بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

عنوان

حل معادلات دیفرانسیل جبری تاخیری با روش‌های عددی و نیمه تحلیلی

استاد راهنما
دکتر مهدی قوتمند
استاد مشاور
دکتر حجت احسنی طهرانی
دانشجو
سیمین پویا

۱۳۹۳

تقدیم به مادر عزیز و پدر مهربانم

به پاس تعبیر عظیم و انسانی شان از کلمه ایثار و از خودگذشتگیشان

به پاس عاطفه سرشار و گرمای امید بخش وجودشان که در این سردترین روزگاران بهترین پشتیبان من است

به پاس قلب های بزرگشان که فریادرس است و سرگردانی و ترس در پناهشان به شجاعت می گراید

و به پاس محبت های بی دریغشان که هرگز فروکش نمی کند.

و تقدیم به همه آن ها که مرا علم آموختند.

خدایا...

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا ان را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند شکنجه دیدن، بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به‌پای تو تنها لذت زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم.

نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده پنهان کرده ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی همراه، جهاد بی سلاح، کار بی پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی دنیا، مذهب بی عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی نان، ایمان بی‌ریا، خویی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن. [1]

[1] مناجاتی از دکتر علی شریعتی

سپاس گزاری...

سپاس بیکران خدای را که مرا یاری داد تا در راهی قدم نهادم موفق گردم. در این راه پس از او ستایشگر کسانی هستم که مرا رهنما شدند، از آن جمله استاد راهنمای گرانقدر جناب آقای دکتر مهدی قوتمند که با کمک‌های بی دریغ، ارزنده و عالمانه خود همواره راهگشای اینجانب در انجام و اتمام پایان نامه بوده‌اند. از زحمات استاد ارجمند جناب آقای دکتر حجت احسنی طهرانی به عنوان استاد مشاور و جناب آقای دکتر مس‌فروش و دکتر ناظمی که زحمت داوری این پایان نامه را به عهده داشته‌اند نیز کمال تشکر را دارم. همچنین از پدر و مادر عزیز، خواهر و برادرم که آرامش روحی و آسایش فکری فراهم نمودند تا با حمایت‌های همه جانبه در محیطی مطلوب،مراتب تحصیلی و نیز پایان نامه درسی را به نحو احسن به اتمام برسانم سپاسگزاری می‌نمایم. باشد که این جملات نمایانگر سپاس بی‌پایان من نسبت به محبت بی‌دریغ آنان به شمار آید. و در پایان با تشکر فراوان از همه‌ی دوستان و عزیزانی که در این مدت وجودشان سرمایه‌ی امیدم بود.

خانم‌ها:مرضیه افتخاری، الهام آشوری، سمیرا سوخت‌سرایی، مرضیه مرتضایی و خدیجه صادقی.

باشد تا روزی بیشتر از اینها بدانیم، بیش از اینها بنویسیم و چیزهایی بخوانیم و بنویسیم که پس از خواندن و نوشتن آن‌ها این حس در ما بیدار شود که انسان‌تر شده‌ایم!

سیمین پویا
۱۳۹۳

تعهدنامه

اینجانب **سیمین پویا** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی کاربردی** **دانشکده علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **حل معادلات دیفرانسیل جبری تاخیری با روش‌های عددی و نیمه تحلیلی** ، تحت راهنمایی **دکتر مهدی قوتمند** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تاکنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام " دانشگاه شاهرود " یا " Shahrood University " به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

سیمین پویا
۱۳۹۳

چکیده

مدل‌بندی سیستم‌های الکتریکی، قدرت، مکانیکی و شیمیایی، زمانی‌که این سیستم‌ها در معرض تاخیر قرار بگیرند، توسط دسته خاصی از معادلات دیفرانسیل-جبری به‌نام معادلات دیفرانسیل-جبری تاخیری توصیف می‌شوند. به عنوان مثال، در سیستم‌های الکتریکی و قدرت به واسطه‌ی اتصالات داخلی مدارها و یا خطوط انتقال یا در شبیه‌سازی فرآیندهای شیمیایی، هنگام مدل بندی جریان لوله‌ای، این تاخیر ظاهر می شود.
با توجه به کاربردهای فراوان معادلات دیفرانسیل-جبری تاخیری، بررسی و ارائه راه‌حل‌های مناسب برای این دسته از معادلات از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است، ولی متاسفانه تاکنون روی ساختار این معادلات و حل آن‌ها مطالعات کمی صورت گرفته است. در این پایان نامه ابتدا به معرفی معادلات دیفرانسیل جبری و جبری تاخیری پرداخته، آن‌گاه به مطالعه پایداری مجانبی معادلات دیفرانسیل-جبری و جبری تاخیری خطی و غیر خطی پرداخته و پایداری مجانبی را برای روش‌های عددی از جمله چندگامی، رانگ کوتا، روش θ و... بررسی می‌کنیم. و در نهایت روش نیمه تحلیلی تکرار وردشی و روش تجزیه آدومیان را برای حل این نوع معادلات به‌کار می‌بریم.

کلمات کلیدی: معادله دیفرانسیل جبری، معادله دیفرانسیل جبری تاخیری، پایداری مجانبی، روش تکرار وردشی، روش تجزیه آدومیان

فهرست مطالب

فصل ۱

مقدمات و مفاهیم اساسی

۱.۱ مقدمه

گاهی در رشته‌های علوم، پزشکی، مهندسی، اقتصاد و... ضرورت پیدا می‌کند که برای بیان مسئله معینی مدل ریاضی ساخته شود. اغلب این مدل‌های ریاضی معادلاتی شامل یک تابع مجهول و مشتقات تابع نسبت به متغیرهای مستقل هستند. چنین معادلاتی را معادلات دیفرانسیل می‌نامند. شکل کلی یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه n به‌صورت زیر است:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = \circ,$$

که رابطه‌ای بین متغیر مستقل x و تابع $y(x)$ و n مشتق اول آن $y', y'', \dots, y^{(n)}$ است. حال اگر همین معادلات دارای شرایطی باشند یا به طرق مختلف مقید باشند، آن‌گاه مدل ریاضی آن‌ها علاوه بر معادلات دیفرانسیل، شامل معادلات جبری برای توصیف این قیدها است. به این دسته معادلات، معادلات دیفرانسیل جبری می‌گویند. حالت کلی این معادلات به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned} &F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = \circ \\ &g(x, y, \dots, y^{(n)}, z) = \circ \end{aligned}$$

و اگر به این نوع معادلات قید تاخیر هم اضافه شود معادلات دیفرانسیل جبری تاخیری ساخته می‌شود. معادلات دیفرانسیل-جبری تاخیری [۱] $DDAE$ معادلات دیفرانسیلی هستند که هم شامل قیود جبری و هم شامل قیود تاخیری می‌باشند. این معادلات به دو نوع دیرکرد[۲] و خنثی [۳] دسته‌بندی می‌شوند.[۲۶] در این بخش شکل‌های مختلف معادله دیفرانسیل-جبری تاخیری نیمه صریح $DDAE$ را بررسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} &x'(t) = F(t, x(\alpha_\text{۱}(t)), \dots, x(\alpha_{n_\alpha}(t)), y(\beta_\text{۱}(t)), \dots, y(\beta_{n_\beta}(t))), \\ &G(t, x(\pi_\text{۱}(t)), \dots, x(\pi_{n_\pi}(t)), y(\omega_\text{۱}(t)), \dots, y(\omega_{n_\omega}(t))) = \circ. \end{aligned} \tag{۱.۱}$$

[۱] Delay differential-algebraic equation

[۲] Retarded

[۳] Neutral

برای $t \geqslant t_\circ$، که $n_\alpha, n_\beta, n_\pi, n_\omega \in \mathbb{N}$ و $x(t) \in \mathbb{R}^r$، $y(t) \in \mathbb{R}^s$ و توابع تاخیری که برای همه مقادیر i در $\alpha_i(t) \leqslant t$، $\beta_i(t) \leqslant t$، $\pi_i(t) \leqslant t$ و $\omega_i(t) \leqslant t$ صدق می‌کند، شرایط اولیه هستند.
هنگامی‌که $\beta_۱(t) = t$، $\pi_۱(t) = t$ و $\omega_۱(t) = t$، معادله (۱.۱) به‌طور قابل ملاحظه‌ای ساده می‌شود. جاییکه ناپیوستگی در جواب رخ می‌دهد (که پرش یا جهشی در مولفه جواب و یا یکی از مشتقات جواب رخ داده است)، مشتقات به‌عنوان مشتقات سمت راستی تفسیر می‌شوند به شرطی‌که وجود داشته باشند.
روند تکاملی مسئله، برای معادله (۱.۱) شامل پیدا کردن جوابی برای $t \geqslant t_\circ$ بوده که توابع اولیه خاصی داشته باشد که مقادیر $x(t)$ و $y(t)$ را برای برخی از بازه‌های $[t_x^*, t_\circ]$ و $[t_y^*, t_\circ]$، به‌ترتیب تعریف کند. اگرچه مقادیر t_x^* و t_y^* به‌طور واضح به‌ترتیب بستگی به $\alpha_i(t), \pi_i(t)$ و $\beta_i(t), \omega_i(t)$ دارند، همچنین می‌توان آن‌ها را به طریقی پیچیده‌تر نیز انجام داد.
بحث معادلات $DDAE$ بسیاری از ایده‌ها و اصطلاحات فنی معادلات DAE و معادلات DDE را در بر خواهد گرفت و همچنین برخی آشنایی‌ها با روش‌های عددی را برای معادلات ODE ، DDE، DAE و $NDDE$ می‌توان فرض نمود. برای معادلات $DDAE$ اثر متقابل محدودیت‌های جبری با جملات جواب تاخیری، موجب رفتاری خواهد شد که در هر یک از معادلات DAE و DDE دیده نشده و تاثیر آن روی روش‌های عددی است. از این رو معادلات $DDAE$ شایسته تحقیقی جداگانه بوده که در خور خود باشد.
هم‌چنان‌که پتزولد [۴] برای معادلات DAE توضیح داده (که معادلات DAE ، ODE نیستند)، در حالت کلی معادلات $DDAE$ نه DAE است و نه DDE . هرچند برخی از معادلات $DDAE$ ممکن است به صورت تحلیلی به معادلات DDE کاهش یابد. به طور کلی معادلات **DDAE** ممکن است (تحت شرایط مناسب) به معادلات $NDDE$[۵] کاهش یابد.

۲.۱ تاریخچه

در سال ۱۹۹۵، آشر و پتزولد دو روش عددی، یعنی فرمول‌های تفاضلات پسرو [۶] و رانگ کوتای ضمنی تصویرشده را برای حل معادلات دیفرانسل-جبری تاخیری هسنبرگ با اندیس ۱ و ۲ ارائه کردند [۲۶]. در سال ۱۹۹۷ هابر [۷] از روش‌های هم محلی [۸] برای حل معادلات دیفرانسیل-جبری تاخیری از نوع دیرکرد با اندیس ۱ و ۲، استفاده نمود [۲۵]. در سال ۱۹۹۸ زو [۹] و پتزولد پایداری مجانبی معادلات دیفرانسیل -جبری تاخیری هسنبرگ را مورد بررسی قرار دادند [۲۸]. در سال ۲۰۰۲ باکر[۱۰] دو روش را برای کاهش اندیس و حل معادلات دیفرانسیل-جبری تاخیری ارائه کرد [۵]. روش اول، جایگذاری

[۴] Petzold
[۵] Neutral delay differential equation
[۶] Backward difference
[۷] Hauber
[۸] Collection methods
[۹] Zhu
[۱۰] Baker

متغیرهای جبری در معادلات دیفرانسیل با عباراتی است که از معادلات قید به‌دست می‌آید. به این ترتیب در شرایط مناسب، سیستم معادلات دیفرانسیل جبری تاخیری به سیستمی با اندیس صفر که همان معادلات دیفرانسیل تاخیری می‌باشد، تبدیل می‌شوند. روش دیگر مشتق‌گیری از معادلات قید می‌باشد که به این ترتیب سیستم دیفرانسیل-جبری تاخیری به سیستم دیفرانسیل تاخیری تبدیل می‌شود.

۳.۱ تعاریف

تعریف ۱.۳.۱. شکل کلی معادلات دیفرانسیل جبری خطی مرتبه‌ی اول با ضرایب ثابت به‌صورت زیر می‌باشد:

$$AX'(t) + BX(t) = q(t).$$

که A و B ماتریس‌های مربعی $(n \times n)$ هستند و A منفرد می‌باشد.

ابتدا خانواده ماتریس‌ها و ماتریس‌های پوچ‌توان را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۲.۳.۱. هرگاه A و B ماتریس‌های مختلط $n \times n$ و مخالف صفر باشند، در این‌صورت خانواده ماتریس (A, B) را به‌صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$A + \lambda B, \quad \lambda \in \mathbb{C}(\mathbb{R}).$$

تعریف ۳.۳.۱. ماتریس منتظم [۱۱]

هرگاه حداقل یک λ موجود باشد به‌طوری که

$$\det(A + \lambda B) \neq 0,$$

آنگاه خانواده ماتریس (A, B) را منتظم می‌نامیم.

تعریف ۴.۳.۱. ماتریس یکانی[۱۲]

ماتریس مربع A با درایه‌های مختلط را یکانی می‌نامند هرگاه $A^{-1} = A^*$.

تعریف ۵.۳.۱. ماتریس پوچ‌توان[۱۳]

ماتریس مربعی N پوچ‌توان می‌نامند، هرگاه حداقل یک عدد صحیح مثبت k موجود باشد که $N^k = 0$.

مثال ۶.۳.۱. ماتریس $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ یک ماتریس پوچ‌توان است، زیرا $M^2 = 0$.

ماتریس مثلثی که درایه‌های قطر اصلی همگی صفر باشند، پوچ توان است.

[۱۱] Regular matrix

[۱۲] Unitary matrice

[۱۳] Nilpotent matrix

مثال ۱.۳.۷. ماتریس $N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ پوچ‌توان است زیرا داریم:

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad N^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

تعریف ۱.۳.۸. چندجمله‌ای شور[۱۴]

چند جمله‌ای درجه kام باضرایب مختلط

$$\phi(r) = c_k r^k + c_{k-1} r^{k-1} + \ldots + c_1 r + c_0,$$

که $c_0 \neq 0$، $c_k \neq 0$ در نظر گرفته می‌شود، چند جمله‌ای شور است، اگر ریشه‌های آن، r_i، در نامساوی $|r_i| < 1 \quad i = 1, \ldots, k$ صدق کند.

تعریف ۱.۳.۹. نرم[۱۵]

تابع $\|.\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ را نرم می‌نامند هرگاه در شرایط ذیل صدق کند:

۱) $\|X\| \geqslant 0$ و $\|X\| = 0$ اگر و فقط اگر $X = 0$

۲) برای هر عدد حقیقی α و هر بردار حقیقی X

$$\|\alpha X\| = |\alpha| \|X\|$$

۳) برای هر دو بردار X و Y

$$\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$$

تعریف ۱.۳.۱۰. دنباله کوشی[۱۶]

دنباله $\{v_i\}_{i=1}^{\infty}$ را یک دنباله کوشی در فضای برداری نرم‌دار V می‌نامیم هرگاه

$$\|v_i - v_j\| \to 0 \quad as \quad i, j \to \infty$$

تعریف ۱.۳.۱۱. مشتق فرشه [۱۷]

گوییم تابع f در نقطه $x_0 \in \mathbb{R}^n$ مشتق پذیر است و دارای مشتق فرشه $Df(x_0) = A$ است، هرگاه ماتریس $n \times n$، A چنان موجود باشد که:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0$$

در صورت وجود مشتق فرشه، A با ماتریس ژاکوبی $Df(x_0)$ یکی است.

[۱۴] Schur polynomial

[۱۵] Norm

[۱۶] Cushy sequence

[۱۷] Ferechet differentiable

$$Df(x_\circ) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{x=x_\circ}$$

تعریف ۱۲.۳.۱. A- پایدار[۱۸]

یک روش A- پایدار می‌نامند هرگاه ناحیه پایداری شامل C^- باشد. یعنی

$$C^- = \{z; \mathrm{Re} z \leqslant \circ\} \subset S_R$$

تعریف ۱۳.۳.۱. فضای باناخ[۱۹]

به هر فضای برداری نرم‌دار کامل فضای باناخ گفته می‌شود.

تعریف ۱۴.۳.۱. مجموعه محدب[۲۰]

مجموعه C محدب است اگر پاره خط بین هردونقطه دلخواه در C درون C قرار گیرد. به عبارتی به ازای هر x_1, x_2 عضو C و به ازای هر θ ثابت، با شرط $\circ \leq \theta \leq 1$ داشته باشیم :

$$\theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in C.$$

تعریف ۱۵.۳.۱. نقطه درونی مجموعه[۲۱]

فرض کنید $X \subseteq \mathbb{R}^p$، نقطه $\theta \in X$ را یک نقطه درونی مجموعه X می‌نامیم در صورتی که گوی بازی مانند $B_{\theta,\rho}$ وجود داشته باشد به طوری‌که درون X قرار گیرد. به عبارت دیگر

$$\forall \theta \in X \quad \exists B_{\theta,\rho} \subseteq X.$$

تعریف ۱۶.۳.۱. نامساوی کوشی-شوارتز[۲۲]

نابرابری کوشی-شوارتز بیان می‌کند که برای هر دو بردار دلخواه x, y در فضای ضرب داخلی داریم:

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$$

که در آن $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ضرب داخلی است. همچنین با گرفتن ریشه دوم و با توجه به نرم بردارها، نامساوی به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$$

تعریف ۱۷.۳.۱. مجموعه باز[۲۳]

مجموعه $X \subseteq \mathbb{R}^p$ را باز می‌نامیم در صورتی که هر نقطه آن درونی باشد.

[۱۸] A-stable

[۱۹] Banach spaces

[۲۰] Convex set

[۲۱] Interior point of a set

[۲۲] Cauchy–Schwarz inequalit

[۲۳] Open set

تعریف ۱۸.۳.۱. شعاع طیفی[۲۴]
فرض کنید $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ مقادیر ویژه A باشند، شعاع طیفی ماتریس A را با $\rho(A)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\rho(A) = \max |\lambda_i|.$$

تعریف ۱۹.۳.۱. ماتریس اکیدا مثلثی[۲۵]
ماتریس مثلثی که درایه‌های روی قطر اصلی آن صفر باشد را ماتریس اکیدا مثلثی می‌گویند.

تعریف ۲۰.۳.۱. ماتریس جایگشت[۲۶]
ماتریسی که از تغییر مکان سطرهای ماتریس همانی حاصل می‌شود،ماتریس جایگشت نام دارد.

تعریف ۲۱.۳.۱. حاصل‌ضرب کرونکر[۲۷]
هرگاه A ماتریس $m \times n$ و B ماتریس $p \times q$ باشد، آنگاه حاصل‌ضرب کرونکر $A \otimes B$، ماتریس بلوکی $mp \times nq$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & \dots & a_{mn}B \end{bmatrix}$$

برای مثال داریم:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 & 10 \\ 6 & 7 & 12 & 14 \\ 0 & 15 & 0 & 20 \\ 18 & 21 & 24 & 28 \end{bmatrix}$$

همچنین روابط زیر برقرارند:

$$A \otimes (B + C) = A \otimes B + A \otimes C,$$

$$(A + B) \otimes C = A \otimes C + B \otimes C$$

$$(kA) \otimes B = A \otimes (kB) = k(A \otimes B)$$

$$(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C),$$

[۲۴] Spectral radius
[۲۵] Strictly triangular
[۲۶] Permutation matrix
[۲۷] Kronecker Product

در حالت کلی، $A \otimes B \neq B \otimes A$، ولی ماتریس‌های جایگشت P و Q وجود دارند که:

$$A \otimes B = P(B \otimes A)Q.$$

همچنین $A \otimes B$ معکوس پذیر است، اگر و تنها اگر A و B معکوس پذیر باشند و داریم:

$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}, \qquad (A \otimes B)^* = A^* \otimes B^*.$$

که $*$ به معنی ترانهاده مزدوج است و داریم

$$A^* = \bar{A}^T = \bar{A}^T$$

تعریف ۲۲.۳.۱. معادله دیفرانسیل جبری خطی با ضریب ثابت را در نظر بگیرید :

$$Ax' + Bx = 0$$

که A, B ماتریس‌های مربعی $n \times n$ هستند، اگر λ یک پارامتر مختلط باشد آن‌گاه $\lambda A + B$ ماتریس مدادی [۲۸]نامیده می‌شود.

۴.۱ قضایا و لم‌ها

قضیه ۱.۴.۱. *برای خانواده ماتریس منتظم (A, B)، ماتریس‌های نامنفرد E و F وجود دارند به‌طوری که*

$$EAF = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix}, \qquad EBF = \begin{pmatrix} W & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

که W ماتریس مربعی و J ماتریس بلوکی جردن پوچ‌توان می‌باشد. به‌عبارت دیگر $\mu \in \mathbb{N}$ موجود است به‌طوری‌که

$$J^{\mu-1} \neq 0, \qquad J^{\mu} = 0$$

μ اندیس [۲۹] خانواده ماتریس (A, B) و DAE [۳۰] نامیده می‌شود.

قضیه ۲.۴.۱. تجزیه شور [۳۱]

برای ماتریس $n \times n$ مربعی مانند A ماتریس یکانی U با خاصیت زیر وجود دارد به‌طوری‌که:

[۲۸] Pencil matrix

[۲۹] index

[۳۰] Differential algebraic equation

[۳۱] Shur decomposition

$$U^*AU = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_2 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & & * \\ 0 & 0 & \dots & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

در اینجا λ_i مقادیر ویژه ماتریس A می‌باشند که می‌توانند متمایز نباشند.

قضیه ۳.۴.۱. *مقدار میانگین*[۳۲] [۱۱]

اگر X, Y فضای باناخ باشند، $F : \Omega \subseteq X \to Y$ یک عملگر روی مجموعه محدب باز Ω و $F(x)$ مشتق فرشه در Ω باشد، آنگاه برای $x, x_0 \in \Omega$ داریم:

$$\| F(x) - F(x_0) \| \leqslant \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} \| F'(x_0 + t(x - x_0)) \| . \| x - x_0 \|,$$

که $\| x \|, \| F(x) \|$ نرم روی X, Y هستند و $F'(x)$ مشتق فرشه $F(x)$ در x_0 است، $\| F'(x_0) \|$ نرم در فضای عملگر $L(X, Y)$ است.

لم ۴.۴.۱. *تابع ضمنی*[۳۳] [۱۱]

فرض کنید X, Y, Z فضاهای باناخ حقیقی هستند، $F \subseteq X \times Y$ مجموعه باز و $F : \Omega \subseteq X \times Y \to Z$ نگاشت پیوسته که در شرایط زیر صدق می‌کند.

۱) $F(x, y)$ مشتق فرشه نسبت به x, y است و $F'_x(x, y)$ در همسایگی (x_0, y_0) پیوسته است

۲) معکوس $F'_x(x, y)$ در همسایگی (x_0, y_0) کراندار است

۳) $F(x_0, y_0)=0$،

در این‌صورت $\delta, r > 0$ وجود دارند که اگر $\| y - y_0 \| < \delta$، آنگاه $F(x, y) = 0$ یک جواب پیوسته $x = G(y)$ در همسایگی $B(x_0, r) = \{x : \|x - x_0\| < r\}$ دارد که $G(y)$ مشتق فرشه در $y = y_0$ است و خواهیم داشت

$$G'(y_0) = -(F'_x(x_0, y_0))^{-1}(F'_y(x_0, y_0)).$$

[۳۲] Mean value theorem

[۳۳] Implicit function theorem

فصل ۲

پایداری مجانبی معادلات دیفرانسیل جبری تاخیری خطی

۱.۲ پایداری مجانبی معادله دیفرانسیل جبری

معادله دیفرانسیل جبری خطی DAE با ضریب ثابت خطی را به فرم زیر در نظر می‌گیریم:

$$Ax' + Bx = \circ \qquad (۱.۲)$$

که $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ماتریس ضرایب هستند و A منفرد است . این فرم معادله ساده‌ترین نوع معادله است، که یکتایی و وجود جواب با استفاده از قضیه زیر بیان می‌شود.

قضیه ۱.۱.۲. *[۱۴] معادله (۱.۲) حل‌پذیر است اگر و فقط اگر ماتریس مدادی $\lambda A + B$ منتظم باشد.*

تعریف ۲.۱.۲. جواب $x(t)$ از معادله (۱.۲) پایدار مجانبی [۱] گویند اگر ثابت b وجود داشته باشد به طوری‌که برای هر جواب دیگر $y(t)$ در رابطه زیر صدق کند:

$$|x(t_\circ) - y(t_\circ)| < b \Longrightarrow \lim_{t\to\infty} |x(t) - y(t)| = \circ.$$

تعریف ۳.۱.۲. مقادیر تکین ماتریس مدادی (A, B)، اعداد مختلط λ هستند به‌طوری‌که $\det[\lambda A + B] = \circ$ است. برای پایداری مجانبی معادله (۱.۲) نیاز است که B نامنفرد باشد چون در غیر این صورت $\lambda = \circ$ مقدار تکین ماتریس مدادی (A, B) خواهد بود.

قضیه ۴.۱.۲. *[۸] جواب بدیهی دستگاه DAE (۱.۲) پایدار مجانبی است اگر و فقط اگر تمامی مقادیر تکین [۲] ماتریس مدادی (A, B) دارای قسمت حقیقی منفی باشند.*

---

[۱] Asymptotic stability

[۲] Singular value

برای بررسی پایداری مجانبی یک معادله دیفرانسیل جبری، کافی است ماتریس‌های A و B را طوری در نظر بگیریم که هر دو به ماتریس‌های مثلثی تبدیل شوند.
برای این منظور قضیه زیر را بیان می‌کنیم

قضیه ۵.۱.۲. *[۱۴] فرض کنید که $\lambda A + B$ مداد منتظم است آن‌گاه ماتریس‌های نامنفرد P و Q وجود دارند به‌طوری‌که*

$$PAQ = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} \qquad PBQ = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

که N یک ماتریس پوچ‌توان است.

حال با استفاده از قضیه تجزیه شور ماتریس‌های یکانی P_1 و Q_1 وجود دارند به‌طوری‌که

$$P_1^H C P_1 = \bar{C} \qquad Q_1^H N Q_1 = \bar{N}$$

که در آن $\bar{C}$ و $\bar{N}$ ماتریس‌های مثلثی هستند چون N پوچ توان است $\bar{N}$ اکیدا مثلثی [۳] است.
آن‌گاه ماتریس‌های نامنفرد $Q\begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & Q_1 \end{pmatrix}$ و $P\begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & Q_1 \end{pmatrix}^H$ ماتریس‌های A و B را به فرم مثلثی تبدیل می‌کنند:

$$\begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & Q_1 \end{pmatrix}^H PAQ \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & Q_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1^H & 0 \\ 0 & Q_1^H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & Q_1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} P_1^H I P_1 & 0 \\ 0 & Q_1^H N Q_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \bar{N} \end{pmatrix}$$

۱.۱.۲ پایداری مجانبی روش‌های چند گامی خطی

پایداری مجانبی روش‌های عددی برای معادله (۱.۲) به طور مشابه تعریف می‌شوند. فقط به جای جواب دقیق معادله، جواب‌های گسسته عددی مطرح می‌شوند.
روش چندگامی را در نظر بگیرید:

$$\sum_{j=0}^{s} \alpha_j x_{n+j} = h \sum_{j=0}^{s} \beta_j f_{n+j} \tag{۲.۲}$$

هنگامی که معادله (۲.۲) روی معادله دیفرانسیل جبری خطی به‌کار برده می‌شود داریم:

$$\sum_{j=0}^{s} (\alpha_j A x_{n+j} + hB\beta_j x_{n+j}) = 0 \tag{۳.۲}$$

اگر $\alpha_s A + h\beta_s B$ نامنفرد باشد (۳.۲) حل‌پذیر است. برای این کار باید $\alpha_s\beta_s \geqslant 0$ و $\beta_s \neq 0$ باشد.

[۳] Strictly triangular

قضیه ۶.۱.۲. *روش چندگامی (۲.۲) برای معادله دیفرانسیل جبری پایدار مجانبی، پایدار مجانبی است اگر $\sum_{j=0}^{s}\beta_j z^j$ چند جمله‌ای شور باشد و $h\sigma \in S_R$ که σ مقدار تکین ماتریس مدادی (A,B) و S_R ناحیه پایداری (۲.۲) است.*

برهان. برای بررسی پایداری مجانبی روش های عددی ابتدا چند جمله‌ای مشخصه را در نظر بگیرید پس داریم:

$$p(z) = \det\left[\sum_{j=0}^{s}(\alpha_j A + h\beta_j B)z^j\right] \tag{۴.۲}$$

می‌خواهیم بدانیم تحت چه شرایطی چند جمله‌ای مشخصه هیچ ریشه zای با $|z| \geqslant 1$ ندارد، که پایداری مجانبی روش عددی به‌دست خواهد آمد.
بنا به فرض ماتریس‌های A و B به ماتریس‌های مثلثی تبدیل می‌شوند بنابراین داریم:

$$PAQ = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & * \\ & \ddots & * \\ & & a_n \end{pmatrix} \Longrightarrow A = P^{-1}\cdot\begin{pmatrix} a_1 & \dots & * \\ & \ddots & * \\ & & a_n \end{pmatrix}\cdot Q^{-1}$$

$$PBQ = \begin{pmatrix} b_1 & \dots & * \\ & \ddots & * \\ & & b_n \end{pmatrix} \Longrightarrow B = P^{-1}\cdot\begin{pmatrix} b_1 & \dots & * \\ & \ddots & * \\ & & b_n \end{pmatrix}\cdot Q^{-1}$$

آن‌گاه چند جمله‌ای مشخصه با توجه به جایگذاری‌های بالا به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$p(z) = \det P^{-1}.\det\left[\sum_{j=0}^{s}\left[\left(\begin{pmatrix} \alpha_j a_1 + h\beta_j b_1 & \dots & * \\ & \ddots & * \\ & & \alpha_j a_n + h\beta_j b_n \end{pmatrix}\right)\right] z^j\right].\det Q^{-1}$$

چون P و Q نامنفرد هستند $p(z) = 0$ معادل با عبارت زیر است:

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=0}^{s}(\alpha_j a_i + h\beta_j b_i)z^j\right) = 0, \tag{۵.۲}$$

مسئله به ریشه‌های (۵.۲) ساده می‌شود.
باتوجه به مقدار a_i دوحالت داریم :
حالت اول: $a_i \neq 0$ آن‌گاه برای i امین جمله در (۵.۲) داریم:

$$\sum_{j=0}^{s}(\alpha_j a_i + h\beta_j b_i)z^j = a_i\sum_{j=0}^{s}(\alpha_j + h\beta_j\frac{b_i}{a_i})z^j \tag{۶.۲}$$

چند جمله‌ای مشخصه روش (۲.۲) را روی مسئله آزمون استاندارد $y' = \lambda y$ به‌کار برده آنگاه معادله زیر بدست می‌آید:

$$\sum_{j=0}^{s} (\alpha_j - h\lambda\beta_j) z^j \tag{۷.۲}$$

اگر $h\lambda \in S_R$ که S_R ناحیه پایداری (۲.۲) است. معادله (۷.۲) هیچ ریشه‌ای روی یا خارج دایره واحد ندارد. در مسئله $\sigma = -\frac{b_i}{a_i}$ فقط مقدار تکین ماتریس مدادی (A, B) است که نیم هموار چپ است، (یعنی قسمت حقیقی منفی دارد). اگر $h\sigma \in S_R$، معادله (۶.۲) هیچ ریشه‌ای روی یا خارج دایره واحد ندارد.

حالت دوم: $a_i = 0$ را در نظر بگیرید. در این حالت $b_i \neq 0$ و عبارت (۵.۲) به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\sum_{j=0}^{s} h\beta_j b_i z^j = 0 \tag{۸.۲}$$

برای معادله (۸.۲) ریشه‌ها فقط باید داخل دایره واحد باشند برای این منظور نیاز داریم که $\sum_{j=0}^{s} \beta_j z^j$ یک چند جمله‌ای شور باشد. □

۲.۱.۲ پایداری روش رانگ کوتا

روش رانگ-کوتای[۴] s -گامی را به فرم زیر در نظر بگیرید:

$$K_i = f(x_0 + c_i h, y_0 + h\sum_{j=1}^{s} a_{ij} K_j)$$
$$y_1 = y_0 + h\sum_{i=1}^{s} b_i K_i$$

روش رانگ-کوتا برای معادله دیفرانسیل جبری (۱.۲) به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} &AK_{m,i} + hB(x_m + \sum_{j=1}^{s} \hat{a}_{ij} K_{m,j}) = 0 \qquad i = 1, \dots, s \\ &x_{m+1} = x_m + \sum_{i=1}^{s} \hat{b}_i K_{m,i} \end{aligned} \tag{۹.۲}$$

که $K_{m,i} = [K^1_{m,i}, \dots, K^n_{m,i}]$ $\quad i = 1 \dots, s$ مشتقات هر مرحله هستند که در h ضرب شده‌اند. با بازنویسی مجدد عناصر مشتقات مرحله‌ای به‌صورت

$$K_m = [K^1_{m,1}, \dots, K^1_{m,s}, K^2_{m,1}, \dots, K^2_{m,s}, K^n_{m,1}, \dots, K^n_{m,s}]^T$$

[۴] Runge-kutta method

می‌باشد. معادله (۹.۲) به فرم

$$\begin{pmatrix} A\otimes I_s + hB\otimes \mathcal{A} & \circ \\ -I_n\otimes \hat{b}^T & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} K_m \\ x_{m+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \circ & hB\otimes e \\ \circ & -I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} K_{m-1} \\ x_m \end{pmatrix} = \circ \qquad (۱۰.۲)$$

بازنویسی می‌شود. که $\mathcal{A} = (\hat{a}_{ij})$ و $\hat{b} = [\hat{b_1}, \ldots, \hat{b_s}]$ در روش رانگ کوتا تعریف می‌شود و $e = [1, 1, \ldots, 1]$ است.

قضیه ۷.۱.۲. *روش رانگ- کوتا (۹.۲) با $\mathcal{A}$ نامنفرد برای معادله دیفرانسیل جبری پایدار مجانبی، پایدار مجانبی است اگر در شرط پایداری اکید $|1-\hat{b}^T\mathcal{A}^{-1}e| < 1$ صدق کند و برای هر i، $h\sigma_i \in S_R$ که S_R ناحیه پایداری و σ_i مقدار تکین معادله دیفرانسیل جبری است.*

برهان. چند جمله‌ای روش رانگ کوتا را به صورت

$$p(z) = \det\left[\begin{pmatrix} (A\otimes I_s + hB\otimes \mathcal{A})z & hB\otimes e \\ -I_n\otimes \hat{b}^T z & I_n z - I_n \end{pmatrix}\right] = \det\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \qquad (۱۱.۲)$$

می‌نویسیم باید ثابت کنیم ریشه‌های چند جمله‌ای مشخصه درون دایره واحد قرار دارند.
نیاز داریم بدانیم تحت کدام شرایط همه ریشه‌ها داخل دایره واحد هستند، به طور معادل بررسی کنیم تحت چه شرایطی $|z| \geqslant 1$ $p(z) \neq \circ$ نتیجه می‌دهد.
با توجه به اینکه برای یک معادله دیفرانسیل جبری حل پذیر، ماتریس‌های A و B را می‌توان به ماتریس‌های پایین مثلثی با استفاده از ماتریس‌های نامنفرد P و Q تبدیل کرد کافی است که در معادله (۱.۲) ماتریس های A و B را مثلثی در نظر بگیریم.
در اینجا روش رانگ -کوتا را با $\mathcal{A}$ نامنفرد در نظر می‌گیریم:
تحت شرایطی که ذکر شد $T_{11} = (A\otimes I_s + hB\mathcal{A})z$ نامنفرد است هنگامی‌که h کوچک باشد.
چون طبق فرض $\mathcal{A}$ نامنفرد است و حل‌پذیری (۱.۲) ایجاب می‌کند که ماتریس مدادی (A, B) منتظم باشد آن‌گاه خواهیم داشت:

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

$$\begin{bmatrix} T_{11} & \circ \\ T_{21} & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & T_{11}^{-1}T_{12} \\ \circ & T_{22} - T_{21}T_{11}^{-1}T_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} p(z) &= \det\begin{bmatrix} T_{11} & \circ \\ T_{21} & I \end{bmatrix}\det\begin{bmatrix} I & T_{11}^{-1}T_{12} \\ \circ & T_{22} - T_{21}T_{11}^{-1}T_{12} \end{bmatrix} \\ &= \det[T_{11}]\det[T_{22} - T_{21}T_{11}^{-1}T_{12}] \\ &= \det[T_{11}]q(z) \end{aligned}$$

که

$$q(z) = \det[T_{22} - T_{21}T_{11}^{-1}T_{12}] = \det[I_n z - M] \qquad (۱۲.۲)$$

$$M = I_n - h(I_n \otimes \hat{b}^T)(A \otimes I_s + hB \otimes \mathcal{A})^{-1}(B \otimes e)$$

است. ماتریس M به z وابسته نیست و واضح است که صفرهای $q(z)$ مقادیر ویژه M هستند.
بنابراین باید ثابت کنیم مقادیر ویژه M داخل دایره واحد هستند بااستفاده از تعریف ماتریس وارون زیر

$$(A \otimes I_s + hB \otimes \mathcal{A})^{-1} = \begin{pmatrix} (a_1 I + hb_1\mathcal{A})^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ * & (a_2 I + hb_2\mathcal{A})^{-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \dots & (a_n I + hb_n\mathcal{A})^{-1} \end{pmatrix}$$

که a_i و b_i $(i = 1, \dots, n)$ عناصر قطری A و B هستند و باتعریف ضرب کرونکر ماتریس M را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$M = \begin{bmatrix} 1 - \hat{b}^T(a_1 I + hb_1\mathcal{A})^{-1}hb_1 e & \dots & 0 \\ * & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \dots & 1 - \hat{b}^T(a_n I + hb_n\mathcal{A})^{-1}hb_n e \end{bmatrix}$$

همان‌طور که قبلا ذکر شد برحسب مقادیر a_i دو حالت داریم:

حالت اول: اگر $a_i \neq 0$ ، آن‌گاه $\sigma_i = -\frac{b_i}{a_i}$ مقدار تکین ماتریس مدادی (A, B) است و همان‌طور که قبلا بیان شد اگر DAE پایدار مجانبی باشد، مقدار تکین غیر صفر با قسمت حقیقی منفی دارد.
از آنجایی که تابع پایداری روش رانگ کوتا با استفاده از $\mathcal{A}$ و $\hat{b}^T$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$R(\hat{z}) = 1 + \hat{z}\hat{b}^T(I - \hat{z}\mathcal{A})^{-1}e$$

آن‌گاه در این حالت اگر $h\sigma_i \in S_R$ داریم:

$$|R(h\sigma_i)| = |1 + \hat{b}^T(I - (-h\frac{b_i}{a_i})\mathcal{A})^{-1}(-h\frac{b_i}{a_i})| < 1$$

۲) اگر $a_i = 0$، داریم:

$$1 - \hat{b}(a_i I + hb_i\mathcal{A})^{-1}hb_i e = 1 - \hat{b}^T b_i^{-1}\mathcal{A}^{-1}b_i e = 1 - \hat{b}^T\mathcal{A}^{-1}e \Rightarrow |1 - \hat{b}^T\mathcal{A}^{-1}e| < 1$$

که شرط پایداری اکید روش رانگ-کوتا برقرار است. □

۳.۱.۲ پایداری روش روزنبرگ

در این بخش پایداری روش روزنبرگ [5] را برای DAE بررسی می‌کنیم. در ابتدا به معرفی روش روزنبرگ می‌پردازیم.

[5] Rosenbrock method

معادله زیر را در نظر بگیرید

$$x'(t) = f(t, x(t))$$

که x و f بردارهای d-بعدی هستند روش روزنبرگ s-مرحله‌ای به فرم زیر به‌دست می‌آید:

$$(I - h\gamma_{ii}J)K_{n,i} = hf\big(t_n + \alpha_i h, x_n + \sum_{j=۱}^{i-۱} \alpha_{ij}K_{n,j}\big) + h^۲\gamma_i f_t(t_n, x_n) + hJ\sum_{j=۱}^{i-۱}\gamma_{ij}K_{n,j}$$

$$x_{n+۱} = x_n + \sum_{i=۱}^{s} b_i K_{n,i} \qquad (۱۳.۲)$$

که $t_n = nh$ و h طول گام و α_{ij} ، γ_{ij} ، α_i ، γ_i ضرایب حقیقی هستند و $\alpha_i = \sum_{j=۱}^{i-۱}\alpha_{ij}$، $\gamma_i = \sum_{j=۱}^{i}\gamma_{ij}$ برای $i = ۱, ۲, \dots, s$ است، I ماتریس همانی [۶] و J ماتریس ژاکوبی [۷] $f_x(t_n, x_n)$، x_n تقریب $x(t_n)$ و $K_{n,i}$ مقدار تقریب در هر مرحله است.
توجه کنید $F = (f_{ij})_{s\times s} = (\alpha_{ij} + \gamma_{ij})_{s\times s}$ با $\alpha_{ij} = ۰ \quad (i \leqslant j)$ و $\gamma_{ij} = ۰ \quad (i < j)$ و فرض کنید $\mathcal{R}(z)$ قسمت حقیقی z است.
در ادامه به چند تعریف زیر می‌پردازیم:

تعریف ۸.۱.۲. تابع پایداری [۸] روش روزنبرگ به‌صورت $R(h\lambda) = ۱ + \lambda h b^T(I_s - h\lambda F)^{-۱}e$ تعریف می‌شود.

تعریف ۹.۱.۲. ناحیه پایداری [۹] روش روزنبرگ به‌صورت $\{h\lambda : |R(h\lambda)| < ۱, \quad \lambda \in \mathbb{C}\}$ تعریف می‌شود.

تعریف ۱۰.۱.۲. روش روزنبرگ (۱۳.۲) A-پایدار می‌نامند اگر و فقط اگر ماتریس $I_s - h\lambda F$ معکوس‌پذیر و $|R(h\lambda)| < ۱$ وقتی‌که $\mathcal{R}(h\lambda) < ۰$ باشد.

تعریف ۱۱.۱.۲. روش روزنبرگ معادله (۱۳.۲) را اکیدا پایدار می‌نامند اگر و فقط اگر $|۱ - b^T F^{-۱}e| < ۱$.

گزاره ۱۲.۱.۲. *اگر معادله دیفرانسیل جبری خطی (۱.۲) را به‌صورت $x'(t) = f(x(t))$ در نظر بگیریم آن‌گاه $AJ + B = ۰$، که J ماتریس ژاکوبی $f_x(x(t))$ است.*

برهان. چون

$$J = f_x(x(t)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_۱}{\partial x_۱} & \frac{\partial f_۱}{\partial x_۲} & \cdots & \frac{\partial f_۱}{\partial x_d} \\ \frac{\partial f_۲}{\partial x_۱} & \frac{\partial f_۲}{\partial x_۲} & \cdots & \frac{\partial f_۲}{\partial x_d} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ \frac{\partial f_d}{\partial x_۱} & \frac{\partial f_d}{\partial x_۲} & \cdots & \frac{\partial f_d}{\partial x_d} \end{bmatrix}$$

[۶] Identity
[۷] Jocobi
[۸] Stability function
[۹] Stability region

که $f=[f_1,f_2,\dots,f_d]^T$ و $x=[x_1,x_2,\dots,x_d]^T$ است. با محاسبه مشتق جزیی در دو طرف اتحاد در معادله (۱.۲) به‌ترتیب نسبت به $x_1,x_2,\dots,x_d$ داریم:

$$(a_{i1},a_{i2},\dots,a_{id})J+(b_{i1},b_{i2},\dots,b_{id})=0 \qquad i=1,\dots,d$$

یا به‌صورت ماتریسی داریم $AJ+B=0$. □

روش روزنبرگ s-مرحله‌ای را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}(I-h\gamma_{ii}J)K_{n,i}&=hf(x_n+\sum_{j=1}^{i-1}\alpha_{ij}K_{n,j})+hJ\sum_{j=1}^{i-1}\gamma_{ij}K_{n,j}\\ x_{n+1}&=x_n+\sum_{i=1}^{s}b_iK_{n,i}.\end{aligned} \tag{۱۴.۲}$$

اولین معادله (۱۴.۲) را به فرم زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$(I-h\gamma_{ii}J)\tilde{K}_{n,i}-J\sum_{j=1}^{i-1}\gamma_{ij}K_{n,j}=f(x_n+\sum_{j=1}^{i-1}\alpha_{ij}K_{n,j}) \quad i=1,2,\dots,s \tag{۱۵.۲}$$

که $\tilde{K}_{n,i}=\frac{1}{h}K_{n,i}$ است. برای سازگاری بین معادله دیفرانسیل و معادله تفاضلی، طبق گزاره (۱۲.۱.۲) باید معادله زیر برقرار باشد :

$$A\left[(I-h\gamma_{ii}J)\tilde{K}_{n,i}-J\sum_{j=1}^{i-1}\gamma_{ij}K_{n,j}\right]+B\left[x_n+\sum_{j=1}^{i-1}\alpha_{ij}K_{n,j}\right]=0.$$

با ضرب دوطرف معادله بالا در h، داریم:

$$\begin{aligned}&AK_{n,i}+hB\left[x_n+\sum_{j=1}^{s}f_{ij}K_{n,j}\right]=0, \quad i=1,2,\dots,s\\ &x_{n+1}=x_n+\sum_{i=1}^{s}b_iK_{n,i}.\end{aligned} \tag{۱۶.۲}$$

با تعریف ضرب کرونکر و قرار دادن

$$K_n=[K^1_{n,1},K^1_{n,2},\dots,K^1_{n,s},K^2_{n,1},K^2_{n,2},\dots,K^2_{n,s},\dots,K^d_{n,1},K^d_{n,2},\dots,K^d_{n,s}]^T$$

و با $e=[1,1,\dots,1]$ و $b=[b_1,b_2,\dots,b_s]$، آن‌گاه (۱۶.۲) به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{pmatrix}A\otimes I_s+hB\otimes F & 0\\ -I_d\otimes b^T & I_d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}K_n\\ x_{n+1}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & hB\otimes e_s\\ 0 & -I_d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}K_{n-1}\\ x_n\end{pmatrix}=0.$$

قضیه ۱۳.۱.۲. *اگر معادله (۱.۲) پایدار مجانبی باشد، آن‌گاه روش روزنبرگ (۱۶.۲) برای معادله (۱.۲) پایدار مجانبی است اگر شرایط زیر برقرار باشند:*

۱) *ماتریس ضرایب F نامنفرد است.*

۲) *روش روزنبرگ (۱۶.۲) اکیدا پایدار است.*

۳) *σ مقدار تکین دلخواه ماتریس مدادی (A, B) می‌باشد، که $h\sigma \in S_R$ و S_R ناحیه پایداری روش روزنبرگ است.*

برهان. چند جمله‌ای مشخصه معادله روزنبرگ به صورت زیر است:

$$p(z) = \det \begin{bmatrix} (A \otimes I_s + hB \otimes F)z & hB \otimes F \\ (-I_d \otimes b^T)z & I_d z - I_d \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} T_{۱۱} & T_{۱۲} \\ T_{۲۱} & T_{۲۲} \end{bmatrix},$$

$$T_{۱۱} = (A \otimes I_s + hB \otimes F)z, \quad T_{۱۲} = hB \otimes F,$$

$$T_{۲۱} = (-I_d \otimes b^T)z \quad T_{۲۲} = I_d z - I_d.$$

برای اثبات اینکه روش روزنبرگ پایدار مجانبی است باید ثابت کنیم $p(z)$ چند جمله‌ای شور است یعنی ریشه‌های $p(z)$ قدرمطلق کوچکتر از یک هستند. برای این منظور ابتدا لم زیر را بیان می‌کنیم:

لم ۱۴.۱.۲. *[۱۴] اگر معادله دیفرانسیل جبری (۱.۲) حل‌پذیر باشد و ماتریس ضرایب روش روزنبرگ برای DAE (۱.۲) (یعنی F) نامنفرد باشد و اگر h به‌قدرکافی‌کوچک باشد، آن‌گاه $A \otimes I_s + hB \otimes F$ نامنفرد است.*

همان‌طور که قبلا ذکر شد اگر DAE حل‌پذیر باشد کافی است ماتریس ضرایب را بالامثلثی درنظر بگیریم و طبق فرض قضیه F نامنفرد است. چون F پایین مثلثی است، عناصر قطری F یعنی $i = ۱, \dots, s$ γ_{ii} غیر صفر هستند. از طرفی طبق لم (۱۴.۱.۲) اگر $z \neq ۰$ و h به قدر کافی کوچک باشد $\det[T_{۱۱}] \neq ۰$، آن‌گاه چند جمله‌ای مشخصه به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$p(z) = \det[T_{۱۱}]. \det[T_{۲۲} - T_{۲۱}T_{۱۱}^{-۱}T_{۱۲}] = \det[T_{۱۱}].q(z)$$

$$\begin{aligned} q(z) &= \det[T_{۲۲} - T_{۲۱}T_{۱۱}^{-۱}T_{۱۲}] \\ &= \det[I_d z - I_d + [(hB \otimes e_s)(A \otimes I_s + hB \otimes F))^{-۱}(I_d \otimes b^T)z] = \det[I_d z - M] \end{aligned}$$

که $M = I_d - h(I_d \otimes b^T)(A \otimes I_s + hB \otimes F)^{-۱}(B \otimes e)$ می‌باشد و M مستقل از z است، واضح است که صفرهای $q(z)$ مقادیر ویژه M هستند. حال توجه کنید

$$(A \otimes I_s + hB \otimes F)^{-۱} =$$

$$\begin{pmatrix} (a_۱ \otimes I_s + hb_۱ \otimes F)^{-۱} & * & \cdots & * \\ & (a_۲ \otimes I_s + hb_۲ \otimes F)^{-۱} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & (a_d \otimes I_s + hb_d \otimes F)^{-۱} \end{pmatrix}$$

که a_i و b_i عناصر قطری A، B و M ماتریس قطری با عناصر $1 - hb^T(a_iI_s + hb_iF)^{-1}b_ie$ است.
عناصر قطری M را در دو حالت بررسی می‌کنیم
: ۱)اگر $a_i \neq 0$، واضح است $\sigma_i = -\frac{b_i}{a_i}$ مقدار تکین ماتریس مدادی (A, B) می‌باشد. اگر (۱.۲) پایدار مجانبی باشد طبق قضیه (۴.۱.۲)، σ_i قسمت حقیقی منفی دارد. پس اگر $h\sigma_i \in S_R$ طبق تعریف ناحیه پایداری و باتوجه به اینکه تابع پایداری روش روزنبرگ $R(\bar{\lambda}) = 1 + \bar{\lambda}b^T(I_s - \bar{\lambda}F)^{-1}e$ است، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}|1 - hb^T(a_iI_s + hb_iF)^{-1}b_ie| &= |R(h\sigma_i)| \\ &= |1 + b^T(I_s - (-h\frac{b_i}{a_i})F)^{-1}(-h\frac{b_i}{a_i})e)| < 1\end{aligned}$$

۲) اگر $a_i = 0$، عناصر قطری M به صورت زیر ساده می‌شود:

$$1 - hb^T(a_iI_s + hb_iF)^{-1}b_ie = 1 - b^TF^{-1}e$$

اگر روش (۱۶.۲) اکیدا پایدار باشد، داریم $|1 - b^TF^{-1}e| < 1$. □

۲.۲ معادله دیفرانسیل جبری تاخیری

در این بخش، معادلات دیفرانسیل جبری تاخیری $DDAE$ خطی به فرم زیر را بیان می‌کنیم:

$$Ax' + Bx + Cx'(t - \tau) + Dx(t - \tau) = 0 \qquad (۱۷.۲)$$

که τ متغیر تاخیر و $A, B, C, D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ماتریس ضرایب هستند و A منفرد است. هدف تعیین تابع $\phi(t)$ روی بازه $(-\tau, 0)$ است که جواب یکتایی برای معادله (۱۷.۲) می‌باشد.
اینجا چون فقط پایداری مجانبی جواب بدیهی مطرح می‌شود، $\phi(t)$ را طوری در نظر می‌گیریم که مقدار آن در یک همسایگی جواب بدیهی برای $t \in (-\tau, 0)$ باشد.

۱.۲.۲ پایداری مجانبی $DDAE$

پایداری مجانبی معادله (۱۷.۲) را می‌توان مشابه معادله دیفرانسیل جبری خطی که در بخش قبل ذکر شد، بیان کرد. نیاز داریم که تابع اولیه $\phi(t)$ را در یک همسایگی جواب بدیهی قرار دهیم.
می‌دانیم جواب یک معادله دیفرانسیل خطی با معادله مشخصه سیستم اصلی آن بررسی می‌شود. اگرچه ما در اینجا مستقیما پایداری جواب نمایی معادله (۱۷.۲) را با فرض وجود و یکتایی جواب پیوسته که در معادله صدق می‌کند، را بیان می‌کنیم.
جواب نمایی معادله (۱۷.۲) را به فرم $ce^{-\tau s}$ در نظر می‌گیریم معادله مشخصه به‌صورت زیر به‌دست

می‌آید:

$$P = \det[(sA + B) + (sC + D)exp(-\tau s)] = ۰. \quad (۱۸.۲)$$

برای اثبات پایداری مجانبی جواب نیاز داریم که نشان دهیم ریشه‌های s از معادله بالا همه با قسمت حقیقی منفی اطراف صفر هستند.

لم ۱.۲.۲. *[۸، ۱۵] فرض کنید چند جمله‌ای $P(s,z)$ با متغیرهای مختلط s,z در شرایط زیر صدق می‌کنند:*

۱) $P(s,۰) \neq ۰$ برای s به طوری‌که $Re(s) \geqslant ۰$

۲) $P(s,z) \neq ۰$ برای (s,z) به طوری‌که $Re(s) = ۰$ و $|z| \leqslant ۱$

دراین‌صورت $P(s,z) \neq ۰$ برای (s,z) به طوری‌که $Re(s) \geqslant ۰$ و $|z| \leqslant ۱$.

فرض کنید

$$P(s,z) = \det[(sA + B) + (sC + D)z].$$

داریم $P(s,۰) = \det[sA + B]$. شرط یک لم بیان می‌کند که ماتریس مدادی (A,B) نمی‌تواند یک مقدار تکین با قسمت حقیقی بزرگتر یا مساوی صفر داشته باشد. بنابراین ماتریس $sA + B$ برای $Re(s) \geqslant ۰$ نامنفرد است و $P(s,z)$ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$P(s,z) = \det[(sA + B)]\det[I + (sA + B)^{-۱}(sC + D)z]$$

در این حالت باید

$$\sup_{Re(s)\geqslant ۰} \rho[(sA + B)^{-۱}(sC + D)] < ۱$$

باشد، که ρ شعاع طیفی است. از شرط دوم چون $Re(s) \geqslant ۰$ نتیجه می‌شود که $|z| = |e^{-s\tau}| \leqslant ۱$.
پس لم برقرار است و تمام ریشه‌های معادله مشخصه (۱۷.۲) قسمت حقیقی منفی دارند.
برای اثبات اینکه ریشه‌های $P(s,z)$ اطراف صفر کراندار هستند یعنی باید نشان دهیم عدد کوچک $\delta > ۰$ وجود دارد به‌طوری‌که $P(s,z) \neq ۰$ وقتی‌که $Re(s) > -\delta$، برای این منظور به بعضی فرضیات اضافه نیاز داریم. یکی از این شرط ها به صورت زیر است[۱۴][۱۳].

$$|u^T Au| \geqslant |u^T Cu| \quad \forall u \in \mathbb{R}^n$$

با توجه به مطالب ذکر شده می‌توان قضیه زیر را بیان کرد.

قضیه ۲.۲.۲. *[۸، ۲۷] اگر ماتریس‌های ضرایب معادله دیفرانسیل جبری تاخیری (۱۷.۲) در شرایط زیر صدق کند:*

۱) ماتریس مدادی (A,B) فقط مقدار تکین با قسمت حقیقی منفی دارد

۲) $\sup_{Re(s)\geqslant ۰} \rho[(sA + B)^{-۱}(sC + D)] < ۱$

۳) $|u^T Au| \geqslant |u^T Cu| \quad \forall u \in \mathbb{R}^n$

آنگاه معادله پایدار مجانبی است.

نتیجه ۳.۲.۲. *[۸، ۲۷] معادله (۱۷.۲) تحت شرایط زیر پایدار مجانبی است:*
۱) ماتریس مدادی (A,B) فقط مقدار تکین با قسمت حقیقی منفی دارد.
۲) $\sup\limits_{Re(s)=0} \rho[(sA+B)^{-1}(sC+D)] < 1$
۳) $|\langle u, Au\rangle| \geqslant |\langle u, Cu\rangle| \quad \forall u \in \mathbb{R}^n$

در ادامه بحث پایداری مجانبی چند روش عددی را بررسی می‌کنیم.

۲.۲.۲ روش θ

تعریف ۴.۲.۲. جواب x_n روش عددی برای یک معادله پایدار مجانبی (۱۷.۲)، پایدار مجانبی است اگر و فقط اگر برای ثابت b، به‌طوری‌که اگر $|x_0| < b$ وقتی‌که $n \to \infty$ آنگاه $x_n \to 0$ باشد.

روش θ روش تک پارامتری است که با جایگذاری زیر برای معادله $DDAE$ به‌دست می‌آید:

$$
\begin{aligned}
x'(t) &\longrightarrow \frac{x(t+h)-x(t)}{h}\\
x'(t-\tau) &\longrightarrow \frac{x(t+h-\tau)-x(t-\tau)}{h}\\
x(t) &\longrightarrow \theta x(t+h)+(1-\theta)x(t)\\
x(t-\tau) &\longrightarrow \theta x(t+h-\tau)+(1-\theta)x(t-\tau)
\end{aligned}
$$

برای معادله دیفرانسیل جبری تاخیری خنثی به فرم زیر

$$
\begin{aligned}
&x'(t) = Ax'(t-\tau)+Bx(t)+Cx(t-\tau) \quad t>0\\
&x(t)=\phi(t) \quad -\tau \leqslant t \leqslant 0
\end{aligned}
$$

روش θ را به‌صورت زیر به‌کار می‌بریم:

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} = x_n &+ Ax^h((n+1)h-\tau) - Ax^h(nh-\tau) + hB[\theta x_{n+1}+(1-\theta)x_n]\\
&+ hC[\theta x^h((n+1)h-\tau)+(1-\theta)x^h(nh-\tau)] \quad n=0,1,2,\ldots
\end{aligned}
$$

در اینجا θ پارامتر $0 \leqslant \theta \leqslant 1$، $x_0=\phi(0)$ و $x^h(t)=\phi(t)$ برای $(-\tau \leqslant t \leqslant 0)$ و $x^h(t)$ با درونیابی قطعه‌ای خطی مشخص می‌شود:

$$
x^h(t) = \frac{t-kh}{h}x_{k+1} + \frac{(k+1)h-t}{h}x_k
$$

که $kh \leq t \leqslant (k+1)h$، $k=0,1,\ldots$
حال روش θ را برای معادله (۱۷.۲) می‌نویسیم:

$$A\frac{x_{n+1}-x_n}{h}+\theta Bx_{n+1}+C\frac{x^h((n+1)h-\tau)-x^h(nh-\tau)}{h}+ \\ \theta Dx^h((n+1)h-\tau)+(1-\theta)Bx_n+(1-\theta)Dx^h(nh-\tau)=0 \tag{۱۹.۲}$$

که x^h همان‌طور که گفته شد از درونیابی به‌دست می‌آید.
حال اگر $1 > \delta = m-\tau h^{-1} \geqslant 0$ را در نظر بگیریم که m کوچکترین عدد صحیح است که $m \geqslant \tau h^{-1}$ باشد. می‌توان x^h را به‌صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} x^h((n+1)h-\tau) &= \delta x_{n+2-m}+(1-\delta)x_{n+1-m} \\ x^h(nh-\tau) &= \delta x_{n+1-m}+(1-\delta)x_{n-m} \end{aligned} \tag{۲۰.۲}$$

با بسط معادله (۱۹.۲) و با استفاده از معادله (۲۰.۲) داریم:

$$A\frac{x_{n+1}-x_n}{h}+\theta Bx_{n+1}+C\frac{\delta x_{n+2-m}+(1-\delta)x_{n+1-m}-(\delta x_{n+1-m}+(1-\delta)x_{n-m})}{h} \\ \theta D(\delta x_{n+2-m}+(1-\delta)x_{n+1-m})+(1-\theta)Bx_n+(1-\theta)D(\delta x_{n+1-m}+(1-\delta)x_{n-m})$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} (A+\theta hB)x_{n+1} &= (A+(\theta-1)hB)x_n-\delta(\theta hD+C)x_{n+2-m} \\ &\quad -[(\theta hD+C)(1-\delta)+((1-\theta)hD-C)\delta]x_{n+1-m} \\ &\quad -[(1-\theta)hD-C](1-\delta)x_{n-m} \end{aligned} \tag{۲۱.۲}$$

برای اینکه معادله (۲۱.۲) حل‌پذیر باشد باید $A+\theta hB$ برای $\theta h > 0$ نامنفرد باشد. که این شرط اول قضیه (۲.۲.۲) است. برای بررسی پایداری معادله تفاضلی (۲۱.۲) باید ابتدا چندجمله‌ای مشخصه را به‌دست آوریم:

$$\det[((A+\theta hB)z^{m+1}-(A-(1-\theta)hB))z^m+\delta(\theta hD+C)z^2 \\ +((\theta hD+C)(1-\delta)+((1-\theta)hD-C)\delta)z+((1-\theta)hD-C)(1-\delta)]=0 \tag{۲۲.۲}$$

باتعریف

$$P(z)=(A+\theta hB)z-(A-(1-\theta)hB)$$

$$Q(z,\delta)=(\delta z+(1-\delta))((z-1)C+(\theta z+(1-\theta))hD).$$

آن‌گاه چند جمله‌ای مشخصه (۲۲.۲) به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\det[z^mP(z)+Q(z,\delta)]=0. \tag{۲۳.۲}$$

قضیه ۵.۲.۲. *برای معادله (۱۷.۲) که در قضیه (۲.۲.۲) صدق می‌کند، روش θ پایدار مجانبی است اگر* $\theta \in (\frac{1}{2}, 1]$

تحت شرایط قضیه (۲.۲.۲) باید ثابت کنیم ریشه‌های معادله مشخصه (۲۳.۲) قدرمطلق کمتر از یک دارند، برای این منظور لم زیر را بیان می‌کنیم.

لم ۶.۲.۲. $P(z)$ *نامنفرد است اگر و فقط اگر* $\theta \in (\frac{1}{2}, 1]$، $|z| \geqslant 1$ *و شرط اول قضیه (۲.۲.۲) برقرار باشد.*

برهان. $\lambda(A,B)$ را مقدار تکین ماتریس مدادی (A,B) قرار می‌دهیم از شرط اول قضیه (۲.۲.۲) داریم $Re\lambda(A,B) < 0$

دوحالت در نظر می‌گیریم:

حالت اول: $z \neq 1$، لذا طبق فرض داریم $|z| \geqslant 1$، بنابراین

$$
\begin{aligned}
P(z) &= (A+\theta hB)z - (A-(1-\theta)hB) = Az + \theta hBz - A + hB + \theta hB \\
&= (z-1)A + \theta hBz + hB + \theta hB = [(z-1)I]\left[A + (\frac{\theta zh + (1-\theta)h}{z-1})B\right]
\end{aligned}
$$

اگر $z \neq 1$، $\det[(z-1)I] \neq 0$ با یک محاسبه مستقیم داریم:

$$
Re\left(\frac{\theta zh + (1-\theta)h}{z-1}\right) > 0 \iff \theta > \frac{1}{2}.
$$

که معادل است با

$$
Re\left(\frac{z-1}{\theta zh + (1-\theta)h}\right) > 0 \iff \theta > \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad \det\left[\frac{z-1}{\theta zh + (1-\theta)h}A + B\right] \neq 0
$$

بنابراین

$$
\det\left[A + (\frac{\theta zh + (1-\theta)h}{z-1})B\right] \neq 0
$$

حالت دوم: زمانی‌که $z = 1$ در این حالت $p(z) = hB$، چون $h \neq 0$ و B نامنفرد است، $P(z) \neq 0$ یعنی صفر مقدار تکین (A,B) نیست و $P(z)$ نامنفرد است. □

و حال به اثبات قضیه (۵.۲.۲) می‌پردازیم:

برهان. برای اثبات این‌که روش θ پایدار مجانبی است، باید ثابت کنیم $\det[z^m P(z) + Q(z,\delta)]$ چند جمله‌ای شور است. شرط کافی این است که ثابت کنیم $P(z)$ وارون‌پذیر است و برای $|z| = 1$، $\rho[P^{-1}(z)Q(z,\delta)] < 1$.

$$
\frac{P(z)}{\theta z + 1 - \theta} = \frac{(A+\theta hB)z - (A-(1-\theta)hB)}{\theta z + 1 - \theta} = \frac{z-1}{\theta z + 1 - \theta}A + hB
$$

$$
\frac{Q(z,\delta)}{\theta z + 1 - \theta} = (\delta z + 1 - \delta)\left(hD + \frac{z-1}{\theta z + 1 - \theta}C\right)
$$

چون $\theta > \frac{۱}{۲}$ و $|z| \geqslant ۱$ داریم $\theta z + ۱ - \theta \neq ۰$
طبق لمی که در قبل ذکر شد، $P(z)$ نامنفرد است. بنابراین برای $|z| = ۱$ داریم:

$$\rho[P^{-۱}(z)Q(z,\delta)] = |\delta z + ۱ - \delta|\rho\left[\left(\frac{z-۱}{\theta z + ۱ - \theta}A + hB\right)^{-۱}\left(hD + \frac{z-۱}{\theta z + ۱ - \theta}C\right)\right],$$

برای $۰ \leqslant \delta \leq ۱$ و $|z| = ۱$ داریم $|\delta z + ۱ - \delta| \leqslant ۱ - \delta + \delta|z| = ۱$

$$\rho[P^{-۱}(z)Q(z,\delta)] \leqslant \rho\left[\left(\frac{z-۱}{\theta z + ۱ - \theta}A + hB\right)^{-۱}\left(hD + \frac{z-۱}{\theta z + ۱ - \theta}C\right)\right]. \quad (۲۴.۲)$$

فرض کنید

$$\xi = \frac{z-۱}{\theta z + ۱ - \theta}, \qquad \gamma = \frac{۱-\theta}{\theta}$$

وقتی $\theta \in (\frac{۱}{۲}, ۱]$، γ در رابطه $۰ \leqslant \gamma < ۱$ صدق می‌کند.
و برای $|z| = ۱$ و $۰ \leqslant \delta < ۱$ خواهیم داشت

$$Re\xi = Re\frac{۱}{\theta}\frac{z-۱}{z+\gamma} = \frac{۱}{\theta}Re\frac{z-۱}{z+\gamma} \geqslant ۰.$$

به این ترتیب دایره واحد از $\{z : |z| \leqslant ۱\}$ به $\{\xi : Re\xi \geqslant ۰\}$ تبدیل خواهد شد. بنابراین (۲۴.۲) معادل است با

$$\rho[P^{-۱}(z)Q(z,\delta)] \leqslant \rho[(\xi A + hB)^{-۱}(\xi C + hD)]; \quad Re\xi \geqslant ۰. \quad (۲۵.۲)$$

از شرط دوم قضیه (۲.۲.۲) داریم:

$$\sup_{Re\xi \geqslant ۰} \rho[(\xi A + hB)^{-۱}(\xi C + hD)] < ۱.$$

بنابراین از (۲۵.۲) بدست می‌آید:

$$\rho[P^{-۱}(z)Q(z,\delta)] < ۱ \quad |z| = ۱,$$

که اثبات کامل می‌شود. □

۳.۲.۲ فرمول تفاضلی پسرو

روش فرمول تفاضلی پسرو [۱۰] BDF از خانواده روش‌های ضمنی برای حل عددی معادله دیفرانسیل معمولی است. فرمول کلی BDF به‌صورت زیر است:

$$\sum_{k=۰}^{s} \alpha_k y_{n+k} = hBf(t_{n+s}, y_{n+s})$$

$$\frac{\rho x_{n-m}}{h} = \frac{۱}{h}\sum_{j=۰}^{s} \alpha_j x_{n-m-j}.$$

[۱۰] Backward difference formula

حال روش BDF را روی معادله (۱۷.۲) را به‌کار می‌بریم: [۱۴]

$$A\frac{\rho x_n}{h} + Bx_n + C\frac{\rho x_{n-m}}{h} + Dx_{n-m} = \circ \qquad (۲۶.۲)$$

که $\frac{\rho x_n}{h} = \frac{1}{h}\sum_{j=\circ}^{s} \alpha_j x_{n-j}$

برای سادگی فرض می‌کنیم $m = \frac{\tau}{h}$. آن‌گاه چند جمله‌ای مشخصه به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$P(z) = \det\left[\sum_{j=\circ}^{s} \alpha_j A z^{-j} + hBz^{\circ} + \sum_{j=\circ}^{s} \alpha_j C z^{-m-j} + hDz^{-m}\right] \qquad (۲۷.۲)$$

$$\det\left[\left(\sum_{j=\circ}^{s} \alpha_j z^{-j}\right) A + hB + z^{-m}\left[\left(\sum_{j=\circ}^{s} \alpha_j z^{-j}\right) C + hD\right]\right].$$

قضیه ۷.۲.۲. *روش تفاضلی پسرو A -پایدار برای معادله (۱۷.۲)، پایدار مجانبی است اگر در شرایط قضیه (۲.۲.۲) صدق کند.*

برهان. برای اثبات این‌که معادله (۲۶.۲) پایدار مجانبی است وقتی‌که روش BDF، A-پایدار است، کافی است ثابت کنیم تحت این فرضیات چند جمله‌ای مشخصه معادله، ریشه با $|z| \geqslant ۱$ ندارد، یعنی $P(z) \neq \circ$ هنگامی‌که $|z| \geqslant ۱$.

ابتدا ثابت می کنیم:

$$Re\left(\sum_{j=\circ}^{s} \alpha_j z^{-j}\right) \geqslant \circ \quad , \quad |z| \geqslant ۱.$$

روش BDFرا روی معادله آزمون استاندارد $y' = \lambda y$ با $Re(\lambda) < \circ$ به‌کار می‌بریم، چند جمله‌ای مشخصه به‌صورت زیر بدست می‌آید:

$$p(z) = \sum_{j=\circ}^{s} \alpha_j z^{-j} - h\lambda$$

چون روش BDF برای هر $\xi = h\lambda$ با $Re\xi \leqslant \circ$ A-پایدار است، برای $|z| \geqslant ۱$ داریم $p(z) \neq \circ$ و در نتیجه ثابت می‌کنیم:

$$Re\left(\sum_{j=\circ}^{s} \alpha_j z^{-j}\right) \geqslant \circ.$$

فرض کنید zای با شرط $|z| \geqslant ۱$ وجود دارد :

$$\sum_{j=\circ}^{s} \alpha_j z^{-j} = a + ib \quad ; \quad a < \circ$$

بنابراین از A-پایداری روش، همواره می‌توان $\xi = h\lambda = a + ib, a < \circ$ را در ناحیه پایداری روش پیدا کرد:

$$p(z) = \sum_{j=\circ}^{s} \alpha_j z^{-j} - \xi = \circ \quad , \quad |z| \geqslant ۱,$$

که تناقض است پس

$$\left(\sum_{j=0}^{s}\alpha_j z^{-j}\right) \geqslant 0 \quad , \quad |z| \geqslant 1,$$

از شرط اول نتیجه (۳.۲.۲) ،

$$\left(\sum_{j=0}^{s}\alpha_j z^{-j}\right) A + hB$$

نامنفرد است بنابراین خواهیم داشت:

$$P(z) = \det\left[\left(\sum_{j=0}^{s}\alpha_j z^{-j}\right) A + hB\right]$$
$$.\det\left[I + z^{-m}\left(\left(\sum_{j=0}^{s}\alpha_j z^{-j}\right) A + hB\right)^{-1}\left(\left(\sum_{j=0}^{s}\alpha_j z^{-j}\right) C + hD\right)\right].$$

با استفاده از شرط دوم نتیجه (۳.۲.۲) و چون وقتی‌که $|z| \geqslant 1$ ، $|z^{-m}| \leqslant 1$ بنابراین نتیجه می‌شود:

$$\det\left[I + z^{-m}\left(\left(\sum_{j=0}^{s}\alpha_j z^{-j}\right) A + hB\right)^{-1}\left(\left(\sum_{j=0}^{s}\alpha_j z^{-j}\right) C + hD\right)\right] \neq 0.$$

□

۴.۲.۲ پایداری مجانبی روش چندگامی برای $DDAE$

در این بخش، پایداری روش چندگامی [۱۱] را برای معادله (۱۷.۲) بررسی می‌کنیم. همان‌طورکه در بخش قبل بیان شد برای اینکه دستگاه DAE ضریب ثابت خطی حل‌پذیر باشد باید ماتریس مدادی منتظم باشد و سپس به فرم کانونی نشان داده می‌شود. لذا معادل این است که ماتریس A و B با استفاده از ماتریس‌های نامنفرد P و Q، به ماتریس های مثلثی تبدیل شوند. در اینجا فرض می‌کنیم که ماتریس C و D را هم می‌توان با استفاده از این دو ماتریس به فرم مثلثی تبدیل کرد.

در ادامه بحث، ماتریس‌های ضرایب را بالا مثلثی در نظر می‌گیریم.

تحت فرضیات این بخش، چندجمله‌ای مشخصه (۱۷.۲) را به‌صورت زیر می‌توان نوشت:

$$P(s,z) = \det[(sA+B)+(sC+D)z] = \prod_{i=1}^{d}[s(a_i+c_iz)+(b_i+d_iz)]$$

که $i=1,\ldots,d$ $\quad a_i, b_i, c_i, d_i$ عناصر قطری ماتریس‌های متناظر، d بعد و $z = exp(-\tau s)$ است.

[۱۱] Multistep method

گزاره ۸.۲.۲. *معادله (۱۷.۲) پایدار مجانبی است اگر در شرایط زیر صدق کند:*

۱) اگر $a_i = ۰$ آن‌گاه $c_i = ۰$

۲) برای هر i که $a_i \neq ۰$، $|a_i| > |c_i|$، برای هر i که $a_i = ۰$، $|b_i| > |d_i|$ و برای $|z| \leqslant ۱$ وقتی‌که $a_i \neq ۰$، $Re\left(\frac{b_i+d_iz}{a_i+c_iz}\right) > ۰$.

۳) برای هر $u \in \mathbb{R}^n$، $|u^TAu| \geqslant |u^TCu|$

برهان. هنگامی‌که $Re(s) \geqslant ۰$، $|z| \leqslant ۱$ است. باید ثابت کنیم تحت شرایط بالا $P(s,z) \neq ۰$ هنگامی‌که $Re(s) \geqslant ۰$ است.

اگر $a_i = c_i = ۰$، در این صورت از $|b_i| > |d_i|$ و $|z| \leqslant ۱$ داریم $b_i + d_iz \neq ۰$.

در صورتی‌که $a_i \neq ۰$ از $|a_i| > |c_i|$ داریم $a_i + c_iz \neq ۰$ بنابراین چون $Re(a_i+c_iz)^{-۱}(b_i+d_iz) > ۰$ برای $|z| \leqslant ۱$

$$s(a_i + c_iz) + (b_i + d_iz) = (a_i + c_iz)\left(s + \frac{b_i + d_iz}{a_i + c_iz}\right) \neq ۰,$$

و اثبات تمام است. □

یک روش چندگامی کلی به صورت زیر است

$$\sum_{j=۰}^{s} \alpha_j x_{n+j} = h \sum_{j=۰}^{s} \beta_j f_{n+j}. \tag{۲۸.۲}$$

زمانی‌که روش (۲۸.۲) روی معادله (۱۷.۲) به‌کار رود داریم

$$\sum_{j=۰}^{s} (\alpha_j A x_{n+j} + h\beta_j B x_{n+j} + \alpha_j C x_{n+j-m} + h\beta_j D x_{n+j-m}) = ۰, \tag{۲۹.۲}$$

که m مشابه تعریف قبل است.

قضیه ۹.۲.۲. *فرض کنید معادله DDAE (۱۷.۲) در شرایط گزاره (۸.۲.۲) و شرط زیر صدق کند*

$$-h\frac{b_i + d_iz}{a_i + c_iz} \in S_R; \quad |z| \leqslant ۱$$

و همچنین در روش چندگامی مذکور $\sum_{j=۰}^{s} \beta_j z^j$ چند جمله‌ای شور باشد، در این‌صورت جواب روش چندگامی پایدار مجانبی است.

برهان. باید ثابت کنیم چندجمله‌ای مشخصه برای $|z| \geqslant ۱$ مخالف صفر است.
چند جمله‌ای مشخصه را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} p(z) &= \det\left[\sum_{j=۰}^{s} \alpha_j A z^j + h\beta_j B z^j + \alpha_j C z^{j-m} + h\beta_j D z^{j-m}\right] \\ &= \prod_{i=۱}^{d} \sum_{j=۰}^{s} ((a_i + c_i z^{-m})\alpha_j + h(b_i + d_i z^{-m})\beta_j) z^j. \end{aligned} \tag{۳۰.۲}$$

جمله iام در (۳۰.۲) را در نظر می‌گیریم
حالت اول: اگر $a_i \neq ۰$:
وقتی‌که $|z| \geqslant ۱$ از شرط (۸.۲.۲) داریم $a_i + c_i z^{-m} \neq ۰$ در نتیجه:

$$\sum_{j=۰}^{s}((a_i+c_iz^{-m})\alpha_j+h(b_i+d_iz^{-m})\beta_i)z^j=(a_i+c_iz^{-m})\sum_{j=۰}^{s}\left(\alpha_j+h\frac{b_i+d_iz^{-m}}{a_i+c_iz^{-m}}\beta_i\right)z^j,$$

چون

$$Re\left(-\frac{b_i+d_iz^{-m}}{a_i+c_iz^{-m}}\right)\leqslant ۰,$$

و بنا بر فرض داریم:

$$-h\frac{b_i+d_iz^{-m}}{a_i+c_iz^{-m}}\in S_R,$$

آن‌گاه

$$\sum_{k=۰}^{s}((a_i+c_iz^{-m})\alpha_j+h(b_i+d_iz^{-m})\beta_i)z^j\neq ۰.$$

حالت دوم:اگر $a_i = ۰$ معادله مشخصه به‌صورت زیر ساده می‌شود:

$$\left(\sum_{k=۰}^{s}\beta_jz^j\right)h(b_i+d_iz^{-m})$$

در حالت $a_i = ۰$ از گزاره (۸.۲.۲) داریم $|b_i| > |d_i|$ بنابراین $b_i + d_i z^{-m} \neq ۰$.
و اگر $\sum_{k=۰}^{s}\beta_j z^j$ چند جمله‌ای شور باشد آن‌گاه

$$\left(\sum_{k=۰}^{s}\beta_jz^j\right)h(b_i+d_iz^{-m})\neq ۰.$$

□

۵.۲.۲ پایداری مجانبی روش رانگ-کوتا

روش رانگ-کوتا را برای معادله (۱۷.۲) به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$AK_{n,i}+hB\left(x_n+\sum_{j=۱}^{s}\hat{a}_{ij}K_{n,j}\right)+CK_{n-m,j}+hD\left(x_{n-m}+\sum_{j=۱}^{s}\hat{a}_{ij}K_{n-m,j}\right)=۰$$

$$i=۱,\dots,s$$

$$x_{n+۱}=x_n+\sum_{i=۱}^{s}\hat{b}_iK_{n,i},$$

(۳۱.۲)

که $K_{n,i}=[K^{۱}_{n,i},\dots,K^{d}_{n,i}]$ $i=۱,\dots,s$، مشتقات مرحله‌ای هستند که در h ضرب شده‌اند و

$$\hat{b}^T = [\hat{b}_۱, \hat{b}_۲, \ldots, \hat{b}_s], \quad \mathcal{A} = (\hat{a}_{ij}).$$

با فرض اینکه همه مقادیر ویژه $\mathcal{A}$ قسمت حقیقی مثبت دارند.
با بازنویسی مجدد مشتقات مرحله‌ای به صورت

$$K_n = [K^۱_{n,۱}, \ldots, K^۱_{n,s}, K^۲_{n,۱}, \ldots, K^۲_{n,s}, \ldots, K^d_{n,۱}, \ldots, K^d_{n,s}]^T.$$

معادله (۳۱.۲) به صورت زیر باز نویسی می‌شود:

$$\begin{pmatrix} A\otimes I_s + hB\otimes\mathcal{A} & ۰ \\ -I_d\otimes\hat{b}^T & I_d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} K_n \\ x_{n+۱}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ۰ & hB\otimes e \\ ۰ & -I_d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} K_{n-۱} \\ x_n\end{pmatrix}$$
$$+\begin{pmatrix} C\otimes I_s + hD\otimes\mathcal{A} & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} K_{n-m} \\ x_{n+۱-m}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ۰ & hD\otimes e \\ ۰ & ۰\end{pmatrix}\begin{pmatrix} K_{n-۱-m} \\ x_{n-m}\end{pmatrix} = ۰, \quad (۳۲.۲)$$

که $e = [۱, ۱, \ldots, ۱]^T$.

قضیه ۱۰.۲.۲. *معادله خطی (۱۷.۲) که در شرایط گزاره (۸.۲.۲) و شرط زیر صدق کند:*

$$-h\frac{b_i + d_i z^{-m}}{a_i + c_i z^{-m}} \in S_R \quad |z| \geqslant ۱$$

و همچنین برای روش RK اکیدا پایدار که همه مقادیر ویژه ماتریس ضریب $\mathcal{A}$ قسمت حقیقی مثبت دارند، جواب عددی پایدار مجانبی است.

برهان. چند جمله‌ای مشخصه روش رانگ-کوتا به‌صورت زیر است:

$$p(z) = \det\Bigg[z^{m+۱}\begin{pmatrix} A\otimes I_s + hB\otimes\mathcal{A} & ۰ \\ -I_d\otimes\hat{b}^T & I_d \end{pmatrix} + z^m\begin{pmatrix} ۰ & hB\otimes e \\ ۰ & -I_d\end{pmatrix}$$
$$+ z\begin{pmatrix} C\otimes I_s + hD\otimes\mathcal{A} & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ۰ & hD\otimes e \\ ۰ & ۰\end{pmatrix}\Bigg] = \begin{bmatrix} T_{۱۱} & T_{۱۲} \\ T_{۲۱} & T_{۲۲}\end{bmatrix},$$

$$T_{۱۱} = z^{m+۱}(A\otimes I_s + hB\otimes\mathcal{A}) + z(C\otimes I_s + hD\otimes\mathcal{A})$$

$$T_{۱۲} = z^m hB\otimes e + hD\otimes e$$

$$T_{۲۱} = -z^{m+۱} I_d\otimes\hat{b}^T$$

$$T_{۲۲} = z^{m+۱} I_d - z^m I_d.$$

ابتدا ثابت می‌کنیم تحت شرایط گزاره (۸.۲.۲)، T_{11} نامنفرد است بااستفاده از این حقیقت که ماتریس‌های ضرایب بالامثلثی هستند داریم:

$$\begin{aligned}\det[T_{11}] &= \prod_{i=1}^{d} \det[z^{m+1}(a_i I + hb_i\mathcal{A}) + z(c_i I + hd_i\mathcal{A})] \\ &= \prod_{i=1}^{d} \det[z^{m+1}a_i I + z^{m+1}hb_i\mathcal{A} + zc_i I + zhd_i\mathcal{A}] \\ &= \prod_{i=1}^{d} \det[z^{m+1}(a_i + c_i z^{-m})I + z^{m+1}h(b_i + z^{-m}d_i)\mathcal{A}],\end{aligned}$$

حال برای هر جمله در $\det[T_{11}]$، اگر $a_i \neq 0$

$$q(z) = \det\left[z^{m+1}(a_i + c_i z^{-m})\left(I + h\frac{b_i + d_i z^{-m}}{a_i + c_i z^{-m}}\mathcal{A}\right)\right],$$

وقتی $|z| \geqslant 1$ آن‌گاه $|z^{-m}| \leqslant 1$ و از شرط دوم گزاره (۸.۲.۲) داریم:

$$a_i + c_i z^{-m} \neq 0 \quad Re\frac{b_i + d_i z^{-m}}{a_i + c_i z^{-m}} > 0$$

و چون همه مقادیر ویژه $\mathcal{A}$ قسمت حقیقی مثبت دارند آنگاه $q(z) \neq 0$.

در حالتی‌که $a_i = c_i = 0$ داریم :

$$q(z) = \det[z^{m+1}h(b_i + d_i z^{-m})\mathcal{A}] \neq 0$$

چون برای $|z| \geqslant 1$، $b_i + d_i z^{-m}$ مخالف صفر است. بنابراین T_{11} نامنفرد است و $p(z)$ به‌صورت زیر باز نویسی می‌شود:

$$p(z) = \det[T_{11}]\det[T_{22} - T_{21}T_{11}^{-1}T_{12}]$$

$$\begin{aligned}&\det[T_{11}]\det[T_{22} - T_{21}T_{11}^{-1}T_{12}] \\ &\quad = z^{m+1}I_d - z^m I_d + [z^{m+1}I_d \otimes \hat{b}^T z^{-m+1}((a_i + c_i z^{-m})I \\ &\quad + z^{m+1}h(b_i + d_i z^{-m})\mathcal{A})^{-1}z^m hB \otimes e + hD \otimes e \\ &= \prod_{i=1}^{d} z^m[z - (1 - \hat{b}^T((a_i + c_i z^{-m})I + h(b_i + d_i z^{-m})\mathcal{A})^{-1}h(b_i + d_i z^{-m})e)].\end{aligned}$$

دو حالت در نظر می‌گیریم:

حالت اول:اگر $a_i \neq 0$

$$\begin{aligned}&1 - \hat{b}^T((a_i + c_i z^{-m})I + h(b_i + z^{-m}d_i)\mathcal{A})^{-1}h(b_i + d_i z^{-m})e \\ &= 1 - \hat{b}^T\left(I + h\frac{b_i + d_i z^{-m}}{a_i + c_i z^{-m}}\mathcal{A}\right)^{-1} h\frac{b_i + d_i z^{-m}}{a_i + c_i z^{-m}}e = R\left(-h\frac{b_i + d_i z^{-m}}{a_i + c_i z^{-m}}\right)\end{aligned}$$

که تابع پایداری روش RK به‌صورت زیر است:

$$R(\hat{z}) = ۱ - \hat{z}b^T(I - \hat{z}\mathcal{A})^{-۱}e.$$

چون

$$Re\left(-\frac{b_i + d_i z^{-m}}{a_i + c_i z^{-m}}\right) \leqslant ۰,$$

و همچنین طبق فرض برای $|z| \geqslant ۱$،

$$\left(-h\frac{b_i + d_i z^{-m}}{a_i + c_i z^{-m}}\right) \in S_R$$

است. بنابراین طبق تعریف ناحیه پایداری به‌صورت زیر

$$S_R = \{\hat{h} \in C; |R(\hat{h})| < ۱\}; \quad \hat{h} = h\lambda, \quad Re\lambda < ۰$$

نتیجه می‌دهد:

$$۱ - \hat{b}^T((a_i + c_i z^{-m})I + h(b_i + z^{-m}d_i)\mathcal{A})^{-۱}h(b_i + d_i z^{-m})e < ۱$$

در نتیجه $p(z) \neq ۰$.

حالت دوم: $a_i = c_i = ۰$

$$۱ - \hat{b}^T((a_i + c_i z^{-m})I + h(b_i + z^{-m}d_i)\mathcal{A})^{-۱}h(b_i + d_i z^{-m})e = ۱ - \hat{b}^T\mathcal{A}^{-۱}e$$

و چون روش رانگ-کوتا طبق فرض اکیدا پایدار است، آنگاه $|۱ - \hat{b}^T\mathcal{A}^{-۱}e| < ۱$
یعنی ثابت کردیم برای $|z| \geqslant ۱$، $p(z) \neq ۰$ و اثبات تمام است. □

۳.۲ پایداری مجانبی روش روزنبرگ معادله دیفرانسیل جبری تاخیری خنثی

در این بخش معادله جبری تاخیری خنثی $NDDAE$ را درنظر می‌گیریم و قصد داریم ساختار روش روزنبرگ را برای معادله (۱۷.۲) بررسی کنیم و به تحلیل پایداری مجانبی این روش عددی بپردازیم.

$$Ax'(t) + Bx(t) + Cx'(t-\tau) + Dx(t-\tau) = ۰ \qquad (۳۳.۲)$$

۱.۳.۲ پایداری مجانبی جواب تحلیلی $NDDAE$

بدون از دست دادن کلیت مسئله، حالتی را در نظر بگیرید که ماتریس‌های A، B، C و D بالامثلثی هستند که a_i، b_i، c_i و d_i به ترتیب عناصر قطری هستند. فرض کنید تمامی مقادیر تکین ماتریس مدادی (A, B) قسمت حقیقی منفی دارند.

چند جمله‌ای مشخصه $NDDAE$ (۳۳.۲) در زیر آمده است:

$$\begin{aligned} p(s,z) &= \det[(sA+B)+(sC+D)e^{-s\tau}] = \det[(sA+B)+(sC+D)z] \\ &= \prod_{i=1}^{d}[(sa_i+b_i)+(sc_i+d_i)z] = \prod_{i=1}^{d}[s(a_i+c_iz)+(b_i+d_iz)]. \end{aligned} \quad (۳۴.۲)$$

واضح است جواب تحلیلی $NDDAE$ (۳۳.۲) پایدار مجانبی است اگر و فقط اگر ریشه‌های چند جمله‌ای مشخصه (۳۴.۲) قسمت حقیقی منفی داشته باشد.

۲.۳.۲ ساختار روش روزنبرگ

معادله دیفرانسیل جبری تاخیری خنثی را در حالت کلی در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(x(t), x(t-\tau), x'(t-\tau)), \quad t \geqslant 0, \\ x(t) &= \phi(t), \quad t < 0, \end{aligned} \quad (۳۵.۲)$$

که $\phi(t)$ و $f(t)$ توابع معلوم، τ زمان تأخیر و $x(t)$ تابع مجهول است و با فرض اینکه معادله (۳۵.۲) همواره حل‌پذیر است.
طبق گزاره (۸.۲.۲)، نتیجه زیر را خواهیم داشت.

گزاره ۱.۳.۲. *اگر معادله (۳۳.۲) را به صورت (۳۵.۲) در نظر بگیریم و فرض کنیم‌که $x(t)$، $x(t-\tau)$ و $x'(t-\tau)$ مستقل از یکدیگر باشند آن‌گاه:*

$$Af_{x(t)}(x, x(t-\tau), x'(t-\tau)) + B = 0,$$

$$Af_{x(t-\tau)}(x, x(t-\tau), x'(t-\tau)) + D = 0.$$

روش رانگ-کوتا نیم صریح خنثی برای معادله (۳۵.۲) به صورت

$$\begin{aligned} K_{n,i} &= hf\left(x_n + \sum_{j=1}^{i}\alpha_{ij}K_{n,j}, x_{n-1} + \sum_{j=1}^{i}\alpha_{ij}K_{n-1,j}, \tilde{K}_{n-1,i}\right), \\ x_{n+1} &= x_n + \sum_{i=1}^{s} b_i K_{n,i}. \end{aligned} \quad (۳۶.۲)$$

است. h طول گام، و $\tau = lh$ که l عدد صحیح مثبت است. $\tilde{K}_{n-1,i} = K_{n-1,i}\backslash h$ و $K_{n,i}$ تقریب مقدار هر مرحله برای $i = 1, 2, \dots, s$ است.
روش روزنبرگ را برای (۳۳.۲) از (۳۶.۲) بکار می‌بریم.
قرار می‌دهیم :

$$(\tilde{x}_{n,i}, \tilde{x}_{n-1,i}) = \left(x_n + \sum_{j=1}^{i}\alpha_{ij}K_{n,j}, x_{n-1} + \sum_{j=1}^{i}\alpha_{ij}K_{n-1,j}\right).$$

آن‌گاه f را در معادله (۳۶.۲) بسط می‌دهیم:

$$(\hat{x}_{n,i}, \hat{x}_{n-1,i}) = \left(x_n + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} K_{n,j}, x_{n-1} + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} K_{n-1,j}\right).$$

با جایگذاری $\alpha_{ii} K_{n,i}$ با $\sum_{j=1}^{i} \gamma_{ij} K_{n,j}$ و جایگذاری $f_{x(t)}(\tilde{x}_{n,i}, \tilde{x}_{n-1,i}, \tilde{K}_{n-1,i})$ و $f_{x(t-\tau)}(\tilde{x}_{n,i}, \tilde{x}_{n-1,i}, \tilde{K}_{n-1,i})$ به‌ترتیب با $f_{x(t)}(\hat{x}_{n,i}, \hat{x}_{n-1,i}, \tilde{K}_{n-1,i})$ و $f_{x(t-\tau)}(\hat{x}_{n,i}, \hat{x}_{n-1,i}, \tilde{K}_{n-1,i})$ به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} K_{n,i} &= hf\left(x_n + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} K_{n,j}, x_{n-1} + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} K_{n-1,j}, \tilde{K}_{n-1,i}\right) \\ &\quad + hf_{x(t)}(\tilde{x}_{n,i}, \tilde{x}_{n-1,i}, \tilde{K}_{n-1,j}) \sum_{j=1}^{i} \gamma_{ij} K_{n,j} \\ &\quad + hf_{x(t-\tau)}(\tilde{x}_{n,i}, \tilde{x}_{n-1,i}, \tilde{K}_{n-1,j}) \sum_{j=1}^{i} \gamma_{ij} K_{n,j} \\ x_{n+1} &= x_n + \sum_{i=1}^{s} b_i K_{n,i} \end{aligned} \tag{۳۷.۲}$$

که $i = 1, 2, \ldots, s.$ $\alpha_{ii} = \sum_{j=1}^{i} \gamma_{ij}$ می‌باشد. بااستفاده از درونیابی درنقطه $x_{n-k+\delta}$ و $K_{n-k+\delta,j}$ معادله (۳۷.۲) را به‌صورت زیر بسط می‌دهیم:

$$\begin{aligned} K_{n,i} &= hf\left(x_n + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} K_{n,j}, x_{n-k+\delta} + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} K_{n-k+\delta,j}, \tilde{K}_{n-k+\delta,i}\right) \\ &\quad + hf_{x(t)}(\tilde{x}_{n,i}, \tilde{x}_{n-k+\delta,i}, \tilde{K}_{n-k+\delta,i}) \sum_{j=1}^{i} \gamma_{ij} K_{n,j} \\ &\quad + hf_{x(t-\tau)}(\tilde{x}_{n,i}, \tilde{x}_{n-k+\delta,i}, \tilde{K}_{n-k+\delta,i}) \sum_{j=1}^{i} \gamma_{ij} K_{n-k+\delta,j} \\ x_{n+1} &= x_n + \sum_{i=1}^{s} b_i K_{n,i}, \end{aligned} \tag{۳۸.۲}$$

که

$$x_{n-k+\delta} = \sum_{q=-r}^{\nu} L_q(\delta) x_{n-k+q},$$

$$K_{n-k+\delta,j} = \sum_{q=-r}^{\nu} L_q(\delta) K_{n-k+q,j}, \quad j = 1, 2, \ldots, s$$

تعریف می‌شود. با $L_q(\delta) = \prod_{m=-r, m\neq q}^{\nu} (\frac{\delta - m}{q - m})$ برای $q = -r, -r+1, \ldots, \nu$ و $\tau = (k-\delta)h$ برای $\delta \in [0, 1)$ که k عدد صحیح و $k \geqslant \nu + 1$ است.

معادله (۳۸.۲) به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\tilde{K}_{n,i} - f_{x(t)}(\tilde{x}_{n,i}, \tilde{x}_{n-k+\delta,i}, \tilde{K}_{n-k+\delta,i}) \times \sum_{j=1}^{i} \gamma_{ij} K_{n,j} \\
&- f_{x(t-\tau)}(\tilde{x}_{n,i}, \tilde{x}_{n-k+\delta,i}, \tilde{K}_{n-k+\delta,i}) \times \sum_{j=1}^{i} \gamma_{ij} K_{n-k+\delta,j} \\
&= f\left(x_n + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} K_{n,j}, x_{n-k+\delta} + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} K_{n-k+\delta,j}, \tilde{K}_{n-k+\delta,i}\right) \quad (i = 1, 2, \dots, s),
\end{aligned}$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}
&A\Big(\tilde{K}_{n,i} - f_{x(t)}(\tilde{x}_{n,i}, \tilde{x}_{n-k+\delta,i}, \tilde{K}_{n-k+\delta,i}) \times \sum_{j=1}^{i} \gamma_{ij} K_{n,j} - f_{x(t-\tau)}(\tilde{x}_{n,i}, \tilde{x}_{n-k+\delta,i}, \tilde{K}_{n-k+\delta,i}) \\
&\times \sum_{j=1}^{i} \gamma_{ij} K_{n-k+\delta,j}\Big) + B\left(x_n + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} K_{n,j}\right) + C\tilde{K}_{n-k+\delta,i} \\
&D\left(x_{n-k+\delta} + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} K_{n-k+\delta,j}\right) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, s).
\end{aligned}$$

برای سازگاری بین معادله دیفرانسیل و معادله تفاضلی طبق قضیه (۱.۳.۲) داریم:

$$\begin{aligned}
A f_{x(t)}(\tilde{x}_{n,i}, \tilde{x}_{n-k+\delta}, \tilde{K}_{n-k+\delta,i}) &= -B \\
A f_{x(t-\tau)}(\tilde{x}_{n,i}, \tilde{x}_{n-k+\delta}, \tilde{K}_{n-k+\delta,i}) &= -D.
\end{aligned}$$

بنابراین روش روزنبرگ برای معادله (۳۳.۲) به‌صورت زیر حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned}
&AK_{n,i} + hB\left(x_n + \sum_{j=1}^{s} f_{ij} K_{n,j}\right) + CK_{n-k+\delta,i} \\
&+ hD\left(x_{n-k+\delta} + \sum_{j=1}^{s} f_{ij} K_{n-k+\delta,j}\right) = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, s), \qquad (۳۹.۲) \\
&x_{n+1} = x_n + \sum_{i=1}^{s} b_i K_{n,i}.
\end{aligned}$$

۳.۳.۲ پایداری مجانبی روش روزنبرگ

تعریف ۲.۳.۲. روش روزنبرگ برای $NDDAE$ پایدار مجانبی، P-پایدار نامند اگر برای هر $h > 0$ به‌طوری‌که $\tau = lh$ و l عدد صحیح مثبت است، آن‌گاه جواب عددی x_n از معادله (۳۹.۲) در نقطه $t_n = nh$، $x_n \to 0$ وقتی‌که $t_n \to \infty$

تعریف ۳.۳.۲. روش روزنبرگ برای $NDDAE$ پایدار مجانبی، GP-پایدار می‌نامند اگر برای هر $h > \circ$ جواب عددی x_n معادله (۳۹.۲) در نقطه $t_n = nh$ صدق می‌کند که $x_n \to \circ$ زمانی‌که $t_n \to \infty$

در ادامه بحث مفروضات زیر را در نظر می‌گیریم

۱) ماتریس ضرایب $NDDAE$ مثلثی هستند و عناصر قطری در شرایط گزاره(۱.۳.۲) صدق می‌کنند

۲) عناصر قطری γ_{ii} از ماتریس ضرایب $F = (f_{ij})$ در روش روزنبرگ بزرگتر از صفر هستند یعنی $\gamma_{ii} > \circ \quad (i = 1, \dots, s)$.

۳) درونیابی روش (۳۹.۲) در شرط لم (۶.۳.۲) صدق می‌کند یعنی $\circ \leqslant r \leqslant \nu \leqslant r+2$ و $k \geqslant \nu+1$.

قضیه ۴.۳.۲. *تحت فرضیات یک تا سه مذکور، اگر ماتریس‌های ضرایب A، B، C و D از معادله (۳۳.۲) که برای هر $|\xi| \leqslant 1$ و $a_i \neq \circ$، $-h\frac{b_i+d_i\xi}{a_i+c_i\xi} \in S_R$ برقرار است و همچنین روش روزنبرگ (۳۹.۲) اکیدا پایدار با ناحیه پایداری S_R باشد آن‌گاه روش روزنبرگ GP-پایدار است.*

قبل از اثبات قضیه دو لم را بیان می‌کنیم و به اثبات قضیه می‌پردازیم.

لم ۵.۳.۲. *[۱۵] چند جمله‌ای $\alpha(z,\delta) = \sum_{q=-r}^{\nu} L_q(\delta) z^{q+r}$ دارای خواص زیر است:*

۱) $|\alpha(z,\delta)| \leqslant 1 \quad (|z| \leqslant 1 \quad \circ \leqslant \delta < 1)$ اگر و فقط اگر $r \leqslant \nu \leqslant r+2$

۲) اگر $r+\nu > \circ$، $r \leqslant \nu \leqslant r+2$، $|z| = 1$، $\circ \leqslant \delta < 1$، آن‌گاه $|\alpha(z,\delta)| = 1$ اگر و فقط اگر $z = 1$.

لم ۶.۳.۲. *[۲۹] چند جمله‌ای $Q(z,\delta) = \sum_{q=-r}^{\nu} L_q(\delta) z^{q-k}$ را درنظر می‌گیریم، در این‌صورت اگر $\circ \leqslant r \leqslant \nu \leqslant r+2$ و $k \geqslant \nu+1$ برای هر $\delta \in [\circ, 1)$ و $|z| \geqslant 1$ آن‌گاه $|Q(z,\delta)| \leqslant 1$.*

برهان. معادله (۳۹.۲) را به‌صورت بلوکی بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{pmatrix} A\otimes I_s + hB\otimes F & \circ \\ -I_d\otimes b^T & I_d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} K_n \\ x_{n+1}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \circ & hB\otimes e \\ \circ & -I_d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} K_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}$$
$$+ \sum_{q=-r}^{\nu} L_q(\delta)\left[\begin{pmatrix} C\otimes I_s + hD\otimes F & \circ \\ \circ & \circ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} K_{n-k+q} \\ x_{n-k+q+1}\end{pmatrix}\right. \tag{۴۰.۲}$$
$$\left.\begin{pmatrix} \circ & hD\otimes e \\ \circ & \circ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} K_{n-k+q-1} \\ x_{n-k+q}\end{pmatrix}\right] = \circ.$$

چند جمله‌ای مشخصه معادله (۴۰.۲) به‌صورت زیر است:

$$p(z) = \det\left[\begin{pmatrix} A\otimes I_s + hB\otimes F & \circ \\ -I_d\otimes b^T & I_d \end{pmatrix} z^{k+r+1} + \begin{pmatrix} \circ & hB\otimes e \\ \circ & -I_d \end{pmatrix} z^{k+r}\right.$$
$$\left. + \sum_{q=-r}^{\nu} L_q(\delta)\left(\begin{pmatrix} C\otimes I_s + hD\otimes F & \circ \\ \circ & \circ \end{pmatrix} z^{q+r+1} + \begin{pmatrix} \circ & hD\otimes e \\ \circ & \circ \end{pmatrix} z^{q+r}\right)\right]$$
$$= \det\left[\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22}\end{pmatrix}\right], \tag{۴۱.۲}$$

که

$$T_{11}=(A\otimes I_s+hB\otimes F)z^{k+r+1}+\sum_{q=-r}^{\nu}L_q(\delta)z^{q+r+1}(C\otimes I_s+hD\otimes F),$$

$$T_{12}=(hB\otimes e)z^{k+r}+\sum_{q=-r}^{\nu}L_q(\delta)z^{q+r}hD\otimes e,$$

$$T_{21}=(-I_d\otimes b^T)z^{k+r+1},$$

$$T_{22}=I_dz^{k+r+1}-I_dz^{k+r}$$

است. حال ثابت می‌کنیم T_{11} برای هر z با $|z|\geqslant 1$ نامنفرد است.

$$\det[T_{11}]=\prod_{i=1}^{d}\det\Bigg[z^{k+r+1}\Bigg(\Bigg(a_i+\sum_{q=-r}^{\nu}L_q(\delta)z^{q-k}c_i\Bigg)I_s + h\Bigg(b_i+\sum_{q=-r}^{\nu}L_q(\delta)z^{q-k}d_i\Bigg)F\Bigg)\Bigg]. \tag{۴۲.۲}$$

حال عبارت (۴۲.۲) را در دو حالت بررسی می‌کنیم:

۱) $a_i\neq 0$ مطابق لم (۶.۳.۲) و(۸.۲.۲) به آسانی دیده می‌شود $a_i+\sum_{q=-r}^{\nu}L_q(\delta)z^{q-k}c_i\neq 0$ و $Re\left(\frac{b_i+\sum_{q=-r}^{\nu}L_q(\delta)z^{q-k}d_i}{a_i+\sum_{q=-r}^{\nu}L_q(\delta)z^{q-k}c_i}\right)>0$. دراین‌صورت عبارت (۴۲.۲) به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$q(z)=\left[z^{k+r+1}\left(a_i+\sum_{q=-r}^{\nu}L_q(\delta)z^{q-k}c_i\right)\left(I_s+\frac{b_i+\sum_{q=-r}^{\nu}L_q(\delta)z^{q-k}d_i}{a_i+\sum_{q=-r}^{\nu}L_q(\delta)z^{q-k}c_i}hF\right)\right].$$

در عبارت بالا برای F، طبق فرض $\gamma_{ii}>0$ برای $i=1,2,\ldots,s$ درنتیجه $q(z)\neq 0$

۲) $a_i=0$ آن‌گاه مطابق لم (۶.۳.۲) و (۸.۲.۲) داریم $b_i+\sum_{q=-r}^{\nu}L_q(\delta)z^{q-k}d_i\neq 0$ و جمله متناظر (۴۲.۲) :به‌صورت زیر ساده می‌شود

$$q(z)=\det\left[z^{k+r+1}\left(b_i+\sum_{q=-r}^{\nu}L_q(\delta)z^{q-k}d_i\right)hF\right].$$

توجه داریم که F معکوس‌پذیر است بنابراین $q(z)\neq 0$.

اکنون چند جمله‌ای مشخصه (۴۱.۲) به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$p(z)=\det[T_{11}].\det[T_{22}-T_{21}T_{11}^{-1}T_{12}].$$

T_{11}^{-1} بالا مثلثی با عناصر قطری زیر است:

$$z^{-(k+r+1)}\left[\left(a_i+\sum_{q=-r}^{\nu}L_q(\delta)z^{q-k}c_i\right)I_s+\left(b_i+\sum_{q=-r}^{\nu}L_q(\delta)z^{q-k}d_i\right)hF\right]^{-1},i=1,2,\ldots,d.$$

با یک محاسبه ساده داریم:

$$\det[T_{۲۲} - T_{۲۱}T_{۱۱}^{-۱}T_{۱۲}] = \prod_{i=۱}^{d} z^{k+r}\Big[z - \Big(۱ - b^T\Big(\Big(a_i + \sum_{q=-r}^{\nu} L_q(\delta) z^{q-k} c_i\Big) I_s + \Big(b_i + \sum_{q=-r}^{\nu} L_q(\delta) z^{q-k} d_i\Big) hF\Big)^{-۱} \times \Big(b_i + \sum_{q=-r}^{\nu} L_q(\delta) z^{q-k} d_i\Big) e\Big)\Big]. \tag{۴۳.۲}$$

تحت فرضیات ۳-۱، وقتی‌که $|z| \geqslant ۱$ هر جمله از (۴۳.۲) را در دوحالت بررسی می‌کنیم:

۱) $a_i \neq ۰$، برای $a_i + \sum_{q=-r}^{\nu} L_q(\delta) z^{q-k} c_i \neq ۰$ آن‌گاه

$$\begin{aligned}
& ۱ - b^T\left(\left(a_i + \sum_{q=-r}^{\nu} L_q(\delta) z^{q-k} c_i\right) I_s + \left(b_i + \sum_{q=-r}^{\nu} L_q(\delta) z^{q-k} d_i\right) hF\right)^{-۱} \\
& \times h\left(b_i + \sum_{q=-r}^{\nu} L_q(\delta) z^{q-k} d_i\right) e \\
& = ۱ + b^T\left(I_s - \left(-h\frac{b_i + \sum_{q=-r}^{\nu} L_q(\delta) z^{q-k} d_i}{a_i + \sum_{q=-r}^{\nu} L_q(\delta) z^{q-k} c_i}\right) F\right)^{-۱} \\
& \times \left(-h\frac{b_i + \sum_{q=-r}^{\nu} L_q(\delta) z^{q-k} d_i}{a_i + \sum_{q=-r}^{\nu} L_q(\delta) z^{q-k} c_i}\right) e \\
& = R\left(-h\frac{b_i + \sum_{q=-r}^{\nu} L_q(\delta) z^{q-k} d_i}{a_i + \sum_{q=-r}^{\nu} L_q(\delta) z^{q-k} c_i}\right),
\end{aligned}$$

که $R(\hat{z}) = ۱ + \hat{z} b^T(I_s - \hat{z}F)^{-۱} e_s$ تابع پایداری روش روزنبرگ است.

آن‌گاه مطابق لم (۸.۲.۲) می‌دانیم برای هر ξ که $|\xi| \leqslant ۱$، $Re(\frac{b_i + d_i\xi}{a_i + c_i\xi}) > ۰$ و چون طبق فرض $-h\frac{b_i + d_i\xi}{a_i + c_i\xi} \in S_R$ آن‌گاه

$$\left|R\left(-h\frac{b_i + \sum_{q=-r}^{\nu} L_q(\delta) z^{q-k} d_i}{a_i + \sum_{q=-r}^{\nu} L_q(\delta) z^{q-k} c_i}\right)\right| < ۱ \quad \Rightarrow \det[T_{۲۲} - T_{۲۱}T_{۱۱}^{-۱}T_{۱۲}] \neq ۰,$$

و در نتیجه $p(z) \neq ۰$.

۲) $a_i = ۰$، طبق لم (۸.۲.۲) $c_i = ۰$ در این‌صورت عبارت (۴۳.۲) به‌صورت زیر ساده می‌شود

$$\det[T_{۲۲} - T_{۲۱}T_{۱۱}^{-۱}T_{۱۲}] = z - (۱ - b^T F^{-۱} e)$$

چون طبق فرض روش روزنبرگ اکیدا پایدار است آن‌گاه $|۱ - b^T F^{-۱} e| < ۱$ و

$$z - (۱ - b^T F^{-۱} e) \neq ۰,$$

ثابت کردیم برای $|z| \geqslant ۱$، $p(z) \neq ۰$ و اثبات تمام است. □

فصل ۳

رفتار پایداری معادله دیفرانسیل جبری تاخیری غیرخطی

۱.۳ رفتار پایداری کلاس $DDAE$ غیرخطی

ابتدا تعریف اندیس را در معادلات دیفرانسیل جبری بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۱.۳. [۲۶] کمترین تعداد گام‌های مشتق‌گیری مورد نیاز که یک معادله DAEرا به ODE تبدیل می‌کند اندیس DAE نام دارد.

اکنون دستگاه معادله دیفرانسیل جبری تاخیری غیرخطی اندیس یک [۱] را تعریف می کنیم:

$$u'(t) = f(t, u(t), u(t-\tau), \nu(t), \nu(t-\tau)), \quad t > \circ, \quad (\tau > \circ), \tag{۱.۳}$$

$$\circ = g(u(t), \nu(t)), \quad t > \circ, \tag{۲.۳}$$

$$u(t) = \phi(t), \quad \nu(t) = \psi(t), \quad -\tau \leq t \leq \circ \tag{۳.۳}$$

و معادلات اختلال یافته آن‌ها بصورت زیر هستند [۲] :

$$\tilde{u}'(t) = f(t, \tilde{u}(t), \tilde{u}(t-\tau), \tilde{\nu}(t), \tilde{\nu}(t-\tau)), \quad t > \circ, \quad (\tau > \circ), \tag{۴.۳}$$

$$\circ = g(\tilde{u}(t), \tilde{\nu}(t)), \quad t > \circ, \tag{۵.۳}$$

$$\tilde{u}(t) = \tilde{\phi}(t), \quad \tilde{\nu}(t) = \tilde{\psi}(t), \quad -\tau \leq t \leq \circ \tag{۶.۳}$$

که انتظار می‌رود تقریب $u(t) - \tilde{u}(t)$ و $\nu(t) - \tilde{\nu}(t)$ در رابطه زیر صدق کند:

$$\|u(t) - \tilde{u}(t)\| \leqslant \max_{-\tau \leqslant t \leqslant \circ} \|\phi(t) - \tilde{\phi}(t)\|, \quad \forall t \geq \circ,$$

[۱] Index one

[۲] Perturbed equations

$$\|\nu(t)-\tilde{\nu}(t)\| \leqslant \max_{-\tau\leqslant t\leqslant \circ}\|\psi(t)-\tilde{\psi}(t)\|, \quad \forall t\geq \circ.$$

در ادامه، تعریف زیر به‌جای فرضیات بالا معرفی می‌شود.

تعریف ۲.۱.۳. دستگاه (۱.۳) - (۳.۳) پایدار نامیده می شود اگر نامعادلات زیر برقرار باشند:

$$\|u(t)-\tilde{u}(t)\| \leqslant \max_{-\tau\leqslant t\leqslant \circ}\|\phi(t)-\tilde{\phi}(t)\|, \tag{۷.۳}$$

$$\|\nu(t)-\tilde{\nu}(t)\| \leqslant L\max_{-\tau\leqslant t\leqslant \circ}\|\phi(t)-\tilde{\phi}(t)\| \tag{۸.۳}$$

که $L>\circ$ یک ثابت است.

برای بررسی پایداری (۱.۳) - (۳.۳) لم زیر را بیان می‌کنیم.

لم ۳.۱.۳. *مسئله مقدار اولیه زیر را در نظر بگیرید:*

$$\chi'(t)=a(t)\chi(t)+\eta(t), \quad \chi(\circ)=\chi_\circ, \quad t>\circ, \tag{۹.۳}$$

که $a(t)$ و $\eta(t)$ توابع پیوسته روی t وقتی‌که $t\geq\circ$ ، $Re(a(t))<\circ$است. در این‌صورت جواب مسئله مقدار اولیه در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$\mid\chi(t)\mid\leqslant max\left\{\mid\chi(\circ)\mid, \max_{\circ\leqslant s\leqslant t}\frac{\mid\eta(s)\mid}{-Re(a(s))}\right\} \quad t\geq\circ. \tag{۱۰.۳}$$

برهان. تعریف می‌کنیم $A(t)=\int_\circ^t a(s)ds$، توجه کنید که برای $t>\circ$، $Re(A(t))<\circ$.

جواب معادله (۹.۳) به‌صورت زیر است:

$$\chi(t)=e^{A(t)}\chi_\circ+e^{A(t)}\int_\circ^t e^{-A(s)}\eta(s)ds.$$

از طرفی داریم که

$$\begin{aligned}
&|\int_\circ^t e^{-Re(A(s))}\eta(s)ds|\\
&=|\int_\circ^t \frac{-Re(a(s))e^{-Re(A(s))}\eta(s)}{-Re(a(s))}ds|\\
&\leqslant \max_{\circ\leqslant s\leqslant t}\{|\frac{\eta(s)}{-Re(a(s))}|\}|\int_\circ^t -Re(a(s))e^{-Re(A(s))}ds|,
\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\int_\circ^t -Re(a(s))e^{-Re(A(s))}ds=e^{-Re(A(t))}-۱,$$

بنابراین

$$|\int_\circ^t e^{-Re(A(s))}\eta(s)ds|\leqslant \max_{\circ\leqslant s\leqslant t}\{|\frac{\eta(s)}{-Re(a(s))}|\}|e^{-Re(A(t))}-۱|,$$

آن‌گاه

$$|\chi(t)|\leqslant e^{Re(A(t))}|\chi_\circ|+(۱-e^{Re(A(t))})\max_{\circ\leqslant s\leqslant t}\left|\frac{\eta(s)}{-Re(a(s)}\right|$$

و بنابراین برای هر $t \geqslant ۰$

$$|\chi(t)| \leqslant \max_{۰\leqslant s\leqslant t}\{|\chi_۰|; \max_{۰\leqslant s\leqslant t}\frac{|\eta(s)|}{-Re(a(s))}\}.$$

□

برای اختصار فرض کنید u و ν در معادلات (۱.۳) و (۲.۳) d-بعدی هستند.

$$f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d,$$
$$g:\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d.$$

حال فرض کنیدf و g در شرایط لیپ-شیتز (۱) - (۴) صدق می کنند.

(۱)

$$\langle f(t,u,u_\tau,\nu,\nu_\tau)-f(t,\tilde{u},u_\tau,\nu,\nu_\tau),u-\tilde{u}\rangle\leq\sigma(t)\|u-\tilde{u}\|^۲,$$

(۲)

$$\|f(t,u,u_\tau,\nu,\nu_\tau)-f(t,u,\tilde{u}_\tau,\nu,\nu_\tau)\|\leq\gamma_۱(t)\|u_\tau-\tilde{u}_\tau\|,$$
$$\|f(t,u,u_\tau,\nu,\nu_\tau)-f(t,u,u_\tau,\tilde{\nu},\nu_\tau)\|\leq\gamma_۲(t)\|\nu-\tilde{\nu}\|,$$
$$\|f(t,u,u_\tau,\nu,\nu_\tau)-f(t,u,u_\tau,\nu,\tilde{\nu}_\tau)\|\leq\gamma_۳(t)\|\nu_\tau-\tilde{\nu}_\tau\|,$$

(۳)

$$\sigma(t)<۰,\quad \gamma_۱(t)+L\gamma_۲(t)+L\gamma_۳(t)\leq-\sigma(t),\quad \forall t\geq ۰,$$

(۴) مشتق فرشه $g(u,\nu)$ نسبت به u و ν، یعنی $\frac{\partial g}{\partial u}$ و $\frac{\partial g}{\partial \nu}$ در فضای ضرب $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$ وجود دارد ، $\frac{\partial g}{\partial u}$ پیوسته ، $(\frac{\partial g}{\partial \nu})^{-۱}$ موجود و نامساوی زیر برقرار است.

$$\sup_{u,\nu\in R^d}\left\|\left(\frac{\partial g}{\partial \nu}\right)^{-۱}\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)\right\|=L<\infty,$$

که $u=(u_۱,u_۲,\dots,u_d)^T$، $\nu=(\nu_۱,\nu_۲,\dots\nu_d)^T$، $\langle u,\nu\rangle=\Sigma_{i=۱}^d u_i\nu_i$، $\|u\|^۲=\langle u,u\rangle$،

$$\left\|\frac{\partial g}{\partial u}\right\|=\sup_{\omega\in R^d,\|\omega\|=۱}\left\|\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)\omega\right\|.$$

قضیه ۴.۱.۳. *اگر f و g در معادلات (۱.۳) و (۲.۳)در شرایط (۱) - (۴) صدق کند آن‌گاه معادلات (۱.۳) و (۲.۳) پایدار است.*

برهان. فرض کنید $u=u(t)$ و $u_\tau=u(t-\tau)$ و $\nu=\nu(t)$ و $\nu_\tau=\nu(t-\tau)$

$$\begin{aligned}\frac{۱}{۲}\frac{d}{dt}\|u-\tilde{u}\|^۲&=\langle f(t,u,u_\tau,\nu,\nu_\tau)-f(t,\tilde{u},\tilde{u}_\tau,\tilde{\nu},\tilde{\nu}_\tau),u-\tilde{u}\rangle\\&=\langle f(t,u,u_\tau,\nu,\nu_\tau)-f(t,\tilde{u},u_\tau,\nu,\nu_\tau),u-\tilde{u}\rangle\\&+\langle f(t,\tilde{u},u_\tau,\nu,\nu_\tau)-f(t,\tilde{u},\tilde{u}_\tau,\nu,\nu_\tau),u-\tilde{u}\rangle\\&+\langle f(t,\tilde{u},\tilde{u}_\tau,\nu,\nu_\tau)-f(t,\tilde{u},\tilde{u}_\tau,\tilde{\nu},\nu_\tau),u-\tilde{u}\rangle\\&+\langle f(t,\tilde{u},\tilde{u}_\tau,\tilde{\nu},\nu_\tau)-f(t,\tilde{u},\tilde{u}_\tau,\tilde{\nu},\tilde{\nu}_\tau),u-\tilde{u}\rangle\end{aligned}\quad(۱۱.۳)$$

فرض کنید $Y(t)=\|u(t)-\tilde{u}(t)\|$، با به کاربردن نامساوی کواشی-شوارتز [۳] روی سمت راست (۱۱.۳) و با توجه به شرایط (۱) و (۲) مذکور داریم :

$$Y(t)Y'(t)\leqslant \sigma(t)Y^{2}(t)+\gamma_1(t)\|u_\tau-\tilde{u}_\tau\|Y(t)+\gamma_2(t)\|\nu-\tilde{\nu}\|Y(t)+\gamma_3(t)\|\nu_\tau-\tilde{\nu}_\tau\|Y(t), \tag{۱۲.۳}$$

$$Y'(t)\leqslant \sigma(t)Y(t)+\gamma_2(t)\|\nu-\tilde{\nu}\|+\eta(t),$$

با قرار دادن

$$\eta(t)=\gamma_1(t)\|u_\tau-\tilde{u}_\tau\|+\gamma_3(t)\|\nu_\tau-\tilde{\nu}_\tau\|.$$

از (۲.۳) و (۵.۳) خواهیم داشت :

$$g(u,\nu)=0,\quad g(\tilde{u},\tilde{\nu})=0. \tag{۱۳.۳}$$

با استفاده از قضیه تابع ضمنی و شرط ۴، (۱۳.۳) بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$\nu=\varphi(u),\quad \tilde{\nu}=\varphi(\tilde{u})$$

و مشتق فرشه $\varphi(u)$ و $\varphi(\tilde{u})$ موجودند و عبارت اند از:

$$\varphi'(u)=-\left(\frac{\partial g(u,\nu)}{\partial \nu}\right)^{-1}\left(\frac{\partial g(u,\nu)}{\partial u}\right),$$

$$\varphi'(\tilde{u})=-\left(\frac{\partial g(\tilde{u},\tilde{\nu})}{\partial \tilde{\nu}}\right)^{-1}\left(\frac{\partial g(\tilde{u},\tilde{\nu})}{\partial \tilde{u}}\right).$$

طبق قضیه مقدار میانگین، نتیجه زیر را داریم:

$$\begin{aligned}\|\varphi(u)-\varphi(\tilde{u})\| &\leqslant \sup_{0\leqslant t\leqslant 1}\|\varphi'(u+t(\tilde{u}-u))\|\|u-\tilde{u}\|\\ &\leqslant \sup_{u,\nu\in R^d}\left\|\left(\frac{\partial g}{\partial \nu}\right)^{-1}\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)\right\|.\|u-\tilde{u}\|=L\|u-\tilde{u}\|.\end{aligned}$$

در این‌صورت

$$\|\nu(t)-\tilde{\nu}(t)\|=\|\varphi(u(t))-\varphi(\tilde{u}(t))\|\leq L\|u(t)-\tilde{u}(t)\|,\quad t\geq 0. \tag{۱۴.۳}$$

بنابراین (۱۲.۳) به‌صورت زیر در می‌آید:

$$Y'(t)\leqslant(\sigma(t)+L\gamma_2(t))Y(t)+\eta(t). \tag{۱۵.۳}$$

مسئله مقدار اولیه زیر را در نظر بگیرید :

$$\tilde{Y}'(t)=(\sigma(t)+L\gamma_2(t))\tilde{Y}(t)+\eta(t),\quad t>0, \tag{۱۶.۳}$$

$$\tilde{Y}(0)=\|\phi(0)-\tilde{\phi}(0)\|, \tag{۱۷.۳}$$

با استفاده از لم (۳.۱.۳)، جواب (۱۶.۳) و (۱۷.۳) در عبارت زیر صدق می‌کند:

$$\tilde{Y}(t)\leqslant max\left\{\|\phi(0)-\tilde{\phi}(0)\|,\max_{0\leqslant s\leqslant t}\frac{\eta(s)}{-(\sigma(s)+L\gamma_2(s))}\right\},\quad t\geq 0,$$

---

[۳] Schwartz

با توجه به (۱۴.۳) و پایداری توابع $\phi(t)$ و $\tilde{\phi}(t)$ ، داریم:

$$\tilde{Y}(t) \leqslant max\left\{\|\phi(\circ)-\tilde{\phi}(\circ)\|, \max_{\circ\leqslant s\leqslant t}\frac{(\gamma_{۱}(s)+L\gamma_{۳}(s))\|u(s-\tau)-\tilde{u}(s-\tau)\|}{-(\sigma(s)+L\gamma_{۲}(s))}\right\}, \quad \forall t\geqslant \circ.$$

با توجه به شرط ۳ نتیجه می‌شود:

$$\tilde{Y}(t) \leqslant max\{\|\phi(\circ)-\tilde{\varphi}(\circ)\|, \max_{\circ\leqslant s\leqslant t}\|u(s-\tau)-\tilde{u}(s-\tau)\|\}. \qquad (۱۸.۳)$$

واضح است

$$Y(t)\leqslant \tilde{Y}(t), \quad \forall t\geqslant \circ.$$

بنابراین (۱۸.۳) به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$Y(t)=\|u(t)-\tilde{u}(t)\| \leqslant max\{\|\phi(\circ)-\tilde{\phi}(\circ)\|, \max_{\circ\leqslant s\leqslant t}\|u(s-\tau)-\tilde{u}(s-\tau)\|\}. \quad (۱۹.۳)$$

اگر $t\in[\circ,\tau]$ آن‌گاه $s-\tau\in[-\tau,\circ]$ بنابراین از (۱۹.۳) داریم :

$$\|u(t)-\tilde{u}(t)\| \leqslant \max_{-\tau\leqslant t\leqslant \circ}\|\phi(t)-\tilde{\phi}(t)\|, \quad t\in[\circ,\tau]. \qquad (۲۰.۳)$$

اگر $t\in[\tau,۲\tau]$ آن‌گاه $s-\tau\in[-\tau,\tau]=[-\tau,\circ]\bigcup[\circ,\tau]$، از روابط (۱۹.۳) و (۲۰.۳) داریم :

$$\begin{aligned}\|u(t)-\tilde{u}(t)\| &\leqslant max\{\|\phi(\circ)-\tilde{\phi}(\circ)\|, \max_{s-\tau\in[-\tau,\tau]}\|u(s-\tau)-\tilde{u}(s-\tau)\|\}\\ &\leqslant max\{\|\phi(\circ)-\tilde{\phi}(\circ)\|, \max_{s-\tau\in[-\tau,\circ]}\|u(s-\tau)-\tilde{u}(s-\tau)\|\\ &\max_{s-\tau\in[\circ,\tau]}\|u(s-\tau)-\tilde{u}(s-\tau)\|\} \leqslant \max_{-\tau\leqslant t\leqslant\circ}\|\phi(t)-\tilde{\phi}(t)\|.\end{aligned}$$

با به‌کار بردن استقرای ریاضی خواهیم داشت :

$$\|u(t)-\tilde{u}(t)\| \leqslant \max_{-\tau\leqslant t\leqslant\circ}\|\phi(t)-\tilde{\phi}(t)\|, \quad \forall t\geqslant\circ.$$

با استفاده از (۱۴.۳) داریم :

$$\|\nu(t)-\tilde{\nu}(t)\| \leqslant L\max_{-\tau\leqslant t\leqslant\circ}\|\phi(t)-\tilde{\phi}(t)\|, \quad \forall t\geqslant\circ.$$

و این اثبات را کامل می‌کند. □

۱.۱.۳ پایداری مجانبی $DDAE$ غیرخطی

تعریف ۵.۱.۳. معادله جبری تاخیری (۱.۳) - (۳.۳) پایدار مجانبی است اگرو فقط اگر برای توابع مقدار اولیه[۴] $\phi(t)$، $\psi(t)$ و توابع اختلال یافته آن‌ها $\tilde{\phi}(t)$، $\tilde{\psi}(t)$ جواب‌های $\{u(t),\nu(t)\}$ و $\{\tilde{u}(t),\tilde{\nu}(t)\}$ در شرایط زیر صدق کنند:

[۴] Consistent initial value function

$$\lim_{t\to\infty} \|u(t)-\tilde{u}(t)\| = \circ$$
$$\lim_{t\to\infty} \|\nu(t)-\tilde{\nu}(t)\| = \circ.$$

برای بررسی پایداری مجانبی (۱.۳) - (۳.۳) به لم زیر نیاز داریم.

لم ۶.۱.۳. *[۱۰، ۱۳] فرض کنید تابع نامنفی $Z(t)$ در معادله صدق می‌کند:*

$$Z'(t) = \omega(t)Z(t) + \gamma(t)Z(t-\tau), \quad t > \circ, \quad \tau > \circ$$
$$Z(t) = \varphi(t), \quad t \leqslant \circ,$$

که $\varphi(t) \geq \circ$ و $\omega(t)$ و $\gamma(t)$ توابع معلوم و در شرایط زیر صدق می‌کند:

$$\gamma(t) \leqslant -q\omega(t), \quad \circ \leqslant q \leqslant ۱, \quad \forall t \geqslant \circ$$
$$\omega(t) \leqslant -\beta < \circ, \quad \forall t \geqslant \circ$$

آن‌گاه $Z(t) \to \circ$ $(t\to\infty)$.

قضیه ۷.۱.۳. *اگر معادلات (۱.۳) -(۳.۳) در شرایط (۱) و (۲) و (۴) و در شرط زیر صدق کند*

$$\sigma(t) + L\gamma_۲(t) \leqslant -\beta < \circ (۳)'$$
$$\sup_{t\geqslant\circ} \frac{\gamma_۱(t)+L\gamma_۳(t)}{-(\sigma(t)+L\gamma_۲(t))} = q, \quad \circ \leqslant q < ۱$$

آن‌گاه (۱.۳)- (۳.۳) پایدار مجانبی است.

برهان. ابتدا مسئله مقدار اولیه معادله دیفرانسیل تاخیری را به‌دست می‌آوریم. با به‌کارگیری (۱۲.۳) و(۱۴.۳) داریم :

$$\begin{aligned} Y'(t) &\leqslant \sigma(t)Y(t) + \gamma_۲(t)\|\nu(t)-\tilde{\nu}(t)\| + \eta(t) \\ &\leqslant \sigma(t)Y(t) + L\gamma_۲(t)Y(t) + (\gamma_۱(t) + L\gamma_۳(t)\|u(t-\tau)-\tilde{u}(t-\tau)\| \\ &= (\sigma(t)+L\gamma_۲(t))Y(t) + (\gamma_۱(t)+L\gamma_۳(t))Y(t-\tau). \end{aligned} \tag{۲۱.۳}$$

مسئله مقدار اولیه معادله دیفرانسیل تاخیری زیر حاصل می‌شود:

$$\tilde{Y}'(t) = \omega(t)\tilde{Y}(t) + \gamma(t)\tilde{Y}(t-\tau), \quad t > \circ,$$
$$\tilde{Y}(t) = \|\phi(t)-\tilde{\phi}(t)\|, \quad -\tau \leqslant t \leqslant \circ,$$

که

$$\omega(t) = \sigma(t) + L\gamma_۲(t), \quad \gamma(t) = \gamma_۱(t) + L\gamma_۳(t). \tag{۲۲.۳}$$

از شرط $(۳)'$ نتیجه می‌شود تمام شرایط لم (۶.۱.۳) برقرار هستند. بنابراین

$$\lim_{t\to\infty} \tilde{Y}(t) = \circ.$$

باتوجه به (۲۱.۳) واضح است :

$$Y(t) \leqslant \tilde{Y}(t), \quad \forall t \geqslant \circ,$$

بنابراین نتیجه می‌شود:

$$\lim_{t\to\infty} Y(t) = \lim_{t\to\infty} \|u(t) - \tilde{u}(t)\| = \circ,$$

و این اثبات را کامل می‌کند. □

۲.۳ پایداری و پایداری مجانبی روش‌های اویلر ضمنی

تعریف ۱.۲.۳. یک روش عددی برای حل $DDAE$ پایدار نامیده می‌شود، اگر برای توابع مقدار اولیه سازگار ϕ ، $\tilde{\phi}$، ψ و $\tilde{\psi}$ و طول گام $h > \circ$ دنباله‌های جواب $\{u_n, \nu_n\}$ و $\{\tilde{u}_n, \tilde{\nu}_n\}$ برای (۱.۳) - (۳.۳) و (۴.۳) - (۶.۳) در شرایط زیر صدق کند:

$$\|u_n - \tilde{u}_n\| \leqslant \max_{-\tau\leqslant t\leqslant\circ} \|\varphi(t) - \tilde{\varphi}(t)\|, \quad n = \circ, ۱, ۲, \ldots,$$
$$\|\nu_n - \tilde{\nu}_n\| \leqslant L \max_{-\tau\leqslant t\leqslant\circ} \|\varphi(t) - \tilde{\varphi}(t)\|, \quad n = \circ, ۱, ۲, \ldots.$$

به‌طوری‌که f و g در شرایط (۱) - (۴) صدق می‌کنند.

برای مسئله مقدار اولیه معادلات دیفرانسیل معمولی

$$\chi'(t) = f(t, \chi(t)), t > \circ, \tag{۲۳.۳}$$
$$\chi(\circ) = \chi_\circ. \tag{۲۴.۳}$$

روش اویلر ضمنی [۵] می‌تواند به‌صورت زیر نوشته شود:

$$\chi_{n+۱} = \chi_n + hf(t_{n+۱}, \chi_{n+۱}), \quad n = \circ, ۱, ۲, \ldots, \tag{۲۵.۳}$$
$$\chi_\circ = \chi(\circ), \tag{۲۶.۳}$$

که $\chi_n \sim \chi(t_n)$، $h > \circ$ طول گام است.
برای حل معادلات (۱.۳) - (۳.۳) توسط (۲۵.۳) و (۲۶.۳) داریم:

$$u_{n+۱} = u_n + hf(t_{n+۱}, u_{n+۱}, u_{n+۱-m}, \nu_{n+۱}, \nu_{n+۱-m}), \quad n = \circ, ۱, ۲, \ldots, \tag{۲۷.۳}$$
$$\circ = g(u_{n+۱}, \nu_{n+۱}), \tag{۲۸.۳}$$
$$u_n = \phi(t_n), \nu_n = \psi(t_n), \quad -m \leqslant n \leqslant \circ, \quad (mh = \tau, m \geqslant ۱). \tag{۲۹.۳}$$

[۵] implicit euler methods

معادلات اختلال یافته (۲۷.۳) و (۲۸.۳)به‌صورت زیر هستند:

$$\tilde{u}_{n+1} = \tilde{u}_n + hf(t_{n+1}, \tilde{u}_{n+1}, \tilde{u}_{n+1-m}, \tilde{\nu}_{n+1}, \tilde{\nu}_{n+1-m}), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{۳۰.۳}$$

$$0 = g(\tilde{u}_{n+1}, \tilde{\nu}_{n+1}), \tag{۳۱.۳}$$

$$\tilde{u}_n = \tilde{\phi}(t_n), \tilde{\nu}_n = \tilde{\psi}(t_n), \quad -m \leqslant n \leqslant 0, \quad (mh = \tau, m \geqslant 1). \tag{۳۲.۳}$$

قضیه ۲.۲.۳. *[۱۷] روش اویلر ضمنی برای $DDAE$ پایدار است.*

برهان. فرض کنید $\bar{V}_n = u_n - \tilde{u}_n$، با جایگذاری معادلات در (۲۷.۳) و (۳۰.۳) داریم:

$$\begin{aligned}
\bar{V}_{n+1} =& \bar{V}_n + h\{f(t_{n+1}, u_{n+1}, u_{n+1-m}, \nu_{n+1}, \nu_{n+1-m}) - f(t_{n+1}, \tilde{u}_{n+1}, \tilde{u}_{n+1-m}, \tilde{\nu}_{n+1}, \tilde{\nu}_{n+1-m})\} \\
=& \bar{V}_n + hf(t_{n+1}, u_{n+1}, u_{n+1-m}, \nu_{n+1}, \nu_{n+1-m}) - hf(f(t_{n+1}, \tilde{u}_{n+1}, u_{n+1-m}, \nu_{n+1}, \nu_{n+1-m}) \\
&+ hf(t_{n+1}, \tilde{u}_{n+1}, u_{n+1-m}, \nu_{n+1}, \nu_{n+1-m}) - hf(f(t_{n+1}, \tilde{u}_{n+1}, \tilde{u}_{n+1-m}, \nu_{n+1}, \nu_{n+1-m}) \\
&+ hf(t_{n+1}, \tilde{u}_{n+1}, \tilde{u}_{n+1-m}, \nu_{n+1}, \nu_{n+1-m}) - hf(f(t_{n+1}, \tilde{u}_{n+1}, \tilde{u}_{n+1-m}, \tilde{\nu}_{n+1}, \nu_{n+1-m}) \\
&+ hf(t_{n+1}, \tilde{u}_{n+1}, \tilde{u}_{n+1-m}, \tilde{\nu}_{n+1}, \nu_{n+1-m}) - hf(t_{n+1}, \tilde{u}_{n+1}, \tilde{u}_{n+1-m}, \tilde{\nu}_{n+1}, \tilde{\nu}_{n+1-m}).
\end{aligned} \tag{۳۳.۳}$$

با ضرب داخلی (۳۳.۳) و جایگذاری $\bar{V}_{n+1} = u_{n+1} - \tilde{u}_{n+1}$ ، به‌کاربردن قضیه شوارتز و شرایط (۱) و (۲) داریم :

$$\begin{aligned}
\|\bar{V}_{n+1}\|^2 \leq& \|\bar{V}_n\|.\|\bar{V}_{n+1}\| + h\sigma(t_{n+1})\|\bar{V}_{n+1}\|^2 + h\gamma_1(t_{n+1})\|\bar{V}_{n+1-m}\|\|\bar{V}_{n+1}\| \\
&+ h\gamma_2(t_{n+1})\|\nu_{n+1} - \tilde{\nu}_{n+1}\|.\|\bar{V}_{n+1}\| + h\gamma_3(t_{n+1})\|\nu_{n+1-m} - \tilde{\nu}_{n+1-m}\|.\|\bar{V}_{n+1}\|.
\end{aligned} \tag{۳۴.۳}$$

فرض کنید $\|\bar{V}_{n+1}\| \neq 0$، با توجه به (۱۴.۳)، (۲۸.۳) و (۳۱.۳) خواهیم داشت:

$$\nu_{n+1} = \varphi(u_{n+1}), \quad \tilde{\nu}_{n+1} = \varphi(\tilde{u}_{n+1}), \tag{۳۵.۳}$$

$$\|\nu_{n+1} - \tilde{\nu}_{n+1}\| \leq L\|u_{n+1} - \tilde{u}_{n+1}\|, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{۳۶.۳}$$

با تقسیم(۳۴.۳) بر $\|\bar{V}_{n+1}\|$ به‌دست می‌آوریم :

$$\|\bar{V}_{n+1}\| \leqslant \frac{\|\bar{V}_n\| + (h\gamma_1(t_{n+1}) + hL\gamma_3(t_{n+1}))\|\bar{V}_{n+1-m}\|}{1 - h\sigma(t_{n+1}) - hL\gamma_2(t_{n+1})}, \quad n = 0, 1, \ldots. \tag{۳۷.۳}$$

در معادله (۳۷.۳) فرض کنید $0 \leq n \leq m - 1$ و با توجه شرط (۴) داریم :

$$\|\bar{V}_{n+1}\| \leqslant \max_{-\tau \leqslant t \leqslant 0} \|\phi(t) - \tilde{\phi}(t)\|. \tag{۳۸.۳}$$

وقتی‌که $n \geqslant m$ با به‌کاربردن استقرای ریاضی، (۳۸.۳) برای تمام $n \geqslant 0$ درست است. بنابراین برای $\|\nu_n - \tilde{\nu}_n\|$ نامساوی (۳۶.۳) برقرار است یعنی داریم

$$\|\nu_n - \tilde{\nu}_n\| \leq L \max_{-\tau \leqslant t \leqslant 0} \|\phi(t) - \tilde{\phi}(t)\|.$$

□

تعریف ۳.۲.۳. یک روش عددی برای حل $DDAE$ (۱.۳) - (۳.۳) پایدار مجانبی نامیده می‌شود اگر و فقط اگر وقتی روش عددی که برای معادلات (۱.۳) - (۳.۳) و (۴.۳) - (۶.۳) و برای توابع مقدار اولیه سازگار $\phi(t)$ و $\tilde{\phi}(t)$ و $\psi(t)$ و $\tilde{\psi}(t)$ و هر طول گام $h > \circ$ به‌کار برده می‌شود تقریب دنباله‌های جواب $\{u_n, \nu_n\}$ و $\{\tilde{u}_n, \tilde{\nu}_n\}$ در شرایط زیر صدق کند :

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - \tilde{u}_n\| = \circ,$$
$$\lim_{n\to\infty} \|\nu_n - \tilde{\nu}_n\| = \circ.$$

که f و g در شرایط (۱) و (۲)و $(۳)'$ و (۴) صادق هستند.

قضیه ۴.۲.۳. *[۱۷] روش اویلر ضمنی برای $DDAE$ پایدار مجانبی است.*

برهان. باتوجه به (۲۲.۳) و (۳۷.۳) داریم :

$$\|\bar{V}_{n+۱}\| \leqslant \frac{\|\bar{V}_n\| + h\gamma(t_{n+۱})\bar{V}_{n+۱-m}}{۱ - h\omega(t_{n+۱})}, \quad n = \circ, ۱, ۲, \ldots .$$

فرض کنید $\circ \le n \le m - ۱$ نامعادله بالا به‌صورت زیر تبدیل می‌شود :

$$\|\bar{V}_{n+۱}\| \leqslant \max_{t\geqslant\circ}\left(\frac{۱ - h\gamma(t)}{۱ - h\omega(t)}\right) . \max_{-\tau\leqslant t\leqslant\circ} \|\phi(t) - \tilde{\phi}(t)\|.$$

با توجه به شرط $(۳)'$

$$\frac{۱ + h\gamma(t)}{۱ + h \mid \omega(t) \mid} \leqslant \frac{۱ + hq \mid \omega(t) \mid}{۱ + h \mid \omega(t) \mid} \leqslant \frac{۱ + h\beta q}{۱ + h\beta} := p < ۱, \quad \forall t \ge \circ.$$

بنابراین وقتی‌که $\circ \le n \le m - ۱$، داریم :

$$\|\bar{V}_{n+۱}\| \leqslant p \max_{-\tau\leqslant t\leqslant\circ} \|\phi(t) - \tilde{\phi}(t)\|.$$

برای حالت $n = m$، نتیجه می‌شود

$$\|\bar{V}_{m+۱}\| \leqslant \frac{\|\bar{V}_m\| + h\gamma(t_{m+۱})\|\bar{V}_۱\|}{۱ - h\omega(t_{n+۱})} \leqslant p^۲ \max_{-\tau\leqslant t\leqslant\circ} \|\phi(t) - \tilde{\phi}(t)\|.$$

و برای $rm \le n \le (r + ۱)m - ۱$ با استفاده از استقرا می‌توان نشان داد :

$$\|\bar{V}_{m+۱}\| \leqslant p^{r+۱} \max_{-\tau\leqslant t\leqslant\circ} \|\phi(t) - \tilde{\phi}(t)\|.$$

وقتی‌که $n \to \infty$، $r \to \infty$

$$\|\bar{V}_{m+۱}\| \to \ \circ, (n \to \infty)$$

در نتیجه

$$\|u_{n+۱} - \tilde{u}_{n+۱}\| \to \ \circ, (n \to \infty)$$
$$\|\nu_{n+۱} - \tilde{\nu}_{n+۱}\| \to \ \circ, (n \to \infty).$$

□

فصل ۴

روش تکرار وردشی و تجزیه آدومیان

۱.۴ مقدمه

در این فصل به معرفی و توضیح روشی تکراری به‌نام روش تکرار وردشی [۱] VIM که یک روش نیمه تحلیلی است، می‌پردازیم. این روش یک دنباله از توابع ایجاد می‌کند که به سری جواب دقیق مسئله همگرا است. در ادامه از این روش برای یافتن جواب تحلیلی معادلات دیفرانسیل جبری-تاخیری استفاده می‌کنیم. روش تکرار وردشی می‌تواند به‌آسانی و با دقت بالا برای حل دسته وسیعی از مسئله‌های خطی و غیر خطی به کار رود و جواب آنها به طور تقریبی و با سرعت همگرایی بالا، به جواب دقیق تعیین شود.

۲.۴ تحلیل روش تکرار وردشی

در اینجا معادله دیفرانسیل تاخیری غیرخطی به فرم زیر را بررسی می‌کنیم:

$$Lu(t) = f(t, u(t), u(\alpha(t))), \quad \circ \leqslant t \leqslant T, \tag{۱.۴}$$

با شرایط اولیه زیر

$$\begin{aligned} &u^{(k)}(\circ) = u^k_\circ, \quad k = \circ, ۱, \dots, n-۱, \\ &u(t) = \phi(t), \quad t \leqslant \circ \end{aligned} \tag{۲.۴}$$

که عملگر دیفرانسیل به‌صورت $L(.) = \frac{d^n(.)}{dt^n}$ تعریف می‌شود.

در این فصل برای تحلیل VIM و مطالعه تحلیل همگرایی، معادله (۱.۴) را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$Lu + Ru + N(u) = \circ, \tag{۳.۴}$$

---

[۱] Varitional iteration method

که L و R عملگرهای کراندار خطی هستند، یعنی اعداد $m_1, m_2 > 0$ وجود دارد به‌طوری‌که $\|Lu\| \leqslant m_1\|u\|$، $\|Ru\| \leqslant m_2\|u\|$ باشد. و عبارت غیر خطی $N(u)$ در شرط لیپ شیتز [۲] پیوسته صدق می‌کند یعنی $|N(u) - N(\nu)| \leqslant m|u-\nu|, \forall t \in J = [0, T]$، که $m > 0$ است.
در روش تکرار وردشی می‌توان جواب معادله (۳.۴) را به کمک تابعک تصحیح [۳] به‌صورت زیر نوشت:

$$u_p = u_{p-1} + \int_0^t \lambda(\tau)[Lu_{p-1} + R\tilde{u}_{p-1} + N(\tilde{u}_{p-1})]d\tau$$

واضح است که تقریب‌های متوالی u_p، $p \geqslant 0$ (اندیس p تقریب مرتبه pام می‌باشد) را می‌توان با تعیین λ، ضریب لاگرانژ [۴] که با استفاده از تئوری وردشی به طور بهینه تعیین می‌شود، به‌دست می‌آید.
تابع $\tilde{u}_p$ را به‌عنوان تغییر محدود [۵] در نظر گرفته، یعنی $\delta\tilde{u}_p = 0$ است. بنابراین ابتدا ضریب لاگرانژ λ را تعیین می‌کنیم که با انتگرال‌گیری جز به جز حاصل می‌شود.
با استفاده از تقریب‌های متوالی u_p و با استفاده از ضریب لاگرانژ و مقدار اولیه u_0،جواب u به‌آسانی حاصل می‌شود.
در نتیجه جواب دقیق با استفاده از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$u = \lim_{p\to\infty} u_p.$$

حال بررسی می‌کنیم چگونه ضریب لاگرانژ را بیابیم، برای این منظور حالتی را که به مرتبه عملگر L در معادله (۳.۴) وابسته است، درنظر می‌گیریم. بدون از دست دادن کلیت مسئله $L = \frac{d}{dt}$ را در نظر می‌گیریم.
با برقراری شرط پایداری تابعک تصحیح و با توجه به اینکه $\delta\tilde{u}_p = 0$، داریم:

$$\begin{aligned}\delta u_p &= \delta u_{p-1} + \delta\int_0^t \lambda(\tau)\left[\frac{du_{p-1}}{d\tau} + R\tilde{u}_{p-1} + N(\tilde{u}_{p-1})\right]d\tau\\ &= \delta u_{p-1} + [\lambda(\tau)\delta u_{p-1}]_{\tau=t} - \int_0^t \lambda'(\tau)[\delta u_{p-1}]d\tau = 0,\end{aligned}$$

که $\delta\tilde{u}_p$ یک تغییر محدود معرفی شده است یعنی $\delta\tilde{u}_p = 0$. بنابراین شرایط ایستایی زیر را نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned}&\lambda'(\tau) = 0,\\ &1 + \lambda(\tau)|_{\tau=t} = 0,\end{aligned} \tag{۴.۴}$$

اولین معادله در (۴.۴)، معادله اویلر-لاگرانژ [۶] و دومین معادله شرط مرزی بدیهی [۷] نامیده می‌شود.
جواب معادله با ضریب لاگرانژ $\lambda(\tau) = -1$ به‌دست می‌آید. حال فرمول تکرار وردشی زیر حاصل

[۲] Lipschitz
[۳] Correction functional
[۴] Lagrange multiplier
[۵] Restricted variation
[۶] Euler-Lagrange
[۷] Natural boundary condition

می‌شود:

$$u_p = u_{p-1} - \int_0^t [Lu_{p-1} + Ru_{p-1} + N(u_{p-1})] d\tau. \qquad (5.4)$$

با استفاده از تقریب اولیه و فرمول تکرار (۵.۴) می‌توان مستقیما مؤلفه‌های دیگر جواب را به‌دست آورد.

۳.۴ تحلیل همگرایی VIM

در این بخش همگرایی [8] روش VIM که برای حل DDE غیرخطی به‌کار برده می‌شود، را بررسی می‌کنیم. نکته اصلی این است که همگرایی دنباله متناوب که با استفاده از VIM به‌دست می‌آید را بررسی کنیم.

تعریف ۱.۳.۴. تغییرات تابعک $\nu[u(x)]$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود.[۱۶]

$$\delta\nu[u(x)] = \left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\nu[u(x) + \alpha\delta u]\right]_{\alpha=0},$$

که $\nu[u(x)]$ تابعک وابسته به تابع $u(x)$ و $\alpha \in \Re$ است.

قضیه ۲.۳.۴. *[۱۶] اگر تابعک $\nu[u(x)]$ تغییر داشته باشد و همچنین در $u = u_0$ ماکزیمم یا مینیمم داشته باشد، آن‌گاه در $u = u_0$ داریم:*

$$\delta\nu = 0,$$

که $u(x)$ نقطه درونی [9] در دامنه تعریف تابعک است.

لم ۳.۳.۴. *فرض کنید $A : U \to V$ یک عملگر خطی کراندار [10] و $\{u_p\}$ دنباله‌ای همگرا در U با حد u باشد، آن‌گاه $u_p \to u$ در U ایجاب می‌کند که در V، $A(u_p) \to A(u)$.*

برهان. چون

$$\|Au_p - Au\|_V = \|A(u_p - u)\|_V \leqslant \|A\|\|u_p - u\|_U,$$

بنابراین

$$\lim_{p\to\infty} \|Au_p - Au\| \leqslant \|A\| \lim_{p\to\infty} \|u_p - u\|_U = 0,$$

در نتیجه $A(u_p) \to A(u)$. □

[8] Convergence

[9] Interior point

[10] Bounded linear operator

۱.۳.۴ قضیه یکتایی

قضیه ۴.۳.۴. *مسئله غیرخطی (۳.۴) وقتی‌که $0 < \alpha < 1$، جواب یکتا دارد که $\alpha = (m_2 + m)T$ و m_2 و m در بالا تعریف شده‌اند.*

برهان. جواب معادله (۳.۴) را می‌توان به فرم زیر بازنویسی کرد:

$$u = f(t) - L^{-1}[Ru + N(u)],$$

که $f(t)$ جواب معادله همگن $Lu = 0$ و عملگر معکوس L^{-1} به صورت $L^{-1}(.) = \int_0^t (.)dt$ تعریف می‌شود.

حال فرض کنید، u و u^* دو جواب مختلف معادله (۳.۴) باشند، در این‌صورت با استفاده از معادله بالا به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}
|u - u^*| &= |-\int_0^t [R(u - u^*) + N(u) - N(u^*)]dt| \\
&\leqslant \int_0^t [|R(u - u^*)| + |N(u) - N(u^*)|]dt \leqslant (m_2|u - u^*| + m|u - u^*|)T \\
&\leqslant \alpha|u - u^*|
\end{aligned}$$

$0 \leqslant (1 - \alpha)|u - u^*|$ حاصل می‌شود چون $0 < \alpha < 1$، آن‌گاه $|u - u^*| = 0$ ایجاب می‌کند $u = u^*$ و این برهان را کامل می‌کند. □

حال برای اثبات همگرایی روش تکرار وردشی، معادله (۵.۴) را در بصورت عملگر زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$u_p = A[u_{p-1}], \tag{۶.۴}$$

که عملگر A به بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$A[u] = -\int_0^t [Lu + Ru + N(u)]d\tau.$$

۲.۳.۴ قضیه همگرایی

قضیه ۵.۳.۴ (قضیه نقطه ثابت باناخ). *فرض کنید که X فضای باناخ*[11] *و $A : X \to X$ یک نگاشت غیرخطی*[12] *باشد به‌طوری که*

$$\|A[u] - A[\nu]\| \leqslant \gamma\|u - \nu\|, \quad \forall u, \nu \in X,$$

برای ثابت $\gamma = (\alpha + m_1 T) < 1$ است، آن‌گاه A نقطه ثابت یکتا دارد. علاوه براین دنباله (۶.۴) با استفاده از روش VIM با انتخاب دلخواه $u_0 \in X$، به نقطه‌ای در A همگرا می‌شود و خواهیم داشت:

$$\|u_p - u_q\| \leqslant \frac{\gamma^q}{1 - \gamma}\|u_1 - u_0\|. \tag{۷.۴}$$

---

[11] Banach space

[12] Nonlinear mapping

برهان. $(C[J], \|.\|)$ را فضای باناخ همه توابع پیوسته روی J با نرم تعریف شده

$$\|f(t)\| = \max_{t\in J}|f(t)|.$$

قرار می‌دهیم .باید ثابت کنیم $\{u_p\}$ دنباله کوشی [۱۳] در این فضا است. داریم:

$$\begin{aligned}
\|u_p - u_q\| &= \max_{t\in J}|u_p - u_q| \\
&= \max_{t\in J}\Big| - \int_{\circ}^{t}[L(u_{p-1} - u_{q-1}) + R(u_{p-1} - u_{q-1}) + N(u_{p-1}) - N(u_{q-1})]d\tau\Big| \\
&\leqslant \max_{t\in J}\int_{\circ}^{t}[|L(u_{p-1} - u_{q-1})| + |R(u_{p-1} - u_{q-1})| + |N(u_{p-1}) - N(u_{q-1})|]d\tau \\
&\leqslant \max_{t\in J}\int_{\circ}^{t}[(m_1 + m_2 + m)(u_{p-1} - u_{q-1})]d\tau \leqslant \gamma\|u_{p-1} - u_{q-1}\|.
\end{aligned}$$

فرض کنید $p = q + 1$ آن‌گاه

$$\|u_{q+1} - u_q\| \leqslant \gamma\|u_q - u_{q-1}\| \leqslant \gamma^2\|u_{q-1} - u_{q-2}\| \leqslant \ldots \leqslant \gamma^q\|u_1 - u_{\circ}\|.$$

از نامساوی مثلث [۱۴] داریم

$$\begin{aligned}
\|u_p - u_q\| &\leqslant \|u_{q+1} - u_q\| + \|u_{q+2} - u_{q+1}\| + \ldots + \|u_p - u_{p-1}\| \\
&\leqslant [\gamma^q + \gamma^{q+1} + \ldots + \gamma^{p-1}]\|u_1 - u_{\circ}\| \\
&\leqslant \gamma^q[1 + \gamma + \gamma^2 + \ldots + \gamma^{p-q-1}]\|u_1 - u_{\circ}\| \leqslant \gamma^q\frac{1 - \gamma^{p-q-1}}{1 - \gamma}\|u_1 - u_{\circ}\|.
\end{aligned}$$

چون $\circ < \gamma < 1$، بنابراین $(1 - \gamma^{p-q}) < 1$ بنابراین

$$\|u_p - u_q\| \leqslant \frac{\gamma^q}{1 - \gamma}\|u_1 - u_{\circ}\|.$$

اما $\|u_1 - u_{\circ}\| < \infty$ بنابراین اگر $q \to \infty$ آن‌گاه $\|u_p - u_q\| \to \circ$.

در نهایت نتیجه می‌گیریم که $\{u_p\}$ دنباله کوشی در $C[J]$ است بنابراین دنباله u_p همگرا است. □

۳.۳.۴ تخمین خطا

قضیه ۶.۳.۴. *ماکزیمم خطای مطلق [۱۵] جواب تقریب u_p مسئله (۳.۴) به‌صورت زیرتخمین زده می‌شود:*

$$\max_{t\in J}|u_{ex} - u_p| \leqslant \beta,$$

به‌طوری که $\beta = \frac{\gamma^q T[(m_1+m_2)\|u_{\circ}\|+k]}{1-\gamma}$ و $k = \max_{t\in J}|N(u_{\circ})|$

[۱۳] Cauchy sequence

[۱۴] Triangle inequality

[۱۵] Absolute error

برهان. از قضیه (۵.۳.۴) و نامعادله (۷.۴) داریم:

$$\|u_p - u_q\| \leqslant \frac{\gamma^q}{۱-\gamma}\|u_۱ - u_۰\|,$$

چون $p \to \infty$ آن‌گاه $u_p \to u_{ex}$ و در نتیجه

$$\begin{aligned}\|u_۱ - u_۰\| &= \max_{t\in J}\left| - \int_۰^t [Lu_۰ + Ru_۰ + N(u_۰)]d\tau\right| \\ &\leqslant \max_{t\in J}\int_۰^t [|Lu_۰| + |Ru_۰| + N(u_۰)|]d\tau \leqslant T[(m_۱ + m_۲)\|u_۰\| + k],\end{aligned}$$

بنابراین ماکزیمم خطای مطلق در بازه J است:

$$\|u_{ex} - u_p\| = \max_{t\in J}|u_{ex} - u_p| \leqslant \beta.$$

□

۴.۴ مثال عددی

در این بخش، رفتار عددی بعضی مسائل DDE خطی $(LDDE)$ و DDE غیرخطی $(NDDE)$ را با استفاده از روش تکرار وردشی بررسی می‌کنیم.

مثال ۱.۴.۴. معادله $LDDE$ مرتبه [۱۶] اول زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{du(x)}{dx} = \frac{۱}{۲}e^{\frac{x}{۲}}u(\frac{x}{۲}) + \frac{۱}{۲}u(x), \quad ۰ \leqslant x \leqslant ۱, \quad u(۰) = ۱. \tag{۸.۴}$$

که $u(x) = e^x$ جواب دقیق مسئله است.

برای حل معادله (۸.۴) با استفاده از روش VIM از تابعک تصحیح استفاده کرده

$$u_{p+۱} = u_p(x) + \int_۰^x \lambda(\tau)\left[u_{p\tau} - \frac{۱}{۲}e^{\frac{\tau}{۲}}\tilde{u}_p(\frac{\tau}{۲}) - \frac{۱}{۲}\tilde{u}_p(\tau)\right]d\tau, \quad p \geqslant ۰.$$

و با ضرب معادله بالا در ثابت تابعک تصحیح (δ) و با توجه به این‌که $\delta u(۰) = ۰$ می‌توان به‌دست آورد:

$$\begin{aligned}\delta u_{p+۱} &= \delta u_p(x) + \delta\int_۰^x \lambda(\tau)\left[u_{p\tau} - \frac{۱}{۲}e^{\frac{\tau}{۲}}\tilde{u}_p(\frac{\tau}{۲}) - \frac{۱}{۲}\tilde{u}_p(\tau)\right]d\tau, \quad p \geqslant ۰ \\ &= \delta u_p + [\lambda(\tau)\delta u_p]_{\tau=x} - \int_۰^x \lambda'(\tau)[\delta u_p]d\tau = ۰,\end{aligned}$$

که $\delta\tilde{u}_p$ تغییر محدود معرفی شده یعنی $\delta\tilde{u}_p = ۰$، که شرایط ایستایی زیر نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned}&\lambda'(\tau) = ۰, \\ &۱ + \lambda(\tau)|_{\tau=x} = ۰\end{aligned}$$

[۱۶] Order

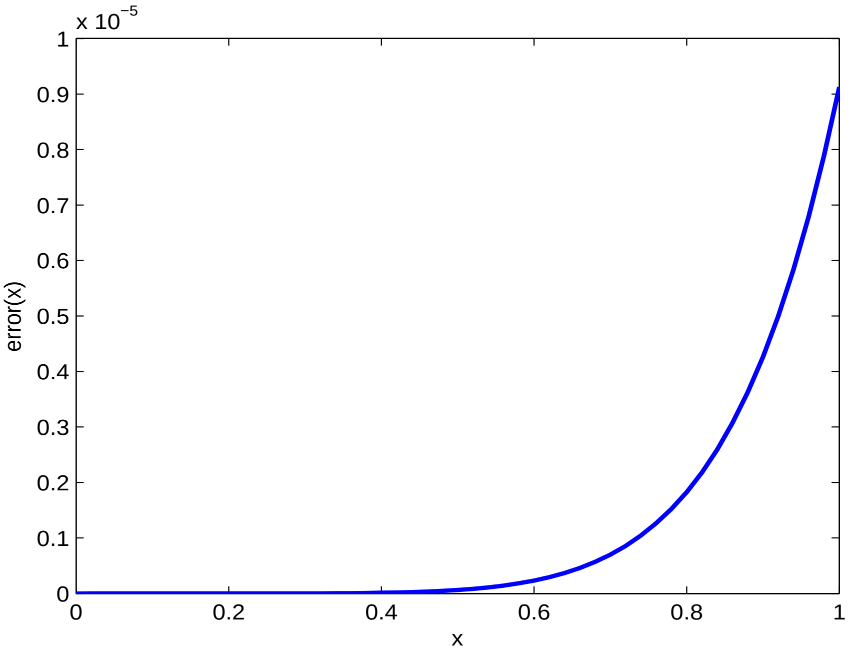
جواب این معادله $\lambda(\tau) = -1$ حاصل می‌شود.
حال فرمول تکرار وردشی زیر را می‌توان به‌دست آورد :

$$u_{p+1} = u_p(x) - \int_0^x \left[u_{p\tau} - \frac{1}{2}e^{\frac{\tau}{2}}u_p(\frac{\tau}{2}) - \frac{1}{2}u_p(\tau)\right] d\tau, \quad p \geqslant 0. \qquad (9.4)$$

با تقریب اولیه [17] $u_0(x) = u(0)$ و با استفاده از فرمول تکرار ، می‌توان مستقیما مؤلفه‌های دیگر جواب را به‌دست آورد.

$$u_0(x) = 1, \quad u_1(x) = e^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}x, \ldots$$

با استفاده از روش مذکور، می‌توان با پنج جمله تقریب به جواب دقیق رسید. همان‌طور که نمودار (۱.۴) رفتار بین جواب دقیق و جواب عددی در بازه $[0, 1]$ را نشان می‌دهد.



شکل ۱.۴: خطای بین جواب دقیق و جواب عددی در بازه $[0, 1]$ مثال (۱.۴.۴)

[17] Initial approximation

مثال ۲.۴.۴. معادله $LDDE$ درجه دو زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2}=\frac{3}{4}u(x)+u\left(\frac{x}{2}\right)-x^2+2,\quad 0\leqslant x\leqslant 1,\quad u(0)=1,\quad \frac{du(0)}{dx}=0. \tag{۱۰.۴}$$

که $u(x)=x^2$ جواب دقیق مسئله است.

برای حل معادله (۱۰.۴) با استفاده از روش VIM، از تابعک تصحیح استفاده می‌کنیم:

$$u_{p+1}=u_p(x)+\int_0^x\lambda(\tau)\left[u_{p\tau\tau}-\frac{3}{4}\tilde{u}_p(\tau)-\tilde{u}_p(\frac{\tau}{2})+\tau^2-2\right]d\tau,\quad p\geqslant 0.$$

با ضرب در ثابت تابعک تصحیح و با توجه به‌اینکه $\delta u(0)=0$، نتیجه می‌شود:

$$\delta u_{p+1}=\delta u_p(x)+\delta\int_0^x\lambda(\tau)\left[u_{p\tau\tau}-\frac{3}{4}\tilde{u}_p(\tau)-\tilde{u}_p(\frac{\tau}{2})+\tau^2-2\right]d\tau$$

با دوبار انتگرال‌گیری جز به جز به‌دست می آید:

$$\delta u_p+[\lambda'(\tau)\delta u_p-\lambda(\tau)\delta u'(p)]_{\tau=x}+\int_0^x\lambda''(\tau)[\delta u_p]d\tau=0$$

با توجه به اینکه $\delta\tilde{u}_p=0$، شرایط ایستایی زیر نتیجه می‌شود:

$$\lambda''(\tau)|_{\tau=x}=0,\quad 1+\lambda'(\tau)|_{\tau=x}=0,\quad \lambda(\tau)|_{\tau=x}=0$$

جواب این معادله $\lambda(\tau)=\tau-x$ است.

حال فرمول تکرار وردشی زیر را می‌توان به‌دست آورد:

$$u_{p+1}=u_p(x)+\int_0^x(\tau-x)\left[u_{p\tau\tau}-\frac{3}{4}u_p(\tau)-u_p(\frac{\tau}{2})+\tau^2-2\right]d\tau,\quad p\geqslant 0. \tag{۱۱.۴}$$

با تقریب اولیه $u_0(x)=u(0)+x\frac{du(0)}{dx}$ و با استفاده از فرمول تکرار (۱۱.۴) می‌توان مستقیما مؤلفه های دیگر جواب را به‌دست آورد.

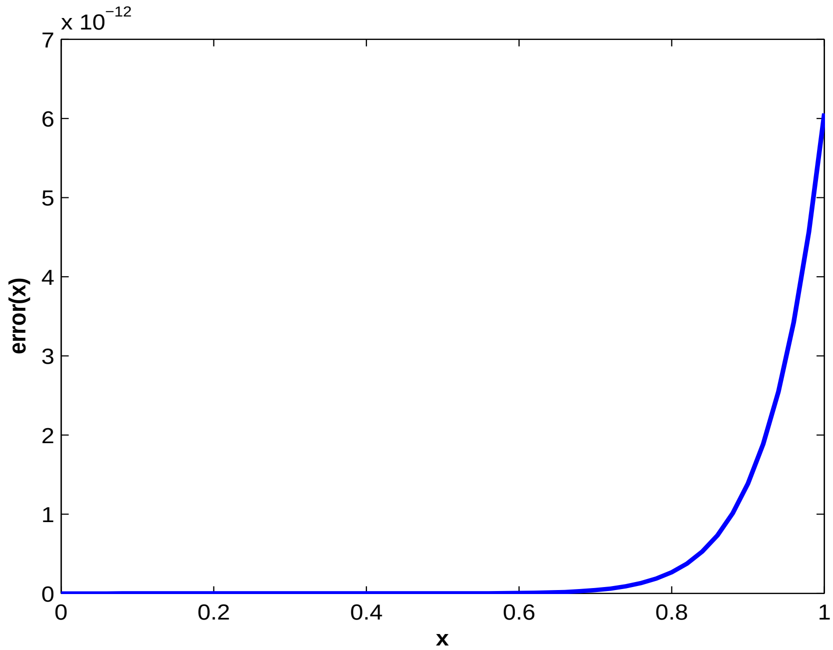
$$u_0=0,\quad u_1(x)=x^2-\frac{1}{2}x^4,\quad u_2(x)=x^2-0{,}00225694x^6,\dots$$

مثال ۳.۴.۴. معادله $NDDE$ مرتبه سوم زیر را در نظر بگیرید.

$$\frac{d^3u(x)}{dx^3}=-1+2u^2(\frac{x}{2}),\quad u(0)=0,\quad \frac{du(0)}{dx}=1,\quad \frac{d^2u(0)}{dx^2}=0,\quad 0\leqslant x\leqslant 1 \tag{۱۲.۴}$$

برای حل معادله (۱۲.۴) با استفاده از روش VIM ضریب لاگرانژ $\lambda(\tau)=-\frac{1}{2}(\tau-x)^2$ به‌دست می‌آید، با جایگذاری $\lambda(\tau)$ در فرمول تکرار وردشی خواهیم داشت:

$$u_{p+1}(x)=u_p(x)-\int_0^x\frac{1}{2}(\tau-x)^2\left[u_{p\tau\tau\tau}-2u_p^2(\frac{\tau}{2})+1\right]d\tau,\quad p\geqslant 0. \tag{۱۳.۴}$$



شکل ۲.۴: خطای بین جواب دقیق و جواب عددی در بازه $[\circ,\backslash]$مثال (۲.۴.۴)

با استفاده از تقریب اولیه $u_\circ(x)=x$ و فرمول تکراری (۱۳.۴) جواب $u(x)$ به‌دست می‌آید.

$$u=\sin(x)$$

در اینجا ابتدا به معرفی معادله لوجستیک [۱۸] و کاربردهای آن می‌پردازیم سپس مثالی در این زمینه ارائه می‌دهیم.

صورت کلی معادله به صورت زیر است:

$$\frac{du(t)}{dt}=\rho u(t)(1-u(t-r)),\quad t>0,\quad \rho>0. \tag{۱۴.۴}$$

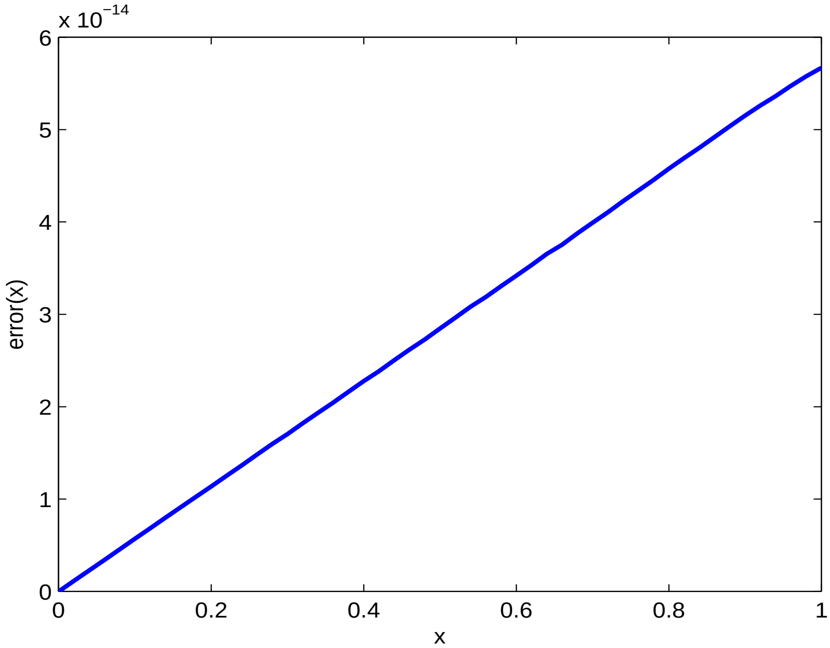
کاربردهای معادله لوجستیک: نمونه کاربردی این معادله، مدل عمومی رشد جمعیت است. فرض کنید $u(t)$ اندازه جمعیت و t زمان و ثابت ρ نرخ رشد را نشان می‌دهد.کاربرد دیگر منحنی لوجستیک در داروسازی است، که معادله دیفرانسیل لوجستیک در مدل‌سازی رشد تومورها استفاده می‌شود. این کاربرد می‌تواند تعمیم استفاده بالا در چارچوب بوم‌شناسی در نظر گرفته شود. توجه کنید $u(t)$ اندازه تومور در زمان t است.

مثال ۴.۴.۴. معادله لوجستیک با شرایط اولیه $u(0)=u_0,\quad u_0>0$ در نظر بگیرید.
برای حل معادله (۱۴.۴) با روش VIM فرمول تکرار وردشی زیر به‌دست می‌آید:

$$u_{p+1}=u_p(t)-\int_0^t[u_{p\tau}(\tau)-\rho u_p(\tau)(1-u_p(\tau-r))]d\tau.$$

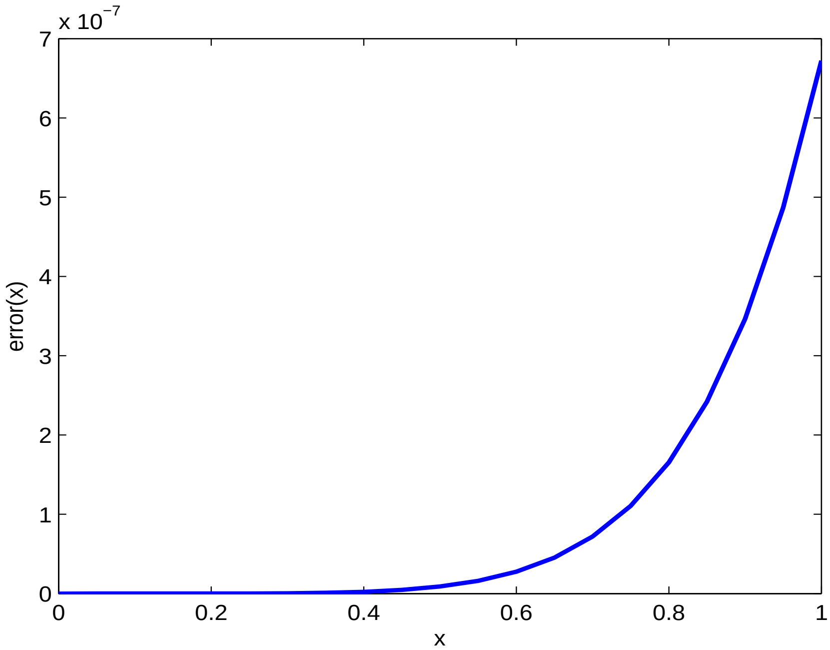
---

[۱۸] Logistic

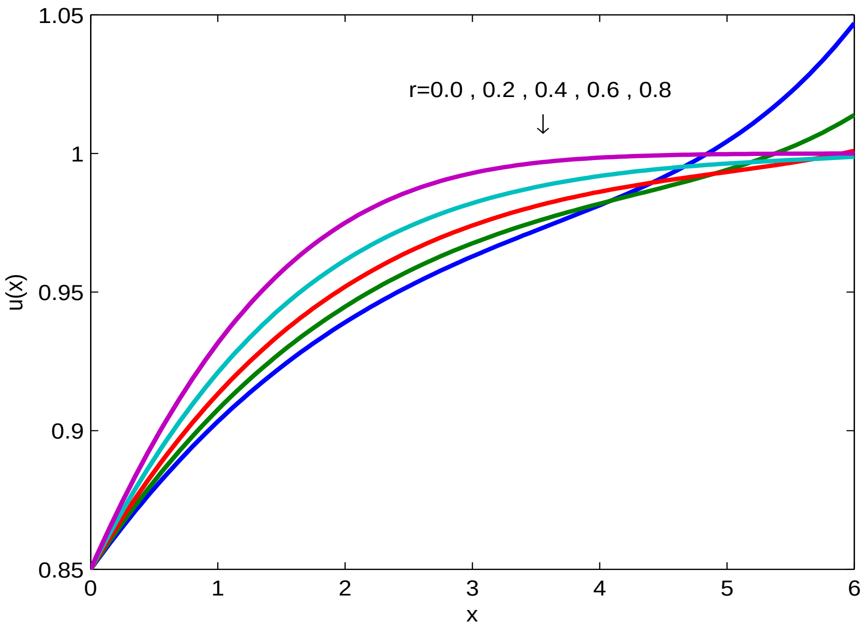


شکل ۳.۴: خطای بین جواب دقیق و جواب عددی در بازه $[۰, ۱]$ مثال (۳.۴.۴) .

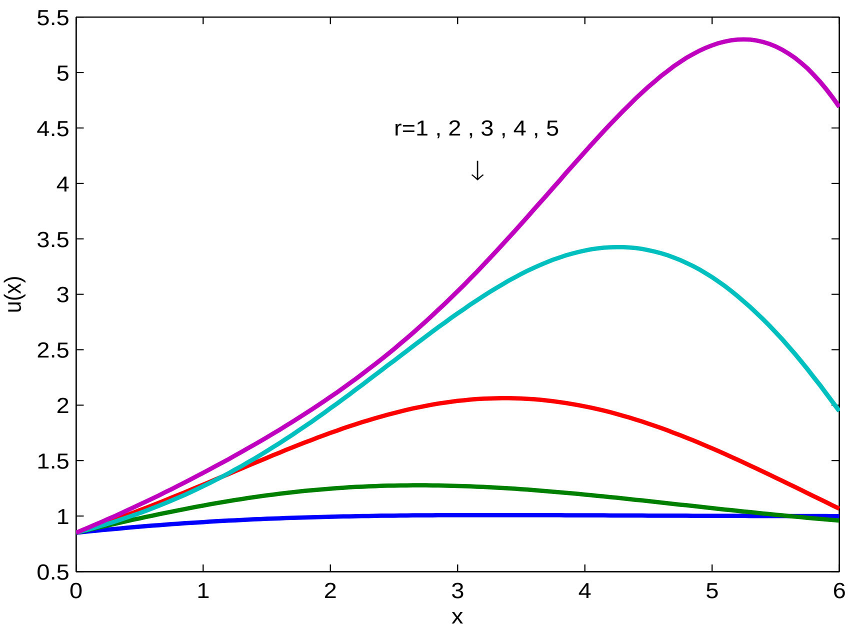
اگر $r = ۰/۰$ آن‌گاه $u(t) = \frac{u_۰}{u_۰+(۱-u_۰)e^{-\rho t}}$ و برای $r = ۰/۰, ۰/۲, ۰/۴, ۰/۶, ۰/۸, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵$ مقدار $u(t)$ را همان‌طور که در نمودار نشان داده شده، به‌دست می‌آوریم.



شکل ۴.۴: خطای جواب مثال (۴.۴.۴)



شکل ۵.۴: رفتار جواب تقریبی مثال (۴.۴.۴) برای $r = ۰/۰, ۰/۲, ۰/۴, ۰/۶, ۰/۸$



شکل ۶.۴: رفتار جواب تقریبی مثال (۴.۴.۴) برای $r = ۱, ۲, ۳, ۴, ۵$

۵.۴ روش تجزیه آدومیان برای حل معادله دیفرانسیل تاخیری

در این بخش ابتدا به تحلیل روش تجزیه آدومیان [۱۹] ADM برای حل این‌نوع معادلات و حل چند مثال عددی و مقایسه با روش تکرار وردشی می‌پردازیم.

۱.۵.۴ تحلیل روش

معادله DDE به‌فرم زیر در نظر بگیرید:

$$Ly(x) = f(x, y(x), y(g(x))), \quad 0 \leq x \leq 1 \tag{۱۵.۴}$$

$$y^{(i)}(0) = y_0^i, \quad i = 0, 1, \ldots, N-1, \tag{۱۶.۴}$$

$$y(x) = \phi(x), \quad x \leq 0 \tag{۱۷.۴}$$

که عملگر L به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L(\cdot) = \frac{d^N(\cdot)}{dx^N}.$$

عملگر معکوس L با انتگرال‌گیری چندگانه به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$L^{-1}(\circledast) = \int_0^x (\circledast)_{Ntimes}^{dx},$$

که با عمل کردن L^{-1} روی معادله (۱۵.۴) به‌دست می‌آید:

$$y(x) = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\alpha_j}{j!} x^j + L^{-1}(f(x, y(x), y(g(x))), \tag{۱۸.۴}$$

که α_j شرایط مرزی را توصیف می‌کند. در روش تجزیه آدومیان فرض کنید که تابع مجهول $y(x)$ با سری بی‌نهایت زیر بیان شود:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x), \tag{۱۹.۴}$$

بنابراین مولفه $y_n(x)$ به‌صورت بازگشتی تعیین می‌شود.
علاوه بر این جمله غیر خطی $f(x, y(x), y(g(x)))$ با چندجمله‌ای آدومیان زیر تعریف می‌شود:

$$f(x, y(x), y(g(x))) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n, \tag{۲۰.۴}$$

که A_nها چند جمله‌ای آدومیان هستند که به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[f\left(x, \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j y_j(x), \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j y_j(g(x)) \right) \right] \Big|_{\lambda=0}.$$

[۱۹] Adomian decomposition

که با جایگذاری (۱۹.۴) و (۲۰.۴) در معادله (۱۸.۴) داریم:

$$\sum_{j=0}^{\infty} y_n(x) = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\alpha_j}{j!} x^j + L^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n\right),$$

برای تعیین مؤلفه‌های $n \geq 0$ ،$y_n(x)$ ابتدا مؤلفه صفرام $y_0(x)$ توسط همه جملاتی که از شرایط مرزی در نقطه $x = 0$ به‌دست می‌آید و از انتگرال‌گیری جمله اولیه اگر موجود باشد. دوم، مؤلفه‌های دیگر $y(x)$ با استفاده از مؤلفه‌های قبلی تعیین می‌شود. به‌عبارت دیگر روش با جملات بازگشتی زیر معرفی می‌شود:

$$y_0(x) = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\alpha_j}{j!} x^j, \quad y_{n+1} = L^{-1}(A_n), \quad n \geq 0, \tag{۲۱.۴}$$

برای تعیین مؤلفه‌های $y_n(x)$ از $y(x)$ جواب سری $y(x)$ را با ثابت α_j $\quad j = 0, 1, \ldots, N-1$ که هنوز مشخص نیست، به‌دست می‌آید. تحلیل بالا با قضیه زیر بیان می‌شود.

قضیه ۱.۵.۴. *جواب DDE در فرم (۱۵.۴) می‌تواند با سری (۱۹.۴) و با تکرارهای (۲۱.۴) تعیین شود.*

۲.۵.۴ کاربرد

مثال ۲.۵.۴. معادله $LDDE$ مرتبه اول را در نظر بگیرید:

$$\frac{dy(x)}{dx} = \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} y(\frac{x}{2}) + \frac{1}{2} y(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad y(0) = 1. \tag{۲۲.۴}$$

که $u(x) = e^x$ جواب دقیق مسئله است.
مطابق قضیه (۱.۵.۴) خواهیم داشت

$$y_0(x) = 1, \quad y_{n+1}(x) = \int_0^x \left(\frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} y_n(\frac{x}{2}) + \frac{1}{2} y_n(x)\right) dx, \quad n \geq 0$$

که جواب بعد از ۱۳ تکرار با استفاده از این روش به‌دست می‌آید همان‌طور که قبلا ذکر شد با استفاده از روش تکرار وردشی بعد از ۵ تکرار به جواب می‌رسیم.
جدول زیر اختلاف بین جواب دقیق و جواب عددی را نشان می‌دهد.

جدول ۱.۴: اختلاف بین جواب دقیق و جواب عددی روش ADM

x	خطای مطلق
۰/۲	۰/۰
۰/۴	$۲/۲۲۰۴۴۶۰۴۹۲۵۰۳۱e - ۱۶$
۰/۶	$۲/۲۲۰۴۴۶۰۴۹۲۵۰۳۱e - ۱۶$
۰/۸	$۶/۲۱۷۲۴۸۹۳۷۹۰۰۸۸e - ۱۵$
۱/۰	$۱/۰۶۵۸۱۴۱۰۳۶۴۰۱۵e - ۱۳$

مثال ۳.۵.۴. معادله درجه دوم $LDDE$ زیر را در نظر بگیرید

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} = \frac{3}{4}y(x) + y(\frac{x}{2}) - x^2 + 2, \quad 0 \le x \le 1, \quad , y(0) = 0, \quad , \frac{dy(0)}{dx} = 0.$$

با به‌کار بردن روش موجود خواهیم داشت

$$y_0(x) = x^2 - \frac{x^4}{12}, \quad y_{n+1}(x) = \int_0^x \int_0^x \left(\frac{3}{4}y_n(x) + y_n(\frac{x}{2}) \right) dxdx, \quad n \ge 0$$

در این روش بعد از ۸ تکرار به جواب می‌رسیم در حالی‌که نشان دادیم در روش تکرار وردشی بعد از ۵ تکرار به‌جواب می‌رسیم.

جدول ۲.۴: اختلاف بین جواب دقیق و جواب عددی روش ADM

x	خطای مطلق
۰/۰	۰/۰
۰/۲	۰/۰۱۳۹
۰/۴	۰/۰۵۵۵
۰/۶	۰/۰۵۵۵
۰/۸	۰/۲۲۲۰
۱/۰۰	۰/۰

۶.۴ نتیجه‌گیری

مثال‌های ارائه شده نشان می‌دهد که نتایج حاصل از روش تکرار وردشی نسبت به روش آدومیان به علت تعداد تکرارهای کمتر عالی هستند. یک نکته قابل توجه درباره روش VIM این است که نه فقط تعداد تکرارهای کمتر یا حتی در حالت خاص با یک تکرار به جواب دقیق یا جواب‌هایی با دقت بالا می‌رسیم. مزیت اصلی روش VIM این است که می‌تواند بر مشکلات ناشی از محاسبه چند جمله‌ای آدومیان در روش ADM غلبه کند. روش VIM به پارامترهای کوچک که در روش اختلال برای خطی‌سازی مورد نیاز هستند نیز نیاز ندارد، VIM یک روش خیلی امیدوارکننده برای حل کاربردهای وسیع در معادلات دیفرانسیل غیر خطی است.

پیوست آ

کد مثال‌های فصل آخر با متلب

آ.۱ مثال (۱.۴.۴)

```
clear all;
close all
clc;
p=6;
u = sym('u', [1 p+1]);
syms x t;
u(1)=1;
u(2)=exp(x/2)+0.5*x;
for i=2:p
    f=u(i);
    up=diff(f,x);
    upt=subs(up,t);
    intf=upt-0.5*exp(t/2)*subs(f,x,t/2)-0.5*subs(f,x,t);
    u(i+1)=u(i)-int(intf,t,0,x);
end
up=u(p+1);
te=0:0.02:1;
m=length(te);

for i=1:m
ua(i)=subs(up,x,te(i));
```

```
ue(i)=exp(te(i));
end
ee=abs(ua-ue);
plot(te,ee,'LineWidth',2)

xlabel('x');
ylabel('error(x)');
title('Eroor of Example 1');
figure

  plot(te,ua,'r','LineWidth',2)
  hold on
  plot(te,ue,'LineWidth',2,'LineStyle',':')
```

آ.۲ مثال (۲.۴.۴)

```
clear all;
close all
clc;
p=6;
u = sym('u', [1 p+1]);
syms x t;
u(1)=0;
u(2)=x^2-0.5*x^4;
u(3)=x^2-0.00225694*x^6;
for i=3:p
    f=u(i);
    up=diff(f,x,2);
    upt=subs(up,t);
    intf=(t-x)*(upt-0.75*subs(f,x,t)-subs(f,x,t/2)+t^2-2);
    u(i+1)=u(i)+int(intf,t,0,x);
end
up=u(p+1);
te=0:0.02:1;
```

```
m=length(te);

for i=1:m
ua(i)=subs(up,x,te(i));
ue(i)=(te(i))^2;
end
ee=abs(ua-ue);
plot(te,ee,'LineWidth',2)

xlabel('\bfx');
ylabel('\bferror(x)');
title('\bfEroor of Example 2');
figure

  plot(te,ua,'r','LineWidth',2)
  hold on
  plot(te,ue,'LineWidth',2,'LineStyle',':')
```

آ.۳ مثال (۳.۴.۴)

```
clear all;
close all
clc;
syms x t;
u=x;
la=0.5*(t-x)^2;
for i=1:3
    u=vpa(simplify(u),5);
    a0=subs(u,x,t/2);
    a1=subs(u,x,t);
    a2=diff(a1,t,3);
    a3=a2-2*a0^2+1;
    f=la*a3;
    I=int(f,t);clear f
```

```
    s=subs(I,t,x)-subs(I,t,0);clear I
    u=u-s;clear s
end
y=@(z)sin(z);
xx=0:0.02:1;
for i=1:length(xx);yu(i)=subs(u,x,xx(i));yy(i)=y(xx(i));end
plot(xx,abs(yy-yu),'LineWidth',2);
xlabel('x');
ylabel('error(x)');
title('Eroor of Example 5');
```

آ.۴ مثال (۴.۴.۴)

```
clear all;
close all
clc;
syms t tu;
r=[0 0 0.2 0.4 0.6 0.8 1 2 3 4 5];
ro=0.5;
tt1=0:0.05:1;
tt2=0:0.05:6;
for j=1:11
    u=sym(0.85);
    for i=1:5
        u=vpa(simplify(u),5);
        a0=subs(u,t,tu);
        a1=subs(u,t,tu-r(j));
        a2=diff(a0,tu);
        f=a2-ro*a0*(1-a1);
        I=int(f,tu);clear f
        s=subs(I,tu,t)-subs(I,tu,0);clear I
        u=u-s;clear s
    end
    if j==1
```

```
        y=@(z)(0.85/(0.85+(1-0.85)*exp(-ro*z)));
        for i=1:length(tt1);
            yu(i)=subs(u,t,tt1(i));
            yy(i)=y(tt1(i));
        end
    elseif j>=2 && j<=6
        for i=1:length(tt2);
            y1(j-1,i)=subs(u,t,tt2(i));
        end
    else
        for i=1:length(tt2);
            y2(j-6,i)=subs(u,t,tt2(i));
        end
    end
end
figure('name','Eroor EX.6 whit r=0.0');
plot(tt1,abs(yu-yy),'b','LineWidth',2);
xlabel('x');
ylabel('error(x)');
title('Eroor of Example 6');
figure('name','EX.6 whit r=0.0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8');
for i=1:5
    plot(tt2,y1(i,:),'LineWidth',2);
    hold all
end
xlabel('x');
ylabel('u(x)');
title('Example 6 whit r=0.0 , 0.2 , 0.4 , 0.6 , 0.8');
text(2.5,1.023,'r=0.0 , 0.2 , 0.4 , 0.6 , 0.8');
text(3.5,1.01,'\downarrow');
figure('name','EX.6 whit r=1, 2, 3, 4, 5');
for i=1:5
    plot(tt2,y2(i,:),'LineWidth',2);
    hold all
```

```
end
xlabel('x');
ylabel('u(x)');
title('Example 6 whit r=1 , 2 , 3 , 4 , 5');
text(2.5,4.5,'r=1 , 2 , 3 , 4 , 5');
text(3.1,4.1,'\downarrow');
```

آ.۵ مثال (۲.۵.۴)

```
clear all;
format long g
syms x;
y{1,1} = 1;
y_approx = y{1,1};
n = 12;
for i=1:n
    clc; disp(i);
   f =simplify ( (1/2) * exp( x / 2) *  subs( y{1,i} , x , x/2 ) + (1/2) * y{1,i} );
    y{1,i+1} = int( f , x , 0 , x);
    y_approx = y_approx + y{1,i+1};
end
disp( collect( vpa( y_approx , 10 ) ) );
y_exact = @(x) exp(x);
X = [ 0.2 0.4 0.6 0.8 1];
for i=1:length(X)
    Y_approx(i) = subs( y_approx , x , X(i) );
    Y_exact(i) = y_exact( X(i) );
end
Er = abs( eval(Y_approx) - Y_exact );
disp(Er');
```

آ.۶ مثال (۳.۵.۴)

```
clear all;
```

```
syms x;
y{1,1} = x^2 - x^4/12;
y_approx = y{1,1};
n = 7;
for i=1:n
    clc; disp(i);
    f = subs( y{1,i} , x , x/2 ) + (3/4) * y{1,i};
    y{1,i+1} = int( int( f , x , 0 , x) , x , 0 , x );
    y_approx = y_approx + y{1,i+1};
end
disp( collect( vpa( y_approx , 5) ) );
y_exact = @(x) x^2;

X = [ 0 0.2 0.4 0.6 0.8 1];
for i=1:length(X)
    Y_approx(i) = eval(  subs( y_approx , x , X(i) )  );
        Y_exact(i) = y_exact( X(i) );

end
disp(Y_approx');
disp(Y_exact');
Er = abs( Y_approx - Y_exact );
disp(Er');
```

مراجع

[1] A. El-Safty, M.S. Salim, M.A. El-Khatib, Convergent of the spline functions for delay dynamic system, International Journal of Computer Mathematics 80 (4) (2003) 509–518.

[2] A. El-Safty, Approximate solution of the delay differential equation y00 =f(x,y(x),y(a(x))) with cubic spline functions, Bull. Fac. Sci., C, Math., Assuit Univ. 22 (2-c) (1993) 67–73.

[3] A. EI-Safty, S.M. Abo-Hasha, On the application of spline functions to initial value problem with retarded argument, International Journal of Computer Mathematics 32 (1990) 137–179.

[4] C.T.H. Baker, C.A.H. Paul and D.R. Will Issues in the numerical solution of evolutionary delay differential equations, Adv. Comput. Math. 3 (1995).

[5] C. T. H. Baker, C. A. H. Paul and Tian, "Differential algebraic equations with after-effect", J. Comput. Appl. Math. 140(2002)pp. 63-80

[6] D.J. Evans, K.R. Raslan, The Adomian decomposition method for solving delay differential equation, International Journal of Computer Mathematics 4 (2004) 1–6.

[7] E. Hairer, S.P Norsett and G. Wanner, Solving Ordinary Differential Equations II. Stiff and Differential- Algebraic Problems (Springer, New York, 1992).

[8] G. Hu and T. Mitsui, Stability analysis of numerical methods for systems of neutral delay-differential equations, BIT 35 (4) (1995).

[9] G. Hu and T. Mitsui, Stability of θ-methods for systems of neutral delay-differential equations, in: Abstract Joint Conference on Applied Mathematics, Ohtsu, Japan (1994).

[10] H.J. Tian, J.X. Kuang, The stability of methods for delay differential equations, J. Comput. Math. 14 (1996) 203–212.

[11] J.G. Lei, M.J. Chen, J.X. Kuang, Z.H. Sun, Functional Methods of Numerical Analysis, Higher Education Press, 1989 (in Chinese).

[12] J.J. Zhao, Y. Xu, S. Y. Dong, M.Z. Liu "Stability of the Rosenbrock methods for the neutral delay differential-algebraic equations" Appl. Math. Comput 168(2005)1128-1144.

[13] J.X. Kuang, J.X. Xiang and H.J. Tian, The asymptotic stability of one-parameter methods for neutral differential equations, BIT 34 (1994) 400-408.

[14] K.E. Brenan, S.L. Campbell, L.R. Petzold, Numerical Solution of Initial-Value Problem in Differential-Algebra Equations, Equations, second ed., SIAM, Philadelphia, PA, 1995.

[15] K.J. in t Hout, Stability analysis of Runge-Kutta methods for systems of delay differential equations, Report TW-95-08, Leiden University, Netherlands (1995).

[16] L.C. Evans, Partial Differential Equations, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

[17] Leping Sun, Yuhao Cong, Jiaoxun Kuang, "Asymptotic behavior of nonlinear delay differential–algebraic equations and implicit Euler methods" Appl. Math. Comput. 228(2014)395-403

[18] L.R. Petzold, Numerical Solution of DifSerential-Algebraic Equations, Advances in Numerical Analysis IV (1995).

[19] M.A. Ibrahim, A. EI-Safty, S.M. Abo-Hasha, 2h-step spline method for the solution of delay differential equations, Computers and Mathematics with Applications 29 (8) (1995) 1–6.

[20] M. M. KHADER, "Numerical and theoretical treatment for solving linear and nonlinear delay differential equations using variational iteration method" Arab. J. Math Sci 19(2)(2013). 243-256.

[21] M. Shadia, 1992. Numerical solution of delay differential and neutral differential equations using spline methods. Ph.D Thesis, Assuit University.

[22] S.L. Campbell, Singular linear systems of differential equations with delays, Appl. Anal. 2 (1980) 129-136.

[23] S.L. Campbell, 2-D (differential-delay) implicit systems, in: Proceedings 13th ZMACS World Conference on Computation and Applied Mathematics (1991).

[24] S. Reich, On the local qualitative behavior of differential-algebraic equations, Circuits Systems Signal Processing, to appear.

[25] R. Hauber, "Numerical treatment of retarded differential-algebraic equations by collocation methods", Adv. Comput. Math. 7(1997) pp. 573-592

[26] U. Ascher, L.R. Petzold, The numerical solution of delay-differential–algebraic equations of retarded and neutral type, SIAM Numer. Anal. 32 (1995).

[27] W.J. Zhu, L.R. Petzold, Asymptotic stability of linear delay differential-algebraic equations and numerical methods, Appl. Numer. Math. 24 (1997) 247–264.

[28] W. Zhu and L.Petzold, “Asymptotic stability of Hessenberg delay differential-algebraic equations of retarded or neutral type”, Appl. Numer. Math. 27(1998)pp. 309-325.

[29] X. Cao, D. Liu, S. Li, Asymptotic stability of Rosenbrock methods for delay differential equations, J. Syst. Simul. 14 (2002) 290–292.

[30] Y.H. Cong, J.N. Cai, J.X. Kuang, The GPL-stability of Rosenbrock methods for delay differential equation, Appl. Math. Comput. 150 (2004) 533–542.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

اختلال	Perturbation
اکیدا	Strictly
اندیس	Index
بعد،اندازه	Dimension
پایداری مجانبی	Asymptotic stability
پوچ‌توان	Nilpotent
تابعک تصحیح	Correction functional
تاخیر	Delay
تحلیلی	Analytical
تغییرپذیر	Variational
تفاضلات پسرو	Bachward difference
تقریب	Approximation
تکرار	Iteration
ثابت	Constant
جواب دقیق	Exact solution
چند جمله‌ای شور	Schur polynomial
چندگامی	Multistep
خنثی	Neutral
خطای مطلق	Absolute error
خطی	Linear
دامنه	Domain
درونیابی	Interpolation
دلخواه	Arbitrarily
دنباله	Sequence
دیرکرد	Retarded

روش‌های عددی .... Numerical techniques
ریشه .... Root
سازگار .... consistent
شرط لیپ شیتز .... Lipschitz condition
شعاع طیفی .... Spectral radius
صریح .... Explicit
ضریب .... Coefficient
ضمنی .... Implicit
عملگر .... Operator
قدرمطلق .... Modulus
قطری .... Diagonal
قید،محدودیت .... Constraint
کانونی .... Canonical
کاهش .... Reduction
ماتریس ژاکوبی .... Jocobian matrix
ماتریس مدادی .... Pencil matrix
ماتریس مثلثی .... Triangular matrix
ماتریس همانی .... Identity matrix
متوالی .... Successive
مجموعه محدب .... Convex set
مرتبه .... Order
مرزی .... Boundary
مستقل .... Independent
مسئله مقدار اولیه .... Initial value problems
مشتق فرشه .... Frechet derivative
معادل .... Equivalent
معادله جبری .... Algebraic
معادله مشخصه .... Characteristic equation
معکوس‌پذیر .... Invertible
مقدار تکین .... Singular value
منتظم .... Regular
منحنی .... Curve

منفرد	Singular
منفی	Negative
مؤلفه	Component
نامعادله	Inequality
نرم	Norm
نقطه درونی	Interior point
نگاشت	Mapping
همسایگی	Neighborhood
همگرایی	Convergence
هم‌محلی	Collocation
همگن	Homogeneous
یکانی	Unitary

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Absolute error	خطای مطلق
Algebraic	معادله جبری
Analytical	تحلیلی
Approximation	تقریب
Asymptotic stability	پایداری مجانبی
Arbitrarily	دلخواه
Bachward difference	تفاضلات پسرو
Boundary	مرزی
Canonical	کانونی
Characteristic equation	معادله مشخصه
Coefficient	ضریب
Collocation	هم‌محلی
Component	مؤلفه
Consistent	سازگار
Constant	ثابت
Constraint	قید،محدودیت
Convergence	همگرایی
Convex set	مجموعه محدب
Correction functional	تابعک تصحیح
Curve	منحنی
Diagonal	قطری
Dimension	بعد،اندازه
Delay	تاخیر
Domain	دامنه
Equivalent	معادل

Exact solution .... جواب دقیق
Explicit .... صریح
Frechet derivative .... مشتق فرشه
Homogeneous .... همگن
Identity matrix .... ماتریس همانی
Implicit .... ضمنی
Independent .... مستقل
Index .... اندیس
Inequality .... نامعادله
Initial value problems .... مسئله مقدار اولیه
Interior point .... نقطه درونی
Interpolation .... درونیابی
Invertible .... معکوس‌پذیر
Jocobian matrix .... ماتریس ژاکوبی
Iteration .... تکرار
Linear .... خطی
Lipschitz condition .... شرط لیپ شیتز
Mapping .... نگاشت
Modulus .... قدرمطلق
Multiplier .... ضریب
Multistep .... چندگامی
Negative .... منفی
Neighborhood .... همسایگی
Neutral .... خنثی
Nilpotent .... پوچ‌توان
Norm .... نرم
Numerical techniques .... روش‌های عددی
Operator .... عملگر
Order .... مرتبه
Pencil matrix .... ماتریس مدادی
Perturbation .... اختلال
Reduction .... کاهش

Regular .... منتظم
Retarded .... دیرکرد
Root .... ریشه
Schur polynomial .... چند جمله‌ای شور
Sequence .... دنباله
Singular .... منفرد
Singular value .... مقدار تکین
Spectral radius .... شعاع طیفی
Strictly .... اکیدا
Successive .... متوالی
Triangular matrix .... ماتریس مثلثی
Unitary .... یکانی
Variational .... تغییرپذیر

نمایه

Aabstract

Modeling electrical, power, chemical and mechanical, is described by a specific set of differential and algebraic equations called the differential-algebraic equations when these systems are exposed to delay. For example in the electrical and power systems this delay appears in the result of the internal interconnections of the circuits and transmission lines or when simulating the chemical processes while modeling the pipe flow.// With regard to the numerous applications of the delayed differential-algebraic equations, analyzing and presenting appropriate solutions to these equations is important, but so far few studies have been conducted on the structure of these equations and their solutions. This paper first introduces the differential-algebraic equations and then the asymptotic stability of differential-algebraic equations and linear and nonlinear algebraic delay and considers asymptotic stability for numerical methods such as multi-step, Runge-Kutta, θ method and... . Finally the semi-analytical variational iteration and Adomian decomposition methods are used to solve these equations.
keywords: Differential-algebraic equation, Delay differential-algebraic equation; Variational iteration method; Asymptotic stability;Adomian decomposition method

Shahrood University
Faculty Of Mathematical Sciences

Dissertation Submitted in Partial
Fulfillment of The Requirements For The
Degree of Master of Science in
Applied Mathematics

Solution of the delay differential algebraic equations via numerical and semi- analytic methods

Supervisor

Dr. M. Ghovatmand

Advisor

Dr. H. Ahsani Tehrani

by

Simin pouya

2015