دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی محض

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی محض، گرایش آنالیز

عنوان

توابع هارمونیک شبه ستاره‌گون بر دیسک واحد

استاد راهنما

دکتر احمد زیره

دانشجو

مریم مهاجر استرآبادی

بهمن ۱۳۹۳

تقدیم به مادر عزیز و مهربانم...

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر احمد زیره، صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم که قطعا بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدشان را و تشکر می‌کنم از خواهران عزیزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

مریم مهاجر استرآبادی

بهمن ۱۳۹۳

تعهدنامه

اینجانب **مریم مهاجر استرآبادی** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی محض دانشکده علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **توابع هارمونیک شبه ستاره‌گون بر دیسک واحد** ، تحت راهنمایی **دکتر احمد زیره** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام " دانشگاه شاهرود " یا " Shahrood University " به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

مریم مهاجر استرآبادی

بهمن ۱۳۹۳

چکیده

توابع همساز مختلط مقدار که در دیسک واحد Δ تک ارز می‌باشند را می‌توان به‌صورت $f = h + \bar{g}$ نوشت که h و g در Δ تحلیلی هستند. در این پایان نامه به بررسی شرایط تک ارزی و شرایط ضرایب توابع همساز ستاره‌گون و شبه‌ستاره‌گون می‌پردازیم. همچنین به بررسی کران‌های ضرایب این توابع خواهیم پرداخت.

کلمات کلیدی:همساز، توابع تک ارز، توابع ستاره‌گون، توابع شبه ستاره‌گون

فهرست مطالب

فصل ۱

تعاریف مقدماتی

۱.۱ نمادگذاری و تعاریف

در این پایان نامه از نمادهای زیر استفاده می‌شود:

$\mathbb{R}$ مجموعه اعداد حقیقی

$\mathbb{C}$ مجموعه اعداد مختلط

تعریف ۱.۱.۱. تابع f را در $z_\circ$ تحلیلی گوییم هرگاه در یک همسایگی $z_\circ$ مشتق پذیر باشد.

تعریف ۲.۱.۱. هر مجموعه باز و همبند در $\mathbb{C}$، یک میدان نامیده می‌شود.

تعریف ۳.۱.۱. (لم شوارتز). فرض کنیم $f(z)$ تابعی در دیسک $U_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ باشد و برای ثابت M، رابطه $|f(z)| < M$ برقرار باشد. اگر $z = \circ$ صفر مرتبه m تابع f باشد، در این‌صورت:

$$|f(z)| \leq \frac{M}{R^m}|z|^m \quad (z \in U_R).$$

همچنین در رابطه‌ی فوق، تساوی زمانی برقرار می‌شود که

$$f(z) = e^{i\theta}\frac{M}{R^m}z^m$$

به‌طوری‌که در آن θ مقداری ثابت است.

تعریف ۴.۱.۱. تابع حقیقی مقدار و پیوسته $U(x, y)$ را که در میدان D تعریف شده است در D همساز گویند هرگاه دارای مشتقات نسبی مراتب اول و دوم پیوسته بوده و این مشتقات در تمام D در معادله زیرصادق باشند.

$$\frac{\partial^۲ U}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲ U}{\partial y^۲} = \circ$$

این معادله به معادله لاپلاس مشهور است. با به‌کار بردن این قضیه که هر تابع تحلیلی در یک میدان، در همه نقاط آن میدان دارای مشتق از تمام مراتب می‌باشد، می‌بینیم که هر دو قسمت حقیقی و موهومی یک تابع تحلیلی، توابع همسازند. اگر $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ تحلیلی باشد، آنگاه v مزدوج همساز از u نام دارد.

ملاحظه ۵.۱.۱. *این خاصیت پادتقارنی زیر را داریم که v مزدوج همساز u است اگرو تنها اگر u مزدوج همساز $-v$ باشد. اثبات این مطلب از توجه به این امر نتیجه می‌شود که هر جا f تحلیلی باشد، $if = i(u + iv) = -v + iu$ نیز تحلیلی است.*
معادله لاپلاس شرط لازمی را بیان می‌کند که تابعی قسمت حقیقی (یا موهومی) یک تابع تحلیلی باشد.

قضیه ۶.۱.۱. (*نگاشت ریمان*). *فرض کنیم D میدان همبند ساده‌ای به غیر از تمام صفحه و z_0 نقطه‌ای در این میدان باشد. در این‌صورت تابع منحصر به فرد و تک ارز $f(z)$ موجود است که D را بر قرص $|z| < 1$ می‌نگارد و $f(z_0) = 0$ و $f'(z_0) > 0$ است.*

۲.۱ رده $\mathbb{S}$

توابعی که هم تحلیلی و هم تک ارز (یک به یک) هستند، واجد شرایط جالبی هستند که میدان‌های همبند ساده را بر میدان‌های همبند ساده می‌نگارند. به موجب قضیه نگاشت ریمان، هر تابع تک ارز، که در میدان همبند ساده (به غیر از تمامی صفحه) تعریف شده باشد را می‌توان با تابعی که در قرص واحد تعریف شده است متناظر کرد. بنابراین خود را به توابعی که بر قرص $|z| < 1$ تعریف شده‌اند محدود می‌کنیم و اگر چنانچه فرض کنیم تابع در مبدا صفر است(که تنها صفر تابع نیز خواهد بود) و در مبدا مشتق مخالف صفر دارد، در این‌صورت نتایج حاصله از شکل زیباتری برخوردار خواهند بود. زیرا مشتق تابع تک ارز هرگز صفر نیست، هر تابع تک ارز $f(z)$ را می‌توان به $\frac{[f(z) - f(0)]}{f'(0)}$، که تابعی است از شکل مذکور، تحویل کرد. رده توابعی که در محدودیت‌های مذکور صادق‌اند با یک حرف مشخص می‌شوند.

تعریف ۱.۲.۱. رده همه توابع $f(z)$ را که در قرص واحد $|z| < 1$ تحلیلی و تک ارز بوده و با شرایط $f(0) = 0$ و $f'(0) = 1$ نرمالیزه گردیده‌اند با $\mathbb{S}$ نمایش می‌دهیم. پس تابع $f(z)$ در $\mathbb{S}$ دارای نمایش توانی زیر است:

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots \qquad (|z| < 1).$$

لم ۲.۲.۱. *اگر $f(z) \in \mathbb{S}$، آنگاه $z\sqrt{\frac{f(z^2)}{z^2}} \in \mathbb{S}$.*

ملاحظه ۳.۲.۱. *به جای $\sqrt{f(z^2)}$، می‌نویسیم $z\sqrt{\frac{f(z^2)}{z^2}}$. زیرا $f(z^2)$ صفری در مبدا دارد که $\sqrt{f(z^2)} = e^{(\frac{1}{2})\log f(z^2)}$ را بی‌معنی می‌کند.*

برهان. فرض کنید $f(z)=z+a_۲z^۲+\dots$ لذا داریم:

$$g(z)=z\sqrt{\frac{f(z^۲)}{z^۲}}=z\sqrt{۱+a_۲z^۲+a_۳z^۴+\dots} \qquad (۱.۱)$$

(شاخه‌ی اصلی $\sqrt{.}$ را در نظر می‌گیریم)، تابع $g(z)$ بر دیسک واحد تحلیلی می‌باشد و $g(\circ)=\circ$ و $g'(\circ)=۱$ است. برای اثبات تک ارزی، اگر $g(z_۱)=g(z_۲)$ یعنی $z_۱\sqrt{\frac{f(z_۱^۲)}{z_۱^۲}}=z_۲\sqrt{\frac{f(z_۲^۲)}{z_۲^۲}}$ در این‌صورت $f(z_۱^۲)=f(z_۲^۲)$ و چون f یک به یک می‌باشد، داریم $z_۱^۲=z_۲^۲$، یعنی $z_۱=z_۲$ یا $z_۱=-z_۲$. از (۱.۱) ملاحظه می‌شود که $g(z)$ تابع فرد است لذا $z_۱=-z_۲$ تساوی $g(z_۱)=-g(z_۲)$ را نتیجه می‌دهد که با فرض در تناقض است. پس $z_۱=z_۲$ و تک ارزی $g(z)$ اثبات می‌شود. □

قضیه ۴.۲.۱. *اگر* $z\sqrt{\frac{f(z^۲)}{z^۲}}\in S$ *باشد، آنگاه* $|a_۲|\le ۲$.

مثال ۵.۲.۱. (تابع کوئب). در قضیه ۴.۲.۱، اگر $a_n=ne^{(n-۱)i\alpha}, n\ge ۲$ و α عدد حقیقی دلخواه باشد آنگاه $z\sqrt{\frac{f(z^۲)}{z^۲}}=\frac{z}{(۱-e^{i\alpha}z)^۲}=g(z)$. لذا

$$f(z)=\frac{z}{(۱-e^{i\alpha}z)^۲}=z+۲e^{i\alpha}z^۲+۳e^{۲i\alpha}z^۳+\cdots$$

با قرار دادن $\alpha=\circ$ به تابع زیر می‌رسیم :

$$k(z)=\frac{z}{(۱-z)^۲}=\frac{۱}{۴}(\frac{۱+z}{۱-z})^۲-\frac{۱}{۴}$$

که به تابع کوئب معروف است. این تابع قرص $|z|<۱$ را بر صفحه‌ای که در امتداد محور حقیقی منفی از $\frac{-۱}{۴}$ تا ∞ بریده شده است، می‌نگارد.

قضیه ۶.۲.۱. (پوشش). *اگر* $f(z)\in\mathbb{S}$ *و برای* $|z|<۱$، $f(z)\neq c$ *که* $c\in\mathbb{C}$، *آنگاه* $|c|\ge\frac{۱}{۴}$.

برهان. می‌دانیم $f(z)=z+a_۲z^۲+\cdots$ چون $f(z)\neq c$ پس تابع $\frac{cf(z)}{c-f(z)}$ نیز متعلق به $\mathbb{S}$ می‌باشد.

$$\frac{cf(z)}{c-f(z)}=z+(a_۲+\frac{۱}{c})z^۲+\cdots$$

بنا به قضیه ۴.۲.۱ داریم $|a_۲+\frac{۱}{c}|\le ۲$. از طرفی:

$$|\frac{۱}{c}|-|a_۲|\le|a_۲+\frac{۱}{c}|\le ۲\Longrightarrow|\frac{۱}{c}|\le ۲+|a_۲|$$

چون $f(z)\in\mathbb{S}$، پس $|a_۲|\le ۲$ است. لذا داریم :

$$|\frac{۱}{c}|\le ۴\Longrightarrow|c|\ge\frac{۱}{۴}$$

□

لم ۷.۲.۱. *اگر* $f(z)\in\mathbb{S}$ *و* $z=re^{i\theta}$ *باشد، آنگاه :*

$$Re\left\{\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}=r\frac{\partial}{\partial r}\log|f'(z)|.$$

برهان. چون برای $|z|<۱$، $f'(z)\neq ۰$ پس می‌توان شاخه‌ای از $\log f'(z)$ را برای $|z|<۱$ در نظر گرفت. حال برای $f(z)=f(re^{i\theta})$ داریم $f'(z)=f'(re^{i\theta})$ لذا :

$$\frac{\partial}{\partial r}\log f'(re^{i\theta})=\frac{e^{i\theta}f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})}$$

با ضرب طرفین رابطه‌ی فوق در r داریم:

$$r\frac{\partial}{\partial r}\log f'(re^{i\theta})=\frac{re^{i\theta}f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})}=\frac{zf''(z)}{f'(z)}$$

با محاسبه‌ی قسمت‌های حقیقی داریم:

$$r\frac{\partial}{\partial r}\log|f'(re^{i\theta})|=Re\left\{\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}.$$

□

قضیه ۸.۲.۱. *اگر* $f(z)\in\mathbb{S}$ *باشد، آنگاه :*

$$\frac{۱-r}{(۱+r)^۳}\leq|f'(z)|\leq\frac{۱+r}{(۱-r)^۳}\quad(|z|=r<۱).$$

برهان. می‌دانیم تابع $\omega=\dfrac{z+z_۰}{۱+\overline{z_۰}z}$ تحلیلی، یک به یک و پوشاست و قرص واحد را بر خودش می‌نگارد. لذا تابع $g(z)=f(\dfrac{z+z_۰}{۱+\overline{z_۰}z})=b_۰+b_۱z+b_۲z^۲$ نیز به ازای $(|z|<۱)$ تحلیلی و تک ارز است، داریم :

$$g(۰)=b_۰=f(z_۰),\quad b_۱=g'(۰)=f'(z_۰)(۱-|z_۰|^۲),$$

$$b_۲=\frac{g''(۰)}{۲}=\frac{۱}{۲}(f''(z_۰)(۱-|z_۰|^۲)^۲-۲f'(z_۰)\overline{z_۰}(۱-|z_۰|^۲))$$

چون $g(z)$ نرمالیزه نمی‌باشد پس متعلق به$\mathbb{S}$ نیست، با توجه به این‌که تابع $\dfrac{g(z)-g(۰)}{g'(۰)}=z+\dfrac{b_۲}{b_۱}z^۲+\cdots$ در S قرار می‌گیرد، لذا بنابر قضیه۴.۲.۱، $|\dfrac{b_۲}{b_۱}|\leq ۲$ یعنی:

$$\frac{۱}{۲}\left|\frac{f''(z_o)}{f'(z_۰)}(۱-|z_۰|^۲)-۲\overline{z_۰}\right|\leq ۲$$

با قرار دادن $z_۰=re^{i\theta}$ و ضرب طرفین در $\dfrac{۲|z_۰|}{۱-|z_۰|^۲}$ داریم :

$$\left|\frac{z_۰f''(z_۰)}{f'(z_۰)}-\frac{۲|z_۰|^۲}{۱-|z_۰|^۲}\right|\leq\frac{۴|z_۰|}{۱-|z_۰|^۲}$$

حال چون $z_۰$ دلخواه است، قرار می‌دهیم :

$$\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}-\frac{۲r^۲}{۱-r^۲}\right|\leq\frac{۴r}{۱-r^۲}$$

یعنی $\dfrac{zf''(z)}{f'(z)}$ در دایره‌ای به شعاع $\dfrac{۴r}{۱-r^۲}$ و به مرکز $\dfrac{۲r^۲}{۱-r^۲}$ واقع است لذا:

$$\frac{۲r^۲-۴r}{۱-r^۲}\leq\mathrm{Re}\frac{zf''(z)}{f'(z)}\leq\frac{۲r^۲+۴r}{۱-r^۲}$$

بنا به لم ۷.۲.۱ می‌دانیم $\mathrm{Re}\dfrac{zf''(z)}{f'(z)}=r\dfrac{\partial}{\partial r}\log|f'(z)|$ یعنی :

$$\frac{۲r^۲-۴r}{۱-r^۲}\leq r\frac{\partial}{\partial r}\log|f'(z)|\leq\frac{۲r^۲+۴r}{۱-r^۲}$$

$$\Longrightarrow \frac{۲r-۴}{۱-r^۲} \leq \frac{\partial}{\partial r}\log|f'(z)| \leq \frac{۲r+۴}{۱-r^۲}$$

حال از طرفین نامساوی از ۰ تا r انتگرال می‌گیریم :

$$\log(۱-r)-۳\log(۱+r) \leq \log|f'(z)| \leq \log(۱+r)-۳\log(۱-r)$$

و لذا داریم:

$$\log\frac{۱-r}{(۱+r)^۳} \leq \log|f'(z)| \leq \log\frac{۱+r}{(۱-r)^۳}$$

در نتیجه :

$$\frac{۱-r}{(۱+r)^۳} \leq |f'(z)| \leq \frac{۱+r}{(۱-r)^۳} \qquad (|z|=r<۱).$$

□

مثال ۹.۲.۱. مشتق تابع کوئب $k(z)=\frac{z}{(۱-z)^۲}=z+۲z^۲+\cdots$ برابر است با

$$k'(z)=\frac{۱+z}{(۱-z)^۳}$$

لذا کران بالای قضیه‌ی ۸.۲.۱، در مورد این تابع در $z=r$ و کران پایین در $z=-r$ تعیین می‌شود.

قضیه ۱۰.۲.۱. *اگر* $f(z)\in\mathbb{S}$ *باشد، آنگاه :*

$$\frac{r}{(۱+r)^۲} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(۱-r)^۲} \quad (|z|=r<۱)$$

برهان. بنا بر قضیه‌ی ۸.۲.۱ برای $|z|=r<۱$ داریم $|f'(z)|\leq\frac{۱+r}{(۱-r)^۳}$. نقطه‌ی ۰ را با یک خط مستقیم به z وصل کرده و روی این پاره خط انتگرال می‌گیریم:

$$|f(z)| \leq \int_۰^r |f'(t)|\mathrm{d}t \leq \int_۰^r \frac{۱+t}{(۱-t)^۳}\mathrm{d}t = \frac{r}{(۱-r)^۲}$$

نامساوی $\frac{۱}{۴} \leq \frac{r}{(۱+r)^۲}$ همواره برقرار است. حال اگر $|f(z)|\geq\frac{۱}{۴}$ باشد، آنگاه $\frac{r}{(۱+r)^۲} \leq |f(z)|$ و اگر $|f(z)|<\frac{۱}{۴}$ باشد، بنا بر قضیه‌ی ۶.۲.۱ مسیر c داخل دایره‌ی یکه از ۰ تا z موجود است که تصویر آن پاره خط مستقیم $c_۰$ از ۰ تا $f(z)$ را می‌پوشاند در این‌صورت :

$$|f(z)| = \int_{c_۰}|\mathrm{d}\omega| = \int_c |f'(s)||\mathrm{d}s|$$

از طرفی بنا به قضیه‌ی ۸.۲.۱ :

$$|f(z)| = \int_c |f'(s)||\mathrm{d}s| \geq \int_c |f'(s)|\mathrm{d}|s| \geq \frac{۱-t}{(۱+t)^۳}\mathrm{d}t = \frac{r}{(۱+r)^۲}$$

لذا داریم :

$$\frac{r}{(۱+r)^۲} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(۱-r)^۲}.$$

□

مثال ۱۱.۲.۱. برای تابع کوئب $k(z)=\frac{z}{(1-z)^2}=z+2z^2+\cdots$ کران بالای قضیه‌ی ۱۰.۲.۱ در $z=r$ و کران پایین در $z=-r$ تعیین می‌شود.

قضیه ۱۲.۲.۱. (*Littlewood*). *اگر $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$ در رده‌ی $\mathbb{S}$ باشد آنگاه برای هر n،* $|a_n|\le en$.

قضیه ۱۳.۲.۱. *اگر تابع $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$ در رده‌ی $\mathbb{S}$ باشد و ضرایب حقیقی داشته باشد، آنگاه برای هر n داریم $|a_n|\le n$.*

برهان. برای $r<1$، $z=re^{i\theta}$ قرار می‌دهیم:

$$Imf(z)=v(re^{i\theta})=\sum_{k=1}^{\infty}a_kr^k\sin k\theta$$

با ضرب طرفین رابطه‌ی فوق در $\sin n\theta$ و انتگرال‌گیری از 0 تا π داریم :

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}v(re^{i\theta})\sin n\theta d\theta=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}a_nr^n\sin^2 n\theta\mathrm{d}\theta=a_nr^n \qquad (2.1)$$

با توجه به رابطه‌ی

$$|\sin(n+1)\theta|=|\sin n\theta\cos\theta+\cos n\theta\sin\theta|\le|\sin n\theta|+|\sin\theta|$$

و به روش استقرایی می‌توان نشان داد که $|sinn\theta|\le n|sin\theta|$ لذا از رابطه‌ی (۲.۱)نتیجه می‌شود که

$$|a_nr^n|\le\frac{2n}{\pi}\int_0^{\pi}|v(re^{i\theta})|\sin\theta\mathrm{d}\theta \qquad (3.1)$$

حال نشان می‌دهیم $v(re^{i\theta})\neq 0$ ، که در آن $(0<\theta<\pi,\ 0<r<1)$:

$$0\neq f(re^{i\theta})-f(re^{-i\theta})=\sum_{n=1}^{\infty}a_nr^n(e^{in\theta}-e^{-in\theta})=2i\sum_{n=1}^{\infty}a_nr^n\sin n\theta=2iv(re^{i\theta})$$

چون$v(re^{i\theta})$ نسبت به θ تابعی پیوسته است، پس در فاصله $0<\theta<\pi$ علامت جبری ثابتی دارد. لذا :

$$r=|a_1r|=|\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}v(re^{i\theta})\sin\theta\mathrm{d}\theta|=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|v(re^{i\theta})|\sin\theta\mathrm{d}\theta. \qquad (4.1)$$

با جایگزینی (۴.۱)در (۳.۱) ، رابطه $|a_nr^n|\le nr$ بدست می‌آید و با $r\to 1$ قضیه ثابت می‌گردد. □

۳.۱ رده‌ی $\mathbb{S}^*$

تعریف ۱.۳.۱. میدان D را نسبت به z_0 ستاره‌گون گوییم هرگاه پاره خط مستقیمی که هر نقطه از D را به z_0 وصل می‌کند در D قرار بگیرد. تابع $f(z)\in\mathbb{S}$ را نسبت به مبدا ستاره‌گون گوییم هر گاه قرص $|z|<1$ با $f(z)$ بر میدانی نگاشته شود که نسبت به $\omega=0$ ستاره‌گون است. این زیر رده‌ی $\mathbb{S}$ با $\mathbb{S}^*$ نشان داده می‌شود.

لم ۲.۳.۱. *فرض کنیم $f(z) \in \mathbb{S}$، در این‌صورت $f(z) \in \mathbb{S}^*$ اگر و تنها اگر $f(z)$ هر قرص $|z| < r < ۱$ را بر میدان ستاره‌گون بنگارد.*

برهان. ابتدا فرض کنیم $f(z) \in \mathbb{S}^*$ و D تصویر $|z| < ۱$ و D_r تصویر $|z| < r < ۱$ در تابع $f(z)$ باشد. اگر $w \in D$ باشد، آنگاه برای $۰ < t < ۱$، $tw \in D$ (چون D ستاره‌گون نسبت به مبدا می‌باشد) لذا تابع $g(z) = f^{-۱}(tf(z))$ در $|z| < ۱$ تحلیلی است و در نامساوی $|g(z)| < ۱$ صدق می‌کند. چون $g(۰) = f^{-۱}(tf(۰))$، با توجه به لم شوارتز $|g(z)| \leq |z|$. اکنون نقطه‌ی $w_۱ \in D_r$ را انتخاب می‌کنیم. در این‌صورت برای نقطه‌ی $z_۱$ ای با فرض $|z_۱| < ۱$ و برای t دلخواه با فرض $۰ < t < ۱$ داریم:

$$|f^{-۱}(tw_۱)| = |f^{-۱}(tf(z_۱))| = |g(z_۱)| \leq |z_۱| < r$$

ولی این بدان معنی است که $tw_۱$در D_r قرار دارد. چون این مطلب برای همه‌ی $W_۱$ ها در D_r و همه‌ی tها که $۰ < t < ۱$ درست است، میدان D_r نسبت به $w = ۰$ ستاره‌گون است.
بر عکس، اگر $f(z)$ در رده‌ی $\mathbb{S}^*$ قرار نداشته باشد، آنگاه نقطه $w_۰ \in D$ موجود است به‌طوری‌که برای $t_۰$ای، $(۰ < t_۰ < ۱)$، $t_۰w_۰$ متعلق به D نمی‌باشد. اینک قرص $|z| < r < ۱$ را انتخاب می‌کنیم به‌طوری‌که تصویرش D_r شامل نقطه‌ی $w_۰$ باشد. چون $D_r \subset D$، نقطه‌ی $t_۰w_۰$ متعلق به D_r نیست. پس $f(z)$ ، $|z| < ۱$ را بر میدان ستاره‌گون نمی‌نگارد. □

قضیه ۳.۳.۱. *فرض کنیم $f(z) \in \mathbb{S}$ باشد، در این‌صورت $f(z) \in \mathbb{S}^*$ اگرو تنها اگر:*

$$Re\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > ۰$$

برهان. با توجه به لم ۲.۳.۱ $f(z) \in \mathbb{S}^*$ اگر و تنها اگر تصویر D_r از $|z| < r < ۱$ یک میدان ستاره‌گون باشد. به بیان معادل برای هر θ $(۰ \leq \theta \leq ۲\pi)$ بردار شعاعی از $w = ۰$ تا$w = f(re^{i\theta})$ باید در D_r باشد ولی این بدان معنی است که $\arg f(re^{i\theta})$ تابعی است که نسبت به θ اکیدا صعودی است، زیرا در غیر این‌صورت بردار شعاعی می‌بایست مرز D_r را حداقل در دو نقطه قطع کند. پس یک تابع در $\mathbb{S}^*$ با شرط $\frac{\partial}{\partial\theta}\arg f(re^{i\theta}) > ۰$ مشخص می‌شود. ولی $\arg f(re^{i\theta}) = Im\log f(re^{i\theta})$، بنابراین:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{Im\log f(re^{i\theta})\right\} = Im\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(re^{i\theta})\right\} = Im\left\{i\frac{re^{i\theta}f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})}\right\} = Re\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > ۰.$$

□

مثال ۴.۳.۱. تابع کوئب $k(z) = \frac{z}{(۱-z)^۲}$در رده‌ی $\mathbb{S}^*$ قرار دارد، زیرا تصویر $|z| < ۱$ صفحه‌ی ω می‌باشد که در امتداد پرتو $\frac{-۱}{۴}$ تا ∞ بریده شده است و همچنین:

$$Re\left\{\frac{zk'(z)}{k(z)}\right\} = Re\left\{\frac{۱+z}{۱-z}\right\}.$$

قضیه ۵.۳.۱. *فرض کنیم برای $|z| < ۱$، $f(z) = ۱ + \sum_{n=۱}^{\infty} a_n z^n$ تحلیلی است. اگر برای $|z| < ۱$، $\mathrm{Re}f(z) > ۰$، آنگاه برای هر n، $|a_n| \leq ۲$.*

قضیه ۶.۳.۱ *فرض کنیم* $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$ *در* $\mathbb{S}^*$ *باشد آنگاه برای هر* n، $|a_n|\leq n$.

برهان. چون برای $0<|z|<1$، $f(z)\neq 0$ تابع

$$P(z)=z\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{1+\sum_{n=2}^{\infty}na_nz^{n-1}}{1+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^{n-1}} \tag{5.1}$$

در $|z|<1$ تحلیلی است. لذا می‌توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$P(z)=1+\sum_{n=2}^{\infty}\alpha_nz^n \tag{6.1}$$

از طرفی برای $|z|<1$، $f(z)\in\mathbb{S}^*$ پس $Re\{P(z)\}>0$. بنا بر قضیه‌ی ۴.۲.۱ می‌دانیم:

$$|\alpha_n|\leq 2 \quad n=1,2,3,\cdots \tag{7.1}$$

از(۵.۱) و(۶.۱) داریم:

$$1+\sum_{n=2}^{\infty}na_nz^{n-1}=(1+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^{n-1})(1+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n)$$

با مساوی قرار دادن ضرایب به رابطه‌ی زیر می‌رسیم:

$$ka_k=a_k+a_{k-1}\alpha_1+a_{k-2}\alpha_2+\cdots+a_2\alpha_{k-2}+\alpha_{k-1}$$

و یا به‌صورت معادل :

$$(k-1)a_k=a_{k-1}\alpha_1+a_{k-2}\alpha_2+\cdots+a_2\alpha_{k-2}+\alpha_{k-1} \quad (k=2,3,\cdots) \tag{8.1}$$

با استفاده از کران (۷.۱) می‌توان نامساوی مثلث را در (۸.۱)به‌کار برد لذا

$$(k-1)|a_k|\leq 2(|a_{k-1}|+|a_{k-2}|+\cdots+|a_2|+1)$$

از رابطه‌ی فوق در می‌یابیم $|a_2|\leq 2$. سپس فرض کنیم برای $k=2,3,\cdots,n-1$ داشته باشیم $|a_k|\leq k$. در این‌صورت :

$$(n-1)|a_n|\leq 2\left[(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1\right]=\frac{2(n-1)n}{2}.$$

و لذا رابطه $|a_n|\leq n$ برقرار می‌باشد لذا به استقرا قضیه برای هر n درست است. □

تعریف ۷.۳.۱ تابع $f(z)\in\mathbb{S}$ ستاره‌گون از مرتبه $\alpha(0\leq\alpha<1)$ نامیده می‌شود هرگاه :

$$Re\left\{\frac{zf'}{f}\right\}>\alpha \quad (|z|<1).$$

این زیر رده‌ی $\mathbb{S}$ را به $\mathbb{S}^*(\alpha)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۸.۳.۱ *فرض کنیم* $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$، *اگر*

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-\alpha)|a_n|\leq 1-\alpha, \qquad (0\leq\alpha<1).$$

آنگاه $f(z)\in S^*(\alpha)$.

برهان. بنا بر تعریف ۷.۳.۱ کافی است نشان دهیم $z\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ در یک دایره به شعاع $\alpha - ۱$ و به مرکز ۱ قرار دارد.

$$|z\frac{f'}{f} - ۱| = |\frac{zf' - f}{f}| = |\frac{\sum_{n=۲}^{\infty}(n-۱)|a_n|z^n}{z + \sum_{n=۲}^{\infty} a_n z^n}|$$
$$\leq \frac{\sum_{n=۲}^{\infty}(n-۱)|a_n||z|^{n-۱}}{۱ - \sum_{n=۲}^{\infty}|a_n||z|^{n-۱}} \leq \frac{\sum_{n=۲}^{\infty}(n-۱)|a_n|}{۱ - \sum_{n=۲}^{\infty}|a_n|}$$

آخرین جمله قبل دارای کران بالای $۱ - \alpha$ می‌باشد اگر

$$\sum_{n=۲}^{\infty}(n-۱)|a_n| \leq (۱-\alpha)(۱ - \sum_{n=۲}^{\infty}|a_n|)$$

که معادل است با $\sum_{n=۲}^{\infty}(n-\alpha)|a_n| \leq ۱ - \alpha$. بنا بر فرض، این رابطه برقرار است. بنابراین $|z\dfrac{f'}{f} - ۱| \leq ۱ - \alpha$. □

۴.۱ رده‌ی $\mathbb{K}$

تعریف ۱.۴.۱. میدان D را محدب گوییم هرگاه پاره خط مستقیمی که هر دو نقطه از D را به‌هم وصل می‌کند در D قرار بگیرد.

تعریف ۲.۴.۱. تابع $f(z) \in \mathbb{S}$ را محدب گوییم هرگاه قرص $|z| < ۱$ با $f(z)$ بر یک میدان محدب نگاشته شود، این زیر رده‌ی $\mathbb{S}$ را با $\mathbb{K}$ نشان می‌دهیم .

قضیه ۳.۴.۱. *فرض کنیم $f(z) \in \mathbb{S}$، در این‌صورت $f(z) \in \mathbb{K}$ اگرو تنها اگر $f(z)$ هر قرص $|z| < r < ۱$ را بر میدان محدب تصویر کند.*

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم $f(z) \in \mathbb{K}$ و D تصویر $|z| < ۱$ و D_r تصویر $|z| < r < ۱$ تحت $f(z)$ باشد. نقاط $w_۱$، $w_۲$ را در D_r انتخاب می‌کنیم. باید نشان دهیم که پاره خط $(۰ < t < ۱)$ $tw_۱ + (۱-t)w_۲$، هم در D_r قرار دارد. نقاط $z_۱$ و $z_۲$ در قرص $|z| < ۱$ موجود هستند به‌طوری که $\omega_۱ = f(z_۱)$ و $\omega_۲ = f(z_۲)$. بدون از دست دادن کلیت فرض کنیم $|z_۱| \leq |z_۲|$ آنگاه تصویر $|z| < ۱$ تحت تابع $g(z) = tf\left((\frac{z_۱}{z_۲})z\right) + (۱-t)f(z)$ در D واقع است. لذا تابع $h(z) = f^{-۱}(g(z))$ در $|z| < ۱$ تحلیلی است و چون $f(z) \in \mathbb{S}$ لذا در شرایط $|h(z)| < ۱$ و $h(۰) = ۰$ صدق می‌کند، به موجب لم شوارتز $|h(z)| \leq |z|$. به‌ویژه :

$$|h(z_۲)| = |f^{-۱}(tw_۱ + (۱-t)\omega_۲)| \leq |z_۲| < r \tag{۹.۱}$$

چون $D_r \subset D$ ، نقطه‌ی $z_۰$ای در قرص $|z| < ۱$ موجود است که $tw_۱ + (۱-t)\omega_۲ = f(z_۰)$ ولی بنابر(۹.۱) نقطه‌ی $f^{-۱}(f(z_۰)) = z_۰$ نیز می‌بایست در قرص $|z| < ۱$ باشد. پس هر نقطه بر پاره خط $tw_۱ + (۱-t)\omega_۲$ در D_r قرار دارد.

برعکس، اگر $f(z)$ در رده‌ی $\mathbb{K}$ نباشد آنگاه دو نقطه در D وجود دارند که پاره‌خط مار بر این دو نقطه در D قرار ندارد. اینک قرصی مانند $|z| < r < ۱$ انتخاب می‌کنیم که تصویرش شامل D_r

این دو نقطه باشد. چون $D_r \subset D$ پاره خطی که این دو نقطه را به‌هم وصل می‌کند، نمی‌تواند در D_r قرار داشته باشد، لذا $f(z)$ قرص $|z| < r$ را بر یک میدان محدب تصویر نمی‌کند. □

قضیه ۴.۴.۱. *فرض کنیم $f(z)$ در $|z| < ۱$ تحلیلی باشد و $f(۰) = ۰$ و $f'(۰) = ۱$. در این‌صورت $f(z) \in \mathbb{K}$ اگر و تنها اگر:*

$$Re\left\{ ۱ + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} > ۰ \qquad (|z| < ۱).$$

برهان. بنا بر قضیه‌ی ۹.۱، $f(z) \in K$ اگر و تنها اگر تصویر D_r از $|z| < r < ۱$ یک میدان محدب باشد. از نظر هندسی این بدان معنی است که تابع $w = f(re^{i\theta})$ دایره $|z| = r < ۱$ را بر یک مرز ساده می‌نگارد و مماس بر این مرز، با افزایش θ در خلاف جهت عقربه‌های ساعت حرکت می‌کند. می‌دانیم زاویه‌ای که خط مماس در صفحه‌ی ω با محور حقیقی می‌سازد برابر است با:

$$\frac{\pi}{۲} + \theta + \arg f'(z)$$

لذا تابع محدب با شرط زیر مشخص می‌گردد:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\pi}{۲} + \theta + \arg f'(re^{i\theta}) \right) > ۰$$

و لذا:

$$۱ + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(Im \log f'(re^{i\theta}) \right) = ۱ + Im\left\{ (ire^{i\theta}) \frac{f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})} \right\} = Re\left\{ ۱ + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} > ۰$$

□

قضیه ۵.۴.۱. **(الکساندر[۱])** *فرض کنیم f یک تابع تحلیلی در D باشد با $f(۰) = ۰$ و $f'(۰) = ۱$. در این‌صورت $f(z) \in \mathbb{K}$ اگر و تنها اگر $zf' \in \mathbb{S}^*$.*

برهان. اگر $g(z) = zf'(z)$ در این‌صورت :

$$\left\{ \frac{zg'(z)}{g(z)} \right\} = \left\{ ۱ + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} > ۰$$

لذا تابع سمت چپ در D تحلیلی و مثبت است اگر و تنها اگر تابع سمت راست نیز چنین باشد. □

قضیه ۶.۴.۱. *فرض کنیم $f(z) = z + \sum_{n=۲}^{\infty} a_n z^n$ در $\mathbb{K}$ باشد. در این‌صورت برای هر n، $|a_n| \leq ۱$.*

برهان. با توجه به قضیه ۵.۴.۱ تابع $zf'(z) = z + \sum_{n=۲}^{\infty} na_n z^n$ در $\mathbb{S}^*$ قرار دارد لذا بنا بر قضیه‌ی ۶.۳.۱ برای هر n، $|na_n| \leq n$ و در نتیجه $|a_n| \leq ۱$. □

قضیه ۷.۴.۱. *اگر $f(z) \in \mathbb{K}$ برای $|z| < ۱$ داشته باشیم $f(z) \neq c$ آنگاه $|c| \geq \frac{۱}{۲}$.*

[۱] Alexander

برهان. ابتدا نشان می‌دهیم تابع کمکی $g(z)=(c-f(z))^{2}$ در $|z|<1$ تک ارز است ، دو نقطه متمایز z_0 و z_1 در قرص واحد انتخاب می کنیم در این‌صورت :

$$g(z_0)-g(z_1)=\Big((c-f(z_0))^{2}-(c-f(z_1))^{2}\Big)=\Big(f(z_0)-f(z_1)\Big)\Big(f(z_0)+f(z_1)-2c\Big)$$

اکنون $f(z_0)\neq f(z_1)$ زیرا $f(z)$ تک ارز می‌باشد. همچنین چون $f(z)$ محدب است، نقطه‌ی $\frac{1}{2}[f(z_0)+f(z_1)]$ به تصویر $|z|<1$ متعلق است لذا نمی‌تواند مساوی c باشد. پس

$$f(z_0)+f(z_1)-2c\neq 0$$

و لذا تک ارزی $g(z)$ ثابت می‌شود. چون $g(z)=c^{2}-2cz+z^{2}+\cdots$ تابع نرمال زیر در $\mathbb{S}$ است.

$$h(z)=\frac{g(z)-c^{2}}{-2c}=z+(\frac{-z^{2}}{2c})+\cdots$$

بعلاوه درا $|z|<1$ ، $h(z)\neq\frac{c}{2}$، زیرا $g(z)$ هرگز در آن‌جا صفر نیست. با به‌کار بردن قضیه‌ی پوششی در می‌یابیم $|\frac{c}{2}|\geq\frac{1}{4}$ و یا $|c|\geq\frac{1}{2}$. □

قضیه ۸.۴.۱. *اگر* $f(z)\in\mathbb{K}$ *باشد، آنگاه برای* $|z|=r<1$:

$$\frac{1}{(1+r)^{2}}\leq|f'(z)|\leq\frac{1}{(1-r)^{2}}$$

برهان. می‌دانیم تابع $(|z_0|<1)$ $w=\frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0 z}$ تحلیلی، یک به یک و پوشاست و قرص واحد را بر خودش می‌نگارد، پس تابع

$$g(z)=f\left(\frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0 z}\right)=b_0+b_1z+b_2z^{2}$$

نیز به ازای $|z|<1$ تحلیلی و تک ارز است. بنابراین :

$$g(0)=b_0=f(z_0)\qquad b_1=g'(0)=f'(z_0)(1-|z_0|^{2})$$

$$b_2=\frac{g''(0)}{2}=\frac{1}{2}\left(f''z_0(1-|z_0|^{2})^{2}-2f'(z_0)\bar{z}_0(1-|z_0|^{2})\right).$$

چون تابع $g(z)$ نرمالیزه نمی‌باشد لذا $g(z)$ در رده‌ی $\mathbb{S}$ قرار ندارد. با توجه به این‌که تابع

$$\frac{g(z)-g(0)}{g'(0)}=z+\frac{b_2}{b_1}z^{2}+\cdots$$

در$\mathbb{S}$ قرار می‌گیرد لذا در $\mathbb{K}$ نیز وجود دارد پس بنا به قضیه‌ی۶.۴.۱ :

$$\frac{1}{2}\Big|\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)}(1-|z_0|^{2})-2\bar{z}_0\Big|\leq 1$$

با قرار دادن $z_0=re^{i\theta}$ و ضرب طرفین در $\frac{2|z_0|}{1-|z_0|^{2}}$ داریم:

$$\Big|\frac{z_0f''(z_0)}{f'(z_0)}-\frac{2|z_0|^{2}}{1-|z_0|^{2}}\Big|\leq\frac{2|z_0|}{1-|z_0|^{2}}.$$

حال چون z_0 دلخواه است داریم:

$$\Big|\frac{zf''(z)}{f'(z)}-\frac{2r^{2}}{1-r^{2}}\Big|\leq\frac{2r}{1-r^{2}}$$

$$\Longrightarrow \frac{۲r^۲ - ۲r}{۱ - r^۲} \leq \frac{zf''(z)}{f'(z)} \leq \frac{۲r^۲ + ۲r}{۱ - r^۲}$$

$$\Longrightarrow \frac{۲r - ۲}{۱ - r^۲} \leq \frac{\partial}{\partial r}\log|f'(z)| \leq \frac{۲r + ۲}{۱ - r^۲}$$

حال از ۰ تا r انتگرال می‌گیریم :

$$-۲\log(۱ + r) \leq \log|f'(z)| \leq -۲\log(۱ - r)$$

لذا :

$$\frac{۱}{(۱ + r)^۲} \leq |f'(z)| \leq \frac{۱}{(۱ - r)^۲}.$$

□

قضیه ۱.۴.۹. *اگر* $f(z) \in \mathbb{K}$ *باشد آنگاه برای* $|z| = r < ۱$،

$$\frac{r}{۱ + r} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{۱ - r}$$

برهان. بنا بر قضیه‌ی ۱.۴.۸ برای $|z| = r < ۱$ داریم. $|f'(z)| \leq \dfrac{۱}{(۱ - r)^۲}$ نقطه‌ی ۰ را به z با یک خط مستقیم وصل کرده و روی این پاره خط انتگرال می‌گیریم:

$$|f(z)| = \int_۰^r |f'(t)|\mathrm{d}t \leq \int_۰^r \frac{۱}{(۱ - t)^۲}\mathrm{d}t = \frac{r}{۱ - r}.$$

نامساوی $\dfrac{۱}{۴} \leq \dfrac{r}{(۱ + r)}$ همواره برقرار است، حال اگر $|f(z)| \geq \frac{۱}{۴}$ لذا $|f(z)| \geq \dfrac{r}{(۱ + r)}$ و اگر $|f(z)| < \frac{۱}{۴}$ طبق قضیه‌ی پوششی مسیر c داخل دایره‌ی یکه از ۰ تا z موجود است که تصویر آن پاره خط مستقیم $c_۰$ از ۰ تا $f(z)$ را می‌پوشاند در این‌صورت:

$$|f(z)| = \int_{c_۰} |\mathrm{d}w| = \int_c |f'(s)||\mathrm{d}s|$$

از طرفی بنا بر قضیه‌ی قبل :

$$|f(z)| = \int_c |f'(s)||\mathrm{d}s| \geq \int_c |f'(s)|\mathrm{d}|s| \geq \frac{۱}{(۱ + t)^۲}\mathrm{d}t = \frac{r}{۱ + r}$$

لذا داریم :

$$\frac{r}{(۱ + r)} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(۱ - r)}.$$

□

۱.۵ رده‌ی $\mathbb{T}$

تعریف ۱.۵.۱. فرض کنیم T زیر رده‌ای از $\mathbb{S}$ شامل توابعی با ضرایب منفی باشد. گوییم یک تابع تک ارز و تحلیلی f در $\mathbb{T}$ قرار دارد هرگاه بتوانیم آن را به شکل $f(z) = z - \sum_{n=۲}^{\infty} |a_n| z^n$ بیان کنیم.

قضیه ۲.۵.۱. *تابع* $f(z)=z-\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|z^n$ *در* T *قرار دارد اگر و تنها اگر* $\sum_{n=2}^{\infty}n|a_n|\leq 1$
.

برهان. ابتدا نشان می‌دهیم اگر $f(z)\in\mathbb{T}$ آنگاه $\sum_{n=2}^{\infty}n|a_n|\leq 1$. چون $f(z)\in\mathbb{T}$ ، $f(z)$ در دیسک واحد Δ تک ارز است در این‌صورت $f'(z)=1-\sum_{n=2}^{\infty}n|a_n|z^{n-1}\neq 0$ بنابراین :

$$f'(r)=1-\sum_{n=2}^{\infty}n|a_n|r^{n-1}\neq 0 \qquad (z=r).$$

فرض کنیم $\sum_{n=2}^{\infty}n|a_n|>1$. در این‌صورت اندیس مثبت N وجود دارد به‌طوری‌که

$$\sum_{n=2}^{N}n|a_n|>1$$

بنابراین وجود دارد $0<r_0<1$ که $1-\sum_{n=2}^{N}n|a_n|r_0^{n-1}<0$ لذا :

$$f'(r)=1-\sum_{n=2}^{\infty}n|a_n|r_0^{n-1}\leq 1-\sum_{n=2}^{N}n|a_n|r_0^{n-1}<0$$

چون $f'(r)$ پیوسته است و $f'(0)=1$ پس وجود دارد $0<r_1<r_0$ به‌طوری‌که $f'(r_1)=0$ و این با فرض $f'(z)\neq 0$ در تناقض می‌باشد. لذا فرض خلف باطل و $\sum_{n=2}^{\infty}n|a_n|\leq 1$.
بر عکس، فرض کنیم $\sum_{n=2}^{\infty}n|a_n|\leq 1$ در این‌صورت :

$$Re\Big(f'(z)\Big)=Re\Big(1-\sum_{n=2}^{\infty}n|a_n|z^{n-1}\Big)>1-\sum_{n=2}^{\infty}n|a_n|\geq 0$$

پس برای $z_1,z_2\in\Delta$ و $z_1\neq z_2$ ،

$$Re\frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2}=\int_0^1 Ref'[z_1+t(z_2-z_1)]\mathrm{d}t$$

لذا $f(z)$ در Δ تک ارز است و $f(z)\in\mathbb{T}$. □

قضیه ۳.۵.۱. *اگر* $f(z)\in\mathbb{T}$ *باشد آنگاه:*

$$r-\frac{1}{2}r^2\leq|f(z)|\leq r+\frac{1}{2}r^2 \qquad (|z|=r) \tag{1.10}$$

برهان. بنا به قضیه‌ی ۲.۵.۱ داریم $2\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|\leq\sum_{n=2}^{\infty}n|a_n|\leq 1$. بنابراین :

$$|f(z)|\leq r+\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|r^n\leq r+r^2\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|\leq r+\frac{1}{2}r^2$$

و

$$|f(z)|\geq r-\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|r^n\geq r-r^2\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|\geq r-\frac{1}{2}r^2$$

لذا داریم:

$$r-\frac{1}{2}r^2\leq|f(z)|\leq r+\frac{1}{2}r^2 \qquad (|z|=r).$$

□

مثال ۴.۵.۱. بنا بر قضیه‌ی ۲.۵.۱، تابع $f(z) = z - \frac{۱}{۲}z^۲$ متعلق به رده‌ی $\mathbb{T}$ می‌باشد هرگاه $\sum_{n=۲}^{\infty} n|a_n| \leq ۱$، حال با جایگزینی ۲ $n =$ و $a_۲ = \frac{۱}{۲}$ به وضوح تابع $f(z)$ در شرط فوق صدق می‌کند. لذا کران بالای قضیه‌ی ۳.۵.۱ در مورد این تابع در $z = r$ و کران پایین $z = -r$ تعیین می‌شود.

قضیه ۵.۵.۱. *اگر $f(z) \in \mathbb{T}$ باشد، آنگاه :*

$$۱ - r \leq |f'(z)| \leq ۱ + r \qquad (|z| = r).$$

برهان. می‌دانیم :

$$|f'(z)| \leq ۱ + \sum_{n=۲}^{\infty} n|a_n|r^{n-۱} \leq ۱ + r\sum_{n=۲}^{\infty} n|a_n| \leq ۱ + r$$

و

$$|f'(z)| \geq ۱ - \sum_{n=۲}^{\infty} n|a_n|r^{n-۱} \geq ۱ - r\sum_{n=۲}^{\infty} n|a_n| \geq ۱ - r$$

لذا داریم :

$$۱ - r \leq |f'(z)| \leq ۱ + r \qquad (|z| = r).$$

□

مثال ۶.۵.۱. برای تابع $f(z) = z - \frac{۱}{۲}z^۲$ کران بالای قضیه‌ی ۵.۵.۱ در $z = r$ و کران پایین در $z = -r$ تعیین می‌شود.

قضیه ۷.۵.۱. *فرض کنیم تابع $f_m(z) = z - \sum_{j=۲}^{\infty} |a_{j,m}|z^j$، $(m = ۱, ۲, ۳, \cdots, n)$ متعلق به رده‌ی $\mathbb{T}$ باشند. در این‌صورت تابع $h(z)$ تعریف شده به صورت $h(z) = \sum_{m=۱}^{n} c_m f_m(z)$، $(c_m \geq ۰)$ که در آن $\sum_{m=۱}^{n} c_m = ۱$ نیز در رده $\mathbb{T}$ قرار دارد.*

برهان. طبق تعریف $h(z)$ داریم:

$$h(z) = z - \sum_{j=۲}^{\infty}(\sum_{m=۱}^{n} c_m|a_{j,m}|)z^j$$

چون برای هر $f_m(z), m = ۱, ۲, ۳, \cdots, n$ در T قرار دارد، لذا داریم $\sum_{j=۲}^{\infty} j|a_{j,m}| \leq ۱$ که $m = ۱, ۲, \cdots, n$ بنابراین می‌توانیم ببینیم:

$$\sum_{j=۲}^{\infty} j(\sum_{m=۱}^{n} c_m|a_{j,m}|) = \sum_{m=۱}^{n} c_m(\sum_{j=۲}^{\infty} j|a_{j,m}|) \leq \sum_{m=۱}^{n} c_m = ۱$$

حال با توجه به قضیه ۲.۵.۱ نتیجه می‌شود که $h(z)$ در $\mathbb{T}$ قرار دارد. □

قضیه ۸.۵.۱. ***(توابع اکسترمال).*** *فرض کنیم*

$$f_n(z) = z - \frac{۱}{n}z^n, f_۱(z) = z \qquad (n = ۲, ۳, \cdots)$$

در این‌صورت $f(z) \in T$ اگر و تنها اگر بتوانیم آن‌را به شکل $f(z) = \sum_{n=۱}^{\infty} \lambda_n f_n(z)$ بیان کنیم به‌طوری‌که $\lambda_n \geq ۰$، $\sum_{n=۱}^{\infty} \lambda_n = ۱$.

برهان. فرض کنیم:

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n f_n(z) = \lambda_1 f_1(z) + \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n f_n(z) \\ &= \lambda_1 z + \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n (z - \frac{1}{n} z^n) \\ &= \lambda_1 z + \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n z - \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n \frac{1}{n} z^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n z - \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n \frac{1}{n} z^n \end{aligned}$$

در این‌صورت:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n \frac{1}{n} n = \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n = 1 - \lambda_1 \leq 1$$

لذا بنابر قضیه‌ی ۲.۵.۱، $f(z) \in \mathbb{T}$.

بر عکس، فرض کنیم $f(z) \in \mathbb{T}$، چون $(n = 2, 3, \cdots)$ $|a_n| \leq \frac{1}{n}$ قرار می‌دهیم:
$\lambda_1 = 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n$ و $\lambda_n = n|a_n|$، لذا:

$$\begin{aligned} f(z) &= z - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| z^n = z - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \lambda_n z^n \\ &= z - \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n [z - f_n(z)] = z - \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n z + \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n f_n(z) \\ &= \Big(1 - \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n\Big) z + \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n f_n(z) \\ &= \lambda_1 f_1(z) + \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n f_n(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n f_n(z). \end{aligned}$$

□

۶.۱ رده‌ی $\mathbb{T}^*$، $C(\alpha)$

تعریف ۱.۶.۱. تابع $f(z) \in \mathbb{T}$ ستاره‌گون از مرتبه‌ی α $(0 \leq \alpha < 1)$ نامیده می‌شود هرگاه:

$$Re\left\{\frac{zf'}{f}\right\} > \alpha \qquad (|z| < 1).$$

این زیر رده‌ی $\mathbb{T}$ را با $\mathbb{T}^*(\alpha)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲.۶.۱. تابع $f(z) \in \mathbb{T}$ محدب از مرتبه‌ی α $(0 \leq \alpha < 1)$ نامیده می‌شود هرگاه

$$Re\left\{1 + \frac{zf''}{f'}\right\} > \alpha \qquad (|z| < 1).$$

این زیر رده‌ی $\mathbb{T}$ را با $C(\alpha)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۳.۶.۱. *یک تابع* $f(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| z^n$ *در* $\mathbb{T}^*(\alpha)$ *قرار دارد اگر و تنها اگر :*

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n-\alpha)|a_n| \leq 1-\alpha$$

برهان. فرض کنیم $f(z) \in \mathbb{T}^*(\alpha)$ لذا :

$$Re\frac{zf'}{f} = Re\left\{\frac{z - \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n|z^n}{z - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n|z^n}\right\} > \alpha \qquad (|z|<1) \tag{11.1}$$

هرگاه $z \to 1$ (که z یک مقدار حقیقی) داریم:

$$1 - \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \geq \alpha(1 - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n|)$$

بنابراین:

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n-\alpha)|a_n| \leq 1-\alpha$$

حال اگر

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n-\alpha)|a_n| \leq 1-\alpha$$

کافی است نشان دهیم $\frac{zf'}{f}$ در یک دایره به شعاع $1-\alpha$ و به مرکز ۱ قرار دارد. داریم:

$$|\frac{zf'}{f} - 1| = |\frac{zf'-f}{f}| = |\frac{\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n}{z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n}| \leq \frac{\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)|a_n||z|^{n-1}}{1 - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n||z|^{n-1}} \leq \frac{\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)|a_n|}{1 - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n|}$$

عبارت فوق دارای کران بالای $1-\alpha$ می‌باشد اگر

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n-1)|a_n| \leq (1-\alpha)(1 - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n|).$$

که رابطه‌ی فوق معادل است با $\sum_{n=2}^{\infty}(n-\alpha)|a_n| \leq 1-\alpha$ و این رابطه نیز بنا به فرض برقرار است. □

نتیجه ۴.۶.۱. *تابع* $f(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| z^n$ *در* $C(\alpha)$ *قرار دارد اگر و تنها اگر :*

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-\alpha)|a_n| \leq 1-\alpha$$

برهان. فرض کنیم $f(z) \in C(\alpha)$. برای $(|z|<1)$ می‌دانیم:

$$Re\left\{1 + \frac{zf''}{f'}\right\} = Re\left\{1 - \frac{\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)|a_n|z^{n-1}}{1 - \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n|z^{n-1}}\right\} = Re\left\{\frac{1 - \sum_{n=2}^{\infty} n^2|a_n|z^{n-1}}{1 - \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n|z^{n-1}}\right\} > \alpha \tag{12.1}$$

در رابطه۱۲.۱ هرگاه $z \to 1$ (که z یک مقدار حقیقی)داریم:

$$1 - \sum_{n=2}^{\infty} n^2|a_n| \geq \alpha(1 - \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n|)$$

بنابراین :

$$\sum_{n=۲}^{\infty} n(n-\alpha)|a_n| \leq ۱-\alpha$$

حال اگر

$$\sum_{n=۲}^{\infty} n(n-\alpha)|a_n| \leq ۱-\alpha$$

کافی است نشان دهیم $۱+\frac{zf''}{f'}$ در یک دایره به شعاع $۱-\alpha$ و به مرکز ۱ قرار دارد. لذا :

$$|۱+\frac{zf''}{f'}-۱| = |\frac{zf''}{f'}| = |\frac{\sum_{n=۲}^{\infty} n(n-۱)a_n z^{n-۱}}{۱-\sum_{n=۲}^{\infty} na_n z^{n-۱}}|$$
$$\leq \frac{\sum_{n=۲}^{\infty} n(n-۱)|a_n||z|^{n-۱}}{۱-\sum_{n=۲}^{\infty} n|a_n||z|^{n-۱}} \leq \frac{\sum_{n=۲}^{\infty} n(n-۱)|a_n|}{۱-\sum_{n=۲}^{\infty} n|a_n|}$$

عبارت فوق دارای کران بالای $۱-\alpha$ می‌باشد اگر

$$\sum_{n=۲}^{\infty} n(n-۱)|a_n| \leq (۱-\alpha)(۱-\sum_{n=۲}^{\infty} n|a_n|).$$

که رابطه‌ی فوق معادل است با $\sum_{n=۲}^{\infty} n(n-\alpha)|a_n| \leq ۱-\alpha$ و این رابطه نیز بنا به فرض برقرار است. □

قضیه ۵.۶.۱. *اگر* $f(z) \in \mathbb{T}^*(\alpha)$ *در این‌صورت :*

$$r-\frac{۱-\alpha}{۲-\alpha}r^۲ \leq |f(z)| \leq r+\frac{۱-\alpha}{۲-\alpha}r^۲ \qquad (|z|=r) \qquad (۱۳.۱)$$

برهان. بنا به قضیه ۳.۶.۱ می‌دانیم :

$$(۲-\alpha)\sum_{n=۲}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=۲}^{\infty} (n-\alpha)|a_n| \leq ۱-\alpha$$

بنابراین

$$|f(z)| \leq r+\sum_{n=۲}^{\infty} |a_n|r^n \leq r+r^۲\sum_{n=۲}^{\infty} |a_n| \leq r+\frac{۱-\alpha}{۲-\alpha}r^۲$$

و به‌طور مشابه :

$$|f(z)| \geq r-\sum_{n=۲}^{\infty} |a_n|r^n \geq r-r^۲\sum_{n=۲}^{\infty} |a_n| \geq r-\frac{۱-\alpha}{۲-\alpha}r^۲$$

لذا نتیجه می‌شود :

$$r-\frac{۱-\alpha}{۲-\alpha}r^۲ \leq |f(z)| \leq r+\frac{۱-\alpha}{۲-\alpha}r^۲ \qquad (|z|=r).$$

□

مثال ۶.۶.۱. بنا به قضیه‌ی ۳.۶.۱ تابع $f(z)=z-\frac{(۱-\alpha)}{(۲-\alpha)}z^۲$ متعلق به رده‌ی $\mathbb{T}^*$ است هرگاه

$$\sum_{n=۲}^{\infty} (n-\alpha)|a_n| \leq ۱-\alpha$$

حال با جایگزینی $n = ۲$ و $a_۲ = \frac{(۱-\alpha)}{(۲-\alpha)}$ به وضوح تابع $f(z)$ در شرایط فوق صدق می‌کند؛ لذا کران بالای قضیه‌ی ۱.۶.۵ در مورد این تابع در $z = r$ و کران پایین در $z = -r$ تعیین می‌شود.

قضیه ۱.۶.۷. *اگر* $f(z) \in \mathbb{T}^*(\alpha)$ *در این‌صورت:*

$$۱ - \frac{۲(۱-\alpha)}{۲-\alpha} r \leq |f'(z)| \leq ۱ + \frac{۲(۱-\alpha)}{۲-\alpha} r \qquad (|z| = r)$$

برهان. داریم :

$$|f'(z)| \leq ۱ + \sum_{n=۲}^{\infty} n|a_n||z|^{n-۱} \leq ۱ + r\sum_{n=۲}^{\infty} n|a_n| \tag{۱.۱۴}$$

و همچنین طبق قضیه‌ی ۱.۶.۳ می‌دانیم :

$$\sum_{n=۲}^{\infty} n|a_n| \leq ۱ - \alpha + \alpha\sum_{n=۲}^{\infty} |a_n| \leq ۱ - \alpha + \frac{\alpha(۱-\alpha)}{۲-\alpha} = \frac{۲(۱-\alpha)}{۲-\alpha} \tag{۱.۱۵}$$

با جایگزینی عبارت (۱.۱۵) در ۱.۱۴ طرف راست حکم نتیجه می‌شود ؛ از طرف دیگر:

$$|f'(z)| \geq ۱ - \sum_{n=۲}^{\infty} n|a_n||z|^{n-۱} \geq ۱ - r\sum_{n=۲}^{\infty} n|a_n| \geq ۱ - \frac{۲(۱-\alpha)}{۲-\alpha} r$$

□

مثال ۱.۶.۸. برای تابع $f(z) = z - \frac{(۱-\alpha)}{(۲-\alpha)} z^۲$ کران بالای قضیه‌ی ۱.۶.۷ در $z = r$ و کران پایین در $z = -r$ تعیین می‌شود.

نتیجه ۱.۶.۹. *اگر* $f(z) \in C(\alpha)$ *در این‌صورت :*

$$r - \frac{۱-\alpha}{۲(۲-\alpha)} r^۲ \leq |f(z)| \leq r + \frac{۱-\alpha}{۲(۲-\alpha)} r^۲ \qquad (|z| = r)$$

برهان. بنا به نتیجه ۱.۶.۴ داریم:

$$۲(۲-\alpha)\sum_{n=۲}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=۲}^{\infty} n(n-\alpha)|a_n| \leq ۱ - \alpha$$

بنابراین

$$|f(z)| \leq r + \sum_{n=۲}^{\infty} |a_n| r^n \leq r + r^۲\sum_{n=۲}^{\infty} |a_n| \leq r + \frac{۱-\alpha}{۲(۲-\alpha)} r^۲$$

و به‌طور مشابه :

$$|f(z)| \geq r - \sum_{n=۲}^{\infty} |a_n| r^n \geq r - r^۲\sum_{n=۲}^{\infty} |a_n| \geq r - \frac{۱-\alpha}{۲(۲-\alpha)} r^۲$$

لذا نتیجه می‌شود :

$$r - \frac{۱-\alpha}{۲(۲-\alpha)} r^۲ \leq |f(z)| \leq r + \frac{۱-\alpha}{۲(۲-\alpha)} r^۲ \qquad (|z| = r)$$

□

نتیجه ۱۰.۶.۱. *اگر $f(z) \in C(\alpha)$ در اینصورت:*

$$1-\frac{1-\alpha}{2-\alpha}r \leq |f'(z)| \leq 1+\frac{1-\alpha}{2-\alpha}r \qquad (|z|=r)$$

برهان. داریم :

$$|f'(z)| \leq 1+\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n||z|^{n-1} \leq 1+r\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n|$$

و همچنین بنابر نتیجه ۴.۶.۱ میدانیم :

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^2|a_n| \leq 1-\alpha+2\alpha\sum_{n=2}^{\infty}|a_n| \leq 1-\alpha+\frac{\alpha(1-\alpha)}{2-\alpha}=\frac{2(1-\alpha)}{2-\alpha} \qquad (16.1)$$

یا

$$\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \leq \frac{1-\alpha}{2-\alpha} \qquad (17.1)$$

با جایگزینی عبارت۱۶.۱ در۱۷.۱ طرف راست حکم نتیجه میشود ؛از طرف دیگر:

$$|f'(z)| \geq 1-\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n||z|^{n-1} \geq 1-r\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \geq 1-\frac{1-\alpha}{2-\alpha}r$$

□

قضیه ۱۱.۶.۱. ***(توابع اکسترمال)*** *فرض کنیم*

$$f_n(z)=z-\frac{(1-\alpha)}{(n-\alpha)}z^n, f_1(z)=z \qquad (n=2,3,\cdots)$$

در اینصورت $f(z) \in \mathbb{T}^*(\alpha)$ اگر و تنها اگر بتوانیم آنرا به شکل $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n f_n(z)$ بیان کنیم بهطوریکه $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n=1, \lambda_n \geq 0$

برهان. فرض کنیم:

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n f_n(z)=z-\sum_{n=2}^{\infty}\lambda_n\frac{(1-\alpha)}{(n-\alpha)}z^n$$

در اینصورت:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\lambda_n\frac{1-\alpha}{n-\alpha}(\frac{n-\alpha}{1-\alpha})=\sum_{n=2}^{\infty}\lambda_n=1-\lambda_1 \leq 1$$

لذا $f(z) \in \mathbb{T}^*(\alpha)$.

بر عکس؛ فرض کنیم $f(z) \in \mathbb{T}^*(\alpha)$. چون

$$|a_n| \leq \frac{1-\alpha}{n-\alpha} \qquad (n=2,3,\cdots)$$

قرار میدهیم:

$$\lambda_n=\frac{(n-\alpha)|a_n|}{1-\alpha}, \lambda_1=1-\sum_{n=2}^{\infty}\lambda_n \qquad (n=2,3,\cdots)$$

در اینصورت $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n f_n(z)$ و برهان کامل میشود. □

قضیه ۱۲.۶.۱. *اگر* $f(z) \in C(\alpha)$ *آنگاه* $f(z) \in T^*(\frac{۲}{۳-\alpha})$

برهان. بنا به قضیه‌ی ۳.۶.۱ و نتیجه ۴.۶.۱باید ثابت کنیم:

$$\sum_{n=۲}^{\infty} \frac{n(n-\alpha)}{۱-\alpha}|a_n| \leq ۱ \Rightarrow \sum_{n=۲}^{\infty} \frac{n-\dfrac{۲}{۳-\alpha}}{۱-\frac{۲}{۳-\alpha}}|a_n| \leq ۱$$

کافی است نشان دهیم:

$$\frac{n(n-\alpha)}{۱-\alpha} \geq \frac{n-\frac{۲}{۳-\alpha}}{۱-\frac{۲}{۳-\alpha}} = \frac{n(۳-\alpha)-۲}{۱-\alpha} \qquad (n=۲,۳,\cdots)$$

و عبارت فوق معادل با اینست که $(n=۲,۳,\cdots), n^۲-۳n+۲ \geq ۰$. $\square$

فصل ۲

توابع همساز ستاره‌گون

۱.۲ توابع همساز ستاره‌گون از مرتبه α

تابع پیوسته $f = u + iv$ در میدان مختلط L یک تابع همساز مختلط مقدار است هرگاه u و v در L همساز حقیقی مقدار باشند. در هر دامنه همبند ساده $D \subset L$ می‌توان f را به‌صورت $f = h + \bar{g}$ نوشت، که h و g در D تحلیلی هستند. فرض کنیم u و v توابع همساز حقیقی باشند.
یک شرط لازم و کافی برای موضعا تک ارز و حافظ جهت بودن تابع همساز f در D این است که رابطه $|h'(z)| > |g'(z)|$ برقرار باشد.

تعریف ۱.۱.۲. رده‌ی توابع $f = h + \bar{g}$ که در دیسک واحد $\Delta = \{z : |z| < ۱\}$ همساز تک ارز و حافظ جهت هستند، به‌طوری‌که $h(۰) = f(۰) = f_z(۰) - ۱ = ۰$ را با $\mathbb{S}_H$ نمایش می‌دهیم.

$$h(z) = z + \sum_{n=۲}^{\infty} a_n z^n, \quad g(z) = \sum_{n=۱}^{\infty} b_n z^n \tag{۱.۲}$$

در صورتی‌که بخش مزدوج تحلیلی اعضای $\mathbb{S}_H$ صفر باشد، این رده به رده توابع تک ارز تحلیلی نرمال شده تبدیل می‌شود. در سال ۱۹۸۴، کلونی [۱]، شیل اسمال [۲] رده‌ی $\mathbb{S}_H$ را به همراه زیررده‌های آن به‌وجود آوردند. پس از آن، چندین مقاله در رابطه با $\mathbb{S}_H$ و زیررده‌های آن نوشته شد. در این فصل، به بررسی چند زیررده از $\mathbb{S}_H$ می‌پردازیم و شرایط تک ارزی، نقاط فرین و کران‌های انحراف توابع در این زیررده‌ها را مشخص می‌کنیم.

تعریف ۲.۱.۲. برای $۰ \leq \alpha < ۱$، زیررده‌ای از $\mathbb{S}_H$ که شامل توابع همساز ستاره‌گون از مرتبه α است را با $\mathbb{S}_H^*(\alpha)$ نمایش می‌دهیم. تابعی مانند f و به فرم (۱.۲) را همساز ستاره‌گون از مرتبه α که $۰ \leq \alpha < ۱$ و $|z| = r < ۱$ می‌نامیم، اگر

[۱] Clunie

[۲] Sheil-Small

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(arg f(re^{i\theta})) \geq \alpha, \quad |z| = r < ۱ \tag{۲.۲}$$

تعریف ۳.۱.۲. $\mathbb{T}_H(\alpha)$ زیررده‌ای از $\mathbb{S}_H^*(\alpha)$ است که توابع h و g در $f = h + \bar{g}$ به فرم زیر هستند:

$$h(z) = z - \sum_{n=۲}^{\infty} |a_n| z^n, \quad g(z) = \sum_{n=۱}^{\infty} |b_n| z^n. \tag{۳.۲}$$

تعریف ۴.۱.۲. زیررده‌ای از $\mathbb{S}_H$ که در آن $f_{\bar{z}}(۰) = ۰$ است را با $\mathbb{S}_H^{\circ}$ نمایش می‌دهیم.

در بخش نخست، به بررسی زیررده‌های مختلف $\mathbb{S}_H^{\circ}$ می‌پردازیم. فرض می‌کنیم $\mathbb{S}_H^{*\circ}$ و $\mathbb{K}_H^{*\circ}$ زیرده‌هایی از $\mathbb{S}_H^{\circ}$ باشند که شامل توابعی مانند f هستند که Δ را به روی میدان‌های ستاره‌گون و محدب می‌نگارند. مضاف بر این، زیررده‌های $\mathbb{S}_H^{*\circ}$ و $\mathbb{K}_H^{\circ}$ را با $\mathbb{T}_H^{*\circ}$ و $\mathbb{TK}_H^{\circ}$ نمایش می‌دهیم. که ضرایب $f = h + \bar{g}$ به‌صورت زیر هستند:

$$h(z) = z - \sum_{n=۲}^{\infty} a_n z^n, \quad a_n \geq ۰; \quad g(z) = -\sum_{n=۲}^{\infty} b_n z^n, \quad b_n \geq ۰. \tag{۴.۲}$$

در این بخش مقایسه‌ای میان توابع همساز $f = h + \bar{g}$ که ضرایب آن‌ها به فرم (۴.۲) هستند و همتای تحلیلی آن‌ها خواهیم داشت. در ادامه $f = h + \bar{g}$ را در نظر می‌گیریم که h و g به فرم (۴.۲) یا (۱.۲) است.

۱.۱.۲ زیررده‌های $\mathbb{S}_H^{*\circ}$

برای $f = h + \bar{g}$ به فرم (۱.۲)، در [۱۱] نشان داده شده است که اگر $f = h + \bar{g} \in \mathbb{S}_H^{*\circ}$ باشد، آنگاه $|a_n| \leq \frac{(n+۱)(۲n+۱)}{۶}$ و $|b_n| \leq \frac{(n-۱)(۲n-۱)}{۶}$ است. در [۳] نیز نشان داده شده است که اگر $f = h + \bar{g} \in \mathbb{K}_H^{\circ}$ باشد، آنگاه $|a_n| \leq \frac{(n+۱)}{۲}$ و $|b_n| \leq \frac{(n-۱)}{۲}$ خواهد بود. تساوی در همه نتایج برقرار است. بنابراین شرایط ضریبی لازم را برای این رده‌ها داریم. حال شرایط کافی را ارایه می‌دهیم و نشان خواهیم داد که برای توابع به فرم (۴.۲) نیز این شرایط لازم هستند.

قضیه ۵.۱.۲. *اگر ضرایب تابع $f \in \mathbb{S}_H$ در شرط $\sum_{n=۲}^{\infty} n(|a_n| + |b_n|) \leq ۱$ صدق کند، آنگاه $f \in \mathbb{S}_H^{*\circ}$ است.*

برهان. ابتدا توجه کنید که

$$|h'(z)| \geq ۱ - \sum_{n=۱}^{\infty} n|a_n| r^{n-۱} > \sum_{n=۲}^{\infty} n|b_n| r^{n-۱} \geq |g'(z)|,$$

بنابراین f موضعا تک ارز و حافظ جهت است. کافیست نشان دهیم که $0 < r < 1$ و $0 \leq \theta < 2\pi$ و $\frac{\partial}{\partial\theta}(arg f(re^{i\theta})) > 0$ است. داریم:

$$f(re^{i\theta}) = re^{i\theta} + \sum_{n=2}^{\infty}(a_n e^{in\theta} + \bar{b}_n e^{-in\theta})r^n,$$

و

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\theta}(arg f(re^{i\theta})) &= Im\Big(\frac{\partial}{\partial\theta}log f(re^{i\theta})\Big)\\ &= Re\Big\{\frac{1+\sum_{n=2}^{\infty} n(a_n e^{i(n-1)\theta} - \bar{b}_n e^{-i(n+1)\theta})r^{n-1}}{1+\sum_{n=2}^{\infty} n(a_n e^{i(n-1)\theta} + \bar{b}_n e^{-i(n+1)\theta})r^{n-1}}\Big\}\\ &= Re\frac{1+A(z)}{1+B(z)}\end{aligned}$$

با قرار دادن

$$\frac{1+A(z)}{1+B(z)} = \frac{1+w(z)}{1-w(z)}$$

خواهیم داشت اگر $|w(z)| \leq r$ باشد، آنگاه $\frac{\partial}{\partial\theta}(arg f(re^{i\theta})) > 0$ خواهد بود، ولی

$$\begin{aligned}w(z) &= \frac{A-B}{2+A+B}\\ &= Re\frac{\sum_{n=2}^{\infty}\Big[(n-1)(a_n e^{i(n-1)\theta} - (n+1)\bar{b}_n e^{-i(n+1)\theta}\Big]r^{n-1}}{2+\sum_{n=2}^{\infty}\Big[(n+1)(a_n e^{i(n-1)\theta} - (n-1)\bar{b}_n e^{-i(n+1)\theta}\Big]r^{n-1}}\end{aligned}$$

بنابراین

$$|w(z)| \leq \frac{\sum_{n=2}^{\infty}\Big[(n-1)|a_n| + (n+1)|b_n|\Big]r}{2-\sum_{n=2}^{\infty}\Big[(n+1)|a_n| + (n-1)|b_n|\Big]r}.$$

عبارت آخر از بالا توسط r کراندار است اگروتنهااگر $\sum_{n=2}^{\infty} n(|a_n|+|b_n|) \leq 1$ باشد. □

نتیجه ۲.۱.۶. *اگر ضرایب تابع $f \in \mathbb{S}_H$ در شرط $\sum_{n=2}^{\infty} n^2(|a_n|+|b_n|) \leq 1$ صدق کند آنگاه $f \in \mathbb{K}_H^{\circ}$ است.*

برهان. با استفاده از قضیه ۱.۴.۵ (الکساندر) و قضیه ۲.۱.۵ نتیجه حاصل می‌شود. □

برعکس حالت تحلیلی، یک تابع همساز ستاره‌گون (یا حتی همساز محدب) زمانی‌که $|z| = \mathbb{R}$، برای $|z| < \mathbb{R}$ لازم نیست تک ارز باشد. به هر حال، کران‌های ضریبی در قضیه ۲.۱.۵ شرطی کافی برای تک ارز بودن فراهم می‌کند.

نتیجه ۷.۱.۲. *تحت شرایط قضیه ۵.۱.۲، تابع f در دیسک واحد Δ همساز تک ارز نیز است.*

برهان. اگر $g(z) \equiv ۰$ باشد، آنگاه $f(z)$ تحلیلی است و تک ارزی f از ستاره‌گون بودن آن نتیجه می‌شود. اگر $g(z) \not\equiv ۰$ و $z_۱ \neq z_۲$ باشد، آنگاه

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(z_۱)-f(z_۲)}{h(z_۱)-h(z_۲)}\right| &\geq ۱-\left|\frac{g(z_۱)-g(z_۲)}{h(z_۱)-h(z_۲)}\right| \\ &= ۱-\left|\frac{\sum_{n=۲}^{\infty} b_n(z_۱^n-z_۲^n)}{(z_۱-z_۲)+\sum_{n=۲}^{\infty} a_n(z_۱^n-z_۲^n)}\right| \\ &> ۱-\frac{\sum_{n=۲}^{\infty} n|b_n|}{۱-\sum_{n=۲}^{\infty} n|a_n|} \geq ۰.\end{aligned}$$

که تک ارزی را اثبات می‌کند. □

ملاحظه ۸.۱.۲. *با شرطی که در قضیه ۵.۱.۲ برای ضرایب قرار داده شده، می‌توان نتیجه‌گیری کرد که توابعی که حاصل دوران ضرایب تابع f هستند نیز همساز ستاره‌گون و تک ارز هستند. قضیه بعد ثابت می‌کند که کران‌هایی که برای ضرایب در قضیه قبل بدست آمده‌اند، قابل بهبود نیستند.*

قضیه ۹.۱.۲. *فرض کنیم ضرایب تابع f در (۴.۲) صدق کند. در این‌صورت، $f \in \mathbb{T}_H^{*\circ}$ است اگروتنها اگر $\sum_{n=۲}^{\infty} n(a_n+b_n) \leq ۱$ باشد.*

برهان. از دید قضیه ۵.۱.۲، فقط نیاز است که نشان دهیم اگر شرط قضیه برقرار نباشد، آنگاه $f \notin \mathbb{T}_H^{*\circ}$. برای این‌کار، نشان خواهیم داد که f حتی تک ارز نیست. با انتخاب $z=r>۰$ داریم

$$f'(r) = ۱-\sum_{n=۲}^{\infty} n(a_n+b_n)r^{n-۱}$$

و $f(r)=r-\sum_{n=۲}^{\infty}(a_n+b_n)r^n$. چون $f'(۰)=۱$ و $f'(۱)<۰$ است، باید یک $r_۰$-ای موجود باشد که $r_۰<۱$ به‌طوری‌که $f'(r_۰)=۰$ است. بنابراین $r_۰$ یک ماکزیمم موضعی $f(r)$ است و $f(r)$ روی بازه حقیقی $(۰,۱)$ یک به یک نیست. □

نتیجه ۱۰.۱.۲. *برای f به فرم (۴.۲)، $f \in \mathbb{T}_H^{*\circ}$ است اگروتنها اگر f همساز تک ارز باشد.*

نتیجه ۱۱.۱.۲. *اگر $f \in \mathbb{T}_H^{*\circ}$ باشد، آنگاه $(|z|=r)$ $\frac{r-r^۲}{۲} \leq |f(z)| \leq \frac{r+r^۲}{۲}$. تساوی نیز برای $\frac{z-z^۲}{۲}$ و $\frac{z-\bar{z}^۲}{۲}$ برقرار است.*

برهان. با توجه به این‌که $۲\sum_{n=۲}^{\infty}(a_n+b_n) \leq \sum_{n=۲}^{\infty} n(a_n+b_n) \leq ۱$ است، داریم:

$$|f(z)| \leq r+\sum_{n=۲}^{\infty}(a_n+b_n)r^n \leq r+r^۲\sum_{n=۲}^{\infty}(a_n+b_n) \leq \frac{r+r^۲}{۲}$$

و

$$|f(z)| \geq r - \sum_{n=2}^{\infty}(a_n+b_n)r^n \geq r - r^2\sum_{n=2}^{\infty}(a_n+b_n) \geq \frac{r-r^2}{2}$$

□

نتیجه ۱۲.۱.۲. *اگر $f \in \mathbb{T}_H^{*\circ}$ باشد، آنگاه $\{w : |w| < \frac{1}{2}\} \subset f(\Delta)$ است.*

برهان. این نتیجه پوششی، از نامساوی سمت چپ در نتیجه ۱۱.۱.۲ بدست می‌آید.

□

ملاحظه ۱۳.۱.۲. *اگر بخش مزدوج تحلیلی f در قضایای ۵.۱.۲ و ۹.۱.۲ صفر باشد، نتایج به شرایط ضریبی کافی برای ستاره‌گون بودن توابع تحلیلی تبدیل می‌شود. به هر حال، یک تفاوت جالب وجود دارد. همچنین در حالت تحلیلی داریم:*

$$\left|\frac{\partial}{\partial\theta} arg f(re^{i\theta}) - 1\right| = \left|\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right| < 1, \quad z \in \Delta,$$

بنابراین مقادیری از $\frac{zf'}{z}$ در زیر مجموعه‌ای از نیم صفحه راست شامل دیسک به مرکز و شعاع ۱ قرار می‌گیرد. برای حالت همساز f به فرم (۱.۲)

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial\theta} arg f(re^{i\theta}) - 1\\ &\quad = \frac{\sum_{n=2}^{\infty}\left[(n-1)a_n e^{i(n-1)\theta} - (n+1)\bar{b}_n e^{-i(n+1)\theta}\right] r^{n-1}}{1+\sum_{n=2}^{\infty}\left(a_n e^{i(n-1)\theta} + \bar{b}_n e^{-i(n+1)\theta}\right) r^{n-1}}\end{aligned}$$

که $f(z) = \frac{z-\bar{z}^2}{2}$ است. بدست می‌آوریم

$$\left|\frac{\partial}{\partial\theta} arg f(re^{i\theta}) - 1\right| = \left|\frac{\frac{3r}{2}}{\frac{(1-e^{-3i\theta}r)}{2}}\right|.$$

با انتخاب $\theta = 0$ و قرار دادن $r \to 1$، می‌بینیم که عبارت آخر می‌تواند به اندازه ۳ بزرگ باشد.

قضیه ۱۴.۱.۲. *برای f به فرم (۴.۲)، $f \in \mathbb{TK}_H^{\circ}$ است اگروتنها اگر $\sum_{n=2}^{\infty} n^2(a_n+b_n) \leq 1$ باشد.*

برهان. از دید نتیجه ۶.۱.۲ فقط باید نشان دهیم که اگر نامساوی ضریبی برقرار نباشد، $f \notin \mathbb{TK}_H^{\circ}$. شرطی لازم و کافی برای این‌که f، $|z| = r$ را بر روی یک میدان محدب بنگارد این است که

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial\theta}\left(arg\left\{\frac{\partial}{\partial\theta} f(re^{i\theta})\right\}\right)\\ &\quad = Re\left\{\frac{1-\sum_{n=2}^{\infty} n^2[a_n e^{i(n-1)\theta} + b_n e^{-i(n+1)\theta}] r^{n-1}}{1-\sum_{n=2}^{\infty} n[a_n e^{i(n-1)\theta} - b_n e^{-i(n+1)\theta}] r^{n-1}}\right\} > 0.\end{aligned}$$

اگر قرار دهیم $\theta = \circ$، عبارت آخر برای $\sum_{n=۲}^{\infty} n^۲(a_n+b_n) > ۱$ و r به اندازه کافی نزدیک به ۱ منفی است. بنابراین $f \notin \mathbb{TK}_H^\circ$ و برهان کامل است.

□

نتیجه ۱۵.۱.۲. *اگر $f \in \mathbb{T}_H^{*\circ}$ باشد، آنگاه f، $|z| < \frac{۱}{۲}$ را به روی یک میدان محدب می‌نگارد. حالت تساوی نیز برای توابع فرین $\frac{z-z^۲}{۲}$ و $\frac{z-\bar{z}^۲}{۲}$ برقرار است.*

برهان. کافیست نشان دهیم که $۲f(\frac{z}{۲}) \in \mathbb{TK}_H^\circ$ است. داریم:

$$۲f(\frac{z}{۲}) = z - \sum_{n=۲}^{\infty} \frac{a_n}{۲^{n-۱}} z^n - \sum_{n=۲}^{\infty} \frac{b_n}{۲^{n-۱}} \bar{z}^n$$

و

$$\sum_{n=۲}^{\infty} n^۲\Big(\frac{a_n}{۲^{n-۱}} + \frac{b_n}{۲^{n-۱}}\Big) \leq \sum_{n=۲}^{\infty} n(a_n+b_n) \leq ۱.$$

□

۲.۱.۲ نقاط فرین

برای هر خانواده فشرده، ماکزیمم یا مینیمم بخش حقیقی هر تابعک پیوسته خطی، در یکی از نقاط فرین پوسته محدب اتفاق می‌افتد. چون هر دوی $\mathbb{T}_H^{*\circ}$ و $\mathbb{TK}_H^\circ$ خانواده‌های محدب هستند، از نامساوی‌های ضریبی لازم و کافی قضایای ۹.۱.۲ و ۱۴.۱.۲ استفاده می‌کنیم و نقاط فرین آن‌ها را بدست می‌آوریم.

قضیه ۱۶.۱.۲. *الف) قرار دهید $h_n(z) = z - \frac{z^n}{n}$، $h_۱(z) = z$ که $(n = ۲, ۳, \ldots)$، و*

$$g_n(z) = z - \bar{z}_n$$

، دراین‌صورت $f \in \mathbb{T}_H^{*\circ}$ است اگروتنها اگر بتوان آن‌را به فرم $f(z) = \sum_{n=۱}^{\infty}(\lambda_n h_n + \gamma_n g_n)$ که $\lambda_۱ = ۱ - \sum_{n=۲}^{\infty}(\lambda_n+\gamma_n) \geq \circ$ و $\gamma_۱ = \circ$ است، نوشت. به‌خصوص، $\{h_n\}$ و $\{g_n\}$ نقاط فرین $\mathbb{T}_H^{*\circ}$ هستند.

ب) قرار دهید $h_۱(z) = z$ و $h_n(z) = z - \frac{z^n}{n^۲}$ و $g_n(z) = z - \frac{\bar{z}^n}{n^۲}$ که $(n = ۲, ۳, \ldots)$. در این‌صورت $f \in \mathbb{TK}_H^\circ$ است اگروتنها اگر بتوان آن‌را به فرم $f(z) = \sum_{n=۱}^{\infty}(\lambda_n h_n + \gamma_n g_n)$ که $\lambda_۱ = ۱ - \sum_{n=۲}^{\infty}(\lambda_n+\gamma_n) \geq \circ$ و $\gamma_۱ = \circ$ است، نوشت. به‌خصوص، $\{h_n\}$ و $\{g_n\}$ نقاط فرین $f \in \mathbb{TK}_H^\circ$ هستند.

برهان. فقط قسمت (الف) را ثابت می‌کنیم. اثبات قسمت (ب) از قضیه ۱۴.۱.۲ به همان گونه است که اثبات (الف) از قضیه ۹.۱.۲ نتیجه می‌شود. فرض کنید

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_n h_n+\gamma_n g_n)=z-\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{\lambda_n}{n}z^n+\frac{\gamma_n}{n}\bar{z}^n\right).$$

در این‌صورت

$$\sum_{n=2}^{\infty}n\left(\frac{\lambda_n}{n}+\frac{\gamma_n}{n}\right)=\sum_{n=2}^{\infty}(\lambda_n+\gamma_n)=1-\lambda_1\leq 1.$$

برعکس، اگر $f\in\mathbb{T}_H^{*\circ}$ باشد، آنگاه $a_n\leq\frac{1}{n}$ و $b_n\leq\frac{1}{n}$ است. قرار دهید $\lambda_n=na_n$ ، $\gamma_n=nb_n$ ، $\lambda_1=1-\sum_{n=2}^{\infty}\lambda_n$ و $\gamma_1=0$ که $(n=2,3,\ldots)$. در این‌صورت $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_n h_n+\gamma_n g_n)$.
□

۳.۱.۲ مرتبه α

در این بخش به بررسی دو زیر رده از $\mathbb{S}_H$ می‌پردازیم. آوجی [3] و زلوتکیویک [4] [۱]ثابت کردند که شرایط ضریبی $\sum_{n=2}^{\infty}n(|a_n|+|b_n|)\leq 1$ برای قرار گرفتن تابع $f=h+\bar{g}$ در $\mathbb{S}_H^{\circ}(\alpha)$ کافیست. سیلورمن[۱۳][5] ثابت کرد اگر در (۱.۲) ، $b_1=0$ و a_n و b_n منفی باشند نیز این شرایط ضریبی مورد نیاز است. توجه کنید که در هر دو نتیجه بدست آمده، موضوع به محدودیت $b_1=0$ بستگی دارد. برهان ارایه شده در این بخش شرایط ضریبی کافی برای قرارگیری تابع $f=h+\bar{g}$ به فرم (۱.۲) در $\mathbb{S}_H^{*}(\alpha)$ را فراهم می‌کند که $0\leq\alpha<1$ و b_1 لزوما صفر نیست. همچنین نشان می‌دهیم که همین شرایط برای قرار گرفتن f در $\mathbb{T}_H(\alpha)$ لازم است.

قضیه ۱۷.۱.۲. *فرض کنیم ضرایب تابع $f\in\mathbb{S}_H$ به فرم داده شده در (۱.۲) باشد. همچنین فرض کنیم*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-\alpha}{1-\alpha}|a_n|+\frac{n+\alpha}{1-\alpha}|b_n|\right)\leq 2 \qquad (۵.۲)$$

که $a_1=1$ و $0\leq\alpha<1$ باشد. در این‌صورت f در Δ همساز تک ارز و $f\in\mathbb{S}_H^{*\circ}(\alpha)$ است.

برهان. ابتدا توجه کنید که f در Δ موضعا تک ارز و حافظ جهت است. زیرا

$$\begin{aligned}|h'(z)|&\geq 1-\sum_{n=2}^{\infty}n|a_n|r^{n-1}>1-\sum_{n=2}^{\infty}n|a_n|\geq 1-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-\alpha}{1-\alpha}|a_n|\\&\geq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+\alpha}{1-\alpha}|b_n|\geq\sum_{n=1}^{\infty}n|b_n|>\sum_{n=1}^{\infty}n|b_n|r^{n-1}\geq|g'(z)|.\end{aligned}$$

---
[3] Avci
[4] Zlotkiewicz
[5] Silverman

برای نشان دادن تک ارز بودن f در Δ ملاحظه می‌کنیم که اگر $g(z) \equiv ۰$ آنگاه $f(z)$ تحلیلی است و تک ارزی f از ستاره‌گون بودن (طبق ۵) نتیجه می‌شود. اگر $g(z) \equiv ۰$ باشد، آنگاه نشان می‌دهیم که وقتی $z_۲ \neq z_۱$ باشد، $f(z_۱) \neq f(z_۲)$ است.
فرض کنیم $z_۱, z_۲ \in \Delta$ باشد که $z_۲ \neq z_۱$ است. چون Δ همبند ساده و محدب است، داریم $z(t) = (۱-t)z_۱ + tz_۲ \in \Delta$ که $۰ \leq t \leq ۱$ است. در این‌صورت می‌توان نوشت:

$$f(z_۲) - f(z_۱) = \int_۰^۱ \Big[(z_۲ - z_۱)h'(z(t)) + \overline{(z_۲ - z_۱)g'(z(t))}\Big]\mathrm{d}t.$$

با تقسیم معادله فوق بر $z_۲ - z_۱ \neq ۰$ و در نظر گرفتن بخش حقیقی داریم:

$$\begin{aligned} Re\frac{f(z_۲) - f(z_۱)}{z_۲ - z_۱} &= \int_۰^۱ Re\Big[h'(z(t)) + \frac{\overline{z_۲ - z_۱}}{z_۲ - z_۱}\overline{g'(z(t))}\Big]\mathrm{d}t \\ &> \int_۰^۱ [Reh'(z(t)) - |g'(z(t))|]\mathrm{d}t. \end{aligned} \qquad (۶.۲)$$

از سوی دیگر

$$\begin{aligned} Reh'(z) - |g'(z)| &\geq Reh'(z) - \sum_{n=۱}^{\infty} n|b_n| \\ &\geq ۱ - \sum_{n=۲}^{\infty} n|a_n| - \sum_{n=۱}^{\infty} n|b_n| \\ &\geq ۱ - \sum_{n=۲}^{\infty} \frac{n-\alpha}{۱-\alpha}|a_n| - \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{n+\alpha}{۱-\alpha}|b_n| \\ &\geq ۰ \quad \text{با استفاده از ۵.۲} \end{aligned}$$

با استفاده از رابطه اخیر و نامساوی ۶.۲، تک ارز بودن f نتیجه می‌شود.
حال نشان می‌دهیم که $f \in \mathbb{S}^*_{\mathbb{H}}(\alpha)$ است. طبق شرط (۲.۲) فقط کافیست نشان دهیم که اگر قضیه ۵.۲ برقرار باشد، آنگاه

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(argf(re^{i\theta})\Big) = Im\Big(\frac{\partial}{\partial\theta}logf(re^{i\theta})\Big) = Re\Big(\frac{zh'(z) - \overline{zg'(z)}}{h(z) + \overline{g(z)}}\Big) \geq \alpha,$$

که $z = re^{i\theta}$، $۰ \leq \theta \leq ۲\pi$، $۰ \leq r < ۱$ و $۰ \leq \alpha < ۱۱$ است.
با استفاده از این گزاره که $Rew \geq \alpha$ اگر وتنها اگر $|۱ - \alpha + w| \geq |۱ + \alpha - w|$، کافیست ثابت کنیم که

$$|A(z) + (۱-\alpha)B(z)| - |A(z) - (۱+\alpha)B(z)| \geq ۰ \qquad (۷.۲)$$

که $A(z) = zh'(z) - \overline{zg'(z)}$ و $B(z) = h(z) + \overline{g(z)}$ است.
با جایگذاری $B(z)$ و $A(z)$ در (۷.۲) داریم:

$$\begin{aligned}
&|A(z)+(1-\alpha)B(z)|-|A(z)-(1+\alpha)B(z)| \\
&\quad =|(1-\alpha)h(z)+zh'(z)+\overline{(1-\alpha)g(z)-zg'(z)}| \\
&\quad -|(1+\alpha)h(z)-zh'(z)+\overline{(1+\alpha)g(z)+zg'(z)}| \\
&\quad =|(2-\alpha)z+\sum_{n=2}^{\infty}(n+1-\alpha)a_nz^n-\overline{\sum_{n=1}^{\infty}(n-1+\alpha)b_nz^n}| \\
&\quad -|-\alpha z+\sum_{n=2}^{\infty}(n-1-\alpha)a_nz^n-\overline{\sum_{n=1}^{\infty}(n+1+\alpha)b_nz^n}| \\
&\quad \geq (2-\alpha)|z|-\sum_{n=2}^{\infty}(n+1-\alpha)|a_n||z|^n-\sum_{n=1}^{\infty}(n-1+\alpha)|b_n||z^n| \\
&\quad -\alpha|z|-\sum_{n=2}^{\infty}(n-1-\alpha)|a_n||z|^n-\sum_{n=2}^{\infty}(n+1+\alpha)|b_n||z|^n \\
&\quad =2(1-\alpha)|z|\Big\{1-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-\alpha}{1-\alpha}|a_n||z|^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+\alpha}{1-\alpha}|b_n||z|^{n-1}\Big\} \\
&\quad \geq 2(1-\alpha)|z|\Big\{1-\Big(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-\alpha}{1-\alpha}|a_n|-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+\alpha}{1-\alpha}|b_n|\Big)\Big\}\geq 0 \qquad \text{با استفاده از ۵.۲}
\end{aligned}$$

نگاشت همساز ستاره‌گون

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1-\alpha}{n-\alpha}x_nz^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\alpha}{n+\alpha}\bar{y}_n\bar{z}^n \tag{۸.۲}$$

که $\sum_{n=2}^{\infty}|x_n|+\sum_{n=2}^{\infty}|y_n|=1$، نشان می‌دهد که در (۵.۲) تساوی نیز برقرار است. توابع به فرم (۸.۲) در $\mathbb{S}^*_{\mathbb{H}}(\alpha)$ هستند، زیرا

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{n-\alpha}{1-\alpha}|a_n|+\frac{n+\alpha}{1-\alpha}|b_n|\Big)=1+\sum_{n=2}^{\infty}|x_n|+\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|=2.$$

شرطی که در قضیه قبل برای ضرایب تابع $f=h+\bar{g}$ قرار داده شده، ما را قادر می‌سازد تا نتیجه‌گیری کنیم که توابعی که حاصل دوران ضرایب تابع f هستند نیز همساز ستاره‌گون و تک ارز هستند. قضیه بعد ثابت می‌کند که کران‌هایی که برای ضریب در قضیه قبل بدست آمده‌اند، قابل بهبود نیستند.

□

قضیه ۱۸.۱.۲. *فرض کنیم $f=h+\bar{g}$ به فرم (۳.۲) باشند. در این‌صورت $f\in\mathbb{T}_{\mathbb{H}}(\alpha)$ است اگروتنها اگر*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{n-\alpha}{1-\alpha}|a_n|+\frac{n+\alpha}{1-\alpha}|b_n|\Big)\leq 2 \tag{۹.۲}$$

که $a_1 = 1$ *و* $0 \leq \alpha < 1$ *است.*

برهان. قسمت اگر از قضیه قبل و این نکته نتیجه می‌شود که اگر قسمت تحلیلی و مزدوج تحلیلی $f = h + \bar{g}$ به فرم (۳.۲) باشند، آنگاه $f \in \mathbb{T}_{\mathbb{H}}(\alpha)$ است.

برای بخش تنها اگر، نشان می‌دهیم که اگر شرط (۹.۲) برقرار نباشد، آنگاه $f \notin \mathbb{T}_{\mathbb{H}}(\alpha)$.

توجه کنید که یک شرط لازم و کافی برای این‌که تابع $f = h + \bar{g}$ به فرم (۳.۲) از مرتبه α که $0 \leq \alpha < 1$ ستاره‌گون باشد این است که برای $0 \leq \alpha < 1$، $\frac{\partial}{\partial\theta}(arg f(re^{i\theta})) - \alpha > 0$ باشد.

این شرط هم ارز است با

$$
\begin{aligned}
& Re\frac{zh'(z) - \overline{zg'(z)}}{h(z) + \overline{g(z)}} - \alpha \\
& = Re\frac{(1-\alpha)z - \sum_{n=2}^{\infty}(n-\alpha)|a_n|z^n - \sum_{n=1}^{\infty}(n+\alpha)|b_n|\bar{z}^n}{z - \sum_{n=2}^{\infty}|a_n|z^n + \sum_{n=1}^{\infty}|b_n|\bar{z}^n} \\
& \geq 0.
\end{aligned}
$$

شرط فوق باید برای تمام مقادیر z که $|z| = r < 1$ برقرار باشد. با انتخاب مقادیری از z که روی محور حقیقی مثبت که $0 \leq |z| = r < 1$ قرار دارند باید داشته باشیم

$$
\frac{(1-\alpha) - \sum_{n=2}^{\infty}(n-\alpha)|a_n|r^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty}(n+\alpha)|b_n|r^{n-1}}{1 - \sum_{n=2}^{\infty}|a_n|r^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty}|b_n|r^{n-1}} \geq 0. \qquad (۱۰.۲)
$$

اگر شرط (۹.۲) برقرار نباشد، آنگاه برای r به اندازه کافی به ۱، شمارنده در (۱۰.۲) منفی خواهد بود. بنابراین $z_0 = r_0$ در $(0, 1)$ موجود است که خارج قسمت در (۱۰.۲) منفی است و این یک تناقض با شرایط لازم برای $f \in \mathbb{T}_{\mathbb{H}}(\alpha)$ است. و اثبات کامل می‌شود. □

در ادامه نقاط فرین پوسته محدب بسته‌ی $\mathbb{T}_{\mathbb{H}}(\alpha)$ را تعیین می‌کنیم. این پوسته محدب بسته را با $clco\mathbb{T}_{\mathbb{H}}(\alpha)$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۱۹.۱.۲. *$f \in clco\mathbb{T}_{\mathbb{H}}(\alpha)$ است اگرو تنها اگر*

$$
f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}(X_n h_n + Y_n g_n). \qquad (۱۱.۲)
$$

که $h_1(z) = z, h_n(z) = z - \frac{1-\alpha}{n-\alpha}z^n \quad (n = 2, 3, \ldots)$

و $g_n(z) = z + \frac{1-\alpha}{n+\alpha}\bar{z}^n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$ *و* $\sum_{n=1}^{\infty}(X_n + Y_n) = 1, X_n \geq 0, Y_n \geq 0$ *است.*

به‌خصوص $\{h_n\}$ *و* $\{g_n\}$ *نقاط فرین* $\mathbb{T}_{\mathbb{H}}(\alpha)$ *هستند.*

برهان. برای توابعی مانند f که به فرم (۱۱.۲) هستند داریم:

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}(X_nh_n+Y_ng_n)=\sum_{n=1}^{\infty}(X_n+Y_n)z-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1-\alpha}{n-\alpha}X_nz^n$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\alpha}{n+\alpha}Y_n\bar{z}^n.$$

پس

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-\alpha}{1-\alpha}\Big(\frac{1-\alpha}{n-\alpha}X_n\Big)+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+\alpha}{1-\alpha}\Big(\frac{1-\alpha}{n+\alpha}Y_n\Big)$$
$$=\sum_{n=2}^{\infty}X_n+\sum_{n=1}^{\infty}Y_n=1-X_1\leq 1$$

و بنابراین $f\in clco\mathbb{T}_{\mathbb{H}}(\alpha)$ است.
برعکس، فرض کنیم $f\in clco\mathbb{T}_{\mathbb{H}}(\alpha)$ باشد. قرار دهید $X_n=\frac{n-\alpha}{1-\alpha}|a_n|(n=2,3,\ldots)$ و $Y_n=\frac{n+\alpha}{1-\alpha}|b_n|(n=1,2,3,\ldots)$ در این‌صورت با استفاده از قضیه (۱۸.۱.۲) $0\leq X_n\leq 1(n=2,3,\ldots)$ و $0\leq Y_n\leq 1(n=1,2,3,\ldots)$. تعریف می‌کنیم $X_1=1-\sum_{n=2}^{\infty}X_n-\sum_{n=1}^{\infty}Y_n$ و توجه کنید طبق قضیه (۱۸.۱.۲) $X_1\geq 0$ است. در نتیجه $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}(X_nh_n+Y_ng_n)$ را طبق آنچه خواسته شده بود بدست می‌آوریم. با استفاده از قضیه قبل، به آسانی می‌توان دید که $\mathbb{T}_{\mathbb{H}}(\alpha)$ محدب و بسته است. بنابراین $clco\mathbb{T}_{\mathbb{H}}(\alpha)=\mathbb{T}_{\mathbb{H}}(\alpha)$ است.
پس حکم قضیه واقعا برای $f\in\mathbb{T}_{\mathbb{H}}(\alpha)$ برقرار است. □

حال کران‌های انحراف را برای توابعی که در $\mathbb{T}_{\mathbb{H}}(\alpha)$ هستند ارایه می‌کنیم که به نتایج پوششی برای $\mathbb{T}_{\mathbb{H}}(\alpha)$ منتهی می‌شود.

قضیه ۲۰.۱.۲. *اگر $f\in\mathbb{T}_{\mathbb{H}}(\alpha)$ باشد، آنگاه*

$$|f(z)|\leq(1+|b_1|)r+\Big(\frac{1-\alpha}{2-\alpha}-\frac{1+\alpha}{2-\alpha}|b_1|\Big)r^2.\quad |z|=r<1.$$

و

$$|f(z)|\geq(1-|b_1|)r-\Big(\frac{1-\alpha}{2-\alpha}-\frac{1+\alpha}{2-\alpha}|b_1|\Big)r^2.\quad |z|=r<1.$$

برهان. فرض کنیم $f\in\mathbb{T}_{\mathbb{H}}(\alpha)$ باشد. با قدرمطلق گرفتن از f داریم:

$$\begin{aligned}|f(z)| \leq&(۱+|b_۱|)r+\sum_{n=۲}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)r^n\\ &\leq (۱+|b_۱|)r+\sum_{n=۲}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)r^۲\\ &= (۱+|b_۱|)r+\frac{۱-\alpha}{۲-\alpha}\sum_{n=۲}^{\infty}\Big(\frac{۲-\alpha}{۱-\alpha}|a_n|+\frac{۲-\alpha}{۱-\alpha}|b_n|\Big)r^۲\\ &\leq (۱+|b_۱|)r+\frac{۱-\alpha}{۲-\alpha}\sum_{n=۲}^{\infty}\Big(\frac{n-\alpha}{۱-\alpha}|a_n|+\frac{n+\alpha}{۱-\alpha}|b_n|\Big)r^۲\\ &\leq (۱+|b_۱|)r+\frac{۱-\alpha}{۲-\alpha}\Big(۱-\frac{۱+\alpha}{۱-\alpha}|b_۱|\Big)r^۲, \text{(۹.۲) با استفاده از}\\ &= (۱+|b_۱|)r+\Big(\frac{۱-\alpha}{۲-\alpha}-\frac{۱+\alpha}{۲-\alpha}|b_۱|\Big)r^۲,\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}|f(z)| \geq&(۱-|b_۱|)r-\sum_{n=۲}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)r^۲\\ &= (۱-|b_۱|)r-\frac{۱-\alpha}{۲-\alpha}\sum_{n=۲}^{\infty}\Big(\frac{۲-\alpha}{۱-\alpha}|a_n|+\frac{۲-\alpha}{۱-\alpha}|b_n|\Big)r^۲\\ &\geq (۱-|b_۱|)r-\frac{۱-\alpha}{۲-\alpha}\sum_{n=۲}^{\infty}\Big(\frac{n-\alpha}{۱-\alpha}|a_n|+\frac{n+\alpha}{۱-\alpha}|b_n|\Big)r^۲\\ &\geq (۱-|b_۱|)r+\frac{۱-\alpha}{۲-\alpha}\Big(۱-\frac{۱+\alpha}{۱-\alpha}|b_۱|\Big)r^۲, \text{(۹.۲) با استفاده از}\\ &= (۱-|b_۱|)r-\Big(\frac{۱-\alpha}{۲-\alpha}-\frac{۱+\alpha}{۲-\alpha}|b_۱|)r^۲,\end{aligned}$$

□

کران‌هایی که برای تابع $f=h+\bar{g}$ به فرم (۳.۲) در قضیه ۲۰.۱.۲ ارایه شده، برای توابع به فرم (۱.۲) نیز صدق می‌کند، در صورتی‌که شرط قضیه ۶.۱.۲ برقرار باشد. توابع

$$f(z)=(z+|b_۱|)\bar{z}+\Big(\frac{۱-\alpha}{۲-\alpha}-\frac{۱+\alpha}{۲-\alpha}|b_۱|\Big)\bar{z}^۲$$

و

$$f(z)=(z-|b_۱|)z-\Big(\frac{۱-\alpha}{۲-\alpha}-\frac{۱+\alpha}{۲-\alpha}|b_۱|\Big)z^۲$$

به ازای $|b_۱|\leq\dfrac{(۱-\alpha)}{(۱+\alpha)}$، تساوی برای کران‌ها در قضیه ۲۰.۱.۲ برقرار می‌شود. این نتیجه پوششی بدست آمده از نامساوی سمت چپ در قضیه ۲۰.۱.۲ بدست می‌آید.

نتیجه ۲.۱.۱.۲۱. *اگر* $f \in \mathbb{T}_{\mathbb{H}}(\alpha)$ *باشد، آنگاه*

$$\left\{w : |w| < \frac{۱}{۲ - \alpha}(۱ + (۲\alpha - ۱)|b_۱|)\right\} \subset f(\Delta).$$

۲.۲ توابع همساز ستاره‌گون از مرتبه مختلط

تعریف ۲.۲.۱. $\mathbb{S}_H$ خانواده‌ای از توابع به شکل $f = h + \overline{g}$ می‌باشد که در دیسک واحد $U = \{z : |z| < ۱\}$ با نرمال سازی زیر، همساز و حافظ جهت و تک ارز می‌باشند.

$$h(z) = z + \sum_{n=۲}^{\infty} a_n z^n, \qquad g(z) = \sum_{n=۱}^{\infty} b_n z^n, \qquad |b_۱| < ۱. \tag{۲.۱۲}$$

تعریف ۲.۲.۲. خانواده‌ای از توابع $f = h + \overline{g}$ که در U همساز هستند را با TS_H نشان می‌دهیم، که h و g به‌صورت زیر می‌باشند:

$$h(z) = z - \sum_{n=۲}^{\infty} a_n z^n, \qquad g(z) = \sum_{n=۱}^{\infty} b_n z^n, \quad a_n, b_n \geq ۰, b_۱ < ۱. \tag{۲.۱۳}$$

تعریف ۲.۲.۳. زیر کلاسی از TS_H شامل توابع $f = h + \overline{g}$ را با $TS_H^*(\gamma)$ نشان می‌دهیم، که در شرط زیر صدق می‌کند:

$$Re\left\{۱ + \frac{۱}{\gamma}\left(\frac{zh'(z) - \overline{zg'(z)}}{h(z) + \overline{g(z)}} - ۱\right)\right\} > ۰, \quad \gamma \in C \setminus \{۰\}. \tag{۲.۱۴}$$

به‌علاوه فرض کنید $OS_H^*(\gamma)$ نشان دهنده‌ی زیر کلاسی از TS_H است، که شامل توابع

$$f = h + \overline{g} \in TS_H$$

می‌باشند و در شرط زیر صدق می‌کنند:

$$\sum_{n=۱}^{\infty} [۲(n - ۱ + |\gamma|)a_n + (n + ۱ + |n + ۱ - ۲\gamma|)b_n] \leq ۴|\gamma|. \tag{۲.۱۵}$$

تعریف ۲.۲.۴. زیر کلاسی از TS_H شامل توابع $f = h + \overline{g}$ که در شرط زیر صدق می‌کند را با $PS_H^*(\gamma)$ نشان می‌دهیم.

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\left[(n - ۱)\frac{Re(\gamma)}{|\gamma|} + |\gamma|\right]a_n + \left[(n + ۱)\frac{Re(\gamma)}{|\gamma|} - |\gamma|\right]b_n \leq ۲|\gamma| \tag{۲.۱۶}$$

سیلورمن[۶] ، جهانگیری[۷] توابع همساز ستاره‌گون را مطالعه کردند.
آوجی[۸] و زلوتکیویک[۹] ثابت کردند که شرایط ضریبی

$$\sum_{n=۲}^{\infty} n\left(|a_n| + |b_n|\right) \leq ۱, \quad b_۱ = ۰ \tag{۲.۱۷}$$

[۶] Silverman
[۷] Jahangiri
[۸] Avci
[۹] Zlotkiewicz

برای قرار گرفتن تابع $f = h + \bar{g}$ در $\mathbb{S}^{\circ}_{H}(\alpha)$ کافی می‌باشد.
سیلورمن ثابت کرد اگر $b_{1} = 0$ و a_n و b_n منفی باشند نیز این شرایط ضریبی مورد نیاز است.
جهانگیری نشان داد اگر تابع $f = h + \bar{g}$ به فرم (۱.۲) باشد و اگر شرایط زیر برقرار باشد.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-\alpha}{1-\alpha}|a_n| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\alpha}{1-\alpha}|b_n| \leq 1, \quad 0 \leq \alpha < 1, \tag{۱۸.۲}$$

آنگاه f تابع همساز ستاره‌گون از مرتبه‌ی α در U است.

قضیه ۵.۲.۲.

$$OS^{*}_{H}(\gamma) \subset TS^{*}_{H}(\gamma). \tag{۱۹.۲}$$

برهان. فرض کنیم $f \in OS^{*}_{H}(\gamma)$ باشد. طبق شرایط (۱۳.۲) کافیست نشان دهیم اگر رابطه‌ی (۱۵.۲) برقرار باشد، آنگاه

$$Re\left\{\frac{(\gamma-1)(h(z)+\overline{g(z)})+zh'(z)-\overline{zg'(z)}}{\gamma(h(z)+\overline{g(z)})}\right\} > 0, \tag{۲۰.۲}$$

که $\gamma \in C \setminus \{0\}$. با استفاده از این گزاره که $Rew > 0$ اگر و تنها اگر $|1-w| > |1+w|$، کافیست ثابت کنیم که:

$$|(2\gamma-1)(h(z)+\overline{g(z)})+zh'(z)-\overline{zg'(z)}|-|h(z)+\overline{g(z)}-zh'(z)+\overline{zg'(z)}| > 0 \tag{۲۱.۲}$$

با جایگذاری $h(z)$ و $g(z)$ در (۱۷.۲)، نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{aligned}
&|(2\gamma-1)(h(z)+\overline{g(z)})+zh'(z)-\overline{zg'(z)}|-|h(z)+\overline{g(z)}-zh'(z)+\overline{zg'(z)}| \\
&= |2\gamma z - \sum_{n=2}^{\infty}(2\gamma-1+n)a_n z^n - \sum_{n=1}^{\infty}(n+1-2\gamma)b_n \bar{z}^n| \\
&- |\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)b_n \bar{z}^n| \\
&\geq 2|\gamma||z| - \sum_{n=2}^{\infty} 2(n-1+|\gamma|)a_n|z|^n - \sum_{n=1}^{\infty}(n+1+|n+1-2\gamma|)b_n|z|^n \\
&> 2|\gamma| - \left(\sum_{n=2}^{\infty} 2(n-1+|\gamma|)a_n + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1+|n+1-2\gamma|)b_n\right) \geq 0.
\end{aligned} \tag{۲۲.۲}$$

توابع

$$f(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|\gamma|}{n-1+|\gamma|} x_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2|\gamma|}{n+1+|n+1-2\gamma|} y_n \bar{z}^n \tag{۲۳.۲}$$

که x_n و y_n نامنفی هستند و

$$\sum_{n=2}^{\infty} x_n + \sum_{n=1}^{\infty} y_n = 1 \tag{۲۴.۲}$$

نشان می‌دهد کران‌هایی که برای ضرایب با توجه به رابطه‌ی (۱۵.۲) داده شده دقیق است. توابع به فرم (۲۳.۲) در TS_H^* هستند، زیرا

$$\sum_{n=2}^{\infty} 2(n-1+|\gamma|)a_n+\sum_{n=1}^{\infty}(n+1+|n+1-2\gamma|)b_n = 2|\gamma|\left(1+\sum_{n=2}^{\infty}x_n+\sum_{n=1}^{\infty}y_n\right) = 4|\gamma|. \tag{۲۵.۲}$$

□

قضیه ۶.۲.۲.

$$TS_H^*(\gamma) \subset PS_H^*(\gamma) \tag{۲۶.۲}$$

برهان. فرض کنیم $f \in TS_H^*$ باشد، با توجه به (۱۴.۲) داریم:

$$Re\left\{\frac{1}{\gamma}\left(\frac{-\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)a_nz^n-\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)b_n\bar{z}^n}{1-\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\bar{z}^n}\right)\right\} > -1. \tag{۲۷.۲}$$

با انتخاب مقادیری از z روی محور حقیقی که $z \to 1^-$، قرار می‌دهیم:

$$\frac{\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)a_n+\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)b_n}{1-\sum_{n=2}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n}Re\left(\frac{1}{\gamma}\right) \le 1, \tag{۲۸.۲}$$

از آن‌جایی که

$$\frac{\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)a_n+\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)b_n}{1-\sum_{n=2}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n}\frac{Re(\gamma)}{|\gamma|^2} \le 1, \tag{۲۹.۲}$$

و بنابراین

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)a_n+\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)b_n \le \frac{|\gamma|^2}{Re(\gamma)}\left(1-\sum_{n=2}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\right) \tag{۳۰.۲}$$

که با رابطه‌ی (۱۶.۲) هم ارز است. لذا نتیجه می‌گیریم که $f \in PS_H^*(\gamma)$ می‌باشد.

□

قضیه ۷.۲.۲. *اگر* $\gamma \in (0,1]$ *باشد، آنگاه* $OS_H^*(\gamma) = TS_H^*(\gamma) = PS_H^*(\gamma)$.

برهان. اگر $\gamma \in (0,1]$ باشد، آنگاه نامساوی (۱۵.۲) و (۱۶.۲) هم ارز هستند. بنابراین

$$OS_H^*(\gamma) = PS_H^*(\gamma)$$

است. با استفاده از قضایای ۵.۲.۲ و ۶.۲.۲، قضیه‌ی زیر را بدست می‌آوریم. □

قضیه ۸.۲.۲. *اگر* $0 \le Re(\gamma) > -\frac{1}{2}$ *یا* $\gamma \in (\frac{3}{2}, +\infty)$ *باشد، آنگاه*

$$PS_H^*(\gamma) \not\subseteq TS_H^*(\gamma) \tag{۳۱.۲}$$

برهان. فرض کنیم

$$f(z) = z - z^2. \tag{۳۲.۲}$$

وقتی $\gamma \in C \setminus \{0\}$ و $Re(\gamma) < 0$ آنگاه $f \in PS_H^*(\gamma)$ می باشد. زیرا

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[(n-1)\frac{Re(\gamma)}{|\gamma|}+|\gamma|\right]a_n+\left[(n+1)\frac{Re(\gamma)}{|\gamma|}-|\gamma|\right]b_n$$
$$=|\gamma|\cdot 1+\frac{Re(\gamma)}{|\gamma|}+|\gamma|=2|\gamma|+\frac{Re(\gamma)}{|\gamma|}\leq 2|\gamma|. \tag{۳۳.۲}$$

حال فرض کنیم $r = Re(\gamma) < 0$ باشد و s را عدد حقیقی منفی در نظر می‌گیریم به‌طوری‌که

$$1+2r(1-s)>0$$

با انتخاب $z=\frac{\gamma(1-s)}{1+\gamma(1-s)}$ آنگاه $z\in U$ می‌باشد و برای f در رابطه‌ی (۳۲.۲) داریم:

$$1+\frac{1}{\gamma}\left(\frac{zh'(z)-\overline{zg'(z)}}{h(z)+\overline{g(z)}}-1\right)=s<0, \tag{۳۴.۲}$$

بنابراین $f \notin TS_H^*(\gamma)$. به‌طور مشابه فرض کنیم

$$f(z)=z+\overline{z}^2. \tag{۳۵.۲}$$

وقتی $\gamma\in(\frac{3}{2},+\infty)$، آنگاه $f \in PS_H^*(\gamma)$ می‌باشد زیرا

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[(n-1)\frac{Re(\gamma)}{|\gamma|}+|\gamma|\right]a_n+\left[(n+1)\frac{Re(\gamma)}{|\gamma|}-|\gamma|\right]b_n$$
$$=|\gamma|\cdot 1+\left(3\frac{Re(\gamma)}{|\gamma|}-|\gamma|\right)\cdot 1=3\frac{Re(\gamma)}{|\gamma|}\leq 2|\gamma|. \tag{۳۶.۲}$$

حال فرض کنیم $\gamma\in(\frac{3}{2},+\infty)$ و s عدد حقیقی منفی باشد به‌طوری‌که $\gamma+\gamma(s-1)<0$. با انتخاب $z=-\frac{\gamma(s-1)}{3+\gamma(s-1)}$ آنگاه $z\in U$ می‌باشد و برای f در رابطه‌ی (۳۵.۲) داریم:

$$1+\frac{1}{\gamma}\left(\frac{zh'(z)-\overline{zg'(z)}}{h(z)+\overline{g(z)}}-1\right)=s<0 \tag{۳۷.۲}$$

بنابراین $f \notin TS_H^*(\gamma)$. □

قضیه ۹.۲.۲. *اگر $\gamma\in(-\infty,-1)\cup(-\frac{1}{2},0)$ باشد، آنگاه*

$$TS_H^*(\gamma)\nsubseteq OS_H^*(\gamma). \tag{۳۸.۲}$$

برهان. فرض کنیم $\gamma\in(-\infty,-1)$ باشد، نشان می‌دهیم توابع

$$f_\lambda(z)=z-\lambda z^2 \tag{۳۹.۲}$$

برای $\lambda>\frac{\gamma}{1+\gamma}$ متعلق به $TS_H^*(\gamma)$ می‌باشد که $f\notin OS_H^*$ داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}[2(n-1+|\gamma|)a_n+(n+1+|n+1-2\gamma|)b_n]=2|\gamma|+2(1+|\gamma|)\lambda>4|\gamma| \tag{۴۰.۲}$$

زیرا $1 > \frac{\gamma}{1+\gamma} > \lambda$ می‌باشد. همچنین داریم:

$$Re\left\{1+\frac{1}{\gamma}\left(\frac{zh'_\lambda(z)-\overline{zg'_\lambda(z)}}{h_\lambda(z)+\overline{g_\lambda(z)}}-1\right)\right\}=Re\left\{1+\frac{\lambda z}{\gamma(\lambda z-1)}\right\}>0,\qquad z\in U, \tag{۴۱.۲}$$

برای $\frac{\gamma}{1+\gamma} > \lambda$ و $\gamma < -1$، بنابراین $f_\lambda \in TS^*_H(\gamma)$. حال فرض می‌کنیم $\gamma \in (-\frac{1}{2}, 0)$ باشد و f_λ در رابطه‌ی (۳۹.۲) تعریف شده باشد، در این‌صورت

$$-\frac{\gamma}{1-\gamma}<\lambda<-\frac{\gamma}{1+\gamma}. \tag{۴۲.۲}$$

آنگاه $-\frac{\gamma}{1-\gamma} > \lambda$ می‌باشد و نتیجه می‌گیریم $f_\lambda \notin OS^*_H(\gamma)$ و برای $\lambda < -\frac{\gamma}{1+\gamma}$ نامساوی برقرار است، بنابراین $f_\lambda \in TS^*_H(\gamma)$. □

فصل ۳

توابع همساز شبه ستاره‌گون بر دیسک واحد

۱.۳ مقدمه

تابع پیوسته $f = u + iv$ را یک تابع همساز مختلط مقدار بر دامنه G می‌نامیم، اگر هر دو مولفه‌ی u و v همساز باشند. در هر دامنه‌ی همبند ساده مانند $D \subset G$ می‌توانیم f را به‌صورت $f = h + \overline{g}$ بنویسیم به‌طوری‌که h و g در D تحلیلی می‌باشند.
شرط لازم و کافی برای آن‌که f در D، به‌طور موضعی تک ارز و حافظ جهت باشد، آن است که رابطه

$$|h'(z)| > |g'(z)|$$

برقرار باشد.
خانواده‌ای از توابع $f = h + \overline{g}$ که در دیسک واحد $U = \{z : |z| < ۱\}$ همساز تک ارز و حافظ جهت هستند، به‌طوری‌که $f(۰) = h(۰) = ۰ = f_z(۰) - ۱$ باشد را با نماد $\mathcal{H}$ نمایش می‌دهیم.
بنابراین برای

$$f = h + \overline{g} \tag{۱.۳}$$

لذا توابع g و h را می‌توان بدین صورت بیان کرد:

$$h(z) = z + \sum_{m=۲}^{\infty} a_m z^m \quad , g(z) = \sum_{m=۱}^{\infty} b_m z^m \quad (۰ \leq b_۱ < ۱),$$

و $f(z)$ به صورت زیر می‌باشد:

$$f(z) = z + \sum_{m=۲}^{\infty} a_m z^m + \overline{\sum_{m=۱}^{\infty} b_m z^m} \quad , (|b_۱| < ۱) \tag{۲.۳}$$

تعریف ۱.۱.۳. دو تابع $\phi(z) = \sum_{m=۱}^{\infty} \Phi_m z^m$ و $\varphi(z) = \sum_{m=۱}^{\infty} \psi_m z^m$ در S وجود دارند. حاصل‌ضرب هادامارد این دو تابع به‌صورت زیر می‌باشد:

$$(\Phi * \psi)(z) = \Phi(z) * \psi(z) = \sum_{m=۱}^{\infty} \Phi_m \psi_m z^m$$

با استفاده از این پیچش یک کلاس از توابع شبه‌ستاره‌گون از مرتبه α را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۲.۱.۳. تابع f را شبه ستاره‌گون از مرتبه α گوییم اگر $f * \mathcal{S}_\alpha$ ستاره‌گون از مرتبه α باشد، که:

$$\mathcal{S}_\alpha(z) = \frac{z}{(۱-z)^{۲(۱-\alpha)}}, (z \in U, ۰ \leq \alpha < ۱) \tag{۳.۳}$$

همچنین $\mathcal{S}_\alpha(z)$ را می‌توان به فرم زیر نوشت:

$$\mathcal{S}_\alpha(z) = z + \sum_{m=۲}^{\infty} |C_m(\alpha)| z^m, \tag{۴.۳}$$

که

$$C_m(\alpha) = \frac{\prod_{j=۲}^{m}(j-۲\alpha)}{(m-۱)!} \quad (m \in \mathbb{N} \setminus \{۱\}, \mathbb{N} := \{۱,۲,۳,\cdots\}). \tag{۵.۳}$$

که $C_m(\alpha)$ از مرتبه α می‌باشد و در رابطه‌ی زیر صدق می‌کند:

$$\lim_{m\to\infty} C_m(\alpha) = \begin{cases} \infty & \text{اگر} \alpha < \frac{۱}{۲} \\ ۱ & \text{اگر} \alpha = \frac{۱}{۲} \\ ۰ & \text{اگر} \alpha > \frac{۱}{۲} \end{cases} \tag{۶.۳}$$

برای تابع $f = h + \overline{g}$ به فرم (۲.۳) و $(۰ \leq \alpha < ۱)$، تابع همساز شبه ستاره‌گون $f = h + \overline{g}$ را در $\mathcal{H}$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{S}_\alpha(z) * f(z) = \mathcal{S}_\alpha(z) * h(z) + \overline{\mathcal{S}_\alpha(z) * g(z)} \tag{۷.۳}$$

که $\mathcal{S}_\alpha$ با توجه به فرم (۴.۳) بیان شده است. یک کلاس جدید از $\mathcal{H}$ را به‌عنوان $\mathcal{PS_H}(\alpha,\gamma)$ معرفی می‌کنیم.

برای $(۰ \leq \gamma < ۱)$، حال فرض کنیم $\mathcal{PS_H}(\alpha,\gamma)$ زیر کلاسی از توابع همساز شبه ستاره‌گون به فرم (۱.۳) باشد، به‌طوری‌که:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(\arg \mathcal{S}_\alpha(z) * f(z)) > \gamma \tag{۸.۳}$$

هم ارز است با

$$Re\left\{\frac{z(\mathcal{S}_\alpha(z) * h'(z)) - \overline{z(\mathcal{S}_\alpha(z) * g'(z))}}{\mathcal{S}_\alpha(z) * h(z) + \overline{(\mathcal{S}_\alpha(z) * g(z))}}\right\} \geq \gamma \tag{۹.۳}$$

که $S_\alpha(z) * f(z)$ به فرم (۷.۳) بیان شده است و $z \in U$ می‌باشد.

فرض کنیم $\mathcal{PV_H}(\alpha,\gamma) = \mathcal{PS_H}(\alpha,\gamma) \cap V_\mathcal{H}$ که $V_\mathcal{H}$ کلاسی از توابع همساز می‌باشد. عدد حقیقی ϕ وجود دارد به‌طوری‌که:

$$\eta_m + (m-۱)\phi \equiv \pi(mod ۲\pi), \delta_m + (m-۱)\phi \equiv ۰(mod ۲\pi), m \geq ۲, \tag{۱۰.۳}$$

که $\eta_m = \arg(a_m)$ و $\delta_m = \arg(b_m)$.

۲.۳ کلاس $\mathcal{PS}_{\mathcal{H}(\alpha,\gamma)}$

در این بخش به بررسی توابع متعلق به کلاس $\mathcal{PS}_{\mathcal{H}}(\alpha,\gamma)$ می‌پردازیم و نشان می‌دهیم که این شرایط برای توابع متعلق به کلاس $\mathcal{PV}_{\mathcal{H}}(\alpha,\gamma)$، نیز برقرار است. همچنین نقاط فرین، کران‌های انحراف و شرایط تک ارزی را در این رده‌ها بررسی می‌کنیم.

قضیه ۱.۲.۳. *فرض کنیم $f=h+\overline{g}$ به فرم (۲.۳) باشد. اگر*

$$\sum_{m=۲}^{\infty}\left(\frac{m-\gamma}{۱-\gamma}|a_m|+\frac{m+\gamma}{۱-\gamma}|b_m|\right)C_m(\alpha)\leq ۱-\frac{۱+\gamma}{۱-\gamma}b_۱ \tag{۱۱.۳}$$

$(۰\leq\gamma<۱)$ آنگاه $f\in\mathcal{PS}_{\mathcal{H}}(\alpha,\gamma)$ می‌باشد.

برهان. ابتدا نشان می‌دهیم که اگر نامساوی (۱۱.۳) برای ضرایب $f=h+\overline{g}$ صدق کند، آنگاه رابطه (۹.۳) برقرار است. با استفاده از روابط (۷.۳) و (۹.۳) داریم:

$$Re\left\{\frac{z(\mathcal{S}_\alpha(z)*h(z))'-\overline{z(\mathcal{S}_\alpha(z)*g(z))'}}{\mathcal{S}_\alpha(z)*h(z)+\overline{\mathcal{S}_\alpha(z)*g(z)}}\right\}=Re\frac{A(z)}{B(z)}, \tag{۱۲.۳}$$

که

$$A(z)=\left[z(\mathcal{S}_\alpha(z)*h(z))'-\overline{z(\mathcal{S}_\alpha(z)*g(z))'}\right] \tag{۱۳.۳}$$

و

$$B(z)=\mathcal{S}_\alpha(z)*h(z)+\overline{\mathcal{S}_\alpha(z)*g(z)}. \tag{۱۴.۳}$$

ادعا می‌کنیم که $Re(\omega)\geq\gamma$ اگر و تنها اگر $|۱+\gamma-\omega|\geq|۱-\gamma+\omega|$،کافیست نشان دهیم:

$$|A(z)+(۱-\gamma)B(z)|-|A(z)-(۱+\gamma)B(z)|\geq ۰. \tag{۱۵.۳}$$

با جایگذاری $A(z)$ و $B(z)$ در رابطه‌ی (۱۵.۳) داریم:

$$\begin{aligned}
&|A(z)+(۱-\gamma)B(z)|-|A(z)-(۱+\gamma)B(z)|\\
&\geq(۲-\gamma)|z|-\sum_{m=۲}^{\infty}(m+۱-\gamma)C_m(\alpha)|a_m||z|^m-\sum_{m=۱}^{\infty}(m-۱+\gamma)C_m(\alpha)|b_m||z|^m\\
&-\gamma|z|-\sum_{m=۲}^{\infty}(m-۱-\gamma)C_m(\alpha)|a_m||z|^m-\sum_{m=۱}^{\infty}(m+۱+\gamma)C_m(\alpha)|b_m||z|^m\\
&=۲(۱-\gamma)|z|\left\{۱-\sum_{m=۲}^{\infty}\frac{m-\gamma}{۱-\gamma}C_m(\alpha)|a_m||z|^{m-۱}-\sum_{m=۱}^{\infty}\frac{m+\gamma}{۱-\gamma}C_m(\alpha)|b_m||z|^{m-۱}\right\}\\
&\geq ۲(۱-\gamma)|z|\left\{۱-\frac{۱+\gamma}{۱-\gamma}b_۱-\left(\sum_{m=۲}^{\infty}\left[\frac{m-\gamma}{۱-\gamma}C_m(\alpha)|a_m|+\frac{m+\gamma}{۱-\gamma}C_m(\alpha)|b_m|\right]\right)\right\}\geq ۰
\end{aligned} \tag{۱۶.۳}$$

بنابراین از نامساوی (۱۱.۳) نتیجه می‌گیریم که $f\in\mathcal{PS}_{\mathcal{H}}(\alpha,\gamma)$ می‌باشد. □

قضیه ۲.۲.۳. *فرض کنیم $f = h + \overline{g}$ به فرم (۲.۳) باشد. آنگاه $f \in \mathcal{PV}_{\mathcal{H}}(\alpha,\gamma)$ اگر و تنها اگر:*

$$\sum_{m=2}^{\infty}\left\{\frac{m-\gamma}{1-\gamma}|a_m| + \frac{m+\gamma}{1-\gamma}|b_m|\right\} C_m(\alpha) \le 1 - \frac{1+\gamma}{1-\gamma}b_1 \quad 0<\gamma<1, \qquad (۱۷.۳)$$

برهان. از آن‌جایی‌که $\mathcal{PV}_{\mathcal{H}}(\alpha,\gamma) \subset \mathcal{PS}_{\mathcal{H}}(\alpha,\gamma)$، کافیست یک طرف قضیه را اثبات کنیم. فرض کنیم $f \in \mathcal{PV}_{\mathcal{H}}(\alpha,\gamma)$ باشد. آنگاه با استفاده از روابط (۷.۳) و (۹.۳) داریم:

$$Re\left\{\left[\frac{z(\mathcal{S}_\alpha(z)*h(z))' - \overline{z(\mathcal{S}_\alpha(z)*g(z))'}}{\mathcal{S}_\alpha(z)*h(z) + \overline{\mathcal{S}_\alpha(z)*g(z)}}\right] - \gamma\right\} \ge 0 \qquad (۱۸.۳)$$

نامساوی بالا هم ارز است با

$$Re\left\{\frac{z + \left(\sum_{m=2}^{\infty}(m-\gamma)C_m(\alpha)|a_m|z^m - \sum_{m=1}^{\infty}(m+\gamma)C_m(\alpha)|b_m|\bar{z}^m\right)}{z + \sum_{m=2}^{\infty}C_m(\alpha)|a_m|z^m + \sum_{m=1}^{\infty}C_m(\alpha)|b_m|\bar{z}^m}\right\}$$
$$= Re\left\{\frac{(1-\gamma) + \left(\sum_{m=2}^{\infty}(m-\gamma)C_m(\alpha)|a_m|z^{m-1} - \frac{\bar{z}}{z}\sum_{m=1}^{\infty}(m+\gamma)C_m(\alpha)|b_m|\bar{z}^{m-1}\right)}{1 + \sum_{m=2}^{\infty}C_m(\alpha)|a_m|z^{m-1} + \frac{\bar{z}}{z}\sum_{m=1}^{\infty}C_m(\alpha)|b_m|\bar{z}^{m-1}}\right\} \ge 0.$$

این شرایط برای همه‌ی مقادیر z که $|z| = r < 1$، برقرار می‌باشد. با انتخاب ϕ به فرم (۱۰.۳) داریم:

$$\frac{(1-\gamma) - (1+\gamma)b_1 - \left(\sum_{m=2}^{\infty}(m-\gamma)C_m(\alpha)|a_m|r^{m-1} + (m+\gamma)C_m(\alpha)|b_m|r^{m-1}\right)}{1 + |b_1| + \left(\sum_{m=2}^{\infty}C_m(\alpha)|a_m| + \sum_{m=1}^{\infty}C_m(\alpha)|b_m|\right)r^{m-1}} \ge 0 \qquad (۱۹.۳)$$

اگر شرط (۱۷.۳) برقرار نباشد آنگاه برای r به اندازه‌ی کافی نزدیک به ۱، شمارنده در (۱۹.۳) منفی خواهد بود. بنابراین نقطه‌ی $z_0 = r_0$ در $(0,1)$ موجود است که خارج قسمت در (۱۹.۳) منفی است. که با فرض $f \in \mathcal{PV}_{\mathcal{H}}(\alpha,\gamma)$ تناقض دارد.

کران ضرایب نامساوی (۱۷.۳) وقتی $f \in \mathcal{PV}_{\mathcal{H}}(\alpha,\gamma)$ باشد، برقرار است. و بنابراین اثبات قضیه کامل می‌شود. □

۳.۳ نقاط فرین

در این بخش کران‌های انحراف را برای توابع $f \in \mathcal{PV}_{\mathcal{H}}(\alpha,\gamma)$ بدست می‌آوریم که به نتایج پوششی برای $\mathcal{PV}_{\mathcal{H}}(\alpha,\gamma)$ منتهی می‌شود. اگر در (۱۰.۳) $\phi = \frac{2\pi}{k}$ را قرار دهیم آنگاه نتیجه‌ی زیر را خواهیم داشت.

نتیجه ۱.۳.۳. *شرط لازم و کافی برای $f = h + \overline{g}$ که در رابطه‌ی (۱۷.۳) صدق کند، به‌صورت زیر می‌باشد:*

$$\arg(a_m) = \pi - ۲(m-۱)\frac{\pi}{k}, \quad (۲۰.۳)$$

$$\arg(b_m) = ۲\pi - ۲(m-۱)\frac{\pi}{k} \qquad (k = ۱, ۲, ۳, \cdots) \quad (۲۱.۳)$$

قضیه ۲.۳.۳. *اگر $f \in \mathcal{PV_H}(\alpha, \gamma)$ باشد. آنگاه*

$$|f(z)| \leq (۱ + |b_۱|)r + \frac{۱}{C_۲(\alpha_۱)}\left(\frac{۱-\gamma}{۲-\gamma} - \frac{۱+\gamma}{۲-\gamma}|b_۱|\right) r^۲$$

و

$$|f(z)| \geq (۱ - |b_۱|)r - \frac{۱}{C_۲(\alpha)}\left(\frac{۱-\gamma}{۲-\gamma} - \frac{۱+\gamma}{۲-\gamma}|b_۱|\right) r^۲.$$

برهان. فقط طرف راست قضیه را اثبات می‌کنیم.
فرض کنیم $f \in \mathcal{PV_H}(\alpha, \gamma)$ باشد. با قدرمطلق گرفتن از f بدست می‌آوریم:

$$|f(z)| \leq (۱ + |b_۱|)r + \sum_{m=۲}^{\infty}(|a_m| + |b_m|)r^m$$
$$\leq (۱ + b_۱)r + r^۲\sum_{m=۲}^{\infty}(|a_m| + |b_m|).$$

نتیجه می‌گیریم که:

$$\begin{aligned}|f(z)| &\leq (۱ + |b_۱|)r \\ &+ \frac{۱}{C_۲(\alpha_۱)}\left(\frac{۱-\gamma}{۲-\gamma}\right)\sum_{m=۲}^{\infty}\left[\left(\frac{۲-\gamma}{۱-\gamma}\right)C_۲(\alpha_۱)|a_m| + \left(\frac{۲-\gamma}{۱-\gamma}\right)C_۲(\alpha_۱)|b_m|\right] r^۲ \\ &\leq (۱ + |b_۱|)r + \frac{۱}{C_۲(\alpha_۱)}\left(\frac{۱-\gamma}{۲-\gamma}\right)\left[۱ - \frac{۱+\gamma}{۱-\gamma}|b_۱|\right] r^۲ \\ &\leq (۱ + |b_۱|)r + \frac{۱}{C_۲(\alpha_۱)}\left(\frac{۱-\gamma}{۲-\gamma} - \frac{۱+\gamma}{۲-\gamma}|b_۱|\right) r^۲,\end{aligned}$$

□

بنابراین نامساوی مورد نظر برقرار می‌باشد. با استفاده از قضیه ۲.۳.۳ و نتیجه ۲۰.۳ نتیجه زیر را بدست می‌آوریم.

نتیجه ۳.۳.۳. *فرض کنیم $f = h + \overline{g}$ به فرم (۲.۳) باشد، به‌طوری‌که $f \in \mathcal{PV_H}(\alpha, \gamma)$، آنگاه*

$$\left\{\omega : |\omega| < \frac{۲C_۲(\alpha_۱) - ۱ - [C_۲(\alpha_۱) - ۱]\gamma}{(۲-\gamma)C_۲(\alpha_۱)} - \frac{۲C_۲(\alpha_۱) - ۱ - [C_۲(\alpha_۱) + ۱]\gamma}{(۲-\gamma)C_۲(\alpha_۱)}b_۱\right\} \subset f(\mathcal{U}).$$

برای هر خانواده فشرده، ماکزیمم یا مینیمم بخش حقیقی هر تابعک خطی پیوسته در یکی از نقاط فرین پوسته محدب اتفاق می‌افتد. نقاط فرین را برای کلاس $\mathcal{PV_H}(\alpha, \gamma)$ بدست می‌آوریم.

قضیه ۴.۳.۳. *پوسته محدب بسته‌ی $\mathcal{PV_H}(\alpha, \gamma)$ را که با $clco\mathcal{PV_H}(\alpha, \gamma)$ نشان می‌دهیم به‌صورت زیر می‌باشد.*

$$\left\{f(z) = z + \sum_{m=۲}^{\infty}|a_m|z^m + \overline{\sum_{m=۱}^{\infty}|b_m|z^m}, : \sum_{m=۲}^{\infty}m[|a_m| + |b_m|] < ۱ - b_۱\right\} \quad (۲۲.۳)$$

با جایگذاری $\lambda_m = \frac{1-\gamma}{(m-\gamma)C_m(\alpha)}$ *و* $\mu_m = \frac{1-\gamma}{(m+\gamma)C_m(\alpha)}$ *، آنگاه برای* b_1*، نقاط فرین برای* $clco\mathcal{PV}_{\mathcal{H}}(\alpha,\gamma)$ *به‌صورت زیر می‌باشد:*

$$\left\{z+\lambda_m x z^m+\overline{b_1 z}\right\} \cup \left\{z+\overline{b_1 z+\mu_m x z^m}\right\} \tag{۲۳.۳}$$

که $m \geq 2$ *و* $|x| = 1-|b_1|$ *می باشد.*

برهان. تابع f را در $clco\mathcal{PV}_{\mathcal{H}}(\alpha,\gamma)$ به‌صورت زیر بیان می‌کنیم:

$$f(z) = z+\sum_{m=2}^{\infty}|a_m|e^{i\eta_m}z^m+\overline{b_1 z}+\overline{\sum_{m=2}^{\infty}|b_m|e^{i\delta_m}z^m},$$

که ضرایب در نامساوی (۱۱.۳) صدق می‌کند. قرار می‌دهیم:

$$h_1(z)=z, g_1(z)=b_1 z, h_m(z)=z+\lambda_m e^{i\eta_m}z^m, g_m(z)=b_1 z+\mu_m e^{i\delta_m}z^m \quad m=2,3,\cdots \tag{۲۴.۳}$$

داریم:

$$X_m=\frac{|a_m|}{\lambda_m}, \quad Y_m=\frac{|b_m|}{\mu_m}, m=2,3,\cdots \text{و} X_1=1-\sum_{m=2}^{\infty}X_m, Y_1=1-\sum_{m=2}^{\infty}Y_m, \tag{۲۵.۳}$$

قرار می‌دهیم:

$$f(z)=\sum_{m=1}^{\infty}\left(X_m h_m(z)+Y_m g_m(z)\right).$$

در حالت خاص با جایگذاری داریم:

$$f_1(z)=z+\overline{b_1 z} \quad f_m(z)=z+\lambda_m x z^m+\overline{b_1 z}+\overline{\mu_m y z^m},$$

$$(m\geq 2, |x|+|y|=1-|b_1|) \tag{۲۶.۳}$$

بنابراین نقاط فرین $clco\mathcal{PV}_{\mathcal{H}}(\alpha,\gamma) \subset \{f_m(z)\}$ می‌باشد. $f_1(z)$ نقطه فرین نیست، $f_1(z)$ را به‌صورت زیر بیان می‌کنیم:

$$f_1(z)=\frac{1}{2}\left\{f_1(z)+\lambda_2(1-|b_1|)z^2\right\}+\frac{1}{2}\left\{f_1(z)-\lambda_2(1-|b_1|)z^2\right\} \tag{۲۷.۳}$$

که یک ترکیب خطی محدب از توابع $clco\mathcal{PV}_{\mathcal{H}}$ می‌باشد. اگر $|x| \neq 0$ و $|y| \neq 0$ باشد، f_m نقطه فرین نیست. یک ترکیب خطی محدب از توابع را در $clco\mathcal{PV}_{\mathcal{H}}$ بیان می‌کنیم. فرض کنیم $|y| \geq |x|$، با انتخاب $\epsilon > 0$ به‌طوری‌که $\epsilon < |\frac{x}{y}|$ باشد و با جایگذاری $A=1+\epsilon$ و $B=1-|\frac{\epsilon x}{y}|$ داریم:

$$t_1(z)=z+\lambda_m A x z^m+\overline{b_1 z+\mu_m y B z^m}$$

و

$$t_2(z)=z+\lambda_m(2-A)xz^m+\overline{b_1 z+\mu_m y(2-B)z^m}$$

که در $clco\mathcal{PV}_H(\alpha,\gamma)$ می‌باشند، و

$$f_m(z)=\frac{۱}{۲}\{t_۱(z)+t_۲(z)\}$$

اکسترمم ضرایب کران‌ها نشان می‌دهد که توابع به فرم (۲۳.۳) نقاط فرین برای $clco\mathcal{PV}_{\mathcal{H}}(\alpha,\gamma)$ می‌باشد و اثبات کامل می‌شود. □

۴.۳ رابطه‌ی شمول

δ- همسایگی برای تابع $f(z)$ به فرم(۲.۳) به‌صورت زیر تعریف می‌شود :

$$N_\delta(f)=\Big\{F(z)=z+\sum_{m=۲}^{\infty}A_mz^m+\sum_{m=۱}^{\infty}\overline{B_mz^m},\sum_{m=۲}^{\infty}m\left(|a_m-A_m|+|b_m-B_m|\right)+|b_۱-B_۱|\le\delta\Big\}.$$

در حالت خاص δ همسایگی نرمالیزه از f به صورت زیر بیان می‌شود:

$$N_\delta(f)=\Big\{F:\sum_{m=۲}^{\infty}C_m(\alpha)\left[(m-\gamma)|a_m-A_m|+(m+\gamma)|b_m-B_m|\right]+(۱-\gamma)|b_۱-B_۱|\le(۱-\gamma)\delta\Big\}$$

قضیه ۱.۴.۳ *فرض کنیم f به فرم (۲.۳) بیان شود. اگر f در شرایط زیر صدق کند:*

$$\sum_{m=۲}^{\infty}m(m-\gamma)|a_m|C_m(\alpha)+\sum_{m=۱}^{\infty}m(m+\gamma)|b_m|C_m(\alpha)\le(۱-\gamma),\quad ۰\le\gamma<۱,\qquad(۲۸.۳)$$

$$\delta=\frac{۱-\gamma}{۲-\gamma}\left(۱-\frac{۱+\gamma}{۱-\gamma}|b_۱|\right),\qquad(۲۹.۳)$$

آنگاه $N_\delta(f)\subset\mathcal{PS}_{\mathcal{H}}(\alpha,\gamma)$.

برهان. فرض کنیم f در (۲۸.۳) صدق کند، و $F(z)$ به‌صورت زیر باشد:

$$F(z)=z+\overline{B_۱z}+\sum_{m=۲}^{\infty}\left(A_mz^m+\overline{B_mz^m}\right)\qquad(۳۰.۳)$$

که متعلق به $N(f)$ می‌باشد، بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}&(۱+\gamma)|B_۱| + \sum_{m=۲}^{\infty} ((m-\gamma)|A_m| + (m+\gamma)|B_m|)\, C_m(\alpha)\\ &\leq (۱+\gamma)|B_۱ - b_۱| + (۱+\gamma)|b_۱| + \sum_{m=۲}^{\infty} C_m(\alpha)\,[(m-\gamma)|A_m - a_m| + (m+\gamma)|B_m - b_m|]\\ &+ \sum_{m=۲}^{\infty} C_m(\alpha)\,[(m-\gamma)|a_m| + (m+\gamma)|b_m|]\\ &\leq (۱-\gamma)\delta + (۱+\gamma)|b_۱| + \frac{۱}{۲-\gamma}\sum_{m=۲}^{\infty} mC_m(\alpha)\,((m-\gamma)|a_m| + (m+\gamma)|b_m|]\\ &\leq (۱-\gamma)\delta + (۱+\gamma)|b_۱| + \frac{۱}{۲-\gamma}\,[(۱-\gamma) - (۱+\gamma)|b_۱|] \leq ۱-\gamma.\end{aligned}$$

بنابراین برای $\delta = \frac{۱-\gamma}{۲-\gamma}(۱ - \frac{۱+\gamma}{۱-\gamma}|b_۱|)$، نتیجه می‌گیریم که $F(z) \in \mathcal{WS}_H(\alpha,\gamma)$ بدین ترتیب اثبات قضیه کامل می‌شود. □

عملگر انتگرال برناردی لیبرا $\mathcal{L}_c(f)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{L}_c(f) = \frac{c+۱}{z^c}\int_۰^z t^{c-۱} f(t)\mathrm{d}t, \quad c > -۱$$

قضیه ۲.۴.۳. *فرض کنیم $f(z) \in \mathcal{PV}_{\mathcal{H}}(\alpha,\gamma)$ باشد. آنگاه $\mathcal{L}_c(f(z)) \in \mathcal{PV}_{\mathcal{H}}(\alpha,\gamma)$*

برهان. از تعریف $\mathcal{L}_c(f(z))$ داریم:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_c(f) &= \frac{c+۱}{z^c}\int_۰^z t^{c-۱}\left[h(t) + \overline{g(t)}\right]\mathrm{d}t\\ &= \frac{c+۱}{z^c}\left(\int_۰^z t^{c-۱}\left(t - \sum_{m=۲}^{\infty} a_m t^n\right)\mathrm{d}t + \overline{\int_۰^z t^{c-۱}\left(\sum_{m=۱}^{\infty} b_m t^m\right)\mathrm{d}t}\right) \qquad (۳۱.۳)\\ &= z - \sum_{m=۲}^{\infty} A_m z^m + \sum_{m=۱}^{\infty} B_m z^m\end{aligned}$$

که

$$A_m = \frac{c+۱}{c+m}a_m; B_m = \frac{c+۱}{c+m}b_m \qquad (۳۲.۳)$$

بنابراین

$$\begin{aligned}&\sum_{m=۱}^{\infty}\left(\frac{m+\gamma}{۱-\gamma}\frac{c+۱}{c+m}|b_m|\right)C_m(\alpha)\\ &\leq \sum_{m=۱}^{\infty}\left(\frac{m-\gamma}{۱-\gamma}|a_m| + \frac{m+\gamma}{۱-\gamma}|b_m|\right)C_m(\alpha) \leq ۲(۱-\gamma).\end{aligned}$$

با توجه به این‌که $f(z) \in \mathcal{PV}_{\mathcal{H}}(\alpha,\gamma)$ و با استفاده از قضیه ۲.۲.۳ نتیجه می‌گیریم که

$$\mathcal{L}_c(f(z)) \in \mathcal{PV}_{\mathcal{H}}(\alpha,\gamma)$$

می‌باشد. □

قضیه ۳.۴.۳. *برای* $\circ \le \delta \le \gamma < ۱$، *فرض کنیم* $f(z) \in \mathcal{PV}_{\mathcal{H}}(\alpha,\gamma), F(z) \in \mathcal{PV}_{\mathcal{H}}(\alpha,\delta)$. *آنگاه* $f(z) * F(z) \in \mathcal{PV}_{\mathcal{H}}(\alpha,\gamma) \subset \mathcal{PV}_{\mathcal{H}}(\alpha,\delta)$

برهان. فرض کنیم

$$f(z) = z - \sum_{m=۲}^{\infty} a_m z^m + \sum_{m=۱}^{\infty} \overline{b_m} \bar{z}^m \in \mathcal{PV}_{\mathcal{H}}(\alpha,\gamma) \qquad (۳۳.۳)$$

و

$$F(z) = z - \sum_{m=۲}^{\infty} A_m z^m + \sum_{m=۱}^{\infty} \overline{B_m} \bar{z}^m \in \mathcal{PV}_{\mathcal{H}}(\alpha,\delta). \qquad (۳۴.۳)$$

آنگاه

$$f(z) * F(z) = z - \sum_{m=۲}^{\infty} a_m A_m z^m + \sum_{m=۱}^{\infty} \bar{b}_m \overline{B}_m \bar{z}^m. \qquad (۳۵.۳)$$

برای $f(z) * F(z) \in \mathcal{PV}_{\mathcal{H}}(\alpha,\delta)$ توجه کنید که $|A_m| \le ۱$ و $|B_m| \le ۱$. حال طبق قضیه‌ی ۲.۲.۳ داریم:

$$\begin{aligned} &\sum_{m=۲}^{\infty} \frac{[m-\delta]C_m(\alpha)}{۱-\delta}|a_m||A_m| + \sum_{m=۱}^{\infty} \frac{[m+\delta]C_m(\alpha)}{۱-\delta}|b_m||B_m| \\ &\le \sum_{m=۲}^{\infty} \frac{[m-\delta]C_m(\alpha)}{۱-\delta}|a_m| + \sum_{m=۱}^{\infty} \frac{[m+\delta]C_m(\alpha)}{۱-\delta}|b_m| \end{aligned} \qquad (۳۶.۳)$$

و $\circ \le \delta \le \gamma < ۱$

$$\le \sum_{m=۲}^{\infty} \frac{[m-\gamma]C_m(\alpha)}{۱-\gamma}|a_m| + \sum_{m=۱}^{\infty} \frac{[m+\gamma]C_m(\alpha)}{۱-\gamma}|b_m| \le ۱ \qquad (۳۷.۳)$$

طبق قضیه‌ی ۲.۲.۳، $f(z) \in \mathcal{PV}_{\mathcal{H}}(\alpha,\gamma)$ می‌باشد. بنابراین

$$f(z) * F(z) \in \mathcal{PV}_{\mathcal{H}}(\alpha,\gamma) \subset \mathcal{PV}_{\mathcal{H}}(\alpha,\delta)$$

□

۵.۳ توابع همساز شبه ستاره‌گون در ناحیه سهمی‌گون $\mathcal{PG}_{\mathcal{H}}(\alpha,\gamma)$

برای $\circ \le \gamma < ۱$، فرض کنیم $\mathcal{PG}_{\mathcal{H}}(\alpha,\gamma)$ زیرکلاسی از توابع همساز شبه ستاره‌گون $f \in \mathcal{H}$ به فرم (۱.۳) باشد، به‌طوری‌که:

$$Re\left\{(۱+e^{i\psi})\frac{z(S_\alpha(z) * f(z))'}{z'(S_\alpha(z) * f(z))} - e^{i\psi}\right\} \ge \gamma \qquad (۳۸.۳)$$

که $(S_\alpha(z) * f(z))' = \frac{\partial}{\partial\theta}(S_\alpha(re^{i\theta}) * f(re^{i\theta}))$، $z' = \frac{\partial}{\partial\theta}(z = re^{i\theta})$ و $S_\alpha(z)$ به فرم (۴.۳) تعریف شده است.

همچنین فرض کنیم $\mathcal{VG}_{\mathcal{H}}(\alpha,\gamma) = \mathcal{PG}_{\mathcal{H}}(\alpha,\gamma) \bigcap \mathcal{V}_{\mathcal{H}}$ که $\mathcal{V}_{\mathcal{H}}$ کلاسی از توابع همساز می‌باشد. عدد حقیقی ϕ موجود است به‌طوری‌که

$$\eta_m + (m-۱)\phi \equiv \pi (mod ۲\pi), \quad \delta_m + (m-۱)\phi \equiv \circ, m \ge ۲ \qquad (۳۹.۳)$$

که $\eta_m = \arg(a_m)$ و $\delta_m = \arg(b_m)$.

در این بخش، به بررسی توابع متعلق به کلاس $\mathcal{PG_H}(\alpha,\gamma)$ می‌پردازیم و نشان می‌دهیم این شرایط برای توابع متعلق به کلاس $\mathcal{VG_H}(\alpha,\gamma)$ نیز برقرار است. همچنین نقاط فرین و کران‌های انحراف را در این رده بررسی می‌کنیم.

قضیه ۱.۵.۳ *فرض کنیم $f = h + \overline{g}$ به فرم (۲.۳) باشد. اگر*

$$\sum_{m=2}^{\infty}\left(\frac{2m-1-\gamma}{1-\gamma}|a_m| + \frac{2m+1+\gamma}{1-\gamma}|b_m|\right) C_m(\alpha) \le 1 - \frac{3+\gamma}{3-\gamma}b_1 \qquad (۴۰.۳)$$

$0 \le \gamma < 1$، آنگاه $f \in \mathcal{PG_H}(\alpha,\gamma)$ می‌باشد.

برهان. ابتدا نشان می‌دهیم که اگر نامساوی (۱۰.۳) برای ضرایب $f = h + \overline{g}$ صدق کند، آنگاه رابطه (۸.۳) برقرار است. با استفاده از (۷.۳) و (۸.۳) داریم:

$$Re\left\{(1+e^{i\psi})\left[\frac{(S_\alpha(z)*h(z))' - \overline{(S_\alpha(z)*g(z))'}}{(S_\alpha(z)*h(z)) + \overline{(S_\alpha(z)*g(z))}}\right] - e^{i\psi}\right\} = Re\frac{A(z)}{B(z)} \qquad (۴۱.۳)$$

که

$$A(z) = (1+e^{i\psi})\left[(S_\alpha(z)*h(z))' - \overline{z(S_\alpha(z)*g(z))'}\right] - e^{i\psi}\left[(S_\alpha(z)*h(z)) + \overline{(S_\alpha(z)*g(z))}\right] \qquad (۴۲.۳)$$

و

$$B(z) = (S_\alpha(z)*h(z)) + \overline{(S_\alpha(z)*g(z))} \qquad (۴۳.۳)$$

ادعا می‌کنیم که $Re(\omega) \ge \gamma$ اگر و تنها $|1+\gamma-\omega| \ge |1-\gamma+\omega|$،کافیست نشان دهیم:

$$|A(z) + (1-\gamma)B(z)| - |A(z) - (1+\gamma)B(z)| \ge 0 \qquad (۴۴.۳)$$

با جایگذاری $A(z)$ و $B(z)$ در نامساوی (۱۱.۳) داریم:

$$\begin{aligned}
&|A(z) + (1-\gamma)B(z)| - |A(z) - (1+\gamma)B(z)| \\
&\ge (2-\gamma)|z| - \sum_{m=2}^{\infty}(2m-\gamma)C_m(\alpha)|a_m||z|^m - \sum_{m=1}^{\infty}(2m+\gamma)C_m(\alpha)|b_m||z|^m \\
&- \gamma|z| - \sum_{m=2}^{\infty}(2m-2-\gamma)C_m(\alpha)|a_m||z|^m - \sum_{m=1}^{\infty}(2m+2+\gamma)C_m(\alpha)|b_m||z|^m \\
&\ge 2(1-\gamma)|z|\left\{1 - \frac{3+\gamma}{1-\gamma}b_1 - \left(\sum_{m=2}^{\infty}\left[\frac{2m-1-\gamma}{1-\gamma}C_m(\alpha)|a_m| + \frac{2m+1+\gamma}{1-\gamma}C_m(\alpha)|b_m|\right]\right)\right\} \\
&\ge 0
\end{aligned} \qquad (۴۵.۳)$$

بنابراین با توجه به نامساوی (۱۰.۳) نتیجه می‌گیریم که $f \in \mathcal{PG_H}(\alpha,\gamma)$ می‌باشد. □

قضیه ۲.۵.۳ *فرض کنیم $f = h + \overline{g}$ به فرم (۲.۳) باشد. آنگاه $f \in \mathcal{VG_H}(\alpha,\gamma)$ اگر و تنها اگر*

$$\sum_{m=2}^{\infty}\left\{\frac{2m-1-\gamma}{1-\gamma}|a_m| + \frac{2m+1+\gamma}{1-\gamma}|b_m|\right\} C_m(\alpha) \le 1 - \frac{3+\gamma}{1-\gamma}b_1 \qquad (۴۶.۳)$$

$۰ \le \gamma < ۱$

برهان. با توجه به این‌که $\mathcal{VG}_{\mathcal{H}}(\alpha,\gamma) \subset \mathcal{PG}_{\mathcal{H}}(\alpha,\gamma)$، کافیست یک طرف قضیه را اثبات کنیم. فرض کنیم $f \in \mathcal{VG}_{\mathcal{H}}(\alpha,\gamma)$ باشد، آنگاه طبق (۴.۳) و (۸.۳) داریم:

$$Re\left\{(۱+e^{i\psi})\left[\frac{z(S_\alpha(\alpha)*h(z))' - \overline{z(S_\alpha(z)*g(z))'}}{(S_\alpha(z)*h(z)) + \overline{(S_\alpha(z)*g(z))}}\right] - (e^{i\psi}+\gamma)\right\} \ge ۰ \qquad (۴۷.۳)$$

نامساوی بالا هم ارز است با

$$Re\left\{\frac{z + (\sum_{m=۲}^{\infty}[m(۱+e^{i\psi}) - \gamma - e^{i\psi}]C_m(\alpha)|a_m|z^m - \sum_{m=۱}^{\infty}[m(۱+e^{i\psi}) + \gamma + e^{i\psi}]C_m(\alpha)|b_m|\overline{z}^m)}{z + \sum_{m=۲}^{\infty}C_m(\alpha)|a_m|z^m + \sum_{m=۱}^{\infty}C_m(\alpha)|b_m|\overline{z}^m}\right\}$$
$$= Re\left\{\frac{(۱-\gamma) + \sum_{m=۲}^{\infty}C_m(\alpha)[m(۱+e^{i\psi}) - \gamma - e^{i\psi}]|a_m|z^{m-۱}}{۱ + \sum_{m=۲}^{\infty}C_m(\alpha)|a_m|z^{m-۱} + \frac{\overline{z}}{z}\sum_{m=۱}^{\infty}C_m(\alpha)|b_m|\overline{z}^{m-۱}}\right\}$$
$$+ Re\left\{\frac{-\frac{\overline{z}}{z}\sum_{m=۱}^{\infty}[m(۱+e^{i\psi}) + \gamma + e^{i\psi}]|b_m|\overline{z}^{m-۱}}{۱ + \sum_{m=۲}^{\infty}C_m(\alpha)|a_m|z^{m-۱} + \frac{\overline{z}}{z}\sum_{m=۱}^{\infty}C_m(\alpha)|b_m|\overline{z}^{m-۱}}\right\} \ge ۰. \qquad (۴۸.۳)$$

این شرایط برای همه مقادیر z که $|z| = r < ۱$. برقرار می‌باشد. با انتخاب ϕ به فرم (۹.۳) و با توجه به این‌که $Re(-e^{i\psi}) \ge -|e^{i\psi}| = -۱$ ، همچنین از نامساوی بالا داریم:

$$\frac{(b_۱-\gamma) - [\sum_{m=۲}^{\infty}(۲m-۱-\gamma)C_m(\alpha)|a_m|r^{m-۱} + (۲m+۱+\gamma)C_m(\alpha)|b_m|r^{m-۱}]}{۱ - \sum_{m=۲}^{\infty}C_m(\alpha)|a_m|r^{m-۱} + \sum_{m=۱}^{\infty}C_m(\alpha)|b_m|r^{m-۱}} \ge ۰ \qquad (۴۹.۳)$$

اگر شرط (۴۶.۳) برقرار نباشد. آنگاه برای r به اندازه کافی نزدیک به ۱، شمارنده در (۴۹.۳) منفی خواهد بود. بنابراین نقطه‌ی $z_۰ = r_۰$ در $(۰,۱)$ وجود دارد که خارج قسمت در (۴۹.۳) منفی است، که با فرض

$$f \in \mathcal{VG}_{\mathcal{H}}(\alpha,\gamma)$$

تناقض دارد. در نتیجه کران ضرایب نامساوی (۴۶.۳) وقتی $f \in \mathcal{VG}_{\mathcal{H}}(\alpha,\gamma)$ می‌باشد، برقرار است و بنابراین اثبات قضیه کامل می‌شود. □

اگر در رابطه (۹.۳)، $\Phi = \frac{۲\pi}{k}$ را قرار دهیم آنگاه نتیجه زیر را خواهیم داشت.

نتیجه ۳.۵.۳. *شرط لازم وکافی برای این‌که $f = h + \overline{g}$ در رابطه‌ی (۴۶.۳) صدق کند، به‌صورت زیر می‌باشد.*

$$\arg(a_m) = \pi - ۲(m-۱)\frac{\pi}{k}, \quad (k = ۱,۲,۳,\ldots) \qquad (۵۰.۳)$$

و

$$\arg(b_m) = ۲\pi - ۲(m-۱)\frac{\pi}{k} \quad (k = ۱,۲,۳,\ldots) \qquad (۵۱.۳)$$

در این بخش کران‌های انحراف را برای توابع $f \in \mathcal{VG}_{\mathcal{H}}(\alpha,\gamma)$ بدست می‌آوریم که به نتایج پوششی برای $\mathcal{VG}_{\mathcal{H}}(\alpha,\gamma)$ منتهی می‌شود.

قضیه ۴.۵.۳. *اگر $f \in \mathcal{VG}_{\mathcal{H}}(\alpha,\gamma)$ باشد، آنگاه*

$$|f(z)| \leq (1+|b_1|)r + \frac{1}{C_2(\alpha_1)}\left(\frac{1-\gamma}{3-\gamma} - \frac{3+\gamma}{3-\gamma}|b_1|\right) r^2 \tag{۵۲.۳}$$

و

$$|f(z)| \geq (1-|b_1|)r - \frac{1}{C_2(\alpha)}\left(\frac{1-\gamma}{3-\gamma} - \frac{3+\gamma}{3-\gamma}|b_1|\right) r^2. \tag{۵۳.۳}$$

برهان. فقط طرف راست قضیه را اثبات می‌کنیم.فرض کنیم $f \in \mathcal{VG}_{\mathcal{H}}(\alpha,\gamma)$ باشد، با قدرمطلق گرفتن از f بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} |f(z)| &\leq (1+|b_1|)r + \sum_{m=2}^{\infty}(|a_m|+|b_m|)r^m \\ &\leq (1+b_1)r + r^2\sum_{m=2}^{\infty}(|a_m|+|b_m|). \end{aligned} \tag{۵۴.۳}$$

نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{aligned} |f(z)| &\leq (1+|b_1|)r + \frac{1}{C_2(\alpha)}\left(\frac{1-\gamma}{3-\gamma}\right)\sum_{m=2}^{\infty}\left[\left(\frac{3-\gamma}{1-\gamma}\right)C_2(\alpha)|a_m| + \left(\frac{3-\gamma}{1-\gamma}\right)C_2(\alpha)|b_m|\right] r^2 \\ &\leq (1+|b_1|)r + \frac{1}{C_2(\alpha)}\left(\frac{1-\gamma}{3-\gamma}\right)\left[1 - \frac{3+\gamma}{1-\gamma}|b_1|\right] r^2 \\ &\leq (1+|b_1|)r + \frac{1}{C_2(\alpha)}\left(\frac{1-\gamma}{3-\gamma} - \frac{3+\gamma}{3-\gamma}|b_1|\right) r^2, \end{aligned} \tag{۵۵.۳}$$

بنابراین نامساوی مورد نظر برقرار می‌باشد. □

با استفاده از قضیه بالا و نتیجه ۲.۳.۳ نتیجه زیر را بدست می‌آوریم.

نتیجه ۵.۵.۳. *فرض کنیم $f = h + \overline{g}$ به فرم (۲.۳) باشد، به‌طوری‌که $f \in \mathcal{VG}_{\mathcal{H}}(\alpha,\gamma)$ ، آنگاه*

$$\left\{\omega : |\omega| < \frac{3C_m(\alpha) - 1 - [C_m(\alpha)-1]\gamma}{(3-\gamma)C_m(\alpha)}(1-b_1)\right\} \subset f(\mathcal{U}). \tag{۵۶.۳}$$

برای هر خانواده فشرده، ماکزیمم یا مینیمم بخش حقیقی هر تابعک خطی پیوسته در یکی از نقاط فرین پوسته محدب می‌باشد. نقاط فرین را برای کلاس $\mathcal{VG}_{\mathcal{H}}(\alpha,\gamma)$ بدست می‌آوریم.

قضیه ۶.۵.۳. *پوسته محدب بسته‌ی $\mathcal{VG}_{\mathcal{H}}(\alpha,\gamma)$ را که با $clco\mathcal{VG}_{\mathcal{H}}(\alpha,\gamma)$ نشان می‌دهیم به‌صورت زیر می‌باشد:*

$$\left\{f(z) = z + \sum_{m=2}^{\infty}|a_m|z^m + \overline{\sum_{m=1}^{\infty}|b_m|z^m}, : \sum_{m=2}^{\infty} m[|a_m|+|b_m|] < 1 - b_1\right\} \tag{۵۷.۳}$$

با جایگذاری $\lambda_m = \dfrac{(1-\gamma)}{(2m-1-\gamma)C_m(\alpha)}$ و $\mu_m = \dfrac{(1+\gamma)}{(2m+1+\gamma)C_m(\alpha)}$، آنگاه برای b_1، نقاط فرین برای $clco\mathcal{VG}_{\mathcal{H}}(\alpha,\gamma)$ به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\{z + \lambda_m x z^m + \overline{b_1 z}\} \cup \{z + \overline{b_1 z + \mu_m x z^m}\} \tag{۵۸.۳}$$

که

$$m \geq 2 \text{ و } \quad |x| = 1 - |b_1|. \tag{۵۹.۳}$$

برهان. تابع f را در $clco\mathcal{VG_H}(\alpha,\gamma)$ به‌صورت زیر بیان می‌کنیم:

$$f(z)=z+\sum_{m=2}^{\infty}|a_m|e^{i\eta m}z^m+\overline{b_1z+\sum_{m=2}^{\infty}|b_m|e^{i\delta_m}z^m} \tag{۶۰.۳}$$

که ضرایب در نامساوی (۱۰.۳) صدق می‌کند. قرار می‌دهیم:

$$h_1(z)=z, g_1(z)=b_1z, h_m(z)=z+\lambda_m e^{i\eta_m}z^m, g_m(z)=b_1z+\mu_m e^{i\delta_m}z^m \qquad m=2,3,\dots \tag{۶۱.۳}$$

داریم:

$$X_m=\frac{|a_m|}{\lambda_m}, Y_m=\frac{|b_m|}{\mu_m}, m=2,3,\cdots X_1=1-\sum_{m=2}^{\infty}X_m; Y_1=1-\sum_{m=2}^{\infty}Y_m, \tag{۶۲.۳}$$

قرار می‌دهیم:

$$f(z)=\sum_{m=1}^{\infty}(X_mh_m(z)+Y_mg_m(z)). \tag{۶۳.۳}$$

در حالت خاص، با جایگذاری داریم:

$$f_1(z)=z+\overline{b_1z},\quad f_m(z)=z+\lambda_m xz^m+\overline{b_1z}+\overline{\mu_m yz^m}, \tag{۶۴.۳}$$

$$(m\geq 2, |x|+|y|=1-|b_1|)$$

بنابراین نقاط فرین $\{f_m(z)\}\subset clco\mathcal{VG_H}(\alpha,\gamma)$. $f_1(z)$ نقطه فرین نیست.$f_1(z)$ به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$f_1(z)=\frac{1}{2}\left\{f_1(z)+\lambda_2(1-|b_1|)z^2\right\}+\frac{1}{2}\left\{f_1(z)-\lambda_2(1-|b_1|)z^2\right\} \tag{۶۵.۳}$$

که یک ترکیب خطی محدب از توابع در $clco\mathcal{VG_H}(\alpha,\gamma)$ است.
اگر $|x|\neq 0$ و $|y|\neq 0$ باشد، f_m نقطه فرین نیست. یک ترکیب خطی محدب از توابع در $clco\mathcal{VG_H}(\alpha,\gamma)$ بیان می‌کنیم. فرض کنیم$|y|\geq|x|$.با انتخاب $\epsilon>0$ به‌طوری‌که $\epsilon<\frac{|x|}{|y|}$ باشد و با جایگذاری $A=1+\epsilon$ و $B=1-|\frac{\epsilon x}{y}|$، داریم:

$$t_1(z)=z+\lambda_m Axz^m+\overline{b_1z+\mu_m yBz^m}$$

و

$$t_2(z)=z+\lambda_m(2-A)xz^m+\overline{b_1z+\mu_m y(2-B)z^m}$$

که در $clco\mathcal{VG_H}(\alpha,\gamma)$ می‌باشند و$f_m(z)=\frac{1}{2}\{t_1(z)+t_2(z)\}$ اکسترمم ضرایب کران‌ها نشان می‌دهد که توابع به فرم (۴۹.۳) نقاط فرین برای $clco\mathcal{VG_H}(\alpha,\gamma)$ می‌باشد و بنابراین اثبات کامل می‌شود. $\square$

۶.۳ رابطه شمول

δهمسایگی برای تابع $f(z)$ به فرم (۲.۳) به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$N_\delta(f)=\left\{F(z)=z+\sum_{m=2}^{\infty}A_mz^m+\sum_{m=1}^{\infty}\overline{B_mz^m},\sum_{m=2}^{\infty}m(|a_m-A_m|+|b_m-B_m|)+|b_1-B_1|\leq\delta\right\} \quad (۶۶.۳)$$

δ همسایگی نرمالیزه شده از f به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$N_\delta(f)=$$
$$\left\{F:\sum_{m=2}^{\infty}C_m(\alpha)[(2m-1-\gamma)(|a_m-A_m|+(2m+1+\gamma)|b_m-B_m|]+(1-\gamma)|b_1-B_1|\leq(1-\gamma)\delta\right\} \quad (۶۷.۳)$$

قضیه ۱.۶.۳. *فرض کنیم f به فرم (۲.۳) بیان شود. اگر f در شرایط زیر صدق کند:*

$$\sum_{m=2}^{\infty}m(2m-1-\gamma)|a_m|C_m(\alpha)+\sum_{m=1}^{\infty}m(2m+1+\gamma)|b_m|C_m(\alpha)\leq(1-\gamma) \quad (۶۸.۳)$$

و

$$\delta=\frac{1-\gamma}{3-\gamma}\left(1-\frac{3+\gamma}{1-\gamma}|b_1|\right),\ 0\leq\gamma<1 \quad (۶۹.۳)$$

آنگاه

$$N(f)\subset\mathcal{PG}_{\mathcal{H}}(\alpha,\gamma) \quad (۷۰.۳)$$

برهان. فرض کنیم f در رابطه (۱۷.۳) صدق کند و $F(z)$ به‌صورت زیر باشد.
$F(z)=z+\overline{B_1z}+\sum_{m=2}^{\infty}(A_mz^m+\overline{B_mz^m})$ که متعلق به $N(f)$ می‌باشد. بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}
&(3+\gamma)|B_1|+\sum_{m=2}^{\infty}\left((2m-1-\gamma)|A_m|+(2m+1+\gamma)|B_m|\right)C_m(\alpha)\\
&\leq(3+\gamma)|B_1-b_1|+(3+\gamma)|b_1|\\
&+\sum_{m=2}^{\infty}C_m(\alpha)[(2m-1-\gamma)|A_m-a_m|+(2m+1+\gamma)|B_m-b_m|]\\
&+\sum_{m=2}^{\infty}C_m(\alpha)[(2m-1-\gamma)|a_m|+(2m+1+\gamma)|b_m|]\\
&\leq(1-\gamma)\delta+(3+\gamma)|b_1|+\frac{1}{3-\gamma}\sum_{m=2}^{\infty}mC_m(\alpha)\left((2m-1-\gamma)|a_m|+(2m+1+\gamma)|b_m|\right)\\
&\leq(1-\gamma)\delta+(3+\gamma)|b_1|+\frac{1}{3-\gamma}[(1-\gamma)-(3+\gamma)|b_1|]\leq1-\gamma.
\end{aligned} \quad (۷۱.۳)$$

بنابراین برای $\delta=\frac{1-\gamma}{3-\gamma}\left(1-\frac{3+\gamma}{1-\gamma}|b_1|\right)$،نتیجه می‌گیریم $F(z)\in\mathcal{PG}_{\mathcal{H}}(\alpha,\gamma)$ می‌باشد و اثبات قضیه کامل می‌شود. □

مراجع

[1] Y. Avci, E. Zlotkiewicz, On harmonic univalent mappings, Ann. Univ. Mariae Curie-.Sklodowska Sect . A 44 (1990), 1-7.

[2] B.C.Carlson and S.B.Shaffer, Starlike and prestarlike hypergrometric func- tions, SIAM J.Math. Anal., 15 (2002), 737 - 745.

[3] J. Clunie, T. Sheil-Small, Harmonic univalent functions, Ann. Acad. Aci. Fenn. Ser. A Ž.I Math. 9 (1984), 3-25.

[4] P. L. Duren, A survey of harmonic mappings in the plane, Texas Tech. Univ. Math. Ser. 18. (1992), 1-15.

[5] J.M. Jahangiri and H. Silverman, Harmonic univalent functions with varying rrguments, Internat. J. Appl. Math, 8(2002), 267-275.

[6] J. M. Jahangiri, Harmonic functions starlike in the unit disk, J. Math. Anal. Appl, 235 (1999), 470–477.

[7] G.Murugusundaramoorthy, A class of Ruscheweyh-Type harmonic univalent functions with varying arguments, Southwest J. Pure Appl. Math., 2 (2003), 90-95.

[8] S. Ruscheweyh, New criteria for univalent functions, Proc. Amer. Math. Soc, 49 (1975), 109 -115.

[9] S. Ruscheweyh, Neighborhoods of univalent functions, Proc. Amer. Math. Soc, 81 (1981), 521 -528.

[10] S. Ruscheweyh, Linear operator between classes of prestarlike Functions, Comm. Math. Helv, 52 (1977), 497 -509.

[11] T. Sheil-Small, Constants for planar harmonic mappings, J. London Math. Soc. 2 (42), (1990), 237-248

[12] T.Rosy, B.A.Stephen, K.G.Subramanian and J.M.Jahangiri, Goodman-Ronning type harmonic univalent functions, Kyungpook Math. J, 41 (2001), 45-54.

[13] H. Silverman, Univalent functions with negative coefficients, Proc. Amer. Math. Soc. 51. (1975), 109-116.

[14] H. Silverman, Harmonic univalent functions with negative coefficients, J. Math. Anal. Appl. 220 (1998), 283-289.

[15] H. Silverman, E. M. Silvia, Subclasses of harmonic univalent functions, N. Z. J. Math. 28 (1999), 275–284.

[16] K.Vijaya, Studies on certain subclasses of harmonic functions, inter.Review of pure and Appl. Math. , 1 (2005), 59 -67.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

تابع تحلیلی	Analytic Fuction
تابع محدب	Convex Fuction
تابع همساز	Harmonic Fuction
تک‌ارز	Univalent
توابع ستارگون	Starlike Fuctions
توابع شبه ستارگون	Prestarlike Fuctions
پوسته محدب	Convex Hull
حافظ جهت	Sense Preserving
کران	Bound
مختلط	Complex
مرتبه	Order
ناحیه سهمی‌گون	Parabolic Region
نقاط فرین	Extreme Points

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

تابع تحلیلی	Analytic Fuction
کران	Bound
مختلط	Complex
تابع محدب	Convex Fuction
پوسته محدب	Convex Hull
نقاط فرین	Extreme Points
تابع همساز	Harmonic Fuction
مرتبه	Order
ناحیه سهمی‌گون	Parabolic Region
توابع شبه ستارگون	Prestarlike Fuctions
حافظ جهت	Sense Preserving
توابع ستارگون	Starlike Fuctions
تک‌ارز	Univalent

Aabstract

Complex-valued harmonic functions that are univalent and sense- preserving in the unit disk $\triangle$ can be written in the form $f = h + \bar{g}$, where h and g are analytic in $\triangle$. we give univaalence criteria and sufficient coefficient conditions for normalized harmonic functions that are pre starlike.
these coefficient conditions are also shown to be necessary when h has negative and g has positive coefficients. these lead to extreme points and distortion bounds.
keywords:Harmonic Fuction, Univalent, Starlike Fuctions, Prestarlike Fuctions.

Shahrood University of
Faculty Of Mathematical Sciences

Dissertation Submitted in Partial
Fulfillment of The Requirements For The
Degree of Master of Science in
Pure Mathematics

Harmonic Prestarlike Functions in the unitdisk

Supervisor

Dr. Ahmad. Zireh

by

Maryam Mohajer Esterabadi

2015