



دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی کاربردی

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

عنوان

روش گام کسری برای حل معادلات دیفرانسیل جبری

استاد راهنما

دکتر مهدی قوتمند

استاد مشاور

دکتر علی مس فروش

دانشجو

فریده قلیچی

۱۳۹۴

تقدیم به ...

پدر و مادر عزیزم

آنان که وجودم جز هدیه وجودشان نیست.

تقدیم به همسر مهربانم

که مسیح وار با صبرش در تمامی محطات رفیق راه بود.

و تقدیم به گل های نازم امیر محمد و بهراد

که کودکی کم شده ام را در چهره معصومش پیدا کردم.

سپاس گزارمی...

سپاس مخصوص خداوند مهربان که به انسان توانایی و دانایی بخشد تا به زندگانش شفقت ورزد، مهربانی کند و در حل مشکلاتشان یاری شان نماید. از راحت خویش بگذرد و آسایش هم نوحان را مقدم دارد، با او معامله کند و در این خلوص انباز نگیرد و خوش باشد که پروردگار سمیع و بصیر است.

از جناب آقای دکتر مهدی قوتمند که در کمال سعه صدر، با حسن خلق و فروتنی، از بیچ لگی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهمایی این رساله را بر عهده گرفتند؛

و از جناب آقای دکتر علی مس فروش که زحمت مشاوره این رساله را متقبل شدند؛ کمال تشکر و قدردانی را دارم. باشد که این خردترین، بنحشی از زحمات آنان را سپاس گوید.

تعمدنامه

اینجانب فریده قلیچی دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی دانشکده علوم ریاضی دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان روش گام کسری برای حل معادلات دیفرانسیل جبری، تحت راهنمایی دکتر مهدی قوتمند متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تاکنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه شاهرود “ یا “ Shahrood University “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

فریده قلیچی
۱۳۹۴

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

معادلات دیفرانسیل جبری (DAE) کاربردهای فراوانی در علوم مختلف دارند که برای حل کردن آن‌ها از روش‌های مختلف استفاده می‌شود تا بتوان سریع‌تر به جواب رسید یکی از روش‌های رایج شده روش گام کسری برای معادلات دیفرانسیل جبری است که در این پایان‌نامه به بررسی این روش می‌پردازیم. در فصل اول مفاهیم و تعاریف اولیه را بیان نموده و مروری گذرا بر کاربردهای معادلات دیفرانسیل جبری خواهیم داشت. در فصل دوم ابتدا به رایج روش حل معادلات دیفرانسیل جبری با اندیس ۱ پرداخته و خطای آن‌ها را بررسی کرده سپس این روش را برای معادلات دیفرانسیل جبری با اندیس ۲ نیز تعمیم می‌دهیم. در فصل سوم این روش را برای معادلات ناویه استوکس تراکم ناپذیر و تراکم پذیر بررسی می‌کنیم و الگوریتم این روش را برای این نوع معادلات رایج می‌دهیم در فصل آخر ابتدا روش نیمه لاگرانژی را برای معادلات آب کم عمق بررسی می‌کنیم سپس نتیجه می‌گیریم که روش گام کسری رایج شده در این پایان‌نامه، در زمان کوتاهی ما را به جواب معادلات آب کم عمق می‌رساند.

فهرست مطالب

۱	تعاریف و مقدمات	۱
۱	مقدمه	۱.۱
۱	معادلات دیفرانسیل معمولی (ODE)	۲.۱
۲	معادلات دیفرانسیل جبری	۳.۱
۴	کاربردهای معادلات دیفرانسیل جبری	۱.۳.۱
۱۱	عدد رینولدز	۴.۱
۱۳	حل معادلات ناویه - استوکس با استفاده از روش گام کسری	۲
۱۳	معادلات ناویه - استوکس	۱.۰.۲
۱۷	روش گام کسری	۱.۲
۲۲	تجزیه و تحلیل خطا	۱.۱.۲
۳۲	روش گام کسری برای حل معادلات تراکم‌پذیر ناویه - استوکس	۲.۱.۲
۳۲	معادلات و حل عددی آنها	۳.۱.۲
۴۲	روشهای عددی	۴.۱.۲
۴۸	کاربرد روش گام کسری برای حل عددی معادلات آب کم عمق	۳
۴۸	روش نیمه لاگرانژی	۱.۳
	حل معادلات آب کم عمق یک بعدی با استفاده از روش نیمه لاگرانژی	۱.۱.۳
۵۱	نیمه ضمنی	
۵۱	استفاده از روش گام کسری برای حل عددی معادلات آب کم عمق	۲.۱.۳
۵۲	مدل پیش بینی آب و هوا باروتروپیک	۳.۱.۳
۵۹	حل معادلات دیفرانسیل جبری با روش گام کسری	۴
۵۹	مقدمه	۱.۴
۵۹	روش گام کسری برای معادلات دیفرانسیل جبری با اندیس ۱	۱.۱.۴
۶۰	روش حل مساله برای معادلات دیفرانسیل جبری	۲.۱.۴
۶۱	الگوریتم یک مرحله‌ای	۳.۱.۴

۶۳	الگوریتم دو مرحله‌ای	۴.۱.۴
۶۵	افزایش مرتبه به وسیله تصحیح نهایی	۵.۱.۴
۶۶	تصحیح نهایی	۶.۱.۴
۶۶	آنالیز همگرایی	۷.۱.۴
۶۹	روش گام کسری برای حل معادلات دیفرانسیل جبری با اندیس ۲	۸.۱.۴
۷۲	روش گام کسری برای حل معادلات دیفرانسیل جبری با اندیس m	۹.۱.۴

۷۸	آ	ضمائم
----	---	-------

۸۰	مراجع
----	-------

۸۴	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی
----	----------------------------

۸۶	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی
----	----------------------------

۸۸	نمایه
----	-------

فصل ۱

تعاریف و مقدمات

۱.۱ مقدمه

رفتار دینامیکی فرآیندهای فیزیکی معمولاً به وسیله معادلات دیفرانسیل مدل‌بندی می‌شوند. اما اگر حالت‌های سیستم فیزیکی به طرق مختلف مقید شده باشند، آنگاه مدل ریاضی فرآیند علاوه بر معادلات دیفرانسیل شامل معادلات جبری برای توصیف این قیود نیز خواهد بود. سیستم‌هایی که شامل معادلات دیفرانسیل و معادلات جبری باشند، سیستم‌های دیفرانسیل جبری یا معادلات دیفرانسیل ضمنی یا سیستم‌های منفرد نامیده می‌شوند. در چهار دهه اخیر با پیشرفت علم و گسترش وسیع معادلات دیفرانسیل جبری در زمینه‌های مختلف علوم و مهندسی، تحلیل و شناخت ساختار این معادلات و ارایه راه‌حل‌هایی مناسب و از نظر اقتصادی مقرون به صرفه، موضوع مورد توجه بسیاری از محققین بوده است.

۲.۱ معادلات دیفرانسیل معمولی (ODE)

معادلات دیفرانسیل، توصیفی ریاضی برای اثرگذاری متغیرها و مشتقات آن با توجه به یک یا تعدادی متغیر مستقل در یک روش دینامیکی بر روی هم هستند. جواب آن‌ها به ما نشان می‌دهد که متغیرهای وابسته با متغیر مستقل چگونه تغییر خواهند کرد. مسایل فراوانی در علوم طبیعی و رشته‌های مهندسی به صورت یک معادله دیفرانسیل عددی یا یک معادله دیفرانسیل برداری، که دستگاه معادلات دیفرانسیل است، فرمول‌بندی می‌شوند.

اگر در معادله دیفرانسیل تابع مجهول بر حسب یک متغیر باشد، آنگاه معادله دیفرانسیل معمولی است. اگر تابع مجهول بر حسب چند متغیر باشد آن را معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی می‌نامند. بالاترین مشتق ظاهر شده (چه مشتق معمولی و چه مشتق جزئی) در معادله دیفرانسیل مرتبه معادله دیفرانسیل است. به عنوان مثال فرض کنید $y(x)$ تابعی بر حسب متغیر x باشد آنگاه روابط زیر معادله دیفرانسیل

معمولی بر حسب y می‌باشند.

$$\begin{aligned} & \text{خطی - مرتبه ۱} \quad y' = x \\ & \text{غیرخطی - مرتبه ۳} \quad yy'' + y''' = \sin x \end{aligned}$$

فرم کلی معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه n بر حسب تابع y به صورت زیر می‌باشد.

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

معادله دیفرانسیل را خطی گوئیم هرگاه ضابطه معادله بر حسب تابع مجهول و مشتقات آن خطی باشد، در غیر این صورت معادله را غیر خطی می‌نامیم. فرم کلی معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه n خطی به صورت زیر است.

$$a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x) = h(x)$$

در معادله فوق اگر $h(x) = 0$ آنگاه معادله را همگن نامیم.
مثال :

$$y''' + xy'' + 2y(y')^2 + xy = 0$$

۳.۱ معادلات دیفرانسیل جبری

یک سیستم از معادلات دیفرانسیل جبری^۱، سیستمی است که هم شامل معادلات دیفرانسیل معمولی و هم شامل معادلات جبری باشد. در حالت کلی یک معادله دیفرانسیل جبری با معادله‌ای به صورت

$$F(y(t), y'(t), t) = 0, \quad F \in C^1(\mathbb{R}^{m+1}, \mathbb{R}^m), \quad t \in [0, T], \quad (1.1)$$

بیان می‌شود که در آن $\frac{\partial F}{\partial y'}$ روی \mathbb{R}^{m+1} منفرد است.

هر معادله دیفرانسیل جبری یک اندیس دارد. مفهوم اندیس در حل معادلات دیفرانسیل جبری و درک ساختار و تحلیل آن‌ها نقش بسیار مهمی دارد. بدون در نظر گرفتن جزییات، اندیس^۲ را می‌توان اندازه منفرد بودن سیستم در نظر گرفت. به بیان دیگر می‌توان اندیس معادله دیفرانسیل جبری (۱.۱) را به صورت زیر تعریف نمود.

تعریف ۱.۳.۱. اندیس معادله دیفرانسیل جبری (۱.۱)، برابر کمترین مرتبه لازم برای مشتق‌گیری از معادله، به منظور تعیین منحصر به فرد y' بر حسب y و t است بنابراین اندیس سیستم (۱.۱) کوچکترین

^۱Differential – algebraic system

^۲Index

عدد صحیح نا منفی p است که به ازای آن بتوان در سیستم تشکیل شده

$$\left\{ \begin{array}{l} F(y, y', t) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial t}(y, y', y'', t) = 0 \\ \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(y, y', y'', y''', t) = 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\partial^p F}{\partial t^p}(y, y', y'', \dots, y^{(p+1)}, t) = 0 \end{array} \right. \quad (2.1)$$

y' را به صورت منحصر به فردی بر حسب y و t تعیین کرد. به عبارت دیگر اندیس معادله (۱.۱) کوچکترین مقدار p است که سیستم (۲.۱) به یک سیستم معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل شود.

معادله دیفرانسیل غیر خطی (۱.۱) اندیس μ دارد که μ تعداد حداقل مشتقات آن است. معادلات زیر را در نظر بگیرید.

$$\left\{ \begin{array}{l} f(t, u(t), u'(t)) = 0 \\ \frac{df(t, u(t), u'(t))}{dt} = 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{d^m f(t, u(t), u'(t))}{d^m t} = 0 \end{array} \right. \quad (3.1)$$

از این معادلات برای بدست آوردن یک سیستم معادله دیفرانسیل معمولی صریح با استفاده از روش جبری استفاده می‌شود. به عنوان مثال معادله دیفرانسیل جبری زیر را در نظر بگیرید.

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1'(t) = f(u_1(t), u_2(t)) \\ 0 = g(u_1(t), u_2(t)) \end{array} \right. \quad (4.1)$$

از معادله (۴.۱) نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{dg(u_1(t), u_2(t))}{dt} \\ &= g_{u_1}(u_1(t), u_2(t))u_1'(t) + g_{u_2}(u_1(t), u_2(t))u_2'(t) \end{aligned} \quad (5.1)$$

اگر $g_{u_2}(u_1(t), u_2(t))$ منحصر به فرد نباشد داریم:

$$u_2'(t) = -[g_{u_2}(u_1(t), u_2(t))]^{-1} g_{u_1}(u_1(t), u_2(t))u_1'(t) \quad (6.1)$$

لذا نتیجه می‌گیریم که

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1'(t) = f(u_1(t), u_2(t)) \\ u_2'(t) = -[g_{u_2}(u_1(t), u_2(t))]^{-1} g_{u_1}(u_1(t), u_2(t))u_1'(t) \end{array} \right. \quad (7.1)$$

بنابراین اندیس معادله فوق برابر یک است، یعنی $\mu = 1$
 حال معادله دیفرانسیل جبری زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} u_1'(t) = f(u_1(t), u_2(t)) \\ \circ = g(u_1(t)) \end{cases} \quad (۸.۱)$$

این معادله را می‌توان با روشی ساده تبدیل به یک معادله دیفرانسیل معمولی کرد. ابتدا معادله (۱۶.۱) را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \circ &= \frac{dg(u_1(t))}{dt} = g_{u_1}(u_1(t))u_1'(t) \\ &= g_{u_1}(u_1(t))f(u_1(t), u_2(t)) \\ &= h(u_1(t), u_2(t)) \end{aligned} \quad (۹.۱)$$

لذا

$$\begin{aligned} \circ &= h_{u_1}(u_1(t), u_2(t))u_1'(t) + h_{u_2}(u_1(t), u_2(t))u_2'(t) \\ \implies u_2'(t) &= -[h_{u_2}(u_1(t), u_2(t))]^{-1}h_{u_1}(u_1(t), u_2(t))u_1'(t) \end{aligned}$$

اگر $h_{u_2}(u_1(t), u_2(t))$ منحصر به فرد باشد می‌توان نتیجه گرفت:

$$\begin{cases} u_1'(t) = f(u_1(t), u_2(t)) \\ u_2'(t) = -[h_{u_2}(u_1(t), u_2(t))]^{-1}h_{u_1}(u_1(t), u_2(t))u_1'(t) \end{cases}$$

با توجه به اینکه با دو بار مشتق‌گیری معادله به فرم معادله دیفرانسیل معمولی بدست می‌آید لذا اندیس این معادله برابر ۲ است.

۱.۳.۱ کاربردهای معادلات دیفرانسیل جبری

در مدل‌بندی بسیاری از مسایل مهم فیزیک و مهندسی از جمله کنترل بهینه، مدل‌سازی شبکه‌های الکتریکی، سیستم‌های مکانیکی مقید، سیستم‌های قدرت و شبیه‌سازی فرآیندهای شیمیایی، معادلات دیفرانسیل جبری در بین دیگر معادلات از اهمیت بیشتری برخوردار است. در این بخش برای نشان دادن کاربرد و اهمیت معادلات دیفرانسیل جبری در زمینه‌های مختلف علوم و مهندسی به آرایه مثال‌های مختلفی می‌پردازیم.

مسایل تغییر پذیر مقید

در بیشتر مسایل تغییر پذیر مقید، معادلات دیفرانسیل جبری ظاهر می‌شوند که در این قسمت به نمونه‌های مهمی از آن‌ها اشاره خواهیم نمود.

مسائل کنترل بهینه

یکی از مهم‌ترین کاربردهای معادلات دیفرانسیل جبری در حل مسائل کنترل بهینه با استفاده از حساب تغییرات، نمایان می‌شود. فرآیند موجود در یک مساله کنترل بهینه با معادله

$$x' = f(x, u, t) \quad (۱۰.۱)$$

و تابع هزینه

$$J[x, u] = \int_{t_0}^{t_1} g(x, u, s) ds \quad (۱۱.۱)$$

مشخص می‌شود، که در آن بردار n تایی $x(t)$ نمایش متغیرهای حالت و بردار m تایی $u(t)$ نمایش متغیرهای کنترل هستند. فرض کنید که $x(t_0) = x_0$ و $x(t_1) = x_1$ شرایط مرزی مساله باشند. هدف، تعیین تابع $u(t)$ به ازای $t_0 \leq t \leq t_1$ ، به گونه‌ای است که تابع هزینه (۱۱.۱) مینیمم شود، با این شرط که معادله حالت (۱۰.۱) برقرار باشد. برای حل این دسته از مسائل کنترل بهینه با استفاده از حساب تغییرات، معادلات اوپلر-لاگرانژ به صورت معادلات دیفرانسیل جبری زیر بیان می‌شوند.

$$\begin{cases} x' = f(x, u, t), \\ \lambda' = -\frac{\partial g}{\partial x}(x, u, t) - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T \lambda, \\ \circ = \frac{\partial g}{\partial u}(x, u, t) + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^T \lambda. \end{cases} \quad (۱۲.۱)$$

یکی دیگر از حالت‌های خاص معادلات دیفرانسیل جبری در مسائل تنظیم‌کننده‌های مربعی ظاهر می‌شود. برای نشان دادن این مطلب، سیستم خطی

$$x' = A(t)x + B(t)u \quad (۱۳.۱)$$

با تابع هزینه مربعی در متغیرهای حالت و کنترل

$$J[x, u] = \int_{t_0}^{t_1} [x^T Q x + u^T R u] ds \quad (۱۴.۱)$$

را در نظر بگیرید، که در آن بردار حالت $x \in \mathbb{R}^n$ ، بردار کنترل $u \in \mathbb{R}^m$ ، $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ، $B(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ، $Q(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ و $R(t) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ماتریس‌های شبه معین مثبت هستند.

معادلات اوپلر-لاگرانژ برای تعیین کنترل $u(t)$ به ازای $t_0 \leq t \leq t_1$ ، به گونه‌ای که تابع هزینه مربعی (۱۴.۱) مینیمم و معادله (۱۳.۱) برقرار باشد، دستگاه معادلات دیفرانسیل جبری خطی و متغیر با زمان زیر را تولید می‌کنند:

$$\begin{aligned} x' &= A(t)x + B(t)u \\ \lambda' &= -Q(t)x + A(t)^T \lambda \\ \circ &= R(t)u + B(t)^T \lambda \end{aligned} \quad (۱۵.۱)$$

اگر ماتریس‌های A ، B ، Q و R ماتریس‌های ثابتی باشند، سیستم (۱۵.۱) یک سیستم پایای زمانی خواهد بود.

سیستم‌های مکانیکی مقید

یکی دیگر از کاربردهای معادلات دیفرانسیل جبری در مدل‌سازی سیستم‌های مکانیکی مقید، شامل دینامیک وسایل نقلیه جاده‌ای و ریلی، رباتیک، مکانیک زیستی و غیره می‌باشد. حالت سیستم‌های چند جسمی یا سیستم‌های مکانیکی مقید توسط بردار $P(t) \in \mathbb{R}^n$ شامل متغیرهایی که وضعیت هستند و جهت حرکت اجزای سیستم را مشخص می‌کنند و سرعت‌های متناظر $v(t) = \dot{p}(t)$ تعیین می‌شود. فرمول‌بندی استاندارد این سیستم‌ها به وسیله معادلات لاگرانژ نوع اول به دست می‌آیند. داریم:

$$\begin{cases} M(P, t)\ddot{P}(t) = f(P, \dot{P}, t) - G^T(P, t)\lambda, \\ \circ = g(P, t), \end{cases} \quad (16.1)$$

با n متغیر وضعیت $P(t)$ ، n متغیر سرعت $\dot{P}(t) = \frac{dP(t)}{dt}$ ، n متغیر شتاب $\ddot{P}(t) = \frac{d^2P(t)}{dt^2}$ ، $m < n$ ماتریس جرم $M(P, t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ، m مقید $g(P, t)$ ، n نیروی خارجی $f(P, \dot{P}, t)$ و ماتریس ژاکوبی مقید $G(P, t) = \left(\frac{\partial g}{\partial p}\right)(P, t) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ می‌باشد. بنابراین معادلات حرکت سیستم‌های مکانیکی مقید منجر به تولید معادلات دیفرانسیل جبری مرتبه دو می‌شوند.

معادلات حرکت پاندول

پاندولی با جرم m و نخ به طول l را در نظر بگیرید. انرژی پتانسیل پاندول به صورت

$$U(x, y) = mgl - mgy \quad (17.1)$$

است که $(x(t), y(t))$ مختصات دکارتی موقعیت جرم جابه‌جا شده در زمان t و g ثابت جاذبه می‌باشد. انرژی جنبشی پاندول نیز به صورت

$$T(\dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \quad (18.1)$$

است که $\dot{x}^2 + \dot{y}^2$ نشان دهنده مجذور سرعت پاندول است. شرط حاکم بر سیستم نیز

$$G(x, y) = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 - L^2 = 0 \quad (19.1)$$

می‌باشد. با استفاده از روابط (17.1) و (19.1)، تابع لاگرانژ

$$L(q, \dot{q}) = T(\dot{x}, \dot{y}) - U(x, y) + \lambda G(x, y) \quad (20.1)$$

را تشکیل می‌دهیم که λ ضریب لاگرانژ بوده و q به صورت بردار $q = (x, y, \lambda)$ است. با استفاده از معادلات اوایلر - لاگرانژ، معادلات حرکت حاکم بر این سیستم به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{cases} m + 2\lambda x = 0, \\ m - m\dot{y} + 2\lambda y = 0, \\ G(x, y) = 0, \end{cases} \quad (21.1)$$

که سیستم (??) به صورت یک سیستم معادلات دیفرانسیل جبری است.

شبکه‌های الکتریکی

شبیه‌سازی پیشرفته شبکه‌های الکتریکی، بر پایه روش‌هایی از مدل‌سازی است که تولید خودکار معادلات مدل را فراهم می‌سازند. یکی از مهم‌ترین این روش‌ها، روش آنالیز گره‌ای اصلاح شده است، که معمولاً در کاربردهای صنعتی برای تولید معادلات مدل شبکه به طور خودکار، از این روش استفاده می‌شود. قوانین جریان و ولتاژ کریشف^۳ به همراه معادلات مشخص برای المان‌های پایه، معادلات دیفرانسیل جبری زیر را تولید می‌کنند:

$$A \cdot \dot{z} = f(x), \quad \circ = z - q(x) \quad t \in [t_0, t_{end}], \quad (22.1)$$

که در آن $x \in \mathbb{R}^n$ نمایش پتانسیل‌های گره و $f(x) \in \mathbb{R}^n$ نمایش جریان‌های تولیدی توسط المان‌های استاتیک است. ماتریس وقوع

$$A \in \{-1, \circ, 1\}^{n \times m} \quad (23.1)$$

توپولوژی شبکه وابسته به المان‌های ذخیره شارژ را توصیف می‌کند و جریان شارژ $\dot{z} = \frac{dq(x)}{dt}$ ناشی از این المان‌ها را به جریان‌های استاتیک $f(x)$ در هر گره، مربوط می‌سازد.

تعریف ۲.۳.۱. (نرم)

نرم^۴ را در فضای خطی V به شکل تابع $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}^+$ تعریف می‌کنیم به گونه‌ای که:

$$1. \quad \|v\| > \circ, \quad \forall v \in V, v \neq \circ.$$

$$2. \quad \|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, v \in V.$$

$$3. \quad \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|, \quad \forall v, w \in V. \quad (\text{نامساوی مثلث}).$$

تابع $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ نیم نرم نامیده می‌شود هرگاه شرایط سه گانه بالا برقرار باشد، با تفاوت در شرط اول، $\|v\| \geq \circ, \forall v \in V$.

انواع نرم

نرم اقلیدسی:

$$\|P\|_2 = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + \dots + P_n^2} = \sqrt{P \cdot P}$$

^۳Kirchhoff

^۴Norm

P بردار اقلیدسی نامیده می‌شود.

نرم L_p :

$$\|f\|_{L_p} = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 < p < \infty$$

نرم L_∞ :

$$\|f\|_{L_\infty} = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$$

تعریف ۳.۳.۱. (فضای ضرب داخلی)

فرم دو خطی که روی فضای خطی V معین مثبت و متقارن باشد ضرب داخلی روی V نامیده می‌شود.

فضای خطی V به همراه ضرب داخلی، فضای ضرب داخلی^۵ نامیده می‌شود.

اگر V فضای ضرب داخلی و $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ضرب داخلی روی V باشد، نرم متناظر با این ضرب داخلی به شکل

زیر تعریف می‌شود:

$$\|v\| = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}}, \quad \forall v \in V \quad (24.1)$$

لم ۴.۳.۱. (نامساوی کوشی شوارتز)

برای هر $v, w \in V$ ، نامساوی کوشی شوارتز^۶ به صورت زیر است :

$$|\langle w, v \rangle| \leq \|w\| \|v\|$$

تعریف ۵.۳.۱. (دنباله کوشی)

دنباله نامتناهی $\{v_i\}_{i=1}^\infty$ در V را همگرا می‌گوییم و با نماد $\lim_{i \rightarrow \infty} v_i = v$ نشان می‌دهیم هرگاه:

$$\|v_i - v\| \rightarrow 0, \quad i \rightarrow \infty$$

و همچنین این دنباله کوشی نامیده می‌شود هرگاه:

$$\|v_i - v_j\| \rightarrow 0, \quad i, j \rightarrow \infty$$

تعریف ۶.۳.۱. (فضای کامل)

فضای ضرب داخلی V ، فضای کامل نامیده می‌شود اگر هر دنباله کوشی در V همگرا باشد.

تعریف ۷.۳.۱. (فضای هیلبرت)

فضای برداری مختلط H را یک فضای ضرب داخلی گوییم هرگاه هر دو بردار x, y در H عدد مختلط

(x, y) نسبت داده شود به طوری که به ازای هر $x, y, z \in H$ و $\alpha \in C$ داشته باشیم:

$$(x + y, z) = (x, z) + (y, z) \quad (\text{الف})$$

$$(x, y) = (\overline{y}, x) \quad (\text{ب})$$

^۵Inner product space

^۶Cauchy -schwarz

(ج) $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$.

(د) $(x, x) \geq 0$.

(ه) $(x, x) = 0$ اگر و فقط اگر $x = 0$.

اگر (\circ, \circ) یک ضرب داخلی روی فضای برداری H باشد زوج $(H, (\circ, \circ))$ را یک فضای داخلی مختلط و عدد مختلط (x, y) را برای هر $x, y \in H$ ضرب داخلی x و y نامیم.

تذکر ۸.۳.۱. تابع ضرب داخلی نسبت به متغیر x خطی و نسبت به متغیر y خطی - مزدوج است. خطی - مزدوج نسبت به y یعنی به ازای هر $x, y, z \in H$ و هر $\alpha \in C$ داریم:

$$(x, y, z) = (x, y) + (x, z)$$

$$(x, \alpha y) = \bar{\alpha}(x, y)$$

تعریف ۹.۳.۱. (فضای باناخ)

فضای نرم دار کامل، فضای باناخ^۷ نامیده می‌شود.

تعریف ۱۰.۳.۱. (کران داری)

فرم دو خطی $a(\circ, \circ)$ را کران دار گوئیم هر گاه مقدار ثابت M موجود باشد، به گونه‌ای که:

$$|a(v, w)| \leq m \|w\|_V \|v\|_V, \quad \forall v, w \in V$$

تعریف ۱۱.۳.۱. (شرایط هولدر و لیپشیتس)

f در شرط هولدر^۸ (هولدر پیوسته) از مرتبه α ، $0 < \alpha \leq 1$ روی $[a, b]$ صدق می‌کند اگر ثابت $K > 0$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x, y \in [a, b]$:

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|^\alpha$$

شرط لیپ شیتس^۹، شرط هولدر است با $\alpha = 1$

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$$

لیپ شیتس پیوسته حالت قوی‌تر از پیوستگی یکنواخت برای توابع است.

تعریف ۱۲.۳.۱. (گرادیان)

اگر u تابع اسکالری باشد گرادیان u را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\nabla_n u = \text{grad } u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)^T$$

^۷Banach space

^۸Holder

^۹Lipschitz

تعریف ۱۳.۳.۱. فضای سوبولوف:

فضای سوبولوف^{۱۰} روی دامنه Ω برای $K \geq 1$ با نماد $H^k(\Omega)$ نمایش داده می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$H^k = H^k(\Omega) = \{v \in L_2(\Omega) : D^\alpha v \in L_2(\Omega), |\alpha| \leq K\}$$

ضرب داخلی برای این فضا به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\langle v, w \rangle = \langle v, w \rangle_{H^k} = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} D^\alpha v D^\alpha w \, dx$$

نرم در فضای سوبولوف به صورت

$$\|v\|_k = \|v\|_{H^k} = \langle v, v \rangle_k^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha v\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

و نیم نرم در این فضا

$$|v|_k = |v|_{H^k} = \left(\sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha v\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|\nabla v\|$$

تعریف می‌شود.

در دو حالت خاص اگر $k = 0$ آنگاه

$$H^0 = H = L_2, \quad \|v\|_{H^0} = \|v\|_{L_2}$$

و اگر $k = 1$ آنگاه

$$H^1 = \{v \in L_2, D^\alpha v \in L_2, |\alpha| \leq 1\}$$

تعریف ۱۴.۳.۱. عدد ماخ^{۱۱}:

یک متغیر مهم در بررسی پرواز در سرعت‌های بالا عدد ماخ است. عدد ماخ به صورت ساده مقدار سرعت هواپیما یا سرعت هوا به نسبت سرعت صوت است بنابراین هواپیمایی که سرعتش دو ماخ است در واقع با سرعت دو برابر سرعت صوت پرواز می‌کند. دانستن مقدار صوت برای پرواز بسیار مهم است چون سرعت ارتباط بین هواپیما و هوا یک طرف و از طرف دیگر بین یک جز هوا و دیگر اجزا آن است. سرعت صوت در هوا مقدار ثابتی نیست بلکه با دمای هوا که خود تابعی از ارتفاع است تغییر می‌کند. به محض اینکه دمای هوا با افزایش ارتفاع، کاهش می‌یابد سرعت صوت نیز کاهش می‌یابد اما نه با نرخ یکسان نسبت به افزایش ارتفاع در سطح دریای آزاد ماخ ۱ حدود ۷۶۰ مایل بر سرعت $1220 \frac{km}{h}$ است سرعت صوت تا ارتفاع حدود ۳۵۰۰۰ پا کاهش می‌یابد سپس سرعت صوت الزاما تا ارتفاع ۸۰۰۰۰ پایی ثابت می‌ماند. سرعت صوت در سطح دریا ۳۳۲ متر بر ثانیه می‌باشد که این سرعت با افزایش ارتفاع و کاهش فشار و تراکم هوا کاهش یافته و به نسبت سرعت شی، پرند یا هواپیما به سرعت صوت محیط عدد ماخ می‌گویند که این عدد کمیتی متغیر است و بسته به خصوصیات هوا افزایش یا کاهش می‌یابد و به سرعتی که در آن حداقل یکی از سطوح هواپیما به سرعت صوت رسیده باشد گرچه این پدیده در مورد خود هواپیما صادق نباشد عدد ماخ بحرانی می‌گویند.

^{۱۰} Sobolev space

^{۱۱} Mach number

تعریف ۱۵.۳.۱. ویسکوزیته^{۱۲}:

ویسکوزیته عبارت است از مقاومت یک مایع در برابر اعمال تنش برشی در یک سیال جاری (در حال حرکت) که لایه‌های مختلف آن نسبت به یکدیگر جابه‌جا می‌شوند به مقدار مقاومت لایه‌های سیال در برابر لغزش روی هم. هر چه گرانشی سیال می‌گویند. هر چه گرانشی مایعی بیشتر باشد برای ایجاد تغییر شکل یکسان، به تنش برشی بیشتر نیاز است. به عنوان مثال گرانشی عسل از گرانشی شیر بسیار بیشتر است.

گرانشی پویا (ویسکوزیته دینامیک) را با μ نشان می‌دهیم.

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$$

گرانشی ایستایی (ویسکوزیته سینماتیک)

$$v = \frac{\mu}{\rho}$$

قضیه ۱۶.۳.۱. نامعادله گرون‌وال^{۱۳}:

اگر I در فاصله $[a, \infty)$ یا $[a, b]$ یا (a, b) که $a < b$ قرار گیرد β و u مقدار حقیقی باشند و تابع پیوسته از I را تعریف کنیم و u مشتق پذیر در I° داخلی از I (فاصله I بدون نقطه a و b پایان پذیر است) و نامعادله مشتق پذیر زیر را داشته باشیم:

$$u'(t) \leq \beta(t) u(t) \quad t \in I^\circ$$

u کراندار و $y'(t) = \beta(t) y(t)$

$$u(t) \leq u(a) \exp\left(\int_a^t \beta(s) ds\right) \quad t \in I$$

۴.۱ عدد رینولدز

جریان آرام جریانی است که در آن سیال به صورت لایه لایه حرکت می‌کند، هر لایه سیال به آرامی بر روی لایه مجاور خود می‌لغزد و بین لایه‌ها فقط تبادل مومنتم ملکولی وجود دارد. هرگونه تمایلی به ناپایدار شدن و درهم شدن جریان توسط تنش‌های برشی لزجی، که در مقابل حرکت نسبی لایه‌های مجاور سیال مقاومت می‌کنند، مستهلک می‌شود. در جریان در هم، حرکات ذرات سیال بسیار نامنظم است و در عرض جریان، تبادل مومنتم شدیدی بین آن‌ها وجود دارد. نوع جریان یعنی آرام یا در هم بودن آن از روی عدد رینولدز مشخص می‌شود. عدد رینولدز^{۱۴} همچنین شاخصی از اهمیت نسبی تعاملات درهمی جریان به تعاملات آرام آن است.

رینولدز دو جریان با تشابه هندسی در نظر گرفت و با بررسی آن‌ها دریافت که اگر معادلات دیفرانسیل مبین دو جریان یکسان باشند، آن دو جریان تشابه دینامیکی خواهند داشت. وی واحد جرم، طول و زمان را در یک دسته از معادلات تغییر داد و پی برد برای آن که معادلات حاصل با معادلات اصلی یکسان

^{۱۲}Viscosity

^{۱۳}Gron wall

^{۱۴}Reynolds

باشند، بایستی پارامتر بی بعد $\frac{ul\rho}{\mu}$ در دو حالت یکسان باشد. u سرعت مشخصه، l طول مشخصه، ρ جرم مخصوص و μ لزجت سیال است. امروزه این پارامتر بی بعد را به نام عدد رینولدز می‌شناسیم و با R نشان می‌دهیم.

$$R = \frac{ul\rho}{\mu}$$

ماهیت هر جریان تراکم ناپذیر با عدد رینولدز آن مشخص می‌شود. صورت عدد رینولدز اینرسی مربوط می‌شود. یعنی نیرویی که بواسطه شتاب مثبت یا منفی سیال ایجاد می‌شود. مخرج عدد رینولدز عامل ایجاد نیروی برشی لزجی است. لذا عدد رینولدز را می‌توان نسبت نیروی اینرسی، به نیروی لزجی داشت. برای مقادیر بزرگ R یکی از کمیات صورت کسر یا همه آنها در مقایسه با مخرج بزرگند، یعنی یا عرصه وسیعی برای سیال وجود دارد یا سرعت جریان بالا است، یا جرم مخصوص سیال زیاد است یا لزجت آن بسیار کم و یا تلفیقی از آنها. بزرگ بودن عدد رینولدز حاکی از این است که جریان شدیداً درهم است. حرکت سیال واقعی به شدت تحت تاثیر حضور مرز جامد است. ذراتی از سیال که با مرز تماس دارند، ساکن می‌مانند. در مجاورت مرز ناحیه‌ای بوجود می‌آید که در آن گرادیان سرعت بزرگ می‌باشد. این ناحیه، لایه مرزی نامیده می‌شود. در روی مرز یک تنش برشی به سیال وارد می‌شود که سرعت آن را کاهش می‌دهد. لایه مرزی ناحیه‌ای است که در آن تنش‌های برشی اهمیت دارند.

فصل ۲

حل معادلات ناویه - استوکس با استفاده از روش گام کسری

در این فصل ابتدا معادلات ناویه - استوکس را تعریف کرده سپس روش گام کسری را برای معادلات ناویه - استوکس تراکم ناپذیر و تراکم پذیر بررسی می کنیم .

۱.۰.۲ معادلات ناویه - استوکس

اگر المان کوچکی از سیال در نظر بگیریم و نیروهای وارد به آن از جمله نیروهای برشی، که در اثر لزج بودن سیال و حرکت آن ایجاد می شوند را بر روی آن نمایش داده و قانون دوم نیوتن را برای المان بنویسیم ، معادلات حرکت سیال واقعی به دست خواهد آمد که معادلات ناویه - استوکس^۱ نامیده می شوند. نیروی بدنی که در نظر می گیریم، جاذبه است و جاذبه همواره در امتداد قائم و به طرف پایین اثر می کند. h را به عنوان مختص در امتداد قائم در نظر می گیریم که جهت آن به طرف بالاست. در این صورت h معرف انرژی پتانسیل بر واحد وزن سیال خواهد بود. $\frac{\partial h}{\partial x}$ کسینوس زاویه بین محور h و محور x است. $\frac{\partial h}{\partial y}$ کسینوس زاویه بین محور h و محور y است و به طور مشابه برای محور z . معادلات ناویه - استوکس برای سیال تراکم ناپذیر عبارتند از:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x}(p + \gamma h) + v \nabla^2 u = \frac{du}{dt}$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y}(p + \gamma h) + v \nabla^2 v = \frac{dv}{dt}$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z}(p + \gamma h) + v \nabla^2 w = \frac{dw}{dt}$$

در معادلات فوق لزج بودن سیماتیک ثابت فرض شده است، $\frac{d}{dt}$ مشتق نسبت به حرکت است:

$$\frac{d}{dt} = u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t}$$

^۱Navier-stokes

و عملگر ∇^2 به صورت زیر تعریف می شود:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

معادلات ناویه - استوکس برای سیال غیر لزج ساده شده، به معادلات اوایلر برای حرکت سه بعدی تبدیل می شوند.

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x}(p + \gamma h) &= u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y}(p + \gamma h) &= u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial t} \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z}(p + \gamma h) &= u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} \end{aligned}$$

جملات سمت راست معادلات فوق معرف مولفه های شتاب ذره سیال است. سه جمله اول معرف شتاب جابجایی و جمله آخر معرف شتاب محلی می باشد. شتاب جابجایی به تغییرات سرعت در فضا بستگی دارد. شتاب محلی به تغییرات سرعت در یک نقطه در طی زمان بستگی دارد. برای مایعاتی که به اندازه کافی متراکم به یک زنجیره باشد، و سرعت کمتر نسبت به سرعت نور باشد، معادلات حرکت برای مایعات نیوتنی معادلات ناویه - استوکس است که مجموعه ای غیر خطی می باشد که این معادلات دیفرانسیل به جریان یک سیال بستگی دارد و شیب، سرعت و فشار را توصیف می کند.

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + V \cdot \nabla V \right) = -\nabla P + \nabla \cdot T + f$$

که در معادله ناویه - استوکس فوق P معرف فشار و ρ معرف چگالی است.

معادلات ناویه - استوکس تراکم ناپذیر

اگر Ω یک ناحیه محدود در \mathbb{R}^2 فرض کنیم در این صورت معادلات ناویه - استوکس تراکم ناپذیر زیر را در نظر می گیریم:

$$\begin{cases} u_t - v \Delta u + (u \cdot \nabla) u + \nabla p = f, \operatorname{div} u = 0, (x, t) \in \Omega \times (0, T] \\ u(x, t) |_{\partial \Omega} = 0, (x, t) \in \partial \Omega \times (0, T], u(x, 0) = u_0(x) \quad x \in \Omega \end{cases} \quad (1.2)$$

که در آن $u = u(x, t)$ نشان دهنده بردار سرعت یک سیال تراکم ناپذیر و $P = P(x, t)$ نشان دهنده فشار و $f = f(x, t)$ نشان دهنده نیروی بدن، $u_0(x)$ نشان دهنده سرعت اولیه و $v > 0$ نشان دهنده ویسکوزیته و $T > 0$ نشان دهنده یک زمان محدود می باشد. روش عددی مساله (۱.۲) دارای چند مشکل عمده و مهم می باشد. این سیستم شامل چندین معادله دیفرانسیل PDE است. u یک مجهول است که از طریق شرایط تراکم ناپذیری همراه $\operatorname{div} u = 0$ برای مساله غیر خطی است و با توجه به $(u \cdot \nabla) u$ اثرهای متعددی برای معادلات ناویه - استوکس وابسته به زمان با استفاده از روش های کارآمد اختصاص داده شده، وجود دارد. معمولاً روش تقریب های عددی شامل دو مشکل عمده است. اولین حل معادلات در زمان گسسته سپس مسایل ناشی از آن در فضای گسسته است که بسیاری از روش های کلاسیک در زمان مجزا می توان مورد استفاده قرار داد. در میان آنها روش گام کسری به طور گسترده

استفاده می‌شود .

فرض کنید که زمان المانی محدود به شرط $inf - sup$ گسسته و برآورد خطا در مرتبه اول و در زمان ارایه شده با اندازه گام و نظم مطلوب باشد، در این صورت برای یک زمان به طور کامل گسسته از روش گام کسری استفاده می‌کنیم.

در این بخش به بررسی روش گام کسری ضمنی برای معادلات ناویه - استوکس وابسته به زمان می‌پردازیم. زمان پیشرفت یک دنباله دو مرحله دارد. در اولین مرحله می‌توان مساله را به عنوان یک مساله خطی بیضوی دید و از سوی دیگر مرحله دوم ساختار مساله استوکس عمومی است. مدت زمان انتشار $-\theta \Delta u$ در تمام مراحل است که این مساله برای محاسبه گام زمان بزرگ و افزایش ثبات عددی با انتخاب مقادیر پارامتر θ صورت می‌گیرد.

تنظیم تابعی معادلات ناویه - استوکس

برای تنظیم تابعی مساله (۱.۲) ابتدا فضای هیلبرت را معرفی می‌کنیم داریم:

$$X = H^1(\Omega)^2, \quad Y = L^2(\Omega)^2$$

$$M = L^2(\Omega) = \left\{ q \in L^2(\Omega), \int_{\Omega} q(x) dx = 0 \right\}$$

فضاهای $L^2(\Omega)^m$ برای $m = 1, 2, 4$ همراه با اسکالر L^2 و حاصل (\cdot, \cdot) است که L^2 نرم $\|\cdot\|$ است. فضای X با حاصل ضرب عددی معمولی $(\nabla u, \nabla v)$ و نرم $\|\nabla u\|$ است. فضای دوگانه X' با نرم $\|\cdot\|_{-1}$ است که دوگانگی بین این فضاها توسط $\langle \cdot, \cdot \rangle$ بدست می‌آید و برای فضاهای سوبولوف $w^{m,p}(\Omega)$ با نرم $\|\cdot\|_{m,p}$ که $m, p \geq 0$ بنابراین قرار می‌دهیم $H^m(\Omega)$ برای $w^{m,2}(\Omega)$ که $\|\cdot\|_m$ برای $\|\cdot\|_{m,2}$ زیر مجموعه بسته V از X را با توجه به $V = \{v \in X, \nabla \cdot v = 0\}$ قرار می‌دهیم که H یک زیر مجموعه بسته از y است. لذا

$$H = \{v \in Y, \nabla \cdot v = 0, v \cdot n|_{\partial\Omega} = 0\}$$

است. عامل استوکس بوسیله $A = -P\Delta$ که در آن P یک روش L^2 متعامد از y بر روی H است. همانطور که در بالا ذکر کردیم Ω نیاز به یک فرض دارد که یک فرض منظم در مساله استوکس است. (A_1) فرض کنید که Ω یکنواخت است به طوری که $(v, q) \in (X, M)$ منحصر به فرد است لذا از مساله استوکس داریم:

$$-\Delta v + \nabla r = u, \quad \nabla \cdot v = 0, \quad v|_{\partial\Omega} = 0 \quad (2.2)$$

که برای هر $u \in H$ یک راه حل منحصر به فرد وجود دارد به طوری که $v = A^{-1}u$ لذا داریم:

$$\|A^{-1}u\|_s \leq c \|u\|_{s-2} \quad s = 1, 2$$

که در آن c یک ثابت مثبت وابسته به Ω است. بنابراین c را یک ثابت مثبت عمومی است که به f, v, Ω و θ بستگی دارد. علاوه بر این داریم:

$$(A^{-1}u, u) = \|\nabla A^{-1}u\|_0$$

که در این صورت برای قسمت (۲.۲) داریم:

$$\|u\|_{v'}^2 = (A^{-1}u, u) \quad \forall u \in H \quad (3.2)$$

که در آن v' یک فضای دوگان از v است.

اگر $\partial\Omega$ با استفاده از c_2 یا اگر Ω یک چند ضلعی محدب دو بعدی باشد با استفاده از فرض A_2 بدست می آید که

$$\|v\|_2 \leq c_1 \|Av\|_0, \quad \|\nabla\|_0 \leq c_2 \|Av\|_0 \quad \forall v \in H^2(\Omega)^2 \cap V$$

$$\|v\|_0 \leq c_2 \|\nabla\|_0 \quad \forall v \in X$$

دو خط مستقیم و پیوسته به فرم $a(\cdot, \cdot)$ و $d(\cdot, \cdot)$ از $X \times X$ و $X \times m$ تعریف می کنیم که با استفاده از آنها داریم:

$$a(u, v) = v(\nabla u, \nabla v) \quad \forall u, v \in X$$

$$d(v, q) = -(v, \nabla q) = (\text{div } v, q) \quad \forall v \in X, q \in m$$

و اگر بخواهیم به صورت $b(\cdot, \cdot, \cdot)$ از $X \times X \times X$ تعریف کنیم، داریم:

$$b(u, v, w) = ((u \cdot \nabla)v, w) + \frac{1}{\gamma} ((\text{div } u)v, w) = \frac{1}{\gamma} ((u \cdot \nabla)v, w) - \frac{1}{\gamma} ((u \cdot \nabla)w, v) \quad \forall u, v, w \in X$$

هنگامی که Ω از کلاس c_1 و به اندازه کافی منظم باشد. در این صورت:

$$|b(u, v, w)| \leq c \|\nabla u\|_0 \|\nabla v\|_0 \|\nabla w\|_0 \quad \forall u, v, w \in X$$

یا این که:

$$\begin{aligned} |b(u, v, w)| &\leq c \|u\|_{s_1} \|v\|_{s_2} \|w\|_{s_3} & \forall u \in H^{s_1}(\Omega)^2 \\ & & \forall v \in H^{s_2+1}(\Omega)^2 \\ & & \forall w \in H^{s_3}(\Omega)^2 \end{aligned}$$

که در آن $0 \leq s_1 \leq L$, $0 \leq s_2 \leq L-1$ و $0 \leq s_3 \leq L$ به طوری که $s_i \neq 1, i = 1, 2, 3$ که $s_1 + s_2 + s_3 \geq 1$ است و اگر $s_i = 1$ در این صورت $s_1 + s_2 + s_3 > 1$.

با استفاده از تعاریف و نمادهایی که در بالا فرض شد و با از فرمول بندی وردشی مساله (۱.۲) داریم:

$$\forall t \in (0, \bar{1}] \quad , \quad (v, q) \in (x, m) \quad , \quad (u, p) \in (x, m)$$

$$\begin{cases} (u_t, v) + a(u, v) - d(v, p) + d(u, q) + b(u; u, v) = \langle f, v \rangle \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

با فرض $u_0 \in H, f \in L^2(0, T, X')$ و با استفاده از راه حل مساله (۱.۳) که در آن $u \in L^\infty(0, T, \Omega) \cap L^2(0, T, v)$ یک نظم منحصر به فرد به وجود می آید به طور خاص u و p از فرضیات

زیر بدست می‌آید.

$$(A_2) \quad u \in L^\infty(\circ, T, H^{\frac{1}{2}}(\Omega)^2) \quad \nabla p \in L^\infty(\circ, T, y)$$

$$(A_3) \quad u_t \in L^{\frac{1}{2}}(\circ, T, x)$$

$$(A_4) \quad \sqrt{t}u_{tt} \in L^{\frac{1}{2}}(\circ, T, y)$$

$$(A_5) \quad u_{tt} \in L^{\frac{1}{2}}(\circ, T, v')$$

تجزیه و تحلیل خطا با استفاده از روش ادغام زمان برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی وابسته به زمان است با توجه به فضای باناخ w با نرم $\|\cdot\|_w$ و یک تابع پیوسته $w : [\circ, \bar{\Lambda}] \rightarrow \mathbb{R}$ و اعداد حقیقی $\alpha > \circ$ و $\beta > \circ$ برای هر اندازه گام $\tau > \circ$ که

$$t_n = n\tau \quad n = \circ, \dots, N = \left[\frac{T}{\tau}\right]$$

و با توجه به کلاس $\{u^n\}_{n=1, \dots, N}$ تقریبی از u در $L^\beta(w)$ و یک ثابت مثبت c داریم:

$$\left(\tau \sum_{n=1}^N \|u(t_n) - u^n\|_w^\beta\right)^{\frac{1}{\beta}} < c\tau^\alpha \quad \forall \tau > \circ$$

علاوه بر این برای $\{u^n\}_{n=1, \dots, N}$ از مرتبه α و تقریبی از u در $L^\infty(w)$ داریم:

$$\|u(t_n) - u^n\|_w < c\tau^\alpha \quad \forall n = 1, \dots, N$$

که c یک ثابت مثبت است که ممکن است بر روی داده‌های f ، u_\circ ، T ، v و Ω یک راه حل وابسته به u را نشان می‌دهد که مستقل از گام زمان τ است.

۱.۲ روش گام کسری

در این بخش با استفاده از روش گام کسری برای یک زمان تقریبی گسسته مساله را حل می‌کنیم.

گام اول (اولین گام این روش که شامل اثرات چسبناک و همرفتی است که شامل تعیین سرعت متوسط $u^{n+\frac{1}{2}}$ است بطوری‌که

$$\begin{cases} \frac{u^{n+\frac{1}{2}} - u^n}{\tau} - (\theta + v)\Delta u^{n+\frac{1}{2}} + \theta\Delta u^n + (u^n \cdot \nabla)u^n = f(t_{n+1}) \\ u^{n+\frac{1}{2}}|_\Gamma = \circ \end{cases} \quad (4.2)$$

در این رابطه $\tau > \circ$ گام زمان است، $\theta > \circ$ یک پارامتر محدود و n های بالا نویس نشان دهنده مرحله زمانی $t_n = n\tau$ برای معادله غیر خطی است که فقط از روش صریح بدست می‌آید.

همانطور که برای تقریب نیروی بدن f در زمان متوسط $[t_n, t_{n+1}]$ می‌توان با استفاده از

$$\frac{1}{\tau} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(x, s) ds$$

بدست آورد که در گام اول این روش می‌توان به عنوان مساله خطی بیضوی در نظر گرفت که معادله (۴.۲) در شکل ضعیف تر به صورت زیر است:

$$a_\theta(u^{n+\frac{1}{2}}, v) = \langle L, v \rangle \quad \forall v \in X$$

که در این رابطه $a_\theta(u, v) = (u, v) + (\theta + v)\tau(\nabla u, \nabla v)$ که فرم دو خطی در $X \times X$ است و فرم سه خطی به صورت $b(u, v, w)$ است که مورب و متقارن است. همچنین

$$b(u, v, w) = -b(u, v, w) \quad \forall u \in V \quad v, w \in X$$

همچنین

$$L = u^n + \tau(f(t_{n+1}) - \theta \Delta u^n - (u^n \cdot \nabla)u^n) \in H^{-1}(\Omega)^2$$

است. فرم دو خطی a_θ نتیجه اش مورب و متقارن و تقریبی از زمان همرفتی است. بنابراین

$$a_\theta(u, u) = (u, u) + (\theta + v)\tau(\nabla u, \nabla u) = \|u\|_0^2 + (\theta + v)\tau\|\nabla u\|_0^2$$

که $u^{n+\frac{1}{2}}$ منحصر به فرد است که اثبات آن بوسیله قضیه *Lax - Milgram* بدست می‌آید هم چنین فرم دو خطی $a_\theta(u, v)$ ثبات بهتری دارد. علاوه بر این هنگامیکه در رابطه (۴، ۳) v کوچک و پارامتر θ بزرگترین مقدار خود را بگیرد تغییر نخواهد کرد.

گام دوم) در گام دوم $u^{n+\frac{1}{2}}$ را در رابطه (۴، ۳) قرار داده و u^{n+1} و p^{n+1} را بدست می‌آوریم. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} \frac{u^{n+1} - u^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} - (\theta + v)\Delta(u^{n+1} - u^{n+\frac{1}{2}}) + \nabla p^{n+1} = 0 \\ \operatorname{div} u^{n+1} = 0 \\ u^{n+1}|_\Gamma = 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

مرحله دوم این روش را می‌توان به مساله استوکس تعمیم داد و این شامل مدت زمان نفوذ در مرحله تراکم ناپذیری است که شرایط کامل مرزی را برای سرعت بدست می‌آید در حالیکه برای فشار احتیاج به شرایط مرزی نسبت لذا از معادله (۵، ۳)، $\varphi^{n+1} = \tau p^{n+1} \in m$ ، $u^{n+1} \in X$ را بدست می‌آوریم. لذا داریم:

$$\begin{cases} a_\theta(u^{n+1}, v) + d(v, \varphi^{n+1}) = \langle L, v \rangle \quad \forall v \in X \\ d(u^{n+1}, q) = 0 \quad \forall q \in m \end{cases} \quad (6.2)$$

که در این رابطه

$$L = u^{n+\frac{1}{2}} - \tau(\theta + v)u^{n+\frac{1}{2}} \in H^{-1}(\Omega)^2$$

است. اگر $d(\circ, \circ)$ باشد با استفاده از شرایط $inf - sup$ داریم:

$$inf_{q \in m} \quad Sup \frac{d(v, q)}{\|\nabla v\|_{\circ} \|q\|_{\circ}} \geq \gamma > \circ \quad (۷.۲)$$

$$q \in m \quad v \in X \quad (۸.۲)$$

که در این رابطه γ به Ω و u^{n+1} به p^{n+1} بستگی دارد.

نتایج مهمی که با استفاده از این روش می‌توان به دست آورد به شرح زیر است.

نتیجه ۱.۰.۱.۲. اگر معادلات (۴.۲) و (۵.۲) را با هم ادغام کنیم داریم:

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} - v\Delta u^{n+1} - \theta\Delta(u^{n+1} - u^n) + (u^n \cdot \nabla)u^n + \nabla p^{n+1} = f(t_{n+1}) \quad (۹.۲)$$

این رابطه نشان می‌دهد که در روش ضمنی مدت زمان چسبندگی در u^{n+1} و u^n است نه در سرعت متوسط آن $u^{n+\frac{1}{2}}$.

همچنین مدت زمان تثبیت به صورت زیر می‌باشد.

$$\theta\Delta(u^{n+1} - u^n)$$

که این باعث می‌شود تا در گام زمانهای بزرگ نیز محاسبات انجام شود. هم چنین مزیت اصلی استفاده از این روش بدست آوردن اثرات همرفتی تراکم ناپذیری و تقریب مناسبی برای هر مرحله است.

نتیجه ۲.۰.۱.۲. با توجه به واگرایی رابطه (۵.۲) داریم:

$$\tau\Delta p^{n+1} = (I - (\theta + v)\tau\Delta) \operatorname{div}(u^{n+\frac{1}{2}}) \in H^{-1}(\Omega) \quad (۱۰.۲)$$

باید در نظر بگیریم که از این رابطه شرایط مرزی p^{n+1} به طور مستقیم از فشار p^{n+1} نمی‌توان بدست آورد. اما می‌توان یک تقریب برای فشار ناپیوسته بدون نیاز به شرایط مرزی با استفاده از رابطه (۵.۲) بدست آورد.

نتیجه ۳.۰.۱.۲. با استفاده از رابطه های (۴.۲) و (۵.۲) یک روش نیمه ضمنی برای فشار به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\frac{u^{n+\frac{1}{2}} - u^n}{\tau} - (\theta + v)\Delta u^{n+\frac{1}{2}} + \theta\Delta u^n + (u^n \cdot \nabla)u^n + \nabla p^n = f(t_{n+1}) \quad (۱۱.۲)$$

$$\frac{u^{n+1} - u^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} - (\theta + v)\Delta(u^{n+1} - u^{n+\frac{1}{2}}) + \eta\nabla(p^{n+1} - p^n) = \circ \quad (۱۲.۲)$$

اگر $۰ < \eta \leq ۱$ یک پارامتر آزاد باشد. همچنین رابطه (۱۲.۲) روش ضمنی برای فشار را نشان می‌دهد.

تجزیه و تحلیل همگرایی

در این بخش نتایج همگرایی و اثبات روش گام کسری را بررسی می کنیم. ابتدا نمادها و تعاریف زیر را ارائه می دهیم:

مرحله ۱: با توجه به اینکه $T > 0$ و $r \in [1, \infty)$ و فضای باناخ w ، فضای $L^r(\circ, T, w)$ شامل توابعی در (\circ, T) به w تعریف شده است. فضای $L^r(\circ, T, w)$ با تولید اسکالر معمولی و نرم به صورت زیر است:

$$\| \cdot \|_{L^r(\circ, T, w)} = \left(\int_{\circ}^T \| \cdot \|_w^r \right)^{\frac{1}{r}}, \quad (\circ, \circ) = \int_{\circ}^T (\circ, \circ)_w dt$$

مرحله ۲: معرفی توابع تقریبی $u_{i\tau}$ برای $i = 1, 2, 3$ است. لذا داریم:

$$\begin{aligned} u_{1\tau} : [\circ, T] &\rightarrow y, & u_{1\tau} &= u^{n+\frac{1}{\tau}} \quad \forall t \in [n\tau, (n+1)\tau) \\ u_{2\tau} : [\circ, T] &\rightarrow y, & u_{2\tau} &= u^{n+\frac{1}{\tau}} \quad \forall t \in [n\tau, (n+1)\tau) \\ u_{3\tau} : [\circ, T] &\rightarrow y, & u_{3\tau} &= u^{n+\frac{1}{\tau}} \quad \forall t \in [n\tau, (n+1)\tau) \end{aligned}$$

حال بر اساس فرضیه های فوق رفتار توابع تقریبی $u_{i\tau}$ و u_{τ} از $\tau \rightarrow 0$ را با استفاده از لم زیر بدست می آوریم:

اثبات لم ها و قضایا را در مراجع [۲، ۱۲، ۲۲، ۲۳، ۲۹، ۳۰، ۳۹، ۴۱] ببینید.

لم ۴.۱.۲. u^n و $u^{n+\frac{1}{\tau}}$ کراندارند که به صورت زیر است:

$$\|u^{N+1}\|_{\circ}^2 + \sum_{n=\circ}^N (\|u^{n+1} - u^{n+\frac{1}{\tau}}\|_{\circ}^2 + \|u^{n+\frac{1}{\tau}} - u_{\circ}^{n+\frac{1}{\tau}}\|_{\circ}^2) + \tau(v + \theta)$$

$$\left\{ \sum_{n=\circ}^N \|\nabla u^{n+1}\|_{\circ}^2 + \sum_{n=\circ}^N \|\nabla(u^{n+1} - u^{n+\frac{1}{\tau}})\|_{\circ}^2 \right\} \leq C$$

لم ۵.۱.۲. با توجه به لم ۴.۱.۲ برای هر $n = \circ, \dots, N$ داریم:

$$(۱) \quad \|u_{\circ}^{n+\frac{1}{\tau}}\|_{\circ}^2 \leq C \quad i = 1, 2$$

$$(۲) \quad \tau(v + \theta) \|\nabla u^{n+\frac{1}{\tau}}\|_{\circ}^2 \leq C$$

$$(۳) \quad \sum_{n=\circ}^N \|u^{n+1} - u^{n+\frac{1}{\tau}}\|_{\circ}^2 \leq C$$

$$(۴) \quad \sum_{n=\circ}^N \|u^{n+\frac{1}{\tau}} - u^n\|_{\circ}^2 \leq C$$

$$(۵) \quad \tau(v + \theta) \sum_{n=\circ}^N \|\nabla(u^{n+1} - u^{n+\frac{1}{\tau}})\|_{\circ}^2 \leq C$$

$$(۶) \quad \tau(v + \theta) \sum_{n=\circ}^N \|\nabla u^{n+1}\|_{\circ}^2 \leq C$$

لم ۱.۲.۶. ۱- $u_{i\tau}$ و u_τ در $L^\infty(\circ, T, y)$ برای $i = 1, 2, 3$ کراندار هستند.
 ۲- $u_{i\tau}$ و u_τ در $L^2(\circ, T, X)$ برای $i = 1, 2, 3$ کراندار هستند.
 ۳- $(u_{2\tau} - u_{1\tau})$ و $(u_{2\tau} - u_{3\tau})$ در $L^2(\circ, T, X)$ کراندار هستند.

لم ۱.۲.۷.

$$(۱) \quad \|u_{2\tau} - u_{1\tau}\|_{L^\infty(\circ, T, y)}^2 \leq C\tau$$

$$(۲) \quad \|u_{2\tau} - u_{3\tau}\|_{L^2(\circ, T, y)}^2 \leq C\tau$$

$$(۳) \quad \|u_\tau - u_{2\tau}\|_{L^2(\circ, T, y)}^2 \leq C\tau$$

لم ۱.۲.۸.

$\frac{d}{dt}(u_\tau(t), v) = -v(\nabla u_{2\tau}(t), \nabla v) - b(u_{3\tau}, u_{1\tau}, v) + (f_\tau(t), v) = \langle A_\tau(t), v \rangle \forall v \in V, t \in (\circ, T)$
 که در آن A_τ در $L^2(\circ, T, v)$ کراندار است.

حال با استفاده از لم‌های گفته شده قضیه زیر را در نظر می‌گیریم:

قضیه ۱.۲.۹. برای $f \in L^2(\circ, T, H)$ و $u_0 \in v$ وجود دارد برخی $\tau' \rightarrow \circ$ که با استفاده از رابطه ۱ برای u داریم:

- ۱) برای $u_{i\tau'}$ و $u_{\tau'}$ در $L^2(\Omega_x(\circ, T))$ برای $i = 1, 2, 3$ به طور قوی همگرا به u است.
- ۲) برای $u_{i\tau'}$ و $u_{\tau'}$ در $L^\infty(\circ, T, Y)$ برای $i = 1, 2, 3$ کمی ضعیف همگرا به u است.
- ۳) برای $u_{i\tau'}$ و $u_{\tau'}$ در $L^2(\circ, T, X)$ برای $i = 1, 2, 3$ به طور ضعیف همگرا به u است.

نتیجه ۱.۲.۱۰. با استفاده از قضیه ۶ همگرایی داده شده از یک دنباله کلی است که همانطور اشاره کردیم c یک ثابت مثبت عمومی که به f, v, Ω و θ بستگی دارد. همچنین نتیجه می‌گیریم که سرعت متوسط $u^{n+\frac{1}{\tau}}$ و سرعت u^{n+1} در پایان هر گام همگرا به $u(t_{n+1})$ در X ضعیف است.

حال در این مرحله لم گرون وال را معرفی کرده و از آن در قسمت بعد استفاده می‌کنیم.

لم ۱.۲.۱۱. c و τ اعداد نامنفی و a_k, b_k, c_k, d_k متوالی و نامنفی داریم:

$$a_n + \tau \sum_{k=0}^n b_k \leq \tau \sum_{k=0}^{n-1} d_k a_k + \tau \sum_{k=0}^{n-1} c_k + c, \quad \forall n \geq 1,$$

$$a_n + \tau \sum_{k=0}^n b_k \leq \exp\left(\tau \sum_{k=0}^{n-1} d_k\right) (\tau \sum_{k=0}^{n-1} c_k + c), \quad \forall n \geq 1$$

۱.۱.۲ تجزیه و تحلیل خطا

در این قسمت تجزیه و تحلیل عددی به روش گام کسری را بررسی می‌کنیم.

تخمین خطا برای سرعت های نیمه گسسته

ابتدا خطای سرعت های نیمه گسسته را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$e^{n+1} = u(t_{n+1}) - u^{n+1} \quad e^{n+\frac{1}{2}} = u(t_{n+1}) - u^{n+\frac{1}{2}}$$

\mathbb{R}^n خطای برشی است که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\frac{u(t_{n+1}) - u(t_n)}{\tau} - v\Delta u(t_{n+1}) + (u(t_{n+1}) \cdot \nabla)u(t_{n+1}) + \nabla p(t_{n+1}) = f(t_{n+1}) + R \quad (13.2)$$

$$R^n = -\frac{1}{\tau} \int_{t_n}^{t_{n+1}} (t - t_n) u_{tt}(t) dt$$

در مرحله اول e^{n+1} و $e^{n+\frac{1}{2}}$ را برآورد می‌کنیم. سپس u^{n+1} و $u^{n+\frac{1}{2}}$ از مرتبه $\frac{1}{2}$ را بدست می‌آوریم که تقریبی از u در $L^2(x)$ و $L^\infty(y)$ است.

لم ۱۲.۱.۲. اگر مفروضات (A_1) , (A_2) , (A_3) و (A_4) را برقرار باشد در این صورت

$$\begin{aligned} & \|e^{N+1}\|_0^2 + \|e^{N+\frac{1}{2}}\|_0^2 + \sum_{k=0}^N \{ \|e^{k+1} - e^{k+\frac{1}{2}}\|_0^2 + \|e^{k+\frac{1}{2}} - e^k\|_0^2 \} + \\ & (\theta + v)\tau \sum_{k=0}^N \{ \|\nabla e^{k+1}\|_0^2 + \|\nabla e^{k+\frac{1}{2}}\|_0^2 + \|\nabla(e^{k+1} - e^{k+\frac{1}{2}})\|_0^2 \} \leq C\tau \\ & \forall N = 0, \dots, \left[\frac{T}{\tau}\right] - 1 \end{aligned} \quad (14.2)$$

برهان. با کم کردن رابطه (۴.۲) از (۱۴.۲) داریم:

$$\begin{aligned} & \frac{e^{n+\frac{1}{2}} - e^n}{\tau} - (\theta + v)\Delta e^{n+\frac{1}{2}} + \theta\Delta(z^n + e^n) = \\ & (u^n \cdot \nabla)u^n - (u(t_{n+1}) \cdot \nabla)u(t_{n+1}) - \nabla p(t_{n+1}) + R^n \end{aligned} \quad (15.2)$$

$$z^n = u(t_{n+1}) - u(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} u_t dt$$

با استفاده از روابط زیر:

$$(a - b, \nabla a) = |a|^2 - |b|^2 + |a - b|^2$$

$$\nabla(a, b) = |a|^2 + |b|^2 - |a - b|^2$$

عبارت غیرخطی در سمت راست رابطه (۱۵.۲) را در نظر می‌گیریم.

$$(u^n \cdot \nabla)u^n - (u(t_{n+1}) \cdot \nabla)u(t_{n+1}) = \\ - (e^n \cdot \nabla)u^n - (z^n \cdot \nabla)u^n - (z^n \cdot \nabla)u(t_n) - (u(t_n) \cdot \nabla)e^n - (u(t_{n+1}) \cdot \nabla)z^n \quad (۱۶.۲)$$

سپس بدست می‌آوریم:

$$\|e^{n+\frac{1}{\nu}}\|_0^2 - \|e^n\|_0^2 + \|e^{n+\frac{1}{\nu}} - e^n\|_0^2 + 2\tau v \|\nabla e^{n+\frac{1}{\nu}}\|_0^2 \\ + \theta\tau (\|\nabla e^{n+\frac{1}{\nu}}\|_0^2 - \|\nabla e^n\|_0^2 + \|\nabla(e^{n+\frac{1}{\nu}} - e^n)\|_0^2) = \\ 2\tau \langle R^n, e^{n+\frac{1}{\nu}} \rangle - 2\tau (\nabla p(t_{n+1}), e^{n+\frac{1}{\nu}}) - 2\tau b(e^n, u^n, e^{n+\frac{1}{\nu}}) \\ - 2\tau b(z^n, u(t_n), e^{n+\frac{1}{\nu}}) - 2\tau b(u(t_n), e^n, e^{n+\frac{1}{\nu}}) - 2\tau b(u(t_{n+1}), z^n, e^{n+\frac{1}{\nu}}) \\ - \theta\tau (\Delta z^n, 2e^{n+\frac{1}{\nu}}) \quad (۱۷.۲)$$

با استفاده از رابطه (۵.۲) خواهیم داشت .

$$\frac{e^{n+1} - e^{n+\frac{1}{\nu}}}{\tau} - (\theta + v)\Delta(e^{n+1} - e^{n+\frac{1}{\nu}}) - \nabla p^{n+1} = 0 \quad (۱۸.۲)$$

با توجه به رابطه (۱۸.۲) و با استفاده از $2\tau e^{n+1}$ و $\nabla \cdot e^{n+1} = 0$ داریم:

$$\|e^{n+1}\|_0^2 - \|e^{n+\frac{1}{\nu}}\|_0^2 + \|e^{n+1} - e^{n+\frac{1}{\nu}}\|_0^2 \\ + (\theta + v)\tau (\|\nabla e^{n+1}\|_0^2 - \|\nabla e^{n+\frac{1}{\nu}}\|_0^2 + \|\nabla(e^{n+1} - e^{n+\frac{1}{\nu}})\|_0^2) = 0 \quad (۱۹.۲)$$

با استفاده از روابط (۱۷.۲) و (۱۹.۲) بدست می‌آوریم:

$$\|e^{n+1}\|_0^2 - \|e^n\|_0^2 + \|e^{n+1} - e^{n+\frac{1}{\nu}}\|_0^2 + \|e^{n+\frac{1}{\nu}} - e^n\|_0^2 \\ + \tau v (\|\nabla e^{n+\frac{1}{\nu}}\|_0^2 + \|\nabla e^{n+1}\|_0^2) + (\theta + v)\tau \|\nabla e^{n+1}\|_0^2 \\ + \theta\tau (\|\nabla e^{n+\frac{1}{\nu}}\|_0^2 - \|\nabla e^n\|_0^2 + \|\nabla(e^{n+\frac{1}{\nu}} - e^n)\|_0^2) = \\ 2\tau \langle R^n, e^{n+\frac{1}{\nu}} \rangle - 2\tau (\nabla p(t_{n+1}), e^{n+\frac{1}{\nu}}) - 2\tau b(e^n, u^n, e^{n+\frac{1}{\nu}}) \\ - 2\tau b(z^n, u(t_n), e^{n+\frac{1}{\nu}}) - 2\tau b(u(t_n), e^n, e^{n+\frac{1}{\nu}}) \\ - 2\tau b(u(t_{n+1}), z^n, e^{n+\frac{1}{\nu}}) - \theta\tau (\Delta z^n, 2e^{n+\frac{1}{\nu}}) \quad (۲۰.۲)$$

□

(۱) شرط تیلور

$$2\tau \langle R^n, e^{n+\frac{1}{\nu}} \rangle \leq \frac{c}{\tau} \left\| \int_{t_n}^{t_{n+1}} (t - t_n) u_{tt} dt \right\|_0^2 + \frac{\tau v}{\sqrt{\nu}} \|\nabla e^{n+\frac{1}{\nu}}\|_0^2 \leq \\ \frac{c}{\tau} \int_{t_n}^{t_{n+1}} t \|u_{tt} dt\|_0^2 + \frac{\tau v}{\sqrt{\nu}} \|\nabla e^{n+\frac{1}{\nu}}\|_0^2$$

(۲) شرط فشار

$$\begin{aligned} & -\gamma\tau(\nabla p(t_{n+1}), e^{n+\frac{1}{2}}) = \\ & -\gamma\tau(\nabla p(t_{n+1}), e^{n+1} - e^n) \leq \\ & \frac{1}{\gamma}\|e^{n+\frac{1}{2}} - e^n\|_0^2 + \gamma\tau^2\|\nabla p(t_{n+1})\|_0^2 \end{aligned}$$

به طوری که:

$$\nabla \cdot e^n = 0$$

(۳) شرایط غیر خطی

$$\begin{aligned} & -\gamma\tau b(e^n, u^n, e^{n+\frac{1}{2}}) = \\ & \gamma\tau b(e^n, e^n, e^{n+\frac{1}{2}}) - \gamma\tau b(e^n, u(t_n), e^{n+\frac{1}{2}}) \leq \\ & \frac{\tau v}{\gamma^2}\|\nabla e^{n+\frac{1}{2}}\|_0^2 + c\tau\|e^n\|_0^2 - \gamma\tau b(z^n, u(t_n), e^{n+\frac{1}{2}}) \leq \\ & c\tau\|z^n\|_0\|u(t_n)\|_{\gamma}\|\nabla e^{n+\frac{1}{2}}\|_0 \leq \\ & \frac{\tau v}{\gamma^2}\|\nabla e^{n+\frac{1}{2}}\|_0^2 + c\tau^2\int_{t_n}^{t_{n+1}}\|u_t\|_0^2 dt - \gamma\tau b(u(t_n), e^n, e^{n+\frac{1}{2}}) = \\ & c\tau\|e^n\|_0\|u(t_n)\|_{\gamma}\|\nabla e^{n+\frac{1}{2}}\|_0 \leq \\ & \frac{\tau v}{\gamma^2}\|\nabla e^{n+\frac{1}{2}}\|_0^2 + c\tau\|e^n\|_0^2 - \gamma\tau b(u(t_{n+1}), z^n, e^{n+\frac{1}{2}}) \leq \\ & c\tau\|z^n\|_0\|u(t_{n+1})\|_{\gamma}\|\nabla e^{n+\frac{1}{2}}\|_0 \leq \\ & \frac{\tau v}{\gamma^2}\|\nabla e^{n+\frac{1}{2}}\|_0^2 + c\tau^2\int_{t_n}^{t_{n+1}}\|u_t\|_0^2 dt \end{aligned}$$

(۴) مرحله آخر

$$\begin{aligned} & -\theta\tau(\Delta z^n, \gamma e^{n+\frac{1}{2}}) = \gamma\theta\tau(\nabla z^n, \nabla e^{n+\frac{1}{2}}) \leq \\ & \gamma\theta\tau\|\nabla z^n\|_0\|\nabla e^{n+\frac{1}{2}}\|_0 + c\tau^2\int_{t_n}^{t_{n+1}}\|\nabla u_t\|_0^2 dt \end{aligned}$$

با استفاده از این نامساوی‌ها داریم:

$$\begin{aligned} & \|e^{n+1}\|_0^2 - \|e^n\|_0^2 + \|e^{n+1} - e^{n+\frac{1}{2}}\|_0^2 + \frac{1}{\gamma}\|e^{n+\frac{1}{2}} - e^n\|_0^2 \\ & + \frac{\tau v}{\gamma}\|\nabla e^{n+\frac{1}{2}}\|_0^2 + \tau v\|\nabla e^{n+1}\|_0^2 + (\theta + v)\tau\|\nabla(e^{n+1} - e^{n+\frac{1}{2}})\|_0^2 \\ & + \theta\tau(\|\nabla e^{n+\frac{1}{2}}\|_0^2 - \|\nabla e^n\|_0^2 + \|\nabla(e^{n+\frac{1}{2}} - e^n)\|_0^2) \leq \\ & c\tau\int_{t_n}^{t_{n+1}}t\|u_{tt}\|_0^2 dt + \gamma\tau^2\|\nabla p(t_{n+1})\|_0^2 + c\tau\|\nabla e^n\|_0^2 + \\ & c\tau^2\int_{t_n}^{t_{n+1}}\|u_t\|_0^2 dt + c\tau^2\int_{t_n}^{t_{n+1}}\|\nabla u_t\|_0^2 dt \end{aligned} \quad (21.2)$$

با استفاده رابطه (۲۱.۲) برای $n = 0, \dots, N$ داریم:

$$\begin{aligned} & \|e^{N+1}\|_{\cdot}^2 + \sum_{n=0}^N \{ \|e^{n+1} - e^{n+\frac{1}{\tau}}\|_{\cdot}^2 + \frac{1}{\tau} \|e^{n+\frac{1}{\tau}} - e^n\|_{\cdot}^2 \} \\ & + \tau \sum_{n=0}^N \{ \frac{v}{\tau} \|\nabla e^{n+\frac{1}{\tau}}\|_{\cdot}^2 + v \|\nabla e^{n+1}\|_{\cdot}^2 + (\theta + v) \|\nabla(e^{n+1} - e^{n+\frac{1}{\tau}})\|_{\cdot}^2 \} \\ & + \theta \tau (\|\nabla e^{N+1}\|_{\cdot}^2 + \sum_{n=0}^N \|\nabla(e^{n+\frac{1}{\tau}} - e^n)\|_{\cdot}^2) \leq \\ & c\tau \int_0^T t \|u_{tt}\|_{\cdot}^2 dt + \tau \sup \|\nabla p(t)\|_{\cdot}^2 + c\tau \{ \sum_{n=0}^N \|\nabla e^n\|_{\cdot}^2 + \\ & \tau^2 \int_0^T \|u_t\|_{\cdot}^2 dt + \tau^2 \int_0^T \|\nabla u_t\|_{\cdot}^2 dt \} \quad t \in [0, T] \end{aligned} \quad (22.2)$$

لذا با استفاده از نامعادله گرون وال ، لم ۱۲.۱.۲ و نامساوی بالا داریم:

$$\begin{aligned} & \|e^{N+1}\|_{\cdot}^2 + \sum_{n=0}^N \{ \|e^{n+1} - e^{n+\frac{1}{\tau}}\|_{\cdot}^2 + \|e^{n+\frac{1}{\tau}} - e^n\|_{\cdot}^2 \} \\ & + (\theta + v)\tau \{ \|\nabla e^{N+1}\|_{\cdot}^2 + \sum_{n=0}^N \|\nabla(e^{n+1} - e^{n+\frac{1}{\tau}})\|_{\cdot}^2 \} \leq c\tau \end{aligned} \quad (23.2)$$

لذا یک کران برای $u^{n+\frac{1}{\tau}}$ به صورت رابطه (۲۳.۲) ثابت می شود.

نتیجه ۱۳.۱.۲. حالت خاص لم ۴.۱.۲ نشان می دهد که این روش سرعت پایدار و یکنواخت در x فراهم می کند. لذا نشان می دهد که c یک مستقل از زمان گام های τ است، برای همه $n = 0, \dots, N - 1$.

$$\|\nabla u^{n+1}\|_{\cdot} \leq c \quad \|\nabla u^{n+\frac{1}{\tau}}\|_{\cdot} \leq c \quad (24.2)$$

علاوه بر این $\|\nabla e^{n+\frac{1}{\tau}}\|_{\cdot} \leq c, \|\nabla e^{n+1}\|_{\cdot} \leq c$ و $u \in L^\infty(0, T, x)$ بنا بر این داریم:

$$\|e^{n+\frac{1}{\tau}}\|_{\cdot} \leq c\tau^{\frac{1}{\tau}} \quad \|e^{n+1}\|_{\cdot} \leq c\tau^{\frac{1}{\tau}} \quad (25.2)$$

حال در ادامه این بحث به بررسی برآورد خطا برای $u^{n+\frac{1}{\tau}}$ و u^{n+1} در نرم $L^2(y)$ می پردازیم.

قضیه ۱۴.۱.۲. فرض کنید که مفروضات (A_2) ، (A_3) ، (A_4) ، و (A_5) برای همه $n = 0, \dots, N$ ، $\tau > 0$ برقرار باشد. در این صورت:

$$\|e^{N+1}\|_{v'}^2 + \theta \tau \|e^{N+1}\|_{\cdot}^2 + \tau v \sum_{n=0}^N (\|e^{n+1}\|_{\cdot}^2 + \|e^{n+\frac{1}{\tau}}\|_{\cdot}^2) \leq c\tau^2 \quad (26.2)$$

برهان. با استفاده از رابطه خطا برای فشار $r^{n+1} = p(t_{n+1}) - p^{n+1}$ و همچنین تفاضل دو رابطه (۹.۲) و (۱۳.۲) داریم:

$$\frac{e^{n+1} - e^n}{\tau} - (\theta + v)\Delta e^{n+1} + \theta\Delta(z^n + e^n) + \nabla r^{n+1} = (u \cdot \nabla)u^n - (u(t_{n+1}) \cdot \nabla)u(t_{n+1}) + R^n \quad (27.2)$$

با توجه به حاصل رابطه (۲۷.۲) و با استفاده از A^{-1} داریم:

$$\begin{aligned} & (e^{n+1}, A^{-1}e^{n+1}) - (e^n, A^{-1}e^n) + (e^{n+1} - e^n, A^{-1}(e^{n+1} - e^n)) - \\ & 2(\theta + v)\tau(\Delta e^{n+1} + A^{-1}e^{n+1}) + \theta\tau(e^n + A^{-1}e^{n+1}) = \\ & 2\tau b(u^n, u^n, A^{-1}e^{n+1}) - 2\tau b(u(t_{n+1}), u(t_{n+1}), A^{-1}e^{n+1}) + \\ & 2\tau \langle R^n, A^{-1}e^{n+1} \rangle - \theta\tau(\Delta z^n, A^{-1}e^{n+1}) \end{aligned} \quad (28.2)$$

حال با قرار دادن $u = e^{n+1}$ در رابطه (۲۰.۲) داریم:

$$\begin{aligned} & - 2\tau v(\Delta e^{n+1}, A^{-1}e^{n+1}) = \\ & 2\tau v(e^{n+1} - \Delta(A^{-1}e^{n+1})) = \\ & 2\tau v(e^{n+1}, e^{n+1} - \nabla r) = \\ & 2\tau v\|e^{n+1}\|_0^2 - 2\theta\tau(\Delta(e^{n+1} - e^n), A^{-1}e^{n+1}) = \\ & 2\theta\tau(e^{n+1} - e^n, e^{n+1} - \nabla r) = \\ & 2\theta\tau(e^{n+1} - e^n, e^{n+1}) = \\ & \theta(\|e^{n+1}\|_0^2 - \|e^n\|_0^2 + \|e^{n+1} - e^n\|_0^2) \end{aligned}$$

با توجه به اینکه $\nabla \cdot e^{n+1} = 0$ و $\nabla \cdot e^n = 0$ و رابطه (۲۸.۲) کراندار است داریم:
(۱) زمان باقی مانده:

$$\begin{aligned} & 2\tau \langle R^n, A^{-1}e^{n+1} \rangle \leq 2\tau \|R^n\|_{v'} \|A^{-1}e^{n+1}\|_v = \\ & 2\tau \|R^n\|_{v'} \|e^{n+1}\|_{v'} \leq \\ & \tau \|e^{n+1}\|_{v'}^2 + c\tau \|R^n\|_{v'}^2 \leq \\ & \tau \|e^{n+1}\|_{v'}^2 + c\tau \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|u_{tt}\|_{v'}^2 dt \end{aligned}$$

(۲) شرایط غیر خطی:

تقسیم دو رابطه (۱۶.۲) و (۱۹.۲) و خاصیت مورب - تقارن برای خطی‌های مرتبه ۳، نامساوی زیر را می‌توان به دست آورد:

$$\begin{aligned} & - 2\tau b(u(t_n), e^n, A^{-1}e^{n+1}) \leq \\ & c\tau \|u(t_n)\|_2 \|\nabla A^{-1}e^{n+1}\|_0 \|e^n\|_0 \leq \\ & c\tau \|e^{n+1}\|_{v'}^2 + \frac{\tau v}{\sqrt{2}} \|e^n\|_0^2 \leq \end{aligned} \quad (29.2)$$

با استفاده از رابطه (۲۴.۲) و فرضیات (A_۱) - (A_۵) داریم:

$$\begin{aligned} & \Psi \tau b(z^n, u(t_n), A^{-1}e^{n+1}) \leq \\ & c\tau \|z^n\|_0 \|u(t_n)\|_1 \|A^{-1}e^{n+1}\|_2 \leq \\ & c\tau \left\| \int_{t_n}^{t_{n+1}} u_t dt \right\|_0 \|e^{n+1}\|_0 \leq \\ & c\tau \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|u_t\|_0^2 dt + \frac{\tau v}{12} \|e^{n+1}\|_0^2 \end{aligned} \quad (30.2)$$

همچنین

$$\begin{aligned} & - \Psi \tau b(u(t_{n+1}), z^n, A^{-1}e^{n+1}) \leq \\ & c\tau \|z^n\|_0 \|u(t_{n+1})\|_1 \|A^{-1}e^{n+1}\|_2 \leq \\ & c\tau \left\| \int_{t_n}^{t_{n+1}} u_t dt \right\|_0 \|e^{n+1}\|_0 \leq \\ & c\tau \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|u_t\|_0^2 dt + \frac{\tau v}{12} \|e^{n+1}\|_0^2 \end{aligned} \quad (31.2)$$

همچنین با استفاده از شرایط غیر خطی $b(e^n, u^n, A^{-1}e^{n+1})$ می توان نوشت:
 $-b(e^n, u^n, A^{-1}e^{n+1}) = b(e^n, A^{-1}e^{n+1}, u(t_n)) - b(e^n, A^{-1}e^{n+1}, e^n)$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} & \Psi \tau b(e^n, A^{-1}e^{n+1}, u(t_n)) \leq \\ & c\tau \|e^n\|_0 \|A^{-1}e^{n+1}\|_1 \|u(t_n)\|_2 \leq \\ & c\tau \|e^n\|_0 \|e^{n+1}\|_{v'} \leq \\ & c\tau (\|e^{n+1}\|_0 \|e^{n+1} - e^{n+\frac{1}{2}}\|_0 \|e^{n+\frac{1}{2}} - e^n\|_0) \|e^{n+1}\|_{v'} \leq \\ & \frac{\tau v}{12} \|e^{n+1} - e^n\|_0^2 + c\tau (\|e^{n+1} - e^{n+\frac{1}{2}}\|_0^2 + \|e^{n+\frac{1}{2}} - e^n\|_0^2 + \|e^{n+1}\|_{v'}^2) \end{aligned} \quad (32.2)$$

همچنین می توان نوشت:

$$\begin{aligned} & - \Psi \tau b(e^n, A^{-1}e^{n+1}, e^n) \leq \\ & c\tau \|e^n\|_0 \|A^{-1}e^{n+1}\|_2 \|\nabla e^n\|_0 \leq \\ & c\tau \|e^n\|_0 \|e^{n+1}\|_0 \|\nabla e^n\|_0 \leq \\ & c\tau \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|e^{n+1}\|_0 \|\nabla e^n\|_0 \leq \\ & \frac{\tau v}{12} \|e^{n+1}\|_0^2 + c\tau \|\nabla e^n\|_0^2 \end{aligned} \quad (33.2)$$

(۳) مرحله آخر:

$$\begin{aligned} & - \Psi \theta \tau (\Delta z^n, A^{-1}e^{n+1}) = \Psi \theta \tau (z^n, -\Delta(A^{-1}e^{n+1})) = \Psi \theta \tau (z^n, e^{n+1} - \nabla r) = \\ & \Psi \theta \tau (z^n, e^{n+1}) \leq \frac{\tau v}{12} \|e^{n+1}\|_0^2 + c\tau \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|u_t\|_0^2 dt \end{aligned} \quad (34.2)$$

با استفاده از نتایج فوق و استفاده از رابطه (۲۸.۲) برای $n = 0, \dots, N$ داریم:

$$\begin{aligned}
 & (e^n, A^{-1}e^{n+1}) + \sum_{n=0}^N (e^{n+1} - e^n, A^{-1}(e^{n+1} - e^n)) + \tau v \sum_{n=0}^N \|e^{n+1}\|_{\circ}^2 + \\
 & \theta \tau \sum_{n=0}^N \|e^{n+1} - e^n\|_{\circ}^2 + \theta \tau \|e^{N+1}\|_{\circ}^2 \leq \\
 & c\tau \sum_{n=0}^N \|e^{n+1}\|_{v'}^2 + c\tau^2 \int_0^T \|u_{tt}\|_{v'}^2 dt + c\tau^2 \int_0^T \|u_t\|_{\circ}^2 dt + \\
 & c\tau^2 \sum_{n=0}^N \{ \|\nabla e^{n+1}\|_{\circ}^2 + \|\nabla e^{n+\frac{1}{2}}\|_{\circ}^2 + \|\nabla(e^{n+1} - e^{n+\frac{1}{2}})\|_{\circ}^2 \} + \\
 & c\tau \sum_{n=0}^N \{ \|e^{n+1} - e^{n+\frac{1}{2}}\|_{\circ}^2 + \|e^{n+\frac{1}{2}} - e^n\|_{\circ}^2 \} \tag{۳۵.۲}
 \end{aligned}$$

حال با استفاده از لم ۴.۱.۲ داریم:

$$\begin{aligned}
 & \|e^{N+1}\|_{v'}^2 + \sum_{n=0}^N \|e^{n+1} - e^n\|_{v'}^2 + \theta \tau \|e^{N+1}\|_{\circ}^2 + \\
 & \tau \sum_{n=0}^N (v \|e^{n+1}\|_{\circ}^2 + \theta \|e^{n+1} - e^n\|_{\circ}^2) \leq \\
 & c\tau^2 + c\tau \sum_{n=0}^N \|e^{n+1}\|_{v'}^2
 \end{aligned}$$

همچنین با استفاده از نامساویگرون وال ، لم ۱۲.۱.۲ و نامساوی فوق داریم:

$$\begin{aligned}
 & \|e^{N+1}\|_{v'}^2 + \sum_{n=0}^N \|e^{n+1} - e^n\|_{v'}^2 + \theta \tau \|e^{N+1}\|_{\circ}^2 + \\
 & \tau \sum_{n=0}^N (v \|e^{n+1}\|_{\circ}^2 + \theta \|e^{n+1} - e^n\|_{\circ}^2) \leq c\tau^2 \tag{۳۶.۲}
 \end{aligned}$$

لذا برای u^{n+1} رابطه ثابت شد و برای $u^{n+\frac{1}{2}}$ با توجه به لم ۴.۱.۲ و با استفاده از رابطه (۳۵.۲) داریم:

$$\tau v \sum_{n=0}^N \|e^{n+\frac{1}{2}}\|_{\circ}^2 \leq 2\tau v \sum_{n=0}^N \{ \|e^{n+\frac{1}{2}}\|_{\circ}^2 + \|e^{n+1} - e^{n+\frac{1}{2}}\|_{\circ}^2 \} \leq c\tau^2$$

□

بنابراین رابطه (۲۶.۲) ثابت شد.

حال در ادامه بحث نشان می‌دهیم که u تقریبی از $L^2(x) \cap L^\infty(y)$ است.

قضیه ۱۵.۱.۲. فرض کنیم (A_1) ، (A_2) ، (A_3) ، و (A_5) برقرار باشد. برای همه $N = 0, \dots, [\frac{T}{\tau}] - 1$ داریم:

$$\|e^{N+1}\|_{\circ}^2 + \theta \tau \|\nabla e^{N+1}\|_{\circ}^2 + \tau v \sum_{n=0}^N \|\nabla e^{n+1}\|_{\circ}^2 \leq c\tau^2 \tag{۳۷.۲}$$

برهان. با توجه به رابطه (۲۷.۲) و همچنین $e^{n+1} \in v$ داریم:

$$\begin{aligned} & \|e^{n+1}\|_0^2 - \|e^n\|_0^2 + \|e^{n+1} - e^n\|_0^2 + 2\tau v \|\nabla e^{n+1}\|_0^2 \\ & 2\theta\tau \{ \|\nabla e^{n+1}\|_0^2 - \|\nabla e^n\|_0^2 - \|\nabla(e^{n+1} - e^n)\|_0^2 \} = \\ & 2\tau b(u^n, u^n, e^{n+1}) - 2\tau b(u(t_{n+1}), u(t_{n+1}), e^{n+1}) + \\ & 2\tau \langle R^n, e^{n+1} \rangle - 2\theta\tau (\nabla z^n, \nabla e^{n+1}) \end{aligned} \quad (38.2)$$

با توجه به اینکه سمت راست رابطه (۳۷.۲) کراندار است لذا داریم:

(۱) زمان باقی مانده

$$\begin{aligned} 2\tau \langle R^n, e^{n+1} \rangle & \leq 2\tau \|R^n\|_{v'} \|\nabla e^{n+1}\|_0 \leq \\ & \frac{\tau v}{\lambda} \|\nabla e^{n+1}\|_0^2 + c\tau^2 \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|u_{tt}\|_{v'}^2 dt \end{aligned}$$

(۲) شرایط غیر خطی:

با استفاده از رابطه (۱۶.۲) داریم:

$$\begin{aligned} & -2\tau b(u(t_n), e^n, e^{n+1}) \leq \\ & c\tau \|u(t_{n+1})\|_2 \|e^n\|_1 \|e^n\|_0 \leq \\ & \frac{\tau v}{\sqrt{\lambda}} \|\nabla e^{n+1}\|_0^2 + c\tau \|e^n\|_0^2 - 2\tau b(z^n, u(t_n), e^{n+1}) \leq \\ & c\tau \|\nabla z^n\|_0 \|\nabla u(t_n)\|_0 \|\nabla e^{n+1}\|_0 \leq \\ & c\tau^2 \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|u_t\|_0^2 dt + \frac{\tau v}{\lambda} \|\nabla e^{n+1}\|_0^2 \end{aligned}$$

همچنین؛

$$-b(e^n, u^n, e^{n+1}) = b(e^n, e^n, e^{n+1}) - b(e^n, u(t_n), e^{n+1})$$

لذا:

$$\begin{aligned} 2\tau b(e^n, e^n, e^{n+1}) & \leq c\tau \|\nabla e^n\|_0^2 + \frac{\tau v}{\sqrt{\lambda}} \|e^{n+1}\|_0^2 \\ & \leq \frac{\tau v}{\lambda} \|\nabla e^{n+1}\|_0^2 + c\tau \|e^n\|_0^2 \end{aligned}$$

در نتیجه داریم:

$$-2\tau b(e^n, u(t_n), e^{n+1}) \leq c\tau \|e^n\|_0 \|u(t_n)\|_0 \|\nabla e^{n+1}\|_0$$

(۳) مرحله آخر:

$$-\theta\tau (\nabla z^n, \nabla e^{n+1}) \leq \theta\tau \|\nabla z^n\|_0 \|\nabla e^{n+1}\|_0 \leq \frac{\tau v}{\lambda} \|\nabla e^{n+1}\|_0^2 + c\tau^2 \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|\nabla u_t\| dt$$

با اضافه کردن رابطه (۳۷.۲) برای $n = 0, \dots, N$ و با در نظر گرفتن روابط (۱۹.۲) و (۲۵.۲) داریم:

$$\begin{aligned} & \|e^{N+1}\|_{\cdot}^2 + \sum_{n=0}^N \|e^{n+1} - e^n\|_{\cdot}^2 + \tau v \sum_{n=0}^N \|\nabla e^{n+1}\|_{\cdot}^2 + \\ & c\tau^2 v \sum_{n=0}^N \|\nabla(e^{n+\frac{1}{2}})\|_{\cdot}^2 + \theta\tau\{\|\nabla e^{N+1}\|_{\cdot}^2 + \\ & \sum_{n=0}^N \|\nabla(e^{n+1} - e^n)\|_{\cdot}^2\} \leq \\ & c\tau^2\left\{\int_0^T \|u_{tt}\|_{v'}^2 dt + \int_0^T \|\nabla u_t\|_{\cdot}^2 dt\right\} + \\ & c\tau \sum_{n=0}^N \{\|e^{n+1}\|_{\cdot}^2 + \|e^{n+1} - e^{n+\frac{1}{2}}\|_{\cdot}^2\} + \\ & c\tau^2 \sum_{n=0}^N \{\|\nabla e^{n+1}\|_{\cdot}^2 + \|\nabla(e^{n+1} - e^{n+\frac{1}{2}})\|_{\cdot}^2\} \\ & c\tau^2 v \sum_{n=0}^N \{\|\nabla e^n\|_{\cdot}^2 \} \end{aligned} \quad (۳۹.۲)$$

با استفاده از لم ۴.۱.۲ و فرضیات (A۳) و (A۵) داریم:

$$\begin{aligned} & \|e^{N+1}\|_{\cdot}^2 + \sum_{n=0}^N \|e^{n+1} - e^n\|_{\cdot}^2 + \tau v \sum_{n=0}^N \|\nabla e^{n+1}\|_{\cdot}^2 + \\ & c\tau^2 v \sum_{n=0}^N \|\nabla(e^{n+\frac{1}{2}})\|_{\cdot}^2 + \theta\tau\{\|\nabla e^{N+1}\|_{\cdot}^2 + \\ & \sum_{n=0}^N \|\nabla(e^{n+1} - e^n)\|_{\cdot}^2\} \leq \\ & c\tau^2 + c\tau \sum_{n=0}^N \|e^{n+1}\|_{\cdot}^2 + c\tau^2 v \sum_{n=0}^N \|\nabla e^n\|_{\cdot}^2 \end{aligned} \quad (۴۰.۲)$$

در آخر با استفاده از نامعادله گرون وال ، لم ۱۲.۱.۲ و رابطه (۳۹.۲) داریم:

$$\begin{aligned} & \|e^{N+1}\|_{\cdot}^2 + \sum_{n=0}^N \|e^{n+1} - e^n\|_{\cdot}^2 + \tau v \sum_{n=0}^N \|\nabla e^{n+1}\|_{\cdot}^2 + \\ & \theta\tau\{\|\nabla e^{N+1}\|_{\cdot}^2 + \sum_{n=0}^N \|\nabla(e^{n+1} - e^n)\|_{\cdot}^2\} \leq c\tau^2 \end{aligned} \quad (۴۱.۲)$$

□

بنابراین رابطه (۳۴.۲) ثابت شد.

تخمین خطا برای فشار

برآورد خطا r^{n+1} نشان می دهد که p^{n+1} از مرتبه $\frac{1}{2}$ برای تقریب p در فضای $L^2(m)$ است. همچنین در قضیه (۱۵.۱.۳) ثابت شد.

$$\sum_{n=0}^N \|e^{n+1} - e^n\|_{\circ}^2 \leq c\tau^2$$

حال با استفاده از رابطه (۴۱.۲) برآورد خطا را برای فشار ثابت می کنیم.

قضیه ۱۶.۱.۲. فرض کنیم $(A_۴)$ ، $(A_۳)$ ، $(A_۲)$ و $(A_۵)$ برقرار باشد. برای همه $N = 0, \dots, [\frac{T}{\tau}] - 1$ برقرار باشد داریم:

$$\tau \sum_{n=0}^N \|p(t_{n+1}) - p^{n+1}\|_{\circ}^2 \leq c\tau \quad (۴۲.۲)$$

برهان. رابطه (۲۷.۲) را به صورت زیر بازنویسی می کنیم.

$$\begin{aligned} -\nabla r^{n+1} &= \frac{e^{n+1} - e^n}{\tau} - (\theta + v)\Delta e^{n+1} + \theta \Delta(z^n, e^n) - \\ &\quad (u^n \cdot \nabla)u^n + (u(t_{n+1}) \cdot \nabla)u(t_{n+1}) - R^n \end{aligned} \quad (۴۳.۲)$$

حال با استفاده از خاصیت sup-inf داریم:

$$\|r^{n+1}\|_{\circ} \leq c \sup_{v \in X} \frac{(\nabla r^{n+1}, v)}{\|\nabla v\|_{\circ}} \quad (۴۴.۲)$$

لذا با توجه به رابطه (۳۹.۲) برای $v \in X$ و داریم:

$$\begin{aligned} \left(\frac{e^{n+1} - e^n}{\tau}, v\right) &\leq \frac{1}{\tau} \|e^{n+1} - e^n\|_{\circ} \|v\|_{\circ} \leq \frac{c}{\tau} \|e^{n+1} - e^n\|_{\circ} \|\nabla v\|_{\circ}, \\ -v(\Delta e^{n+1}, v) &\leq v\|\nabla e^{n+1}\|_{\circ} \|\nabla v\|_{\circ}, \\ -\theta(\Delta(e^{n+1} - e^n), v) &\leq \theta\|\nabla(e^{n+1} - e^n)\|_{\circ} \|\nabla v\|_{\circ} \leq c\tau\|\nabla v\|_{\circ}, \\ -(R^n, v) &\leq \|R^n\|_{\circ} \|v\|_{\circ} \leq c\left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} t\|u_{tt}\|_{\circ}^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \|\nabla v\|_{\circ}, \\ \theta(\Delta z^n, v) &\leq c\tau\left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} \|\nabla u_t\|_{\circ}^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \|\nabla v\|_{\circ}. \end{aligned}$$

حال برای شرایط غیر خطی وقتی $v \in x$ حاصل را بدست می آوریم، داریم:

$$\begin{aligned} ((z^n \cdot \nabla)u(t_n), v) &\leq c\|z^n\|_{\circ} \|u(t_n)\|_{\circ} \|\nabla v\|_{\circ} \leq \\ c\tau\left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} \|u_t\|_{\circ}^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \|\nabla v\|_{\circ}, \\ ((e^n \cdot \nabla)u^n, v) &\leq c\|\nabla e^n\|_{\circ} \|u^n\|_{\circ} \|\nabla v\|_{\circ} \leq c\|\nabla e^n\|_{\circ} \|\nabla v\|_{\circ}, \\ ((u(t_n) \cdot \nabla)e^n, v) &\leq c\|u(t_n)\|_{\circ} \|\nabla e^n\|_{\circ} \|\nabla v\|_{\circ} \leq c\|\nabla e^n\|_{\circ} \|\nabla v\|_{\circ}, \\ ((u(t_{n+1}) \cdot \nabla)z^n, v) &\leq c\|u(t_n)\|_{\circ} \|z^n\|_{\circ} \|\nabla v\|_{\circ} \leq c\tau\left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} \|u_t\|_{\circ}^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \|\nabla v\|_{\circ}. \end{aligned}$$

بنابراین داریم:

$$\|r^{n+1}\|_0 \leq \frac{c}{\tau} \|e^{n+1} - e^n\|_0 + c\{\|\nabla e^{n+1}\|_0 + \|\nabla e^n\|_0 + \|\nabla e^{n+\frac{1}{2}}\|_0 +$$

$$\left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} t \|u_{tt}\|_0^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\tau \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|u_t\|_0^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\tau \int_{t_n}^{t_{n+1}} t \|\nabla u_t\|_0^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}\}$$

که بازه آن به صورت زیر است:

$$\|r^{n+1}\|_0^2 \leq \frac{c}{\tau^2} \|e^{n+1} - e^n\|_0^2 + c\{\|\nabla e^{n+1}\|_0^2 + \|\nabla e^n\|_0^2 + \|\nabla e^{n+\frac{1}{2}}\|_0^2 +$$

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} t \|u_{tt}\|_0^2 dt + \tau \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|u_t\|_0^2 dt + \tau \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|\nabla u_t\|_0^2 dt\} \leq c\tau$$

بنابراین رابطه (۴۲.۲) اثبات شد.

□

۲.۱.۲ روش گام کسری برای حل معادلات تراکم‌پذیر ناویه - استوکس

در بخش قبل روش گام کسری برای معادلات تراکم‌ناپذیر ناویه - استوکس معرفی شد. ایده اصلی استفاده از روش گام کسری به جای ماتریس منحصر به فرد، برخی از زیر ماتریس‌ها هستند که با استفاده از روش تجزیه بدست می‌آید. این زیر ماتریس‌ها به راحتی قابل حل هستند زیرا دارای مقادیر ویژه بهتر و در نتیجه منجر به همگرایی سریعتر عددی است. چون روش گام کسری برای معادلات تراکم‌ناپذیر ناویه - استوکس موفقیت آمیز بود، لذا این روش را برای معادلات تراکم‌پذیر ناویه - استوکس نیز به کار می‌بریم.

۳.۱.۲ معادلات و حل عددی آنها

در این بخش متغیرهای نرمال شده به صورت زیر را معرفی می‌کنیم:

$$x_i = \frac{x_i^*}{L_{ref}}, \quad u_i = \frac{u_i^*}{U_{ref}}, \quad t = \frac{t^*}{\left(\frac{L_{ref}}{U_{ref}}\right)}, \quad p = \frac{p^*}{P_{ref}}$$

$$p = \frac{p^*}{P_{ref} U_{ref}^{\gamma}}, \quad T = \frac{T^*}{T_{ref}}, \quad e = \frac{e^*}{U_{ref}^{\gamma}}, \quad \mu = \frac{\mu^*}{\mu_{ref}}$$

$$k = \frac{k^*}{K_{ref}}, \quad c_v = \frac{c_v^*}{\left(\frac{U_{ref}^{\gamma}}{T_{ref}}\right)}, \quad R = \frac{R^*}{\left(\frac{U_{ref}^{\gamma}}{T_{ref}}\right)}, \quad c_p = \frac{c_p^*}{\left(\frac{U_{ref}^{\gamma}}{T_{ref}}\right)}$$

عدد ماخ مرجع ما برابر است با

$$M_{ref} = \frac{U_{ref}}{\sqrt{\gamma R^* T_{ref}}}$$

همچنین جریان فرض شده برای یک گاز ایده آل توسط معادله $P = \rho RT$ معرفی شده و ضریب بدون بعد آن $\mu = T^s$ است که s فرض شده برابر 0.71 است. c_p و c_v هدایت حرارتی در نظر گرفته می‌شوند. لذا معادلات زیر را داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial (P u_j)}{\partial x_j} = 0 \quad (45.2)$$

$$\frac{\partial(Pu_i)}{\partial t} + \frac{\partial(Pu_i u_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial P}{\partial x_i} = \frac{\partial \delta_{ij}}{\partial x_j} \quad (۴۶.۲)$$

$$\frac{\partial(PE)}{\partial t} + \frac{\partial((PE + P)u_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial(u_i \delta_{ij})}{\partial x_j} - \frac{\partial q_j}{\partial x_j} \quad (۴۷.۲)$$

که در این معادلات داریم:

$$\begin{aligned} E &= C_v T + \frac{1}{\gamma} u_i u_j \\ \delta_{ij} &= \frac{\gamma \mu}{R_{er}} (S_{ij} - \frac{1}{\gamma} S_{kk} \delta_{ij}) \\ q_j &= - \frac{C_p \mu}{R_{ref} P_r} \frac{\partial T}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (۴۸.۲)$$

مقادیر گسسته توسط عملگر $[\cdot]_{I,J,K}^{n,m}$ تعریف می شود که در آن n نشان دهنده گام زمان فیزیکی و m گام شبه زمان است و I ، J و K به ترتیب جریان، نرمال و جهت مربوط است به عنوان مثال اگر $[Q]_{I,J,K}^{n,m}$ در نظر بگیریم یعنی مقدار تابع Q در محل I ، J و K و گشتاور n و m است.

عملگر گسسته $[\cdot]_{I,J,K}^{n,m}$ قوانین جمع و ضرب را حفظ می کنند یعنی

$$[\varphi + \psi]_{I,J,K}^{n,m} = \varphi_{I,J,K}^{n,m} + \psi_{I,J,K}^{n,m} = [\varphi]_{I,J,K}^{n,m} + [\psi]_{I,J,K}^{n,m} \quad (۴۹.۲)$$

$$[\varphi \cdot \psi]_{I,J,K}^{n,m} = \varphi_{I,J,K}^{n,m} \cdot \psi_{I,J,K}^{n,m} = [\varphi]_{I,J,K}^{n,m} \cdot [\psi]_{I,J,K}^{n,m} \quad (۵۰.۲)$$

که رابطه (۴۹.۲) نشان دهنده آن است که مجموع مقدار گسسته دو تابع برابر است با جمع مقدار گسسته آن ها هم چنین رابطه (۵۰.۲) نشان دهنده ضرب مقدار گسسته دو تابع برابر با مقادیر گسسته ضرب آن هاست.

معمولا در ساختار آشفته عددماخ پایین است و روش اختلاف مرکزی روش کاملا ضمنی و یا نیمه ضمنی در زمان هستند که استفاده از آن ها توصیه می شود.

برای سادگی مقدار گسسته $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ را به صورت $[\frac{\delta \varphi}{\delta t}]_{I,J,K}^{n,m}$ در نظر می گیریم که به صورت زیر معرفی می شود:

$$[\frac{\delta \varphi}{\delta t}]_{I,J,K}^{n,m} = \frac{\varphi_{I,J,K}^{n,m} - \varphi_{I,J,K}^{n-1,m} + \varphi_{I,J,K}^{n-2,m}}{2 \Delta t} \quad (۵۱.۲)$$

به همین ترتیب :

$$[\frac{\delta \varphi}{\delta x}]_{I,J,K}^{n,m} = \frac{\psi_{I+1,J,K}^{n,m} - \psi_{I-1,J,K}^{n,m}}{2 \Delta} \quad (۵۲.۲)$$

برای زمان احتیاج به تکرار یک عملگر داریم که آن را به صورت زیر معرفی می کنیم داریم:

$$[\delta_m \varphi]_{I,J,K}^{n,m} = [\varphi]_{I,J,K}^{n,m+1} - [\varphi]_{I,J,K}^{n,m} \quad (۵۳.۲)$$

که در آن $\delta_m \varphi$ نشان دهنده φ در جهت زمان است همچنین با توجه به رابطه (۵۰.۲) و تعاریف روابط (۵۱.۲) و (۵۳.۲) داریم:

$$\delta_m [\frac{\delta \varphi}{\delta t}]_{x,y,z}^{n,m} = [\frac{\delta}{\delta t} \delta_m \varphi]_{x,y,z}^{n,m} \quad (۵۴.۲)$$

$$[\delta_m \frac{\delta \varphi}{\delta x_i}]_{x,y,z}^{n,m} = [\frac{\delta}{\delta x_i} \delta_m \varphi]_{x,y,z}^{n,m} \quad (۵۵.۲)$$

$$[\psi \frac{\delta \varphi}{\delta x}]_{I,J,K}^{n,m} = [\psi]_{I,J,K}^{n,m} [\frac{\delta \varphi}{\delta x}]_{I,J,K}^{n,m} \quad (۵۶.۲)$$

بنابراین سیستم گسسته (۴۵.۲) - (۴۷.۲) برابر است با :

$$[\frac{\delta \rho}{\delta t}]_{I,J,K}^{n,m+1} + [\frac{\delta(\rho u_j)}{\delta x_j}]_{I,J,K}^{n,m+1} = 0 \quad (۵۷.۲)$$

$$[\frac{\delta(\rho u_i)}{\delta t}]_{I,J,K}^{n,m+1} + [\frac{\delta(\rho u_i u_j)}{\delta t}]_{I,J,K}^{n,m+1} + [\frac{\delta P}{\delta x_j}]_{I,J,K}^{n,m+1} = [\frac{\delta \sigma_{ij}}{\delta x_j}]_{I,J,K}^{n,m} \quad (۵۸.۲)$$

$$[\frac{\delta(\rho E)}{\delta t}]_{I,J,K}^{n,m+1} + [\frac{\delta((\rho E + P)u_j)}{\delta x_j}]_{I,J,K}^{n,m+1} = [\frac{\delta(u_i \sigma_{ij})}{\delta x_j}]_{I,J,K}^{n,m} - [\frac{\delta q_j}{\delta x_j}]_{I,J,K}^{n,m} \quad (۵۹.۲)$$

معادلات فوق با توجه به گام زمان فیزیکی n به طور کامل ضمنی هستند لذا از یک زمان تکرار برای حل متغیرها وقتی که $[\cdot]_{I,J,K}^{n,m+1}$ و $[\cdot]_{I,J,K}^{n,m}$ همگرا به $[\cdot]_{I,J,K}^{n,\infty}$ هستند استفاده می شود در این روش تفاوت بین $[\cdot]_{I,J,K}^{n,m+1}$ و $[\cdot]_{I,J,K}^{n,m}$ ناچیز است مگر برای m به اندازه کافی بزرگ و زمان تکرار که همگرا است. شبه زمان در لحظه ای که به آستانه توقف می رسیم تکرار خواهد شد همچنین برای ساده نوشتن $[\cdot]_{I,J,K}^{n,\infty}$ از $[\cdot]_{I,J,K}^n$ استفاده می کنیم. حال با استفاده از رابطه (۵۳.۲) و روابط (۵۷.۲) و (۵۹.۲) داریم:

$$[\delta_m \frac{\partial P}{\partial t}]_{I,J,K}^{n,m} + [\delta_m \frac{\delta(\rho u_j)}{\delta x_j}]_{I,J,K}^{n,m} = -[F_{\setminus}]_{I,J,K}^{n,m} \quad (۶۰.۲)$$

$$[\delta_m \frac{\delta(\rho u_i)}{\delta t}]_{I,J,K}^{n,m} + [\delta_m \frac{\delta(\rho u_i u_j)}{\delta x_j}]_{I,J,K}^{n,m} + [\delta_m \frac{\delta P}{\delta x_i}]_{I,J,K}^{n,m} = -[F_{i+1}]_{I,J,K}^{n,m} \quad (۶۱.۲)$$

$$[\delta_m \frac{\delta(\rho E)}{\delta t}]_{I,J,K}^{n,m} + [\delta_m \frac{\delta((\rho E + P)u_j)}{\delta x_j}]_{I,J,K}^{n,m} = -[F_{\Delta}]_{I,J,K}^{n,m} \quad (۶۲.۲)$$

برای $i, j = 1, 2, 3$.

همچنین ؛

$$-[F_{\setminus}]_{I,J,K}^{n,m} = -[\frac{\delta P}{\delta t}]_{I,J,K}^{n,m} - [\frac{\delta(\rho u_j)}{\delta x_j}]_{I,J,K}^{n,m} \quad (۶۳.۲)$$

$$-[F_{i+1}]_{I,J,K}^{n,m} = -[\frac{\delta \rho u_i}{\delta t}]_{I,J,K}^{n,m} - [\frac{\delta(\rho u_i u_j)}{\delta x_j}]_{I,J,K}^{n,m} - [\frac{\delta P}{\delta x_i}]_{I,J,K}^{n,m} + [\frac{\delta \sigma_{ij}}{\delta x_j}]_{I,J,K}^{n,m} \quad (۶۴.۲)$$

$$-[F_{\Delta}]_{I,J,K}^{n,m} = -[\frac{\delta(\rho E)}{\delta t}]_{I,J,K}^{n,m} - [\frac{\delta((\rho E + P)u_j)}{\delta x_j}]_{I,J,K}^{n,m} + [\frac{\delta(u_i \sigma_{ij})}{\delta x_j}]_{I,J,K}^{n,m} - [\frac{\delta \sigma_{ij}}{\delta x_j}]_{I,J,K}^{n,m} - [\frac{\delta q_j}{\delta x_j}]_{I,J,K}^{n,m} \quad (۶۵.۲)$$

حال قرار می دهیم :

$$Q_1 = \frac{\delta}{\delta t} \delta_m \rho + \frac{\delta}{\delta x_j} \delta_m(\rho u_j) \quad (۲۲a/۳)$$

$$Q_2 = \frac{\delta}{\delta t} \delta_m(\rho u_i) + \frac{\delta}{\delta x_j} (\rho u_i u_j) + \frac{\delta}{\delta x_i} \delta_m P \quad (۲۲b, ۳)$$

$$Q_5 = \frac{\delta}{\delta t} \delta_m(\rho E) + \frac{\delta}{\delta x_j} \delta_m((\rho E + P)u_j) \quad (۲۲c/۳)$$

لذا برای رابطه‌های (۶۰.۲) - (۶۲.۲) داریم:

$$[Q]_{I,J,K}^{n,m} = -[F]_{I,J,K}^{n,m} \quad (۶۶.۲)$$

حل عددی

بهترین روش و شناخته شده ترین روش برای معادلات غیر خطی، روش شبه نیوتن است که همگرایی کلی را نشان می دهد که قادر به محاسبه معادلات ناویه- استوکس پیچیده با حدس اولیه باشیم توجه کنید $\delta_m v$ بوسیله $[\delta_m P, \delta_m u_i, \delta_m u_\gamma, \delta_m u_\gamma, \delta_m T]^T$ تعریف شده و بردار $Q = J \delta_m$ نشان داده شده است که J ماتریس ژاکوبین است.

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\lambda}{RT} \frac{\bar{D}}{Dt} & \frac{P}{RT} \frac{\delta}{\delta x_1} & \frac{P}{RT} \frac{\delta}{\delta x_\gamma} & \frac{P}{RT} \frac{\delta}{\delta x_\gamma} & \frac{-P}{RT^\gamma} \frac{\bar{D}}{Dt} \\ \frac{U_\lambda}{RT} \frac{\bar{D}}{Dt} + \frac{\delta}{\delta x_1} & \frac{P}{RT} (U_\lambda \frac{\delta}{\delta x_1} + \frac{\bar{D}}{Dt}) & \frac{P U_\lambda}{RT} \frac{\delta}{\delta x_\gamma} & \frac{P U_\lambda}{RT} \frac{\delta}{\delta x_\gamma} & \frac{-P U_\lambda}{RT^\gamma} \frac{\bar{D}}{Dt} \\ \frac{U_\gamma}{RT} \frac{\bar{D}}{Dt} + \frac{\delta}{\delta x_\gamma} & \frac{P U_\gamma}{RT} \frac{\delta}{\delta x_1} & \frac{P}{RT} (U_\gamma \frac{\delta}{\delta x_\gamma} + \frac{\bar{D}}{Dt}) & \frac{P U_\gamma}{RT} \frac{\delta}{\delta x_\gamma} & \frac{-P U_\gamma}{RT^\gamma} \frac{\bar{D}}{Dt} \\ \frac{U_\gamma}{RT} \frac{\bar{D}}{Dt} + \frac{\delta}{\delta x_\gamma} & \frac{P U_\gamma}{RT} \frac{\delta}{\delta x_1} & \frac{P U_\gamma}{RT} \frac{\delta}{\delta x_\gamma} & \frac{P}{RT} (U_\gamma \frac{\delta}{\delta x_\gamma} + \frac{\bar{D}}{Dt}) & \frac{-P U_\gamma}{RT^\gamma} \frac{\bar{D}}{Dt} \\ \frac{H}{RT} \frac{\bar{D}}{Dt} - \frac{\partial}{\partial t} & \frac{P}{RT} (H \frac{\delta}{\delta x_1} + U_\lambda \frac{\bar{D}}{Dt}) & \frac{P}{RT} (H \frac{\delta}{\delta x_\gamma} + U_\gamma \frac{\bar{D}}{Dt}) & \frac{P}{RT} (H \frac{\delta}{\delta x_\gamma} + U_\gamma \frac{\bar{D}}{Dt}) & \frac{-P(H-C_p T)}{RT^\gamma} \frac{\bar{D}}{Dt} \end{bmatrix}$$

که در آن؛

$$H = C_p T + \frac{1}{\gamma} (U_\lambda^2 + U_\gamma^2 + U_\gamma^2) = E + \frac{P}{\rho}$$

$$R = \frac{\gamma}{m_\gamma}$$

$$\frac{\bar{D}}{Dt} = \frac{\delta}{\delta t} + U_\lambda \frac{\delta}{\delta x_i}$$

تعریف شده است هم چنین شرایط ضمنی از نظر مراحل زمانی، فیزیکی است اما شرایط بهتر و بهبود در تکرار زمان است این شرایط را در دو مرحله بهبود می بخشد قرار دارد مرحله اول نگه داشتن شرایط وابستگی در ماتریس ژاکوبین است که تجزیه و تحلیل مقادیر ویژه مساله است. مرحله دوم برای شبیه سازی تلاطم قرار دارد که معمولا با یک عدد ریندلوز بزرگ از نظر وابستگی در پایداری عددی و در ارتباط با تکرار شبه زمان ناچیز است. قبلا اگر تکرار زمان همگرا می شد خطاها توسط مراحل قبلی قابل پوشش بود که با استفاده از روش شبه نیوتن، ماتریس ژاکوبین و توسط یک پیش شرط تنظیم شده است که به شرح زیر است.

پیش شرطی سازی

هنگامی که از یک روش شبه نیوتن استفاده می کنیم معادلات را می توان به فرم زیر ساده کرد

$$[J \delta_m v]_{I,J,K}^{n,m} = -[F]_{I,J,K}^{n,m} \quad (۶۷.۲)$$

واضح است که ماتریس J (ژاکوبین) را می توان به فرم زیر تجزیه کرد:

$$J = \Gamma \frac{\gamma}{\Delta t} + A \frac{\delta}{\delta x_1} + B \frac{\delta}{\delta x_\gamma} + C \frac{\delta}{\delta x_\gamma}$$

ماتریس‌های A و B و C قطری غالب نیستند و برای تسریع همگرایی بهتر است که مقادیر ویژه ماتریس J را با استفاده از ضرب کردن از سمت چپ در P و ضرب کردن از سمت راست در M بدست آورد به طوری که خاصیت مورب و مثبت بودن آن حفظ شود لذا برای حل داریم:

$$[P]_{I,J,K}^{n,m} [JMM^{-1} \delta_m v]_{I,J,K}^{n,m} = -[P]_{I,J,K}^{n,m} [F]_{I,J,K}^{n,m} \quad (۶۸.۲)$$

و با استفاده از معادله (۵۰.۲) نتیجه می‌شود که

$$[PJMM^{-1} \delta_m v]_{I,J,K}^{n,m} = -[PF]_{I,J,K}^{n,m} \quad (۶۹.۲)$$

ضریب P در سمت چپ یک ماتریس پیش شرط است در حالی که ضریب M در سمت راست یک عامل فاکتور سازی است.

$$P = \begin{bmatrix} \frac{q}{C_v} & \frac{-U_1}{C_v} & \frac{-U_2}{C_v} & \frac{-U_3}{C_v} & \frac{1}{C_v} \\ \frac{-RTu_1}{P} & \frac{RT}{P} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-RTu_2}{P} & 0 & \frac{RT}{P} & 0 & 0 \\ \frac{-RTu_3}{P} & 0 & 0 & \frac{RT}{P} & 0 \\ \frac{RT}{P} \left(\frac{q}{C_v} - T \right) & \frac{-RTu_1}{PC_v} & \frac{-RTu_2}{PC_v} & \frac{-RTu_3}{PC_v} & \frac{RT}{PC_v} \end{bmatrix} \quad (۷۰.۲)$$

که $q = \frac{(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)}{3}$ است.

در نتیجه با توجه به ضریب سمت چپ در معادله (۶۷.۲) و با استفاده از ماتریس پیش شرط بالا داریم:

$$PJ\delta_m V = \begin{bmatrix} \frac{1}{R} \frac{\bar{D}}{Dt} & b \frac{\delta}{\delta x_1} & b \frac{\delta}{\delta x_2} & b \frac{\delta}{\delta x_3} & 0 \\ e \frac{\delta}{\delta x_1} & \frac{\bar{D}}{Dt} & 0 & 0 & 0 \\ e \frac{\delta}{\delta x_2} & 0 & \frac{\bar{D}}{Dt} & 0 & 0 \\ e \frac{\delta}{\delta x_3} & 0 & 0 & \frac{\bar{D}}{Dt} & 0 \\ 0 & \frac{TR}{C_v} \frac{\delta}{\delta x_1} & \frac{TR}{C_v} \frac{\delta}{\delta x_2} & \frac{TR}{C_v} \frac{\delta}{\delta x_3} & \frac{\bar{D}}{Dt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_m P \\ \delta_m U_1 \\ \delta_m U_2 \\ \delta_m U_3 \\ \delta_m T \end{bmatrix} = -PF \quad (۷۱.۲)$$

که :

$$c = \frac{TR}{C_v}, \quad e = \frac{TR}{P}, \quad b = \frac{P}{R C_v} \rho$$

این ماتریس پیش شرط دو مزیت دارد در مرحله اول اگر قطر بزرگ را انتقال دهیم کوچکی عدد ماخ مهم نیست و در مرحله دوم روش پیش شرط قادر به جدا کردن واریانس دما و واریانس سرعت در ماتریس ژاکوبین را دارد.

مقادیر ویژه ماتریس ژاکوبین بدون پیش شرط به صورت $U_i \pm C$ و $C = \sqrt{\gamma RT}$ است اما مقادیر ویژه U_i با پیش شرط تبدیل به $\frac{[U_i(L+R) \pm \sqrt{U_i^2(R-L)^2 + \gamma RC^2}]}{(\gamma R)}$ می‌شود بدیهی است که این مقادیر ویژه نزدیک به ۱ است اما ممکن است بعضی از آنها صفر یا منفی شود که چنین مقادیر ویژه غیر مثبت معمولاً با مشکل عددی برای حل روش شبه نیوتن است حتی ممکن است باعث اختلاف در روش تکرار شونده شود بنابراین احتیاج به یک عامل فاکتور مناسب هستیم.

تجزیه گام کسری

ماتریس M^{-1} را در معادله (۶۹.۲) به فرم زیر است.

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R} \frac{\bar{D}}{Dt} - b \frac{\delta}{\delta x_i} \left(\frac{\bar{D}}{Dt}\right)^{-1} e \frac{\delta}{\delta x_i} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \left(\frac{\bar{D}}{Dt}\right)^{-1} e \frac{\delta}{\delta x_1} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \left(\frac{\bar{D}}{Dt}\right)^{-1} e \frac{\delta}{\delta x_2} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \left(\frac{\bar{D}}{Dt}\right)^{-1} e \frac{\delta}{\delta x_i} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\left(\frac{\bar{D}}{Dt}\right)^{-1} c \frac{\delta}{\delta x_i} \left(\frac{\bar{D}}{Dt}\right)^{-1} e \frac{\delta}{\delta x_i} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (72.2)$$

ماتریس فوق را در رابطه (۶۹.۲) جایگزین می‌کنیم در نتیجه با توجه به معادله (۷۱.۲) داریم:

$$\begin{bmatrix} 1 & b \frac{\delta}{\delta x_1} & b \frac{\delta}{\delta x_2} & b \frac{\delta}{\delta x_3} & 0 \\ 0 & \frac{\bar{D}}{Dt} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\bar{D}}{Dt} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\bar{D}}{Dt} & 0 \\ 0 & c \frac{\delta}{\delta x_1} & c \frac{\delta}{\delta x_2} & c \frac{\delta}{\delta x_3} & \frac{\bar{D}}{Dt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{R} \frac{\bar{D}}{Dt} - b \frac{\delta}{\delta x_i} \left(\frac{\bar{D}}{Dt}\right)^{-1} e \frac{\delta}{\delta x_i} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \left(\frac{\bar{D}}{Dt}\right)^{-1} e \frac{\delta}{\delta x_1} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \left(\frac{\bar{D}}{Dt}\right)^{-1} e \frac{\delta}{\delta x_2} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \left(\frac{\bar{D}}{Dt}\right)^{-1} e \frac{\delta}{\delta x_3} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\left(\frac{\bar{D}}{Dt}\right)^{-1} c \frac{\delta}{\delta x_i} \left(\frac{\bar{D}}{Dt}\right)^{-1} e \frac{\delta}{\delta x_i} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \delta_m V_{I,J,K}^{n,m} = [PF]_{I,J,K}^{n,m} \quad (73.2)$$

که در رابطه بالا $b = \frac{P}{R} + \frac{P}{C_v}$ ، $e = \frac{TR}{P}$ و $C = \frac{TR}{C_v}$ است توجه داشته باشید که ماتریس دوم رابطه (۷۳.۲) M^{-1} است. این عامل راهی برای تجزیه $\delta_m P$ ، $\delta_m U_i$ و $\delta_m T$ را فراهم می‌کند و با انتخاب زمان مناسب و گام Δt مقادیر ویژه PJM و M^{-1} همگرا به مثبت یک می‌توان در نظر گرفت از این رو همگرایی روش‌های تکراری جواب خواهد بود.

روش عددی

در این بخش به دنبال این ایده هستیم که $\left(\frac{\bar{D}}{Dt}\right)^{-1}$ را با Δt جایگزین کنیم بنابراین داریم:

$$\begin{bmatrix} 1 & b \frac{\delta}{\delta x_1} & b \frac{\delta}{\delta x_2} & b \frac{\delta}{\delta x_3} & 0 \\ 0 & \frac{\bar{D}}{Dt} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\bar{D}}{Dt} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\bar{D}}{Dt} & 0 \\ 0 & c \frac{\delta}{\delta x_1} & c \frac{\delta}{\delta x_2} & c \frac{\delta}{\delta x_3} & \frac{\bar{D}}{Dt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{R} \frac{\bar{D}}{Dt} - \Delta t b \frac{\delta}{\delta x_i} e \frac{\delta}{\delta x_i} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Delta t e \frac{\delta}{\delta x_1} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \Delta t e \frac{\delta}{\delta x_2} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \Delta t e \frac{\delta}{\delta x_3} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -(\Delta t)^2 c \frac{\delta}{\delta x_i} e \frac{\delta}{\delta x_i} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \delta_m V_{I,J,K}^{n,m} = [PF]_{I,J,K}^{n,m} \quad (74.2)$$

بنابراین به طور خلاصه معادلات حل شده به صورت زیر هستند:

$$\begin{bmatrix} 1 & b \frac{\delta}{\delta x_1} & b \frac{\delta}{\delta x_2} & b \frac{\delta}{\delta x_3} & 0 \\ 0 & \frac{\bar{D}}{Dt} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\bar{D}}{Dt} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\bar{D}}{Dt} & 0 \\ 0 & c \frac{\delta}{\delta x_1} & c \frac{\delta}{\delta x_2} & c \frac{\delta}{\delta x_3} & \frac{\bar{D}}{Dt} \end{bmatrix} \delta_m W_i]_{I,J,K}^{n,m} = [PF]_{I,J,K}^{n,m} \quad (75.2)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R} \frac{\bar{D}}{Dt} - \Delta t b \frac{\delta}{\delta x_i} e \frac{\delta}{\delta x_i} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Delta t e \frac{\delta}{\delta x_1} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \Delta t e \frac{\delta}{\delta x_2} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \Delta t e \frac{\delta}{\delta x_3} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -(\Delta t)^2 c \frac{\delta}{\delta x_i} e \frac{\delta}{\delta x_i} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \delta_m V]_{I,J,K}^{n,m} = [\delta_m W_i]_{I,J,K}^{n,m} \quad (76.2)$$

همچنین تجزیه در اصل یک روش گام کسری است که روش‌های عددی مربوط به آن به شرح زیر است:

الگوریتم ۱ (روش گام کسری)

۱- مقدار اولیه $[P]_{I,J,K}^{-1}$ ، $[U_i]_{I,J,K}^{-1}$ ، $[T]_{I,J,K}^{-1}$ ، $m = 1$ و $n = 1$ را قرار دهید.

$$[U_i]_{I,J,K}^{n,m} = [U_i]_{I,J,K}^{\circ} = [U_i]_{I,J,K}^{-1}$$

$$[P]_{I,J,K}^{n,m} = [P]_{I,J,K}^{\circ} = [P]_{I,J,K}^{-1}$$

$$[T]_{I,J,K}^{n,m} = [T]_{I,J,K}^{\circ} = [T]_{I,J,K}^{-1}$$

که $i = 1, 2, 3$ است.

۲- معادله (۲۱، ۳) - (۱۹، ۳) را برای $[F]_{I,J,K}^{n,m}$ محاسبه کرده سپس با استفاده از رابطه (۷۰.۲) داریم:

$$[PF]_{I,J,K}^{n,m} = [P]_{I,J,K} [F]_{I,J,K}^{n,m}$$

که در این قسمت با استفاده از رابطه (۵۰.۲) و با توجه به $[F]_{I,J,K}^{n,m}$ تعیین می‌کنیم که به مرحله بعدی گام زمان برویم یا خیر

۳- با حل معادله (۷۷.۳)، $\delta_m W_2$ ، $\delta_m W_3$ و $\delta_m W_4$ را تعیین می‌کنیم.

$$\begin{bmatrix} \frac{\bar{D}}{Dt} & \circ & \circ \\ \circ & \frac{\bar{D}}{Dt} & \circ \\ \circ & \circ & \frac{\bar{D}}{Dt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_m w_2 \\ \delta_m w_3 \\ \delta_m w_4 \end{bmatrix}_{I,J,K}^{n,m} = \begin{bmatrix} -PF_2 \\ -PF_3 \\ -PF_4 \end{bmatrix}_{I,J,K}^{n,m} \quad (77.2)$$

که $\frac{\bar{D}}{Dt} = \frac{\delta}{\delta t} + U \frac{\delta}{\delta x_i}$ است.

۴- بوسیله رابطه زیر $\delta_m w_1$ و $\delta_m w_2$ را محاسبه می‌کنیم.

$$[\delta_m w_1]_{I,J,K}^{n,m} = [-PF - b \frac{\delta}{\delta x_i} \delta_m w_i]_{I,J,K}^{n,m} \quad (78.2)$$

$$[\frac{\bar{D}}{Dt} \delta_m w_5]_{I,J,K}^{n,m} = [\Delta t (-PF_5 - c \frac{\delta}{\delta x_i} \delta_m w_i)]_{I,J,K}^{n,m} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (79.2)$$

۵- بوسیله حل معادله زیر معادله $\delta_m P$ را تعیین می‌کنیم.

$$[(\frac{\bar{D}}{Dt} - b \Delta t \frac{\delta}{\delta x_i} e \frac{\delta}{\delta x_i}) \delta_m P]_{I,J,K}^{n,m} = [\delta_m w_1]_{I,J,K}^{n,m} \quad (80.2)$$

۶- محاسبه واریانس سرعت $\delta_m u_i$ توسط رابطه زیر

$$[\delta_m u_i]_{I,J,K}^{n,m} = [\delta_m w_{i+1} - \Delta t e \frac{\delta}{\delta x_i} \delta_m P]_{I,J,K}^{n,m} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (81.2)$$

۷- بوسیله رابطه زیر واریانس دما $\delta_m T$ را محاسبه می‌کنیم.

$$[\delta_m T]_{I,J,K}^{n,m} = [\delta_m w_5 + \Delta t^2 c \frac{\delta}{\delta x_i} e \frac{\delta}{\delta x_i} \delta_m P]_{I,J,K}^{n,m} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (82.2)$$

۸- u_i و P جدید و T با $u_i + \delta u_i$ ، $P + \delta P$ و $T + \delta T$ مربوط است لذا قرار می‌دهیم $m = m + 1$ و مرحله دوم بر می‌گردیم.

در این هشت مرحله ، مراحل ۳ ، ۴ و ۵ نیاز به روش‌های مناسب تکرار شونده دارند اما بقیه مراحل تنها با یک گام می‌توان حل کرد برای مراحل ۳ و ۴ از مشتقات گسسته $\frac{\bar{D}}{Dt}$ استفاده می‌کنیم که یک گام زمان خیلی کوچک Δt قطری مورب می‌تواند باشد که اصل همگرایی را تضمین می‌کند همچنین برای حل رابطه‌های (۷۶.۲) و (۷۹.۲) از تجزیه LU استفاده می‌کنیم همچنین با توجه به اینکه تعیین ماتریس پیش شرط P از $\frac{R^T T_0}{P^T C_v}$ بدست می‌آید که برای کران بالا و پایین جریان محدود است و به ماتریس $\vec{P}\vec{F}$ همگرا می‌شود در نتیجه معادل همگرایی \vec{F} است که می‌توان از \vec{F} و $\vec{P}\vec{F}$ برای توقف روش تکرار در مرحله دوم استفاده کنیم.

مشخصه شرایط مرزی

در بخش قبل به توصیف یک روش جدید کسری برای حل معادلات ناویه - استوکس تراکم پذیر پرداختیم. بهبود مناسب شرایط مرزی با این روش عددی مرتبط است در روش کنترل ناپایداری عددی از

بین بردن بازتاب موج ساختگی در مرز تاثیر قابل ملاحظه ای در محاسبات دارد اما بهبود مرز مشخصه تا زمانی تغییر داده می شوند که به عنوان پیش شرط اعمال شود و دلیل آن تغییر مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس پیش شرط است مرز ما در واقع $x_1 = L$ می باشد که با ضرب معادلات (۴۷.۲) و (۴۵.۲) و از ماتریس (۷۰.۲) در نظر می گیریم داریم:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + A \frac{\partial w}{\partial x_1} + B \frac{\partial w}{\partial x_2} + C \frac{\partial w}{\partial x_3} - Vis = 0$$

که در آن Vis مدت وابستگی (چسبندگی) است و

$$w = [P, U_1, U - 2, U_3, T]^T$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{U_1}{R} & \frac{P}{R} + \frac{P}{C_v} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{TR}{P} & U_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & U_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & U_1 & 0 \\ 0 & \frac{TR}{C_v} & 0 & 0 & U_1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{U_2}{R} & 0 & \frac{P}{R} + \frac{P}{C_v} & 0 & 0 \\ 0 & U_2 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{TR}{P} & 0 & U_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & U_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{TR}{C_v} & 0 & U_2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \frac{U_3}{R} & 0 & 0 & \frac{P}{R} + \frac{P}{C_v} & 0 \\ 0 & U_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & U_3 & 0 & 0 \\ \frac{TR}{P} & 0 & 0 & U_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{TR}{C_v} & U_3 \end{bmatrix}$$

همچنین مقادیر ویژه ماتریس A به صورت زیر است:

$$\lambda_1 = \frac{[U_1(1+R) - \sqrt{U_1^2(R-1)^2 + 4R^2T(1 + \frac{R}{C_v})}]}{2R}$$

$$\lambda_2 = \frac{[U_1(1+R) + \sqrt{U_1^2(R-1)^2 + 4R^2T(1 + \frac{R}{C_v})}]}{2R}$$

$$\lambda_3 = U_1, \quad \lambda_4 = U_1, \quad \lambda_5 = U_1$$

همچنین ماتریس قطری Λ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\Lambda = \text{diag}[\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3 \quad \lambda_4 \quad \lambda_5]$$

که A را می توان به صورت $A = Q\Lambda R$ نوشت به طوری که

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ q_{21} & q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = Q^{-1} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & 0 & 0 & 0 \\ p_{21} & p_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ p_{51} & p_{52} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

همچنین نشان می‌دهیم $\Lambda R \frac{\partial w}{\partial x_1}$ بوسیله L_i نتیجه می‌شود لذا داریم:

$$L_1 = \lambda_1 (P_{11} \frac{\partial P}{\partial x_1} + P_{12} \frac{\partial U_1}{\partial x_1}) \quad (۸۳.۲)$$

$$L_2 = \lambda_2 (P_{21} \frac{\partial P}{\partial x_1} + P_{22} \frac{\partial U_1}{\partial x_1}) \quad (۸۴.۲)$$

$$L_3 = \lambda_3 \frac{\partial U_2}{\partial x_1} \quad (۸۵.۲)$$

$$L_4 = \lambda_4 \frac{\partial U_3}{\partial x_1} \quad (۸۶.۲)$$

$$L_5 = \lambda_5 (P_{51} \frac{\partial P}{\partial x_1} + P_{52} \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial T}{\partial x_1}) \quad (۸۷.۲)$$

L_i ویژگی دامنه امواج مربوط به سرعت مشخصه λ_i است که بر خلاف سیستم های مشخصه قدیمی امواج انتشار مربوط به L_1 و L_2 ، امواج صوتی خواهد بود لذا با استفاده از L_i داریم:

$$A \frac{\partial w}{\partial x_1} = \begin{bmatrix} q_{11} L_1 + q_{12} L_2 \\ q_{21} L_1 + q_{22} L_2 \\ L_3 \\ L_4 \\ L_3 + L_4 + L_5 \end{bmatrix}$$

که این رابطه مشخص می‌کند که امواج بالا با مقادیر ویژه منفی است و امواج انتشار یافته پایین با مقادیر ویژه مثبت است که این به منظور کنترل موج‌های بازتاب و رسیدن به ثبات عددی است حال بدون از دست دادن کلیت مساله فرض می‌کنیم $\lambda_1 \leq 0$ و $\lambda_2 \geq 0$ بنابراین

$$L_1 = \lambda_1 (P_{11} \frac{P_{I+1,J,K} - P_{I,J,K}}{\Delta x_1} + P_{12} \frac{u_{I+1,J,K} - U_{I,J,K}}{\Delta x_1})$$

$$L_2 = \lambda_2 (P_{21} \frac{P_{I,J,K} - P_{I-1,J,K}}{\Delta x_1} + P_{22} \frac{u_{I,J,K} - U_{I-1,J,K}}{\Delta x_1})$$

خروجی شرایط مرزی برای جریان ما فوق صوت

در این بخش خروجی شرط مرزی برای جریان ما فوق صوت مورد بحث است، واضح است که $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ مثبت هستند از این رو L_2, L_3, L_4, L_5 با اختلاف محاسبه می‌شود اما L_1 باید مشخص شود که پوین سوت پیشنهاد استفاده از رابطه زیر را برای L_1 می‌دهد.

$$L_1 = \sigma (1 - m^2) (P - P_\infty) \frac{C}{L}$$

در این رابطه M حداکثر عدد ماخ در جریان، C سرعت آکوستیک، L اندازه دامنه مشخصه و σ ثابت عددی است واضح است که انتقال اطلاعات عددی در این روش با موج‌های صوتی انجام نشده است اما توسط یک موج بالا با مقادیر ویژه λ_1 به طوریکه $|\lambda_1| < |U_1 - C|$ انتشار می‌یابد لذا به طور مستقیم

در این روش با استفاده از L_1 ارزیابی شده توسط پوین سوت سرعت انتشار امواج بالا بدست خواهد آمد. همچنین یک انتخاب بهینه برای جریان مافوق صوت $1 < R = \frac{\gamma}{M_\infty}$ است بنابراین

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{[U_1(1+R) - \sqrt{U_1^2(R-1)^2 + 4R^2T(1 + \frac{R}{C_v})}]}{2R} \\ &= \frac{\frac{U_1}{R} - T(1 + \frac{R}{C_v})}{U_1(\frac{1+R}{2R}) + \sqrt{U_1^2(\frac{R-1}{2R})^2 + T(1 + \frac{R}{C_v})}} \\ &= -\frac{T(1 + \frac{R}{C_v})}{U_1^2(\frac{R-1}{2R})^2} \left(\frac{1 - \frac{U_1^2 C_v}{TR(C_v+R)}}{1 + \sqrt{\frac{1+T(1+\frac{R}{C_v})}{(U_1(\frac{R-1}{2R})^2)}}} \right) \\ &= -2\alpha \frac{T(C_v + R)R}{U_1(1+R)C_v} \end{aligned}$$

که $\alpha \in (0, 1)$ بنابراین داریم:

$$L_1 = \frac{\sigma(1 - M^2)(P - P_\infty)}{L} \times \frac{T_\infty(C_v + R)R}{U_1^\infty(1+R)C_v}$$

که U_1^∞ سرعت جریان آزاد و T^∞ دمای جریان آزاد است و در این حالت σ مقدار 0.25 پیشنهاد می‌کنیم.

۴.۱.۲ روشهای عددی

جریان برای عدد ماخ پایین که در آن تراکم و یا اثرات تراکم متغیر می‌باشد قابل حذف نیست که باید معادلات ناویه - استوکس تراکم‌پذیر به جای معادلات ناویه - استوکس تراکم ناپذیر حل شود که در این صورت اثر تراکم‌پذیری متغیر اغلب با انتقال حرارت قوی همراه است هم چنین برای عدد ماخ پایین لایه مرزی آشفته، اثرات تراکم‌پذیری متغیر به جای اثر تراکم‌پذیری که در جریان‌های تغییر فشار کوچک اما انتقال حرارت قوی است که اتصال بین چگالی و دما باید به خوبی بهبود یابد، مهم است.

معمولا عدد ماخ پایین برای جریانهای تراکم‌ناپذیر هستند با این حال هنگامی که امواج صوتی از یک دامنه بزرگ با عدد پایین باشد جریان تراکم‌پذیر است بنابراین در این روش یک معادله یک بعدی اویلر برای امواج صوتی دامنه بزرگ عدد ماخ 0.2 است برای لایه مرزی آشفته عدد ماخ 0.6 و لایه مرزی آشفته با دیوار گرم عدد ماخ 0.6 است که با استفاده از این روش مستقیم محاسبه می‌شود همچنین برای هر دو لایه مرزی آشفته شیب آزاد فشار جریان صفر است و با توجه به دامنه امواج صوتی بزرگ، اثرات تراکم‌پذیری غالب است.

معادله یک بعدی اوپلر

همان طور که می‌دانیم سرعت صوت قابل تراکم برای عددماخ پایین، بسیار بزرگتر از سرعت u است که در این صورت همگرایی سخت است لذا در این روش برای عدد ماخ پایین معادله یک بعدی اوپلر داریم:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + U \frac{\partial P}{\partial x} + \rho \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (۸۸.۲)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U^2)}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial x} \quad (۸۹.۲)$$

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial((\rho E + P)U)}{\partial x} = 0 \quad (۹۰.۲)$$

M عدد ماخ 0.2 انتخاب می‌شود، واضح است که رابطه (۸۸.۲)-(۹۰.۲) یک سیستم هذلولی شکل است سازه‌های ناپایدار پایین یا بالا و انتقال از طریق همرفتی و یا امواج صوتی است که اساس رابطه (۸۸.۲)-(۹۰.۲) ایده خطوط مشخصه است که نتایج در معادلات زیر بدست می‌آید.

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (U - C) \frac{\partial P}{\partial x} = \rho C \frac{\partial U}{\partial t} + \rho C(U - C) \frac{\partial U}{\partial x} \quad (۹۱.۲)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + U \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{1}{C^2} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{U}{C^2} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (۹۲.۲)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (U + C) \frac{\partial P}{\partial x} = -\rho C \frac{\partial U}{\partial t} - \rho(U + C) \frac{\partial U}{\partial x} \quad (۹۳.۲)$$

که C سرعت صوت است و توسط $C = \sqrt{\gamma RT}$ بدست می‌آید. سرعت اولیه و چگالی 1.0 و بعد فشار اولیه $P(x) = p_0$ است که $P_0 = \frac{1}{\gamma M_0^2}$ است در $x = 0$ سرعت، در زمان حدودا یک است که توسط مقدار سینوسی $U(0) = 1.0 + 0.2 \sin t$ دقیق‌تر مشخص می‌شود در حالی که چگالی ثابت است همچنین در $x = 8.0$ فشار نیز بوسیله تابع سینوسی زیر مشخص شده است:

$$P(8.0) = P_0 + 0.8 P_0 \sin t$$

که دامنه عددی بین $8.0 - 0$ است. دامنه نوسان فشار در $x = 8.0$ با دامنه نوسان سرعت در $x = 0$ برابر با $16.0 V = \frac{\gamma M_0^2}{0.8}$ است بنابراین امواج صوتی بسیار سریعتر از امواج همرفتی است که چنین دامنه موج‌های بزرگ معمولا با بی ثباتی عددی همراه است که نتایج آن کندی همگرایی عددی است. به طور خلاصه روش گفته شده برای حل معادله فشار هلمهولتز است که برای جریان دامنه امواج صوتی با عدد ماخ پایین، بزرگ باشد علاوه بر این همگرایی آن نسبت به روش مبتنی بر فشار سریعتر است که دلیل آن استفاده از روش مبتنی بر چگالی است که یک توزیع بهتر از مقادیر ویژه را نسبت به روش مبتنی بر فشار مشخص می‌کند.

لایه مرزی آشفته

در این جریان عدد ماخ 0.06 و همگرایی بسیار ضعیف است در شکل (۱،۳) انرژی جنبشی آشفته است و انرژی متلاطم اطلاعات دقیق را نشان می دهد و معادله انرژی جنبشی مغشوش به صورت زیر است :

$$\frac{\partial K}{\partial t} + U_k \frac{\partial K}{\partial x_k} = P_{ii} + T_{ii} + D_{ii} + \Pi_{ii} - \varepsilon_{ii} \quad (50, 3)$$

در این معادله $K = \frac{\langle U_i U_i \rangle}{2}$ و P_{ii} تانسور تولید حرکت ، T_{ii} تانسور حمل و نقل آشفته ، D_{ii} تانسور انتشار چسبناک و Π_{ii} تانسور گرادیان فشار سرعت و ε_{ii} تانسور انتشار آشفته است که داریم :

$$\begin{aligned} P_{ii} &= -2 \langle U_i U_k \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \\ \varepsilon_{ii} &= 2V \langle \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \rangle \\ T_{ii} &= - \langle \frac{\partial U_i U_i U_k}{\partial x_k} \rangle \\ \Pi_{ii} &= - \frac{2}{\rho} \langle U_i \frac{\partial P}{\partial x_i} \rangle \\ D_{ii} &= V \Delta \langle U_i U_i \rangle \end{aligned}$$

لایه مرزی آشفته با انتقال حرارت

در این مورد لایه مرزی آشفته در حال حرکت با یک دیوار گرم شبیه سازی شده ، درجه حرارت دیوار T_{wall} در $1/4 T_e$ ثابت شد که T_e دمای محیط است عدد ماخ 0.06 محاسبه شده است و سرعت اصلاح شده به صورت زیر محاسبه می شود:

$$U_c = \sqrt{B} [\sin^{-1}(\frac{A+U}{D}) - \sin^{-1}(\frac{A}{D})] \quad (51, 3)$$

که در این رابطه ؛

$$A = \frac{q_w}{\tau_w} \quad B = \frac{2C_{p\infty} T_w}{Pr_t} \quad D = \sqrt{A^2 + B}$$

اندیس w نشانگر دیوار و اندیس ∞ برای جریان آزاد است .

در شکل (۲،۳) تغییر سرعت U_c و U^+ مقایسه می شود که نتایج تجربی، لایه مرزی آشفته تراکم ناپذیر را تایید می کند همچنین در لایه مرزی با دیوار گرم شده سرعت در حال تغییر شکل هستند دلیل آن تغییر چگالی در سراسر لایه مرزی است لذا تغییر شکل U^+ باعث ترک قانون دیوار می شود در حالیکه تغییر سرعت U_c باعث حفظ قانون دیوار برای جریان های تراکم ناپذیر است همچنین میانگین دما محاسبه شده برای لایه مرزی آشفته برابر با $1/4 = \frac{T_w}{T_\infty}$ که توسط شکل (۳،۳) ارایه شده است. نمادهای مربع شکل ، نیز متوسط حرارت را نشان می دهد همچنین داریم:

$$\theta^+ = Pr y^+ \exp(-\Gamma) + \left\{ 2/12 \ln[(1+y^+)^2 \frac{2/5(2-\frac{y}{\delta})}{1+4(1-\frac{y}{\delta})^2}] \beta(Pr) \right\} \exp(-\Gamma)$$

که

$$\theta^+ = \frac{T_w - T}{t_f} \quad t_f = \frac{q_w}{\rho_w C_p U_\tau}$$

$$\Gamma = \frac{0.1(Pr y^+)^4}{1 + 5Pr^3 y^+} \quad \beta(Pr) = (3.85(Pr)^{-1/4} - 1.3)^2 + 2.12 \ln Pr$$

در نتیجه لایه چسبناک و لایه لگاریتمی در یک راستا هستند و از آنجا که چگالی و دما فاصله شان از دیوار متفاوت است لذا نتایج نفوذ دما بر نوسانات آشفته و سرعت آن‌ها در شکل (۳،۳) نشان داده شده است که در این شکل خط فاصله‌های خال خال خواص دیوار در حالت طبیعی است که

$$y^+ = y \frac{U_{\tau,w}}{V_w} \quad U_{rms}^+ = \frac{U_{rms}}{U_{\tau,w}}$$

هم چنین در مقایسه دیگر که به صورت خط فاصله است داده‌های تراکم ناپذیر قسمت خارجی لایه مرزی آشفته بررسی شده است که در آن

$$y^+ = y \frac{U_{\tau,\infty}}{V_\infty} \quad U_{rms}^+ = \frac{U_{rms}}{U_{\tau,\infty}}$$

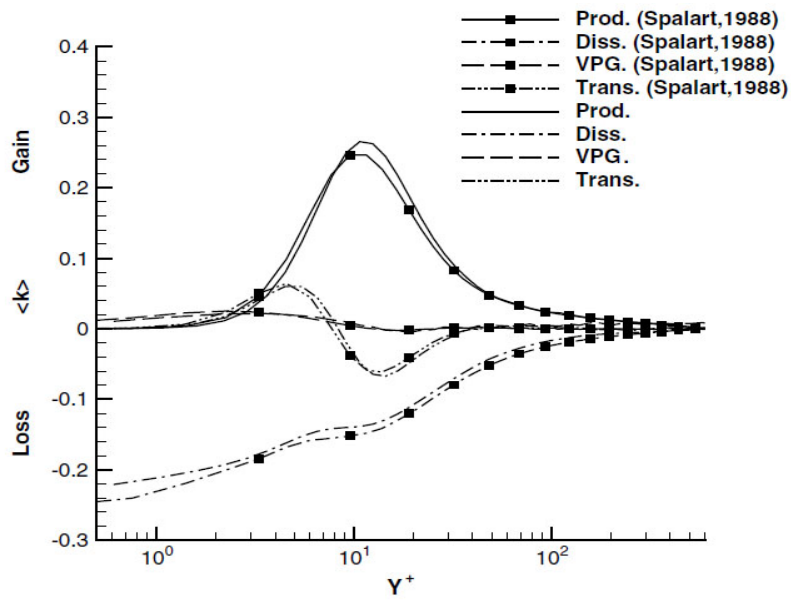
و خطوط پیوسته در شکل به طور دقیق مقدار؛

$$y^+ = y \frac{U_{\tau,local}}{V_{local}} \quad U_{rms}^+ = \frac{U_{rms}}{U_{\tau,local}}$$

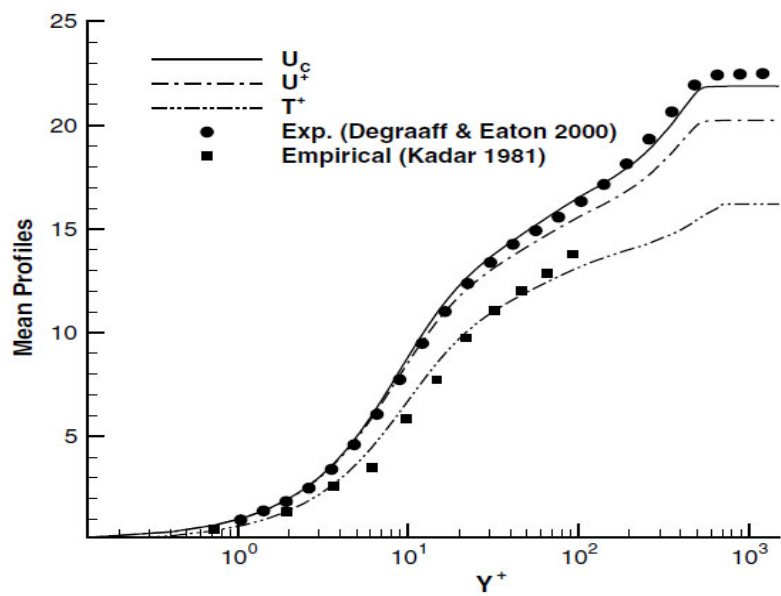
را نشان می‌دهد هم چنین با استفاده از خواص موضعی U_{rms}^+ لایه مرزی آشفته حرارتی فرو می‌ریزد و $\frac{T_w}{T_\infty} = 1/4$ از لایه مرزی آشفته تراکم ناپذیر در لایه وارد می‌شود که همان جریان آشفته لایه مرزی $1/4$ است که با استفاده از روش مبتنی بر چگالی محاسبه می‌شود.

نتیجه گیری :

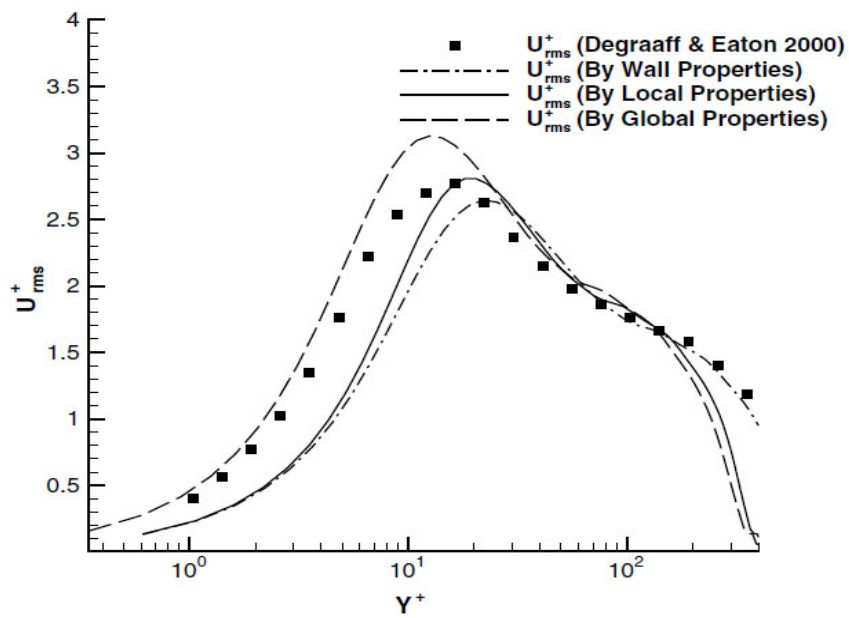
در روش گام کسری که در این بخش پیشنهاد شده است برای دما، سرعت و فشار در حل معادله ناویه - استوکس تراکم پذیر استفاده می‌شود که در آن الگوریتم مرحله به مرحله برای جریان‌های تراکم پذیر افزایش یافته شبیه سازی شده است که در مقابل با روش LU-SGS به طور گسترده مورد استفاده قرار می‌گیرد این روش ارایه شده باعث افزایش سرعت همگرایی خطا باقی مانده برای جریان مافوق صوت، به ویژه برای جریان عدد ماخ پایین است که برای سرعت بخشیدن به همگرایی، خطاهای ژاکوبین در باقی مانده‌های یک ماتریس پیش شرط ضرب می‌شود که کمک به بهینه سازی توزیع مقادیر ویژه می‌کند که همراه با فاکتور ارایه شده، ماتریس ژاکوبین به دو بخش تجزیه می‌شود که انتخاب مناسب می‌تواند تضمین نماید که بدون توجه به عدد ماخ، ماتریس به طور قطعی مثبت است که محاسبات بهتر می‌شود. شرط مرزی عددی بهینه با بازسازی مقادیر ویژه توسعه داده شده است و بردارهای ویژه از ماتریس ژاکوبین برای آن پیش شرط در نظر می‌گیریم که در این روش عددی معادله یک بعدی اویلر با دامنه امواج صوتی بزرگ، لایه مرزی آشفته و یک لایه مرزی آشفته با قابلیت انتقال حرارت استفاده می‌شود که نتایج نشان می‌دهد روش گام کسری در مقایسه با روش‌های مبتنی بر فشار مسیر همگرایی را بهتر می‌کند که دلیل آن توزیع بهتر مقادیر ویژه است.



شکل ۱.۲: آشفتگی انرژی جنبشی



شکل ۲.۲: تغییر سرعت V^+ و V^c



شکل ۳.۲: میانگین دما لایه مرزی آشفته $\frac{T_w}{T_\infty} = 1/4$

فصل ۳

کاربرد روش گام کسری برای حل عددی معادلات آب کم عمق

در این بخش ابتدا به بررسی روش نیمه لاگرانژی برای معادلات آب کم عمق می پردازیم سپس روش گام کسری را برای این نوع معادلات بررسی می کنیم و نتیجه می گیریم روش گام کسری برای معادلات آب کم عمق بهتر است.

۱.۳ روش نیمه لاگرانژی

روش نیمه لاگرانژی^۱ که به صورت نیمه ضمنی به معادلات آب کم عمق اعمال می شود به صورت نامشروط پایدار است بنابراین یکی از مشکلات روش های اویلری که کوچک بودن گام زمانی می باشد با به کار بردن این روش مرتفع می شود.

روش های گسسته سازی که بر پایه رفتار نیمه لاگرانژی معادله فرارفت بنا نهاده شدند برای انتگرال گیری زمانی کارا در پیش بینی های عددی وضع هوا مورد استفاده قرار می گیرند. در این روش گام های زمانی بزرگتر از روش هایی است که پایه و اساس آن ها روش اویلر می باشد. در صورتی که از لحاظ دقت تغییری حاصل نمی شود.

معادلات حاکم بر جریان بعد از اعمال روش نیمه لاگرانژی - نیمه ضمنی به یک معادله هلمهولتز^۲ برای ارتفاع ژئو پتانسیل و معادلات تکانه تبدیل می شوند. در کارهای انجام گرفته در اعمال شرایط مرزی به معادله هلمهولتز حتما باید مقادیر ارتفاع ژئو پتانسیل در مرزها داده شده باشد. معمولا در شبیه سازی های عددی وضع هوا در حرکت های میان مقیاس مقادیر ارتفاع ژئو پتانسیل به راحتی در دسترس نیستند ولی دسترسی به مقادیر میدان باد آسان تر است. با استفاده از این مقادیر و هم چنین بسط مناسب معادلات حاکم می توان به معادلاتی در مرزها دست پیدا کرد که تابعی از مولفه های سرعت باد باشند.

^۱Semi-lagragian

^۲Helmholtz

معادلات اساسی دینامیک شاره‌ها را می‌توان از دو دیدگاه لاگرانژی و اویلری مورد بررسی قرار داد. معادلات در شکل لاگرانژی تغییرات جریان را با دنبال کردن حرکت یک ذره منفرد از شاره، بیان می‌کنند. ولی معادلات در شکل اویلری بیان‌کننده تغییرات جریان از مشاهدات یک نقطه ثابت در فضا می‌باشند. (این نقطه می‌تواند یک نقطه ثابت بر روی یک مختصات چرخان همانند زمین که حرکت آن تأثیری از حرکت شاره نمی‌گیرد، باشد.) اگر ψ یک متغیر اسکالر وابسته به t باشد. معادلات تغییرات زمانی ψ در دیدگاه لاگرانژی یک بعدی به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{d\psi}{dt} = s \quad (۱.۳)$$

همین معادله در دیدگاه اویلری به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} + u \frac{\partial\psi}{\partial x} = s \quad (۲.۳)$$

برای معادل‌سازی این دو دیدگاه از منظر ریاضی مشتق کلی به شکل زیر بیان می‌گردد:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial}{\partial x}$$

در معادله بالا سرعت داریم:

$$\frac{dx}{dt} = u \quad (۳.۳)$$

روش نیمه لاگرانژی سه ترازه زمانی

اولین روش حلی که در دیدگاه لاگرانژی به ذهن می‌رسد این است که در ابتدا چون شرایط اولیه جریان معلوم است تعدادی از نقاط شاره به صورت منظم در نظر گرفته می‌شوند و از معادله (۱.۳) و (۳.۳) نسبت به زمان انتگرال‌گیری می‌کنیم.

با توجه به اینکه مسیر ذرات شاره برای هر یک از آن‌ها از معادله (۳.۳) بدست می‌آید و این معادله برای نقاط مختلف با سرعت‌های متفاوت مسیرهای غیر موازی برای نقاط مختلف شاره ایجاد می‌کند. بنابراین نقاط جدید به دست آمده کاملاً غیریکنواخت هستند و هیچ ترتیب خاصی ندارد. در اکثر موارد خطوط مشخصه با یکدیگر موازی نیستند و در نهایت به نقاط نامنظمی می‌رسند. روش نیمه لاگرانژی در واقع ایده‌ای است که این مشکل را برطرف می‌کند. در روش نیمه لاگرانژی یک سری نقاط منظم به عنوان نقاط شبکه انتخاب می‌شوند و در هر گام زمانی خطوط مشخصه‌ای که از این نقاط می‌گذرند، مورد بررسی قرار می‌گیرند. برخلاف حالت قبل که یک سری خطوط مشخصه معین از ابتدا تا انتهای زمان محاسبه مورد بررسی قرار می‌گرفتند. در روش نیمه لاگرانژی خطوط مشخصه عبوری از این نقاط با هر گام زمانی عوض می‌شوند. در واقع روش حل به این گونه است که خطوط مشخصه‌ای که اکنون در نقاط شبکه هستند دارای مشخصات نقطه‌ای هستند که در گام زمانی قبلی در نقاط دیگری بوده‌اند و این نقاط لزوماً بر نقاط شبکه انطباق ندارند.

در این شکل سه گام زمانی $t_n + \Delta t$ و t_n ، $t_n - \Delta t$ مشخص شده‌اند که هدف تعیین کمیت ψ در زمان $t_n + \Delta t$ از داده‌های زمان قبل با یک تابع داده شده $u(x, t)$ می‌باشد. خط مشخصه‌ای که در زمان $t_n + \Delta t$ از نقطه c که یک نقطه شبکه است می‌گذرد. در زمان $t_n - \Delta t$ از نقطه A گذشته است که لزوماً بر روی نقاط شبکه نیست. پس کمیت ψ در زمان $t_n + \Delta t$ همان مقداری را خواهد داشت که

این نقطه در زمان $t_n - \Delta t$ داشته است. ولی از آن جا که تابع u با مکان و زمان تغییر می‌کند پس خط مشخصه یک منحنی می‌باشد. برای حل مساله این منحنی با یک خط مستقیم با استفاده از مقدار u در زمان t_n بر روی خط مشخصه تقریب زده می‌شود. نقطه B در شکل این نقطه را نشان می‌دهد. نقطه A' نقطه تقریبی A می‌باشد که با تقریب ذکر شده به دست آمده است.

روش نیمه لاگرانژی نیمه ضمنی سه ترازه زمانی برای حل معادله فرارفت

معادله فرارفت واداشته به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{d\psi}{dt} + G(x, t) = R(x, t) \quad (۴.۳)$$

در رابطه بالا G جمله‌های مربوط به موج های تند گرانی و R مربوط به مدلهای کند راسبی و جمله‌های غیرخطی می‌باشند. روش نیمه لاگرانژی - نیمه ضمنی روشی است که در آن جمله‌های گرانی که به صورت خطی طراحی شده‌اند به صورت ضمنی با مقادیر ψ گسسته‌سازی شوند و جمله‌های غیرخطی و راسبی به صورت صریح به دست آیند. با این توضیح خواهیم داشت:

$$\frac{\psi^+ - \psi^-}{2\Delta t} + \frac{1}{2}(G^+ + G^-) = R^\circ \quad (۵.۳)$$

در معادله (۵, ۴) ؛ ” + ” ، ” - ” و ” o ” به ترتیب بیان کننده نقطه مقصد $(x_j, t + \Delta t)$ و نقطه میانی خط مشخصه $(x_j - \alpha_j, t)$ و نقطه مبدا خط مشخصه یعنی $(x_j - 2\alpha_j, t - \Delta t)$ می‌باشند. بنابراین برای تعیین مقدار R باید مقادیر آن را در زمان t در نقاط $x_j - \alpha_j$ میان‌یابی نمود. می‌توان مقادیر R° را با متوسط گیری در مکان نیز به دست آورد .

$$R^x = \frac{1}{2}[R(x_j - 2\alpha_j, t) + R(x_j, t)]$$

آنچه که هنوز نامشخص است مقدار α_j می‌باشد با توجه به شکل، α_j را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\alpha_j = \Delta t u(x_j - \alpha_j, t_n) \quad (۶.۳)$$

مشکل دیگری که معادله (۵, ۴) دارد تعیین مقادیر ψ در نقاط $(x_j - 2\alpha_j, t - \Delta t)$ می‌باشد که در نقاط شبکه واقع نیستند. این مشکل با یک میان‌یابی از نقاط شبکه به این نقاط رفع می‌گردد.

پالایش زمانی

برای جلوگیری از به وجود آمدن عدم جفت شدگی در گام‌های زمانی فرد و زوج از یک پالاینده زمانی در هر گام زمانی استفاده می‌شود. از آن جا که هدف از به کارگیری پالاینده زمانی ایجاد جفت‌شدگی بین گام‌های زمانی زوج و فرد است پس این پالاینده زمانی در هر مرحله باید بر روی گام زمانی $t - \Delta t$ انجام شود. پالاینده زمانی با استفاده از رابطه زیر برای یک متغیر ψ در زمان $t - \Delta t$ بدست می‌آید.

$$\psi_f(x, t - \Delta t) = \psi(x, t - \Delta t) + \alpha[\psi_f(x, t - 2\Delta t) - 2\psi(x - \Delta t) + \psi(x, t)] \quad (۷, ۴)$$

همه مقادیر ψ باید در نقطه شبکه باشند. α پارامتری برای کنترل جفت شدگی می‌باشد.

۱.۱.۳ حل معادلات آب کم عمق یک بعدی با استفاده از روش نیمه لاگرانژی نیمه ضمنی

در ابتدا برای آشنایی با چگونگی اعمال روش نیمه لاگرانژی - نیمه ضمنی به یک دسته معادلات، حالت ساده معادلات آب کم عمق یک بعدی را در نظر می‌گیریم. برای ساده سازی بیشتر یک مختصات ساکن دکارتی در نظر گرفته می‌شود. پس معادلات حاکم، یکی معادله تکانه در جهت x و دیگری معادله پیوستگی می‌باشد.

این معادلات به شکل زیر نوشته می‌شوند:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (۷.۳)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\varphi \frac{\partial u}{\partial x} \quad (۸.۳)$$

که

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x}$$

در معادلات بالا u سرعت و $\varphi = gh$ می‌باشند. که g شتاب گرانی زمین و h عمق لایه مورد مطالعه هستند. قبل از اینکه این معادلات به صورت اصلی خود از هم جدا شوند، لازم است که مقدار x به یک مقدار متوسط ثابت به نام x و یک مقدار متغیر به نام x تقسیم شود.

$$\varphi = \varphi_0 + \hat{\varphi}$$

با اعمال این تغییر به معادلات (۷.۳) و (۸.۳) و با اعمال روش نیمه لاگرانژی - نیمه ضمنی سه ترازه زمانی و ترکیب دو معادله با یکدیگر به معادلات زیر دست پیدا می‌کنیم:

$$\hat{\varphi}_{xx}^+ - \frac{1}{\Delta t^2 \varphi_0} \hat{\varphi}^+ = \frac{1}{\Delta t} P_{ux} - \frac{1}{\Delta t^2 \varphi_0} P_\varphi \varphi_0 + \frac{2}{\Delta t \varphi_0} R_\varphi \varphi \quad (۹.۳)$$

$$u^+ + \Delta t \hat{\varphi}_x^+ = P_u \quad (۱۰.۳)$$

که در معادلات بالا P_u ، P_φ و R_φ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{cases} P_u = u^- - \Delta t \varphi_x^- \\ P_\varphi = \hat{\varphi}^- - \Delta t \varphi_0 u_x^- \\ R_\varphi = (\hat{\varphi} u_x)^0 \end{cases}$$

معادله به دست آمده یک معادله هلمهولتز است که باید با یک شرط مرزی به روش‌های تکراری حل شود.

۲.۱.۳ استفاده از روش گام کسری برای حل عددی معادلات آب کم عمق

روش گام کسری برای حل معادلات عددی آب کم عمق نیز استفاده می‌شود ویژگی این روش در حل معادلات آب کم عمق به این صورت است که در درون یابی چند بعدی بدون مراحل تکرار شونده بدست می‌آوریم عدم وجود مراحل تکرار شونده در این روش در حال حاضر برای گام‌های زمانی کوچک و اندازه شبکه مورد نیاز (به عنوان مثال در مدل سازی آب وهوا منطقه ای) بسیار مناسب است.

معادلات آب کم عمق از اهمیت ویژه‌ای در مسایل پیش بینی آب وهوا منطقه‌ای، مدل سازی آب وهوا، اقیانوس شناسی و بسیاری از مسایل مرتبط با دینامیک سیالات دارد.

از بین روش های عددی این نوع معادلات، روش گام کسری برای حل معادلات عددی آب کم عمق بهتر از روش کاهش ماتریس چند بعدی به یک بعدی است بنابراین این روش بسیار مناسب است به شرط اینکه شرایط پایداری برقرار باشد از دیگر مزایای این روش، نیاز به متغیر تنها در دو گام زمان برای سطوح است.

روش نیکلسون^۳ در مورد معادلات ساده آب کم عمق عملکرد ضعیفی در پیش بینی سرعت فاز دارد در نتیجه از روش گام کسری استفاده می‌کنیم که هدف ما از این کار ارایه راه حل برای این مسایل، با استفاده از روش گام کسری برای معادلات آب کم عمق است که شامل تقسیم این معادلات و انتگرال گیری پی در پی و استفاده از پایداری ریمان است.

در این روش برای فرکانس در حالت آهسته بدون قید و شرط پایداری، دقت از مرتبه یک است در حالیکه فرکانس در حالت سریع دقتش از مرتبه دوم است. همچنین این روش برای حل عددی معادلات آب‌های کم عمق بدون مراحل تکرار شونده چند بعدی و با حل معادله هلمهولتز^۴ بهتر است که مرتبه درستی این روش $\mathcal{O}(\Delta t)$ است که منجر به گام زمان نسبتاً کوچک می‌شود. با این حال حل سریع آن تا حد زیادی کوچکی محدودیت گام زمان را جبران می‌کند.

۳.۱.۳ مدل پیش بینی آب و هوا باروتروپیک

از روش گام کسری در مدل پیش بینی آب و هوا^۵ با استفاده از معادلات آب کم عمق در تجزیه شبکه یکنواخت استفاده می‌کنیم. قوانین معادلات آب کم عمق با بیش از یک دوران، با استفاده از مختصات دکارتی در یک روش قطبی با $N=60^\circ$ طرح ریزی می‌شود که این معادلات به صورت زیر هستند:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} = fv - \frac{1}{f} \left(\frac{\partial s}{\partial x} (u^2 + v^2) \right) \\ \frac{dv}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} = fv - \frac{1}{f} \left(\frac{\partial s}{\partial y} (u^2 + v^2) \right) \end{cases} \quad (11.3)$$

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} + \varphi s \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \\ \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + s \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) \end{cases} \quad (12.3)$$

در این معادلات x و y مختصات پروژه هستند، U و V تصاویر باد نامیده می‌شود که $U = \frac{u}{m}$ و $V = \frac{v}{m}$ که u و v مولفه‌های بردار باد در امتداد محورهای x و y است. $s = m^2$ و m تابع مقیاس نقشه است که به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$m = \frac{1 + \sin\left(\frac{\pi}{f}\right)}{1 + \sin(Lat)} \quad (13.3)$$

φ ارتفاع از سطح آزاد و f پارامتر کوریولیس^۶ است روش گام کسری را برای معادلات (۱۱.۳) و (۱۲.۳) در یک گام زمان بدست می‌آوریم.

^۳Nicolson

^۴Helmholtz

^۵Barotropic

^۶Coriolis

گام ۱) حل \triangle در امتداد و جهت x :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + su \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + su \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi s \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (۱۴.۳)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + su \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (۱۵.۳)$$

روش حل u و φ در معادله (۱۴.۳) را به صورت $(t + \frac{\Delta t}{\gamma})$ می‌نویسیم داریم:

$$u(x, y, t + \frac{\Delta t}{\gamma}) = \frac{1}{\gamma} [u(x_-) + u(x_+) - \frac{\varphi(x_-)}{m} + \frac{\varphi(x_+)}{m}] \quad (۱۶.۳)$$

$$u(x, y, t + \frac{\Delta t}{\gamma}) = \frac{1}{\gamma} [\varphi(x_-) + \varphi(x_+) - wu(x_-) + wu(x_+)] \quad (۱۷.۳)$$

که در این معادلات:

$$x_- = x - (su - w) \frac{\Delta t}{\gamma} \quad x_+ = x - (su + w) \frac{\Delta t}{\gamma} \quad w = \sqrt{\varphi s}$$

تعریف می‌شود. همچنین با توجه به معادله (۱۵.۳) داریم:

$$v(x, y, t + \frac{\Delta t}{\gamma}) = v(x - su \frac{\Delta t}{\gamma}, y, t) \quad (۱۸.۳)$$

گام ۲): حل \triangle در امتداد و جهت y :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + sv \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + sv \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \varphi s \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (۱۹.۳)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + sv \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (۲۰.۳)$$

رابطه (۱۹.۳) شبیه روابط حل شده در (۱۶.۳) و (۱۷.۳) است. لذا داریم:

$$v(x, y, t + \frac{\Delta t}{\gamma}) = \frac{1}{\gamma} [v(y_-) + v(y_+) - \frac{\varphi(y_-)}{w} + \frac{\varphi(y_+)}{w}] \quad (۲۱.۳)$$

$$\varphi(x, y, t + \frac{\Delta t}{\gamma}) = \frac{1}{\gamma} [\varphi(y_-) + \varphi(y_+) - wv(y_-) + wv(y_+)] \quad (۲۲.۳)$$

همچنین

$$y_- = y - (sv - w) \frac{\Delta t}{\gamma} \quad y_+ = y - (sv + w) \frac{\Delta t}{\gamma}$$

لذا برای u در رابطه (۲۰.۳) داریم:

$$v(x, y, t + \frac{\Delta t}{\gamma}) = u(x, y - sv \frac{\Delta t}{\gamma}, t) \quad (۲۳.۳)$$

گام ۳) برای بدست آوردن \triangle معادلات زیر را داریم:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -\frac{1}{\gamma} (\frac{\partial s}{\partial x} (u^2 + v^2)) \\ \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\gamma} (\frac{\partial s}{\partial y} (u^2 + v^2)) \end{cases} \quad (۲۴.۳)$$

که با استفاده از روش رانگ - کوتا حل می‌شود. سپس برای Δt از روش کوریولیس استفاده می‌کنیم. لذا داریم:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -fv \\ \frac{dv}{dt} = -fu \end{cases} \quad (25.3)$$

اگر u_0 و v_0 مقدارهای اولیه u و v باشند و در آغاز هر مرحله مقدار Δt را در نظر بگیریم. داریم:

$$\begin{cases} u(x, y, t + \Delta t) = u_0 \cos(f\Delta t) + v_0 \sin(f\Delta t) \\ v(x, y, t + \Delta t) = v_0 \cos(f\Delta t) - u_0 \sin(f\Delta t) \end{cases} \quad (26.3)$$

همچنین راه حل رابطه (24.3) را برای $\frac{\Delta t}{4}$ تکرار می‌کنیم.

گام ۴ (تکرار گام ۲

گام ۵ (تکرار گام ۱

حال با توجه به شکل (۱) به بررسی روش گام کسری و روش نیمه لاگرانژی می‌پردازیم. در شکل (۱) زمینه ارتفاع پیش بینی شده پس از ۴۸ ساعت برای مساله مورد مطالعه را نشان می‌دهد. زمینه ارتفاع پیش بینی شده پس از ۴۸ ساعت برای مدل پیش بینی آب و هوا در 20000 km محور قطب شمال و درست در $60^\circ N$ است این دامنه به ترتیب با یک روش یکنواخت $201 \times 201 \text{ km}$ (100 اندازه شبکه)، $401 \times 401 \text{ km}$ (50 اندازه شبکه)، $801 \times 801 \text{ km}$ (25 اندازه شبکه) و $1601 \times 1601 \text{ km}$ (12.5 اندازه شبکه) پوشش داده شده است.

برای $\Delta t = 10$: عملکرد روش گام کسری برای $t = 2$ روز است و به ترتیب ۳ دقیقه و ۱۵ ثانیه، ۱۵ دقیقه، ۷۵ دقیقه و ۶ ساعت است که با استفاده از یک پردازنده تک در $SUN - 4 - 80 - R$ در ایستگاه کاری یدست آمده است.

عملکرد روش نیمه لاگرانژی تنها برای یک حلقه تکرار شونده با استفاده از همان ایستگاه کاری پی در پی به ترتیب در ۷۰ دقیقه، ۶ ساعت، ۴۲ ساعت و بیش از ۴۰۰ ساعت است که این تفاوت بین دو روش است. همچنین اگر با استفاده از روش نیمه لاگرانژی در گام زمان $\Delta t = 3$ استفاده شود، باعث کاهش زمان cpu برای 1601×1601 می‌شود که از ۴۰۰ ساعت به ۲۳ ساعت می‌رسد ولی باز هم عملکرد آن از روش گام کسری ضعیف تر است.

در این بخش تنظیم تحت گرانش از یک لایه کم عمق همگن مایع در موارد خاص در نظر می‌گیریم که در آن مایع ابتدا در حال استراحت بوده اما یک نا پیوستگی در سطح دارد. برای مساله حاضر فرض می‌کنیم z محور عمودی است. $z = -H$ افقی و ارتفاع از سطح $z = \eta$ نسبت به یک سطح در نظر گرفته شده که تقریب هیدرواستاتیک می‌تواند کوچک باشد بنابراین معادلات حرکت پیوسته هستند. لذا داریم:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} - fv = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial y} + fu = 0 \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + H \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \end{cases} \quad (27.3)$$

($-fv, fu$) شتاب کوریولیس است که تولید چرخش دوباره می‌کند. η مستقل از z و سرعت (u, v)

مستقل از عمق است.

مساله به این فرم است که برای $g = 9.806 \frac{m}{s^2}$ و ارتفاع $H = 2000 m$ مربوط به تعادل جغرافیایی با شرایط اولیه $u = 0$ و $v = 0$ است لذا داریم:

$$\begin{aligned} \varphi^* &= gH & f &= 10^{-2} \\ \varphi &= g\eta = \begin{cases} +1 & x < 0 \\ -1 & x > 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (28.3)$$

همچنین با همین شرایط اولیه معادلات زیر را داریم:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial x} = fv \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial y} = -fu \end{cases} \quad (29.3)$$

با $h = \eta + H$ (H ثابت) و $\varphi = gh = \varphi + \varphi^*$ که با استفاده از رابطه‌های (??) و (??) مراحل کسری زیر اعمال می‌شود.

گام (۱) حل در گام $\frac{\Delta t}{4}$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (30.3)$$

بازنویسی این روابط به صورت زیر است:

$$\frac{\partial R_{x\pm}}{\partial t} + (u \pm \sqrt{\varphi}) \frac{\partial R_{x\pm}}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

که در آن $R_{x\pm} = u \pm 2\sqrt{\varphi}$ ریمان ثابت است که برای حل معادله (30.3) و با توجه به $t + \frac{\Delta t}{4}$ داریم:

$$R_{x\pm}(x, y, t + \frac{\Delta t}{4}) = R_{x\pm}(x_{\pm}, y, t) \quad (31.3)$$

که $x_{\pm} = x - (u \pm \sqrt{\varphi}) \frac{\Delta t}{4}$ است همچنین راه حل v شبیه به محاسبه معادله (18.3) می‌باشد. گام (۲) برای حل $\frac{\Delta t}{4}$ معادلات را در جهت y بازنویسی می‌کنیم.

$$\begin{cases} \frac{\partial R_{y\pm}}{\partial t} + (v \pm \sqrt{\varphi}) \frac{\partial R_{y\pm}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (32.3)$$

که در آن $R_{y\pm} = v \pm 2\sqrt{\varphi}$ ریمان ثابت است که برای حل معادله (??) داریم:

$$R_{y\pm}(x, y, t + \frac{\Delta t}{4}) = R_{y\pm}(x, y_{\pm}, t) \quad (33.3)$$

که $y_{\pm} = y - (v \pm \sqrt{\varphi}) \frac{\Delta t}{4}$ و راه حل آن شبیه محاسبه معادله (31.3) است.

گام (۳) حل Δt

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - fv = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + fu = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \varphi \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \end{cases} \quad (34.3)$$

راه حل معادله (؟؟) همانند محاسبه معادله (۲۶.۳) است و برای حل معادله (؟؟) داریم:

$$\varphi = \varphi_0 e^{(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y})\Delta t}$$

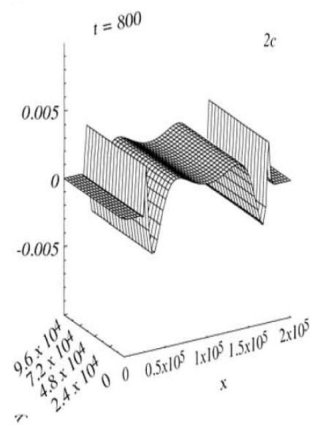
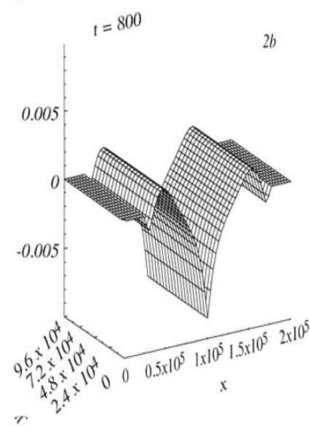
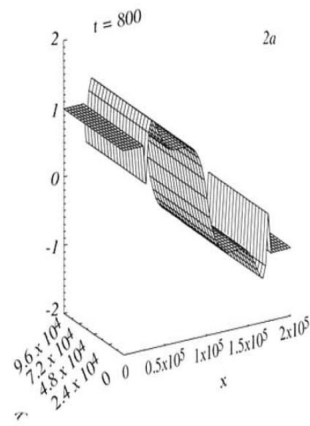
با استفاده از گام زمان $\Delta t = 2s$ ناپیوستگی موجود در راه حل مساله را برطرف می‌کند همچنین در شکل (۱, ۴) در $t = 800s$ مقادیر φ ، u و v را نشان می‌دهد و همچنین در شکل (۲, ۴) نتایج معادلات در $t = 1200s$ نشان داده شده است و رفتار پیش بینی شده در [۴۵] برای سرعت u را نشان می‌دهد که در حال از بین رفتن زمان و نوسان نزدیک به صفر را نشان می‌دهد و حداکثر سرعت v در $x = 0$ را پیش بینی می‌کند لذا داریم:

$$v_0 = \frac{-g\eta_0}{f_a} \quad a = \frac{\sqrt{gH}}{f}$$

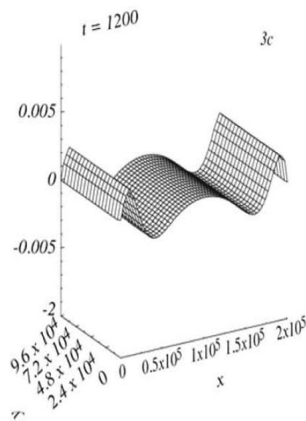
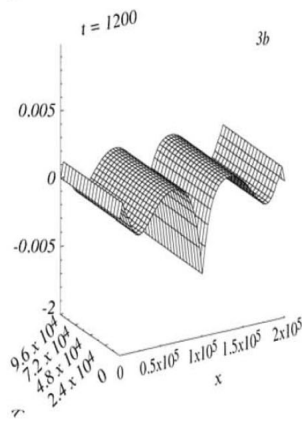
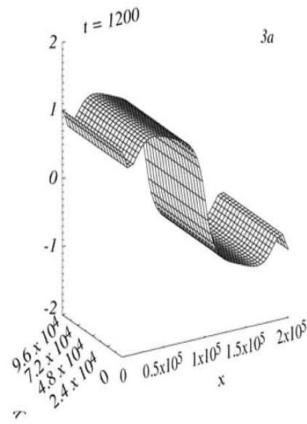
که $g\eta_0 = 1$ ، $f = 10^{-2}$ و $H = 2000m$ است و مقدار $v_0 = -0.007$ بدست می‌آید.

نتیجه‌گیری:

یکی از مشکلات، در انتگرال گیری عددی روش مدل‌های جوی پیش بینی آب و هوا است که برای جلوگیری از آن از گام زمان در مقایسه با اندازه طول شبکه استفاده می‌کنیم به عنوان مثال در روش نیمه لاگرانژی ارایه شده حداکثر گام زمان مجاز بزرگتر از طول شبکه است که لازم به ذکر است که این روش دو بار تکرار شده است اولین تکرار در محاسبه جابه جایی لازم برای پیشبرد معادلات برای یک گام زمان است و تکرار دوم طول مرحله میانی و حل یک معادله هلمهولتز است که این می‌تواند محدودیتی جدی در روش مدل سازی آب و هوا منطقه‌ای زمانی که شبکه کوچک است به وجود آورد لذا روش گام کسری ارایه شده مزیت بزرگی در حل معادلات آب کم عمق بدون تکرار دارد سادگی روش و عدم تکرار تا حد زیادی جبران محدودیت اندازه گام کوچک را می‌کند به ویژه هنگامی که از شبکه‌هایی با اندازه کوچک استفاده می‌شود به عنوان مثال برای 801×801 (اندازه شبکه $25km$) با استفاده از روش نیمه لاگرانژی با گام زمان ۵ دقیقه در ۱۲۰ ساعت زمان *cpu* برای حل این مساله لازم است اما با روش گام کسری سرعت حل به ۲ ساعت و ۳۵ دقیقه می‌رسد در نهایت به این نتیجه می‌رسیم که روش گام کسری در زمان کوتاهتری مساله را می‌توان حل کنیم.



شکل ۱.۳: مقادیر φ ، u و v در $t = 800$



شکل ۲.۳: مقادیر φ ، u و v در $t = 1200$

فصل ۴

حل معادلات دیفرانسیل جبری با روش گام کسری

۱.۴ مقدمه

معادلات دیفرانسیل، توصیفی ریاضی برای چگونگی اثرگذاری متغیرها و مشتقات آنها با توجه به یک یا تعدادی متغیر مستقل در یک روش دینامیکی بر روی هم است. حل آنها به ما نشان می‌دهد که متغیرهای وابسته با متغیرهای مستقل چگونه تغییر خواهد کرد. مسایل زیادی در علوم طبیعی و رشته‌های مهندسی به صورت معادلات دیفرانسیل عددی یا یک معادله دیفرانسیل برداری، که یک دستگاه معادلات دیفرانسیل است، فرمول بندی می‌شوند.

اگر $F(t, y, y') = 0$ در نظر بگیریم و $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ و $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ در این صورت:

$$\begin{cases} x' = f(t, x, z) \\ 0 = g(t, x, z) \end{cases}$$

این گونه معادلات را معادلات دیفرانسیل جبری می‌نامند.

۱.۱.۴ روش گام کسری برای معادلات دیفرانسیل جبری با اندیس ۱

در حل معادلات دیفرانسیل معمولی، روش گام کسری^۱، روشی دقیق با بازده بالا می‌باشد که برای محاسبات مسایل فیزیکی و اثرات آن مناسب است. روش گام کسری برای حل معادلات دیفرانسیل جبری روش گام به گام است که اغلب به عنوان یک روش یکپارچه‌سازی عددی برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی با مقدار اولیه استفاده می‌شود. روش گام کسری ترکیبی از روش‌های یکپارچه سازی برای مسایل است که بسیار کارآمد است. در معادلات دیفرانسیل جبری که ترکیب محدودیت‌های جبری با معادلات دیفرانسیل معمولی است، روش گام کسری محدودیت‌های جبری را از معادلات دیفرانسیل

^۱Fractional step

معمولی جدا می‌کند .

به عنوان مثال زمانی که معادلات و محدودیت‌ها مربوط به پدیده‌های فیزیکی باشند همواره روش گام کسری استفاده می‌شود که با استفاده از کدهای کامپیوتری تنظیم شده حل می‌شوند . ابتدا الگوریتم روش گام کسری را برای معادلات دیفرانسیل بررسی می‌کنیم . معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix}$$

در این روش ابتدا معادله را به صورت زیر در هر گام تقریب می‌زنیم .
در این صورت داریم :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} f(x, y) \\ \circ \end{pmatrix}}^{\varphi} \quad \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} \circ \\ g(x, y) \end{pmatrix}}^{\Gamma} \quad (1.4)$$

ابتدا $\Gamma_h \circ \varphi_h$ را برای الگوریتم یک مرحله‌ای در نظر می‌گیریم برای حل این الگوریتم باید از فرم t_n به $t_{n+1} = t_n + h$ به وسیله

۱. حل معادله دیفرانسیل با گام h در جهت φ

۲. حل معادله دیفرانسیل در جهت Γ

انجام دهیم که شروع حل مساله از ۱ آغاز می‌شود. این فرم الگوریتم $(\Gamma_h \circ \varphi_h)$ را الگوریتم یک مرحله‌ای می‌گویند و الگوریتم دو مرحله‌ای به فرم زیر است.

$$\varphi_{\frac{h}{2}} \circ \Gamma_h \circ \varphi_{\frac{h}{2}} \quad \text{یا} \quad \Gamma_{\frac{h}{2}} \circ \varphi_h \quad \text{یا} \quad \Gamma_{\frac{h}{2}}$$

که برای حل آن‌ها ابتدا تبدیل به یک نیم مرحله می‌کنیم که همان الگوریتم یک مرحله‌ای بدست می‌آید. به عنوان مثال داریم:

$$\varphi_{\frac{h}{2}} \circ \Gamma_h \circ \varphi_{\frac{h}{2}} = (\varphi_{\frac{h}{2}} \circ \Gamma_{\frac{h}{2}}) \circ (\Gamma_{\frac{h}{2}} \circ \varphi_{\frac{h}{2}})$$

توجه داشته باشید که خطا در الگوریتم یک مرحله‌ای از مرتبه ۲ می‌باشد یعنی $\mathcal{O}(h^2)$ که برای هر گام مرتبه ۱ است. در صورتی که خطا در هر گام برای الگوریتم‌های دو مرحله‌ای $\mathcal{O}(h^2)$ است . که هدف ما رسیدن به مرتبه ۲ می‌باشد .

هم چنین برای معادلات دیفرانسیل پیوسته می‌توان با استفاده از شرط لپ شیتس همگرایی هر کدام از عملگرهای φ و Γ را در هر مرحله نتیجه گرفت . لذا برای معادلات دیفرانسیل با بعد نامتناهی شرط پایداری لازم است .

۲.۱.۴ روش حل مساله برای معادلات دیفرانسیل جبری

در این بخش ابتدا روش گام کسری را برای معادلات دیفرانسیل جبری با اندیس ۱ تعریف می‌کنیم ، سپس به بررسی خطای کلی و آنالیز آن‌ها می‌پردازیم. ابتدا معادله دیفرانسیل جبری زیر را در نظر می‌گیریم

$$\begin{pmatrix} \circ \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix} = x \quad (2.4)$$

در این معادله فرض کنید که معادله دیفرانسیل جبری اندیس ۱ دارد. معادله را به صورت زیر تجزیه می‌کنیم. داریم:

$$\begin{pmatrix} \circ \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} f(x, y) \\ \circ \end{pmatrix}}^{\text{جبری}-\varphi} \quad \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} \circ \\ g(x, y) \end{pmatrix}}^{\text{ODE}-\Gamma} \quad (3.4)$$

لذا می‌توان نوشت:

$$x = \varphi + \Gamma$$

۳.۱.۴ الگوریتم یک مرحله‌ای

در الگوریتم $\Gamma_h \circ \varphi_h$ ابتدا متغیر جبری $x = x_{n+1}$ را بدست می‌آوریم. لذا محدودیت جبری $f(x, y) = \circ$ یا $y = y_n$ را در نظر گرفته سپس برای حل معادله دیفرانسیل معمولی، متغیرهای y را از بین هرگام h با در نظر گرفتن $x = x_{n+1}$ به دست می‌آوریم. از طرفی در الگوریتم $\varphi_h \circ \Gamma_h$ به طور مشابه y را با گام h تعریف می‌کنیم، سپس با انتخاب محدودیت‌های جبری، x را بدست می‌آوریم. معادله دیفرانسیل جبری اندیس ۱ را با استفاده از مفروضات از تابع φ نتیجه‌گیری می‌کنیم. بنابراین داریم:

$$f(x, y) = \circ \quad \implies \quad x = \varphi(y)$$

در نتیجه با توجه به معادله دیفرانسیل می‌توان نوشت:

$$\dot{y} = g(x, y) \quad \longrightarrow \quad \dot{y} = g(\varphi(y), y)$$

با استفاده از بسط تیلور^۲ و قاعده زنجیره‌ای، $y(t)$ را بدست می‌آوریم. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) &= y(t_n) + h\dot{y}(t_n) + \frac{h^2}{2!}\ddot{y}(t_n) + \circ(h^3) \\ &= y(t_n) + hg(\varphi(y(t_n)), y(t_n)) + \frac{h^2}{2!}(g_x(\varphi(y(t_n)), y(t_n))\dot{\varphi}(y(t_n))) \\ &\quad + g_y(\varphi(y(t_n)), y(t_n))\dot{y}(t_n) + \circ(h^3) \end{aligned} \quad (4.4)$$

در رابطه بالا g_x ماتریس ژاکوبین مشتقات نسبی g بر حسب x را نشان می‌دهد. همچنین می‌توان در نظر گرفت:

$$x(t_{n+1}) = \varphi(y(t_{n+1})) \quad (5.4)$$

حال برای تحلیل خطا، در گام اول مقدار $y(t_n)$ را ثابت در نظر می‌گیریم و تقریب $v(t_n)$ را برای الگوریتم یک مرحله‌ای $\varphi_h \circ \Gamma_h$ در نظر گرفته داریم:

$$v(t) \simeq y(t_n) \quad (6.4)$$

^۲Taylor expansion

طبق رابطه $\dot{y} = g(x, y)$ می‌توان نوشت :

$$\dot{v} = g(x(t_n), v) = g(\varphi(y(t_n)), v) \quad t_n \leq t \leq t_{n+1} \quad (7.4)$$

بنابراین با استفاده از بسط تیلور داریم :

$$\begin{aligned} v(t_{n+1}) &= v(t_n) + h\dot{v}(t_n) + \frac{h^2}{2!}\ddot{v}(t_n) + o(h^3) \\ &= y(t_n) + hg(\varphi(y(t_n)), y(t_n)) + \frac{h^2}{2!}(g_y(\varphi(y(t_n)), y(t_n))\dot{y}(t_n)) + o(h^3) \end{aligned} \quad (8.4)$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} v(t_{n+1}) - y(t_{n+1}) &= y(t_n) + hg(\varphi(y(t_n)), y(t_n)) + \frac{h^2}{2!}g_y(\varphi(y(t_n)), y(t_n))\dot{y}(t_n) \\ &\quad - y(t_n) - hg(\varphi(y(t_n)), y(t_n)) - \frac{h^2}{2!}(g_x(\varphi(y(t_n)), y(t_n))\dot{\varphi}(y(t_n))) \\ &\quad + g_y(\varphi(y(t_n)), y(t_n))\dot{y}(t_n) + o(h^3) \\ &= \frac{h^2}{2!}(g_y(\varphi(y(t_n)), y(t_n))\dot{\varphi}(y(t_n))) + o(h^3) \end{aligned}$$

که با قرار دادن

$$e(t_{n+1}) = \frac{g_x(\varphi(y(t_n)), y(t_n))\dot{\varphi}(y(t_n))}{2!}$$

داریم:

$$v(t_{n+1}) - y(t_{n+1}) = h^2 e(t_{n+1}) + o(h^3) \quad (9.4)$$

که تابع e ، یک تابع هموار است.

حال با استفاده از مقدار عددی u را برای x در نظر گرفته، داریم:

$$u(t_{n+1}) \simeq x(t_{n+1})$$

$$x(t_{n+1}) = \varphi(y(t_{n+1}))$$

$$y(t_{n+1}) \simeq v(t_{n+1})$$

در نتیجه با توجه به روابط بالا داریم:

$$u(t_{n+1}) = \varphi(v(t_{n+1}))$$

با استفاده از رابطه (۹.۴) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} u(t_{n+1}) &= \varphi(v(t_{n+1})) = \varphi(y(t_{n+1}) + h^2 e_{n+1} + o(h^3)) \\ &= \varphi(y(t_{n+1})) + h^2 \varphi_y(y(t_{n+1}))e_{n+1} + o(h^3) \\ &= x(t_{n+1}) + h^2 \varphi_y(y(t_{n+1}))e_{n+1} + o(h^3) \end{aligned} \quad (10.4)$$

لذا با استفاده از روابط (۹.۴) و (۱۰.۴) می‌توان نتیجه گرفت:

$$\|x(t_{n+1}) - u(t_{n+1})\| = o(h^2)$$

$$\|y(t_{n+1}) - v(t_{n+1})\| = o(h^2)$$

توجه داشته باشید که $\| \cdot \|$ نرم خطا است.

اگر روش الگوریتم یک مرحله‌ای را برای معادلات دیفرانسیل هم ارز معادلات دیفرانسیل جبری در نظر بگیریم همچنین مقدار $x(t_n) = \varphi(y(t_n))$ که $y(t_n)$ تقریبی از $v(t_{n+1})$ باشد، در نتیجه با توجه به رابطه (۴.۴) و شرط لیپ شیستی $\|g_y(\varphi(y), y)\| \leq L$ خطای کلی را می‌توان به صورت زیر در نظر بگیریم:

$$E = y(t) - v(t)$$

که

$$\|E\| \leq h \frac{C}{L} \exp[L(t - t_0)] \quad (11.4)$$

t_0 زمان اولیه و C ضریب مستقل h است.

برای تحلیل خطای روش گام کسری $\Gamma_h \circ \varphi_h$ مقدار $x(t_n)$ را ثابت در نظر می‌گیریم و با تقریب $u(t_{n+1})$ برای $x(t_n)$ داریم:

$$u(t_{n+1}) \simeq x(t_{n+1})$$

$$\dot{v} = g(u(t_{n+1}), v) = g(x(t_{n+1}), v) \quad (12.4)$$

لذا می‌توان نوشت:

$$\|u(t_{n+1}) - x(t_{n+1})\| = o(h)$$

$$\|v(t_{n+1}) - y(t_{n+1})\| = o(h^2) \quad (13.4)$$

بنابراین خطای موضعی در هر گام برابر $o(h)$ است. لذا مرتبه خطا نیز در روش $\Gamma_h \circ \varphi_h$ نیز از مرتبه یک است. این موضوع نشان می‌دهد که ریشه‌یابی نسبت به φ_h ساده‌تر است و با قراردادن $u = \varphi(v)$ دنباله

$$\dots(\Gamma_h \circ \varphi_h) \circ (\Gamma_h \circ \varphi_h) \circ (\Gamma_h \circ \varphi_h)$$

همگرا می‌شود. توجه داشته باشید که شرط اولیه $f(u(t_0), v(t_0)) = \circ$ می‌باشد.

۴.۱.۴ الگوریتم دو مرحله‌ای

روش الگوریتم دو مرحله‌ای برای معادلات دیفرانسیل جبری از مرتبه یک می‌باشد، در حالی‌که برای معادلات دیفرانسیل از مرتبه دو نیز است. الگوریتم دو مرحله‌ای را می‌توان به فرم $\varphi_{\frac{h}{2}} \circ \Gamma_h \circ \varphi_{\frac{h}{2}}$ در نظر گرفت که مقادیر اولیه آن برای محاسبه خطای برشی موضعی $y(t_n)$ و $x(t_n) = \varphi(y(t_n))$ است. ابتدا در گام کسر $\varphi_{\frac{h}{2}}$ قرار می‌دهیم:

$$u(t_{n+\frac{1}{2}}) = \varphi(y(t_n)) = x(t_n) \quad (14.4)$$

سپس در گام Γ_h می‌توان نوشت:

$$\dot{v} = g(u(t_{n+\frac{1}{2}}), v) = g(x(t_n), v) \quad t \in [t_n, t_{n+1}] \quad (15.4)$$

در نهایت گام کسر $\varphi_{\frac{h}{\nu}}$ برای مرحله دوم به صورت زیر می باشد.

$$u(t_{n+1}) = \varphi(v(t_{n+1}))$$

ابتدا گام کسری $\varphi_{\frac{h}{\nu}}$ را با توجه به روابط فوق بدست می آوریم که دقیقا این روابط متناظر با $\Gamma_h \circ \varphi_h$ است. حال به بررسی آنالیز خطا برای $\Gamma_{\frac{h}{\nu}} \circ \varphi_h \circ \Gamma_{\frac{h}{\nu}}$ می پردازیم ابتدا $\Gamma_{\frac{h}{\nu}}$ را بدست می آوریم.

(۱) گام $\Gamma_{\frac{h}{\nu}}$: با توجه به این که $v(t_n) = y(t_n)$ لذا می توان نوشت .

$$\dot{v} = g(\varphi(y(t_n)), v) \quad t \in [t_n, t_{n+1}] \quad (16.4)$$

با توجه به آنالیز گفته شده داریم:

$$\begin{aligned} v(t_{n+\frac{1}{\nu}}) &= v(t_{\frac{n}{\nu}}) + hv(t_{\frac{n}{\nu}}) + \frac{h^2}{\nu \times \nu!} \ddot{v}(t_{\frac{n}{\nu}}) + o(h^3) \\ &= y(t_{\frac{n}{\nu}}) + hg(\varphi(y(t_{\frac{n}{\nu}})), y(t_{\frac{n}{\nu}})) + \\ &+ \frac{h^2}{\nu \times \nu!} g_y(\varphi(y(t_{\frac{n}{\nu}})), y(t_{\frac{n}{\nu}})) \dot{y}(t_{\frac{n}{\nu}}) + o(h^3) \end{aligned} \quad (17.4)$$

$$\begin{aligned} y(t_{n+\frac{1}{\nu}}) &= y(t_{\frac{n}{\nu}}) + hg(\varphi(y(t_{\frac{n}{\nu}})), y(t_{\frac{n}{\nu}})) + \\ &+ \frac{h^2}{\nu \times \nu!} (g_x(\varphi(y(t_{\frac{n}{\nu}})), y(t_{\frac{n}{\nu}})) \\ &+ g_y(\varphi(y(t_{\frac{n}{\nu}})), y(t_{\frac{n}{\nu}})) \dot{y}(t_{\frac{n}{\nu}})) + o(h^3) \end{aligned} \quad (18.4)$$

با توجه به روابط (۱۷.۲) و (۱۸.۲) بدست می آوریم:

$$v(t_{n+\frac{1}{\nu}}) - y(t_{n+\frac{1}{\nu}}) = h^2 e_{n+\frac{1}{\nu}} + o(h^3) \quad (19.4)$$

(۱) گام φ_h : با توجه به روابط زیر؛

$$u(t_{n+1}) = \varphi(v(t_{n+\frac{1}{\nu}})) \quad (20.4)$$

گام خطا را محاسبه می کنیم، لذا داریم:

$$\begin{aligned} u(t_{n+1}) &= \varphi(y(t_{n+\frac{1}{\nu}})) + h^2 e_{n+\frac{1}{\nu}} + o(h^3) \\ &= \varphi(y(t_{n+1})) - \frac{h}{\nu} \dot{y}(t_{n+1}) + o(h^2) \\ &= \varphi(y(t_{n+1})) + o(h) \\ &= x(t_{n+1}) + o(h) \end{aligned} \quad (21.4)$$

در نتیجه داریم:

$$\|u(t_{n+1}) - x(t_{n+1})\| = o(h)$$

(۳) گام $\Gamma_{\frac{h}{\nu}}$:

$$\dot{v} = g(\varphi(v(t_{n+\frac{1}{\nu}})), v) \quad t \in [t_{n+\frac{1}{\nu}}, t_{n+1}] \quad (22.4)$$

لذا گام‌های خطا در $v(t_{n+1})$ با بسط دادن حول $(t_{n+\frac{1}{p}})$ بدست می‌آید، لذا داریم:

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) &= y(t_{n+\frac{1}{p}}) + \frac{h}{p} \dot{y}(t_{n+\frac{1}{p}}) + \frac{h^2}{2} \ddot{y}(t_{n+\frac{1}{p}}) + o(h^3) \\ &= y(t_{n+\frac{1}{p}}) + \frac{h}{p} g(\varphi(y(t_{n+\frac{1}{p}})), y(t_{n+\frac{1}{p}})) + o(h^2) \end{aligned} \quad (23.4)$$

همچنین به سادگی با استفاده از تقریب $v(t_{n+1}) \simeq y(t_{n+1})$ داریم:

$$\begin{aligned} v(t_{n+1}) &= v(t_{n+\frac{1}{p}}) + \frac{h}{p} \dot{v}(t_{n+\frac{1}{p}}) + \frac{h^2}{2} \ddot{v}(t_{n+\frac{1}{p}}) + o(h^3) \\ \dot{v}(t_{n+\frac{1}{p}}) &= g(\varphi(y(t_{n+\frac{1}{p}})), y(t_{n+\frac{1}{p}})) \end{aligned}$$

با استفاده از روابط فوق داریم:

$$v(t_{n+1}) = y(t_{n+\frac{1}{p}}) + \frac{h}{p} g(\varphi(y(t_{n+\frac{1}{p}})), y(t_{n+\frac{1}{p}})) + o(h^2) \quad (24.4)$$

با توجه به این‌که

$$y(t_{n+\frac{1}{p}}) = v(t_{n+\frac{1}{p}}) + h^2 e_{n+\frac{1}{p}} + o(h^3)$$

لذا با استفاده از روابط (23.4) و (24.4) برای خطا داریم:

$$\|v(t_{n+1}) - y(t_{n+1})\| = o(h^2)$$

بدین ترتیب مرتبه همگرایی کلی بدست می‌آید. ملاحظه کنید که

$$\dots (\Gamma_{\frac{h}{p}} \circ \varphi_h \circ \Gamma_{\frac{h}{p}}) \circ (\Gamma_{\frac{h}{p}} \circ \varphi_h \circ \Gamma_{\frac{h}{p}}) \circ (\Gamma_{\frac{h}{p}} \circ \varphi_h \circ \Gamma_{\frac{h}{p}}) \quad (25.4)$$

$$\Gamma_h \circ \varphi_h \circ \Gamma_h \circ \varphi_h \circ \Gamma_h \circ \varphi_h \circ \Gamma_{\frac{h}{p}} \quad (26.4)$$

بدین ترتیب $\Gamma_{\frac{h}{p}}$ در اولین گام بدست می‌آید و مرتبه درستی آن $o(h^2)$ است و برای دنباله $(\Gamma_h \circ \varphi_h \circ \Gamma_h \circ \varphi_h \circ \Gamma_h \circ \varphi_h \circ \dots)$ برقرار است که این همان فرم تحلیل الگوریتم یک مرحله‌ای است.

نکته

برای کاهش مرتبه در روش الگوریتم دو مرحله‌ای بوسیله معادلات دیفرانسیل معمولی و معادلات دیفرانسیل جبری به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} f(x, y) = 0 \quad \implies \quad f_x \dot{x} + f_y \dot{y} = 0 \\ \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-f_x)^{-1} (f_y) g \\ g \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (27.4)$$

توجه داشته باشید که الگوریتم یک مرحله‌ای و الگوریتم دو مرحله‌ای برای معادلات دیفرانسیل از مرتبه یک و دو استفاده می‌شود و این روش برای مشتقات بالاتر نسبتاً مشکل است.

۵.۱.۴ افزایش مرتبه به وسیله تصحیح نهایی

در این قسمت با به‌کاربردن تصحیح نهایی یک روش جدید برای گام‌ها از مرتبه دو نتیجه می‌گیریم. اگر v را جواب تقریبی و y را جواب دقیق مساله در نظر بگیریم، با استفاده از معادله خطا داریم:

$$e = v - y$$

با استفاده از تقریب ε می‌توان نوشت:

$$V = v - \varepsilon$$

درستی v را می‌توان با استفاده از روش‌هایی با مرتبه بالاتر نیز بدست آورد که با استفاده از حل اصلی v به خطا ε نزدیک می‌شویم.

۶.۱.۴ تصحیح نهایی

معادله دیفرانسیل جبری زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{pmatrix} \dot{v} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t, x, y) \\ g(t, x, y) \end{pmatrix}$$

اساس و پایه این معادله همانند $\Gamma_h \circ \varphi_h$ از مرتبه اول است، لذا با توجه به مطالب گفته شده داریم:

$$\dot{v} = g(t, \varphi(t, v_n), v) \quad t_n \leq t < t_{n+1} \quad (28.4)$$

$$f(t, \varphi(t, y), y) = \circ \quad v_n = v(t_n)$$

بنابراین با توجه به رابطه $e = v - y$ می‌توانیم خطای دقیق معادله را به صورت زیر بدست آوریم.

$$\dot{e} = g(t, \varphi(t, v_n), v(t)) - g(t, \varphi(t, v(t) - e(t)), v(t) - e(t))$$

توجه داشته باشید که در رابطه فوق، $e(t) = v(t) - y(t)$ ، لذا:

$$y(t) = v(t) - e(t)$$

در روش گام کسری یک مرحله‌ای $e(t)$ را با e_n جایگزین می‌کنیم. همچنین حاصل گام دو مرحله‌ای را با ترکیب کردن گام‌های یک مرحله‌ای می‌توانیم بدست آوریم.

$$\dot{v} = g(t, \varphi(t, v_n), v(t)) \quad v(t_n) = v_n \quad t_n \leq t < t_{n+1}$$

حال برای درستی گام داریم:

$$\dot{\varepsilon} = g(t, \varphi(t, v_n), v(t)) - g(t, \varphi(t, v(t)), v(t) - \varepsilon(t)) \quad (29.4)$$

$$t_n \leq t < t_{n+1} \quad \text{و} \quad \varepsilon(t_n) = \circ$$

بنابراین راه حل تصحیح شده $V(t) = v(t) - \varepsilon(t)$ و همگرایی هر گام بدین ترتیب بدست می‌آید. اگر $\varepsilon_n = \circ$ را مقدار اولیه در نظر بگیریم با حذف آن درستی رابطه (۲۷، ۲) نیز بدست می‌آید. با ثابت باقی ماندن هر گام اساس روش حل مساله به سادگی بدست می‌آید، زیرا معادله دیفرانسیل معمولی برای تصحیح نهایی استفاده می‌شود.

۷.۱.۴ آنالیز همگرایی

توجه داشته باشید که ایده و اثبات همگرایی در الگوریتم دو مرحله‌ای همانند الگوریتم یک مرحله‌ای است. همچنین با توجه به تعریف تصحیح نهایی بدست می‌آید. ابتدا معادله دیفرانسیل زیر را در نظر گرفته، داریم:

$$\dot{y} = g(t, \varphi(t, y), y)$$

$$\dot{v} = g(t, \varphi(t, v_n), v(t))$$

از طرفی $e = v - y$ است. لذا داریم:

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \dot{v} - \dot{y} = g(t, \varphi(t, v_n), v(t)) - g(t, \varphi(t, y), y) \\ &= g_x \bar{\varphi}_y (v_n - y) + g_x \bar{\varphi}_t (x_n - t) + \bar{g}_y (v - y) \\ &= -\bar{g}_x f_x^{-1} f_y (v_n - y) + g_x \bar{\varphi}_t (t_n - t) + \bar{g}_y e \end{aligned}$$

نکته مهم این است که مشتق‌گیری و محاسبه ضرایب ماتریس یا بردار، مقادیر متفاوت بدست می‌آید. حال برای سادگی رابطه فوق مقادیر زیر را در نظر می‌گیریم:

$$v_n - y = v_n - y_n + y_n - y$$

$$b = g_x \bar{\varphi}_t \quad A = -\bar{g}_x f_x^{-1} f_y \quad c = \bar{g}_y$$

با جایگذاری این روابط داریم:

$$\dot{e} = Ae_n + A(y_n - y) + b(t_n - t) + ce$$

حال با در نظر گرفتن کران برای مقادیر داده شده داریم:

$$\|A\| \leq \alpha \quad \|b\| \leq \beta \quad \|c\| \leq \gamma$$

$$\begin{aligned} \|e_t\| &= \|e_n + \int_{t_n}^t Ae_n ds + \int_{t_n}^t A(y_n - y) ds + \int_{t_n}^t ce(s) ds\| \\ &\leq \|e_n\| + \alpha(t - t_n)(\|e_n\| + \|y_n - y\|) + \frac{\beta}{\gamma}(t - t_n)^2 + \gamma \int_{t_n}^t \|e_s\| ds \end{aligned}$$

تعریف می‌کنیم

$$a = \|e_n\| + \alpha(t - t_n)(\|e_n\| + \|y_n - y\|) + \frac{\beta}{\gamma}(t - t_n)^2 \quad b = \gamma$$

با استفاده از نامعادله گران ول داریم:

$$0 \leq u(t) \leq a + b \int_0^t u(s) ds$$

لذا نتیجه می‌گیریم:

$$u(t) \leq a \cdot \exp(bt)$$

اثبات روابط فوق طبق نامعادله گران وال به صورت زیر است.

$$0 \leq u'(t) \leq bu(t)$$

$$\begin{aligned} u(t) &\leq u(a) \cdot \exp \int_0^t b ds = u(a) \cdot \exp(bt - a) \\ &= u(a) \cdot \exp(bt) \cdot \exp(-ba) \end{aligned}$$

با توجه به این که $0 \leq u(0) \leq a$ داریم:

$$u(t) \leq u(0) \cdot \exp(bt) \leq a \cdot \exp(bt)$$

حال با توجه به بسط تیلور روی y داریم:

$$\|e_{n+1}\| \leq \exp[(\alpha + \gamma)h] \|e_n\| + \delta h^2$$

در این جا δ یک کران برای رابطه زیر می باشد.

$$(\alpha \|\dot{y}\| + \frac{\beta}{\varphi}) \exp[\gamma h] \leq \delta$$

با تکرار این نامعادله داریم:

$$\|e_n\| \leq \frac{\exp[(\alpha + \gamma)t_n]^{-1}}{(\alpha + \gamma)} \delta h$$

که همگرایی رابطه ثابت می شود.

در روش الگوریتم دو مرحله ای اثبات ساده است. ابتدا بوسیله بسط تیلور و استفاده از رابطه $\delta(t) = V(t) - y(t)$ داریم:

$$\begin{aligned} \dot{\delta}(t) &= \dot{V}(t) - \dot{y}(t) \\ &= g(t, \varphi(t, v(t)), v(t) - \epsilon(t)) \\ &\quad - g(t, \varphi(t, v(t) - \delta(t)), v(t) - \delta(t)) \\ &= g_x \bar{\varphi}_y \epsilon(t) + g_x \bar{\varphi}_y \delta(t) + \bar{g}_y \delta(t) \end{aligned}$$

حال با استفاده از روابط زیر

$$A = g_x \bar{\varphi}_y \quad B = \bar{g}_y$$

داریم:

$$\begin{aligned} &= A\epsilon(t) + A\delta(t) + B\delta(t) \\ &= A\epsilon(t) + (A + B)\delta(t) \end{aligned}$$

همچنین با توجه به روابط زیر

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}(t) &= A(v_n - v(t)) + B\epsilon(t) \\ \|A\| &\leq \alpha \quad , \quad \|B\| \leq \beta \end{aligned}$$

داریم:

$$\|v(t) - v_n\| \leq \int_{t_n}^t \|g(s, \varphi(s, v_n), v(s))\| ds \leq hG$$

که در رابطه فوق G ماکزیمم کران برای $\|g\|$ است در نتیجه

$$\|\epsilon(t)\| \leq G\alpha h^2 + \beta \int_{t_n}^t \|\epsilon(s)\| ds$$

طبق نامعادله گرون وال داریم:

$$\begin{aligned} \epsilon(t) &\leq \epsilon(a) \exp \int_a^t \beta ds \\ &= \epsilon(a) \exp(\beta(t - a)) \\ &= \epsilon(a) \exp(\beta t) \exp(-\beta a) \end{aligned}$$

با توجه به این‌که، $\circ \leq \epsilon(a) \leq G\alpha h^2$ داریم:

$$\|\epsilon(t)\| \leq G\alpha h^2 \exp(\beta t)$$

همچنین با توجه به رابطه

$$\delta(t) \leq \|\delta(t)\| + \exp\left(\int_a^{t=h} \alpha \|\epsilon(t)\| ds\right) + (\alpha + \beta) \int_a^{t=h} \|\delta(t)\| ds$$

از طرفی

$$\|\epsilon(s)\| \leq G\alpha h^2 \exp(\beta t)$$

لذا با توجه به نامعادله Gronwall و رابطه فوق داریم:

$$\|\delta(t)\| \leq \|\delta(n)\| + G\alpha h^2 \exp[\beta h] \exp(\alpha + \beta)[(\alpha + \beta)h]$$

بدین ترتیب همگرایی $\|\delta_n\| \leq o(h^2)$ نتیجه می‌شود.

۸.۱.۴ روش گام کسری برای حل معادلات دیفرانسیل جبری با اندیس ۲

ابتدا معادلات دیفرانسیل جبری با اندیس ۲ را تعریف می‌کنیم، فرم کلی معادلات دیفرانسیل اندیس ۲ به صورت؛

$$\begin{cases} u_1'(t) = f(u_1(t), u_2(t)) \\ \circ = g(u_1(t)) \end{cases}$$

معادله دیفرانسیل جبری فوق اندیس ۲ دارد زیرا

$$\begin{aligned} \circ &= \frac{dg(u_1(t))}{dt} \\ &= g_{u_1}(u_1(t))u_1'(t) \end{aligned}$$

با استفاده از $u_1'(t) = f(u_1(t), u_2(t))$ و جایگذاری در رابطه فوق داریم:

$$\begin{aligned} \circ &= g_{u_1}(u_1(t))f(u_1(t), u_2(t)) \\ &= h(u_1(t), u_2(t)) \end{aligned}$$

با مشتق گرفتن از رابطه فوق داریم:

$$\circ = hu_{u_1}(u_1(t), u_2(t))u_1'(t) + hu_{u_2}(u_1(t), u_2(t))u_2'(t)$$

نتیجه می‌گیریم

$$u_2'(t) = -[h_{u_2}(u_1(t), u_2(t))]^{-1} h_{u_1}(u_1(t), u_2(t))u_1'(t)$$

توجه داشته باشید که $h_{u_2}(u_1(t), u_2(t))$ منحصر به فرد نیست، حال داریم:

$$\begin{cases} u_1'(t) = f(u_1(t), u_2(t)) \\ u_2'(t) = -[h_{u_2}(u_1(t), u_2(t))]^{-1} h_{u_1}(u_1(t), u_2(t))u_1'(t) \end{cases}$$

در نتیجه با دوبار مشتق گرفتن، تبدیل به یک سیستم معادله دیفرانسیل معمولی شد. لذا به آن معادله دیفرانسیل جبری اندیس دو می‌گویند.

مثال معادله دیفرانسیل جبری زیر را در نظر بگیرید

$$y_1'(t) = y_1(t) + r_1(t)$$

$$\circ = -y_2(t) + r_2(t)$$

با مشتق گیری اول داریم:

$$y_1''(t) = y_1'(t) + r_1'(t)$$

$$\circ = -y_1'(t) + r_2'(t)$$

سپس

$$y_1'(t) = r_2'(t)$$

$$r_2'(t) = -y_1'(t) + r_1(t)$$

با مشتق گیری دوم داریم:

$$y_1''(t) = r_2''(t)$$

$$y_1'(t) = r_2''(t) - r_2'(t)$$

لذا مساله اندیس دو دارد.

حال به بررسی روش گام کسری برای معادلات دیفرانسیل جبری با اندیس ۲ می‌پردازیم. ابتدا معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(x, y) \\ f(x) \end{pmatrix} = X$$

سپس به صورت زیر در هر گام تقریب می‌زنیم، لذا داریم:

$$\overbrace{\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \circ \end{pmatrix}}^{\varphi} = \begin{pmatrix} \circ \\ f(x) \end{pmatrix} \quad \overbrace{\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}}^{\Gamma} = \begin{pmatrix} g(x, y) \\ \circ \end{pmatrix}$$

لذا می‌توان نوشت:

$$X = \varphi + \Gamma$$

حال الگوریتم یک مرحله‌ای را برای معادلات دیفرانسیل جبری با اندیس ۲ در نظر می‌گیریم. در این معادله دیفرانسیل جبری اندیس ۲ با استفاده از مفروضات از تابع φ نتیجه‌گیری می‌کنیم. بنابراین داریم:

$$f(x) = \circ \implies f_x \cdot \dot{x} = \circ$$

$$\implies f_x \cdot g(x, y) = \circ$$

$$\implies h(x, y) = \circ$$

$$\implies \varphi(x) = y$$

لذا

$$\dot{x} = g(x, y) = g(x, \varphi(x))$$

حال با استفاده از بسط تیلور و قاعده زنجیره ای $x(t)$ را بدست می‌آوریم. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} x(t_{n+1}) &= x(t_n) + h\dot{x}(t_n) + \frac{h^2}{2!}\ddot{x}(t_n) + o(h^3) \\ &= x(t_n) + hg(x(t_n), \varphi(x(t_n))) + \frac{h^2}{2!}(g_x(x(t_n))\dot{x}(t_n), \varphi(x(t_n))) \\ &\quad + g_y(x(t_n)\dot{\varphi}(x(t_n)), \varphi(x(t_n))) + o(h^3) \end{aligned}$$

همچنین می‌توان در نظر گرفت:

$$y(t_{n+1}) = \varphi(x(t_{n+1}))$$

حال برای تحلیل خطا، در گام اول مقدار $x(t_n)$ را ثابت در نظر می‌گیریم و تقریب $v(t)$ را برای الگوریتم یک مرحله‌ای در نظر گرفته داریم:

$$v(t) \simeq x(t_n)$$

طبق رابطه $\dot{x} = g(x, y)$ می‌توان نوشت:

$$\dot{v} = g(v, y(t_n)) = g(v, \varphi(x(t_n))) \quad t_n \leq t < t_{n+1}$$

بنابراین با استفاده از بسط تیلور داریم:

$$\begin{aligned} v(t_{n+1}) &= v(t_n) + h\dot{v}(t_n) + \frac{h^2}{2!}\ddot{v}(t_n) + o(h^3) \\ &= x(t_n) + hg(x(t_n) + \varphi(x(t_n))) + \frac{h^2}{2!}(g_x(x(t_n), \varphi(x(t_n)))\dot{x}(t_n)) + o(h^3) \end{aligned}$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} v(t_{n+1}) - x(t_{n+1}) &= x(t_n) + hg(x(t_n) + \varphi(x(t_n))) \\ &\quad + \frac{h^2}{2!}(g_x(x(t_n), \varphi(x(t_n)))\dot{x}(t_n)) - x(t_n) \\ &\quad - hg(x(t_n), \varphi(x(t_n))) - \frac{h^2}{2!}(g_x(x(t_n))\dot{x}(t_n), \varphi(x(t_n))) \\ &\quad - \frac{h^2}{2!}g_y(x(t_n)\dot{\varphi}(x(t_n)), \varphi(x(t_n))) \\ &= \frac{h^2}{2!}g_y(x(t_n)\dot{\varphi}(x(t_n)), \varphi(x(t_n))) + o(h^3) \end{aligned}$$

که با قرار دادن

$$e(t_{n+1}) = \frac{g_y(x(t_n)\dot{\varphi}(x(t_n)), \varphi(x(t_n)))}{2!}$$

داریم:

$$v(t_{n+1}) - x(t_{n+1}) = h^2 e(t_{n+1}) + o(h^3)$$

که e ، یک تابع هموار است. حال با استفاده از φ_h مقدار عددی u را برای y در نظر گرفته، داریم:

$$\begin{aligned} u(t_{n+1}) &\simeq y(t_{n+1}) \\ y(t_{n+1}) &= \varphi(x(t_{n+1})) \\ x(t_{n+1}) &\simeq v(t_{n+1}) \end{aligned}$$

در نتیجه با توجه به روابط فوق داریم:

$$u(t_{n+1}) = \varphi(x(t_{n+1}))$$

بنابراین

$$\begin{aligned} u(t_{n+1}) &= \varphi(v(t_{n+1})) = \varphi(x(t_{n+1}) + h^2 e(t_{n+1}) + o(h^3)) \\ &= \varphi(x(t_{n+1}) + h^2 \varphi_x(x(t_{n+1})) e_{n+1} + o(h^3)) \\ &= x(t_{n+1}) + h^2 \varphi_x(x(t_{n+1})) e_{n+1} + o(h^3) \end{aligned}$$

لذا با استفاده از روابط فوق می‌توان نتیجه گرفت:

$$\|y(t_{n+1}) - u(t_{n+1})\| = o(h^2)$$

$$\|x(t_{n+1}) - v(t_{n+1})\| = o(h^2)$$

۹.۱.۴ روش گام کسری برای حل معادلات دیفرانسیل جبری با اندیس m

اگر بخواهیم این روش را برای معادلات دیفرانسیل جبری با اندیس m تعمیم دهیم، ابتدا فرم معادلات دیفرانسیل جبری با اندیس m را در نظر می‌گیریم.

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1'(t) = f(u_1(t), u_2(t)) \\ u_2'(t) = g(u_1(t), u_2(t), u_3(t))r \\ u_3'(t) = h(u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t)) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{(m)}'(t) = k(u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \\ \circ = h(u_1(t)) \end{array} \right.$$

با توجه به تعداد مشتقاتی که در معادله دیفرانسیل جبری با اندیس m وجود دارد این روش برای این گونه معادلات مشکل است.

در این قسمت به بررسی چند مثال با توجه به روش گفته شده می‌پردازیم.

مثال ۱.۱.۴. معادله دیفرانسیل جبری با اندیس ۱ به صورت $\begin{pmatrix} \circ \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^3 - y^2 \\ x \end{pmatrix}$ با مقادیر اولیه $x_0 = 1$ و $y_0 = 1$ را در نظر می‌گیریم. لذا داریم:

$$x_0^3 - y_0^2 = 0$$

ابتدا معادله را به فرم معادله Q - جبری و Γ - (ODE) تجزیه می‌کنیم در این صورت داریم:

$$\overbrace{\begin{pmatrix} \circ \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^3 - y^2 \\ \circ \end{pmatrix}}^{-\varphi} \quad \overbrace{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \circ \\ x \end{pmatrix}}^{ODE-\Gamma}$$

$$x^3 - y^2 = 0 \Rightarrow 3x^2 x' - 2yy' = 0 \Rightarrow x' = \frac{2yy'}{3x^2}$$

با توجه به معادله Γ داریم:

$$x' = \frac{2yy'}{3x^2} = \frac{2yx}{3x^2} = \frac{2y}{3x}$$

لذا می‌توان نوشت.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2y}{3x} \\ x \end{pmatrix}$$

حال با توجه به الگوریتم یک مرحله‌ای داریم:

DAE	ODE
$y_{n+1} = y_n + x_n h$	$y_{n+1} = y_n + x_n h$
$x_{n+1} = y_{n+1}^{\frac{2}{3}}$	$x_{n+1} = (x_n^2 + \frac{4h}{3} y_{n+1})^{\frac{1}{3}}$

اگر $n = 0$ را در نظر بگیریم در این صورت برای گام DAE داریم:

$$n = 0 \quad y_0 = 1, x_0 = 1 \quad y_1 = y_0 + x_0 h \Rightarrow y_1 = 1 + h$$

$$x_1 = y_1^{\frac{2}{3}} \quad \Rightarrow \quad x_1 = (1 + h)^{\frac{2}{3}}$$

همچنین برای گام ODE داریم:

$$y_1 = 1 + h \Rightarrow x_1 = (x_0^2 + \frac{4h}{3} y_1)^{\frac{1}{3}}$$

$$x_1 = (1 + \frac{4h}{3}(1 + h))^{\frac{1}{3}}$$

$$x_1 = (1 + \frac{4h}{3} + \frac{4h^2}{3})^{\frac{1}{3}}$$

حال با توجه به مقادیر y_1 و x_1 بدست آمده، مرحله دوم را انجام می‌دهیم.

$$n = 1 \quad \begin{cases} y_2 = y_1 + x_1 h = (1 + h) + (1 + h)^{\frac{2}{3}} h \\ x_2 = y_2^{\frac{2}{3}} \Rightarrow x_2 = ((1 + h) + (1 + h)^{\frac{2}{3}} h)^{\frac{2}{3}} \end{cases}$$

همچنین برای گام ODE داریم:

$$n = 2 \quad \begin{cases} y_2 = y_1 + x_1 h \\ y_2 = (1 + h) + (1 + \frac{4h}{3} + \frac{4}{3}h^2)^{\frac{1}{3}} h \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = (x_1^2 + \frac{4h}{3}y_2)^{\frac{1}{3}} \\ x_2 = ((1 + \frac{4h}{3} + \frac{4}{3}h^2)^{\frac{1}{3}} + \frac{4h}{3}((1 + h) + ((1 + \frac{4h}{3} + \frac{4}{3}h^2)^{\frac{1}{3}}h)))^{\frac{1}{3}} \end{cases}$$

به همین ترتیب مساله را ادامه می دهیم.

حال مساله را با توجه به الگوریتم دو مرحله ای حل می کنیم. در این صورت داریم:

DAE	ODE
$y_{n+\frac{1}{3}} = y_n + x_n \frac{h}{3}$	$y_{n+\frac{1}{3}} = y_n + x_n \frac{h}{3}$
$x_{n+1} = y_{n+\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}$	$x_{n+1} = (x_n^2 + \frac{4h}{3}y_{n+\frac{1}{3}})^{\frac{1}{3}}$
$y_{n+1} = y_{n+\frac{1}{3}} + x_{n+1} \frac{h}{3}$	$y_{n+1} = y_{n+\frac{1}{3}} + x_{n+1} \frac{h}{3}$

لذا برای $n = 0$ داریم:

$$\begin{cases} y_{\frac{1}{3}} = y_0 + x_0 \frac{h}{3} \\ y_{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{h}{3} \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 = y_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \\ x_1 = (1 + \frac{h}{3})^{\frac{2}{3}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = y_{\frac{1}{3}} + x_1 \frac{h}{3} \\ y_1 = (1 + \frac{h}{3}) + (1 + \frac{h}{3})^{\frac{2}{3}} \frac{h}{3} \end{cases}$$

همچنین برای گام ODE

$$\begin{cases} y_{\frac{1}{3}} = y_0 + x_0 \frac{h}{3} \\ y_{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{h}{3} \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 = (x_0^2 + \frac{4h}{3}y_{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{3}} \\ x_1 = (1 + \frac{4h}{3}(1 + \frac{h}{3}))^{\frac{1}{3}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = y_{\frac{1}{3}} + x_1 \frac{h}{3} \\ y_1 = (1 + \frac{h}{3}) + (1 + \frac{4h}{3}(1 + \frac{h}{3}))^{\frac{1}{3}} \frac{h}{3} \end{cases}$$

که این روند بدین ترتیب ادامه دارد و مقادیر مختلف x و y را بدست می آوریم. جدول های زیر مقادیر مختلف x و y را برای مثال فوق نشان می دهد.

الگوریتم یک مرحله ای ؛

جدول ۴.۱ . برای گام معادله DAE				
h	y_1	x_1	y_2	x_2
۰.۰۰۰۰۰۰	۱.۰۰۰۰۰۰	۱.۰۰۰۰۰۰	۱.۰۰۰۰۰۰	۱.۰۰۰۰۰۰
۰.۲۵۰۰۰۰	۱.۲۵۰۰۰۰	۱.۱۶۰۳۹۷	۱.۵۴۰۰۹۹	۱.۳۳۳۶۲۰
۰.۵۰۰۰۰۰	۱.۵۰۰۰۰۰	۱.۳۱۰۳۷۰	۲.۱۵۵۱۸۵	۱.۶۶۸۴۸۷
۰.۷۵۰۰۰۰	۱.۷۵۰۰۰۰	۱.۴۵۲۱۹۶	۲.۸۳۹۱۴۷	۲.۰۰۵۰۵۰

جدول ۴.۲ . برای گام معادله ODE				
h	y_1	x_1	y_2	x_2
۰.۰۰۰۰۰۰	۱.۰۰۰۰۰۰	۱.۰۰۰۰۰۰	۱.۰۰۰۰۰۰	۱.۰۰۰۰۰۰
۰.۲۵۰۰۰۰	۱.۲۵۰۰۰۰	۲.۱۷۹۴۴۹	۱.۷۹۴۸۶۲	۲.۳۱۲۶۳۵
۰.۵۰۰۰۰۰	۱.۵۰۰۰۰۰	۲.۴۴۹۴۸۹	۲.۷۲۴۷۴۴	۲.۷۹۵۷۹۸
۰.۷۵۰۰۰۰	۱.۷۵۰۰۰۰	۲.۷۲۳۳۵۵	۳.۷۹۲۵۱۶	۳.۳۴۸۰۱۱

الگوریتم دو مرحله ای ؛

جدول ۴.۳ . برای گام معادله DAE			
h	y_1	x_1	y_1
۰.۰۰۰۰۰۰	۱.۰۰۰۰۰۰	۱.۰۰۰۰۰۰	۱.۰۰۰۰۰۰
۰.۲۵۰۰۰۰	۱.۱۲۵۰۰۰	۱.۰۸۱۶۸۷	۱.۲۶۰۲۱۰
۰.۵۰۰۰۰۰	۱.۲۵۰۰۰۰	۱.۱۶۰۳۹۷	۱.۵۴۰۰۹۹
۰.۷۵۰۰۰۰	۱.۳۷۵۰۰۰	۱.۲۳۶۵۲۱	۱.۸۳۸۶۹۵

جدول ۴.۴ . برای گام معادله ODE			
h	y_1	x_1	y_1
۰.۰۰۰۰۰۰	۱.۰۰۰۰۰۰	۱.۰۰۰۰۰۰	۱.۰۰۰۰۰۰
۰.۲۵۰۰۰۰	۱.۱۲۵۰۰۰	۱.۱۷۲۶۰۳	۱.۲۷۱۵۷۵
۰.۵۰۰۰۰۰	۱.۲۵۰۰۰۰	۱.۳۵۴۰۰۶	۱.۵۸۸۵۰۱
۰.۷۵۰۰۰۰	۱.۳۷۵۰۰۰	۱.۵۴۱۱۰۳	۱.۹۵۲۹۱۳

مثال ۲.۱.۴ . معادله دیفرانسیل جبری با اندیس ۲ ، به فرم زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} y' = x \\ \circ = t - y^2 \end{cases}$$

ابتدا معادله را تجزیه می‌کنیم .

$$\begin{pmatrix} \circ \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t - y^2 \\ x \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\overbrace{\begin{pmatrix} \circ \\ y' \end{pmatrix}}^{-\varphi} = \begin{pmatrix} t - y^2 \\ \circ \end{pmatrix} , \quad \overbrace{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}}^{ODE-\Gamma} = \begin{pmatrix} \circ \\ x \end{pmatrix}$$

سپس معادله دیفرانسیل جبری با اندیس ۲ را تبدیل به معادله دیفرانسیل معمولی می‌کنیم. لذا داریم:

$$\begin{aligned} t - y^2 &= 0 \Rightarrow 0 = 1 - 2yy' \Rightarrow 0 = 1 - 2yx \\ 0 &= 1 - 2y'x - 2yx' \\ 0 &= 1 - 2x^2 - 2yx' \Rightarrow x' = \frac{1 - 2x^2}{2y} \end{aligned}$$

لذا داریم:

$$\begin{cases} y' = x \\ x' = \frac{1 - 2x^2}{2y} \end{cases}$$

همچنین

$$t - y^2 = 0 \Rightarrow y = \sqrt{t} \Rightarrow yy' = \frac{1}{2\sqrt{t}} \Rightarrow x = y^2 \sqrt{t}$$

حال با توجه به الگوریتم یک مرحله‌ای داریم:

DAE	ODE
$y_{n+1} = y_n + hy_n = y_n + hx_n$	$y_{n+1} = y_n + hx_n$
$x_{n+1} = \frac{y_{n+1}}{y_n} h$	$x_{n+1} = x_n + h\left(\frac{1 - 2x_n^2}{2y_{n+1}}\right)$

حال با توجه به $n = 0$ و مقادیر اولیه $x_0 = 1$ و $y_0 = 1$ داریم:

$$y_1 = y_0 + hx_0 = 1 + h$$

$$x_1 = \frac{y_1}{y_0} h \Rightarrow x_1 = (1 + h)h$$

همچنین برای مرحله ODE داریم:

$$y_1 = 1 + h$$

$$x_1 = x_0 + h\left(\frac{1 - 2x_0^2}{2y_1}\right)$$

$$\Rightarrow x_1 = 1 + h\left(\frac{-1}{2(1+h)}\right) = 1 - \frac{h}{2(1+h)}$$

همچنین با توجه به الگوریتم دو مرحله‌ای داریم:

DAE	ODE
$y_{n+\frac{1}{2}} = y_n + x_n \frac{h}{2}$	$y_{n+\frac{1}{2}} = y_n + x_n \frac{h}{2}$
$x_{n+1} = \frac{y_{n+\frac{1}{2}}}{y_n} h$	$x_{n+1} = x_n + h\left(\frac{1 - 2x_n^2}{2y_{n+\frac{1}{2}}}\right)$
$y_{n+1} = y_{n+\frac{1}{2}} + x_{n+1} \frac{h}{2}$	$y_{n+1} = y_{n+\frac{1}{2}} + x_{n+1} \frac{h}{2}$

بدین ترتیب مقادیر مختلف x و y را بدست می‌آوریم.

الگوریتم یک مرحله ای ؛

جدول ۴.۵ . برای گام معادله DAE		
h	y_1	x_1
۰.۰۰۰۰۰۰	۱.۰۰۰۰۰۰	۰.۰۰۰۰۰۰
۰.۲۵۰۰۰۰	۱.۲۵۰۰۰۰	۰.۳۱۲۵۰۰
۰.۵۰۰۰۰۰	۱.۵۰۰۰۰۰	۰.۷۵۰۰۰۰
۰.۷۵۰۰۰۰	۱.۷۵۰۰۰۰	۱.۳۱۲۵۰۰

جدول ۴.۶ . برای گام معادله ODE		
h	y_1	x_1
۰.۰۰۰۰۰۰	۱.۰۰۰۰۰۰	۱.۰۰۰۰۰۰
۰.۲۵۰۰۰۰	۱.۲۵۰۰۰۰	۰.۹۰۰۰۰۰
۰.۵۰۰۰۰۰	۱.۵۰۰۰۰۰	۰.۸۳۳۳۳۴
۰.۷۵۰۰۰۰	۱.۷۵۰۰۰۰	۰.۷۸۵۷۱۵

الگوریتم دو مرحله ای ؛

جدول ۴.۷ . برای گام معادله DAE			
h	$y_{\frac{1}{4}}$	x_1	y_1
۰.۰۰۰۰۰۰	۱.۰۰۰۰۰۰	۰.۰۰۰۰۰۰	۱.۰۰۰۰۰۰
۰.۲۵۰۰۰۰	۱.۲۵۰۰۰۰	۰.۳۱۲۵۰۰	۱.۲۸۹۰۶۲
۰.۵۰۰۰۰۰	۱.۵۰۰۰۰۰	۰.۷۵۰۰۰۰	۱.۶۸۷۵۰۰
۰.۷۵۰۰۰۰	۱.۷۵۰۰۰۰	۱.۳۱۲۵۰۰	۲.۲۴۲۱۸۷

جدول ۴.۸ . برای گام معادله ODE			
h	$y_{\frac{1}{4}}$	x_1	y_1
۰.۰۰۰۰۰۰	۱.۰۰۰۰۰۰	۰.۰۰۰۰۰۰	۱.۰۰۰۰۰۰
۰.۲۵۰۰۰۰	۱.۲۵۰۰۰۰	۰.۹۰۰۰۰۰	۱.۳۶۲۵۰۰
۰.۵۰۰۰۰۰	۱.۵۰۰۰۰۰	۰.۸۳۳۳۳۴	۱.۷۰۸۳۳۳
۰.۷۵۰۰۰۰	۱.۷۵۰۰۰۰	۰.۷۸۵۷۱۵	۲.۰۴۴۶۴۳

پیوست ضمائم

ضمیمه فصل سوم
فرض کنید ماتریس A

$$A = \begin{bmatrix} b & c & \circ & \circ & \circ \\ d & a & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & a & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & a & \circ \\ \circ & e & \circ & \circ & a \end{bmatrix}$$

سپس مقادیر ویژه ماتریس A را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\lambda_1 = \frac{a+b-f}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{a+b+f}{2}$$

$$\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = a$$

$$f = \sqrt{(a-b)^2 + 4cd}$$

ماتریس قطری $\Lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5]$ و ماتریس وارون پذیر Q را در نظر می‌گیریم، به طوری که $A = Q\Lambda Q^{-1}$

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \circ & \circ & \circ \\ q_{21} & q_{22} & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & 1 & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & 1 & \circ \\ 1 & 1 & \circ & \circ & 1 \end{bmatrix} \quad Q^{-1} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \circ & \circ & \circ \\ P_{21} & P_{22} & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & 1 & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & 1 & \circ \\ P_{51} & P_{52} & \circ & \circ & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}q_{11} &= \frac{\Upsilon cd + (a-b)(a-b+f)}{\Upsilon de} & q_{12} &= \frac{\Upsilon cd + (a-b)(a-b-f)}{\Upsilon de} \\q_{21} &= \frac{b-a-f}{\Upsilon e} & q_{22} &= \frac{b-a+f}{\Upsilon e} \\P_{11} &= \frac{e(b-a+f)}{\Upsilon cf} & P_{12} &= \frac{((a-b)(f-a+b) - \Upsilon cd)e}{\Upsilon cdf} \\P_{21} &= \frac{e(a-b+f)}{\Upsilon cf} & P_{22} &= \frac{((a-b)(f+a-b) + \Upsilon cd)e}{\Upsilon cdf} \\P_{\Delta 1} &= \frac{-e}{c} & P_{\Delta 2} &= \frac{(b-a)e}{cd}\end{aligned}$$

مراجع

- [1] Armero. F, Simo. J.C, A new unconditionally stable fractional step method for nonlinear coupled thermomechanical problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 35 (1992) 737–756.
- [2] Albarreal et al, Convergence analysis and errorestimates for a Parallel for algorithm for solving the Navier-Stokes equations, *Numer. Math.* 93 (2002) 201-221.
- [3] Bernardi. C, Maday. Y, *Approximations Spectrales de Proble‘mes aux Limites Elliptiques*, Springer, Paris, 1992.
- [4] Blair. J. Perot, An analysis of the fractional step method, *J. Compute. Phys*, 108, 51, (1993).
- [5] Bradshaw. P, Compressible turbulent shear layers, *Ann. Rev. Fluid. Mech.* 9 (1977) 33–54.
- [6] Brenan. K.E, Campbell. S.L, Petzold. L.R, *Numerical Solution of Initial-value Problems in Differential-algebraic Equations*, Elsevier Science Pub. Co., North-Holland, New York, 1989.
- [7] Brezzi. F, On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrange multipliers, *R.A.I.R.O. Anal. Nume´r.* 8 (R2) (1974) 129–151.
- [8] Brown. D.L, R. Cortez, M.L. Minion, Accurate projection methods for the incompressible Navier–Stokes equations, *J. Comput. Phys.* 168 (2) (2001) 464–499.
- [9] Chorin. A.J, Numerical solutions of the Navier–Stokes equations, *Math. Comput.* 22 (1968) 745–762.
- [10] Chorin. A.J, Numerical solution of the Navier–Stokes equations, *Math. Comput.* 22 (1968) 745–762.
- [11] Chorin. A.C, Hughes. T.J.R, McCracken. M.F, Marsden. J.E, Product formulas and numerical algorithms, *Communications on Pure and Applied Mathematics* 31 (1978) 205–256.

- [12] Couzy. W, Spectral element discretization of the unsteady Navier–Stokes equations and its iterative solution on parallel computers, Ph.D. thesis, EPFL, Lausanne, 1995.
- [13] E. Fernandez-Cara, M. Marin Beltran, The convergence of two numerical schemes for the Navier-Stokes equations, *Numer. Math.* 55 (1989) 33-60
- [14] Eriksson. K, Hansbo. P, and Johnson. C, Computational differential equations volume 1.
- [15] Fischer. P.F, Rønquist. E.M, Spectral element methods for large scale parallel Navier–Stokes calculations, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 116 (1–4) (1994) 69–76, ICOSAHOM 92 (Montpellier, 1992).
- [16] Gauthier. A, Saleri. F, Veneziani. A, A fast preconditioner for the incompressible Navier–Stokes equations, *Comput. Visual. Sci.* 6 (2–3) (2004) 105–112.
- [17] Gervasio. P, Saleri. F, Algebraic fractional-step schemes for time-dependent incompressible Navier–Stokes equations, *SIAM J. Numer. Anal.* 43 (1) (2005) 174–194.
- [18] Gervasio. P, Saleri. F, Veneziani. A, Analysis of high order algebraic fractional-step schemes for spectral methods (in preparation).
- [19] Glowinski. R, Splitting methods for the numerical solution of the incompressible Navier–Stokes equations, in: *Vistas in Applied Mathematics Transl. Ser. Math. Engrg.*, Optimization Software, New York, 1986, pp. 57–95.
- [20] Hairer. E, Lubich. C, Roche. M, The Numerical Solution of Differential-Algebraic Systems by Runge–Kutta Methods, *Lecture Notes in Mathematics*, Springer, New York, 1989.
- [21] Hoschek. M, Rentrop. P, and Wagner. Y, "Network approach and differential – algebraic systems in technical applications", *Sur . math . Ind .* (1999) pp . 49-75
- [22] Huang. P.G, Bradshaw. P, Coakley. T.J, Skin friction and velocity profile family for compressible turbulent boundary layers, *AIAA J.* 31 (9) (1993) 33–54.
- [23] J. Blasco, R. Codian, A. Huerta, A fractional-step method for the incompressible Navier-Stokes equations related to Predictor-multicorrector algorithm, *Int. J. Numer. Methods Fluids* 28 (1997) 1391-1419.
- [24] J. Shen, On the error estimates of some higher order Projection and Penalty Projection schemes for the Navier-Stokes equations, *Numer. Math.* 62 (1992) 49-73.
- [25] Kim. J, Moin. P, Application of a fractional step method to incompressible flows, *J. Comput. Phys.* 59 (1985) 308–323.

- [26] Klebaner. Fima C et al .,Introduction to stochastic calculus with applications, Vol . 57 , World Scientific, 2005.
- [27] Lambert. J.D, Numerical Methods for Ordinary Differential Equations: The Initial Value Problem, Wiley, New York, 1993.
- [28] McLachlan. R.I, Quispel. G.R.W, Splitting methods, Acta Numerica 11 (2002) 341–434.
- [29] Pletcher. R.H, Chen. K.-H, On solving the compressible Navier–Stokes equations for unsteady flows at very low Mach numbers, AIAA Paper 3368, 1993.
- [30] R. Codina, Pressure stability in fractional step finite element methods for incompressible flows, J. Comput. Phys. 170 (2001) 112–140.
- [31] R. Glowinski, Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems, second ed., Springer-Verlag, New York, 1984.
- [32] R. Temam, Navier-Stokes Equations: Theory and Numerical Analysis, third ed., North-Holland, Amsterdam, 1984.
- [33] Sanz-Serna. J.M, Geometric integration, in: The State of the Art in Numerical Analysis, Clarendon Press, Oxford, 1997, pp. 121–143.
- [34] Spalart. P.R, Direct numerical simulation of turbulent boundary layer up to $Re = 1410$, J. Fluid. Mech. 187 (1988) 61–98.
- [35] Sportisse. B, An analysis of operator splitting techniques in the stiff case, Journal of Computational Physics 161 (2000) 140–168.
- [36] Strang. G, On construction and comparison of difference schemes, SIAM Journal on Numerical Analysis 5 (1968) 506– 517.
- [37] Temam. R, Sur l’approximation de la solution des e´quations de Navier–Stokes par la me´thode des pas fractionnaires ii, Arch. Rat. Mech. Anal. 33 (1969) 377–385.
- [38] Veneziani. A, Block factorized preconditioners for high-order accurate in time approximation of the Navier–Stokes equations, Numer. Methods Partial Differential Equations 19 (4) (2003) 487–510.
- [39] V. Girault, P.A. Raviart, Finite Element Appoximation of the Navier-Stokes Equation, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [40] W.E and, J.-G. Liu, Projection method. I. Convergence and numerical boundary layers, SIAM J. Numer. Anal. 32 (4) (1995) 1017– 1057.

-
- [41] X.L. Feng, Y.N. He, The convergence of a new Parallel algorithm for the Navier-Stokes equations, *Nonlinear Anal.: R.W.A.* 10 (2009) 23-41.
- [42] Yoon. S, Jameson. A, An LU-SGS scheme for the Euler and Navier-Stokes equations, AIAA paper 87-600.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Valuation	ارزیابی
Euclidean	اقلیدس
Integration	انتگرال گیری
Numerical Integration	انتگرال گیری عددی
Measure	اندازه
Vector	بردار
Proof	برهان
Stably	پایدار
Continuous	پیوسته
Approximation	تقریب
Property	خاصیت ، ویژگی
Scheme	روش
Conditions	شرایط
Coefficient	ضریب
Expression	عبارت ، جمله
Element	عنصر
Function Space	فضای تابع
Sobolev space	فضای سوبولوف
Inner Product Space	فضای ضرب داخلی
Hilbert Space	فضای هیلبرت
Theorem	قضیه
Finite	متناهی
Ordered	مرتب
Problem	مساله
Eigenvalue	مقدار ویژه

Discontinuous.....	ناپیوستگی
Result	نتیجه
Equivalent	هم ارز
Convergence	همگرا
Conforming.....	یکنواخت

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Algorithm	الگوریتم
Banach Space	فضای باناخ
Boundary	مرز
Cauchy	کوشی
Cauchy Schwarz	کوشی شوارتز
Constant	ثابت
Continuous	پیوسته
Differential	دیفرانسیل
Domain	دامنه
Hilbert Space	فضای هیلبرت
Inner	داخلی
Inner Product Space	فضای ضرب داخلی
Interpolation	درون یابی
Lip Schits	لیپ شیتز
Measure	اندازه
Metod	روش
Norm	نرم
Numerical	عددی
Order	مرتب
Positive	مثبت
Quadrature	انتگرال گیری عددی
Sequence	دنباله
Sobolev Space	فضای سوبولوف
Solution	راه حل
Stably	پایدار

Theory.....	قضیه
Uniformly.....	یکنواخت
Uniqueness.....	یکتایی
Variable.....	متغیر

نمایه

- حرکت پاندول، ۶
دنباله کوشی، ۸
روش نیمه لاگرانژی، ۶۶
شبکه‌های الکتریکی، ۷
شرط لیپ‌شیتس، ۹
شرط هولدر، ۹
عدد رینولدز، ۱۱
عدد ماخ، ۱۰
- فضای
- سوبولوف، ۱۰
هیلبرت، ۸
کامل، ۸
فضای باناخ، ۹
فضای ضرب داخلی، ۸
مدل پیش بینی آب و هوا، ۷۰
معادلات دیفرانسیل جبری، ۲
معادلات دیفرانسیل معمولی، ۱
معادلات ناویه - استوکس، ۳۱
معادله هلمهولتز، ۶۶
نامساوی کوشی شوارتز، ۸
نامعادله گرون‌وال، ۱۱
نرم، ۷
اقلیدسی، ۷
ویسکوزیته، ۱۱
کران‌داری، ۹
گرادیان، ۹
- گرانروی ایستایی، ۱۱
گرانروی پویا، ۱۱

Aabstract

Differential Algebraic Equations (DAE) has numerous applications in various sciences which different methods and approaches are applied to get to a faster answer for their solutions. One of the presented methods is the Fractional step method for differential algebraic equations with indices 1 which is studied in this research. In chapter 1, the concepts and definitions are explained and we have a short review of the applications of differential algebraic equations. In chapter 2, at the beginning, the solution of differential algebraic equations with indices 1 is presented, their errors are surveyed, and, afterwards, this method is generalized for differential algebraic equations for indices 2. In chapter 3, this method is studied for compressible and incompressible Navier-Stokes equations and its algorithm is presented for this method. In the final chapter, first, semi-Lagrangian method for the Shallow Water equations is investigated. Next, we conclude that the presented Subtracting Fractional method in this research leads us to a faster answer to the Shallow Water Equations.



Shahrood University
Faculty Of Mathematical Sciences

Dissertation Submitted in Partial
Fulfillment of The Requirements For The
Degree of Master of Science in
Applied Mathematics

**Fractional step methods for solve
differential-algebraic equations**

Supervisor

Dr. Mehdi Ghovatmand

Advisor

Dr. Ali Mesforush

by

Farideh Ghelichi

2015