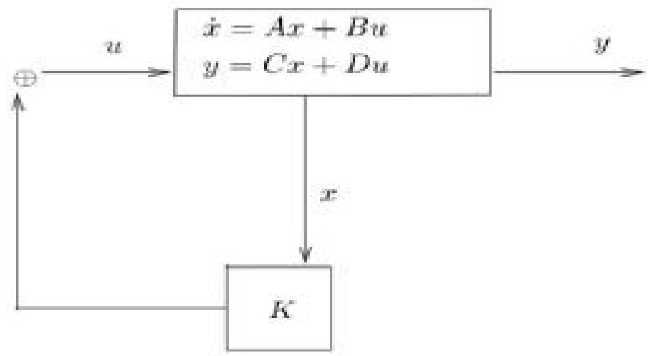
تعریف ۴۰.۲.۱. سیستم‌های کنترلی پس‌خوردی را سیستم‌های حلقه بسته گویند.

حال با جایگذاری معادله (۱۲.۱) در معادله (۱۰.۱) خواهیم داشت:

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t).$$

که در آن ماتریس A ماتریس حلقه باز [۳۱] و مقادیر ویژه آن را مقادیر ویژه سیستم حلقه باز گوییم. همچنین ماتریس $A + BK$ را ماتریس سیستم حلقه بسته [۳۲] و مقادیر ویژه آن را مقادیر ویژه سیستم حلقه بسته می‌گویند.

گرافیک سیستم پس‌خورد حالت را می‌توان به شرح زیر نشان داد.



شکل ۱.۱: ساختار پس‌خورد حالت

۱۶.۲.۱ پایداری

معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t).$$

نقطه تعادل x_e، بردار ثابتی است که اگر $x(t) = x_e$ و $u(t) = 0$ باشد. پاسخ سیستم داده شده با معادله فوق برای هر $t \geq t_0$، $x(t) = x_e$ خواهد بود. چون x_e بردار ثابتی است، لذا:

$$\dot{x}(t) = f(x_e, 0, t).$$

نقطه تعادل نشان‌دهنده پاسخ مثبت حالت ماندگار به معادله دینامیکی بالا است. اگر فرض کنیم سیستم (۱۰.۱) خطی باشد نقطه تعادل از رابطه زیر به‌دست می‌آید: $Ax_e = 0$، بدیهی است که مبدا همواره یک نقطه تعادل برای سیستم‌های خطی است. سایر نقاط تعادل (در صورت وجود) متعلق به فضای پوچ حالت ماتریس A می‌باشد.

[۳۱] Open loop
[۳۲] Closed loop

تعریف ۴۱.۲.۱. معادله دیفرانسیل حالت زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = f(x(t), \circ, t), \qquad (۱۴.۱)$$

نقطه تعادل x_e به مفهوم لیاپانوف پایدار گویند اگر به ازای هر $t_\circ$ و هر $\varepsilon > \circ$ یک $\delta > \circ$ وجود داشته باشد، که به ازای هر $\| x(t_\circ) - x_e \| \leq \delta$ برای تمامی $t \geq \circ$ عبارت $\| x(t) - x_e \| \leq \varepsilon$ برقرار باشد.

تعریف ۴۲.۲.۱. نقطه تعادل معادله دیفرانسیل حالت (۱۴.۱) پایدار مجانبی است اگر:
الف) پایدار به مفهموم لیاپانوف باشد.
ب)برای کلیه مقادیر $t_\circ$، رابطه زیر برقرار باشد:

$$\exists \rho > \circ, \forall \| x(t_\circ) - x_e \| \leq \rho, \| x(t) - x_e \| \rightarrow \circ, t \rightarrow \infty.$$

فصل ۲

روش‌های پارامتری برای تخصیص ساختار ویژه در سیستم‌های خطی مرتبه بالا

در این فصل، ابتدا دستگاه سیستم‌های خطی مرتبه بالا و سیستم‌حلقه بسته [۱] و مسأله تخصیص ساختار ویژه(ESA) [۲] را معرفی کرده، و شرط کنترل‌پذیری روی سیستم‌های خطی مرتبه بالا را نشان می‌دهیم، و به معرفی معادله ماتریس سیلوستر می‌پردازیم و الگوریتمی ارائه می‌دهیم که به حل معادله ماتریس سیلوستر [۳] می‌پردازد، و در ادامه به حل مسأله تخصیص ساختار ویژه با استفاده از حل معادله سیلوستر می‌پردازیم و ماتریس پس‌خورد حالت را به‌دست می‌آوریم. و در پایان مثال عددی ارائه می‌دهیم.

دستگاه سیستم خطی مرتبه بالا را به‌صورت زیر درنظر بگیرید:

$$A_{(m)}X^{(m)} + A_{(m-۱)}X^{(m-۱)} + \ldots + A_۱\dot{X} + A_۰X = Bu, \qquad (۱.۲)$$

که در آن $X \in \mathbb{R}^n$ و $u \in \mathbb{R}^r$ به‌ترتیب بردار حالت و بردار کنترل (ورودی) هستند. همچنین $A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}, (i = ۰, ۱, \ldots, m)$ و $B \in \mathbb{R}^{n\times r}$ ماتریس‌های ضرایب هستند که در شرایط زیر صدق می‌کنند: $\mathrm{rank}(B) = r$ و $\det(A_m) \neq ۰$. دستگاه (۱.۲) را می‌توان به یک سیستم خطی مرتبه اول و مرتبه دوم به ازای $m = ۱, ۲$ کاهش داد.

۱.۲ تخصیص ساختار ویژه(EAS)

مسأله تخصیص ساختار ویژه یک مسأله اساسی در طراحی دستگاه کنترل است که به‌طور گسترده در هر دو زمینه تئوری و محاسباتی مورد مطالعه قرار گرفته است.

---

[۱] Cloosed Loop

[۲] Eigenstructure Assingment

[۳] Sylvester Matrix Equation

مسأله تخصیص ساختار ویژه در مکان‌های خاص موردنظر، در صفحه مختلط با استفاده از قانون کنترل (۱۲.۱)، مسأله تخصیص ساختار ویژه با پس‌خورد حالت یا به اختصار(ESA) نامیده می‌شود. در این قسمت به بیان دقیق مسأله به زبان ریاضی می‌پردازیم:

تعریف ۱.۱.۲. فرض کنید: $Z^T = [X^T \dot{X}^T \dots (X^{(m-1)})^T]$ فضای حالت سیستم خطی مرتبه بالا (۱.۲) باشد، در واقع سیستم خطی مرتبه بالا می‌تواند فضای حالت مرتبه اول به‌صورت مدل تعمیم‌یافته زیر باشد:

$$\dot{Z}^T = A_e Z + B_e u, \tag{۲.۲}$$

$$A_e = \begin{bmatrix} 0 & I_n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & I_n \\ -A_m^{-1}A_0 & -A_m^{-1}A_1 & \dots & -A_m^{-1}A_{m-1} \end{bmatrix}, \tag{۳.۲}$$

$$B_e = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & (A_m^{-1}B)^T \end{bmatrix}^T. \tag{۴.۲}$$

بنابراین کنترل سیستم خطی مرتبه بالا به صورت مدل فضای حالت تعمیم یافته مرتبه اول در رابطه (۲.۲) بررسی می‌شود.

۲.۲ فرمول بندی مسائل

برای سیستم خطی مرتبه بالا (۱.۲) قانون کنترل به صورت زیر است:

$$u = F_0 X + F_1 \dot{X} + \dots + F_{m-1} X^{(m-1)}, \quad F_i \in \mathbb{R}^{r\times n}, \tag{۵.۲}$$

با جایگذاری قانون کنترل در سیستم خطی مرتبه بالا (۱.۲) سیستم حلقه بسته به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$A_m X^{(m)} + (A_{m-1} - BF_{m-1})X^{(m-1)} + \dots + (A_1 - BF)\dot{X} = 0. \tag{۶.۲}$$

با شرط $\det(\mathrm{A_m}) \neq 0$، سیستم (۶.۲) را می‌توان به صورت فضای مرتبه اول تبدیل کرد:

$$\dot{Z} = A_{ec} Z, \tag{۷.۲}$$

$$A_{ec} = \begin{bmatrix} 0 & I_n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & I_n \\ A_0^c & A_1^c & \dots & A_{m-1}^c \end{bmatrix}, \tag{۸.۲}$$

که در آن

$$A_i^c = -A_m^{-1}(A_i - BF_i), \quad i = 0, \dots, m-1.$$

که A_{ec} یک ماتریس حلقه بسته است، که شکل جردن ماتریس A_{ec} به صورت زیر است:

$$\Lambda = \mathrm{diag}(s_1, \dots, s_{mn}), \tag{۹.۲}$$

که در آن $s_i,\ i=1,\dots,mn$، مقادیر ویژه ماتریس A_{ec}، هستند.

لم ۱.۲.۲. [۴] *فرض کنید A_{ec} و Λ در (۸.۲) و (۹.۲) داده شده باشد، ماتریس‌های $V_i\in\mathbb{C}^{n\times mn}, i=0,\dots,m-1$ وجود دارد که در رابطه زیر صدق می‌کند:*

$$A_{ec}\begin{bmatrix} V_0\\ V_1\\ \vdots\\ V_{m-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} V_0\\ V_1\\ \vdots\\ V_{m-1}\end{bmatrix}\Lambda, \tag{۱۰.۲}$$

اگر و فقط اگر، یک ماتریس $V\in\mathbb{C}^{n\times mn}$ وجود داشته باشد که در رابطه زیر صدق کند:

$$A_mV\Lambda^{(m)}+(A_{m-1}-BF_{m-1})V\Lambda^{(m-1)}+\dots+(A_0-BF_0)V=0. \tag{۱۱.۲}$$

در این حالت مجموعه ماتریس‌های $V_i,\ \ i=0,\dots,m-1$ که در رابطه (۱۰.۲) صدق می‌کند، به صورت زیر است:

$$V_0=V,\quad V_i=V_{i-1}\Lambda,\quad i=1,2,\dots,m. \tag{۱۲.۲}$$

برهان

فرض کنید:

$$\begin{bmatrix} V_0\\ V_1\\ \vdots\\ V_{m-1}\end{bmatrix}\Lambda=\begin{bmatrix} V_0\Lambda\\ V_1\Lambda\\ \vdots\\ V_{m-1}\Lambda\end{bmatrix},$$

و داریم:

$$\begin{aligned}A_{ec}\begin{bmatrix} V_0\\ V_1\\ \vdots\\ V_{m-1}\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix} 0 & I_n & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & I_n\\ A_0^c & A_1^c & \dots & A_{m-1}^c\end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_0\\ V_1\\ \vdots\\ V_{m-1}\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix} V_0\\ V_1\\ \vdots\\ V_{m-1}\\ \sum_{i=0}^{m-1}A_i^cV_i\end{bmatrix},\end{aligned}$$

واضح است که معادله (۱۰.۲) با معادله زیر:

$$V_i=V_{i-1}\Lambda,\quad i=1,2,\cdots,m, \tag{۱۳.۲}$$

برابر است. و داریم:

$$-\sum_{i=0}^{m-1} A_m^{-1}(A_i - BF_i)V_i = V_{m-1}\Lambda, \qquad (۱۴.۲)$$

و می‌توان معادله (۱۴.۲) را به‌صورت زیر نوشت:

$$\sum_{i=0}^{m-1}(A_i - BF_i)V_i + A_m V_{m-1}\Lambda = 0, \qquad (۱۵.۲)$$

و با استفاده از رابطه (۱۳.۲) رابطه زیر

$$V_i = V_i\Lambda^i, \;\; i = 1, 2, \cdots, m-1,$$

به‌دست می‌آید. و با جایگذاری در رابطه (۱۵.۲) معادله زیر حاصل می‌شود.

$$A_m V \circ \Lambda^{(m)} + (A_{m-1} - BF_{m-1})V_\circ\Lambda^{(m-1)} + \ldots + (A_\circ - BF_\circ)V_\circ = 0.$$

□

ملاحظه ۲.۲.۲. *از لم بالا نتیجه می‌گیریم ماتریس جردن A_{ec} یک ماتریس قطری Λ است اگر و فقط اگر یک ماتریس مانند $V \in \mathbb{C}^{m\times mn}$ وجود داشته باشد که در رابطه (۱۵.۲) صدق کند، و در این حالت بردارهای ویژه متناظر با ماتریس A_{ec} به‌صورت زیر است:*

$$V_{ec}\begin{bmatrix} V \\ V\Lambda \\ \vdots \\ V\Lambda^{m-1}\end{bmatrix}. \qquad (۱۶.۲)$$

واضح است مسأله تخصیص ساختار ویژه در سیستم‌های خطی مرتبه بالا (۱.۲) متناسب با قانون پس‌خورد (۵.۲) است.

۱.۲.۲ مسأله تخصیص ساختار ویژه (EAS)

فرض کنید سیستم (۱.۲) با شرط $\det(\mathrm{A_m}) \neq 0$ و ماتریس قطری $\Lambda = \mathrm{diag}(s_1, \ldots, s_{mn})$، و $s_i, i = 0, 1, \ldots, mn$، با مجموعه اعداد مزدوج مختلط (نه لزوما متمایز) داده شده است، شکل پارامتری برای ماتریس‌های $F_i \in \mathbb{R}^{r\times n}, i = 0, \ldots, m-1$ و $V \in \mathbb{C}^{n\times mn}$ که در معادله (۱۵.۲) با شرط زیر:

$$\det\begin{bmatrix} V \\ V\Lambda \\ \vdots \\ V\Lambda^{m-1}\end{bmatrix} \neq 0. \qquad (۱۷.۲)$$

برقرار باشد در نظر می‌گیریم، قرار می‌دهیم:

$$W = F_{m-1}V\Lambda + \ldots + F_1 V\Lambda + F_0 V = \begin{bmatrix} F_0 F_1 \ldots F_{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ V\Lambda \\ \vdots \\ V\Lambda^{m-1} \end{bmatrix}, \tag{۱۸.۲}$$

معادله (۱۱.۲) به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$A_m V\Lambda^m + \ldots + A_1 V\Lambda + A_0 V = BW. \tag{۱۹.۲}$$

واضح است که مسأله (۱۹.۲)، معادله تعمیم‌یافته ماتریس سیلوستر مرتبه m است. و به ازای $m = 1, 2$ معادله (۱۹.۲)، به ترتیب به معادله ماتریس سیلوستر مرتبه اول و مرتبه دوم تبدیل می‌شود. از رابطه بالا می توان نتیجه گرفت که برای زوج ماتریس‌های V و W که در معادله تعمیم یافته ماتریس سیلوستر مرتبه بالا با شرط (۱۷.۲)، صدق می‌کند، ماتریس‌های کنترل $F_i \in \mathbb{R}^{r\times n},\ i = 0, \ldots, m-1$ با استفاده از رابطه (۱۸.۲) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} F_0 F_1 \ldots F_{m-1} \end{bmatrix} = W \begin{bmatrix} V \\ V\Lambda \\ \vdots \\ V\Lambda^{m-1} \end{bmatrix}^{-1}.$$

بنابراین جواب معادله (EAS)، گام کلیدی برای حل معادله ماتریس سیلوستر مرتبه بالا است.

۳.۲ معادله ماتریس سیلوستر مرتبه بالا(HSA)

ماتریس‌های $A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}, i = 0, \ldots, m$ و $B \in \mathbb{R}^{n\times r}$ که در شرط $\det A \neq 0$، صدق می‌کند و ماتریس قطری

$$\Lambda = \mathrm{diag}(s_1, \ldots, s_q) \in \mathbb{C}^{q\times q}, \tag{۲۰.۲}$$

را در نظر بگیرید، برای ماتریس‌های $V \in \mathbb{C}^{n\times q}$ و $W \in \mathbb{C}^{r\times q}$ پارامترهایی پیدا می‌کنیم که در معادله سیلوستر مرتبه بالا (۱۹.۲) صدق کند.

ملاحظه ۱.۳.۲. *ستون‌های ماتریس‌های V, W, Λ در معادله سیلوستر مرتبه بالا (HSE)، به q تبدیل می‌شود، در این‌صورت مسأله (HSE) رایج‌تر است.*

۴.۲ حل مسأله تخصیص ساختار ویژه(HSE)

ماتریس‌های

$$V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_q \end{bmatrix}, \tag{۲۱.۲}$$

$$W = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \dots & w_q \end{bmatrix}, \tag{۲۲.۲}$$

و ماتریس قطری (۲۰.۲) در نظر می‌گیریم، می‌توان معادله سیلوستر مرتبه بالا (۱۹.۲) را به‌صورت زیر تبدیل کرد:

$$(s_i^m A_m + \ldots + s_1 A_1 + A_0)V_i = BW_i, i = 1, 2, \cdots, q. \tag{۲۳.۲}$$

حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

۱. اگر مقادیر ویژه $s_i,\ i = 1, 2, \cdots, q$، مشخص باشد، می توان معادله (۲۳.۲) را به‌صورت زیر نوشت:

$$\Pi_i \begin{bmatrix} V_i \\ W_i \end{bmatrix} = 0,\ \ i = 1, 2, \ldots, q, \tag{۲۴.۲}$$

که در آن Π_i به‌صورت زیر است:

$$\Pi_i = [s_i^m A_m + \ldots + s_i A_1 + A_0 \quad -B],\ \ i = 1, 2, \cdots, q. \tag{۲۵.۲}$$

در این حالت داریم:

$$\begin{bmatrix} V_i \\ W_i \end{bmatrix} = \ker \Pi_i,\ \ i = 1, 2, \ldots, q. \tag{۲۶.۲}$$

در زیر الگوریتمی برای مجموعه ماتریس‌های ثابت N_i و D_i ، $i = 1, 2, \cdots, q$ به‌کار رفته در حل معادله (۱۹.۲) ارائه شده است.

۱.۴.۲ الگوریتمی برای به‌دست آوردن ماتریس‌های N_i و D_i

• گام اول:

با به‌کار بردن کاربرد (SVD) در ماتریس‌های $\Pi_i, i = 1, 2, \ldots, q$، مجموعه ماتریس‌های یکانی $Q_i \in \mathbb{C}^{(n+r)\times(n+r)}$ و $P_i \in \mathbb{C}^{n\times n}$ را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$P_i \Pi_i Q_i = \begin{bmatrix} \operatorname{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{ni}) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, i = 1, 2, \ldots, q, \tag{۲۷.۲}$$

که در آن $\sigma_k > 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n_i$، مقادیر تکین Π_i هستند و داریم:

$$n_i = \operatorname{rank}[s_i^m A_m + \ldots + s_i A_1 + A_0 B],\ \ i = 1, 2, \ldots, q.$$

- گام دوم:
ماتریس‌های $N_i \in \mathbb{C}^{n\times(n+r-n_i)}$ و $D_i \in \mathbb{C}^{r\times(n+r-n_i)}$، $i = ۱, ۲, \cdots, q$، به وسیله تجزیه ماتریس Q_i به صورت زیر،

$$Q_i = \begin{bmatrix} * & N_i \\ * & D_i \end{bmatrix}, \quad i = ۱, ۲, \ldots, q. \qquad (۲۸.۲)$$

به‌دست می‌آوریم. با استفاده از نتایج (۲۷.۲) و (۲۸.۲) ماتریس‌های $N_i \in \mathbb{C}^{n\times(n+r-n_i)}$ و $D_i \in \mathbb{C}^{r\times(n+r-n_i)}, \ i = ۱, ۲, \cdots, q$، به‌دست آمده از الگوریتم بالا، در رابطه زیر صدق می‌کنند:

$$\Pi_i \begin{bmatrix} N_i \\ D_i \end{bmatrix} = ۰, \ \ \text{rank} \begin{bmatrix} N_i \\ D_i \end{bmatrix} = n + r - n_i, \ \ i = ۱, ۲, \ldots, q. \qquad (۲۹.۲)$$

و این نشان می‌دهد ستون‌های ماتریس $\begin{bmatrix} N_i \\ D_i \end{bmatrix}$ مجموعه پایه برای $\ker\Pi_i$، است. از مباحث بالا نتایج زیر به‌دست می‌آید:

قضیه ۱.۴.۲ [۱] *فرض کنید $n_i, i = ۱, ۲, \ldots, q$ تعریف شده در (۲۷.۲) و ماتریس‌های $N_i \in \mathbb{C}^{n\times(n+r-n_i)}$ و $D_i \in \mathbb{C}^{r\times(n+r-n_i)}$، q، $i = ۱, ۲, \cdots, q$، متناسب با الگوریتم بالا به‌دست آمده باشد. برای تمام ماتریس‌های V و W که در معادله ماتریس‌های سیلوستر مرتبه بالا (۱۹.۲) صدق می‌کند پارامترهایی به‌صورت ستون‌های زیر به‌دست آورد.*

$$\begin{bmatrix} V_i \\ W_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i \\ D_i \end{bmatrix} f_i, \ \ i = ۱, ۲, \ldots, q, \qquad (۳۰.۲)$$

که در آن $f_i \in \mathbb{C}^{n+r-n_i}$ ، $i = ۱, ۲, \cdots, q$، مجموعه‌ای از بردارهای پارامتری دلخواه هستند. برای اثبات به [۱] مراجعه شود.

تعریف ۲.۴.۲ [۲] و [۷] سیستم خطی مرتبه بالا (۱.۲) کنترل‌پذیر است، اگر و فقط اگر متناظر با فضای حالت مرتبه اول (۲.۲)، کنترل‌پذیر باشد.

لم ۳.۴.۲ [۲] *سیستم خطی مرتبه بالا (۱.۲) کنترل‌پذیر است، اگر و فقط اگر*

$$\text{rank}[s^m A_m + \ldots + s_۱ A_۱ + A_۰ \ \ B] = n, \ \ \forall s \in \mathbb{C}. \qquad (۳۱.۲)$$

برهان . نشان می‌دهیم شرط (۳۱.۲) با رابطه زیر برابر است:

$$\text{rank}[A_e - sI_{mn} \ \ B_e] = mn, \ \ \forall s \in \mathbb{C},$$

که در آن ماتریس‌های A_e و B_e در رابطه (۲.۲) داده شده است، داریم:

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{rank}[A_e - sI_{mn} \;\; B_e] \\
&= \operatorname{rank}\begin{bmatrix} -sI_n & I_n & & & \circ \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & -sI_n & I_n & \circ \\ -A_m^{-1}A_\circ & -A_m^{-1}A_1 & \dots & -A_m^{-1}A_{m-1} - sI_n & -A_m^{-1}B \end{bmatrix}, \\
&= \operatorname{rank}\begin{bmatrix} -sI_n & I_n & & & \circ \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & -sI_n & I_n & \circ \\ -A_\circ & -A_1 & \dots & -A_{m-1} - sA_m & B \end{bmatrix}, \\
&= \operatorname{rank}\begin{bmatrix} \circ & I_n & & & & \circ \\ \circ & -sI_n & I_n & & & \circ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \circ & & & -sI_n & I_n & \circ \\ -\sum_{i=\circ}^{m} A_i s^i & -A_\circ & A_1 & \dots & -A_{m-1} - sA_m & B \end{bmatrix}, \\
&= n(m-1) + \operatorname{rank}[\sum_{i=\circ}^{m} A_i s^i \;\; B].
\end{aligned}
$$

نتیجه بالا حاصل می‌شود.

□

براساس لم بالا، نتیجه زیر از قضیه (۱.۴.۲) به‌دست می‌آید.

نتیجه ۴.۴.۲. [۲] *فرض کنید سیستم خطی مرتبه بالا (۱.۲) کنترل‌پذیر باشد و ماتریس قطری در رابطه (۲۰.۲) داده شده باشد،در این‌صورت درجه آزادی در حل معادله ماتریس سیلوستر مرتبه بالا (۱۹.۲) برابر qr است.*

ملاحظه ۵.۴.۲. *چون سیستم (۱.۲) کنترل‌پذیر است و با استفاده از لم (۳.۴.۲) که درآن*

$n_i = n, \quad i = 1, 2, \cdots, q$، نتیجه قضیه (۱.۴.۲) حاصل می‌شود.

۲. اگر مقادیر ویژه $s_i, \quad i = 1, 2, \cdots, q$، نامعین باشد، با اجرا کردن عامل‌های سمت راست به‌صورت زیر:

$$G(s) = (s^m A_m + s^{m-1}A_{m-1} + \dots + sA_1 + A_\circ)^{-1}B,$$

می‌توان یک زوج ماتریس‌های چند جمله‌ای $N(s) \in \mathbb{R}^{n\times r}[s]$ و $D(s) \in \mathbb{R}^{r\times r}$ که در معادله

$$(s^m A_m + \ldots + sA_۱ + A_۰)^{-۱}B = N(s)D^{-۱}(s). \qquad (۳۲.۲)$$

صدق می‌کند به‌دست آورد.

قضیه ۶.۴.۲. [۱] *فرض کنید، سیستم (۱.۲) کنترل‌پذیر باشد و ماتریس‌های $N(s) \in R^{n\times r}[s]$ و $D(s) \in \mathbb{R}^{r\times r}$ که در عامل‌های سمت راست (۳۲.۲) صدق می‌کند در نظر می‌گیریم، ماتریس‌های V و W که در (۲۱.۲) و (۲۲.۲) با رابطه*

$$\begin{bmatrix} V_i \\ W_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N(s_i) \\ D(s_i) \end{bmatrix} f_i \quad i = ۱, ۲, \ldots, q \qquad (۳۳.۲)$$

در معادله ماتریس سیلوستر مرتبه بالا به ازای تمام q , $f_i \in \mathbb{C},\ i = ۱, ۲, \cdots$، صدق می‌کند.

اگر رابطه زیر:

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} N(s_i) \\ D(s_i) \end{bmatrix} = r, \quad i = ۱, ۲, \ldots, q. \qquad (۳۴.۲)$$

بر قرار باشد، رابطه (۳۳.۲) جواب مسأله معادله ماتریس سیلوستر مرتبه بالا(HSE)، می‌باشد.

برهان . معادله (۳۲.۲) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$(s_i^m A_m + \ldots + s_i A_۱ + A_۰)N(s_i) - BD(s_i) = ۰, \qquad (۳۵.۲)$$
$$i = ۱, ۲, \cdots, q.$$

با استفاده از رابطه (۳۳.۲) و (۳۵.۲) معادله زیر

$$\begin{aligned} &(s_i^m A_m + \ldots + s_i A_۱ + A_۰)v_i - Bw_i \\ &= [(s_i^m A_m + \ldots + s_i A_۱ + A_۰)N(s_i) - BD(s_i)]f_i \\ &= ۰, \quad i = ۱, ۲, \cdots, q. \end{aligned} \qquad (۳۶.۲)$$

به‌دست می‌آید. که حالتی از معادله (۲۷.۲) است. با استفاده از نتیجه (۴.۴.۲)، تحت کنترل‌پذیری سیستم خطی مرتبه بالا (۱.۲)، و ماتریس قطری Λ که در رابطه (۲۰.۲) داده شده است، درجه آزادی در جواب معادله ماتریس سیلوستر مرتبه بالا (۱۹.۲)، برابر با qr است، در صورتی‌که مجموعه جواب‌های (۳۳.۲) پارامترهای آزاد qr است. بدیهی است اگر شرط (۳۴.۲) برقرار باشد، جواب‌های پارامتری (۳۳.۲) توسعه می یابد.

□

۵.۲ جواب مسأله تخصیص ساختار ویژه

بر اساس مباحث فوق نتایج زیر به‌دست می‌آید.

قضیه ۱.۵.۲. [۲۲] *فرض کنید $n_i,\ i=1,\cdots,mn$، در رابطه (۲۷.۲) و همچنین ماتریس‌های $N_i \in \mathbb{C}^{n\times(n+r-n_i)}$، $D_i \in \mathbb{C}^{n\times(n+r-n_i)}$، $i=1,2\ldots,mn$ در الگوریتم (۲۸.۲) داده شده باشد،*

- *آنگاه مسأله تخصیص ساختار ویژه، دارای جواب است، اگر و فقط اگر پارامترهای*

  $f_i \in \mathbb{C}^{n+r-n_i},\ \ i=1,\ldots,mn$، وجود داشته باشد که در رابطه زیر صدق کند:

$$f_i=\bar{f}_i \quad if \ \ s_i=\bar{s}_i,\ \ \det V_{ca}\neq 0,$$

که در آن

$$V_{ca}=\begin{bmatrix} N_1f_1 & N_2f_2 & \cdots & N_{mn}f_{mn} \\ s_1N_1f_1 & s_2N_2f_2 & \cdots & s_{mn}N_{mn}f_{mn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s_1^{m-1}N_1f_1 & s_2^{m-1}N_2f_2 & \ldots & s_{mn}^{m-1}N_{mn}f_{mn}\end{bmatrix} \qquad (۳۷.۲)$$

- *اگر شرایط بالا برقرار باشد، جواب مسأله(ESA)، به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:*

$$V=\begin{bmatrix} N_1f_1 & N_2f_2 & \cdots & N_{mn}f_{mn}, \end{bmatrix} \qquad (۳۸.۲)$$

و

$$\begin{bmatrix} F_0 & F_1 & \cdots & F_{m-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} D_1f_1 & D_2f_2 & \cdots & D_{mn}f_{mn}\end{bmatrix}V_{ca}^{-1}$$

که در آن $f_i \in \mathbb{C}^{n+r-n_i}, i=1,2,\ldots,q$، مجموعه‌ای از بردارهای پارامتری دلخواه هستند، که در رابطه بالا صدق می‌کند.

مثال ۲.۵.۲. سیستم خطی زیر را در نظر بگیرید

$$\dddot{A_3x}+\ddot{A}_2x+\dot{A}_1x+Bu+f=0$$

که در آن ماتریس‌های $A_۳, A_۲, A_۱\mathbb{R}^{۳\times۳}$ و $B = I_{۳\times۳}$ و $F \times \mathbb{R}^{۳\times۱}$ به‌صورت زیر هستند.

$$A_۳ = \begin{bmatrix} ۳/۲۷۴۷ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲/۹۰۹۴ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱۱/۹۰۵۰ \end{bmatrix}$$
$$A_۲ = \begin{bmatrix} ۵۰۸۵/۴۴۴ & -۲/۸۰۱۳ & ۰ \\ ۶/۴۷۴۷ & ۹۹۵۰/۵۵ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۹۹۲۰۹۰ \end{bmatrix}$$
$$A_۱ = \begin{bmatrix} ۱/۵۷۴۸ & ۰ & -۲/۸۰۳۱ \\ ۲۰۳/۷۷۸۷ & ۱۳۴۹۲۸ & ۲۱۰/۲۵۶۴ \\ ۰ & ۰ & ۳۱۱۰۰۰ \end{bmatrix}$$
$$B = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$
$$f = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰/۰۲۸۶ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته برای سیستم فوق به‌صورت زیر می‌باشد.

$$\Gamma = \{۰, ۰, ۰, -۶/۸۲۶ \pm ۲۰۵/۲۰i, -۱۷/۱۰ \pm ۲۱۴/۶i, -۳۲/۶۲ \pm -۸۰۰/۷\}$$

هدف به‌دست آوردن ماتریس پس‌خورد حالتی است که مقادیر ویژه سیستم حلقه بسته آن به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\{s_۱ = ۱۱۰, s_{۲,۳} = -۳۰ \pm ۲۵i, s_i = s_{i-۲} - ۲۰, \quad i = ۴, ۵, \cdots, ۹\}$$

با استفاده از قضیه (۳۵.۲) بردارهای پارامتری به‌صورت زیر است:

$$f_۱ = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} \quad , \quad f_۲ = \bar{f}_۳ = \begin{bmatrix} ۱+i \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} \quad , \quad f_۴ = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱+i \\ ۰ \end{bmatrix}$$
$$f_۶ = \bar{f}_۷ = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ i+۱ \end{bmatrix} \quad , \quad f_۸ = \bar{f}_۸ = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

و ماتریس پس‌خورد حالت و مقادیر ویژه سیستم حلقه بسته آن به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$F_{۰} = \begin{bmatrix} -۶٫۲۴۸ & ۲۳٫۱۳ & -۸۷٫۹۷ \\ ۰ & -۰٫۶۸۱۹ & -۳۲٫۹۵ \\ ۰ & ۱۳٫۴۸ & -۱۱۳٫۴ \end{bmatrix}$$

$$F_{۱} = \begin{bmatrix} ۱۲۷۲ & ۷۴۰۲ & -۲۲۲۹ \\ ۲٫۰۳۷ & ۱۲۳۶ & -۸۳۴۹ \\ ۰ & ۴۳۱۵ & -۴۲۲۸ \end{bmatrix}$$

$$F_{۲} = \begin{bmatrix} -۵۸۲۳ & ۷۴۰۲ & -۱۵۹۲ \\ ۶٫۴۷۷ & -۲۱۳۲ & -۵۹۶۴ \\ ۰ & ۴۳۱۵ & ۶۲۰۰ \end{bmatrix}$$

$$\Gamma = \{-۱۰۹٫۹, -۳۰٫۰ \pm ۲۴٫۹i, -۴۹٫۹ \pm ۲۵٫۰i, -۷۰٫۰ \pm ۲۴٫۲i, -۹۰٫۰ \pm ۲۵.۰i\}$$

$$J_b = \| V_{cb} \| \| V_{۱cb} \| = ۴۴۴۸۹ \quad , \quad \| [F_{۰} F_{۱} F_{۲}] \| = ۱۴۹٫۳۴$$

با استفاده از نرم افزار متلب مجموعه بردارهای پارامتری به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$f_{۱} = \begin{bmatrix} ۱۱٫۵۵ \\ -۷۶٫۷۰ \\ -۲۴٫۵۴ \end{bmatrix}$$

$$f_{۲} = \bar{f}_{۳} = \begin{bmatrix} ۶۲٫۸۹ + ۷۶٫۰۴i \\ -۴۲٫۲۱ + ۴۱٫۳۹i \\ ۵۲٫۶۹ - ۶۰٫۲۲i \end{bmatrix}$$

$$f_{۴} = \bar{f}_{۵} = \begin{bmatrix} -۶۶٫۵۷ - ۷۴٫۲۰i \\ -۳۹٫۰۷ + ۳۲٫۲۱i \\ ۵۲٫۹۷ - ۸۱٫۳۳ \end{bmatrix}$$

$$f_{۶} = \bar{f}_{۷} = \begin{bmatrix} -۶۶٫۵۷ - ۷۴٫۲۰i \\ -۳۹٫۰۷ + ۳۷٫۲۱i \\ ۵۲٫۹۷ - ۸۱٫۳۳i \end{bmatrix}$$

$$f_{۸} = \bar{f}_{۹} = \begin{bmatrix} ۷۲٫۹۰ + ۵۹٫۶۰i \\ ۵٫۱۱ + ۳۵٫۴۱i \\ ۵۹٫۱۱ - ۵۳٫۷۳i \end{bmatrix}$$

ماتریس پس‌خورد حالت به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$F_{۰} = \begin{bmatrix} -۹/۱۲۴ & ۳/۵۵۵ & -۵/۰۹۶ \\ -۱/۹۷۲ & -۹/۱۹۱ & -۲/۴۲۵ \\ ۱۴/۹۸ & -۳/۶۸۴ & -۲۷/۲۰ \end{bmatrix}$$

$$F_{۱} = \begin{bmatrix} ۱۱۱/۱ & ۷/۲۹۴ & -۱۱/۷۶ \\ -۳/۷۲۴ & ۹۵/۶۶ & -۲/۴۷۵ \\ ۱۴/۹۸ & -۴/۳۷۸ & ۱۷۱/۸ \end{bmatrix}$$

$$F_{۲} = \begin{bmatrix} -۶۷/۵۶ & ۴/۷۸۱ & -۸/۵۶۱ \\ -۱/۸۳۱ & -۴۹/۶۹ & -۵/۰۷۹ \\ ۲۴/۱۱ & -۲/۶۷۴ & ۷۶۵/۹ \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته آن به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\Gamma = \{-۱۰۹/۹, -۳۰/۰ \pm ۲۵/۰i, -۵۰/۰ \pm ۲۵/۰۰i, -۶۹/۹ \pm ۲۴/۹i, -۹۰/۰ \pm ۲۴/۹i\}$$

$$J_b = \| V_{cb} \| \| V_{۱cb} \| = ۲۱۷۷ \quad , \quad \| [F_{۰} F_{۱} F_{۲}] \| = ۳۱/۴۱۹$$

فصل ۳

تخصیص مقادیر ویژه جزئی با استفاده از تبدیلات تشابهی در سیستم‌های خطی مرتبه بالا

در این فصل، ابتدا به بیان اصل مسأله تخصیص مقدار ویژه جزئی می‌پردازیم. در ادامه به بیان فرم استاندارد اشلون و همدم برداری زوج (A, B) می‌پردازیم. سپس چگونگی محاسبه ماتریس پس‌خورد حالت را برای سیستم‌های خطی مرتبه بالا با استفاده از تخصیص مقادیر ویژه جزئی به‌دست می‌آوریم. در پایان برای کمک به درک بیشتر این روش، به ارائه مثال عددی می‌پردازیم.

۱.۳ تخصیص مقدار ویژه جزئی

تعریف ۱.۱.۳. سیستم خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \qquad (۱.۳)$$
$$u(t) = -Kx(t).$$

که در آن ماتریس‌های $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ و $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ ماتریس ضرایب سیستم هستند و $x(t)$ بردار ستونی n بعدی موسوم به بردار حالت و $u(t)$ یک بردار ستونی m بعدی موسوم به بردار ورودی است که با زمان تغییر می‌کند. و $K \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ماتریس پس‌خورد حالت است. برای ادامه باید ماتریس K را به‌گونه‌ای پیدا کنیم که مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته

$$\Omega(A - BK) = S, \qquad (۲.۳)$$

در مجموعه $S = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$، موسوم به طیف مقادیر ویژه باشد قرار بگیرد، با این خاصیت که λ_i ها حقیقی‌اند و یا به‌صورت زوج‌های مرتب مختلط ظاهر می‌شوند.

تعریف ۲.۱.۳. دستگاه (۱.۳) یا به‌طور معادل زوج ماتریس (A,B) نسبت به مقادیر ویژه λ از ماتریس A کنترل‌پذیر می‌نامند اگر:

$$\forall y \neq 0 \implies y^H B \neq 0 \quad \text{به‌طوری‌که} \quad y^H A = \lambda y^H. \tag{۳.۳}$$

تعریف ۳.۱.۳. دستگاه (۱.۳) یا زوج ماتریس (A,B) نسبت به زیر مجموعه $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_p\}$، از طیف ماتریس A به طور جزئی کنترل‌پذیر است، اگر نسبت به هر مقدار ویژه $\lambda_j,\ \jmath = 1,2,\cdots,p$ کنترل‌پذیر باشد.

تعریف ۴.۱.۳. دستگاه (۱.۳) یا زوج ماتریس (A,B) به‌طور کامل کنترل‌پذیر است، هرگاه نسبت به هر مقدار ویژه ماتریس A کنترل‌پذیر باشد.

قضیه ۵.۱.۳. [۲۹] *برای هر مجموعه دلخواه S، مسأله تخصیص مقدار ویژه برای زوج ماتریس (A,B) حل‌پذیر است اگر وتنها اگر زوج (A,B) به‌طور کامل کنترل‌پذیر باشد. و دارای جواب یکتا است اگر وتنها اگر دستگاه تک ورودی باشد (B یک بردار باشد). ودر حالت چند ورودی، در صورتی‌که جواب وجود داشته باشد، بی‌نهایت جواب موجود است. برای اثبات به [۳] یا [۶] مراجعه شود.*

۱.۱.۳ وجود یکتایی برای مسأله تخصیص مقدار ویژه جزئی

به‌طور کلی زوج ماتریس (A,B) رادر نظر بگیرید. طیف

$$\Omega(A) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_p, \lambda_{p+1}, \cdots, \lambda_n\}, \tag{۴.۳}$$

$$S = \{\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_p\}, \tag{۵.۳}$$

در نظر بگیرید. ماتریس پس‌خورد حالت F :

$$\Omega(A-BF) = \{\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_p, \lambda_{p+1}, \cdots, \lambda_n\}. \tag{۶.۳}$$

مسأله ثابت نگه داشتن یک بخش از طیف ماتریس حلقه باز دستگاه خطی با ماتریس کنترل حالت، خارج کردن باقیمانده طیف و جایگزین کردن آن با طیف پایدار را مسأله تخصیص مقدار ویژه جزئی می‌نامند. اصل این مسأله برای دستگاه‌هایی به‌کار می‌رود که به‌طور کامل پایدار نیستند و تعدادی از مقادیر ویژه طیف ماتریس حلقه باز (ماتریس A) ، که تنها همین مقدار نیاز به تخصیص دارند، در ناحیه پایداری قرار ندارند. و بسیاری از محققان، الگوریتمی برای حل مسأله تخصیص مقدار ویژه ویژه جزئی طراحی کرده‌اند. [۱۴]، [۱۲].

۲.۳ وجود یکتایی جواب برای مسأله تخصیص مقدار ویژه جزئی

قضیه ۱.۲.۳. [۲۹] *ماتریس قطری $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p, \lambda_{p+1}, \cdots, \lambda_n)$ که شامل مقادیر ویژه $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ از ماتریس $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ است را در نظر بگیرید، به‌گونه‌ای که مجموعه‌های*

$\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p\}$ و $\{\lambda_{p+1}, \cdots, \lambda_n\}$ از هم گسسته هستند.

فرض کنید که مقادیر $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p$ به $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_p$ تغییر یابد و باقی مقادیر ویژه ماتریس A یعنی مقادیر $\lambda_{p+1}, \cdots, \lambda_n$ ثابت بماند. در نتیجه مسأله تخصیص مقادیر ویژه جزئی به ازای هر انتخاب مقدار ویژه $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_p$ برای زوج (A, B) دارای جواب است اگر و تنها اگر زوج (A, B) به‌طور جزئی نسبت به مجموعه $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p\}$ کنترل‌پذیر باشد، و دارای جواب منحصر به‌فرد است، اگر و تنها اگر دستگاه، یک دستگاه تک ورودی کاملا کنترل‌پذیر باشد. در حالت چند ورودی و تک ورودی‌ها، زمانی که دستگاه کاملا کنترل‌پذیر نباشد، در صورت وجود جواب، بی‌نهایت جواب وجود دارد.

برهان . ابتدا ضرورت را اثبات می‌کنیم. برهان خلف: فرض کنید زوج (A, B) به ازای برخی از λ_j کنترل‌پذیر نباشد ($1 \leqslant j \leqslant p$)، در نتیجه:

$$\exists y \neq 0 \quad \text{به‌طوری‌که} \quad y^H B = 0 \quad \text{و} \quad y^H(A - \lambda_i I) = 0 \tag{۷.۳}$$

رابطه بالا به این معنا است که برای هر F، داریم: $y^H(A - BF - \lambda_i I) = 0$. در نتیجه با این فرض که λ_j مقدار ویژه ماتریس حلقه بسته $(A - BF)$ است، نمی‌تواند دوباره تخصیص داده شود.

بلعکس: تعریف می‌کنیم $\Lambda_1 = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p)$ و $\Lambda_2 = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$. اکنون باید نشان دهیم ماتریس پس‌خورد حالت F ای وجود دارد به‌طوری‌که مقادیر ویژه دلخواهی را به جای Λ_1 تخصیص می‌دهد، در حالی که تمام مقادیر ویژه دیگر را بدون تغییر باقی می‌گذارد.

فرض کنید $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ و $Y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ به ترتیب ماتریس‌های بردارهای ویژه سمت راست و سمت چپ ماتریس A باشند و فرض کنید که $Y_1 = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$. از آن‌جایی که $Y^H X = I$ و $Y^H A X = \mathrm{diag}(\Lambda_1, \Lambda_2)$، در نتیجه از کنترل‌پذیری جزئی زوج ماتریس (A, B) نسبت به مقادیر ویژه Λ_1، کنترل‌پذیری جزئی زوج $(\mathrm{diag}(\Lambda_1, \Lambda_2), Y^H B)$ نسبت به همان مقادیر را نتیجه می‌گیریم. بنابراین، زوج $(\Lambda_1, Y_1^H B)$ کاملا کنترل‌پذیر است، زیرا:

$$\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p\} \bigcap \{\lambda_{p+1}, \cdots, \lambda_n\} = \emptyset.$$

طبق قضیه (۵.۱.۳)، ماتریس پس‌خورد حالت Φ وجود دارد به‌طوری‌که، ماتریس حلقه بسته $(\Lambda_1 - Y_1^H B \Phi)$ دارای مقادیر ویژه $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_P$ باشد. تعریف می‌کنیم:

$$F = \Phi Y_1^H \tag{۸.۳}$$

پس مقدار ویژه ماتریس حلقه بسته مقدار مورد نیاز است:

$$\begin{aligned}\{\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_P, \lambda_{p+1}, \cdots, \lambda_n\} &= \Omega(diag(\Lambda_1, \Lambda_2 - Y^H B(\Phi, 0)) = \\ &\Omega(Y^H(A - B((\Phi, 0)Y^H))X) = \Omega(A - B(\Phi Y_1^H)).\end{aligned} \tag{۹.۳}$$

در مواردی که دستگاه تک ورودی کاملا کنترل‌پذیر باشد، جواب منحصربه‌فرد است. زمانی که چند ورودی باشد، بی‌نهایت جواب وجود دارد که به‌طور مستقیم از قضیه (۵.۱.۳) نتیجه می‌شود.

□

۳.۳ فرم استاندارد اشلون

فرض کنیدکه T ماتریس تبدیل تشابهی باشد که بر فضای $\mathbb{R}^n$ تعریف شده است. معادله حالت دستگاه را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \tag{۳.۱۰}$$

حال فرض می‌کنیم بردار حالت دستگاه توسط ماتریس تبدیل $T^{-۱}$ به فضای جدید تبدیل شود، یعنی:

$$x(t) = T\hat{x}(t) \quad , \hat{x}(t) = T^{-۱}x(t) \tag{۳.۱۱}$$

با جایگذاری (۳.۱۱) در معادله حالت (۳.۱۰) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} T\dot{\hat{x}}(t) &= ATx(t) + Bu(t) \\ \dot{\hat{x}}(t) &= T^{-۱}ATx(t) + T^{-۱}Bu(t) \end{aligned} \tag{۳.۱۲}$$

با در نظر گرفتن $\hat{A} = T^{-۱}AT$ و $\hat{B} = T^{-۱}B$ در معادله (۳.۱۲) داریم:

$$\dot{x}(t) = \hat{A}\hat{x}(t) + \hat{B}u(t). \tag{۳.۱۳}$$

ماتریس تبدیل T را می‌توان به‌صورت منحصربه‌فردی با استفاده از ماتریس کنترل‌پذیری مشخص کرد. به این ترتیب که اولین n ستون مستقل خطی ماتریس Q را ستون‌های ماتریس تبدیل T قرار می‌دهیم. در این‌صورت فرم استاندارد اشلون را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$T = [b_۱ b_۲ \cdots b_m \cdots A^{q-۱}b_۱ \cdots A^{q-۱}b_r A^{q-۱}b_{r+۱} \cdots A^{q-۱}b_m A^q b_۱ \cdots A^q b_r],$$

ماتریس افزوده $[A, B]$، که دارای n سطر و $n+m$ ستون است را تشکیل می‌دهیم، اگر ماتریس $[T^{-۱}B, T^{-۱}AT]$ را تشکیل دهیم، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} T^{-۱}[B, AT] &= T^{-۱}[b_۱ b_۲ \cdots b_m Ab_۱ \cdots A^q b_۱ \cdots A^q b_r A^q b_{r+۱} \cdots A^q b_m A^{q+۱} b_۱ \cdots A^{q+۱} b_r] \\ &= T^{-۱}[T, A^q b_{r+۱} \cdots A^{q+۱} b_r] = [I, T^{-۱}A^q b_{r+۱} \cdots T^{-۱}A^{q+۱} b_r] \\ &= [I_{n\times n}, V_{n\times m}], \end{aligned}$$

لذا داریم:

$$[\hat{B}, \hat{A}] = [I_n, V_{n\times m}].$$

اکنون تبدیلات تشابهی سطری و ستونی نظیر را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

۱. $c(i) \longleftrightarrow c(j) \quad , \quad r(i) \longleftrightarrow r(j)$،

۲. $c(i) \longleftrightarrow \frac{۱}{\alpha} c(i) \quad , \quad r(i) \longleftrightarrow \alpha r(j)$، ۳. $c(j) \longleftrightarrow c(j) - Kc(i) \quad , \quad r(i) \longleftrightarrow r(i) + Kr(j)$.

اگر زوج (A, B) کنترل‌پذیر باشند، زوج $(\hat{A}, \hat{B})$ نیز کنترل‌پذیر است زیرا:

$$\begin{aligned} Q &= [B, AB \cdots A^{n-1}B], \\ \hat{Q} &= [\hat{B}, \hat{A}\hat{B}, \cdots, \hat{A}^{n-1}\hat{B}], \end{aligned} \tag{۱۴.۳}$$

که در آن ماتریس‌های $\hat{A}$ و $\hat{B}$ به‌صورت زیر است:

$$[\hat{A}, \hat{B}] = [T^{-1}AT, T^{-1}B], \tag{۱۵.۳}$$

با جایگزین کردن رابطه (۱۵.۳) در رابطه (۱۴.۳) داریم:

$$\begin{aligned} \hat{Q} &= [T^{-1}B, T^{-1}ATT^{-1}B, \cdots, (T^{-1}AT)(T^{-1}AT)\cdots(T^{-1}AT)T^{-1}B] \\ &= [T^{-1}B, T^{-1}ATT^{-1}B, T^{-1}A^{n-1}B] \\ &= T^{-1}Q, \end{aligned}$$

در صورتی‌که بخواهیم زوج (A, B) را به فرم استاندارد اشلون $[I, V]$ تبدیل نماییم،ابتدا ماتریس افزوده $Q = [B, A, I]$ تشکیل می‌دهیم، سپس با استفاده از عملیات سطری مقدماتی روی ماتریس Q و ستونی مقدماتی نظیر روی ماتریس A حاصل در هر مرحله، n ستون اول ماتریس Q را به I تبدیل می‌کنیم. در این‌صورت ماتریس افزوده $\hat{Q}$ به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\hat{Q} = [\hat{B}, \hat{A}, \hat{T}^{-1}] = [I_n, V_{n\times m}, T^{-1}], \tag{۱۶.۳}$$

که در آن ماتریس‌های $\hat{A}$ و $\hat{B}$ به‌صورت زیر هستند:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \circ_{m\times m} & \circ & \cdots & \circ_{m\times r} & v^{(۱)}_{m\times m} \\ I_m & \circ & \cdots & \circ & v^{(۲)}_{m\times m} \\ \circ_{m\times m} & I_m & \cdots & \circ & v^{(۳)}_{m\times m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \circ & \circ & \cdots & \circ & v^{(q)}_{m\times m} \\ \circ_{r\times n} & \circ_{r\times n} & \cdots & \circ_{r\times(m-r)}I_r & v^{(q+۱)}_{r\times m} \end{bmatrix} \quad , \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} I_m \\ \circ_{m\times m} \\ \circ_{m\times m} \\ \vdots \\ \circ_{m\times m} \\ \circ_{r\times m} \end{bmatrix} \tag{۱۷.۳}$$

مثال ۱.۳.۳. فرم استاندارد اشلون زوج (A, B) را در دستگاه خطی زیر به‌دست آورید.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} \circ & ۱ & \circ \\ -۲ & ۳ & ۲ \\ -۲ & -۱ & ۳ \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۱ & \circ \\ \circ & \circ \end{bmatrix}$$

حل.

$$
\begin{aligned}
Q &= \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & \vdots & ۰ & ۱ & ۰ & \vdots & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & \vdots & -۲ & ۳ & ۲ & \vdots & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & \vdots & -۲ & -۱ & ۳ & \vdots & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \\
&\xrightarrow[c(۱)+c(۲)\to c(۱) on A]{r(۲)-r(۱)\to r(۲) on(Q)} \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & \vdots & ۱ & ۱ & ۰ & \vdots & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & -۲ & \vdots & ۰ & ۲ & ۲ & \vdots & -۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & \vdots & -۳ & -۱ & ۳ & \vdots & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \\
&\xrightarrow[-c(۲)\to c(۲) on A]{-\frac{۱}{۲}r(۲)\to r(۲) on(Q)} \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & \vdots & ۱ & -۲ & ۰ & \vdots & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & \vdots & ۰ & ۲ & -۱ & \vdots & -\frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۲} & ۰ \\ ۰ & ۰ & \vdots & -۳ & ۲ & ۳ & \vdots & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \\
&\xrightarrow[c(۲)+۲c(۱)\to c(۲) on A]{r(۱)-۲r(۲)\to r(۲) on(Q)} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & \vdots & ۱ & -۴ & ۲ & \vdots & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & \vdots & ۰ & ۲ & -۱ & \vdots & -\frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۲} & ۰ \\ ۰ & ۰ & \vdots & -۳ & -۴ & ۳ & \vdots & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \\
&\xrightarrow[-۳c(۳)\to c(۳) on A]{-\frac{۱}{۳}r(۳)\to r(۳) on(Q)} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & \vdots & ۱ & -۴ & -۶ & \vdots & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & \vdots & ۰ & ۲ & ۳ & \vdots & -\frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۲} & ۰ \\ ۰ & ۰ & \vdots & ۱ & \frac{۴}{۳} & ۳ & \vdots & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \\
&\xrightarrow[c(۳)+۲c(۱)\to c(۳) on A]{r(۱)-۲r(۳)\to r(۱) on(Q)} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & \vdots & ۱ & -\frac{۱۶}{۳} & -۹ & \vdots & ۰ & ۱ & \frac{۱}{۳} \\ ۰ & ۱ & \vdots & ۰ & ۲ & ۳ & \vdots & \frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۲} & ۰ \\ ۰ & ۰ & \vdots & ۱ & \frac{۴}{۳} & ۴ & \vdots & ۰ & ۰ & -\frac{۱}{۳} \end{bmatrix} \\
&= \hat{Q} = [I, V, T^{-۱}]
\end{aligned}
$$

۴.۳ فرم همدم‌برداری

یک ماتریس تبدیل خطی تشابهی مانند S را در نظر می‌گیریم که بر فضای $\mathbb{R}^n$ تعریف شده است. اکنون بردار حالت دستگاه که در بخش (۱.۳) آن را به فرم استاندارد اشلون در آوردیم، توسط ماتریس تبدیل $S^{-۱}$ به فضای جدید به‌نام فضای همدم‌برداری تبدیل می‌گردد:

$$\tilde{x}(t) = S^{-۱}\hat{x}(t) = S^{-۱}T^{-۱}x(t), \tag{۱۸.۳}$$

با جایگذاری معادله فوق در معادله (۱۱.۳) داریم:

$$
\begin{aligned}
& S\dot{\tilde{x}}(t) = \hat{A}S\tilde{x}(t) + \hat{B}u(t) \\
& \Rightarrow \dot{\tilde{x}}(t) = S^{-۱}\hat{A}S\tilde{x}(t) + S^{-۱}\hat{B}u(t),
\end{aligned} \tag{۱۹.۳}
$$

با در نظر گرفتن $\tilde{A} = S^{-1}\tilde{A}S = S^{-1}T^{-1}ATS$ و $\tilde{B} = S^{-1}\tilde{B} = S^{-1}T^{-1}B$ در معادله (۱۹.۳)

$$\tilde{\dot{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}ut. \tag{۲۰.۳}$$

زوج $(\tilde{A}, \tilde{B})$، فرم همدم برداری زوج (A, B) می‌نامند [۸]. از آن‌جایی که معادلات (۱.۳) و (۴.۳) هم‌ارز یکدیگر هستند، جواب آن‌ها نیز یکسان است. حال فرم همدم برداری به روش عددی را به‌دست می‌آوریم، با استفاده از عملیات ستونی مقدماتی روی ماتریس $\hat{A}$ و سطری مقدماتی نظیر آن روی کل ماتریس $\hat{Q}$، می‌توان فرم همدم برداری و ماتریس تبدیل آن را به‌دست آورد، به طوریکه:

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} B_{\circ\, m\times m} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \circ_{(n-m)\times m} \end{bmatrix}, \tag{۲۱.۳}$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} & G_{\circ\, m\times n} & \\ & \cdots\cdots\cdots & \\ I_{(n-m)} & & \circ_{(n-m)\times m} \end{bmatrix}. \tag{۲۲.۳}$$

مثال ۱.۴.۳. برای مثال (۱.۳.۳) فرم همدم برداری را به‌دست آورید.

$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & 1 & -\frac{16}{3} & -9 & \vdots & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & 2 & 3 & \vdots & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 1 & \frac{4}{3} & 4 & \vdots & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[onA]{c(3)-4c(1)\to c(4)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & 1 & -\frac{16}{3} & -9 & \vdots & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & 2 & 3 & \vdots & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 1 & \frac{4}{3} & 0 & \vdots & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[on\hat{Q}]{r(1)+4r(2)\to r(1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & 4 & 0 & 9 & \vdots & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & 2 & 3 & \vdots & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 1 & \frac{4}{3} & 0 & \vdots & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[onA]{c(2)-\frac{4}{3}c(1)\to c(2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & 4 & -\frac{16}{3} & -9 & \vdots & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & 2 & 3 & \vdots & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[on\hat{Q}]{r(1)+\frac{4}{3}r(2)\to r(1)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{3} & \vdots & 4 & -\frac{8}{3} & -5 & \vdots & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -1 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & 2 & 3 & \vdots & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} ۱ & \frac{۴}{۳} \\ ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} ۴ & -\frac{۸}{۳} & -۵ \\ ۰ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$S^{-۱}T^{-۱} = \begin{bmatrix} \frac{۲}{۳} & \frac{۱}{۳} & -۱ \\ \frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۲} & ۰ \\ ۰ & ۰ & -\frac{۱}{۳} \end{bmatrix}$$

برای معادله (۱.۳)، قانون کنترل را به‌صورت $U(t) = Kx(t)$ تعریف می‌کنیم و به‌طور مشابه برای معادله (۱۱.۳)، قانون کنترل به‌صورت $U(t) = \tilde{k}\tilde{x}(t)$ تعریف می‌شود که $\tilde{K}$ ماتریس پس‌خورد حالت معادله دستگاه تبدیل شده به فرم همدم برداری است. با جایگذاری $S^{-۱}T^{-۱}x(t)$ به جای $\tilde{x}$ خواهیم داشت:

$$U(t) = \tilde{K}S^{-۱}T^{-۱}x(t), \qquad (۲۳.۳)$$

در نظر می‌گیریم:

$$K = \tilde{K}S^{-۱}T^{-۱}, \qquad (۲۴.۳)$$

که آن را ماتریس پس‌خورد اولیه زوج (A, B) می‌نامیم. در صورتی‌که $\tilde{K}$ را به‌صورت $-B_۰^{-۱}G_۰$ تعریف نماییم، مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته $\tilde{\Gamma} = \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K}$ صفر است.

$$\tilde{\Gamma} = \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{\Gamma} = \begin{bmatrix} & G_۰ & \\ & \cdots\cdots\cdots & \\ I & & ۰ \end{bmatrix}_{n\times n} + \begin{bmatrix} B_۰ \\ \cdots\cdots \\ ۰ \end{bmatrix}_{n\times m} (-B_۰^{-۱}G_۰)$$

$$= \begin{bmatrix} & ۰_{m\times n} & \\ & \cdots\cdots\cdots & \\ I_{(n\times m)} & & ۰_{(n-m)} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

نتیجه ۲.۴.۳. *به دلیل متشابه بودن Γ با $\tilde{\Gamma}$ تمام مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته $\Gamma = A + BK$ نیز صفراند.*

$$\tilde{\Gamma} = S^{-۱}T^{-۱}ATS + S^{-۱}T^{-۱}BKTS = S^{-۱}T^{-۱}(A + BK)TS \qquad (۲۵.۳)$$

$$= (TS)^{-۱}(A + BK)TS. \qquad (۲۶.۳)$$

۵.۳ بیان روش با استفاده از تبدیلات تشابهی

در این بخش با استفاده از بردار ویژه سمت چپ وابسته به مقادیر ویژه ناپایدار دستگاه، ابتدا مسأله را به یک مسأله تخصیص مقدار ویژه تبدیل می‌کنیم و سپس با به‌کاربردن تبدیلات تشابهی در دستگاه کنترل خطی، ماتریس پس‌خورد حالتی را به‌دست می‌آوریم که مقادیر ویژه مطلوب را به ماتریس حلقه بسته اختصاص می‌دهد.

۱.۵.۳ تخصیص مقدار ویژه جزئی غیر پارامتری

ماتریس $A_{n\times n}$ و $B_{n\times m}$ در دستگاه خطی پیوسته (۱.۳) را در نظر بگیرید.

فرض می‌کنیم که $\{\lambda_۱, \lambda_۲, \cdots, \lambda_p, \lambda_{p+۱}, \cdots, \lambda_n\}$ مقادیر ویژه ماتریس حلقه باز $A \times \mathbb{C}^{n\times n}$ است، به‌طوری‌که $\{\lambda_۱, \lambda_۲, \cdots, \lambda_p\}$ و $\{\lambda_{p+۱}, \lambda_{p+۲}, \cdots, \lambda_n\}$ از هم گسسته هستند.

فرض می‌کنیم $\{\lambda_۱, \lambda_۲, \cdots, \lambda_p\}$ مقادیر ویژه ناپایدار ماتریس حلقه باز(ماتریس A) باشد. مقادیر ویژه دلخواه $s = \{\mu_۱, \mu_۲, \cdots, \mu_P\}$ که تحت ترکیب مختلط بسته هستند، را در نظر می‌گیریم. برای شروع روش جدید، ابتدا نیازمند به‌دست آوردن بردارهای ویژه سمت چپ ماتریس A هستیم. این بردارها را به‌صورت:

$$Y = (y_۱, y_۲, \cdots, y_n), \tag{۲۷.۳}$$

نمایش می‌دهیم. در (۲۷.۳)، $y_۱, y_۲, \cdots, y_p$، بردارهای ویژه سمت چپ ماتریس A، متناظر با مقادیر ویژه $\{\lambda_۱, \lambda_۲, \cdots, \lambda_p\}$ است که آن را به‌صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$Y_۱ = (y_۱, y_۲, \cdots, y_p) = \begin{bmatrix} y_{۱۱} & y_{۱۲} & \cdots & y_{۱p} \\ y_{۲۱} & y_{۲۲} & \cdots & y_{۲p} \\ \vdots & & & \vdots \\ y_{n۱} & y_{n۲} & \cdots & y_{np} \end{bmatrix}. \tag{۲۸.۳}$$

در ادامه ماتریس $Y_۱^H$ را به‌دست می‌آوریم. ماتریس‌های $\Lambda_۱ = diag\{\lambda_۱, \lambda_۲, \cdots, \lambda_p\}$، و $(Y_۱)^H B$ را در نظر می‌گیریم که به شکل زیر هستند:

$$(Y_۱)^H B_{p\times m} = \begin{bmatrix} y_{۱۱} & y_{۱۲} & \cdots & y_{۱p} \\ y_{۲۱} & y_{۲۲} & \cdots & y_{۲p} \\ \vdots & & & \vdots \\ y_{n۱} & y_{n۲} & \cdots & y_{np} \end{bmatrix}_{p\times n} \times \begin{bmatrix} b_{۱۱} & b_{۱۲} & \cdots & b_{۱p} \\ b_{۲۱} & b_{۲۲} & \cdots & b_{۲p} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{n۱} & b_{n۲} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix}_{n\times m} \tag{۲۹.۳}$$

$$\Lambda_۱ = \begin{bmatrix} \lambda_۱ & ۰ & \cdots & & ۰ \\ ۰ & \lambda_۲ & ۰ & \cdots & ۰ \\ \vdots & & & & \vdots \\ ۰ & ۰ & \cdots & & \lambda_p \end{bmatrix}_{p\times p}, \tag{۳۰.۳}$$

هدف از کنترل دستگاه در این قسمت، ابتدا یافتن ماتریس پس‌خورد حالت K است به‌گونه‌ای که، مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته $\Lambda_۱ + Y_۱^H BK$ در مجموعه تعیین شده $s = \{\mu_۱, \mu_۲, \cdots, \mu_p\}$ باشند.

نخست با استفاده از تبدیلات تشابهی که در بخش (۳.۳) بیان شده است، فرم استاندارد اشلون و سپس مانند بخش (۴.۳) فرم همدم برداری زوج $(Y_۱^H B)$, $\Lambda_۱$ را به‌دست می‌آوریم.

$$\widetilde{Y_۱^H B} = \begin{bmatrix} (Y_۱^H B_۰)_{m\times m} \\ ۰ \end{bmatrix}, \quad \widetilde{\Lambda_۱} = \begin{bmatrix} & G_{۰\,(m\times p)} & \\ I_{p-m} & & I_{(P-m)\times m} \end{bmatrix} \tag{۳۱.۳}$$

ماتریس پس‌خورد اولیه $\widetilde{F_p} = -((Y_1^H B_0)_0)^{-1} G_0$ محاسبه نموده به‌گونه‌ای که مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته $\widetilde{\Lambda_1} + \widetilde{Y_1^H B}\widetilde{F_p}$ همگی صفر هستند. سپس ماتریس حلقه بسته

$$\widetilde{\Gamma_0} = \widetilde{\Lambda_1} + (\widetilde{Y_1^H B})\widetilde{F_p} = \begin{bmatrix} & 0 & \\ & \ldots\ldots & \\ I & & 0 \end{bmatrix}, \qquad (۳۲.۳)$$

را محاسبه می‌کنیم. اکنون ماتریس قطری D را به‌صورت

$$D = \mathrm{diag}\{\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_p\}, \qquad (۳۳.۳)$$

تشکیل داده و با $\widetilde{\Gamma_0}$ جمع می‌کنیم و آن را A_μ می‌نامیم.

$$A_\mu = \widetilde{\Gamma_0} + D \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & & & & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 & & \cdots & & 0 \\ 0 & & \ddots & & & & 0 \\ 0 & & & \mu_m & & & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & \mu_{m+1} & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & & 1 & 0 & \cdots & \mu_p \end{bmatrix}. \qquad (۳۴.۳)$$

به وضوح مقادیر ویژه ماتریس A_μ مجموعه $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_p$ می‌باشد.

اکنون عملیات تشابهی $\begin{cases} c(j) = c(j) - \mu c(j-m) \\ r(j-m) = r(j-m) + \mu r(j) \end{cases}$ را بر روی ماتریس A_μ انجام می‌دهیم. با انجام این عملیات A_μ به فرم همدم برداری $\widetilde{A_\mu}$ به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\widetilde{A_\mu} = \begin{bmatrix} & G_\mu(m \times p) & \\ I_{p-m} & & 0_{(p-m)\times m} \end{bmatrix}, \qquad (۳۵.۳)$$

از آن‌جایی که $\widetilde{A_\mu}$ و A_μ متشابه‌اند، مقادیر ویژه آن‌ها نیز یکسان است. یعنی مقادیر $\widetilde{A_\mu}$ نیز مجموعه $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_p$ است. در ادامه ماتریس پس‌خورد حالت $\widetilde{K}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \widetilde{K} &= -((Y_1^H B)_0)^{-1}(-G_0 + G_\mu) = ((Y_1^H B)_0)^{-1} G_0 + ((Y_1^H B)_0)^{-1} G_\mu \\ &= \widetilde{F_p} + \widetilde{K_\mu}, \end{aligned} \qquad (۳۶.۳)$$

به وضوح مقادیر ویژه ماتریس $\widetilde{\Gamma_\mu} = \widetilde{\Lambda_1} + (\widetilde{Y_1^H B})\widetilde{K}$، طیف $\{\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_p\}$ است.

$$\widetilde{\Gamma_\mu} = \begin{bmatrix} & G_{0(m\times p)} & \\ I_{p-m} & & 0_{(p-m)\times m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (Y_1^H B)_{0\, m\times m} \\ 0 \end{bmatrix} ((Y_1^H B)_0)^{-1}(-G_0 + G_\mu) \qquad (۳۷.۳)$$

$$= \begin{bmatrix} & G_\mu & \\ I_{p-m} & & 0_{(p-m)\times m} \end{bmatrix} = \widetilde{A_\mu}, \qquad (۳۸.۳)$$

تعریف می کنیم:

$$K = \widetilde{K}T^{-1}, \qquad (۳۹.۳)$$

که در رابطه بالا T^{-1} ماتریس تبدیلی است که از فرم همدم برداری به‌دست می‌آوردیم. لذا،مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته $\Gamma = \Lambda_1 + Y_1^H BK$ نیز طیف $\{\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_p\}$ می‌باشد. در انتها ماتریس پس‌خورد حالت مسأله تخصیص مقدار ویژه جزئی را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$F = KY_1^H, \qquad (۴۰.۳)$$

با تعریف ماتریس F به‌صورت (۴۰.۳) مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته $(A + BF)$، برابر طیف $\{\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_p, \lambda_{p+1}, \cdots, \lambda_n\}$، می‌شود.

$$\Omega(A + BF) = \Omega(A + BKY_1^H) = \{\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_p, \lambda_{p+1}, \cdots, \lambda_n\}. \qquad (۴۱.۳)$$

۶.۳ الگوریتم روش

ورودی‌ها:

◁ ماتریس $A_{n\times n}$.

◁ ماتریس $B_{n\times m}$.

◁ مجموعه $\{\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_p,\}$، که تحت ترکیب مختلط بسته هستند.

◁ مجموعه $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p\}$ از مجموعه مقادیر ویژه $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_p, \lambda_{p+1}, \cdots, \lambda_n\}$ از ماتریس A و بردارهای ویژه سمت چپ $Y_1 = \{y_1, y_2, \cdots, y_p\}$ ماتریس A، متناظر با مقادیر ویژه $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p\}$.

خروجی:

◁ ماتریس پس‌خورد حالت F، به‌طوری‌که طیف ماتریس حلقه بسته $A + BF$ برابر:

$$\{\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_p, \lambda_1, \cdots, \lambda_n\}.$$

فرضیات:

◁ زوج (A, B) به‌صورت جزئی نسبت به مقادیر ویژه $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p$ قابل کنترل است.

◁ مجموعه‌های $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p\}$ ، $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$ و $\{\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_p\}$ مستقل و جدا از هم هستند.

گام اول:

محاسبه ماتریس‌های $\Lambda_1 = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p\}$ و $Y_1^H B$.

گام دوم:

به‌دست آوردن ماتریس پس‌خورد K، به طوری‌که مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته $\Lambda_1 + Y_1^H BK$ برابر طیف $\{\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_p\}$ باشد.

گام سوم:

عبارت $F = K \times Y_1^H$ را تشکیل می‌دهیم.

ملاحظه ۱.۶.۳. *از آن‌جایی که در سیستم‌های خطی مرتبه بالا بعد ماتریس‌های A و B بسیار بزرگ است، لذا روش تخصیص مقادیر ویژه جزئی بر روی سیستم‌های خطی مرتبه بالا در کاهش محاسبات مؤثر خواهد بود.*

مثال ۲.۶.۳. دستگاه خطی پیوسته زیر را در نظر بگیرید.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

که در آن ماتریس‌های $A \times \mathbb{R}^{۹\times۹}$ و $B \times \mathbb{R}^{۹\times۲}$ به‌صورت زیر هستند.

$$A = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۲ & ۳ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰/۲ & -۰/۴ & ۰/۸ & ۰/۴ & ۰/۲ & -۰/۶ & ۰/۶ & ۰/۸ & ۰/۲ \\ ۰/۲ & ۰/۶ & -۰/۲ & -۰/۶ & -۰/۸ & -۰/۶ & -۰/۴ & -۰/۲ & -۰/۸ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -۱ & -۲ \\ ۰ & ۰/۴ \\ ۰ & ۰/۴ \\ ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

طیف مقادیر ویژه ماتریس حلقه باز :

$$L = L_۱ \bigcap L_۲$$

به‌صورت زیر است:

$$\{۱/۲۴۸, ۰/۶۶۱ \pm ۰/۶۵۵i\} \bigcap \{-۰/۱۶۵ \pm ۰/۸۸۹i, -۰/۵۵۹ \pm ۰/۳۷۴i, -۱/۳۵۴, -۰/۳۶۷\}$$

مجموعه دلخواه $S = \{-۲, -۳, -۴\}$ را در نظر بگیرید.ماتریس پس‌خورد حالت F را به‌گونه‌ای به‌دست می‌آوریم، که طیف ماتریس حلقه بسته $A + BF$ برابر $S \bigcap L_۲$ باشد.

حل.

ابتدا باید نشان دهیم زوج ماتریس (A, B) به‌ازای مقادیر ویژه مثبت $۱/۲۴۸۰, ۰/۶۶۱۵ \pm ۰/۶۵۵۰i$ کنترل‌پذیر هستند. یعنی باید نشان دهیم:

$$y_i^H B \neq ۰ \quad , \quad i = ۱, ۲, ۳$$

$y_۱, y_۲, y_۳$ به‌ترتیب بردارهای ویژه سمت چپ ماتریس A متناظر با مقادیر ویژه مثبت $۱٫۲۴۸۰, ۰٫۶۶۱۵ \pm ۰٫۶۵۵۰i$ هستند.

$$Y_۱ = \begin{bmatrix} -۰٫۳۳۱ & ۰٫۱۹۰ + ۰٫۰۷۹i & ۰٫۱۹۰ - ۰٫۰۷۹i \\ -۰٫۴۵۸ & ۰٫۲۵۴ - ۰٫۱۰۰i & ۰٫۲۵۴ + ۰٫۱۰۰i \\ -۰٫۴۹۷ & ۰٫۶۱۶ & ۰٫۶۱۶ \\ -۰٫۲۲۲ & -۰٫۱۰۰ + ۰٫۱۹۷i & -۰٫۱۰۰ - ۰٫۱۹۷i \\ -۰٫۴۵۷ & -۰٫۰۳۴ + ۰٫۰۶۰i & -۰٫۰۳۴ - ۰٫۰۶۰i \\ -۰٫۳۵۳ & ۰٫۳۲۷ + ۰٫۴۸۴i & ۰٫۳۲۷ - ۰٫۴۸۴i \\ -۰٫۰۶۱ & -۰٫۱۱۷ + ۰٫۰۲۵i & -۰٫۱۱۷ - ۰٫۰۲۵i \\ -۰٫۲۱۴ & ۰٫۰۰۰ - ۰٫۱۲۱i & ۰٫۰۰۴ + ۰٫۱۲۱i \\ -۰٫۰۲۰ & -۰٫۱۴۷ + ۰٫۲۳۶i & -۰٫۱۴۷ - ۰٫۲۳۶i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_۱ & y_۲ & y_۳ \end{bmatrix},$$

$$y_۱^H B = \begin{bmatrix} -۰٫۳۳۱۲ & -۰٫۲۸۰۲ \end{bmatrix} \neq ۰,$$
$$y_۲^H B = \begin{bmatrix} ۰٫۱۹۰ - ۰٫۰۷۹i & ۰٫۰۳۱ - ۰٫۱۹۹i \end{bmatrix} \neq ۰,$$
$$y_۳^H B = \begin{bmatrix} ۰٫۱۹۰ + ۰٫۰۷۹i & ۰٫۰۳۱ + ۰٫۱۹۹i \end{bmatrix} \neq ۰,$$

در نتیجه پایداری تضمین شده است، بنابراین الگوریتم روش را اجرا می‌کنیم:
گام اول:

$$\Lambda_۱ = \begin{bmatrix} ۱٫۲۴۸ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰٫۶۶۱ - ۰٫۶۵۵i & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰٫۶۶۱ + ۰٫۶۵۵i \end{bmatrix},$$
$$Y_۱^H B = \begin{bmatrix} -۰٫۳۳۱ & -۰٫۲۸۰ \\ ۰٫۱۹۰ - ۰٫۰۷۹i & ۰٫۰۳۱ - ۰٫۱۹۹i \\ ۰٫۱۹۰ + ۰٫۰۷۹i & ۰٫۰۳۱ + ۰٫۱۹۹i \end{bmatrix}$$

گام دوم:
پس از به‌دست آوردن فرم همدم برداری ماتریس‌های $\Lambda_۱$ و $Y_۱^H B$، ماتریس پس‌خورد حالت F_p که مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته $\Lambda_۱ + Y_۱^H B F_p$ را به صفر و ماتریس حلقه بسته K که طیف مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته $\Lambda_۱ + Y_۱^H B K$ را به $\{-۴, -۳, -۲\}$ می‌برد را به‌دست می‌آوریم.

$$F_p = \begin{bmatrix} ۳۹٫۶۹ + ۰٫۰۰۰i & ۲۴٫۰۴ + ۱٫۹۹۳i & ۲۴٫۰۴ - ۱٫۹۹۳i \\ -۹٫۰۸۵ - ۰٫۰۰۰i & -۶٫۸۷۹ - ۲٫۴۸۱i & -۶٫۸۷۹ + ۲٫۴۸۱i \end{bmatrix}$$
$$K = \begin{bmatrix} ۲٫۴۳۸ + ۰٫۰۰۰i & ۱٫۴۲۱ + ۱٫۰۵۷i & ۱٫۴۲۷ - ۱٫۰۵۷i \\ -۰٫۳۰۹ - ۰٫۰۰۰i & -۰٫۱۷۰ - ۰٫۲۳۷i & -۰٫۱۷۰ + ۰٫۲۳۷i \end{bmatrix}$$

گام سوم:
در انتها قرار می‌دهیم:

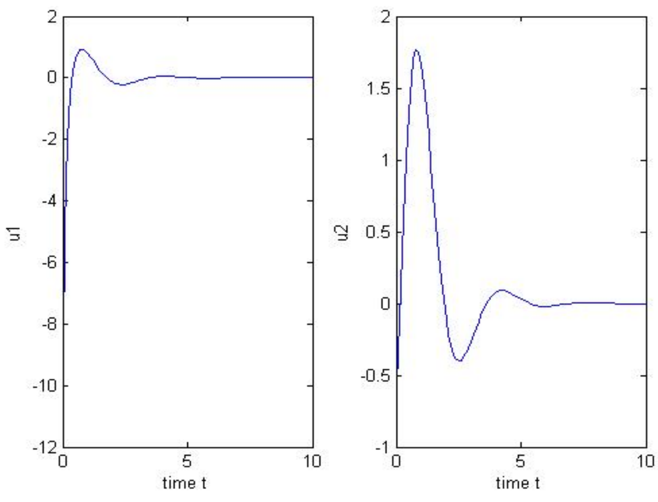
$$F = (KY_{۱}^{H})^{T} = \begin{bmatrix} -۹/۶۹۳ & -۶۰/۴۱ \\ ۵۴/۸۲ & -۴۱/۲۰۵ \\ -۱۰۸/۶۰۱۰ & ۱۰۹/۹۰۳۰ \\ -۴۳/۰۶۸۰ & -۷۷/۸۵۹۸ \\ ۲/۸۳۸۵ & ۰/۰۰۰۶ \\ ۱۰/۲۹۸۸ & -۵/۶۰۵۳ \\ ۰/۹۲۸۴ & ۱۲/۴۶۱۸ \\ -۲۳/۲۴۳۱ & ۴/۶۸۶۳ \\ ۱۲/۳۹۹۲ & -۵/۵۷۰۹ \end{bmatrix}$$

و مقادیر ویژه ماتریس $\Omega(A+BF)$ به‌صورت زیر است.

$$\{-۴/۰۰۰, -۰/۱۶۵ \pm ۰/۸۸۹i, -۰/۵۵۹ \pm ۰/۳۷۴i, -۰/۳۶۷, -۱/۳۵۴, -۲/۰۰۰, -۲/۹۹۹\}$$

$$\simeq \{-۴, -۰/۱۶۵ \pm ۰/۸۸۹i, -۰/۵۵۹ \pm ۰/۳۷۴i, -۰/۳۶۷, -۱/۳۵۴, -۲, -۳\}$$

در ادامه نمودار پایداری مثال فوق آورده شده است.



شکل ۱.۳: نمودار مربوط به متغییر ورودی

فصل ۴

کمینه سازی نورم ماتریس پس‌خورد حالت در تخصیص مقدار ویژه جزئی با پارامتر خطی

در این فصل ابتدا با استفاده از نظریه گراف و تعریف مربوط به گراف و ماتریس متناظر با آن، گراف متناظر با ماتریس $A-BF$ راشرح داده و سپس از نظریه گراف برای به‌دست آوردن ماتریس پس‌خورد حالت پارامتری خطی در مسأله تخصیص مقدار ویژه جزئی استفاده می‌کنیم. در انتها تلاش می‌کنیم تا نورم ماتریس پس‌خورد حالت را برای مسأله تخصیص مقدار ویژه به کم‌ترین مقدار برسانیم.این کاهش نورم را با یک مثال عددی در انتهای فصل به وضوح نشان داده‌ایم.

۱.۴ ماتریس و گراف

تعریف ۱.۱.۴. گراف از مجموعه غیر تهی به نام رئوس و مجموعه دیگری به نام یال تشکیل شده است، که هر یال با دو رأس مشخص می‌شود. یکی از این رئوس را ابتدای یال و دیگری را انتهای یال می‌نامند. گراف را با حرف q و رئوس را با حرف e_i نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲.۱.۴. تعداد یال‌های تشکیل دهنده یک مسیر در گراف را طول گراف می‌نامند و آن‌را با L_i نشان می‌دهیم.

رئوس در گرافی که در ادامه با آن سروکار داریم، پایه استاندارد $\mathbb{R}^n$ به انضمام صفر است. مسیرهایی از این گراف مورد توجه ما خواهند بود که انتها آن‌ها به صفر برسند. اگر مسیری از e_i به صفر وجود داشته باشد، آن‌گاه e_i با صفر مرتبط است.

برای هر گراف n رأسی g، ماتریس G وجود دارد به‌طوری‌که، اگر یالی از e_i به e_j وجود داشته باشد، $G_{ij}=۱$ و اگر از e_i به e_j یالی وجود نداشته باشد، $G_{ij}=۰$ خواهد شد. (که G_{ij} درایه سطر i و ستون j ماتریس $n\times n$، G است.) به‌طور مشابه می‌توان با داشتن یک ماتریس $n\times n$،

با درایه‌های صفر و یک، گرافی n، رأسی متناظر نمود. به‌صورتی که به ازای درایه $G_{ij} = ۱$، یالی از رأس e_i به e_j رسم نمود و برای $G_{ij} = ۰$، یعنی از رأس e_i به e_j یالی وجود ندارد.

۲.۴ گراف مربوط به ماتریس $A + BF_p$

زوج ماتریس (A, B) را در دستگاه خطی (۱.۳) در نظر بگیرید. با استفاده از روش تبدیلات تشابهی فصل قبل، ماتریس پس‌خورد F_p را از فرم همدم برداری این زوج به‌دست می‌آوریم. همان‌گونه که پیش از این نشان داده‌ایم، درایه‌های ماتریس حلقه بسته $A+BF_p$ صفر یا یک است. در نتیجه می‌توان گرافی برای آن متناظر نمود به‌طوری‌که رئوس آن را بردارهای پایه استاندارد $\mathbb{R}^n$ به انضمام بردار صفر تشکیل می‌دهند [۳۶]. به‌این ترتیب که ابتدا، m رأس ورودی $e_۱, e_۲, \cdots, e_m$ را در نظر می‌گیریم. سپس دو حالت زیر به‌وجود می‌آید:

۱. از رأس e_i به رأس e_j یالی در نظر گرفته می‌شود، اگر:
$(A + BF_p)e_i = e_i.$

۲. بین رأس e_i و صفر رأسی فرض می‌کنیم، اگر و تنها اگر:
$(A + BF_p)e_i = ۰.$

از آن‌جایی که ماتریس $A + BF_p$ پوچ توان است، از هر رأس غیر صفر گراف g متناظر آن، مسیری به رأس صفر وجود دارد. علاوه بر این، در گراف g هیچ حلقه و دوری وجود ندارد. در نتیجه طبق مطالب گذشته، L_i را ماکزیمم فاصله رأس e_i صفر در نظر می‌گیریم و می‌توان گفت:

۱. هر L_i عدد صحیحی است که:

$$۱ \leq L_i \leq n \qquad (۱.۴)$$

۲. اندیس پوچ توانی ماتریس $A + BF_p$ عبارت است از:
$v = \max\{L_۱, L_۲, \cdots, L_m\}.$

۳. در گراف g، به‌هیچ یک از رئوس $e_۱, e_۲, \cdots, e_m$ یالی منتهی نمی‌شود.
$\max\{L_۱, L_۲, \cdots, L_m\} = \{L_۱, L_۲, \cdots, L_m, L_{m+۱}, \cdots, L_۱\}.$

۳.۴ ماتریس پس‌خورد حالت پارامتر خطی برای مسأله تخصیص مقدار ویژه جزئی

برای تعیین جایگاه پارامتر خطی در ماتریس پس‌خورد حالت، ماتریس حلقه بسته

$\widetilde{\Gamma_\circ} = \widetilde{\Lambda} + \widetilde{(Y_1^H B)}\widetilde{F_p}$ را در فضای همدم برداری تشکیل می‌دهیم. همان‌گونه که در فصل قبل بیان شد، از آن‌جایی که درایه‌های این ماتریس صفر و یک است، گراف متناظر با این ماتریس را رسم می‌نماییم.

با توجه به این که درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس $\widetilde{\Gamma_\circ}$ همگی صفر هستند و این ماتریس، ماتریسی بالا مثلثی است، گراف متناظر با این ماتریس، شامل هیچ حلقه و دوری نیست و برگشت از روی یال امکان ندارد. از هر رأس غیر صفر، مسیری به رأس صفر وجود دارد و اندیس پوچ توانی $\widetilde{\Gamma_\circ}$ بزرگ‌ترین طول مسیر از یک رأس ورودی تا رأس صفر است.

اکنون ماتریس G_α ،$m \times p$ با درایه‌های صفر را در نظر بگیرید. سپس برای یافتن پارامترها، یال‌هایی از هر رأس به رأس‌های دیگر رسم می‌کنیم، به‌طوری‌که:

۱. ابتدا هر یال، یکی از m ورودی گراف باشد و انتهای آن یال ورودی یا گره‌های دیگر باشد.

۲. یال‌ها را به گونه‌ای رسم کنیم که در گراف ایجاد دور ننمایند.

۳. یال‌ها نباید روی هم قرار گیرند.

۴. اگر از رئوسی که اندیس آنها کوچک‌تر یا مساوی m است، یالی به رئوس دیگر وصل گردد، آنگاه این یال‌های اضافی بیانگر پارامترهای خطی می‌باشد.

هنگامی که از رأس e_i به رأس e_j یالی اضافه می‌کنیم، درایه (i,j) ماتریس G_α را پارامتر g_{ij} قرار می‌دهیم.

نکته ۱.۳.۴. اگر ناورداهای کرونکر منظم باشد، می‌توان از رابطه زیر استفاده کرد:

$$\begin{cases} \tilde{\Gamma}_{\circ e_i} = e_{i+m} \quad ; \quad i+m \le p \\ \tilde{\Gamma}_{\circ e_i} = \circ \quad ; \quad i+m > p \end{cases} \tag{۲.۴}$$

اکنون ماتریس پس‌خورد پارامتری خطی که مقادیر ویژه $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_p$ به ماتریس حلقه بسته $\Lambda_1 - Y_1^H BK$ اختصاص می‌دهد، به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned} K &= F_p + K_p + K_\alpha \\ &= -(Y_1^H B)_\circ^{-1} G_\circ + (Y_1^H B)_\circ^{-1} G_\mu + (Y_1^H B)_\circ^{-1} G_\alpha \\ &= (Y_1^H B)_\circ^{-1}(-G_\circ + G_\mu + G_\alpha), \end{aligned} \tag{۳.۴}$$

در انتها با استفاده از ماتریس K که در معادله (۳.۴) به‌دست آمد، ماتریس پس‌خورد حالت پارامتری خطی مسأله تخصیص مقدار ویژه جزئی را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$F = KY_1^H, \tag{۴.۴}$$

$$\Omega(A+BF) = \Omega(A+BKY_1^H), \tag{۵.۴}$$

در ادامه هدف یافتن ماتریس پس‌خورد F است به‌گونه‌ای که نورم آن مینیمم شود. با نگاهی به رابطه (۴.۴)، واضح است که ماتریس پس‌خورد حالت جزئی F، با ماتریس پس‌خورد حالت پارامتری خطی K رابطه مستقیم دارد و با توجه به رابطه (۳.۴) که داریم:

$$K = (Y_1^H B)_0^{-1}(-G_0 + G_\mu + G_\alpha). \tag{۶.۴}$$

برای رسیدن به هدف مینیمم کردن نورم ماتریس پس‌خورد حالت F، می‌توان از مینیمم کردن نورم ماتریس K استفاده نمود. از آن‌جایی که اندازه ماتریس K می‌تواند بسیار کوچک‌تر از ماتریس F باشد، این کار از نظر زمان و هزینه بسیار بهینه‌تر است.

در نتیجه هدف یافتن پارامترهای ماتریس پس‌خورد حالت K است، به‌گونه‌ای که نورم آن کمترین مقدار ممکن شود.

۴.۴ الگوریتمی برای مینیمم کردن کنترل پس‌خورد حالت در مسأله تخصیص مقدار ویژه جزئی

[۳۵]. در این قسمت هدف یافتن ماتریس پس‌خورد حالت $(Y_1^H B)_0^{-1}(-G_0 + G_\mu + G_\alpha)T^{-1}$، به‌گونه‌ای که نورم آن کمترین مقدار خود باشد. یعنی مینیمم کردن عبارت زیر:

$$\|K\| = trac[KK^T], \tag{۷.۴}$$

یک راه برای به‌دست آوردن چنین ماتریسی، استفاده از معادله زیر است:

$$\frac{\partial \|K\|^2}{\partial \alpha_i} = 0 \quad , \quad (i = 1, 2, \cdots, r). \tag{۸.۴}$$

که در آن، α_iها نشان‌دهنده پارامتر خطی ماتریس پس‌خورد حالت هستند که متعلق به ماتریس G_α است. اکنون مجموعه‌ای از r معادله خطی به‌دست می‌آید که دارای r مجهول است. از آن‌جایی که، با افزایش پارامترها، به‌دست آوردن مشتقات جزئی $\|K\|$ بر حسب هر پارامتر بسیار دشوار خواهد بود، در ادامه روشی برای مینیمم سازی ماتریس پس‌خورد حالت K بیان می‌کند که در آن مجموعه‌ای مطلوب از مقادیر که پیش از این ذکر شد، به ماتریس حلقه بسته اختصاص داده می‌شود. زیر ماتریس G_α که شامل مؤلفه های غیر صفر G_α، (یعنی پارامترهای g_{ij})، است را در نظر بگیرید. این زیر ماتریس را H می‌نامیم و عناصر آن را با h_{sr} نشان می‌دهیم، که در سطر sام و ستون rام قرار دارد. به‌وضوح، در حاصل‌ضرب $(Y_1^H B)_0^{-1} G_\alpha T^{-1}$ ستون s از ماتریس $(Y_1^H B)_0^{-1}$ و سطر r از ماتریس T^{-1}، پارامترهای ناصفر تولید می‌کنند که با عناصر متناظر K_p، که برابر $(Y_1^H B)_0^{-1}(-G_0 + G_\mu)T^{-1}$ است، جمع می‌شوند. ستون‌های $(Y_1^H B)_0^{-1}$ را که با سطرهای h_{sr}

سازگارند، در ماتریس V و سطرهای T^{-1} را که با ستون‌های h_{sr} سازگار هستند را در ماتریس W قرار می‌دهیم. بنابراین ماتریس پس‌خورد حالت پارامتری خطی مؤثر، عبارت است از:

$$K = K_p + VHW, \tag{۹.۴}$$

مؤلفه‌های ماتریس رابطه بالا عبارت است از:

$$k_{ij} = k_{pij} + v_{is} h_{sr} w_{rj}, \tag{۱۰.۴}$$

که نورم فریبنیوس [۱] K به‌صورت زیر است:

$$\|K\|^2 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (k_{pij} + v_{is} h_{rs} w_{rj})^2, \tag{۱۱.۴}$$

برای مینیمم کردن باید معادله (۸.۴) برای هر $s \leq m$ و $r \leq n$، برقرار باشد.

مشتق‌گیری از نورم K، نسبت به هریک از پارامترهای h_{sr}، به‌صورت زیر است:

$$2 \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} v_{si} (k_{pij} + v_{is} h_{sr} w_{rj}) wjr = 0, \tag{۱۲.۴}$$

یا

$$2 \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} v_{si} (k_{pij} w_{jr} + v_{si} v_{is} h_{sr} w_{rj}) wjr = 0. \tag{۱۳.۴}$$

در نمادگذاری ماتریس، $\sum_{i=1}^{m} v_{si} vis$ را با $V^T V$ نشان می‌دهیم که یک ماتریس وارون‌پذیر $s \times s$ است و آن را با P می‌نامیم. $\sum_{j=1}^{n} w_{rj} w_{jr}$ را با WW^T نمایش می‌دهیم که یک ماتریس وارون‌پذیر $r \times r$ است و آن را با Q نمایش می‌دهیم.(زیرا ستون‌های V و سطرهای W، به‌ترتیب بردارهای مستقل به‌دست آمده از ماتریس‌های $(Y_1^H B)_0^{-1}$ و T^{-1} هستند.) اکنون معادله (۱۳.۴) را بازنویسی می‌کنیم:

$$2 \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} V^t K_p W^t + V^t V H W W^t = 2 \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} V^t K_p W^t + PHQ = 0, \tag{۱۴.۴}$$

قرار می‌دهیم:

$$C = V^t K_p W^t, \tag{۱۵.۴}$$

با جایگذاری (۱۵.۴) در معادله (۱۴.۴) داریم:

$$C + PHQ = 0 \longrightarrow H = -P^{-1} C Q^{-1}. \tag{۱۶.۴}$$

[۱] Frobenius

۵.۴ مقایسه نورم ماتریس پس‌خورد حالت در مسأله تخصیص مقدار ویژه جزئی غیر پارامتری و پارامتری خطی

در این بخش با ارائه یک مثال که در ادامه بیان می‌کنیم، نشان می‌دهیم با پارامتری سازی ماتریس پس‌خورد حالت می‌توان نورم ماتریس پس‌خورد حالت را به مقدار قابل توجهی کاهش داد و لذا انرژی و یا هزینه ورودی $u(t) = Fx(t)$، به‌طور قابل ملاحظه‌ای کاهش می‌یابد.

۶.۴ مثال عددی

مثال ۱.۶.۴. دستگاه خطی پیوسته زیر را در نظر بگیرید.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

که در آن ماتریس‌های $A \in \mathbb{R}^{۷\times۷}$ و $B \in \mathbb{R}^{۷\times۲}$ به‌صورت زیر هستند.

$$A = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & ۳ & ۷ & ۰ & ۱۰ \\ ۷ & ۵ & ۰ & ۱ & ۷ & ۹ & ۲ \\ ۹ & ۳ & ۱۷ & ۳ & ۱۱ & ۲ & ۴ \\ ۸ & ۰ & ۱ & ۰ & ۳ & ۰ & ۱ \\ ۷ & ۱۳ & ۱ & ۳ & ۲ & ۱۶ & ۰ \\ ۱ & ۷ & ۰ & ۳ & ۹ & ۰ & ۴ \\ ۱۹ & ۳ & ۰ & ۲ & ۰ & ۱۱ & ۱ \end{bmatrix} , \quad B = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۹ & ۷ \\ ۲ & ۵ \\ ۳ & ۷ \\ ۰ & ۷ \\ ۳ & ۱ \\ ۸ & ۵ \end{bmatrix}$$

طیف مقادیر ویژه ماتریس حلقه باز برابر:

$$\begin{aligned} L &= L_۱ \bigcap L_۲ \\ &= \{۲۹٫۱۶, ۱۶٫۴۸, ۸٫۹۵\} \bigcap \{-۱۸٫۶۷, -۰٫۸۴۸, -۶٫۱۲۲, -۳٫۹۶۰\} \end{aligned}$$

مجموعه دلخواه $S = \{-۹, -۲, -۷\}$ را در نظر بگیرید. همانند مثال (۲.۶.۳) ، ماتریس پس‌خورد حالت $K_۱$ که مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته $\Lambda_۱ + Y_۱^H BK_۱$ را به طیف $\{-۹, -۲, -۷\}$ و ماتریس پس‌خورد حالت تخصیص جزئی $F_۱$، که مقادیر ویژه ماتریس $A + BF_۱$ را به

$$\{-۹, -۲, -۷, -۱۸٫۶۷, -۰٫۸۴۸, -۶٫۱۲۲, -۳٫۹۶۰\}$$

می‌برد، به‌صورت زیر است:

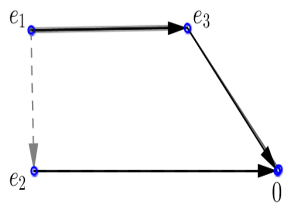
$$K_۱ = \begin{bmatrix} -۵٫۲۹ & -۶٫۰۲ & -۲۵٫۹ \\ -۲٫۳۷ & ۵٫۱۱ & ۱۰٫۸ \end{bmatrix}$$

$$F_۱ = K_۱ Y_۱^H = \begin{bmatrix} -۱۹٫۵۰ & ۸٫۶۱۲ & ۳٫۱۹۹ & -۴٫۵۰۵ & ۱٫۳۸۰ & ۰٫۷۸۸ & -۱۵٫۸۸ \\ ۶٫۶۱۳ & -۴٫۵۰۶ & -۳٫۱۸۳ & ۱٫۳۱۴ & -۲٫۱۰۱ & -۱٫۳۰۹ & ۵٫۸۶۰ \end{bmatrix}$$

و

$$\|K_۱\| = ۲۹٫۷۶ \quad , \quad \|F_۱\| = ۲۹٫۱۱$$

برای به‌دست آوردن ماتریس پس‌خورد حالت پارامتری خطی، در حالتی که شرط بهینه زمانی مهم باشد، گراف حالت انتقال سیستم و ماتریس گراف متناظر G_α به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:



$$G_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & g_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

برای محاسبه پارامتر ماتریس G_α، از روش بخش (۴.۴)، استفاده می‌کنیم.

ستون اول ماتریس $(Y_1^H B)_0^{-1}$ را در ماتریس V و سطر اول ماتریس T^{-1} را در ماتریس W قرار می‌دهیم و داریم:

$$P = V^T V = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \quad , \quad Q = WW^T = \begin{bmatrix} 1.690 \end{bmatrix}$$

و

$$C = V^t K_1 W^t = \begin{bmatrix} 27.0120 \end{bmatrix} \quad , \quad H = -P^{-1} C Q^{-1} = \begin{bmatrix} -25.2536 \end{bmatrix}$$

در نتیجه ماتریس G_α، به‌صورت زیر حاصل می‌شود.

$$G_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & -25.2536 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

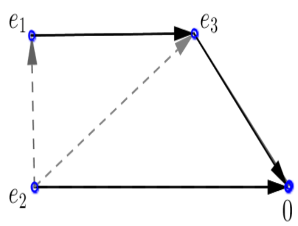
$$K_2 = (Y_1^H B)_{)}^{-1})(G_0 + G_\mu + G_\alpha) T^{-1} = \begin{bmatrix} -7.219 & 0.952 & -0.817 \\ -2.370 & 5.110 & 10.88 \end{bmatrix}$$

$$F_2 = K_2 Y_1^H = \begin{bmatrix} -3.755 & -2.357 & -0.975 & -1.333 & -2.867 & -2.889 & -2.309 \\ 6.612 & -4.507 & -3.183 & 1.324 & -2.102 & -1.310 & 5.860 \end{bmatrix}$$

و

$$\|K_2\| = 12.328 \quad , \quad \|F_2\| = 10.956$$

در حالتی که بهینه زمانی مورد توجه نباشد:



$$G_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ g_{21} & 0 & g_{23} \end{bmatrix}$$

با استفاده از روش (۱۳.۴) ستون دوم ماتریس $(Y_۱^H B)_۰^{-۱}$ را در ماتریس V و سطر اول و سوم ماتریس $T^{-۱}$ را در ماتریس W قرار می‌دهیم و داریم:

$$P = V^t V = \begin{bmatrix} ۲/۴۸۱۰ \end{bmatrix} \quad , \quad Q = WW^t = \begin{bmatrix} ۰/۱۸۶ & ۰/۰۱۸ \\ ۰/۰۱۸ & ۰/۰۰۲ \end{bmatrix}$$

و

$$C = V^t K_۱ W^t = \begin{bmatrix} ۱۷/۴۳۱۷ & ۱/۸۹۵۲ \end{bmatrix} \quad , \quad H = -P^{-۱} C Q^{-۱} = \begin{bmatrix} ۶/۲۵۷ & -۴۲/۳۵۵ \end{bmatrix}$$

در نتیجه ماتریس G_α در این حالت، به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

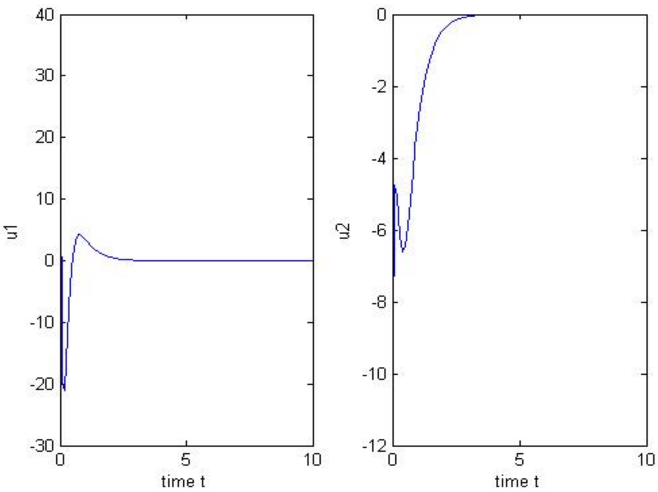
$$G_\alpha = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۶/۲۵۷ & ۰ & -۴۲۳۵ \end{bmatrix}$$

$$K_۳ = \begin{bmatrix} -۳/۴۲۳ & -۶/۱۶۰ & -۵/۱۳۲ \\ -۳/۹۱۱ & ۵/۲۱۸ & -۶/۱۸۸ \end{bmatrix}$$

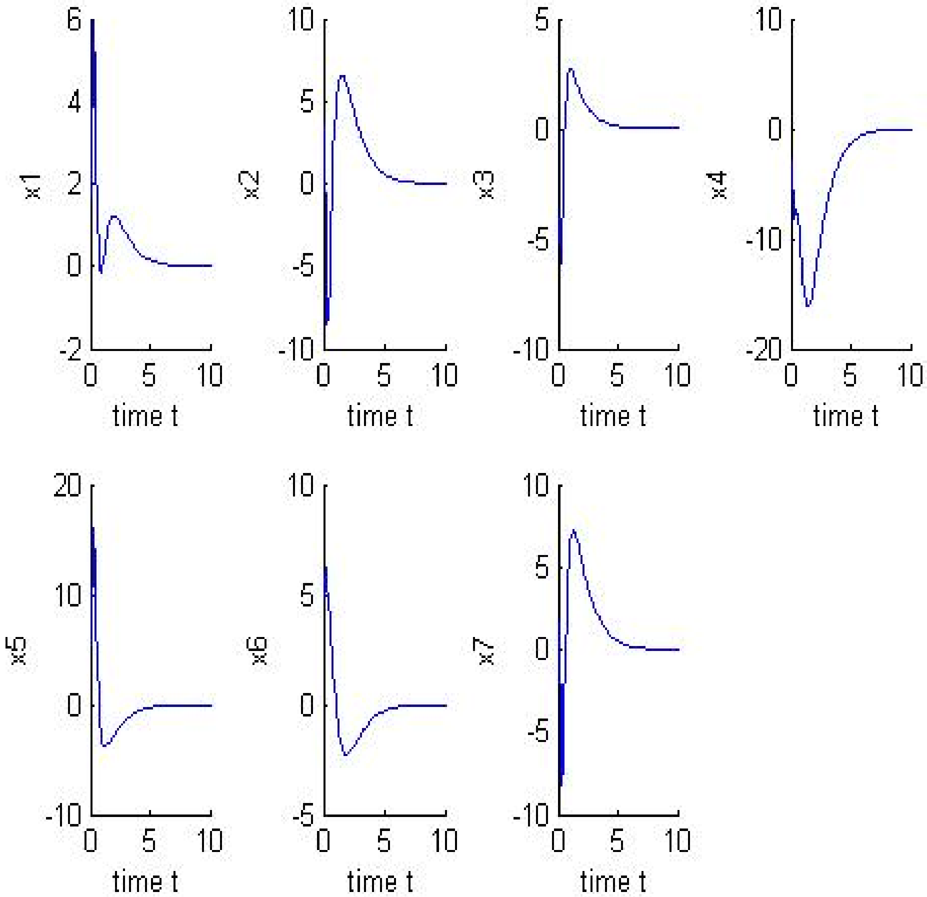
$$F_۳ = K_۳ Y_۱^H = \begin{bmatrix} -۶/۲۸۲ & -۱/۵۸۸ & ۳/۵۹۲ & -۱/۹۰۱ & -۱/۸۰۲ & -۳/۵۱۳ & -۴/۸۲۱ \\ -۴/۲۴۸ & ۳/۸۷۵ & -۳/۵۰۷ & ۰/۸۱۴ & ۰/۵۱۴ & ۲/۲۲۴ & -۳/۲۲۹ \end{bmatrix}$$

و

$$\|K_۳\| = ۹/۵۷۳ \quad , \quad \|F_۳\| = ۱۰/۱۸$$



شکل ۱.۴: نمودار مربوط به متغییر ورودی



شکل ۲.۴: نمودار مربوط به متغییرحالت

فصل ۵

تخصیص ساختار ویژه در سیستم‌های خطی توصیف‌گر مرتبه بالا

در این فصل، ابتدا به معرفی سیستم‌های خطی توصیف‌گر مرتبه بالا می‌پردازیم. و شرط کنترل‌پذیری روی سیستم‌های خطی توصیف‌گر مرتبه بالا را بررسی می‌کنیم، و با استفاده از حل معادله ماتریس سیلوستر ماتریس پس‌خورد حالت را به‌دست می‌آوریم.
دستگاه سیستم خطی مرتبه بالا را به‌صورت زیر در نظر بگیرید:

$$A_{(m)}X^{(m)} + A_{(m-1)}X^{(m-1)} + \ldots + A_1\dot{X} + A_0X = Bu, \tag{۱.۵}$$

که در آن $X \in \mathbb{R}^n$ و $u \in \mathbb{R}^r$ به‌ترتیب بردار حالت و بردار کنترل (ورودی) هستند. و همچنین $A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}, (i = 0, 1, \ldots, m)$ و $B \in \mathbb{R}^{n\times r}$ ماتریس‌های ضرایب هستند که در شرایط زیر صدق می کنند: $\mathrm{rank(B)} = r$ و $0 \neq n_0 \leq n$ $\mathrm{det(A_m)} = n_0,$.
دستگاه (۱.۵) را می‌توان به یک سیستم خطی مرتبه اول و مرتبه دوم به ازای $m = 1, 2$ کاهش داد.

تعریف ۲.۰.۵. $Z^T = [X^T\dot{X}^T \ldots (X^{(m-1)})^T]$ فضای حالت سیستم خطی توصیف‌گر مرتبه بالا (۱.۵) باشد، در واقع سیستم خطی توصیف‌گر مرتبه بالا می‌تواند فضای حالت مرتبه اول به‌صورت مدل توسیع‌یافته زیر باشد:

$$E_e\dot{z} = A_ez + B_eu, \tag{۲.۵}$$

که در آن

$$E_e = \mathrm{Blockdiag}(I_n, \cdots, I_n, A_m), \tag{۳.۵}$$

$$A_e = \begin{bmatrix} 0 & I_n & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & I_n \\ -A_0 & -A_1 & \ldots & -A_{m-1} \end{bmatrix}, \tag{۴.۵}$$

$$B_e = \begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 & B \end{bmatrix}. \tag{۵.۵}$$

بنابراین کنترل سیستم خطی توصیف‌گر مرتبه بالا به‌صورت مدل فضای حالت تعمیم یافته مرتبه اول در رابطه (۲.۵) بررسی می‌شود.

۱.۵ فرمول بندی مسائل

برای سیستم خطی مرتبه بالا (۱.۵) قانون کنترل به‌صورت زیر است:

$$u = F_0 X + F_1 \dot{X} + \ldots + F_{m-1} X^{(m-1)}, \quad F_i \in \mathbb{R}^{r\times n}, \tag{۶.۵}$$

با جایگذاری کردن قانون کنترل در سیستم خطی مرتبه بالا (۱.۵) سیستم حلقه بسته به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$A_m X^{(m)} + A^c_{m-1} X^{(m-1)} + \ldots + A^c_1 \dot{X} + A^c_0 x = 0. \tag{۷.۵}$$

$$A^c_i = A_i - BF_i, \quad i = 0, 1, \cdots, m-1.$$

سیستم (۷.۵) را می‌توان به‌صورت فضای مرتبه اول تبدیل کرد:

$$E_{ec}\dot{Z} = A_{ec} Z, \tag{۸.۵}$$

$$E_e = \mathrm{Blockdiag}(I_n, \cdots, I_n, A_m), \tag{۹.۵}$$

$$A_{ec} = \begin{bmatrix} 0 & I_n & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & I_n \\ A^c_0 & A^c_1 & \ldots & A^c_{m-1} \end{bmatrix}. \tag{۱۰.۵}$$

که در آن زوج ماتریس (E_{ec}, A_{ec}) یک ماتریس حلقه بسته است، که شکل جردن زوج ماتریس (E_{ec}, A_{ec}) یک ماتریس قطری به صورت زیر است:

$$\Lambda = \mathrm{diag}(s_1, \ldots, s_{ne}), \tag{۱۱.۵}$$

که در آن $s_i,\ i = 1, \ldots, ne$، مقادیر ویژه ماتریس (E_{ec}, A_{ec})، هستند.

قضیه ۱.۱.۵. [۲۸] *سیستم خطی مرتبه بالا (۱.۵) کنترل‌پذیر است اگر و فقط اگر متناسب با فضای حالت توسیع‌یافته مرتبه اول (۲.۵) کنترل‌پذیر باشد.*

لم ۲.۱.۵. [۲۴] *فرض کنید E_{ec} و A_{ec} در (۸.۵) و Λ در (۱۱.۵) داده شده باشد،*

۱. *ماتریس‌های $V_i \in \mathbb{C}^{n\times n_e}, i = 1, \ldots, m-1$ و $V = V_0 \times \mathbb{C}^{n\times n_e}$ وجود دارند که در رابطه زیر صدق می‌کند:*

$$A_{ec}\begin{bmatrix} V_0 \\ V_1 \\ \vdots \\ V_{m-1} \end{bmatrix} = E_{ec}\begin{bmatrix} V_0 \\ V_1 \\ \vdots \\ V_{m-1} \end{bmatrix}\Lambda, \tag{۱۲.۵}$$

اگر وفقط اگر داشته باشیم:

$$A_m V \Lambda^{(m)} + (A_{m-۱} - BF_{m-۱}) V \Lambda^{(m-۱)} + \ldots + (A_{\circ} - BF_{\circ}) V = \circ. \quad (۱۳.۵)$$

و

$$V_i = V_{i-۱}\Lambda, \quad i = ۱, \cdots, m. \quad (۱۴.۵)$$

۲. *ماتریس‌های* $V_\infty \in \mathbb{R}^{n\times(n-n_\circ)}$ *و* $V'_\infty \in \mathbb{R}^{n\times(n-n_\circ)}$ *وجود دارند که در رابطه زیر صدق می‌کند:*

$$E_{ec}\begin{bmatrix} V'_\infty \\ V_\infty \end{bmatrix} = \circ, \quad \mathrm{rank}(\begin{bmatrix} V'_\infty \\ V_\infty \end{bmatrix}) = n - n_\circ. \quad (۱۵.۵)$$

اگر و فقط اگر داشته باشیم: $V'_\infty = \circ$

$$A_m V_\infty = \circ, \quad \mathrm{rank}(V_\infty) = n - n_\circ. \quad (۱۶.۵)$$

برهان . اثبات نتیجه (۲) کاملا واضح است، حال فرض کنید:

$$A_{ec}\begin{bmatrix} V \\ V_۱ \\ \vdots \\ V_{m-۱} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \circ & I_n & \ldots & \circ \\ \vdots & \vdots & \ddots & I_n \\ A^c_\circ & A^c_۱ & \ldots & A^c_{m-۱} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V \\ V_۱ \\ \vdots \\ V_{m-۱} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_۱ \\ \vdots \\ V_{m-۱} \\ \sum_{i=\circ}^{m-۱} A^c_i V_i \end{bmatrix},$$

$$E_{ec}\begin{bmatrix} V \\ V_۱ \\ \vdots \\ V_{m-۱} \end{bmatrix}\Lambda = E_{ec}\begin{bmatrix} V\Lambda \\ V_۱\Lambda \\ \vdots \\ V_{m-۱}\Lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_۱\Lambda \\ \vdots \\ V_{m-۱}\Lambda \\ \sum_{i=\circ}^{m-۱} A^c_i V_i \Lambda \end{bmatrix},$$

واضح است معادله (۱۲.۵) با معادله (۱۴.۵) برابر است و داریم:

$$-\sum_{i=0}^{m-1} A_m(A_i - BF_i)V_i = A_m V_{m-1}\Lambda, \tag{۱۷.۵}$$

و می‌توان معادله (۱۷.۵) را به‌صورت زیر نوشت:

$$\sum_{i=0}^{m-1}(A_i - BF_i)V_i + A_m V_{m-1}\Lambda = 0, \tag{۱۸.۵}$$

و با استفاده از رابطه (۱۴.۵) رابطه زیر

$$V_i = V_i\Lambda^i, \;\; i = 1, 2, \cdots, m-1,$$

به‌دست می‌آید. و با جایگذاری در رابطه (۱۸.۵) معادله (۱۳.۵) به‌دست می‌آید.

□

ملاحظه ۳.۱.۵. *از لم بالا نتیجه می‌گیریم زوج ماتریس جردن (E_{ec}, A_{ec}) یک ماتریس قطری Λ است اگر و فقط اگر یک ماتریس مانند $V \in \mathbb{C}^{m\times n_e}$ وجود داشته باشد که در رابطه (۱۸.۵) صدق کند، و در این حالت بردارهای ویژه متناظر با زوج ماتریس (E_{ec}, A_{ec}) به‌صورت زیر است:*

$$V_{ec}^f \begin{bmatrix} V \\ V\Lambda \\ \vdots \\ V\Lambda^{m-1} \end{bmatrix}. \tag{۱۹.۵}$$

ملاحظه ۴.۱.۵. *از لم بالا نتیجه می‌گیریم بردارهای ویژه نامتناهی زوج ماتریس (E_{ec}, A_{ec}) به‌صورت زیر است:*

$$V_{ec}^\infty = \begin{bmatrix} 0 \\ V_\infty \end{bmatrix}, \tag{۲۰.۵}$$

که در آن V_∞ در رابطه زیر:

$$A_m V_\infty = 0, \quad \mathrm{rank}(V_\infty) = n - n_0$$

صدق می‌کند. بنابراین بردارهای ویژه زوج ماتریس (E_{ec}, A_{ec}) به‌صورت زیر است:

$$V_{ec} = \begin{bmatrix} V & 0 \\ V\Lambda & \vdots \\ \vdots & 0 \\ V\Lambda^{m-1} & V_\infty \end{bmatrix} \tag{۲۱.۵}$$

واضح است مسأله تخصیص ساختار ویژه در سیستم‌های خطی توصیف‌گر مرتبه بالا (۱.۵) متناسب با قانون پس‌خورد (۲۳.۵) است.

۱.۱.۵ مسأله تخصیص ساختار ویژه (EAS)

فرض کنید سیستم (۱.۵) با شرایط $\mathrm{rank}(B) = r$ و $\circ \neq n_\circ \leq n$ $\det(A_m) = n_\circ,$ و ماتریس قطری $\Lambda = \mathrm{diag}(s_1, \ldots, s_{mn})$، و $s_i, i = \circ, 1, \ldots, mn$، با مجموعه اعداد مزدوج مختلط (نه لزوما متمایز) داده شده است، شکل پارامتری برای ماتریس‌های $F_i \in \mathbb{R}^{r\times n}, i = \circ, \ldots, m-1$ و $V \in \mathbb{C}^{n\times mn}$ که در معادله (۱۸.۵) با شرایط زیر، $\mathrm{rank}(B) = r$ و $\det(A_m) = n_\circ$ و ماتریس قطری $\Lambda = \mathrm{diag}(s_1, \ldots, s_{ne})$، و $s_i, i = \circ, 1, \ldots, n_e$، با مجموعه اعداد مزدوج مختلط (نه لزوما متمایز) داده شده است، شکل پارامتری برای ماتریس‌های $F_i \in \mathbb{R}^{r\times n}, i = \circ, \ldots, m-1$ و $V \in \mathbb{C}^{n\times n_e}$ که در معادله (۱۳.۵) با شرط زیر:

$$V_{ec} = \begin{bmatrix} V & \circ \\ V\Lambda & \vdots \\ \vdots & \circ \\ V\Lambda^{m-1} & V_\infty \end{bmatrix} \neq \circ \tag{۲۲.۵}$$

برقرار باشد در نظر می‌گیریم، قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} W &= F_{m-1}V\Lambda + \ldots + F_1 V\Lambda + F_\circ V \\ &= \begin{bmatrix} F_\circ & F_1 & \ldots F_{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ V\Lambda \\ \vdots \\ V\Lambda^{m-1} \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{۲۳.۵}$$

معادله (۱۳.۵) به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$A_m V\Lambda^m + \ldots + A_1 V\Lambda + A_\circ V = BW. \tag{۲۴.۵}$$

واضح است که مسأله (۲۴.۵) معادله تعمیم‌یافته ماتریس سیلوستر مرتبه m است. بنابراین جواب معادله (ESA)، گام کلیدی برای حل معادله ماتریس سیلوستر مرتبه بالا است.

۲.۵ معادله ماتریس سیلوستر مرتبه بالا(HSA)

فرض کنید ماتریس‌های $A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}, i = \circ, 1, \cdots, m$ و $B \in \mathbb{R}^{n\times r}$ که در شرایط زیر $\mathrm{rank(B)} = r$ و $\circ \neq n_\circ \leq n$ $\det(\mathrm{A_m}) = n_\circ,$ صدق می کنند و همچنین ماتریس قطری

$$\Lambda = \mathrm{diag}(s_1, \ldots, s_q) \in \mathbb{C}^{q\times q}, \tag{۲۵.۵}$$

را در نظر بگیرید، برای ماتریس‌های $V \in \mathbb{C}^{n\times q}$ و $W \in \mathbb{C}^{r\times q}$ پارامترهایی پیدا می‌کنیم که در معادله سیلوستر مرتبه بالا (۲۴.۵) صدق کند.

ملاحظه ۱.۲.۵ *ستون‌های ماتریس‌های V, W, Λ در معادله سیلوستر مرتبه بالا (HSE)، به q تبدیل می‌شود، در این‌صورت مسأله (HSE) رایج‌تر است.*

۳.۵ حل مسأله تخصیص ساختار ویژه(HSE)

ماتریس‌های

$$V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \ldots & v_q \end{bmatrix}, \tag{۲۶.۵}$$

$$W = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \ldots & w_q \end{bmatrix}, \tag{۲۷.۵}$$

و ماتریس قطری (۲۵.۵) در نظر می‌گیریم، می‌توان معادله سیلوستر مرتبه بالا (۲۴.۵) را به‌صورت زیر تبدیل کرد:

$$(s_i^m A_m + \ldots + s_i A_1 + A_0)V_i = BW_i, i = 1, 2, \cdots, q. \tag{۲۸.۵}$$

حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

۱. اگر مقادیر ویژه $s_i,\ \ i = 1, 2, \cdots, q$، مشخص باشد، می توان معادله (۲۸.۵) را به‌صورت زیر نوشت:

$$\Pi_i \begin{bmatrix} V_i \\ W_i \end{bmatrix} = 0, \ \ i = 1, 2, \ldots, q, \tag{۲۹.۵}$$

که در آن Π_i به‌صورت زیر است:

$$\Pi_i = [s_i^m A_m + \ldots + s_i A_1 + A_0 \quad -B], \ \ i = 1, 2, \cdots, q. \tag{۳۰.۵}$$

در این حالت داریم:

$$\begin{bmatrix} V_i \\ W_i \end{bmatrix} = \ker \Pi_i, \ \ i = 1, 2, \ldots, q. \tag{۳۱.۵}$$

در زیر الگوریتمی برای مجموعه ماتریس‌های ثابت N_i و D_i ، $i = 1, 2, \cdots, q$ به‌کار رفته در حل معادله (۲۴.۵) ارائه شده است.

۱.۳.۵ الگوریتمی برای به‌دست آوردن ماتریس‌های N_i و D_i

۱. با به‌کار بردن کاربرد (SVD) [۱] در ماتریس‌های $\Pi_i, i = 1, 2, \ldots, q$، مجموعه ماتریس‌های یکانی $Q_i \in \mathbb{C}^{(n+r)\times(n+r)}$ و $P_i \in \mathbb{C}^{n\times n}$ را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$P_i \Pi_i Q_i = \begin{bmatrix} \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{ni}) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, i = 1, 2, \ldots, q, \tag{۳۲.۵}$$

که در آن $\sigma_k > 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n_i$، مقادیر تکین Π_i هستند و داریم:

$$n_i = \mathrm{rank}[s_i^m A_m + \ldots + s_i A_1 + A_0 B], \ \ i = 1, 2, \ldots, q. \tag{۳۳.۵}$$

[۱] Singular Value Decomposition

۲. ماتریس‌های $N_i \in \mathbb{C}^{n\times(n+r-n_i)}$ و $D_i \in \mathbb{C}^{r\times(n+r-n_i)}$، $i = ۱,۲,\cdots,q$، به وسیله تجزیه ماتریس Q_i به‌صورت زیر،

$$Q_i = \begin{bmatrix} * & N_i \\ * & D_i \end{bmatrix}, \quad i = ۱,۲,\ldots,q. \tag{۳۴.۵}$$

به‌دست می‌آوریم. با استفاده از نتایج (۳۳.۵) و (۳۴.۵) ماتریس‌های $N_i \in \mathbb{C}^{n\times(n+r-n_i)}$ و $D_i \in \mathbb{C}^{r\times(n+r-n_i)},\ i = ۱,۲,\cdots,q$، به‌دست آمده از الگوریتم بالا، در رابطه زیر صدق می‌کنند:

$$\Pi_i \begin{bmatrix} N_i \\ D_i \end{bmatrix} = ۰, \quad \mathrm{rank} \begin{bmatrix} N_i \\ D_i \end{bmatrix} = n + r - n_i, \quad i = ۱,۲,\ldots,q. \tag{۳۵.۵}$$

و این نشان می‌دهد ستون‌های ماتریس $\begin{bmatrix} N_i \\ D_i \end{bmatrix}$ مجموعه پایه برای $\ker\Pi_i$، است.

قضیه ۱.۳.۵ [۲۷] *فرض کنید $n_i, i = ۱,۲,\ldots,q$ تعریف شده در (۳۳.۵) و ماتریس‌های $N_i \in \mathbb{C}^{n\times(n+r-n_i)}$ و $D_i \in \mathbb{C}^{r\times(n+r-n_i)}$، $i = ۱,۲,\cdots,q$، متناسب با الگوریتم بالا به‌دست آمده باشد. برای تمام ماتریس‌های V و W که در معادله ماتریس‌های سیلوستر مرتبه بالا (۲۴.۵) صدق می‌کند پارامترهایی به‌صورت ستون‌های زیر به‌دست آورد.*

$$\begin{bmatrix} V_i \\ W_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i \\ D_i \end{bmatrix} f_i, \quad i = ۱,۲,\ldots,q, \tag{۳۶.۵}$$

که در آن $f_i \in \mathbb{C}^{n+r-n_i}$، $i = ۱,۲,\cdots,q$، مجموعه‌ای از بردارهای پارامتری دلخواه هستند.

لم ۲.۳.۵ [۱۷] *سیستم خطی مرتبه بالا (۱.۵) کنترل‌پذیر است، اگر و فقط اگر*

$$\mathrm{rank}[s^m A_m + \ldots + s_۱ A_۱ + A_۰ \quad B] = n, \quad \forall s \in \mathbb{C}. \tag{۳۷.۵}$$

برهان . نشان می‌دهیم شرط (۳۷.۵) با رابطه زیر برابر است:

$$\mathrm{rank}[A_e - sI_{mn} \ \ B_e] = mn, \quad \forall s \in \mathbb{C},$$

که در آن ماتریس‌های E_e, A_e و B_e در رابطه (۲.۵) داده شده است، داریم:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{rank}[A_e - sE_e \ \ B_e] \\
&= \mathrm{rank} \begin{bmatrix} -sI_n & I_n & & & ۰ \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & -sI_n & I_n & ۰ \\ -A_۰ & -A_۱ & \ldots & -A_{m-۱} - sI_n & -B \end{bmatrix}, \\
&= \mathrm{rank} \begin{bmatrix} ۰ & E_s & ۰ \\ -\sum_{i=۰}^{m} A_i s^i & A_{m-۱}s & B \end{bmatrix}, \\
&= n(m-۱) + \mathrm{rank}[\sum_{i=۰}^{m} A_i (s)^i \ \ B],
\end{aligned}$$

که در آن

$$A_{m-1}(s) = \begin{bmatrix} -A_1 & \cdots & -A_{m-1} & -sA_m \end{bmatrix},$$

$$E_s = \begin{bmatrix} -sI_n & I_n & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -sI_n & I_n \end{bmatrix}.$$

نتیجه بالا حاصل می‌شود.

□

براساس لم بالا، نتیجه زیر از قضیه (۱.۳.۵) به‌دست می‌آید.

نتیجه ۳.۳.۵. *فرض کنید سیستم خطی مرتبه بالا (۱.۵) کنترل‌پذیر باشد و ماتریس قطری در رابطه (۲۵.۵) داده شده باشد،در این‌صورت درجه آزادی در حل معادله ماتریس سیلوستر مرتبه بالا (۲۴.۵) برابر qr است.*

۲. اگر مقادیر ویژه $s_i, \quad i = 1, 2, \cdots, q$، نامعین باشد، با اجرا کردن عامل‌های سمت راست به‌صورت زیر:

$$G(s) = (s^m A_m + \ldots + sA_1 + A_0)^{-1} B,$$

می‌توان یک زوج ماتریس‌های چند جمله‌ای $N(s) \in \mathbb{R}^{n\times r}[s]$ و $D(s) \in \mathbb{R}^{r\times r}$ که در معادله

$$(s^m A_m + \ldots + sA_1 + A_0)^{-1} B = N(s) D^{-1}(s). \qquad (۳۸.۵)$$

صدق می‌کند به‌دست آورد.

قضیه ۴.۳.۵. [۲۵] *فرض کنید، سیستم (۱.۵) کنترل‌پذیر باشد و ماتریس‌های $N(s) \in \mathbb{R}^{n\times r}[s]$ و $D(s) \in \mathbb{R}^{r\times r}$ که در عامل‌های سمت راست (۳۸.۵) صدق می‌کنند در نظر بگیرید ماتریس‌های V و W که در (۲۶.۵) و (۲۷.۵) با رابطه زیر:*

$$\begin{bmatrix} V_i \\ W_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N(s_i) \\ D(s_i) \end{bmatrix} f_i \quad i = 1, 2, \ldots, q \qquad (۳۹.۵)$$

در معادله ماتریس سیلوستر مرتبه بالا به ازای تمام $q, \cdots, i = 1, 2$، $f_i \in \mathbb{C}$، صدق می‌کند.

اگر رابطه زیر:

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} N(s_i) \\ D(s_i) \end{bmatrix} = r, \quad i = 1, 2, \ldots, q/9 \qquad (۴۰.۵)$$

برقرار باشد، رابطه (۳۹.۵) جواب مسأله معادله ماتریس سیلوستر مرتبه بالا (HES) می‌باشد.

برهان . معادله (۳۸.۵) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$(s_i^m A_m + \ldots + s_i A_۱ + A_۰)N(s_i) - BD(s_i) = ۰, \quad i = ۱, ۲, \cdots, q. \tag{۴۱.۵}$$

با استفاده از رابطه (۳۹.۵) و (۴۱.۵) معادله زیر:

$$\begin{aligned}&(s_i^m A_m + \ldots + s_i A_۱ + A_۰)v_i - Bw_i \\ &= [(s_i^m A_m + \ldots + s_i A_۱ + A_۰)N(s_i) - BD(s_i)]f_i \\ &= ۰, \ \ i = ۱, ۲, \cdots, q.\end{aligned} \tag{۴۲.۵}$$

به‌دست می‌آید. که حالتی از معادله (۲۸.۵) است. با استفاده از نتیجه (۳.۳.۵)، تحت کنترل‌پذیری سیستم خطی مرتبه بالا (۱.۵)، و ماتریس قطری Λ که در رابطه (۲۵.۵) داده شده است، درجه آزادی در جواب معادله ماتریس سیلوستر مرتبه بالا (۲۴.۵)، برابر با qr است، در صورتی‌که مجموعه جواب‌های (۳۹.۵) پارامترهای آزاد qr است. بدیهی است اگر شرط (۴۰.۵) برقرار باشد، جواب‌های پارامتری (۳۹.۵) توسعه می یابد.

□

۴.۵ جواب مسأله تخصیص ساختار ویژه

معادله زیر را در نظر بگیرید:

$$W_\infty = F_{m-۱}V_\infty, \tag{۴۳.۵}$$

داریم:

$$W_\infty = \begin{bmatrix} F_۰ & F_۱ & \cdots & F_{m-۱} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰ \\ \vdots \\ V_\infty \end{bmatrix}, \tag{۴۴.۵}$$

با ترکیب کردن معادله (۴۴.۵) با (۲۳.۵) داریم:

$$\begin{bmatrix} W & W_\infty \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_۰ & F_۱ & \cdots & F_{m-۱} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V & ۰ \\ V\Lambda & \vdots \\ \vdots & ۰ \\ V\Lambda^{m-۱} & V_\infty \end{bmatrix},$$

اگر شرط (۲۲.۵) برقرار باشد ماتریس پس‌خورد به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\begin{bmatrix} F_0 & F_1 & \cdots & F_{m-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W & W_\infty \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V & 0 \\ V\Lambda & \vdots \\ \vdots & 0 \\ V\Lambda^{m-1} & V_\infty \end{bmatrix}^{-1}.$$

بر اساس مباحث بالا نتایج زیر به‌دست می‌آید.

قضیه ۱.۴.۵ [۴] *فرض کنید $n_i, i = 1, \ldots, mn$، در الگوریتم (۳۳.۵) و همچنین ماتریس‌های $N_i \in \mathbb{C}^{n\times(n+r-n_i)}$، $D_i \in \mathbb{C}^{n\times(n+r-n_i)}$، $i = 1, 2 \ldots, mn$ در الگوریتم (۳۴.۵) داده شده باشد،*

- *آنگاه مسأله تخصیص ساختار ویژه، دارای جواب است، اگر و فقط اگر پارامترهای $f_i \in \mathbb{C}^{n+r-n_i},\ \ i = 1, \cdots, mn$، وجود داشته باشد که در رابطه زیر صدق کند:*

$$f_i = \bar{f}_i \quad if \quad s_i = \bar{s}_i \ , \quad \det V_{ca} \neq 0,$$

که در آن

$$V_{ca} = \begin{bmatrix} N_1 f_1 & N_2 f_2 & \cdots & N_{ne} f_{ne} \\ s_1 N_1 f_1 & s_2 N_2 f_2 & \cdots & s_{ne} N_{ne} f_{ne} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s_1^{m-1} N_1 f_1 & s_2^{m-1} N_2 f_2 & \cdots & s_{ne}^{m-1} N_{ne} f_{ne} \end{bmatrix} \qquad (۴۵.۵)$$

- *اگر شرایط بالا برقرار باشد، جواب مسأله(ESA)، به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:*

$$V = \begin{bmatrix} N_1 f_1 & N_2 f_2 & \cdots & N_{ne} f_{ne}, \end{bmatrix}$$

و

$$\begin{bmatrix} F_0 & F_1 & \cdots & F_{m-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 f_1 & \cdots & D_{ne} f_{ne} & W_\infty \end{bmatrix} V_{ca}^{-1}$$

که در آن $f_i \in \mathbb{C}^{n+r-n_i}, i = 1, 2, \cdots, n_e$، مجموعه‌ای از بردارهای پارامتری دلخواه هستند، که در رابطه بالا صدق می‌کند. و $W_\infty \in \mathbb{R}^{r\times(n-n_0)}$، ماتریس‌های پارامتری دلخواه هستند.

۵.۵ تخصیص مقادیر ویژه جزئی با استفاده از پس‌خورد حالت مشتق و گزاره‌ای

با استفاده از روش تخصیص مقادیر ویژه جزئی بر روی سیستم‌های خطی توصیف‌گر مرتبه بالا، می‌توان یک سیستم توصیف‌گر مرتبه بالا را به یک سیستم استاندارد به‌صورت زیر:

$$\dot{V}(t) = A_n v(t) + B_n w(t)$$

تبدیل نمود و از آن‌جایی که بعد ماتریس‌های A_e و B_e بزرگ می‌باشد لذا روش تخصیص مقادیر ویژه جزئی در کاهش محاسبات مؤثر خواهد بود. سیستم توسیع یافته زیر را در نظر بگیرید:

$$E_e\dot{x}(t) = A_e x(t) + B_e u(t), \tag{۴۶.۵}$$

که در آن $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$ و $x(t) \in \mathbb{R}^n$ بردار حالت و $u(t) \in \mathbb{R}^m$ بردار ورودی می‌باشد، فرض کنید $۱ \leq m \leq n$ و همچنین $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ و $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ ماتریس‌های ثابت زمانی باشند. حال قانون کنترل پس‌خورد حالت مشتق و گزاره‌ای را به فرم زیر در نظر بگیرید:

$$u(t) = K_d\dot{x}(t) + K_p x(t), \tag{۴۷.۵}$$

که در آن K_p ماتریس پس‌خورد حالتی است که مقادیر ویژه غیر صفر و پایدار را به سیستم حلقه بسته زیر:

$$\dot{q}(t) = A_e q(t) + B_e u(t), \tag{۴۸.۵}$$

$$u(t) = K_p x(t). \tag{۴۹.۵}$$

اختصاص می‌دهد. هدف به‌دست آوردن حالت مشتق K_d با استفاده از روش پس‌خورد حالت است که مقادیر ویژه سیستم کنترل‌پذیر (۴۶.۵) و (۴۷.۵) به‌طور دلخواه از مجموعه $\{\lambda_۱, \lambda_۲, \cdots, \lambda_n\}$ انتخاب شده باشد که در آن $i = ۰, ۱, \cdots, n$. برای $\lambda_i \neq ۰ \quad \lambda_i \in \mathbb{C}$ با استفاده از نتایج اثبات شده، فرضیات زیر را داریم:

$$\operatorname{rank}[Ee \mid B_e] = n \quad , \quad \operatorname{rank}[B_e] = m,$$

نکته ۱.۵.۵. واضح است اگر شرط $\operatorname{rank}[Ee \mid B_e] = n$ برقرار باشد آنگاه K_d وجود دارد که:

$$\operatorname{rank}[E - BK_d] = n, \tag{۵۰.۵}$$

برای K_d که در رابطه (۵۰.۵) وجود دارد، از رابطه (۴۷.۵) نتیجه می‌گیریم که سیستم توسیع یافته (۴۶.۵) را می‌توان به‌صورت سیستم خطی استاندارد زیر:

$$E_e\dot{x}(t) = A_e x(t) + B_e(K_d\dot{X}(t) + K_p x(t)) \tag{۵۱.۵}$$

$$\dot{x}(t) = (E_e - B_e K_d)^{-۱}(A_e + B_e K_p)x(t). \tag{۵۲.۵}$$

تبدیل کرد، با استفاده از رابطه (۵۲.۵) اگر K_p به‌گونه‌ای باشد که مقادیر ویژه صفر را به سیستم حلقه بسته (۴۸.۵) اختصاص دهد آنگاه سیستم کنترل‌پذیر (۴۶.۵) و (۴۷.۵) ناپایدار می‌شوند، زیرا حداقل یک مقدار آن برابر صفر می‌باشد.

قضیه ۲.۵.۵. [۹] *فرض می‌کنیم ماتریس‌های A_n و B_n به‌صورت زیر باشند:*

$$A_n = (A_e + B_e K_p)^{-۱}E_e \quad , \quad B_n = -(A_e + B_e K_p)^{-۱}B_e \tag{۵۳.۵}$$

و فرض می‌کنیم که زوج (A_n, B_n) کنترل‌پذیر باشند، و K_d ماتریس پس‌خورد حالتی باشد که مجموعه $\{\lambda_۱^{-۱}, \lambda_۲^{-۱}, \cdots, \lambda_n^{-۱}\}$ مقادیر ویژه سیستم حلقه بسته زیر:

$$\dot{v}(t) = A_n v(t) + B_n w(t) \tag{۵۴.۵}$$

$$w(t) = K_d v(t) \qquad (۵۵.۵)$$

باشند به‌طوریکه $\lambda_i \in \mathbb{C}$ و $i = ۱, ۲, \cdots, n$ برای $\lambda_i \neq ۰$ به‌طور دلخواه داده شده‌اند. آنگاه مجموعه $\{\lambda_۱, \lambda_۲, \cdots, \lambda_n\}$ مقادیر ویژه سیستم کنترل‌پذیر (۴۶.۵) با پس خورد حالت مشتق و گزاره‌ای (۴۷.۵) هستند.

برهان .فرض کنید (A_n, B_n) کنترل‌پذیر باشند آنگاه پس‌خورد حالت K_d وجود دارد به‌طوری که سیستم (۵۴.۵) با پس‌خورد حالت (۵۵.۵) کنترل‌پذیر باقی بماند. و فرض می‌کنیم رابطه

$$\dot{v}(t) = (A_n + B_n K_d) v(t) \qquad (۵۶.۵)$$

دارای مقادیر ویژه $\{\lambda_۱^{-۱}, \lambda_۲^{-۱}, \cdots, \lambda_n^{-۱}\}$، باشند با استفاده از $A_n = (A_e + B_e K_p)^{-۱} E_e$ و $B_n = -(A_e + B_e K_p)^{-۱} B_e$ و $i = ۱, ۲, \cdots, n$ برای $\lambda_i \neq ۰$ داریم:

$$(A_n + B_n K_d)^{-۱} = ((A_e + B_e K_p)^{-۱} E_e - (A_e + B_e K_p)^{-۱} B_e K_d)^{-۱} \qquad (۵۷.۵)$$

$$= (E - BK_d)^{-۱}(A + BK_p) \qquad (۵۸.۵)$$

از (۵۶.۵) نتیجه می‌شود $\{\lambda_۱, \lambda_۲, \cdots, \lambda_n\}$، مقادیر ویژه $(E - BK_d)^{-۱}(A + BK_p)$ هستند بنابراین رابطه (۴۸.۵) برقرار است و این مقادیر، مقادیری از سیستم (۴۶.۵) و پس‌خورد مشتق (۴۷.۵) می‌باشد.

□

مثال ۳.۵.۵. سیستم خطی مرتبه بالا زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad (۵۹.۵)$$

از آن‌جایی که بعد ماتریس‌های A و B بزرگ است لذا با استفاده از روش تخصیص مقادیر ویژه جزئی می‌توان سیستم فوق را به یک سیستم توسیع یافته خطی به‌صورت زیر تبدیل کرد:

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

که در آن ماتریس‌های $A \in \mathbb{R}^{۹\times۹}$ و $E \in \mathbb{R}^{۹\times۹}$ و $B \in \mathbb{R}^{۹\times۲}$ به‌صورت زیر هستند.

$$A = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & -۱ & -۲ & -۳ & ۰ & -۱ & -۱ \\ -۱ & -۱ & -۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & -۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & -۱ & -۱ & -۱ & ۰ & -۱ & -۱ & -۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} -۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۲ & -۲ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۴ & -۴ & ۲ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

طیف مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته (۴۷.۵) و (۵۶.۵) به‌صورت زیر:

$\{\lambda_۱ = -۱, \lambda_۲ = -۱, \cdots, \lambda_۹ = -۱\}$ هستند و با استفاده از نرم افزار متلب و با استفاده از این مقادیر ویژه، K_p به‌صورت زیر است:

$$K_p = \begin{bmatrix} -۸٫۰ & -۱٫۰ & ۴۸٫۰ & -۴۶٫۰ & -۷۶٫۰ & ۵۷٫۰ & -۳۷٫۰ & -۴۶٫۰ & -۱۹٫۰ \\ ۱٫۰ & -۱٫۰ & -۲۱٫۰ & ۱۶٫۵ & ۳۰٫۰ & -۲۵٫۰ & ۱۴٫۰ & ۱۸٫۵ & ۶٫۵۰ \end{bmatrix}$$

با استفاده از مفروضات ماتریس‌های A و B و E و رابطه (۵.۵۳) داریم:

$$A_n = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۱٫۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱٫۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱٫۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱٫۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱٫۰ & ۰ \\ ۰٫۰ & -۰٫۰ & ۰٫۰ & -۰٫۰ & -۰٫۰ & ۰٫۰ & -۰٫۰ & -۰٫۰ & ۱٫۰ \\ ۳۵٫۰ & -۱۸٫۳ & ۱۶٫۸ & -۷٫۸ & -۱۲٫۵ & -۱۲٫۳ & -۷٫۳ & -۱۰٫۱ & ۰٫۱ \\ -۲۰٫۵ & ۱۰٫۸ & -۹٫۸ & ۴٫۸ & ۷٫۵ & -۵٫۸ & ۳٫۸ & ۴٫۶ & ۱٫۹ \\ -۱۸٫۵ & ۹٫۵ & -۹٫۰ & ۳٫۰ & ۶٫۰ & -۷٫۵ & ۲٫۵ & ۴٫۵ & -۲٫۰ \end{bmatrix}$$

$$B_n = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \\ ۰٫۰ & ۰٫۰ \\ ۱٫۳ & ۲٫۹ \\ -۰٫۸ & -۱٫۹ \\ -۰٫۵ & -۱٫۰ \end{bmatrix}$$

طیف مقادیر ویژه ماتریس حلقه باز :

$$L = L_۱ \bigcap L_۲$$

به‌صورت زیر است:

$$\{۳٫۱۸, ۰٫۰۱\} \bigcap \{-۲٫۱۲ \pm ۲٫۹۰i, -۱٫۱۶ \pm ۰٫۹۹i, -۰٫۵۵ \pm ۰٫۳۱i, -۰٫۲۱\}$$

مجموعه دلخواه $S = \{-۱, -۲\}$ را در نظر می‌گیریم ومانند مثال فصل‌های ۳ و ۴ با استفاده از نرم افزار متلب ماتریس پس‌خورد حالت به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$K_d = \begin{bmatrix} ۵۸٫۱ & ۳۲٫۸ & -۲۰۳ & ۲۳۶ & ۳۶۸ & -۲۲۱ & ۱۷۸ & ۲۱۴ & ۱۰۰ \\ -۲۱٫۸ & -۲۲٫۷ & ۱۱۳ & -۱۲۶ & -۲۰۳ & ۱۲۲ & -۹۷٫۰ & -۱۱۸ & -۵۴٫۵ \end{bmatrix}$$

و مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته $\Omega(A_n - B_nF)$ به‌صورت زیر است.

$$\{-۲٫۱۲۱ \pm ۲٫۹۰۰i, -۱٫۱۵۳ \pm ۰٫۹۸۳i, -۱٫۵۱۱ \pm ۰٫۳۲۳i, -۰٫۵۵۰ \pm ۰٫۳۱۰i, -۰٫۲۱۹۷\}$$

فصل ۶

نتیجه‌گیری

در این پایان‌نامه، به کنترل‌پذیری سیستم‌های خطی مرتبه بالا پرداخته‌ایم. هدف یافتن ماتریس پس‌خورد حالت است به‌گونه‌ای که سیستم پایدار شود. همچنین به دنبال کنترل‌پذیری سیستم‌های خطی مرتبه بالا مانند سیستم‌های توسعه یافته پرداخته‌ایم. و سیستم‌های خطی مرتبه بالا و سیستم‌های خطی توصیف‌گر مرتبه بالا مورد بررسی قرار گرفته است، سپس شرایط کنترل‌پذیری آن‌ها را بررسی کرده‌ایم، و با استفاده از تبدیلات تشابهی روی سیستم‌های ذکر شده به محاسبه ماتریس پس‌خورد حالت می‌پردازیم. از آن‌جایی که مینیمم سازی نورم ماتریس پس‌خورد حالت در بهینه سازی سیستم کنترل خطی، دارای اهمیت فراوانی است، لذا یک روش جدید با استفاده از مسأله تخصیص مقادیر ویژه جزئی روی سیستم‌های خطی مرتبه بالا و سیستم‌های خطی توصیف‌گر مرتبه بالا به‌کار برده‌ایم و ماتریس پس‌خورد حالت که دارای کمترین نورم است به‌دست آورده‌ایم.

همان‌طور که در فصل ۲ به آن اشاره شد روش‌های پارامتری برای تخصیص ساختار ویژه در سیستم‌های خطی مرتبه بالا و مسأله تخصیص ساختار ویژه(ESA) را معرفی کرده، و شرط کنترل پذیری روی سیستم‌های خطی مرتبه بالا را برسی کردیم، و با استفاده از الگوریتم به حل معادله ماتریس سیلوستر پرداخته‌ایم، و با استفاده از حل مسأله تخصیص ساختار ویژه ماتریس پس‌خورد حالت را به‌دست آورده‌ایم.

در فصل ۳، روشی را پیشنهاد داده‌ایم که می‌توان با استفاده از آن،مسأله تخصیص مقادیر ویژه جزئی را حل نمود، بدین ترتیب ابتدا، مقادیر ویژه ماتریس حلقه باز را در دستگاه کنترل خطی پیوسته در نظر گرفته و به دو مجموعه که یکی شامل مقادیر ویژه ناپایدار مثبت و دیگری، بقیه مقادیر ویژه که همگی منفی بودند را داراست، تفکیک کردیم. سپس با استفاده از ماتریس مربعی قطری که عناصر روی قطر اصلی آن مقادیر ویژه ناپایدار ماتریس حلقه باز است و ماتریسی که ستون‌های آن متشکل از بردار ویژه سمت چپ متناظر با مقادیر ویژه ناپایدار ماتریس حلقه باز است، مسأله را به یک مسأله تخصیص مقدار ویژه جزئی با ابعاد بسیار کمتر از مسأله تبدیل نموده و در

نهایت با بهره‌گیری از تبدیلات تشابهی به حل مسأله برای ماتریس‌های جدید پرداخته‌ایم.

در فصل۴، با توجه به این نکته که نورم ماتریس پس‌خورد حالت در کاهش هزینه دستگاه کنترل‌خطی بسیار مؤثر است، با استفاده از روش پیشنهادی و مفهوم گراف انتقال حالت، ماتریس پس‌خورد حالت پارامتری را به‌دست آوردیم که مقادیر ویژه مورد نظر را به دستگاه اختصاص می‌دهد.سرانجام، با توجه به الگوریتم ارائه شده برای کمینه کردن نورم ماتریس پس‌خورد حالت، توانستیم با کاهش نورم ماتریس پس‌خورد حالت مسأله تخصیص مقدار ویژه جدید، نورم ماتریس پس‌خورد حالت مسأله تخصیص مقدار ویژه جزئی را به حداقل برسانیم. در مثال‌های عددی به وضوح نشان داده‌ایم اگر تعداد پارامترها در ماتریس پس‌خورد حالت پارامتری بیش‌تر باشد، نورم ماتریس کمتر می‌شود.

در فصل۵، سیستم‌های خطی توصیف‌گر مرتبه بالا را مورد بررسی قرار داده ایم. و شرط کنترل پذیری روی سیستم‌های خطی توصیف‌گر مرتبه بالا را برسی کرده‌ایم، و با استفاده از حل معادله ماتریس سیلوستر ماتریس پس‌خورد حالت را به‌دست می‌آوریم. و با استفاده از روش جدید توانستیم سیستم توسع یافته را کنترل نماییم به‌گونه‌ای که مقادیر ویژه خاصی را به سیستم حلقه بسته اختصاص دهد.

همان‌طور که بیان شد، کنترل‌پذیری سیستم های خطی مرتبه بالا، یکی از پر کاربردترین و مهم‌ترین مسائل اساسی در نظریه کنترل و بهینه سازی است. پس می‌توان از آن برای پایدارسازی دستگاه‌های مختلف استفاده کرد. و در ادامه این پایان‌نامه می‌توان با استفاده از مسائل تخصیص مقادیر ویژه ماتریس پس‌خورد حالت را در دستگاه‌های خطی دو بعدی، دستگاه‌های متناوب [۱] و... بهره جست.

[۱] Periodic Systems

پیوست آ

کد متلب

```
% checking k !
        if k>m
                l=l+1;
                k=j-m*l;
        end

% checking p1
        if p1(k)==0
                p(k)=p(k)+1;
        end

        % program for assigning eigenvalues,eigen.m
        % ***************************************
      % D=[-1 0 0 0 0 ;0 -2  1 0 0 ;0 -1 -2 0 0; 0 0 0 -3 1 ;0 0 0 -1 -3]
        D=[];
       for j=1:n
                    landa(j)=input (['Enter landa(',int2str(j),')=']);
                      end
         %landa=[ 0   0   0  ]


        for i=1:n
               D(i,i)=  landa(i);
           end
       % D
```

```
        %if c==0
               Acap=A1;
               Bcap=B1;
               newF=Fp ;
        %end
        ac=Acap+Bcap*F1;
        ac1=ac+D;
        bc1=Bcap*bo;

        Qc=[bc1 ac1];
%A=[0.95 0.49 0.46;0.23 0.89 0.02;0.61 0.76 0.82]
        % The vector companion form
        for  i=n:-1:m+1
                 for  k=1:r
                          if Qc(i,k)==1
                                   for j=k+1:r
                                         t=Qc(i,j);
                                         Qc(:,j)=Qc(:,j)-t*Qc(:,k);
                                     Qc(k-m,:)=Qc(k-m,:)+t*Qc(j-m,:);
                                  end
                                  break
                            end
                    end
        end
        G2=Qc(1:m,m+1:r);
        glanda=Qc(:,m+1:r);
        Fc=bo*G2*T1;
     disp('    The feedback matrix which gives the desired eigenvalues')
     disp('    *******************************************************')
        Kp=newF+Fc
%        disp('        with the closed-loop matrix ')
 %       disp('        ************************* ')
        gamac=A+B*Kp;
        disp('       checking the eigen values ')
```

```
        disp('        ************************* ')
        v=eig(gamac)'
        [u1,v1]=eig(gamac);
        c2=cond(u1)
        disp('       Frobenius norm of feedback matrix ')
        disp('       ********************************* ')
        Normkp=norm(Kp,'fro')
%       disp('              frobenious norm of closed-loop matrix ')
 %      disp('              ************************************* ')
  %     Normgama=norm(gamac,'fro')


%       End of program for eigen

 % Algorithm to obtain the kronecker invariants
        % ********************************************
        [n,m]=size(B);p=[];
        P1=[];p1(m)=0;
        l=1; j=m+1;
               for i=1:m,
                       p(i)=1;p1(i)=0;
               end
               for i=m+1:n,
                       k=j-m*l;
                       check_k
                       if Q(i,j)==1,
                               check_p1
                               else
                                       p1(k)=1;
                                       for j=i+1:n+m
                                               k=j-m*l;
                                               check_k
                                               if Q(i,j)==1,
                                                       check_p1
                                                       break
```

```
                                        else
                                                p1(k)=1;
                                        end
                                end
                        end
                        j=j+1;
                end
        disp('          These are the kronecker invariants ')
        disp('          ********************************** ')
  p

%               o1.m
%       Swap i-th row with k-th row
        if i~=k
                Q([i,k],:)=Q([k,i],:);
                T1([i,k],:)=T1([k,i],:);
                Q(:,[i+m,k+m])=Q(:,[k+m,i+m]);
        end

%                       o2.m
%       Divide the pivot row

        t=Q(i,j);
%       if t~=0
                Q(i,:)=Q(i,:)/t;
                Q(:,i+m)=Q(:,i+m)*t;
                T1(i,:)=T1(i,:)/t;
%       end

%                               o3.m
%       Subtract multiples of the pivot row

        if i~=n
                for k=i+1:n
                        t=Q(k,i);
                        if t~=0
```

```
                                Q(k,:)=Q(k,:)-t*Q(i,:);
                                Q(:,i+m)=Q(:,i+m)+t*Q(:,k+m);
                                T1(k,:)=T1(k,:)-t*T1(i,:);
                        end
                 end
        end

% Given an n by m matrix B , an n by n matrix A
% This program obtains :
% (1)- The Standard form
% (2)- The primary vector companion form
% (3)- The feedback matrix F
% (4)- The transformation matrix T
% (5)- The Kronecker invariants
% ***************************************************
%
t0=cputime;
       disp('         This is the given plant matrix A')       %line 1
       disp('         *******************************')       %line 2
                 A                                             %line 3
       disp('         This is the given input matrix B')       %line 4
       disp('         *******************************')       %line 5
                 B                                             %line 6
        [n,m]=size(B);                                         %line 7
        r=n+m;
        Q=[B,A];
       T1=eye(n);                                             %line 10
        % The Echelon form of Q
        % ---------------------
        i=1;j=1; tol=1e-6;
        while ( i<=n ) & ( j<=r )
               [q,k]=max(abs(Q(i:n,j))) ; k=k+i-1;
               if  (q<=tol)
                       Q(i:n,j)=zeros(n-i+1,1);
                       j=j+1;
```

```
        else
               % perform the similarity operations
               % swap i-th row with k-th row:

                 o1
               % divide the pivot row

                  o2
               % subtract multiples of the pivot row

                   o3
        i=i+1 ;
        j=j+1;
       end
end
% **********************************************
% Now compute the Standard echelon form        !
% ----------------------------------------------
s=1;
while s < n
        i=s+1 ;
        for j=i:r
                if Q(i,j)~=0
                        for k=1:s
                                if Q(k,j)~=0
                                     t=Q(k,j);
                                     Q(k,:)=Q(k,:)-t*Q(i,:);
                                    T1(k,:)=T1(k,:)-t*T1(i,:);
                                 Q(:,i+m)=Q(:,i+m)+t*Q(:,k+m);
                               end
                        end
                break
               end
        end
```

```
          s=s+1;
       end
     % ***************************************************************
%      choice=input(' do you want the kronecker invariants displayed,y/n %','s')
  %      if choice=='y'
            kronk3
   %     end
     % ***************************************************************
       % The vector companion form
       for i=n:-1:m+1
               for  k=i:r
                       if Q(i,k)==1
                              for  j=k+1:r
                                      t=Q(i,j);
                                      Q(:,j)=Q(:,j)-t*Q(:,k);
                                    Q(k-m,:)=Q(k-m,:)+t*Q(j-m,:);
                                 T1(k-m,:)=T1(k-m,:)+t*T1(j-m,:);
                                   end
                                   break
                             end
                       end
         end
      % **************************************************************
  % choice=input('do you want the prim. vec comp form displayed,y/n%','s')
   %     if  choice=='y'
    %    disp('    The standard Vector Companion form ')
     %   disp('    ********************************** ')
                  Q
      %  end
        % ...................................................
        disp('          This is the transformation matrix,T1')
        disp('          **********************************')

                                T1
```

```
 %       disp(' press any key to continue')
 % ****************************************************
% pause
 % The Feed-back matrix , F
 B1=Q(:,[1:m]);A1=Q(:,[m+1:r])
 B0=Q(1:m,1:m);bo=inv(B0)
 G=Q(1:m,m+1:r);F1=-bo*G;G0=G;
 Fp=F1*T1;
% ************************************************************
 disp('        This is the primdry feedback law ')
 disp('        ******************************** ')

 Fp
% ************************************************************
 %disp('        The closed loop matrix A+B*F ')
 %disp('        *************************** ')
 gama=A+B*Fp
% ************************************************************
 %choice=input('   do you want to check the resultfeed,y/n ','s')
 %if choice=='y'
  %     g=gama^p(1);
   %    for i=1:n
    %           for j=1:n
     %                  if abs(g(i,j))<tol
      %                         g(i,j)=0;
       %                  end
        %           end
         %  end
 %end
 %fprintf('       This is g=(A+B*F)^%g',p(1))
 %disp('        ************************')
 %g
% ************************************************************
 % generating parametric feed-back laws
```

```
%       q=fix(n/m);
 %      if p(1)==q
 %             disp('        The feed-back law is unique ! ')
  %            disp('        **************************** ')
%          disp('      The kronecker invariants are all equal ')
    %disp('         ************************************* ')
       %     else
        %           allfeeds
         %   end
% **************************************************************
t1=cputime-t0
```

مراجع

[1] Duan. G. R, (1993), ”Solution to matrix equation AV+BW=VF and their application to eigenstructure assignment in linear systems”, IEEE Trans. On Automatic Control, Vol. 38, no. 2, pp. 276-280.

[2] Duan. G. R, (1992), ”Solution to matrix equation AV+BW =VF and eigenstructure assignment for descriptor systems”, Automatica, Vol. 28, no. 3, pp. 639-643.

[3] Datta. B. N, (2002), ”Numerical methods for linear contorol systems design and analysis”, Academic Press, New York.

[4] Duan. B. N, (1998), ”Eigenstructure assignment and response analysis in descriptor linear systems with state feedback control”, Vol. 69. no. 5, 5, pp. 663-694.

[5] Datta. B. N, (2002), ”Numerical Methods for linear control systems design and analysis”, Elsevier Academic Press.

[6] Chen. C. T, (1984), (1984), ”Linear system theory and design”, CBC college publishing, NewYork.

[7] Duan. G. R, (1999), ”Eigenstructure assignment in descriptor linear systems via output feedback”, International Journal of Control, Vol. 72, no. 4, pp. 345-364.

[8] Fateh. M. M, Ahsani Tehrani. H, Karbassi. S. M, (18 October 2011), ”Repetitive contorol of electrically driven robot manipulators”, IJSySc., pp. 25-36.

[9] Ahsani. H, Mirasadi. S, (2011), ”Descriptor system controller using derivative state feedback and propositional”.

[10] Datta. B. N, Rincon. F, (1993), ”Feedback stabilization of a second-order system: A nonmodal approach”, Linear Algebra Applications Vol. 188, pp. 138-161.

[11] Quarteroni. A, Sacco. R, Saleri. F, (2000), ”Numerical mathematics”, Springer-Verlag New York, Inc.

[12] Ramdan. M. A, EL-Sayed. E. A, (2006), ”Partial eigenvalue assignment problem of linear control systems using orthogonality relations”.

[13] Bhaya. A, Desoer. C, (1985), ”On the design of large flexible space structure (LFSS)”, IEEE Trans. On Automatic Control, Vol. 30, no. 11, pp. 1118-1120.

[14] Datta. B. N, Saad. Y, (1991), ”Amoldi methods for large Sylvester-like observer matrix equation and partial pole placement”, Linear Algebra Applications, pp. 225-244.

[15] Ramadan. M. A, (1995), ”On the projection methods for partial eigenvalue assignment in large systems”, Linear Algebra Applications Vol. 188, pp. 138-161.

[16] Juang. J, Maghami. P. G, (1992), ”Robust eigensystem assignment for state estimators using second-order models”, Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 15, no. 4, pp. 920-927.

[17] Inman. D. J, Kress. A, (1995), ”Eigenstructure assignment using inverse eigenvalue method”, Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 18, pp. 625-627.

[18] Kim. Y, Kim. H. S, (1999), ”Eigenstructure assignment algorithm for mechanical second-order systems”, Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 22, pp. 729-731.

[19] Balas. M. J, (1982), ”Trends inlarge space structurecontrol theory: Fondest hopes, wildest dreams”, IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 27, no. 3, pp. 522-535.

[20] Datta. B. N, Elhay. S, Ram. Y, Sarkissian. D, (2000), ”Partial eigenstructure assignment for the quadratic matrix pencil”, Journal of Sound and Vibration, VOL. 230, pp on Automatic Control, Vol. 27, pp. 101-110.

[21] Bhaya. B, Desoer. C, (1985), ”On the design of large flexible space structues (LFSS)”, IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 30, no. 11, pp. 1118-1120.

[22] Duan. G. R, Liu. G. P, (2002), ”Complete parametric approach for Eigenstructure assignment in a class of second-order linear system”, Automatica, Vol. 38, pp. 725-729.

[23] Duan. G. R, (2003), ”Regularization of linear descriptor system via output plus partial state drivative feedback”, Asian Journal of Control, Vol. 5, pp. 334-340.

[24] Duan. G. R, (2003), ”Two parametric approaches for eigenstructure asssignment in second-order linear system”, Journal of Control Theory and Application, Vol. 1, no. 10, pp. 1789-1795.

[25] Duan. G. R, (2004), ”Parametric eigenstructure assignment in second-order descriptor linear systems”, IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 49, no. 10, pp.1789-1795.

[26] Rincon. F, (1992), ”Feedback stabilisation of second-order models”, PH.D. dissertation, Northern Illinois University, De Kalb, Illinois, USA.

[27] Duan. G. R, (1996), ”on the solution to the Sylvester matrix equation AV+BW=EVF”, IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 41, no. 4, pp. 612-614.

[28] Arnold. W. F, Laub. A, (1984), ”Controllability and observability criteria for multivariate linear second-order models”, IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 25, pp. 163-165.

[29] Datta. B. N, Sarkission. D. R, (2004), ”Partial eigenvalue assignment in linear systems: Existence, uniqueness and numerical solution”, IEEE.

[30] Beelen. T. G. J, Veltkamp. G. W, (1987), ”Numerical computation of a coprime factorization of a transfer-function matrix”, System and Control Letters, Vol. 9, no. 4, pp. 281-288.

[31] Lim. K. B, Juang. J. N, (1989), ”Robust eigensystem assignment for fflexible structures”, Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 12, no. 3, pp. 381-387.

[32] Balas. M. J, (1982), ”Trends inlarge space structurecontrol theory: Fondest hopes, wildest dreams”, IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 27, no. 3, pp. 522-535.

[33] Balas. M. J, (1982), ”Trends inlarge space structurecontrol theory: Fondest hopes, wildest dreams”, IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 27, no. 3, pp. 522-535.

[34] Almuthairi. N. F, Bingulac. S, (1994), ”On coprime factorization and minimal-realization of transfer function matrices using the pseud”, IEEE Trans. on Automatic Control, VOL. 27, no. 3, pp. 522-535.

[35] Karbassi. S. M, (2001), ”An algorithm for minimizing the norm of state feedback controllers in eigenvalue assignment”, Pergamon computers and mathematic with applications41, pp. 1317-1326.

[36] Karbassi. S. M, Bell. D. j, (1993), ”Parametric time-optimal control of linear discrete-time time systems by state feedback-part1: Regular Kroneckerinvarints”, Int. J. Control57, pp. 817-830.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

آرایه	Array
اسپارس	Spars
اسکالر	Scaler
افقی	Horizontal
بردار	Vector
بردار ویژه چپ	Left eigenvector
بردار ویژه راست	Right rigenvector
بردار حالت	State Vector
بردار خروجی	Output vector
پارامترسازی	Parametrisation
پارامتر خطی	Linear parameter
پایه	Bases
پایدار مجانبی	Asymptotically stable
پایداری	Stablity
خروجی	Feedback
پیوسته زمانی	Continous-time
توصیف‌گر	Descriptor
تبدیلات تشابهی	Similarity transation
تخصیص	Assignment
ترانهاده	Transpose
ترکیب خطی	Linear composition
تقریب	Acsses
تک- ورودی	Single-input
چند جمله‌ای مشخصه	Characteristic equation
حل‌پذیر	Solving

حلقه .... Loop
حلقه باز .... Open-loop
حلقه بسته .... Close-loop
دترمینان .... Determinant
دو بعدی .... Tow-dimensional
رتبه .... Rank
زیرفضا .... Sub space
زیر ماتریس .... Sub-matrix
طیف .... Spectrom
فرم همدم برداری .... Vector companin form
فرم استاندارد اشلون .... Standard echelon form
فضای برداری .... Vector space
فضای پوچ .... Null space
قانون کنترل .... Control low
کنترل‌پذیر .... Controlable
کنترل‌گر .... Controller
گسسته زمانی .... Destric-time
عملیات سطری مقدماتی .... Elementary row operations
عمودی .... Vertical
ماتریس .... Matrix
ماتریس افزوده .... Augmented matrix
ماتریس قطری .... Diagonal matrix
ماتریس مثلثی .... Trianglar matrix
ماتریس مربعی .... Squar matrix
ماتریس متقارن .... Symmetric matrix
ماتریس همانی .... Identity matrix
ماتریس متشابه .... Similarity matrix
ماتریس هسنبرگی .... Hessenberg matrix
ماتریس یکانی .... Unitary matrix
ماکزیمم .... Maximum
مزدوج مختلط .... Conjugated complex
مستقل خطی .... Linear independed

متغییر کنترل .... Control variable

مشاهده‌پذیر .... Observation

مقدار ویژه .... Eigenvalue

معکوس .... Inverse

مؤلفه .... Component

میدان .... Fild

مرتبه بالا .... High-order

نامنفرد .... Nonsingular

ناوردای کرونکر .... Kronecker invariant

نرم .... Norm

نگاشت .... Mapping

وابسته خطی .... linear depended

وجود .... Existence

هم‌ارز .... Eqvalent

یکتایی .... Uniqueness

یال .... Edge

یکامتعامد .... Orthonormal

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Acsses	تقریب
Array	آرایه
Assigment	تخصیص
Asymptotically stable	پایدار مجانبی
Augmented Matrix	ماتریس افزوده
Bases	پایه
Characteristic equation	چند جمله‌ای مشخصه
Closed-Loop	حلقه بسته
Component	مؤلفه
Control low	قانون کنترل
Controlable	کنترل‌پذیر
Controller	کنترل‌گر
Conjugated complex	مزدوج مختلط
Control variable	متغییر کنترل
Control variable	پیوسته زمانی
Decompositionable	تجزیه پذیر
Determinant	دترمینان
Descrit-time	گسسته زمانی
Diagonal matrix	ماتریس قطری
Edge	یال
Elementary row operations	عملیات سطری مقدماتی
Eigenvalue	مقدار ویژه
Eqvalent	هم‌ارز
Existence	وجود
Fild	میدان

Stablity	پایداری
Standard echelon form	فرم استاندارد اشلون
State vector	بردار حالت
State transition graph	گراف انتقال حالت
Sub matrix	زیر ماتریس
Symmetric matrix	ماتریس متقارن
Transpose	ترانهاده
Trianglar matrix	ماتریس مثلثی
Tow-dimensional	دو بعدی
Uniqueness	یکتایی
Unitary matrix	ماتریس یکانی
Unitary matrix	بردار
Vector companion form	فرم همدم‌برداری
Vertex	رأس
Vertical	عمودی

Aabstract

In this thesis, to consider high-ordercontrol of linear systems. To find state feedback matrix so that the system is stable. The extension of the control systems are also sought. The first to introduce systems of linear high-order and high-order descriptor linear systems described, then the examine controllabity conditions, and using similarity transitions to calculate the state feedback matrix. Since making norm of state feedback matrix minimom is very important in optimization of linear control systems, therefore a new method using eigenvalue assignment problem in high-order linear systems and high-order descriptor linear systems, we obtain state feedback matrix which has the minimom norm.

keywords: high-order linear systems ; controllability ; high-order descriptor linear systems ; eigenvalue assignment.

University of Shahrood

Faculty Of Mathematical Sciences

Control Of High- Order Linear System And It is Application

Hamideh Ebrahimi

Supervisor

Dr. Hojjat Ahsani Tehrani

Advisor

Dr. mehdi Ghovatmand Jozi

Sebtember 2015