

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی  
گروه ریاضی کاربردی

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته  
ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

عنوان

# بهینه‌سازی روش تجزیه مقادیر تکین و کاربرد آن در حل دستگاه‌های منفرد

استاد راهنما

دکتر حجت احسنی طهرانی

استاد مشاور

دکتر علی مس فروش

دانشجو

عالم عرب

۱۳۹۳

تقدیم به همه می کسانی که

می خوانند بیشتر بدانند

# سپاس‌گزاری

حمد و سپاس یکتای بی‌همتا را که لطفش بر ما عیان است، ادای شکرش را هیچ زبان و دریای فضلش را هیچ کران نیست و اگر در این وادی هستیم، همه محبت اوست.

الهی ای مهربانتر از ما به ما، از تو می‌خواهم همه کسانی را که حتی ذره‌ای در انجام این امر مرا یاری نموده‌اند، در سایه لطف و محبت بی‌کرانت، سلامت، شادکام و موفق بداری.

از زحمات بی‌دریغ استاد راهنما عالی‌قدر جناب آقای دکتر احسنی طهرانی که در طول نگارش این مجموعه با راهنمایی‌های عالمانه و به‌جایشان، هدایت این پایان‌نامه را بر عهده داشتند کمال تشکر را دارم. از استاد گرامی جناب آقای دکتر مس‌فروش که زحمت مشاوره این پایان‌نامه را بر عهده داشتند، تشکر می‌کنم. همچنین تشکر می‌کنم از جناب آقای دکتر ناظمی و جناب آقای دکتر قوتمند که داوری این پایان‌نامه را بر عهده داشتند. از سرکار خانم طهماسبی و جناب آقای اسماعیلی که مرا در انجام این تحقیق یاری نموده‌اند، صمیمانه سپاسگزارم.

سپاس آخر تقدیم پدر و مادر عزیزم، که همیشه نیازمند محبت، لطف و دعای خیر آن‌ها هستم. در نهایت، باشد تا روزی بیش از این‌ها بدانیم، بیش از این‌ها بنویسیم و چیزهایی بخوانیم و بنویسیم که پس از خواندن و نوشتن آن‌ها این حس در ما بیدار شود که انسان‌تر شده‌ایم!

عالمه عرب  
۱۳۹۳

## تعمدنامه

اینجانب عالمه عرب دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی دانشکده علوم ریاضی دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان بهینه‌سازی روش تجزیه مقادیر تکین و کاربرد آن در حل دستگاه‌های منفرد، تحت راهنمایی دکتر حجت احسنی طهرانی متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه شاهرود “ یا “ Shahrood University “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

عالمه عرب  
۱۳۹۳

## مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

## چکیده

در این پایان‌نامه، بهینه‌سازی روش تجزیه مقدار تکین و کاربرد آن در حل دستگاه‌های منفرد را شرح می‌دهیم. از آنجایی‌که در اکثر مسایل مهندسی به دستگاه‌هایی با ماتریس ضرایب منفرد برمی‌خوریم، بنابراین، یافتن بهترین جواب این دستگاه گام مؤثری در پیشبرد اهداف عملی این مساله می‌باشد. از این رو با توجه به اهمیت این مساله، روش‌هایی بر اساس تجزیه مقدار تکین مانند روش‌های منظم‌سازی تیخونف و تجزیه مقدار تکین ناقص و ... برای حل این مسایل ارایه شده است. ما در ابتدا به بررسی و مقایسه این روش‌ها پرداخته و سپس با استفاده از روش جدید چندمرحله‌ای جوابی برای این مسایل می‌یابیم. همچنین، با معرفی روش‌های پردازش معکوس نمونه‌ای از بهینه‌سازی تجزیه مقدار تکین و کاربرد آن را ارایه نمودیم.

در نهایت، با استفاده از دکوپله‌سازی ساختار ویژه، ماتریس پس‌خورد حالت را به دست آوردیم. همچنین، با استفاده از این روش و تبدیلات تشابهی و با توجه به اهمیت کمینه کردن نورم ماتریس پس‌خورد حالت در بهینه‌سازی سیستم کنترل خطی، روش جدیدی برای رسیدن به این هدف ارایه شده است. در انتهای هر فصل، برای شرح بیشتر مثال‌های عددی نیز آورده شده است.

**کلمات کلیدی:** تجزیه مقدار تکین، روش‌های منظم‌سازی، مساله حداقل مربعات، ماتریس پس‌خورد حالت، دکوپله‌سازی ساختار ویژه.

# لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

۱. عرب. ع و احسنی طهرانی. ح، (۱۳۹۳)، ”یک روش تکراری جدید برای حل دستگاه معادلات خطی“، چهل و پنجمین کنفرانس ریاضی ایران، ص ۱۵۳-۱۵۵، سمنان.

# فهرست مطالب

۱	مقدمه و پیش‌نیاز	۱
۶	۱.۱ عدد شرطی	۱.۱
۸	۲.۱ مقدار تکین	۲.۱
۱۱	۱.۲.۱ کاربردهای تجزیه مقادیر تکین	۱.۲.۱
۱۵	۳.۱ مساله حداقل مربعات	۳.۱
۱۷	۴.۱ مقدمات کنترل	۴.۱
۱۸	۱.۴.۱ سیستم‌های دینامیکی	۱.۴.۱
۱۹	۲.۴.۱ تابع تبدیل	۲.۴.۱
۲۱	۵.۱ کنترل سیستم خطی با پس‌خورد حالت	۵.۱
۲۱	۱.۵.۱ محاسبه ماتریس پس‌خورد حالت	۱.۵.۱
۲۷	۲ روش‌های حل دستگاه‌های خطی	۲
۲۸	۱.۲ معادلات نرمال	۱.۲
۲۸	۱.۱.۲ تجزیه چولسکی	۱.۱.۲
۲۹	۲.۱.۲ فرآیند گرام اشمیت	۲.۱.۲
۳۰	۳.۱.۲ تجزیه $QR$	۳.۱.۲
۳۳	۴.۱.۲ مقایسه روش‌های چولسکی و $QR$	۴.۱.۲
۳۴	۲.۲ روش تجزیه مقدار تکین	۲.۲
۳۶	۱.۲.۲ روش شبه‌معکوس	۱.۲.۲
۳۷	۳.۲ روش‌های منظم‌سازی	۳.۲
۳۸	۱.۳.۲ روش منظم‌سازی TSVD	۱.۳.۲
۴۰	۲.۳.۲ روش منظم‌سازی تیخونف	۲.۳.۲
۴۲	۳.۳.۲ اصل اختلاف	۳.۳.۲
۴۳	۴.۳.۲ تعیین پارامتر تنظیم $\mu$ برای منظم‌سازی تیخونف	۴.۳.۲
۴۴	۵.۳.۲ روش منظم‌سازی پیشنهادی	۵.۳.۲
۴۶	۶.۳.۲ مقایسه روش‌های منظم‌سازی	۶.۳.۲
۴۷	۴.۲ پردازش معکوس	۴.۲



۴۸	..... روش ترانهاده ژاکوبی	۱.۴.۲
۴۸	..... روش حداقل مربعات میراشده	۲.۴.۲
۴۹	..... تحلیل توسط تجزیه مقدار تکین	۳.۴.۲
۵۱	..... روش حداقل مربعات میراشده انتخابی	۴.۴.۲
۵۲	..... مقایسه روش‌ها	۵.۴.۲
۵۵	<b>۳ جواب دستگاه معادلات خطی بدوضع</b>	
۵۶	..... روش ولخ و ویلنی	۱.۳
۵۸	..... روش جدید	۲.۳
۵۹	..... مثال‌های عددی	۳.۳
۶۳	<b>۴ روش جدید حل دستگاه معادلات خطی</b>	
۶۳	..... روش‌های تکراری	۱.۴
۶۴	..... ساختار کلی روش پیشنهادی	۲.۴
۶۸	<b>۵ کنترل پس‌خورد حالت با استفاده از دکوپله‌سازی ساختار ویژه</b>	
۶۸	..... بیان مساله	۱.۵
۶۹	..... مقدمات اساسی	۲.۵
۶۹	..... مساله دکوپله‌سازی استاتیک	۱.۲.۵
۷۰	..... مکمل متعامد	۲.۲.۵
۷۱	..... فرم کانونیکال سیستم	۳.۵
۷۳	..... ویژگی‌های حالت سیستم	۱.۳.۵
۷۴	..... تخصیص ساختار ویژه	۴.۵
۷۶	..... طراحی پارامتر	۵.۵
۷۹	..... روش جدید	۶.۵
۸۶	<b>۶ نتیجه‌گیری</b>	
۸۸	<b>آ برنامه‌های کامپیوتری</b>	
۸۸	..... کد متلب آزمون فیلیپس برای روش‌های منظم‌سازی	۱.آ
۹۰	..... کد متلب روش‌های منظم‌سازی	۱.۱.آ
۹۱	..... کد متلب روش‌های منظم‌سازی	۲.۱.آ
۹۴	<b>ب برنامه‌های کامپیوتری</b>	
۹۴	..... کد متلب ماتریس هیلبرت	۱.ب
۹۵	..... کد متلب ماتریس $F$	۱.۱.ب

۹۷	پ برنامه‌های کامپیوتری
۹۷	پ.۱ کد متلب محاسبه ماتریس پس‌خورد حالت . . . . .
۱۰۰	مراجع
۱۰۳	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی
۱۰۷	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی
۱۱۱	نمایه

# فصل ۱

## مقدمه و پیش‌نیاز

تجزیه مقدار تکین ( $SVD$ )<sup>۱</sup> یکی از اساسی‌ترین مفاهیم جبر خطی است. این تجزیه تاریخ طولانی و جذابی دارد. حداقل پنج ریاضیدان مشهور و کلاسیک به نام‌های ای. بلترامی<sup>۲</sup> (۱۸۹۹-۱۸۳۵)، سی. جردن<sup>۳</sup> (۱۹۲۱-۱۸۳۸)، جی. سیلوستر<sup>۴</sup> (۱۸۹۷-۱۸۱۴)، ای. اشمیت<sup>۵</sup> (۱۹۵۹-۱۸۷۶)، اچ. ویل<sup>۶</sup> (۱۹۵۵-۱۸۸۵) در توسعه نظریه  $SVD$  نقش داشته‌اند.

در سال‌های اخیر،  $SVD$  یک وسیله محاسباتی کارا، برای حل طیف وسیعی از مسایل مطرح در زمینه‌های کاربردهای عملی نظیر، نظریه کنترل، پردازش سیگنال و تصویر، هویت‌شناسی و برآورد، ساخت گفتار، الگوشناسی، تحلیل سری زمانی، نظریه شبکه الکتریکی و مهندسی زیست پزشکی می‌باشد. استفاده از  $SVD$  در این مسایل، نیاز به شناخت رتبه یک ماتریس، تقریب ماتریس با استفاده از ماتریس‌های با رتبه‌های کمتر و پایه‌های یکا متعامد برای فضاها سطری و ستونی یک ماتریس دارند. جنبه‌های نظریه کنترل و مسایل هویت‌شناسی که نیاز به استفاده از  $SVD$  دارند، شامل مسایل مربوط به کنترل‌پذیری و مشاهده‌پذیری، تحقق مدل‌های فضای حالت، کنترل  $H$ -نامتناهی، متعادل‌سازی، پایدارسازی پس‌خورد قوی، کاهش مدل و غیره می‌باشند.

در پردازش سیگنال و گفتار،  $SVD$  می‌تواند به‌عنوان فیلتری در نظر گرفته شود که برآوردی از یک سیگنال را در داده‌های نوفه (ناخالص) تولید کند. برای مثال، هنگامی که یک شخص صحبت می‌کند، در حدود ۵۰ درصد از زمان گفتاری فرد موجود نیست. بنابراین اگر نوفه‌های زمینه وجود داشته باشند که از یک پنکه، یک ماشین مرتعش، و غیره بیایند، آنگاه این اختلال‌ها در سیگنال میکروفن به هنگام وجود نداشتن گفتار، غالب خواهند بود. در چنین وضعیتی، نسبت سیگنال گفتار بر نوفه‌های زمینه باید زیادت‌ر باشد و  $SVD$  می‌تواند به‌طور مؤثری این کار را انجام دهد. در پردازش تصویر،  $SVD$  به‌طور معمول،

---

<sup>۱</sup>Singular Value Decomposition

<sup>۲</sup>E. Beltrami

<sup>۳</sup>C. Jordan

<sup>۴</sup>J. Sylvester

<sup>۵</sup>E. Schmidt

<sup>۶</sup>H. Weyl

برای فشرده‌سازی تصویر، برداشتن خش‌ها در یک عکس، و غیره استفاده می‌شود. در مهندسی زیست پزشکی نیز،  $SVD$  نقش مهمی در به‌دست آوردن یک نوار معنی‌دار از قلب جنین از روی نوار قلب مادر بازی می‌کند. به‌علاوه،  $SVD$  مؤثرترین وسیله در حل مسایل حداقل مربعات<sup>۷</sup> می‌باشد.

مسئله توانایی مسایل در استفاده از  $SVD$ ، به محاسبه مؤثر آن بستگی دارد. بنابراین، با توجه به اهمیت و کاربردهای فراوان  $SVD$ ، در این پایان‌نامه، روش‌های مختلف حل مسایل منفرد و بدووضع، با استفاده از این روش و روش‌های دیگر مورد بررسی و مقایسه قرار گرفته است. ساختار کلی پایان‌نامه به‌صورت زیر می‌باشد:

- در فصل اول، تعاریف و مقدمات مورد نیاز جبر خطی عددی و تعاریف و پیش‌نیازهای کنترل را ارائه می‌نماییم.
- در فصل دوم، روش‌های مختلف حل دستگاه معادلات خطی از طریق مساله حداقل مربعات با استفاده از روش‌هایی مانند معادلات نرمال،  $SVD$  و همچنین پردازش معکوس مورد بررسی و مقایسه قرار گرفته است.
- در فصل سوم، با استفاده از روش ارایه شده در [۱۱]، روشی جدید برای حل مسایل بدووضع معرفی شده است. در این فصل، ابتدا روشی دو مرحله‌ای برای حل مساله حداقل مربعات ارایه می‌شود. پس از آن، با معرفی روش جدید چندمرحله‌ای به جوابی دقیق‌تر از روش دو مرحله‌ای دست می‌یابیم.
- در فصل چهارم، روش تکراری جدیدی برای حل دستگاه معادلات خطی ارایه شده است. این روش با روش‌های تکراری گاوس-سایدل و  $SOR$  مورد مقایسه قرار گرفته است.
- در فصل پنجم، با استفاده از دکوپله‌سازی ساختار ویژه، ماتریس پس‌خورد حالت را محاسبه می‌نماییم. سپس، با ارایه روشی براساس تبدیلات تشابهی به می‌نیم کردن نرم ماتریس پس‌خورد حالت می‌پردازیم. همچنین، با مثال‌های عددی، روش‌های ذکر شده در فصل مورد مقایسه قرار گرفته است. لازم به ذکر است، در گردآوری این فصل از مراجع [۵]، [۶] و [۱۰] استفاده شده است.

در این فصل، برخی از تعاریف و مفاهیم اولیه و همچنین قضایایی که مورد استفاده قرار می‌دهیم را بیان می‌کنیم. هدف این فصل ایجاد زمینه برای مطالبی است که در فصل‌های بعد مورد بررسی قرار می‌گیرد.

تعریف ۱.۰.۰.۱. ماتریس مربعی  $A$  را متعامد گویند، هرگاه  $A^T = A^{-1}$ .

<sup>۷</sup>Least squares problems

تعریف ۲.۰.۱. در فضای ضرب داخلی  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  بردارهای  $v_i, v_j \in V$  متعامد هستند، هرگاه ضرب داخلی  $v_i^T v_j = 0$  باشد. همچنین، این بردارها را یک متعامد گویند، هرگاه

$$v_i^T v_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

تعریف ۳.۰.۱. برای ماتریس  $A_{m \times n}$ ، با رتبه  $r$  ( $r \leq \min(m, n)$ )، می‌توان فضای سطری  $R(A^T)$  و فضای پوچی  $N(A)$  را به ترتیب زیر تعریف نمود:

$$R(A^T) = \{b \in \mathbb{R}^n \mid \exists x \in \mathbb{R}^m; \quad b = A^T x\},$$

$$N(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}.$$

تعریف ۴.۰.۱. فضای برداری  $V$  روی میدان  $F$  عبارت است از، مجموعه  $V$  از بردارها که نسبت به عمل جمع و ضرب اسکالر بسته باشد. یا به عبارتی، دو عمل جمع و ضرب اسکالر که به ترتیب به هر دو عضو  $x$  و  $y$  از  $V$  عضو منحصر به فرد  $x + y$  از  $V$ ، و به ازای هر عضو  $a \in F$  و  $x \in V$  عضو منحصر به فرد  $ax \in V$  را نسبت می‌دهند.

تعریف ۵.۰.۱. زیرمجموعه  $W$  از فضای برداری  $V$  روی میدان  $F$  زیرفضای  $V$  نامیده می‌شود، هرگاه  $W$  با اعمال جمع و ضرب اسکالر تعریف شده روی  $V$ ، یک فضای برداری روی میدان  $F$  باشد.

تعریف ۶.۰.۱. فرض کنید  $S$  یک زیرفضای  $\mathbb{R}^m$  باشد، آنگاه زیرفضای تعریف شده  $S^\perp$  به صورت

$$S^\perp = \{y \in \mathbb{R}^m \mid y^T x = 0, \quad x \in S \text{ همه بردارهای } S\},$$

مکمل متعامد  $S$  نامیده می‌شود.

تعریف ۷.۰.۱. فرض کنیم  $V$  فضای برداری و  $S$  یک زیرمجموعه نامتناهی از  $V$  باشد. بردار  $v \in V$  را ترکیب خطی از اعضای  $V$  گوئیم اگر تعداد متناهی از بردارهای  $S$  مانند  $u_1, \dots, u_n$  و اسکالرهایی  $a_1, \dots, a_n$  وجود داشته باشند به طوری که

$$v = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n.$$

تعریف ۸.۰.۱. زیر مجموعه  $S$  از فضای برداری  $V$  را مستقل خطی گویند، هرگاه تعداد متناهی از بردارهای  $u_1, \dots, u_n$  در  $S$  به ازای هر اسکالر  $a_1, \dots, a_n$  وجود داشته باشد، به طوری که از رابطه

$$a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0$$

بتوان نتیجه گرفت  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$ . همچنین، مجموعه‌ای که مستقل خطی نباشد، وابسته خطی گویند.

تعریف ۹.۰.۱. اگر  $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ ، مجموعه‌ای از بردارها در فضای برداری  $V$  باشد و  $W$  نیز، مجموعه کلیه ترکیب‌های خطی از بردارهای  $v_1, \dots, v_n$  باشد. در این صورت  $W$  توسط این بردارها تولید شده و به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$W = \{c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n; c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}\}$$

همچنین می‌توان گفت، بردارهای  $v_1, \dots, v_n$  زیرفضای  $W$  را تولید می‌کنند.

**تعریف ۰۱۰۰.۱.** فرض کنید  $V$  یک فضای برداری روی میدان  $F$  باشد. مجموعه  $S$  را پایه  $V$  گویند، هرگاه  $S$  یک زیرمجموعه مستقل خطی  $V$  باشد که  $V$  را تولید می‌کند.

**تعریف ۰۱۱۰.۱.** حداکثر تعداد سطرها یا ستون‌های مستقل خطی ماتریس  $A$  را رتبه آن ماتریس نامیده و با  $rank(A)$  نشان می‌دهند. اگر  $A$  یک ماتریس  $m \times n$  باشد، آنگاه  $rank(A) \leq \min(m, n)$ .

**یادآوری ۰۱۲۰.۱.** ماتریس مربعی  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  نامنفرد گویند هرگاه،  $rank(A) = n$ ، در غیر این صورت منفرد نامیده می‌شود.

**یادآوری ۰۱۳۰.۱.**  $A$  دارای رتبه ستونی کامل است، اگر ستون‌های  $A$  مستقل خطی باشد. همچنین،  $A$  رتبه کامل است، اگر دارای رتبه سطری یا ستونی کامل باشد.

**تعریف ۰۱۴۰.۱.** اگر  $A$  ماتریسی  $m \times n$  با  $m \geq n$  و  $rank(A) = r < n$  باشد، ماتریس  $A$  در این حالت رتبه ناقص گفته می‌شود.

**تعریف ۰۱۵۰.۱.** اگر  $A$  یک ماتریس  $n \times n$  باشد، آنگاه بردار ناصفر  $X$  را بردار ویژه  $A$  نامند، اگر  $AX$  مضربی از  $X$  باشد. به بیان دیگر،

$$\exists \lambda \quad AX = \lambda X$$

در این صورت،  $\lambda$  مقدار ویژه و  $X$  بردار ویژه متناظر با آن می‌باشد. برای به‌دست آوردن مقادیر ویژه نیز، باید ریشه‌های معادله مشخصه<sup>۸</sup>

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$$

را به‌دست آوریم.

**تعریف ۰۱۶۰.۱.** ماتریس مربعی  $A$  را متقارن گویند، هرگاه  $A^T = A$  باشد.

**تعریف ۰۱۷۰.۱.** ماتریس مربعی  $A$  را سه‌قطری نامند، هرگاه

$$a_{ij} = 0, \quad |i - j| > 1$$

**تعریف ۰۱۸۰.۱.** اگر  $A$  ماتریس هرمیتی با درایه‌های مختلط باشد، آنگاه ترانهاد مزدوج  $A$  را با  $A^*$  نشان داده و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A^* = \bar{A}^t$$

**تعریف ۰۱۹۰.۱.** ماتریس مربعی  $A$  را هرمیتی گویند، هرگاه  $A = A^*$ .

<sup>۸</sup>Characteristic polynomial

تعریف ۲۰.۰.۱. دو ماتریس  $A$  و  $B$  را متشابه نامند، اگر ماتریس نامنفردی مانند  $P$  موجود باشد به طوری که  $B = P^{-1}AP$ .

تعریف ۲۱.۰.۱. ماتریس متقارن  $A$  را معین مثبت نامند، هرگاه به ازای هر بردار  $x \neq 0$ ،  $x^T Ax > 0$  در صورتی که  $x^T Ax \geq 0$  را معین نامنفی (نیمه معین مثبت) گویند.

تعریف ۲۲.۰.۱. فرض کنید  $V$  یک فضای برداری باشد. در این صورت تابع  $\| \cdot \|: V \rightarrow \mathbb{R}$  که در شرایط زیر صدق کند نورم برداری می نامند:

$$\forall x \in V \quad \|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad (۱)$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \quad (۲)$$

$$\forall x, y \in V \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (۳)$$

نورم های متداول در فضای برداری  $\mathbb{R}^n$  به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\|x\|_2 = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{نورم اقلیدسی (الف)}$$

$$\|x\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{نورم } p \text{ (ب)}$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \quad \text{نورم بی نهایت (ج)}$$

تعریف ۲۳.۰.۱. اگر  $M$  مجموعه ماتریس های  $n \times n$  باشد، تابع  $\| \cdot \|: M \rightarrow \mathbb{R}$  نورم ماتریسی می نامند، هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

$$\|A\| \geq 0, \|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0 \quad \text{(الف)}$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \|\alpha A\| = |\alpha| \|A\| \quad \text{(ب)}$$

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\| \quad \text{(ج)}$$

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\| \quad \text{(د)}$$

اگر علاوه بر شرایط فوق، رابطه زیر برقرار باشد:

$$\|AX\| \leq \|A\| \|X\|$$

که در آن  $X$  نشان دهنده یک بردار است، نورم به دست آمده را نورم سازگار گویند. با توجه به این تعریف، به کمک نورم برداری، نورم ماتریسی طبیعی یا القائی به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\|A\| = \max_{X \neq 0} \frac{\|AX\|}{\|X\|}$$

لازم به ذکر است، در تمام مواردی که از نورم ماتریسی استفاده شده منظور نورم دو ماتریسی بوده مگر در جایی که به‌طور مشخص عنوان شده است.

**تعریف ۰۱.۰۲۴.** انواع نورم‌های ماتریسی به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\text{الف) } \|A\|_E = \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \text{ نورم اقلیدسی}$$

$$\text{ب) } \|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

$$\text{ج) } \|A\|_r = \sqrt{\rho(A^T A)} \text{ که } \rho(A) = \max_i |\lambda_i| \text{ شعاع طیفی ماتریس } A \text{ می‌باشد.}$$

## ۱.۱ عدد شرطی

**تعریف ۰۱.۱.۰۱.** اگر  $\| \cdot \|$  نشان‌دهنده یک نورم ماتریسی باشد، عدد شرطی یا عدد حالت<sup>۹</sup> برای ماتریس رتبه کامل  $A$  از بعد  $m \times n$  به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$k(A) = \|A\| \cdot \|A^\dagger\|, \quad A^\dagger = (A^T A)^{-1} A^T$$

نماد  $A^\dagger$  نشان‌دهنده شبه‌معکوس ماتریس  $A$  است.

**تعریف ۰۲.۱.۰۱.** اگر در دستگاه معادلات خطی  $A_{m \times n} x = b$ ، تغییرات کوچک در ماتریس  $A$  یا  $b$  موجب تغییرات بزرگ در بردار جواب  $x$  شود، آن دستگاه را بدوضع<sup>۱۰</sup> نامند. همچنین، اگر این تغییرات موجب تغییر چندانی در بردار جواب نشود آن دستگاه را خوش‌وضع<sup>۱۱</sup> گویند.

**قضیه ۰۳.۱.۰۱.** فرض کنید بردار  $b$  در اثر اختلال به  $\hat{b}$  در دستگاه  $Ax = b$  تبدیل شود. همچنین،  $x$  جواب واقعی و  $\hat{x}$  جواب تقریبی دستگاه باشد. آنگاه:

$$\frac{\|e\|_r}{\|x\|_r} \leq k(A) \frac{\|r\|_r}{\|b\|_r}$$

که در آن  $e = x - \hat{x}$  و  $r = b - A\hat{x} = b - \hat{b}$  می‌باشد.

از قضیه فوق می‌توان نتیجه گرفت، اگر عدد شرطی ماتریس  $A$  بزرگ باشد حتی یک اختلال کوچک در بردار  $b$  می‌تواند جواب دستگاه را تغییر دهد.

**قضیه ۰۴.۱.۰۱.** فرض کنید بردار  $A$  دارای اختلال  $\hat{A}$  در دستگاه  $Ax = b$  باشد.  $x$  و  $\hat{x}$  نیز، به‌ترتیب جواب‌های واقعی و تقریبی دستگاه باشند. آنگاه:

$$\frac{\|x - \hat{x}\|_r}{\|x\|_r} \leq k(A) \frac{\|A - \hat{A}\|_r}{\|A\|_r}$$

<sup>۹</sup>Condition number

<sup>۱۰</sup>Ill condition

<sup>۱۱</sup>Well condition



این قضیه بیان می‌کند، کوچک بودن اختلال در ماتریس  $A$ ، هنگامی به کوچک بودن خطای نسبی منجر می‌شود که عدد شرطی ماتریس  $A$  بزرگ نباشد.

**قضیه ۵.۱.۱.** فرض کنید بردار  $A$  و  $b$  دارای اختلال  $\hat{A}$  و  $\hat{b}$  در دستگاه  $Ax = b$  باشند،  $x$  و  $\hat{x}$  نیز جواب‌های واقعی و تقریبی دستگاه باشند. آنگاه:

$$\frac{\|x - \hat{x}\|}{\|x\|} \leq \frac{k(A)}{1 - \|A^{-1}\Delta A\|} \left( \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \right)$$

با شرط این که  $\|A^{-1}\Delta A\| < 1$  باشد.

از قضایای (۳.۱.۱)، (۴.۱.۱) و (۵.۱.۱) می‌توان نتیجه گرفت، اختلالات کوچک در ماتریس‌های  $A$ ،  $b$  یا هر دو هنگامی به اختلالات کوچک در جواب دستگاه منجر می‌شوند که عدد شرطی ماتریس  $A$  بزرگ نباشد.

برای اثبات قضایای این بخش به [۱۳] مراجعه نمایید.

برای سنجش میزان بزرگی و کوچکی عدد شرطی برای ماتریس‌های نامنفرد، می‌توان گفت:

$$I = AA^{-1} \Rightarrow \|I\| = \|AA^{-1}\| \leq \|A\| \|A^{-1}\| \Rightarrow 1 \leq k(A)$$

یعنی، عدد شرطی ماتریس‌های نامنفرد کمتر از یک نمی‌باشد. بنابراین، می‌توان نتیجه گرفت هرچه عدد شرطی ماتریسی مانند  $A$ ، به یک نزدیک شود، ماتریس به خوش‌وضع‌ی نزدیک می‌شود، و هرچه فاصله بیشتری از یک داشته باشد به بدوضع‌ی نزدیک می‌شود.

سؤالی که در این زمینه مطرح می‌شود این است که حدود عدد شرطی چه میزان باشد تا بتوان ماتریس را خوش‌وضع و یا بدوضع نامید؟

جواب این سؤال به دقت داده‌های ورودی و میزان خطای قابل قبول در آن دستگاه بستگی دارد. برای مثال، فرض کنید هدف حل دستگاه  $Ax = b$  باشد. اگر خطای نسبی داده‌های ورودی ماتریس  $A$  و  $b$ ،  $10^{-\lambda}$  باشد، به این معنا که

$$\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} = \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} = 10^{-\lambda}$$

و  $\|A^{-1}\Delta A\|$  خیلی کوچک‌تر از یک و نزدیک صفر باشد، طبق قضیه (۵.۱.۱) داریم:

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq 2 \times k(A) \times 10^{-\lambda}$$

حال اگر خطای نسبی قابل قبول برای حل این دستگاه  $10^{-t}$  باشد، یعنی:

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq 10^{-t}$$

در این صورت کافی است که:

$$2 \times k(A) \times 10^{-\lambda} \leq 10^{-t} \Rightarrow k(A) \leq \frac{1}{2} \times 10^{\lambda-t}$$

پس در این حالت، اگر عدد شرطی ماتریس  $A$  کوچک‌تر مساوی  $\frac{1}{2} \times 10^{\lambda-t}$  باشد، این دستگاه خوش‌وضع و در غیر این صورت بدوضع نامیده می‌شود.

## ۲.۱ مقدار تکین

فرض کنید  $A$  ماتریس  $m \times n$  باشد. آنگاه، ماتریس  $A^*A$ ، معین نامنفی است. زیرا

$$\forall x \neq 0 \quad x^* A^* A x = (Ax)^*(Ax) = \|Ax\|^2 \geq 0$$

اگر، مقادیر ویژه  $A^*A$  را با  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  نمایش دهیم، از آنجایی‌که، این مقادیر ویژه نامنفی می‌باشند زیرا

$$\forall x \neq 0 \quad 0 \leq x^T A^* A x = x^T \lambda x = \lambda \|x\|^2$$

بنابراین، می‌توان قرار داد:

$$\sigma_1^2 = \lambda_1, \sigma_2^2 = \lambda_2, \dots, \sigma_n^2 = \lambda_n$$

در این صورت  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  را مقادیر تکین<sup>۱۲</sup> ماتریس  $A$  می‌نامیم. مقادیر تکین ماتریس، کاربردهای فراوانی دارند. از جمله این کاربردها می‌توان به استفاده از آن‌ها در به‌دست آوردن رتبه ماتریس و عدد شرطی یک ماتریس اشاره کرد. از این رو، می‌توان تعاریف جدیدی برای این دو مفهوم ارایه نمود.

**تعریف ۱.۲.۱.** رتبه ماتریس، تعداد مقادیر تکین غیر صفر آن می‌باشد.

**تعریف ۲.۲.۱.** برای ماتریس  $A_{m \times n}$  نسبت بزرگترین مقدار تکین به کوچکترین مقدار تکین را عدد شرطی می‌نامند. اگر  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_k$  مقادیر تکین این ماتریس باشند، آنگاه

$$k(A) = \frac{\sigma_1}{\sigma_k}$$

نشان‌دهنده عدد شرطی این ماتریس می‌باشد.

از کاربردهای عدد شرطی همان‌طور که گفته شد، می‌توان به استفاده از آن‌ها برای تعیین خوش‌وضعی و یا بدوضعی دستگاه معادلات خطی نام برد.

<sup>۱۲</sup>Singular values

قضیه ۳.۲.۱. (تجزیه مقدار تکین) فرض کنید  $A$  یک ماتریس حقیقی  $m \times n$  باشد. آنگاه، ماتریس‌های یکمعامد  $U$  و  $V$  وجود دارند به قسمی که

$$U^T A V = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & \circ \\ \circ & \circ \end{bmatrix} = \Sigma \quad (1.1)$$

که در آن  $\Sigma_1$  یک ماتریس قطری نامنفرد است. عناصر قطری  $\Sigma$  همگی نامنفی و صعودی هستند. همچنین،  $r$ ، رتبه ماتریس  $A$  یعنی، تعداد عناصر قطری مخالف صفر  $\Sigma$  است.

برهان. ماتریس  $A^T A$  را در نظر بگیرید. این ماتریس یک ماتریس  $n \times n$  نیمه معین مثبت متقارن است؛ بنابراین مقادیر ویژه آن نامنفی هستند. مقادیر ویژه  $A^T A$  را با  $\lambda_1 = \sigma_1^2, \lambda_2 = \sigma_2^2, \dots, \lambda_n = \sigma_n^2$  نمایش می‌دهیم؛  $v_1$  تا  $v_n$  یکه متعامد هستند و در رابطه زیر صدق می‌کنند

$$A^T A v_i = \sigma_i^2 v_i, \quad i = 1, \dots, n$$

پس

$$v_i^T A^T A v_i = \sigma_i^2 \neq 0, \quad i = 1, \dots, r \quad (2.1)$$

و

$$v_j^T A^T A v_i = 0, \quad i = 1, \dots, r; j \neq i \quad (3.1)$$

می‌نویسیم

$$V_1 = (v_1, \dots, v_r)$$

$$V_2 = (v_{r+1}, \dots, v_n)$$

که در آن  $v_1$  تا  $v_r$  بردارهای ویژه متناظر با مقادیر ویژه مخالف صفر  $\lambda_1$  تا  $\lambda_r$  و  $v_{r+1}, \dots, v_n$  بردارهای ویژه متناظر با مقادیر ویژه صفر هستند. پس

$$V_2^T A^T A V_2 = V_2^T A^T A (v_{r+1}, v_{r+2}, \dots, v_n) = V_2^T (0, 0, \dots, 0) = 0$$

این ایجاب می‌کند که  $AV_2 = 0$ ، یا

$$A v_k = 0, \quad k = r+1, r+2, \dots, n \quad (4.1)$$

اکنون یک مجموعه بردارهای مخالف صفر  $\{u_i\}$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$u_i = \frac{1}{\sigma_i} A v_i, \quad i = 1, \dots, r \quad (5.1)$$

بردارهای  $u_i$ ،  $i = 1, \dots, r$ ، یک مجموعه متعامد تشکیل می‌دهند، زیرا

$$\begin{aligned} u_i^T u_j &= \frac{1}{\sigma_i} (Av_i)^T \frac{1}{\sigma_j} (Av_j) & (6.1) \\ &= \frac{1}{\sigma_i \sigma_j} (v_i^T A^T Av_j) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{اگر } i \neq j \\ 1 & \text{اگر } i = j \end{cases} \end{aligned}$$

تعریف می‌کنیم  $U_1 = (u_1, \dots, u_r)$  و  $U_2 = (u_{r+1}, \dots, u_m)$  را به‌قسمی انتخاب می‌کنیم که  $U = (U_1, U_2)$  متعامد باشد. سپس برای هر  $k > r$  داریم:

$$u_k^T Av_i = \sigma_i u_k^T u_i = 0, \quad i = 1, \dots, r$$

بر اساس متعامد بودن بردارهای  $U$  و طبق (5.1) داریم:

$$u_k^T Av_i = 0, \quad i = r + 1, \dots, n$$

قرار می‌دهیم  $V = (V_1, V_2)$ . آنگاه

$$\begin{aligned} U^T AV &= \begin{bmatrix} u_1^T \\ u_2^T \\ \vdots \\ u_m^T \end{bmatrix} A(v_1, \dots, v_n) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1} v_1^T A^T \\ \frac{1}{\sigma_2} v_2^T A^T \\ \vdots \\ \frac{1}{\sigma_r} v_r^T A^T \\ u_{r+1}^T \\ \vdots \\ u_m^T \end{bmatrix} A(v_1, \dots, v_n) & (7.1) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1} \cdot \sigma_1^2 & & & 0 \\ & \frac{1}{\sigma_2} \cdot \sigma_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{\sigma_r} \cdot \sigma_r^2 \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix} & (8.1) \end{aligned}$$

که در آن  $\Sigma_1 = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ .

□ حکم مربوط به رتبه واضح است، زیرا  $\text{rank}(A) = \text{rank}(U \Sigma V^T) = \text{rank}(\Sigma) = r$ .

تعریف 4.2.1. عناصر قطری ماتریس  $\Sigma$  مقادیر تکین ماتریس  $A$  نامیده می‌شوند. اعداد  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$  مقادیر تکین مثبت  $A$  هستند.

تعریف ۵.۲.۱. ستون‌های  $U$  بردارهای تکین چپ و ستون‌های  $V$  بردارهای تکین راست گویند.

### ۱.۲.۱ کاربردهای تجزیه مقادیر تکین

از کاربردهای تجزیه مقادیر تکین، می‌توان به استفاده از آن‌ها برای به‌دست آوردن نرم ماتریس‌ها، تقریب ماتریس با یک ماتریس رتبه پایین، کاربرد آن در فشرده‌سازی تصاویر و حل مساله حداقل مربعات اشاره کرد. در ادامه این بخش، به معرفی این روش‌ها پرداخته، البته استفاده از روش  $SVD$  برای حل مساله حداقل مربعات، در فصل بعد به‌طور کامل مورد بررسی قرار گرفته است. همان‌طور که می‌دانید، نرم ماتریس را می‌توان به‌صورت نرم برداری تعریف نمود،

$$\|A\| = \max_{X \neq 0} \frac{\|AX\|}{\|X\|},$$

با استفاده از رابطه  $Av_i = \sigma_i u_i$  در تجزیه مقدار تکین و قرار دادن آن در رابطه بالا می‌توان نوشت:

$$\|A\| = \max_{v_i \neq 0} \frac{\|Av_i\|}{\|v_i\|} = \max_{v_i \neq 0} \frac{\|\sigma_i u_i\|}{\|v_i\|} = \max_{v_i \neq 0} \frac{\sigma_i \|u_i\|}{\|v_i\|} = \max_{v_i \neq 0} \sigma_i$$

از رابطه بالا می‌توان نتیجه گرفت، نرم یک ماتریس برابر با بزرگترین مقدار تکین آن می‌باشد. همچنین می‌توان نشان داد که  $\|A^{-1}\| = \frac{1}{\sigma_n}$  می‌باشد.

تقریب رتبه پایین ماتریس<sup>۱۳</sup>، یکی دیگر از کاربردهای تجزیه مقدار تکین در تقریب ماتریس می‌باشد. در این روش، به دنبال یافتن ماتریسی مانند  $A_k$  با رتبه  $k < l$ ، از  $A$  می‌باشیم، به طوری که  $\|A - A_k\|_2$  مقدار کوچکی گردد [۱۹].

$SVD$  ماتریس  $A_{m \times n}$  از رتبه  $l$  به صورت

$$A = U \sum V^T, \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_l$$

در نظر بگیرید. تجزیه بالا را می‌توان به صورت زیر نیز نمایش داد:

$$A = u_1 \sigma_1 v_1^T + u_2 \sigma_2 v_2^T + \dots + u_k \sigma_k v_k^T + u_{k+1} \sigma_{k+1} v_{k+1}^T + \dots + u_l \sigma_l v_l^T$$

تقریب رتبه پایین به ما می‌گوید، اگر اختلاف میان  $\sigma_k$  و  $\sigma_{k+1}$  زیاد است، می‌توان از جملات  $k+1$  به بعد صرف نظر نمود، و ماتریس را برحسب  $k$  جمله اول نوشت. زیرا این جملات، شامل مقادیر تکین غالب‌تری هستند و تاثیر بیشتری در ساختار ماتریس  $A$  دارند. بنابراین،

$$A_k = u_1 \sigma_1 v_1^T + u_2 \sigma_2 v_2^T + \dots + u_k \sigma_k v_k^T.$$

با تفاضل جملات  $A$  و  $A_k$  می‌توان، خطای تقریب این روش را نیز به دست آورد:

<sup>۱۳</sup>Low rank approximation

$$\|A - A_k\|_2 \leq \sigma_{k+1}$$

یکی از کاربردهای تقریب رتبه پایین ماتریس‌ها، فشرده‌سازی داده‌های<sup>۱۴</sup> تصویری است. در نرم‌افزار متلب هر تصویر به صورت یک ماتریس ذخیره می‌شود. که ابعاد این ماتریس به حجم و کیفیت تصویر بستگی دارد. به کار بردن روش تقریب رتبه پایین در ذخیره‌سازی تصاویر با حجم بالا، سبب ذخیره‌سازی تصاویر با حفظ کیفیت، در حجم کمتر می‌شود.

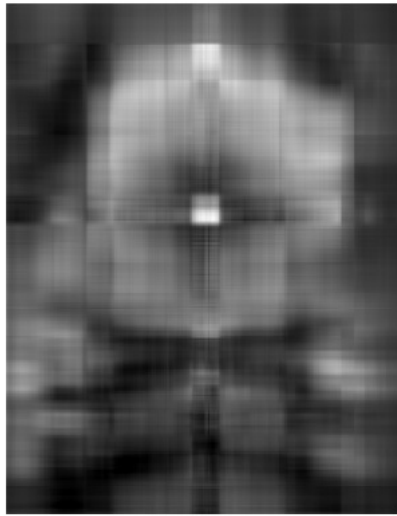
برای مثال، تصویر زیر توسط یک ماتریس  $387 \times 302$  ذخیره می‌شود. این ماتریس دارای  $302$  مقدار تکیین است.



شکل ۱.۱: تصویر اصلی

در ادامه، تصاویری از تقریب‌های رتبه پایین مختلف، برای این تصویر نشان داده شده است. در این تصاویر اگر، ماتریس را با شکل ۲.۱ یعنی، پنج مقدار تکیین (تقریب رتبه پنج) تقریب بزنیم، تصویری ناواضح خواهیم داشت، که نشان‌دهنده یک کیفیت پایین از تصویر است. برای این‌که تصویری با کیفیت بهتر داشته باشیم، از تقریب‌های مرتبه بالاتر استفاده می‌نماییم. ابتدا از تقریب رتبه  $20$  استفاده نموده که نسبت به تقریب رتبه  $5$  تقریب مناسب‌تری است. با استفاده از تقریب رتبه  $50$  در شکل ۴.۱، تصویر اصلی را می‌توان به شکل قابل قبولی بازسازی نمود. البته با داشتن  $100$  مقدار تکیین، می‌توان تصویر را با کیفیت مناسب‌تری ذخیره نمود. در واقع، با تقریب رتبه  $100$  می‌توان ماتریس اصلی را که از رتبه  $302$  است با حفظ کیفیت در حجم کمتری ذخیره نمود.

<sup>۱۴</sup>Data compression



شکل ۲.۱: تقریب رتبه ۵



شکل ۳.۱: تقریب رتبه ۲۰



شکل ۴.۱: تقریب رتبه ۵۰



شکل ۵.۱: تقریب رتبه ۱۰۰



## ۳.۱ مساله حداقل مربعات

در این بخش، به معرفی مساله حداقل مربعات که روشی برای حل دستگاه معادلات خطی و غیرخطی است، می‌پردازیم.  
برای حل دستگاه معادلات خطی

$$Ax = b \quad (9.1)$$

هنگامی که ماتریس  $A$  مربعی و نامنفرد باشد، روش‌های متفاوتی وجود دارند. اما، در برخی وضعیت‌های عملی نظیر کاربردهای آماری، مدل‌سازی هندسی و پردازش سیگنال، نیاز به حل دستگاهی داریم که در آن، ماتریس  $A$  مستطیلی و یا منفرد است. در چنین حالت‌هایی ممکن است، جوابی وجود نداشته باشد و یا بی‌نهایت جواب وجود داشته باشد. برای مثال، هنگامی که  $A$  یک ماتریس  $m \times n$  با  $m > n$  است، یک دستگاه فرامعین<sup>۱۵</sup> داریم، و یک دستگاه فرامعین معمولاً جواب ندارد. برعکس، یک دستگاه فرامعین<sup>۱۶</sup>  $m < n$ ، معمولاً تعداد نامتناهی جواب دارد. در این حالت‌ها، بهترین جوابی که می‌توان به دست آورد این است که یک بردار  $x$  پیدا کنیم که  $Ax$  را تا حد ممکن به بردار  $b$  نزدیک سازد. به بیان دیگر، یک بردار  $x$  را به قسمی می‌یابیم که عبارت  $\|Ax - b\| = \|r(x)\|$  را می‌نیمیم سازد.

هنگامی که از نورم اقلیدسی  $\|\cdot\|$  استفاده می‌شود، این جواب، جواب حداقل مربعات برای دستگاه  $Ax = b$  اطلاق می‌شود. عبارت جواب حداقل مربعات قابل توجیه است؛ زیرا جوابی است که نورم اقلیدسی بردار مانده را می‌نیمیم می‌سازد و طبق تعریف، توان دوم نورم اقلیدسی یک بردار، دقیقاً برابر مجموع توان‌های دوم مؤلفه‌های آن بردار می‌باشد. بنابراین، مساله پیدا کردن جواب‌های حداقل مربعات، برای دستگاه  $Ax = b$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

با مفروض بودن ماتریس حقیقی  $m \times n$  مانند  $A$  و بردار  $b$ ، بردار حقیقی  $x$  را به قسمی پیدا کنید که، عبارت  $\|Ax - b\| = \|r(x)\|$  می‌نیمیم شود.

اگر مساله حداقل مربعات بیش از یک جواب داشته باشد، جوابی که دارای نورم اقلیدسی می‌نیمیم باشد جواب با طول می‌نیمیم یا جواب با می‌نیمیم نورم نامیده می‌شود.  
در حل دستگاه معادلات (۹.۱) حالت‌های زیر وجود دارد:

۱- حالتی که دستگاه بدون جواب یا ناسازگار است.

۲- حالتی که دستگاه سازگار است و جواب دارد، در این صورت ممکن است فقط یک جواب منحصر به فرد داشته باشد یا اینکه بی‌شمار جواب داشته باشد.

در یک دستگاه معادلات خطی مانند (۹.۱) حالت‌های زیر را می‌توان در نظر گرفت:

۱- حالت  $m = n$ : در این حالت دستگاه را همواره معین<sup>۱۷</sup> می‌گویند. برای محاسبه جواب این دستگاه، حالات زیر وجود دارد:

<sup>۱۵</sup>Overdetermined

<sup>۱۶</sup>Underdetermined

<sup>۱۷</sup>Everdetermined

- اگر، دترمینان ماتریس  $A$  مخالف صفر باشد، دستگاه سازگار می‌باشد و یک جواب منحصر به‌فرد دارد.
- اگر، دترمینان ماتریس  $A$  صفر و دستگاه سازگار باشد، بی‌شمار جواب دارد و برای به‌دست آوردن یک پاسخ معین، از روش حداقل نورم<sup>۱۸</sup> می‌توان استفاده نمود.
- اگر دترمینان ماتریس  $A$  صفر و دستگاه ناسازگار باشد، اصلاً جواب ندارد و برای به‌دست آوردن پاسخ تقریبی از روش حداقل مربعات استفاده می‌شود.

۲- حالت  $m < n$ : در این حالت دستگاه را فرومعین گویند. این‌گونه دستگاه‌ها می‌توانند بی‌شمار جواب داشته باشند و برای به‌دست آوردن یک پاسخ معین از آن‌ها از روش حداقل نورم استفاده می‌شود.

۳- حالت  $m > n$ : در این حالت دستگاه را فرامعین می‌گویند. برای این دستگاه دو حالت وجود دارد:

- در صورت سازگار بودن می‌تواند جواب منحصر به‌فرد داشته باشد.
- در صورت ناسازگاری، اصلاً جوابی ندارد. در چنین مواردی از روش حداقل مربعات برای به‌دست آوردن یک پاسخ تقریبی استفاده می‌شود.

لم ۱.۳.۱.  $x$  یک جواب حداقل مربعات  $Ax = b$  است، اگر و فقط اگر در رابطه زیر صدق کند:

$$A^T Ax = A^T b \quad (10.1)$$

برهان. بردار باقیمانده  $r = b - Ax$  را در نظر بگیرید. فرض کنید  $y$  برداری  $n$  بعدی باشد. آنگاه  
 $r(y) = b - Ay = r(x) + Ax - Ay = r(x) + A(x - y)$  بنابراین

$$\|r(y)\|_2 = \|r(x)\|_2 + \|(x - y)^T A^T r(x) + \|A(x - y)\|_2$$

ابتدا فرض کنید،  $x$  در رابطه (۹.۱) صدق کند، یعنی  $A^T r(x) = 0$ . آنگاه از قبل داریم:

$$\|r(y)\|_2 = \|r(x)\|_2 + \|A(x - y)\|_2 \geq \|r(x)\|_2$$

این رابطه ایجاب می‌کند که  $x$ ، جواب حداقل مربعات باشد.

سپس، فرض کنید  $A^T r(x) \neq 0$  باشد. قرار دهید  $A^T r(x) = z \neq 0$ . بردار  $y$  را به‌قسمی تعریف می‌کنیم که

$$y = x + cz$$

<sup>۱۸</sup>Minimum norm

آنگاه برای  $c$  به اندازه کافی کوچک خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} r(y) &= r(x) + A(x - y) = r(x) - cAz \\ \|r(y)\|_2^2 &= \|r(x)\|_2^2 + c^2 \|Az\|_2^2 - 2cz^T A^T r(x) \\ &= \|r(x)\|_2^2 + c^2 \|Az\|_2^2 - 2c \|z\|_2^2 < \|r(x)\|_2^2 \end{aligned}$$

□ این ایجاب می‌کند که  $x$ ، جواب حداقل مربعات نباشد.

**قضیه ۲.۳.۱.** وجود و یکتایی جواب برای یک دستگاه ناهمگن

۱. دستگاه  $Ax = b$  سازگار است اگر و فقط اگر  $\text{rank}(A) = \text{rank}(A, b)$ .

۲. اگر دستگاه سازگار باشد و ستون‌های  $A$  مستقل خطی باشند، آنگاه جواب منحصر به فرد است.

۳. اگر دستگاه سازگار باشد و ستون‌های  $A$  وابسته خطی باشند، آنگاه دستگاه دارای تعداد نامتناهی جواب است.

**قضیه ۳.۳.۱.** وجود و یکتایی جواب. همواره یک جواب برای مساله حداقل مربعات وجود دارد. این جواب یکتا است اگر و فقط اگر  $A$  دارای رتبه کامل باشد؛ یعنی  $\text{rank}(A) = n$ . اگر  $A$  رتبه کامل نباشد، آنگاه مساله حداقل مربعات، بی‌شمار جواب دارد.

برهان. از لم (۱.۳.۱) می‌دانیم که  $x$  یک جواب حداقل مربعات برای  $Ax = b$  است، اگر و فقط اگر  $x$  در رابطه زیر صدق کند:

$$A^T Ax = A^T b.$$

اکنون نشان می‌دهیم، در حالت رتبه کامل، این جواب یکتا است.

از قضیه (۲.۳.۱) می‌دانیم که جواب دستگاه  $A^T Ax = A^T b$  یکتا است اگر و فقط اگر  $A^T A$  نامنفرد باشد. بنابراین کافی است نشان دهیم که  $A^T A$  نامنفرد است اگر و فقط اگر  $A$  دارای رتبه کامل باشد.

اگر  $A$  دارای رتبه کامل باشد، آنگاه  $x \neq 0$  ایجاب می‌کند  $y = Ax \neq 0$  باشد. بنابراین  $x^T A^T Ax = y^T y > 0$  ایجاب می‌کند که  $A^T A$  معین مثبت باشد. از طرف دیگر، اگر  $A$  دارای رتبه کامل نباشد، برای یک  $x \neq 0$  خواهیم داشت  $Ax = 0$ ، و در نتیجه  $x^T A^T Ax = 0$ ، که ایجاب می‌کند  $A^T A$  معین مثبت نباشد.

□

## ۴.۱ مقدمات کنترل

در این بخش، به معرفی و شرح مقدمات مورد نیاز کنترل می‌پردازیم. در گردآوری این بخش از [۶] استفاده شده است.

- تعریف ۱.۴.۱. سیستم، مجموعه‌ای از اجزا است، که با هم برای انجام عملی مشخص، کار می‌کنند.
- تعریف ۲.۴.۱. هر نوع محرکه‌ای که برای انتقال اطلاعات به‌کار گرفته شود، علامت یا سیگنال گویند.
- تعریف ۳.۴.۱. ورودی مرجع، نشان‌دهنده پاسخ مطلوب به سیستم است. به عبارت دیگر، هدف یا عملکرد مطلوب سیستم، موقعی برآورده می‌شود که خروجی سیستم به این مقدار برسد.
- تعریف ۴.۴.۱. خروجی سیستم، سیگنالی است که از خروجی سیستم به‌دست می‌آید و مایل به اندازه‌گیری و کنترل آن می‌باشیم. خروجی در واقع، پاسخ واقعی سیستم در هر واحد زمانی است.
- تعریف ۵.۴.۱. اغتشاش<sup>۱۹</sup> سیگنالی است که در جهت تغییر شدید خروجی سیستم عمل می‌کند.
- تعریف ۶.۴.۱. پس‌خورد<sup>۲۰</sup>، بازگرداندن بخشی از خروجی یک سیستم و تاثیر آن بر ورودی به‌منظور کنترل خروجی می‌باشد.
- تعریف ۷.۴.۱. کنترل با پس‌خورد، عملی است، که می‌کوشد اختلاف بین خروجی سیستم و ورودی مرجع را به‌رغم وجود اغتشاش می‌نیم کند.
- تعریف ۸.۴.۱. سیستمی که در آن خروجی اثری بر روی سیگنال ورودی ندارد، سیستم کنترل حلقه باز، می‌نامند.
- تعریف ۹.۴.۱. سیستمی که در آن خروجی به‌گونه‌ای بر ورودی اثر می‌گذارد که خروجی در مقداری مطلوب باقی بماند، سیستم کنترل حلقه بسته گویند.

## ۱.۴.۱ سیستم‌های دینامیکی

بسیاری از سیستم‌های فیزیکی را می‌توان به‌شکل زیر بیان کرد:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (11.1)$$

$$Y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad (12.1)$$

دستگاه فوق را معادلات حالت سیستم نامند. که در آن  $t$  متغیر زمان،  $x(t)$  یک بردار ستونی  $n$  بعدی موسوم به بردار حالت،  $u(t)$  یک بردار ستونی  $m$  بعدی موسوم به بردار ورودی یا متغیر کنترل،  $y(t)$  یک بردار  $r$  بعدی متغیر با زمان به‌نام بردار خروجی، می‌باشد.

ماتریس‌های  $A$ ،  $B$ ،  $C$  و  $D$  ماتریس‌هایی با ابعاد سازگار با معادلات فوق می‌باشند و می‌توانند متغیر با زمان باشند. اما در این‌جا ثابت فرض می‌شوند.

<sup>۱۹</sup>Disturbance

<sup>۲۰</sup>Feedback

تعریف ۱۰.۴.۱. سیستم توصیف شده با معادلات (۱۱.۱) و (۱۲.۱) را کاملاً کنترل‌پذیر گویند، اگر بتوان حالت سیستم را از بردار حالت اولیه دلخواه  $x(t_0)$  در لحظه  $t_0$ ، به بردار دلخواه دیگری مانند  $x(t_s)$  به نام حالت تعادل در لحظه  $t_s$  رساند.

منظور از کنترل سیستم، انتخاب ورودی  $u(t)$  به‌گونه‌ای است که رفتار سیستم حاصل تحت کنترل باشد.

تعریف ۱۱.۴.۱. برای سیستمی با معادله حالت (۱۱.۱)، ماتریس کنترل‌پذیری به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$Q = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}_{n \times nm}$$

قضیه ۱۲.۴.۱. سیستم خطی (۱۱.۱)، کاملاً کنترل‌پذیر است اگر و تنها اگر ستون‌های ماتریس کنترل‌پذیری  $Q$  مستقل خطی باشند، یا  $\text{rank}(Q) = n$  باشد. برای اثبات به [۶] مراجعه کنید.

تعریف ۱۳.۴.۱. سیستم توصیف شده با معادلات (۱۱.۱) و (۱۲.۱) را کاملاً مشاهده‌پذیر می‌نامند، اگر بتوان هر حالت  $x(t_0)$  را با مشاهده خروجی  $y(t)$  تعیین نمود.

قضیه ۱۴.۴.۱. سیستم توصیف شده با معادلات (۱۱.۱) و (۱۲.۱)، کاملاً مشاهده‌پذیر است اگر و تنها اگر ماتریس مشاهده‌پذیری زیر

$$\begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & \dots & (A^T)^{n-1} C^T \end{bmatrix}_{n \times nm}$$

دارای رتبه  $n$  باشد. یا به عبارت دیگر  $n$  ستون آن بردارهای مستقل خطی باشند [۶].

## ۲.۴.۱ تابع تبدیل

تعریف ۱۵.۴.۱. در سیستم خطی، نسبت تبدیل لاپلاس متغیر خروجی به تبدیل لاپلاس متغیر ورودی را تابع تبدیل گویند.

سیستم خطی مستقل از زمان توصیف شده با معادله دیفرانسیل زیر در نظر بگیرید:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y^{(1)} + a_n = b_m x^{(m)} + b_{m-1} x^{(m-1)} + \dots + b_{m-1} x^{(1)} + b_m$$

که در آن  $x$  ورودی و  $y$  خروجی سیستم است. تابع تبدیل این سیستم با گرفتن تبدیل لاپلاس از دو طرف معادله دیفرانسیل با فرض صفر بودن شرایط اولیه به‌صورت

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^{(m)} + b_{m-1} s^{(m-1)} + \dots + b_{m-1} s^0 + b_m}{a_n s^{(n)} + a_{n-1} s^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} s^0 + a_n}$$

به‌دست می‌آید.

در اینجا نشان خواهیم داد که چگونه از فضای حالت، تابع تبدیل یک سیستم را به دست می‌آوریم. یک سیستم با تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \quad (۱۳.۱)$$

این سیستم را می‌توان با معادلات فضای حالت زیر نمایش داد:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (۱۴.۱)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (۱۵.۱)$$

که در آن بردار حالت،  $x(t)$  ورودی و  $u(t)$  خروجی است. تبدیل لاپلاس معادلات (۱۴.۱) و (۱۵.۱) عبارت است از:

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s) \quad (۱۶.۱)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s) \quad (۱۷.۱)$$

با در نظر گرفتن  $x(0) = 0$ ، داریم:

$$sX(s) - AX(s) = BU(s)$$

یا

$$(sI - A)X(s) = BU(s)$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s) \quad (۱۸.۱)$$

با جایگذاری (۱۸.۱) در (۱۷.۱) داریم:

$$Y(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D]U(s) \quad (۱۹.۱)$$

با مقایسه (۱۳.۱) و (۱۹.۱) داریم:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (۲۰.۱)$$

این معادله، رابطه بین تابع تبدیل سیستم و ماتریس‌های  $A$ ،  $B$ ،  $C$  و  $D$  را نشان می‌دهد.

## ۵.۱ کنترل سیستم خطی با پس خورد حالت

یکی از ساده‌ترین انتخاب‌هایی که برای بردار ورودی  $u(t)$  وجود دارد، انتخاب آن متناسب با بردار حالت  $x(t)$  است. به این معنا که

$$u(t) = Kx(t)$$

و یا متناسب با بردار خروجی  $y(t)$  به صورت

$$u(t) = Ky(t)$$

می‌باشد. در حالت نخست،  $K$  را کنترل‌گر حالت <sup>۲۱</sup> و در حالت دوم، کنترل‌گر خروجی <sup>۲۲</sup> نامند. ماتریس حقیقی  $K$ ، ماتریس پس خورد نامیده می‌شود، که ماتریسی از بعد  $m \times n$  با درایه‌های ثابت می‌باشد. با استفاده از معادله (۱۱.۱) و  $u(t) = Kx(t)$  می‌توان نوشت

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t) = \Gamma x(t) = A_c x(t) \quad (۲۱.۱)$$

ماتریس  $\Gamma = (A + BK)$ ، ماتریس حلقه بسته سیستم نامیده می‌شود، و مقادیر ویژه آن را مقادیر ویژه حلقه بسته گویند.

در واقع، با تعیین ماتریس  $K$  ورودی‌های سیستم مشخص می‌شوند. ماتریس  $K$  برای یک سیستم برخی رفتارهای سیستم را مشخص می‌کند. برای مثال، با در نظر گرفتن سیستم (۱۱.۱) و  $u = 0$  داریم:

$$x(t) = e^{\Gamma t} x(0)$$

واضح است، اگر تمام مقادیر ویژه ماتریس  $\Gamma$  سمت چپ صفحه مختلط باشند، آنگاه  $x(t) \rightarrow 0$  به عنوان  $t \rightarrow \infty$ . در این صورت، سیستم تحت کنترل خواهد بود. به عبارتی دیگر، در صورتی که در سیستم پیوسته، قسمت حقیقی مقادیر ویژه منفی باشد، سیستم پایدار است، و در صورتی که صفر باشد به طور مجانبی پایدار و در صورت مثبت بودن، سیستم را ناپایدار گویند [۶].

بدیهی است، کنترل یک سیستم و یا اعمال ورودی به سیستم همراه صرف انرژی و یا هزینه می‌باشد، که با نرم بردار ورودی نسبت مستقیم دارد. در این حالت به دنبال یافتن ماتریس پس خورد حالتی هستیم که قیود نرم ورودی و یا نرم ماتریس پس خورد می‌نیم شود و یا این نرم از مقدار مفروضی تجاوز نکند. این حالت را کنترل با ورودی بهینه می‌نامند.

### ۱.۵.۱ محاسبه ماتریس پس خورد حالت

معادله حالت سیستم (۱۱.۱) را در نظر بگیرید، در صورتی که سیستم کنترل‌پذیر باشد، اصطلاحاً زوج  $(A, B)$  را کنترل‌پذیر نامند. در سیستم مورد نظر، فرض بر این است که  $A$  ماتریس مربعی  $n \times n$  و  $B$

<sup>۲۱</sup> Controller state

<sup>۲۲</sup> Controller output

ماتریسی از بعد  $n \times m$  و  $rank(B) = m$  و  $m \leq n$  باشد. زوج کنترل‌پذیر  $(A, B)$  را در نظر بگیرید. ماتریس کنترل‌پذیری سیستم را می‌توان به صورت زیر تعریف نمود

$$Q = [B, AB, \dots, A^{p_1-1}b_1, A^{p_2-1}b_2, \dots, A^{p_m-1}b_m]$$

اعداد  $p_i, i = 1, \dots, m$  را مقادیر ناوردای کرونگر می‌نامند. این مقادیر، متناظر با ستون‌های  $Q$  می‌باشند.

**تعریف ۱.۵.۱.** ناوردهای کرونگر زوج  $(A, B)$ ، منظم می‌نامیم، هرگاه اختلاف ماکزیمم و می‌نیم آن‌ها حداکثر برابر واحد باشد. اگر این اختلاف بیشتر از واحد باشد، ناوردهای کرونگر را نامنظم می‌گویند. در صورتی که مقادیر  $m$  و  $n$  معلوم باشد، ناوردهای کرونگر را می‌توان به صورت زیر محاسبه نمود:

$$q = \left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil, \quad n = mq + r, \quad s = m - r$$

$$p_1 = p_2 = \dots = p_r = q + 1, \quad p_{r+1} = \dots = p_m = q$$

### تبدیلات تشابهی، فرم استاندارد اشولن

فرض کنید  $T$ ، تبدیل تشابهی بر فضای  $\mathbb{R}^n$  باشد. با در نظر گرفتن معادله حالت (۱۱.۱)، بردار حالت سیستم، توسط ماتریس تبدیل  $T^{-1}$  به فضای جدید تبدیل شود:

$$\hat{x}(t) = T^{-1}x(t), \quad x(t) = T\hat{x}(t)$$

با جایگذاری این روابط در (۱۱.۱)، خواهیم داشت:

$$T\hat{x}(t) = AT\hat{x}(t) + Bu(t)$$

با وارون گرفتن از رابطه فوق، می‌توان نوشت:

$$\hat{x}(t) = T^{-1}AT\hat{x}(t) + T^{-1}Bu(t)$$

با در نظر گرفتن  $\hat{A} = T^{-1}AT$  و  $\hat{B} = T^{-1}B$  معادله فوق، به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x}(t) + \hat{B}u(t) \quad (22.1)$$

ماتریس تبدیل  $T$  را می‌توان به صورت منحصر به فردی با استفاده از ماتریس کنترل‌پذیری به دست آورد. به این ترتیب، اولین  $n$  ستون مستقل خطی ماتریس  $Q$  را ستون‌های ماتریس تبدیل  $T$  قرار می‌دهیم. در این صورت، فرم استاندارد اشولن<sup>۲۳</sup> به فرم زیر تعریف می‌شود:

<sup>۲۳</sup>Standard Eshelon form



$$T = \left[ b_1, \dots, b_m, \dots, A^{q-1}b_1, \dots, A^{q-1}b_r, A^{q-1}b_{r+1}, \dots, A^{q-1}b_m, A^{q-1}b_1, \dots, A^qb_r \right]$$

با تشکیل ماتریس  $\left[ T^{-1}B, T^{-1}AT \right]$  خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} T^{-1} & \left[ b_1, \dots, b_m, Ab_1, \dots, A^qb_1, \dots, A^qb_r, A^qb_{r+1}, \dots, A^qb_m, A^{q+1}b_1, \dots, A^{q+1}b_r \right] \\ & = T^{-1} \left[ T, A^qb_{r+1}, \dots, A^{q+1}b_r \right] \\ & = \left[ I, T^{-1}A^qb_{r+1}, \dots, T^{-1}A^{q+1}b_r \right] = \left[ I \quad V \right] \end{aligned}$$

برای به دست آوردن فرم استاندارد اشولن به روش عددی، تبدیلات تشابهی را می توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$r(i) \longleftrightarrow r(j), \quad c(i) \longleftrightarrow c(j) \quad (\text{الف})$$

$$r(i) \longleftrightarrow ar(i), \quad c(i) \longleftrightarrow \frac{1}{a}c(i) \quad (\text{ب})$$

$$r(i) \longrightarrow r(i) + kr(j), \quad c(j) \longrightarrow c(j) - kc(i) \quad (\text{ج})$$

در صورتی که بخواهیم، زوج  $(B, A)$  را به فرم استاندارد اشولن  $(I, V)$  تبدیل نماییم، ابتدا ماتریس افزوده  $Q = [B, A, I]$  را تشکیل داده، سپس با استفاده از عملیات سطری مقدماتی نظیر بر روی ماتریس  $A$ ، حاصل  $n$  ستون اول ماتریس  $Q$  را به  $I$  تبدیل می کنیم. در این صورت، ماتریس افزوده  $\hat{Q}$  به فرم زیر تبدیل می شود:

$$\hat{Q} = [\hat{B}, \hat{A}, T^{-1}] = [I_n, V_{n \times m}, T^{-1}]$$

### فرم همدم برداری اولیه

فرض کنید  $S$ ، تبدیل خطی تشابهی باشد که بر فضای  $\mathbb{R}^n$ ، تعریف شده است. بردار حالت سیستم با فرم استاندارد اشولن، توسط ماتریس تبدیل  $S^{-1}$ ، به فضای جدید تبدیل می شود، در این صورت

$$\tilde{x}(t) = S^{-1}\hat{x}(t) = S^{-1}T^{-1}x(t)$$

با جایگذاری معادله فوق در معادله

$$\hat{\dot{x}} = \hat{A}\hat{x}(t) + \hat{B}u(t)$$

خواهیم داشت:

$$S\tilde{\dot{x}}(t) = \hat{A}S\tilde{x}(t) + \hat{B}u(t)$$

بنابراین:

$$\tilde{x}(t) = S^{-1} \hat{A} S \tilde{x}(t) + S^{-1} \hat{B} u(t)$$

با در نظر گرفتن مفروضات زیر:

$$\tilde{A} = S^{-1} \hat{A} S, \quad \tilde{B} = S^{-1} \hat{B}$$

می‌توان نوشت:

$$\tilde{x}(t) = \tilde{A} \tilde{x}(t) + \tilde{B} u(t) \quad (23.1)$$

زوج  $(\tilde{A}, \tilde{B})$  فرم همدم برداری اولیه خواهد بود. حل معادله سیستم (۲۳.۱)، هم‌ارز با حل معادله سیستم اولیه است. با استفاده از عملیات ستونی مقدماتی و سطری مقدماتی نظیر (عملیات تشابهی)، می‌توان فرم همدم برداری و ماتریس تبدیل آن را به صورت زیر به دست آورد:

$$Q = [B, A, I_n] \xrightarrow{T^{-1}} \hat{Q} = [\hat{B}, \hat{A}, T^{-1}] \xrightarrow{T^{-1}} [\tilde{B}, \tilde{A}, S^{-1} T^{-1}]$$

به طوری که اگر ناوردهای کرونکر، منظم باشند، فرم همدم برداری  $\tilde{A}$  و  $\tilde{B}$  به صورت زیر است:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} G_{m \times n} & & \\ \dots & \dots & \\ I_{n-m} & \circ_{(n-m) \times m} & \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B_{m \times m} \\ \dots \\ \circ_{(n-m) \times m} \end{bmatrix}$$

اگر ناوردهای کرونکر نامنظم باشند، ستون‌های ماتریس  $I_{n-m}$  در بلوک پایین ماتریس  $\tilde{A}$  پخش می‌شوند.

برای معادله (۱۱.۱)، قانون کنترل به صورت

$$u(t) = Kx(t)$$

تعریف می‌شود. به طور مشابه، برای معادله

$$\tilde{x}(t) = \tilde{A} \tilde{x}(t) + \tilde{B} u(t)$$

قانون کنترل، به صورت

$$u(t) = \tilde{K} \tilde{x}(t)$$

تعریف می‌شود. در معادله فوق،  $\tilde{K}$  ماتریس پس‌خورد حالت معادله سیستم تبدیل شده به فرم همدم برداری اولیه است. با جایگذاری  $S^{-1} T^{-1} x(t)$  به جای  $\tilde{x}$  داریم:

$$u(t) = \tilde{K}S^{-1}T^{-1}x(t)$$

و

$$K = \tilde{K}S^{-1}T^{-1}$$

تعریف می شود.

با توجه به فرم همدم برداری  $\tilde{A}$  و  $\tilde{B}$ ، در صورتی که  $\tilde{K}$  را به شکل زیر تعریف نماییم:

$$\tilde{K}_{m \times n} = -B_o^{-1}G_o.$$

مقادیر ویژه حلقه بسته اولیه  $\tilde{\Gamma} = \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K}$ ، مبدا مختصات می باشد. در این حالت،  $\tilde{K}$  را ماتریس پس خورد اولیه زوج  $(\tilde{A}, \tilde{B})$  می نامیم. همچنین،  $K$  را ماتریس پس خورد حالت اولیه زوج  $(A, B)$  می نامیم. که مقادیر ویژه حلقه بسته  $\Gamma = A + BK$  همگی صفر می باشند.



## فصل ۲

# روش‌های حل دستگاه‌های خطی

همان‌طور که در فصل قبل مشاهده نمودید، در مساله حداقل مربعات، به دنبال یافتن جواب می‌نیم مساله می‌باشیم. از این‌رو در این فصل، معرفی روش‌های مختلف حل این مسایل مورد بررسی قرار گرفته است. یکی از این روش‌ها، روش  $SVD$  و روش‌های مبتنی بر آن می‌باشد. از دلایل استفاده از روش  $SVD$ ، می‌توان به پایداری این روش هنگام تغییرات کوچک در داده‌ها، کاربرد آن‌ها در حل مسایل بدووضع و منفرد و حل مسایل با رتبه ناقص اشاره کرد. لازم به ذکر است، در گردآوری این فصل از مراجع [۱۰]، [۲۴]، [۲۵] و [۲۹] استفاده شده است. دستگاه معادلات خطی ناسازگار زیر را در نظر بگیرید:

$$Ax = b \quad (۱.۲)$$

که در آن  $A$  ماتریسی  $m \times n$  با  $m > n$  می‌باشد. از آنجایی که دستگاه ناسازگار است، برای هیچ مقدار  $x$  تساوی بالا برقرار نیست. بنابراین،

$$r = b - Ax \quad (۲.۲)$$

که در آن  $r$  بردار مانده<sup>۱</sup> می‌باشد. با نورم‌گیری از دو طرف معادله (۲.۲) داریم،

$$\|r\| = \|b - Ax\| \quad (۳.۲)$$

در دستگاه ناسازگار، هدف یافتن بردار جوابی مانند  $\hat{x}$  است، به طوری که  $\|b - A\hat{x}\| = \|\hat{r}\|$ ، می‌نیم شود. در این صورت، بردار  $\hat{x}$  جواب مساله حداقل مربعات می‌باشد. در حقیقت، بردار  $\hat{b} = A\hat{x}$  باید تا حد ممکن به بردار  $b$  نزدیک باشد. از این‌رو، در ادامه به معرفی روش‌های مختلف حل این‌گونه مسایل می‌پردازیم.

---

<sup>۱</sup>Vector residual

## ۱.۲ معادلات نرمال

یکی از روش‌های حل مساله حداقل مربعات زمانی که  $A$  دارای رتبه کامل و خوش‌وضع است، استفاده از معادلات نرمال می‌باشد. برای به دست آوردن معادلات نرمال،  $x$  را به گونه‌ای می‌یابیم که گرادیان عبارت  $\|Ax - b\|^2$  صفر شود.

$$\begin{aligned}\|Ax - b\|^2 &= (Ax - b)^T(Ax - b) \\ &= x^T A^T Ax - X^T A^T b - B^T Ax + b^T,\end{aligned}$$

با گرادیان گرفتن خواهیم داشت:

$$A^T Ax = A^T b,$$

که به آن معادلات نرمال می‌گویند.

در واقع، در این روش، طرفین دستگاه مورد نظر  $Ax = b$  که  $A$  با بعد  $m \times n$  می‌باشد، در  $A^T$  ضرب شده و در نتیجه دستگاهی مربعی خواهیم داشت. به این ترتیب، جواب مساله حداقل مربعات، از طریق معادلات نرمال، از رابطه

$$x = (A^T A)^{-1} A^T b.$$

به دست می‌آید.

### ۱.۱.۲ تجزیه چولسکی

ماتریس معین مثبت  $A_{n \times n}$  را می‌توان به صورت  $A = LL^T$  تجزیه نمود، به طوری که در آن  $L$ ، ماتریسی پایین مثلثی باشد، به این روش تجزیه چولسکی<sup>۲</sup> گفته می‌شود. یکی از مهم‌ترین کاربردهای تجزیه چولسکی، استفاده از آن در حل مساله حداقل مربعات می‌باشد [۱۳]. معادلات نرمال را در نظر بگیرید:

$$A^T Ax = A^T b$$

هنگامی که ماتریس  $A$  رتبه کامل باشد، ماتریس  $A^T A$  معین مثبت است. برای نشان دادن این موضوع، از تعریف ماتریس معین مثبت استفاده میشود،

$$x^T(A^T A)x = (Ax)^T(Ax) = \begin{cases} \|Ax\|^2 > 0, & x \neq 0 \\ \|Ax\|^2 = 0, & x = 0 \end{cases}$$

لذا، می‌توان تجزیه چولسکی را برای  $A^T A$  به کار برد. بنابراین، برای به دست آوردن جواب مساله حداقل مربعات از طریق تجزیه چولسکی داریم،

<sup>۲</sup>Cholesky factorization

$$A^T Ax = A^T b \xrightarrow{C=A^T A} Cx = A^T b \xrightarrow{d=Cx} d = A^T b$$

سپس تجزیه چولسکی ماتریس  $C$  را به صورت  $C = LL^T$  به دست آورده و معادلات زیر را حل می‌نماییم:

$$\begin{cases} Lz = d, \\ L^T x = z. \end{cases}$$

## ۲.۱.۲ فرآیند گرام اشمیت

فرآیند گرام اشمیت<sup>۳</sup>، روشی متداول برای متعامدسازی می‌باشد. از این روش، برای تبدیل پایه‌های موجود، به پایه‌های متعامد و یکه متعامد استفاده می‌شود. از این رو، پایه‌های متعامد و سپس فرآیند گرام اشمیت را معرفی می‌کنیم.

**تعریف ۱.۱.۲.** فرض کنید  $v_1, \dots, v_m$  بردارهای پایه از فضای برداری  $n$  بعدی  $V_1$  باشند، اگر این بردارهای پایه متعامد<sup>۴</sup> باشند، به آن مجموعه پایه‌های متعامد گویند. همچنین اگر این بردارها یکه متعامد باشند، به آن‌ها پایه‌های یکه متعامد<sup>۵</sup> گویند.

ابتدا، فرآیند متعامدسازی برای چند بردار را شرح می‌دهیم. بردارهای مستقل خطی غیر صفر  $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$  و همچنین بردار غیر صفر  $u_{m+1}$  را در فضای برداری  $V_1$  در نظر بگیرید. می‌خواهیم یک ترکیب خطی به صورت  $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_m v_m$  بیابیم، به طوری که بردار  $v_{m+1}$  که به صورت زیر تعریف می‌گردد، بر هر یک از بردارهای  $v_1, v_2, \dots, v_m$  عمود باشد،

$$v_{m+1} = u_{m+1} - \alpha_1 v_1 - \alpha_2 v_2 - \dots - \alpha_m v_m \quad (۴.۲)$$

در واقع، باید اسکالرهای حقیقی  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  را بیابیم، به طوری که شرط زیر برقرار باشد،

$$\langle v_i, v_{m+1} \rangle = \langle v_i, u_{m+1} - \alpha_1 v_1 - \alpha_2 v_2 - \dots - \alpha_m v_m \rangle = 0 \quad i = 1, 2, \dots, m$$

رابطه قبل را می‌توان به شکل زیر بازنویسی نمود،

$$\langle v_i, u_{m+1} \rangle - \alpha_1 \langle v_i, v_1 \rangle - \alpha_2 \langle v_i, v_2 \rangle - \dots - \alpha_m \langle v_i, v_m \rangle = 0$$

بنابراین، هر یک از  $\alpha_i$  ها به صورت زیر تعریف می‌شوند،

$$\alpha_i = \frac{\langle v_i, u_{m+1} \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle} = \frac{\langle v_i, u_{m+1} \rangle}{\|v_i\|^2}$$

<sup>۳</sup>Gram- Schmidt process

<sup>۴</sup>Orthogonal basis

<sup>۵</sup>Orthonormal basis

به این ترتیب، بردار  $v_{m+1}$  با تعریف زیر بر هر یک از بردارهای  $v_1, v_2, \dots, v_m$  عمود خواهد بود.

$$v_{m+1} = u_{m+1} - \frac{\langle v_1, u_{m+1} \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle v_2, u_{m+1} \rangle}{\|v_2\|^2} v_2 - \dots - \frac{\langle v_m, u_{m+1} \rangle}{\|v_m\|^2} v_m$$

به‌طور کلی فرض کنید  $v_1, v_2, \dots, v_k$  بردارهای مستقل خطی باشند، فرآیند گرام اشمیت به‌صورت زیر بیان می‌شود [۱۵]:

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1, \\ u_2 &= v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1, \\ u_3 &= v_3 - \frac{\langle v_3, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 - \frac{\langle v_3, u_2 \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle} u_2, \\ &\vdots \\ u_k &= v_k - \frac{\langle v_k, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 - \dots - \frac{\langle v_k, u_{k-1} \rangle}{\langle u_{k-1}, u_{k-1} \rangle} u_{k-1}. \end{aligned}$$

در نتیجه بردارهای  $\{u_1, \dots, u_k\}$  بردارهای متعامد خواهند بود.

### ۳.۱.۲ تجزیه QR

از دیگر روش‌های حل مساله حداقل مربعات، استفاده از تجزیه QR<sup>۶</sup> است. ماتریس  $A_{m \times n}$ ، با  $m > n$  در نظر بگیرید. ماتریس  $Q_{m \times n}$  متعامد و  $R$  ماتریس معکوس‌پذیر بالامثلثی  $n \times n$  می‌باشد. به‌طوری‌که

$$A = QR \quad (5.2)$$

با استفاده از این تجزیه، دستگاه معادلات  $Ax = b$  را به‌صورت زیر می‌توان حل نمود،

$$A^T Ax = A^T b$$

با جایگذاری تجزیه QR در رابطه بالا داریم:

$$(QR)^T QRx = (QR)^T b$$

و

$$R^T Q^T QRx = R^T Q^T b$$

<sup>۶</sup>QR factorization



از آنجایی که  $Q_{m \times n}$  یک ماتریس متعامد است بنابراین،  $Q^T Q = I_n$ . لذا

$$R^T I_n R x = R^T Q^T b \Rightarrow R^T R x = R^T Q^T b,$$

از طرفی  $R_{n \times n}$  یک ماتریس معکوس پذیر است،  $R^T$  نیز معکوس پذیر می باشد. بنابراین خواهیم داشت:

$$R x = Q^T b \quad (۶.۲)$$

در نتیجه برای به دست آوردن بردار جواب  $x$ ، ابتدا باید تجزیه  $QR$  ماتریس را توسط فرآیند گرام اشمیت به دست آورده و سپس دستگاه معادلات زیر را حل نموده،

$$\begin{cases} y = Q^T b, \\ R x = y. \end{cases} \quad (۷.۲)$$

حال، روند محاسبات ماتریس های  $Q$  و  $R$  را شرح می دهیم. ماتریس  $A_{m \times n} = [a_1 | a_2 | \dots | a_n]$  با رتبه کامل در نظر بگیرید. از آنجایی که رتبه ماتریس کامل است، ستون های ماتریس  $A$  مستقل خطی می باشند. لذا، می توان آن ها را به عنوان بردارهای پایه ماتریس  $A$  در نظر گرفت. همچنین می توان، با اعمال فرآیند گرام اشمیت، این بردارهای پایه را به بردارهای پایه متعامد تبدیل کرد. بنابراین داریم،

$$\begin{aligned} v_1 &= a_1, \\ v_2 &= a_2 - \frac{\langle v_1, a_2 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1, \\ v_3 &= a_3 - \frac{\langle v_1, a_3 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle v_2, a_3 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2, \\ &\vdots \\ v_n &= a_n - \frac{\langle v_1, a_n \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle v_2, a_n \rangle}{\|v_2\|^2} v_2 - \dots - \frac{\langle v_{n-1}, a_n \rangle}{\|v_{n-1}\|^2} v_{n-1}. \end{aligned}$$

لذا بردارهای  $\{v_1, \dots, v_n\}$  پایه های متعامد می باشند [۱۰]. معادلات بالا را می توان به صورت زیر بازنویسی کرد،

$$\begin{aligned}
 a_1 &= v_1, \\
 a_2 &= \frac{\langle v_1, a_2 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 + v_2, \\
 a_3 &= \frac{\langle v_1, a_3 \rangle}{\|v_1\|^2} + \frac{\langle v_2, a_3 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2 + v_3, \\
 &\vdots \\
 a_n &= \frac{\langle v_1, a_n \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 + \frac{\langle v_2, a_n \rangle}{\|v_2\|^2} v_2 + \dots + \frac{\langle v_{n-1}, a_n \rangle}{\|v_{n-1}\|^2} v_{n-1} + v_n.
 \end{aligned}$$

نمایش ماتریسی این معادلات به فرم زیر خواهد بود،

$$A = [v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad \dots \quad v_n] \begin{bmatrix} 1 & \frac{\langle v_1, a_2 \rangle}{\|v_1\|^2} & \frac{\langle v_1, a_3 \rangle}{\|v_1\|^2} & \dots & \frac{\langle v_1, a_n \rangle}{\|v_1\|^2} \\ 0 & 1 & \frac{\langle v_2, a_3 \rangle}{\|v_2\|^2} & \dots & \frac{\langle v_2, a_n \rangle}{\|v_2\|^2} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \frac{\langle v_3, a_n \rangle}{\|v_3\|^2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{\langle v_{n-1}, a_n \rangle}{\|v_{n-1}\|^2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

که در آن ماتریس  $A$ ، به صورت حاصل ضرب یک ماتریس متعامد در یک ماتریس بالامثلثی با عناصر قطری یک می‌باشد. لذا، برای به دست آوردن ماتریس  $Q_{m \times n}$  کافی است، بردارهای ستونی متعامد را به بردارهای یک متعامد تبدیل نماییم. به این ترتیب، نمایش ماتریسی بالا با در نظر گرفتن  $q_i = \frac{v_i}{\|v_i\|}$  به صورت زیر نوشته می‌شود،

$$A = [q_1 \quad \dots \quad q_n] \begin{bmatrix} \|v_1\| & \frac{\langle v_1, a_2 \rangle}{\|v_1\|} & \frac{\langle v_1, a_3 \rangle}{\|v_1\|} & \dots & \frac{\langle v_1, a_n \rangle}{\|v_1\|} \\ 0 & \|v_2\| & \frac{\langle v_2, a_3 \rangle}{\|v_2\|} & \dots & \frac{\langle v_2, a_n \rangle}{\|v_2\|} \\ 0 & 0 & \|v_3\| & \dots & \frac{\langle v_3, a_n \rangle}{\|v_3\|} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{\langle v_{n-1}, a_n \rangle}{\|v_{n-1}\|} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \|v_n\| \end{bmatrix}$$

بنابراین، تجزیه  $A = QR$  را به گونه‌ای به دست آوردیم که ستون‌های ماتریس  $Q = [q_1 | q_2 | \dots | q_n]$  همان پایه‌های یک متعامد باشند و  $R_{n \times n}$  یک ماتریس معکوس‌پذیر بالامثلثی با عناصر قطری مثبت باشد.

با ساده‌سازی ماتریس بالامثلثی  $R$  داریم،

$$A = [q_1 \quad \dots \quad q_n] \begin{bmatrix} \|v_1\| & \langle q_1, a_2 \rangle & \langle q_1, a_3 \rangle & \dots & \langle q_1, a_n \rangle \\ \circ & \|v_2\| & \langle q_2, a_3 \rangle & \dots & \langle q_2, a_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \circ & \circ & \circ & \dots & \|v_n\| \end{bmatrix}$$

همانطورکه مشاهده نمودید، در این روش تلاش می‌کنیم ماتریس  $A$  را به فرم بالامثلثی تبدیل نماییم. با این تبدیل، مساله حداقل مربعات مورد نظر به مساله‌ای ساده‌تر تبدیل می‌شود. برای مثال،

$$\min_{x \in R^2} \|Ax - b\|_2 = \min_{x \in R^2} \|Rx - Q^T b\|_2 = \min \left\| \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ \circ & r_{22} \\ \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \right\|_2$$

به‌وضوح، به‌دست آوردن جواب مساله حداقل مربعات با تجزیه  $QR$  ماتریس  $A$  ساده‌تر از حل آن توسط ماتریس  $A$  می‌باشد.

#### ۴.۱.۲ مقایسه روش‌های چولسکی و $QR$

ابتدا، با ارایه مثالی به مقایسه روش‌های چولسکی و  $QR$  در حل مساله حداقل مربعات می‌پردازیم.

مثال ۲.۱.۲. ماتریس  $A$  و  $b$  را به‌صورت

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \circ & 1 \circ -5 \\ \circ & \circ \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} \circ \\ 1 \circ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

در نظر بگیرید. این دستگاه با استفاده از رابطه  $A^T A x = A^T b$  دارای جواب

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 1.$$

می‌باشد. در تجزیه چولسکی ماتریس  $L$  و  $L^T$  منفرد می‌باشند، لذا این روش دارای جواب نیست. حال اگر روش  $QR$  را به‌کار ببریم، خواهیم داشت:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & \circ \\ \circ & 1 \\ \circ & \circ \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \circ & 1 \circ -5 \end{bmatrix}, \quad Q^T b = \begin{bmatrix} \circ \\ 1 \circ -5 \end{bmatrix}$$

بنابراین،

$$Rx = Q^T b \rightarrow x_1 = 1, \quad x_2 = 1.$$

از این مثال می‌توان دریافت، روش تجزیه  $QR$  بهتر از روش چولسکی عمل می‌کند.

حال، به مقایسه این دو روش تجزیه در حل مساله حداقل مربعات از نظر تعداد عملیات محاسباتی می‌پردازیم.

تعداد عملیات محاسباتی روش چولسکی  $\frac{1}{3}n^3 + mn^2$  و در تجزیه  $QR$ ،  $2mn^2$  می‌باشد. این نشان‌دهنده سرعت بیشتر، روش چولسکی برای رسیدن به جواب می‌باشد. اما توجه داشته باشید که روش  $QR$  جواب دقیق‌تری از مساله را ارائه می‌کند.

در ادامه با ذکر مثال، نقص روش معادلات نرمال را بیان می‌کنیم. در این روش، اطلاعات در شکل  $A^T A$  و  $A^T b$  از بین می‌روند.

برای مثال، با در نظر گرفتن  $A$  به صورت:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \epsilon & 0 \\ 0 & \epsilon \end{bmatrix}$$

که  $0 < \epsilon < 1$  می‌باشد. آنگاه برای  $\epsilon$  خیلی کوچک،

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 + \epsilon^2 & 1 \\ 1 & 1 + \epsilon^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

منفرد می‌باشد. علت این امر، خطای محاسباتی در ضرب  $A$  و  $A^T$  است. با توجه به دقت رایانه برای محاسبه عملیات ضرب و خطای گرد کردن، امکان ایجاد خطا در محاسبات همواره وجود دارد. حساسیت جواب نیز به علت بزرگ بودن عدد شرطی دستگاه جدید نسبت به دستگاه اولیه، بدتر می‌شود:

$$k(A^T A) = [k(A)]^2,$$

رابطه بالا با نوشتن تجزیه  $SVD$  برای ماتریس‌های  $A$  و  $A^T A$  و به دست آوردن مقادیر تکین آن‌ها نتیجه می‌شود.

## ۲.۲ روش تجزیه مقدار تکین

در گردآوری این بخش از [۵] استفاده شده است.

همانطور که می‌دانید، در مساله حداقل مربعات هدف، یافتن بهترین جواب برای دستگاه معادلات ناسازگار  $Ax = b$  است، به طوری که  $\|Ax - b\|$  می‌نیم گردد. زمانی که ماتریس  $A$  رتبه کامل باشد، می‌توان به وسیله حل معادلات نرمال و یا با استفاده از تجزیه  $QR$  و چولسکی جواب مساله حداقل مربعات را به دست آورد. اما این روش‌ها زمانی که  $A$  رتبه ناقص باشد و یا  $A^T A$  یک ماتریس بدوضع باشد، قابل استفاده نیستند. در چنین مواقعی می‌توان از روش‌های مبتنی بر  $SVD$  استفاده نمود.

$SVD$  ماتریس  $A$  از مرتبه  $m \times n$  با  $m \geq n$  به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$A = U \sum V^T, \quad (۸.۲)$$

که  $U = [u_1, \dots, u_m] \in \mathbb{R}^{m \times m}$  ماتریس متعامد یکه‌ای است، که ستون‌های آن بردارهای تکین چپ  $A$  می‌باشند، و  $V = [v_1, \dots, v_n] \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ماتریس متعامد یکه‌ای است، که ستون‌های آن بردارهای تکین راست  $A$  می‌باشند. عناصر ناصفر ماتریس قطری  $\sum$  نیز به صورت

$$\sum = \text{diag}[\sigma_1, \dots, \sigma_n] \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad (۹.۲)$$

است. که  $\sigma_j$ ها مقادیر تکین با ویژگی  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n$  و  $\sigma_j \geq 0$  می‌باشند. حال، با توجه به  $SVD$  ماتریس  $A$  به دنبال یافتن  $x$  ای می‌باشیم که بردار مانده  $\|Ax - b\|_2$  می‌نیم شود. بنابراین،

$$\begin{aligned} \|r\|_2 &= \left\| U \sum V^T x - b \right\|_2 \\ &= \left\| \sum V^T x - U^T b \right\|_2 \\ &= \left\| \sum y - b' \right\|_2 \end{aligned} \quad (۱۰.۲)$$

که در آن  $V^T x = y$  و  $U^T b = b'$ .

بنابراین، استفاده از  $SVD$  در ماتریس رتبه کامل  $A$ ، مساله حداقل مربعات برای آن را به یک مساله حداقل مربعات ماتریس قطری  $\sum$  کاهش می‌دهد. بردار  $y^T = (y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n)$  که عبارت  $\| \sum y - b' \|_2$  را می‌نیم می‌سازد به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$y_i = \begin{cases} \frac{b'_i}{\sigma_i}, & \text{اگر } \sigma_i \neq 0 \\ \text{دلخواه}, & \text{اگر } \sigma_i = 0 \end{cases}$$

الگوریتم ۱۰.۲.۲. با توجه به مطالب بالا، الگوریتم زیر را می‌توان برای به دست آوردن جواب حداقل مربعات، با استفاده از  $SVD$  ارائه کرد.

گام ۱:  $SVD$  ماتریس  $A$  که به صورت  $A = U \sum V^T$  می‌باشد را پیدا کنید.

$$\text{گام ۲: بردار } b' = U^T b = \begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix} \text{ را تشکیل دهید.}$$

گام ۳: بردار  $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$  را به صورت زیر حساب کنید.

$$y_i = \begin{cases} \frac{b_i}{\sigma_i}, & \text{اگر } \sigma_i \neq 0 \\ \text{دلخواه}, & \text{اگر } \sigma_i = 0 \end{cases}$$

گام ۴: جواب‌های حداقل مربعات را به صورت زیر محاسبه نمایید

$$x = Vy.$$

اگر ماتریس  $A$  از رتبه  $l$  باشد. آنگاه مقادیر تکین  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_l > \sigma_{l+1} = \dots = \sigma_n = 0$  وجود دارند و  $A$  به صورت

$$A = \sum_{j=1}^l \sigma_j u_j v_j^T \quad (11.2)$$

بیان می‌شود.

## ۱.۲.۲ روش شبه معکوس

از روش شبه معکوس<sup>۷</sup>، برای محاسبه جواب مساله حداقل مربعات خطی فاقد جواب منحصر به فرد، استفاده می‌شود. هنگامی که ماتریس مورد نظر  $A$  رتبه ناقص باشد، نمی‌توان جواب حداقل مربعات را از معادلات نرمال به دست آورد. لذا در چنین مواقعی، از روش شبه معکوس برای حل دستگاه مورد نظر استفاده می‌کنیم.

شبه معکوس دارای خواص زیر است:

$$A^\dagger A = (A^\dagger A)^T \quad -1$$

$$AA^\dagger = (AA^\dagger)^T \quad -2$$

$$AA^\dagger A = A \quad -3$$

$$A^\dagger AA^\dagger = A^\dagger \quad -4$$

این چهار شرط را شرایط مور پنرس<sup>۸</sup> می‌نامند.

<sup>۷</sup>Pseudo inverse

<sup>۸</sup>Moore Penrose

قضیه ۲.۲.۲. اگر  $A = U \Sigma V^T$  باشد، آنگاه  $A^\dagger = V \Sigma^\dagger U^T$ ، که

$$\Sigma^\dagger = \begin{cases} \frac{1}{\sigma_i}, & \sigma_i > 0, \\ 0, & \sigma_i = 0. \end{cases}$$

برای اثبات [۵] را ببینید.

با توجه به قضیه بالا، شبه‌معکوس ماتریس  $A$  از رتبه  $l$ ، در (۱۱.۲) به صورت زیر بیان می‌شود:

$$A^\dagger = \sum_{j=1}^l \sigma_j^{-1} v_j u_j^T \quad (11.2)$$

بنابراین، جواب مساله حداقل مربعات به صورت زیر به دست می‌آید:

$$x = A^\dagger b = \sum_{j=1}^l \sigma_j^{-1} v_j u_j^T b \quad (13.2)$$

حسن نمایش جواب حداقل مربعات با استفاده از  $SVD$ ، آگاهی از اساسی‌ترین مشکلات محاسباتی در فرآیند حل مسایل می‌باشد. با استفاده از این تجزیه، می‌توان نگاه دقیق‌تری نسبت به جواب مساله داشت. همان‌طور که مشاهده نمودید، برای عبارت  $\frac{1}{\sigma_k}$  در (۱۳.۲) اگر برخی مقادیر تکین ماتریس  $A$  کوچک یا صفر باشند، در این صورت عدد شرطی ماتریس بزرگ شده و سبب بدوضعی دستگاه و در نتیجه جواب نامطلوب می‌شود. به این علت، در روش‌هایی مانند منظم‌سازی<sup>۹</sup> سعی می‌شود از عبارت‌هایی به صورت  $\frac{1}{\sigma_k}$  که در جواب دستگاه تاثیرگذار است، دوری شود. از این‌رو، در بخش بعد به معرفی این روش‌ها می‌پردازیم.

## ۳.۲ روش‌های منظم‌سازی

در گردآوری این بخش از منابع [۲۱] و [۲۴] استفاده شده است.

همان‌طور که ذکر شد، ما به یک جواب تقریبی برای مساله حداقل مربعات با دستگاه معادلات خطی

$$Ax = b \quad \text{نیاز داریم که با استفاده از}$$

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\| \quad (14.2)$$

به دنبال یافتن جوابی مناسب برای آن می‌باشیم.

فرض کنید، جواب  $x$  به تغییر در داده  $b$  بسیار حساس باشد، بنابراین داده  $b$  را می‌توان با خطای

مفروض  $e$  به صورت زیر در نظر گرفت:

$$b = \hat{b} + e \quad (15.2)$$

<sup>۹</sup>Regularization

که بردار  $\hat{b}$  داده‌ای دقیق می‌باشد. جواب مطلوب  $x$ ، جوابی برای دستگاه معادلات خطی شامل داده بدون خطا می‌باشد، به طوری که:

$$Ax = \hat{b}. \quad (16.2)$$

از آنجایی که این مساله به تغییرات در داده‌ها بسیار حساس است، حتی یک خطای کوچک ممکن است جواب محاسبه شده را به طور قابل توجهی تغییر دهد. بنابراین، جواب محاسبه شده ممکن است خیلی متفاوت از جواب مطلوب و در نتیجه بی‌معنا باشد. به منظور تعیین تقریبی بامعنا از جواب مطلوب (۱۴.۲) برای دستگاه معادلات خطی  $Ax = b$ ، ابتدا باید این دستگاه با مساله‌ای نزدیک، که جوابی با حساسیت کمتر، به خطا در داده می‌باشد، جایگزین شود. از این جایگزینی، معمولاً با عنوان منظم‌سازی یاد می‌شود. روش‌های منظم‌سازی تیخونف<sup>۱۰</sup> و تجزیه مقدار تکین ناقص (TSVD)<sup>۱۱</sup> از جمله روش‌های منظم‌سازی به‌شمار می‌روند، که در ادامه به شرح آن‌ها می‌پردازیم.

لازم به ذکر است، برای تعیین جواب معادلات انتگرال پیوسته، این معادلات را گسسته نموده، این امر سبب تقویت خطا (نویز) در داده‌ها می‌شود. که همه این مسایل بدوضع گسسته از معیارهای زیر پیروی می‌کنند:

۱- جواب به آشفتگی در داده‌ها حساس است.

۲- مقادیر تکین به تدریج به صفر میل می‌کنند.

### ۱.۳.۲ روش منظم‌سازی TSVD

همانطور که عنوان شد، مشکل اصلی در مسایل بدوضع وجود مقادیر تکین کوچک در مخرج کسر (۱۳.۲) است، که سبب بی‌کران شدن جواب مساله می‌شود. ساده‌ترین روش مقابله با این مشکل، حذف این مقادیر تکین کوچک است، که تحت روش TSVD معرفی می‌شود. در واقع، در این روش مقادیر تکین کوچک، صفر در نظر گرفته می‌شوند. با به‌کارگیری این روش سعی بر آن است که تا حد امکان از تأثیر مقادیر منفرد کوچک کاسته شود.

بهترین تقریب ماتریس  $A$  با رتبه  $k$  را در نظر بگیرید. در این صورت (۱۱.۲) را توسط SVD می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$A_k = \sum_{j=1}^k \sigma_j u_j v_j^T \quad (17.2)$$

شکل ماتریسی (۱۷.۲) به صورت

$$A_k = U \sum_k V^T \quad (18.2)$$

<sup>۱۰</sup>Tikhonov regularization

<sup>۱۱</sup>Truncated Singular Value Decomposition



بیان می‌شود، که  $\sum_k = \text{diag}[\sigma_1, \dots, \sigma_k, \circ, \dots, \circ]$  می‌باشد. شبه‌معکوس مور پنروس (۱۸.۲) به صورت

$$A_k^\dagger = V \sum_k^\dagger U^T \quad (19.2)$$

و  $\sum_k^\dagger = \text{diag}[\sigma_1^{-1}, \sigma_2^{-1}, \dots, \sigma_k^{-1}, \circ, \dots, \circ]$  می‌باشد. بنابراین، روش  $TSVD$  جواب تقریبی از (۱۴.۲) را از طریق

$$x_k = A_k^\dagger b = V \sum_k^\dagger U^T b \quad (20.2)$$

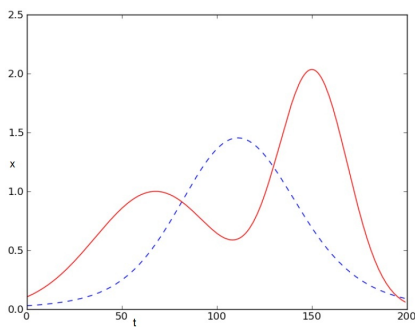
محاسبه می‌کند. این رابطه را می‌توان به صورت ترکیب خطی بردارهای  $V$  نوشت:

$$x_k = \sum_{j=1}^k \frac{u_j^T b}{\sigma_j} v_j, \quad k = 1, 2, \dots, l \quad (21.2)$$

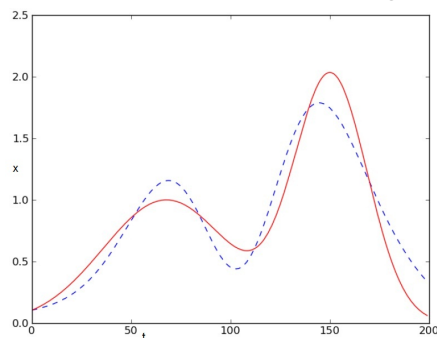
با در نظر گرفتن  $\tilde{x}_k = V^T x_k$  و  $\tilde{b} = U^T b$  ابتدا باید

$$\tilde{x}_k = \left[ \frac{\tilde{b}_1}{\sigma_1}, \frac{\tilde{b}_2}{\sigma_2}, \dots, \frac{\tilde{b}_k}{\sigma_k}, \circ, \dots, \circ \right], \quad k = 1, \dots, l \quad (22.2)$$

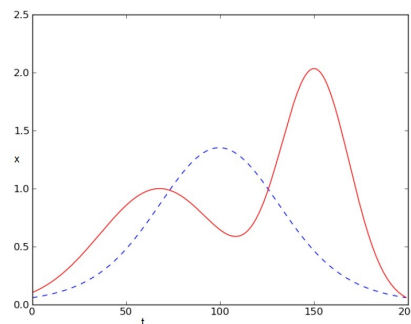
و سپس  $x_k = V \tilde{x}_k$  را محاسبه کنیم.



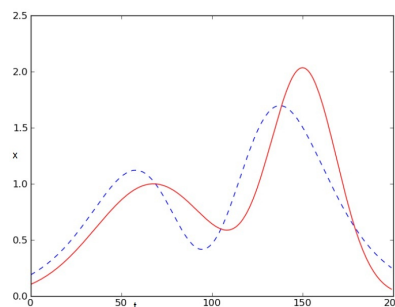
شکل ۲.۲: جواب  $TSVD$  با  $k = 2$



شکل ۴.۲: جواب  $TSVD$  با  $k = 4$



شکل ۱.۲: جواب  $TSVD$  با  $k = 1$



شکل ۳.۲: جواب  $TSVD$  با  $k = 3$

شکل‌های بالا، جواب‌های  $TSVD$  برای  $k = 1, 2, 3, 4$  یک مساله معکوس<sup>۱۲</sup> را نشان می‌دهند. برای اندیس‌های به اندازه کافی کوچک همانطور که  $k$  افزایش می‌یابد، جواب  $x_k$  (خط‌چین) تقریب بهتری از جواب واقعی (رنگ قرمز) را محاسبه می‌کند. این به علت افزایش قسمت‌های هموار<sup>۱۳</sup>  $V$ ، بدون افزایش اختلال می‌باشد. هنگامی که  $k$  خیلی بزرگ باشد، ماتریس‌های متناظر با اندیس‌های بزرگتر، سبب انتشار خطای بزرگ در جواب می‌شوند. در نتیجه، تقریبی از جواب مساله، با دقت کمتری خواهیم داشت. عدد شرطی ماتریس  $A_k$ ، به انتخاب دقیق  $k$  کمک می‌کند.

**تعریف ۱.۳.۲.** دو مساله را معکوس یکدیگر می‌نامیم، اگر فرمول‌بندی یکی شامل همه یا قسمتی از جواب دیگری باشد [۲].

**تعریف ۲.۳.۲.** اصلاح مجموعه داده‌ها به منظور حذف یا کاهش نقاط دور افتاده را هموارسازی گویند [۱۷].

روش  $TSVD$ ، مساله (۱۴.۲) را که عدد شرطی بزرگی دارد، با ماتریس  $A_k$  جایگزین می‌کند. این روش، برای  $k$  کوچک، عدد شرطی کمتری دارد. عدد شرطی ماتریس  $A_k$  با رتبه  $k$ ، به انتخاب  $k$  بستگی دارد. زیرا

$$k(A_k) = \frac{\sigma_1}{\sigma_k}.$$

با در نظر گرفتن اختلاف  $A_k$  از  $A$ ، می‌توان فاصله آن از ماتریس  $A$  را به دست آورد:

$$\|A - A_k\| = \|U \sum V^T - U \sum_k V^T\| = \sigma_{k+1}.$$

بنابراین، انتخاب  $k$  بسیار بزرگ موجب عدد شرطی بزرگ می‌شود. همچنین اگر  $k$  بسیار کوچک باشد،  $A_k$  تقریب مناسبی برای ماتریس  $A$  نخواهد بود.

اگرچه در روش  $TSVD$  با حذف مقادیر تکین کوچک، مساله ناپایدار نمی‌شود. اما، باید به این نکته توجه داشت که در این روش بردارهای تکین  $v_{k+1}, \dots, v_l$  نیز حذف می‌شوند، که این امر سبب از بین رفتن دقت مساله در عین پایداری آن می‌شود.

## ۲.۳.۲ روش منظم‌سازی تیخونف

در این روش منظم‌سازی، مساله می‌نیم‌سازی (۱۴.۲) با مساله حداقل مربعات جریمه

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \{ \|Ax - b\|^2 + \|L_\mu x\|^2 \} \quad (۲۳.۲)$$

جایگزین می‌شود، که  $L_\mu \in \mathbb{R}^{k \times n}$  با  $k \leq n$  را ماتریس منظم‌سازی می‌نامند. همچنین،  $\mu > 0$  پارامتر منظم‌سازی می‌باشد.

<sup>۱۲</sup>Inverse problem

<sup>۱۳</sup>Smoothing

ساده‌ترین شکل منظم‌سازی تیخونف، زمانی است که  $L_\mu = \mu I$ ، برای ثابت  $\mu$  باشد. بنابراین، با انتخاب این  $L_\mu$ ، مساله می‌نیم‌سازی (۲۳.۲) به شکل

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \{ \|Ax - b\|^2 + \mu^2 \|x\|^2 \}. \quad (24.2)$$

نوشته می‌شود.

جواب‌های حداقل مربعات مسایل بدوضع گسسته به جواب‌هایی با نورم بزرگ میل می‌کنند، با جریمه کردن بردار جواب  $x$  با استفاده از وزن دار نمودن آن‌ها با ثابت مثبت  $\mu$  به جواب‌هایی برای (۲۴.۲) با نورم‌های کوچکتر می‌رسیم. این جواب‌های با نورم کوچکتر می‌توانند تقریب دقیقی از مساله بدون خطا (۱۶.۲) باشند. جواب بدیهی برای (۲۴.۲) به صورت:

$$x_\mu = (A^T A + \mu^2 I)^{-1} A^T b \quad (25.2)$$

می‌باشد، که  $\mu > 0$  و  $A^T A + \mu^2 I$  وارون‌پذیر می‌باشد. برای به دست آوردن رابطه (۲۵.۲)، رابطه (۲۴.۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \|Ax - b\|^2 + \mu^2 \|x\|^2 &= (Ax - b)^T (Ax - b) + \mu^2 x^T x \\ &= x^T A^T A x - x^T A^T b - b^T A x + b^T b + \mu^2 x^T x \\ &= x^T (A^T A + \mu^2 I) x - x^T A^T b - b^T A x + b^T b \end{aligned}$$

از آنجایی که تابع نورم پیوسته و محدب است، بنابراین، می‌نیم موضعی، می‌نیم مطلق نیز می‌باشد. از این رو، با گرادیان گرفتن از عبارت فوق خواهیم داشت:

$$2(A^T A + \mu^2 I)x - 2A^T b = 0 \quad (26.2)$$

بنابراین، جواب (۲۵.۲) به دست می‌آید. با به کار بردن  $SVD$  ماتریس  $A$  داریم:

$$A = U \sum V^T, \quad A^T = V \sum^T U^T$$

بنابراین

$$A^T A = V \sum^T U^T U \sum V^T = V \sum^T \sum V^T \quad (27.2)$$

با جایگذاری (۲۷.۲) در (۲۶.۲) به عبارت

$$\left( V \sum^T \sum V^T + \mu^2 V V^T \right) x_\mu = V \sum^T U^T b$$

می‌رسیم. در نتیجه،

$$V \left( \sum^T \sum + \mu^2 \right) V^T x_\mu = V \sum^T U^T b$$

و با ضرب طرفین رابطه بالا در  $V^T$  از سمت چپ و همچنین با قرار دادن  $\tilde{b} = U^T b$  داریم

$$\left( \sum^T \sum + \mu^2 I \right) x = \sum^T \tilde{b}$$

حال قرار می‌دهیم  $x = V^T x_\mu$ . بنابراین،

$$x_\mu = V \left( \sum^T \sum + \mu^2 I \right)^{-1} \sum^T \tilde{b} \quad (28.2)$$

با بررسی  $SVD$ ، مشاهده می‌کنیم که منظم‌سازی تیخونف، مقدار ثابت مثبت  $\mu^2$  را به هر مقدار تکین  $\sigma_i^2$  ماتریس  $A^T A$  اضافه می‌کند. این به معنای هموارسازی اشاره دارد. انتخاب  $\mu$  بسیار بزرگ به‌عنوان هموارسازی بالا<sup>۱۴</sup> و انتخاب  $\mu$  بسیار کوچک به‌عنوان هموارسازی پایین<sup>۱۵</sup> معرفی می‌شود. برای اطلاعات بیشتر در این زمینه به [۱۷] مراجعه کنید.

### ۳.۳.۲ اصل اختلاف

هنگامی که نورم خطای  $b$  معلوم باشد یا بتوان آن را تقریب زد، می‌توان از اصل اختلاف<sup>۱۶</sup> استفاده نمود. نورم خطا در  $b$  را  $\|e\| = \varepsilon$  در نظر بگیرید. اصل اختلاف، پارامتر تنظیم را به‌گونه‌ای تعیین می‌کند که خطای باقیمانده دستگاه منظم‌شده، کمتر یا مساوی  $\eta\varepsilon$  باشد. همچنین، ثابت  $\eta > 1$  مستقل از  $\varepsilon$  است. برای روش منظم‌سازی  $TSVD$  این به آن معنا است که  $k$  را تا حد ممکن کوچک انتخاب کنیم به طوری که

$$\|Ax_k - b\| \leq \eta\varepsilon \quad (29.2)$$

و برای روش منظم‌سازی تیخونف به این معنا است که  $\mu$  را طوری انتخاب کنیم که

$$\|Ax_\mu - b\| = \eta\varepsilon \quad (30.2)$$

جزئیات اینکه چطور می‌توان مقدار  $\mu$  را هنگامی که  $SVD$  ماتریس  $A$  موجود است تعیین نمود، در بخش بعد مورد بررسی قرار گرفته است.

در روش منظم‌سازی  $TSVD$  از اصل اختلاف برای تعیین اندیس برش استفاده می‌شود. بنابراین، برای تعیین کوچکترین مقدار  $k$  در این روش از رابطه

<sup>۱۴</sup>Oversmoothing

<sup>۱۵</sup>Undersmoothing

<sup>۱۶</sup>Discerepancy principle

$$\left\| \sum_k \tilde{x}_k - \tilde{b} \right\| \leq \eta \varepsilon \quad (31.2)$$

استفاده می‌کنیم. رابطه بالا با جایگذاری  $A_k = U \sum_k V^T$ ،  $\tilde{x}_k = V^T x_k$  و  $b = U \tilde{b}$ ، در رابطه (۲۹.۲) نامساوی زیر را نتیجه می‌دهد،

$$\left\| U \sum_k V^T x_k - U \tilde{b} \right\| \leq \eta \varepsilon, \quad (32.2)$$

با ضرب طرف چپ نامساوی فوق در  $\|U^T\|$  رابطه (۳۱.۲) را خواهیم داشت.

الگوریتم ۳.۳.۲. در این الگوریتم، روش انتخاب تقریب  $x_k$  در روش منظم‌سازی  $TSVD$ ، بر اساس اصل اختلاف بیان شده است.

۱- به دست آوردن تجزیه مقدار تکین ماتریس  $A$ ،  $A = U \sum V^T$ .

۲- برای هر  $k = 1, \dots, n$

$$\tilde{x}_k = \left[ \frac{\tilde{b}}{\sigma_1}, \frac{\tilde{b}}{\sigma_2}, \dots, \frac{\tilde{b}}{\sigma_k}, 0, \dots, 0 \right]$$

محاسبه می‌شود.

۳- اگر  $\left\| \sum_k \tilde{x}_k - \tilde{b} \right\| \leq \eta \varepsilon$  الگوریتم متوقف شده و  $x_k = V \tilde{x}_k$  را به دست می‌آوریم، در غیر این صورت به مرحله ۲ برمی‌گردیم.

### ۴.۳.۲ تعیین پارامتر تنظیم $\mu$ برای منظم‌سازی تیخونف

تابع  $\Psi$  را به صورت

$$\Psi(\mu) = \|Ax_\mu - b\|^2 \quad (33.2)$$

تعریف می‌کنیم.

در روش منظم‌سازی تیخونف که در بخش قبل بیان شده است،  $\mu$  را طوری انتخاب می‌کنیم که:

$$\Psi(\mu) = \eta^2 \varepsilon^2. \quad (34.2)$$

با جایگذاری (۲۸.۲) در (۳۳.۲) و استفاده از تجزیه مقدار تکین ماتریس  $A$  داریم:

$$\begin{aligned}
\Psi(\mu) &= \|Ax_\mu - b\|^2 \\
&= \|U \sum V^T V (\sum^T \sum + \mu^2 I)^{-1} \sum^T \tilde{b} - U\tilde{b}\|^2 \\
&= \|(\sum (\sum^T \sum + \mu^2 I)^{-1} \sum^T - I)\tilde{b}\|^2 \\
&= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\sigma_j^2}{\sigma_j^2 + \mu^2} - 1\right)^2 \tilde{b}_j^2
\end{aligned}$$

حال تابع  $\Phi(v) = \Psi\left(\frac{1}{v}\right)$  را تعریف می‌کنیم. بنابراین، داریم:

$$\Phi(v) = \sum_{j=1}^n \frac{\tilde{b}_j^2}{(v\sigma_j^2 + 1)^2}$$

می‌توان ثابت کرد  $\Phi$  برای  $v \geq 0$ ، نزولی و محدب است. بنابراین، با استفاده از روش نیوتن، می‌توان معادله

$$\Phi(v) = \eta^2 \varepsilon^2 \quad (35.2)$$

را که همگرا مرتبه دو و یکنوا است، حل نمود. در تکرار اول،  $v_0 = 0$  در نظر می‌گیریم و تکرارها زمانی که  $v_{k+1} \leq v_k$  پایان می‌یابد. در روش نیوتن، به محاسبه مشتقات نیاز داریم که به صورت

$$\Phi'(v) = \frac{-2\sigma_j^2}{(1 + v\sigma_j^2)^3} \tilde{b}_j^2$$

محاسبه می‌شود.

توجه داشته باشید، تابع  $\Psi(\mu)$  الزاما محدب نمی‌باشد و تعیین جواب از (34.2) به روش نیوتن، پیچیده‌تر از محاسبه جواب (35.2) می‌باشد.

## ۵.۳.۲ روش منظم‌سازی پیشنهادی

روش منظم‌سازی پیشنهادی، از ویژگی‌های روش‌های منظم‌سازی تیخونف و  $TSVD$  استفاده می‌کند. بردار جواب  $x_\mu$  از رابطه (28.2) را به صورت

$$x_\mu = \sum_{j=1}^n \frac{\sigma_j}{\sigma_j^2 + \mu^2} \tilde{b}_j v_j \quad (36.2)$$

می‌نویسیم. از این عبارت می‌توان نتیجه گرفت، در منظم‌سازی تیخونف، مؤلفه‌های جواب متناظر با  $\tilde{b}$  میرا هستند. از طرف دیگر، در منظم‌سازی  $TSVD$  مؤلفه‌های غیر صفر، میرا نیستند. اگر بدانیم کدام مؤلفه‌های جواب، منجر به خطای بیشتر آن می‌شوند، می‌توان تنها آن مؤلفه‌ها را میرا نمود. مؤلفه‌های جواب اندیس بالاتر، شامل بردارهایی از  $V$  با نوسان بیشتر می‌باشند. این بردارهای

نوسانی به خطای بیشتر جواب کمک می‌کنند. بنابراین، آن‌ها دقیقا همان مؤلفه‌های جوابی هستند که نیاز به میرایی دارند. همچنین، مؤلفه‌های اندیس پایین‌تر، نیاز به میرایی ندارند. زیرا آن‌ها با بردارهایی از  $V$  با نوسان کمتر مطابقت دارند و منجر به خطای بیشتر جواب نمی‌شوند. در اینجا روش مارتین فوری<sup>۱۷</sup> را پیشنهاد می‌کنیم که مؤلفه‌های اندیس بالاتر جواب، میرا شده ولی مؤلفه‌های اندیس پایین‌تر، میرا نمی‌شوند.

هنگامی که  $\sigma_j > \mu$  مؤلفه جواب  $j$ ام را میرا نمی‌کنیم ولی اگر  $\sigma_j \leq \mu$ ، عامل میرا  $\sigma_j^2 + \mu^2$  را در مخرج کسر (۳۶.۲) با  $\mu^2$  جایگزین می‌کنیم. فرض کنید  $\sigma_k > \mu \geq \sigma_{k+1}$ ، آنگاه، جواب پیشنهادی  $\bar{x}_\mu$  به صورت

$$\bar{x}_\mu = \sum_{j=1}^k \sigma_j^{-1} \tilde{b}_j v_j + \sum_{j=k+1}^n \frac{\sigma_j}{\mu} \tilde{b}_j v_j \quad (37.2)$$

می‌باشد.

حال، نمایش ماتریسی (۳۷.۲) را ارایه می‌کنیم. ماتریس

$$P_\mu = \text{diag}[\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_k^2, \mu^2, \dots, \mu^2] \quad (38.2)$$

را تعریف می‌کنیم. با استفاده از (۳۸.۲)، (۳۷.۲) را می‌توان به شکل ماتریسی

$$\bar{x}_\mu = V P_\mu^{-1} \sum^T \tilde{b} \quad (39.2)$$

نوشت. جواب (۳۹.۲) در عبارت

$$(A^T A + L_\mu^T L_\mu) \bar{x}_\mu = A^T b \quad (40.2)$$

صدق می‌کند. که در آن ماتریس تنظیم  $L_\mu = D_\mu V^T$  می‌باشد. همچنین

$$D_\mu^2 = \text{diag}[\max\{\mu^2 - \sigma_1^2, 0\}, \max\{\mu^2 - \sigma_2^2, 0\}, \dots, \max\{\mu^2 - \sigma_n^2, 0\}] \quad (41.2)$$

بنابراین، روش پیشنهادی، اصلاحی از روش تیخونف می‌باشد. این روش، اثرات مؤلفه‌های جواب اندیس پایین‌تر را حفظ می‌کند در حالی که مؤلفه‌های جواب اندیس بالا میرا هستند. روش پیشنهادی توسط الگوریتم (۴۰.۳.۲) خلاصه شده است.

الگوریتم ۴۰.۳.۲. الگوریتم روش تعیین  $\bar{x}_\mu$ ، در روش منظم‌سازی پیشنهاد شده :

۱- ابتدا  $\mu$  را از منظم‌سازی تیخونف، با استفاده از اصل اختلاف تعیین می‌کنیم.

۲- برای  $\sigma_j > \mu \geq \sigma_{j+1}$

$$P_\mu = \text{diag}[\sigma_1^2, \dots, \sigma_j^2, \mu^2, \dots, \mu^2]$$

<sup>۱۷</sup>Martin Fuhry

را تشکیل می‌دهیم.

۳- جواب  $\bar{x}_\mu$  را از  $\bar{x}_\mu = VP_\mu^{-1} \sum^T \tilde{b}$  به دست می‌آوریم.

### ۶.۳.۲ مقایسه روش‌های منظم‌سازی

در این بخش، با ارایه مثالی به مقایسه روش‌های منظم‌سازی معرفی شده می‌پردازیم. برای این منظور، معادله انتگرالی فردهلم<sup>۱۸</sup> را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$(Tf)(s) = \int k(s, t)f(t)dt \quad (۴۲.۲)$$

که در آن  $T$  یک عملگر است. برای حل این معادله با استفاده از روش‌های انتگرال‌گیری عددی باید مساله را گسسته‌سازی نمود. فرض کنید، انتگرال (۴۲.۲) را به صورت زیر تقریب بزنیم:

$$\int k(s_j, t)f(t)dt = \sum_{i=0}^M w_i k(s_j, t_i)f(t_i)\Delta t_i \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad m > n$$

بنابراین، (۴۲.۲) به دستگاه معادلات خطی

$$b = Ax + \varepsilon, \quad (۴۳.۲)$$

تبدیل می‌شود. که در آن،  $A = (A_{ij}) = w_i k(s_i, y_i)\Delta t_i$  ماتریس  $m \times n$  با  $m > n$ ،  $b_i = g(s_i)$  و  $x = f(t_i)$  برداری مجهول در  $\mathbb{R}^n$  است. همچنین،  $w_i = \frac{b-a}{n}$  و  $t_i = \frac{i-1}{n}(b-a)$ . دستگاه خطی (۴۳.۲) منجر به حل مساله حداقل مربعات می‌شود. لذا، از روش‌های منظم‌سازی بیان شده می‌توان برای حل آن استفاده نمود. در مساله آزمون فیلیپس<sup>۱۹</sup> تعریف می‌کنیم [۲۴]:

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1 + \cos(\frac{\pi x}{3}), & |x| < 3, \\ 0, & |x| \geq 3. \end{cases} \quad (۴۴.۲)$$

همچنین،  $f(t) = \Phi(t)$ ،  $k(s, y) = \Phi(s - t)$  و

$$g(s) = (6 - |s|)(1 + \frac{1}{4}\cos(\frac{\pi s}{3})) + \frac{9}{2\pi}\sin(\frac{\pi |s|}{3})$$

و بازه انتگرال‌گیری  $[-6, 6]$  می‌باشد.

حال، در این مساله به مقایسه روش‌های منظم‌سازی  $TSVD$ ، تیخونف و روش پیشنهادی می‌پردازیم. لازم به ذکر است، برای محاسبه خطای نسبی از رابطه  $\frac{\|x_c - x_e\|}{\|x_e\|}$  استفاده شده است. که در آن  $x_c$  جواب محاسبه شده از روش‌های منظم‌سازی و  $x_e$  جواب واقعی می‌باشد.

<sup>۱۸</sup>Fredholm

<sup>۱۹</sup>Phillips



جدول ۱۰.۲: مقایسه خطای نسبی روش‌های منظم‌سازی در آزمون فیلیپس

روش $TSVD$	روش تیخونف	روش پیشنهادی	نویز
$۴,۲۶۹۵ \times ۱۰^{-۲}$	$۴,۳۹۱۳ \times ۱۰^{-۲}$	$۲,۳۲۷۰ \times ۱۰^{-۲}$	۱۰٪
$۲,۴۸۸۳ \times ۱۰^{-۲}$	$۳,۱۶۵۷ \times ۱۰^{-۲}$	$۲,۱۵۷۰ \times ۱۰^{-۲}$	۵٪
$۲,۳۸۷۶ \times ۱۰^{-۲}$	$۱,۹۲۳۹ \times ۱۰^{-۲}$	$۱,۵۷۰۴ \times ۱۰^{-۲}$	۱٪
$۹,۹۲۳۶ \times ۱۰^{-۳}$	$۸,۱۹۳۷ \times ۱۰^{-۳}$	$۵,۴۶۵۱ \times ۱۰^{-۳}$	۰,۱٪

همانطور که مشاهده می‌کنید، روش منظم‌سازی پیشنهاد شده در همه حالات بهتر از روش‌های دیگر عمل می‌کند.

## ۴.۲ پردازش معکوس

روش‌های دیگری نیز برای حل مسایل منفرد وجود دارد. روش‌های ترانهاده ژاکوبی<sup>۲۰</sup>، حداقل مربعات میرا ( $DLS$ )<sup>۲۱</sup> و حداقل مربعات میرا شده انتخابی ( $SDLS$ )<sup>۲۲</sup> از جمله این روش‌ها می‌باشند [۳۱]. در ادامه ابتدا به معرفی مسایل پردازش معکوس ( $IK$ )<sup>۲۳</sup> پرداخته و پس از آن به معرفی روش‌های ذکر شده می‌پردازیم.

مساله  $IK$  برای یک ربات، یافتن تنظیماتی برای زوایای مفصل<sup>۲۴</sup> است، به طوری که اثرکننده‌های انتهایی<sup>۲۵</sup> ربات، در موقعیت‌های هدف<sup>۲۶</sup> قرار گیرند.

تعریف ۱۰.۴.۲. قسمت انتهایی بازوی ربات که برای برقراری ارتباط با محیط خارج طراحی شده است، انتهای مؤثر نامیده می‌شود [۲].

رباتی را با  $n$  مفصل در نظر بگیرید، که در آن  $\theta_j$ ها نشان‌دهنده زوایای مفصل می‌باشند. برای حل مساله  $IK$ ، زوایای مفصل به گونه‌ای تعیین می‌شوند که اثرکننده‌های انتهایی ربات در موقعیت هدف قرار گیرند.  $k$  انتهای مؤثر با موقعیت‌های  $s_1, \dots, s_k$  در  $\mathbb{R}^3$  و با ستون‌های  $(s_1, \dots, s_k)^T$  در نظر بگیرید، که آن را می‌توان به صورت  $\vec{s}$  نوشت. هر انتهای مؤثر  $s_i$  نیز، تابعی از زوایای مفصل است. همچنین، موقعیت‌های هدف با  $\vec{t} = (t_1, \dots, t_k)^T$  تعریف می‌شوند. که  $t_i$  موقعیت هدف  $i$ ام برای انتهای مؤثر  $i$ ام است. فرض کنید  $e_i = t_i - s_i$  تغییر دلخواهی در موقعیت  $i$ امین انتهای مؤثر باشد. این رابطه را

<sup>۲۰</sup>Jacobian Transpose

<sup>۲۱</sup>Damped Least Squares

<sup>۲۲</sup>Selectively Damped Least Squares

<sup>۲۳</sup>Inverse Kinematics

<sup>۲۴</sup>Joint angles

<sup>۲۵</sup>End effectors

<sup>۲۶</sup>Target positions

می‌توان به صورت برداری  $\vec{e} = \vec{t} - \vec{s}$  نوشت. بر اساس این توضیحات، معادله زیر را برای یک ربات داریم:

$$J\Delta\theta = \vec{e} \quad (۴۵.۲)$$

در واقع مساله مطرح در اینجا این است که، ماتریس ژاکوبین  $J$  ممکن است مربعی و یا معکوس پذیر نباشد. همچنین، ممکن است منفرد باشد. برای رفع این مشکل در این بخش، روش‌های ترانهاده ژاکوبی، حداقل مربعات میراشده و حداقل مربعات میراشده انتخابی را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

### ۱.۴.۲ روش ترانهاده ژاکوبی

در این روش به جای استفاده از رابطه

$$\Delta\theta = j^{-1}\vec{e}$$

که  $J = \left(\frac{\partial t_i}{\partial \theta_j}\right)_{i,j}$ ، از معادله

$$\Delta\theta = \alpha J^T \vec{e} \quad (۴۶.۲)$$

برای محاسبه  $\Delta\theta$  استفاده می‌شود. که در آن اسکالر  $\alpha$ ، را می‌توان از رابطه

$$\alpha = \frac{\langle \vec{e}, J J^T \vec{e} \rangle}{\langle J J^T \vec{e}, J J^T \vec{e} \rangle}$$

محاسبه نمود. در واقع، در این روش به جای استفاده از وارون ماتریس  $J$ ، از ترانهاده آن استفاده می‌شود. این عمل سبب پرهیز از به دست آوردن وارون ماتریس ژاکوبین، که نقش مؤثری در به دست آوردن جواب نامطلوب مساله دارد، می‌شود. این روش برای اولین بار در [۱] استفاده شده است.

### ۲.۴.۲ روش حداقل مربعات میراشده

در روش حداقل مربعات میراشده، به جای یافتن می‌نیم جواب برای  $\vec{e} = J\Delta\theta$ ،  $\Delta\theta$  ای را می‌یابیم که جواب معادله

$$\|J\Delta\theta - \vec{e}\|^2 + \lambda^2 \|\Delta\theta\|^2, \quad (۴۷.۲)$$

را می‌نیم نماید. که  $\lambda \in \mathbb{R}$ ، مقدار ثابت میرایی غیر صفر می‌باشد. عبارت بالا معادل با کمینه کردن عبارت

$$\left\| \begin{pmatrix} I \\ \lambda I \end{pmatrix} \Delta\theta - \begin{pmatrix} \vec{e} \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2, \quad (۴۸.۲)$$

می‌باشد. معادله نرمال متناظر با آن نیز به شکل

$$\begin{pmatrix} J \\ \lambda I \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} J \\ \lambda I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J \\ \lambda I \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \vec{e} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (49.2)$$

می‌باشد. (۴۹.۲) معادل است با

$$(J^T J + \lambda^2 I) \Delta \theta = J^T \vec{e}$$

ماتریس  $J^T J + \lambda^2 I$  نامنفرد است، بنابراین، جواب حداقل مربعات میراشده، معادل عبارت زیر می‌باشد:

$$\Delta \theta = (J^T J + \lambda^2 I)^{-1} J^T \vec{e}. \quad (50.2)$$

به‌سادگی می‌توان نشان داد:

$$(J^T J + \lambda^2 I)^{-1} J^T = J^T (J J^T + \lambda^2 I)^{-1}$$

بنابراین،

$$\Delta \theta = J^T (J^T J + \lambda^2 I)^{-1} \vec{e}. \quad (51.2)$$

مزیت معادله (۵۱.۲) بر (۵۰.۲) این است که، در معادله (۵۱.۲) ماتریس وارون‌پذیر از بعد  $m \times m$  می‌باشد. ولی در معادله (۵۰.۲) از بعد  $n \times n$  می‌باشد، و  $m$  در اینجا بسیار کوچکتر از  $n$  می‌باشد. مقدار ثابت میرایی  $\lambda$  به جزئیات ربات و موقعیت‌های هدف بستگی دارد، و برای پایداری معادله (۵۱.۲) باید به دقت انتخاب شود. مقدار ثابت میرایی باید به اندازه‌ای بزرگ باشد، که جواب‌های  $\Delta \theta$  نزدیک مقادیر منفرد، خوش‌وضع باشند. اما اگر این ثابت را بسیار بزرگ انتخاب کنیم، آنگاه سرعت همگرایی بسیار کند می‌شود. برای انتخاب ثابت میرایی، چند روش مبتنی بر ساختمان ربات وجود دارد [۴] و [۹]. یکی از این روش‌ها، به‌دست آوردن عامل میرایی توسط توزیع گاوس می‌باشد. که عامل میرایی  $\lambda$  در آن، از طریق رابطه

$$\lambda_{G_i} = \lambda_{max} e^{-\left(\frac{\sigma_i}{\varepsilon}\right)^2}$$

به‌دست می‌آید. در این رابطه،  $\lambda_{G_i}$  عامل میرایی برای مقدار تکین  $i$ ام، و  $\varepsilon$  اختلاف ناحیه تکین را نشان می‌دهد [۲۲].

### ۳.۴.۲ تحلیل توسط تجزیه مقدار تکین

$SVD$  شیوه‌ای برای آنالیز روش‌های شبه‌معکوس و حداقل مربعات میراشده ارایه می‌کند. با به‌کار بردن این تجزیه برای ماتریس ژاکوبین  $J_{m \times n}$  خواهیم داشت:

$$J = U D V^T, \quad (52.2)$$

که  $m \leq n$ .  $U_{m \times m}$  و  $V_{n \times n}$  ماتریس‌های متعامد و  $D_{m \times n}$  یک ماتریس قطری می‌باشد. همچنین، درایه‌های قطری ماتریس  $D$  مقادیر غیر صفر  $d_{i,i} = \sigma_i$  می‌باشند. توجه داشته باشید،  $r$  مقدار از  $\sigma_i$  غیر صفر است.

با استفاده از  $SVD$  ماتریس  $J$  می‌توان نوشت:

$$J = \sum_{i=1}^m \sigma_i U_i V_i^T = \sum_{i=1}^r \sigma_i U_i V_i^T, \quad (53.2)$$

نوشت.  $D^\dagger$  ماتریس قطری  $m \times n$  با درایه‌های قطری زیر می‌باشد

$$d_{i,i}^\dagger = \begin{cases} \frac{1}{d_{i,i}}, & d_{i,i} \neq 0, \\ 0, & d_{i,i} = 0. \end{cases}$$

شبه‌وارون ماتریس  $J$  برابر است با:

$$J^\dagger = V D^\dagger U^T$$

بنابراین،

$$J^\dagger = \sum_{i=1}^r \sigma_i^{-1} v_i u_i^T \quad (54.2)$$

حال، به آنالیز روش حداقل مربعات میراشده با استفاده از  $SVD$  می‌پردازیم. در ماتریس  $JJ^T + \lambda^2 I$  می‌توان نوشت:

$$JJ^T + \lambda^2 I = (UDV^T)(VD^T U^T) + \lambda^2 I = U(DD^T + \lambda^2 I)U^T$$

ماتریس  $DD^T + \lambda^2 I$ ، ماتریس قطری با عناصر قطری  $\sigma_i^2 + \lambda^2$  می‌باشد. واضح است که  $DD^T + \lambda^2 I$  نامنفرد است و معکوس آن ماتریس قطری  $m \times m$  با عناصر غیر صفر  $(\sigma_i^2 + \lambda^2)^{-1}$  می‌باشد. بنابراین،

$$J^T (JJ^T + \lambda^2 I)^{-1} = V D^T (DD^T + \lambda^2 I)^{-1} U^T = V E U^T$$

که  $E$  ماتریس قطری  $n \times m$  با عناصر قطری

$$e_{i,i} = \frac{\sigma_i}{\sigma_i^2 + \lambda^2}$$

می‌باشد.

بنابراین، جواب حداقل مربعات میراشده به صورت

$$J^T (JJ^T + \lambda^2 I)^{-1} = \sum_{i=1}^r \frac{\sigma_i}{\sigma_i^2 + \lambda^2} v_i u_i^T \quad (55.2)$$

بیان می‌شود.

با مقایسه معادلات (۵۴.۲) و (۵۵.۲)، رابطه بین روش‌های حداقل مربعات میراشده و شبه‌معکوس مشخص می‌شود. در هر دو حالت، معکوس  $J$  عبارت  $\sum_i \tau_i v_i u_i^T$  است. برای روش شبه‌معکوس، مقدار  $\tau_i$ ،  $\sigma_i^{-1}$  ( $0^{-1} = 0$ ) است، در حالی که برای روش حداقل مربعات میراشده  $\tau_i = \frac{\sigma_i}{\sigma_i^2 + \lambda^2}$ . روش شبه‌معکوس هنگامی که  $\sigma_i$  به صفر میل می‌کند، ناپایدار است.

برای مقادیر  $\sigma_i$  که در مقایسه با  $\lambda$  بزرگ هستند، روش حداقل مربعات میراشده تفاوت چندانی با روش شبه‌معکوس ندارد. زیرا، برای  $\sigma_i$  بزرگ،  $\frac{\sigma_i}{\sigma_i^2 + \lambda^2} \approx \frac{1}{\sigma_i}$  می‌باشد. اما، هنگامی که  $\sigma_i$  هم‌اندازه یا کوچکتر از  $\lambda$  باشد، آنگاه مقادیر  $\sigma_i^{-1}$  و  $\frac{\sigma_i}{\sigma_i^2 + \lambda^2}$  متفاوت می‌باشند. در واقع، برای هر  $\lambda > 0$  زمانی که  $\sigma_i$  به صفر میل می‌کند، عبارت  $\frac{\sigma_i}{\sigma_i^2 + \lambda^2}$  به صفر میل می‌کند. بنابراین، روش حداقل مربعات میراشده به‌طور مؤثری از نقاط تکین دوری می‌کند.

## ۴.۴.۲ روش حداقل مربعات میراشده انتخابی

همانطور که در بخش قبل مشاهده نمودید،  $SVD$ ، روشی قوی برای تحلیل روش‌های شبه‌معکوس و حداقل مربعات میراشده است. از این‌رو در این بخش، روش حداقل مربعات میراشده انتخابی را بر اساس این تجزیه معرفی می‌کنیم.  $SVD$  ماتریس ژاکوبی  $J$  را در نظر بگیرید [۲]:

$$J = U \Sigma V$$

جواب مساله  $J \Delta \theta = e$  با استفاده از روش شبه‌معکوس به‌صورت

$$\Delta \theta = J^\dagger e = \sum_{j=1}^n \sigma_j^{-1} v_j u_j^T e$$

محاسبه می‌شود.

حال، اگر  $e = u_i$  آنگاه تغییرات مفصل  $j$ ام در روش شبه‌معکوس

$$\Delta \theta_j = \sigma_i^{-1} v_{j,i} (u_i^T u_i) = \sigma_i^{-1} v_{j,i}$$

است. این رابطه بیانگر حرکت ربات در جهت  $u_i$  از بردار  $J_j v_{j,i} \sigma_i^{-1}$  است، و  $J_j$ ،  $j$ امین ستون ماتریس ژاکوبین است.

$M_i$  به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$M_i = \sigma_i^{-1} \sum_{j=1}^m |v_{j,i}| \|J_j\|$$

این رابطه، مجموع فواصل حرکت شده توسط انتهاهای مؤثر، ناشی از تغییرات زوایای مفصل را تقریب می‌زند. همچنین،  $N_i$  را مجموع اندازه بردارها در  $i$ امین ستون  $U$  که  $u_i = (u_{1,i}^T, \dots, u_{k,i}^T)^T$  در نظر بگیرید:

$$N_i = \sum_{j=1}^k \|u_{j,i}\|.$$

حال، تغییرات زاویه برای  $i$ امین مؤلفه  $U$  به صورت زیر محدود می‌شود:

$$\gamma_i = \min\left(1, \frac{N_i}{M_i}\right) \gamma_{max},$$

تغییرات زاویه  $\gamma_{max}$  معمولاً  $\frac{\pi}{4}$  در نظر گرفته می‌شود.

حال،  $\gamma_i$  برای افزایش میرایی ستون‌های  $U$  استفاده می‌شود:

$$\Delta q_i = \begin{cases} w_i & \text{اگر } \|w_i\|_p \leq \gamma_i, \\ \gamma_i \frac{w_i}{\|w_i\|_\infty} & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

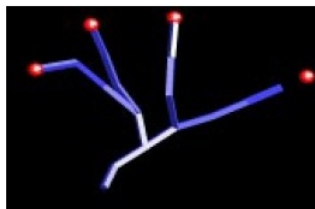
که  $w_i = \sigma_i^{-1} v_i (u_i^T e)$  و هنگامی که  $\sigma_i = 0$ ،  $w_i = 0$  است. در نهایت، میرایی کل حرکت توسط

$$\Delta \theta = \begin{cases} \Delta \hat{\theta} & \text{اگر } \|\Delta \hat{\theta}\|_\infty \leq \gamma_{max} \\ \gamma_{max} \frac{\Delta \hat{\theta}}{\|\Delta \hat{\theta}\|} & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

که در آن  $\Delta \hat{\theta} = \sum_{i|\sigma_i \neq 0} \Delta q_i$  انجام می‌شود.

## ۵.۴.۲ مقایسه روش‌ها

شکل زیر را در نظر بگیرید [۳۰]:



شکل ۵.۲: بازوی ربات و اهداف غیرقابل دسترس

در این شکل، شازده اتصال و چهار انتهای مؤثر وجود دارد. همچنین، موقعیت‌های هدف (رنگ قرمز) در آن غیرقابل دسترس می‌باشند. به این معنا که، اهداف بیش از حد دور هستند و بازوهای ربات به سمت اهداف کشیده می‌شوند. که این امر سبب نزدیک شدن به نقاط تکین و در نتیجه نوسان و بی‌ثباتی بازوهای ربات و تلاش آن‌ها برای همگرا شدن به سمت اهداف می‌شود.

در جدول زیر، روش‌های مختلف پردازش معکوس برای موقعیت‌های هدف غیرقابل دسترس مورد مقایسه قرار گرفته است. همچنین، میانگین اختلاف، نشان‌دهنده فاصله بهینه از موقعیت‌های هدف است.

جدول ۲.۲: نتایج آزمون‌ها برای اهداف غیر قابل دسترس

میانگین تکرارها با دقت				میانگین اختلاف	روش
۰/۰۰۰۰۱	۰/۰۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱		
۶۸۶/۰	۵۴۸/۱	۳۳۶/۰	۱۷۳/۵	۰/۱۸۲	<i>SDLS</i>
۱۷۰۶/۲	۱۱۶۶/۷	۴۴۸/۹	۱۱۶/۱	۰/۱۰۶	<i>DLS</i>
۱۴۲/۳۰	۱۴۲/۳۰	۱۴۲/۲۷	۴۴/۰	۴/۹۰۷	<i>J<sup>T</sup></i>

از جدول (۲.۲) می‌توان نتیجه گرفت: روش ترانهاده ژاکوبی، جواب با دقت کمتری ارائه می‌دهد. این امر بیانگر نوسان زیاد این روش در موقعیت‌های هدف غیرقابل دسترس می‌باشد. با این حال، این روش نسبت به روش‌های دیگر در تکرارهای کمتری به جواب می‌رسد. روش *SDLS*، در تکرارهای کمتر از روش *DLS* همگرا است، اما فاصله بیشتری از اهداف دارد.





# فصل ۳

## جواب دستگاه معادلات خطی بدوضع

همانطور که می‌دانید، یکی از مسایل مهم در به‌دست آوردن جواب مطلوب برای دستگاه معادلات خطی، خوش‌وضعی و یا بدوضعی دستگاه می‌باشد. مسایل بدوضع معمولاً از نظر ریاضی دارای جواب یکتا هستند، اما از نظر فیزیکی، به دلیل وجود خطای مشاهدات و محدودیت دقت محاسبات، ممکن است جواب یکتا نداشته باشند.

برای روشن شدن موضوع، از  $SVD$  ماتریس  $A$  استفاده می‌کنیم. بر اساس این تجزیه، در رابطه  $Av_i = u_i \sigma_i$ ، اگر مقادیر تکین  $\sigma$  خیلی کوچک باشند، بر اثر خطاهای محاسباتی صفر فرض شده، بنابراین  $Av_i = 0$ . در این صورت، مساله منفرد است و به جواب‌های مساله نمی‌توان اعتماد کرد. همچنین، یک نوسان کوچک در مشاهدات سبب نوسانات زیاد در مجهولات خواهد شد. بنابراین، برای به‌دست آوردن جواب دقیق این مسایل، در این فصل، روشی جدید برای حل دستگاه معادلات خطی بدوضع ارائه می‌نماییم. این روش بر اساس روش ولخ<sup>۱</sup> و ویلنی<sup>۲</sup> در [۲۰] ارائه شده است. لازم به ذکر است، در گردآوری این فصل، از منابع [۱۱] و [۲۰] استفاده شده است. دستگاه معادلات خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$Ax = b \quad (۱.۳)$$

که در آن ماتریس  $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$  بدوضع، و  $x, b \in \mathbb{R}^m$  می‌باشند. برای حل این دستگاه‌ها، روش‌های مستقیم و تکراری مختلفی وجود دارند. برای مثال، روش مستقیم حذفی گاوس، جوابی از این مسایل ارائه می‌کند. اما این جواب، جوابی نادقیق از این‌گونه مسایل می‌باشد. روش دیگر، در نظر گرفتن مساله حداقل مربعات دستگاه (۱.۳) می‌باشد:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^m} \| Ax - b \|_2$$

<sup>۱</sup>Volokh

<sup>۲</sup>Vilnay

برای حل این مساله، در فصل قبل، روش‌های مختلفی از جمله روش  $SVD$  مورد بررسی قرار گرفت. از این رو،  $SVD$  ماتریس  $A$  را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$A = V \sum U^T = \sum_{i=1}^m \sigma_i u_i v_i^T \quad (2.3)$$

$U$  و  $V$  به ترتیب بردارهای تکین راست و چپ می‌باشند.  $\sum$  نیز، ماتریس قطری  $m \times m$  با  $m$  مقدار تکین  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_m > 0$  می‌باشد. با استفاده از (۲.۳) جواب معادله (۱.۳) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$x = \sum_{i=1}^m \sigma_i^{-1} u_i (v_i^T b) \quad (3.3)$$

جوابی که از روش  $SVD$  برای دستگاه (۱.۳) به دست می‌آید، به علت وجود مقادیر تکین کوچک، برای ماتریس‌های بدوضع، نادقیق می‌باشد. این از ویژگی‌های اساسی ماتریس‌های بدوضع می‌باشد و حل این مساله دشوار است. ولخ و ویلنی در [۲۰]، روشی برای حل این مساله و محاسبه جواب دقیق دستگاه بدوضع، ارائه داده‌اند. روش آن‌ها بر اساس روش  $TSVD$  می‌باشد، که در دو مرحله انجام می‌شود. این روش، در مرحله اول از  $TSVD$  ماتریس ضرایب و در مرحله دوم، از روش حذفی گاوس، برای تقلیل دستگاه معادلات خطی خوش وضع استفاده می‌کند. در ادامه، به معرفی این روش می‌پردازیم.

### ۱.۳ روش ولخ و ویلنی

فرض کنید  $\epsilon > 0$  اختلال<sup>۳</sup> مقادیر تکین کوچک ماتریس  $A$  باشد به طوری که:

$$\epsilon > \sigma_{n+1} \geq \sigma_{n+2} \geq \dots \geq \sigma_m, \quad (4.3)$$

با صرف نظر کردن از این مقادیر، جواب  $SVD$  از (۳.۳) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$x = \sum_{i=1}^n \sigma_i^{-1} u_i (v_i^T b) \quad (5.3)$$

در واقع، پارامتر  $\epsilon$  نوعی  $TSVD$  را تعریف می‌کند. روش  $TSVD$  به طور گسترده‌ای برای منظم‌سازی دستگاه‌های خطی بدوضع استفاده می‌شود [۲۸]. با این وجود، جواب  $TSVD$  برای ماتریس‌های بدوضع، می‌تواند به اندازه کافی دقیق نباشد. ولخ و ویلنی روشی برای جواب این مسایل ارائه داده‌اند. فرض کنید،  $U_1 = [u_1, u_2, \dots, u_n]$  و  $V_1 = [v_1, v_2, \dots, v_n]$  ماتریس‌های منفرد چپ و راست روش  $TSVD$  باشند. همچنین،  $\tilde{U}_2 = [\tilde{u}_{n+1}, \dots, \tilde{u}_m] \equiv U_1^\perp$  و  $\tilde{V}_2 = [\tilde{v}_{n+1}, \dots, \tilde{v}_m] \equiv V_1^\perp$ ، مکمل‌های متعامد آن‌ها باشند. ستون‌های  $\tilde{U}_2$  و  $\tilde{V}_2$ ، به ترتیب، فضای پوچ  $V_1^T$  و  $U_2^T$  را تولید کنند [۸]. در روش ولخ و ویلنی معادله (۱.۳)، به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

<sup>۳</sup> Dangerous

$$\begin{bmatrix} V_1 & \tilde{V}_r \end{bmatrix}^T A \begin{bmatrix} U_1 & \tilde{U}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 & \tilde{U}_r \end{bmatrix}^T x = \begin{bmatrix} V_1 & \tilde{V}_r \end{bmatrix}^T \begin{pmatrix} b_1 \\ b_r \end{pmatrix} \quad (۶.۳)$$

با در نظر گرفتن مفروضات زیر:

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \begin{bmatrix} V_1 & \tilde{V}_r \end{bmatrix}^T A \begin{bmatrix} U_1 & \tilde{U}_r \end{bmatrix}, \\ x &= \begin{bmatrix} U_1 & \tilde{U}_r \end{bmatrix} z, \\ C_1 &= \tilde{V}_r^T A \tilde{U}_r, \\ b_1 &= V_1^T b, \quad b_r = \tilde{V}_r^T b, \end{aligned}$$

معادله (۶.۳) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\tilde{A}z = \begin{pmatrix} \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n) & \circ \\ \circ & C_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_r \end{pmatrix} \quad (۷.۳)$$

پس از محاسبه  $z_1$  و  $z_r$  از (۷.۳)، جواب معادله (۱.۳)، با استفاده از رابطه  $x = U_1 z_1 + \tilde{U}_r z_r$  به دست می‌آید. دستگاه‌های زیر را می‌توان به طور مستقل حل نمود:

$$\text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n) z_1 = b_1, \quad (۸.۳)$$

$$C_1 z_r = b_r, \quad (۹.۳)$$

در حل دستگاه دوم، می‌توان از روش حذفی گاوس استفاده نمود. مقادیر تکین  $C_1$ ،  $\sigma_m \geq \dots \geq \sigma_{n+r} \geq \sigma_{n+1}$  می‌باشند. بنابراین، خواهیم داشت:

$$k_r(A) = \|A\| \|A^{-1}\|_r = \sigma_1 \sigma_m^{-1},$$

$$k_r(C_1) = \|C_1\| \|C_1^{-1}\|_r = \sigma_{n+1} \sigma_m^{-1}.$$

بنابراین، می‌توان نوشت:

$$\frac{k_r(C_1)}{k_r(A)} = \frac{\sigma_{n+1}}{\sigma_1} < \epsilon \sigma_1^{-1} \ll 1$$

با توجه به توضیحات بالا الگوریتم روش ولخ و ویلنی به صورت زیر خلاصه می‌شود:

الگوریتم ۱.۱.۳. (الگوریتم روش ولخ و ویلنی)

۱. با محاسبه  $TSVD$ ،  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  و  $U_1$  و  $V_1$  را به دست آورید.

۲. فضای پوچ  $\tilde{U}_r = N(U_1^T)$  و  $\tilde{V}_r = N(V_1^T)$  را محاسبه کنید.



نورم دو عدد شرطی دستگاه آخر از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$k_2(C_{r-1}) = \|C_{r-1}\|_2 \|C_{r-1}^{-1}\|_2 = \frac{\sigma_{n_{r-1}+1}}{\sigma_m}$$

که  $C_{r-1}$  ماتریس ضرایب آن می‌باشد. بنابراین با توجه به رابطه بالا می‌توان نوشت

$$\frac{k_2(C_{r-1})}{k_2(A)} = \frac{\sigma_{n_{r-1}+1}}{\sigma_1} < \epsilon_{r-1} \sigma_1^{-1} \ll 1$$

توجه داشته باشید در روش ولخ و ویلنی داریم:

$$\frac{k_2(C_1)}{k_2(A)} = \frac{\sigma_{n_1+1}}{\sigma_1} \left( \gg \frac{k_2(C_{r-1})}{k_2(A)} \right) \quad (10.3)$$

رابطه (۱۰.۳) نشان می‌دهد، ماتریس ضرایب روش جدید، خوش‌وضع‌تر از روش ولخ و ویلنی می‌باشد.

### ۳.۳ مثال‌های عددی

در این بخش، برخی آزمون‌های عددی برای نشان دادن کارایی روش جدید، ارایه شده‌است. ابتدا، ماتریس هرمیتی  $H$  از بعد ۱۴، را در نظر می‌گیریم. روش ولخ و ویلنی را با  $\epsilon = 10^{-9}$  و روش جدید را با  $\epsilon_1 = 10^{-8}$  و  $\epsilon_2 = 10^{-13}$ ، برای حل دستگاه خطی  $Hx = b$ ، که  $b = H(1, 1, \dots, 1)^T$ ، به کار می‌بریم. نتایج عددی نیز، در جدول (۱۰.۳) نشان داده شده است [۱۱].

روش ولخ و ویلنی با $\epsilon = 10^{-9}$		روش پیشنهادی با $\epsilon_1 = 10^{-8}$ و $\epsilon_2 = 10^{-13}$	
جواب محاسبه شده	خطای مطلق	جواب محاسبه شده	خطای مطلق
$1/0.00000010675783$	$1/0.67578333684412 \times 10^{-7}$	$1/0.0000005652109$	$5/65210893643808 \times 10^{-8}$
$0/999985095706563$	$1/49042934373123 \times 10^{-5}$	$0/999999769922515$	$2/300774845081762 \times 10^{-7}$
$1/0.0005064497271$	$0/000506449727099012$	$0/999957432240955$	$4/25677590445428 \times 10^{-5}$
$0/992737204892941$	$0/000726279510705941$	$1/00054006152174$	$0/000540061521738799$
$1/0.0537086514456144$	$0/0537086514456144$	$0/00997529484315274$	$0/00247051568472623$
$0/78083360678186$	$0/219156639321814$	$1/000513709301642$	$0/000513709301641563$
$1/45838877350587$	$0/458388773505872$	$0/994950151062818$	$0/000504984893718197$
$0/847232018909457$	$0/152767981090543$	$1/000323021917093$	$0/000323021917092858$
$-0/692613383916612$	$1/69261338391661$	$0/996948557124937$	$0/0003051442817506276$
$5/68702514885676$	$4/68702514885676$	$0/998170691963699$	$0/000182930803630088$
$-5/26474177941459$	$6/26474177941459$	$1/0009979225986743$	$0/000979225986742605$
$5/76697826377195$	$4/76697826377195$	$0/99334689709916$	$0/000665310290083965$
$-0/9797870527379$	$1/9797870527379$	$0/998649407767298$	$0/00013505922327024$
$1/349737260893559$	$0/349737260893559$	$1/000174824263405$	$0/000174824263405382$

جدول ۱۰.۳: نتایج عددی برای ماتریس هیلبرت از بعد  $n = 14$

همانطور که می‌بینید نتایج عددی برای روش جدید، بهتر از روش ولخ و ویلنی می‌باشد. خطای نسبی در جواب محاسبه شده با روش ولخ و ویلنی  $2/551$  است. در صورتی که این عدد برای روش

پیشنهاد شده  $0.04\%$  می باشد. همچنین، آزمون‌ها نشان می دهند  $\epsilon = 10^{-9}$ ، بهترین انتخاب از بین  $14$ ،  $\epsilon = 10^{-k}$ ،  $k = 8, 9, \dots, 14$ ، برای روش ولخ و ویلنی می باشد.

از روش حذفی گاوس نیز، برای حل دستگاه‌های خطی، با ماتریس ضرایب غیر قطری، استفاده شده است.

ماتریس  $F$  از بعد  $14 \times 14$  در نظر بگیرید [۲۰]:

$$F = \begin{bmatrix} 1/9 & 1/12 & 1/15 & 1/3 & 1/7 & 1/10 & 1/13 & 1/16 & 1/5 & 1/8 & 1/11 & 1/14 & 1/17 & 1/6 \\ 1/13 & 1/16 & 1/19 & 1/8 & 1/11 & 1/14 & 1/17 & 1/20 & 1/9 & 1/12 & 1/15 & 1/18 & 1/21 & 1/10 \\ 1/17 & 1/20 & 1/23 & 1/12 & 1/15 & 1/18 & 1/21 & 1/24 & 1/13 & 1/16 & 1/19 & 1/22 & 1/25 & 1/14 \\ 1/7 & 1/10 & 1/13 & 1 & 1/5 & 1/8 & 1/11 & 1/14 & 1/3 & 1/6 & 1/9 & 1/12 & 1/15 & 1/4 \\ 1/11 & 1/14 & 1/17 & 1/6 & 1/9 & 1/12 & 1/15 & 1/18 & 1/7 & 1/10 & 1/13 & 1/16 & 1/19 & 1/8 \\ 1/15 & 1/18 & 1/21 & 1/10 & 1/13 & 1/16 & 1/19 & 1/22 & 1/11 & 1/14 & 1/17 & 1/20 & 1/23 & 1/12 \\ 1/19 & 1/22 & 1/25 & 1/14 & 1/17 & 1/20 & 1/23 & 1/26 & 1/15 & 1/18 & 1/21 & 1/24 & 1/27 & 1/16 \\ 1/22 & 1/25 & 1/28 & 1/17 & 1/20 & 1/23 & 1/26 & 1/29 & 1/18 & 1/21 & 1/24 & 1/27 & 1/30 & 1/19 \\ 1/10 & 1/13 & 1/16 & 1/5 & 1/8 & 1/11 & 1/14 & 1/17 & 1/6 & 1/9 & 1/12 & 1/15 & 1/18 & 1/7 \\ 1/14 & 1/17 & 1/20 & 1/9 & 1/12 & 1/15 & 1/18 & 1/21 & 1/10 & 1/13 & 1/16 & 1/19 & 1/22 & 1/11 \\ 1/18 & 1/21 & 1/24 & 1/13 & 1/16 & 1/19 & 1/22 & 1/25 & 1/1/14 & 1/17 & 1/20 & 1/23 & 1/26 & 1/15 \\ 1/8 & 1/11 & 1/14 & 1/2 & 1/6 & 1/9 & 1/12 & 1/15 & 1/4 & 1/7 & 1/10 & 1/13 & 1/16 & 1/5 \\ 1/21 & 1/24 & 1/27 & 1/16 & 1/19 & 1/22 & 1/25 & 1/28 & 1/17 & 1/20 & 1/23 & 1/26 & 1/29 & 1/18 \\ 1/16 & 1/19 & 1/22 & 1/11 & 1/14 & 1/17 & 1/20 & 1/23 & 1/12 & 1/15 & 1/18 & 1/21 & 1/24 & 1/13 \end{bmatrix}$$

این ماتریس با در نظر گرفتن نرم دو دارای عدد شرطی  $10^{18}$  می باشد. این نشان دهنده یک ماتریس بدوضع می باشد.

تمام مفروضات قبل را در نظر بگیرید. روش ولخ و ویلنی را با  $\epsilon = 10^{-11}$ ، و روش جدید را با  $\epsilon_1 = 10^{-8}$  و  $\epsilon_2 = 10^{-13}$  به کار می بریم. نتایج عددی در جدول (۲.۳) بیان شده است.

روش ولخ و ویلنی با $\epsilon = 10^{-11}$		روش جدید با $\epsilon_1 = 10^{-8}$ و $\epsilon_2 = 10^{-13}$	
خطای مطلق	جواب محاسبه شده	خطای مطلق	جواب محاسبه شده
$0.408513748162596$	$1.408513748162596$	$0.00336639676309214$	$1.00336639676309$
$0.992518212422587$	$1.99251821242259$	$0.001007743512265$	$1.001007743512265$
$4.67105129181578$	$-3.67105129181578$	$0.0026818209199$	$1.0026818209199$
$5.5173643317718 \times 10^{-12}$	$0.9999999999483$	$0.000816396029760691$	$1.00000000002976$
$0.0140722427086655$	$1.01407224270867$	$0.000816396029760691$	$1.00000000002976$
$0.92605710403969$	$0.739428959603102$	$0.00737379083455$	$1.00737379083455$
$4.277488407278$	$-3.277488407278$	$0.00266715030278$	$1.00266715030278$
$1.91883795352396$	$2.91883795352396$	$0.00843129851601054$	$0.991568701483989$
$2.60759034251823 \times 10^{-5}$	$1.00002607590343$	$1.0932856335799 \times 10^{-6}$	$0.999998906714366$
$0.100948603155245$	$0.899051396844755$	$0.0032782877546077$	$0.996721712245392$
$0.878865777701$	$1.878865777701$	$0.0187271092674632$	$0.981272890732537$
$6.09672161502306$	$7.09672161502306$	$0.0000744992900280517$	$0.9992550007099719$
$0.33301878754835$	$0.66698121245165$	$0.00425807757395158$	$1.00425807757395$
$0.000995009567163141$	$0.99900499043287$	$5.77626648161633 \times 10^{-5}$	$0.999942237335184$

جدول ۲.۳: نتایج عددی برای ماتریس  $F$

خطای نسبی در جواب محاسبه شده با روش ولخ و ویلنی  $2/448$  است که این عدد برای روش پیشنهاد شده  $0/007$  می‌باشد. آزمون‌های تجربی نشان می‌دهند که  $\epsilon = 10^{-11}$  بهترین انتخاب از بین  $\epsilon = 10^{-k}, k = 8, 9, \dots, 14$  برای روش ولخ و ویلنی می‌باشد. لازم به ذکر است، تمام آزمون‌های عددی توسط کدهای نرم‌افزار متلب انجام شده است.





# فصل ۴

## روش جدید حل دستگاه معادلات خطی

مساله حل دستگاه خطی  $Ax = b$ ، در دامنه وسیعی از کاربردها مطرح می‌شود. به‌عنوان یک حقیقت باید گفت، جواب‌های عددی تقریباً همه مسایل مهندسی عملی و علوم کاربردی، مانند مهندسی برق، مکانیک و شیمی به‌طور معمول نیاز به جواب مساله خطی دارند [۵]. در دستگاه خطی  $Ax = b$  که  $A$  از بعد  $n \times n$  می‌باشد، در صورتی که ماتریس  $A$  نامنفرد باشد، روش‌های تکراری زیادی برای حل دستگاه معادلات خطی وجود دارند. از جمله روش‌های تکراری، روش ژاکوبی، گاوس-سایدل و روش  $SOR$  می‌باشند. همچنین، روش‌هایی کارآمدتر از این روش‌ها نیز، وجود دارند. اما آن‌ها از یک پیش‌شرط برای حل مساله استفاده می‌کنند [۲۳]. ما در این فصل، روشی تکراری برای حل دستگاه معادلات خطی ارائه می‌نماییم. از مزیت این روش، تعداد تکرار کمتر آن، نسبت به روش  $SOR$  و گاوس-سایدل می‌باشد. به‌عبارت دیگر، روش جدید ارائه‌شده، سریعتر از این دو روش به جواب مساله همگرا می‌شود. همچنین، زمانی که دستگاه مورد نظر به روش گاوس-سایدل واگرا باشد، این روش می‌تواند همگرا شود. در این روش با اضافه کردن پارامتر تخفیف  $w$  به دستگاه معادلات نرمال، به روشی تکراری برای حل دستگاه معادلات خطی دست می‌یابیم. در نهایت، با مثال‌های عددی، سرعت همگرایی روش جدید نسبت به دو روش ذکر شده، مورد مقایسه قرار گرفته است.

### ۱.۴ روش‌های تکراری

در گردآوری این بخش، از مرجع [۵] استفاده شده است. در این بخش، ابتدا، ضمن یادآوری روش‌های تکراری گاوس-سایدل و  $SOR$ ، به معرفی روش جدید حل دستگاه معادلات خطی می‌پردازیم. همانطور که می‌دانید، در روش گاوس-سایدل از رابطه تکراری

$$X^{(k)} = BX^{(k-1)} + C \quad (1.4)$$

برای حل دستگاه معادلات خطی استفاده می‌شود. که در آن،

$$C = (L + D)^{-1}b$$

و

$$B = -(L + D)^{-1}U$$

می‌باشد. لازم به ذکر است،  $L$ ،  $U$  و  $D$  به ترتیب، ماتریس‌های پایین و بالا مثلثی و قطری ماتریس  $A$  می‌باشند.

در روش  $SOR$  نیز، از رابطه تکراری

$$X^{(k)} = [I - w(I - B)X^{(k-1)}] + wC, \quad (2.4)$$

برای حل مسایل استفاده می‌شود. ماتریس‌های  $C$  و  $B$ ، همان ماتریس‌های روش گاوس-سایدل می‌باشند. همچنین،  $w$  پارامتر تخفیفی است که از قضیه (۱.۲.۴) به دست می‌آید.

## ۲.۴ ساختار کلی روش پیشنهادی

روش تکراری جدید، مانند روش  $SOR$ ، از یک پارامتر تخفیف مانند  $w$  که  $0 < w < 2$  می‌باشد، استفاده می‌کند.

قضیه ۱.۲.۴. اگر ماتریس  $A$  معین مثبت و سه قطری باشد،  $w$  بهینه از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$w = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho(B_g)}} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - [\rho(B_j)]^2}}, \quad (3.4)$$

که در آن،

$$\rho(B_j) = \rho(B_g) = \max |\lambda_i|, i = 1, \dots, n$$

که  $\lambda_i$  مقادیر ویژه ماتریس  $A$  است. برای اثبات به [۵] مراجعه کنید. دستگاه خطی زیر با ماتریس نامنفرد  $A_{n \times n}$ ، بردار مجهول  $x$  و مقادیر سمت راست  $b$  از بعد  $n \times 1$  در نظر بگیرید.

$$Ax = b \quad (4.4)$$

طرفین این رابطه را در  $A^T$  ضرب می‌کنیم:

$$A^T Ax = A^T b \quad (5.4)$$

حال، پارامتر تخفیف  $w$  را در طرفین رابطه (۵.۴) ضرب می‌کنیم. بنابراین، خواهیم داشت:

$$wA^T A = wA^T b \quad (۶.۴)$$

حال عبارت  $A^T Ax$  را به سمت چپ رابطه (۶.۴) اضافه و کم می‌نماییم. در این صورت،

$$wA^T Ax + A^T Ax - A^T Ax = wA^T b$$

بنابراین:

$$A^T Ax = (1 - w)A^T Ax + wA^T b$$

و در صورت وارون‌پذیری  $A^T A$  داریم:

$$x = (1 - w)x + w(A^T A)^{-1} A^T b \quad (۷.۴)$$

با در نظر گرفتن اندیس  $k$  برای متغیر سمت راست و اندیس  $k + 1$  برای متغیر سمت چپ خواهیم داشت:

$$x^{k+1} = (1 - w)x^k + w(A^T A)^{-1} A^T b \quad (۸.۴)$$

همانطور که گفته شد، مزیت روش جدید، سرعت همگرایی بیشتر، نسبت به روش  $SOR$  می‌باشد. همچنین، زمانی که روش گاوس-سایدل واگرا باشد، این روش به جواب مساله همگرا می‌شود. در ادامه، با مثال‌هایی مزیت روش ارایه شده بر روش‌های گاوس-سایدل و  $SOR$  نشان داده شده است.

مثال ۲.۲.۴. دستگاه زیر را در نظر بگیرید:

$$2x_1 - x_2 = 7$$

$$-x_1 + 2x_2 - x_3 = 1$$

$$-x_2 + 2x_3 = 1$$

این دستگاه دارای جواب واقعی  $x = [6, 5, 3]^T$  می‌باشد. با انتخاب  $x^\circ = [0, 0, 0]^T$  اولیه و با در نظر گرفتن این که ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

یک ماتریس سه‌قطری و معین مثبت است، می‌توان  $w$  بهینه را از رابطه (۳.۴) به دست آورد. که در این مساله، مقدار آن تقریباً  $w \cong 1/1716$  می‌باشد. حال با قرار دادن  $w$  به دست آمده و  $x^\circ$  اولیه در رابطه تکراری (۸.۴) داریم:

$$\begin{aligned}
 x^{(1)} &= (1 - 1/1716)x^{(0)} + 1/1716(A^T A)^{-1}A^T b = \begin{bmatrix} 7,0296 & 5,8580 & 3,5148 \end{bmatrix}^T \\
 x^{(2)} &= (1 - 1/1716)x^{(1)} + 1/1716(A^T A)^{-1}A^T b = \begin{bmatrix} 5,8233 & 4,8528 & 2,9117 \end{bmatrix}^T \\
 &\vdots \\
 x^{(7)} &= (1 - 1/1716)x^{(6)} + 1/1716(A^T A)^{-1}A^T b = \begin{bmatrix} 6,0000 & 5,0000 & 3,0000 \end{bmatrix}^T
 \end{aligned}$$

حال، روش  $SOR$  را برای این مثال به کار می‌بریم:

$$C = \begin{bmatrix} 3,5000 \\ 2,2500 \\ 1,6250 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0,5000 & 0 \\ 0 & 0,2500 & 0,5000 \\ 0 & 0,1250 & 0,2500 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 X^{(1)} &= [I_3 - 1/1716(I - B)X^{(0)}] + 1/1716C = \begin{bmatrix} 4,1006 & 2,6361 & 1,9039 \end{bmatrix}^T \\
 X^{(2)} &= [I_3 - 1/1716(I - B)X^{(1)}] + 1/1716C = \begin{bmatrix} 4,9412 & 4,0711 & 2,5208 \end{bmatrix}^T \\
 &\vdots \\
 X^{(4)} &= [I_3 - 1/1716(I - B)X^{(3)}] + 1/1716C = \begin{bmatrix} 6,0000 & 5,0000 & 3,0000 \end{bmatrix}^T
 \end{aligned}$$

همانطورکه مشاهده می‌کنید، این روش در تکرار ۱۴ام به جواب مساله می‌رسد. مطابق این مثال، روش جدید ارایه شده، در تعداد تکرار کمتری نسبت به روش  $SOR$  به جواب مساله همگرا می‌شود. این نشان‌دهنده سرعت بیشتر روش جدید نسبت به روش  $SOR$  می‌باشد.

مثال ۳.۲.۴. دستگاه زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}
 x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 1 \\
 x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\
 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 5
 \end{aligned}$$

این دستگاه دارای جواب واقعی  $x = (7, -4, -1)^T$  می‌باشد. با به کار بردن روش گاوس-سایدل داریم:

$$\begin{aligned}x^{(1)} &= [1, 1, 1]^T \\x^{(2)} &= [1, 0, 3]^T \\x^{(3)} &= [7, -8, 7]^T \\x^{(4)} &= [31, -36, 15]^T \\&\vdots\end{aligned}$$

همانطور که ملاحظه می‌کنید، تکرارها نشان‌دهنده واگرایی روش گاوس-سایدل برای این مساله می‌باشند. حال، اگر روش جدید ارایه شده را با انتخاب  $w$  مناسب ( $w = 0.001$ ) برای این مساله به کار ببریم، مشاهده می‌شود، این روش به جواب مساله همگرا می‌شود.

ما نشان دادیم، روش جدید ارایه شده در (۸.۴) دارای سرعت همگرایی بالاتری نسبت به روش  $SOR$  و گاوس-سایدل می‌باشد. به علاوه، روش تکراری ارایه شده، هنگامی که روش گاوس-سایدل واگرا باشد، می‌تواند به جواب دستگاه خطی، همگرا شود.



# فصل ۵

## کنترل پس خورد حالت با استفاده از دکوپله سازی ساختار ویژه

در این فصل، به معرفی روشی برای به دست آوردن ماتریس پس خورد حالت با استفاده از دکوپله سازی ساختار ویژه<sup>۱</sup> که در [۲۷] بیان شده است، می پردازیم. در اینجا براساس روش های کلاسیک جبر خطی عددی مانند  $SVD$ ، مساله تخصیص مقادیر ویژه معین به سیستم در نظر گرفته شده است. برای به کار بردن ساختار ویژه در طراحی کنترل پس خورد حالت برای سیستم های چند ورودی- چند خروجی ( $MIMO$ )<sup>۲</sup> از مجموعه بردارهای ویژه چپ تجزیه  $SVD$  استفاده شده است. پس از آن با به کار بردن روش همدم برداری و تبدیلات مربوط به آن و استفاده از روش ارایه شده در [۲۷] به بهینه ساختن نورم ماتریس پس خورد حالت می پردازیم. در واقع، روش ارایه شده ما، نورم ماتریس پس خورد را به طور قابل توجهی می نیمم می نماید.

لازم به ذکر است، در نوشتن این فصل از منابع [۱۴]، [۲۶] و [۲۷] استفاده شده است.

### ۱.۵ بیان مساله

سیستم های دینامیکی خطی با معادلات فضای حالت

$$\dot{q}(t) = Aq(t) + Bu(t) \quad (۱.۵)$$

$$y(t) = Cq(t) + Du(t) \quad (۲.۵)$$

با ماتریس های ثابت  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ،  $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$  و  $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$  در نظر بگیرید. به طور کلی، برای کنترل پذیری سیستم  $MIMO$  پیوسته زمانی خطی (۱.۵)، قانون کنترل پس خورد حالت، به صورت زیر است:

<sup>۱</sup>Eigenstructure decoupling

<sup>۲</sup>Multi input-Multi output

$$u(t) = -Kq(t) + Lw(t), \quad (۳.۵)$$

که  $K \in \mathbb{R}^{r \times n}$  ماتریس پس خورد حالت و  $L \in \mathbb{R}^{r \times m}$ ، تعریف می شود. با جایگذاری (۳.۵) در (۱.۵) یک سیستم حلقه بسته به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\dot{q}(t) = A_c q(t) + BLw(t), \quad (۴.۵)$$

قطب های حلقه بسته، مقادیر ویژه ماتریس  $A_c = (A - BK)$  که  $A_c \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ، می باشند. همچنین در این فصل زوج  $(A, B)$  کنترل پذیر در نظر گرفته شده است.

## ۲.۵ مقدمات اساسی

### ۱.۲.۵ مساله دکوپله سازی استاتیک

اگر  $q(0) = 0$  و  $m = r$ ، ماتریس تابع تبدیل معادله (۴.۵) به صورت زیر خواهد بود:

$$G(s) = ((C - DK)(sI_n - A_c)^{-1}B + D)L \quad (۵.۵)$$

اگر هر ورودی بیشتر از یک خروجی را تحت تأثیر قرار دهد، به این تابع، کوپل شده گفته می شود. همچنین، هنگامی که

$$\lim_{s \rightarrow 0} G(s) = [(C - DK)(-A_c)^{-1}B + D]L = I_m \quad (۶.۵)$$

و اگر  $G(0)$  نامنفرد و  $A_c$  پایدار باشد، آنگاه

$$L = ((C - DK)(-A_c)^{-1}B + D)^{-1} \quad (۷.۵)$$

در این صورت، سیستم را دکوپله شده استاتیکی می نامند. که در آن هر ورودی تنها یک خروجی را تحت تأثیر قرار می دهد.

گزاره ۱.۲.۵. مساله دکوپله سازی استاتیک با استفاده از پس خورد حالت حل شدنی است اگر و تنها اگر

(۱)  $(A, B)$  پایدار باشد.

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = m + n \quad (۲)$$

برهان. اگر  $(A, B)$  پایدار باشد، می توان ماتریس پس خورد  $K$  را به گونه ای یافت که  $A_c$  پایدار باشد.



$$\begin{aligned}
 \text{rank} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} &= \text{rank} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & \circ \\ -K & I_m \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} A - BK & B \\ C - DK & D \end{bmatrix} \\
 \text{rank} \begin{bmatrix} A - BK & B \\ C - DK & D \end{bmatrix} &= \text{rank} \begin{bmatrix} I_n & \circ \\ -(C - DK)(A - BK)^{-1} & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A - BK & B \\ C - DK & D \end{bmatrix} \\
 \text{rank} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} &= \text{rank} \begin{bmatrix} A - BK & B \\ \circ & -(C - DK)(A - BK)^{-1} + D \end{bmatrix} = m + n
 \end{aligned} \tag{۸.۵}$$

به این ترتیب، از آنجایی که  $\text{rank}(A_c) = n$  و از گزاره دوم خواهیم داشت:

$$\text{rank}((C - DK)(-A_c)^{-1}B + D) = m \tag{۹.۵}$$

بنابراین، با انتخاب  $L$  به صورت (۷.۵)،  $G(\circ) = I_m$  به دست می‌آید. در این صورت، امکان دکوپله‌سازی استاتیک وجود دارد. حالت عکس،

$$\text{rank}(L) = \text{rank}(C - DK)(-A_c)^{-1}B + D) = m$$

برای برقراری تساوی فوق، باید ماتریس  $(C - DK)(-A_c)^{-1}B + D$  نامنفرد باشد. که از رابطه (۹.۵) نتیجه می‌شود. □

## ۲.۲.۵ مکمل متعامد

تعریف ۲.۲.۵. فرض کنید  $E \in \mathbb{R}^{h \times h}$ ، ماتریس رتبه ناقص با  $\text{rank}(E) = k < h$  باشد. آنگاه فضای پوچ  $N_E$  از  $E$  مکمل متعامد فضای سطری  $E$  می‌باشد.

گزاره ۳.۲.۵. فرض کنید  $E \in \mathbb{R}^{h \times h}$  ماتریس رتبه ناقص و  $\text{rank}(E) = k < h$  باشد. آنگاه مکمل متعامد  $E^\perp$ ،  $E$  به صورت

$$E^\perp = DU_\perp^T \tag{۱۰.۵}$$

می‌باشد. که  $U_\perp^T$  فضای پوچ  $E$  و  $D$  ماتریس دلخواه با بعد مناسب می‌باشد.

برهان.  $SVD$  ماتریس  $E$  که  $E \in \mathbb{R}^{h \times h}$  و  $\text{rank}(E) = k < h$  می‌باشد، نتیجه می‌دهد:

$$U^T E V = \begin{bmatrix} U_1^T \\ U_\perp^T \end{bmatrix} E \begin{bmatrix} V_1 & V_\perp \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & \circ_{12} \\ \circ_{21} & \circ_{22} \end{bmatrix} \tag{۱۱.۵}$$

که  $U^T \in \mathbb{R}^{h \times h}$ ،  $V \in \mathbb{R}^{h \times h}$  به ترتیب، بردارهای تکین متعامد چپ و راست  $E$  و  $\Sigma_1 \in \mathbb{R}^{k \times k}$  ماتریس قطری مثبت می‌باشد.

$$\Sigma = \text{diag}[\sigma_1 \dots \sigma_k], \quad \sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_k > 0 \quad (12.5)$$

با استفاده از خواص تعامد  $U$  و  $V$  مانند  $V^T V = I_h$ ,  $U^T U = I_h$  و  $U_\perp^T U_\perp = 0$  خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} E = U \Sigma V^T &= \begin{bmatrix} U_1 & U_\perp \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0_{12} \\ 0_{21} & 0_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_\perp^T \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} U_1 & U_\perp \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ 0_{\perp} \end{bmatrix} = U_1 S_1 \end{aligned} \quad (13.5)$$

که  $S_1 = \Sigma_1 V_1^T$  می باشد. بنابراین از (۱۳.۵) می توان نتیجه گرفت:

$$U_\perp^T E = U_\perp^T \begin{bmatrix} U_1 & U_\perp \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ 0_{\perp} \end{bmatrix} = 0 \quad (14.5)$$

بدیهی است که برای ماتریس دلخواه  $D$

$$DU_\perp^T E = E^\perp E = 0. \quad (15.5)$$

□

به این ترتیب (۱۰.۵) نتیجه می شود.

### ۳.۵ فرم کانونیکال سیستم

گزاره ۱.۳.۵. اگر  $\text{rank}(CB) = m$  آنگاه تغییر مختصاتی وجود دارد که در آن  $(A^\circ, B^\circ, C^\circ)$  ساختاری به صورت زیر می گیرد:

$$A^\circ = \begin{bmatrix} A_{11}^\circ & A_{12}^\circ \\ A_{21}^\circ & A_{22}^\circ \end{bmatrix}, \quad B^\circ = \begin{bmatrix} 0 \\ B_\perp^\circ \end{bmatrix}, \quad C^\circ = \begin{bmatrix} 0 & I_m \end{bmatrix} \quad (16.5)$$

که  $A_{11}^\circ \in \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}$  و  $B_\perp^\circ \in \mathbb{R}^{m \times m}$  ماتریس نامنفرد می باشد، و  $I_m \in \mathbb{R}^{m \times m}$  ماتریس همانی می باشد.

برهان. با در نظر گرفتن توضیحات فضای حالت سیستم (۱.۵) و (۲.۵) با  $r = m$  و تعریف ماتریس تبدیل  $T_1^{-1}$  به طوری که

$$C_1 = CT_1 = \begin{bmatrix} 0 & I_m \end{bmatrix}, \quad T_1^{-1} = \begin{bmatrix} I_{n-m} & 0 \\ & C \end{bmatrix} \quad (17.5)$$

آنگاه

$$B_1 = T_1^{-1}B = T_1^{-1} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ CB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{12} \end{bmatrix} \quad (18.5)$$

اگر  $CB = B_{12}$  ماتریس معکوس‌پذیر باشد (در مقابل، حالت شبه‌معکوس قابل استفاده است)، آنگاه، ماتریس تبدیل دوم  $T_2^{-1}$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T_2^{-1} = \begin{bmatrix} I_{n-m} & -B_{11}B_{12}^{-1} \\ \circ & I_m \end{bmatrix} \quad (19.5)$$

و

$$T_2 = \begin{bmatrix} I_{n-m} & B_{11}B_{12}^{-1} \\ \circ & I_m \end{bmatrix} \quad (20.5)$$

بنابراین، نتیجه می‌شود:

$$B^\circ = T_2^{-1}B_1 = \begin{bmatrix} \circ \\ B_2^\circ \end{bmatrix} \quad (21.5)$$

در رابطه بالا داریم:

$$B_{11} = B_1, \quad B_2^\circ = B_{12} = CB \quad (22.5)$$

همچنین،

$$C^\circ = C_1T_2 = \begin{bmatrix} \circ & I_m \end{bmatrix} T_2 = \begin{bmatrix} \circ & I_m \end{bmatrix} \quad (23.5)$$

در نهایت،  $T_c^{-1} = T_2^{-1}T_1^{-1}$  نتیجه می‌دهد

$$A^\circ = T_c^{-1}AT_c = T_2^{-1}T_1^{-1}AT_1T_2 \quad (24.5)$$

□ بنابراین، از (۲۱.۵)، (۲۳.۵) و (۲۴.۵) روابط (۱۶.۵) به دست می‌آید.

توجه داشته باشید، ساخت  $T_1^{-1}$  یکتا نمی‌باشد و می‌توان آن را با جایگشت‌هایی از  $n - m$  سطر اول در ساختار تعریف (۱۷.۵) به دست آورد.

تعریف ۲.۳.۵. مجموعه مقادیر ویژه و بردارهای ویژه چپ و راست سیستم، ساختار ویژه نامیده می‌شود [۱۴].

### ۱.۳.۵ ویژگی های حالت سیستم

گزاره ۳.۳.۵. ساختار ویژه سیستم را با مقادیر ویژه متمایز، در نظر بگیرید. آنگاه، برای اندیس های  $j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$  و  $l \in \{1, 2, \dots, m\}$  و  $m = r$  داریم:

الف)  $(s - s_k)$  حالت  $k$  ام مشاهده ناپذیر از  $l$  امین سیستم خروجی است، اگر  $l$  امین سطر ماتریس  $C$  با  $k$  امین بردار ویژه ماتریس سیستم حلقه بسته  $A_c$  متعامد باشد، برای مثال، برای  $j \neq k$

$$c_l^T n_k = n_j^T n_k = 0, \quad C^T = [c_1 \dots c_m] \quad (25.5)$$

ب)  $(s - s_k)$  حالت  $k$  ام کنترل ناپذیر از  $l$  امین سیستم ورودی می باشد، اگر  $l$  امین ستون ماتریس  $B$  به  $k$  امین بردار ویژه ماتریس سیستم حلقه بسته  $A_c$  متعامد باشد. برای مثال، برای  $j \neq k$

$$n_k^T b_l = n_k^T n_j = 0, \quad B = [b_1 \dots b_r] \quad (26.5)$$

برهان. فرض کنید  $n_k$ ،  $k$  امین بردار ویژه راست متناظر با مقدار ویژه  $s_k$  باشد، برای مثال،

$$A_c n_k = (A - BK)n_k = s_k n_k \quad (27.5)$$

معادله مشخصه سیستم حلقه بسته به صورت زیر تعریف می شود:

$$\Upsilon = (sI_n - A_c)^{-1} \quad (28.5)$$

اگر ماتریس سیستم حلقه بسته با مقادیر ویژه متمایز باشد، (۲۷.۵) به صورت زیر نوشته می شود:

$$A_c \begin{bmatrix} n_1 & \dots & n_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1 & \dots & n_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 & & \\ & \ddots & \\ & & s_n \end{bmatrix} \quad (29.5)$$

$$A_c N = N S, \quad N^{-1} = N^T \quad (30.5)$$

که

$$S = \text{diag}[s_1 \dots s_n], \quad N = [n_1 \dots n_n] \quad (31.5)$$

با استفاده از خواص تعامد در (۳۰.۵) معادله مشخصه سیستم حلقه بسته به شکل زیر می شود:

$$\begin{aligned} \Upsilon &= (sNN^{-1} - NSN^{-1})^{-1} \\ &= N(sI - S)^{-1}N^T \end{aligned} \quad (32.5)$$

$$\Upsilon = [n_1 \dots n_n] \begin{bmatrix} \frac{1}{s-s_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{s-s_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1^T \\ \vdots \\ n_n^T \end{bmatrix} \quad (33.5)$$

بنابراین، (۳۳.۵) را می‌توان به صورت مجموع زیر نوشت:

$$\Upsilon = \sum_{h=1}^n \frac{n_h n_h^T}{s - s_h} \quad (34.5)$$

از این رو، می‌توان، ماتریس تابع تبدیل حلقه بسته را به شکل زیر نوشت:

$$\begin{aligned} G(s) &= C(sI - A_c)^{-1}BL \quad (35.5) \\ &= \sum_{h=1}^n \frac{C n_h n_h^T B}{s - s_h} L \end{aligned}$$

واضح است که (۳۵.۵)، روابط (۲۵.۵) و (۲۶.۵) را نتیجه می‌دهد. این اثبات را کامل می‌کند. □

## ۴.۵ تخصیص ساختار ویژه

سیستم حلقه بسته با طیف مقادیر ویژه  $\Omega(A_c) = \{s_h : \Re(s_h) < 0, h = 1, 2, \dots, n\}$  را در نظر بگیرید. توجه داشته باشید، طیف  $\Omega(A_c)$  تحت مزدوج مختلط بسته است. مشاهده‌پذیری و کنترل‌پذیری حالت‌ها، با استفاده از ساختار ویژه حلقه بسته تعیین می‌شود.

مفروضات قبل را در نظر بگیرید، آنگاه (۲۷.۵) به صورت زیر بازنویسی می‌شود.

$$[s_h I - A \quad B] \begin{bmatrix} n_h \\ K n_h \end{bmatrix} = L_h \begin{bmatrix} n_h \\ K n_h \end{bmatrix} = 0 \quad (36.5)$$

که  $L_h \in \mathbb{R}^{n \times (n+r)}$  و

$$L_h = [s_h I - A \quad B] \quad (37.5)$$

می‌باشد.

پس از آن، تجزیه  $SVD$  از  $L_h$  نتیجه می‌دهد:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u_{h1}^T \\ \vdots \\ u_{hn}^T \end{bmatrix} L_h \begin{bmatrix} v_{h1} & \cdots & v_{hn} & v_{h,(n+1)} & \cdots & v_{h,(n+r)} \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \sigma_{h1} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \sigma_{hn} & & & \\ & & & \circ_{n+r} & \cdots & \circ_{n+r} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (38.5)$$

که  $\{u_{hl}^T, l = 1, 2, \dots, n\}$  و  $\{v_{hk}, k = 1, 2, \dots, n+r\}$  مجموعه بردارهای تکین چپ و راست  $L_h$ ، متناظر با مجموعه مقادیر تکین  $\{\sigma_{hl}, l = 1, 2, \dots, n\}$  می باشند. بدیهی است، بردارهای  $\{v_{hj}, j = n+1, n+2, \dots, n+r\}$  در (36.5) صدق می کنند. بنابراین،

$$Lv_{hj} = [s_h I - A \quad B]v_{hj} = 0 \quad (39.5)$$

مجموعه بردارهای  $\{v_{hj}, j = n+1, n+2, \dots, n+r\}$ ، جواب نابدیهی (37.5) می باشند و فضای پوچ  $L_h, h = 1, 2, \dots, n$  نتیجه می دهد

$$\begin{bmatrix} n_h \\ Kn_h \end{bmatrix} \in N[s_h I - A \quad B] \quad (40.5)$$

فضای پوچ (40.5) شامل مجموعه بردارهای متعامد یکه است. هر ترکیب این بردارها (تولیدکننده فضای پوچ) بردار  $n_h$  ای را تولید می کند، که به عنوان بردار ویژه مقدار ویژه دلخواه  $s_h$ ، در سیستم حلقه بسته استفاده می شود.

گزاره ۱.۴.۵. بهینه سازی ساختار ویژه فرم کانونیکال، ساختار ویژه بهینه مدل را ارایه می کند.

برهان. با استفاده از (21.5)، (23.5)، (24.5) و (27.5) می توان نوشت:

$$\begin{aligned} (A - BK)n_h &= \\ &= (T_c A^\circ T_c^{-1} - T_c B^\circ K T_c T_c^{-1})n_h \quad (41.5) \\ &= T_c (A^\circ - B^\circ K^\circ) T_c^{-1} n_h \\ &= s_h n_h \end{aligned}$$

بنابراین،

$$s_h T_c^{-1} n_h = s_h n_h^\circ = (A^\circ - B^\circ K^\circ) n_h^\circ, \quad (42.5)$$

در این تساوی، از روابط زیر استفاده شده است:

$$K^\circ = KT_c, \quad n_h = T_c n_h^\circ \quad (۴۳.۵)$$

$$N = T_c N^\circ, \quad N^{-1} = N^{\circ T} T_c^{-1} \quad (۴۴.۵)$$

آنگاه با استفاده از (۳۲.۵)، (۳۵.۵) و (۴۴.۵) داریم:

$$\begin{aligned} G(s) &= CN(sI - S)^{-1} N^{-1} BL \quad (۴۵.۵) \\ &= CT_c N^\circ (sI - S)^{-1} N^{\circ T} T_c^{-1} BL \\ &= C^\circ N^\circ (sI - S)^{-1} N^{\circ T} B^\circ L \end{aligned}$$

از طرفی

$$\begin{aligned} G(s) &= C(sI - A_c)^{-1} BL \quad (۴۶.۵) \\ &= C^\circ (sI - A^\circ)^{-1} B^\circ L \end{aligned}$$

بنابراین، از تساوی معادلات (۴۵.۵) و (۴۶.۵) نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} G(s) &= \sum_{h=1}^n \frac{C n_h n_h^T B}{s - s_h} L \quad (۴۷.۵) \\ &= \sum_{h=1}^n \frac{C^\circ n_h^\circ n_h^{\circ T} B^\circ}{s - s_h} L \end{aligned}$$

□  $C^\circ n_h^\circ$  و  $n_h^{\circ T} B^\circ$  بهینه شده  $C n_h$  و  $n_h^T B$  می‌باشد. این اثبات را نتیجه می‌دهد.

## ۵.۵ طراحی پارامتر

با استفاده از خواص تعامد بردار ویژه، معادله (۲۷.۵) برای  $h = 1, 2, \dots, n$ ، به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$(s_h I - A^\circ) n_h^\circ = -B^\circ K n_h^\circ = -B^\circ r_h^\circ \quad (۴۸.۵)$$

بنابراین،

$$n_h^\circ = -(s_h I - A^\circ)^{-1} B^\circ r_h^\circ = V_h^\circ r_h^\circ \quad (۴۹.۵)$$

همچنین، خواهیم داشت:

$$r_h^\circ = K^\circ n_h^\circ, \quad V_h^\circ = -(s_h I - A^\circ)^{-1} B^\circ \quad (50.5)$$

از این رو می توان نوشت:

$$r_h^\circ = V_h^{\circ\ddagger} n_h^\circ \quad (51.5)$$

که در آن

$$V_h^{\circ\ddagger} = (V_h^{\circ T} V_h^\circ)^{-1} V_h^{\circ T}. \quad (52.5)$$

بردارهای ویژه متعامد، متناظر با سطرهای ماتریس  $C^\circ$  هستند.  $m$  مقدار ویژه ( $m = \text{rank}(C^\circ)$ ) از مجموعه مقادیر ویژه حلقه بسته دلخواه  $\Omega(A_c^\circ) = \{s_h, \Re(s_h) < 0, h = 1, 2, \dots, n\}$  که  $\Omega(A_c^\circ) = \Omega(A_c)$  توسط  $C^{\circ T \perp}$  تعیین می شود. مقدار ویژه باقیمانده متناظر با سطرهای ماتریس  $C^\circ$  به دست می آیند. در این روش، همه عناصر صفر در  $C^\circ$ ، به یک تغییر می یابند و همه یک ها به صفر تبدیل می شوند. توجه داشته باشید، استفاده مستقیم از  $C^\circ$  وزن ماتریس حالت را ماکزیمم می کند. اگر  $\Omega(A_c^\circ) = \{s_h, \Re(s_h) < 0, h = 1, 2, \dots, n\}$  آنگاه

$$r_h^\circ = V_h^{\circ\ddagger} c_h^{\circ T \perp}, \quad h = 1, 2, \dots, m \quad (53.5)$$

و

$$r_h^\bullet = V_h^{\circ\ddagger} c_h^{\bullet T}, \quad h = m + 1, \dots, n \quad (54.5)$$

بنابراین،

$$n_h^\circ = V_h^\circ r_h^\circ, \quad n_h^\bullet = V_h^\circ r_h^\bullet \quad (55.5)$$

ساخت و تجزیه ماتریس  $Q^\circ$  به صورت زیر امکان پذیر است:

$$Q^\circ = [v_1^\circ \dots v_m^\circ v_{m+1}^\bullet \dots v_n^\bullet] = \begin{bmatrix} P^\circ \\ R^\circ \end{bmatrix} \quad (56.5)$$

با  $R^\circ \in \mathbb{R}^{r \times n}$ ،  $P^\circ \in \mathbb{R}^{n \times n}$  به طوری که

$$K^\circ = R^\circ P^{\circ -1}, \quad K = K^\circ T_c^{-1} \quad (57.5)$$

حال با ارایه مثالی، روش ذکر شده را مورد بررسی قرار می دهیم.



مثال ۱.۵.۵. سیستم شرح داده شده در (۱.۵) و (۲.۵) را در نظر بگیرید

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & -9 & -5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad C^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ماتریس تبدیل را به دست می‌آوریم:

$$T_c^{-1} = \begin{bmatrix} 4/5 & 0/5 & -2/5 \\ 1/5 & 2/5 & 1/5 \\ 1/5 & 1/5 & 0/5 \end{bmatrix}, \quad T_c = \begin{bmatrix} 1/5 & 2/5 & -5/5 \\ -1 & -2/5 & 6/5 \\ 1/5 & 3/5 & -7/5 \end{bmatrix}$$

پارامترهای فرم کانونیکال به صورت زیر خواهند بود:

$$C^\circ = [0 \quad I_2], \quad A^\circ = \begin{bmatrix} -1 & 1/5 & 6 \\ 0 & -3/5 & -2 \\ 0 & 1/5 & -1 \end{bmatrix}, \quad B^\circ = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 7 & 10 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

بنابراین،  $\Omega(A_c^\circ) = \{-0/5, -1/2, -6\}$  در نظر بگیرید.

$$V_1^\circ = \begin{bmatrix} -37,3846 & -54,4615 \\ 0,7692 & 0,9231 \\ -4,4615 & -6,1538 \end{bmatrix},$$

$$V_2^\circ = \begin{bmatrix} -10,0610 & -5,4878 \\ 4,5122 & 6,0976 \\ -7,5610 & -10,4878 \end{bmatrix},$$

$$V_3^\circ = \begin{bmatrix} -5,2059 & -7,3059 \\ 2,4118 & 3,4118 \\ 0,1176 & 0,1176 \end{bmatrix},$$

و  $c_1^{\circ T} = [1 \quad 0 \quad 1]$  نتیجه می‌دهد:  $c_2^{\circ T} = [1 \quad 0 \quad 0]$ ،  $c_3^{\circ T} = [1 \quad 0 \quad 0]$

$$r_1^\circ = \begin{bmatrix} 0,3891 \\ -0,2854 \end{bmatrix}, \quad r_2^\circ = \begin{bmatrix} -0,1645 \\ 0,1194 \end{bmatrix}, \quad r_3^\circ = \begin{bmatrix} 18,4978 \\ -13,2737 \end{bmatrix}$$

$$n_1^{\circ T} = [0,9983 \quad 0,0358 \quad 0,0205],$$

$$n_2^{\circ T} = [0,9997 \quad -0,0144 \quad -0,0082],$$

$$n_3^{\circ T} = [0,6788 \quad -0,6745 \quad 0,6146],$$

حال ماتریس  $Q^\circ$  را به صورت زیر می سازیم:

$$Q^\circ = \begin{bmatrix} 0,9983 & 0,9997 & 0,6788 \\ 0,0358 & 0,0144 & -0,6745 \\ 0,0205 & -0,0082 & 0,6146 \\ \hline 0,3891 & -0,1645 & 18,4978 \\ -0,2854 & 0,1194 & -13,2737 \end{bmatrix}$$

پارامترهای قانون کنترل در (۵۶.۵) صدق می کنند:

$$K^\circ = \begin{bmatrix} -0,0062 & -3,7944 & 25,9402 \\ 0,0036 & 2,6301 & -18,7151 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 22,1210 & 18,3483 & -3,7789 \\ -16,0706 & -13,4531 & 2,6211 \end{bmatrix}$$

نورم دو ماتریس پس خورد حالت، مقدار  $35,8662$  می باشد. امکان بررسی مقادیر ویژه سیستم حلقه بسته نیز وجود دارد. به این معنا که، مقادیر ویژه ماتریس  $A - BK$  همان مقادیر ویژه مورد نظر ما است.

## ۶.۵ روش جدید

در این بخش، به معرفی روشی جدید برای می نیم کردن نورم ماتریس پس خورد حالت، بر اساس روش بیان شده در بخش قبل، می پردازیم. بر این اساس، ابتدا، چگونگی تبدیل فرم همدم برداری به تبدیلات روش ارایه شده در بخش قبل را بیان می کنیم. سپس، با ارایه مثال های عددی از روش جدید، به مقایسه آن با روش قبل می پردازیم. حال، روش تبدیل به فرم همدم برداری را مورد بررسی قرار می دهیم. با توجه به فرم همدم برداری اولیه و در نظر گرفتن  $T_c = TS$ ، خواهیم داشت:

$$\tilde{A} = S^{-1}T^{-1}ATS \longrightarrow \tilde{A} = T_c^{-1}AT_c \quad (58.5)$$

همچنین،

$$\tilde{B} = S^{-1}T^{-1}B = T_c^{-1}B \quad (59.5)$$

از آنجایی که

$$y = Cx = CT\hat{x}$$

و  $\hat{x} = S\tilde{x}$  بنا براین:

$$y = CTS\tilde{x} = CT_c\tilde{x}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\tilde{C} = CT_c \quad (۶۰.۵)$$

با جایگذاری روابط بالا در (۴۱.۵)، (۴۵.۵) و (۴۷.۵) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} (A - BK)n_h &= (T_c\tilde{A}T_c^{-1} - T_c\tilde{B}K)n_h \\ &= (T_c\tilde{A}T_c^{-1} - T_c\tilde{B}KT_cT_c^{-1})n_h \\ &= T_c(\tilde{A} - \tilde{B}KT_c)\tilde{T}_cn_h \\ &= T_c(\tilde{A} - \tilde{B}K^\circ)T_c^{-1}n_h = s_hn_h, \end{aligned} \quad (۶۱.۵)$$

در این معادله از رابطه  $K^\circ = KT_c$  استفاده شده است.  
با فرض  $n_h^\circ = T_c^{-1}n_h$  می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} T_c(\tilde{A} - \tilde{B}K^\circ)T_c^{-1}n_h &= s_hn_h \\ T_c(\tilde{A} - \tilde{B}K^\circ)n_h^\circ &= s_hn_h \end{aligned}$$

بنابراین:

$$(\tilde{A} - \tilde{B}K^\circ)n_h^\circ = s_hT_c^{-1}n_h$$

همچنین برای برقراری رابطه (۴۷.۵) داریم:

$$\begin{aligned} G(s) &= CN(sI - S)^{-1}N^{-1}BL \\ &= CT_cN^\circ(sI - S)^{-1}N^{-1}T_c\tilde{B}L \\ &= CT_cN^\circ(sI - S)^{-1}N^{\circ T}T_c^{-1}T_c\tilde{B}L \\ &= \tilde{C}N^\circ(sI - S)^{-1}N^{\circ T}\tilde{B}L \end{aligned} \quad (۶۲.۵)$$

بنابراین،

$$G(s) = \sum_{h=1}^n \frac{Cn_hn_h^T B}{s - s_h} L = \sum_{h=1}^n \frac{\tilde{C}n_h^\circ n_h^{\circ T} \tilde{B}}{s - s_h} L \quad (۶۳.۵)$$

از برقراری روابط فوق برای روش جدید، می‌توان نتیجه گرفت، روند ذکر شده در روش بخش قبل را می‌توان برای روش جدید نیز، به‌کار برد. بنابراین، تمام روابط روش قبل برای روش جدید نیز برقرار

می باشند. با این تفاوت که در روش جدید باید از روابط (۵۸.۵)، (۵۹.۵) و (۶۰.۵) برای حل مساله استفاده نمود.

حال روش جدید را برای حل مثال ۱.۵.۵ به کار می بریم.

مثال ۱.۶.۵. مثال ۱.۵.۵ را در نظر بگیرید. با محاسبات روش جدید خواهیم داشت:

$$A^\circ = T_c A T_c^{-1} = \begin{bmatrix} -3/8361 & 0/0312 & -4/5351 \\ 0 & -1/1639 & 8/9344 \\ 1/0000 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B^\circ = T_c B = \begin{bmatrix} 1/0000 & 1/4098 \\ 0 & 1/0000 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

در این جا  $T_c = TS$  از تبدیلات همدم برداری به دست می آید:

$$T_c = \begin{bmatrix} 0/9996 & 1/5904 & 5/8379 \\ 1/9989 & -1/8195 & 9/6778 \\ 2/0028 & 2/1793 & -25/3353 \end{bmatrix}, \quad T_c^{-1} = \begin{bmatrix} 0/1366 & 0/2896 & 0/1421 \\ 0/3825 & -0/2022 & 0/0109 \\ 0/0437 & 0/0055 & -0/0273 \end{bmatrix}$$

همچنین،

$$C^\circ = C T_c = \begin{bmatrix} 7/0000 & 0/1311 & -0/1475 \\ 3/0000 & -0/2295 & 15/5082 \end{bmatrix}$$

با در نظر گرفتن  $\Omega(A_c^\circ) = \{-0/5, -1/2, -6\}$  داریم:

$$V_1^\circ = -(-0/5I_3 - A^\circ)B^\circ = \begin{bmatrix} 0/2043 & 0/2976 \\ -5/4981 & -9/5156 \\ -0/4086 & -0/5952 \end{bmatrix}$$

$$V_2^\circ = -(-1/2I_3 - A^\circ)B^\circ = \begin{bmatrix} 0/1319 & 0/0720 \\ 27/2391 & 42/5840 \\ -0/1100 & -0/0600 \end{bmatrix}$$

$$V_3^\circ = -(-6I_3 - A^\circ)B^\circ = \begin{bmatrix} 0/3414 & 0/4791 \\ 0/1051 & 0/3543 \\ -0/0569 & -0/0798 \end{bmatrix}$$

با استفاده از

$$c_1^{\circ T} = [7/0000 \quad 0/1311 \quad -0/1475],$$

$$c_2^{\circ T} = [7/0000 \quad 0/1311 \quad -0/1475],$$

$$c_3^{\circ T} = [3/0000 \quad -0/2295 \quad 15/5082]$$

خواهیم داشت:

$$r_1^\circ = V_1^{\circ\top} c_1^{\circ T} = \begin{bmatrix} 45,2472 \\ -26,1577 \end{bmatrix}, \quad r_2^\circ = V_2^{\circ\top} c_2^{\circ T} = \begin{bmatrix} 48,9268 \\ -31,2932 \end{bmatrix},$$

$$r_3^\circ = V_3^{\circ\top} c_3^{\circ T} = \begin{bmatrix} 3,5856 \\ -1,7116 \end{bmatrix}$$

و

$$n_1^{\circ T} = \begin{bmatrix} 1,4590 & 0,1311 & -2,9180 \end{bmatrix}$$

$$n_2^{\circ T} = \begin{bmatrix} 4,2037 & 0,1311 & -3,5031 \end{bmatrix}$$

$$n_3^{\circ T} = \begin{bmatrix} 0,4041 & -0,2295 & -0,0673 \end{bmatrix}$$

بنابراین، ماتریس  $Q^\circ$  به صورت زیر خواهد بود:

$$Q^\circ = \begin{bmatrix} 1,4590 & 4,2037 & 0,4041 \\ 0,1311 & 0,1311 & -0,2295 \\ -2,9180 & -3,5031 & -0,0673 \\ \hline 45,2472 & 48,9268 & 3,5856 \\ -26,1577 & -31,2932 & -1,7116 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P^\circ \\ R^\circ \end{bmatrix},$$

از این رو،

$$K^\circ = R^\circ P^{\circ-1} = \begin{bmatrix} -2,3568 & -14,6871 & -17,3445 \\ 0,0974 & 4,9216 & 9,2341 \end{bmatrix},$$

و

$$K = K^\circ T_c^{-1} = \begin{bmatrix} -6,6982 & 2,1922 & -0,0215 \\ 2,2996 & -0,9164 & -0,1847 \end{bmatrix}.$$

نورم دو ماتریس پس خورد حالت در این روش،  $7,4686$  می باشد. این در حالی است که، این مقدار برای روش ارایه شده در این فصل،  $35,8662$  می باشد. همانطور که ملاحظه می کنید، نورم ماتریس پس خورد حالت به طور قابل توجهی کاهش یافته است.

در مثال بعد، به بررسی روش های ذکر شده این فصل برای ماتریس هیلبرت، که ماتریسی بدوضع است، می پردازیم.

مثال ۲.۶.۵. ماتریس هیلبرت از بعد ۳ را در نظر بگیرید:

$$A = \begin{bmatrix} 1/0000 & 0/5000 & 0/3333 \\ 0/5000 & 0/3333 & 0/2500 \\ 0/3333 & 0/2500 & 0/2000 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad C^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ابتدا، با روش جدید به حل مساله می پردازیم:

$$A^\circ = \begin{bmatrix} 1/5282 & -0/0927 & -0/1686 \\ 0 & 0/0051 & 0/0043 \\ 1/0000 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B^\circ = \begin{bmatrix} 1/0000 & 1/9703 \\ 0 & 1/0000 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

و

$$C^\circ = \begin{bmatrix} 7/0000 & -3/7921 & -3/4644 \\ 3/0000 & -1/9109 & -0/2515 \end{bmatrix}$$

برای  $\Omega(A_c^\circ) = \{-0/5, -1/2, -6\}$  داریم:

$$V_1^\circ = \begin{bmatrix} 0/4230 & 0/9112 \\ 0/0072 & 1/9954 \\ -0/8461 & -1/8224 \end{bmatrix},$$

$$V_2^\circ = \begin{bmatrix} 0/3486 & 0/7137 \\ 0/0010 & 0/8319 \\ -0/2905 & -0/5948 \end{bmatrix},$$

$$V_3^\circ = \begin{bmatrix} 0/1323 & 0/2628 \\ 0/0000 & 0/1666 \\ -0/0221 & -0/0438 \end{bmatrix}$$

و

$$r_1^\circ = \begin{bmatrix} 10/7620 \\ -1/9392 \end{bmatrix}, \quad r_2^\circ = \begin{bmatrix} 26/1354 \\ -4/5907 \end{bmatrix}, \quad r_3^\circ = \begin{bmatrix} 45/1552 \\ -11/4772 \end{bmatrix}$$

همچنین، با انجام محاسبات خواهیم داشت:

$$n_1^{\circ T} = \begin{bmatrix} 2/7858 & -3/7921 & -5/5715 \end{bmatrix}$$

$$n_2^{\circ T} = \begin{bmatrix} 5/8350 & -3/7921 & -4/8625 \end{bmatrix}$$

$$n_3^{\circ T} = \begin{bmatrix} 2/9597 & -1/9109 & -0/4933 \end{bmatrix}$$

بنابراین، می‌توان نوشت:

$$Q^{\circ} = \begin{bmatrix} ۲,۷۸۵۸ & ۵,۸۳۵۰ & ۲,۹۵۹۷ \\ -۳,۷۹۲۱ & -۳,۷۹۲۱ & -۱,۹۱۰۹ \\ -۵,۵۷۱۵ & -۴,۸۶۲۵ & -۰,۴۹۳۳ \\ \hline ۱۰,۷۶۲۰ & ۲۶,۱۳۵۴ & ۴۵,۱۵۵۲ \\ -۱,۹۳۹۲ & -۴,۵۹۰۷ & -۱۱,۴۷۷۲ \end{bmatrix}$$

در نهایت،

$$K^{\circ} = \begin{bmatrix} ۱,۲۴۴۳ & -۲۵,۹۱۹۱ & ۱۶,۳۳۱۷ \\ ۰,۲۱۹۷ & ۷,۵۵۵۹ & -۴,۶۸۴۸ \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} ۶,۹۳۲۶ & ۷,۵۱۱۱ & -۱۰,۳۵۵۳ \\ -۱,۷۴۸۳ & -۲,۰۷۸۴ & ۳,۰۶۲۴ \end{bmatrix}$$

نورم دو ماتریس پس‌خورد حالت  $K$ ، مقدار  $۱۵/۱۱۳۱$  می‌باشد. حال، با انجام محاسبات روش ارایه شده برای این مثال، خواهیم داشت:

$$K = \begin{bmatrix} ۲۸,۶۱۴۹ & ۵۱,۰۱۱۸ & ۲۰,۷۱۱۶ \\ -۱۹,۲۵۷۳ & -۳۴,۷۲۶۲ & -۱۴,۰۵۹۶ \end{bmatrix}$$

نورم دو ماتریس پس‌خورد حالت در این روش  $۷۴/۹۹۵۹$  می‌باشد.

همانطورکه مشاهده می‌کنید، ماتریس پس‌خورد حالت در روش جدید، از نورم ماتریسی کمتری نسبت به روش ارایه شده برخوردار است. بنابراین، برای ماتریس‌های بدوضع نیز، روش ارایه شده ما نورم ماتریس پس‌خورد حالت را به‌طور قابل توجهی می‌نیمم می‌نماید. همچنین، نتایج نشان‌دهنده این است که فرم کانونیکال سیستم برای به‌دست آوردن ماتریس پس‌خورد حالت برای ماتریس بدوضع با مشکل مواجه می‌شود. اما، در روش جدید ارایه‌شده ما این مشکل تا حدود زیادی برطرف شده است.





# فصل ۶

## نتیجه‌گیری

هدف ما در این پایان‌نامه، بهینه‌سازی تجزیه مقدار تکین و کاربرد آن در حل دستگاه‌های منفرد می‌باشد. از آنجایی‌که در اکثر مسایل مهندسی و علوم کاربردی به دستگاه‌هایی برمی‌خوریم که ماتریس ضرایب این دستگاه‌ها منفرد بوده، بنابراین یافتن جواب این دستگاه‌ها دارای اهمیت ویژه‌ای است. از این‌رو، تاکنون روش‌های زیادی برای حل این مساله ارایه شده است. ما به بررسی این روش‌ها در فصل دوم پرداختیم. در این فصل، با به‌کار بردن  $SVD$  برای مساله حداقل مربعات، روش‌هایی مانند شبه‌معکوس،  $TSVD$ ، تیخونف و ... را برای یافتن بهترین جواب مساله منفرد ارایه نمودیم و به مقایسه این روش‌ها پرداختیم. همچنین، در ادامه این فصل با معرفی مساله پردازش معکوس برای ربات، نمونه‌ای از بهینه‌سازی  $SVD$  و کاربرد آن در حل دستگاه‌های منفرد ارایه نمودیم.

در فصل سوم، روش جدیدی برای محاسبه جواب مسایل بدوضع ارایه نمودیم. ابتدا، با روش دو مرحله‌ای ولخ و ویلنی جواب مساله را به‌دست آوردیم. در ادامه فصل نیز، به‌منظور داشتن جوابی دقیق‌تر، با تقسیم مقادیر تکین در ماتریس‌های بلوکی قطری، از روش چندمرحله‌ای برای حل مساله استفاده نمودیم.

در فصل چهارم، روش تکراری جدیدی برای حل دستگاه معادلات خطی ارایه نمودیم. در ادامه فصل نیز، برای نشان دادن کارایی روش ارایه‌شده به مقایسه آن با روش‌های تکراری گاوس سایدل و  $SOR$  پرداختیم.

در فصل پنجم، ابتدا روشی برای به‌دست آوردن ماتریس پس‌خورد حالت در سیستم‌های کنترل خطی  $MIMO$  با فرم کانونیکال براساس دکوپله‌سازی ساختار ویژه ارایه نمودیم. در این روش، ماتریس پس‌خورد حالت را توسط بردارهای ویژه چپ تجزیه  $SVD$  به‌دست آوردیم. سپس، با توجه به اهمیت کمینه کردن نورم ماتریس پس‌خورد حالت در کاهش هزینه سیستم‌های کنترل خطی، با روش جدید پیشنهادشده بر اساس تبدیلات تشابهی، به این هدف دست یافتیم. اما، این روش با وجود اینکه نورم ماتریس پس‌خورد حالت را به‌طور قابل توجهی کاهش می‌دهد، ولی دارای محاسبات طولانی است، که از عیوب آن به‌شمار می‌آید.

ما در این پایان‌نامه به نمونه‌هایی از کاربردهای وسیع  $SVD$  اشاره نمودیم. در ادامه این پایان‌نامه

می‌توان از این تجزیه برای به‌دست آوردن ماتریس پس‌خورد حالت برای سیستم‌های توسیع یافته<sup>۱</sup>، سیستم‌های تأخیر زمانی و سیستم‌های دو بعدی استفاده نمود.

---

<sup>۱</sup>Descriptor systems

# پیوست آ

## برنامه‌های کامپیوتری

### ۱.آ کد متلب آزمون فیلپس برای روش‌های منظم‌سازی

```
function [A,b,x] = phillips(n)
%PHILLIPS Phillips' "famous" test problem.
%
% [A,b,x] = phillips(n)
%
% Discretization of the `famous' first-kind Fredholm integral
% equation devised by D. L. Phillips. Define the function
%   phi(x) = | 1 + cos(x*pi/3) , |x| < 3 .
%           | 0                , |x| >= 3
% Then the kernel K, the solution f, and the right-hand side
% g are given by:
%   K(s,t) = phi(s-t) ,
%   f(t)    = phi(t) ,
%   g(s)    = (6-|s|)*(1+1.5*cos(s*pi/3)) + 9/(2*pi)*sin(|s|*pi/3) .
% Both integration intervals are [-6,6].
%
% The order n must be a multiple of 4.

% Reference: D. L. Phillips, "A technique for the numerical solution
% of certain integral equations of the first kind", J. ACM 9
% (1962), 84-97.
```

```

% Discretized by Galerkin method with orthonormal box functions.

% Per Christian Hansen, UNI-C, 09/17/92.

% Check input.
if (rem(n,4)~=0), error('The order n must be a multiple of 4'), end

% Compute the matrix A.
h = 12/n; n4 = n/4; r1 = zeros(1,n);
c = cos([-1:n4]*4*pi/n);
r1(1:n4) = h + 9/(h*pi^2)*(2*c(2:n4+1) - c(1:n4) - c(3:n4+2));
r1(n4+1) = h/2 + 9/(h*pi^2)*(cos(4*pi/n)-1);
A = toeplitz(r1);

% Compute the right-hand side b.
if (nargout>1),
    b = zeros(n,1); c = pi/3;
    for i=n/2+1:n
        t1 = -6 + i*h; t2 = t1 - h;
        b(i) = t1*(6-abs(t1)/2) ...
            + ((3-abs(t1)/2)*sin(c*t1) - 2/c*(cos(c*t1) - 1))/c ...
            - t2*(6-abs(t2)/2) ...
            - ((3-abs(t2)/2)*sin(c*t2) - 2/c*(cos(c*t2) - 1))/c;
        b(n-i+1) = b(i);
    end
    b = b/sqrt(h);
end

% Compute the solution x.
if (nargout==3),
    x = zeros(n,1);
    x(2*n4+1:3*n4) = (h + diff(sin([0:h:(3+10*eps)]'*c))/c)/sqrt(h);
    x(n4+1:2*n4) = x(3*n4:-1:2*n4+1);
end

```

end

## آ.۱.۱ کد متلب روش‌های منظم‌سازی

```
function [x_k,rho,eta] = tsvd(U,s,V,b,k)
%TSVD Truncated SVD regularization.
%
% [x_k,rho,eta] = tsvd(U,s,V,b,k)
%
% Computes the truncated SVD solution
%   x_k = V(:,1:k)*inv(diag(s(1:k)))*U(:,1:k)'*b .
% If k is a vector, then x_k is a matrix such that
%   x_k = [ x_k(1), x_k(2), ... ] .
%
% The solution and residual norms are returned in eta and rho.

% Per Christian Hansen, IMM, 12/21/97.

% Initialization.
[n,p] = size(V); lk = length(k);
if (min(k)<0 | max(k)>p)
    error('Illegal truncation parameter k')
end
x_k = zeros(n,lk);
eta = zeros(lk,1); rho = zeros(lk,1);
beta = U(:,1:p)'*b;
xi = beta./s;

% Treat each k separately.
for j=1:lk
    i = k(j);
    if (i>0)
        x_k(:,j) = V(:,1:i)*xi(1:i);
    end
end
```

```

    eta(j) = norm(xi(1:i));
    rho(j) = norm(beta(i+1:p));
end
end

if (nargout > 1 & size(U,1) > p)
    rho = sqrt(rho.^2 + norm(b - U(:,1:p)*beta)^2);
end

```

## آ.۱.۲ کد متلب روش‌های منظم‌سازی

```

n = 40;
normNoise = 0.01;
[A,b,x] = ilaplace(n);
b = A*x;

[U,S,V] = svd(A);

function f = f(S, bt, normNoise, nu)
    [n,m] = size(S);
    f = 0;
    for k = 1:n
        f = f + bt(k)^2 / (1 + nu * S(k,k)^2)^2;
    endfor
    f = f - normNoise^2;
endfunction

function fprime = fprime(S, bt, normNoise, nu)
    [n,m] = size(S);
    fprime = 0;
    for k = 1:n
        fprime = fprime - 2*bt(k)^2 * S(k,k)^2 / (1 + nu * S(k,k)^2)^3;
    endfor
endfunction

```

```

for times = 1:100
    % generate error vector
    e = rand(n,1);
    e = e / norm(e) * normNoise;

    newB = b + e;

    % find mu
    bt = U'*newB;
    t = -1;
    tnext = 1e-5;

    while (tnext > t)
        t = tnext;
        tnext = t - f(S,bt,normNoise, t) / fprime(S,bt,normNoise, t);
    endwhile

    mu = 1 / t;

    Snew = zeros(n,n);
    for k = 1:n
        Snew(k,k) = S(k,k)^2;
        if (Snew(k,k) < mu)
            Snew(k,k) = mu;
        endif
    endfor

    SnewInv = zeros(n,n);
    for k = 1:n
        SnewInv(k,k) = 1 / Snew(k,k);
    endfor

    xLothar = V*SnewInv*S*bt;

```

```
Stik = zeros(n,n);
for k = 1:n
    Stik(k,k) = 1 / (mu + S(k,k)^2);
endfor

xTikhonov = V*Stik*S*bt;

times
printf("Lothar\n")
norm(x - xLothar)
printf("Tikhonov\n")
norm(x - xTikhonov)
end
```



# پیوست ب

## برنامه‌های کامپیوتری

### ب.۱ کد متلب ماتریس هیلبرت

```
% Proposed Methods for Hilbert Matrix
clc
clear
format long
A=hilb(14);
b=A*ones(14,1);
l=[1e-8,1e-13];
Epss=l(1);
[V,S,U]=svd(A);
s1=diag(S);
a=(s1>Epss);
St=diag(s1(a));
n1=length(St);
U1=U(:,1:n1);
V1=V(:,1:n1);
Utilde=null(U1');
Vtilde=null(V1');
C1=Vtilde'*A*Utilde;
b1=V1'*b;
b2=Vtilde'*b;
z1=pinv(St)*b1;
```

```

z2=TSPP_Kh(C1,b2,l(2));
fprintf('\n Solution of Ax=b, When A is Hilbert Matrix and b=A*ones(n,1)\n')
x1=U1*z1+Utilde*z2;
disp(x1)
fprintf(' \n Error When A is Hilbert Matrix and b=A*ones(n,1) is\n ');
Err1=abs(x1-ones(14,1));
disp(Err1);

```

### ب.۱.۱ کد متلب ماتریس $F$

```

%% Proposed Method For Following Matrix

```

```

clear
format long
A=[1/9 1/12 1/15 1/3 1/7 1/10 1/13 1/16 1/5 1/8 1/11 1/14 1/17 1/6;
1/13 1/16 1/19 1/8 1/11 1/14 1/17 1/20 1/9 1/12 1/15 1/18 1/21 1/10;
1/17 1/20 1/23 1/12 1/15 1/18 1/21 1/24 1/13 1/16 1/19 1/22 1/25 1/14;
1/7 1/10 1/13 1 1/5 1/8 1/11 1/14 1/3 1/6 1/9 1/12 1/15 1/4;
1/11 1/14 1/17 1/6 1/9 1/12 1/15 1/18 1/7 1/10 1/13 1/16 1/19 1/8;
1/15 1/18 1/21 1/10 1/13 1/16 1/19 1/22 1/11 1/14 1/17 1/20 1/23 1/12;
1/19 1/22 1/25 1/14 1/17 1/20 1/23 1/26 1/15 1/18 1/21 1/24 1/27 1/16;
1/22 1/25 1/28 1/17 1/20 1/23 1/26 1/29 1/18 1/21 1/24 1/27 1/30 1/19;
1/10 1/13 1/16 1/5 1/8 1/11 1/14 1/17 1/6 1/9 1/12 1/15 1/18 1/7;
1/14 1/17 1/20 1/9 1/12 1/15 1/18 1/21 1/10 1/13 1/16 1/19 1/22 1/11;
1/18 1/21 1/24 1/13 1/16 1/19 1/22 1/25 1/14 1/17 1/20 1/23 1/26 1/15;
1/8 1/11 1/14 1/2 1/6 1/9 1/12 1/15 1/4 1/7 1/10 1/13 1/16 1/5;
1/21 1/24 1/27 1/16 1/19 1/22 1/25 1/28 1/17 1/20 1/23 1/26 1/29 1/18;
1/16 1/19 1/22 1/11 1/14 1/17 1/20 1/23 1/12 1/15 1/18 1/21 1/24 1/13];
b=A*ones(14,1);
l=[1e-8,1e-13];
Epss=l(1);
m=length(b);
n=1;
[V,S,U]=svd(A);

```

```
s1=diag(S);
a=(s1>Eps);
St=diag(s1(a));
n1=length(St);
U1=U(:,1:n1);
V1=V(:,1:n1);
Utilde=null(U1');
Vtilde=null(V1');
C1=Vtilde'*A*Utilde;
b1=V1'*b;
b2=Vtilde'*b;
z1=pinv(St)*b1;
z2=TSPP_Kh(C1,b2,1(2));
```

# پیوست

## برنامه‌های کامپیوتری

### پ.۱ کد متلب محاسبه ماتریس پس‌خورد حالت

```
A=input('Enter Matrix A: ');
B=input('Enter Matrix B: ');
C=input('Enter Matrix C: ');
n=size(A,1);
m=size(C,1);
r=size(B,2);
T1i=[ones(n-m),zeros(n-m,m);C];
B11h=T1i*B;
B11=B11h(1:n-m,:);
B12h=T1i*B;
B12=B12h(n-m+1:n,:);
T2i=[ones(n-m),-B11*pinv(B12);zeros(m,n-m),eye(m)];
T2=[ones(n-m),B11*pinv(B12);zeros(m,n-m),eye(m)];
Tci=T2i*T1i;
Tc=Tci^(-1);
A0=Tci*A*Tc;
C0=[zeros(m,n-m),eye(m)];
B0=[zeros(n-m,m);C*B];
s=input('Enter Omega set as a vector like [s1,s2,s3,...,sn] ');
ns=length(s);
```

```

for i=1:ns
    V0{i}=- (s(i)*eye(n)-A0)^(-1)*B0;
    V0mp{i}=(V0{i}'*V0{i})^(-1)*V0{i}';
end
C0Tor=null(C0);
C1=abs(C0-ones(m,n))';
% for i=1:m
%     r0(i)=V0mp{m}*C0Tor(:,i);
% end
% for i=m+1:n
%     r0(i)=V0mp{m}*C1(:,i-m);
% end
r0{1}=V0mp{1}*[1;0;0];
r0{2}=V0mp{2}*[1;0;0];
r0{3}=V0mp{3}*[1;0;1];
for i=1:n
    n0{i}=V0{i}*r0{i};
end
% n0{1}=V0{1}*r0{1};
% n0{2}=V0{2}*r0{2};
% n0{3}=V0{3}*r0{3};

P0=[n0{1}];
R0=[r0{1}];
for i=2:ns
    P0=[P0 n0{i}];
    R0=[R0 r0{i}];
end

Q0=[P0;R0];
fprintf('\n \n The Matrix Q0 is \n \n')
disp(Q0)
K0=R0*P0^(-1);
K=K0*Tci;

```

```
fprintf('\n \n The Matrix K is \n \n')  
disp(K)  
fprintf('\n \n The Matrix K0 is \n \n')  
disp(K0)
```

# مراجع

- [1] A. Balestrino, G. De Maria, and L. Sciavicco, *Robust control of robotic manipulators*, In Proceedings of the 9th IFAC World Congress, volume 5, pp. 2435–2440, 1984.
- [2] Adri'a Colom´Figueras, Smooth inverse kinematics algorithms for serial redundant robots, Master Thesis, september 2011.
- [3] A. Quarteroni, R. Sacco and F. Saleri. Numerical mathematics. Springer, 2006.
- [4] A. S. Deo and I. D. Walker, *Robot subtask performance with singularity robustness using optimal damped least squares*, in Proc. IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp. 434-441, 1992.
- [5] B.N. Datta, Numerical Linear Algebra and Applications, SIAM, 2 edition, 2010.
- [6] B.N. Datta, Numerical Methods for Linear Control Systems Design and Analysis, Academic Press, New York, to appear in 2002.
- [7] C. D. Aliprantis and O. Burkinshaw, *Principles of Real Analysis*. Academic Press,1998.
- [8] C.D. Meyer, Matrix Analysis and Applied Linear Algebra, SIAM, 2004.
- [9] C. Y. Chung and B. H. Lee, *Torque optimizing control with singularity-robustness kinematically redundant robots*, Journal of Intelligent and Robotic Systems. 28, pp. 231-258, 2000.
- [10] C. D. Meyer, Matrix analysis and applied linear algebra, SIAM, 2000.
- [11] D. K. Salkuyeh and M. Hasani, *A Note on the Pin-Pointing Solution of Ill-Conditioned Linear System of Equations*, International Journal of Computer Mathematics, Vol.87,No.6, pp. 1395-1400, May 2010.
- [12] E. Oyama, N. Y. Chong, A. Agah, T. Maeda, and S. Tachi, *Inverse kinematics learning by modular architecture neural networks with performance prediction networks*, in Proc. IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp. 1006-1012, 2001.

- [13] Endre Suli and David F. Mayers, *An introduction to numerical analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, MR 2006500, 2003.
- [14] FILASOVÁ, A. and KROKAVEC, D., *State estimate based control design using the unified algebraic approach*, Archives of Control Sciences, 20:1, 5-18, 2010.
- [15] Golub, G. H. and Van Loan, C. F. *Matrix Computations*, 3rd ed. Baltimore, MD: Johns Hopkins, 1996.
- [16] Groetsch, Charles W. *The Theory of Tikhonov regularization for Fredholm equations of the first kind*. Pitman: Boston, 1984.
- [17] Hastie, T.J. and Tibshirani, R.J, *Generalized additive models*, New York: Chapman and Hall 1990.
- [18] Klann, E. and Ramlau, R. *Regularization by fractional filter methods and data smoothing*. Inverse Problems, 24, 2008.
- [19] I. Markovskiy, *Structured low-rank approximation and its applications*, Automatica, Volume 44, Issue 4, pp 891–909, April 2008.
- [20] K.Y.Volokh and O.Vilnay, *Pin-Pointing solution of ill-conditioned square systems of linear equations*, Appl .Math. Lett. 13, pp. 119-124, 2000.
- [21] L. Reichel and H. Sadok, *A new L-curve for ill-posed problems*, J. Comput. Appl. Math. 219, pp. 493-508, 2008.
- [22] Le Minh Phuoc, Philippe Martinet, Sukhan Lee and Hunmo Kim, *Damped least square based genetic algorithm with Gaussian distribution of damping factor for singularity-robust inverse kinematics*, Journal of Mechanical Science and Technology 22, pp. 1330-1338, 2008.
- [23] M. Delong and J. M. Ortega, *SOR as a preconditioner II*, Appl. Numer. Math. 26, pp. 465-481, 1998.
- [24] M. Fuhry, *A new Thikonov regularization method*, PHD thesis, Kent State University Honors College, May 2011.
- [25] N. Bosner, *Fast methods for large scale singular value decomposition*, PHD Thesis, University of Zagreb Department of Mathematics, 2006.
- [26] P. Kocsis, D. Krokavec, *mode decoupling and static system cross-decoupling in continuous-time MIMO system control design*, International Conference Cybernetics and Informatics, February 10-13, 2010.



- 
- [27] R. Fonod and P. Kocsis, *State feedback control design using eigenstructure decoupling*, In 18th International Conference on Process Control, pp 268-272, Tatranska Lomnica, Slovakia, Jun 2011.
- [28] R. Kress, *Numerical Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [29] S. Morigi, L. Reichel, and F. Sgallari, *A truncated projected SVD method for linear discrete ill-posed problems*, Numer. Algorithms, 43, pp. 197-213, 2006.
- [30] Samuel R. Buss and Jin-Su Kim, *Selectively damped least squares for inverse kinematics*, Journal of Graphics Tools, 10:37-49, 2004.
- [31] Samuel R. Buss, *Introduction to Inverse Kinematics with Jacobian Transpose, Pseudoinverse and Damped Least Squares methods*, Department of Mathematics University of California, San Diego La Jolla, CA 92093-0112, October 7, 2009.

# واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Real Number	اعداد حقیقی
Noise	اغتشاش
Integrating	انتگرال‌گیری
Upper Triangular	بالا مثلثی
Ill-posed	بدوضع
Eigen Vector	بردار ویژه
Column Matrix	بردار ستونی
Dimension	بعد
Optimal	بهینه
Optimize	بهینه‌ساختن
Stability	پایداری
Lower Triangular	پایین مثلثی
Feedback	پس‌خورد
Precodition	پیش‌شرط
Transfer Function	تابع انتقال
Similarity transation	تبدیلات تشابهی
Linear Combination	ترکیب خطی
Factorization	تجزیه
Singular Value Decomposition	تجزیه مقدار تکین
Projection	تصویر
Approximation	تقریب
Iteration	تکرار
Span	تولیدشدن
Exact Solution	جواب دقیق
Characteristic Polynomial	چندجمله‌ای مشخصه

Least Square	حداقل مربعات
Gaussian Elimination	حذف گاوس
Finite Arithmetic	حساب متناهی
Sensitivity	حساسیت
Open-Loop	حلقه باز
Closed-Loop	حلقه بسته
Output	خروجی
Absolute Error	خطای مطلق
Relative Error	خطای نسبی
Linear	خطی
Well-posed	خوش وضع
Ill-conditioned system	دستگاه بدوضع
Iterative Method	روش تکراری
Jacobi Method	روش ژاکوبی
Robot	ربات
Rank	رتبه
Least Squares Method	روش کمترین مربعات
Gauss Method	روش گاوس
Angle	زاویه
Eigenstructure	ساختار ویژه
Pseudo Inverse	شبه معکوس
Canonical Form	صورت استاندارد
Spectrum	طیف
Damping Factor	عامل میرایی
Condition Number	عدد شرطی
Elementary row operations	عملیات سطری مقدماتی
Operations	عملیات
Unreachable	غیرقابل دسترس
Distance	فاصله
Standard echelon form	فرم استاندارد اشلون
Vector companion form	فرم همدم برداری
Compression	فشرده‌گی

Space	فضا
Null Space	فضای پوچ
Control low	قانون کنترل
Pole	قطب
Controllability	کنترل‌پذیری
Adjoint Matrix	ماتریس الحاقی
Transformation Matrix	ماتریس تبدیل
Transpose Matrix	ماتریس ترانهاد
Regularization matrix	ماتریس تنظیم
Full Rank Matrix	ماتریس رتبه کامل
Tridiagonal Matrix	ماتریس سه‌قطری
Diagonal Matrix	ماتریس قطری
Similarity matrix	ماتریس‌های متشابه
Orthogonal Matrix	ماتریس متعامد
Triangular Matrix	ماتریس مثلثی
Singular Matrix	ماتریس منفرد
Hermitian Matrix	ماتریس هرمیتی
Identity Matrix	ماتریس همانی
Hilbert Matrix	ماتریس هیلبرت
Similar	متشابه
Orthonormal	متعامد یکه
Symmetric	متقارن
Convex	محدب
Coordinate	مختصات
Conjugate	مزدوج
Linear independent	مستقل خطی
Rectangular	مستطیلی
Linear Equations	معادلات خطی
Inverse	معکوس
Normal Equation	معادله نرمال
Invertible	معکوس‌پذیر
Positive Definite	معین مثبت

Joint	مفصل
Approximate Value	مقدار تقریبی
Eigenvalue	مقدار ویژه
Orthogonal Complement	مکمل متعامد
Regular	منظم
Regularization	منظم‌سازی
Component	مولفه
Damped	میراشده
Damping	میرایی
Unstable	ناپایدار
Deficient	ناقص
Truncated	ناقص
Nonsingular	نامنفرد
Kronecker invariant	ناوردای کرونکر
Norm	نرم
Singularities	نقاط تکین
Euclidean Norm	نرم اقلیدسی
Oscillation	نوسان
Semi-definite	نیمه معین
Divergence	واگرایی
Input	ورودی
Convergence	همگرایی
Uniqueness	یکتایی

# واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Absolute Error	خطای مطلق
Adjoint Matrix	ماتریس الحاقی
Angle	زاویه
Approximate Value	مقدار تقریبی
Approximation	تقریب
Canonical Form	صورت استاندارد
Characteristic Polynomial	چندجمله‌ای مشخصه
Closed-Loop	حلقه بسته
Condition Number	عدد شرطی
Conjugate	مزدوج
Control law	قانون کنترل
Control System	سیستم کنترل
Controllability	کنترل‌پذیری
Column Matrix	بردار ستونی
Component	مولفه
Compression	فشرده‌گی
Convergence	همگرایی
Convex	محدب
Coordinate	مختصات
Damped	میراشده
Damping	میرایی
Damping Factor	عامل میرایی
Deficient	ناقص
Diagonal Matrix	ماتریس قطری
Dimension	بعد

Distance	فاصله
Divergence	واگرایی
Eigenstructure	ساختار ویژه
Eigenvalue	مقدار ویژه
Eigen Vector	بردار ویژه
Elementary row operations	عملیات سطری مقدماتی
Euclidean Norm	نرم اقلیدسی
Exact Solution	جواب دقیق
Factorization	تجزیه
Feedback	پس‌خورد
Finite Arithmetic	حساب متناهی
Full Rank Matrix	ماتریس رتبه کامل
Gaussian Elimination	روش حذف گاوس
Gauss Method	روش گاوس
Hermitian Matrix	ماتریس هرمیتی
Hilbert Matrix	ماتریس هیلبرت
Identity Matrix	ماتریس همانی
Ill-conditioned system	دستگاه بدوضع
Ill-posed	بدوضع
Input	ورودی
Inverse	معکوس
Invertible	معکوس‌پذیر
Iteration	تکرار
Iterative Method	روش تکراری
Jacobi Method	روش ژاکوبی
Joint	مفصل
Kronecker invariant	ناوردای کرونکر
Least Squares Method	روش کمترین مربعات
Linear Combination	ترکیب خطی
Linear Equations	معادلات خطی
Lower Triangular	پایین مثلثی
Noise	اغتشاش

Nonsingular	نامنفرد
Norm	نرم
Normal Equation	معادله نرمال
Null Space	فضای پوچ
Open-Loop	حلقه باز
Operations	عملیات
Optimal	بهینه
Optimize	بهینه ساختن
Orthogonal Complement	مکمل متعامد
Orthogonal Matrix	ماتریس متعامد
Orthonormal	متعامد یکه
Oscillation	نوسان
Output	خروجی
Pole	قطب
Positive Definite	معین مثبت
Projection	تصویر
Precodition	پیش شرط
Pseudo Inverse	شبه معکوس
Rank	رتبه
Real Number	اعداد حقیقی
Rectangular	مستطیلی
Regular	منظم
Regularization	منظم سازی
Regularization matrix	ماتریس تنظیم
Relative Error	خطای نسبی
Robot	ربات
Semi-definite	نیمه معین
Sensitivity	حساسیت
Similar	متشابه
Similarity matrix	ماتریس های متشابه
Similarity transation	تبدیلات تشابهی
Singularities	نقاط تکین



Singular Matrix	ماتریس منفرد
Singular Value Decomposition	تجزیه مقدار تکین
Space	فضا
Span	تولیدشدن
Spectrum	طیف
Stability	پایداری
Standard echelon form	فرم استاندارد اشلون
Symmetric	متقارن
Transfer Function	تابع انتقال
Transformation Matrix	ماتریس تبدیل
Transpose Matrix	ماتریس ترانهاده
Triangular Matrix	ماتریس مثلثی
Tridiagonal Matrix	ماتریس سه‌قطری
Truncated	ناقص
Uniqueness	یکتایی
Unreachable	غیرقابل دسترس
Unstable	ناپایدار
Upper Triangular	بالا مثلثی
Vector companion form	فرم همدم برداری
Well-posed	خوش‌وضع

# نمایه

ا	۳۶	روش منظم‌سازی،
ب	۴۱	اصل اختلاف،
پ	۴۶	انتهای مؤثر،
ت	۲۹	بالامثلثی،
ث	۶	بدوضع،
ج	۴	بردار ویژه،
ح	۳۵	شبه‌معکوس،
خ	۶	عدد شرطی،
د	۲۸	فرآیند گرام اشمیت،
ذ	۶۲	فرم کانونیکال،
ر	۲۴	فرم همدم برداری،
ز	۵۹	قانون کنترل،
س	۱۹	کنترل‌پذیر،
ش	۴۶	ربات،
ص	۸	رتبه ماتریس،
ض	۷۶	روش تکراری،
ط	۴۷	روش حداقل مربعات میراشده،
ظ	۵۰	روش حداقل مربعات میراشده انتخابی،
ع	۲۰	تابع تبدیل،
ف	۳۰	تبدیلات تشابهی،
ق	۴۷	ترانهاده ژاکوبی،
ک	۲۷	تجزیه چولسکی،
گ	۸	تجزیه مقدار تکین،
گ	۷	تجزیه مقدار تکین ناقص،
ل	۴۶	ماتریس پس‌خورد حالت،
ل	۴۷	ماتریس ژاکوبین،
م	۴	ماتریس‌های سه‌قطری،
ن	۵۶	ماتریس هیلبرت،

مساله دکوپله‌سازی، ۶۰

مساله حداقل مربعات، ۱۵

مساله معکوس، ۳۹

معادلات نرمال، ۲۷

مقدار تکین، ۸

مکمل متعامد، ۶۱

منظم‌سازی تیخونف، ۳۹

منفرد، ۶

موقعیت هدف، ۴۶

ن

نامنفرد، ۸

نورم دو، ۷۳

ه

هموارسازی، ۳۹

ی

یکامتعامد، ۲۸

## **Aabstract**

In this thesis, we describe the optimization singular value decomposition method and its application of the singular system .as in most engineering problems, we encounter systems has a singular coefficient matrix, therefore, finding the best solution of this system is an effective step in advancing the practical purposes of this problem. therefore the importance of this problem, methods based on singular value decomposition such as Tikhonov regularization method and truncated singular value decomposition and etc is presented to solve this problems. we first review and compare these methods and then using a new multistage method to find a solution to these problems. also, with the introduction of the inverse kinematics methods Samples optimization of singular value decomposition and its application is presented. Finally, we obtained state feedback matrix using eigenstructure decoupling . also, using this method and similarity transformations and the importance of minimizing the norm of the state feedback matrix in the optimization of linear control system, a new method is proposed to achieve this goal. At the end of each chapter, numerical examples are given to illustrate more.

**Keywords :** Singular value decomposition, Least squares problem, Regularization method, State feedback matrix, Eigenstructure decoupling.



Shahrood University  
Faculty Of Mathematical Sciences

Dissertation Submitted in Partial  
Fulfillment of The Requirements For The  
Degree of Master of Science in  
Applied Mathematics

**Optimization of singular values  
decomposition method and its application in  
solving singular systems**

Supervisor  
Dr Hojjat Ahsani Tehrani

Advisor  
Dr Ali Mesforush

by  
Alemeh Arab

2015