



دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی کاربردی

پایان نامه کارشناسی ارشد

پایداری سیستم‌های پیوسته زمانی کسری مثبت با تأخیر

مرضیه سپهر

استاد راهنما

دکتر حجت احسنی طهرانی

استاد مشاور

دکتر مهدی قوتمند

شهریور ۹۴

پروردگارا:

نه می توانم موبایشان که در راه عزت من سفید شد، سیاه کنم و نه مرهمی
دارم برای دست های پینه بسته شان که شمره تلاش برای افتخار من است!
پس توفیقم ده که هر لحظه سگر گزارشان باشم و ثانیه های عمرم را در عصای
دست بودشان بگذرانم.....

تقدیم به دو ستاره آسمان زندگی ام

پدر و مادرم

سپاس گزارمی...

نخستین سپاس و ستایش از آن خداوندی است که بنده کوچکش را در دریای بیکران اندیشه، قطره‌ای ساخت تا وسعت آن را از دریچه اندیشه‌های ناب آموزگاران بزرگ به تماشا نشیند. لذا اکنون که در سایه‌سار بنده نوازی‌هایش پایان نامه حاضر به انجام رسیده است، بر خود لازم می‌دانم تا مراتب سپاس را از بزرگوارانی به‌جا آورم که اگر دست یاریگرشان نبود، هرگز این پایان نامه به انجام نمی‌رسید.

ابتدا از استاد گرانقدر و عزیزم آقای دکتر حجت احسنی طهرانی که در واقع بسان جویباری کوچک سنگ به سنگ راه را با من لمس کردند و در این راه مرا تنها نگذاشتند، صمیمانه تشکر می‌کنم.

از استادان بزرگوارم جناب آقای دکتر مس‌فروش و جناب آقای دکتر ناظمی که داوری این پایان نامه را عهده‌دار شدند، قدر دانی می‌نمایم.

با آرزوی توفیق روز افزون دوستان عزیزم خانم سکینه میر اسدی و خانم نرگس طهماسبی که با همکاری و همراهی بی‌شائبه‌شان در تهیه و تنظیم منابع و مطالب مرا یاری فرمودند.

سپاس آخر را به مهربان‌ترین همراهان زندگیم، پدر و مادر، برادر و خواهرانم تقدیم می‌کنم که حضورشان در فضای زندگیم مصداق بی‌ریای سخاوت بوده است.

مرضیه پسر
شهریور ۹۴

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه شاهرود “ یا “ Shahrood University “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

مرضیه سپهر
شهریور ۹۴

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در این پایان نامه پایداری سیستم‌های خطی پیوسته زمانی کسری مثبت با تأخیر توسط پس خورد حالت را معرفی می‌کنیم. در این سیستم‌ها ماتریس پس خورد حالت طوری انتخاب می‌شود که صفرهای چندجمله‌ای حلقه بسته در زاویه مشخص شده در سمت چپ صفحه مختلط واقع شوند. مفهوم جدیدی از پایدار عملی سیستم‌های خطی گسسته زمانی کسری مثبت ارائه می‌دهیم. نشان می‌دهیم که سیستم کسری مثبت ناپایدار عملی اند اگر سیستم کسری مثبت استاندارد متناظر آن ناپایدار مجانبی باشد. شرایط لازم و کافی برای محاسبه پایداری عملی سیستم‌های کسری مثبت و حل مسائل با استفاده از تبدیلات تشابهی بیان می‌کنیم. در پایان ملاحظات را با مثال عددی نشان می‌دهیم.

کلمات کلیدی: سیستم‌های کسری، مثبت، پس خورد حالت، پایداری مجانبی، پایداری عملی، تخصیص، تبدیلات تشابهی

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

۱. سپهر. م و احسنی طهرانی. ح، (۱۳۹۴)، ”پایداری عملی سیستم‌های گسسته زمانی کسری مثبت با استفاده از پس‌خورد حالت”، چهل و ششمین کنفرانس ریاضی ایران، دانشگاه یزد.
۲. سپهر. م و احسنی طهرانی. ح، (۱۳۹۴)، کنترل سیستم‌های خطی پیوسته زمانی کسری مثبت با تأخیر زمانی”، چهل و ششمین کنفرانس ریاضی ایران، ص ۵۸۴-۵۸۷، دانشگاه یزد.

فهرست مطالب

۱	لیست تصاویر
۳	۱ تعاریف و مقدمات
۳	۱.۱ مقدمه
۳	۱.۱.۱ تاریخچه
۴	۲.۱ تعاریف و پیش نیازهای ریاضی
۴	۱.۲.۱ بردار
۵	۲.۲.۱ ماتریس
۷	۳.۲.۱ فضای برداری
۹	۴.۲.۱ بردار ویژه و مقدار ویژه
۱۱	۳.۱ تعاریف و پیش نیازهای کنترل
۱۲	۱.۳.۱ مدل سازی سیستم های فضای حالت
۱۳	۲.۳.۱ کنترل پذیری
۱۵	۳.۳.۱ ناوردهای کرونکر
۱۶	۴.۳.۱ پایداری
۱۸	۵.۳.۱ پایداری با معادله لیاپانوف
۲۰	۴.۱ جواب عمومی سیستم خطی
۲۰	۱.۴.۱ روش های یافتن ماتریس انتقال
۲۱	۵.۱ توابع خاص در حساب کسری
۲۳	۱.۵.۱ مشتق و انتگرال از مرتبه کسری
۲۵	۶.۱ تبدیلات لاپلاس
۲۶	۱.۶.۱ عملگر لاپلاس
۲۶	۲.۶.۱ تبدیل لاپلاس مشتق و انتگرال مرتبه کسری
۲۷	۷.۱ تأخیرهای زمانی
۲۹	۲ پایداری سیستم های خطی پیوسته زمانی مثبت کسری با تأخیر
۲۹	۱.۲ سیستم های خطی پیوسته زمانی مثبت کسری

۳۳	پایداری سیستم‌های کسری مثبت	۲.۲
۳۶	پایداری سیستم‌های پیوسته زمانی مثبت با تأخیر	۳.۲
۴۰	پایداری سیستم‌های خطی کسری با تأخیر به وسیله پس‌خورد حالت	۴.۲
۴۵	پایداری و پایدارسازی سیستم‌های خطی کسری مثبت با استفاده از پس‌خورد حالت	۳
۴۵	پایداری سیستم‌های خطی کسری مثبت یک بعدی	۱.۳
۴۵	سیستم‌های یک بعدی مثبت	۱.۱.۳
۴۸	سیستم‌های کسری مثبت	۲.۱.۳
۵۰	پایداری عملی	۳.۱.۳
۵۴	پایداری مجانبی از سیستم‌های کسری	۴.۱.۳
۵۹	تخصیص مقادیر ویژه با استفاده از تبدیلات تشابهی	۴
۵۹	فرم استاندارد اشلون	۱.۴
۶۲	فرم همدم برداری	۲.۴
۶۳	به‌دست آوردن فرم همدم برداری به روش عددی	۱.۲.۴
۶۵	بیان روش جدید با استفاده از تبدیلات تشابهی	۳.۴
۶۹	الگوریتم روش	۱.۳.۴
۷۳	پایداری عملی سیستم‌های گسسته‌کسری با استفاده از تبدیلات تشابهی	۲.۳.۴
۷۹	نتیجه‌گیری	۵
۸۱	آ	
۹۱	مراجع	
۹۵	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی	
۹۹	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی	
۱۰۲	نمایه	

لیست تصاویر

۱۷ ساختار پس خورد حالت	۱۰.۱
۳۳ تصویر سازی نتیجه (۲۰۲۰۲)	۱۰.۲
۶۶ زاویه مشخص شده	۱۰.۴
۷۱ نمایش قرار گرفتن مقدار ویژه در صفحه مختلط	۲.۴
۷۲ مؤلفه‌های بردار حالت به نقطه تعادل صفر همگرا می‌شوند.	۳.۴
۷۲ مؤلفه‌های بردار ورودی به نقطه تعادل صفر همگرا می‌شوند.	۴.۴
۷۶ مؤلفه‌های بردار حالت به نقطه تعادل صفر همگرا می‌شوند.	۵.۴
۷۷ مؤلفه‌های بردار ورودی به نقطه تعادل صفر همگرا می‌شوند.	۶.۴

فصل ۱

تعاریف و مقدمات

۱.۱ مقدمه

۱.۱.۱ تاریخچه

در سیستم‌های مثبت^۱ متغیرهای حالت، ورودی و خروجی‌ها را با مقادیر نامنفی در نظر می‌گیرند. به‌عنوان مثال نمونه‌هایی از سیستم‌های مثبت، فرایندهای صنعتی که شامل مواد شیمیایی راکتور، مبدل‌های حرارتی و ستون تقطیر، سیستم‌های ذخیره‌سازی، سیستم‌های آب و مدل‌های آلودگی هوا می‌باشند. یک نمای کلی حالت از شاخه‌های مختلف، در تئوری سیستم‌های مثبت توسط فارینا و رینالدی^۲ در سال (۲۰۰۰) و کاکزوریک^۳ در سال (۲۰۰۲) در [۶، ۱۳] مطرح شده است. تعریف اول از مشتق کسری توسط ریمان-لیوویل^۴ در پایان قرن ۱۹ معرفی شده است. این ایده توسط مهندسان برای مدل‌سازی فرایندهای مختلف در اواخر سال (۱۹۶۰) استفاده شده است. اصول ریاضی حساب دیفرانسیل کسری را اولدهام و اسپانیر^۵ در سال (۱۹۷۴)، نیشیماتو^۶ در سال (۱۹۸۴) و استولپ^۷ در سال (۱۹۹۳) مطرح کرده‌اند. کنترل سیستم‌های مرتبه کسری توسط استولپ در سال (۱۹۹۳) و پودلامنی^۸، درکه و کاستیئل^۹ در سال (۱۹۹۹) بیان شده است. چندجمله‌ای کسری و سیستم‌های n بعدی توسط گالکوسکی و کومرت^{۱۰} در سال (۲۰۰۵) و پایداری

^۱Positive systems

^۲Farina and Rinaldi

^۳Kaczorek

^۴Riemann and Liouville

^۵Oldham and Spanier

^۶Nishimoto

^۷Oustaloup

^۸Podlubny

^۹Dorcak and Kostial

^{۱۰}Galkowski and Kummert

سیستم‌های پیوسته کسری با تأخیر توسط بوزلویکز^{۱۱} در سال (۲۰۰۸) ارائه شده است. مفهوم سیستم‌های خطی گسسته زمانی کسری مثبت توسط کاکزوریک در سال (۲۰۰۸) مطرح شده است.

ادامه این فصل را به بیان تعاریف و پیش‌نیازهایی که در فصول بعد مورد نیاز است اختصاص می‌دهیم. در فصل ۲ پایداری سیستم‌های خطی پیوسته زمانی کسری مثبت با تأخیر در زاویه از پیش تعیین شده در سمت چپ صفحه مختلط را بررسی کرده و نشان می‌دهیم پایداری سیستم‌های با تأخیر، مستقل از تعداد و مقادیر تأخیری است.

در فصل ۳ مفهوم جدیدی از پایداری عملی^{۱۲} سیستم‌های گسسته زمانی کسری مثبت و شرایط لازم و کافی برای پایداری این سیستم‌ها را مطرح می‌کنیم. همچنین نشان می‌دهیم که اگر سیستم پایدار مجانبی باشد آنگاه پایدار عملی است.

در فصل ۴ روش جدیدی جهت پایداری سیستم‌های پیوسته و گسسته زمانی کسری مثبت با استفاده از تبدیلات تشابهی ارائه می‌دهیم. همچنین کد برنامه‌های این روش، با استفاده از نرم‌افزار *MATLAB* در قسمت پیوست آورده شده است.

۲.۱ تعاریف و پیش‌نیازهای ریاضی

۱.۲.۱ بردار

برای توضیحات بیشتر این مبحث به [۲۶] مراجعه کنید.

تعریف ۱.۲.۱. مجموعه‌ای منظم از اعداد را بردار نامند و این اعداد عناصر بردار نامیده می‌شوند. بردار v با داشتن n عنصر به صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$v = [v_1, v_2, \dots, v_n] \quad (1.1)$$

بردار اشاره شده به صورت (۱.۱)، بردار سطری و ترانواده آن، بردار ستونی نامیده می‌شود. مجموعه همه بردارهای حقیقی با بعد n را با \mathbb{R}^n نشان می‌دهند. ترانواده بردار v را با v^T و ترانواده-مزدوج مختلط v را با v^H نشان می‌دهند.

تعریف ۲.۲.۱. ضرب داخلی دو بردار u و $v \in \mathbb{C}^n$ ، که ضرب اسکالر نیز نامیده می‌شود به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\langle u, v \rangle = \bar{u}_1 v_1 + \bar{u}_2 v_2 + \dots + \bar{u}_n v_n$$

^{۱۱}Busłowicz

^{۱۲}Practical stability

تعریف ۳.۲.۱. طول بردار v با $\|v\|$ نشان داده می‌شود و برابر $\sqrt{v^H v}$ است.

$$\|v\| = \sqrt{|v_1|^2 + |v_2|^2 + \dots + |v_n|^2}$$

۲.۲.۱ ماتریس

تعریف ۴.۲.۱. مجموعه‌ای از mn عنصر مرتبط در یک آرایه مستطیلی، متشکل از m سطر و n ستون است که یک ماتریس مرتبه $m \times n$ نامیده می‌شود و به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

که به صورت $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ، $(j = 1, 2, \dots, n, i = 1, 2, \dots, m)$ نیز نشان داده می‌شود. مجموعه همه ماتریس‌های $m \times n$ با عناصر حقیقی، با $\mathbb{R}^{m \times n}$ و مجموعه همه ماتریس‌ها با عناصر مختلط، با $\mathbb{C}^{m \times n}$ نشان داده می‌شوند.

ماتریس A با تعداد سطر و ستون برابر، ماتریس مربعی نامیده می‌شود. ماتریس مربعی که تمام عناصر روی قطر اصلی آن یک و سایر عناصر آن صفر باشد را ماتریس واحد می‌نامند و با I نشان می‌دهند.

جمع دو ماتریس $A = (a_{ij})$ و $B = (b_{ij})$ با ابعاد مساوی یک ماتریس است که در آن:

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$$

اگر c یک اسکالر باشد، سپس cA ماتریسی به صورت زیر است.

$$cA = (ca_{ij})$$

ترانهاد ماتریس $A_{m \times n}$ ، یک ماتریس $n \times m$ است که با A^T نشان داده می‌شود و برابر است با:

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ترانهاد مزدوج ماتریس A ، ماتریس $A^H = (\bar{A})^T$ است که در آن \bar{A} ، ماتریس تشکیل شده از ماتریس A است که عناصر آن، مزدوج مختلط شده‌اند. ماتریس مربعی A متقارن است، اگر $A = A^T$ باشد.

تعریف ۵.۲.۱. برای هر ماتریس مربعی $A_{n \times n}$ ، اسکالر منحصر به فردی را به عنوان دترمینان می‌توان نسبت داد که با $\det(A)$ نمایش داده می‌شود.

$$\det(A) = |A| = \sum_{j=1}^n a_{ij} (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$$

که در آن A_{ij} ، ماتریس مربعی $(n-1) \times (n-1)$ است که از حذف سطر i ام و ستون j ام ماتریس $A_{n \times n}$ به دست می‌آید.

◁ خواص دترمینان عبارت است از:

۱. با تعویض جای سطر یا ستون در ماتریس A ، تنها علامت دترمینان ماتریس A تغییر می‌کند.

۲.

$$\det(A) = \det(A)^T$$

۳. اگر یک سطر یا ستون ماتریس در اسکالر k ضرب شود، آنگاه دترمینان آن ماتریس نیز در k ضرب می‌شود.

۴. برای دو ماتریس مربعی $A_{n \times n}$ و $B_{n \times n}$ داریم:

$$|AB| = |A| \cdot |B|$$

۵. اگر یک ماتریس دو سطر یا ستون یکسان داشته باشد، آنگاه دترمینان آن ماتریس صفر است.

۶. اگر تمامی درایه‌های ماتریس مربعی $A_{n \times n}$ در اسکالر k ضرب شوند، آنگاه دترمینان آن ماتریس در k^n ضرب خواهد شد: $|kA| = k^n |A|$.

۷. دترمینان ماتریس مثلثی برابر حاصل ضرب درایه‌های قطری آن ماتریس است.

** معرفی چند ماتریس خاص:

◀ ماتریس قطری^{۱۳}: ماتریس مربعی که تمام درایه‌های آن به جز درایه‌های روی قطر اصلی صفر باشد.

$$A = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}) \equiv \forall i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$$

◀ ماتریس بالا مثلثی^{۱۴}: ماتریس مربعی است که تمام درایه‌های زیر قطر اصلی آن صفر است.

$$U = \begin{cases} a_{ij} & i \leq j \\ 0 & i > j \end{cases}$$

◀ ماتریس پایین مثلثی^{۱۵}: ماتریس مربعی است که تمام درایه‌های بالای قطر اصلی آن صفر است.

$$L = \begin{cases} a_{ij} & i \geq j \\ 0 & i < j \end{cases}$$

^{۱۳}Diagonal

^{۱۴}Upper triangular

^{۱۵}Lower triangular

◀ ماتریس متعامد^{۱۶}: ماتریس A متعامد است، اگر حقیقی بوده و در رابطه زیر صدق کند:

$$A^T A = A A^T = I$$

۳.۲.۱ فضای برداری

برای توضیحات بیشتر این مبحث به مرجع [۲۶] و [۴] مراجعه کنید.

تعریف ۶.۲.۱. یک فضای برداری مانند V روی میدان F ، مجموعه‌ای از بردارها است که با دو عمل جمع و ضرب، شرایط زیر را برآورده می‌سازد:

$$\forall u, v \in V \implies u + v \in V \quad .۱$$

$$\forall u \in V, \forall \alpha \in F \implies \alpha u \in V \quad .۲$$

$$\forall u, v \in V \implies u + v = v + u \quad .۳$$

$$\forall u, v, w \in V \implies u + (v + w) = (u + v) + w \quad .۴$$

$$\forall u \in V, \exists \circ \in V \implies u + \circ = \circ + u = u \quad .۵$$

$$\forall u \in V, \exists -u \in V \implies u + (-u) = (-u) + u = \circ \quad .۶$$

$$\forall u, v \in V, \forall \alpha, \beta \in F \implies (\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u, \alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v \quad .۷$$

$$\forall u \in V, \forall \alpha, \beta \in F \implies \alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u \quad .۸$$

$$\forall u \in V, \forall 1 \in F \implies 1u = u \quad .۹$$

تعریف ۷.۲.۱. اگر V یک فضای برداری روی میدان F و S یک زیرمجموعه غیر تهی از V باشد، S را یک زیر فضا از V می‌نامند، هرگاه:

$$\forall s, t \in S \implies s + t \in S \quad .۱$$

$$\forall s \in S, \forall \alpha \in F \implies \alpha s \in S \quad .۲$$

تعریف ۸.۲.۱. فرض کنید V یک فضای برداری و S یک زیرمجموعه نامتناهی از V باشد. بردار $v \in V$ را ترکیب خطی اعضای V گوئیم اگر تعداد متناهی از بردارهای S مانند u_1, u_2, \dots, u_n و اسکالرهای a_1, a_2, \dots, a_n از F وجود داشته باشند به طوری که:

$$v = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n$$

^{۱۶}Orthogonal

تعریف ۹.۲.۱. زیرمجموعه S از فضای برداری V را در نظر بگیرید. اگر به ازای اسکالرهایی c_i ،
 در میدان F ، از معادله

$$c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_n u_n = 0, \quad \forall u_1, u_2, \dots, u_n \in S$$

بتوان نتیجه گرفت که برای هر i ، $c_i = 0$ است، آنگاه بردارهای u_1, u_2, \dots, u_n را مستقل خطی نامند.
 در غیر این صورت بردارهای u_1, u_2, \dots, u_n را وابسته خطی گویند.

تعریف ۱۰.۲.۱. فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان F باشد. گوییم زیرمجموعه S از V یک پایه برای V است هرگاه S مستقل خطی باشد و V را تولید کند.

تعریف ۱۱.۲.۱. فرض کنید V یک فضای برداری با بعد متناهی باشد، تعداد بردارهای پایه V را بعد فضای V نامیده و با $\dim V$ نشان می‌دهند.

تعریف ۱۲.۲.۱. رتبه^{۱۷} ماتریس A برابر با ماکزیمم تعداد سطرها یا ستون‌های مستقل خطی در آن ماتریس است که با $\text{rank}(A)$ نشان داده می‌شود.

$$A_{n \times n} \text{ غیر منفرد} \rightarrow \det(A) \neq 0 \rightarrow \text{rank}(A) = n \text{ (رتبه کامل)}$$

$$A_{m \times n} \rightarrow \begin{cases} \text{rank}(A) = \min(m, n) \rightarrow \text{(رتبه کامل)} \\ \text{rank}(A) < \min(m, n) \rightarrow \text{(نقص رتبه)} \end{cases}$$

ملاحظه ۱۳.۲.۱. رتبه یک ماتریس معادل با بعد فضای گسترده آن ماتریس است.

$$\dim [R(A)] = \text{rank}(A)$$

تعریف ۱۴.۲.۱. ماتریس A از مرتبه $n \times n$ ، معکوس پذیر است اگر ماتریس B از مرتبه $n \times n$ وجود داشته باشد به طوری که:

$$AB = BA = I$$

و با A^{-1} نمایش داده می‌شود. معکوس ماتریس منحصر به فرد است و ماتریس معکوس پذیر اغلب ماتریس نامنفرد^{۱۸} نامیده می‌شود.

تعریف ۱۵.۲.۱. دو ماتریس A و B متشابه نامیده می‌شوند اگر ماتریس نامنفرد T وجود داشته باشد به قسمی که:

$$T^{-1}AT = B$$

یک خاصیت مهم ماتریس‌های متشابه این است که دارای مقادیر ویژه یکسان هستند.

تعریف ۱۶.۲.۱. مجموعه بردارهای $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ در \mathbb{R}^n متعامد است اگر $v_i^T v_j = 0$ باشد، به علاوه اگر $v_i^T v_j = 1$ به ازای هر i ، آنگاه آن‌ها را یکا متعامد می‌نامند.

^{۱۷}Rank

^{۱۸}Nonsingular

۴.۲.۱ بردار ویژه و مقدار ویژه

تعریف ۱۷.۲.۱. فرض کنیم A یک ماتریس $n \times n$ باشد. مجموعه ریشه‌های چندجمله‌ای

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) \quad (۲.۱)$$

که به چندجمله‌ای مشخصه^{۱۹} ماتریس A موسوم است، طیف^{۲۰} ماتریس A نامیده می‌شود و اغلب با نماد $\Lambda(A)$ نشان داده می‌شود. به هر عضو از $\Lambda(A)$ مقدار ویژه^{۲۱} ماتریس A گفته می‌شود. به عبارت دیگر، λ یک مقدار ویژه‌ی ماتریس A است، اگر و فقط اگر بردار غیر صفر $x \in \mathbb{R}^n$ موجود باشد به طوری که

$$Ax = \lambda x \quad (۳.۱)$$

بردار x را بردار ویژه^{۲۲} متناظر با مقدار ویژه‌ی λ گوئیم.

تعریف ۱۸.۲.۱. ماتریس $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ را نامنفرد (معکوس پذیر) گوئیم، هرگاه داشته باشیم:

$$\det(A) \neq 0 \quad (۴.۱)$$

قضیه ۱۹.۲.۱. فرض کنیم که A یک ماتریس $n \times n$ باشد. آنگاه شرایط زیر هم‌ارزند.

$$1. \det(A) \neq 0$$

$$2. \text{rank}(A) = n$$

$$3. \lambda_i \neq 0, i = 1, \dots, n \text{ که } \lambda_i \text{ یک مقدار ویژه‌ی ماتریس } A \text{ است.}$$

ملاحظه ۲۰.۲.۱. برای ماتریس حقیقی $A_{n \times n}$ معادله مشخصه $\det(\lambda I - A) = 0$ یک چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی است. بنابراین کلیه مقادیر ویژه به صورت حقیقی یا به صورت مزدوج مختلط $\alpha \pm i\beta$ است.

برای ماتریس حقیقی $A_{n \times n}$ با مقادیر ویژه $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ دترمینان و اثر ماتریس به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

$$\text{trace}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$$

چندجمله‌ای مشخصه برای هر ماتریس $A_{n \times n}$ یک چندجمله‌ای از مرتبه n است.

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^n + C_{n-1}\lambda^{n-1} + C_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + C_2\lambda^2 + C_1\lambda + C_0.$$

^{۱۹}Characteristic polynomial

^{۲۰}Spectrum

^{۲۱}Eigenvalue

^{۲۲}Eigenvector

این چندجمله‌ای را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n)$$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ مقادیر ویژه هستند که می‌توانند حقیقی یا مختلط مزدوج و متمایز یا تکراری باشند. حال اگر در رابطه فوق $\lambda = 0$ را قرار دهیم، مقدار $\det(A)$ به دست می‌آید:

$$\det(A) = (-\lambda_1)(-\lambda_2) \cdots (-\lambda_n) = (-1)^n \prod_{i=1}^n \lambda_i$$

ملاحظه ۲۱.۲.۱. در ماتریس‌های قطری، بالا مثلثی و پایین مثلثی عناصر روی قطر اصلی همان مقادیر ویژه ماتریس هستند.

تعریف ۲۲.۲.۱. [۱۸] ماتریس $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ یک ماتریس متلر^{۲۳} نامیده می‌شود اگر همه‌ی درایه‌های خارج قطر اصلی نامنفی باشند. یعنی:

$$\forall i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n \Rightarrow a_{ij} \geq 0$$

تعریف ۲۳.۲.۱. [۱۳] ماتریس $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ یک M ماتریس^{۲۴} نامیده می‌شود اگر درایه‌های قطر اصلی نامنفی و درایه‌های خارج قطر (غیر قطری) نامثبت باشند.

تعریف ۲۴.۲.۱. تابع حقیقی مانند f را تابع سببی گویند هرگاه به ازای هر t منفی، $f(t)$ برابر با صفر باشد.

قضیه ۲۵.۲.۱. کانولوشن^{۲۵} دو تابع:

کانولوشن دو تابع f و g که روی \mathbb{R} تعریف شده باشند به صورت زیر است.

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt$$

که $h(x)$ را به صورت $(f * g)$ نیز نشان می‌دهند.

اگر تابع f تابعی سببی باشد چون به ازای t های کمتر از صفر، مقدار تابع صفر می‌گردد، در این صورت $h(x)$ به صورت

$$h(x) = (f * g)(x) = \int_0^{\infty} f(t)g(x-t)dt$$

خواهد بود. چنانچه g نیز تابعی سببی باشد خواهیم داشت:

$$x < 0 \rightarrow (x-t) < 0 \rightarrow h(x) = 0$$

$$x \geq 0 \rightarrow h(x) = \int_0^x f(t)g(x-t)dt$$

^{۲۳} Metzler matrix

^{۲۴} M matrix

^{۲۵} Convolution Theorem

۳.۱ تعاریف و پیش نیازهای کنترل

تعاریف و قضایای این بخش از [۳] و [۵] انتخاب شده است. در روش‌های مبتنی بر کنترل کلاسیک، مدل‌سازی و تحلیل سیستم‌ها بر اساس تابع تبدیل^{۲۶} سیستم صورت می‌گیرد که این تابع ارتباط بین ورودی و خروجی سیستم را بیان می‌دارد، اما در روش‌های مبتنی بر کنترل مدرن، مدل‌سازی سیستم بر پایه فضای حالت^{۲۷} است. از جمله مزایای این روش مدل‌سازی، قابلیت استفاده از آن برای سیستم‌های چند ورودی-چند خروجی، سیستم‌های خطی، غیرخطی و متغیر با زمان است. صورت کلی معادلات فضای حالت به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f[x(t), u(t), t] \\ y(t) &= g[x(t), u(t), t]\end{aligned}\quad (۵.۱)$$

که در آن بردار حالت است و عناصر x_1, x_2, \dots, x_n را متغیرهای حالت می‌نامند. $u_{m \times 1}$ و $y_{k \times 1}$ به ترتیب بردارهای ورودی و خروجی هستند. در حالت کلی f و g نیز توابع متغیر با زمان هستند که نحوه ارتباط بردارهای حالت، ورودی و خروجی را نشان می‌دهند.

تعریف ۱.۳.۱. معادله دینامیکی ورودی-خروجی سیستم خطی به صورت

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1y'(t) + a_0y(t) = b_m u^{(m)}(t) + \dots + b_0u(t), \quad (۶.۱)$$

و به طور خلاصه

$$\sum_{k=0}^n a_k y^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^m b_k u^{(k)}(t), \quad a_n = 1, \quad (۷.۱)$$

بیان می‌شود.

تعریف ۲.۳.۱. با استفاده از تبدیل لاپلاس بر روی معادله ورودی-خروجی سیستم با شرایط اولیه صفر، شکل ورودی-خروجی فوق به صورت تابع تبدیل

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}, \quad (۸.۱)$$

بیان می‌شود. تابع تبدیل برای یک سیستم منحصربه‌فرد است. چندجمله‌ای مخرج را چندجمله‌ای مشخصه سیستم و ریشه‌های آن را قطب‌های سیستم گوئیم و ریشه‌های چندجمله‌ای صورت، صفرهای سیستم نامیده می‌شود.

تعریف ۳.۳.۱. در صورتی که سیستم به صورت

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1y'(t) + a_0y(t) = b_0u(t), \quad (۹.۱)$$

^{۲۶}Transfer Function

^{۲۷}State Space

باشد، سیستم را، سیستم تک ورودی و تک خروجی^{۲۸} (SISO) گوئیم. در غیر این صورت سیستم چندورودی و چندخروجی^{۲۹} (MIMO) خواهد بود.

۱.۳.۱ مدل سازی سیستم های فضای حالت

گفتیم که در روش های مبتنی بر کنترل مدرن، مدل سازی سیستم بر اساس فضای حالت است. برای سیستم های خطی ناوردای زمانی^{۳۰} (تغییر ناپذیر با زمان) معادلات به صورت زیر قابل ساده سازی هستند.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \quad (۱۰.۱)$$

که در آن

- t متغیر زمان،

- $x(t)$ یک بردار ستونی n بعدی موسوم به بردار حالت،

- $u(t)$ یک بردار ستونی m بعدی موسوم به بردار ورودی یا متغیر کنترل،

- $y(t)$ یک بردار r بعدی متغیر با زمان به نام بردار خروجی

هستند.

تعریف ۱.۳.۱.۴. اگر همه ی ماتریس های سیستم ثابت باشند، آنگاه سیستم را یک سیستم کنترل ناوردای زمانی گوئیم. در این جا سیستم های خطی ناوردای زمانی مورد بررسی قرار می گیرند و برای سهولت تنها به واژه سیستم بسنده می کنیم.

معادله (۱۰.۱) را معادله سیستم پیوسته گویند.

برای برخی از سیستم ها، بردار حالت یا ورودی و یا هر دو در هر لحظه از زمان قابل محاسبه یا اندازه گیری نیستند، بلکه در دنباله ای از نقاط t_i ، $(i = 0, 1, \dots, n)$ ، این کمیت ها در دسترس است. در این موارد، معادله دیفرانسیل حالت سیستم به طور هم ارز به صورت معادله تفاضلی مرتبه اول زیر است:

$$\begin{cases} x(i+1) = Ax(i) + Bu(i) \\ y(i) = Cx(i) + Du(i) \end{cases} \quad (۱۱.۱)$$

که در آن $x(i)$ و $u(i)$ به ترتیب، بردارهای حالت و ورودی در زمان t_i هستند.

^{۲۸}Single Input Single Output

^{۲۹}Multi Input Multi Output

^{۳۰}Linear Time Invariant

ملاحظه ۵.۳.۱. برخی از سیستم‌ها به‌طور ذاتی گسسته زمانی هستند و تغییر حالت سیستم فقط در نقاط زمانی خاصی صورت می‌پذیرد. در این حالت، سیستم به‌صورت گسسته خطی زیر است:

$$x(i+1) = Ax(i) + Bu(i) \quad (12.1)$$

تعریف ۶.۳.۱. سیستم (۱۱.۱) را سیستم مثبت خارجی گوئیم اگر و تنها اگر برای هر دنباله ورودی $u_i \in \mathbb{R}_+^m$ که $i \in \mathbb{Z}$ و $x_0 = 0$ ، داشته باشیم:

$$y_i \in \mathbb{R}_+^p, \quad \forall i \in \mathbb{Z}_+$$

تعریف ۷.۳.۱. سیستم (۱۱.۱) را سیستم مثبت داخلی (مثبت) نامیم، اگر و تنها اگر برای هر $x_0 \in \mathbb{R}_+^n$ و هر دنباله ورودی $u_i \in \mathbb{R}_+^m$ ($i \in \mathbb{Z}_+$) داشته باشیم:

$$x_i \in \mathbb{R}_+^n, \quad y_i \in \mathbb{R}_+^p, \quad i \in \mathbb{Z}_+$$

متغیرهای حالت می‌توانند تعبیر فیزیکی داشته باشند و قابل اندازه‌گیری با حسگر^{۳۱} باشند. مانند ولتاژ، جریان، دما، سرعت و جابجایی. همچنین می‌توانند کمیت‌های ریاضی باشند و تعبیر فیزیکی نداشته باشند که علت استفاده از آن‌ها ساده‌سازی محاسبات ریاضی است.

ملاحظه ۸.۳.۱. برخلاف تابع تبدیل که نمایش منحصر به فردی از یک سیستم است، نمایش‌های متعددی برای فضای حالت یک سیستم موجود است.

۲.۳.۱ کنترل پذیری

دستگاه توصیف شده با معادله (۱۰.۱)، کنترل پذیر^{۳۲} نامیده می‌شود، اگر با شروع از حالت اولیه $x(0)$ ، با انتخاب ورودی مناسب $u(t)$ ، $0 \leq t \leq t_1$ ، در زمان متناهی t_1 ، بتوان سیستم را به گام نهایی $x_1 = x_1(t)$ هدایت کرد.

کنترل پذیری یک سیستم اهمیت اساسی دارد، زیرا در مسائلی که هدف، انتقال سیستم از حالت اولیه دلخواهی به حالت تعادل باشد کنترل پذیری سیستم شرط لازم برای وجود جواب است.

ملاحظه ۹.۳.۱. کنترل پذیری سیستم (۱۰.۱)، اغلب به کنترل پذیری زوج (A, B) اشاره دارد.

ملاحظه ۱۰.۳.۱. حالت ماتریس A در سیستم پیوسته زمانی (۱۰.۱) و یا به‌طور معادل، مقدار ویژه λ از A ، کنترل پذیر است، اگر بردار ویژه سمت چپ متناظر با λ با ستون‌های ماتریس B نامتعامد باشد. در غیر این صورت، غیر قابل کنترل هستند.

ملاحظه ۱۱.۳.۱. برای سیستم توصیف شده با معادله تفاضلی (۱۰.۱) ماتریس کنترل پذیری را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Q = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B] \quad (13.1)$$

^{۳۱}Sensor

^{۳۲}Controlable

قضیه ۱۲.۳.۱. (معیار کنترل پذیری سیستم پیوسته زمانی) [۵]
فرض کنید $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ و $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ، $(m \leq n)$ باشد، عبارت‌های زیر معادل هستند:

۱. دستگاه (۱۰.۱) کنترل پذیر است.

۲. ماتریس کنترل پذیری $Q_{n \times nm}$ ، رتبه کامل n است.

$$\text{rank}(Q) = n$$

۳. اگر (λ, x) ، جفت ویژه ماتریس A^T باشد، به این معنی که $x^T A = \lambda x^T$ ، آنگاه:
 $x^T B \neq 0$

۴. برای هر مقدار ویژه λ از ماتریس A ،

$$\text{rank}(A - \lambda I, B) = n$$

۵. با انتخاب مناسب ماتریس K ، مقادیر ویژه ماتریس $A - BK$ را می‌توان به مقادیر دلخواه تخصیص داد.

برهان. در این جا تنها اثبات هم‌ارزی قسمت دوم به سوم و برعکس را مورد بررسی قرار می‌دهیم. برای ادامه اثبات می‌توانید به [۵] مراجعه کنید. با فرض $t_0 = 0$ ، $x_0 = 0$ را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم ماتریس کنترل‌پذیری Q رتبه کامل باشد. x را بردار ویژه A^T متناظر با مقدار ویژه λ در نظر می‌گیریم، یعنی:

$$x^T A = \lambda x^T$$

با برهان خلف فرض می‌کنیم $x^T B = 0$ آنگاه

$$x^T Q = [x^T B, \lambda x^T B, \lambda^2 x^T B, \dots, \lambda^{n-1} x^T B] = 0 \quad (14.1)$$

چون ماتریس Q ، رتبه کامل است پس، $x = 0$ خواهد بود که تناقض است.

حال فرض کنید هیچ یک از بردارهای ویژه A با ستون‌های B متعامد نباشد، کنترل‌پذیری ماتریس Q را اثبات می‌کنیم.

با برهان خلف فرض کنیم رتبه Q برابر $k < n$ باشد، بنابراین ماتریس نامنفرد T وجود دارد [۵] به طوری که:

$$\bar{A} = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = TB = \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (15.1)$$

به طوری که \bar{A}_{22} از مرتبه $(n - k)$ است و $k = \text{rank}(Q)$.

v_2 را بردار ویژه $(\bar{A}_{22})^T$ متناظر با مقدار ویژه λ در نظر می‌گیریم، آنگاه

$$(\bar{A})^T \begin{bmatrix} 0 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11}^T & 0 \\ \bar{A}_{21}^T & \bar{A}_{22}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{A}_{22}^T v_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 0 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

به علاوه

$$[0, v_2^T] \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

یعنی، بردار ویژه $\begin{bmatrix} 0 \\ v_2 \end{bmatrix}$ از $(\bar{A})^T$ وجود دارد که با ستون‌های B متعامد است. بنابراین زوج (\bar{A}, \bar{B}) کنترل‌پذیر نیست، که این یک تناقض است، زیرا تبدیل تشابه‌ی، کنترل‌پذیری را تغییر نمی‌دهد. □

۳.۳.۱ ناورداهای کرونکر

ماتریس کنترل‌پذیری

$$Q = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B] \quad (۱۶.۱)$$

را در نظر بگیرید. فرض می‌کنیم b_1, b_2, \dots, b_m به ترتیب ستون‌های اول تا m ام ماتریس B باشند، بنابراین می‌توان نوشت:

$$Q = [b_1 \quad \dots \quad b_m \quad Ab_1 \quad \dots \quad Ab_m \quad \dots \quad A^{n-1}b_1 \quad \dots \quad A^{n-1}b_m] \quad (۱۷.۱)$$

از آنجایی که دستگاه کنترل‌پذیر است، پس می‌توان n ستون از اولین ستون‌های ماتریس Q را طوری به دست آورد که مستقل خطی باشند. برای نمایش آسان‌تر، ستون‌های Q را در یک بلوک مستطیلی که n سطر و m ستون دارد به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$Q = \begin{bmatrix} b_1 & \dots & b_m \\ Ab_1 & \dots & Ab_m \\ A^2b_1 & \dots & A^2b_m \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A^{n-1}b_1 & \dots & A^{n-1}b_m \end{bmatrix} \quad (۱۸.۱)$$

با شروع از گوشه سمت چپ بالای بلوک به طرف راست و پایین، بردارهایی که با بردار قبلی وابسته خطی‌اند، از بلوک حذف می‌کنیم و اگر بردار حذف شد همه‌ی بردارهای واقع در زیر آن بلوک حذف می‌شوند و این عمل را تا جایی ادامه می‌دهیم که تعداد بردارهای مستقل خطی n بردار باشد. در این حالت همه‌ی بردارهای باقی‌مانده غیر از n بردار به دست آمده را از بلوک حذف می‌کنیم. اگر این n بردار مستقل خطی را به ترتیب ستون‌های ماتریس P قرار دهیم آنگاه P معکوس‌پذیر خواهد بود و تبدیل مورد نظر به دست می‌آید.

$$P = [b_1 \quad \dots \quad b_m \quad Ab_1 \quad \dots \quad Ab_m \quad \dots \quad A^{p_1-1}b_1 \quad \dots \quad A^{p_m-1}b_m] \quad (۱۹.۱)$$

تعریف ۱۳.۳.۱. در رابطه (۱۹.۱) به هر ستون از بلوک متناظر ستونی از ماتریس B عددی صحیح مانند p_i مربوط می‌شود که در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$1 \leq p_i \leq n \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (۲۰.۱)$$

این p_i ها را ناورداهای کرونکر می‌نامیم. از طرفی p_i تعداد بردارهای باقی‌مانده در ستون i ام بلوک است، پس تعداد بردارهای واقع در ستون‌های بلوک برابر است با:

$$p_1 + p_2 + \dots + p_m \quad (۲۱.۱)$$

از طرفی این تعداد برابر n است، در نتیجه

$$p_1 + p_2 + \dots + p_m = n \quad (22.1)$$

در کنترل بهینه به دنبال ماتریس F به گونه‌ای هستیم که حالت دستگاه را در کوتاه‌ترین زمان (کمترین مرحله) مانند v به صفر (به حالت تعادل) برساند. v را اندیس کنترل‌پذیری می‌نامیم، و تعریف می‌کنیم:

$$v = \max \{p_i | i = 1, \dots, m\} \quad (23.1)$$

تعریف ۱۴.۳.۱. حالت تعادل برای یک سیستم کنترل خطی، حالتی است که در صورت نبود ورودی و اغتشاش، خروجی در آن حالت باقی بماند.

تعریف ۱۵.۳.۱. ناوردهای کرونگر (B, A) را منظم گوئیم هرگاه اختلاف بین \max و \min آن‌ها حداکثر یک باشد. در غیر این صورت ناوردهای کرونگر را نامنظم گویند.

۴.۳.۱ پایداری

تعاریف و قضایای این بخش از [۵] و [۳] انتخاب شده‌اند.

تعریف ۱۶.۳.۱. معادله دیفرانسیل $\dot{x}(t) = f(x(t))$ را در نظر بگیرید. نقطه x_e را نقطه تعادل می‌نامند، هرگاه:

$$f(x_e) = 0$$

تعریف ۱۷.۳.۱. سیستم دینامیکی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) \\ x(t_0) \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (24.1)$$

نقطه تعادل x_e را به مفهوم لیاپانوف^{۳۳} پایدار گوئیم، اگر به ازای t_0 و $\epsilon > 0$ ، برای تمامی $t \geq t_0$:

$$\exists \delta_\epsilon > 0; \forall \|x(t_0) - x_e\| < \delta_\epsilon \longrightarrow \|x(t) - x_e\| \leq \epsilon$$

سیستم خطی (۱۰.۱) را در نظر بگیرید. فرض می‌کنیم بردار حالت $x(t)$ مشخص باشد و انتخاب

می‌کنیم:

$$u(t) = v(t) - Kx(t) \quad (25.1)$$

که در آن، K یک ماتریس ثابت و $v(t)$ یک بردار ورودی مرجع است که می‌توان آن را صفر در نظر گرفت.

از جایگذاری معادله (۲۵.۱) در سیستم (۱۰.۱) داریم:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A - BK)x(t) + Bv(t) \\ y(t) &= (C - DK)x(t) + Dv(t) \end{aligned} \quad (26.1)$$

^{۳۳}Lyapunov

پس مسأله پایداری سیستم (۱۰.۱)، به مسأله پیدا کردن ماتریس K ، به گونه‌ای که سیستم (۲۶.۱) پایدار باشد، تبدیل می‌شود. به بیان دیگر:

با توجه به جفت ماتریس (A, B) ، ماتریس پس‌خورده^{۳۴} حالت K را به گونه‌ای می‌یابیم که $A - BK$ پایدار باشد. گرافیک مسأله پس‌خورده حالت را می‌توان به شکل ۱.۱ نشان داد.

در این رابطه ماتریس A را ماتریس حلقه باز و مقادیر ویژه‌ی آن را مقادیر ویژه‌ی سیستم حلقه باز^{۳۵} گوئیم. هم‌چنین سیستم (۲۶.۱) یک سیستم حلقه بسته^{۳۶} و ماتریس $A - BK$ را ماتریس حلقه بسته می‌نامند.

تعریف ۱۸.۳.۱. سیستم‌هایی که در آن‌ها خروجی بر عمل کنترلی تاثیر ندارد را سیستم‌های کنترل حلقه باز گویند.

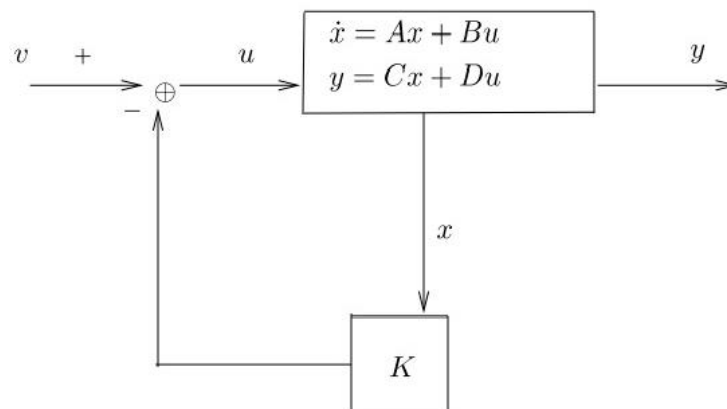
تعریف ۱۹.۳.۱. سیستم‌های کنترل پس‌خورده را عموماً سیستم‌های کنترل حلقه بسته می‌نامیم. منظور از کنترل حلقه بسته استفاده از پس‌خورده برای کاهش خطا و رسیدن به پایداری است.

پایداری و کنترل‌پذیری:

در این قسمت، شرایط لازم و کافی برای آن‌که زوج ماتریس (A, B) ، جفت پایدار باشند را بیان می‌کنیم.

قضیه ۲۰.۳.۱. [۵] موارد زیر معادلند:

- جفت (A, B) پایدار هستند.



شکل ۱.۱: ساختار پس‌خورده حالت

- برای هر $\epsilon > 0$ ، $rank(A - \lambda I, B) = n$ ، به عبارت دیگر، حالت‌های ناپایدار ماتریس A ، قابل کنترل هستند.

^{۳۴}Feedback Matrix

^{۳۵}Open Loop

^{۳۶}Close Loop

- برای هر λ و $x \neq 0$ که $x^H A = \lambda x^H$ و $Re(\lambda) \geq 0$ داریم:
 $x^H B \neq 0$

ملاحظه ۲۱.۳.۱. زمانی که حالت‌های ناپایدار، کنترل‌پذیر باشند، پایداری تضمین شده است.

۵.۳.۱ پایداری با معادله لیاپانوف

در طراحی یک سیستم کنترل، شناخت اجزای سیستم برای پیش‌بینی رفتار دینامیکی سیستم لازم است. یک سیستم کنترل خطی ناوردای زمانی، در صورتی پایدار است که هنگام اعمال یک شرط اولیه جدید به آن، به حالت تعادل خود برگردد.

برای پیدا کردن ماتریس پس‌خورد پایدار K برای جفت (A, B) داده شده، می‌توانیم فرض کنیم جفت (A, B) کنترل‌پذیر است. در قضیه‌ای که در ادامه بیان می‌شود، نشان می‌دهیم چگونه یک زوج کنترل‌پذیر با استفاده از معادله لیاپانوف به پایداری می‌رسد.

قضیه ۲۲.۳.۱ [۵] فرض کنید (A, B) کنترل‌پذیر باشد و فرض کنید β یک اسکالر باشد، به‌گونه‌ای که:

$$\beta > |\lambda_{\max}(A)|$$

که $\lambda_{\max}(A)$ ، مقدار ویژه‌ای از ماتریس A است که دارای بزرگ‌ترین بخش حقیقی است. فرض کنید K را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$K = B^T Z^{-1} \quad (27.1)$$

که Z در معادله لیاپانوف زیر صدق می‌کند.

$$-(A + \beta I)Z + Z[-(A + \beta I)]^T = -2BB^T \quad (28.1)$$

بنابراین $A - BK$ پایدار است و (A, B) نیز به پایداری می‌رسد.

برهان. از آنجایی که $\beta > |\lambda_{\max}(A)|$ ، ماتریس $-(A + \beta I)$ پایدار است. همچنین، از آنجایی که (A, B) کنترل‌پذیر است، جفت $(-(A + \beta I), B)$ نیز کنترل‌پذیر است. بنابراین معادله لیاپانوف (۲۸.۱) دارای جواب متقارن متناهی مثبت منحصر به فرد Z است. معادله (۲۸.۱) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$(A - BB^T Z^{-1})Z + Z(A - BB^T Z^{-1})^T = -2\beta Z \quad (29.1)$$

با قرار دادن معادله (۲۷.۱) در معادله بالا داریم:

$$(A - BK)Z + Z(A - BK)^T = -2\beta Z \quad (30.1)$$

فرض کنید μ مقدار ویژه‌ای از ماتریس $A - BK$ باشد و y بردار ویژه متناظر با این مقدار ویژه باشد. سپس با ضرب هر دو طرف معادله (۲۹.۱)، ابتدا از سمت چپ در y^H و سپس از سمت راست در y ، خواهیم داشت:

$$2 \operatorname{Re}(\mu) y^H Z y = -2 \beta y^H Z y \quad (31.1)$$

از آن جایی که Z مثبت متناهی است، $y^H Z y > 0$ و در نتیجه $\operatorname{Re}(\mu) < 0$. بنابراین $A - BK$ پایدار است. \square

◁ الگوریتم روش معادله لیاپانوف برای پایداری:

فرض کنید (A, B) زوج کنترل پذیر باشد. الگوریتم زیر، ماتریس پس خورد حالت پایاساز را محاسبه می کند [۳].

گام اول: عدد β را به گونه ای انتخاب می کنیم که $\beta > |\lambda_{\max}(A)|$.

گام دوم: معادله لیاپانوف (۲۸.۱) را برای Z حل می کنیم.

گام سوم: ماتریس پس خورد حالت پایاساز را محاسبه می کنیم.

$$K = B^T Z^{-1}$$

قضیه ۲۳.۳.۱. سیستم خطی تغییر ناپذیر با زمان زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}(t) = A x(t)$$

به مفهوم لیاپانوف این سیستم پایدار است اگر و تنها اگر:

(الف) کلیه مقادیر ویژه ماتریس A قسمت حقیقی غیر مثبت داشته باشد.

(ب) آن دسته از مقادیر ویژه ماتریس A که قسمت های حقیقی صفر دارند صفرهای ساده چندجمله ای مشخصه باشند.

به عبارت دیگر در تبدیل A به فرم جردن، مرتبه بلوک های جردن متناظر با مقادیر ویژه ای که قسمت های حقیقی آن صفر است، یک باشد.

به طور خلاصه تعریف می کنیم:

تعریف ۲۴.۳.۱. سیستم کنترل خطی را یک سیستم پایدار مجانبی^{۳۷} می نامیم هرگاه قسمت حقیقی همه مقادیر ویژه منفی باشد. در صورتی که قسمت حقیقی همه مقادیر ویژه منفی یا صفر باشد سیستم را پایدار و در غیر این دو صورت سیستم را ناپایدار گویند.

تعریف ۲۵.۳.۱. مسأله یافتن ماتریس پس خورد K برای سیستم کنترل خطی به گونه ای که سیستم پایدار باشد را مسأله تخصیص مقادیر ویژه گویند.

^{۳۷}Asymptotically stable

۴.۱ جواب عمومی سیستم خطی

قضیه ۱.۴.۱. فرض کنیم A یک ماتریس $n \times n$ باشد. به ازای هر بردار حالت اولیه x_0 ، سیستم خطی ناوردای زمانی،

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x(0) = x_0.$$

دارای یک جواب منحصر به فرد به صورت

$$x(t) = e^{At}x_0.$$

است.

با استفاده از این قضیه و انتخاب بردار حالت اولیه x_0 جواب سیستم حلقه بسته را به صورت زیر به دست می آوریم:

$$x(t) = e^{(A-BK)t}x_0.$$

چنانچه تمام مقادیر ویژهی حلقه بسته در سمت چپ صفحه مختلط قرار گیرند آنگاه داریم:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_0 \lim_{t \rightarrow \infty} e^{(A-BK)t} = 0.$$

این رابطه بیان می کند که با گذر زمان هر حالت اولیه در صورتی به حالت تعادل برده می شود که قسمت حقیقی تمام مقادیر ویژهی ماتریس حلقه بسته منفی باشد.

قضیه ۲.۴.۱. به ازای هر بردار حالت اولیه x_0 سیستم خطی ناوردای زمانی (۱.۴.۱) دارای جواب عمومی به صورت

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \quad (۳۲.۱)$$

است. تابع نمایی $\Phi(t) = e^{At}$ را ماتریس انتقال حالت^{۳۸} گوئیم، که روش های متفاوتی برای به دست آوردن این ماتریس وجود دارد.

۱.۴.۱ روش های یافتن ماتریس انتقال

روش های زیادی برای به دست آوردن ماتریس انتقال وجود دارد که در این جا به بیان دو روش معمول و پر استفاده بسنده می کنیم.

روش اول: با گرفتن تبدیل لاپلاس از طرفین معادله حالت $\dot{x}(t) = Ax(t)$ داریم:

$$sX(s) - x(0) = AX(s)$$

پس

$$sX(s) - AX(s) = x(0)$$

^{۳۸}State Transition Matrix

در نتیجه داریم:

$$x(t) = L^{-1}((sI - A)^{-1})x(0)$$

بنابراین با مقایسه رابطه فوق و جواب قبل به ازای $u = 0$ داریم

$$e^{At} = L^{-1}((sI - A)^{-1}) \quad (۳۳.۱)$$

روش دوم: بسط مک‌لورن ماتریس انتقال

$$e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \dots + \frac{(At)^n}{n!} + \dots \quad (۳۴.۱)$$

با استفاده از قضیه کیلی همیلتون می‌توان تمامی توان‌های بیشتر مساوی n را بر حسب توان‌های کمتر نوشت یعنی

$$e^{At} = a_0(t)I + a_1(t)A + \dots + a_{n-1}(t)A^{n-1} \quad (۳۵.۱)$$

با قرار دادن مقادیر ویژه ماتریس A به جای ماتریس A در رابطه فوق، ضرایب به دست می‌آیند.

۵.۱ توابع خاص در حساب کسری

تابع گاما

بدون شک یکی از توابع اساسی در حساب کسری، تابع گاما^{۳۹} است، که تعمیمی از تابع فاکتوریل^{۴۰} است و می‌تواند مقادیر خود را به صورت غیر صحیح و حتی مختلط اختیار کند، به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad z \in \mathbb{C} \quad (۳۶.۱)$$

یکی از مهم‌ترین خواص تابع گاما این است که در معادله زیر صدق می‌کند:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad z \in \mathbb{C} \quad (۳۷.۱)$$

برهان. با استفاده از انتگرال‌گیری جز به جز به صورت زیر قابل اثبات است:

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^z dt = -e^{-t} t^z \Big|_{t=0}^{t=\infty} + z \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = z\Gamma(z)$$

□

داریم:

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_{t=0}^{t=\infty} = 1$$

و به همین ترتیب بر اساس رابطه (۳۷.۱) داریم:

^{۳۹}Gamma Function

^{۴۰}Factorial Function

$$\begin{aligned}\Gamma(2) &= 1 \cdot \Gamma(1) = 1 = 1! \\ \Gamma(3) &= 2 \cdot \Gamma(2) = 2 \cdot 1! = 2! \\ &\vdots \\ \Gamma(x+1) &= x \cdot \Gamma(x) = x \cdot (x-1)! = x!\end{aligned}$$

بنابراین برای هر عدد حقیقی مثبت x داریم:

$$\Gamma(x+1) = x! \quad (38.1)$$

بنابراین با کمک تابع گاما، می‌توان برای تمام اعداد حقیقی، تابع فاکتوریل را تعریف کرد (به جز اعداد صحیح منفی).
برخی از خواص مهم تابع گاما:

$$\begin{aligned}\Gamma(z+1) &= z\Gamma(z) \\ \Gamma(n) &= (n-1)!, \quad n \in \mathbb{N} \\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \sqrt{\pi} \\ \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2^n} (2n-1)!, \quad n \in \mathbb{N}\end{aligned} \quad (39.1)$$

تابع میتاگ - لفلر

یکی دیگر از توابع خاص که در حساب کسری مورد استفاده قرار می‌گیرد تابع میتاگ-لفلر^{۴۱} و نوع تعمیم یافته آن است [۲۵].
تعریف استاندارد تابع میتاگ-لفلر به صورت زیر است:

$$E_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k\alpha + 1)} \quad \alpha > 0 \quad (40.1)$$

که این تابع به ازای $\alpha = 1$ همان تابع نمایی خواهد بود. حالت تعمیم یافته‌ی تابع میتاگ-لفلر که براساس دو آرگومان بیان می‌شود، به صورت زیر قابل تعریف است:

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k\alpha + \beta)} \quad \alpha, \beta > 0 \quad (41.1)$$

^{۴۱}Mittage-Leffler

با مقداره‌ی به α و β در رابطه (۴۱.۱) داریم:

$$E_{\lambda,1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x,$$

$$E_{\lambda,2}(x) = \frac{e^x - 1}{x},$$

$$E_{2,1}(x) = \cosh(\sqrt{x}),$$

$$E_{2,2}(x) = \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}},$$

۱.۵.۱ مشتق و انتگرال از مرتبه کسری

با توجه به این که مفهوم مشتقات و انتگرال کسری از مشتقات و انتگرال صحیح نتیجه می‌شود. بنابراین در این بخش پس از چند تعریف به معرفی مشتقات و انتگرال کسری کاپوتو^{۴۲} و ریمان-لیوویل می‌پردازیم. تعاریف، لم‌ها و اثبات آن‌ها در این بخش در مرجع [۲۵] آمده است.

تعریف ۱.۵.۱. تابع حقیقی $f(x)$ ، $x > 0$ متعلق به فضای C_μ ، $\mu \in \mathbb{R}$ است، اگر یک عدد حقیقی $p > 0$ وجود داشته باشد به طوری که:

$$f(x) = x^p f_1(x)$$

$$f_1(x) \in C[0, \infty]$$

تعریف ۲.۵.۱. تابع حقیقی $f(x)$ ، $x > 0$ متعلق به فضای C_μ^m است، اگر و تنها اگر:

$$f^{(m)} \in C_\mu, \quad m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

انتگرال کسری

اگر تابع $f(x)$ برای $x > 0$ تعریف شده باشد. انتگرال زیر را تعریف می‌کنیم:

$$(If)(x) = \int_0^x f(t) dt \quad (42.1)$$

در این صورت

$$(I^2 f)(x) = \int_0^x (If)(t) dt = \int_0^x \left(\int_0^t f(s) ds \right) dt \quad (43.1)$$

با ادامه این روند برای $n \in \mathbb{N}$ و $x > 0$ داریم:

$$(I^n f)(x) = \int_0^x \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{n-1}} f(t) dt \cdots dt_1 = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} f(t) dt \quad (44.1)$$

این فرمول به فرمول کوشی^{۴۳} معروف است. مشکل اصلی در رابطه (۴۴.۱) تابع فاکتوریل است که برای اعداد غیر صحیح بی‌معنی است. اما با توجه به تعریف تابع گاما این محدودیت رفع می‌شود، و با

^{۴۲}Caputo

^{۴۳}Cauchy Formula

استفاده از تابع گاما به جای تابع فاکتوریل، می توان شرط $n \in \mathbb{N}$ را جایگزین کرد. بنابراین با توجه به فرمول کوشی، تعریف عملگر انتگرال ریمان-لیوویل در ادامه بیان می شود.

تعریف ۳.۵.۱. فرض کنید $f \in C_\mu, \mu \geq -1$ ، در این صورت عملگر انتگرال ریمان-لیوویل از مرتبه $\alpha \geq 0$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$(J^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad \alpha > 0, x > 0 \quad (45.1)$$

◀ برخی از خواص J^α :

برای $f \in C_\mu$ و $\alpha, \beta \geq 0$ و $(\mu \geq -1)$ و $\gamma > -1$ داریم $[21, 22, 23]$:

$$\begin{aligned} J^0 f(x) &= f(x) \\ J^\alpha J^\beta f(x) &= J^{\alpha+\beta} f(x) \\ J^\alpha J^\beta f(x) &= J^\beta J^\alpha f(x) \\ J^\alpha x^\gamma &= \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} x^{\alpha+\gamma} \\ J^\alpha \left(\sum_{i=1}^n c_i f_i(x) \right) &= \sum_{i=1}^n c_i J^\alpha f_i(x) \end{aligned} \quad (46.1)$$

مشق کسری کاپوتو و ریمان-لیوویل

در این قسمت دو روش اصلی برای تعریف مشتق کسری بیان می کنیم. در اولین روش مشتق و انتگرال به عنوان حدهایی از تفاضلات متناهی و تعمیمی از آن فرض می شود. ریمان-لیوویل برای به دست آوردن مشتق کسری یک تابع، فرمول زیر را با استفاده از رابطه (45.1) در حالت $\alpha > 0$ به دست آورد.

$$D^\alpha f(x) = D^m J^{m-\alpha} f(x) = \frac{d^m}{dx^m} \left[\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{m-\alpha-1} f(t) dt \right] \quad (47.1)$$

که در آن $m \in \mathbb{N}, m-1 < \alpha < m$.

همچنین برای مشتق مرتبه n یعنی D^n به این نکته توجه داریم که:

$$D^n J^n = I, \quad J^n D^n \neq I, \quad n \in \mathbb{N} \quad (48.1)$$

تعریف دیگری که برای مشتق کسری وجود دارد، روش کاپوتو است که این عملگر توسط کاپوتو ریاضیدان ایتالیایی در سال ۱۹۶۷ معرفی شد.

تعریف ۴.۵.۱. فرض کنید $f \in C_{-1}^m$ و $m \in \mathbb{N}$ ، در این صورت مشتق کسری کاپوتو تابع $f(x)$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$D_*^\alpha f(x) = \begin{cases} J^{m-\alpha} D^m f(x) = \left[\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(t) dt \right], & m-1 < \alpha < m \\ \frac{d^m f(x)}{dx^m}, & \alpha = m \end{cases} \quad (49.1)$$

تعریف مشتق کسری کاپوتو و ریمان-لیوویل برای مقادیر $\alpha < 0$ نیز به صورت زیر قابل تعریف است:

$$D_*^\alpha f(x) = D^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{-\alpha-1} f(t) dt, \quad \alpha < 0 \quad (50.1)$$

مثال ۵.۵.۱. مشتق کسری کاپوتو تابع $f(t) = t$ را با فرض $\alpha = \frac{1}{2}$ به دست آورید.

برهان. چون $0 < \alpha < 1$ ، بنابراین $m = 1$ است. حال طبق تعریف (۴۵.۱) داریم:

$$D_*^{\frac{1}{2}} t = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}} d\tau.$$

بنابر خواص تابع گاما در رابطه‌ی (۳۹.۱) و همچنین تغییر متغیر $u = t - \tau$ نتیجه برای مشتق کسری کاپوتو برای تابع $f(t) = t$ به صورت زیر خواهد بود.

$$D_*^{\frac{1}{2}} t = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_t^\infty \frac{1}{u^{\frac{1}{2}}} d(u) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t u^{-\frac{1}{2}} d(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (\sqrt{t} - 0)$$

بنابراین

$$D_*^{\frac{1}{2}} t = \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}.$$

□

لم ۶.۵.۱. اگر $\alpha \in \mathbb{R}$ ، $x > 0$ و $m-1 < \alpha \leq m$ ($m \in \mathbb{N}$)، در این صورت:

$$D_*^\alpha f(x) = D^\alpha f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(0) \quad (51.1)$$

قضیه ۷.۵.۱. مشتق کسری کاپوتو برای توابع توانی در رابطه زیر صدق می‌کند.

$$D_*^\alpha t^p = \begin{cases} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)} t^{p-\alpha} = D^\alpha t^p, & m-1 < \alpha < m, \quad p > m-1, \quad p \in \mathbb{R} \\ 0, & m-1 < \alpha < m, \quad p \leq m-1, \quad p \in \mathbb{N} \end{cases}$$

۶.۱ تبدیلات لاپلاس

در این بخش تبدیلات لاپلاس که به عنوان ابزار مهم در ریاضیات و مهندسی به حساب می‌آید، برای حل معادلات دیفرانسیل از مرتبه کسری مورد استفاده قرار می‌گیرد. در مسیر حل معادلات دیفرانسیل از جمله نوع کسری آن به وسیله تبدیلات لاپلاس، معادله دیفرانسیل کسری به معادلات جبری تبدیل شده و سپس با حل معادلات جبری می‌توان معادلات مجهول را با استفاده از تبدیل لاپلاس معکوس به دست آورد. در این قسمت به معرفی و روابط موجود در تبدیلات لاپلاس می‌پردازیم.

۱.۶.۱ عملگر لاپلاس

تعریف ۱.۶.۱. فرض کنید تابع $f(x)$ برای $0 < x < \infty$ تعریف شده باشد، در این صورت تبدیل لاپلاس برای مقادیری از s که انتگرال زیر متناهی باشد به صورت زیر قابل تعریف است:

$$F(s) = L[f(x)] = \int_0^{\infty} f(x)e^{-sx} dx \quad (52.1)$$

که s می‌تواند یک متغیر حقیقی یا مختلط باشد.

توجه داشته باشید که می‌توانیم انتگرال ناسره فوق را به صورت زیر هم بنویسیم:

$$\int_0^{\infty} f(x)e^{-sx} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b f(x)e^{-sx} dx \quad (53.1)$$

قضیه ۲.۶.۱. وجود تبدیل لاپلاس:

فرض کنید $f(x)$ تابع پیوسته در بازه $[0, \infty)$ که از مرتبه نمایی است، یعنی برای هر $c \in \mathbb{R}$ و $x > 0$ داریم:

$$\sup \frac{|f(x)|}{e^{cx}} < \infty$$

در این صورت تبدیل لاپلاس برای هر $s > c$ موجود است.

برخی از تبدیلات لاپلاس مهم که بیشتر مورد استفاده قرار می‌گیرند، در این قسمت معرفی می‌شوند. برای $L[f(x)] = F(x)$ و $L[g(x)] = G(x)$ داریم:

$$L[f(x) + g(x)] = F(x) + G(x)$$

$$L[x^\beta] = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{s^{\beta+1}}$$

$$L[f^{(n)}(x)] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

$$L\left[\int_0^x f(t)dt\right] = \frac{F(s)}{s}$$

$$L\left[\int_0^x f(x-t)g(t)dt\right] = F(s)G(s)$$

۲.۶.۱ تبدیل لاپلاس مشتق و انتگرال مرتبه کسری

لم ۳.۶.۱. تبدیل لاپلاس انتگرال کسری ریمان-لیوویل از مرتبه $\alpha > 0$ از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$L[J^\alpha f(x)] = \frac{F(s)}{s^\alpha} \quad (54.1)$$

لم ۴.۶.۱. تبدیل لاپلاس مشتق کسری ریمان-لیوویل برای $m - 1 < \alpha \leq m$ ، $(m \in \mathbb{N})$ از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$L[D^\alpha f(t)] = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^k [D^{\alpha-k-1} f(0)] \quad (55.1)$$

لم ۵.۶.۱. تبدیل لاپلاس مشتق کسری کاپوتو برای $m \in \mathbb{N}$, $m - 1 < \alpha \leq m$ در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$L[D_*^\alpha f(t)] = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0) \quad (56.1)$$

۷.۱ تأخیرهای زمانی

مسأله بررسی سیستم‌های تأخیری سال‌ها مورد توجه محققان قرار گرفته است. تأخیر زمانی اغلب در سیستم‌های متنوعی مانند سیستم‌های بیولوژیکی، زیستی، صنعتی، الکتریکی، هوایی، اقتصادی، اجتماعی، فرایندهای شیمیایی، شبکه‌های هیدرولیکی، شبکه‌های ارتباطی و ... در بین مسیر ورودی و خروجی سیستم اتفاق می‌افتد، به طوری که وجود تأخیری در این سیستم‌ها باعث عملکرد نامناسب آن‌ها می‌شود. به عنوان مثال، برنامه‌های کاربردی مهندسی را در نظر بگیرید که در آن‌ها تأخیرهای زمانی می‌تواند شامل تأخیرهای اندازه‌گیری، تأخیرهای انتقال و تأخیرهای محاسبه باشد. این سیستم‌ها توسط معادلات دیفرانسیل تأخیری نشان داده می‌شوند که این معادلات به طور گسترده‌ای در دهه‌های گذشته مورد مطالعه قرار گرفته‌اند [۲۷]. تأخیر در هر یک از اجزای ساختار یک سیستم می‌تواند به وجود آید. وجود تأخیر باعث می‌شود معادله مشخصه سیستم تأخیری تعداد نامتناهی ریشه داشته باشد و همین مسأله باعث می‌شود تحلیل این سیستم‌ها با روش‌های کلاسیک مخصوصاً در بررسی پایداری و طراحی کنترل کننده پس‌خورد مشکل باشد.

اولین رساله در تجزیه و تحلیل و سنتز سیستم‌های کنترل با تأخیر توسط گوریک ^{۴۴} در سال (۱۹۸۹) در [۹] منتشر شده است. در طی سه دهه اخیر مسأله تحلیل پایداری این سیستم‌ها مورد توجه قرار گرفته و مقالات زیادی در این زمینه مطرح شده است [۱۰]. همچنین روش‌هایی مانند روش پیش‌بینی اسمیت ^{۴۵} در [۲۸] و روش تخصیص طیف متناهی ^{۴۶} (FSA) در [۳۰]، با تبدیل مسأله به یک سیستم بدون تأخیر، برای پایدار کردن سیستم‌های تأخیری استفاده شده است.

در این بخش سیستم‌های گسسته زمانی با یک یا چند تأخیر در بردار حالت و ورودی را در نظر می‌گیریم. ما در این جا به بیان انواع تأخیری در بردار حالت، ورودی و یا هر دو می‌پردازیم.

یک سیستم گسسته زمانی معمولی با تأخیری را به صورت

$$x(k+1) = A_0 x(k) + \sum_{j=1}^r A_j x(k-j) + B_0 u(k) + \sum_{j=1}^r B_j u(k-j) \quad (57.1)$$

در نظر می‌گیرند، که $x \in \mathbb{R}^n$ و $u \in \mathbb{R}^m$ به ترتیب بردارهای حالت و ورودی، ماتریس‌های A_0, A_j ماتریس‌های $n \times n$ و ماتریس‌های B_0, B_j ماتریس‌های $n \times m$ هستند. ($j = 1, \dots, r$) سیستم‌های گسسته زمانی چند متغیره خطی با تأخیر زمانی را به سه دسته تقسیم‌بندی می‌کنند.

^{۴۴}Gorecki

^{۴۵}Smith predictor

^{۴۶}Finite Spectrum Assignment

دسته اول: شامل سیستم‌هایی است که در آن تمام ورودی‌ها دارای تأخیرهای یکسان یا متفاوت به خارج قسمت عدد صحیح از تأخیر زمانی است و فرمی به صورت زیر دارند:

$$x(k+1) = A_0 x(k) + \sum_{j=1}^r B_j u(k-j)$$

دسته دوم: شامل سیستم‌هایی است که در آن متغیرهای حالت دارای تأخیرهایی با مقادیر یکسان یا متفاوت باشند، و دارای فرمی به صورت:

$$x(k+1) = A_0 x(k) + \sum_{j=1}^r A_j x(k-j) + B_0 u(k)$$

هستند.

دسته سوم: این دسته شامل سیستم‌هایی است که دارای تأخیر با مقادیر یکسان یا متفاوت در بردار حالت و ورودی است، و فرمی به صورت (۵۷.۱) دارند.

در این رساله یک سیستم خطی پیوسته زمانی کسری با q تأخیر در بردار ورودی و حالت را به صورت

[۱۸]

$$\frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} = \sum_{k=0}^q [A_k x(t-d_k) + B_k u(t-d_k)]$$

در نظر می‌گیریم، که در فصل ۲ به شرح پایداری این سیستم‌ها می‌پردازیم.

از نمادگذاری‌های زیر استفاده می‌کنیم.

مجموعه‌ای از $n \times m$ ماتریس با درایه‌های نامنفی را با $\mathbb{R}_+^{n \times m}$ نمایش می‌دهیم و $\mathbb{R}_+^n = \mathbb{R}^{n \times 1}$. یک ماتریس $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}_+^{n \times m}$ (یک بردار) اکیداً مثبت نامیده می‌شود اگر $a_{ij} > 0$ (به ازای $i = 1, \dots, n$ و $j = 1, \dots, m$) که با $A > 0$ نمایش می‌دهیم. مجموعه‌ای از اعداد صحیح نامنفی را با \mathbb{Z}_+ نشان می‌دهیم.

فصل ۲

پایداری سیستم‌های خطی پیوسته زمانی مثبت کسری با تأخیر

در این فصل پایداری سیستم‌های پیوسته زمانی خطی کسری مثبت با تأخیر، توسط پس‌خورد حالت بررسی و همچنین نقطه تعادل سیستم را معرفی می‌کنیم. ماتریس پس‌خورد حالت را طوری انتخاب می‌کنیم که صفرهای چندجمله‌ای حلقه بسته در سمت چپ صفحه مختلط در زاویه از پیش تعیین شده قرار گیرد. در پایان مسائل پایداری را توسط پس‌خورد حالت فرمول‌بندی کرده و حل می‌کنیم.

۱.۲ سیستم‌های خطی پیوسته زمانی مثبت کسری

در این جا از تعریف کاپوتو برای مشتق‌گیری کسری استفاده می‌شود [۲۴، ۲۹]:

$$D_t^\alpha f(t) = \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}} d(\tau),$$
$$n-1 < \alpha \leq n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}, \quad (1.2)$$

که در آن $\alpha \in \mathbb{R}$ مرتبه مشتق کسری و $f^n(\tau) = \frac{d^n f(\tau)}{d\tau^n}$.

سیستم خطی توصیف شده به وسیله متغیرهای حالت زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} = Ax(t) + Bu(t), \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (2.2)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad (3.2)$$

که در آن $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ، $u(t) \in \mathbb{R}^m$ و $y(t) \in \mathbb{R}^p$ به ترتیب بردارهای حالت، ورودی و خروجی هستند و $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ، $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ، $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ و $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$.

قضیه ۱.۱.۲ [۱۵] جوابی از معادله (۲.۲) به صورت زیر داده شده است:

$$x(t) = \Phi_\circ(t)x_\circ + \int_\circ^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau, \quad x(\circ) = x_\circ, \quad (4.2)$$

که در آن

$$\Phi_0(t) = E_\alpha(At^\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha + 1)}, \quad (5.2)$$

$$\Phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{(k+1)\alpha-1}}{\Gamma[(k+1)\alpha]}, \quad (6.2)$$

و تابع $E_\alpha(At^\alpha)$ تابع ماتریسی میتاگ - لفلر و $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$ تابع گاما است [۲۵].
برهان. با گرفتن تبدیل لاپلاس از رابطه (۲.۲) داریم:

$$L(D^\alpha x(t)) = s^\alpha x(s) - s^{\alpha-1} x_0, \quad (7.2)$$

$$x(s) = L(x(t)) = \int_0^\infty x(t) e^{-st} dt, \quad (8.2)$$

بنابراین:

$$x(s) = [I_n s^\alpha - A]^{-1} (s^{\alpha-1} x_0 + Bu(s)), \quad (9.2)$$

واضح است که:

$$(I_n s^\alpha - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k s^{-(k+1)\alpha}, \quad (10.2)$$

چون:

$$(I_n s^\alpha - A) \left(\sum_{k=0}^{\infty} A^k s^{-(k+1)\alpha} \right) = I_n. \quad (11.2)$$

با جایگذاری رابطه‌ی (۱۱.۲) در رابطه‌ی (۹.۲) داریم:

$$x(s) = \sum_{k=0}^{\infty} A^k s^{-(k\alpha+1)} x_0 + \sum_{k=0}^{\infty} A^k s^{-(k+1)\alpha} Bu(s) \quad (12.2)$$

با استفاده از تبدیل لاپلاس معکوس رابطه (۱۲.۲) و قضیه کانولوشن دو تابع داریم:

$$\begin{aligned} x(t) &= L^{-1}(x(s)) = \sum_{k=0}^{\infty} A^k L^{-1}(s^{-(k\alpha+1)}) x_0 \\ &\quad + \sum_{k=0}^{\infty} A^k L^{-1}(s^{-(k+1)\alpha} Bu(s)) \\ &= \Phi_0(t) x_0 + \int_0^t \Phi(t-\tau) Bu(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (13.2)$$

که در آن

$$\Phi_0(t) = \sum_{K=0}^{\infty} A^k L^{-1}(s^{(k\alpha+1)}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha + 1)}, \quad (14.2)$$

$$\Phi(t) = L^{-1}([I_n s^\alpha - A]^{-1}) = \sum_{k=0}^{\infty} A^k L^{-1}[s^{-(k+1)\alpha}] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{(k+1)\alpha-1}}{\Gamma[(k+1)\alpha]}. \quad (15.2)$$

□

ملاحظه ۲.۱.۲. از رابطه‌ی (۵.۲) و (۶.۲) به‌ازای $\alpha = ۱$ داریم:

$$\Phi_0(t) = \Phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{\Gamma(k+1)} = e^{At},$$

تعریف ۳.۱.۲. سیستم کسری (۲.۲) و (۳.۲) مثبت نامیده می‌شود، اگر و تنها اگر برای هر شرط اولیه $x_0 \in \mathbb{R}_+^n$ و همه ورودی‌های $u(t) \in \mathbb{R}_+^m$ ، $(t \geq 0)$ داشته باشیم:

$$x(t) \in \mathbb{R}_+^n, \quad y(t) \in \mathbb{R}_+^p \quad \forall t \geq 0$$

ملاحظه ۴.۱.۲. مجموعه‌ای از $n \times n$ ماتریس متلر را با M_n نشان می‌دهیم.

قضیه ۵.۱.۲. [۱۳] فرض کنید که $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ آنگاه

$$e^{At} > 0 \quad \forall t \geq 0, \quad (۱۶.۲)$$

اگر و تنها اگر A یک ماتریس متلر باشد.

برهان. از بسط

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \dots$$

داریم که معادله (۱۶.۲) (به‌ازای بعضی $t > 0$ کوچک) برقرار است، تنها در صورتی که A یک ماتریس متلر باشد.

فرض کنید که A یک ماتریس متلر باشد، اسکالر $\lambda > 0$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $A + \lambda I > 0$ با توجه به این‌که:

$$(A + \lambda I)(-\lambda I) = (-\lambda I)(A + \lambda I)$$

داریم:

$$e^{At} = e^{(A+\lambda I)t - \lambda I t} = e^{(A+\lambda I)t} e^{-\lambda I t} > 0$$

□

چون $e^{(A+\lambda I)t} > 0$ و $e^{-\lambda I t} > 0$ پس $e^{At} > 0$.

لم ۶.۱.۲. [۱۵] فرض کنید $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ و $0 < \alpha \leq 1$ در این صورت:

$$\Phi_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha + 1)} \in \mathbb{R}_+^{n \times n}, \quad \forall t \geq 0 \quad (۱۷.۲)$$

و

$$\Phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{(k+1)\alpha-1}}{\Gamma[(k+1)\alpha]} \in \mathbb{R}_+^{n \times n}, \quad \forall t \geq 0 \quad (۱۸.۲)$$

اگر و تنها اگر A یک ماتریس متلر باشد. به عبارتی $A \in M_n$.

برهان. از بسط دو تابع

$$\Phi_0(t) = I_n + \frac{A}{\Gamma(\alpha + 1)} + \dots,$$

$$\Phi(t) = I_n \frac{t^{(\alpha+1)}}{\Gamma(\alpha)} + A \frac{t^{2\alpha+1}}{\Gamma(2\alpha)} + \dots$$

داریم:

$\Phi_0(t) \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ و $\Phi(t) \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ (به‌ازای برخی $t > 0$)، اگر و تنها اگر A یک ماتریس متلر باشد.

طبق این‌که

$$e^{At} \in \mathbb{R}_+^{n \times n}, \quad \forall t \geq 0 \quad (19.2)$$

اگر و تنها اگر A یک ماتریس متلر باشد، و با استفاده از تعریف $\Phi_0(t)$ داریم:

$$\begin{aligned} \Phi_0(t) - e^{At^\alpha} &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(At^\alpha)^k}{\Gamma(k\alpha + 1)} - \frac{(At^\alpha)^k}{k!} \right) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k! - \Gamma(k\alpha + 1)}{\Gamma(k\alpha + 1)} \frac{(At^\alpha)^k}{k!} \geq 0, \quad \forall t \geq 0 \end{aligned} \quad (20.2)$$

حال چون به‌ازای $0 < \alpha \leq 1$ ، $k! \geq \Gamma(k\alpha + 1)$ ، بنابراین با استفاده از (۱۹.۲) و (۲۰.۲) داریم:

$$\Phi_0(t) \geq e^{At^\alpha} \geq 0, \quad \forall t \geq 0.$$

اثبات $\Phi(t)$ همانند اثبات $\Phi_0(t)$ است. □

قضیه ۰۷.۱۰۲. [۱۵] سیستم کسری پیوسته زمانی (۲.۲) مثبت داخلی (مثبت) است، اگر و تنها اگر:

$$A \in M_n, \quad B \in \mathbb{R}_+^{n \times m}, \quad C \in \mathbb{R}_+^{p \times n}, \quad D \in \mathbb{R}_+^{p \times m}, \quad (21.2)$$

برهان. فرض کنید شرایط (۲۱.۲) برقرار باشد. طبق قضیه (۱۰.۱.۲) راه‌حلی از (۲.۲) فرمی به‌صورت (۴.۲) دارد. حال طبق لم (۶.۱.۲) داریم که $\Phi(t), \Phi_0(t) \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ ، اگر و تنها اگر A یک ماتریس متلر باشد. پس اگر A یک ماتریس متلر باشد و به‌ازای $t \geq 0$ ، $B \in \mathbb{R}_+^{n \times m}$ و $x_0(t) \in \mathbb{R}_+^n$ و $u(t) \in \mathbb{R}_+^m$ باشد، آنگاه از معادله (۲.۲) به‌ازای $t \geq 0$ داریم: $x(t) \in \mathbb{R}_+^n$ ، و از معادله (۳.۲)، چون $C \in \mathbb{R}_+^{p \times n}$ و $D \in \mathbb{R}_+^{p \times m}$ داریم: $y(t) \in \mathbb{R}_+^p$.

حال فرض کنیم که $u(t) = 0$ و $x_0 = e_i$ (که e_i ، امین ستون از ماتریس واحد I_n است). مسیر سیستم از ناحیه مثبت \mathbb{R}_+^n خارج نمی‌شود تنها در صورتی‌که $x^\alpha(0) = Ae_i \geq 0$ ، به‌عبارت دیگر:

$$\forall i \neq j \quad a_{ij} \geq 0$$

پس ماتریس A باید یک ماتریس متلر باشد، به همین دلیل به‌ازای $x_0 = 0$ داریم:

$$x^\alpha(0) = Bu(0) \geq 0$$

و این یعنی که: $B \in \mathbb{R}_+^{n \times m}$ ، چون $u(0) \in \mathbb{R}_+^m$ می‌تواند دلخواه باشد.

از رابطه (۳.۲) به‌ازای $t \geq 0$ ، $u(t) = 0$ ، داریم: $y(0) = Cx(0) \geq 0$ و $C \in \mathbb{R}_+^{p \times n}$. چون $x_0 \in \mathbb{R}_+^n$ می‌تواند دلخواه باشد.

به‌روش مشابه با فرض $x_0 = 0$ داریم: $y(0) = Du(0) \geq 0$ و $D \in \mathbb{R}_+^{p \times m}$. چون $u(0) \in \mathbb{R}_+^m$

می‌تواند دلخواه باشد. □

۲.۲ پایداری سیستم‌های کسری مثبت

تعریف ۱.۲.۲. سیستم کسری مثبت

$$\frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} = Ax(t), \quad A \in M_n, \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (22.2)$$

پایدار مجانبی نامیده می‌شود اگر و تنها اگر:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_\alpha(t)x_0(t) = 0, \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}_+^n \quad (23.2)$$

چندجمله‌ای مشخصه (۲۲.۲) به صورت زیر است:

$$\det[I_n s^\alpha - A] = (s^\alpha)^n + a_{n-1}(s^\alpha)^{n-1} + \dots + a_1 s^\alpha + a_0 \quad (24.2)$$

با جایگذاری $\lambda = s^\alpha$ در رابطه بالا داریم:

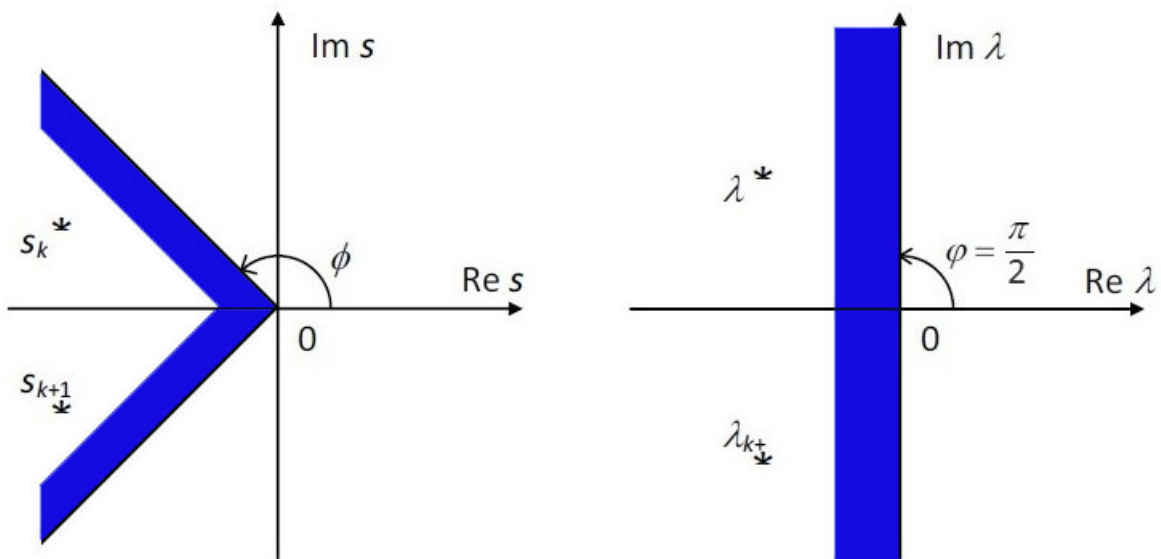
$$\det[I_n \lambda - A] = \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = w_A(\lambda) \quad (25.2)$$

با فرض این که $arg(s) = \Phi$ و $arg(\lambda) = \varphi$ از رابطه $\lambda = s^\alpha$ داریم:

$$\varphi = \alpha \Phi$$

حال از روابط فوق به ازای $\varphi = \frac{\pi}{\alpha}$ نتیجه‌ی زیر را داریم:

نتیجه ۲.۲.۲. [۱۸] اگر صفرهای چندجمله‌ای مشخصه‌ی (۲۵.۲) در نیمه‌ی سمت چپ صفحه مختلط باشند، پس صفرهای چندجمله‌ای مشخصه (۲۴.۲) در زاویه مشخص شده $\Phi = \frac{\pi}{\alpha}$ در نیمه سمت چپ صفحه مختلط واقع می‌شوند. (مطابق شکل ۱.۲)



شکل ۱.۲: تصویر سازی نتیجه (۲.۲.۲)

قضیه ۳.۲.۲. ماتریس اکیداً مثبت $A \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ دقیقاً یک مقدار ویژه حقیقی مثبت مانند r دارد، به طوری که به ازای هر مقدار ویژه λ_i از ماتریس A داریم:

$$r \geq |\lambda_i|, \quad \forall i = 0, 1, \dots, n-1.$$

به علاوه متناظر با مقدار ویژه r یک بردار ویژه اکیداً مثبت مانند x وجود دارد.

برهان. برای اثبات این قضیه به [۱۳] مراجعه شود. \square

لم ۴.۲.۲. هر ماتریس متلر $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ یک مقدار ویژه حقیقی $\alpha = \max_i \operatorname{Re}(\lambda_i)$ دارد که اگر $\alpha < 0$ باشد، آنگاه $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$ که در آن $\lambda_i = \lambda_i(A)$ ، $(i = 0, 1, \dots, n-1)$ مقادیر ویژه ماتریس A هستند.

برهان. برای اثبات این لم به [۱۳] مراجعه شود. \square

قضیه ۵.۲.۲. [۱۳] صفرهایی از چندجمله‌ای مشخصه (۲۴.۲) در ناحیه $\Phi = \frac{\pi}{\gamma\alpha}$ واقع است، اگر و تنها اگر در یکی از شرایط زیر صدق کند:

(۱). همه ضرایب چندجمله‌ای مشخصه (۲۵.۲) مثبت باشند، به عبارتی:

$$a_i \geq 0, \quad \forall i = 0, 1, \dots, n-1,$$

(۲). تمام زیر ماتریس‌های اصلی، ماتریس

$$-A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (26.2)$$

مثبت باشند، یعنی:

$$|a_{11}| > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots, \det(-A) > 0, \quad (27.2)$$

(۳). یک بردار اکیداً مثبت $\lambda > 0$ وجود دارد به قسمی که:

$$A\lambda < 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+^n, \quad (28.2)$$

برهان. (۱). چون ضرایب a_i ها از $w_A(\lambda)$ حقیقی‌اند، پس مقادیر ویژه $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ از ماتریس A یا حقیقی و یا مزدوج مختلط هستند، بنابراین اگر

$$\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0, \quad (i = 0, 1, \dots, n-1)$$

آنگاه همه ضرایب چندجمله‌ای

$$w_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_n)$$

مثبت هستند، پس $(i = 0, 1, \dots, n-1)$ ، $a_i > 0$

برهان خلف: اگر A یک ماتریس متلر باشد پس طبق نکته (۴.۲.۲) مقدار ویژه $\alpha = \max_i \operatorname{Re}(\lambda_i)$ وجود دارد که اگر $\alpha < 0$ آنگاه $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ حال

$$\forall a_i > 0, \quad i = 0, 1, \dots, n-1, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+$$

داریم:

$$w_A(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 > 0$$

و این یعنی که ماتریس A هیچ مقدار ویژه حقیقی منفی ندارد، بنابراین ما به تناقض رسیدیم.

(۲). اگر رابطه (۲۷.۲) برقرار باشد، آنگاه ماتریس $-A$ معین مثبت است پس ماتریس A معین منفی است، یعنی تمام مقادیر ویژه آن منفی‌اند.

(۳). طبق خواص مقادیر ویژه و بردارهای ویژه اگر x را بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه λ از ماتریس A در نظر بگیریم، داریم:

$$Ax = \lambda x$$

حال طبق فرض بردار $x > 0$ ، پس در صورتی که $Ax < 0$ است که $\lambda < 0$ باشد، و این یعنی، مقدار ویژه در سمت چپ قرار می‌گیرد.

□

می‌توان نشان داد که شرایط (۱) و (۲) با هم معادل‌اند [۱۲]، و همچنین مشخص است که اگر $A \in M_n$ شرایط (۲) و (۳) نیز با هم معادل‌اند.

تعریف ۶.۲.۲. بردار $x_e \in \mathbb{R}_+^n$ برای ورودی ثابت $u \in \mathbb{R}_+^n$ ، نقطه تعادل سیستم پایدار مثبت (۲.۲) نامیده می‌شود، اگر و تنها اگر:

$$Ax_e + Bu = 0, \quad (۲۹.۲)$$

اگر $Bu = \mathbf{1}_n = [1, 1, \dots, 1]^T$ T ترانهاده ماتریس را نشان می‌دهد) پس از رابطه بالا داریم:

$$x_e = -A^{-1} \mathbf{1}_n > 0, \quad (۳۰.۲)$$

پس برای یک سیستم پایدار $(-A^{-1} \in \mathbb{R}_+^{n \times n})$.

نتیجه بنابر آن چه ذکر شد بدین شرح است:

نتیجه ۷.۲.۲. اگر A یک ماتریس متلر از سیستم پایدار مجانبی مثبت $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ باشد، آنگاه $-A^{-1} > 0$.

قضیه ۸.۲.۲. [۱۳] نقطه تعادل x_e متناظر با $Bu > 0$ از سیستم پایدار مجانبی مثبت (۲.۲) اکیداً مثبت است. به عبارتی $x_e > 0$.

برهان. برهان خلف: فرض کنید $x_e = 0$ ، پس از رابطه (۲۹.۲) داریم که $Bu = 0$. که این با فرض $Bu > 0$ در تناقض است.

□

بردار اکیداً مثبت λ در رابطه (۲۸.۲) می‌تواند نقطه تعادل رابطه (۳۰.۲) انتخاب شود، زیرا:

$$A\lambda = A(-A^{-1} \mathbf{1}_n) = -\mathbf{1}_n.$$

۳.۲ پایداری سیستم‌های پیوسته زمانی مثبت با تأخیر

هر زمان که اطلاعات یا انرژی به لحاظ فیزیکی از یک مکان به مکان دیگر انتقال داده می‌شود به همراه انتقال، تأخیر^۱ به وجود می‌آید. که فاصله و مقدار آن به فاصله و سرعت انتقال بستگی دارد، به این ترتیب بعضی تأخیرها کوتاه و بعضی دیگر خیلی طولانی هستند. وجود تأخیر، مخصوصاً تأخیرهای طولانی در سیستم‌ها گاهی باعث ناپایداری می‌شود، به همین دلیل در طی سه دهه اخیر تحلیل این سیستم‌ها و مساله پایداری آن‌ها موضوعی است که مورد توجه محققان قرار گرفته است.

یک سیستم خطی پیوسته زمانی با q تأخیر در متغیرهای حالت و ورودی را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\dot{x}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} [A_k x(t - d_k) + B_k u(t - d_k)] \quad (31.2)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (32.2)$$

که در آن $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ، $u(t) \in \mathbb{R}^m$ و $y(t) \in \mathbb{R}^p$ به ترتیب بردارهای حالت، ورودی و خروجی هستند. و A_k ، B_k ، C و D ماتریس‌های حقیقی با بعدهای مناسب هستند. و همچنین d_k ، $(k = 1, 2, \dots, q)$ تأخیرها هستند. $(d_k \geq 0, d_0 = 0)$ شرایط اولیه برای رابطه‌ی (۳۱.۲) را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$x(t) = x_0(t), \quad \forall t \in [-d, 0], \quad d = \max_k d_k \quad (33.2)$$

که در آن $x_0(t)$ یک تابع برداری است. سیستم (۳۱.۲) و (۳۲.۲) را مثبت می‌نامیم اگر و تنها اگر، برای هر $x_0 \in \mathbb{R}_+^n$ و برای همه ورودی‌های $u(t) \in \mathbb{R}_+^m$ ($t \geq -d$) داشته باشیم:

$$x(t) \in \mathbb{R}_+^n, \quad y(t) \in \mathbb{R}_+^p, \quad (t \geq 0)$$

قضیه ۰.۱.۳.۲ [۱۷] سیستم (۳۱.۲) و (۳۲.۲) مثبت است، اگر و تنها اگر:

$$\begin{aligned} A_0 &\in M_n, \quad A_k \in \mathbb{R}_+^{n \times n}, \quad k = 1, 2, \dots, q \\ B_l &\in \mathbb{R}_+^{n \times m}, \quad l = 0, 1, \dots, q, \quad C \in \mathbb{R}_+^{p \times n}, \quad D \in \mathbb{R}_+^{p \times m} \end{aligned} \quad (34.2)$$

برهان. معادله (۳۱.۲) به ازای $x_0(t) = 0$ و $t \in [-d, 0]$ که $u(t) = 0$ و $t \geq 0$ به صورت زیر است:

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t), \quad t \in [0, d], \quad d = \max_k d_k \quad (35.2)$$

از رابطه (۳۵.۲) واضح است که، تنها در صورتی که $A_0 \in M_n$ باشد، آنگاه $x \in \mathbb{R}_+^n$. از رابطه (۳۱.۲) فرض کنید:

$$u(t) = 0, \quad t \geq 0, \quad x_0(d_k) = e_i, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

^۱Delay

که e_i (i امین ستون ماتریس واحد I_n است) و $x(d_j) = 0$ ($j = 1, \dots, k-1, k+1, \dots, n$). به ازای $t = 0$ داریم:

$$\dot{x}(t) = A_k e_i = A_{ki} \in \mathbb{R}_+^n$$

که A_{ki} ، i امین ستون ماتریس A_k است. بنابراین $A_k \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ ($k = 1, \dots, q$). از رابطه (۳۱.۲) به ازای $t = 0$ و $x_0(t) = 0$ ($\forall t \in [-d, 0]$) داریم که $\dot{x}(t) = Bu(0)$ پس $B \in \mathbb{R}_+^{n \times m}$ ، با فرض این که $u(0) \in \mathbb{R}_+^m$ اختیاری است. به روش مشابه، هم چون سیستم‌های مثبت بدون تأخیری می‌توان نشان داد که $C \in \mathbb{R}_+^{p \times n}$ و $D \in \mathbb{R}_+^{p \times m}$.

حال جوابی از معادله (۳۱.۲) به ازای $t \in [0, 1]$ به صورت:

$$x(t) = e^{A_0 t} x_0 + \int_0^t e^{A_0(t-\tau)} \sum_{k=1}^q (A_k x_0(\tau - d_k) + B_k u(\tau - d_k)) d\tau \quad (36.2)$$

با توجه به این که $e^{A_0 t} \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ ، $t \geq 0$ ، اگر $A_0 \in M_n$ و شرایط (۳۴.۲) برقرار باشد، از رابطه (۳۶.۲) داریم:

$$x(t) \in \mathbb{R}_+^n, \quad t \in [0, d].$$

چون $x_0(t) \in \mathbb{R}_+^n$ و $(t \in [-d, 0])$ ، $u(t) \in \mathbb{R}_+^m$ و $(t \geq 0)$.

چون $x(t) \in \mathbb{R}_+^n$ و $u(t) \in \mathbb{R}_+^m$ پس از رابطه (۳۲.۲) داریم:

$$y(t) \in \mathbb{R}_+^p, \quad t \in [0, d].$$

حال با استفاده از روش گام به گام می‌توانیم ملاحظات خود را به بازه‌های $[d, 2d]$ و $[2d, 3d]$ و ... گسترش دهیم. □

قضیه ۲.۳.۲. [۱۷] سیستم مثبت (۳۱.۲) و (۳۲.۲) پایدار مجانبی است اگر و تنها اگر یک بردار اکیداً مثبت $\lambda \in \mathbb{R}_+^n$ وجود داشته باشد که در رابطه زیر صدق کند

$$A\lambda < 0, \quad A = \sum_{k=0}^q A_k, \quad (37.2)$$

برهان. ابتدا باید نشان دهیم که اگر سیستم

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + \sum_{k=1}^q A_k x(t - d_k) + Bu(t) \quad (38.2)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (39.2)$$

پایدار مجانبی باشد آنگاه بردار اکیداً مثبت $\lambda \in \mathbb{R}_+^n$ وجود دارد که در شرایط (۳۷.۲) صدق می‌کند. پس از معادله (۳۸.۲) با فرض $B = 0$ در بازه $[0, \infty]$ انتگرال می‌گیریم، داریم:

$$\int_0^\infty \dot{x}(t) dt = A_0 \int_0^\infty x(t) dt + \sum_{k=1}^q A_k \int_0^\infty x(t - d_k) dt$$

و

$$x(\infty) - x(\circ) - \sum_{k=1}^q A_k \int_{-d_k}^{\circ} x(t) dt = A \int_{\circ}^{\infty} x(t) dt, \quad (40.2)$$

برای سیستم پایدار مجانبی مثبت داریم:

$$x(\infty) = \circ,$$

و

$$x(\circ) + \sum_{k=1}^q A_k \int_{-d_k}^{\circ} x(t) dt > \circ,$$

و

$$\int_{\circ}^{\infty} x(t) dt > \circ,$$

بنابراین از رابطه (۴۰.۲) و به‌ازای $\lambda = \int_{\circ}^{\infty} x(t) dt$ رابطه (۳۷.۲) برقرار است. پس نشان دادیم که اگر شرایط (۳۷.۲) برقرار باشد سیستم مثبت (۳۸.۲) پایدار مجانبی است. واضح است که سیستم (۳۸.۲) با فرض $B = \circ$ پایدار مجانبی است اگر و تنها اگر ترانهاده سیستم متناظرش یعنی:

$$\dot{x}(t) = A^T x(t) + \sum_{k=1}^q A_k^T x(t - d_k), \quad (41.2)$$

پایدار مجانبی باشد. حال یک تابع دلخواه لیاپانوف برای سیستم مثبت (۴۱.۲) را می‌توانیم به‌صورت

$$V(t) = x^T(t)\lambda + \sum_{k=1}^q \int_{t-d_k}^t x^T(\tau) d\tau A_k \lambda, \quad (42.2)$$

انتخاب کنیم، که این رابطه برای هر $x(t) \in \mathbb{R}_+^n$ که $x(t) \neq \circ$ باشد، مثبت است. حال با استفاده از روابط (۴۱.۲) و (۴۲.۲) داریم:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \dot{x}^T(t)\lambda + \sum_{k=1}^q (x^T(t) - x^T(t - d_k)) A_k \lambda \\ &= x^T(t) A \lambda + \sum_{k=1}^q x^T(t - d_k) A_k \lambda \\ &+ \sum_{k=1}^q (x^T(t) - x^T(t - d_k)) A_k \lambda = x^T(t) A \lambda. \end{aligned} \quad (43.2)$$

طبق شرایط (۳۷.۲) و (۴۳.۲) داریم که $\dot{V}(x) < \circ$ ، پس سیستم (۳۸.۲) و (۳۹.۲) پایدار مجانبی است. \square

به‌طور معادل می‌توان قضیه زیر را مطرح کرد.

قضیه ۳.۳.۲. [۱۷] سیستم مثبت با تأخیر (۳۱.۲) و (۳۲.۲) پایدار مجانبی است اگر و تنها اگر سیستم مثبت بدون تأخیر

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad A = \sum_{k=0}^q A_k \in M_n \quad (۴۴.۲)$$

پایدار مجانبی باشد.

برهان. در قضیه (۲.۳.۲) نشان داده شده است که سیستم مثبت (۴۴.۲) پایدار مجانبی است اگر و تنها اگر بردار اکیداً مثبت $\lambda \in \mathbb{R}_+^n$ وجود داشته باشد به طوری که رابطه (۳۷.۲) برقرار باشد. بنابراین طبق قضیه (۲.۳.۲) سیستم مثبت (۳۸.۲) پایدار مجانبی است اگر و تنها اگر سیستم مثبت (۴۴.۲) پایدار مجانبی باشد.

□

از قضیه فوق نتیجه می‌گیریم که بررسی پایداری مجانبی از سیستم‌های مثبت با تأخیر، می‌تواند به بررسی پایداری مجانبی سیستم‌های مثبت بدون تأخیر کاهش یابد. برای بررسی پایداری مجانبی سیستم‌های مثبت زیر را مطرح می‌کنیم [۱۳].

قضیه ۴.۳.۲. [۱۷] سیستم مثبت با تأخیر (۳۱.۲) و (۳۲.۲) پایدار مجانبی است، اگر و تنها اگر یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

(۱). مقادیر ویژه s_1, s_2, \dots, s_n از ماتریس A دارای قسمت حقیقی منفی باشند.

$$\operatorname{Res}_k < 0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

(۲). همه ضرایب چندجمله‌ای مشخصه ماتریس A مثبت هستند.

(۳). تمام زیر ماتریس‌های اصلی ماتریس

$$-A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (۴۵.۲)$$

مثبت هستند. به عبارت دیگر:

$$|a_{11}| > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots, \det[-A] > 0. \quad (۴۶.۲)$$

قضیه ۵.۳.۲. [۱۷] سیستم مثبت با تأخیر (۳۱.۲) و (۳۲.۲) برای هر ماتریس A_k ($k = 1, \dots, q$) ناپایدار است اگر سیستم مثبت ($\dot{x} = A \circ x$) ناپایدار باشد.

قضیه ۶.۳.۲. [۱۷] اگر حداقل یکی از درایه‌های قطری ماتریس A مثبت باشد، آنگاه سیستم مثبت (۳۱.۲) و (۳۲.۲) برای هر A_k ($k = 1, 2, \dots, q$) ناپایدار است.

برهان. اگر $a_{ii} > 0$ ($i \in (1, 2, \dots, n)$) باشد، پس $\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j > 0$ (چون A یک ماتریس متراست)، و برای هر $x_0 \in \mathbb{R}_+^n$ ، اگر $t \rightarrow \infty$ آنگاه i امین مولفه از بردار $x = x(t)$ به سمت بی‌نهایت میل می‌کند، بنابراین سیستم مثبت با معادلات

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t), \quad x(0) = x_0$$

□

ناپایدار است.

۴.۲ پایداری سیستم‌های خطی کسری با تأخیر به وسیله پس خورد حالت

سیستم خطی کسری

$$\frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} = \sum_{k=0}^q [A_k x(t - d_k) + B_k u(t - d_k)] \quad (۴۷.۲)$$

با پس خورد حالت

$$u(t) = Kx(t) \quad (۴۸.۲)$$

را در نظر بگیرید که در آن $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ یک ماتریس افزوده است.

با جایگذاری رابطه (۴۸.۲) در (۴۷.۲) ماتریس حلقه بسته را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} = \sum_{k=0}^q (A_k + B_k K)x(t - d_k), \quad 0 < \alpha \leq 1. \quad (۴۹.۲)$$

سیستم مثبت با تأخیر (۴۹.۲) پایدار مجانبی است اگر و تنها اگر سیستم مثبت بدون تأخیری

$$\frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} = (A + BK)x(t); \quad A = \sum_{k=0}^q A_k, \quad B = \sum_{k=0}^q B_k, \quad (۵۰.۲)$$

پایدار مجانبی باشد.

بنابراین پایداری سیستم‌های خطی پیوسته زمانی با تأخیر، مستقل از تعداد و مقادیر تأخیری است. در

واقع پایداری مجانبی در بخش‌های سمت چپ صفحه مختلط در نظر گرفته می‌شود.

پس در حقیقت ما به دنبال ماتریس افزوده K هستیم به طوری که سیستم حلقه بسته (۴۹.۲) مثبت باشد

و همچنین صفرهای چندجمله‌ای مشخصه

$$\det [I_n s^\alpha - (A + BK)] = (s^\alpha)^n + a_{n-1}(s^\alpha)^{n-1} + \dots + a_1 s^\alpha + a_0. \quad (۵۱.۲)$$

در ناحیه $\Phi = \frac{\pi}{\alpha}$ قرار بگیرند.

قضیه ۰.۱۴۰۲ [۱۸] سیستم کسری حلقه بسته (۴۹.۲) مثبت است و صفرهای چندجمله‌ای (۵۱.۲) در

ناحیه $\Phi = \frac{\pi}{\alpha}$ واقع شده‌اند اگر و تنها اگر یک ماتریس قطری

$$\Lambda = \text{diag} [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]; \quad \lambda_k > 0, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (۵۲.۲)$$

و ماتریس حقیقی $D \in \mathbb{R}^{m \times n}$ موجود باشند که در شرایط زیر صدق کنند:

$$A\Lambda + BD \in M_n \quad (۵۳.۲)$$

$$(A\Lambda + BD)\lambda_n < 0 \quad (54.2)$$

ماتریس افزوده K به صورت

$$K = D\Lambda^{-1}, \quad (55.2)$$

است.

برهان. ابتدا باید نشان دهیم که سیستم حلقه بسته (۴۹.۲) مثبت است اگر و تنها اگر شرایط (۵۳.۲) و (۵۴.۲) برقرار باشند. از روابط (۴۹.۲)، (۵۰.۲) و (۵۵.۲) داریم:

$$\sum_{k=0}^q (A_k + B_k K) = A + BK = A + BD\Lambda^{-1} = (A\Lambda + BD)\Lambda^{-1} \in M_n \quad (56.2)$$

رابطه فوق برقرار است اگر و تنها اگر رابطه (۵۳.۲) برقرار باشد، با توجه به این که:

$$(K\Lambda)\lambda_n = (D\Lambda^{-1}\Lambda)\lambda_n = D\lambda_n, \quad \Lambda\lambda_n = \lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_n]^T \quad (57.2)$$

و با استفاده از (۳۷.۲) داریم:

$$(A + BK)\lambda = (A + BK)\Lambda\lambda_n = (A\Lambda + BD)\lambda_n < 0 \quad (58.2)$$

پس مطابق قضیه (۵۰.۲) صفرهای چندجمله‌ای مشخصه (۵۱.۲) در $\Phi = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}$ قرار دارند، اگر و تنها اگر رابطه (۵۴.۲) برقرار باشد. □

بنابراین اگر شرایط قضیه فوق برقرار باشد پایداری را می‌توان طبق روش زیر محاسبه نمود.
 \triangleleft روش محاسبه پایداری:

گام اول: ابتدا یک ماتریس قطری (۵۲.۲) با $\lambda_k > 0$ ($k = 1, \dots, n$) و ماتریس حقیقی $D \in \mathbb{R}^{m \times n}$ که در شرایط (۵۳.۲) و (۵۴.۲) صدق می‌کند را انتخاب کنید.

گام دوم: با استفاده از فرمول (۵۵.۲) ماتریس افزوده K را محاسبه کنید.

مثال ۲۰۴.۲. سیستم کسری (۴۹.۲) با $\alpha = 0.8$ و $q = 2$ و ماتریس‌های زیر را در نظر بگیرید.

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 & -0.2 \\ 0.2 & -1 & 0 \\ 0 & -0.2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.4 & -0.3 \\ 0.1 & -0.5 & 0 \\ 0 & -0.1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & -0.5 \\ 0.7 & -1.5 & 0 \\ 0 & -0.7 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$B_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 \\ 0 & 0 \\ 0.2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ 0 & 0 \\ 0.3 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0.4 \\ 0 & 0 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix} \quad (59.2)$$

ماتریس افزوده $K \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ را طوری پیدا کنید که سیستم حلقه بسته مثبت باشد و صفرهای چندجمله‌ای مشخصه در ناحیه $\phi = \frac{5}{8}\pi$ قرار گیرند.

برهان. چون ماتریس‌های A_0 ، A_1 و A_2 مؤلفه‌های غیر قطری منفی دارند، بنابراین سیستم کسری مثبت نیست. در این صورت: (۵۹.۲)

$$A = \sum_{k=0}^2 A_k = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 2/5 \end{bmatrix}, \quad B = \sum_{k=0}^2 B_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (۶۰.۲)$$

با استفاده از روش مطرح شده در بالا و رابطه (۶۰.۲) داریم:

گام اول: ماتریس‌های زیر را انتخاب می‌کنیم

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0/5 & 2 & -0/3 \\ -4 & 0 & 1/4 \end{bmatrix} \quad (۶۱.۲)$$

و شرایط (۵۳.۲) را بررسی می‌کنیم

$$\begin{aligned} A\Lambda + BD &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 2/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0/5 & 2 & -3/5 \\ -4 & 0 & 1/4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0/4 \\ 1 & -6 & 0 \\ 0/5 & 0 & -1 \end{bmatrix} \in M_3 \end{aligned} \quad (۶۲.۲)$$

و شرایط (۵۴.۲) به صورت:

$$(A\Lambda + BD) \setminus_n = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0/4 \\ 1 & -6 & 0 \\ 0/5 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0/6 \\ -5 \\ -0/5 \end{bmatrix}$$

بنابراین شرایط گام اول برقرار است.

گام دوم: با استفاده از رابطه (۵۵.۲) ماتریس افزوده را محاسبه می‌کنیم.

$$K = D\Lambda^{-1} = \begin{bmatrix} 0/5 & 2 & -3/5 \\ -4 & 0 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0/5 & 1 & -3/5 \\ -4 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$$

سیستم حلقه بسته ما مثبت است، چون ماتریس

$$A_c = A + BK = \begin{bmatrix} -۳ & ۱ & ۰/۴ \\ ۱ & -۳ & ۰ \\ ۰/۵ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}$$

یک ماتریس متلر است.

چندجمله‌ای مشخصه

$$\det[I_n \lambda + A_c] = \begin{vmatrix} \lambda + ۳ & -۱ & -۰/۴ \\ -۱ & \lambda + ۳ & ۰ \\ -۰/۵ & ۰ & \lambda + ۱ \end{vmatrix} = \lambda^3 + ۷\lambda^2 + ۱۳/۸\lambda + ۷/۴$$

دارای ضرایب مثبت است. بنابراین صفرهای چندجمله‌ای مشخصه از سیستم حلقه بسته در ناحیه

□

$\phi = \frac{5}{8}\pi$ واقع شده است.

این ملاحظات را می‌توان برای سیستم‌های کسری

$$\frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} = \sum_{k=0}^q A_k x(t - d_k) + Bu(t) \quad (۶۳.۲)$$

با پس‌خورد حالت به فرم

$$u(t) = \sum_{k=0}^q K_k x(t - d_k) \quad (۶۴.۲)$$

نیز گسترش داد.

با جایگذاری رابطه (۶۴.۲) در (۶۳.۲) داریم:

$$\frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} = \sum_{k=0}^q \bar{A}_k x(t - d_k) \quad (۶۵.۲)$$

که

$$\bar{A}_k = A_k + BK_k$$

فصل ۳

پایداری و پایدارسازی سیستم‌های خطی کسری مثبت با استفاده از پس‌خورد حالت

در این جا یک مفهوم جدید از پایداری سیستم‌های گسسته زمانی خطی کسری مثبت معرفی شده است. شرایط لازم و کافی برای مثبت بودن، پایدار مجانبی و پایداری عملی این سیستم‌ها را بیان می‌شود. همچنین نشان داده شده است که سیستم‌های کسری مثبت با تأخیر ناپایدار عملی‌اند، اگر سیستم‌های کسری مثبت استاندارد متناظر آن ناپایدار مجانبی باشد.

۱.۳ پایداری سیستم‌های خطی کسری مثبت یک بعدی

۱.۱.۳ سیستم‌های یک بعدی مثبت

سیستم گسسته زمانی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$x_{i+1} = Ax_i + Bu_i, \quad \forall i \in \mathbb{Z}_+ \quad (1.3)$$

$$y_i = Cx_i + Du_i \quad (2.3)$$

که $x_i \in \mathbb{R}^n$ ، $u_i \in \mathbb{R}^m$ و $y_i \in \mathbb{R}^p$ به ترتیب بردارهای حالت، ورودی و خروجی هستند و $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ، $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ، $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ و $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$.

تعریف ۱.۱.۳. سیستم (۱.۳) و (۲.۳) مثبت (داخلی) نامیده می‌شود اگر به ازای هر $x_0 \in \mathbb{R}_+^n$ و $u_i \in \mathbb{R}_+^m$ داشته باشیم: $x_i \in \mathbb{R}_+^n$ و $y_i \in \mathbb{R}_+^p$ ($\forall i \in \mathbb{Z}_+$).

قضیه ۲.۱.۳. [۶، ۱۳] سیستم (۱.۳) و (۲.۳) مثبت نامیده می‌شود اگر و تنها اگر:

$$A \in \mathbb{R}_+^{n \times n}, \quad B \in \mathbb{R}_+^{n \times m}, \quad C \in \mathbb{R}_+^{p \times n}, \quad D \in \mathbb{R}_+^{p \times m}. \quad (3.3)$$

□

برهان. اثبات همانند سیستم‌های پیوسته زمانی مثبت است.

تعریف ۳.۱.۳. سیستم مثبت (۱.۳) و (۲.۳) پایدار مجانبی نامیده می‌شود اگر جواب

$$x_i = A^i x_0. \quad (4.3)$$

از معادله

$$x_{i+1} = Ax_i, \quad A \in \mathbb{R}_+^{n \times n}, \quad i \in \mathbb{Z}_+ \quad (5.3)$$

در شرط

$$\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = 0, \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}_+^n \quad (6.3)$$

صدق کند.

سیستم خطی گسسته زمانی مثبت

$$x_{i+1} = Ax_i + bu_i, \quad i \in \mathbb{Z}_+ \quad (7.3)$$

را در نظر بگیرید، که $x_i \in \mathbb{R}_+^n$ و $u_i \in \mathbb{R}_+$ بردارهای حالت و ورودی هستند و $A \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ و $b \in \mathbb{R}_+$. فرض کنیم ورودی ثابت \bar{u} به سیستم (۷.۳) اعمال شود، یک بردار $x_e \in \mathbb{R}_+^n$ حالت تعادل از سیستم پایدار مجانبی (۷.۳) نامیده می‌شود اگر و تنها اگر:

$$x_e = Ax_e + b\bar{u}. \quad (8.3)$$

اگر سیستم (۷.۳) پایدار مجانبی باشد، آنگاه ماتریس $[I_n - A]$ (I_n ماتریس واحد است) وارون‌پذیر است و $[I_n - A]^{-1} \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$. پس از رابطه (۸.۳) داریم:

$$x_e = [I_n - A]^{-1} b\bar{u} \quad (9.3)$$

واضح است که اگر $b\bar{u} > 0$ آنگاه $x_e > 0$. حال با فرض $\mathbf{1}_n = [1, 1, \dots, 1]^T$ که $b\bar{u} = \mathbf{1}_n$ ترانواده است) از رابطه (۹.۳) داریم:

$$x_e = [I_n - A]^{-1} \mathbf{1}_n > 0 \quad (10.3)$$

قضیه ۴.۱.۳. [۶، ۱۴] برای سیستم مثبت (۵.۳) جملات زیر معادل هستند:

(۱). سیستم پایدار مجانبی است.

(۲). مقادیر ویژه z_1, z_2, \dots, z_n از ماتریس A اندازه‌های کمتر از ۱ دارند، به عبارتی:

$$|z_k| < 1, \quad \forall k = 1, \dots, n$$

(۳).

$$\det[I_n z - A] \neq 0, \quad \forall |z| \geq 1$$

(۴). $\rho(A) < 1$ که شعاع طیفی ماتریس A است، و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\rho(A) = \max_{1 \leq k \leq n} \{|z_k|\}$$

(۵). همه ضرایب \hat{a}_i ($i = 0, 1, \dots, n-1$) از چندجمله‌ای مشخصه

$$p_{\hat{A}}(z) = \det(I_n z - \hat{A}) = z^n + \hat{a}_{n-1} z^{n-1} + \dots + \hat{a}_1 z + \hat{a}_0. \quad (11.3)$$

از ماتریس $\hat{A} = A - I_n$ مثبت هستند.

(۶). همه زیر ماتریس‌های اصلی از ماتریس

$$\bar{A} = I_n - A = \begin{bmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & \dots & \bar{a}_{1n} \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} & \dots & \bar{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_{n1} & \bar{a}_{n2} & \dots & \bar{a}_{nn} \end{bmatrix} \quad (7a)$$

مثبت باشند، به عبارتی:

$$|\bar{a}_{11}| > 0, \quad \begin{vmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots, \det \bar{A} > 0, \quad (7b)$$

(۷). یک بردار اکیداً مثبت $\bar{x} > 0$ وجود دارد به طوری که:

$$[A - I_n] \bar{x} < 0. \quad (12.3)$$

برهان. برای اثبات قسمت‌های (۱) تا (۶) به [۶، ۱۴] مراجعه شود.

قسمت ۷ را به دو روش اثبات می‌کنیم:

روش اول): اگر سیستم (۵.۳) پایدار مجانبی باشد می‌توانیم بردار \bar{x} را به صورت

$$\bar{x} = x_e = [I_n - A]^{-1} \mathbf{1}_n > 0$$

انتخاب کنیم، پس رابطه (۱۲.۳) را به فرم زیر می‌نویسیم:

$$[A - I_n] \bar{x} = [A - I_n] [I_n - A]^{-1} \mathbf{1}_n = -\mathbf{1}_n < 0. \quad (13.3)$$

حال اگر یک بردار $\bar{x} > 0$ وجود داشته باشد که در رابطه (۱۲.۳) صدق کند، پس می‌توان یک تابع لیاپانوف خطی به فرم:

$$V(x_i) = \bar{x}^T x_i \quad (14.3)$$

که این رابطه به ازای هر $x_i \in \mathbb{R}_+^n$ مثبت است (به عبارتی $x_i \neq 0$) را انتخاب کرد، توجه داشته باشید که سیستم دوگان $x_{i+1} = A^T x_i$ مثبت و پایدار مجانبی است اگر و تنها اگر سیستم اصلی (۵.۳) مثبت و پایدار مجانبی باشد. از رابطه (۵.۳) و (۱۴.۳) داریم:

$$\begin{aligned} \Delta V(x_i) &= V(x_{i+1}) - V(x_i) \\ &= \bar{x}^T (x_{i+1} - x_i) = \bar{x}^T (A - I_n) x_i < 0, \end{aligned} \quad (15.3)$$

$$\forall x_i \in \mathbb{R}_+^n (x_i \neq 0)$$

چون با استفاده از رابطه (۱۳.۳) داریم که:

$$\bar{x}^T (A^T - I_n) < 0_n^T = [0, 0, \dots, 0]^T.$$

روش دوم): اگر z را یک مقدار ویژه ماتریس A در نظر بگیریم پس $(z - 1) = z'$ یک مقدار ویژه ماتریس $A - I$ است. حال طبق خواص مقادیر ویژه و بردارهای ویژه اگر \bar{x} را بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه z' از ماتریس $A - I_n$ در نظر بگیریم، داریم:

$$(A - I_n)\bar{x} = z'\bar{x}$$

که طبق فرض $\bar{x} > 0$ ، پس رابطه (۱۲.۳) در صورتی برقرار است که $z < 0$ ، به این معنی است که مقدار ویژه z اندازه‌ای کمتر از ۱ دارد ($|z| < 1$) و طبق شرط ۲ سیستم پایدار مجانبی است.

□

قضیه ۵.۱.۳. [۱۳] سیستم (۵.۳) ناپایدار است اگر حداقل یک درایه قطری از ماتریس A بزرگ‌تر از ۱ باشد.

۲.۱.۳ سیستم‌های کسری مثبت

در این بخش از تعریف

$$\Delta^\alpha x_k = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{\alpha}{j} x_{k-j}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (16.3)$$

برای مشتق سیستم گسسته زمانی کسری استفاده می‌شود، که $\alpha \in \mathbb{R}$ مرتبه مشتق کسری و

$$\binom{\alpha}{j} = \begin{cases} 1 & j = 0 \\ \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-j+1)}{j!} & j = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (17.3)$$

است.

سیستم خطی گسسته زمانی کسری با معادلات فضای حالت زیر را در نظر بگیرید:

$$\Delta^\alpha x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \quad k \in \mathbb{Z}_+ \quad (18.3)$$

$$y_k = Cx_k + Du_k \quad (19.3)$$

که $x_k \in \mathbb{R}^n$ ، $u_k \in \mathbb{R}^m$ و $y_k \in \mathbb{R}^p$ بردارهای حالت، ورودی و خروجی هستند و $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ، $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ، $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ و $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$.

طبق رابطه (۱۶.۳) می‌توانیم معادله (۱۸.۳) و (۱۹.۳) را به صورت زیر بنویسیم:

$$x_{k+1} + \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j \binom{\alpha}{j} x_{k-j+1} = Ax_k + Bu_k \quad (20.3)$$

$$y_k = Cx_k + Du_k \quad (21.3)$$

تعریف ۶.۱.۳. سیستم (۲۰.۳) و (۲۱.۳) سیستم کسری مثبت (داخلی) نامیده می‌شود اگر و تنها اگر، به‌ازای هر شرط اولیه $x_0 \in \mathbb{R}_+^n$ و همه دنباله‌های ورودی $u_k \in \mathbb{R}_+^m$ داشته باشیم:

$$x_k \in \mathbb{R}_+^n, \quad y_k \in \mathbb{R}_+^p, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+$$

قضیه ۷.۱.۳. [۱۶] جوابی از معادله (۲۰.۳) و (۲۱.۳) به صورت:

$$x_k = \Phi_k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \Phi_{k-i-1} B u_i \quad (22.3)$$

است، که در آن Φ_k توسط معادله زیر تعیین می‌شود:

$$\Phi_{k+1} = (A + I_n \alpha) \Phi_k + \sum_{i=2}^{k+1} (-1)^{i+1} \binom{\alpha}{i} \Phi_{k-i+1} \quad (23.3)$$

و $\phi_0 = I_n$.

لم ۸.۱.۳. [۱۲] اگر $0 < \alpha \leq 1$ آنگاه:

$$(-1)^{i+1} \binom{\alpha}{i} > 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots \quad (24.3)$$

برهان. اثبات با استفاده از استقراء:

به ازای $i = 1$ رابطه (۲۴.۳) درست است چون:

$$(-1)^{1+1} \binom{\alpha}{1} = \alpha > 0$$

فرض کنیم که به ازای $k \geq 1$ رابطه (۲۴.۳) برقرار باشد یعنی:

$$(-1)^{k+1} \binom{\alpha}{k} > 0, \quad \forall k \geq 1$$

حال ثابت می‌کنیم که به ازای $k+1$ رابطه (۲۴.۳) برقرار است. پس از این رابطه داریم:

$$\begin{aligned} (-1)^{k+2} \binom{\alpha}{k+1} &= (-1)^{k+2} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(\alpha-k)}{k!(k+1)} \\ &= (-1)^{k+1} \binom{\alpha}{k} \frac{k-\alpha}{k+1} > 0 \end{aligned}$$

بنابراین استقراء به ازای $k+1$ نیز برقرار است. □

لم ۹.۱.۳. [۱۲] اگر $0 < \alpha \leq 1$ و $(A + \alpha I_n) \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ ، آنگاه:

$$\Phi_k \in \mathbb{R}_+^{n \times n}, \quad \forall k = 1, 2, \dots$$

برهان. اثبات طبق رابطه (۲۳.۳) به راحتی امکان پذیر است. □

قضیه ۱۰.۱.۳. [۱۲] فرض کنید $0 < \alpha < 1$ ، سپس سیستم کسری (۲۰.۳) و (۲۱.۳) مثبت است

اگر و تنها اگر:

$$\begin{aligned} A + I_n \alpha &\in \mathbb{R}_+^{n \times n}, \quad B \in \mathbb{R}_+^{n \times m} \\ C &\in \mathbb{R}_+^{p \times n}, \quad D \in \mathbb{R}_+^{p \times m} \end{aligned} \quad (25.3)$$

برهان. کفایت): فرض کنیم شرایط (۲۵.۳) برقرار باشد در این صورت طبق معادله (۲۲.۳) و لم

(۹.۱.۳) اگر $\Phi_k \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ ، $B \in \mathbb{R}_+^{n \times m}$ و $x_0 \in \mathbb{R}_+^n$ آنگاه $x_k \in \mathbb{R}_+^n$ و به طور مشابه از رابطه

(۲۱.۳) داریم: $y_k \in \mathbb{R}_+^p$ ($k \in \mathbb{Z}_+$)

لزوم): فرض کنیم $(\forall k \in \mathbb{Z}_+) u_k = 0$ ، از سیستم مثبت (۲۰.۳) و (۲۱.۳) به‌ازای $k = 0$ داریم:

$$x_1 = [A + \alpha I_n]x_0 = A_\alpha x_0 = A_\alpha, \quad y_0 = Cx_0 \in \mathbb{R}_+^p$$

این رابطه نشان می‌دهد که $A + \alpha I_n \in \mathbb{R}_+^n$ و $C \in \mathbb{R}_+^{p \times n}$ ، چون طبق تعریف (۶.۱.۳)، x_0 دلخواه است.

حال با فرض $x_0 = 0$ از سیستم (۲۰.۳) و (۲۱.۳) به‌ازای $k = 0$ داریم:

$$x_1 = Bu_0 \in \mathbb{R}_+^n, \quad y_0 = Du_0 \in \mathbb{R}_+^p$$

این رابطه نشان می‌دهد که $B \in \mathbb{R}_+^{n \times m}$ و $D \in \mathbb{R}_+^{p \times m}$ ، چون $u_0 \in \mathbb{R}_+^m$ دلخواه است.

□

۳.۱.۳ پایداری عملی

از روابط (۱۷.۳) و (۲۴.۳) نتیجه می‌گیریم که ضرایب

$$c_j = c_j(\alpha) = (-1)^j \binom{\alpha}{j+1}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (26.3)$$

با افزایش j به شدت کاهش می‌یابند و به‌ازای $0 < \alpha < 1$ مثبت هستند.

در مسائل کاربردی j توسط برخی از اعداد طبیعی h محدود در نظر گرفته می‌شود. در این صورت معادله (۲۰.۳) فرمی به‌صورت:

$$x_{k+1} = A_\alpha x_k + \sum_{j=1}^h c_j x_{k-j} + Bu_k, \quad k \in \mathbb{Z}_+ \quad (27.3)$$

که

$$A_\alpha = A + I_n \alpha \quad (28.3)$$

توجه داشته باشیم که معادلات (۲۷.۳) و (۲۱.۳) توصیف یک سیستم خطی گسسته زمانی با تأخیر h در حالت است.

تعریف ۱۱.۱.۳. سیستم کسری مثبت (۲۰.۳) و (۲۱.۳) پایدار عملی نامیده می‌شود اگر و تنها اگر سیستم (۲۷.۳) و (۲۱.۳) پایدار مجانبی باشد.

با تعریف بردار حالت جدید

$$\tilde{x}_k = \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k-1} \\ \vdots \\ x_{k-h} \end{bmatrix} \quad (29.3)$$

می‌توانیم معادلات (۲۷.۳) و (۲۱.۳) را به‌صورت

$$\tilde{x}_{k+1} = \tilde{A}\tilde{x}_k + \tilde{B}u_k, \quad k \in \mathbb{Z}_+ \quad (30.3)$$

$$y_k = \tilde{C}\tilde{x}_k + \tilde{D}u_k \quad (31.3)$$

بنویسیم، که

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_\alpha & c_1 I_n & c_2 I_n & \cdots & c_{h-1} I_n & c_h I_n \\ I_n & \circ & \circ & \cdots & \circ & \circ \\ \circ & I_n & \circ & \cdots & \circ & \circ \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \circ & \circ & \circ & \cdots & I_n & \circ \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_+^{\tilde{n} \times \tilde{n}},$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} B \\ \circ \\ \vdots \\ \circ \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_+^{\tilde{n} \times m}, \quad \tilde{C} = \begin{bmatrix} C & \circ & \cdots & \circ \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_+^{p \times \tilde{n}},$$

$$\tilde{D} = D \in \mathbb{R}_+^{p \times m}, \quad \tilde{n} = (1+h)n. \quad (32.3)$$

برای بررسی پایداری عملی از سیستم کسری مثبت (۲۰.۳) و (۲۱.۳)، شرایط قضیه (۴.۱.۳) را می‌توان به سیستم (۳۰.۳) و (۳۱.۳) اعمال کرد.

قضیه ۰.۱۲.۱۰۳ [۱۱] سیستم مثبت کسری (۲۰.۳) و (۲۱.۳) پایدار عملی است اگر و تنها اگر در یکی از شرایط زیر صدق کند:

(۱). مقادیر ویژه z_k ($k = 1, \dots, \tilde{n}$) از ماتریس \tilde{A} از اندازه‌ای کمتر از ۱ باشند، به عبارتی:

$$|\tilde{z}_k| < 1, \quad \forall k = 1, \dots, \tilde{n} \quad (33.3)$$

(۲).

$$\det[I_{\tilde{n}}z - \tilde{A}] \neq 0, \quad |z| \geq 1$$

(۳). $\rho(\tilde{A}) < 1$ که شعاع طیفی ماتریس \tilde{A} است، و به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\rho(\tilde{A}) = \max_{1 \leq k \leq \tilde{n}} \{|\tilde{z}_k|\}$$

(۴). همه ضرایب \tilde{a}_i ($i = 0, 1, \dots, \tilde{n} - 1$) چندجمله‌ای مشخصه

$$p_{\tilde{A}}(z) = \det[I_{\tilde{n}}(z + 1) - \tilde{A}] = z^{\tilde{n}} + \tilde{a}_{\tilde{n}-1}z^{\tilde{n}-1} + \cdots + \tilde{a}_1z + a_0. \quad (34.3)$$

از ماتریس $[\tilde{A} - I_{\tilde{n}}]$ مثبت باشند.

(۵). همه زیر ماتریس‌های اصلی ماتریس

$$[\tilde{A} - I_{\tilde{n}}] = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \cdots & \tilde{a}_{1\tilde{n}} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \cdots & \tilde{a}_{2\tilde{n}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \tilde{a}_{\tilde{n}1} & \tilde{a}_{\tilde{n}2} & \cdots & \tilde{a}_{\tilde{n}\tilde{n}} \end{bmatrix} \quad (35.3)$$

مثبت باشند. به عبارتی:

$$|\tilde{a}_{11}| > 0, \quad \begin{vmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots, \det[I_{\tilde{n}} - \tilde{A}] > 0, \quad (36.3)$$

(۶). یک بردار اکیداً مثبت $\tilde{x}_i \in \mathbb{R}_+^n$ ($i = 0, 1, \dots, h$) وجود داشته باشد که در رابطه

$$\bar{x}_0 < \bar{x}_1, \quad \bar{x}_1 < \bar{x}_2, \quad \dots, \quad \bar{x}_{h-1} < \bar{x}_h \quad (37.3)$$

صدق کند، به طوری که:

$$A_\alpha \bar{x}_0 + c_1 \bar{x}_1 + \dots + c_h \bar{x}_h < \bar{x}_0. \quad (38.3)$$

برهان. شرایط پنج‌گانه (۱ تا ۵) به توضیح از شرایط مربوط به قضیه (۴.۱.۳) اثبات می‌شوند. شرط ۶ را اثبات می‌کنیم.

با استفاده از رابطه (۱۲.۳) برای ماتریس \tilde{A} داریم:

$$\begin{bmatrix} A_\alpha & c_1 I_n & c_2 I_n & \dots & c_{h-1} I_n & c_h I_n \\ I_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I_n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_0 \\ \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_{h-1} \\ \bar{x}_h \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} \bar{x}_0 \\ \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_h \end{bmatrix} \quad (39.3)$$

از رابطه (۳۹.۳) معادله‌های (۳۷.۳) و (۳۸.۳) اثبات می‌شوند. □

قضیه ۱۳.۱.۳. [۱۱] اگر سیستم کسری (۲۰.۳) و (۲۱.۳) پایدار عملی باشد آنگاه مجموع درایه‌های هر سطر از ماتریس الحاقی $Adj[I_{\tilde{n}} - \tilde{A}]$ اکیداً مثبت است، به عبارتی:

$$Adj[I_{\tilde{n}} - \tilde{A}]^{-1} \mathbf{1}_{\tilde{n}} > 0, \quad (40.3)$$

که $\mathbf{1}_{\tilde{n}} = [1 \ 1 \ \dots \ 1]^T \in \mathbb{R}_+^{\tilde{n}}$ (T ترانزاده ماتریس را نشان می‌دهد).

برهان. می‌دانیم که اگر سیستم (۳۰.۳) و (۳۱.۳) پایدار مجانبی باشد آنگاه:

$$\bar{x} = [I_{\tilde{n}} - \tilde{A}]^{-1} \mathbf{1}_{\tilde{n}} > 0 \quad (41.3)$$

اکیداً مثبت و نقطه تعادل $\tilde{B}u = \mathbf{1}_{\tilde{n}}$ است.

توجه کنید که چون همه مقادیر ویژه ویژه ماتریس $[I_{\tilde{n}} - \tilde{A}]$ مثبت هستند، پس

$$\det[I_{\tilde{n}} - \tilde{A}] > 0 \quad (42.3)$$

بنابراین طبق معادله‌های (۴۱.۳) و (۴۲.۳) معادله (۴۰.۳) واضح است. □

مثال ۱۴.۱.۳. پایداری عملی سیستم کسری مثبت زیر را بررسی کنید.

$$\Delta^\alpha x_{k+1} = 0.5 x_k, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+, \quad \alpha = 0.5, \quad h = 2 \quad (43.3)$$

برهان. با استفاده از معادله‌های (۲۶.۳)، (۲۸.۳) و (۳۲.۳) داریم:

$$c_1 = \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2} = \frac{1}{8}, \quad c_2 = \frac{1}{16}, \quad A_\alpha = 0.6$$

و

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_\alpha & c_1 & c_2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

در این صورت چندجمله‌ای مشخصه (۳۴.۳) به صورت:

$$p_{\tilde{A}}(z) = \det[I_{\tilde{n}}(z + 1) - \tilde{A}] = \begin{vmatrix} z + 0.6 & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{16} \\ -1 & z + 1 & 0 \\ 0 & -1 & z + 1 \end{vmatrix}$$

$$= z^3 + 2.4z^2 + 1.675z + 0.2125. \quad (44.3)$$

همه ضرایب چندجمله‌ای (۴۴.۳) مثبت هستند پس طبق قضیه (۱۲.۱.۳) سیستم پایدار عملی است. با استفاده از رابطه (۴۰.۳) داریم:

$$\text{Adj}[I_{\tilde{n}} - \tilde{A}] \mathbf{1}_{\tilde{n}} = \left(\text{Adj} \begin{bmatrix} 0.6 & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{16} \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2500 \\ 1.4625 \\ 1.6750 \end{bmatrix}$$

□

پس رابطه (۴۰.۳) نیز برقرار است.

قضیه ۱۵.۱.۳ [۱۱] سیستم کسری مثبت (۲۰.۳) و (۲۱.۳) پایدار عملی است اگر و تنها اگر سیستم مثبت

$$x_{k+1} = A_\alpha x_k, \quad k \in \mathbb{Z}_+ \quad (45.3)$$

پایدار مجانبی باشد.

برهان. از رابطه (۳۸.۳) داریم:

$$(A_\alpha - I_n)\bar{x}_0 + c_1\bar{x}_1 + \dots + c_h\bar{x}_h < 0 \quad (46.3)$$

توجه کنید که نامساوی (۴۶.۳) تنها در صورتی می‌تواند برقرار باشد که یک بردار اکیداً مثبت $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}_+^n$ وجود داشته باشد به طوری که:

$$(A_\alpha - I_n)\bar{x}_0 < 0 \quad (47.3)$$

چون $c_1\bar{x}_1 + \dots + c_h\bar{x}_h > 0$ پس طبق شرط ۷ از قضیه (۴۰.۳)، معادله (۴۷.۳) بیان کننده پایدار مجانبی سیستم مثبت (۴۵.۳) است. □

از قضیه فوق نتیجه مهم زیر را داریم.

نتیجه ۱۶.۱.۳. سیستم کسری مثبت (۲۰.۳) و (۲۱.۳) برای هر h متناهی ناپایدار عملی است، اگر سیستم مثبت (۴۵.۳) ناپایدار مجانبی باشد.

قضیه ۱۷.۱.۳ [۱۱] سیستم کسری مثبت (۲۰.۳) و (۲۱.۳) ناپایدار عملی است اگر و تنها اگر حداقل یک درایه قطری از ماتریس A_α بزرگ‌تر از ۱ باشد.

برهان. اثبات از قضیه‌های (۵.۱.۳) و (۱۵.۱.۳) به‌دست می‌آید. \square

مثال ۱۸.۱.۳. پایداری عملی سیستم کسری مثبت مستقل با معادله

$$\Delta^\alpha x_{k+1} = \begin{bmatrix} -\circ/5 & 1 \\ 2 & \circ/5 \end{bmatrix} x_k, \quad k \in \mathbb{Z}_+ \quad (48.3)$$

به‌ازای $\alpha = \circ/8$ و هر h متناهی را بررسی کنید.

برهان. در این‌جا $n = 2$ و

$$A_\alpha = A + I_n \alpha = \begin{bmatrix} \circ/3 & 1 \\ 2 & 1/3 \end{bmatrix} \quad (49.3)$$

که طبق قضیه (۱۷.۱.۳) سیستم کسری مثبت (۴۸.۳) به‌ازای هر h متناهی ناپایدار عملی است، چون درایه‌های (۲ و ۲) از ماتریس (۴۹.۳) بزرگ‌تر از ۱ است.

نتیجه مشابه طبق شرایط ۵ از قضیه (۴.۱.۳) به‌دست می‌آید، چون چندجمله‌ای از ماتریس $A_\alpha - I_n$

$$\begin{aligned} p_{\bar{A}}(z) &= \det[I_{\bar{n}}(z+1) - A_\alpha] = \\ &= \begin{vmatrix} z + \circ/7 & -1 \\ -2 & z - \circ/3 \end{vmatrix} = z^2 + \circ/4z - 2/21 \end{aligned}$$

یک ضریب منفی دارد ($\hat{a}_0 = -2/21$). \square

۴.۱.۳ پایداری مجانبی از سیستم‌های کسری

در این بخش پایدار عملی از سیستم‌های مثبت برای $h \rightarrow \infty$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۱۹.۱.۳. سیستم کسری مثبت (۲۰.۳) و (۲۱.۳) پایدار مجانبی است، اگر سیستم به‌ازای $h \rightarrow \infty$ پایدار عملی باشد.

لم ۲۰.۱.۳ [۱۱] اگر $0 < \alpha < 1$ آنگاه:

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_j = 1 - \alpha \quad (50.3)$$

که c_j ها ضرایب تعریف شده در رابطه (۲۶.۳) هستند.

برهان. با استفاده از سری مک‌لورن می‌توان به آسانی نشان داد که:

$$(1-z)^\alpha = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{\alpha}{j} z^j$$

و با فرض $z = 1$ داریم:

$$\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{\alpha}{j} = 0$$

از این برابری داریم:

$$\begin{aligned} 1 - \alpha + \sum_{j=2}^{\infty} (-1)^j \binom{\alpha}{j} &= \\ = 1 - \alpha - \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \binom{\alpha}{j+1} &= 1 - \alpha - \sum_{j=1}^{\infty} c_j = 0. \end{aligned}$$

□

قضیه ۲۱.۱۰۳. [۱] سیستم مثبت (۲۰.۳) پایدار عملی است اگر و تنها اگر یک بردار اکیداً مثبت $\lambda \in \mathbb{R}_+^n$ وجود داشته باشد، به طوری که:

$$[A_\alpha + \sum_{j=1}^h c_j I_n - I_n] \lambda < 0, \quad \lambda > 0 \quad (51.3)$$

برهان. نشان می‌دهیم رابطه (۵۱.۳) شرط لازم و کافی برای پایداری عملی سیستم مثبت با تأخیر (۲۷.۳) است.

فرض کنید $X \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ همه مقادیر ویژه با قدر مطلق کمتر از ۱ را دارا باشد، به آسانی می‌توان نشان داد که:

$$(I_n - X)^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} X^k \in \mathbb{R}_+^{n \times n} \quad (52.3)$$

بنابراین اگر سیستم مثبت (۲۷.۳) پایدار مجانبی باشد آنگاه از رابطه (۵۲.۳) داریم:

$$\left(I_n - A_\alpha - \sum_{j=1}^h c_j I_n \right)^{-1} \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$$

و

$$\gamma = \left(I_n - A_\alpha - \sum_{j=1}^h c_j I_n \right)^{-1} \mathbf{1}_n > 0 \quad (53.3)$$

که $\mathbf{1}_n = [1 \dots 1]^T$

از رابطه‌های بالا نتیجه می‌گیریم که اگر سیستم مثبت (۲۷.۳) پایدار مجانبی باشد، آنگاه رابطه (۵۱.۳) به‌ازای $\lambda = \gamma > 0$ برقرار است.

سیستم دوگان (۲۷.۳) با $B = 0$ را در نظر می‌گیریم:

$$x_{i+1} = A_\alpha^T x_i + \sum_{j=1}^h c_j(\alpha) x_{i-j}, \quad i \in \mathbb{Z}_+ \quad (54.3)$$

که این رابطه مثبت و پایدار مجانبی است اگر و تنها اگر سیستم اصلی (۲۷.۳) مثبت و پایدار مجانبی باشد.

یک تابع لیاپانوف برای سیستم دوگان (۵۴.۳) به صورت زیر انتخاب می‌کنیم.

$$V(x_i) = x_i^T \lambda + \sum_{j=1}^h c_j \sum_{r=i-j}^{i-1} x_r^T \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+^n \quad (55.3)$$

که این تابع به‌ازای بردار اکیدا مثبت λ و بردار ناصفر $x_i \in \mathbb{R}_+^n$ مثبت است. حال از رابطه‌های (۵۴.۳) و (۵۵.۳) داریم:

$$\begin{aligned} \Delta V(x_i) &= V(x_{i+1}) - V(x_i) \\ &= x_{i+1}^T \lambda + \sum_{j=1}^h c_j \sum_{r=i+1-j}^i x_r^T \lambda - x_i^T \lambda - \sum_{j=1}^h c_j \sum_{r=i-j}^{i-1} x_r^T \lambda \\ &= x_i^T [A_\alpha + \sum_{j=1}^h c_j I_n - I_n] \lambda < 0 \end{aligned}$$

بنابراین رابطه (۵۱.۳) نشان می‌دهد که $\Delta V(x_i) < 0$ پس سیستم (۲۷.۳) پایدار مجانبی است، و این نشان‌دهنده این است که سیستم کسری (۲۰.۳) پایدار عملی است. \square

قضیه ۲۲.۱۰۳. [۱۱] سیستم کسری مثبت (۲۰.۳) و (۲۱.۳) پایدار مجانبی است، اگر و تنها اگر سیستم مثبت

$$x_{i+1} = (A + I_n)x_i \quad (56.3)$$

پایدار مجانبی باشد.

برهان. در قضیه (۲۱.۱۰۳) نشان داده شده است که سیستم مثبت (۲۷.۳) برای $h \rightarrow \infty$ پایدار مجانبی است، اگر و تنها اگر سیستم مثبت

$$x_{i+1} = \left(A_\alpha + \sum_{j=1}^{\infty} c_j I_n \right) x_i \quad (57.3)$$

پایدار مجانبی باشد. سیستم مثبت (۵۶.۳) و (۵۷.۳) معادل‌اند، چون طبق معادله‌های (۲۸.۳) و (۵۰.۳) داریم:

$$A_\alpha + \sum_{j=1}^{\infty} c_j I_n = A + I_n \alpha + I_n (1 - \alpha) = A + I_n$$

\square

حال با استفاده از سیستم مثبت (۵۶.۳) و قضیه (۱۲.۱۰۳) قضیه زیر را داریم.

قضیه ۲۳.۱۰۳ [۱۱] سیستم کسری مثبت (۲۰.۳) و (۲۱.۳) پایدار مجانبی است اگر و تنها اگر یکی از شرایط معادل زیر برقرار باشد.

(۱). مقادیر ویژه z_1, z_2, \dots, z_k از ماتریس $A + I_n$ از اندازه‌های کمتر از ۱ هستند، به عبارتی:

$$|z_k| < 1, \quad \forall k = 1, 2, \dots, n$$

(۲). همه ضرایب چندجمله‌ای مشخصه از ماتریس A مثبت هستند.

(۳). همه زیر ماتریس‌های اصلی از ماتریس $-A$ مثبت هستند.

قضیه ۲۴.۱۰۳ [۱۱] سیستم کسری مثبت (۲۰.۳) و (۲۱.۳) ناپایدار است، اگر حداقل یک درایه قطری از ماتریس A مثبت باشد.

برهان. اگر یک درایه قطری از ماتریس A مثبت باشد، آنگاه حداقل یک درایه قطری از ماتریس $A + I_n$ بزرگ‌تر از ۱ است و طبق قضیه‌های مطرح شده فوق این سیستم ناپایدار است. \square

مثال ۲۵.۱۰۳. با استفاده از قضیه (۲۳.۱۰۳) مقادیر ضرایب c را طوری پیدا کنید که سیستم کسری مثبت (۲۰.۳) و (۲۱.۳) با

$$A = \begin{bmatrix} -0.5 & 1 \\ 0.2 & c \end{bmatrix}, \quad \alpha = 0.8 \quad (58.3)$$

پایدار مجانبی باشد.

برهان. سیستم کسری مثبت است، اگر همه درایه‌های ماتریس

$$A_\alpha = A + I_n \alpha = \begin{bmatrix} 0.3 & 1 \\ 0.2 & c + \alpha \end{bmatrix} \quad (59.3)$$

نامنفی باشد، و به عبارتی $c + \alpha \geq 0$ و $c \geq -\alpha = -0.8$.

با اعمال شرط ۲ از قضیه (۲۳.۱۰۳) به ماتریس (۵۸.۳) داریم:

$$\begin{aligned} \det[I_n z - A] &= \begin{vmatrix} z + 0.5 & -1 \\ -0.2 & z - c \end{vmatrix} = \\ &= z^2 + (0.5 - c)z - (0.5c + 0.2) \end{aligned}$$

و $c < 0.4$. بنابراین سیستم کسری (۲۰.۳) و (۲۱.۳) با ماتریس (۵۸.۳) مثبت است و به‌ازای $-0.8 < c < -0.4$ پایدار مجانبی است.

\square با استفاده از شرط ۳ از قضیه (۲۳.۱۰۳) نیز به همین نتیجه می‌رسیم.

فصل ۴

تخصیص مقادیر ویژه با استفاده از تبدیلات تشابهی

در این فصل ابتدا به مسأله کنترل‌پذیری سیستم‌های خطی پیوسته زمانی کسری مثبت در زاویه از پیش تعیین شده می‌پردازیم. در این جا هدف ما ارائه یک روش برای قرار دادن مقادیر ویژه در زاویه سمت چپ صفحه مختلط با استفاده از کنترل پس‌خورد حالت برای سیستم‌های دینامیکی خطی پیوسته زمانی در مقیاس بزرگ است. سپس کنترل‌پذیری سیستم‌های خطی گسسته زمانی کسری مثبت با استفاده از تبدیلات تشابهی بررسی می‌شود.

در این جا ابتدا به بیان فرم استاندارد اشلون و همدم برداری زوج (B, A) می‌پردازیم. سپس چگونگی محاسبه ماتریس پس‌خورد حالت را برای مبحث تخصیص مقادیر ویژه صفر و تخصیص مقادیر ویژه دلخواه، برای ماتریس حلقه بسته در مسأله تخصیص مقدار ویژه بیان می‌کنیم. در انتها نیز حل مسأله تخصیص مقدار ویژه را با استفاده از تبدیلات تشابهی بیان شده، مطرح می‌کنیم. در پایان برای کمک به درک بیشتر به ارائه مثال عددی می‌پردازیم.

۱.۴ فرم استاندارد اشلون

فرض کنید که T تبدیل تشابهی باشد که بر فضای \mathbb{R}^n تعریف شده است. معادله حالت سیستم پیوسته زمانی معمولی را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1.4)$$

حال فرض می‌کنیم بردار حالت دستگاه توسط ماتریس تبدیل T^{-1} به فضای جدید تبدیل شود، یعنی:

$$\hat{x}(t) = T^{-1}x(t) \quad \text{یا} \quad x(t) = T\hat{x}(t) \quad (2.4)$$

با جایگذاری رابطه (۲.۴) در معادله حالت (۱.۴) داریم:

$$\begin{aligned} T\hat{x}(t) &= AT\hat{x}(t) + Bu(t) \\ \hat{x}(t) &= T^{-1}AT\hat{x}(t) + T^{-1}Bu(t) \end{aligned} \quad (۳.۴)$$

حال با در نظر گرفتن $\hat{A} = T^{-1}AT$ و $\hat{B} = T^{-1}B$ در معادله (۳.۴) داریم:

$$\hat{x}(t) = \hat{A}\hat{x}(t) + \hat{B}u(t) \quad (۴.۴)$$

ماتریس تبدیل T را می‌توان به صورت منحصر به فردی با استفاده از ماتریس کنترل پذیری مشخص کرد. به این ترتیب که اولین n ستون مستقل خطی ماتریس Q را ستون‌های ماتریس تبدیل T قرار می‌دهیم، در این صورت فرم استاندارد اشلون را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$T = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_m & \dots & A^{q-1}b_1 & \dots & A^{q-1}b_r & A^{q-1}b_{r+1} & \dots & A^{q-1}b_m & A^qb_1 & \dots & A^qb_r \end{bmatrix}$$

ماتریس افزوده $[B, A]$ ، که دارای n سطر و $n + m$ ستون است را تشکیل می‌دهیم. اگر ماتریس $[T^{-1}B, T^{-1}AT]$ را تشکیل دهیم، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} T^{-1}[B, AT] &= T^{-1}[b_1 b_2 \dots b_m A b_1 \dots A^q b_1 \dots A^q b_r A^q b_{r+1} \dots A^q b_m A^{q+1} b_1 \dots A^{q+1} b_r] \\ &= T^{-1}[T, A^q b_{r+1} \dots A^{q+1} b_r] = [I, T^{-1}A^q b_{r+1} \dots T^{-1}A^{q+1} b_r] = [I_{n \times n}, V_{n \times m}] \end{aligned} \quad (۵.۴)$$

اکنون تبدیلات تشابهی سطری و ستونی نظیر را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

۱.

$$r(i) \longleftrightarrow r(j)$$

$$c(i) \longleftrightarrow c(j)$$

۲.

$$r(i) \longleftrightarrow ar(i)$$

$$c(i) \longleftrightarrow \frac{1}{a}c(i)$$

۳.

$$r(i) \longleftrightarrow r(i) + kr(j)$$

$$c(j) \longleftrightarrow c(j) - kc(i)$$

در صورتی که بخواهیم زوج (B, A) را به فرم استاندارد اشلون $[I_n, V_{n \times m}]$ تبدیل نماییم، ابتدا ماتریس افزوده $Q = [B, A, I_n]$ را تشکیل می‌دهیم، سپس با استفاده از عملیات سطری مقدماتی روی ماتریس Q و ستونی مقدماتی نظیر روی ماتریس A حاصل در هر مرحله، n ستون اول ماتریس Q را به I_n تبدیل می‌کنیم، در این صورت ماتریس افزوده \hat{Q} به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\hat{Q} = [\hat{B}, \hat{A}, T^{-1}] = [I_n, V_{n \times m}, T^{-1}] \quad (۶.۴)$$

که ماتریس‌های \hat{A} و \hat{B} به صورت زیر هستند:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0_{m \times m} & 0 & \cdots & 0_{m \times r} & \nu_{m \times m}^{(1)} \\ I_m & 0 & \cdots & 0 & \nu_{m \times m}^{(2)} \\ 0_{m \times m} & I_m & \cdots & 0 & \nu_{m \times m}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \nu_{m \times m}^{(q)} \\ 0_{r \times m} & 0_{r \times m} & \cdots & I_r & \nu_{r \times m}^{(q+1)} \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} I_m \\ 0_{m \times m} \\ 0_{m \times m} \\ 0_{m \times m} \\ 0_{r \times m} \end{bmatrix} \quad (۷.۴)$$

مثال ۱.۱.۴. فرم استاندارد اشلون زوج (B, A) ، در دستگاه خطی زیر را به دست آورید.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

برهان.

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \vdots & 0 & 1 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \vdots & -2 & 3 & 2 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & -2 & 1 & 3 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \xrightarrow[r(2)-r(1) \rightarrow r(2) \text{ on } (Q)]{c(1)+c(2) \rightarrow c(1) \text{ on } (A)} \end{array} \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & \vdots & 1 & 1 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & \vdots & 0 & 2 & 2 & \vdots & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & -3 & -1 & 3 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} \xrightarrow[-\frac{1}{2}r(2) \rightarrow r(2) \text{ on } (Q)]{-2c(2) \rightarrow c(2) \text{ on } (A)} \end{array} \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & \vdots & 1 & -2 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & 2 & -1 & \vdots & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & -3 & 2 & 3 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} \xrightarrow[r(1)-2r(2) \rightarrow r(1) \text{ on } (Q)]{c(2)+2c(1) \rightarrow c(2) \text{ on } (A)} \end{array} \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & \vdots & 1 & -4 & 2 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & 2 & -1 & \vdots & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & -3 & -4 & 3 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} \xrightarrow[-\frac{1}{3}r(3) \rightarrow r(3) \text{ on } (Q)]{-3c(3) \rightarrow c(3) \text{ on } (A)} \end{array} \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & \vdots & 1 & -4 & -6 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & 2 & 3 & \vdots & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 1 & \frac{4}{3} & 3 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} \xrightarrow[r(1)-2r(3) \rightarrow r(1) \text{ on } (Q)]{c(3)+2c(1) \rightarrow c(3) \text{ on } (A)} \end{array} \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & \vdots & 0 & -\frac{16}{3} & -9 & \vdots & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & 2 & 3 & \vdots & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 1 & \frac{4}{3} & 4 & \vdots & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{array} \right] = \hat{Q} = [I, V, T^{-1}]$$

□

۲.۴ فرم هدم برداری

یک ماتریس تبدیل خطی تشابهی مانند S را در نظر می‌گیریم که بر فضای \mathbb{R}^n تعریف شده است. اکنون بردار حالت سیستم که در بخش (۱.۴) آن را به فرم استاندارد اشلون در آوردیم، توسط ماتریس تبدیل S^{-1} به فضای جدید تبدیل میگردد:

$$\tilde{x}(t) = S^{-1}\hat{x}(t) = S^{-1}T^{-1}x(t) \quad (۸.۴)$$

با جایگذاری معادله فوق در معادله (۴.۴) داریم:

$$\begin{aligned} S\tilde{x}(t) &= \hat{A}S\tilde{x}(t) + \hat{B}u(t) \\ \Rightarrow \tilde{x}(t) &= S^{-1}\hat{A}S\tilde{x}(t) + S^{-1}\hat{B}u(t) \end{aligned} \quad (۹.۴)$$

با در نظر گرفتن $\tilde{B} = S^{-1}\hat{B} = S^{-1}T^{-1}B$ و $\tilde{A} = S^{-1}\hat{A}S = S^{-1}T^{-1}ATS$ در معادله (۹.۴) داریم:

$$\tilde{x}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}u(t) \quad (10.4)$$

زوج (\tilde{B}, \tilde{A}) ، فرم همدم برداری زوج (B, A) است [۷]. از آن جایی که معادلات (۱.۴) و (۱۰.۴) هم‌ارز یکدیگر هستند، جواب آن‌ها نیز یکسان است.

۱.۲.۴ به دست آوردن فرم همدم برداری به روش عددی

اگر ناورداهای کرونکر منظم باشد، با استفاده از عملیات ستونی مقدماتی روی ماتریس \hat{A} و سطری مقدماتی نظیر آن روی کل ماتریس Q ، می‌توان فرم همدم برداری و ماتریس تبدیل آن را به صورت زیر به دست آورد:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} G_0 & & \\ & \dots & \\ I_{n-m} & & O_{(n-m) \times m} \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B_0 \\ \dots \\ O_{(n-m) \times m} \end{bmatrix} \quad (11.4)$$

که G_0 یک ماتریس $m \times n$ و B_0 یک ماتریس $m \times m$ بالا مثلثی است. حال اگر ناورداهای کرونکر نامنظم باشند، برخی از ستون‌های I_{n-m} از ماتریس \tilde{A} ، در پایین قطر اصلی پخش می‌شوند.

مثال ۱.۲.۴. برای مثال (۱.۱.۴)، فرم همدم برداری را به دست آورید.

برهان.

$$\hat{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & 0 & -\frac{1}{3} & -9 & \vdots & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & 2 & 3 & \vdots & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 1 & \frac{4}{3} & 4 & \vdots & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{on } (A)]{c(3) - \frac{4}{3}c(1) \rightarrow c(3)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & 0 & -\frac{16}{3} & -9 & \vdots & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & 2 & 3 & \vdots & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 1 & \frac{4}{3} & 0 & \vdots & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{on } (\hat{Q})]{r(1) + \frac{4}{3}r(3) \rightarrow r(1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & 4 & 0 & -9 & \vdots & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & 2 & 3 & \vdots & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 1 & \frac{4}{3} & 0 & \vdots & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{on } (A)]{c(2) - \frac{4}{3}c(1) \rightarrow c(2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & 4 & -\frac{16}{3} & -9 & \vdots & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & 2 & 3 & \vdots & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{on } (\hat{Q})]{r(1) + \frac{4}{3}r(2) \rightarrow r(1)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{3} & \vdots & 4 & -\frac{16}{3} & -9 & \vdots & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -1 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & 2 & 3 & \vdots & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 4 & -\frac{16}{3} & -9 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$S^{-1}T^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

□

برای معادله (۱.۴)، قانون کنترل را به صورت $U(t) = Kx(t)$ تعریف می‌کنیم، و به‌طور مشابه برای معادله (۴.۴)، قانون کنترل به صورت $U(t) = \tilde{K}\tilde{x}(t)$ تعریف می‌شود که \tilde{K} ماتریس پس‌خورد حالت معادله دستگاه تبدیل شده به فرم برداری است. با جایگذاری $S^{-1}T^{-1}x(t)$ به جای $\tilde{x}(t)$ خواهیم داشت:

$$U(t) = \tilde{k}S^{-1}T^{-1}x(t) \quad (۱۲.۴)$$

فرض کنید:

$$K = \tilde{K}S^{-1}T^{-1} \quad (۱۳.۴)$$

که آن را ماتریس پس خورد اولیه زوج (B, A) می‌نامیم. در صورتی که \tilde{K} را به صورت $-B_0^{-1}G_0$ تعریف نماییم، مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته $\tilde{\Gamma}_p = \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K}$ صفر است. چون:

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_p &= \begin{bmatrix} G_0 & & \\ & \dots & \\ I & & o \end{bmatrix}_{n \times n} + \begin{bmatrix} B_0 & \\ & \dots \\ & & o \end{bmatrix}_{n \times m} (-B_0)^{-1} G_0 \\ &= \begin{bmatrix} & & o_{m \times n} & \\ & & \dots & \\ I_{n-m} & & & o_{(n-m) \times m} \end{bmatrix}_{n \times n} = \tilde{\Gamma}_0 \end{aligned} \quad (۱۴.۴)$$

نتیجه ۲.۲.۴. به دلیل مشابه بودن $\tilde{\Gamma}_0$ با $\tilde{\Gamma}$ ، تمامی مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته $\Gamma = A + BK$ نیز صفرند. چون:

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma} &= S^{-1}T^{-1}ATS + S^{-1}T^{-1}BKTS = S^{-1}T^{-1}(A + BK)TS \\ &= (TS)^{-1}(A + BK)TS = (TS)^{-1}\Gamma TS \end{aligned}$$

۳.۴ بیان روش جدید با استفاده از تبدیلات تشابهی

در ساده‌ترین حالت، قسمت حقیقی همه مقادیر ویژه حلقه بسته مورد نیاز که کمتر از a هستند مورد نیاز است، که در آن $a < 0$. به‌طور کلی محدوده مورد نظر قطب‌های حلقه بسته، در بخش نشان داده شده در شکل ۱.۴ است.

یک سیستم کنترل خطی پیوسته زمانی با معادله حالت زیر را در نظر بگیرید.

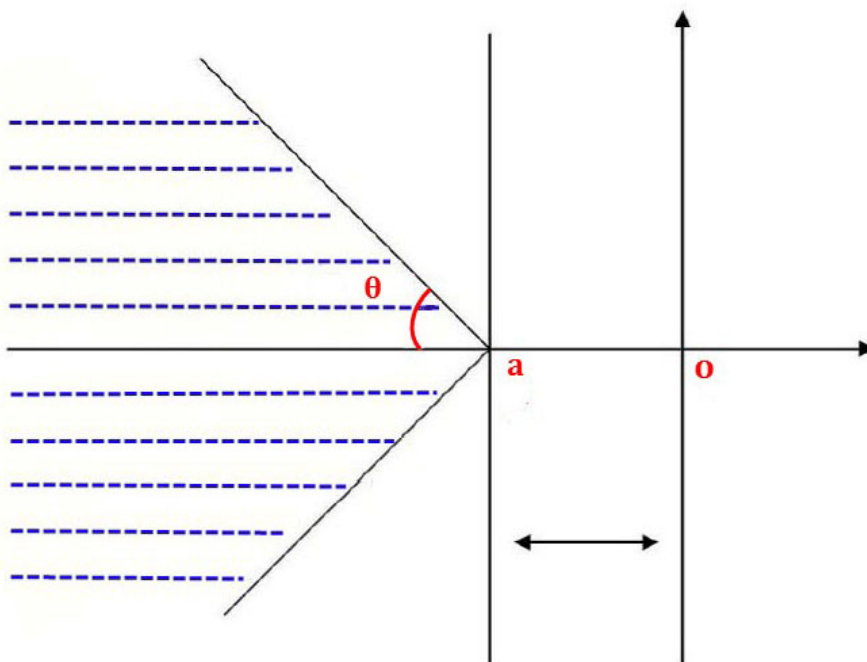
$$\frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} = \sum_{k=0}^q [A_k x(t - d_k) + B_k u(t - d_k)] \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (۱۵.۴)$$

که $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ، $u(t) \in \mathbb{R}^m$ و ماتریس‌های A و B ماتریس‌های ثابت حقیقی به‌ترتیب از ابعاد $n \times n$ و $n \times m$ با $rank B = m$ هستند.

هدف ما تخصیص مقادیر ویژه در بخش از پیش تعیین شده برای به‌دست آوردن ماتریس پس خورد حالت K که ایجاد یک سیستم حلقه بسته با جواب مطلوب با تغییر قطب کنترل‌پذیر نقاط نامطلوب به نقاط مورد نظر است.

کرباسی و بل یک الگوریتم دقیق برای پارامتری کردن ماتریس کنترل K با انجام عملیات تشابهی در زوج (B, A) به‌دست آورده‌اند. در واقع K طوری انتخاب می‌شود که مقادیر ویژه سیستم حلقه بسته

$$\Gamma = A + BK \quad (۱۶.۴)$$



شکل ۱۰۴: زاویه مشخص شده

در مجموعه از پیش تعریف شده $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ موسوم به طیف مقادیر ویژه باشند، با این خاصیت که λ_i ها یا حقیقی اند یا به صورت مزدوج مختلط ظاهر می شوند، واقع شوند. جدیداً کرباسی و طهرانی [۱۹، ۲۰] نتایج قبلی را برای به دست آوردن فرمول دقیق که شامل پارامترهای غیر خطی در قانون کنترل است را توسعه داده اند.

مسأله پایداری، پیدا کردن ماتریس پس خورد حالت K است به طوری که ورودی $u(t) = Kx(t)$ منجر به یک سیستم حلقه بسته پایدار

$$x(t) = x(\circ) \exp(\Gamma(t)) \quad (17.4)$$

گردد، در این صورت اگر طیف (مجموعه مقادیر ویژه) ماتریس حلقه بسته که توسط $\Lambda(\Gamma)$ تعریف می شود در سمت چپ صفحه مختلط قرار گیرد، آنگاه گوئیم که Γ پایدار مجانبی یا همگراست.

قضیه ۱۰.۳.۴. فرض کنید D یک ماتریس قطری به صورت

$$D = \begin{bmatrix} D_1 & \circ & \dots & \circ \\ \circ & D_2 & \dots & \circ \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \circ & \circ & \dots & D_k \end{bmatrix} \quad (18.4)$$

باشد، که هر D_j ، $(j = 1, 2, \dots, k)$ به ازای مقادیر ویژه مزدوج مختلط $\alpha_j + i\beta_j$ به صورت:

$$D_j = \begin{bmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{bmatrix} \quad (19.4)$$

و به‌ازای مقادیر ویژه حقیقی به‌صورت $D_j = [d_j]$ باشد. اگر چنین ماتریس قطری D با مقادیر ویژه مزدوج مختلط به ماتریس حلقه بسته Γ اضافه شود، آنگاه مقادیر ویژه حاصل، مقادیر ویژه در طیف است.

برهان. طبق رابطه (۱۴.۴) که فرم جردن اولیه در مورد ناوردهای کرونکر است داریم:

$$\tilde{H} = \tilde{\Gamma}_0 + D = \begin{bmatrix} & O_{m \times n} & \\ I_{n-m} & & O_{n-m \times m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_1 & \circ & \dots & \circ \\ \circ & D_2 & \dots & \circ \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \circ & \circ & \dots & D_k \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} D_1 & \circ & \dots & \circ & \circ & \dots & \circ \\ \circ & D_2 & \dots & \circ & \circ & \dots & \circ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \circ & \circ & \dots & D_l & \circ & \dots & \circ \\ I_1 & \circ & \dots & \circ & D_{l+1} \dots & \circ & \\ \vdots & \ddots & \dots & \circ & \circ & \ddots & \vdots \\ \circ & \dots & I_r & \circ & \circ & \dots & D_k \end{bmatrix} \quad (20.4)$$

که I_s ($s = 1, 2, \dots, r$) ماتریس واحد از اندازه ۲ است، در این صورت $(n - m)$ زوج است، چون در صورتی که $(n - m)$ فرد باشد آنگاه I_s تنها یک فرم ماتریس واحد از اندازه ۱ دارد. با گسترش $\det(\tilde{H} - \lambda I)$ در امتداد سطر اول واضح است که مقادیر ویژه \tilde{H} همان مقادیر ویژه ماتریس D است. برای حالتی که ناوردهای کرونکر نامنظم باشند [۲۰]، همان‌طور که قبلاً اشاره کردیم تنها برخی از ستون‌های I_{n-m} در پایین قطر اصلی پخش می‌شوند، پس اثبات این حالت هم به‌روش مشابه است. بنابراین \tilde{H}_λ می‌تواند از \tilde{H} با استفاده از عملیات تشابهی مقدماتی

$$\begin{aligned} \text{Column}(j) - \lambda_j \text{Column}(i) &\longrightarrow \text{Column}(j) & , & \quad j = n, n-1, \dots, m \\ \text{Row}(i) + \lambda_j \text{Row}(j) &\longrightarrow \text{Row}(i) & , & \quad i = j - m \end{aligned} \quad (21.4)$$

به‌فرم همدم برداری به‌صورت

$$\tilde{H}_\lambda = \begin{bmatrix} H_0 & \\ I_{n-m} & O_{n-m \times m} \end{bmatrix} \quad (22.4)$$

به‌دست آید که H_0 یک ماتریس $m \times n$ است. همچنین طبق عملیات تشابهی، مقادیر ویژه از ماتریس \tilde{H}_λ همان مقادیر ویژه ماتریس \tilde{H} است. \square

نتیجه ۲.۳.۴. ماتریس پس‌خورد حالت از زوج (B, A) به‌صورت زیر است:

$$\tilde{K} = \tilde{F} + B_0^{-1} H_0 = B_0^{-1} (-G_0 + H_0) \quad (23.4)$$

قضیه ۳.۳.۴. ماتریس پس خورد حالت \tilde{K} مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته $\tilde{\Gamma} = \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K}$ را در زاویه از پیش تعیین شده در سمت چپ صفحه مختلط شکل ۱.۴ اختصاص می‌دهد اگر فرض کنیم که α_j, β_j و d_j فرمی به صورت زیر داشته باشند،

$$\alpha_j = -k \cdot \text{random}(\circ, \uparrow) + a, \quad k \in \mathbb{N}$$

$$\beta_j = |\alpha_j - a| \tan(\theta) \cdot \text{random}(\circ, \uparrow)$$

و برای هر تخصیص مقادیر ویژه حقیقی در بخش از پیش تعیین شده، d_j را به صورت زیر انتخاب کنیم.

$$d_j = -k \cdot \text{random}(\circ, \uparrow) + a \quad k \in \mathbb{N} \quad (24.4)$$

برهان. طبق رابطه (۱۸.۴) مقادیر ویژه ماتریس D در زاویه مشخص شده قرار می‌گیرند چون:

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma} = \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K} &= \begin{bmatrix} G_\circ & \\ I_{n-m} & O_{n-m \times m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_\circ \\ O_{n-m \times m} \end{bmatrix} [B_\circ^{-1}(-G_\circ + H_\circ)] \\ &= \begin{bmatrix} G_\circ - B_\circ B_\circ^{-1} G_\circ + B_\circ B_\circ^{-1} H_\circ & \\ I_{n-m} & O_{n-m \times m} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} H_\circ & \\ I_{n-m} & O_{n-m \times m} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (25.4)$$

به وضوح $\tilde{\Gamma} = \tilde{H}_\lambda$. حال چون ماتریس \tilde{H}_λ با ماتریس \tilde{H} متشابه است و عملیات تشابهی مقادیر ویژه را تغییر نمی‌دهد، پس مقادیر ویژه ماتریس \tilde{H}_λ با مقادیر ویژه ماتریس \tilde{H} برابر است. بنابراین مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته $\tilde{\Gamma} = \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K}$ در زاویه مشخص شده قرار می‌گیرد. \square

ملاحظه ۴.۳.۴. چون \tilde{K} تخصیص مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته $\tilde{\Gamma} = \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K}$ در زاویه تعیین شده است، به وضوح ماتریس کنترل کننده پس خورد حالت

$$K = \tilde{K}T^{-1} = B_\circ^{-1}(-G_\circ + H_\circ)T^{-1}$$

تخصیص مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته $\Gamma = A + BK$ در زاویه تعیین شده است.

توجه داشته باشید که برای تعیین مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته در طیف $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ فرض می‌کنیم که:

$$D_j = \lambda_j \quad , \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (26.4)$$

۱.۳.۴ الگوریتم روش

در این بخش ابتدا یک الگوریتم برای پیدا کردن ماتریس پس خورد که مقادیر ویژه صفر را به سیستم حلقه بسته اختصاص می‌دهد به دست می‌آوریم، سپس یک ماتریس افزوده که مقادیر ویژه حلقه بسته را در بخش تعیین شده اختصاص می‌دهد را تعیین می‌کنیم.

ورودی:

◁ زوج کنترل‌پذیر (A, B)

◁ پس خورد حالت اولیه F_p

◁ T^{-1} و B_0^{-1} که توسط الگوریتم پیشنهاد شده توسط بل و کرباسی محاسبه می‌شوند.

◁ زاویه θ و a که فاصله رأس زاویه از مبدأ صفحه مختلط است.

حال الگوریتم برای تخصیص مقادیر ویژه در بخش نشان داده شکل ۱.۴ به صورت زیر است.

گام اول: ماتریس قطری D نظیر رابطه (۱۸.۴)، و برای تخصیص مقادیر ویژه مختلط در زاویه مشخص شده مطابق شکل ۱.۴ α_j و β_j را به صورت زیر انتخاب می‌کنیم:

$$\alpha_j = -k \cdot \text{random}(\circ, 1) + a, \quad k \in \mathbb{N}$$

$$\beta_j = |\alpha_j - a| \tan(\theta) \cdot \text{random}(\circ, 1)$$

و برای تخصیص مقادیر ویژه حقیقی در زاویه نشان داده شده در شکل ۱.۴ داریم:

$$d_j = -k \cdot \text{random}(\circ, 1) + a \quad k \in \mathbb{N}$$

گام دوم: $\tilde{H} = \tilde{\Gamma}_0 + D$ را به دست می‌آوریم.

گام سوم: تبدیل \tilde{H} به فرم همدم برداری \tilde{H}_λ مطابق رابطه (۲۲.۴) با استفاده از عملیات تشابهی به عنوان یک نتیجه خاص از قضیه (۱.۳.۴) است.

گام چهارم: حال ماتریس پس خورد حالت $K = F_p + B_0^{-1} \tilde{H} T^{-1}$ را محاسبه می‌کنیم.

مثال ۵.۳.۴. پایداری سیستم پیوسته زمانی کسری مثبت

$$\frac{d^{\delta} x(t)}{dt^{\delta}} = \sum_{k=0}^{\nu} [A_k x(t - d_k) + B_k u(t - d_k)]$$

با پس خورد حالت $u(t) = Kx(t)$ ، را بررسی کنید. به طوری که ماتریس‌های آن به صورت زیر هستند.

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 4 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -1 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_0 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \\ -2 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

برهان. داریم:

$$A = \sum_{k=0}^2 A_k = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 8 & 1 & 3 & 8 \\ 1 & 1 & 8 & 3 & 7 & 7 \\ 8 & 5 & 5 & 1 & 4 & 2 \\ 9 & 1 & 8 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 6 & 7 & 6 & 8 \\ 9 & 4 & 2 & 8 & 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \sum_{k=0}^2 B_k = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 4 & 0 \\ 9 & 2 & 7 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 9 \\ 7 & 4 & 0 & 8 \\ 2 & 0 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه ماتریس حلقه باز (A) برابر است با:

$$\{26/5923 + 10^{-4}i, 1/1651 \pm 6/3264i, -7/9665 + 10^{-4}i, -3/2591 + 10^{-4}i, 0/3031 + 10^{-4}i\}$$

که در تمام صفحه مختلط پخش شده‌اند، که برای تخصیص مقادیر ویژه در زاویه سمت چپ صفحه مختلط از الگوریتم فوق استفاده می‌کنیم.

برای این منظور ابتدا ماتریس پس‌خورد حالتی که مقادیر ویژه صفر را به سیستم حلقه بسته اختصاص می‌دهد (F_p) را به دست می‌آوریم:

$$F_p = \begin{bmatrix} 1/7090 & -2/2856 & -2/4735 & -0/7208 & -1/9936 & -3/5693 \\ -3/3175 & 0/8086 & 1/0540 & 0/2529 & 2/9120 & 2/6597 \\ -0/6196 & 0/5241 & 0/4805 & -0/3482 & -0/0022 & 0/6213 \\ -0/7398 & 0/5505 & 0/1069 & -0/0580 & -0/129 & 0/5683 \end{bmatrix}$$

تخصیص مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته در زاویه

$$\phi = \frac{\pi}{2\alpha} = \frac{5\pi}{8} \rightarrow \theta = \pi - \phi = \frac{3\pi}{8}, a = -2, z = 4$$

ابتدا ماتریس D را به دست می‌آوریم:

$$D = \begin{bmatrix} -20,8883 & 41,3046 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -41,3046 & -20,8883 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -18,6667 & 36,7515 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -36,7515 & -18,6667 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3,8971 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2,7803 \end{bmatrix}$$

سپس با استفاده از الگوریتم، ماتریس پس‌خورد حالت برابر است با:

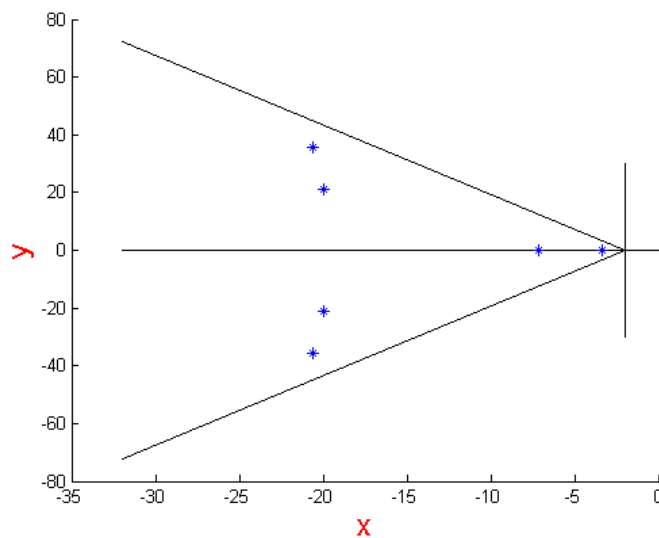
$$K = \begin{bmatrix} 5,6992 & -16,1561 & -16,3295 & 17,5642 & -12,0599 & 2,2542 \\ -18,1451 & 5,1259 & 5,9445 & 2,8944 & 0,1893 & -1,4241 \\ -3,2967 & 0,418 & 2,6225 & 1,5816 & 0,8173 & -1,2587 \\ 5,3978 & -4,6458 & -1,5562 & 0,6953 & 3,557 & -3,2854 \end{bmatrix}$$

به‌وضوح مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته:

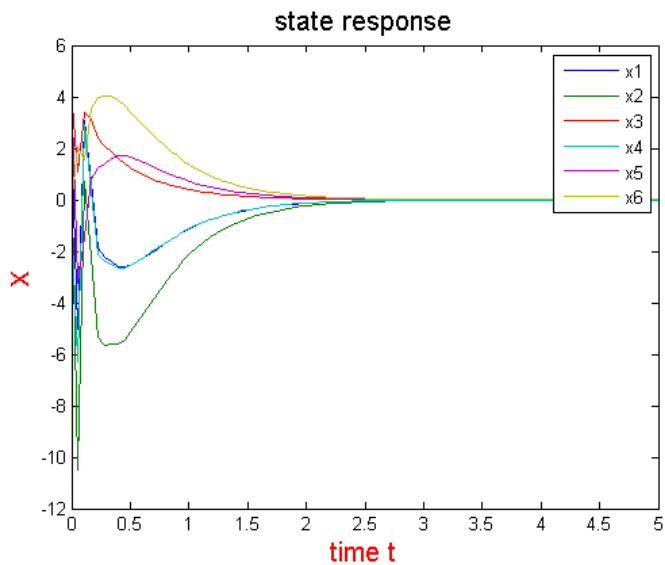
$$\{-3,8971, -2,7803, -18,6667 \pm 36,7515i, -20,8883 \pm 41,3046i\}$$

مطابق شکل ۲.۴ در زاویه مشخص شده در سمت چپ صفحه مختلط قرار می‌گیرند، و طبق شکل‌های

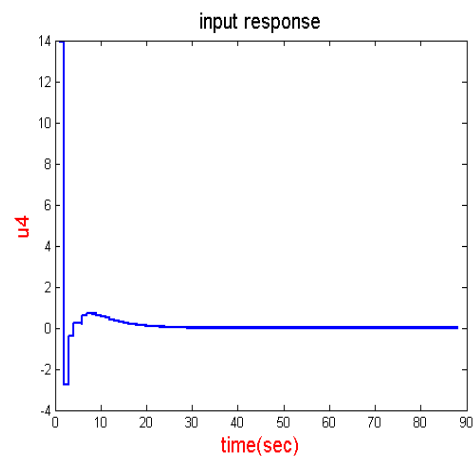
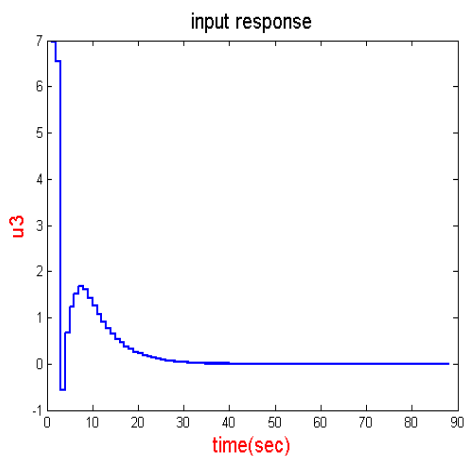
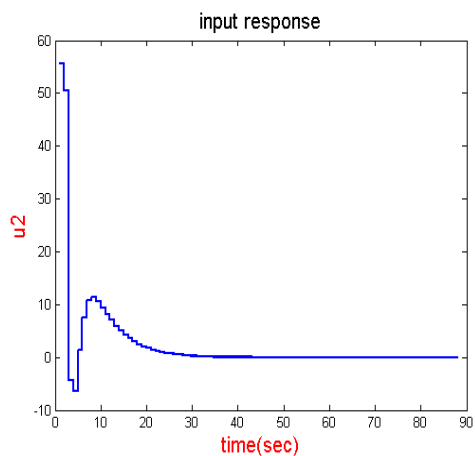
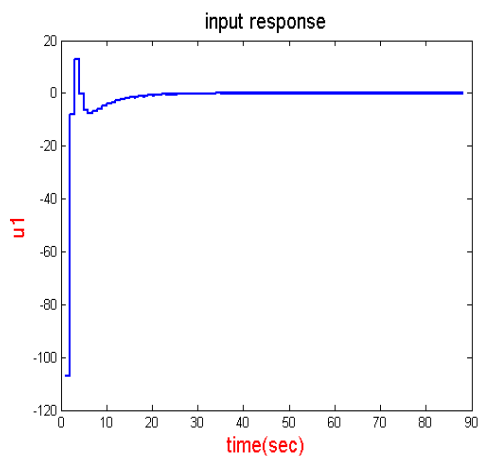
۳.۴ و ۴.۴، بردارهای حالت و ورودی، به بردار تعادل خود همگرا می‌شوند.



شکل ۲.۴: نمایش قرار گرفتن مقدار ویژه در صفحه مختلط



شکل ۳.۴: مؤلفه‌های بردار حالت به نقطه تعادل صفر همگرا می‌شوند.



شکل ۴.۴: مؤلفه‌های بردار ورودی به نقطه تعادل صفر همگرا می‌شوند.

۲.۳.۴ پایداری عملی سیستم‌های گسسته‌کسری با استفاده از تبدیلات تشابهی

در فصل ۳ پایداری سیستم‌های گسسته زمانی و شرایط لازم و کافی برای پایداری عملی این سیستم‌ها را مطرح کردیم. حال در این جا روش جدید از پایداری عملی سیستم‌های گسسته زمانی مثبت کسری را معرفی می‌کنیم. ماتریس پس‌خورد حالت سیستم را با استفاده از تبدیلات تشابهی به‌گونه‌ای محاسبه می‌کنیم که مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته، مقادیر از پیش تعیین شده در دایره واحد باشند. در پایان یک مثال برای تعیین روش ارائه می‌دهیم.

معادلات (۲۷.۳)، (۲۱.۳) و (۲۸.۳) که توصیف یک سیستم خطی گسسته زمانی با h تأخیر در بردار حالت است را در نظر می‌گیریم. حال با تعریف بردار حالت

$$\bar{x}_k = \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k-1} \\ \vdots \\ x_{k-h} \end{bmatrix}$$

معادلات (۲۷.۳) و (۸.۳) را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\bar{x}_{k+1} = \bar{A}\bar{x}_k + \bar{B}u_k, \quad k \in \mathbb{Z}_+ \quad (27.4)$$

$$y_k = \bar{C}\bar{x}_k + \bar{D}u_k \quad (28.4)$$

که

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A_\alpha & c_1 I_n & c_2 I_n & \cdots & c_{h-1} I_n & c_h I_n \\ I_n & o & o & \cdots & o & o \\ o & I_n & o & \cdots & o & o \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ o & o & o & \cdots & I_n & o \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_+^{\bar{n} \times \bar{n}}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ o \\ \vdots \\ o \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_+^{\bar{n} \times m} \quad (29.4)$$

$$\bar{C} = [C \quad o \quad \cdots \quad o] \in \mathbb{R}_+^{p \times \bar{n}}, \quad \bar{D} = D \in \mathbb{R}_+^{p \times m}, \quad \bar{n} = (\lambda + h)n$$

با فرض این که $rank(\bar{B}) = m$ است، و پس‌خورد حالت

$$u(t) = K\bar{x}_k \quad (30.4)$$

که $K \in \mathbb{R}^{m \times \bar{n}}$ ماتریس پس‌خورد حالت است را در نظر می‌گیریم. با جایگذاری رابطه (۳۰.۴) در (۲۷.۴) داریم:

$$\bar{x}_{k+1} = (\bar{A} + \bar{B}K)\bar{x}_k = \Gamma \bar{x}_k \quad (31.4)$$

که Γ سیستم حلقه بسته است. در واقع ما به دنبال ماتریس پس‌خورد K هستیم به طوری که طیف (مجموعه مقادیر ویژه) سیستم حلقه بسته که با $\Lambda(\Gamma)$ نشان می‌دهیم در دایره واحد قرار بگیرد، آنگاه گوییم

که سیستم (۳۱.۴) پایدار مجانبی است. انتقال حالت زیر را در نظر بگیرید:

$$\bar{x}_k = T\tilde{x}_k$$

که ماتریس T را می‌توان با عملیات تشابهی مقدماتی که در بخش (۲.۴) شرح داده شد، به دست آورد. در این روش

$$\tilde{A} = T^{-1}\bar{A}T, \quad \tilde{B} = T^{-1}\bar{B}$$

فرم همدم برداری ماتریس‌های \bar{A} و \bar{B} هستند که به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} G_0 & & \\ & \dots & \\ I_{\bar{n}-m} & & O_{\bar{n}-m \times m} \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B_0 & \\ & \dots & \\ & & O_{\bar{n}-m \times m} \end{bmatrix}$$

که G_0 یک ماتریس $m \times \bar{n}$ و B_0 یک ماتریس $m \times m$ بالا مثلثی است. همان‌طور که در بخش (۱.۲.۴) توضیح داده شد، اگر ناوردهای کرونگر زوج (\bar{B}, \bar{A}) منظم باشند آنگاه \tilde{A} و \tilde{B} به فرم فوق هستند [۱۹]، و در غیر این صورت اگر ناوردهای کرونگر نامنظم باشند بعضی از سطرهای $I_{\bar{n}-m}$ از \tilde{A} پخش می‌شوند [۲۰]. ماتریس پس‌خورد حالت برای زوج (\tilde{B}, \tilde{A}) که مقادیر ویژه صفر را به سیستم اختصاص می‌دهد برابر است با:

$$u = -B_0^{-1}G_0\tilde{x} = \tilde{F}\tilde{x}$$

در نتیجه ماتریس پس‌خورد اولیه برای زوج (\bar{B}, \bar{A}) به صورت $F_p = \tilde{F}T^{-1}$ تعریف می‌شود. بنابراین ماتریس حلقه بسته همدم برداری $\tilde{\Gamma} = \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{F}$ به فرم جردن که همه مقادیر ویژه آن صفر است به دست می‌آید.

حال تعریف می‌کنیم $D = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ و $A_\lambda = \tilde{\Gamma} + D$ ، که با استفاده از عملیات

تشابهی آن را به فرم همدم برداری $\tilde{A}_\lambda = \begin{bmatrix} G_\lambda & & \\ & \dots & \\ I_{n-m} & & O \end{bmatrix}$ تبدیل می‌کنیم، و سپس ماتریس پس‌خورد حالت به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$K = B_0^{-1}(-G_0 + G_\lambda)T^{-1}$$

مثال ۶.۳.۴. پایداری عملی سیستم کسری مثبت زیر را بررسی می‌کنیم.

$$\Delta^\alpha x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \quad K \in \mathbb{Z}_+, \alpha = 0.9, h = 2$$

که در آن

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

برهان. در این جا $m, n = 3$ و $h = 2$ بنابراین $\bar{n} = (1+h).n = 9$ و $c_1 = 0.45$, $c_2 = 0.165$ پس ابتدا ماتریس \bar{A} و \bar{B} را طبق (۲۹.۴) تشکیل می‌دهیم.

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1/9 & 2 & 3 & 0.45 & 0 & 0 & 0.165 & 0 & 0 \\ -2 & 1/9 & -1 & 0 & 0.45 & 0 & 0 & 0.165 & 0 \\ 4 & -1 & 2/9 & 0 & 0 & 0.45 & 0 & 0 & 0.165 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{9 \times 9}$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 9}$$

مقادیر ویژه ماتریس حلقه باز (\bar{A}) برابر است با:

$$\{0.5393, 1.7027, -0.5272, 0.1904, -0.1644, -0.0043 \pm 0.544i, -0.161 \pm 0.971i\}$$

حال ماتریس پس‌خورد حالتی که مقادیر ویژه صفر را به سیستم حلقه بسته اختصاص می‌دهد را به دست می‌آوریم.

$$F_p = \begin{bmatrix} -4.0333 & 2.3 & -2.2333 & 0.15 & 0.15 & -0.45 & 0.0055 & 0.0055 & -0.165 \\ 0.0333 & -1.3 & -0.6667 & -0.15 & -0.15 & 0 & -0.0055 & -0.0055 & 0 \\ 2.0667 & -1.7 & 0.5667 & -0.03 & 0.15 & 0.45 & -0.11 & 0.0055 & 0.165 \end{bmatrix}$$

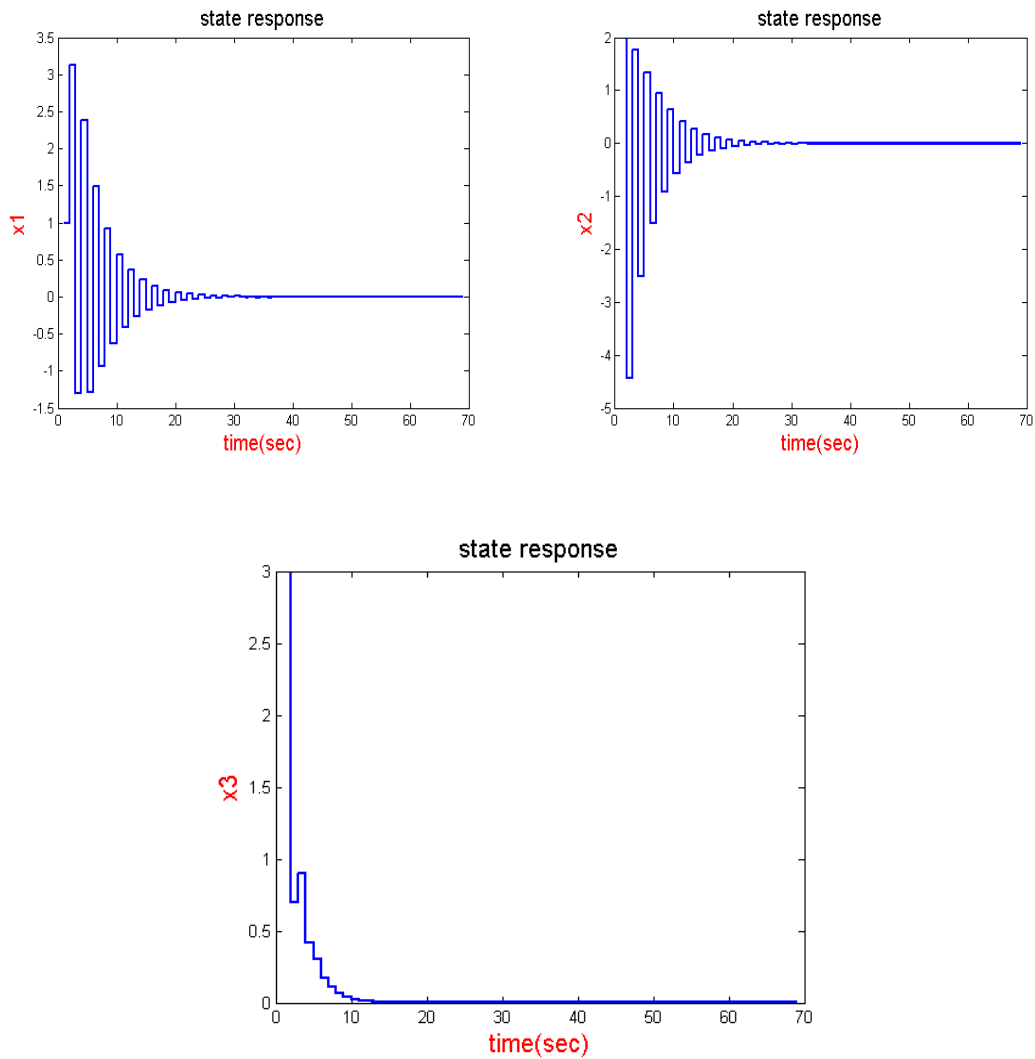
می‌خواهیم ماتریس پس‌خورد حالت را به‌گونه‌ای محاسبه نماییم که مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته در طیف

$$\Lambda = \{0.1, -0.2, -0.45, -1/8, 0.06, -0.8, 0.62, -0.25, 0.7\}$$

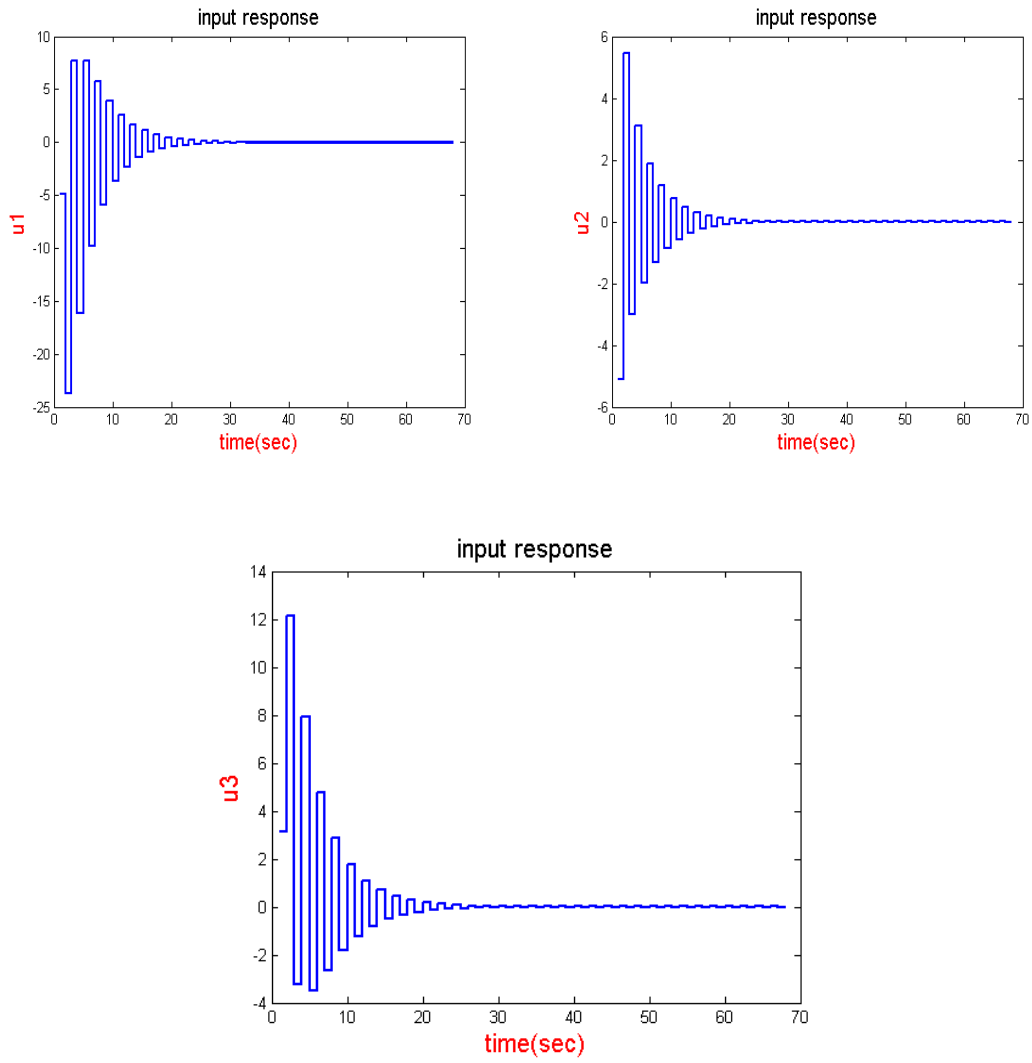
قرار گیرد. پس با استفاده از روش ارائه شده داریم:

$$K = \begin{bmatrix} -۴,۲۳۱۷ & ۲,۱۰۱۷ & -۱,۶۳۸۳ & ۰,۰۰۵۷ & ۰,۰۰۵۷ & -۰,۰۱۷ & ۰,۰۰۸۱ & ۰,۰۰۸۱ & -۰,۰۲۴۳ \\ -۰,۰۹۶۷ & -۱,۴۳ & -۰,۶۶۶۷ & -۰,۰۲۲۷ & -۰,۰۲۲۷ & ۰ & -۰,۰۰۴۵ & -۰,۰۰۴۵ & ۰ \\ ۱,۷ & -۱,۵۱۶۷ & ۱,۱۱۶۷ & ۰,۳۱۳۳ & -۰,۱۵۶۷ & -۰,۴۷ & ۰,۱۵۷ & -۰,۰۷۸۵ & -۰,۲۳۵۵ \end{bmatrix}$$

بنابراین مقادیر ویژه سیستم حلقه بسته در دایره واحد قرار می‌گیرد، و همان‌طور که در شکل‌های زیر نشان دادیم، بردارهای حالت و ورودی، به سمت بردار تعادل خود حرکت می‌کنند.



شکل ۵.۴: مؤلفه‌های بردار حالت به نقطه تعادل صفر همگرا می‌شوند.



شکل ۶.۴: مؤلفه‌های بردار ورودی به نقطه تعادل صفر همگرا می‌شوند.



فصل ۵

نتیجه‌گیری

در این پایان‌نامه مسأله پایداری و پایدارسازی سیستم‌های خطی کسری مثبت با تأخیر زمانی، با استفاده از پس‌خورد حالت مورد بررسی گرفته است. با توجه به اهمیت این مسأله در نظریه کنترل و بهینه‌سازی، تاکنون روش‌های زیادی برای حل این مسأله ارائه شده است که ما به بررسی برخی از این روش‌ها پرداختیم. سپس روش دیگری که از جهاتی مناسب‌تر است را پیشنهاد کرده‌ایم که با استفاده از آن بتوان تخصیص مقادیر ویژه برای پایداری سیستم‌های خطی کسری مثبت را حل نمود.

همان‌طور که در فصل ۲، به آن اشاره شد، پایداری سیستم‌های پیوسته زمانی خطی کسری مثبت با تأخیر زمانی توسط پس‌خورد حالت را به‌گونه‌ای بررسی کردیم که صفرهای چندجمله‌ای حلقه بسته در سمت چپ صفحه مختلط در زاویه مشخص شده قرار بگیرد.

در فصل ۳، روشی را پیشنهاد داده‌ایم که می‌توان با استفاده از آن، پایداری عملی سیستم‌های گسسته زمانی خطی کسری مثبت را بررسی کرد. بدین‌ترتیب ابتدا، تأخیرهای زمانی یک سیستم گسسته زمانی خطی کسری مثبت با تأخیر را توسط برخی اعداد طبیعی مانند h محدود کرده و با تعریف بردار حالت جدید (در این‌جا تأخیر را در بردار حالت در نظر گرفته‌ایم)، سیستم را به یک سیستم در ظاهر بدون تأخیر (سیستم استاندارد) تبدیل کرده و طبق قضیه‌های مطرح شده، با استفاده از چندین روش پایداری عملی سیستم استاندارد شده را بررسی کرده‌ایم. نشان دادیم که سیستم کسری مثبت با تأخیر برای هر h متناهی ناپایدار عملی است، اگر سیستم مثبت بدون تأخیر ناپایدار مجانبی باشد. سرانجام با استفاده از الگوریتم ارائه شده برای محاسبه پایداری عملی، توانستیم با تبدیل سیستم تأخیری به یک سیستم بدون تأخیر، پایداری عملی سیستم را محاسبه می‌کنیم.

روش جدیدی را در فصل ۴، بیان کرده‌ایم که حل مسأله پایداری مجانبی سیستم‌های پیوسته زمانی خطی کسری مثبت با تأخیر، و پایداری عملی سیستم‌های گسسته زمانی خطی کسری مثبت با تأخیر، با استفاده از تبدیلات تشابهی را بررسی می‌کند. از مزیت‌های این روش نسبت به روش‌های دیگر، می‌توان

به موارد زیر اشاره کرد:

◁ سهولت اجرا: تعدادی از روش‌ها برای سیستم‌های تأخیری دارای مشکلاتی در اجرا هستند، و این اساساً به این خاطر است که کنترل‌کننده‌ای که با این روش‌ها طراحی می‌شود شکل غیر خطی می‌گیرد، اما کنترل‌کننده‌ای که با استفاده از روش تبدیلات تشابهی به دست می‌آید صورت خطی دارد و بنابراین اجرای آن آسان است.

◁ دقت: در این روش با تبدیل سیستم تأخیری به یک سیستم بدون تأخیر، جوابی که به دست می‌آید دقیق‌تر است. همچنین با انجام مراحل کمتر به جواب می‌رسیم.

همان‌طور که بیان شد مسأله پایداری و پایدارسازی سیستم‌های خطی کسری مثبت با تأخیر، یکی از پرکاربردترین و مهم‌ترین مسائل نظریه کنترل و بهینه‌سازی است. در ادامه این پایان‌نامه، می‌توان روی پایداری سیستم‌های دوبعدی و حتی چندبعدی و سیستم‌های توسیع‌یافته و ... خطی کسری مثبت، بهره جست. همچنین می‌توان پایداری سیستم‌های کسری مثبت با پس‌خورد مشتق حالت را، با استفاده از تبدیلات تشابهی بررسی نمود.

پیوست آ

کد متلب

```
AAA=[1 7 8 1 3 8;1 1 8 3 7 7;8 5 5 1 4 2;9 1 8 3 0 3;1 4 6 7 6 8;9 4 2 8 0 2];
BBB=[7 3 4 0;9 2 7 4;3 2 3 9;7 4 0 8;2 0 4 3;1 2 9 0];
t0=cputime;
disp('          This is the given plant matrix A')
disp('          *****')
          A=AAA
disp('          This is the given input matrix B')
disp('          *****')
          B=BBB
[n,m]=size(B);
r=n+m;
Q=[B,A];
T1=eye(n);
% The Echelon form of Q
% -----
i=1;j=1; tol=1e-6;
while ( i<=n ) & ( j<=r )
    [q,k]=max(abs(Q(i:n,j))) ; k=k+i-1;
    if (q<=tol)
        Q(i:n,j)=zeros(n-i+1,1);
        j=j+1;
    else

        o1

        o2
```

```

                                o3
                                i=i+1 ;
                                j=j+1;
                                end
                                end
                                % *****
                                % Now compute the Standard echelon form          !
                                % -----
                                s=1;
                                while s < n
                                    i=s+1 ;
                                    for j=i:r
                                        if Q(i,j)~=0
                                            for k=1:s
                                                if Q(k,j)~=0
                                                    t=Q(k,j);
                                                    Q(k,:)=Q(k,:)-t*Q(i,:);
                                                    T1(k,:)=T1(k,:)-t*T1(i,:);
                                                    Q(:,i+m)=Q(:,i+m)+t*Q(:,k+m);
                                                end
                                            end
                                        end
                                    break
                                end
                                end
                                s=s+1;
                                end
                                % *****
                                % choice=input(' do you want the kronecker invariants displayed,y/n %','s')
                                % if choice=='y'
                                    kronk3
                                % end
                                % *****
                                % The vector companion form
                                for i=n:-1:m+1

```

```

        for k=i:r
            if Q(i,k)==1
                for j=k+1:r
                    t=Q(i,j);
                    Q(:,j)=Q(:,j)-t*Q(:,k);
                    Q(k-m,:)=Q(k-m,:)+t*Q(j-m,:);
                    T1(k-m,:)=T1(k-m,:)+t*T1(j-m,:);
                end
            end
        end

        end

        % *****
% choice=input('do you want the prim. vec comp form displayed,y/n%','s')
%   if choice=='y'
%   disp('   The standard Vector Companion form ')
%   disp('   ***** ')
%       Q

%   end

% .....
disp('           This is the transformation matrix,T1')
disp('           *****')

                T1

%               disp(' press any key to continue')

% *****

% pause

% The Feed-back matrix , F
B1=Q(:, [1:m]);A1=Q(:, [m+1:r])
B0=Q(1:m,1:m);bo=inv(B0)
G=Q(1:m,m+1:r);F1=-bo*G;G0=G;
Fp=F1*T1;

% *****

disp('           This is the primdry feedback law ')

```

```

disp('          ***** ')

Fp
% *****
%disp('          The closed loop matrix A+B*F ')
%disp('          ***** ')
gama=A+B*Fp
% *****

t1=cputime-t0
    a=input('enter a<0 on axis of abscissas=');
teta=input ('enter teta=');
z=input('inter z number complex eigenvalue, z is even and z<=n :');
D=[];

    i=1;
    k=-6;
for i=1:2:z
    D(i,i)=k*rand(1)+8*a;

    D(i,i+1)=rand(1)*abs(D(i,i)-a)*abs(tan(teta));
while D(i,i+1)==abs(D(i,i)-a)*abs(tan(teta)) || D(i,i+1)<=0.01
    D(i,i+1)=rand(1)*abs(D(i,i)-a)*abs(tan(teta));
end
    D(i+1,i)=-D(i,i+1);
    D(i+1,i+1)=D(i,i);
    k=k-15;
end
D
pause
k=-3;
for i=z+1:n
    D(i,i)=k*rand(1)+a;
    k=k-5;
end

```

```

D
%pause
%if c==0
    Acap=A1;
    Bcap=B1;
    newF=Fp ;
%end
ac=Acap+Bcap*F1;
ac1=ac+D;
bc1=Bcap*bo;

Qc=[bc1 ac1];

% The vector companion form
for i=n:-1:m+1
    for k=1:r
        if Qc(i,k)==1
            for j=k+1:r
                t=Qc(i,j);
                Qc(:,j)=Qc(:,j)-t*Qc(:,k);
                Qc(k-m,:)=Qc(k-m,:)+t*Qc(j-m,:);
            end
            break
        end
    end
end

G2=Qc(1:m,m+1:r);
Fc=bo*G2*T1;
disp('    The feedback matrix which gives the desired eigenvalues')
disp('    *****')
Kp=newF+Fc
%    disp('    with the closed-loop matrix ')
%    disp('    ***** ')
gamac=A+B*Kp

```

```

disp('      checking the eigen values ')
disp('      ***** ')
v=eig(gamac)'
[u1,v1]=eig(gamac);
c2=cond(u1);
disp('      Frobenius norm of feedback matrix ')
disp('      ***** ')
Normkp=norm(Kp,'fro');
% disp('      frobenious norm of closed-loop matrix ')
% disp('      ***** ')
% Normgama=norm(gamac,'fro')
clf
x1=[a-30 a];
y1=tan(teta)*(x1-a);
x2=x1;
y2=-y1;
x3=[a a];
y3=[-30 30];
x4=[a-30 0];
y4=[0 0];
hold on;
plot(x1,y1,'k',x2,y2,'k',x3,y3,'k',x4,y4,'k');
plot(v,'b*');
hold off;

t=linspace(0,5,90);
x=zeros(6,90);
u=zeros(4,90);

mata = zeros(6,6,90);
x0 = [2;1;4;-1;4;0];
for k=1:90
    mata(:,:,k) = expm(gamac*t(k));
    x(:,k) = mata(:,:,k)*x0;

```

```

end
plot(t,x)
title('state response')
ylabel('x')
xlabel('time t')
    legend('x1','x2','x3','x4','x5','x6')
hold on
pause
    up=[];
%u0 = [-43,3];
i=2;
while i<90
up(:,i-1)=Kp*x(:,i-1);
i=i+1;
end
subplot(2,2,1)
stairs(up(1,:))
title('input response')
ylabel('u1')
xlabel('time(sec)')
subplot(2,2,2)
stairs(up(2,:))
ylabel('u2')
xlabel('time(sec)')
subplot(2,2,3)
stairs(up(3,:))
ylabel('u3')
xlabel('time(sec)')
subplot(2,2,4)
stairs(up(4,:))
ylabel('u4')
xlabel('time(sec)')

D=[];

```

```

for j=1:n
    landa(j)=input(['Enter landa(',int2str(j),')=']);
    end
%landa=[ 0  0  0  ]

for i=1:n
    D(i,i)= landa(i);
    end
% D
%if c==0
    Acap=A1;
    Bcap=B1;
    newF=Fp ;
%end
ac=Acap+Bcap*F1;
ac1=ac+D;
bc1=Bcap*bo;

Qc=[bc1 ac1];
% The vector companion form
for i=n:-1:m+1
    for k=1:r
        if Qc(i,k)==1
            for j=k+1:r
                t=Qc(i,j);
                Qc(:,j)=Qc(:,j)-t*Qc(:,k);
                Qc(k-m,:)=Qc(k-m,:)+t*Qc(j-m,:);
            end
            break
        end
    end
end

end

G2=Qc(1:m,m+1:r);
glanda=Qc(:,m+1:r);

```



```

    Fc=bo*G2*T1;
disp('    The feedback matrix which gives the desired eigenvalues')
disp('    *****')
    Kp=newF+Fc
%    disp('    with the closed-loop matrix ')
%    disp('    ***** ')
    gamac=A+B*Kp;
disp('    checking the eigen values ')
disp('    ***** ')
    v=eig(gamac)
    [u1,v1]=eig(gamac);
    c2=cond(u1)
disp('    Frobenius norm of feedback matrix ')
disp('    ***** ')
    Normkp=norm(Kp,'fro')

```


مراجع

- [1] M. Buslowicz, Simple stability conditions for linear positive discrete-time systems with delays, *Bull. Pol. Acad. Techn. Sci*, No. 50, Vol. 4, 2008.
- [2] M. Buslowicz, Stability of linear continuous-time fractional order systems with delays of the retarded type, *Bull. Pol. Ac.: Tech*, No. 56, Vol. 4, 2008.
- [3] B.N. Datta, Numerical methods for linear control systems: design and analysis, *Academic Press*, Vol. 1, 2004.
- [4] B.N. Datta, Numerical linear algebra and applications, *Siam*, 2010.
- [5] B.N. Datta, Numerical methods for linear control systems design and analysis, 2003.
- [6] L. Farina and S. Rinaldi, Positive Linear Systems: Theory and Applications, *John Wiley & Sons*, Vol. 50, 2000.
- [7] M.M. Fateh, H.A. Tehrani, and S.M. Karbassi, Repetitive control of electrically driven robot manipulators, *International Journal of Systems Science*, No. 44, Vol. 4, pages 775–785, 2013.
- [8] K. Galkowski and A. Kummert, Fractional polynomials and nD systems, In *Circuits and Systems, ISCAS, IEEE International Symposium on*, pages 2040–2043, 2005.
- [9] H. Guretskiy, Analysis and synthesis of control systems with delay, *Mashinostroenie*, 1974.
- [10] J.K. Hale and S.M.V. Lunel, Introduction to Functional Differential Equations, *Springer Science & Business Media*, Vol. 99, 1993.
- [11] T. Kaczorek, Stability and stabilization of positive fractional linear systems by state-feedbacks, *Bulletin of the Polish Academy of Sciences: Technical Sciences*, No. 58Vol. 4, pages 537–554, 2010.
- [12] T. Kaczorek, Asymptotic stability of positive 1D and 2D linear systems, *Springer Verlag Berlin Heidelberg*, 2011.

-
- [13] T. Kaczorek, Positive 1D and 2D Systems, *Springer Science & Business Media*, 2002.
- [14] T. Kaczorek, The choice of the forms of lyapunov functions for a positive 2D roesser model, *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, No. 17, Vol. 4, pages 471–475, 2007.
- [15] T. Kaczorek, Fractional positive continuous-time linear systems and their reachability, *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, No. 18, Vol. 2, page 223, 2008.
- [16] T. Kaczorek, Practical stability of positive fractional discrete-time linear systems, *Bull. Pol. Acad. Techn. Sci*, No. 56, Vol. 4, 2008.
- [17] T. Kaczorek, Stability of positive continuous-time linear systems with delays, In *Control Conference (ECC), European*, pages 1610–1613, 2009.
- [18] T. Kaczorek, Stabilization of fractional positive continuous-time linear systems with delays in sectors of left half complex plane by state-feedbacks, *Control and Cybernetics*, No. 39, Vol. 3, pages 783–795, 2010.
- [19] S.M. Karbassi and D.J. Bell, Parametric time-optimal control of linear discrete-time systems by state feedback part 1. regular kronecker invariants, *International journal of control*, No. 57, Vol. 4, pages 817–830, 1993.
- [20] S.M. Karbassi and D.J. Bell, Parametric time-optimal control of linear discrete-time systems by state feedback part 2. irregular kronecker invariants, *International Journal of Control*, No. 57, Vol. 4, pages 831–839, 1993.
- [21] F. Mainardi, Fractals and fractional calculus in continuum mechanics, *Springer Verlag*, No. 378, 1997.
- [22] K.S. Miller and B. Ross, An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations, 1993.
- [23] K.B. Oldham and J. Spanier, The fractional calculus, *Of mathematics in science and engineering*, Vol. 111, 1974.
- [24] P. Ostalczyk, Epitome of the fractional calculus: Theory and its applications in automatics, *technical university of lodz publishing house, lodz (in polish)*, 2008.
- [25] I. Podlubny, Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications, *Academic press*, Vol. 198, 1998.

-
- [26] A. Quarteroni, R. Sacco, and F. Saleri, Numerical mathematics, *Springer Science & Business Media*, Vol. 37, 2010.
- [27] J.P. Richard, Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems, *Automatica*, No. 39, Vol. 10, pages 1667–1694, 2003.
- [28] O. Smith, Closer control of loops with dead time, pages 217–219, 1957.
- [29] B.M. Vinagre, C.A. Monje, and A.J. Calderon, Fractional order systems and fractional order control actions, In *IEEE Conference on Decision and Control*, pages 2550–2554, 2002.
- [30] Q.C. Zhong, Robust control of time-delay systems, *Springer Science & Business Media*, 2006.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Array	آرایه
Scaler	اسکالر
Principal	اصلی
gain	افزوده
Strictly	اکیداً
Initial	اولیه
Sector	بخش، ناحیه
State vector	بردار حالت
Output vector	بردار خروجی
Eigenvector	بردار ویژه
Bases	پایه
Stability	پایداری
Stabilization	پایدارسازی
Feedback	پس‌خورد
Continous-time	پیوسته زمانی
Function	تابع
Delay	تأخیر
Similarity transformation	تبدیلات تشابهی
Assignment	تخصیص
Transpose	ترانهاد
Linear composition	ترکیب خطی
Single-output	تک خروجی
Single-input	تک ورودی
Solution	جواب
Characteristic polynomial	چندجمله‌ای مشخصه

Real	حقیقی
Loop	حلقه
Open-loop	حلقه باز
Closed-loop	حلقه بسته
Internally	داخلی
Determinant	دترمینان
Sequence	دنباله
Vertex	رأس
Rank	رتبه
Sub space	زیرفضا
Sub-matrix	زیر ماتریس
Series	سری
Fractional system	سیستم کسری
Positive systems	سیستم مثبت
Coefficient	ضریب
Natural	طبیعی
Spectrum	طیف
Numerical	عددی
Integer	عدد صحیح
Practical	عملی
Elementary operations	عملیات مقدماتی
Standard echelon form	فرم استاندارد اشلون
Vector companion form	فرم همدم برداری
Formula	فرمول
Vector space	فضای برداری
Control low	قانون کنترل
Controlable	کنترل‌پذیر
Descript-time	گسسته زمانی
Matrix	ماتریس
Augmented matrix	ماتریس افزوده
Diagonal matrix	ماتریس قطری
Similarity matrix	ماتریس متشابه

Trianglar matrix	ماتریس مثلثی
Squar matrix	ماتریس مربعی
Identity matrix	ماتریس همانی
Unitary matrix	ماتریس یکانی
Variable	متغیر
Asymptotic	مجانبی
Bound	محدود
Order	مرتبہ
Boundary	مرزی
Conjugated complex	مزدوج مختلط
Linear inepended	مستقل خطی
Derivative	مشتق
Differential Equation	معادلات دیفرانسیل
Inverse	معکوس
Eigenvalue	مقدار ویژه
Component	مؤلفه
Fild	میدان
Unstable	ناپایدار
Nonsingular	نامنفرد
Kronecker invariant	ناوردای کرونکر
Equilibrium point	نقطه تعادل
Mapping	نگاشت
Linear depended	وابسته خطی
Existence	وجود
Eqvalent	معادل
Orthonormal	یکامتعامد
Uniqueness	یکتایی

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Array	آرایه
Assignment	تخصیص
Asymptotic	مجانبی
Augmented matrix	ماتریس افزوده
Bases	پایه
Bound	محدود
Boundary	مرزی
Characteristic polynomial	چندجمله‌ای مشخصه
Closed-loop	حلقه بسته
Coefficient	ضریب
Conjugated complex	مزدوج مختلط
Continous-time	پیوسته زمانی
Control low	قانون کنترل
Controlable	کنترل پذیر
Delay	تأخیر
Derivative	مشتق
Descrit-time	گسسته زمانی
Determinant	دترمینان
Diagonal matrix	ماتریس قطری
Differential Equation	معادلات دیفرانسیل
Eigenvalue	مقدار ویژه
Eigenvector	بردار ویژه
Elementary operations	عملیات مقدماتی
Equilibrium point	نقطه تعادل
Eqvalent	معادل

Existence.....	وجود
Feedback	پس خورد
Fild	میدان
Formula	فرمول
Fractional system	سیستم کسری
Function	تابع
gain	افزوده
Identity matrix.....	ماتریس همانی
Initial	اولیه
Integer	عدد صحیح
Internally	داخلی
Inverse	معکوس
Kronecker invariant	ناوردای کرونگر
Linear composition.....	ترکیب خطی
Linear depended.....	وابسته خطی
Linear in depended	مستقل خطی
Loop	حلقه
Mapping.....	نگاشت
Matrix	ماتریس
Natural	طبیعی
Nonsingular	نامنفرد
Numerical.....	عددی
Output vector.....	بردار خروجی
Open-loop.....	حلقه باز
Order	مرتبه
Orthonormal	یکامتعامد
Positive system.....	سیستم مثبت
Practical.....	عملی
Principal.....	اصلی
Real	حقیقی
Rank.....	رتبه
Scaler	اسکالر

Sector	بخش، ناحیه
Sequence	دنباله
Series	سری
Similarity matrix	ماتریس متشابه
Similarity transformation	تبدیلات تشابهی
Single-input	تک ورودی
Single-output	تک خروجی
Solution	جواب
Spectrum	طیف
Square matrix	ماتریس مربعی
Stability	پایداری
Stabilization	پایدار سازی
Standard echelon form	فرم استاندارد اشلون
State vector	بردار حالت
Strictly	اکیداً
Sub-matrix	زیر ماتریس
Sub space	زیر فضا
Transpose	ترانهاد
Triangular matrix	ماتریس مثلثی
Unitary matrix	ماتریس یکانی
Unstable	ناپایدار
Uniqueness	یکتایی
Vertex	رأس
Vector companion form	فرم همدم برداری
Vector space	فضای برداری
Variable	متغیر

نمایه

ح	M ماتریس، ۱۰
حالت تعادل، ۱۶	ا
حلقه باز، ۱۷	انتگرال ریمان-لیوویل، ۲۴
حلقه بسته، ۱۷	ب
د	بردار، ۴
دترمینان، ۶	بردار حالت، ۱۱
ر	بردار خروجی، ۱۱
رتبه ماتریس، ۸	بردار ورودی، ۱۱
ز	بعد فضا، ۸
زیر فضا، ۷	پ
س	پایدار مجانبی، ۱۹
سیستم تک ورودی، ۱۲	پایداری، ۱۸
سیستم خطی، ۱۱	پایه، ۸
سیستم مثبت خارجی، ۱۳	ت
سیستم مثبت داخلی، ۱۳	تابع تبدیل، ۱۱
سیستم پیوسته، ۱۲	تابع سیبی، ۱۰
سیستم‌های مثبت، ۲۹	تابع میتاگ-لفلر، ۲۲
ص	تابع گاما، ۲۱
صفرهای سیستم، ۱۱	تخصیص، ۱۹
ط	ترانهاده ماتریس، ۵
طیف ماتریس، ۹	ترانهاده مزدوج، ۵
ف	ترکیب خطی، ۷
فرم استاندارد اشلون، ۵۹	چ
فرم همدم برداری، ۶۲	چندجمله‌ای مشخصه، ۹

- فرمول کوشی، ۲۳
فضای برداری، ۷
ناوردای زمانی، ۱۲
نقطه تعادل، ۱۶

و

وابسته خطی، ۸

ی

یکامتعامد، ۸

ق

قضیه کانولوشن دو تابع، ۱۰

قطب‌های سیستم، ۱۱

ک

کنترل‌پذیر، ۱۳

گ

گسسته خطی، ۱۳

م

ماتریس، ۵

ماتریس انتقال، ۲۰

ماتریس بالا مثلثی، ۷

ماتریس قطری، ۷

ماتریس متعامد، ۷

ماتریس متلر، ۱۰

ماتریس مربعی، ۵

ماتریس واحد، ۵

ماتریس پایین مثلثی، ۷

ماتریس کنترل‌پذیری، ۱۴

ماتریس‌های متشابه، ۸

مزدوج مختلط، ۵

مستقل خطی، ۸

مشتق کسری ریمان-لیوویل، ۲۴

مشتق کسری کاپوتو، ۲۵

معکوس‌پذیر، ۸

مقدار ویژه و بردارهای ویژه، ۹

ن

نامنفرد، ۹

ناوردهای کرونکر، ۱۶

Aabstract

In this thesis, we will introduce the problem of stabilization of fractional positive linear continuous-time linear systems with delays by state-feedbacks. In these systems the gain matrix of the state feedback is chosen so that the zeros of the closed-loop polynomial are located in a sector of the left half of complex plane.

A new concept (notion) of the practical stability of positive fractional discrete-time linear systems is introduced. We will be shown that the positive fractional systems are practically unstable if corresponding standard positive fractional systems are asymptotically unstable. Necessary and sufficient conditions for the practical stability of the positive fractional systems and the solvability of the problem by making use of similarity transformation are established. We calculate the state feedback matrix which assignment desired eigenvalues to a close-loop system. The considerations are illustrated by a numerical example.

keywords: Fractional systems, Positive, Asymptotically stability, Practical stability, Assignment, State feedback, Similarity transformation



Shahrood University

Faculty Of Mathematical Sciences

**Stability of fractional positive
continuous-time linear systems with delays**

Marzie Sepehr

Supervisor

Dr. Hojat Ahsany Tehrany

Advisor

Dr. Mehdi Ghovatmand

2015