بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی کاربردی، گرایش گراف و ترکیبیات

عنوان

تحلیل شبکه‌های اجتماعی فازی

استاد راهنما

دکتر صادق رحیمی شعرباف مقدس

دانشجو

محمود فلاح قاسم آباد

۱۳۹۳

خدایا بندگانت شکر نعمت‌های تو کنند
و من شکر بودن تو،
چراکه نعمت،
بودن توست...

"ابوالحسن خرقانی"

تقدیم با بوسه به دستان پدر و مادر عزیز و فداکارم...

(معلمانی مهربان که در ایثار و فداکاری گوهرانی بی‌همتایند و سخن از عشق بدون آنان هدر دادن واژه است و بس)

سپاس گزاری...

حمد و سپاس بیکران پروردگار یکتا را که، هستی‌مان بخشید و به طریق علم و دانش رهنمونمان شد و به هم نشینی رهروان علم و دانش مفتخرمان نمود و خوشه چینی از علم و معرفت را روزیمان ساخت. پس از یاری خدا به بار نشستن این تحقیق ممکن نبود مگر در سایه راهنمایی‌های خردمندانه استاد فرزانه جناب آقای دکتر صادق رحیمی شعرباف مقدس

اما چگونه سپاس گویم مهربانی و لطف ایشان را که سرشار از عشق و یقین است...

آری در مقابل این همه عظمت و شکوه ایشان مرا نه توان سپاس است و نه کلام وصف...

از اساتید داور، جناب آقایان دکتر علیرضا ناظمی و دکتر جعفر فتحعلی که قبول زحمت نموده و داوری این پایان نامه را بر عهده گرفته و قطعا نظرات این بزرگواران در هر چه بهتر شدن این پایان نامه مثمر ثمر خواهد بود، تشکر می نمایم، همچنین از راهنمایی‌های دکتر محسنی الحسینی از دانشگاه یزد و دکتر آقا بزرگی از دانشگاه ولی عصر (عج) رفسنجان قدردانی می کنم. بر خود لازم می دانم حضور نماینده تحصیلات تکمیلی جناب آقای دکتر محمد آرشی را ارج نهم و سپاس گویم.

قدردانی می کنم از خانواده عزیزم که درهای موفقیت از برکت دعای خلوت آنان به رویم باز می شود و خزان رویاهایم تنها به جفای غفلت از آنان فرا می رسد.

تشکر می کنم از خواهران و برادران عزیزم و دوستان عزیزم آقایان مهرداد مشتاق، بهزاد رضایی و سید جلال سیدیزدی که در این پایان نامه، اینجانب را یاری کرده و مشوق اینجانب بوده اند...

محمود فلاح قاسم آباد
۱۳۹۳

تعهدنامه

اینجانب **محمود فلاح قاسم‌آباد** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی کاربردی** **دانشکده علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **تحلیل شبکه‌های اجتماعی فازی** ، تحت راهنمایی **دکتر صادق رحیمی شعرباف مقدس** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تاکنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام " دانشگاه شاهرود " یا " Shahrood University " به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

محمود فلاح قاسم آباد

۱۳۹۳

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

از آنجا که یکی از اهداف تحلیل شبکه اجتماعی، تجزیه شبکه و دسته بندی است،دسته‌بندی شبکه، کلید فهم شبکه‌های پیچیده و بزرگ است. بنابراین دراین پایان نامه با استفاده از تکنیک هم‌ارزی، موضوع تحلیل شبکه‌ها بررسی شده است. در مسأله دسته‌بندی، نقش افراد و میزان شباهت افراد در شبکه، درک می‌شود. در فصل اول، تاریخچه شبکه‌های اجتماعی و مفاهیم مقدماتی که برای فصل‌های بعدی لازم هستند معرفی می‌گردد. در فصل دوم، تحلیل شبکه اجتماعی و دسته‌بندی افراد با روش هم‌ارزی ساختار مورد بررسی قرار می‌گیرد. در فصل سوم، از روش دسته‌بندی دیگری به نام هم‌ارزی منظم استفاده می‌شود. در فصل چهارم، با استفاده از مفهوم مانده‌ها و ترکیب روابط، یک دنباله برای محاسبه بزرگترین هم ارزی منظم در یک شبکه اجتماعی مطرح می‌گردد. در فصل پنجم، شبکه‌های اجتماعی فازی بیان می‌گردند و وجود بزرگترین هم‌ارزی منظم فازی و قطعی در این شبکه‌ها و پیدا کردن یک دنباله برای بزرگترین هم‌ارزی منظم فازی و قطعی البته باتمام حالت‌های مجموعه مقادیر درست در منطق فازی که تشکیل یک مشبکه کامل می‌دهند، مورد بررسی قرار می‌گیرد. در فصل ششم، هم‌ارزی منظم قوی و ضعیف مطرح می‌شود.

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی کاربردی، گرایش گراف و ترکیبیات

عنوان

تحلیل شبکه‌های اجتماعی فازی

استاد راهنما

دکتر صادق رحیمی شعرباف مقدس

دانشجو

محمود فلاح قاسم آباد

۱۳۹۳

کلمات کلیدی:هم‌ارزی منظم، مانده‌ها، درونی‌های منظم، هم‌ارزی منظم فازی، روابط فازی، نامعادلات رابطه فازی، معادلات رابطه فازی، مانده‌ها از روابط فازی، مشبکه‌های مانده کامل، شبه‌ترتیب‌های فازی، هم‌ارزی‌های فازی، روابط فازی منظم

لیست مقالات مستخرج از پایان‌نامه

1- Fallah GhasemAbad.M, The 2nd Regional Conference On Mathematics And Applications Payam Noor University Mazandaran, Tonekabon, 2 October 2014

فهرست مطالب

لیست تصاویر

فصل ۱

تاریخچه و مفاهیم و تعاریف اولیه

۱.۱ مقدمه

انسان‌ها اجتماعی‌ترین موجودات در میان همه موجودات هستند که چیزهای بسیاری از افراد دیگر یاد می‌گیرند و به آن‌ها وابستگی متقابل دارند. از این رو روابطی را شکل می‌دهند که تمام جامعه جهانی را شامل می‌شود. درک انسان‌ها و بنابراین درک انسانیت مستلزم درک روابط اجتماعی است که ممکن است درک نظام‌مند آن دشوار باشد. برای درک بهتر رفتار افراد در یک جامعه، نیاز است که روابط افراد مورد تحلیل قرار گیرد. تحلیل شبکه، به عنوان روشی است که افراد و روابط آن‌ها را به صورت ساختاری مورد بررسی قرار می‌دهد. روابط افراد، همیشه در هاله‌ای از ابهام است، بنابراین با نگرش فازی، بهتر می‌توان آن‌ها را بررسی کرد و نگرش فازی به جهان واقعی نزدیک‌تر است. نگرش فازی می‌تواند بسیاری از ابهامات به وجود آمده در علوم مختلف را برطرف کند و پاسخ قانع‌کننده‌تری به مسائل بدهد [۱۵].

۲.۱ شبکه اجتماعی

تعریف ۱.۲.۱. [۱۵]،[۵] یک شبکه اجتماعی، ساختاری متشکل از افراد یا سازمان‌ها است که در نظریه گراف، رأس نامیده می‌شوند و با یک یا چند نوع ویژگی از ارتباط [۱] مانند دوستی، خویشاوندی، مبادله مالی، ارتباطات اعتقادی، دانش یا جایگاه که در نظریه گراف یال نامیده می‌شوند به یک‌دیگر متصل هستند. واحدهای یک شبکه می‌تواند افراد، موقعیت‌ها، عاملان شرکتی یا گروهی یا به واقع هر عنصری که می‌تواند به عنصر دیگری متصل شود، باشد.
آنچه افراد، موقعیت‌ها و کنشگران گروهی را در جهان اجتماعی به هم متصل می‌کنند شامل : ۱- نمادها (اطلاعات، عقاید، ارزش‌ها، هنجارها، پیام‌ها و غیره)۲- مواد (اشیای فیزیکی و به احتمال سمبل‌هایی همانند پول که اجازه دسترسی به اشیای فیزیکی را می‌دهند و ۳- عواطف (تأییدیه، احترام، دوستی، رضایت، و نظیر آن) می‌باشد [۵] .

[۱] relation

مفهوم شبکه اجتماعی، [۲] نخستین بار در سال ۱۹۴۰ توسط آر.رادکلیف براون [۳] معرفی گردید. سپس، در اواسط دهه ۵۰ این مفهوم توسط بوت و بارنز مورد استفاده قرار گرفت. الیزابت بوت [۴] با مطالعات شجره شناسی در انگلستان در دهه ۱۹۵۰ و مطالعات شهرنشینی گروه انسان‌شناسی دانشگاه منچستر (با محوریت گلاکمن [۵] و بعدها جی.کلود.میچل [۶]) در دهه‌های ۱۹۵۰–۱۹۶۰ در مطالعه شبکه‌های مدنی آفریقای جنوبی، هندوستان و انگلستان، تحلیل شبکه را توسعه دادند. در دهه‌های ۱۹۶۰–۱۹۷۰، رشد شمار محققان، در ترکیب آثار و سبک‌های مختلف مؤثر واقع شد. یک گروه بزرگ با محوریت هریسون وایت و دانشجویان او در دانشگاه هاروارد متمرکز شده بودند. از افراد مهم این گروه، چارلز تیلی بر شبکه‌هایی در جامعه‌شناسی سیاسی و حبس‌های اجتماعی توجه نمود و استانلی میلگرام، فرد دیگر این گروه، تز تفکیک ۶ درجه‌ای را مطرح کرد [۵] .

۱.۲.۱ اهداف شبکه‌های اجتماعی

در دنیای ارتباطات علمی، شبکه‌های اجتماعی را می‌توان از بسترهای مؤثر در تولید علم، اشتراک عقاید و رشد فردی و اجتماعی دانست. هدف شبکه اجتماعی این است که با فراهم آوردن امکان ارتباط بین سرمایه‌های فردی و تشکیل سرمایه اجتماعی، به رشد و ارتقای سطح علم کمک کند. هدف کلی هر شبکه اجتماعی، ایجاد سرمایه اجتماعی و تسهیل ارتباط بین متخصصان، هنرمندان و صاحب حرفه‌های متعدد است. تبدیل سرمایه فردی به سرمایه اجتماعی، از مسائل مهم و مورد توجه تمامی حوزه‌های علمی است. از این طریق، دانش فردی به دانش جمعی تبدیل و در واقع از دانایی جمعی برای حل مسائل و مشکلات دنیای علم بهره‌برداری می‌شود [۴] .

۲.۲.۱ انواع شبکه‌های اجتماعی

سایت‌های شبکه‌های اجتماعی شامل دو شکل اصلی « پروفایل محور» و «محتوا محور» هستند:

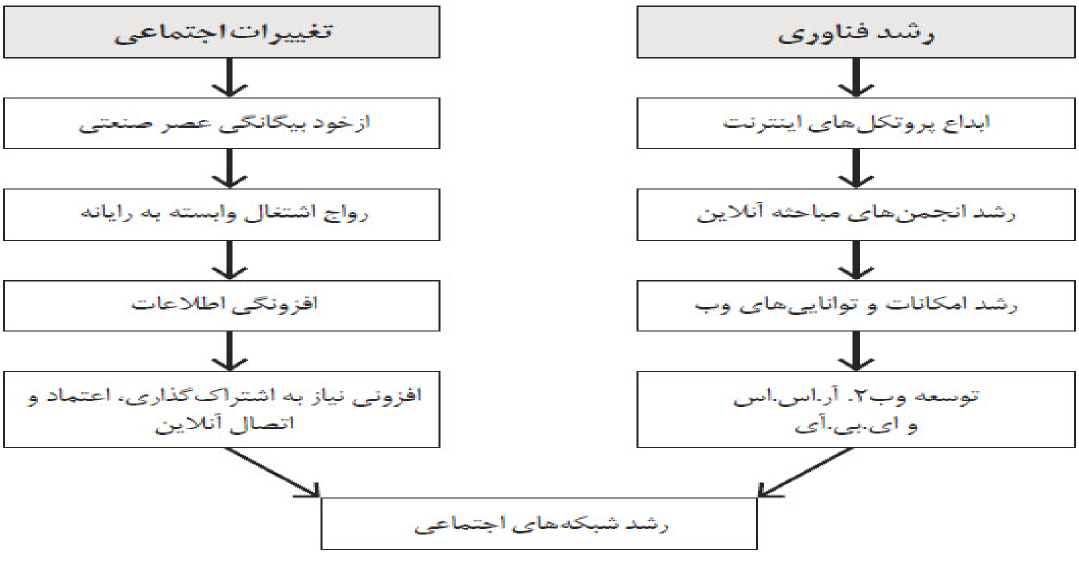
۱) در سایت‌های شبکه‌های پروفایل محور،کانون فعالیت‌ها، پیرامون صفحه‌های حاوی اطلاعات مربوط به فعالیت ها، علایق و گرایش‌های هر عضو شکل می‌گیرد. بیبو [۷] ، فیسبوک [۸] و مای اسپیس [۹] ، نمونه‌هایی از این نوع شبکه‌ها هستند. از شبکه‌های اجتماعی مجازی دیگر، همچنین می‌توان وایبر [۱۰] ، لاین [۱۱] و غیره را نام برد. در این شبکه‌ها، کاربران، نوعاً دامنه فعالیت و فضای ارتباطی خود را از راه‌های گوناگون، با درج یادداشت، پیوند و افزودن متن در فضای به اشتراک گذارده شده، گسترش می‌دهند.

۲) شبکه‌های اجتماعی مبتنی بر محتوا: در این شبکه‌ها، پروفایل‌های کاربران در عین حال که دارای

[۲] social network
[۳] A.R.radcliffe-brown
[۴] Elizabeth Bott
[۵] Max Gluckman
[۶] J. clyde Mitchell
[۷] Bebo
[۸] Facebook
[۹] MySpace
[۱۰] Viber
[۱۱] Line

جایگاهی مهم در شکل‌گیری ارتباطات هستند، اما نقش ثانویه را در ارسال محتوا دارند. شبکه فلیکیر [۱۲] نمونه‌ای از این گونه شبکه‌ها است؛ گروه‌ها، ارتباطات و یادداشت‌هایی پیرامون تصاویر درج شده شکل می‌گیرند و اعضای شبکه برای ارسال تصویر جدید، درج دیدگاه‌های خود یا ارتباط با سایر اعضا، نخست باید خود را به شبکه معرفی کنند، یعنی از پروفایلی که قبلاً برای خود ایجاد کرده‌اند، برای ورود به شبکه استفاده کنند، یوتیوب [۱۳] نیز چنین عملکردی دارد[۲].

فن‌آوری‌های نوین اطلاعاتی و ارتباطاتی، زمینه‌ساز پیدایش نوعی رسانه اجتماعی شده‌اند که توانسته است بسترهای مناسبی را برای تغییرات اجتماعی ایجاد کند. این رسانه، با دارا بودن ویژگی تعاملی و اشتراک‌گذاری، فضای نوینی را در عرصه کنشگری [۱۴] ایجاد می‌کند. خاستگاه رسانه اجتماعی، پدیده وب۲ است (، یعنی، سایت‌ها یا خدمات اینترنتی که امکان تبادل اطلاعات را بین کاربران فراهم می‌کنند، یا به آن‌ها اجازه تولید یا دستکاری در اطلاعات را می‌دهند) که سازوکارهای لازم را از طریق سایت‌های شبکه‌های اجتماعی، برای خلق فضای نوینی به نام « فضای سایبر » فراهم می‌سازد. از این‌رو، بیان این که بین فن‌آوری‌های اطلاعاتی و ارتباطی و شکل‌گیری زندگی اجتماعی پیوندی عظیم برقرار شده است، مفهومی اغراق‌آمیز نیست. می‌توان فن‌آوری اطلاعات را چشم‌اندازی دانست که در آن فن‌آوری‌های نوین اطلاعات و ارتباطات و جنبش‌های اجتماعی به صورت پیوسته‌ای بر همدیگر تأثیر می‌گذارند و از یکدیگر تأثیر می‌پذیرند. بنی‌یهودا، مؤلفه‌های تأثیرگذار این پارادایم را در سطح شبکه‌های مجازی، به شکل موازی ترسیم کرده و پیامد توسعه وب ۲ و برنامه‌های رابط کاربردی، در کنار نیاز به اشتراک‌گذاری، اعتماد و اتصال برخط را، رشد شبکه‌های اجتماعی در اینترنت می‌داند(شکل۱). دوران به نقل از ویتل، تعریف



شکل ۱. اینترنت و تغییرات اجتماعی (Ben-Yehuda, 2007:25)

سه جزئی از فضای سایبر ارائه می‌کند که به نظر وی « نسبتاً جامع و مانع » است. بر این اساس، فضای سایبر به سه صورت زیر تعریف می‌شود:

۱. فضای روانی- خیالی است که در آن افکار، مجذوب توهمی رؤیاگونه می‌شوند.

[۱۲] Flickr
[۱۳] YouTube
[۱۴] actors

۲. دنیای مفهومی تعاملات شبکه‌ای شده بین افراد و آفریده‌های معنویشان و هر چیز همراه با این شبکه‌ها و تعاملات است.

۳. حالتی از اندیشه است که توسط افراد در ارتباط، و به وسیله بازنمایی‌های دیجیتال زبان و تجربه حسی، به اشتراک گذارده می‌شود. افرادی که از نظر زمان و مکان جدا از یکدیگرند، ولی به وسیله شبکه‌هایی از ابزار فیزیکی دسترسی، به یکدیگر متصل هستند.

اولین سایت شبکه اجتماعی که در سال ۱۹۹۷ میلادی آغاز به کار کرد، سیکس دیگریز [۱۵] بود که به کاربران، امکان ایجاد پروفایل و فهرست دوستان مرتبط را می‌داد. این سایت دارای ابزاری بود که کاربران را در ارسال پیام براي یکدیگر کمك می‌کرد. این سایت در سال ۲۰۰۰ میلادی بسته شد، ولی در خلال سال‌های ۱۹۹۷ تا ۲۰۰۱ سایت‌های دیگری به وجود آمدند که اشین اونیو [۱۶]، بلک پلانت [۱۷]، مای-جنتی [۱۸] و [۱۹] لیو ژورنال از آن جمله‌اند [۲].

۳.۲.۱ آسیب‌شناسی شبکه‌های اجتماعی

پدیده‌های مولود فن‌آوری‌های نوین را همچون دیگر پدیده‌ها می‌توان، از منظر آسیب‌شناسانه مورد مطالعه قرار داد. آسیب‌شناسی تعامل در این شبکه‌ها را می‌توان از جنبه‌های گوناگونی مورد اشاره قرار داد. مانند:

۱) شبکه‌های اجتماعی می‌توانند کانون‌های شکل‌گیری گروه‌های بزهکار، کلاهبردار و هنجارشکن باشند.

۲) شبکه‌های اجتماعی می‌توانند منبع اطلاعاتی بسیار با ارزشی برای سازمان‌های جاسوسی و دولت‌های متخاصم باشند و منافع ملی کشورها را به مخاطره اندازند.

۳) امکان سوء استفاده از داده‌های شبکه‌های اجتماعی برای تبلیغات و سوداگری همواره کنشگران را تهدید می‌کند[۲].

چه ارتباطی بین شبکه اجتماعی و مفاهیم گراف است؟

تعریف ۲.۲.۱. به سه‌تایی مرتب $(V(G), E(G), \psi(G))$، که $V(G)$ مجموعه ناتهی از رئوس، $E(G)$ مجموعه‌ای از یال‌ها و $\psi(G)$ تابع وقوع است که به هر یال G یک جفت نامرتب و نه لزوماً متمایز از $V(G)$ را متناظر می‌کند **گراف** گوییم.

اگر e یک یال و u و v دو رأس باشند به طوری‌که $\psi_G(e) = uv$، در این صورت گفته می‌شود که e، رئوس u و v را به هم وصل کرده است و رئوس u و v، **دو سر** یال e نامیده می‌شوند.

دلیل نام‌گذاری گراف‌ها بدین نام، این است که می‌توان آن‌ها را به صورت گرافیکی نمایش داد و همین نمایش گرافیکی است که ما را در درک بسیاری از خواص گراف‌ها یاری می‌کند. در این گونه نمایش گرافیکی، هر رأس با یک نقطه و هر یال با یک خط، که نقاط نمایانگر دو سر خود را به یکدیگر وصل می‌کند، نمایش داده می‌شود.

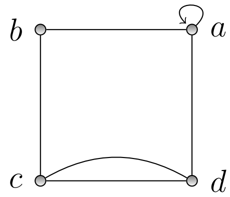
---

[۱۵] SixDegrees
[۱۶] AsianAvenue
[۱۷] BlackPlanet
[۱۸] Mi-Gente
[۱۹] LiveJournal

مثال ۳.۲.۱. $G = (V(G), E(G), \psi_G)$ یک گراف است که براساس آن $V(G) = \{a, b, c, d\}$ و $E(G) = \{e_۱, e_۲, e_۳, e_۴, e_۵, e_۶\}$ و این یالها بین رئوس، به شکل زیر هستند:

$$\psi_G(e_۱) = ab, \psi_G(e_۲) = bc, \psi_G(e_۳) = \psi_G(e_۴) = cd, \psi_G(e_۵) = ad, \psi_G(e_۶) = aa$$

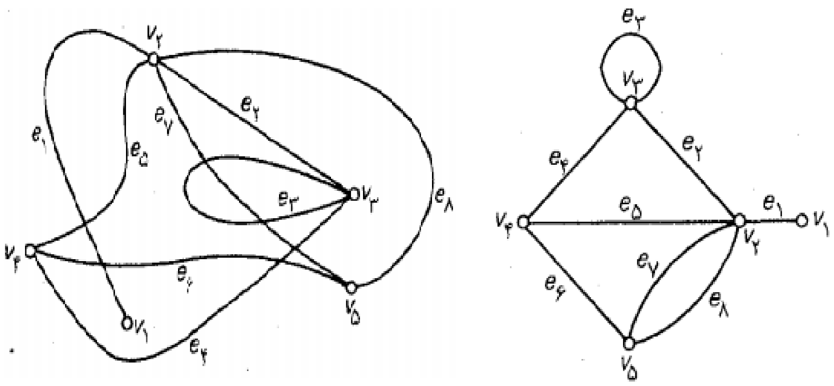
و این گراف دارای نمایش گرافیکی زیر خواهد بود:



شکل ۱.۱: گراف $G = (V, E, \psi(G))$

چون با مشخص بودن $V(G)$ و $E(G)$ تابع $\psi(G)$ به طور ضمنی تعریف شده است از این پس گراف را به صورت زوج $G = (V, E)$ نشان می‌دهیم.

برای رسم یک گراف، روش یکتایی وجود ندارد، به این دلیل که موقعیت نسبی نقاط و خطوط که به ترتیب نمایانگر رأس‌ها و یال‌های گراف هستند، برای ما اهمیتی ندارد. به عنوان مثال دو نمودار زیر نمایش گرافیکی، یک گراف هستند.



شکل ۲.۱: دو نمایش گرافیکی برای یک گراف

تعریف ۴.۲.۱. اگر مجموعه رأس‌ها و مجموعه یال‌های یک گراف، متناهی باشند، گراف مزبور را **متناهی** [۲۰]می‌نامند.

گرافی که متناهی نباشد را گراف **نامتناهی** [۲۱]می‌نامیم.

تعریف ۵.۲.۱. دو رأس $v_۱$ و $v_۲$ را **مجاور** [۲۲]گوییم هرگاه بین آن‌ها یک یال موجود باشد و دو یال $e_۱$ و $e_۲$ را مجاور گوییم هرگاه در یک رأس مشترک باشند.

[۲۰] finite graph

[۲۱] infinite graph

[۲۲] adjacent

تعریف ۶.۲.۱. یک رأس گراف را **تنها** [۲۳]گوییم هرگاه هیچ یالی متصل با آن نباشد.

تعریف ۷.۲.۱. در گراف $G = (V, E)$، به یالی که دو رأس انتهایی‌اش بر هم منطبق باشند **طوقه** [۲۴]گوییم. هرگاه در یک گراف بین دو رأس u و v دو یا بیش از دو یال وجود داشته باشد یال‌های موجود را **یال‌های چندگانه** [۲۵]می‌نامیم.

نکته ۸.۲.۱. یک **گراف ساده**، گرافی است که در آن یال چندگانه و طوقه وجود نداشته باشد.

تعریف ۹.۲.۱. **گراف جهت‌دار** [۲۶] عبارت است از زوج $D = (V, A)$ که در آن V مجموعه متناهی و غیرتهی از رئوس و A خانواده متناهی (نه لزوماً ناتهی) از زوج‌های مرتب و نه لزوماً متمایز از عناصر V به نام کمان است.

در گراف‌های جهت‌دار چنانچه کمانی یک رأس را با خودش مجاور سازد، آن را طوقه می‌نامیم و اگر بین دو رأس بیش از یک کمان هم جهت باشد آن را کمان‌های چندگانه می‌نامیم. به گرافی که جهت‌دار نباشد گراف **بدون جهت** می‌گوییم.

نکته ۱۰.۲.۱. گراف **جهت‌دار ساده**، گرافی است که در آن کمان چندگانه و طوقه وجود نداشته باشد.

تعریف ۱۱.۲.۱. به تعداد یال‌های واقع بر رأس v در گراف $G = (V, E)$، **درجه رأس**[۲۷] v می‌گوییم. اگر یال مذکور طوقه باشد در محاسبه‌ی درجه رأس دو بار محسوب گردد.

تعریف ۱۲.۲.۱. گراف ساده‌ی $G = (V, E)$ با n رأس را **کامل** [۲۸] گوییم هرگاه درجه‌ی تمام رئوس آن $n - ۱$ باشد. به عبارت دیگر گراف کامل، گراف ساده‌ای است که همه رأس‌های آن با هم مجاور باشند. گراف کامل با n رأس را با K_n نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۳.۲.۱. یک **گشت** [۲۹] از گراف $G = (V, E)$، دنباله ناصفر متناهی $W = v_۰ e_۱ v_۱ e_۲ v_۲ \cdots e_k v_k$ است به طوری که جملات آن یک در میان از رأس‌ها و یال‌ها بوده و به ازای $۱ \leq i \leq k$، v_i و $v_{i-۱}$ دو سر e_i باشند. در این صورت می‌گوییم W، یک گشت از $v_۰$ تا v_k است. رأس‌های $v_۰$ و v_k به ترتیب رأس **ابتدا** و **انتهای** W و $v_۱, v_۲, \ldots, v_{k-۱}$ **رأس‌های داخلی** W نامیده می‌شوند. همچنین عدد صحیح k را **طول**[۳۰] W می‌نامیم.

تعریف ۱۴.۲.۱. یک **گذر**[۳۱] در یک گراف گشتی است که در آن یالی تکرار نشده باشد. یک **مسیر** [۳۲] در یک گراف گذری است که در آن هیچ رأسی (در نتیجه هیچ یالی) به جز احتمالاً رأس آغازین و پایانی گذر تکرار نشده باشد.

---

[۲۳] isolated
[۲۴] loop
[۲۵] parallel
[۲۶] Digraph
[۲۷] degree
[۲۸] complete graph
[۲۹] walk
[۳۰] length
[۳۱] trail
[۳۲] path

تعریف ۱۵.۲.۱. ، کوتاه‌ترین مسیر بین u و v را **فاصله** [۳۳] دو رأس u و v تعریف می‌کنیم و با نماد $d(u,v)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۶.۲.۱. یک گشت، گذر یا مسیر $v_0e_1v_1e_2v_2\cdots e_kv_k$ را **بسته** [۳۴] گوییم هرگاه $v_0 = v_k$

تعریف ۱۷.۲.۱. یک مسیر بسته شامل حداقل یک یال را یک **دور** [۳۵] و گذر بسته شامل حداقل یک یال را یک **مدار** می‌نامیم.

تعریف ۱۸.۲.۱. تعداد یال‌های موجود در یک گشت، گذر، مسیر، دور یا مدار را **طول** آن می‌نامیم.

تعریف ۱۹.۲.۱. بزرگترین کوتاهترین مسیر در یک گراف را قطر [۳۶] می‌گویند.

تعریف ۲۰.۲.۱. حاصل‌جمع تعداد یالهای موجود، تقسیم بر تعداد کل یالهای احتمالی در یک گراف را چگالی [۳۷] گراف می‌گویند.

تعریف ۲۱.۲.۱. گراف $G = (V,E)$ را **همبند** [۳۸] می‌نامیم هرگاه به ازای هر $u,v \in V$ مسیری از u به v موجود باشد. گرافی که همبند نباشد را ناهمبند می‌نامیم. و هریک از اجزای همبند [۳۹] آن را یک مؤلفه می‌نامیم. بنابراین گراف همبند گرافی است که فقط شامل یک مؤلفه باشد.

تعریف ۲۲.۲.۱. اگر در هر گراف جهت‌دار، به ازای هر دورأس آن دو مسیر جهت‌دار دوطرفه بین آن وجود داشته باشد آنگاه آن گراف همبند قوی است.

تعریف ۲۳.۲.۱. فرض می‌شود $G = (V,E)$ یک گراف و $v \in V(G)$ باشد. **همسایگی** v را که با $N(v)$ مجموعه تمام رئوسی تعریف می‌کنیم که با v مجاور هستند. به عبارت دیگر:

$$N(v) = \{u \mid u \in V(G), vu \in E(G)\}.$$

تعریف ۲۴.۲.۱. فرض کنید $G = (V,E)$ یک گراف جهت‌دار و $v \in V(G)$ باشد. **همسایگی خروجی** v را با $N^+(v) = \{u \mid u \in V(G), (v,u) \in E(G)\}$ و همچنین **همسایگی ورودی** v را با $N^+(v) = \{u \mid u \in V(G), (v,u) \in E(G)\}$ نشان می‌دهیم و $N(v) = N^+(v) \cup N^-(v)$ مجموعه‌ی تمام همسایه‌هایی تعریف می‌شوند که با v مجاور هستند.

تعریف ۲۵.۲.۱. ماتریس مجاورت [۴۰] یک گراف، ماتریس مربعی $n \times n$ است که سطرها و ستون‌های این ماتریس را رأس‌های گراف تشکیل می‌دهند و اگر یک یال بین دو رأس u و v باشد، آنگاه درایه مربوط به سطر u ام و ستون j ام، عدد یک است، در غیر این صورت مقدار صفر قرار می‌گیرد. و

[۳۳] distance
[۳۴] close
[۳۵] cycle
[۳۶] diameter
[۳۷] density
[۳۸] connected
[۳۹] component
[۴۰] adjacency matrix

همچنین اگر گراف بدون جهت باشد، آنگاه ماتریس مجاورت، متقارن است. به عنوان مثال، ماتریس مجاورت شکل ۱.۱ به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

تعریف ۱.۲.۲۶. ماتریس وقوع، ماتریسی است که سطرهای آن را رأس‌های گراف و ستون‌های آن را یال‌های گراف تشکیل می‌دهند و بدین صورت است که اگر یک یال بین دو رأس موجود باشد، آنگاه در ستون آن یال مرتبط با سطرهای دو رأس، برای هر کدام یک عدد ۱ گذاشته می‌شود.

فصل ۲

تحیل شبکه و اختصاص نقش به وسیله همسایه‌های یک فرد

۱.۲ تحلیل شبکه

یکی از رهیافت‌های ساختاری در جامعه‌شناسی نوین، نظریه شبکه است. هرچند که این نظریه هم نوعی ساختارگرایی است، اما با تحولات این مکتب در خارج از رشته جامعه‌شناسی کمتر ارتباط دارد و بیشتر از تحولات درونی این رشته مایه می‌گیرد. در زمینه پیوندهای این نظریه با جریان اصلی جامعه‌شناسی باید گفت که نظریه پردازان شبکه به فلسفه پردازی درباره ساختارها چندان علاقه‌ای ندارند، بلکه بیشتر به بررسی دقیق تجربی، روش‌شناختی [۱] و حتی ریاضیاتی انواع متفاوت شبکه‌ها علاقه‌مند هستند. علاوه بر بعد نظری، در بعد روش‌شناختی نیز تحلیل شبکه اجتماعی، [۲] به عنوان تکنیک کلیدی در جامعه‌شناسی مدرن ظاهر شده است. این روش طرفداران زیادی را در انسان‌شناسی، زیست‌شناسی، مطالعات اقتصاد، جغرافی علم اطلاعات، مطالعات سازمانی، روان‌شناسی اجتماعی و زبان‌شناسی اجتماعی به دست آورده است [۵].

بنابراین تحلیل یک شبکه، مطالعه به منظور تبیین و درک شبکه با رویکرد تئوری گراف است. تحلیل شبکه، برای پیدا کردن دلایل و عوامل شکل‌گیری روابط است [۱].

تحلیل شبکه به عنوان شاخه‌ای از ریاضیات و جامعه‌شناسی به وجود آمده است که براساس مدل‌های گرافی و ریاضی، ساختارهای اجتماعی را به طور منظم مطالعه می‌کند. اما تحلیل شبکه، براساس ویژگی‌های مشترک همه شبکه‌ها کار می‌کند. به همین دلیل، امروزه استفاده از روش تحلیل شبکه افزایش یافته است. از این روش حتی در تحلیل شبکه‌هایی که اجتماعی نیستند نیز استفاده می‌شود [۱۵].

فرق اساسی تحلیل شبکه و دیگر مباحث این است که تحلیل شبکه بیشتر بر روی ارتباط افراد کار می‌کند تا این که بخواهد ویژگی‌های خود افراد را بررسی کند. تحلیل شبکه براساس انواع رفتارها و الگوهای رفتاری که بین افراد وجود دارد کار خود را آغاز می‌کند. ساختار یک شبکه، محدودیت‌ها و فرصت‌هایی

[۱] methodlogy

[۲] social network analysis

را برای افراد در یک شبکه نمایش می‌دهد که این محدودیت‌ها و فرصت‌ها به وسیله جریان‌های اطلاعاتی که بین افراد در یک شبکه وجود دارد قابل نمایش هستند. چون در یک شبکه، ما با مجموعه متناهی از افراد سروکار داریم، بنابراین روابط بین افراد را با ماتریس نمایش می‌دهیم. مفاهیم تحلیل شبکه برگرفته از نظریه گراف، جبر و جبرخطی است [۱۵]. برای اطلاعات بیشتر در مورد جنبه‌های مختلف تحلیل شبکه و کاربردهای آن، باید به [۳۱]،[۶۵]،[۳۳]،[۴۸][۵۸] و [۴۱] مراجعه شود.
روابط بین افراد در هاله‌ای از ابهام است، بنابراین ابهامات می‌توانند به وسیله نگرش فازی پوشش داده شوند، اما فقط تعداد کمی از افراد با این نوع نگرش سروکار دارند ([۴۰]،[۵۹] و [۶۱]). مارک گرانووتر [۳] (۲۰۰۷) و باری ولمن [۴] (۱۹۸۸) بین دانشجویان قدیمی وایت، اولین افرادی بودند که تحلیل شبکه اجتماعی را به طور ماهرانه سازمان‌بندی کرده و مقبول همه ساختند. حوزه تحلیل شبکه اجتماعی تا اواسط دهه ۱۹۹۰ به صورت گسترده‌ای در کتاب چند جلدی استنلی واسرمن [۵] و کاترین فاوست [۶] (۱۹۹۴) تحت پوشش قرار گرفت. بعداً، دو مقاله توسط فیزیک دانانی به نام‌های دانکن وات [۷] و استیون استروگاتر [۸] (۱۹۹۸) و آلبرت لازلو باراباسی [۹] و رکا آلبرت [۱۰] (۱۹۹۹) این حوزه را متحول ساختند و با توجه به تلاش آن ها، ادبیات به شدت میان رشته‌ای و به سرعت در حال رشد، آن را به علم گسترده‌تر شبکه‌های پیچیده وارد کرد (باکالتی [۱۱] و همکاران۲۰۰۶) [۳].

۱.۱.۲ روش تحلیل داده‌ها در شبکه‌های اجتماعی

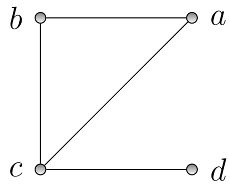
یک شبکه اجتماعی، در حالت کلی با ساختار روابط به شکل $N = (I, (V_j)_{j\in J})$ است که I مجموعه افراد در یک شبکه، J مجموعه اندیس و برای هر $j \in J$ ، $V_j \subseteq I^{k_j}$ می‌باشد که یک k_j - آرایه روی دامنه افراد I و k_j عدد صحیح مثبت است. یعنی به تعداد k_j گراف وجود دارد که مجموعه رئوس همه آن‌ها یکسان است و مجموعه یال‌های آن‌ها با هم تفاوت دارد. اگر $k_j = 1$ ، آنگاه شبکه اجتماعی فقط بیانگر یک نوع رابطه در بین افراد است، یعنی، فقط شامل یک گراف از روابط افراد، مانند شبکه در شکل ۱.۲ است.
در تحلیل شبکه، مفهوم رابطه، بیشتر ناظر به برداشت ساختاری است. برداشت ساختاری، به ارتباطی اشاره دارد که دو واحد را به هم متصل می‌کند. با یک بیان ساده می‌توان تحلیل در شبکه را به سه سطح عمده زیر تقسیم کرد:

۱- تحلیل ارتباط بین کنشگران با کنشگران دیگر در شبکه.
۲- تحلیل موقعیت کنشگران در ارتباط با کل شبکه.
۳- تحلیل آرایش رابطه‌ای یا ساخت کل نظام شبکه.

این نوع بررسی می‌تواند در یک سطح تحلیل، یا همزمان در چند سطح تحلیل صورت گیرد. یکی از روش‌های مؤثر برای حل مسأله ارتباط بین سطح خرد و کلان در بعد تجربی، شاید همین روش تحلیل

[۳] Mark granovetter
[۴] Barry Wellman
[۵] Wasserman
[۶] Katherine Faust
[۷] Duncan Watts
[۸] Steven Strogatz
[۹] Albert Laszlo Barabasi
[۱۰] Reka Albert
[۱۱] bacalty

شبکه باشد [۵].



شکل ۱.۲: شبکه تک رابطه‌ای

۲.۱.۲ فنون تحلیل شبکه

در روش تحلیل شبکه، تکنیک‌های گوناگونی مورد استفاده قرار می‌گیرد و می‌توان آن‌ها را به سه دسته عمده تقسیم کرد:

۱- الگوسازی جبری.

۲-الگوسازی آماری: در الگوسازی جبری و آماری تکنیک‌های چند متغیری عمدتاً استفاده از تحلیل خوشه‌ای و طبقه‌بندی چند بعدی، تکنیک مدل‌سازی بلوکی است.

۳- تکنیک‌های گرافیکی مبتنی بر نظریه گراف.

در بحث تحلیل شبکه، نظریه گراف به صورت شاخه‌ای از توپولوژی است که به کمک جبر ماتریس، اجازه می‌دهد گراف روابط بین کنشگران (گره‌ها [۱۲]) در یک شبکه، به طور تصویری یا جبری و منطقی مورد مطالعه قرار گیرد. مفاهیم و زبان نظریه گراف بسیار غنی است. مفاهیم مورد استفاده در این نظریه، رأس (نقطه [۱۳])، یال(خط [۱۴])، وزن یال، مسیر، فاصله مسیر، یال برشی، اتصال و غیره می‌باشند [۵].

۳.۱.۲ تجزیه شبکه

یکی از اهداف تحلیل شبکه، تجزیه و شناسایی اجزای آن است و برای این کار دو رهیافت وجود دارد:
الف) رهیافت جستجوی دسته: تکنیک‌های گرافیک می‌تواند به کشف دسته‌ها یا محفل‌های اجتماعی موجود در شبکه کمک کند.
ب) رهیافت هم‌ارز ساختاری: در تعریف این مفهوم، می‌توان گفت دو نفر کنشگر را وقتی هم‌ارز ساختاری گویند که با اشغال مشترک یک موقعیت در شبکه، دارای روابط کاملاً یکسان با سایر کنشگران در نظام شبکه باشند[۵].

از کاربردهای تحلیل شبکه در تحقیقات، می‌توان به نظارت جمعی اشاره کرد. تحلیل شبکه اجتماعی ممکن است وسیله مؤثری برای نظارت جمعی باشد. گاهی در حوزه‌های سیاسی و به ویژه نزد سازمان‌های اطلاعاتی و امنیتی از استراتژی‌های تحلیل شبکه اجتماعی برای تعیین این که آیا شهروندان تهدید سیاسی هستند یا نه استفاده می‌شود. برای نمونه، پس از حملات یازدهم سپتامبر در آمریکا، از فن‌کاوی در

[۱۲] nodes
[۱۳] Point
[۱۴] Line

خصوص بررسی میلیون‌ها تماس تلفنی آمریکایی‌ها استفاده شد تا ارتباط‌های بین تروریست‌ها مشخص گردد [۵]. دسته‌بندی، کلید فهم شبکه‌های بزرگ و پیچیده است. دسته‌بندی در شبکه‌ها کمک می‌کند که نقش [۱۵] افراد و مکان‌های [۱۶] افراد در یک شبکه بهتر فهمیده شوند. افرادی که در یک دسته قرار می‌گیرند، نقش‌ها یا مکان‌های مشابهی را در یک شبکه اشغال می‌کنند [۵۴]. اهمیت‌های تحلیل شبکه اجتماعی عبارتند از:

۱) به فهم ارتباطات پیچیده و الگوهای ارتباطی در میان افراد یک شبکه کمک می‌کند.
۲) ساختارهای یک شبکه را مشخص می‌کند.
۳) نفوذ افراد در شبکه‌های اجتماعی را مشخص می‌کند.
۴) به فهم چگونگی شکل‌گیری یک شبکه اجتماعی کمک می‌کند [۶۰].

۲.۲ روش‌های رأس میانی

۱. رأس‌های با برجستگی میانی[۱۷]

a) تعریف مدل [۷۶] :این مدل بیان می‌کند که اگر یک فرد در شبکه اجتماعی در مکانی قرار گرفته باشد که اکثر مسیرهای کوتاه بین افراد از وی بگذرند، این فرد دارای برجستگی میانی بالایی است.

b) نحوه ساخت مدل: این مدل، از جمله مدل‌هایی است که برای تشخیص افراد تأثیرگذار در یک شبکه اجتماعی به کار می‌رود. گره‌هایی که بین مولفه‌های [۱۸] گراف قرار می‌گیرند، معمولا دارای بالاترین میزان برجسته میانی هستند. در واقع این گره‌ها در یک گراف، بیشترین بار در یک مسیر کوتاه قرار می‌گیرند.

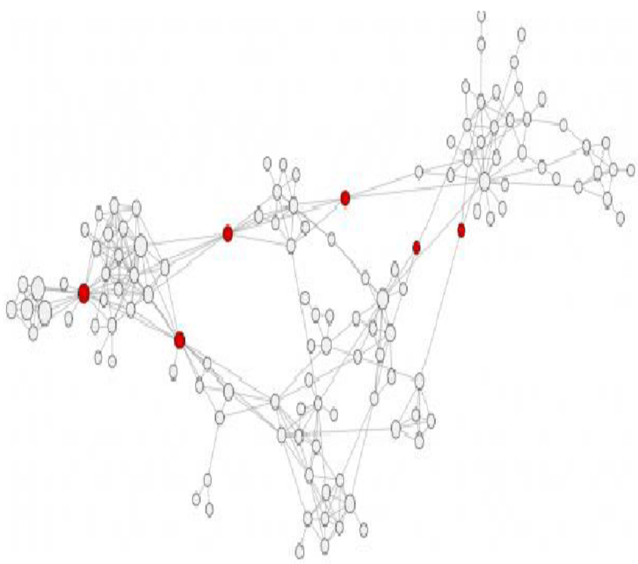
d) روش حل مدل : در این مدل، تعداد کوتاه‌ترین مسیرهایی که بین دو گره j و k وجود دارد و ازگره i می‌گذرد، محاسبه می‌شود. معادله ۱، حل مدل ریاضی برجسته ریاضی را نشان می‌دهد که در آن، g_{jk} بیانگر تعداد کل کوتاهترین مسیرهایی است که از گره‌های k و j می‌گذرد و $g_{jk}(i)$ بیانگر تعداد کوتاهترین مسیرهای بین j و k است که از گره i می‌گذرد. شکل ۳.۲ ، مدلی گرافیکی از برجستگی میانی را ارائه می‌دهد.

معادله ۱
$$B(i) = \sum_{j<k} g_{jk}(i)/g_{jk}$$

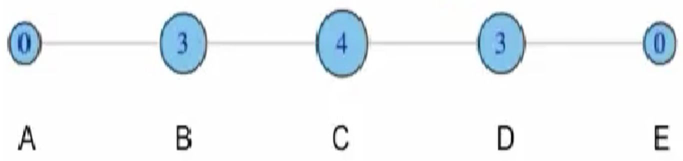
برای مثال در شکل ۳.۲ ، چون گره B در مسیری قرار دارد که تمام کوتاهترین مسیرهای A به گره‌های دیگر است، پس برجستگی میانی گره B برابر ۳ است (، B در مسیر AC ، AD و AE قرار دارد که البته این عدد، نرمال نشده است؛ یعنی بر مخرج معادله ۱ تقسیم نشده).

۲. رأس‌های با نزدیکی بالا[۱۹]

[۱۵] Role
[۱۶] Positions
[۱۷] betweenness
[۱۸] component
[۱۹] closeness



شکل ۲.۲: مدل رأس‌های با برجستگی میانی در شبکه‌های اجتماعی



شکل ۳.۲: مثالی از مدل رأس‌های با نزدیکی بالا برجسته میانی

a) تعریف مدل [۷۷] : این مدل، متوسط فاصله بین هر فرد، تا دیگر افراد را بیان می‌کند. افرادی که در شبکه اجتماعی، با کمترین طول مسیر به بیشترین افراد متصل می‌شوند، دارای نزدیکی بالایی می‌باشند.

b) نحوه ساخت مدل : این مدل نیز از جمله مدل‌های تشخیص افراد تأثیرگذار است. تنها ویژگی مورد بررسی در این مدل، در نظر گرفتن فاصله هر گره از دیگر گره‌ها در یک گراف می‌باشد. در واقع هرچه فاصله گره مورد نظر در گراف از دیگر گره‌ها کمتر باشد، نزدیکی آن گره بیشتر است و در نتیجه تاثیرگذاری وی در شبکه، بیشتر می‌باشد.

c) مسأله مدل : این مدل برای تشخیص افراد تاثیرگذار در یک شبکه اجتماعی مورد استفاده قرار می‌گیرد. در بسیاری از کارهای تبلیغاتی، از این دو مدل استفاده می‌شود تا بتوان محصول را برای تبلیغ به این افراد سپرد و بتوان با استفاده از میزان تاثیرگذاری آن‌ها در شبکه اجتماعی، سود بیشتری را نصیب شد.

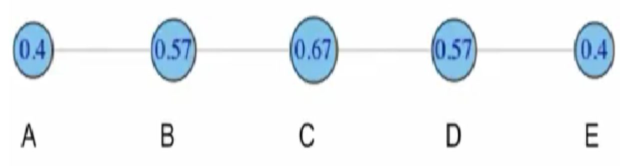
شکل ۴.۲: مدل رأس‌های با نزدیکی بالا در شبکه‌های اجتماعی

d) روش حل مدل : حل مدل ریاضی نزدیکی برای گره‌ای مانند i در معادله ۲ آمده است که در آن ،$d(i,j)$ ، فاصله بین گره i با دیگر گره های j می‌باشد. شکل ۵.۲ مدل گرافیکی نزدیکی را برای هر گره نشان می‌دهد.

معادله ۲

$$C(i) = [\sum_{j=1}^{N} d(i,j)]^{-1}$$

مثلاً، در گراف شکل ۵.۲ ، نزدیکی برای گره‌ها به صورت زیر محاسبه می‌شود:



شکل ۵.۲: مثالی از مدل نزدیکی

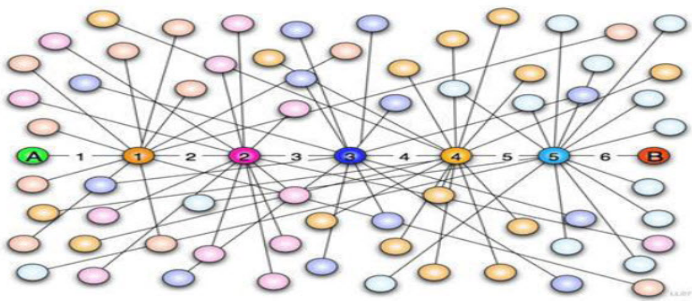
$$C(A) = (d_{AB} + d_{AC} + d_{AD} + d_{AE})^{-1} = (1 + 2 + 3 + 4)^{-1} = \frac{1}{10}$$

تعداد تمام گره‌های غیر از A) شده است.

۰.۳ جهان کوچک[20]

[20] small world

a) تعریف مدل [۷۸] : در این مدل، بیان می‌شود که هر شبکه اجتماعی مانند یک جهان کوچک است و حداکثر تعداد افرادی که بین هر دو فرد i و j قرار می‌گیرند، ۵ نفر می‌باشند. تحقیق در مورد این مساله برمی‌گردد به آزمایشی که توسط میلگرام [۲۱] در سال ۱۹۶۰ در دانشگاه ام آی تی [۲۲] انجام شد. وی در این آزمایش قصد داشت اندازه بگیرد که بین هر دو فرد در کشور آمریکا، چند نفر واسطه وجود دارد. برای این کار، نامه‌هایی را به افراد در استان ماساچوست [۲۳] تحویل می‌داد و از آن‌ها می‌خواست تا این نامه را برای شخصی که او مد نظر دارد، بفرستند. اگر کسی، آن فرد را نمی‌شناخت، باید نامه را به شخصی ارسال می‌کرد که حدس می‌زد به فرد مورد نظر نزدیکتر است. با انجام این آزمایش، مشخص شد که فاصله بین هر فرد در آمریکا ۶ است.



شکل ۶.۲: مدل جهان کوچک

b) نحوه ساخت مدل : در گراف‌های متناظر با این نوع از شبکه‌ها، حداکثر فاصله کوتاهترین مسیر بین همه گره‌های یک گراف همبند، برابر ۶ است. به عبارت دیگر، برای رسیدن از هر گره به گره دیگر در یک گراف همبند، لازم است از ۵ گره دیگر عبور کنیم.

c) مسأله مدل : از جمله مثال‌های مربوط به این مدل، می‌توان به شبکه ذهنی انسان اشاره کرد. حافظه کوتاه‌مدت انسان مهمترین مثالی است که می‌توان در این زمینه ذکر کرد. فاصله بین نرون‌های مغز آن‌قدر کوتاه است که اطلاعات زیادی در زمانی کم، بین نرونها رد و بدل می‌شود.

d) روش حل مدل: برای حل این مدل، ابتدا با استفاده از الگوریتم‌های کوتاهترین مسیر، فاصله کوتاهترین مسیرهای بین هر دو فرد در شبکه را پیدا می‌کنیم. پس از این‌کار، بزرگترین کوتاهترین مسیر را به عنوان جواب مساله مطرح می‌نماییم.

[۲۱] Milgram
[۲۲] MIT
[۲۳] Massachusetts

۳.۲ روش‌های رابطه هم‌ارزی

۱.۳.۲ روابط دودویی: مفهوم و ویژگی‌های اساسی

مفهوم روابط در این‌جا به جز ترانهاده [۲۴] و متمم [۲۵] یک رابطه، مطابق نظریه‌های کلیفورد [۲۶] و پرستن [۲۷] ([۳۷]) است. روابط دودویی شرکت‌پذیر با روابط اصلی روی مجموعه افراد [۲۸] I که تشکیل یک نیم‌گروه [۲۹] می‌دهند با حروف S, W, T, Q, E, U و R نشان داده می‌شوند. برای نشان دادن این که فرد u در رابطه V با فرد v است، به صورت uVv نوشته می‌شود. در حقیقت، چون روابط دودویی ، مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب هستند، این مفهوم می‌تواند به صورت زیر تعریف شود:

$$uVv \equiv (u,v) \in V$$

(به طوری که ≡ ، برابری دو تعریف را نشان می‌دهد). V - تصویر [۳۰] فرد u به صورت iV نوشته می‌شود و به وسیله مجموعه $\{v \in I|uVv\}$ تعریف می‌شود. به طور مشابه، V - هم‌تصویر [۳۱] یک فرد v ، بصورت Vv نوشته می‌شود و به وسیله مجموعه $\{u \in I|uVv\}$ تعریف می‌شود. ترانهاده یک رابطه T را با T^t نشان می‌دهند و این رابطه، از ترانهاده ماتریس مجاورت به دست می‌آید و متمم آن را با T' نشان می‌دهند و به صورت مفهوم متمم، در تئوری مجموعه‌ها است. رابطه همانی روی I ، به ماتریس همانی مربوط می‌شود و آن‌را با l_I یا به طور خلاصه با l نشان می‌دهند. رابطه تهی [۳۲] $\varnothing$ ، شامل هیچ زوج مرتبی نیست به طوری که رابطه مرجع [۳۳] $\omega = I \times I$ ، همه زوج مرتب‌ها را دارد.
در ادامه، ویژگی‌های روابطی که باید استفاده کرد بیان می‌شود. ماتریس مربعی و دودویی یک رابطه مانند T ، کمتر یا مساوی ماتریس مربعی و دودویی رابطه دیگری مانند R است اگر شرط زیر برقرار باشد:

$$\forall i,j: \qquad [t]_{i,j} \leq [r]_{i,j}$$

[۲۴] converce
[۲۵] complement
[۲۶] clifford
[۲۷] preston
[۲۸] individuals
[۲۹] semigroup
[۳۰] image
[۳۱] coimage
[۳۲] empty
[۳۳] universal

، یعنی، $t_{i,j} \leqslant r_{i,j}$ که $t_{i,j}$ بیانگر درایه مربوط به سطر i ام و ستون j ام ماتریس T است. اگر T, R و W روابط روی I باشند، آنگاه:

$$\begin{aligned}
&\varnothing o T = T o \varnothing = \varnothing && \text{صفر}\\
&I o T = T o I = T && \text{همانی}\\
&T o(W \cup R) = T o W \cup T o R && \text{جمع‌پذیر}\\
&T o(W \cap R) \leqslant T o W \cap V o R && \text{مقسوم‌علیه}\\
&(W o T)^t = T^t o W^t && \text{برگشت}\\
&T = T^{tt} = T'' && \text{خودتوان}\\
&T \leqslant T o T^t o T. && (۱.۲)
\end{aligned}$$

ویژگی‌های صفر [۳۴] همانی [۳۵] جمع‌پذیر [۳۶] مقسوم علیه [۳۷] برگشت [۳۸] خودتوانی [۳۹] دیده شد. اگر $R \leqslant W$ و T هر رابطه دلخواه دیگری باشد، آنگاه

$$\begin{aligned}
R o T &\leqslant W o T\\
T o R &\leqslant T o W\\
R^t &\leqslant W^t\\
R' &\geqslant W' \qquad (۲.۲)
\end{aligned}$$

یعنی، ترکیب و ترانهاده، شمولیت را حفظ می‌کنند. اما متمم برعکس آن‌ها است.

تعریف ۱.۳.۲. اگر I یک مجموعه از افراد باشد، یک رابطه هم‌ارزی [۴۰] روی یک مجموعه افراد، یک رابطه دودویی E روی I است به طوری که $\forall u, v, z \in I$ دارای شرایط زیر باشد:

۱- uEu (رابطه انعکاسی) [۴۱]

۲- $uEv \Longrightarrow vEu$ (رابطه متقارن) [۴۲]

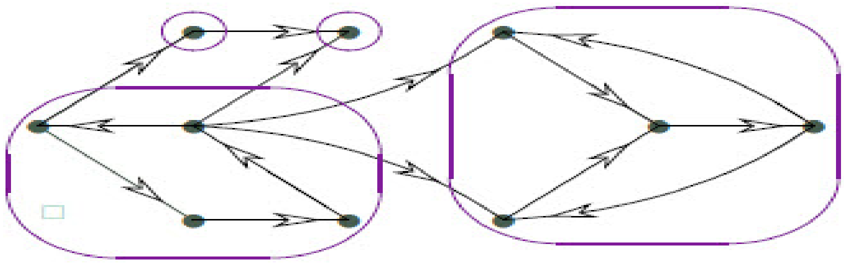
۳- $uEv\ ,\ vEz \Longrightarrow uEz$ (رابطه تعدی) [۴۳]

و رده [۴۴] هم‌ارزی $u \in I$ را با $[u] := \{v; u \sim v\}$ نشان می‌دهند.

---

[۳۴] zero
[۳۵] identity
[۳۶] additive
[۳۷] submultiplicative
[۳۸] involution
[۳۹] idempotent
[۴۰] equivalence
[۴۱] reflexive
[۴۲] symmetric
[۴۳] transitive
[۴۴] class

تعریف ۲.۳.۲. افراز [۴۵] $P = \{C_1, C_2, \ldots, C_k\}$ از مجموعه افراد I ، یک مجموعه غیرتهی است که زیرمجموعه‌های مجزای [۴۶] $C_i \subseteq I$ ، رده‌ها نامیده می‌شوند به طوری که $I = \bigcup_{i=1}^{k} C_i$ است. یعنی هر فرد [۴۷] از افراد مجموعه I ، دقیقاً به یک رده تعلق دارد.
اگر E یک رابطه هم‌ارزی روی I باشد، آنگاه مجموعه همه رده‌های هم‌ارزی ، یک افراز از I است. متقابلاً یک افراز P ، یک رابطه هم‌ارزی را القا می‌کند.



شکل ۷.۲: شکل مربوط به رابطه هم‌ارزی و افراز

به وسیله این تعریف که دو فرد هم‌ارزند اگر و فقط اگر به رده مشابهی در P تعلق داشته باشند. یک رابطه هم‌ارزی و افراز در شکل ۷.۲ ارائه شده است. در شکل ۷.۲ ، مربع‌هایی که هر گروه از افراد را مشخص کرده، بیانگر یک رده در رابطه هم‌ارزی القا شده بر روی افراد است. از دید تابع اختصاص نقش، تمام افراد قرار گرفته داخل یک رده، دارای نقش یکسانی هستند که تابع اختصاص نقش به آن‌ها داده است. مثلاً در شکل ۷.۲ ، افراد داخل هر مربع، دارای نقش یکسانی هستند.

تعریف ۳.۳.۲. [۵۴] یک اختصاص نقش [۴۸] برای I ، یک نگاشت پوشا [۴۹] $r : I \longrightarrow P$ است که P ، مجموعه رده‌های رابطه هم‌ارزی است.

هم‌چنین تابع اختصاص نقش می‌تواند به عنوان تابع رنگ $d : I \longrightarrow C$ نیز در نظر گرفته شود [۱۹].
یک رنگ‌آمیزی [۵۰] d از یک شبکه جهت‌دار، رنگ‌هایی را به افراد I اختصاص می‌دهد و برای $v \in I$ ، $r(v)$ رنگ v نامیده می‌شود. اصطلاحات نقش و مکان [۵۱] به صورت هم معنی به کار برده می‌شوند. اما این نکته حائز اهمیت است که لازم نیست افراد مجاور، رنگ‌های متفاوتی داشته باشند ([۱۹] صفحه ۳۱. پاورقی ۱).

قضیه ۴.۳.۲. [۷] اگر A مجموعه‌ای باشد، آنگاه :

a) هر رابطه هم‌ارزی روی A ، افرازی از A القا می‌کند.

[۴۵] partition
[۴۶] disjoint subsets
[۴۷] actor
[۴۸] role assignment
[۴۹] surjective mapping
[۵۰] coloration
[۵۱] position

b) هر افراز A ، یک رابطه هم‌ارزی E روی A به وجود می‌آورد.

در اینجا اغلب، بین افراز افراد، روابط هم‌ارزی روی افراد یا اختصاص نقش، جابجایی صورت می‌گیرد چون به طور مربوط در این زمینه، ممکن است یکی از آن‌ها از دیگری شهودی‌تر به نظر برسد و چون هر تابع اختصاص نقش به افراد در یک شبکه، نقشی می‌دهد در واقع مانند رابطه هم‌ارزی عمل می‌کند که افراد را داخل رده‌های مجزا قرار می‌دهد، یعنی، هر رده به وجود آمده در یک رابطه هم‌ارزی، بیانگر یک نوع نقش در تابع اختصاص نقش است.

۴.۲ مجموعه‌ها و روابط فازی

تعریف ۱.۴.۲. [۷۸] مجموعه‌ی فازی [۵۲] : فرض کنید X یک مجموعه‌ی ناتهی باشد. مجموعه‌ی فازی A در X را با $\tilde{A}$ نمایش داده و تابع عضویت $\mu_{\tilde{A}}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) : X \to [0, 1] \tag{۳.۲}$$

که اعضای مجموعه‌ی $\tilde{A}$ به صورت $\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) | x \in X\}$ مشخص می‌شوند.

تعریف ۲.۴.۲. [۷۸] یک رابطه فازی $\tilde{R}$ روی یک مجموعه A ، هر زیرمجموعه فازی از ضرب دکارتی $A \times A$ است.

تعریف ۳.۴.۲. [۱۶] یک رابطه فازی $\tilde{E}$ روی یک مجموعه I ، یک هم‌ارزی فازی است اگر $\forall a, b, c \in I$:

۱. $\mu_E(a, a) = 1$

۲. $\mu_E(a, b) = \mu_E(b, a)$

۳. $\mu_E(a, c) \geqslant \min(\mu_E(a, b), \mu_E(b, c))$

۱.۴.۲ نقش روابط هم‌ارزی در تحلیل شبکه

یکی از اهداف تحلیل شبکه، جستجوی دسته‌هایی از افراد است به طوری که افراد قرار گرفته داخل هر دسته، بیشترین شباهت را نسبت به هم داشته باشند، حال رابطه هم‌ارزی نیز مجموعه افراد یک شبکه را در داخل دسته‌هایی قرار می‌دهد که بیشترین شباهت را نسبت به هم دارند، بنابراین رابطه هم‌ارزی، در پیدا کردن دسته‌های افراد در یک شبکه مؤثر است.

۲.۴.۲ مشبکه

معمولاً مجموعه روابط هم‌ارزی روی یک مجموعه I ، بزرگ در نظر گرفته می‌شود. می‌توان نشان داد که این مجموعه به طور طبیعی، دارای یک ترتیب جزئی [۵۳] و در نهایت یک مشبکه [۵۴] است.

[۵۲] fuzzy set

[۵۳] partially order

[۵۴] lattice

مجموعه جزئی مرتب[۷]: اگر A یک مجموعه و R رابطه‌ای روی A باشد، آنگاه (A,R) را مجموعه جزئی مرتب گوییم اگر رابطه R روی A ، یک رابطه جزئی مرتب (پادمتقارن) باشد.

مشبکه [۷]: مجموعه جزئی مرتب (A,R) را مشبکه گوییم اگر $\forall x,y \in A$:

$$\inf\{x,y\}\,,\,\sup\{x,y\}$$

موجود باشند.

مشبکه کامل[۷]: یک مشبکه (A,R) ، کامل [۵۵] است اگر $\forall S \subseteq A$:

$$\sup S\,,\qquad \inf S$$

موجود باشند.

مشبکه روابط هم‌ارزی [۲۰] : فرض کنید $N=(I,V)$ یک شبکه باشد. یک افراز یا رابطه هم‌ارزی E روی یک مجموعه افراد I ، یک زیر مجموعه از مجموعه توانی $P(I)$ است به طوری که دارای شرایط زیر است:

۱- $\varnothing$ یک عضو از افراز E نیست.

۲- $\forall v \in I$ ، دقیقاً یک کلاس $C \in E$ با $v \in I$ وجود دارد.

اگر E_0 و E_1 ، روابط هم‌ارزی از I باشند، آن‌گاه اگر نوشته شود: $E_0 \leq E_1$ ، این بدین معنی است که:

$$\forall C' \in E_0\ ,\ \exists C \in E_1 | C' \subseteq C.$$

بنابراین مجموعه همه روابط هم‌ارزی $E(I)$ از یک شبکه، یک مجموعه مرتب جزئی تشکیل می‌دهند. یعنی رابطه $\leq$ دارای خاصیت‌های انعکاسی، پادمتقارن و تعدی است. در این صورت $E(I)$ تشکیل یک مشبکه می‌دهد، اگر برای هر دو عضو $E_0, E_1 \in E(I)$ ، $E_0 \vee E_1$ کوچکترین کران بالا [۵۶] و $E_0 \wedge E_1$ بزرگترین کران پایین [۵۷] در $E(I)$ باشد به طوری که $\vee$ و $\wedge$ ، به ترتیب، اعمال الحاق [۵۸] و تلاقی [۵۹] است.

تعریف ۲.۴.۴. [۳۲] ترکیب [۶۰] دو رابطه V و U را با VoU نشان می‌دهند و برای هر u ، جفت آن یعنی v باید شرط زیر را داشته باشد:

$$u(VoU)v \equiv \bigvee_{e\in I}(uVe \bigwedge eUv) \tag{۲.۴}$$

به طوری که $\vee$ و $\wedge$ نشان دهنده اعمال «یا» و «و» هستند.

---

[۵۵] complete lattice
[۵۶] least upper bound
[۵۷] greatest lower bound
[۵۸] join
[۵۹] meet
[۶۰] composition

اگر $E_۱$ و $E_۲$ دو رابطه هم‌ارزی روی مجموعه افراد I باشند، آنگاه تلاقی آن‌ها مانند اشتراک مجموعه‌ها، اینفیمم $E_۱, E_۲$ است. سوپریمم اندکی پیچیده‌تر است. سوپریمم می‌تواند شامل همه زوج افرادی باشد که یا در $E_۱$ و یا در $E_۲$ هم‌ارزند، اما همچنین می‌تواند افرادی باشد که به وسیله زنجیر [۶۱] یا مسیر این زوج افراد مرتبط هستند.

تعریف ۵.۴.۲. [۵۴] بستار تعدی [۶۲] یک رابطه $T \subseteq I \times I$ می‌تواند رابطه $S \subseteq I \times I$ ، $\forall u, v \in I$ باشد به طوری که :

$$uSv \Longleftrightarrow \exists k \in N, \exists w_۱, w_۲, \dots, w_k \in I, |u_۱ = w, v = w_k, \forall i = ۱, \dots, k-۱, w_i T w_{i+۱}$$

بستار تعدی T را با T^∞ نشان می‌دهند و نشان دهنده کوچکترین رابطه تعدی شامل T است. ترکیب k بار T با خودش را با T^k نشان می‌دهند. یک راه مؤثر برای به دست آوردن بستار تعدی این است که تا توان $n-۱$ محاسبه شود به طوری که n نشان دهنده تعداد افراد در مجموعه I است، یعنی :

$$T^\infty = \bigcup_{k=۱}^{n-۱} T^k. \qquad (۵.۲)$$

اگر یک رابطه، به ترتیب، متقارن یا انعکاسی باشد آنگاه بستار تعدی آن رابطه نیز به ترتیب، متقارن یا انعکاسی است و همچنین بستار تعدی از هر رابطه‌ای، تعدی است.

این مطلب بیان می‌کند که اگر $E_۱$ و $E_۲$ دو رابطه هم‌ارزی روی مجموعه I باشند، آنگاه بستار تعدی اجتماع آنها، سوپریمم $E_۱$ و $E_۲$ است.

۵.۲ شبکه نقش

حاصل یک اختصاص نقش را می‌توان با ساختار یک گراف نمایش داد. در این نمایش، نقش‌ها مجاورند اگر رئوس مجاوری وجود داشته باشند که این نقش‌ها را بازی [۶۳] کنند.

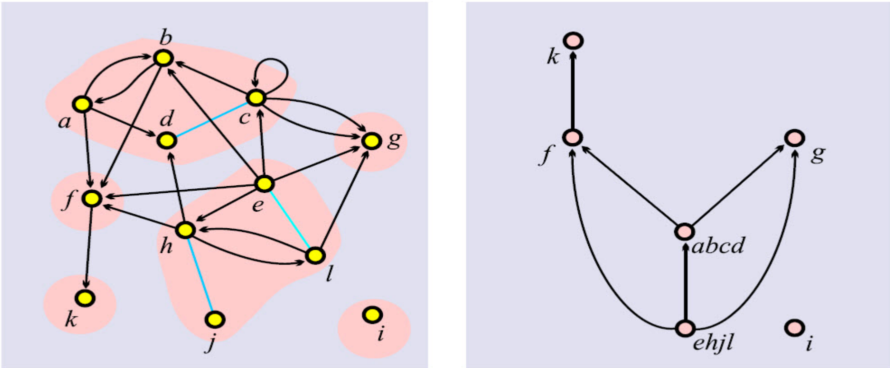
تعریف ۱.۵.۲. [۵۴] اگر $N = (I, V)$ یک شبکه و $r : I \longrightarrow W$ یک اختصاص نقش باشد. گراف نقش $R = (W, F)$ یک شبکه با مجموعه رأس‌ها (نقش‌ها) و مجموعه یال‌های $F \subseteq W \times W$ است که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$F := \{(r(u), r(v)); \exists u, v \in I | (u, v) \in V\}$$

R همچنین خارج قسمت [۶۴] N تحت r نامیده می‌شود.

شبکه نقش R ، نقش‌ها و روابط آن‌ها را مدل می‌کند، این شبکه همچنین می‌تواند به عنوان یک مدل کوچکتر برای شبکه اصلی I در نظر گرفته شود. بنابراین یک اختصاص نقش می‌تواند مانند برخی از شکل‌های کوچک شبکه دیده شود. مانند شبکه شکل ۸.۲ که کوچک شده است. لزوماً برخی اطلاعات

[۶۱] chain
[۶۲] transitive closure
[۶۳] playing
[۶۴] quotient



شکل ۸.۲: گراف رابطه اجتماعی افراد و شبکه نقش

با این چنین کوچک کردن یک شبکه هدر می‌رود. هدف تحلیل نقش، پیدا کردن اختصاص نقش است که شبکه نقش حاصل، ویژگی‌های شبکه ساختاری اصلی را نمایش می‌دهد، یعنی، باز هم اطلاعات بسیاری از بین می‌رود. بنابراین دو انگیزه [۶۵] متفاوت برای پیدا کردن اختصاص نقش خوب وجود دارد. ابتدا باید فهمید افراد چقدر شبیه هستند. دوم، پیچیدگی [۶۶] شبکه را کاهش داد: اگر یک شبکه، خیلی بزرگ یا نامنظم [۶۷] باشد نمی‌توان ساختار آن را روی سطح افراد (رأس‌ها) در نظر گرفت اما ممکن است روی سطح دسته [۶۸] (نقش) در نظر گرفته شوند. انتظار می‌رود که شبکه نقش، ساختار شبکه اساسی و پایدارتری را مشخص کند.

۶.۲ هم‌ارزی ساختار

همان طور که گفته شد، هدف از تحلیل نقش، پیدا کردن افرازهای معنی‌دار [۶۹] از افراد است، به طوری که منظور از «معنی دار»، این است که مفاهیم، قابل مقایسه با ارتباطات افراد شبکه باشند. در این بخش ساده‌ترین، اما همچنین محدودترین شرایط یک مقایسه، تعریف و بررسی می‌شوند. لورین و وایت [۷۰] [۵۶] ، مطرح کردند که افراد، هم‌ارز نقش هستند اگر آن‌ها به افراد یکسانی [۷۱] مرتبط باشند.

تعریف ۱.۶.۲ [۵۴] اگر $N = (I, V)$ ، یک شبکه تک رابطه‌ای و $r : I \longrightarrow W$ ، یک اختصاص نقش باشد و افراد هم‌ارز، همسایه‌های خروجی و ورودی یکسانی داشته باشند، آنگاه r ، ساختاری قوی [۷۲] نامیده می‌شود، یعنی، برای هر $u, v \in I$:

$$r(u) = r(v) \Longrightarrow N^+(u) = N^+(v) \quad \& \quad N^-(u) = N^-(v).$$

با یادآوری قضیه ۴.۳.۲ ، تعریف‌ها برای اختصاص نقش، به روابط هم‌ارزی و افرازهای مرتبط تبدیل می‌شود.

[۶۵] motivation
[۶۶] complexity
[۶۷] irregular
[۶۸] aggregated
[۶۹] meaningful
[۷۰] Lorrain and white
[۷۱] same
[۷۲] strong structural

نکته ۲.۶.۲. [۵۴] با تعریف ۱.۵.۲ ، برای هر اختصاص نقش r ، شرایط این طور برقرار می‌شود که اگر (u, v) یک ارتباط در شبکه باشد، آنگاه $(r(u), r(v))$ ، یک ارتباط در شبکه نقش است. اگر r ، ساختاری قوی باشد، آنگاه عکس آن نیز درست است. این، زوج یک شرط هم‌ارزی برای اختصاص نقش ساختاری قوی است. یعنی یک اختصاص نقش r ، ساختاری قوی است اگر و فقط اگر برای هر $u, v \in I$ ، $(r(u), r(v))$ یک ارتباط در شبکه نقش باشد اگر و فقط اگر u, v یک ارتباط در شبکه اصلی باشد [۵۷] .

تعریف ۳.۶.۲. افراز کامل یا اختصاص نقش کامل، اختصاص نقشی است که نقش همه افراد یکسان است یا رده همه افراد یکسان است.

تعریف ۴.۶.۲. افراز همانی یا اختصاص نقش همانی، اختصاص نقشی است که نقش همه افراد با یکدیگر فرق دارد.

برخی مثال‌ها برای هم‌ارزی ساختاری قوی مطرح می‌شوند. افراز همانی یا نگاشت همانی [۷۳] $id : \underset{v}{I} \underset{\mapsto}{\longrightarrow} \underset{v}{I}$ برای هر شبکه $N = (I, V)$ ، هم‌ارزی ساختاری قوی است. برخی از مثال‌های بدیهی، در شکل ۹.۲ نشان داده شده‌اند، برای شکل ستاره، اگر فرد مرکزی، شماره ۱ و بقیه افراد، ۲،۳،۴،۵،۶ شماره‌گذاری شوند، آنگاه اختصاص نقش، فرد مرکزی را به یک نقش و افراد دیگر را به یک نقش دیگر می‌نگارد، یعنی، مجموعه $\{\{۱\}, \{۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}\}$ را به عنوان اختصاص نقش دارد، بنابراین هم‌ارز ساختاری قوی است. شبکه دوبخشی کامل، دو فرد با شماره‌های ۱و۲ را که به سه فرد دیگر به طور یکسان مرتبط هستند در یک دسته و بقیه را در دسته دیگر قرار می‌دهد، یعنی، مجموعه $\{\{۱, ۲\}, \{۳, ۴, ۵\}\}$ ، به عنوان اختصاص نقش در نظر گرفته می‌شود که ساختاری قوی است. شبکه کامل بدون طوقه، اختصاص نقش ساختاری قوی را به جز همانی ندارد، چون همسایه‌های هر فرد v ، افرادی هستند که v را در لیست همسایه‌های خود دارند، ولی v در همسایگی خودش نیست و بنابراین مجموعه $\{\{۱\}, \{۲\}, \{۳\}, \{۴\}, \{۵\}, \{۶\}\}$ را به عنوان اختصاص نقش دارد.

برخی ویژگی‌های مقدماتی یادآور می‌شود. یک رده از افراد هم‌ارز ساختاری قوی، یک مجموعه خودتوان، (یک زیرگراف بدون یال،) برای شبکه یا یک خوشه با همه طوقه‌ها ایجاد می‌کند.

به ویژه، اگر دو فرد مجاور u, v ، هم‌ارز ساختاری باشند، آنگاه هر دوی $(u, v), (v, u)$ ، ارتباطات شبکه هستند و هر دوی u, v یک طوقه دارند. فاصله غیرمستقیم افراد (غیر تنهای) هم‌ارز ساختاری قوی، حداکثر ۲ است. اگر u, v هم‌ارز ساختاری باشند، u یک همسایه w دارد و w نیز همسایه v است، بنابراین هم‌ارزی ساختاری، فقط می‌تواند افرادی را شناسایی کند که هر فرد نزدیک فرد دیگر است.

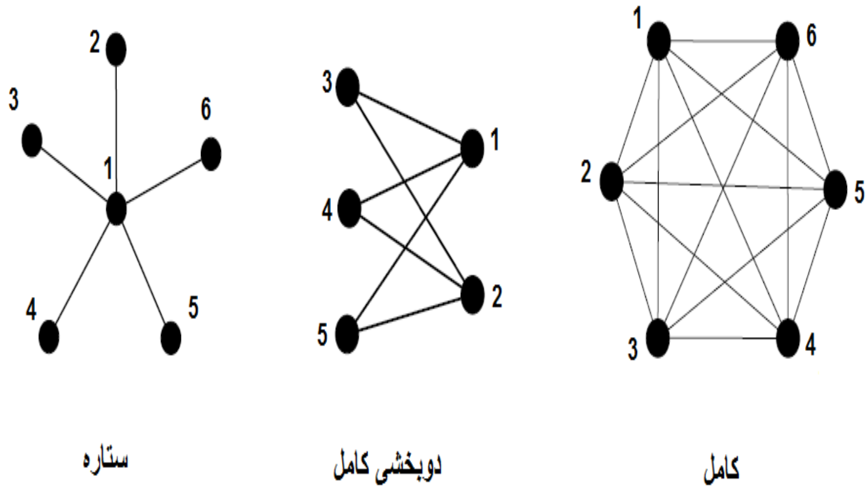
گرچه در بیشتر شبکه‌های نامنظم، هر هم‌ارزی ساختاری غیربدیهی وجود ندارد، مجموعه هم‌ارزی‌های ساختاری می‌توانند بزرگ باشند. برای شبکه کامل با طوقه، هر هم‌ارزی، ساختاری است. در بخش بعدی یک ترتیب جزئی [۷۴] روی این مجموعه بررسی می‌شود.

برای تغییرات هم‌ارزی ساختار، شرطی که افراد مجاور هم‌ارز ساختاری قوی باید طوقه داشته باشند، به وسیله برخی از نویسندگان، باعث کاهش تناقضات شده است.

---

[۷۳] identity

[۷۴] partial order



شکل ۹.۲: مثال‌های مربوط به هم‌ارزی ساختار

۱.۶.۲ مشبکه هم‌ارزی ساختار

می‌توان به آسانی بررسی کرد که اگر E_1 و E_2 ، دو هم‌ارزی ساختار قوی برای یک شبکه باشند، آنگاه اشتراک و بستار تعدی آنها نیز هم‌ارزی ساختاری قوی است.

گزاره ۵.۶.۲. [۵۴] مجموعه همه هم‌ارزی‌های ساختاری قوی از یک شبکه، یک زیرمشبکه از مشبکه همه روابط هم‌ارزی است.

به ویژه، همیشه یک هم‌ارزی ساختاری ماکزیمال(MSE [۷۵]) برای یک شبکه وجود دارد.
ویژگی شروع یک هم‌ارزی ساختاری قوی، تحت تظریف با گزاره زیر بیان می‌شود.

گزاره ۶.۶.۲. [۵۴] اگر $E_2 \leqslant E_1$ و E_2 یک هم‌ارزی ساختار قوی باشد، آنگاه E_1 نیز یک هم‌ارزی ساختاری قوی است.

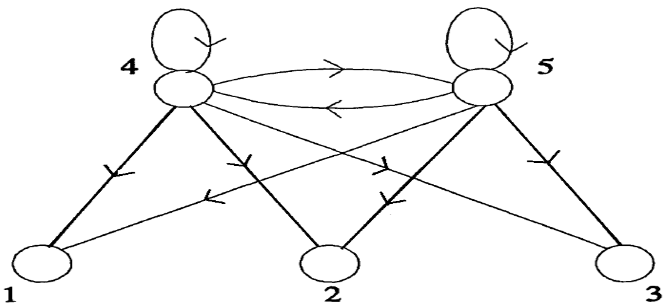
این گزاره خیلی مفید است چون بیان کننده این مطلب است که مجموعه همه هم‌ارزی‌های ساختاری از یک شبکه با MSE توصیف می‌شوند.

۲.۶.۲ هم‌ارزی ساختار ضعیف

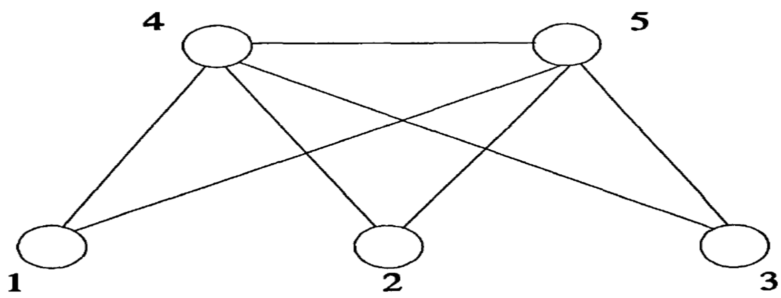
تعریف ۷.۶.۲. [۱۹] یک جایگشت [۷۶] π ، یک تابع روی یک مجموعه است به طوری که یک ترتیب روی مجموعه القا می‌کند.

[۷۵] Maximal Structure Equivalence

[۷۶] permutation



شکل ۱۰.۲: گراف هم‌ارز ساختاری قوی



شکل ۱۱.۲: گراف هم‌ارز ساختاری ضعیف

تعریف ۸.۶.۲. [۱۹] فرض کنید $N = (I, V)$ ، یک شبکه جهت‌دار باشد. یک هم‌ریختی [۷۷] از N ، یک جایگشت π از I است به طوری که $(u, v) \in V$ اگر فقط اگر $(\pi(u), \pi(v)) \in V$ باشد، یعنی، یک هم‌ریختی از یک شبکه جهت‌دار یا بدون جهت N ، یک جایگشت از افراد است که مجاورت را نشان می‌دهد.

یک جایگشت π از مجموعه افراد I می‌تواند به وسیله یک جایگشت از ماتریس $\mathcal{P}$ نمایش داده شود که $\mathcal{P}_{uv} = ۱$ اگر $\pi(u) = v$ ، در غیر این صورت $\mathcal{P}_{uv} = ۰$ است. نتیجه زیر معتبر است.

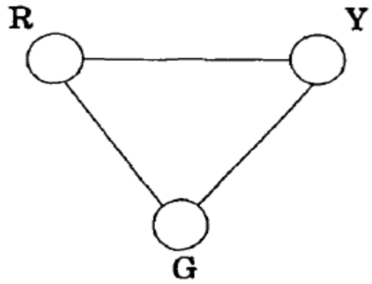
قضیه ۹.۶.۲. [۱۹] اگر A ، یک ماتریس مجاورت برای شبکه جهت‌دار و $\mathcal{P}$ یک ماتریس جایگشت باشد، آنگاه $\mathcal{P}$ ، یک هم‌ریختی است اگر و فقط اگر $A o \mathcal{P} = \mathcal{P} o A$ باشد.

تعریف ۱۰.۶.۲. [۱۹] یک هم‌ارزی E ، روی مجموعه افراد یک شبکه، ساختاری نامیده می‌شود اگر برای هر دو عضو u, v که uEv است، جابجایی دو عضو u, v با هم نیز یک همریختی از یک شبکه باشد.

وایت و ریتز [۷۸] [۶۷] یک تعریف را با اندکی تفاوت مطرح کردند که با تعریف ۱۰.۶.۲ روی شبکه‌های بدون طوقه سازگاری دارد. یکی از مشکلات مفهومی در استفاده از همسایه‌های یکسان، در شبکه‌های جهت‌دار بدون طوقه اتفاق می‌افتد.

[۷۷] automorphism

[۷۸] reitz



شکل ۱۲.۲: شبکه نقش شکل۱۱.۲

اگر طوقه‌ها از شبکه جهت‌دار در شکل ۱۰.۲ حذف شوند، آن‌گاه افراد ۴,۵ هم‌ارز ساختاری به طور قوی نیستند چون همسایه‌هایشان متفاوت می‌شود. و این مفهوم می‌تواند هم‌ارزی ساختاری ضعیف نامیده شود. دو فرد u, v از یک شبکه جهت‌دار، به طور ضعیف هم‌ارز ساختاری هستند اگر و فقط اگر جایگشت $\pi = (u, v)$ ، یک هم‌ریختی باشد، بنابراین π ، جایگشتی است که برچسب u, v را جابجا می‌کند. هر جفت افرادی که به طور قوی هم‌ارز ساختاری باشند، هم‌ارز ساختاری ضعیف هستند، اما عکس آن درست نیست. در شبکه شکل ۱۱.۲ ، افراد ۴,۵ ، هم‌ارز ساختاری ضعیف هستند، اما هم‌ارز ساختاری قوی نیستند.

اگر شکل ۱۲.۲ ، شبکه نقش از ماکزیمال اختصاص نقش قوی از شکل ۱۱.۲ باشد، این اختصاص نقش به صورت $r(۴) = \mathcal{R}$ $r(۲) = r(۱) = r(۳) = \mathcal{G}, r(۵) = \mathcal{Y},$ است. همه افراد در شکل ۱۲.۲ ، هم‌ارز ساختاری ضعیف هستند. نتیجه زیر، یک ویژگی از هم‌ارزی ساختار است که به جان بوید مربوط می‌شود.

قضیه ۱۱.۶.۲. [۱۹] یک رابطه هم‌ارزی، با ماتریس هم‌ارزی E ، بر روی شبکه جهت‌دار، به وسیله ماتریس مجاورت A ، هم‌ارز ساختاری است اگر و فقط اگر $EoA = A$, $AoE = A$ تحت ضرب بولی ماتریس (ترکیب روابط) باشد.

مثال ۱۲.۶.۲. اگر ماتریس مجاورت شکل ۱۰.۲ را با A و ماتریس هم‌ارزی را با E در نظر بگیریم، آنگاه شرایط قضیه برای این هم‌ارزی برقرار است، یعنی:

$$E = \begin{pmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \end{pmatrix}$$

$$AoE = EoA = A = \begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \end{pmatrix}$$

و این هم‌ارزی، هم‌ارزی ساختار است.

۷.۲ شکل بکارگیری هم‌ارزی ساختار، در تحلیل شبکه

هم‌ارزی ساختار، خیلی ایده‌آل است زیرا این رابطه، دسته‌هایی از افراد را در شبکه اجتماعی پیدا می‌کند که افراد قرارگرفته در یک دسته، به یکدیگر شبیه هستند، یعنی، اگر هر فرد در یک دسته، ارتباطی با یک دسته دیگر داشته باشد، آنگاه هر فرد دیگر از همین دسته نیز باید دقیقاً به همان فرد دسته دیگر مرتبط باشد.

تعریف ۱.۷.۲. [۱۵] اگر $\tilde{A}$ ماتریس مجاورت فازی شبکه اجتماعی باشد، آنگاه رابطه هم‌ارزی فازی $\tilde{E}$ ، یک هم‌ارزی فازی ساختار نامیده می‌شود اگر و فقط اگر :

$$\tilde{E}o\tilde{A} = \tilde{A}\ ,\ \ \tilde{A}o\tilde{E} = \tilde{A}$$

تحت اعمال ترکیب روابط فازی باشد و توصیف این روابط در فصل ۶ ارائه می‌گردد.

۱.۷.۲ محاسبه هم‌ارزی ساختار

ریاضیات تحلیل شبکه زمانی تکمیل می‌شود که از برنامه‌های کامپیوتری در تحلیل مجموعه داده‌ها استفاده شود. محاسبه هم‌ارزی ساختار قوی ماکزیمال، برای شبکه $N = (I, V)$ ، نسبتاً راحت است. هر فرد $v \in I$ را به ۴ کلاس (که برخی ممکن است تهی باشند) افراز می‌کند: افرادی که در $N^{+}(v)$ ، $N^{-}(v)$ ، هر دو یا در هیچ کدام باشند. ایده اصلی الگوریتم MSE زیر، با محاسبه اشتراک همه این افرازها به وسیله حداکثر یک مرتبه دیدن یک ارتباط است. این الگوریتم با الگوریتم پیج و تارجان ([۶۳]،۳پاراگراف) که برای محاسبه درونی منظم [۷۹] است مطابقت دارد و محاسبه MSE را آسانتر می‌کند. درستی الگوریتم MSE از این حقیقت می‌آید که به طور دقیق، جفت افراد را با همسایه‌های غیریکسان تقسیم می‌کند. لازمه یک پیاده‌سازی مؤثر الگوریتم، برخی از ساختار داده‌ها است به طوری که در جزئیات مطرح خواهد شد.

[۷۹] regular interior

۱. یک شبکه $N = (I, V)$ ، لیست ارتباطات (ورودی - خروجی) از یک فرد I را به طور هم‌زمان، به اندازه این لیست وارد می‌کند.

۲. بررسی همه اعضای این لیست به طور احتمالی، در زمان خطی انجام می‌شود.

۳. یک یال، به منابع و مقصودهای آن، در مدت زمان ثابت وارد می‌شود.

۴. یک افراز، رده‌های خود را در مدت زمان ثابت، حفظ یا حذف می‌کند.

۵. یک رده، افراد را در مدت زمان ثابت حفظ یا حذف می‌کند.

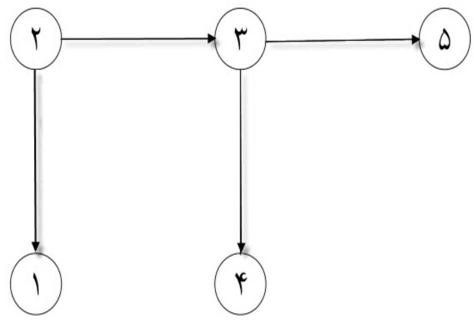
۶. یک فرد، رده‌های خودش را در زمان ثابت وارد می‌کند.

، اگر یک افراز، به وسیله یک لیست ارتباطات دوبله از رده‌های آن و یک رده آن به وسیله یک لیست مرتبط دوبله از افراد آن نمایش داده شود، شرایط روی افرازها و رده‌ها به دست می‌آیند.
اولین قدم تظریف، (حلقه بیرونی) برای یک فرد v به صورت زیر انجام می‌شود:

۱ ارتباطات خروجی v را بررسی کنید. برای هر ارتباط (v, u) ، کلاس C از u را تعیین کنید و یک رده مرتبط C' را درست کنید اگر یکی از آن‌ها وجود نداشته باشد. u را از C به C' انتقال دهید.

۲ در طول زمان بررسی، یک لیست از این رده‌های C را که شکافته شده است درست کنید. برای هر رده C ، پایه C' ، اگر مرتبط با C نیست و C تهی شد، C را حذف کنید.

۳ ارتباطات ورودی I را بررسی کنید و مراحل مشابه را مانند بالا انجام دهید.



شکل ۱۳.۲: شبکه پنج رأسی

مدت زمان اجرای کلی الگویتم، از مرتبه $\mathcal{O}(|V|+|E|)$ است.

الگوریتم MSE: محاسبه هم‌ارزی ساختاری ماکزیمال

MSE یک شبکه

ورودی :یک شبکه $N=(I,V)$

شروع

حفظ یک افراز $P=\{C_1,C_2,\ldots,C_k\}$ از V، به طوری که افراز $P=\{V\}$ در ابتدا کامل است

در پایان، P، MSE شبکه N می‌شود

برای $\forall v\in V$ انجام بده

برای هرکلاس C که $u\in N^+(v)$ به آن متعلق باشد انجام بده

یک‌کلاس C' جدید از P بساز

همه‌افراد در $C \cap N^+(u)$ را از C به C' انتقال بده

اگر C تهی شد آنگاه

C را از P حذف کن.

برای هرکلاس C که $u\in N^-(v)$ به آن متعلق باشد انجام بده

یک‌کلاس C' جدید از P بساز

همه‌افراد در $C \cap N^-(u)$ را از C به C' انتقال بده

اگر C تهی شد آنگاه

C را از P حذف کن

پایان.

مثال ۲.۷.۲. شبکه شکل ۱۳.۲ را در نظر بگیرید: افراز اولیه، کلاس $C_0=\{1,2,3,4,5\}$ است. در مرحله اول، رأس ۱ را در نظر می‌گیریم که افراز بعدی حاصل از این مرحله، شامل دو کلاس به صورت

زیر است:

$$C_۰ = \{۱, ۳, ۴, ۵\}, C_۱ = \{۲\}$$

در مرحله بعد نوبت به رأس ۲ می‌رسد که در این مرحله سه کلاس به صورت زیر به دست می‌آید:

$$C_۰ = \{۴, ۵\}, C_۱ = \{۲\}, C_۲ = \{۱, ۳\}$$

برای رأس ۳، اتفاقی رخ نمی‌دهد. نوبت به رأس ۴ می‌رسد و کلاس‌های به دست آمده از این مرحله به صورت زیر هستند:

$$C_۰ = \{۴, ۵\}, C_۱ = \{۲\}, C_۲ = \{۱\}, C_۴ = \{۳\}$$

برای رأس ۵ نیز مانند رأس ۳، اتفاقی رخ نمی‌دهد، بنابراین هم‌ارزی ساختاری ماکزیمال برای افراز اولیه، که افراز کامل بوده است به صورت زیر به دست می‌آید:

$$C_۰ = \{۴, ۵\}, C_۱ = \{۲\}, C_۲ = \{۱, ۳\}, C_۴ = \{۳\}$$

فصل ۳

هم‌ارزی منظم

۱.۳ چکیده

در این فصل، ابتدا هم‌ارزی جدیدی به نام هم‌ارزی منظم [۱] مطرح می‌شود که کاستی‌های هم‌ارزی ساختار را برطرف می‌کند، سپس برخی قضایا در مورد این هم‌ارزی و ارتباط این هم‌ارزی با هم‌ارزی‌های ساختار مطرح می‌شود و در ادامه، برخی ویژگی‌های این هم‌ارزی در برخی شبکه‌های خاص و همچنین چندین ویژگی برای شناسایی این هم‌ارزی مطرح می‌شود. نظریه هم‌ارزی‌های منظم، بعد از مقاله‌های ابتدایی سایلر [۷۱] و وایت و ریتز [۶۷] ، گسترش قابل توجهی داشته است. این توسعه و گسترش در چندین میدان مختلف صورت گرفته است. یکی از محدوده‌های کلیدی پیشرفت، در بخش ویژگی‌های دیگر کلاس کلی هم‌ارزی منظم است. این پیشرفت به فهم بیشتر مفهوم کمک کرده است و گراف‌های جهت‌دار را به شبکه‌ها تعمیم داده است.

۲.۳ معرفی هم‌ارزی اجتماعی

یک مسأله کلاسیک که در مطالعه اجتماعی مورد بررسی قرار می‌گیرد، توصیف اشتراک‌های افراد است که به عنوان یک تابع از وضعیت یا دسته اجتماعی آن‌ها است. به عنوان مثال، یک بیمارستان، دسته‌هایی از افراد مانند دکتر، پرستار، بیمار، پرسنل، و همین‌طور الی آخر را دارد. به طور مشابه، بین افراد، تعدادی از روابط احتمالی مانند دستور گرفتن، پول دادن، اماله کردن و همین طور الی آخر وجود دارد. چه نوع وضعیت‌های کلی درباره تصور رفتارها بین این دسته‌ها می‌توان فرض کرد؟
وضعیت عکس روابط را به وضوح می‌توان دید: پرستار نمی‌تواند به پزشک دستور بدهد، یعنی، پرستاری که بتواند به هر دکتری دستور بدهد وجود ندارد و این باعث ایجاد بلوک صفر در یک ماتریس اجتماعی دستور دادن می‌شود. البته، ممکن است استثناهایی هم، مانند تشخیص اشتباه یا یک وضعیت اضطراری وجود داشته باشند، اما در حالت کلی، این ایده برای همه حالت‌های منطقی و آماری به اندازه کافی

[۱] regular equivalence

روشن است. بلوک ۱ چطور تعریف می‌شود؟ به عنوان مثال، حالت کلی این که یک دکتر به یک پرستار دستور می‌دهد یعنی چی؟ یقیناً همه دکترها، به ویژه، در یک بیمارستان بزرگ به همه پرستاران دستور نمی‌دهند. یعنی بلوک ۱ که شامل همه ۱ ها باشد بعید به نظر می‌رسد. راه حل مشهور، « هم‌ارزی منظم» است که پاتیسن ([۶۵]و[۶۴]) و وایت و ریتز ([۶۷]) معرفی کردند و بدین صورت است که بلوک ۱، بایستی حداقل یک ۱ را در هر سطر و هر ستون داشته باشد. برای مثال بیمارستان، این بدین معنی است که هر دکتر، حداقل به یک پرستار دستور بدهد و هر پرستار، حداقل یک دستور را از یک دکتر دریافت کرده باشد. هم‌ارزی منظم به ایده هم‌ارزی ساختار سایلر [۷۱] برمی‌گردد، کسی که مطرح کرد افراد، نقش‌های مشابهی بازی می‌کنند اگر آنها به نقش افراد هم‌ارز، مرتبط باشند که این تعریف برای شبکه‌های بدون جهت بود. هم‌ارزی منظم به صورت آشکار ابتدا به وسیله وایت و ریتز ([۶۷]) برای شبکه‌های جهت‌دار تعریف شد. بورگاتی و اورت ([۱۹]) ، یک تعریف هم‌ارزی را برحسب رنگ‌آمیزی (که در اینجا اختصاص نقش نام دارد)، ارائه کردند.

۳.۳ هم‌ارزی منظم

قضیه ۱.۳.۳. [۶۷] اگر $N = (I, V)$ یک شبکه جهت‌دار و E ، یک رابطه هم‌ارزی روی افراد I و هم‌چنین رابطه هم‌ارزی E طوری باشد که برای هر $u, v, w \in I, uEv$ ، آنگاه :

$$(u, w) \in V \implies \exists x \in I|(v, x) \in V, xEw$$
$$(w, u) \in V \implies \exists x \in I|(x, v) \in V, xEw$$

و همین‌طور E ، یک اختصاص نقش(رنگ‌آمیزی) منظم را در N القا می‌کند. متقابلاً، اگر E یک رابطه هم‌ارزی القایی به وسیله یک اختصاص نقش منظم باشد، آنگاه E ، شرایط بالا را حفظ می‌کند. دو شرط بالا به همسایه‌های ورودی و خروجی فرمول اختصاص نقش متناظر می‌شوند. اگر شبکه جهت‌دار شکل ۱.۳ (b) بررسی شود می‌توان دید که $۳E۴$ است چون :

$$(۲, ۳) \in V \implies, \exists x \in I|(x, ۴) \in V$$

و $۲Ex, x = ۵$ این شرط را حفظ می‌کند (توجه کنید که $x = ۲$ نیز شرط را حفظ می‌کند).

یک اختصاص نقش منظم است اگر افرادی که نقش مشابه دارند، نقش‌های مشابهی را در همسایه‌هایشان داشته باشند، بنابراین تعریف زیر حاصل می‌شود.

تعریف ۲.۳.۳. [۵۴] یک اختصاص نقش $r : I \longrightarrow W$ ، منظم است اگر برای هر $u, v \in I$

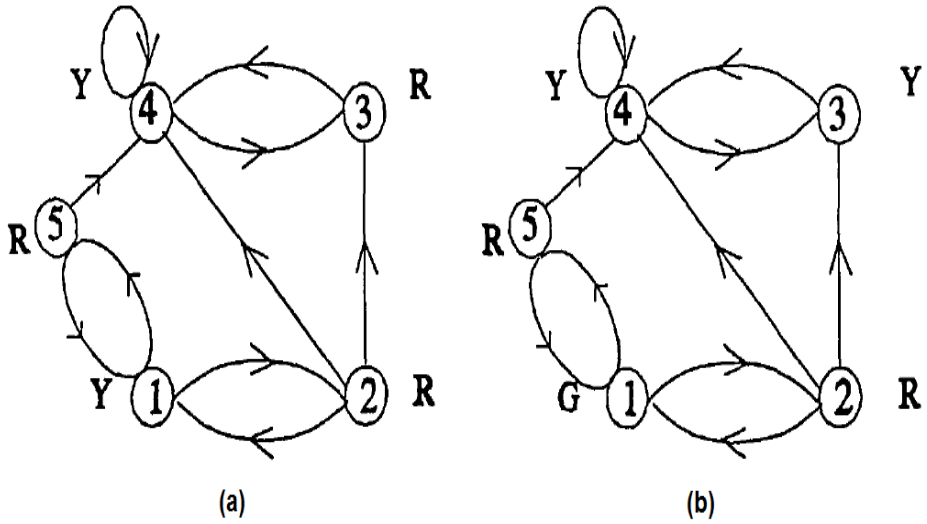
$$r(u) = r(v) \Longrightarrow r(N^{+}(u)) = r(N^{+}(v)) \;\&\; r(N^{-}(u)) = r(N^{-}(v)).$$

در حالت شبکه بدون جهت، شرط به صورت زیر است:

$$r(u) = r(v) \Longrightarrow r(N(u)) = r(N(v))$$

معادلات سمت راست، معادلات مجموعه‌ها هستند. بسیاری تعاریف معادل دیگر وجود دارد ([۶۷]و[۳۲]) . همچنین فرمول در شرایط اختصاص نقش(رنگ‌آمیزی) منظم جهت‌دار، به وسیله

اورت و بورگاتی ([۲۲]) مطرح شد. شکل ۱.۳ ، دو اختصاص نقش از یک شبکه جهت‌دار را نشان می‌دهد و نقش (رنگ) هر فرد با حرف بزرگ، مانند $\mathcal{Y},\mathcal{R}$ نشان داده شده است. اگر هر دو اختصاص نقش، بررسی شوند می‌توان دید که اختصاص نقش (a) منظم نیست، ولی اختصاص نقش (b) منظم است.



شکل ۱.۳: دو اختصاص نقش از یک شبکه

در اختصاص نقش (a) ، $r(۲) = r(۳) = \{\mathcal{R}\}$ است، اما:

$$N^-(۳) = \{۲,۴\}\,,\ N^-(۲) = \{۱\} \Longrightarrow r(N^-(۲)) = \{\mathcal{Y}\}, r(N^-(۳)) = \{\mathcal{R},\mathcal{Y}\}$$

و این شرط فرمول در تعریف ۲.۳.۳ را نقض می‌کند چون دو فرد رنگی قرمز، همسایه‌های ورودی آن‌ها طیف نقش (رنگی) مختلفی را دارند. در مقابل، (b) ، فقط دو زوج افراد نقش مشابه دارد. اگر افراد ۳و۴ بررسی شوند، نتایج بررسی آن‌ها به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
N^-(۳) &= \{۲,۴\} \quad , \quad & r(N^-(۳)) &= \{\mathcal{R},\mathcal{Y}\}\\
N^+(۳) &= \{۴\} \quad , \quad & r(N^+(۳)) &= \{\mathcal{Y}\}\\
N^-(۴) &= \{۲,۳,۴,۵\} \quad , \quad & r(N^-(۴)) &= \{\mathcal{R},\mathcal{Y}\}\\
N^+(۴) &= \{۳,۴\} \quad , \quad & r(N^+(۴)) &= \{\mathcal{Y}\}
\end{aligned}$$

، بنابراین تعریف اختصاص نقش (رنگ‌آمیزی منظم) حفظ می‌شود. باید توجه داشت که استفاده کردن از مجموعه‌ها بدین معنی نیست که تعداد نقش‌های برابری در ارتباطات وجود دارد، بلکه برای نشان دادن حداقل وجود یک نقش است. مثلاً $N^-(۴)$ ، شامل ۴ عضو است که $N^-(۳)$ شامل ۲ عضو است. آنها به هر حال طیف نقش مشابهی دارند. برطبق قضیه، اختصاص نقش‌های داده شده با دسته‌بندی‌های $\{\{۱,۳\},\{۲\},\{۴,۵\}\}$ و $\{\{۱,۲,۳\},\{۴,۵\}\}$ هر دو منظم هستند. اختصاص نقشی که به رده‌های

همارزی از همارزی ساختاری قوی متناظر شود، ماکزیمال همارزی ساختاری قوی نامیده می‌شود. در شکل ۱۰.۲ ، این اختصاص نقش با دسته‌بندی $\{\{۱,۲,۳\},\{۴,۵\}\}$ نشان داده شده است.

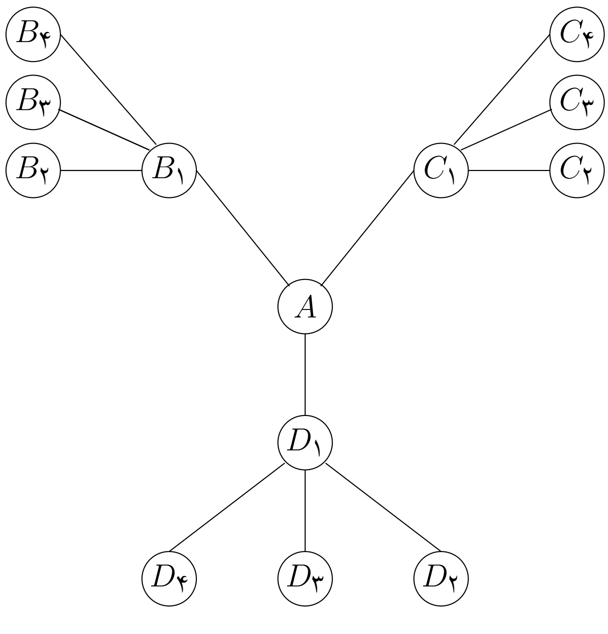
قضیه ۳.۳.۳. [۱۹] برای هر اختصاص نقش در شبکه جهت‌دار N ، افراد نقش مشابه که هم‌ارز ساختاری قوی باشند، آنگاه آن اختصاص نقش منظم است.

قضیه ۴.۳.۳. [۱۹] برای هر اختصاص نقش در شبکه جهت‌دار N ، افراد نقش مشابه که هم‌ارز ساختاری ضعیف باشند، آنگاه آن اختصاص نقش منظم است.

قضیه ۵.۳.۳. [۱۹] کلاس همه اختصاص نقش‌های ساختاری قوی(ضعیف)، تشکیل یک زیر مشبکه از اختصاص نقش منظم می‌دهد.

تفاوت همارزی منظم و ساختار، با ذکر یک مثال بهتر فهمیده می‌شود.

مثال ۶.۳.۳. [۵] اگر شکل ۲.۳ ، نمایش گرافیکی یک شبکه باشد به وسیله همارزی ساختار، افراد B_2, B_3, B_4، C_2, C_3, C_4 و D_2, D_3, D_4 در سه نقش، افراد B_1، C_1 و D_1 در سه نقش دیگر و آخرین نقش مجزای دیگر متعلق به A است، بنابراین این شبکه از دید همارزی ساختار، مجموعاً دارای هفت نقش است، اما اگر این شبکه به وسیله همارزی منظم بررسی شود، تعداد نقش‌ها می‌تواند کمتر شود، یعنی، افراد B_2, B_3, B_4، C_2, C_3, C_4 و D_2, D_3, D_4 دارای یک نقش، افراد B_1، C_1 و D_1 یک نقش دیگر و آخرین نقش متعلق به فرد A است، بنابراین تعداد نقش‌ها در همارزی منظم می‌تواند به ۳ نقش کاهش پیدا کند که شبکه نقش کوچکتری را نمایش می‌دهد. نمایش رده‌های دو همارزی ساختار و منظم،



شکل ۲.۳: شبکه مربوط به مثال۶.۳.۳

به ترتیب، به صورت زیر هستند:

$$\{\{B_2,B_3,B_4\},\{C_2,C_3,C_4\},\{D_2,D_3,D_4\},\{B_1\},\{C_1\},\{D_1\},\{A\}\}$$

$$\{\{B_2,B_3,B_4,C_2,C_3,C_4,D_2,D_3,D_4\},\{B_1,C_1,D_1\},\{A\}\}$$

۴.۳ هم‌ارزی منظم در برخی شبکه‌های خاص

در این زیربخش، برخی ویژگی‌های اختصاص نقش منظم ارائه می‌شود.
افراز همانی $id : \underset{i}{I} \underset{\mapsto}{\longrightarrow} \underset{i}{I}$ ، برای همه شبکه‌ها منظم است. در حالت کلی‌تر، هر اختصاص نقش ساختاری، منظم است. گزاره بعدی زمانی که که افراز کامل است توصیف می‌شود، به طوری که با اختصاص نقش ثابت $J : I \longrightarrow ۱$ القا می‌شود و منظم است.

اختصاص نقشی که نقش همه افراد یکی است یا همه افراد، نقش متفاوت داشته باشند اختصاص نقش‌های بدیهی نام دارند. برای شروع کار در یک هم‌ارزی منظم، از عضو ماکزیمال مشبکه شروع می‌شود و بسیاری از استفاده کننده‌های هم‌ارزی منظم، این اصطلاح را به سادگی به این عضو نسبت می‌دهند. این اختصاص نقش باید اختصاص نقش منظم ماکزیمال نامیده شود. قضیه بالا بیانگر این مطلب است که برای شبکه‌های بدون جهت و جهت‌دار مشخص، این عضو ماکزیمال، یکی از اختصاص نقش‌های بدیهی است. به طور طبیعی، بیشتر، اختصاص نقش غیربدیهی هستند. به هر حال احتمال دارد که شبکه، اختصاص نقش غیر بدیهی نداشته باشد. قبل از اثبات گزاره ۴.۵.۳ ، رئوس چاهک و منبع را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱.۴.۳. رأسی مانند $v \in I$ در شبکه، یک چاهک نامیده می‌شود اگر دارای شرط زیر باشد:

$$N^+(v) = \varnothing \; N^- \neq \varnothing.$$

تعریف ۲.۴.۳. رأسی مانند $v \in I$ در شبکه، یک منبع نامیده می‌شود اگر دارای شرط زیر باشد:

$$N^-(v) = \varnothing \; N^+ \neq \varnothing.$$

گزاره ۳.۴.۳. [۵۴] افراز کامل یا اختصاص نقش کامل از یک شبکه $N = (I, V)$ ، منظم است اگر و فقط اگر $V = \varnothing$ یا N ، چاهک و منبع نداشته باشد.

برهان. اگر $V = \varnothing$ ، آنگاه سمت راست تعریف ۲.۳.۳ به آسانی $\varnothing = \varnothing$ می‌شود، بنابراین هر اختصاص نقش، منظم است. اگر N ، منبع و چاهک نداشته باشد:

$$\forall v \in I, J(N^+(v)) = J(N^-(v)) = \{۱\}$$

و معادله در تعریف ۲.۳.۳ ، $\forall u, v \in I$ برقرار است.
برعکس: اگر $V \neq \varnothing$ و $v \in I$ یک چاهک باشد. چون $V \neq \varnothing$ ، بنابراین

$$\exists u \in V | N^+(u) \neq \varnothing$$

، آنگاه:

$$J(N^+(v)) = \varnothing \neq \{۱\} = J(N^+(u)),$$

، اما $J(u) = J(v) = ۱$ ، بنابراین J منظم نیست. حالت منبع نیز به طور مشابه اثبات می‌شود. □

لم بعدی، برای شبکه همبند بدون جهت اثبات شده است، اما این لم برای شبکه همبند قوی جهت‌دار، اثبات می‌شود[۲۲].

لم ۴.۴.۳. [۵۴] اگر N ، شبکه همبند قوی باشد، آن‌گاه در هر اختصاص نقش غیربدیهی r از N ، هیچ یک از دو شرط $r(N^+(v)) = \{r(v)\}$ و $r(N^-(v)) = \{r(v)\}$ برقرار نیست.

برهان. به برهان خلف، اگر یک رأس $v \in I$ ، وجود داشته باشد که $r(N^+(v)) = \{r(v)\}$ ، آن‌گاه این شرط برای هر رأس در $N^+(v)$ نیز درست است. بنابراین هر فرد در همسایه‌های خروجی متوالی می‌تواند نقش مشابه داشته باشد و چون I ، به طور قوی همبند است، بنابراین $r(V) = \{r(v)\}$ و با این حقیقت که اختصاص نقش غیر بدیهی است، تناقض دارد. حالت $r(N^-(v)) = \{r(v)\}$ برای یک فرد در I ، به طور یکسان به کار برده می‌شود. □

تعریف ۵.۴.۳. [۵۴]،[۱۹] یک شبکه با حداقل ۳ فرد که فقط اختصاص نقش‌های بدیهی را به عنوان اختصاص نقش منظم داشته باشد، نقش ابتدایی [۲] نامیده می‌شود.

تعریف ۶.۴.۳. یک شبکه جهت‌دار که تنها همریختی آن، جایگشت همانی است، شبکه جهت‌دار همانی نامیده می‌شود.

قضیه ۷.۴.۳. [۲۲] هر شبکه نقش ابتدایی، یک شبکه همانی است.

نکته ۸.۴.۳. [۵۴]،[۱۹] برای هر مسیر جهت‌دار، تنها اختصاص نقش منظم، همانی است. شبکه‌های جهت‌دار که اختصاص نقش همانی و کامل را به عنوان اختصاص نقش منظم دارند مانند دورهای جهت‌دار، طول ابتدایی هستند چون هر اختصاص نقش منظم غیر بدیهی، یک شمارنده غیر بدیهی از طول دور است.
قضیه ۷.۴.۳ برای شبکه‌های جهت‌دار مطرح نمی‌شود. هر دور جهت‌دار فرد از طول n ، نقش ابتدایی است، اما برای این دور، جایگشتی که در آن هر رأس، فقط به همسایه‌های خروجی آن نگاشته شود یک همریختی است (در حقیقت، n همریختی برای این چنین شبکه جهت‌داری وجود دارد).

قضیه ۹.۴.۳. [۲۲] شبکه در شکل ۳.۳ نقش ابتدایی است.

برهان. این مطلب با بررسی این که همه اختصاص نقش های احتمالی منظم، بدیهی هستند ثابت می‌شود. □

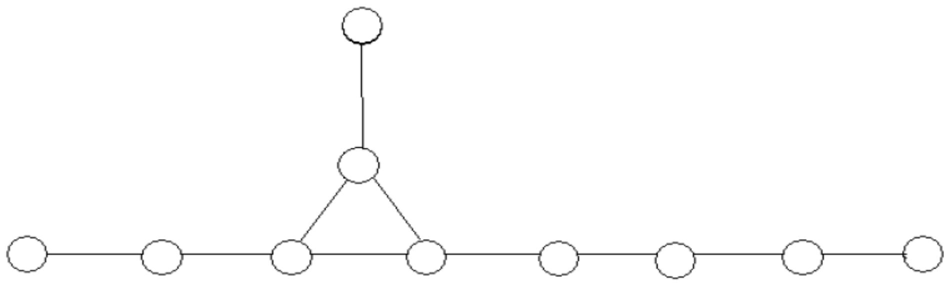
تعریف ۱۰.۴.۳. یک شبکه که هر اختصاص نقش آن منظم است، نقش معین دلخواه [۳] نامیده می‌شود.

لم بعدی، برای شبکه‌های همبند بدون جهت است.

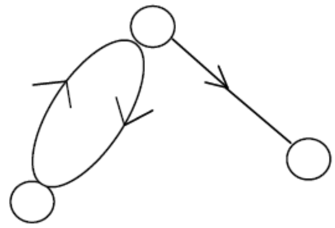
لم ۱۱.۴.۳. [۵۴] یک شبکه همبند به طور قوی، نقش معین دلخواه است اگر و فقط اگر یک شبکه کامل باشد.

[۲] role primitive

[۳] arbitrarily role - assignable



شکل ۳.۳: شبکه نقش ابتدایی بدون جهت



شکل ۴.۳: شبکه نقش ابتدایی جهت‌دار

برهان. اگر $N = (I, V)$ ، یک شبکه باشد که شرط لم برایش برقرار و r ، هر اختصاص نقش دلخواه باشد. بنابراین باید نشان داد که برای هر $u, v \in I$

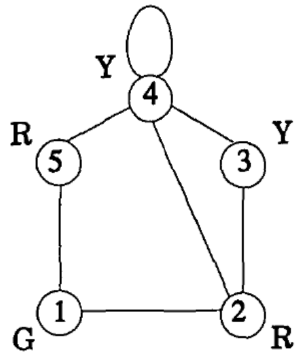
$$r(u) = r(v) \Longrightarrow r(N^{+}(u)) = r(N^{+}(v)) \& r(N^{-}(u)) = r(N^{-}(v)).$$

اگر $u = v$ ، بدیهی است. در غیراین صورت u و v با ارتباطات دوجهته، همبند هستند، یعنی مجموعه نقش‌های همسایه‌های ورودی و خروجی آن‌ها شامل $r(u)$ است. این مجموعه نقش‌ها همچنین شامل همه نقش‌های دیگر، مانند u و v ، به همه افراد دیگر همبند هستند، بنابراین مجموعه نقش همسایه‌های ورودی و خروجی هر دو فرد، شامل همه نقش‌ها است، پس همه آنها هم‌ارز هستند.
متقابلاً، اگر $N = (I, V)$ ، یک شبکه با دو فرد u و v باشد به طوری که $u \neq v$ و ارتباط (u, v) وجود ندارد. اگر $I \setminus \{v\}$ یک نقش و I نقش دیگری به خود بگیرد، این اختصاص نقش، با $r(u) = r(N^{+}(u))$ غیر بدیهی است (توجه کنید که $n > ۲$ ، چون N همبند است)، بنابراین با لم ۴.۴.۳ ، این اختصاص نقش نمی‌تواند منظم باشد. □

تعریف ۱۲.۴.۳. هر شبکه جهت‌دار با حذف همه جهت‌های ارتباطات آن می‌تواند به یک شبکه تبدیل شود. شبکه‌ای که با این روش به دست می‌آید شبکه زمینه نامیده می‌شود.

به طور طبیعی با تمرین جابجا کردن ارتباطات دریافتی با فقط یک ارتباط، شبکه چندگانه از شبکه جهت‌دار ایجاد نمی‌شود(به هر حال، برای رسیدن به یک اختصاص نقش منظم، مهم نیست که این تبدیل تطابق داشته باشد یا نداشته باشد).

قضیه ۱۳.۴.۳. [۲۹] هر اختصاص نقش منظم از شبکه جهت‌دار، یک اختصاص نقش منظم از شبکه زمینه است. شبکه در شکل ۵.۳ ، این نتایج را برای شبکه جهت‌دار در شکل ۱.۳ (a) نشان می‌دهد.



شکل ۵.۳: اختصاص نقش منظم از شبکه زمینه

۵.۳ مشبکه روابط هم‌ارزی منظم

مجموعه اختصاص نقش منظم بر روی افراد یک شبکه می‌تواند بزرگ باشد. شبکه‌های جهت‌دار و بدون جهت که فرد تنها ندارند در اینجا مورد نظر هستند. این یکی از محدودیت‌های اندک در نظریه اختصاص نقش منظم است اما باعث به دست آمدن یک سری نتایج می‌شود. واضح است که برای هر شبکه جهت‌دار و بدون جهت، تعدادی اختصاص نقش احتمالی وجود دارد. چون هر اختصاص نقش منظم، یک افراز را تعریف می‌کند(دو فرد در رده‌های مشابهی قرار می‌گیرند اگر آنها نقش مشابه داشته باشند)، آن‌گاه می‌توان با استفاده از تظریف کردن رابطه روی افراز القایی، مجموعه همه هم‌ارزی‌های منظم را مرتب کرد. در این بخش، اثبات می‌شود که یک مشبکه است.

لم ۱.۵.۳. [۵۴] اگر $(X,\leqslant)$ یک مجموعه مرتب جزئی و $\forall H\subseteq X, \exists \sup(H)$ ، آن‌گاه $(X,\leqslant)$ ، یک مشبکه است.

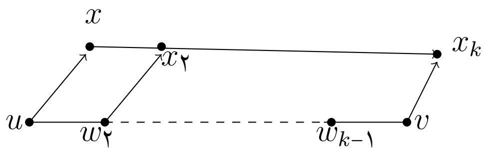
برهان. باید نشان داد که $\forall x,y\in X, \exists \inf(x,y)$. اگر $H:=\{z\in X; z\leqslant x, z\leqslant y\}$ ، آن‌گاه به آسانی می‌توان نتیجه گرفت که $\sup(H)$ ، $\inf\{x,y\}$ است. □

قضیه ۲.۵.۳. [۲۰] مجموعه هم‌ارزی‌های منظم از یک شبکه N ، تشکیل یک مشبکه می‌دهند به طوری که سوپریمم یا الحاق، یک شرط در مشبکه همه هم‌ارزی‌ها است.

برهان. با لم ۱.۵.۳ ، کافی است وجود سوپریمم از زیرمجموعه دلخواه اثبات شود. افراز همانی، کوچکترین عنصر در مجموعه هم‌ارزی‌های منظم است و سوپریمم برای مجموعه تهی است. بنابراین، فقط سوپریمم گردایه‌های غیرتهی از اختصاص نقش های منظم را در نظر می‌گیریم. چون مجموعه همه هم‌ارزی‌های یک شبکه، متناهی هستند، بنابراین کافی است وجود سوپریمم از دو هم‌ارزی منظم نشان داده شود.

پس اگر E_1 و E_2 ، دو هم‌ارزی منظم روی شبکه N و E ، بستار تعدی از اجتماع [۴] E_1 و E_2 باشد، همان

[۴] transitive closure



طورکه اشاره شد E ، سوپریمم $E_۱$ و $E_۲$ در مشبکه همه هم‌ارزی‌ها است، بنابراین یک رابطه هم‌ارزی است و سوپریمم از $E_۱$ و $E_۲$ با دریافت ترتیب جزئی است. (به طوری که در مشبکه همه هم‌ارزی‌ها و هم‌ارزی‌های منظم یکسان است،) بنابراین در مابقی کار باید نشان داد که E ، منظم است. به همین منظور اگر $\forall u, v, x \in I, x \in N^+(u), uEv$ است. چون uEv ، یک دنباله $u, w_۲, \ldots, w_{k-۱}, v \in I$ وجود دارد که $uE_{j_۱}w_۲$ و $j_۱ \in \{۱, ۲\}$ است. چون $E_{j_۱}$ منظم و $x \in N^+(u)$ است یک $x_۲ \in I$ وجود دارد به طوری که $x_۲E_{j_۱}x$ و $x_۲ \in N^+(w_۲)$ است. با تکرار این کار، سرانجام، یک x_k پیدا می‌شود به طوری که $x_k \in N^+(v)$ و xEx_k است و شرط برای همسایه‌های خروجی را نشان می‌دهد. حالت $x \in N^-(u)$ به طور مشابه اثبات می‌شود. □

نتیجه ۳.۵.۳. [۵۴] اگر N ، یک شبکه باشد، آن‌گاه یک هم‌ارزی منظم ماکزیمم و مینیمم برای N وجود دارد.

برهان. ماکزیمم، سوپریمم تحت همه هم‌ارزی‌های منظم است. حالت دوم، مینیمم، اینفیمم تحت همه هم‌ارزی‌ها است یا بطور آسانتر، مینیمم، افراز همانی است که همیشه منظم و مینیمال است و هر فرد، نقش متفاوتی دارد در حالی که سوپریمم در مشبکه هم‌ارزی‌های منظم، شرط سوپریمم در مشبکه همه هم‌ارزی‌ها است، ولی برای اینفیمم برقرار نیست. □

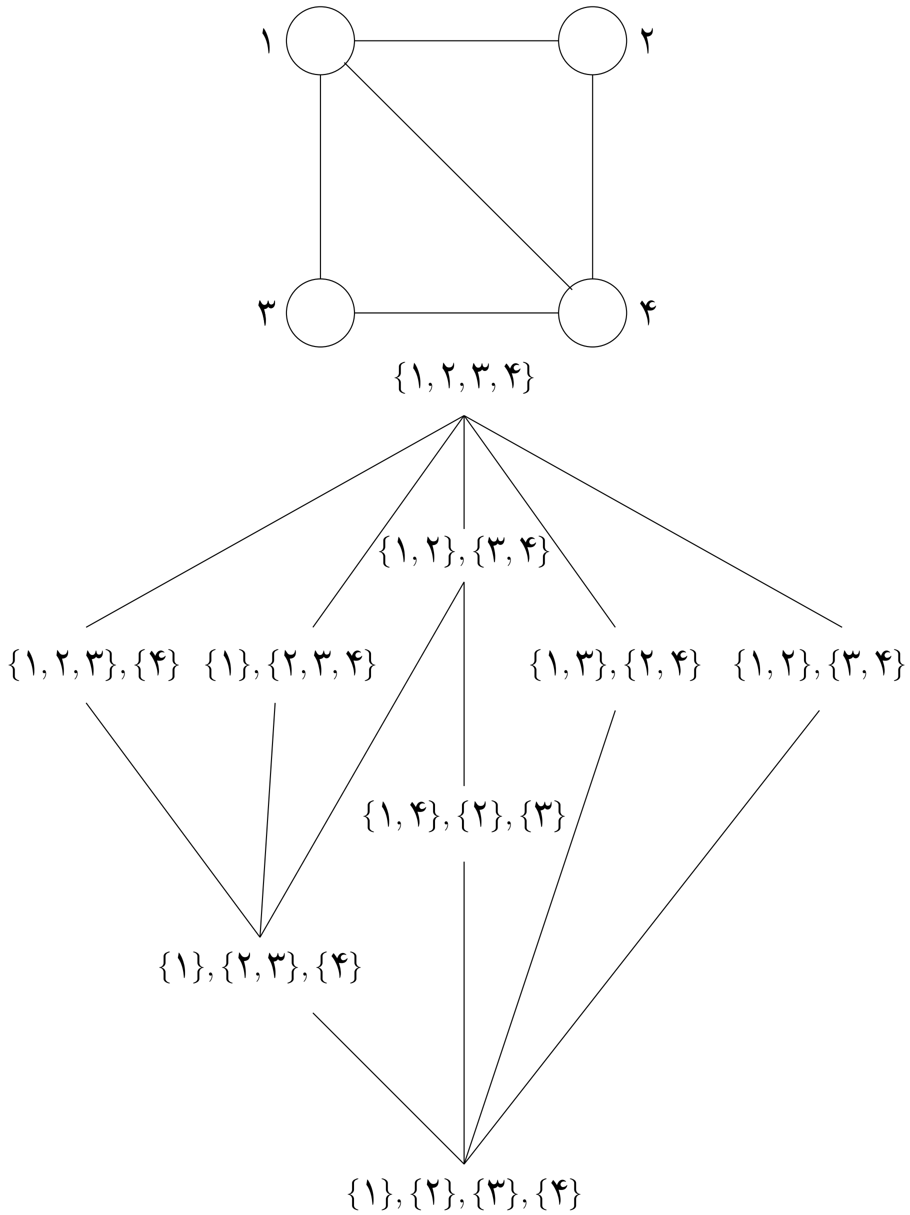
برای شبکه در شکل ۶.۳ ، جایگشت $\pi(۴) = ۱, \pi(۳) = ۲, \pi(۲) = ۳, \pi(۱) = ۴$ یک همریختی است.

گزاره ۴.۵.۳. [۲۰] مشبکه هم‌ارزی‌های منظم، یک زیرمشبکه از مشبکه همه هم‌ارزی‌ها نیست.

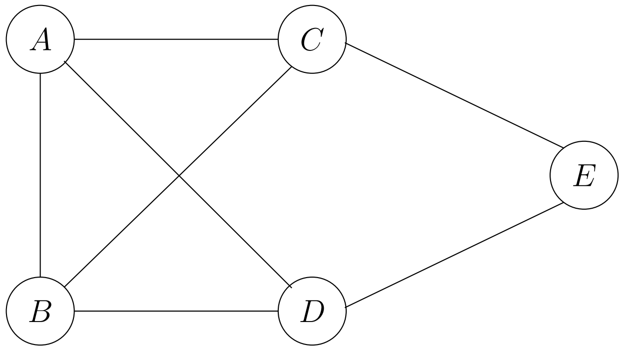
برهان. برای اثبات، کافی است ثابت شود که اینفیمم، یک شرط اینفیمم در مشبکه همه هم‌ارزی‌های منظم (به وسیله اشتراک) نیست. برای این کار می‌توان شبکه‌ای از افراد مانند شکل ۷.۳ و همچنین دو افراز منظم $P_۲ := \{\{A, C\}, \{B, D, E\}\}, P_۱ := \{\{A, C, E\}, \{B, D\}\}$ را برای آن در نظر گرفت. اشتراک $P_۱, P_۲$ ، افراز $P := \{\{A, C\}, \{B, D\}, \{E\}\}$ است که منظم نیست. □

۶.۳ ویژگی‌های هم‌ارزی منظم

اختصاص نقش شبکه، به عنوان پل ارتباطی بین نتایجی که درباره هم‌ارزی منظم هستند، عمل می‌کند. تعاریف متعددی وجود دارد که می‌توانند استفاده شوند. هرکس که بخواهد هم‌ارزی منظم را استفاده بکند (خواه برای توسعه نظریه، ساختن الگوریتم‌ها یا اطلاعات تحلیلی) باید از آگاهی خود از تعریف‌های متعدد، به نفع خود استفاده بکند. این تعریف‌ها باعث انعطاف تفسیرها و کاربردها می‌شوند و می‌توانند



شکل ۶.۳: افرازهای منظم شبکه چهار رأسی



شکل ۷.۳: گراف پنج رأسی مربوط به گزاره ۴.۵.۳

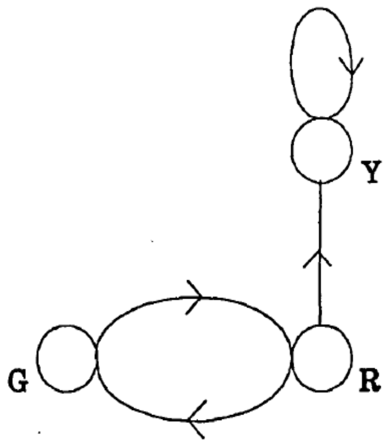
برای راحت‌تر کردن شرایط محدود هم‌ارزی به کار روند به طوری که این شرایط برای توسعه الگوریتم‌های جزئی برای تحلیل داده‌های واقعی به کار می‌روند.
ویژگی ۱: اولین تعریف از یک اختصاص نقش منظم که در حال حاضر استفاده می‌شود به صورت اصطلاح هم‌ارزی روی شبکه جهت‌دار بود که در قضیه ۱.۳.۳ آورده شده است. در این قضیه، ، به سادگی، اختصاص نقش را با رده‌های هم‌ارزی القایی جابجا می‌کند. رده‌های هم‌ارزی، به طور یکسان با شبکه جهت‌دار نقش مشخص می‌شوند. این ویژگی از قضیه ۱.۶.۳ حاصل می‌شود.
ویژگی ۲:

قضیه ۱.۶.۳. [۲۳]،[۲۹]: اگر $N = (I, V)$ ، یک شبکه جهت‌دار با اختصاص نقش r باشد، آنگاه r ، یک اختصاص نقش منظم است اگر و فقط اگر برای هر: $v \in I$

$$r(N^{+}(v)) = N^{+}(r(v))$$
$$r(N^{-}(v)) = N^{-}(r(v)).$$

توجه کنید که طرف راست معادله‌های بالا به همسایه‌های شبکه‌های جهت‌دار نقش r ، مربوط می‌شود.

اهمیت قضیه ۱.۶.۳ ، با مقایسه دو شکل ۱.۳ (b) و شکل ۸.۳ با یکدیگر مشخص می‌شود. مثلاً از شکل ۸.۳ می‌توان دید که $N^{+}(\mathcal{R}) = \{\mathcal{G}, \mathcal{R}\}$ است و دو فرد در شکل ۱.۳ (b) ، که رنگ سبز دارند، (۲,۵) هر دو همسایه‌های خروجی $\{\mathcal{G}, \mathcal{R}\}$ را به عنوان طیف نقش خود دارند.
ویژگی ۳ : این ویژگی از اطلاعات نمایش نظریه گراف و نگاه کردن در فرمول‌های ماتریس به دست می‌آید. این ویژگی در ابتدا برای هم‌ارزی ساختار مطرح شد و بر مبنای مفهوم مدل‌بلوکی بود که به عنوان یک ویژگی مشخص‌تری از هم‌ارزی منظم بود. (بریگر و همکاران [۸] ، وایت و همکاران [۱۸]) : یک بلوک از یک ماتریس، وقتی سطرها و ستون‌ها حذف بشوند یک ماتریس باقی می‌ماند. یک بلوک‌بندی، مجموعه‌ای از بلوک‌های یک ماتریس است که با افراز سطرها و ستون‌ها متناسب است. وقتی ماتریس، یک ماتریس مجاورت باشد باید بدون از دست دادن کلیت مسأله، فرض کرد که سطرها و ستون‌های ماتریس، جایگشت یافته‌اند به طوری که رده‌های هم‌ارزی افراز، رده‌هایی را با هم تشکیل می‌دهند. اگر افراز، یک هم‌ارزی منظم را القا کند، آن افراز منظم نامیده می‌شود.



شکل ۸.۳: شبکه نقش شکل ۱.۳ (b)

قضیه ۲.۶.۳. [۱۹] یک افراز از افراد شبکه جهت‌دار منظم است، اگر و فقط اگر بلوک‌های متناظر بلوک‌بندی ماتریس مجاورت، یا همه صفر یا هر سطر و ستون آن‌ها حداقل یک عدد ۱ داشته باشد.

قضیه ۲.۶.۳ برای ماتریس متناظر به شکل ۱.۳ (b) بیان شده است که ۹ بلوک ایجاد شده دارای این ویژگی هستند که یا همه صفرند یا هر سطر و ستون آنها دارای عدد یک است: فرمول مدل‌بلوکی، به

	1	2	5	3	4
1	0	1	1	0	0
2	1	0	0	1	1
5	1	0	0	0	1
3	0	0	0	0	1
4	0	0	0	1	1

شکل ۹.۳: ماتریس مجاورت منظم شکل ۱.۳ (b)

طور مستقل، به عنوان یک ویژگی از هم‌ارزی منظم به وسیله بورگاتی ([۲۳]) ، باتاجلجی و همکاران ([۹]) مطرح شد.
ویژگی ۴: این ویژگی نیز از ماتریس مجاورت استفاده می‌کند. اگر یک ماتریس هم‌ارزی E تعریف شود، ماتریسی که درآیه سطر i ام و ستون j ام یک است اگر i, j هم‌ارز باشند و در غیراین صورت صفر است.

قضیه ۳.۶.۳. [۳۱] یک رابطه هم‌ارزی با ماتریس هم‌ارزی E ، روی یک شبکه جهت‌دار با ماتریس مجاورت A منظم است اگر و فقط اگر

$$EoA = AoE$$

تحت ضرب بولی ماتریس باشد.

می‌توان این قضیه را برای شبکه جهت‌دار در شکل ۱.۳ (b) شرح داد. اگر رابطه هم‌ارزی القا شده به وسیله اختصاص نقش، به صورت زیر باشد:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AoE = EoA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

تعریف ۴.۶.۳. [۱۵] اگر $\tilde{A}$ ماتریس مجاورت فازی شبکه اجتماعی باشد، آنگاه رابطه هم‌ارزی فازی $\tilde{E}$ ، هم‌ارزی منظم فازی نامیده می‌شود اگر وفقط اگر:

$$\tilde{A}o\tilde{E} = \tilde{E}o\tilde{A}$$

تحت اعمال ترکیب روابط فازی باشد و در فصل ۵ توضیح داده می‌شود.

ویژگی ۵:

قضیه ۵.۶.۳. [۲۹] اگر یک شبکه جهت‌دار با اختصاص نقش منظم r ، بر روی آن وجود داشته باشد، آنگاه بلوک‌بندی القایی از ماتریس وقوع، بلوک‌هایی دارد که همه صفر یا در هر سطر و ستون آن حداقل یک عدد ۱ وجود داشته باشد. متقابلاً هر بلوک‌بندی از ماتریس وقوع از یک شبکه جهت‌دار که هر بلوک آن صفر یا در هر سطر و ستون آن یک ۱ وجود دارد، یک اختصاص نقش منظم از افراد I القا می‌کند. آنچه که گفته شد می‌تواند مطابق اختصاص نقش منظم در شکل ۱۰.۳ باشد. اختصاص نقش منظم، افرازهای $\{۲,۵\}, \{۳,۴\}, \{۱\}$ را به دست می‌دهد. به طوری که افراز نقش (رنگ) یالی به صورت دسته‌های $\{(۱,۲), (۱,۵)\}, \{(۲,۳), (۲,۴), (۴,۵)\}, \{(۴,۴), (۳,۴)\}$ است، بنابراین ماتریس وقوع بلوک‌بندی شده به صورت زیر است:

	(34)	(44)	(23)	(24)	(45)	(15)	(12)
1	0	0	0	0	0	1	1
3	1	0	1	0	0	0	0
4	1	1	0	1	1	0	0
2	0	0	1	1	0	0	1
5	0	0	0	0	1	1	0

شکل ۱۰.۳: ماتریس وقوع منظم شکل ۵.۳

۱.۶.۳ شکل بکارگیری هم‌ارزی منظم، در تحلیل شبکه

هم‌ارزی منظم نیز مانند هم‌ارزی ساختار، دسته‌هایی از افراد را براساس ارتباط‌شان پیدا می‌کند به طوری که برای افراد قرار گرفته در یک دسته، اگر هر فرد از این دسته، به دسته دیگری مرتبط باشد، آنگاه فرد دیگری از همین دسته لازم نیست دقیقاً به همان فردی مرتبط باشد که فرد اول با او در ارتباط بوده و همچنین لازم نیست حتماً تعداد ارتباطی که فرد اول با بقیه افراد دسته‌های دیگر دارد، این فرد دوم نیز دقیقاً همان تعداد ارتباط را داشته باشد و این دسته‌بندی براساس وجود حداقل ارتباط است، بنابراین برای شبکه‌های بسیار بزرگ و پیچیده، بهتر است از هم‌ارزی منظم برای پیدا کردن دسته‌هایی از افراد استفاده کرد که افراد یک دسته به هم شبیه باشند.

۲.۶.۳ شرایط هم‌ارزی منظم در شبکه‌های جهت‌دار

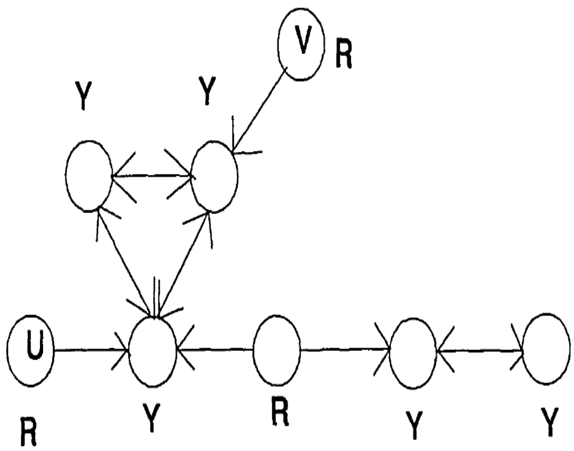
برای شبکه‌های جهت‌دار، طبیعی است که شرط هم‌ارزی منظم برای هر دو یا یکی از همسایه‌های ورودی یا خروجی برقرار شود. یک اختصاص نقش از یک شبکه جهت‌دار، منظم ورودی نامیده می‌شود اگر و فقط اگر: $\forall u, v \in N$

$$r(u) = r(v) \Longrightarrow r(N^-(u)) = r(N^-(v))$$

و منظم خروجی است اگر و فقط اگر:

$$r(u) = r(v) \Longrightarrow r(N^+(u)) = r(N^+(v)).$$

شبکه جهت‌دار نقش ابتدایی در شکل ۱۱.۳ ، یک اختصاص نقش منظم خروجی است به طوری که منظم ورودی نیست. همسایه‌های خروجی از افراد قرمز، زرد هستند و همسایه‌های خروجی افراد زرد، زرد هستند. به هر حال، همسایه‌های ورودی مختلفی برای افراد زرد وجود دارد اما برای یکی از آنها زرد و قرمز است و همچنین یک فرد زرد، یک همسایه ورودی زرد دارد.



شکل ۱۱.۳: شبکه جهت‌دار منظم خروجی

فصل ۴

پیدا کردن بزرگترین هم‌ارزی منظم در داخل یک افراز

۱.۴ مقدمه

در فصل‌های قبل، دو نوع دسته‌بندی بر روی افراد شبکه اجتماعی مطرح شد که این دو دسته‌بندی، هم‌ارزی منظم و ساختار بودند و این دسته‌بندی‌ها به صورت واضح، بر روی گراف شبکه اجتماعی به نمایش درآمدند. از این دو دسته‌بندی، هم‌ارزی منظم به واقعیت نزدیک‌تر بود، بنابراین در یک شبکه اجتماعی، باید به دنبال بهترین دسته‌بندی‌ها از افراد، با ویژگی دسته‌بندی منظم یا هم‌ارزی منظم باشیم. حال با بزرگ شدن یک شبکه اجتماعی، نمی‌توان به طور شهودی به گراف شبکه اجتماعی نگاه کرد و یک افراز منظم برای آن پیدا کرد، بنابراین در این جا است که نقش ماتریس مجاورت شبکه اجتماعی مشخص می‌شود و می‌توان با استفاده از ماتریس مجاورت و جبر روابط دودویی، یک دنباله نزولی از روابط ماتریسی ایجاد کرد که آخرین عضو این دنباله، یعنی، آخرین ماتریس این دنباله، یک رابطه هم‌ارزی باشد که این رابطه هم‌ارزی، ویژگی هم‌ارزی منظم را داشته باشد یا بطور شهودی‌تر، همان طور که در فصل قبلی به آن اشاره شد، این هم‌ارزی اگر با ماتریس دودویی E نمایش داده شود، بتواند با عمل ترکیب روابط دودویی نسبت به ماتریس مجاورت شبکه اجتماعی V خاصیت جابجایی داشته باشد، یعنی، به صورت : $EoV = VoE$ باشد، بنابراین اگر یک دسته‌بندی از افراد مد نظر ما باشد که این دسته‌بندی، معرف یک رابطه هم‌ارزی است، به وسیله این دنباله، می‌توان یک رابطه هم‌ارزی منظم از این رابطه هم‌ارزی به دست آورد که می‌تواند به عنوان یک دسته‌بندی از افراد شبکه اجتماعی باشد که افراد قرار گرفته در هر دسته، بیشترین شباهت را نسبت به هم دارند. و همچنین این دنباله، خاصیت نزولی دارد، یعنی، اگر رابطه هم‌ارزی به این دنباله داده شود، آنگاه رابطه هم‌ارزی منظم به دست آمده از این دنباله، کوچکتر یا مساوی رابطه هم‌ارزی است که در ابتدا مد نظر ما بوده است. در اینجا همه روابط ماتریسی، دودویی و مربعی هستند. اگر یک رابطه دودویی V و یک رابطه هم‌ارزی E ، هر دو بر روی مجموعه مشابهی از افراد باشند، که بزرگترین هم‌ارزی E° ، در داخل E در نظر گرفته شود و همین طور این

که رابطه V را دریافت کرده باشد، رابطه هم‌ارزی E° ، درونی منظم E با دریافت V است. به خاطر محاسبه E° ، مانده‌های راست [1] و چپ [2] نیز وارد بحث می‌شوند، یک مفهومی که وارون گروه‌ها را به جبر روابط، تعمیم داده است. یک روش چندجمله‌ای ـ زمانی، در قضیه ۲.۶.۴ ، مطرح می‌شود و با مثال‌هایی که زده می‌شود بیشتر شکل شهودی به خود می‌گیرد و بهتر فهمیده می‌شود. به ویژه، درونی منظم، با درون هم‌ارزی های منظم مطابقت می‌کند: مطابقت یک هم‌ارزی از مجموعه هم‌ارزی‌های منظم، یعنی، درونی منظم اشتراک‌های آن‌ها است. بالاخره، مفهوم هم‌ارزی منظم نسبی [3] ، با هم‌ارزی منظم تعریف می‌شود و قابل مقایسه است [۳۲].

۲.۴ توابع و ماتریس‌ها

تعریف ۱.۲.۴. [۳۲] اگر R هر رابطه دلخواهی باشد، آنگاه :

$$R^toR \leqslant l_I \leqslant RoR^t \Longleftrightarrow R \text{ یک تابع است} \qquad (۱.۴)$$

اگر $R^۲ = RoR = R$ ، آنگاه : R ، خودتوان است.

علامت t در دو نامساوی، معرف یک تابع است که می‌تواند جابجا شود، چون ترکیب روابط معمولاً از چپ به راست، با قرار دادن آرگومان [4] در سمت چپ صورت می‌گیرد، بنابراین تابع R که با آرگومان u به کار برده می‌شود به صورت uR نوشته می‌شود.

نکته ۲.۲.۴. [۳۲] اگر دو نامساوی که معرف یک تابع هستند، به صورت جدا در نظر گرفته شوند، مثلاً، اگر R ، هر رابطه‌ای باشد که شرایط اولین تابع شمول($R^toR \leqslant l_I$) را داشته باشد، آنگاه آخرین نابرابری ۱.۲ ، تبدیل به یک تساوی (، یعنی، $R = RoR^toR$) می‌شود. اگر R ، هر تابعی باشد به طوری که اولین نامساوی، بتواند تبدیل به یک تساوی شود (، یعنی، اگر $R^toR = l_I$ باشد)، آنگاه R ، پوشا [5] است. به طور مشابه، اگر $l_I = RoR^t$ ، برای هر تابع R باشد، آنگاه R یک به یک [6] است.

توابع و روابط می‌توانند بین مجموعه‌های مختلف تعریف شوند: یک تابع R از مجموعه I به مجموعه H به صورت $R : I \longrightarrow H$ نوشته می‌شود. چون دو رابطه همانی مختلف، پیچیده هستند، دو تعریف نابرابری تابع R از I به H می‌توانند به صورت جدا نوشته شوند: $R^toV \leqslant l_H$ و $l_I \leqslant RoR^t$. سرانجام، می‌توان نتیجه گرفت که اگر R یک تابع باشد، آنگاه رابطه RoR^t ، یک رابطه هم‌ارزی روی I است که می‌تواند معرف افراد هم‌ارز باشد که V ـ تصویر مشابه دارند. متقابلاً، اگر E یک رابطه هم‌ارزی روی مجموعه I باشد، آنگاه تابع $E^\natural : I \longrightarrow I/E$ از I ، به کلاس‌های E ـ هم‌ارزی با $E^\natural(u) = uEoE^t$ تعریف می‌شود که نگاشت طبیعی [7] نامیده می‌شود. به وضوح، هم‌ارزی تعریف شده به وسیله نگاشت

[1] right residual
[2] left residual
[3] relative regular equivalence
[4] arggument
[5] onto or surjective
[6] one - one or injective
[7] natural mapping

طبیعی با رابطه هم ارزی اصلی (هالموس [۸] [۵۲]) یکی است [۳۲]. در ادامه، به ارتباط بین ماتریس رابطه هم‌ارزی منظم و ماتریس تابع اختصاص نقش منظم که در فصل‌های قبل بر روی شبکه‌های اجتماعی به تصویر کشیده شدند، اشاره می‌کنیم.

۳.۴ رابطه بین هم‌ارزی منظم و اختصاص نقش منظم

یک هم‌ارزی منظم E (پاتیسن[۶۴]وایت و ریتز [۶۷]) با دریافت رابطه V ، به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$EoV = VoE. \qquad (۲.۴)$$

از این تعریف و به انضمام خودتوانی یک رابطه هم‌ارزی، این نتیجه را به دست می‌دهد که E ، رابطه هم‌ارزی منظم با دریافت رابطه V است اگر و فقط اگر :

$$EoVoE \leqslant VoE \quad \text{و} \quad EoVoE \leqslant EoV. \qquad (۳.۴)$$

باید توجه داشت که چون E ، یک رابطه انعکاسی است، دو نامساوی های بالا با یکدیگر برابرند. این ویژگی منظم برای یک رابطه هم‌ارزی، به ترتیب با شرط درجه‌های ورودی و خروجی یک فرد شناخته می‌شود (پاتیسن [۶۴]) .

یکی از بیشترین راه‌های شهودی، برای توصیف این که هم‌ارزی منظم، شرایط یک اختصاص نقش منظم را دارد به وسیله اورت و بورگاتی در سال ۱۹۹۳ مطرح شد [۲۹] . یک رنگ‌آمیزی از افراد I، یک تابع مانند $r : I \longrightarrow P$ از مجموعه افراد I به مجموعه نقش‌های P است. یک اختصاص نقش از افراد I با دریافت رابطه V منظم است اگر همه افراد با نقش مشابه، مجموعه مشابهی از نقش‌ها را در V ـ تصویرشان داشته باشند. به عنوان مثال، اگر هر قرمز به یک سبز مجاور باشد، آنگاه همه قرمز ها باید به برخی سبزها مجاور باشند. این روش برای روابط جهت‌دار، به طور یکسان مفید است، اما به وضوح، لازم است که V ـ هم‌تصویر افراد نقش ـ مشابه نیز یکسان باشد.

معادل هم بودن این روش اختصاص نقش و رابطه‌های تعریف شده در نامعادلات ۳.۴ ، به طور منظم بدین صورت فهمیده می‌شود که هر کلاس هم‌ارزی E ، معرف یک نقش است. این معادل هم بودن، یک دنباله از روابط کلی است که بین روابط هم‌ارزی و توابع است و در بخش ۲ تعریف شده‌اند: اگر r ، یک تابع باشد، آنگاه ror^t ، یک هم‌ارزی است. متقابلاً، اگر E ، یک رابطه هم‌ارزی روی مجموعه I باشد، آنگاه تابع تصویر، یک تابع را از افراد I به رده‌های هم‌ارزی E تعریف می‌کند. به ویژه، یک تابع $r : I \longrightarrow P$ را یک اختصاص نقش منظم با دریافت V می‌گویند اگر هر دوی شرایط زیر:

$$Vor = ror^t oVor \quad \text{و} \quad r^t oV = r^t oVoror^t \qquad (۴.۴)$$

برقرار باشد [۳۲]. این رابطه بین اختصاص نقش منظم و هم‌ارزی منظم با گزاره زیر بیان می‌شود.

[۸] halmoos

گزاره ۱.۳.۴. [۳۲] اگر V ، یک رابطه روی مجموعه افراد I و $r : I \longrightarrow P$ یک V ـ اختصاص نقش باشد، آنگاه تابع r ، یک اختصاص نقش منظم است اگر و فقط اگر ror^t ، یک هم‌ارزی منظم باشد.

برهان. اگر r ، اختصاص نقش منظم باشد. ضرب معادله اول ۴.۴ از سمت راست با r^t، و همچنین ضرب معادله دوم از سمت چپ با r، و از این حقیقت که ror^t یک رابطه هم‌ارزی است به ۳.۴ می‌رسیم. برعکس، اگر ror^t یک هم‌ارزی منظم باشد، به طوری که باید ۳.۴ همراه با $E = ror^t$ برقرار باشد. ضرب اولین نامعادله ۳.۴ از سمت راست با r، و همچنین دومین معادله از طرف چپ با r^t و استفاده از تساوی‌های $r = ror^tor$ و $r^t = r^tororr^t$ برای هر تابع، نتیجه مورد نظر به دست می‌آید. □

مثال ۲.۳.۴. اگر شبکه اجتماعی شکل ۱.۴ را در نظر بگیریم، آنگاه یک تابع اختصاص نقش منظم برای آن به صورت زیر است:

$$r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

حال اگر ترکیب ror^t را انجام دهیم، آنگاه ترکیب این دو، به صورت زیر است:

$$ror^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} o \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس حاصل شده یک رابطه هم‌ارزی است که همچنین رابطه هم‌ارزی منظم نیز هست.

۴.۴ درونی منظم

در این بخش ثابت می‌شود دنباله روابط ماتریسی که برای دسته‌بندی افراد با ویژگی هم‌ارزی منظم است باید نزولی باشد، یعنی، ماتریس رابطه هم‌ارزی که از این دنباله حاصل می‌شود باید کمتر یا مساوی رابطه هم‌ارزی اولیه مورد نظر ما از افراد شبکه اجتماعی باشد. در فصل‌های قبل اشاره شد که مجموعه همه ماتریس‌های هم‌ارزی منظم از افراد یک شبکه، تشکیل یک مشبکه می‌دهند. با استفاده از این حقیقت که سوپریمم، در مشبکه‌های هم‌ارزی منظم، یک شرط سوپریمم در مشبکه همه هم‌ارزی‌ها است ایجاب می‌کند که یک هم‌ارزی منظم ماکزیمم وجود دارد به طوری که در زیر یک هم‌ارزی دلخواه داده شده قرار می‌گیرد. اگر یک رابطه هم‌ارزی E وجود داشته باشد، باید به دنبال رابطه هم‌ارزی منظمی بود که بهترین « تقریب » برای E باشد. برای ساختارهایی مانند ساختار مجموعه همه هم‌ارزی‌های منظم از افراد یک شبکه که یک مشبکه تشکیل می‌دهند، دو ایده، برای پیدا کردن بهترین هم‌ارزی منظم نسبت به هم‌ارزی

اولیه افراد شبکه اجتماعی وجود دارد: یا از نزدیک‌ترین کران بالا یا از نزدیک‌ترین کران پایین استفاده شود، یعنی، یک عمل بستار یا یک عمل درونی وجود داشته باشد.

تعریف ۱.۴.۴. [۵۴] اگر $N = (I, V)$ ، یک شبکه و E ، یک رابطه هم‌ارزی روی مجموعه افراد آن باشد. یک رابطه هم‌ارزی $E_۱$ ، درونی منظم [۹] از E نامیده می‌شود اگر سه شرط زیر برای آن برقرار باشد:

۱- $E_۱$ منظم باشد.

۲- $E_۱ \leqslant E.$

۳- برای هر $E_۲$ که دو شرط بالا را دارا باشد، آنگاه $E_۲ \leqslant E_۱$ باشد.

نتیجه ۲.۴.۴. [۵۴] اگر $N = (I, V)$ ، یک شبکه و E ، یک رابطه هم‌ارزی روی مجموعه افراد آن باشد، آنگاه درونی منظم از E وجود دارد. از سوی دیگر، هم‌ارزی منظم مینیمم در بالای یک هم‌ارزی داده شده، در حالت کلی وجود ندارد(که می‌تواند بستار منظم [۱۰] یا اسکلت منظم [۱۱] نامیده شود).

برهان. برای قسمت اول، اگر $N = (I, V)$ یک شبکه و E یک رابطه هم‌ارزی دلخواه روی مجموعه افراد آن باشد، آنگاه سوپریمم تحت همه روابط هم‌ارزی منظم که ظریف‌تر از E است، درونی منظم از E نامیده می‌شود.
برای دومین قسمت، ابتدا برای شبکه بدون جهت، اثبات گزاره ۴.۵.۳ یادآوری می شود : به آسانی می‌توان بررسی کرد که افرازهای منظم $P_۱ := \{\{A, C, E\}, \{B, D\}\}, P_۲ := \{\{A, C\}, \{B, D, E\}\}$ ، هر دو بالای افراز غیر منظم $P := \{\{A, C\}, \{B, D\}, \{E\}\}$ هستند و با این ویژگی مینیمال می‌شوند. برای شبکه جهت‌دار نیز می‌توان نشان داد که یک عمل بستار، وجود ندارد. اگر V ، یک رابطه روی $I = \{۱ \dots ۵\}$ و ماتریس مجاورت آن، به صورت زیر باشد:

$$V = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \tag{۵.۴}$$

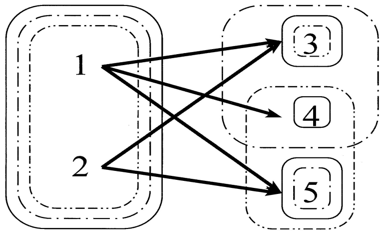
همچنین $E = ۱۲, ۳, ۴, ۵;$ $E_۱ = ۱۲, ۳۴, ۵;$ و $E_۲ = ۱۲, ۳, ۴۵$ روابط هم‌ارزی هستند و کاما جداکننده کلاس‌های هم‌ارزی، از یکدیگر است. چون E ، با دریافت V منظم نیست، اما دو کران بالای مینیمال $E_۲$ و $E_۱$ دارد، بنابراین نمی‌توان یک بستار منظم تعریف کرد. چون $E = E_۱ \cap E_۲$ و این مسأله به این حقیقت برمی‌گردد که اشتراک هم‌ارزی‌های منظم، لزوماً منظم نیست. در شکل ۴.۱، رابطه V ، با خطها و افرازها با جعبه‌ها نشان داده شده‌اند. هر افراز، به وسیله نوع خطوط دور جعبه‌های آن مشخص می‌شود: E با خط پر، $E_۱$ با تک خطچین و $E_۲$ با دو خطچین مشخص شده است. هر سه افراز، کلاس

[۹] regular interior

[۱۰] regular closure

[۱۱] regular hull

$\{۱,۲\}$ ، به عنوان جعبه‌های تودرتو در نظر گرفته شده‌اند، اما سه نقطه دیگر، کلاس‌های متفاوت دارند. به هر حال، هم‌ارزی‌های منظم، به طور نزدیک، مربوط به الحاق روابط هم‌ارزی هستند (اورت و بورگاتی [۲۹]). □



شکل ۴.۱: نمودار افراز و روابط

بنابراین، یک عمل درونی منظم وجود دارد که آن را با E° نشان می‌دهند و از الحاق همه هم‌ارزی های منظمی به دست می‌آید که درون E هستند. محاسبه آن در ادامه مطرح می‌شود. تلاقی (در مشبکه روابط هم‌ارزی منظم) از دو رابطه هم‌ارزی منظم $E_۱$ و $E_۲$ ، به وسیله درونی منظم از اشتراک $E_۱$ و $E_۲$ است. هر چند، این تعریف، یک الگوریتم مؤثری را برای درونی منظم نمی‌دهد. بنابراین در این‌جا، نقش مانده‌ها مشخص می‌شود. ابتدا باید توجه کرد که اگر E ، یک رابطه انعکاسی باشد، آنگاه هر دو طرف چپ معادلات ۴.۳، داخل دو طرف راست می‌افتند.

۴.۵ مانده‌ها

در این بخش، با مفهوم مانده‌های چپ و راست آشنا می‌شویم. این دو مفهوم، در ساختن دنباله‌ای که می‌خواهیم برای دسته‌بندی افراد بسازیم، نقش کلیدی دارند. مجموعه $\mathscr{R}(I)$ از همه روابط دودویی روی مجموعه I ، تشکیل یک نیم‌گروه یکه‌دار (،نیم‌گروه با رابطه همانی،) می‌دهند به طوری که رابطه همانی، عنصر همانی است. هرچند، هر رابطه‌ای در $\mathscr{R}(I)$ ، یک معکوس ندارد. چون معکوس‌ها خیلی مهم هستند، طبیعی است که به دنبال بهترین تقریب احتمالی برای یک معکوس باشیم. مفهوم مانده‌ها [۱۲] که به وسیله بیرخوف در سال ۱۹۷۳ [۱۲] ارائه شده است، بهترین جواب برای این مسأله است. مانده راست [۱۳] W با V را به وسیله W/V نشان می‌دهند و بیانگر این مطلب است که بزرگترین رابطه U وجود داشته باشد و این شرط $VoU \leqslant W$ برای آن برقرار باشد. مانده چپ [۱۴] W با V را با $W\backslash V$ نشان می‌دهند و بیانگر این مطلب است که بزرگترین رابطه U وجود داشته باشد و دارای شرط $UoV \leqslant W$ باشد. به صورت واضح‌تر، مانده‌ها مثل تقسیم‌ها هستند، بنابراین در بیان $Uo(W/U) \leqslant W$ ، U داخل آن ساده می‌شود. برای حذف کردن پرانتزها، فرض بر این گذاشته می‌شود که اعمال مانده، نسبت به اعمال ترکیب، تقدم کمتری دارد، بنابراین عبارت VoU/W ، یعنی $(VoU)/W$ خواهد بود. در یک

[۱۲] residual

[۱۳] right residual

[۱۴] left residual

ترتیب گروهی، این برای مانده همیشه صدق می‌کند چون عبارت W/V می تواند به صورت عبارت $V^{-1}oW$ نوشته شود و این دو عبارت با هم برابرند. شرایط هم‌ارز پایین، ویژگی‌های هر دوی مانده‌ها هستند:

$$VoU \leqslant W \Longleftrightarrow U \leqslant W/V \Longleftrightarrow V \leqslant W\backslash U. \quad (۶.۴)$$

در ترتیب گروهی روابط، مانده‌ها همیشه در ترتیب خواهند بود. اگر V و W ، هر رابطه دلخواهی باشند، آنگاه :

$$W/V = (V^t oW')', \qquad W\backslash V = (W'oV^t)'. \quad (۷.۴)$$

مانده‌ها می‌توانند در وضعیت افراد u و v قرار بگیرند.

$$u(W/V)v \Longleftrightarrow Vu \subseteq Wv, \qquad u(W\backslash V)v \Longleftrightarrow uV \subseteq vW. \quad (۸.۴)$$

، یعنی، u رابطه ـ (W/V) با v دارد اگر و فقط اگر ستون uام V ، یک زیرمجموعه از ستون vام W باشد. به طور مشابه، مانده چپ $W\backslash V$ ، با سطر uام V، یک زیرمجموعه از سطر vام W می‌باشد. این مطلب، به آسانی می‌تواند برنامه‌ریزی شود. به عنوان مثال، در C یا $C++$ ، روابط می‌توانند به وسیله ماتریس‌های ۱ − ۰ نمایش داده شوند. وقتی A و B داده شوند، آنگاه مانده راست A با B ، به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$\mathbf{for}(i = ۰; i < n; i++)$
$\mathbf{for}(j = ۰; j < n; j++)$
$\{$
$\quad ArB[i][j] = ۱;$
$\quad \mathbf{for}(k = ۰; k < n; j++)$
$\quad\quad \mathbf{if}(B[k][i] > A[k][j])$
$\quad\quad \{ArB[i][j] = ۰; \mathbf{break};\}$
$\}$

به طوری که ArB ، ماتریس مانده راست است. مانده چپ A با B به صورت مشابه بدست می‌آید، به جز شرط **if** ، در حلقه درونی **for** که با شرط زیر جابجا می‌شود:

$$\mathbf{if}(B[j][k] > A[i][k])AlB[i][j] = ۰; \mathbf{break};$$

توجه کنید فرمان **break** ، برای جهش از حلقه درونی انجام می‌شود. مفهوم اختصاص داده شده برای جبر روابط دودویی را نظریه جبری روابط می‌گویند که به وسیله تارسکی [۱۵] ([۷۴]) به عنوان یک نیم‌گروه

[۱۵] tarski

مشبکه - مرتبی که دارای شرایط جبر بولی باشد، به صورت زیر مطرح شده است:

$$\begin{cases}(ToR)^t = R^t o T^t \\ R^{tt} = R. \\ (T \cup R)^t = T^t \cup R^t.\end{cases} \quad (۹.۴)$$

گزاره ۱.۵.۴. [۳۲] اگر R و T ، روابط ماتریسی روی مجموعه I و همچنین R و T ، هر دو دارای خاصیت انعکاسی و تقارن یا این که هر دو دارای خاصیت تعدی باشند، آن‌گاه اشتراک آن‌ها نیز به ترتیب دارای خاصیت انعکاسی و متقارن یا تعدی است.

برهان. فرض کنید R و T روابطی روی مجموعه I باشند. اگر هر دو رابطه، انعکاسی باشند، آنگاه هر دوی آنها شامل رابطه همانی هستند، به طوری که اشتراک آن‌ها نیز دارای خاصیت همانی است و این ثابت می‌کند که اشتراک این دو رابطه نیز دارای خاصیت انعکاسی است. به طور مشابه، اگر هر دو متقارن باشند، آنگاه :

$$(R \cap T)^t = R^t \cap T^t = R \cap T$$

متقارن بودن را اثبات می‌کند. سرانجام، اگر هر دو تعدی باشند، آنگاه :

$$(R \cap T)^۲ \leqslant R^۲ \cap RoT \cap ToR \cap T^۲ \leqslant R^۲ \cap T^۲ \leqslant R \cap T$$

رابطه تعدی را اثبات می‌کند. □

مثال ۲.۵.۴. اگر R, T ماتریس‌های متقارن باشند، آنگاه اشتراک آنها نیز به صورت زیر، متقارن خواهد بود:

$$T = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$T \cap R = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

توجه کنید که اجتماع و اشتراک برای دو ماتریس، برابر با اشتراک نظیر به نظیر درایه‌های ماتریس‌ها است.

نکته ۳.۵.۴. اگر R ، هر رابطه دلخواهی باشد، آنگاه بر روی رابطه T ، دو رابطه تقارن احتمالی وجود دارد که این روابط $R^S \equiv R \cup R^t$ و $R^s \equiv R \cap R^t$ ، به ترتیب، بستار متقارن [۱۶] و درونی متقارن [۱۷] هستند. هر

[۱۶] symetric closure

[۱۷] symetric interior

دوی این اعمال، خودتوان ($R^{SS}=R^S$ و $R^{ss}=R^s$) و یکنوا [۱۸] ($R\leqslant T\Rightarrow R^s\leqslant T^s$ و $R^{SS}\leqslant T^S$) هستند و بحث زیر را نیز تأیید می‌کنند:

$$R^s \leqslant R \leqslant R^S. \qquad (۱۰.۴)$$

بسیاری از ویژگی‌های مانده‌ها با هم در اینجا گرد هم آمده‌اند. لم بعدی در مورد یکنوایی اعمال مانده است.

لم ۴.۵.۴. [۳۲] روابط T/R و $T\backslash R$ در T همنوا و در R ضدهمنوا هستند.

برهان. ترکیب و ترانهاده یکنوا هستند، اما عکس آن ضدیکنوا است. □

استفاده واقعی دیگر، درباره مانده‌ها همچنین در کتاب بیرخوف ([۱۲]) است.

گزاره ۵.۵.۴. [۳۲] در هر رابطه جبری، R/R و $R\backslash R$، ، شبه ترتیب (، انعکاسی و تعدی) هستند.

برهان. به وسیله تعریف مانده راست R/R، درستی رابطه $Ro(R/R)\leqslant R$ نتیجه می‌شود. اگر عبارت دوم، در عبارت اول از راست ضرب شود این عبارت $Ro(R/R)^۲\leqslant Ro(R/R)$ به دست می‌آید و از این‌جا، عبارت $Ro(R/R)^۲\leqslant R$ نتیجه می‌شود. چون مانده راست ماکزیمال است، درستی $(R/R)^۲\leqslant (R/R)$ حفظ می‌شود، و خاصیت تعدی اثبات می‌شود. رابطه انعکاسی، باعث برقرار شدن نامساوی $Rol\leqslant R$ می‌شود. به طور مشابه، مانده چپ یک رابطه با خودش نیز شبه ترتیب است. □

[۳۲] البته باید توجه شود که هر رابطه شبه ترتیب، خودتوان است، اما عکس آن درست نیست. ساده‌ترین مثال از رابطه خودتوان که شبه‌ترتیب نیست، به رابطه بین دو فرد اشاره می‌شود که افراد ۱ و ۲ هستند و زوج مرتب ارتباطات بین آن‌ها به صورت $(۱,۲),(۲,۲)$ است.
از لم بعدی، در بخش‌های بعدی استفاده می‌شود.

لم ۶.۵.۴. [۳۲] در هر رابطه جبری، به طوری که T یک رابطه و R یک شبه‌تریتب باشد، آنگاه

$$(RoT)/R=(RoT)/(RoT) \qquad , \qquad (ToR)\backslash T=(ToR)\backslash(ToR) \qquad (۱۱.۴)$$

برقرار است.

برهان. نامساوی به دست آمده $To(RoT/T)\leqslant RoT$ از ویژگی مانده‌ها و ضرب کردن آن از چپ با R و استفاده کردن از رابطه تعدی، عبارت $RoTo(RoT/T)\leqslant RoT$ نتیجه می‌شود. چون (RoT/RoT) ماکزیمال است، بنابراین $(RoT/T)\leqslant (RoT/RoT)$ برقرار است. متقابلاً، از خاصیت انعکاسی R ، عبارت $T\leqslant RoT$ حاصل می‌شود و با ویژگی ضدهمنوایی مانده‌ها برای دومین آرگومان، نامساوی دیگر حاصل می‌شود. تساوی دوم نیز با استفاده کردن از یک آرگومان دیگر به دست می‌آید. □

[۱۸] isotone or monotone

لم ۷.۵.۴. [۳۲] اگر E ، هر هم‌ارزی منظم با دریافت V باشد، آنگاه

$$E \leqslant (VoE\backslash V) \cap (EoV/V). \tag{۱۲.۴}$$

برهان. اگر E ، یک رابطه هم‌ارزی منظم با دریافت رابطه V باشد، از تعریف هم‌ارزی منظم، عبارات زیر نتیجه می‌شوند:

$$\begin{aligned} & EoVoE \leqslant VoE, EoV && \xRightarrow{\text{با تعریف۱ و/ (معادله ۶.۴)}} \\ & E \leqslant VoE\backslash VoE, EoV/EoV && \xRightarrow{\text{با معادله ۱۱.۴}} \\ & E \leqslant VoE\backslash V, EoV/V && \xRightarrow{\text{با تعریف} \cap} \\ & E \leqslant VoE\backslash V \cap EoV/V. \end{aligned} \tag{۱۳.۴}$$

□

هدفی که ما به دنبال آن هستیم این است که یک اندازه، برای درونی منظم تعیین کنیم. باید یادآوری کنیم که با معادله ۶.۴ ، V^s ، درونی متقارن رابطه V است.

قضیه ۸.۵.۴. [۳۲] اگر رابطه V و یک افراز E روی مجموعه متناهی I و E° بزرگترین هم‌ارزی منظم مشمول در E همچنین $E_\circ = E$ و برای $i > \circ$ ، دنباله E_{i+1} به صورت زیر تعریف شود:

$$E_{i+1} \equiv [(VoE_i\backslash V) \cap (E_ioV/V) \cap E_i]^s \tag{۱۴.۴}$$

به طوری که اندیس s ، درونی متقارن را نشان می‌دهد. آنگاه درونی منظم به عنوان یک اندازه، به صورت زیر خواهد بود:

$$E^\circ = \bigcap_{i=\circ}^{|I|-|E|} E_i \tag{۱۵.۴}$$

به طوری که $|E|$ ، تعداد رده‌های هم‌ارزی E است.

برهان. دنباله E_i در معادله ۱۴.۴، نزولی است، زیرا:

$$E_{i+1} \equiv [(VoE_i\backslash V) \cap (E_ioV/V) \cap E_i]^s \leqslant (VoE_i\backslash V) \cap (E_ioV/V) \cap E_i] \leqslant E_i.$$

بنابراین اشتراک در معادله ۱۵.۴ ، به سادگی با E_k برابر می‌شود، که k ،اولین شماره برای تساوی $E_k = E_{k+1}$ است. چون تعداد کلاس‌های هم‌ارزی با اندازه $|E|$ شروع می‌شود و با شمردن حداقل، یک شماره یک شماره و به طور نزولی شمرده می‌شود تا به k برسد، در نتیجه باید در جایی خاتمه بپذیرد. و همچنین این شرط $k \leq |E^\circ| - |E| \leq |I| - |E|$ وجود دارد.
برای این که به وسیله استقرا نشان داده شود که E_i یک رابطه هم‌ارزی است، باید به این نکته توجه داشت که $E_\circ$ یک رابطه هم‌ارزی از E است. اگر E_i یک رابطه هم‌ارزی باشد، آنگاه همچنین E_{i+1} نیز دارای این ویژگی است. ابتدا، باید توجه شود که می‌توان از گزاره ۶.۵.۴، نتیجه گرفت که این دو تساوی

$$(VoE_i)\backslash V = (VoE_i)\backslash(VoE_i) \qquad , \qquad (E_ioV)/V = (E_ioV)/(E_ioV)$$

برقرار هستند و به وسیله این نتیجه، می‌توان از گزاره ۵.۵.۴ استفاده کرد و نتیجه گرفت که هر دو رابطه $(E_ioV)/V$ و $(VoE_i)\backslash V$

انعکاسی و تعدی هستند. با استفاده از گزاره ۱.۵.۴ ، در جایی که اشتراک روابط انعکاسی و تعدی مطرح می‌شود، این نتیجه به دست می‌آید که توان دوم دنباله ۱۴.۴ نیز تعدی و انعکاسی است. سرانجام، عمل درونی متقارن، باعث تقارن E_{i+1} می‌شود، و اثبات هم‌ارزی بودن E_{i+1} را کامل می‌کند.
برای اثبات این که E° یک رابطه هم‌ارزی منظم است، باید نشان داد که به وسیله V ، جابجا می‌شود. ابتدا، باید ثابت کرد که $VoE^\circ = E^\circ oV$ برقرار است و این به وسیله دو شمول زیر:

$$VoE^\circ = Vo[(VoE^\circ\backslash V)\cap(E^\circ V/V)\cap E^\circ]^s \leqslant Vo(E^\circ oV/V) \leqslant E^\circ oV$$
$$E^\circ oV = [(VoE^\circ\backslash V)\cap(E^\circ oV/V)\cap E^\circ]^s oV \leqslant (VoE^\circ\backslash V)oV \leqslant VoE^\circ$$

میسر می‌شود، بنابراین جابجایی دو رابطه اثبات می‌شود.

سرانجام، برای این که بتوان نشان داد که E° ، ماکزیمال این چنین هم‌ارزی منظمی است، باید فرض کرد π هر رابطه هم‌ارزی منظم مشمول در E باشد و به وسیله استقرا، نامساوی $\pi \leqslant E_i$ به دست می‌آید و از آن، نامساوی $\pi \leqslant E^\circ$ حاصل می‌شود. باید توجه داشت که این چنین رابطه هم‌ارزی منظمی همیشه وجود دارد: مثل رابطه همانی. اگر فرض شود که $\pi \leqslant E_\circ$ است، بنابراین برای فرض استقرا، شمول $\pi \leqslant E_i$ برقرار می‌شود و از این شمول، می‌توان نتیجه گرفت که $\pi oV \leqslant E_ioV$. چون ρ (، V - منظم است) به وسیله V محاسبه می‌شود، یعنی :

$$\pi oV = Vo\pi$$

پس می‌توان نتیجه گرفت که $VoE \leqslant E_ioV$ است به طوری که به وسیله معادله ۶.۴ این نتیجه گرفته می‌شود که $\pi \leqslant E_ioV/V$ است، بنابراین به وسیله معادله ۱۴.۴ ، نتیجه $\pi \leqslant E_{i+1}$ به دست می‌آید. □

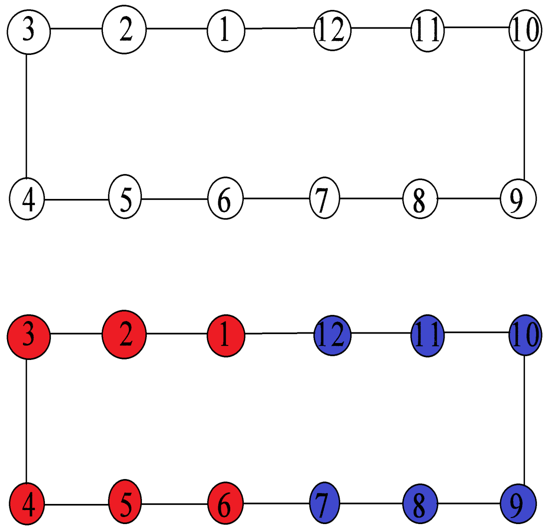
نتیجه ۹.۵.۴. [۳۲] افراز E_{i+1} ، در ساختار قضیه ۲.۶.۴ ، می‌تواند به عنوان افراز ماکزیمال باشد به طوری که:

$$E_ioVoE_{i+1} \leqslant E_ioV \quad \text{و} \quad E_{i+1}oVoE_i \leqslant VoE_i \tag{۱۶.۴}$$

برقرار است.

مثال ۱۰.۵.۴. اگر رابطه V ، یک دور بر روی افراد ۱ تا ۱۲ باشد، و همچنین اولین افراز طوری باشد که ۶ تا شماره اول را در یک کلاس و ۶ تای دوم را کلاس دیگری قرار دهد. این سه افراز الگوریتم، E_1, E_2 و $E_\circ$ در شکلهای ۲.۴ و ۳.۴ نشان داده شده‌اند. آخرین افراز، E_2 است که افراد، به صورت زوج مرتب هستند:

$$\{۱,۶\},\{۲,۵\},\{۳,۴\},\{۷,۱۲\},\{۸,۱۱\},\{۹,۱۰\}$$



شکل ۲.۴: شبکه ۱۲ نفری و افراز اولیه

برای این که بتوان نشان داد برخی شرایط فوق در معادله ۱۴.۴ لازم هستند، مثال زیر در نظر گرفته می‌شود. اگر رابطه V روی $\{۱,۲\}$ به وسیله زوج افراد $\{(۱,۱),(۲,۱)\}$ نشان داده شود، یعنی، V ، یک تابع ثابت با مقدار یک است. در مرحله بعدی، اگر E ، رابطه همانی روی مجموعه مشابه و همچنین $V = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه:

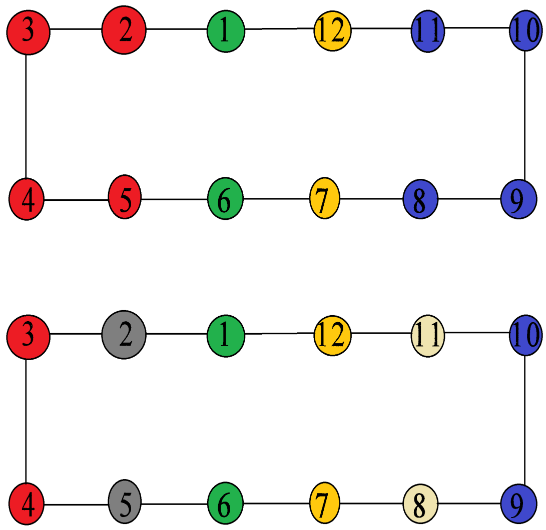
$$EoV/V = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} = \lambda, \qquad VoE\backslash V = \omega \quad \text{رابطه مرجع}$$

و به وسیله رابطه ≼ نتیجه زیر به دست می‌آید:

$$\omega \cap \lambda = \lambda. \tag{۱۷.۴}$$

و این مطلب، نشان می‌دهد که اشتراک این دو رابطه، نه متقارن است و نه یک زیرمجموعه از افراز داده شده است.

چندین شاخصه طبیعی از درونی منظم وجود دارد. ابتدا، باید حالت چندتایی روابط را در نظر گرفت، یعنی، دنباله $\{V_j\}_{j\in J}$ ، به طوری که همه این روابط روی مجموعه مشابهی از افراد باشند. یک رابطه هم‌ارزی E ، منظم با دریافت یک مجموعه از روابط است اگر معادله ۲.۴ ، به طور همزمان برای همه روابط حفظ شود، یعنی، اگر $V_joE = EoV_j$ برای $\forall j \in J$ برقرار باشد. درونی منظم یک رابطه هم‌ارزی E، با دریافت این چنین مجموعه‌ای از روابط، می‌تواند به عنوان اشتراک همزمان همه هم‌ارزی‌های منظم مشمول داخل E باشد. به آسانی، مثال‌های ساخته شده، نشان می‌دهند که این درونی منظم برابر با اشتراک درونی‌های منظم مستقل نیست.



شکل ۳.۴: دو مرحله محاسبه درونی منظم

نتیجه ۱۱.۵.۴. [۳۲] اگر مجموعه روابط $\{V_j\}_{j\in J}$، افراز E، همه روی مجموعه مشابه متناهی I، ، E° بزرگترین هم‌ارزی منظم همزمان داخل E ، $E_\circ = E$ و برای $i > \circ$ دنباله E_i ، به صورت زیر باشد:

$$E_{i+1} \equiv [E_i \cap \bigcap_{j=1}^{J} (V_j o E_i \backslash V_j \cap E_i o V_j / V_j)]^s, \qquad (۱۸.۴)$$

آنگاه مانند قضیه قبل، درونی منظم به عنوان اندازه‌ای از $E_\circ$ خواهد بود.

۶.۴ هم‌ارزی منظم نسبی

هم‌ارزی منظم نسبی، بیان کننده این ایده است که افراد هم‌ارز، همسایه‌های یکسانی را در یک اندازه پیش‌مشخص درشت‌تر داشته باشند. تفسیر این هم‌ارزی این است که هم‌ارزی V، تقریباً منظم است.

تعریف ۱.۶.۴. [۳۲] : اگر $N = (I, V)$ یک شبکه و $r : I \longrightarrow W$, $r_\circ : I \longrightarrow W_\circ$ دو اختصاص نقش باشند، آنگاه r ، منظم نسبت به $r_\circ$ نامیده می‌شود اگر $r \leqslant r_\circ$ باشد و $\forall u, v \in I$

$$r(u) = r(v) \Longrightarrow r_\circ(N^+(u)) = r_\circ(N^+(v)) \,\&\, r_\circ(N^-(u)) = r_\circ(N^-(v)).$$

در نمایش رنگ‌آمیزی، یک رنگ‌آمیزی نسبی می‌تواند اصطلاحات رنگی ظریف و برجسته داشته باشد، بنابراین قوانین مجاورت می‌توانند بدین صورت باشند: «اگر یک فرد از برخی دسته رنگی ظریف (،مانند آبی روشن)، یک سطر، به یک فرد از برخی دسته رنگی دیگر (، مثلاً سبز) داشته باشد، آنگاه همه آبی‌های روشن، یک سطر به برخی از افراد سبز دارند» . باید توجه داشت که اگر یک آبی روشن، به یک سبز تاریک مربوط باشد، نباید نتیجه گرفت که همه آبی‌های روشن به برخی سبزهای تاریک مربوط

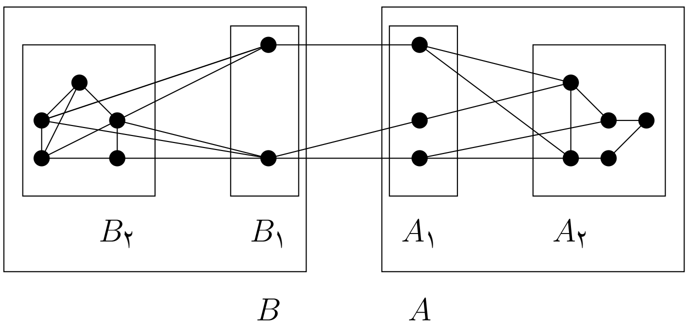
هستند. هیچ یک از این‌ها نمی‌توانند به این نتیجه ختم نمی‌شوند از یک رابطه‌ای که از یک آبی به یک سبز هست، همه آبی‌ها به برخی سبزها مربوط هستند، یعنی، در یک رنگ‌آمیزی نسبی، هیچ یک از رنگ‌آمیزی‌های ظریف و درشت، نیازی نیست که منظم باشند.

نتیجه ۴.۶.۲. [۳۲] بزرگترین هم‌ارزی منظم نسبی با دریافت هم‌ارزی داده شده E و یک رابطه کلی V ، نتیجه‌اش عبارت $E_0 = E_0(V, E_i)$ می‌شود و به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$E_0 = [(VoE\backslash V) \cap (EoV/V) \cap E]^s. \qquad (۴.۱۹)$$

برهان. اثبات مشابه قضیه است، اما اثبات فقط در یک مرحله انجام می‌شود. □

یک نوع کاربرد از هم‌ارزی منظم نسبی، به وسیله یک شبکه روابط دوستی متقارن، داده شده است به طوری که یک کاربرد مقایسه‌ای از آن، به خوشه‌های دوستی مستقل A و B تقسیم می‌شود. اگر هر عضو داخل هر خوشه، حداقل یک ارتباط را با برخی از اعضای خوشه مشابه دیگر داشته باشد، افراز داخل این دو خوشه می‌تواند منظم باشد اگر ارتباطی بین دو خوشه یا هر فردی که می‌تواند به علاوه ارتباطات درون‌گروهی، حداقل یک ارتباط را با یک عضو گروه دیگر داشته باشد.
اما اگر برخی، ولی نه همه افراد، ارتباط دوستی را با اعضای گروهی دیگر داشته باشند، افراز داخل A و B منظم نیست، بنابراین می‌توان هر گروه را به داخل این افرادی که ارتباطی را با با برخی از اعضای گروه دیگر دارند و آنهایی که ندارند تجزیه کرد و می‌توان گفت که افراز، به افراز A_1, A_2, B_1, B_2 تقسیم می‌شود. در حالت کلی هیچ یک از این دو افراز منظم نیستند:
با این دید که برخی از افراد در A_1 ، ارتباط درون‌گروهی را فقط با اعضای A_1 ، برخی فقط با اعضای A_2 و برخی با هر دو داشته باشند؛ آنها همسایه‌های هم‌ارزی را ندارند. اما آن‌ها همسایه‌های هم‌ارزی را با دریافت افراز درشت‌تر، داخل A و B دارند، بنابراین افراز داخل A_1, A_2, B_1, B_2 ، نسبت به افراز A و B ، منظم است. شکل ۴.۴ ، بیانگر این مطلب است. مثال دیگری از معادله ۴.۱۹، این است

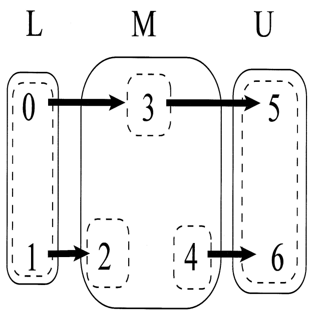


شکل ۴.۴: خوشه‌های دوستی

که افراد به سه بلوک L, M و U افراز شده‌اند که به ترتیب، لایه‌های مدیریت «پایین‌تر [19] »،«میانه [20]

[19] lower
[20] middle

» و «بالاتر [۲۱] »، در یک رابطه V ، بنام رابطه «گزارش دادن به [۲۲] » را تشکیل می‌دهند که در شکل ۶.۴ ، نشان داده شده‌اند. از لحاظ پیدا کردن ماکزیمال رابطه هم‌ارزی منظم نسبی، V ـ رابطه، کارفرمای متوسط را به سه زیرمجموعه، تقسیم می‌کند: (i) – فرد ۲، کسی است که به هر کسی در لایه پایین‌تر پاسخگو است، اما به هر کسی در لایه بالاتر پاسخگو نمی‌باشد، (ii) – فرد ۴، کسی که به لایه بالاتر گزارش می‌دهد، اما گزارشی از لایه‌های پایین‌تر را نسبت به خودش ندارد و سرانجام (iii) – فرد ۳، کسی که هر دو نوع قبلی از روابط را دارد. به طور منطقی، یک نوع چهارمی از کارفرمای میانه، می‌تواند بدین



شکل ۵.۴: رابطه مدیریت

صورت ساخته شود: یک فردی که نه به کارفرمای بالاتر پاسخگو است و نه به کارفرمای پایین‌تر پاسخگو می‌باشد. اگر محدودیت‌های روی رابطه V ، حذف شوند، آنگاه هر یک از سه کلاس هم‌ارزی، می‌توانند به زیرتقسیم‌های بیشتری به صورت $۴^۳ = ۶۴$ کلاس منظم نسبی تقسیم شوند. پیدا کردن ۱۹۲، به عنوان کران بالای کلاس‌ها در درونی نسبی است. این تعداد خیلی بزرگ است، اما دوباره یادآوری می‌شود که کران بالایی روی اندازه درونی منظم وجود ندارد.

کلاس‌های منظم از یک درونی منظم نسبی $E_\circ$ با دریافت رابطه V و افراز E می‌توانند به وسیله همسایه‌هایشان محاسبه شوند.

نتیجه ۳.۶.۴. [۳۲] اگر vو u ، افرادی در مجموعه I و $E_\circ$ درونی منظم نسبی E با دریافت رابطه V باشد، آن‌گاه

$$uE_\circ v \Longleftrightarrow uEv$$

$$uE_\circ v \Longleftrightarrow E^\natural(uV) = E^\natural(vV)$$

و

$$uE_\circ v \Longleftrightarrow E^\natural(Vu) = E^\natural(Vv). \qquad (۲۰.۴)$$

بطور شهودی، تفسیر نتیجه ۲.۶.۴ این است که دو فرد باید زیررنگ‌های مشابه(در هم‌ارزی منظم نسبی) داشته باشند اگر آن‌ها رنگ‌های اصلی مشابه داشته باشند و اگر V ـ تصویر و هم‌تصویر آنها نیز مجموعه رنگ‌های اصلی مشابهی داشته باشند.

[۲۱] upper

[۲۲] reported to

۷.۴ کاربرد همارزی منظم نسبی در اطلاعات معبد سامپسون

مطالعه اجتماع‌سنجی [۲۳] معروف سامپسون [۲۴] ([۷۲]) که به تحلیل روابط در یک معبد [۲۵] می‌پردازد، نشان داد موج ناآرامی‌های به وجود آمده در آن معبد در سال ۱۹۶۰، به دو شاخه تقسیم می‌شود. نمودارهای اجتماع‌سنجی این مطالعه، توسط مردم بسیاری تحلیل شده است، بنابراین با ایده‌های زبانی اینجا، در این زمینه آشنا، سازگاری دارد. در حقیقت، هشت رابطه سامپسون در بین افراد این معبد، در دنیای واقعی وجود دارد و به صورت زیر هستند:
تأثیر [۲۶]، (مانند دوستی، چون در پرسشنامه استفاده شده به وسیله سامپسون از جهان واقعی استفاده شده است [۷۲]،) قدر [۲۷] ، نفوذ [۲۸] ، تحسین [۲۹] ، به علاوه همتای منفی آنها از اول تا چهارم مرتب شده‌اند. گرچه، برای اهداف اینجا فقط رابطه دوستی مورد بررسی قرار می‌گیرد. حال اگر بخواهیم معبد را با شبکه اجتماعی مقایسه کنیم، مجموعه افراد معبد، همان مجموعه I در شبکه اجتماعی و رابطه دوستی در بین افراد معبد، همان رابطه V ای است که در بین افراد وجود دارد. اعداد موجود در ماتریس $T_۴$ ، مرتبط با رابطه دوستی است که در بین افراد معبد وجود دارد و به وسیله سامپسون ([۷۲]) به صورت زیر اصلاح شده‌اند:
۱- اگر اعداد صفر و منفی داشتیم به جای آنها در ماتریس، عدد صفر می‌گذاریم
۲-اگر اعداد مثبت داشتیم به جای آن‌ها عدد ۱ قرار می‌دهیم.
این اطلاعات در شکل ۶.۴ ، به وسیله یک ماتریس مجاورت ۱۸ در ۱۸ نشان داده شده‌اند، اعداد روی قطر ماتریس، به وسیله ستاره مشخص شده‌اند، به طوری که نامشخص بودن رابطه انعکاسی در رابطه دوستی را مشخص می‌کنند، یعنی، آیا راهب‌ها خودشان را دوست دارند؟ بوید(۱۹۹۱)، براساس نیم‌گروه‌ها اعداد روی قطر ماتریس را صفر قرار داد، اما قطرهای توان‌های بالاتر روابط مثبت، به علاوه توان‌های زوج روابط منفی، در ماتریس با عدد یک پر می‌شوند. چون در اینجا توان‌های روابط اجتماعی V ، در نظر گرفته نمی‌شوند، باید قطر بیشتر مورد بررسی قرار بگیرد. دلیلی برای این که چرا خوددوستی یا خودآزاری به صورت تجربی را نمی‌توان اندازه گرفت، وجود ندارد، بنابراین انتظار می‌رود که در مطالعات بعدی از این وضعیت دشوار دوری شود، بنابراین در نبود اطلاعاتی در مورد قطرها باید یک انتخاب انجام بدهیم. گذاشتن صفر روی قطر، روشی سنتی است، چون که احتمالاً نتایج اشتباهی از انتخاب نکردن را به دست می‌دهد و این دلیل خوبی است که قطرها را در هر رابطه مثبت، با عدد یک پر کنیم و علت این کار از نظریه «توازن ساختار [۳۰]» کارترایت و هراری([۳۵]) [۳۱] به وجود آمده است، که خود آن براساس نظریه ناهماهنگی شناختی هیدر([۳۲] [۴۹]) به وجود آمده است. برای تحلیل پیش رو، قطرها یک در نظر گرفته می‌شوند.
برچسب عددی در ماتریس ۶.۴ ، به کد استفاده شده مقاله وایت و همکارانش ([۱۸]) مربوط می‌شود.

[۲۳] sociometric
[۲۴] Sampson
[۲۵] monastery
[۲۶] Affective
[۲۷] Esteem
[۲۸] Influence
[۲۹] Praise
[۳۰] structure balance
[۳۱] cartwright and harary
[۳۲] heider

		اقلیت وفادار							ترکهای جوان							رانده شده‌ها			
		۱۰	۵	۹	۶	۴	۱۱	۸	۱۲	۱	۲	۱۴	۱۵	۷	۱۶	۱۳	۳	۱۷	۱۸
۱۰	رومولند	*	۱	۱	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۰
۵	بونیونچر	۰	*	۱	۰	۱	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
۹	امبروز	۰	۱	*	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
۶	برتهولد	۰	۱	۱	*	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
۴	پیتر	۰	۱	۰	۱	*	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
۱۱	لوییز	۰	۱	۰	۰	۰	*	۱	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
۸	ویکتور	۰	۰	۱	۱	۱	۰	*	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
۱۲	وینفرد	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	*	۱	۱	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰
۱	جان بوسکو	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	*	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۰
۲	گرگوری	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۱	*	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰
۱۴	هیوج	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۱	۰	*	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰
۱۵	بونیفیس	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۱	۰	*	۱	۰	۰	۰	۰	۰
۷	مارک	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۱	۰	۰	*	۱	۰	۰	۰	۰
۱۶	آلبرت	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۱	۱	*	۰	۰	۰	۰
۱۳	امند	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۰	*	۰	۰	۱
۳	باسیل	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۱	*	۱	۱
۱۷	الیاس	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۱	*	۱
۱۸	سمپلکیوس	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۱	*

شکل ۶.۴: جدول رابطه دوستی سامپسون

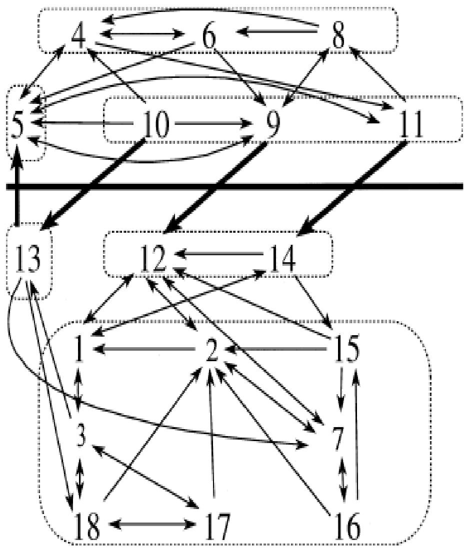
این اعداد کد، به مکان ترتیبی خود در ماتریس T_4 ،(سامپسون [۷۲]) مربوط می‌شود. اسامی استفاده شده بوسیله سامپسون([۷۲]) ، همچنین در شکل ۶.۴ وجود دارند. توجه کنید:

۱- هیچ‌کس، روmolند را دوست ندارد، و این مطلب، به وسیله یک ستون صفر در ماتریس مجاورت نشان داده می‌شود.

۲- رومولند ، شماره ۱۰ است.

۳- رومولند، اولین شماره در ماتریس مقاله وایت و همکارانش ([۱۸]) ظاهر می‌شود، و ۱۰ امین شماره در اطلاعات سامپسون (۱۹۶۹) است. به هر حال یک کاربرد از هم‌ارزی منظم نسبی، افراز π ، با خطچین‌ها در شکل ۷.۴ ، نشان داده شده است. در کلاس‌بندی وایت و همکاران([۷۲]) ، بلوک اولیه، «اقلیت وظیفه‌شناس [33] » است، در حالی که دومین بلوک، اتحاد«ترک‌های جوان [34] » و « اخراج شده‌ها [35] » است. این افراز، همچنین یک اعتبار وجودی مشخصی دارد که به وجود چهار کمان بین دو بلوک اشاره می‌کند و بیانگر این مطلب است که بلوک‌های غیر قطری، تقریباً بلوک‌های صفر هستند.

افراز بدست آمده از ماتریس ۶.۴ ، در شکل ۷.۴ ، نشان داده شده است. افراز دو قسمتی π ، با خطهای افقی ضخیم، نشان داده شده است. چهار کمان بین دو بلوک، خطهای ضخیم دارند، و نقش تعیین کننده خودشان را در رابطه هم‌ارزی منظم E ، نشان می‌دهند. راهب‌های ۱۲ و ۱۴، E ـ هم‌ارز هستند چون هر دوی آن‌ها دریافت کننده هستند، اما مقابله به مثل ندارند. راهب ۱۳ تنها است چون کمان‌ها را از بلوک‌های دیگر دریافت می‌کند و به آنها می‌فرستد. به طور مشابه، راهب‌های ۹،۱۰ و ۱۱ یکسان هستند چون آنها کمان‌ها را به سرتاسر دو قسمت می‌فرستند. توجه کنید که E ، هم‌ارزی منظم نیست: مثلاً ۱۱ V ۸ و ۸ E ۶ ، برقرار می‌شود، اما راهب j ، با شرط ۱۱Ej و jE۶ وجود ندارد و بیانگر



شکل ۷.۴: افراز راهب‌ها

[33] Loyal opposition

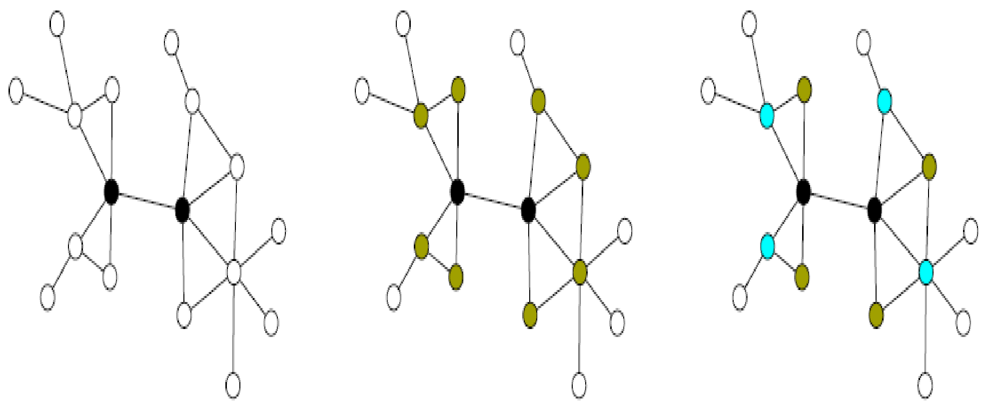
[34] Young Turks

[35] outcasts

این مطلب است که ترکیب E و V خاصیت جابجایی را ندارد. وقتی دنباله در ساختار فضیه ۲.۶.۴ ، برای پیدا کردن درونی منظم، بیشتر از دو مرتبه، بازخوانی می‌شود، آنگاه نتیجه این بازخوانی، پیدا کردن رابطه همانی است.

۸.۴ محاسبه درونی منظم

درونی منظم از یک رابطه هم ارزی E ، تظریف منظم درشت از E است. در ابتدا، محاسبه می‌تواند با E شروع شود که این کار با یک تعداد مراحل تظریف، در هر یک از افراد هم‌ارز جاری که به وسیله همسایه‌هایشان شکافته می‌شوند، انجام می‌گیرد تا جایی که همه افراد هم‌ارز، همسایه‌های یکسانی داشته باشند. نمونه‌ای از این چنین محاسباتی را در شکل ۸.۴ می‌توان دید. مدت زمان حرکت این محاسبات، مرتبط با سنگینی چگونگی مراحل این تظریف، سازماندهی شده است. کاترج [۳۶] [۲۱] ، بیشترین الگوریتم شناخته شده در ادبیات شبکه‌های اجتماعی است. مدت زمان آن از مرتبه $\mathcal{O}(n^۳)$ است. در



شکل ۸.۴: محاسبه درونی منظم. (چپ) افراز ابتدایی، (وسط) دومین مرحله، (راست) آخرین مرحله

مقاله [۲۱] ، بورگاتی و اورت، کاترج را به عنوان یک الگوریتم برای محاسبه هم‌ارزی منظم ماکزیمال از یک شبکه یا به طور کلی‌تر ، برای محاسبه درونی منظم از یک رابطه هم‌ارزی مطرح کردند.
کاترج با مرتبه زمانی $\mathcal{O}(n^۳)$ است. به طور واضح‌تر، مراحل الگوریتم کاترج به صورت زیر دیده می‌شود:

۱. کاترج، در هر مرحله از تظریف، افراز جاری P را حفظ می‌کند به طوری که مجموعه اولیه، افراز کامل (یا افراز دلخواه) است.

۲. در هر مرحله از تظریف، کاترج، برای هر جفت افراد هم‌ارز آزمایش می‌کند که آیا همسایه‌هایشان هم‌ارز هستند یا نه؟ اگر جواب مثبت بود، آنگاه این افراد هم‌ارز باقی می‌مانند. درغیر این صورت آن‌ها بعد از این مرحله تظریف، غیرهم‌ارز خواهند شد.

[۳۶] catrege

۳. اگر تغییری حاصل نشود، الگوریتم خاتمه پیدا می‌کند.
تعداد مرحل تظریف به وسیله n کراندار است، چون در هر مرحله تظریف (به جز آخرین مرحله)، تعداد کلاس‌های هم‌ارزی با حداقل یک رشد می‌کند. مدت زمان حرکت این مرحله از تظریف در مرتبه $\mathcal{O}(n^۲)$ است.

۱.۸.۴ نقش بزرگ‌ترین هم‌ارزی منظم در تحلیل شبکه

بزرگ‌ترین هم‌ارزی منظم، کمترین تعداد دسته‌ای که یک شبکه می‌تواند داشته باشد را پیدا می‌کند و این در تحلیل شبکه بسیار مؤثر است، زیرا هر چه تعداد دسته‌های افراد در یک شبکه کمتر باشد، بررسی و در نتیجه، شناخت هر دسته راحت‌تر خواهد بود.

۹.۴ نتیجه‌گیری

۱. ارتباط بین ماتریس رابطه هم‌ارزی منظم و ماتریس رابطه اختصاص نقش منظم، به صورت قانونمند و ریاضی بیان می‌شود.

۲. یک دنباله ممکن محاسباتی را برای پیدا کردن بزرگترین هم‌ارزی منظم در یک شبکه اجتماعی ارائه و مفهوم جدیدی به نام هم‌ارزی منظم نسبی را مطرح می‌کند. هم‌ارزی منظم نسبی، آسان‌تر از محاسبه درونی منظم (، یعنی، بزرگترین هم‌ارزی منظم) در داخل یک هم‌ارزی است چون دنباله تعریف شده از ماتریس‌ها که یک هم‌ارزی منظم می‌سازد، فقط یک بار تکرار می‌شود. هم‌ارزی منظم نسبی ، فقط در یک مرحله انجام می‌شود و ممکن است تفسیر واضح‌تری را نتیجه بدهد. هم‌ارزی منظم نسبی به لحاظ محاسباتی ساده است، اما به یک افراز ابتدایی یا یک دسته‌بندی ابتدایی از افراد نیاز دارد، چون شرط محاسبه آن فقط موضعی است، و برای ساختار شبکه کلی پیش‌بینی نمی‌شود.

۳. علتی که دنباله در ساختار قضیه ۲.۶.۴ را نزولی ساختیم، این بود که در حالت کلی، هم‌ارزی منظم مینیمال منحصربفرد که شامل یک دسته‌بندی از افراد شبکه اجتماعی باشد، وجود ندارد. در حالی که، روش دوم مفید است، یعنی، یک هم‌ارزی منظم ماکزیمال منحصربفرد داخل یک افراز یا دسته‌بندی اولیه از افراد، وجود دارد که همان درونی منظم یا بزرگترین هم‌ارزی منظم در داخل یک دسته‌بندی اولیه از افراد شبکه اجتماعی است.

۴. درونی منظم، برای پیدا کردن تلاقی دو هم‌ارزی منظم، مفید است. این به محاسبه همه هم‌ارزی‌های منظم، برای یک رابطه یا روابط اجتماعی کمک می‌کند. ساختن تلاقی در نظریه مجموعه‌ها از دو هم‌ارزی منظم، و سپس پیدا کردن درونی منظم از تلاقی این دو هم‌ارزی منظم است.

۵. اگر رابطه دوستی سامپسون، بوسیله دنباله‌ای که ساختیم تکرار شود، آنگاه ماتریس هم‌ارزی که از این دنباله حاصل می‌شود با ماتریس رابطه همانی برابر است، یعنی، تک تک افراد یک شبکه

اجتماعی، در دسته‌بندی‌های مختلفی وجود دارند. این یک ضعف در هم‌ارزی منظم را توضیح می‌دهد: در هر شبکه اجتماعی با اطلاعات پیچیده، تقریباً، هم‌ارزی‌های منظم غیر بدیهی وجود ندارد. و این دو دلیل می‌تواند داشته باشد: ۱- شکل ضعیفی از مفاهیمی را که بیشتر در داده‌های واقعی رخ می‌دهند، به تصویر می‌کشد ۲- باید به دنبال اندازه و جستجوی حقیقی‌تری بود.

فصل ۵

شبکه اجتماعی فازی با ساختار روابط مشبکه مانده کامل

۱.۵ چکیده

در این فصل، شبکه‌های اجتماعی با روابط فازی، مورد بررسی قرار می‌گیرند و باید به دنبال بزرگترین هم‌ارزی منظم فازی یا در برخی مواقع به دنبال بزرگترین هم‌ارزی معین بود، بنابراین تمام عملگرهای فازی با تمام مجموعه مقادیر درست که تشکیل یک مشبکه مانده کامل [۱] می‌دهند، مورد بررسی قرار گرفته می‌شود. سپس دستگاه‌های معادلات و نامعادلات روابط فازی به شکل $V_j o U \leqslant U o V_j$ و دستگاه‌های دوگان آن، یعنی، $U o V_j \leqslant V_j o U$ و عطف این دو دستگاه، یعنی، دستگاه $U o V_j = V_j o U$ مورد بررسی قرار می‌گیرد که U ، یک رابطه فازی نامشخص [۲] است و $\{V_j\}_{j \in J}$ ، خانواده روابط فازی داده شده روی مجموعه افراد I است. این دستگاه‌ها، دستگاه‌های خطی ضعیف [۳] نامیده می‌شوند.
برای هر دستگاه خطی ضعیف با یک مشبکه مانده کامل که ساختار مقادیر درست را به عنوان ساختار ضمیمه خود دارد بزرگترین جواب و همچنین یک الگوریتم برای محاسبه بزرگترین جواب ارائه می‌شود که این الگوریتم مؤثر است، هرگاه مشبکه مانده کامل ضمیمه، موضعاً متناهی [۴] باشد. در غیر این صورت، برخی شرایط کافی که الگوریتم تحت آنها، الگوریتم تأثیر گذار باشد ارائه می‌شود. الگوریتم تکرار شونده است و هر مرحله آن می‌تواند به عنوان جواب یک دستگاه خطی خاص باشد.

[۱] complete residuated lattice
[۲] unknown
[۳] weakly linear system
[۴] locally finite

۲.۵ مشبکه مانده کامل

لزوم طرح شبکه‌های اجتماعی فازی [۵] ؟ تحلیل شبکه اجتماعی به صورت فازی، [۶] به واقعیت نزدیک‌تر است.
شبکه‌های اجتماعی فازی به چه صورت هستند؟ چون تحلیل شبکه، بیشتر بر روی ارتباطات افراد کار می‌کند، بنابراین شبکه‌های اجتماعی فازی که در این پایان‌نامه مورد بررسی قرار می‌گیرند به شکل گراف‌های فازی هستند که فقط یال‌های آن‌ها فازی است. تمام عملگرهای مورد استفاده در مجموعه‌های قطعی، برای مجموعه‌های فازی نیز استفاده می‌شود و تمام حالت‌های خاص مجموعه مقادیر درست در منطق فازی [۷] که مشبکه مانده کامل هستند، مورد استفاده قرار می‌گیرد.

تعریف ۱.۲.۵. [۱۶] یک مشبکه مانده، یک جبر [۸] $\ell = (L, \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1)$ است به طوری که :

$(L1)$ $(L, \wedge, \vee, 0, 1)$ یک مشبکه با بیشترین عنصر ۱ و کمترین عنصر ۰ است.

$(L2)$ $(L, \otimes, 1)$ یک نیم‌گروه یکه‌دار با عنصر همانی یک است.

$(L3)$ $\otimes$ و $\longrightarrow$ ، یک زوج الحاقی [۹] تشکیل می‌دهند.
یعنی ویژگی زیر را دارند:

$$\forall x, y, z \in L \quad x \otimes y \leqslant z \Longleftrightarrow x \leqslant y \longrightarrow z. \tag{۱.۵}$$

به علاوه اگر شرط $(L1)$ با شرط $(L1')$ ، که به صورت زیر تعریف شده است جابجا شود، آنگاه این مشبکه، مشبکه مانده کامل نامیده می‌شود.

$(L1')$ $(L, \wedge, \vee, 0, 1)$ یک مشبکه کامل با بیشترین عنصر یک و کمترین عنصر صفر باشد.

تعریف ۲.۲.۵. [۱۱] یک t - نرم [۱۰] ، یک تابع دو متغیره t از $[0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$ است به طوری که
$\forall x, y, z \in [0,1]$ شرایط زیر را داشته باشد:

الف) $t(t(x,y),z) = t(x,t(y,z))$ **(شرکت‌پذیری)**

ب) $t(x,y) = t(y,x)$ **(جابجایی)**

ج) $x \leqslant y \implies t(x,y) \leqslant t(y,x)$ **(یکنوایی)**

د) $t(x,1) = t(1,x) = x$

[۵] fuzzy social networks
[۶] fuzzy social networks analysis
[۷] fuzzy logic
[۸] algebra
[۹] adjoint pair
[۱۰] norm

ه) $t(x, \circ) = t(\circ, x) = \circ$

همچنین، اگر $\forall x \in [\circ, \text{۱}]$ و برای همه دنباله‌های غیرنزولی $\{x_n\}_{n \in N}$ داشته باشیم:

و)

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} t(x_n, y) = t(\lim_{n \longrightarrow \infty} x_n, y)$$

، آنگاه t − نرم ، پیوسته چپ [۱۱] خواهد بود.

عملگر ⊗ (حاصل‌ضرب) [۱۲]عطف و ⟶ (ماندگی) [۱۳] استلزام در حساب منطقی،(∨) سوپریمم و (∧) اینفیمم به کار برده می‌شود. عملگر ⟷ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$x \longleftrightarrow y = (x \longrightarrow y) \wedge (y \longrightarrow x) \qquad (۲.۵)$$

که دو استلزام [۱۴] نامیده می‌شود و برای هم‌ارزی مقادیر درست به کار می‌رود. بیشترین ساختارهای [۱۵] کاربردی و مورد مطالعه از مقادیر درست روی بازه حقیقی $[\circ, \text{۱}]$ ، با تعریف‌های زیر انجام می‌گیرد:

$$x \wedge y = min(x, y) \qquad , \qquad x \vee y = max(x, y).$$

و این اعمال در چند ساختار به کار برده می‌شوند که به شرح زیر هستند :

۱ **ساختار لوکاسیویچ**[۱۶]

$$x \otimes y = max(x+y-\text{۱}, \circ) \quad , \quad x \rightarrow y = min(\text{۱}-x+y, \text{۱})$$

۲ **ساختار گوگن یا ضرب** [۱۷]

$$\begin{cases} x \otimes y = x.y \quad , \quad x \rightarrow y = \text{۱} & x \leqslant y \\ x \otimes y = x.y \quad , \quad x \rightarrow y = y/x & o.w \end{cases}$$

۳ **ساختار گودل** [۱۸]

$$\begin{cases} x \otimes y = min(x, y) \quad , \quad x \rightarrow y = \text{۱} & x \leqslant y \\ x \otimes y = min(x, y) \quad , \quad x \rightarrow y = y & o.w \end{cases}$$

به عبارت دیگر، یک جبر $([\circ, \text{۱}], \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, \circ, \text{۱})$ ، یک مشبکه مانده کامل نامیده می‌شود اگر و فقط اگر ⊗ ، یک t−نرم پیوسته چپ باشد و ماندگی بدین صورت باشد:

$$x \rightarrow y = \vee \left\{ u \in [\circ, \text{۱}] | u \otimes x \leqslant y. \right\}$$

مجموعه مهم دیگر مقادیر درست، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\left\{ a_\circ, a_\text{۱}, \ldots, a_n \right\} \qquad , \qquad \circ = a_\circ < a_\text{۱} < \ldots < a_n = \text{۱}$$

[۱۱] left-continuous
[۱۲] multiplication
[۱۳] reiduum
[۱۴] biimplication
[۱۵] structures
[۱۶] Lukasiewicz
[۱۷] product or Goguen
[۱۸] Godel

و عملگرهای آن به صورت زیر هستند:

$$a_k \otimes a_l = a_{max(k+l-n,0)} \qquad , \qquad a_k \rightarrow a_l = a_{min(n-k+l,n)}$$

حالت خاص جبر بالا، جبر بولی [۱۹] دو عنصری از منطق کلاسیک [۲۰] با مجموعه $\{0,1\}$ است. اگر هر زیرجبر تولید شده از یک مشبکه مانده L ، متناهی باشد، آنگاه L موضعاً متناهی [۲۱] است. به عنوان مثال، هر ساختار گودل موضعاً متناهی است، ولی ساختار ضرب، موضعاً متناهی نیست. اگر ℓ یک مشبکه مانده کامل باشد، آنگاه $\forall x,y,z \in L$ ، $\forall \{y_j\}_{j\in J}$ ، شرایط زیر برقرارند:

$$x \longrightarrow y \leqslant x \otimes z \longrightarrow y \otimes z \tag{۳.۵}$$

$$(x \longrightarrow y) \otimes (y \longrightarrow z) \leqslant (x \longrightarrow z) \tag{۴.۵}$$

$$\bigwedge_{j\in J}(x_j \longrightarrow y_j) \leqslant (\bigvee_{j\in J} x_j) \longrightarrow (\bigvee_{j\in J} y_j) \tag{۵.۵}$$

برای ویژگی‌های دیگر مشبکه مانده کامل به [۱۰] و [۱۱] رجوع شود.
اگر ℓ ، یک مشبکه باشد. یک زیرمجموعه ℓ - فازی از یک زیرمجموعه A ، هر تابع از A داخل L است. اگر ساختار ℓ از مقادیر درست، مشخص باشد، برای سادگی، واژه زیرمجموعه فازی به جای واژه زیرمجموعه ℓ - فازی به کار برده می‌شود. مجموعه همه زیرمجموعه‌های ℓ - فازی از I را با $\mathscr{F}(I)$ نشان می‌دهند. اگر $g \in \mathscr{F}(I)$ و f باشند، آنگاه تساوی f و g ، با تساوی توابع آنها برقرار می‌شود، یعنی:

$$f = g \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(x) = g(x) \qquad \forall x \in I$$

شمول f در g بدین صورت نمایش داده می‌شود:

$$f \leqslant g \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(x) \leqslant g(x) \qquad \forall x \in I.$$

با داشتن این ترتیب جزئی، مجموعه $\mathscr{F}(I)$ ، یک مشبکه تشکیل می‌دهد. به طوری‌که $\wedge_{j\in J} f_j$ (اشتراک) و $\vee_{j\in J} f_j$ (اجتماع) از خانواده ${f_j}_{j\in J}$ که زیرمجموعه‌های ℓ فازی روی I ، از I به درون L هستند و به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$(\bigwedge_{j\in J} f_j)(x) = \bigwedge_{j\in J} f_j(x) \qquad , (\bigvee_{j\in J} f_j)(x) = \bigvee_{j\in J} f_j(x) \tag{۶.۵}$$

اگر f ، یک مجموعه قطعی [۲۲] از مجموعه I باشد، آنگاه $f^c : I \longrightarrow L$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$f(x) < 0 \Longrightarrow f^c(x) = 0 \qquad , \qquad f(x) = 1 \Longrightarrow f^c(x) = 1.$$

---

[۱۹] boolean algebra
[۲۰] classic logic
[۲۱] locally finite
[۲۲] crisp

زیرمجموعه ℓ فازی از I ، نرمال [۲۳] است اگر برای حداقل یک $x \in I$ ، $f(x)=۱$ باشد، یعنی، قسمت قطعی آن غیر تهی باشد.
اساس نگرش ما نسبت به شبکه‌های اجتماعی، براساس یک رابطه فازی است. یک رابطه فازی روی مجموعه I ، هر زیرمجموعه فازی از ضرب دکارتی $I\times I$ است. به عبارت دیگر، هر تابع $R: I\times I$ است. تساوی، شمول، اجتماع، اشتراک و ترتیب روابط ℓ - فازی مانند اعمال مجموعه‌های ℓ - فازی است. $\mathscr{R}(I)$ ، مجموعه همه روابط فازی روی مجموعه I است. اگر ساختار ℓ از مقادیر درست، مشخص باشد، آنگاه برای سادگی، واژه رابطه فازی به جای رابطه ℓ - فازی به کار برده می‌شود.

نکته ۳.۲.۵. اگر شرط متناهی بودن گفته نشد در غیر این صورت، I ، یک مجموعه غیرتهی نه لزوماً متناهی و ℓ یک مشبکه مانده کامل است.

تعریف ۴.۲.۵. [۱۶] برای روابط ℓ - فازی $S \in \mathscr{R}(I)$ و R ، ترکیب RoS ، یک رابطه ℓ - فازی روی I است و به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$(RoS)(a,b) = \bigvee_{c\in I} R(a,c)\otimes S(c,b) \tag{۷.۵}$$

برای $S,T \in \mathscr{R}(I)$ و R خواص زیر را داریم:

$$(RoS)(T) = Ro(SoT) \tag{۸.۵}$$

$$R\leqslant S \Longrightarrow RoT \leqslant SoT\,,\, ToR \leqslant ToS \tag{۹.۵}$$

برای $n\in N$ ، یک توان n امین از یک رابطه ℓ - فازی $R\in\mathscr{R}(I)$ ، یک رابطه ℓ - فازی R^n روی I به صورت استقرایی، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$R^{۱} = R\ ,\ R^n oR = R^{n+۱}$$

R° ، می‌تواند رابطه همانی روی I باشد.
به علاوه، اگر ℓ ، یک مشبکه مانده کامل باشد، آنگاه برای همه دنباله‌های $S\in\mathscr{R}(I)$ و $\forall R$ $\{R_j\}_{j\in J}\subseteq \mathscr{R}(I)$ و روابط $\{S_j\}_{j\in J}$ خواص زیر را داریم:

$$Ro(\bigvee_{j\in J} S_j) = \bigvee_{j\in J}(RoS_j) \quad , \quad (\bigvee_{j\in J} R_j)oS = \bigvee_{j\in J}(R_j oS) \tag{۱۰.۵}$$

$$Ro(\bigwedge_{j\in J} S_j) \leqslant \bigwedge_{j\in J}(RoS_j) \quad , \quad (\bigwedge_{j\in J} R_j)oS \leqslant \bigwedge_{j\in J}(R_j oS) \tag{۱۱.۵}$$

و دستگاه $(R(I),\vee,\wedge,\circ,\varnothing,\omega_I,l_I)$ تشکیل یک مشبکه می‌دهد به طوری که ω_I ، رابطه مرجع روی I و l_I رابطه همانی روی I است، یعنی، $\forall a,b\in I$:

$$\begin{cases} l_I(a,b) = ۱ & a=b \\ l_I(a,b) = \circ & a\neq b \end{cases}$$

[۲۳] normalized

اگر I ، متناهی با n عنصر باشد، آنگاه R,S ، به عنوان ماتریس‌های فازی $n\times n$ تحت ساختار ℓ هستند.

برای هر رابطه ℓ − فازی R روی I ، رابطه فازی R^t روی I را با $\forall a,b\in I, R^t(a,b)=R(b,a)$ که ترانهاده ماتریس R نامیده می‌شود.

هم‌ارزی فازی:[۱۶] یک رابطه هم‌ارزی فازی روی I ، یک رابطه فازی E روی I است به طوری که $\forall x,y,z\in I$ شرایط زیر را دارا باشد:

۱ (رابطه انعکاسی)
$$E(x,x)=1$$
۲ (رابطه متقارن)
$$E(x,y)=E(y,x)$$
۳ (رابطه تعدی)
$$E(x,y)\otimes E(y,z)\leqslant E(x,z).$$

برای یک رابطه ℓ − فازی R روی I ، یک رابطه ℓ − فازی تعدی روی I ، یک رابطه ℓ − فازی R^∞ روی I است که با $R^\infty=\bigvee_{n\in N} R^n$ نشان داده می‌شود و کوچکترین رابطه ℓ − فازی تعدی روی I شامل R است و آن را بستار تعدی R می‌نامند.

شبه‌ترتیب ℓ − فازی و معین:[۱۶] یک رابطه ℓ − فازی تعدی و انعکاسی روی I ، یک شبه‌ترتیب ℓ فازی (یا فقط یک شبه‌ترتیب فازی) نامیده می‌شود. اگر ℓ مشخص باشد، آنگاه رابطه معین تعدی و انعکاسی روی I ، شبه‌ترتیب نامیده می‌شود. یک رابطه فازی انعکاسی R روی I یک شبه‌ترتیب فازی است اگر و فقط اگر $R^2=R$ برقرار باشد.

هم‌ارزی ℓ − فازی و معین :[۱۶] یک رابطه ℓ − فازی انعکاسی، تقارنی و تعدی روی I ، یک هم‌ارزی ℓ − فازی (یا فقط هم‌ارزی فازی)، نامیده می‌شود. یک رابطه معین انعکاسی، تقارنی و تعدی روی I ، یک هم‌ارزی معین نامیده می‌شود.

هم‌ارزی ℓ − فازی طبیعی: [۱۶] اگر R یک شبه‌ترتیب ℓ − فازی I باشد، آنگاه $R\wedge R^t$ بزرگترین هم‌ارزی ℓ − فازی مشمول در R است و هم‌ارزی فازی طبیعی [۲۴] از R نامیده می‌شود.

اگر Q یک شبه‌ترتیب فازی روی I باشد.

برای $\forall a\in I$ ، Q − پس‌مجموعه‌ای [۲۵] از a ، یک زیرمجموعه ℓ فازی Q_a از I است که به وسیله $\forall a\in I, Q_a(x)=Q(a,x)$ و Q − پیش‌مجموعه‌ای [۲۶] از a ، یک زیرمجموعه ℓ − فازی Q^a را با $\forall a\in I, Q^a(x)=Q(x,a)$ نشان می‌دهند. مجموعه همه Q − پس‌مجموعه‌ها را با $I\diagup Q$ نشان می‌دهند و مجموعه همه Q پیش‌مجموعه‌ها را با $I\diagdown Q$ نشان می‌دهند.

مجموعه عامل:[۱۶] اگر E یک هم‌ارزی ℓ − فازی باشد، آنگاه برای $E_a=E^a, \forall a\in I$ و E_a مجموعه همه رده‌های از a با دریافت رابطه E است. مجموعه همه رده‌های هم‌ارزی E را با $I\diagup E$ نشان می‌دهند و مجموعه عامل I با دریافت E نامیده می‌شود.

اندیس:[۱۶] برای هر شبه‌ترتیب ℓ − فازی Q روی مجموعه I و هم‌ارزی ℓ فازی طبیعی آن، مجموعه $I\diagup Q$ از همه Q − پس‌مجموعه‌ها، مجموعه $I\diagdown Q$ از همه Q − پیش‌مجموعه‌ها و مجموعه عامل

[۲۴] natural fuzzy equivalence
[۲۵] afterset
[۲۶] foreset

$E \diagup I$ ، اندازه‌های مشابه دارند. این اندازه، اندیس [۲۷] Q نامیده می‌شود و با $ind(Q)$ نشان داده می‌شود.
اگر یک مجموعه متناهی با n عضو و Q ، شبه‌ترتیب ℓ - فازی روی I را به عنوان ماتریس فازی $n \times n$ تحت ℓ در نظر بگیریم، آنگاه Q - پس‌مجموعه‌ها، بردارهای سطری هستند و Q - پیش‌مجموعه‌ها، بردارهای ستونی این ماتریس هستند.

تعریف ۵.۲.۵. [۱۴] **افراز فازی** : هر خانواده از زیرمجموعه‌های ℓ - فازی نرمال از مجموعه I ، شامل همه رده‌های هم‌ارزی از یک هم‌ارزی ℓ - فازی روی مجموعه I را یک افراز فازی می‌نامند.

برای اطلاعات بیشتر در مورد مشبکه و مفاهیم مرتبط به [۱۲]،[۱۳]،[۶۹] و برای اطلاعات بیشتر در مورد مجموعه‌های فازی و روابط فازی به [۱۰]،[۱۱]،[۵۲] و [۴۳] رجوع شود.

۳.۵ مانده‌ها از روابط فازی

در این بخش، ویژگی‌های اصلی مانده‌های روابط فازی در نظر گرفته می‌شوند و چندین عمل جدید روی روابط فازی که در کار پیش‌رو نیاز است مطرح می‌شود. برخی نتایج مطرح شده در اینجا به طور واقعی آشنا هستند یا به طور مستقیم از برخی نتایج آشنا در [۶۶]،[۴۴]،[۶۲] و [۷۳] و دیگر مقاله‌های مرتبط بدست آمده‌اند. برای تکمیل مطلب، بعضی از اثبات‌ها نیز داده می‌شوند.
اگر ℓ ، یک مشبکه و W,V ، روابط ℓ - فازی روی مجموعه غیرتهی I و همچنین بزرگترین رابطه ℓ - فازی U روی I ، وجود داشته باشد به طوری که $VoU \leqslant W$ برقرار باشد، آنگاه W/V ، مانده راست W با V نامیده می‌شود. به طور مشابه، اگر بزرگترین رابطه ℓ فازی U روی I ، وجود داشته باشد به طوری که $UoV \leqslant W$ برقرار باشد، آنگاه $W\backslash V$ ، مانده چپ W با V نامیده می‌شود، به عبارت دیگر، اگر آنها وجود داشته باشند، W/V ، بزرگترین جواب نامعادله خطی $VoU \leqslant W$ است و $W\backslash V$ ، بزرگترین جواب $UoV \leqslant W$ است که U یک رابطه فازی نامشخص است.
مانده‌های روابط معین، به وسیله بیرخوف [۲۸]([۱۲]) به عنوان بهترین تقریب [۲۹] در روابط معکوس معرفی شده‌اند. برای ویژگی‌های اساسی و سازنده از مانده‌های روابط معین، به بوید و اورت [۱۶] مراجعه شود.
فان، لیا و لین [۴۰] ، مانده‌های روابط فازی را با مقادیر عضویت در ساختار گودل بررسی کرده‌اند، اما آنها در مورد ساخت و وجودشان بحث نکردند. در اینجا شرایط لازم و کافی برای وجود مانده‌ها در هر جفت رابطه ℓ - فازی در ساختار مقادیر عضویت ℓ و یک روش، برای ساخت آنها مطرح می‌شود.

گزاره ۱.۳.۵. [۱۶] اگر $\ell = ([\circ,\text{۱}],\wedge,\vee,\otimes,\circ,\text{۱})$ یک جبر، که $\otimes$ ، یک t - نرم است، آنگاه شرایط زیر معادلند:

الف) $\otimes$ ، یک t - نرم پیوسته چپ است.

[۲۷] index
[۲۸] birkhoff
[۲۹] approximation

ب) هر دو رابطه ℓ - فازی روی مجموعه مشابه، مانده راست دارند.

ج) هر دو رابطه ℓ - فازی روی مجموعه مشابه، مانده چپ دارند.

در ادامه اگر به این موضوع اشاره نشود، در این صورت I ، یک مجموعه غیرتهی نه لزوماً متناهی و ℓ مشبکه مانده کامل است [۱۶].

قضیه ۲.۳.۵. [۱۶] اگر V, W ، روابط فازی روی مجموعه I باشند، آنگاه $\forall a, b \in I$ نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$(W\backslash V)(a,b) = \bigwedge_{c\in I} V(b,c) \longrightarrow W(a,c) \tag{۱۲.۵}$$

$$(W/V)(a,b) = \bigwedge_{c\in I} V(c,a) \longrightarrow W(c,b). \tag{۱۳.۵}$$

قضیه ۳.۳.۵. [۱۶] اگر V ، یک رابطه فازی روی I باشد، آنگاه :

الف) V/V و $V\backslash V$ ، شبه‌ترتیب‌های فازی هستند.

ب) V/V ، بزرگترین جواب $VoU = V$ است که U ، یک رابطه فازی نامشخص روی I است.

ج) $V\backslash V$ ، بزرگترین جواب $UoV = V$ است که U ، یک رابطه فازی نامشخص روی I است.

برهان. الف) : با استفاده از خاصیت ۴.۵ ، $\forall a, b, c, d \in I$ نتیجه زیر را داریم:

$$\begin{aligned} V/V(a,b) \otimes V/V(b,c) &= (\bigwedge_{d\in I} V(d,a) \longrightarrow V(d,b)) \otimes (\bigwedge_{d\in I} V(d,b) \longrightarrow V(d,c)) \\ &\leqslant (V(d,a) \longrightarrow V(d,b)) \otimes (V(d,b) \longrightarrow V(d,c)) \\ &\leqslant V(d,a) \longrightarrow V(d,c) \end{aligned}$$

و :

$$V/V(a,b) \otimes V/V(b,c) \leqslant \bigwedge_{d\in I} V(d,a) \longrightarrow V(d,c) = V/V(a,c)$$

بنابراین V/V ، تعدی است. به وضوح V/V ، انعکاسی است. پس V/V ، یک شبه‌ترتیب فازی است. به طور مشابه، می‌توان ثابت کرد که $V\backslash V$ ، یک شبه‌ترتیب فازی است.
ب) : با تعریف مانده راست، V/V ، بزرگترین جواب $VoU \leqslant V$ است. از سوی دیگر، به وسیله خاصیت انعکاسی V/V ، برای $\forall a, b \in I$ ، نتیجه زیر به دست می‌آید:

$$V(a,b) = V(a,b) \otimes V/V(b,b) \leqslant \bigvee_{c\in I} V(a,c) \otimes V/V(c,b) = (Vo(V/V))(a,b)$$

و $V \leqslant Vo(V/V)$ ، پس V/V ، یک جواب در $VoU = V$ است و چون هر جواب در $VoU = V$ ، یک جواب در $VoU \leqslant V$ است، بنابراین جواب به دست آمده، بزرگترین جواب در $VoU = V$ است.
به طور مشابه بند ج) اثبات می‌شود. □

گزاره ۴.۳.۵. [۱۶] اگر V ، یک رابطه فازی روی I باشد، آنگاه شرایط زیر معادلند:

الف) V یک شبه‌ترتیب فازی است.

ب) $V/V=V$

ج) $V\backslash V=V$

برهان. **الف)** $\Longrightarrow$ **ب)** : اگر $V/V=V$ ، آنگاه برطبق قضیه ۳.۳.۵ ، V ، یک شبه ترتیب فازی است.

الف) $\Longleftarrow$ **ب)** : اگر V ، یک شبه‌ترتیب فازی باشد. چون V ، انعکاسی است، بنابراین برای $\forall a,b\in I$

$$V/V(a,b)=V(a,a)\otimes V/V(a,b)\leqslant\bigvee_{c\in I}V(a,c)\otimes V/V(c,b)=(Vo(V/V))(a,b)=V(a,b).$$

و $V/V\leqslant Vo(V/V)=V$ است. از سوی دیگر، هر دو رابطه V و V/V ، جواب‌های $VoU=V$ هستند و V/V بزرگترین جواب آن است، پس $V\leqslant V/V$ است، بنابراین $V/V=V$ است. به طور مشابه **ج)** $\Longleftrightarrow$ **ب)** اثبات می‌شود. □

با استفاده از مانده‌های چپ و راست، مانند ترکیب روابط فازی، چندین نوع عملگر و ویژگی جدید بر روی روابط فازی بررسی و تعریف می‌شوند، بنابراین ابتدا برای هر رابطه فازی V روی مجموعه I ، مجموعه‌های $V//V=(V/V)\bigwedge(V/V)^t$ و $V\backslash\backslash V=(V\backslash V)\bigwedge(V\backslash V)^t$ ، یعنی، برای $\forall a,b\in I$ نتیجه زیر به دست می‌آید:

$$(V\backslash\backslash V)(a,b)=\bigwedge_{c\in I}V(a,c)\longleftrightarrow V(b,c)\qquad (V//V)(a,b)=\bigwedge_{c\in I}V(c,a)\longleftrightarrow V(c,b).\tag{۱۴.۵}$$

به کمک قضیه ۳.۳.۵ ، $V/V,V\backslash V$ شبه‌ترتیب‌های فازی هستند، بنابراین $V//V$ و $V\backslash\backslash V$ ، به ترتیب، هم‌ارزی‌های فازی طبیعی از V/V و $V\backslash V$ هستند.

سپس، برای روابط فازی W و V روی مجموعه I ، روابط فازی $W\oslash V$ و $W\otimes V$ به صورت زیر هستند:

$$W\otimes V=(WoV)\backslash(WoV)\qquad W\oslash V=(WoV)/(WoV).\tag{۱۵.۵}$$

به عبارت دیگر، برای $a,b\in I$ بدست می‌آید:

$$W\oslash V(a,b)=\bigwedge_{c\in I}(WoV)(c,a)\longrightarrow(WoV(c,b)$$
$$W\otimes V(a,b)=\bigwedge_{c\in I}(WoV)(b,c)\longrightarrow(WoV(a,c).\tag{۱۶.۵}$$

بر طبق قضیه ۳.۳.۵ ، $W\oslash V$ و $W\otimes V$ ، برای روابط فازی دلخواه W و V ، شبه‌ترتیب‌های فازی هستند و هم‌چنین روابط فازی $W\hat{\oslash}V$ و $W\hat{\otimes}V$ روی I ، به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$W\hat{\otimes}V=(WoV)\backslash\backslash(WoV)=(W\otimes V)\bigwedge(W\otimes V)^t$$
$$W\hat{\oslash}V=(WoV)//(WoV)=(W\oslash V)\bigwedge(W\oslash V)^t.\tag{۱۷.۵}$$

یعنی، $W\hat{\otimes}V$ و $W\hat{\oslash}V$ ، به ترتیب، هم ارزی‌های فازی طبیعی از $W \otimes V$ و $W \oslash V$ هستند، بنابراین برای $a,b \in I$ دلخواه، عبارت زیر حاصل می‌شود :

$$(W\hat{\otimes}V)(a,b) = \bigwedge_{c\in I}(WoV)(a,c) \longleftrightarrow (WoV(b,c)$$
$$(W\hat{\oslash}V)(a,b) = \bigwedge_{c\in I}(WoV)(c,a) \longleftrightarrow (WoV)(c,b). \qquad (۱۸.۵)$$

۴.۵ وجود بزرگترین جواب در یک دستگاه خطی ضعیف

در این بخش فرض می‌شود که I ، یک مجموعه غیرتهی(نه لزوماً متناهی)، $\{V_j\}_{j\in J}$ ، یک خانواده از روابط فازی روی I (که J نیز نه لزوماً متناهی) و W ، یک رابطه فازی داده شده روی I باشد. اگر دستگاه‌های زیر از معادلات و نامعادلات روابط فازی در نظر گرفته شوند:

$$UoV_j \leqslant V_joU \qquad (j\in J) \qquad U\leqslant W \qquad (۱۹.۵)$$
$$V_joU \leqslant UoV_j \qquad (j\in J) \qquad U\leqslant W \qquad (۲۰.۵)$$
$$UoV_j = V_joU \qquad (j\in J) \qquad U\leqslant W. \qquad (۲۱.۵)$$

که U ، یک رابطه فازی نامشخص روی مجموعه I است. جواب‌های در نامعادلات ۱۹.۵،۲۰.۵ و ۲۱.۵ ، به ترتیب، روابط فازی منظم راست، منظم چپ و منظم روی مجموعه I با دریافت خانواده روابط فازی $\{V_j\}_{j\in J}$ و رابطه فازی W هستند. به وضوح، اگر $W=\omega_I$ ، آنگاه نامعادله $U\leqslant W$ ، بدیهی می‌شود و می‌تواند حذف شود. در این حالت، جواب‌های دستگاه‌های ۱۹.۵،۲۰.۵ و ۲۱.۵ ، روابط فازی منظم راست، منظم چپ و منظم با دریافت خانواده روابط فازی $\{V_j\}_{j\in J}$ هستند. هدف این بخش، اثبات وجود بزرگترین جواب در دستگاه خطی ضعیف است.
ابتدا قضیه زیر اثبات می‌شود.

قضیه ۱.۴.۵. [۱۶] دستگاه‌های ۱۹.۵،۲۰.۵ و ۲۱.۵ دارای بزرگترین جواب هستند.
اگر W یک شبه‌ترتیب فازی باشد، آنگاه بزرگترین جواب‌ها همچنین شبه‌ترتیب‌های فازی هستند.

برهان. در اینجا فقط حکم دستگاه ۱۹.۵ اثبات می‌شود. مابقی احکام به طور مشابه اثبات می‌شود.
واضح است که دستگاه ۱۹.۵ ، حداقل یک جواب دارد و آن جواب، رابطه تهی روی I است. اگر $\{R_h\}_{h\in H}$ یک خانواده از روابط فازی روی مجموعه I باشند به طوری که جواب‌های دستگاه ۱۹.۵ هستند و همچنین Q ، نشان دهنده الحاق این خانواده است. برای $\forall j\in J$ ، به کمک معادله ۱۰.۵ ، نتیجه زیر به دست می‌آید:

$$QoV_j = (\bigvee_{h\in H} R_h)oV_j = \bigvee_{h\in H}(R_hoV_j) \leqslant \bigvee_{h\in H}(V_joR_h) = V_jo(\bigvee_{h\in H} R_h) = V_joQ.$$

همچنین واضح است که $Q\leqslant W$ است. بنابراین، Q یک جواب ۱۹.۵ است. به وسیله تعریف آن، Q بزرگترین جواب در ۱۹.۵ است.

سپس بر طبق معادله ۹.۵ ، برای $\forall j \in J$ به دست می‌آید:

$$QoV_j \leqslant V_joQ \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} QoV_joQ \leqslant V_joQoQ \\ QoQoV_j \leqslant QoV_joQ \end{cases}$$

بنابراین :

$$QoQoV_j \leqslant QoV_joQ \leqslant V_joQoQ$$

و اگر W ، یک شبه‌ترتیب فازی باشد، آنگاه $QoQ \leqslant WoW = W$ ، بنابراین QoQ یک جواب در دستگاه ۱۹.۵ است. چون Q ، بزرگترین جواب در دستگاه ۱۹.۵ است، نتیجه می‌شود که $QoQ \leqslant Q$ ، بنابراین Q ، تعدی است و همچنین $l_I \leqslant Q$ ، یعنی Q ، انعکاسی است و بنابراین Q یک شبه‌ترتیب فازی است. $\square$

سپس، اگر مشبکه $\mathcal{Q}(I)$ از همه شبه‌ترتیب‌های فازی روی I در نظر گرفته شوند. توابع ϕ^q_{rr}, ϕ^q_{lr} و ϕ^q_r از $\mathcal{Q}(I)$ داخل خودش به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\phi^q_{rr}(Q) = \bigwedge_{j\in J} V_j \otimes Q \ , \phi^q_{lr}(Q) = \bigwedge_{j\in J} Q \oslash V_j \ , \phi^q_r(Q) = \bigwedge_{j\in J} (V_j \otimes Q) \wedge (Q \oslash V_j) \qquad (۲۲.۵)$$

$$\forall Q \in \mathcal{Q}(I).$$

همان طور که بلافاصله بعد از تعریف اعمال $\forall j \in J, \oslash$ و $\otimes$ اشاره شد، $Q \oslash V_j$ و $V_j \otimes Q$ شبه‌ترتیب‌های فازی هستند(، حتی اگر Q ، یک شبه‌ترتیب فازی نباشد). بنابراین، ϕ^q_{rr}, ϕ^q_{lr} و ϕ^q_r ، شبه‌ترتیب‌های فازی هستند، پس ϕ^q_{rr}, ϕ^q_{lr} و ϕ^q_r ، مجموعه‌های $\mathcal{Q}(I)$ را به داخل خودش می‌نگارند.
قضیه زیر، ویژگی این جواب‌ها را در دستگاه ۱۹.۵ به دست می‌دهد که شبه‌ترتیب‌های فازی هستند، یعنی این قضیه، شبه‌ترتیب‌های فازی منظم راست را به وسیله دریافت خانواده $\{V_j\}_{j\in J}$ و رابطه فازی W مشخص می‌کند.

قضیه ۲.۴.۵. [۱۶] اگر Q ، شبه‌ترتیب فازی روی I باشد، آنگاه شرایط زیر معادلند:

الف) Q یک جواب دستگاه ۱۹.۵ است.

ب) Q ، یک جواب دستگاه زیر است :

$$UoV_joU = V_joU \qquad (j \in J) \qquad U \leqslant W. \qquad (۲۳.۵)$$

که U یک رابطه فازی نامشخص است.

ج) Q ، یک جواب دستگاه زیر است :

$$U \leqslant \phi^q_{rr}(U) \qquad U \leqslant W. \qquad (۲۴.۵)$$

که U یک رابطه فازی نامشخص است.

برهان. الف) $\Longleftrightarrow$ **ب)** : اگر Q ، یک جواب دستگاه ۱۹.۵ باشد. برای $\forall j \in J$ ، به وسیله خاصیت تعدی Q و فرض $QoV_j \leqslant V_joQoQ$ ، نتیجه زیر حاصل می‌شود: $QoV_joQ \leqslant V_joQoQ \leqslant V_joQ.$ نامعادله عکس، به وسیله خاصیت انعکاسی Q ، به دست می‌آید و بنابراین Q ، یک جواب در دستگاه ۲۳.۵ است.

ج) $\Longleftrightarrow$ **ب)** : اگر Q ، یک جواب در ۲۳.۵ باشد، آنگاه برای $\forall j \in J$ نتیجه می‌شود که Q ، یک جواب $V_joQ = Uo(V_joQ)$ است که U ، یک رابطه فازی نامشخص است و بر طبق قضیه ۳.۳.۵ ، $V_j \oslash Q = (V_joQ)\backslash(V_joQ)$ ، بزرگترین جواب $V_joQ = Uo(V_joQ)$ است، که از آنجا $Q \leqslant V_j \oslash Q$ است، بنابراین :

$$Q \leqslant \bigwedge_{j\in J} V_j \oslash Q = \phi^q_{rr}(Q)$$

و Q ، یک جواب ۲۴.۵ است. $\square$

به طور عکس، اگر Q ، یک جواب ۲۴.۵ باشد، آنگاه برای $\forall j \in J$ نتیجه زیر به دست می‌آید: $Q \leqslant V_j \oslash Q = (V_joQ)\backslash(V_joQ)$ و بر طبق معادله ۸.۶ ، این با عبارت $QoV_joQ \leqslant V_joQ$ معادل است. چون نامعادله عکس به وسیله خاصیت انعکاسی Q نتیجه می‌شود، عبارت $QoV_joQ = V_joQ$ به دست می‌آید، بنابراین Q ، یک جواب معادله ۲۳.۵ است.

شبه‌ترتیب‌های فازی منظم چپ با دریافت $\{V_j\}_{j\in J}$ و W به وسیله قضیه زیر مشخص می‌شوند.

قضیه ۳.۴.۵. [۱۶] اگر Q ، یک شبه‌ترتیب فازی روی I باشد، آنگاه شرایط زیر معادلند:

الف) Q ، یک جواب دستگاه ۲۰.۵ است.

ب) Q ، یک جواب دستگاه زیر است:

$$UoV_joU = UoV_j \qquad (j \in J) \qquad U \leqslant W. \qquad (۲۵.۵)$$

که U ، یک رابطه فازی نامشخص روی I است.

ج) Q یک جواب دستگاه زیر است:

$$U \leqslant \phi^q_{lr}(U) \qquad U \leqslant W. \qquad (۲۶.۵)$$

اثبات این قضیه مشابه قضیه ۲.۴.۵ است. ترکیب نتایج بالا در مورد شبه‌ترتیب‌های فازی منظم چپ و راست باعث می‌شود که قضیه زیر به دست آید که شبه‌ترتیب‌های فازی منظم با دریافت $\{V_j\}_{j\in J}$ و W را توصیف می‌کند.

قضیه ۴.۴.۵. [۱۶] اگر Q ، یک شبه‌تریتب فازی روی مجموعه I باشد، آنگاه شرایط زیر معادلند:

الف) Q ، یک جواب دستگاه ۲۱.۵ است.

ب) Q ، یک جواب دستگاه ۱۹.۵ و ۲۰.۵ است.

ج) Q یک جواب دستگاه زیر است:

$$U \leqslant \phi_r^q(U) \qquad U \leqslant W \tag{۲۷.۵}$$

که U ، یک رابطه فازی نامشخص روی I است.

اثبات این قضیه، به وسیله قضیه‌های ۲.۴.۵ و ۳.۴.۵ انجام می‌شود.

سپس اگر دستگاه‌های زیر از معادلات و نامعادلات رابطه فازی در نظر گرفته شوند:

$$UoV_j \leqslant V_joU \ , \ U^toV_j \leqslant V_joU^t \ \ (j \in J) \ U \leqslant W \ \ U^t \leqslant W \tag{۲۸.۵}$$

$$V_joU \leqslant UoV_j \ , \ V_joU^t \leqslant U^toV_j \ \ (j \in J) \ U \leqslant W \ \ U^t \leqslant W \tag{۲۹.۵}$$

$$UoV_j = V_joU \ , \ U^toV_j = V_joU^t \ \ (j \in J) \ U \leqslant W \ \ U^t \leqslant W \tag{۳۰.۵}$$

که U ، یک رابطه فازی نامشخص است. به وضوح یک رابطه فازی R یک جواب ۲۸.۵ (به ترتیب ۲۹.۵،۳۰.۵) است اگر و فقط اگر R, R^t ، جواب‌های در ۱۹.۵ (به ترتیب ۲۰.۵،۲۱.۵) باشند. و به هر حال، یک رابطه فازی متقارن، یک جواب ۲۸.۵ (به ترتیب ۲۹.۵،۳۰.۵) است اگر و فقط اگر R, R^t ، جواب‌های در ۱۹.۵ (به ترتیب ۲۰.۵،۲۱.۵) باشد.

قضیه ۵.۴.۵. [۱۶] دستگاه‌های ۲۸.۵،۲۹.۵ و ۳۰.۵ دارای بزرگترین جواب هستند.
اگر W ، یک هم‌ارزی فازی باشد، آن‌گاه این بزرگترین جواب‌ها هم‌چنین هم‌ارزی‌های فازی هستند.

برهان. در اینجا فقط حکم درباره دستگاه ۲۸.۵ اثبات می‌شود. احکام درباره دستگاه‌های دیگر به طور مشابه اثبات می‌شود.
واضح است که دستگاه ۲۸.۵ ، حداقل یک جواب مانند رابطه تهی روی I دارد. اگر $\{R_j\}_{j\in J}$ ، یک خانواده از همه روابط فازی روی I باشد، به طوری که جواب‌ها در ۲۸.۵ هستند و E ، الحاق این خانواده است. آن‌گاه هر دوی E, E^t ، جواب‌های دستگاه ۱۹.۵ هستند، یعنی E ، یک جواب دستگاه ۲۸.۵ است. بلافاصله، E بزرگترین جواب در ۲۸.۵ است.
اگر W یک هم‌ارزی فازی باشد. باید توجه داشت که E ، دارای خاصیت انعکاسی است چون $l_I \leqslant E$ است. همان طور که در قضیه ۱.۴.۵ دیده شد، E ، تعدی نیز هست. چون E ، بزرگترین جواب در ۲۸.۵ است و به وضوح E^t نیز جواب در ۲۸.۵ است. پس $E^t \leqslant E$ ، بنابراین E ، متقارن است و E ، یک هم‌ارزی فازی است. □

در ادامه، باید ویژگی‌های مختلف این جواب‌ها در دستگاه‌های ۲۸.۵،۲۹.۵ و ۳۰.۵ را بدست آورد به طوری که هم‌ارزی‌های فازی هستند، یعنی، از هم‌ارزی‌های منظم چپ و راست با دریافت خانواده $\{V_j\}_{j\in J}$ و رابطه فازی W هستند.

اکنون باید مشبکه $\mathscr{E}(I)$ از همه هم‌ارزی‌های فازی منظم روی I را در نظر گرفت و توابع ϕ_{rr}^e, ϕ_{lr}^e و ϕ_r^e از $\mathscr{E}(I)$ را داخل خودش به صورت زیر تعریف کرد:

$$\phi_{rr}^e = \bigwedge_{j\in J} V_j \hat{\otimes} E \qquad , \qquad \phi_{lr}^e = \bigwedge_{j\in J} E \hat{\oslash} V_j$$

$$\phi_r^e = \bigwedge_{j\in J} (V_j \hat{\otimes} E) \bigwedge (E \hat{\oslash} V_j) = \phi_{rr}^e(E) \bigwedge \phi_{lr}^e(E) \tag{۳۱.۵}$$

$$\forall E \in \mathscr{E}(I).$$

همان طور که اشاره شد، برای $V_j \hat{\otimes} E, \forall j \in J$ و $E \hat{\oslash} V_j$ هم‌ارزی‌های فازی هستند (، حتی اگر E ، هم‌ارزی فازی نباشد). بنابراین $\phi_{rr}^q(E), \phi_{lr}^q(E)$ و $\phi_r^q(E)$ نیز هم‌ارزی‌های فازی هستند، بنابراین ϕ_{rr}^q, ϕ_{lr}^q
و ϕ_r^q توابعی از $\mathscr{E}(I)$ داخل خودش هستند.
ابتدا باید هم‌ارزی‌های فازی منظم راست با دریافت $\{V_j\}_{j\in J}$ و W در نظر گرفت.

قضیه ۶.۴.۵. [۱۶] اگر E یک هم‌ارزی فازی روی I باشد، آن‌گاه شرایط زیر معادلند:

الف) E ، یک جواب در دستگاه ۲۸.۵ است.

ب) E ، یک جواب در دستگاه ۱۹.۵ است.

ج) E ، یک جواب در دستگاه ۲۳.۵ است.

د) E یک جواب دستگاه زیر است :

$$U \leqslant \phi_{rr}^e(U) \qquad\qquad U \leqslant W \tag{۳۲.۵}$$

که U ، یک رابطه فازی نامشخص است.

برهان. با استفاده از قضیه ۲.۴.۵ و این که $E = E^t$ است، اثبات می‌شود. □

سپس دو قضیه زیر، هم‌ارزی‌های منظم چپ، منظم با دریافت خانواده $\{V_j\}_{j\in J}$ و رابطه فازی W را مشخص می‌کنند.

قضیه ۷.۴.۵. [۱۶] اگر E ، یک هم‌ارزی فازی روی I باشد، آن‌گاه شرایط زیر معادلند:

الف) E ، یک جواب در دستگاه ۲۹.۵ است.

ب) E ، یک جواب در دستگاه ۲۰.۵ است.

ج) E ، یک جواب در دستگاه ۲۵.۵ است.

د) E یک جواب دستگاه زیر است :

$$U \leqslant W \qquad U \leqslant \phi^{e}_{lr}(U) \tag{۳۳.۵}$$

که U ، یک رابطه فازی نامشخص است.

برهان. اثبات این قضیه مانند اثبات قضیه ۶.۴.۵ است. □

قضیه ۸.۴.۵. [۱۶] اگر E ، یک هم‌ارزی فازی روی I باشد، آنگاه شرایط زیر معادلند:

الف) E ، یک جواب در دستگاه ۳۰.۵ است.

ب) E ، یک جواب در دستگاه ۲۱.۵ است.

ج) E ، یک جواب در دستگاه‌های ۱۹.۵ و ۲۰.۵ است.

د) E ، یک جواب در دستگاه‌های ۲۳.۵ و ۲۵.۵ است.

ه) E ، یک جواب دستگاه زیر است :

$$U \leqslant W \qquad U \leqslant \phi^{e}_{r}(U) \tag{۳۴.۵}$$

که U ، یک رابطه فازی نامشخص است.

برهان. با قضیه‌های ۶.۴.۵ و ۷.۴.۵ اثبات می‌شود. □

مثال ۹.۴.۵. [۱۶] ℓ ، یک ساختار بولی و I ، هر مجموعه سه عنصری و روابط فازی $\{V_j\}_{j\in J}$ و $J = \{1, 2\}$ است که این روابط با گراف‌ها و ماتریس‌های خود به صورت زیر هستند:

شکل ۱.۵: شبکه اجتماعی دو رابطه V_1, V_2

$$V_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad V_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

همچنین اگر Q^{lr}, Q^{rr} و Q^r ، به ترتیب، شبه‌ترتیب‌های فازی منظم راست، منظم چپ و منظم و همین طور E^{lr}, E^{rr} و E^r ، به ترتیب، هم‌ارزی‌های فازی منظم راست، منظم چپ و منظم روی I با دریافت $\{V_j\}_{j\in J}$ باشند، آنگاه:

$$Q^{rr} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} \qquad Q^{lr} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$Q^r = E^{rr} = E^{lr} = E^r = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

و بنابراین نتایج به صورت زیر به دست می‌آیند:

الف) هم‌ارزی فازی طبیعی $\tilde{Q^{rr}} = Q^{rr} \wedge (Q^{rr})^t$ ، به صورت زیر داده شده است:

$$\tilde{Q^{rr}} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

بنابراین بزرگترین هم‌اررزی فازی منظم راست (با دریافت یک خانواده از روابط فازی)، لزوماً هم ارزی فازی طبیعی از بزرگترین شبه‌ترتیب فازی منظم راست نیست، یعنی، هم‌ارزی فازی طبیعی از یک شبه‌فازی منظم راست، لزوماً یک هم‌ارزی فازی منظم راست نیست.

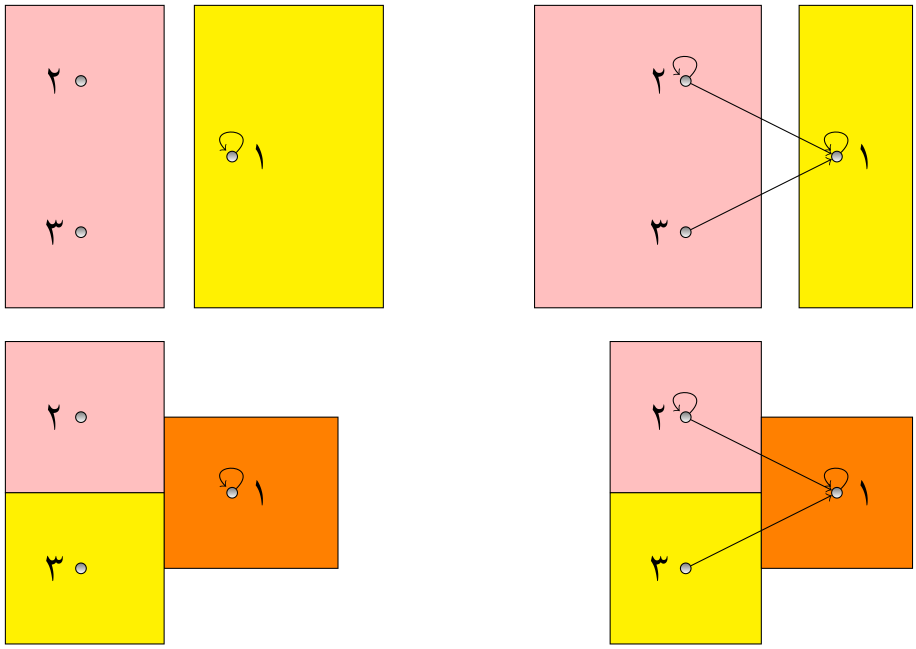
ب) و از اشتراک شبه‌ترتیب‌های فازی منظم راست و چپ، نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$Q^{rr} \wedge Q^{lr} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} \neq Q^r$$

و بنابراین اشتراک بزرگترین شبه‌فازی منظم چپ و راست با دریافت یک خانواده از روابط فازی داده شده، لزوماً با بزرگترین شبه‌ترتیب فازی منظم مطابقت ندارد. و برای شبه‌ترتیب‌ها و هم‌ارزی‌ها دسته‌بندی‌ها به صورت زیر هستند:

۵.۵ محاسبه بزرگترین جواب در یک دستگاه خطی ضعیف

در بخش قبل، وجود بزرگترین جواب در دستگاه خطی ضعیف اثبات شد.
در اینجا، این مسأله مورد توجه قرار می‌گیرد که چطور به طور مؤثر این جواب محاسبه می‌شود.



فرض کنید I ، یک مجموعه غیرتهی و $\mathscr{K}(I)$ ، نشان دهنده هر یک از مشبکه‌های $\mathscr{Q}(I), \mathscr{R}(I)$ و $\mathscr{E}(I)$ و همچنین $\phi : \mathscr{K} \longrightarrow \mathscr{K}$ ، یک تابع یکنوا باشد، یعنی، $\forall R, S \in \mathscr{K}(I)$:

$$R \leqslant S \Longrightarrow \phi(R) \leqslant \phi(S)$$

برقرار باشد. برای یک رابطه $R \in \mathscr{K}(I)$ ، اگر $\phi(R) = R$ ، یک نقطه ثابت [۳۰] از ϕ ، اگر $\phi(R) \leqslant R$ یک نقطه پیش‌ثابت [۳۱] از ϕ و اگر $R \leqslant \phi(R)$ یک نقطه پس‌ثابت [۳۲] از ϕ نامیده می‌شود [۶۹]. اکثریت روش‌ها برای محاسبه بزرگترین نقطه ثابت، براساس قضیه‌ای به نام قضیه کلین [۳۳] است. اگر ϕ ، یک تابع اشتراک- پیوسته [۳۴] ($\phi(x \cap y) \leqslant \phi(x) \cap \phi(y)$) باشد، قضیه نقطه ثابت کلین، ثابت می‌کند که بزرگترین نقطه ثابت ϕ می‌تواند به عنوان اشتراک زنجیر کلین نزولی ϕ محاسبه شود. که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S_1 = \omega_I \qquad , \qquad S_{k+1} = \phi(S_k) \qquad \forall k \in N. \tag{۳۵.۵}$$

این دنباله، به طور حقیقی، نزولی است چون ϕ ، یکنوا و $\phi(\omega_I) \leqslant \omega_I$ است. بدون شرط اشتراک- پیوستگی، اگر ϕ ، فقط یکنوا باشد، نتیجه زیر به دست می‌آید:

$$\hat{S} \leqslant \bigwedge_{k \in N} S_k \tag{۳۶.۵}$$

که $\hat{S}$ بزرگترین نقطه ثابت ϕ است. قضیه نقطه ثابت کلین، با استفاده از فرض اشتراک - پیوستگی ϕ ، تساوی معادله ۳۶.۵ را نتیجه می‌دهد. این تساوی، (به طور مؤثر اگر دنباله در برخی S_k ها ثابت باشد

[۳۰] fixed point
[۳۱] pre-fixed point
[۳۲] post-fixed point
[۳۳] Kleene
[۳۴] meet-continuous

یا) به طور تقریبی بزرگترین نقطه ثابت ϕ را محاسبه می‌کند. هرچند در بسیاری حالت‌ها، تساوی در معادله ۳۶.۵ ، بدون شرط اشتراک–پیوستگی ϕ ، اثبات شده است، یعنی، ممکن است فقط یکنوایی کافی باشد. به عنوان مثال، اگر ساختار مقادیر عضویت ℓ و مجموعه I ، متناهی باشند، آنگاه $\mathscr{K}(I)$ و $\{S_k\}_{k\in N}$ نیز به ترتیب یک مشبکه متناهی و دنباله متناهی هستند و کوچکترین عنصر آن باید برابر با $\hat{S}$ باشد.

به ویژه، این شرایط زمانی بهتر ظاهر می‌شود که با ساختار بولی کار می‌شود، یعنی، وقتی با روابط معین روی یک مجموعه متناهی کار می‌شود.

از سوی دیگر، در بسیاری حالت‌ها نیازی نیست که بزرگترین نقطه پس‌ثابت و ثابت پیدا شوند، اما می‌توان بزرگترین نقطه پس‌ثابت از ϕ که در یک رابطه فازی $W \in \mathscr{K}(I)$ مشمول است را پیدا کرد، یعنی، بزرگترین جواب دستگاه نامعادلات رابطه فازی زیر باشد :

$$U \leqslant \phi(U) \qquad\qquad U \leqslant W \tag{۳۷.۵}$$

که U ، یک رابطه فازی نامشخص روی I است. بزرگترین نقطه پس‌ثابت از ϕ مشمول در W وجود دارد اما لزوماً یک نقطه ثابت از ϕ نیست.

به عنوان مثال، اگر تابع ψ در جایی که هر عضو از $\mathscr{K}(I)$ ، به عنصر ω_I که بزرگترین عنصر است نگاشته شود، به وضوح یکنواست، هر عنصر $\mathscr{K}(I)$ ، یک نقطه پس‌ثابت از ψ و فقط ω_I نقطه ثابت ψ است، بنابراین اگر هر عضو $W \in \mathscr{K}(I)$ ، متفاوت از ∇_I انتخاب شود، آنگاه خود W ، بزرگترین نقطه پس‌ثابت مشمول در W است و هیچ نقطه ثابتی از ψ ، مشمول در W وجود ندارد. به هر حال بزرگترین نقطه پس‌ثابت از ϕ ، مشمول در W می‌تواند به طور مشابه، به عنوان بزرگترین نقطه ثابت از ϕ محاسبه شود. اگر ∇_I با W در ۳۵.۵ جابجا شود، آنگاه دنباله تعریف شده در دنباله ۳۵.۵ ، لزوماً نزولی نیست، چون لازم نیست $W \leqslant \phi(W)$ برقرار باشد، اما می‌توان معادله ۳۵.۵ را اصلاح کرد و دنباله نزولی $\{R_k\}_{k\in N}$ را به صورت زیر تعریف کرد :

$$R_1 = W \qquad\qquad R_{k+1} = R_k \bigwedge \phi(R_k) \qquad\qquad \forall k \in N. \tag{۳۸.۵}$$

اگر $W = \nabla_I$ باشد، آنگاه معادله ۳۸.۵ ، معادله ۳۵.۵ را نتیجه می‌دهد و علاوه بر این، هر وقت $\phi(W) \leqslant W$ باشد، آنگاه $\forall K \in N\,, R_k \geqslant \phi(R_k)$ است و در این حالت برای R_{k+1} ، $R_{k+1} = \phi(R_k)$ داده می‌شود. می‌توان به آسانی نشان داد که :

$$\hat{R} \leqslant \bigwedge_{k\in N} R_k \tag{۳۹.۵}$$

که $\hat{R}$ ، بزرگترین نقطه پس‌ثابت مشمول در W است و باید به دنبال شرایطی بود که تساوی در معادله ۳۹.۵ را اثبات کند. مخصوصاً باید به دنبال شرایط مشخصی بود که دنباله $\{R_k\}_{k\in N}$ در R_k برای برخی $k \in N$ ثابت شود، یعنی، $\exists k,l \in N | R_k = R_{k+l}$ باشد. در این حالت، می‌توان به آسانی بررسی کرد که $\hat{R} = R_k = R_{k+l}$ است و این بدین معنی است که $\hat{R}$ ، بعد از تعداد متناهی تکرار محاسبه می‌شود.

تعریف ۱.۵.۵. [۱۶] دنباله $\{R_k\}_{k\in N}$ ، تصویر متناهی نامیده می‌شود اگر مجموعه :

$$\bigcup_{k\in N} Im(R_k)$$

متناهی باشد.

ابتدا به لم زیر اشاره می‌کنیم.

لم ۲.۵.۵. [۱۶] دنباله $\{R_k\}_{k\in N}$ ، به وسیله تعریف معادله ۳۸.۵ ، متناهی است اگر و فقط اگر تصویر متناهی باشد. تابع ϕ ، تصویر موضعی نامیده می‌شود اگر $\exists X \subseteq L$ متناهی وجود داشته باشد به طوری که $\forall R \in \mathscr{K}(I)$ ، نتیجه زیر به دست بیاید:

$$Im(\phi(R)) \subseteq \langle X \bigcup Im(R)\rangle \qquad (۴۰.۵)$$

که $\langle X \cup Im(R)\rangle$ ، نشان دهنده زیرجبری از ℓ است که به وسیله مجموعه $X \cup Im(R)$ تولید می‌شود.

قضیه ۳.۵.۵. [۱۶] اگر تابع ψ ، تصویر موضعی و W ، یک رابطه فازی روی I و $\{R_k\}_{k\in N}$ ، یک دنباله از روابط فازی روی I باشند که این تعاریف به وسیله معادله ۳۸.۵ تعریف شوند، آنگاه:

$$\bigcup_{k\in N} Im(R_k) \subseteq \langle X \bigcup Im(W)\rangle \qquad (۴۱.۵)$$

اگر به علاوه، $\langle X \cup Im(W)\rangle$ یک زیرجبر متناهی از ℓ باشد، آنگاه دنباله $\{R_k\}_{k\in N}$ متناهی است.

هدف اصلی در این‌جا، بررسی بزرگترین نقطه پس‌ثابت توابع $\phi^e_{rr}, \phi^e_{lr}, \phi^q_r, \phi^q_{rr}, \phi^q_{lr}$ و ϕ^e_r تعریف شده در بخش قبل است. همان طورکه در بخش قبل اشاره شد، باید یک مجموعه غیرتهی I و یک خانواده $\{V_j\}_{j\in J}$ از روابط فازی و رابطه فازی W روی I را درنظر گرفت، اما باید فرض بر این باشد که I و $\{V_{j\in J}\}_{j\in J}$ متناهی باشند، یعنی مجموعه اندیس I ، متناهی باشد. برای توابع $\phi^e_{rr}, \phi^e_{lr}, \phi^q_r, \phi^q_{rr}, \phi^q_{lr}$ و ϕ^e_r قضیه زیر اثبات می‌شود.

قضیه ۴.۵.۵. [۱۶] همه توابع $\phi^e_{rr}, \phi^e_{lr}, \phi^q_r, \phi^q_{rr}, \phi^q_{lr}$ و ϕ^e_r یکنوا و تصویر موضعی هستند.

برهان. در اینجا فقط حکم مربوط به تابع ϕ^q_{rr} اثبات می‌شود. حکم بقیه توابع به طور مشابه اثبات می‌شود.
ابتدا باید ثابت کرد که ϕ^q_{rr} یکنوا است. به همین منظور، دو رابطه فازی $P \in \mathscr{Q}(I)$ و Q طوری انتخاب می‌شوند که $P \leqslant Q$ باشد، آنگاه تساوی $PoQ = Q$ حاصل می‌شود. سپس، اگر $\forall j \in J$ ، $a, b \in I$ در نظر گرفته شوند، آنگاه برطبق ویژگی ۳.۵ مشبکه مانده کامل، برای $\forall c, d \in I$ نامساوی‌های زیر به دست می‌آیند:

$$(V_j o P)(b,c) \longrightarrow (V_j o P)(a,c) \leqslant (V_j o P)(b,c) \otimes Q(c,d) \longrightarrow (V_j o P)(a,c) \otimes Q(c,d)$$

اکنون به وسیله معادله ۵.۱۶ و خاصیت ۵.۵ مشبکه مانده کامل، داریم:

$$\begin{aligned}(V_j \oslash P)(a,b) &= \bigwedge_{c\in I}(V_joP)(b,c) \longrightarrow (V_joP)(a,c)\\ &\leqslant \bigwedge_{c\in I}[(V_joP)(b,c)\otimes Q(c,d) \longrightarrow (V_joP)(a,c)\otimes Q(c,d)]\\ &\leqslant [\bigvee_{c\in I}(V_joP)(b,c)\otimes Q(c,d)] \longrightarrow [\bigvee_{c\in I}(V_joP)(a,c)\otimes Q(c,d)]\\ &= (V_joPoQ)(b,d) \longrightarrow (V_joPoQ)(a,d)\\ &= (V_joQ)(b,d) \longrightarrow (V_joQ)(a,d).\end{aligned}$$

چون این $\forall d\in I$ برقرار است، می‌توان نتیجه گرفت:

$$(V_j \oslash P)(a,b) \leqslant \bigwedge_{d\in I}(V_joQ)(b,d) \longrightarrow (V_joQ)(a,d) = (V_j \oslash Q)(a,b)$$

و بنابراین $V_j \oslash P \leqslant V_j \oslash Q$ است. با این عبارت، نتیجه زیر به دست می‌آید:

$$\phi^q_{rr}(P) = \bigwedge_{j\in J} V_j \oslash P \leqslant \bigwedge_{j\in J} V_j \oslash Q = \phi^q_{rr}(Q).$$

و بنابراین یکنوایی ϕ^q_{rr} اثبات می‌شود.

برای اثبات تصویر موضعی بودن، به [۱۶] رجوع شود. □

قضیه ۵.۵.۵. [۱۶] فرض کنید ϕ ، هر تابعی از توابع ϕ^q_{lr},ϕ^q_r و ϕ^q_{rr} (به ترتیب، هر تابعی از توابع ϕ^e_{lr},ϕ^e_r و ϕ^e_{rr}) و W یک شبه‌ترتیب فازی(به ترتیب، یک هم‌ارزی فازی) و $\{R_k\}_{k\in N}$ یک دنباله از روابط فازی روی I که به وسیله معادله ۵.۳۸ تعریف شده‌اند، باشد.

اگر $\langle X\cup Im(W)\rangle$ ، یک زیرجبر متناهی از ℓ باشد، آنگاه دنباله $\{R_k\}_{k\in N}$ ، متناهی و اگر k ، کوچکترین عدد طبیعی که $R_k = R_{k+1}$ برقرار باشد، آنگاه R_k ، بزرگترین جواب دستگاه زیر است:

$$U \leqslant W \qquad\qquad U \leqslant \phi(U).$$

به ویژه، اگر ℓ ، یک جبر موضعاً متناهی باشد، آنگاه $\langle X\cup Im(W)\rangle$ ، یک زیرجبر متناهی از ℓ است چون $X\cup Im(W)$ ، یک مجموعه متناهی است. در این حالت برای هر مجموعه متناهی I و هر خانواده متناهی از روابط فازی روی I و هر شبه‌ترتیب فازی (به ترتیب، هم‌ارزی فازی) W روی I براساس قضیه‌های بالا، می‌توان به طور مؤثر، بزرگترین هم‌ارزی ها و شبه‌ترتیب‌های فازی منظم راست و چپ را به وسیله دریافت خانواده $\{V_j\}_{j\in J}$ و W به دست آورد. اما اگر ℓ ، موضعاً متناهی نباشد، آنگاه دنباله $\{R_k\}_{k\in N}$ از روابط فازی تعریف شده در معادله ۵.۳۸ ، لزوماً متناهی نیست، مانند مثال‌هایی که می‌زنیم و این واقعیت را نشان می‌دهد. اگر ℓ ، یک جبر موضعاً متناهی نباشد و دنباله $\{R_k\}_{k\in N}$ نامتناهی باشد، آنگاه بزرگترین جواب دستگاه :

$$U \leqslant W \qquad\qquad U \leqslant \phi(U)$$

$\forall k \in N$ ، متفاوت از R_k است، اما اگر این جواب، اشتراک این دنباله باشد، آن‌گاه این جواب می‌تواند به وسیله R_k ، برای برخی $k \in N$ تقریبی باشد، به همین دلیل، در پایان باید شرایط مشخصی تحت این که بزرگترین جواب، اشتراک دنباله $\{R_k\}_{k\in N}$ باشد، بررسی شود.
باید حالتی در نظر گرفته شود در زمانی که $\ell = (L, \wedge, \vee, \otimes, \longrightarrow, ۰, ۱)$ ، یک مشبکه مانده کامل و شرایط زیر برای آن برقرار باشد:

$$x \vee (\bigwedge_{j\in J} y_j) = \bigwedge_{j\in J}(x \vee y_j) \tag{۴۲.۵}$$

$$x \otimes (\bigwedge_{j\in J} y_j) = \bigwedge_{j\in J}(x \otimes y_j) \tag{۴۳.۵}$$

$$\forall x \in L, \forall \{y_j\} \subseteq L$$

اگر به این نکته اشاره شود که ساختار $\ell = ([۰,۱], \wedge, \vee, \otimes, \longrightarrow, ۰, ۱)$ در جایی که بازه $[۰,۱]$ ، بازه اعداد حقیقی و $\otimes$ ، t–نرم پیوسته چپ روی $[۰,۱]$ باشد، آن‌گاه بلافاصله با خطی بودن ℓ ، معادله ۴۲.۵ نتیجه می‌شود. و ℓ ، معادله ۴۳.۵ را حفظ می‌کند اگر و فقط اگر $\otimes$ ، t – نرم پیوسته چپ باشد. ([۱۰]،[۱۱]) . به ویژه، ساختارهای گودل، گوگن(ضرب) و لوکاسیویچ، معادلات ۴۲.۵ و ۴۳.۵ را تکمیل می‌کنند.
با توجه به قضیه زیر، این مطلب درست است.

قضیه ۶.۵.۵. [۱۶] اگر ϕ ، هر تابعی از توابع $\phi^e_r, \phi^e_{rr}, \phi^e_{lr}, \phi^q_r, \phi^q_{rr}, \phi^q_{lr}$ و W یک شبه‌ترتیب فازی (به ترتیب، هم‌ارزی فازی) روی I و $\{R_k\}_{k\in N}$ ، دنباله روابط فازی روی I با تعریف معادله ۳۸.۵ باشد. اگر ℓ یک ساختار مشبکه مانده کامل دارای معادله‌های ۴۲.۵ و ۴۳.۵ باشد، آنگاه:

$$\hat{R} = \bigwedge_{k\in N} R_k \tag{۴۴.۵}$$

است که بزرگترین جواب دستگاه نامعادلات رابطه فازی دستگاه زیر است:

$$U \leqslant W \qquad\qquad U \leqslant \phi(U)$$

مثال ۷.۵.۵. [۱۶] فرض کنید ℓ ، یک ساختار (ضرب) گوگن، I هر مجموعه غیرتهی دو عنصری، V ، یک رابطه فازی روی I و $W = \omega_I$ باشد:

شکل ۲.۵: گراف شبکه اجتماعی رابطه V

$$V = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix}$$

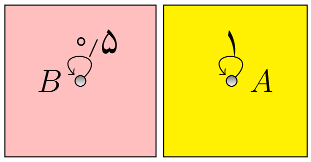
همچنین ϕ با تعریف $\forall Q \in \mathscr{Q}(I), \phi(Q) = V_j \otimes Q$ باشد که هر عضو از مشبکه $\mathscr{Q}(I)$ را به داخل خودش بنگارد و $\{R_k\}_{k\in N}$ ، یک دنباله از شبه‌ترتیب‌های فازی روی I به وسیله معادله ۳۸.۵ باشد، آنگاه $\forall k \in N$ داریم :

$$R_k = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2^{k-1}} & 1 \end{bmatrix} \qquad\qquad k \in N$$

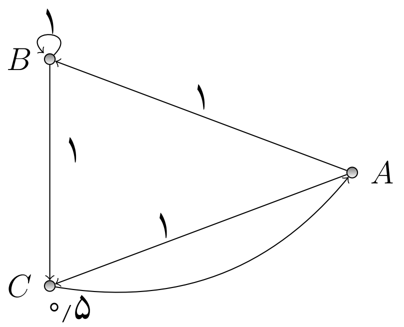
و بنابراین دنباله $\{R_k\}_{k\in N}$ ، نامتناهی است. همچنین می‌توان به دست آورد که بزرگترین جواب در نامعادله رابطه فازی $U \leqslant \phi(U)$ است، یعنی، بزرگترین شبه‌ترتیب فازی منظم راست روی I به وسیله دریافت V باشد که به صورت زیر داده شده است:

$$\phi^{rr} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

ϕ^{rr} ، اشتراک دنباله $\{R_k\}_{k\in N}$ است و بنابراین دسته‌بندی منظم به صورت زیر است.



مثال ۸.۵.۵. [۱۶] فرض کنید ℓ ، یک ساختار گوگن (ضرب)، I هر مجموعه سه عنصری، V ، یک رابطه فازی داده شده روی I و $W = \omega_I$ باشد.



$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

همچنین اگر ϕ^q_{rr} و ϕ^e_{rr} با تعاریف $\forall Q \in \mathscr{Q}(I), \phi^q_{rr}(Q) = V \otimes Q$ و $\forall E \in \mathscr{E}(I), \phi^q_{rr}(E) = V \hat{\otimes} E$ باشند که به ترتیب، هر عضو از مشبکه‌های $\mathscr{Q}(I)$ و $\mathscr{E}(I)$ را به داخل خودش بنگارند، آنگاه $\{Q_k\}_{k\in N}$ و $\{E_k\}_{k\in N}$ ، به ترتیب، دنباله شبه‌ترتیب‌های فازی و

، هم‌ارزی‌های فازی روی I هستند که به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$Q_1 = W \qquad Q_{k+1} = \phi^q_{rr}(Q_k) \qquad \forall k \in N$$
$$E_1 = W \qquad E_{k+1} = \phi^e_{rr}(E_k) \qquad \forall k \in N.$$

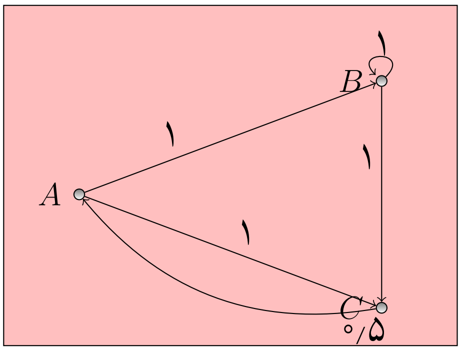
دنباله $\{E_k\}_{k\in N}$ از هم‌ارزی‌های فازی، نامتناهی است، چون $\forall k \in N$ داریم:

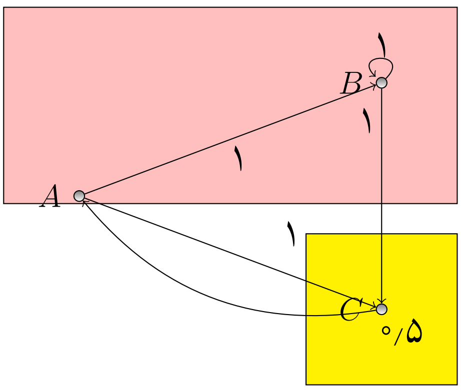
$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2^{k-1}} \\ 1 & 1 & \frac{1}{2^{k-1}} \\ \frac{1}{2^{k-1}} & \frac{1}{2^{k-1}} & 1 \end{bmatrix}$$

از سوی دیگر، دنباله $\{Q_k\}_{k\in N}$ از شبه‌ترتیب‌های فازی، متناهی است، چون :

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \qquad Q_k = Q_2 \qquad \forall k \in N \qquad k \geqslant 3$$

توجه کنید که دنباله $\{Q_k\}_{k\in N}$ ، متناهی است گرچه $\langle X \cup Im(W)\rangle = \langle 0, \frac{1}{2}, 1\rangle$ ، یک زیرجبر





نامتناهی از ℓ است.

در برخی مواقع، به جواب‌های فازی در یک دستگاه فازی نیاز نیست، و باید به دنبال یک جواب قطعی بود. به علاوه، در برخی جاها، الگوریتم محاسبه جواب در یک دستگاه خطی ضعیف، در تعداد

متناهی مرحله به جواب نمی‌رسد، بنابراین در این چنین شرایطی باید به دنبال بزرگترین جواب قطعی در یک دستگاه فازی بود و این مطلب بدین صورت می‌تواند فهمیده شود که جواب قطعی، به عنوان جواب تقریبی بزرگترین جواب فازی است. در اینجا نشان داده می‌شود که الگوریتم داده شده بالا برای محاسبه بزرگترین جواب در یک دستگاه خطی ضعیف می‌تواند برای محاسبه بزرگترین جواب قطعی در یک دستگاه تبدیل شود. الگوریتم جدید در یک تعداد متناهی مرحله، مستقل از محدودیت موضعی از ساختار مقادیر درست به جواب می‌رسد. و همچنین نشان داده می‌شود که بزرگترین جواب قطعی، نمی‌تواند به سادگی با تبدیل کردن قسمت قطعی یک رابطه فازی به دست آید.
فرض کنید I ، یک مجموعه متناهی غیرتهی، $\mathscr{K}(I)$ ، نشان‌دهنده هر مشبکه‌ای از $\mathscr{E}(I), \mathscr{Q}(I), R(I)$ و $\mathscr{K}^c(I)$ ، نشان‌دهنده مجموعه همه روابط قطعی از $\mathscr{K}(I)$ باشد، آنگاه زیرمشبکه $\mathscr{K}(I)$ ، یعنی، تلاقی و الحاق در $\mathscr{K}(I)^c$ از خانواده دلخواه روابط معین از $\mathscr{K}(I)$ نیز روابط قطعی هستند. همچنین $\forall R \in \mathscr{K}(I), R^c \in \mathscr{K}(I)$ است. برای هر تابع $\phi : \mathscr{K}(I) \longrightarrow \mathscr{K}(I)$ می‌توان تابع $\phi^c : \mathscr{K}^c(I) \longrightarrow \mathscr{K}^c(I)$ را با:

$$\phi^c(R) = (\phi(R))^c \qquad R \in \mathscr{K}^c(I)$$

تعریف کرد اگر ϕ ، یکنوا باشد، آنگاه این مطلب می‌تواند به آسانی نشان دهد که ϕ^c نیز یکنوا است.

گزاره ۹.۵.۵. [۱۶] اگر $\phi : \mathscr{K}(I) \longrightarrow \mathscr{K}(I)$ یک تابع یکنوا و $W \in \mathscr{K}(I)$ یک رابطه فازی داده شده باشد. یک رابطه قطعی $R \in \mathscr{K}^c$ ، بزرگترین جواب معین در دستگاه :

$$U \leqslant \phi(U) \qquad U \leqslant W \tag{۴۵.۵}$$

و در مشبکه کامل $\mathscr{K}(I)$ است اگر و فقط اگر بزرگترین جواب در دستگاه :

$$U \leqslant \phi^c(U) \qquad U \leqslant W^c \tag{۴۶.۵}$$

و در مشبکه کامل $\mathscr{K}(I)$ باشد در جایی که U ، یک رابطه فازی(، به ترتیب، قطعی) نامشخص است. به علاوه، یک دنباله $\{R_k\}_{k\in N} \subseteq \mathscr{K}(I)$ با :

$$R_1 = W \qquad R_{k+1} = R_k \bigwedge \phi(R_k) \qquad \forall k \in N \tag{۴۷.۵}$$

تعریف می‌شود که یک دنباله نزولی از روابط قطعی است و کوچکترین عضو این دنباله، بزرگترین جواب در دستگاه ۴۶.۵ و در $\mathscr{K}^c(I)$ است.

برهان. به خوبی می‌توان فهمید که یک مجموعه قطعی، مشمول در یک مجموعه فازی است اگر و فقط اگر آن مجموعه، مشمول در قسمت قطعی آن باشد. به وسیله این نکته، می‌توان به دست آورد که R ، یک جواب ۴۵.۵ است اگر و فقط اگر یک جواب معادله ۴۶.۵ باشد. و بنابراین R ، بزرگترین جواب معین در معادله ۴۵.۵ است اگر و فقط اگر آن بزرگترین جواب در معادله ۴۶.۵ باشد. با خاصیت یکنوایی ϕ ، نتیجه می‌شود که ϕ^c نیز یکنوا است، بنابراین $\{R_k\}_{k\in N} \subseteq \mathscr{K}(I)$ یک دنباله نزولی است. به وضوح،

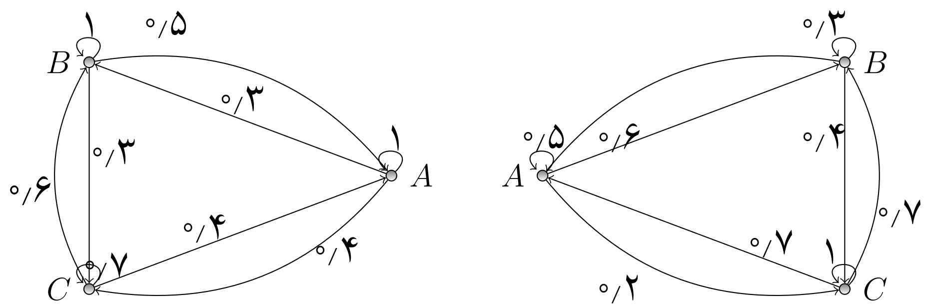
این دنباله شامل روابط قطعی است و چون I متناهی است، هر دنباله از روابط روی I نیز باید متناهی باشد. سرانجام، همان‌طور که در ابتدا اشاره شد، کوچکترین عضو از این دنباله متناهی، بزرگترین نقطه پس‌ثابت از ϕ^c ، مشمول در W^c است، یعنی، بزرگترین جواب در معادله ۴۶.۵ است. □

اگر I ، یک مجموعه غیرتهی و $\{V_j\}_{j\in J}$ ، یک خانواده از روابط فازی و W یک شبه‌ترتیب فازی (، به ترتیب، هم‌ارزی فازی) روی I باشد و ϕ ، هر تابعی از توابع $\phi^q_{rr}, \phi^q_{lr}, \phi^q_r, \phi^e_{rr}, \phi^e_{lr}$ و ϕ^e_r تعریف شده به وسیله معادله‌های ۲۲.۵،۳۱.۵ و ۹.۵.۵ باشد، الگوریتم‌هایی برای محاسبه بزرگترین جواب قطعی دستگاه ۲۴.۵،۲۶.۵،۲۷.۵،۳۲.۵،۳۳.۵ و ۳۴.۵ می‌دهد.
بهتر است به این نکته اشاره کرد که در این حالت‌ها، توابع ϕ^c می‌توانند به صورت زیر مشخص شوند:

$$(a,b)\in(\phi^q_{rr})^c(Q)\iff(\forall j\in J)(\forall c\in I)(V_joQ)(b,c)\leqslant(V_joQ)(a,c)$$
$$(a,b)\in(\phi^q_{lr})^c(Q)\iff(\forall j\in J)(\forall c\in I)(V_joQ)(c,a)\leqslant(V_joQ)(c,b)$$
$$(a,b)\in(\phi^e_{rr})^c(E)\iff(\forall j\in J)(\forall c\in I)(V_joE)(b,c)=(V_joE)(a,c)$$
$$(a,b)\in(\phi^e_{lr})^c(E)\iff(\forall j\in J)(\forall c\in I)(V_joE)(c,a)=(V_joE)(c,b)$$

$$(\phi^q_r)^c=(\phi^q_{rr})^c\wedge(\phi^q_{lr})^c \qquad (\phi^e_r)^c(E)=(\phi^e_{rr})^c\wedge(\phi^e_{lr})^c$$
$$\forall Q\in\mathscr{Q}(I),\forall E\in\mathscr{E}(I),\forall a,b\in I$$

مثال ۱۰.۵.۵. [۱۶] فرض کنید ℓ ، ساختار گودل و I ، هر مجموعه سه عنصری و $\{V_j\}_{j\in J}$ روابط فازی و گراف‌های فازی آنها که $J=\{۱,۲\}$ است، به صورت زیر باشند:



شکل ۳.۵: شبکه اجتماعی دو رابطه $V_۱, V_۲$

$$V_۱=\begin{bmatrix}۱ & ۰/۳ & ۰/۴\\ ۰/۵ & ۱ & ۰/۳\\ ۰/۴ & ۰/۶ & ۰/۷\end{bmatrix} \qquad V_۲=\begin{bmatrix}۰/۵ & ۰/۶ & ۰/۲\\ ۰/۶ & ۰/۳ & ۰/۴\\ ۰/۷ & ۰/۷ & ۱\end{bmatrix}$$

اگر Q^{lr}, Q^{rr} و Q^r ، به ترتیب، نشان دهنده بزرگترین شبه‌ترتیب فازی منظم راست، منظم چپ، منظم و E^{lr}, E^{rr} و E^r ، به ترتیب، نشان دهنده بزرگترین هم‌ارزی‌های فازی منظم راست، منظم چپ و منظم

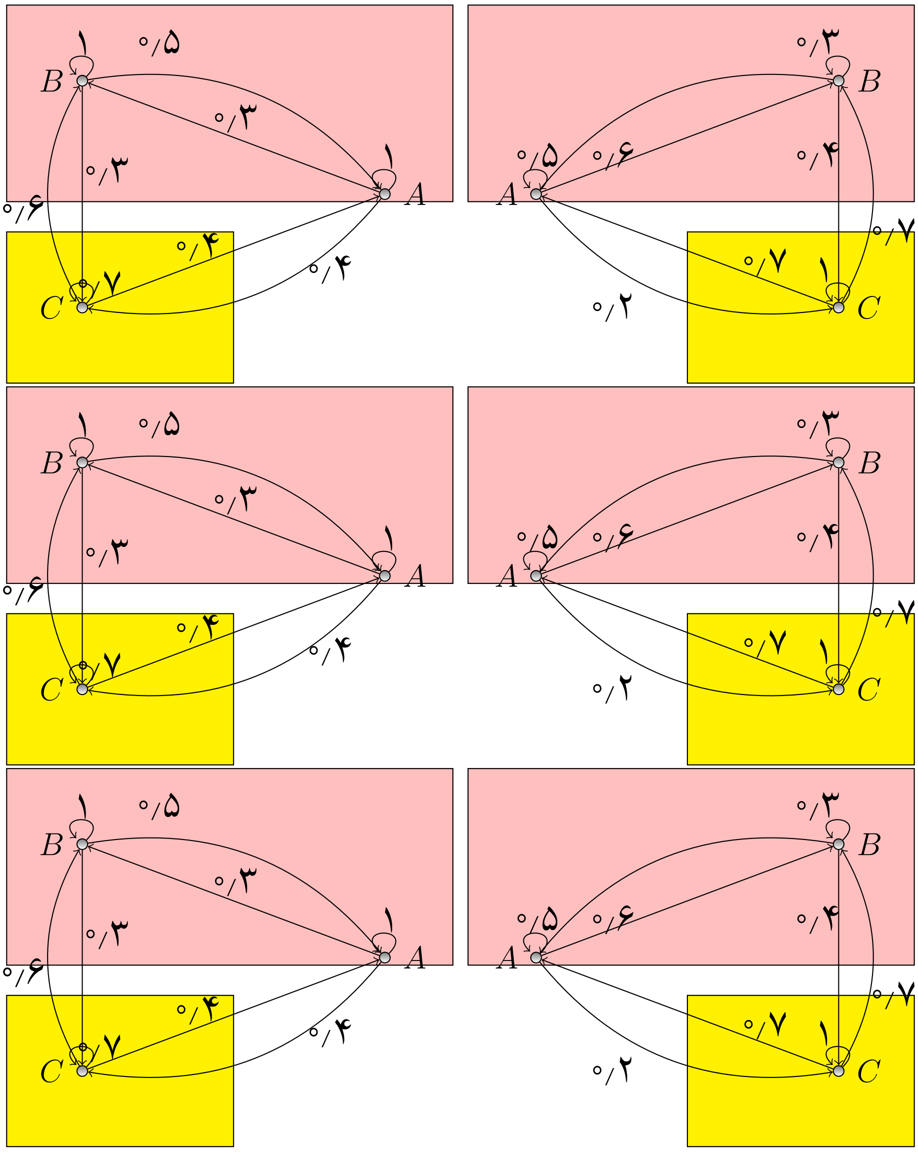
با دریافت $\{V_j\}_{j\in J}$ باشند، آنگاه:

$$Q^{rr} = Q^{r} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰/۶ \\ ۱ & ۱ & ۰/۶ \\ ۰/۷ & ۰/۷ & ۱ \end{bmatrix} \qquad Q^{lr} = E^{lr} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰/۷ \\ ۱ & ۱ & ۰/۷ \\ ۰/۷ & ۰/۷ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$E^{r} = E^{rr} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰/۶ \\ ۱ & ۱ & ۰/۶ \\ ۰/۶ & ۰/۶ & ۱ \end{bmatrix}$$

از سوی دیگر، هر هم‌ارزی یا شبه‌ترتیب معین غیربدیهی که منظم راست، منظم چپ یا منظم با دریافت خانواده $\{V_j\}_{j\in J}$ باشد، وجود ندارد، یعنی دستگاه‌های خطی متناظر به خانواده $\{V_j\}_{j\in J}$ و $\nabla_I = W$ دارای جواب‌های غیربدیهی در $\mathscr{Q}^c(I)$ (، به ترتیب، $\mathscr{E}^c(I)$) نیست.

متأسفانه، این مثال نشان می‌دهد که برای هر رابطه فازی که جواب دستگاه خطی ضعیف است، قسمت قطعی آن لازم نیست که جواب این دستگاه باشد و هم‌چنین بزرگترین جواب فازی در این دستگاه می‌تواند به طور محدود، اندیس کوچکتری از بزرگترین جواب قطعی در این دستگاه باشد.



شکل ۵.۴: هم‌ارزی‌های منظم فازی به وجود آمده از ۶ دستگاه در مثال ۵.۵.۱۰

فصل ۶

هم‌ارزی‌های منظم قوی و ضعیف فازی

۱.۶ دستگاه‌های خطی مرتبط

در این فصل، نشان داده می‌شود که دستگاه‌های خطی ضعیف، به دو دستگاه خطی، مرتبط هستند. ابتدا باید دستگاه‌های خطی را در نظر گرفت که شامل مجموعه محدودی از جواب‌های دستگاه‌های خطی ضعیف هستند و بعد از آن دستگاه‌های خطی دارای مجموعه‌های بزرگتری از جواب مطرح می‌شوند.
اگر I ، یک مجموعه غیرتهی(نه لزوماً متناهی)، $\{V_j\}_{j\in J}$ ، یک خانواده از روابط فازی و W ، یک شبه‌ترتیب فازی روی I باشند(که I همچنین لزوماً متناهی نیست).
اگر دستگاه‌های خطی از نامعادلات روابط فازی در نظر گرفته شوند:

$$U \leqslant W \qquad (j \in J) \qquad UoV_j \leqslant V_j \tag{۱.۶}$$

$$U \leqslant W \qquad (j \in J) \qquad V_joU \leqslant V_j \tag{۲.۶}$$

$$U \leqslant W \qquad (j \in J) \qquad UoV_j \leqslant V_j \quad , \quad V_joU \leqslant V_j \tag{۳.۶}$$

$$U, U^t \leqslant W \qquad (j \in J) \qquad UoV_j \leqslant V_j \quad , \quad U^toV_j \leqslant V_j \tag{۴.۶}$$

$$U, U^t \leqslant W \qquad (j \in J) \qquad V_joU \leqslant V_j \quad , \quad V_joU^t \leqslant V_j \tag{۵.۶}$$

$$U, U^t \leqslant W \qquad (j \in J) \qquad UoV_j \leqslant V_j \, , \, U^toV_j \leqslant V_j \, , \, V_joU \leqslant V_j \, , \, V_joU^t \leqslant V_j \tag{۶.۶}$$

که U ، هر رابطه فازی نامشخص روی I است. به وضوح، اگر U نامشخص، به مجموعه همه روابط فازی انعکاسی روی I محدود شود، آنگاه نامساوی‌های دستگاه‌های بالا، شامل V_j ها تبدیل به تساوی می‌شوند.
همچنین اثبات می‌شود که هر جواب انعکاسی در دستگاه ۱.۶ (، به ترتیب ، ۲.۶،۳.۶،۴.۶،۵.۶ و ۶.۶) نیز یک جواب در دستگاه ۱۹.۵ (، به ترتیب، ۲۰.۵،۲۱.۵،۲۸.۵،۲۹.۵ و ۳۰.۵) است. جواب‌های دستگاه‌های ۱.۶،۲.۶ و ۳.۶ در $\mathscr{Q}(I)$ ، به ترتیب، شبه‌ترتیب‌های منظم راست قوی، منظم چپ قوی و منظم قوی با دریافت روابط فازی $\{V_j\}_{j\in J}$ و رابطه فازی W و نیز جواب‌های دستگاه‌های در $\mathscr{Q}(I)$ ، یعنی جواب‌های ۴.۶،۵.۶ و ۶.۶ در $\mathscr{Q}(I)$ ، به ترتیب، هم‌ارزی‌های فازی منظم قوی راست، منظم

قوی چپ و منظم قوی با دریافت $\{V_j\}_{j\in J}$ و W هستند. اگر $\omega_I = W$ ، آنگاه می‌توان آنها را منظم راست قوی، منظم چپ قوی و منظم قوی با دریافت $\{V_j\}_{j\in J}$ نامید.
احکام گزاره‌ها به شکل‌های مختلفی در [۶۶]،[۴۴]،[۶۲]،[۷۳] و دیگر مقاله‌های مرتبط وجود دارند، اما آن‌ها به شکلی که در اینجا نیاز است، ارائه می‌شوند. ابتدا ایده‌آل تعریف می‌شود.

تعریف ۱.۱.۶. [۶۹] زیرمجموعه غیرتهی I از مشبکه L ، یک ایده‌آل [1] است اگر دارای دو شرط زیر باشد:

الف) $a \in I\,, x \leq a \Longrightarrow x \in I$

ب) $a, b \in I\,, \Longrightarrow a \vee b \in I.$

و در این حالت نوشته می‌شود:

$$I \trianglelefteq L$$

، همچنین $a \in L$ ، یک ایده‌آل اصلی [2] است اگر :

ج) $\downarrow a = \{x \in L | x \leq a\}$ برقرار باشد.

گزاره ۲.۱.۶. [۱۶] اگر ℓ ، یک مشبکه، V و W ، روابط ℓ - فازی روی یک مجموعه غیرتهی I باشند ، آنگاه:

الف) مجموعه‌های $\{U \in \mathscr{R}(I) | VoU \leqslant W\}$ و $\{U \in \mathscr{R}(I) | UoV \leqslant W\}$ ، ایده‌آل‌های مشبکه $\mathscr{R}(I)$ هستند.

ب) W/V وجود دارد اگر و فقط اگر $\{U \in \mathscr{R}(I) | VoU \leqslant W\}$ یک ایده‌آل اصلی باشد. اگر این مطلب درست باشد، آنگاه این ایده‌آل اصلی، به وسیله W/V تولید می‌شود، یعنی، $\forall U \in \mathscr{R}(I)$ نتیجه زیر را داریم :

$$VoU \leqslant W \iff U \leqslant W/V. \tag{۷.۶}$$

ج) $W\backslash V$ وجود دارد اگر و فقط اگر $\{U \in \mathscr{R}(I) | UoV \leqslant W\}$ ، یک ایده‌آل اصلی باشد. اگر این مطلب درست باشد، آنگاه این ایده‌آل اصلی، به وسیله $W\backslash V$ تولید می‌شود، یعنی، $\forall U \in \mathscr{R}(I)$ نتیجه زیر را داریم :

$$UoV \leqslant W \iff U \leqslant W\backslash V. \tag{۸.۶}$$

گزاره ۳.۱.۶. [۱۶] شرایط زیر درست هستند:

[1] ideal

[2] prinicipal ideal

الف) مجموعه همه جواب‌های در دستگاه‌های ۱.۶ تا ۶.۶ ، ایده‌آل‌های اصلی مشبکه $\mathscr{R}(I)$ را تشکیل می‌دهند.

ب) اگر W یک شبه‌ترتیب فازی باشد، آنگاه بزرگترین جواب در دستگاه‌های ۱.۶،۲.۶ و ۳.۶ همچنین شبه‌ترتیب‌های فازی هستند و آن‌ها می‌توانند، به ترتیب، به عنوان $Q^{slr} \wedge W, Q^{srr} \wedge W$ و $Q^{sr} \wedge W$ بیان شوند به طوری که Q^{slr}, Q^{srr} و Q^{sr} شبه‌ترتیب‌های فازی روی I هستند که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$Q^{srr} = \bigwedge_{j\in J} V_j/V_j \qquad Q^{slr} = \bigwedge_{j\in J} V_j\backslash V_j \qquad Q^{sr} = Q^{srr} \bigwedge Q^{slr}. \tag{۹.۶}$$

ج) اگر W یک هم‌ارزی فازی باشد، آنگاه بزرگترین جواب در دستگاه‌های ۱.۶،۲.۶ و ۳.۶ ، همچنین هم‌ارزی‌های فازی هستند و آن‌ها می‌توانند، به ترتیب، به عنوان $E^{slr} \wedge W, E^{srr} \wedge W$ و $E^{sr} \wedge W$ بیان شوند به طوری که E^{slr}, E^{srr} و E^{sr} هم‌ارزی‌های فازی روی I هستند که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$E^{srr} = \bigwedge_{j\in J} V_j/V_j \qquad E^{slr} = \bigwedge_{j\in J} V_j\backslash V_j \qquad Q^{sr} = E^{srr} \bigwedge E^{slr}. \tag{۱۰.۶}$$

برهان. به آسانی می‌توان بررسی کرد که بند **الف)** درست است. با قضیه ۴.۵.۵ ، می‌توان به دست اورد که Q^{srr} و Q^{slr} شبه‌ترتیب‌های فازی هستند و آن‌ها بزرگترین جواب‌های دستگاه ۱.۶ و ۲.۶ با $\omega_I = W$ هستند(که نامعادله $U \leqslant W$ حذف شده است). با این نتیجه Q^{sr} نیز یک شبه‌ترتیب فازی است و با استفاده از بند **الف)** ، بزرگترین جواب دستگاه‌های ۳.۶ با $\omega_I = W$ است. بدیهی است که E^{slr}, E^{srr} و E^{sr} ، به ترتیب، هم‌ارزی‌های فازی طبیعی از Q^{slr}, Q^{srr} و Q^{slr} باشند. بنابراین با استفاده از بند **الف)** و با خاصیت تقارن، هم‌ارزی‌های E^{slr}, E^{srr} و E^{sr} ، به ترتیب، بزرگترین جواب در دستگاه‌های ۴.۶،۵.۶ و ۶.۶ با $\omega_I = W$ هستند.

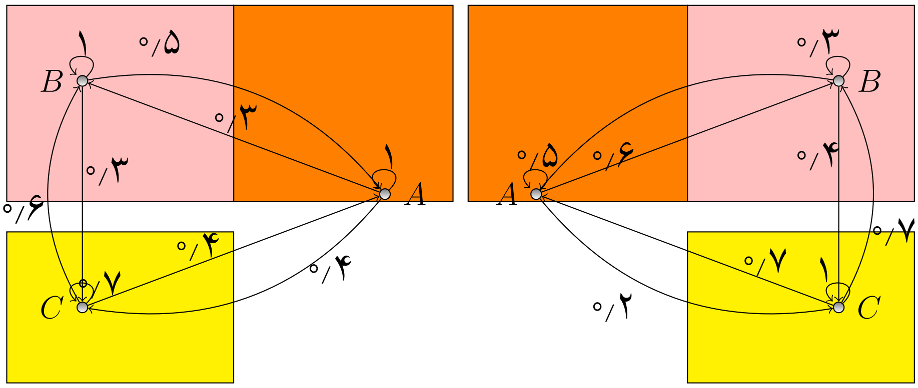
اکنون، دوباره به وسیله بند **الف)** داریم که: $E^{slr} \wedge W, E^{srr} \wedge W, Q^{sr} \wedge W, Q^{slr} \wedge W, Q^{srr} \wedge W$ و $E^{sr} \wedge W$ ، به ترتیب، بزرگترین جواب دستگاه‌های ۱.۶،۲.۶،۳.۶،۴.۶،۵.۶ و ۶.۶ هستند. □

مثال ۴.۱.۶. [۱۶] اگر مثال ۱۰.۵.۵ و روابط فازی $\{V_j\}_{j\in J}$ این مثال در نظر گرفته شوند، آنگاه:

$$Q^{srr} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰/۲ & ۰/۲ \\ ۰/۳ & ۱ & ۰/۳ \\ ۰/۴ & ۰/۴ & ۱ \end{bmatrix} \qquad Q^{slr} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰/۳ & ۰/۲ \\ ۰/۴ & ۱ & ۰/۲ \\ ۰/۴ & ۰/۳ & ۱ \end{bmatrix} Q^{sr} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰/۲ & ۰/۲ \\ ۰/۳ & ۱ & ۰/۲ \\ ۰/۴ & ۰/۳ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$E^{srr} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰/۲ & ۰/۲ \\ ۰/۲ & ۱ & ۰/۳ \\ ۰/۲ & ۰/۳ & ۱ \end{bmatrix} \qquad E^{slr} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰/۳ & ۰/۲ \\ ۰/۳ & ۱ & ۰/۲ \\ ۰/۲ & ۰/۲ & ۱ \end{bmatrix} \qquad E^{sr} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰/۲ & ۰/۲ \\ ۰/۲ & ۱ & ۰/۲ \\ ۰/۲ & ۰/۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

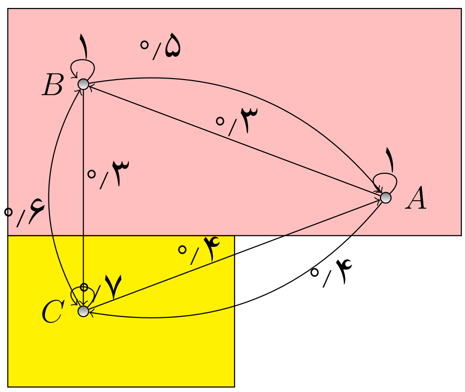
بدیهی است که همه روابط فازی، منحصراً، کمتر از بزرگترین جواب متناظر دستگاه‌های (۱۹.۵)-



(۲۱.۵) ، (۲۸.۵)-(۳۰.۵) محاسبه شده در مثال ۱۰.۵.۵ هستند و آنها حتی اندیس‌های بیشتری نسبت به شبه‌ترتیب و هم‌ارزی‌های فازی محاسبه شده در مثال ۱۰.۵.۵ دارند.

مثال ۵.۱.۶. [۱۶] اگر خانواده روابط فازی $\{V_j\}_{j\in J}$ در مثال ۱۰.۵.۵ ، فقط با تک رابطه $V_۱$ در نظر گرفته شود، آنگاه بزرگترین شبه‌ترتیب فازی راست Q^{rr} ، بزرگترین شبه‌ترتیب معین راست Q^{srr} و بزرگترین شبه ترتیب فازی قوی راست به صورت زیر به دست می‌آیند:

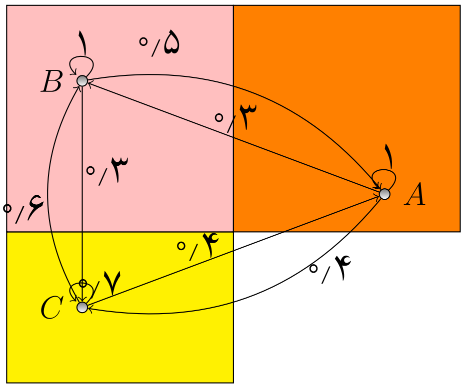
$$Q^{rr}=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰/۷ & ۰/۷ & ۱ \end{bmatrix} \qquad Q^{crr}=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \qquad Q^{srr}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰/۳ & ۰/۳ \\ ۰/۳ & ۱ & ۰/۳ \\ ۰/۴ & ۰/۴ & ۱ \end{bmatrix}$$



شکل ۱.۶: دسته‌بندی فازی از شبه‌ترتیب منظم راست و دسته‌بندی قطعی از شبه‌ترتیب قطعی راست

، به وضوح $indQ^{srr}=۳$ و $indQ^{rr}=indQ^{crr}=۲$ است.

مجموعه همه جواب‌های معین در دستگاه‌های خطی ضعیف (۱۹.۵)-(۲۱.۵) و (۲۸.۵)-(۳۰.۵) مانند مجموعه همه جواب‌های معین دستگاه‌های خطی ضعیف (۱.۶-۶.۶) ، به ترتیب، زیرمجموعه‌هایی



شکل ۲.۶: دسته‌بندی فازی از شبه‌ترتیب منظم قوی

از مجموعه همه جواب‌های دستگاه‌های (۱۹.۵)-(۲۱.۵) هستند و بزرگترین عناصر این مجموعه‌ها ، به ترتیب، کمتر یا مساوی بزرگترین جواب‌های دستگاه‌های خطی ضعیف (۱۹.۵)-(۲۱.۵) و (۲۸.۵)-(۳۰.۵) هستند، بنابراین بزرگترین جواب‌های معین در دستگاه‌های (۱۹.۵)-(۲۱.۵) و (۲۸.۵)-(۳۰.۵) و بزرگترین جواب‌های در (۱.۶)-(۶.۶) ، می‌توانند به عنوان برخی « تقریب‌های کمتر » در بزرگترین جواب‌های دستگاه‌های (۱۹.۵)-(۲۱.۵) و (۲۸.۵)-(۳۰.۵) باشند. در ادامه، برخی دستگاه‌های خطی از نامعادلات رابطه فازی بررسی می‌شوند به طوری که بزرگترین جواب‌ها می‌توانند به عنوان « تقریب‌های بزرگتر» در دستگاه‌های (۱۹.۵)-(۲۱.۵) و (۲۸.۵)-(۳۰.۵) به دست بیایند. گرچه این بزرگترین «تقریب‌های بزرگتر»، لزوماً جواب‌های دستگاه‌های (۱۹.۵)،(۲۰.۵) ، (۲۸.۵) و (۲۹.۵) نیستند، آن‌ها می‌توانند ویژگی‌های مهم معینی را در این دستگاه‌ها به اشتراک بگذارند. با قبول این مطلب، در برخی حالت‌ها، استفاده از آن‌ها به جای بزرگترین جواب‌های در دستگاه‌های (۱۹.۵)،(۲۰.۵) ، (۲۸.۵) و (۲۹.۵) حتی به طور مؤثرتر، در بخش بعدی ارائه می‌شود.

در پایان، اگر I همچنین یک مجموعه غیرتهی (نه لزوماً متناهی)، $\{V_j\}_{j\in J}$ خانواده از روابط فازی داده شده روی I (که J نه لزوماً متناهی) و W ، یک شبه‌ترتیب فازی روی I باشد، آنگاه $\mathscr{M}$ ، نشان دهنده زیرنیم‌گروه یکه‌دار از نیم‌گروه یکه‌دار $(\mathscr{R}(I),\circ)$ تولید شده به وسیله مجموعه $\{V_j\}_{j\in J}$ است، یعنی، $\mathscr{M}$ شامل l_I و همه حاصل‌ضرب‌های به شکل $V_{i_1}o\ldots oV_{i_k}$ برای $i_1,\ldots,i_k\in J$ است.

اگر دستگاه‌های شامل نامعادلات رابطه فازی زیر را در نظر بگیریم:

$$UoW_p^r\leqslant W_p^r \qquad (P\in\mathscr{M}); \tag{۱۱.۶}$$

$$W_p^loU\leqslant W_p^l \qquad (P\in\mathscr{M}); \tag{۱۲.۶}$$

$$UoW_p^r\leqslant W_p^r \qquad U^toW_p^r\leqslant W_p^r \qquad (P\in\mathscr{M}); \tag{۱۳.۶}$$

$$W_p^loU\leqslant W_p^l \qquad W_p^loU^t\leqslant W_p^l \qquad (P\in\mathscr{M}); \tag{۱۴.۶}$$

که $W_p^l=WoP$, $W_p^r=PoW$ و U ، یک رابطه فازی نامشخص روی I است.

واضح است که یک رابطه فازی R ، یک جواب در معادله ۱۳.۶ (، به ترتیب، ۱۴.۶)است اگر و فقط اگر هر دو رابطه‌های R و R^t ، جواب‌های در معادله ۱۱.۶ (به ترتیب ۱۲.۶) باشند. جواب‌های در

معادلات ۱۱.۶ و ۱۲.۶ ، به ترتیب، روابط منظم راست ضعیف و منظم چپ ضعیف با دریافت $\{V_j\}_{j\in J}$ و W نامیده می‌شوند و اگر $W = \omega_I$ باشد، آنگاه آن‌ها منظم راست ضعیف و منظم چپ ضعیف با دریافت $\{V_j\}_{j\in J}$ نامیده می‌شوند.
اکنون گزاره زیر اثبات می‌شود.

گزاره ۶.۱.۶. [۱۶] شرایط زیر درست هستند.

الف) مجموعه همه جواب‌های در دستگاه‌های (۱۱.۶)-(۱۴.۶) ، ایده‌آل‌های اصلی مشبکه $\mathscr{R}(I)$ را تشکیل می‌دهند.

ب) بزرگترین جواب‌های در دستگاه‌های ۱۱.۶ و ۱۲.۶ ، شبه‌ترتیب‌های فازی هستند و آن‌ها می‌توانند به ترتیب، به صورت زیر بیان شوند:

$$Q^{wrr} = \bigwedge_{P\in\mathscr{M}} P\oslash W \qquad Q^{wlr} = \bigwedge_{P\in\mathscr{M}} W\oslash P. \tag{۱۵.۶}$$

ج) بزرگترین جواب‌های در دستگاه‌های ۱۳.۶ و ۱۴.۶ ، هم‌ارزی‌های فازی هستند و آن‌ها می‌توانند به صورت زیر بیان شوند:

$$E^{wrr} = \bigwedge_{P\in\mathscr{M}} P\hat{\oslash} W \qquad E^{wlr} = \bigwedge_{P\in\mathscr{M}} W\hat{\oslash} P. \tag{۱۶.۶}$$

د) اگر W یک رابطه فازی تعدی باشد، آنگاه هر جواب در دستگاه ۱۹.۵ (، به‌ترتیب، ۲۰.۵ و ۲۹.۵،۲۸.۵) ، یک جواب در دستگاه ۱۱.۶ (، به‌ترتیب، ۱۲.۶ و ۱۴.۶،۱۳.۶) است.

برهان. واضح است که دستگاه‌های (۱۱.۶)-(۱۴.۶) ، حالت‌های خاصی از دستگاه‌های ۴.۶،۲.۶،۱.۶ و ۵.۶ با خانواده $\{W_P^r\}_{P\in\mathscr{M}}$ (، به‌ترتیب، $\{W_P^l\}_{P\in\mathscr{M}}$) تولید شده به جای $\{V_j\}_{j\in J}$ و ω_I ، بجای W هستند و بر طبق گزاره ۳.۱.۶ ، درستی شرط **الف)** حاصل می‌شود.
به علاوه، به وسیله گزاره ۳.۱.۶ عبارت‌های زیر حاصل می‌شوند:

$$Q^{wrr} = \bigwedge_{P\in\mathscr{M}} W_r^P\backslash W_r^P = \bigwedge_{P\in\mathscr{M}} P\oslash W \qquad Q^{wlr} = \bigwedge_{P\in\mathscr{M}} W_l^P/W_l^P = \bigwedge_{P\in\mathscr{M}} W\oslash P$$
$$E^{wrr} = \bigwedge_{P\in\mathscr{M}} W_r^P\backslash\backslash W_r^P = \bigwedge_{P\in\mathscr{M}} P\hat{\oslash} W \qquad E^{wlr} = \bigwedge_{P\in\mathscr{M}} W_l^P//W_l^P = \bigwedge_{P\in\mathscr{M}} W\hat{\oslash} P.$$

و بنابراین شرط **ب)** و **ج)** حفظ می‌شود.
د) حال، اگر W ، یک رابطه تعدی فازی و R ، یک جواب در دستگاه ۱۹.۵ باشد. با خاصیت تعدی W ، نامساوی $RoW \leqslant WoW \leqslant W \Longrightarrow R \leqslant W$ حاصل می‌شود و بنابراین اولین نامعادله در دستگاه ۱۱.۶ (برای $P = l_I$) برقرار است. اگر $P = V_{j_1}o\dots oV_{j_k}$ برای برخی $J \in j_1\dots j_k$ باشد، آنگاه $RoP \leqslant PoR$ که از این نامساوی، نتیجه زیر را داریم:

$$RoW_P^r = RoPoW \leqslant PoRoW \leqslant PoW = W_P^r.$$

بنابراین، R ، یک جواب در دستگاه ۱۱.۶ است.
به طور مشابه، این اثبات، برای دستگاه‌های ۲۸.۵،۲۰.۵ و ۲۹.۵ نیز برقرار است. □

مثال ۶.۱.۷. [۱۶] اگر ℓ ، یک ساختار بولی، I ، هر مجموعه چهار عنصری و $V_۱$ و W ، روابط فازی روی I به شکل زیر باشند:

$$V_۱ = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \qquad W = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

آنگاه :

$$Q^{rr} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \qquad E^{rr} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$Q^{wrr} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \quad E^{wrr} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

بنابراین، $Q^{rr} \neq Q^{wrr}$ و $E^{rr} \neq E^{wrr}$ ، به علاوه :

$$ind(Q^{rr}) = ind(E^{rr}) = ۴ \qquad , \qquad ind(Q^{wrr}) = ind(E^{wrr}) = ۲.$$

مثال ۶.۱.۸. [۱۶] اگر روابط فازی مثال ۵.۵.۸ در نظر گرفته شوند، آنگاه مجموعه $\{W_P^r | P \in \mathscr{M}\}$ ، شامل دو رابطه است که به صورت ماتریس‌های زیر هستند:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix}$$

و بنابراین ماتریس‌های زیر به دست می‌آیند:

$$Q^{wrr} = Q^{rr} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} & ۱ \end{bmatrix}, \qquad E^{wrr} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & \frac{۱}{۲} \\ ۱ & ۱ & \frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} & ۱ \end{bmatrix}, \; E^{rr} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

باید یادآوری کرد که در مثال ۵.۵.۸ ، اثبات شد که E^{rr} ، به عنوان اشتراک یک دنباله نامتناهی از هم‌ارزی‌های فازی محاسبه می‌شود و این در حالی است که، دنباله متناظر به Q^{rr} ، متناهی است. بر طبق گزاره ۶.۱.۶ ، بزرگترین جواب در دستگاه‌های (۵.۱۹)-(۵.۲۹) ، به ترتیب، کمتر یا مساوی بزرگترین جواب‌های در دستگاه‌های (۶.۱۱)-(۶.۱۴) هستند.

۲.۶ نتیجه‌گیری

۱. بزرگترین شبه‌ترتیب و هم‌ارزی‌های منظم قوی، ویژگی‌های ساختاری بیشتری را نسبت به شبه‌ترتیب و هم‌ارزی منظم نمایش می‌دهند.

۲. در برخی مواقع، می‌توان از شبه‌ترتیب و هم‌ارزی‌های منظم قطعی استفاده کرد.

۳. شبه‌ترتیب و هم‌ارزی‌های منظم و حالت منظم قوی آن‌ها نیز به عنوان تقریب‌های کوچکتر، برای یک شبه‌ترتیب و هم‌ارزی فازی دلخواه هستند.

پیوست آ

آشنایی با نرم‌افزار

۱.آ نرم‌افزارهای تحلیل شبکه

ریاضیات تحلیل شبکه، با نرم‌افزارهای تحلیل شبکه تکمیل می‌شود. در تحلیل شبکه از نرم‌افزارهای مختلفی استفاده می‌شود. از معروف‌ترین نرم‌افزارهای تحلیل شبکه، می‌توان نرم‌افزارهای پاژک [۱] ، نود ایکس ال [۲] ، یوسینت [۳] ، نت‌ورک ایکس [۴] ، نت‌لوگو [۵] ، گفی [۶] و ... نام برد. ما در اینجا با استفاده از نرم‌افزار گفی، یک شبکه اجتماعی، با نام شبکه اجتماعی وبلاگ‌های ورزشی ایرانیان را مورد بررسی قرار داده‌ایم.

۲.آ محیط نرم‌افزار گفی

نرم‌افزار گفی، مانند نرم‌افزارهای دیگر، قابلیت‌های محاسباتی بسیاری دارد. ابتدا برای کار با نرم‌افزار گفی و نمایش تصویری گراف، نیاز به یک سری اطلاعات ورودی داریم:

۱. یک فایل ورودی اکسل، شامل همه رأس‌های گراف

۲. یک فایل ورودی اکسل، شامل همه یالهای گراف.

از جمله قابلیت‌های محاسباتی گفی عبارتند از:

- تعداد ارتباطات ورودی برای هر رأس در شبکه
- تعداد ارتباطات خروجی برای هر رأس در شبکه

---

[۱] pajek
[۲] nodexl
[۳] UCINET
[۴] networkx
[۵] netlogo
[۶] gephi

- تعداد کل لینک‌ها و میانگین تعداد یال برای هر رأس (میانگین درجه هر گره).
- قطر گراف، چگالی گراف
- محاسبه تعداد زیرگراف‌های همبند
- محاسبه تعداد مولفه همبند قوی و ضعیف گراف
- محاسبه درجه مرکزیت بردار ویژه: ادغام یک سری ویژگی‌ها مانند وزن و درجه یک رأس و تبدیل آنها به یک ویژگی
- رأس با درجه نزدیکی بالا: هر چه فاصله یک گره تا بقیه گره‌ها کمتر باشد، نزدیکی بیشتر است و برعکس
- رأس با درجه میانی بالا: هرچه کوتاهترین مسیرهای بیشتری از یک رأس بگذرند، درجه میانی آن رأس بالاتر است در واقع این رأس، مانند یک رأس برشی عمل می‌کند، یعنی، با حذف آن از شبکه، دو دسته از افراد که به وسیله این فرد به یکدیگر وصل شده‌اند جدا خواهند شد.

۳.آ محاسبه چند شاخصه از شبکه اجتماعی وبلاگ‌های ورزشی ایرانیان

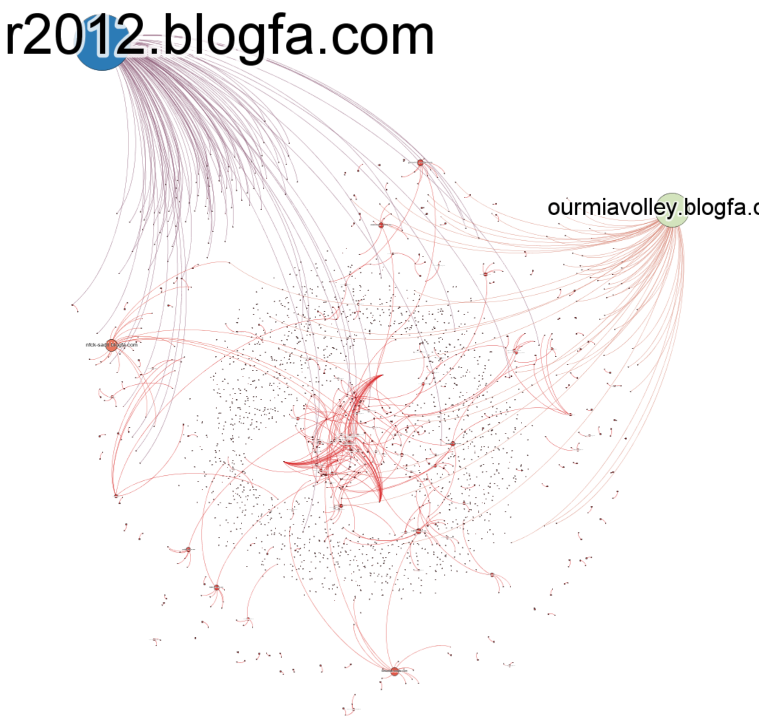
همانطور که در بالا اشاره شد، چند ویژگی از شبکه اجتماعی وبلاگ‌های ورزشی ایرانیان با نرم‌افزار گفی مورد بررسی قرار داده‌ایم [۶۸] . در این آزمایش که در سال ۱۳۹۱ انجام گرفته است، این شبکه دارای ۲۲۲۱ رأس و ۶۰۹ یال می‌باشد که شبکه آن از نوع جهت‌دار می‌باشد. در این بررسی، وبلاگ‌های با بیشترین درجه ورودی، وبلاگ‌های news.persianblog.ir ، fans.persianblog.ir و help.persianblog.ir هستند و وبلاگ با بیشترین درجه خروجی، وبلاگ emperorator۲۰۱۲.blogfa.com است که وبلاگ‌های با درجه ورودی بالا، دارای اهمیت بالایی هستند. همچنین درجه هر رأس نیز مورد آزمایش قرار گرفته که برای شبکه بدون جهت مناسب است. نمایش تصویری وبلاگ‌های با بیشترین درجه، درجه ورودی و درجه خروجی و همچنین نتایج حاصل از این دو بررسی، به ترتیب، در شکل‌های ۱.آ ، ۲.آ و نتایج در شکل‌های ۳.آ و ۴.آ نشان داده شده‌اند.

خوشه‌بندی یا دسته‌بندی افراد شبکه نیز مورد آزمایش قرار گرفته است. از کاربردهای خوشه‌بندی، می‌توان در کارهای انتخاباتی استفاده کرد. نمایش گرافیکی این خوشه‌بندی در شکل ۵.آ و نتایج این خوشه‌بندی در نمودار ۶.آ نشان داده شده است.

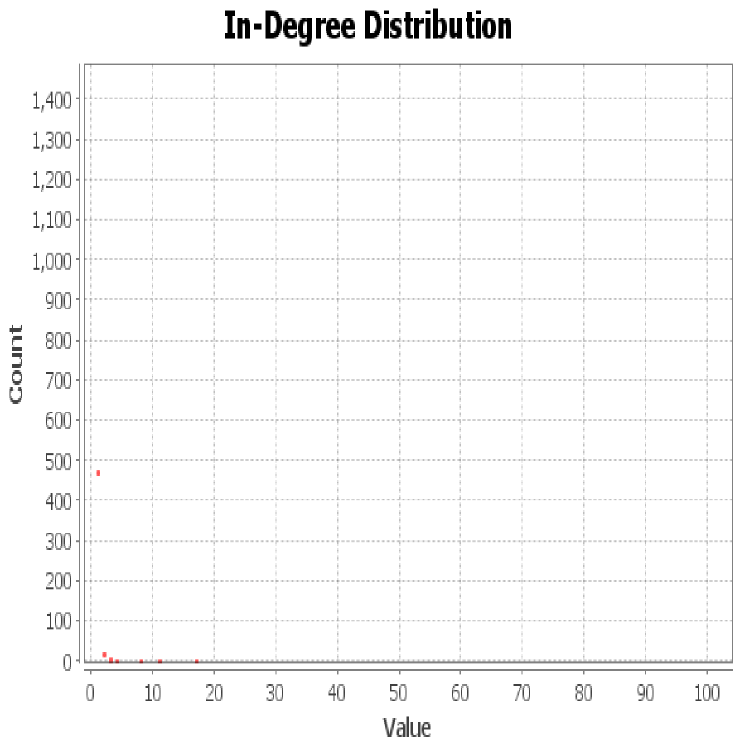
محور افقی، نمایانگر تعداد خوشه‌ها و محور بالای آن، رأس‌های داخل هر خوشه است.

همچنین ویژگی‌های دیگری مانند رأس‌های با درجه میانی بالا و رأس‌های با درجه نزدیکی بالا نیز مورد بررسی قرار گرفتند که نمایش گرافیکی آنها در شکل‌های ۷.آ و ۸.آ و نتایج آنها در نمودارهای ۹.آ و ۱۰.آ نشان داده شده است. در نمودارهای نتایج این دو، محور افقی آنها به‌ترتیب، نمایانگر درجه رأس‌های

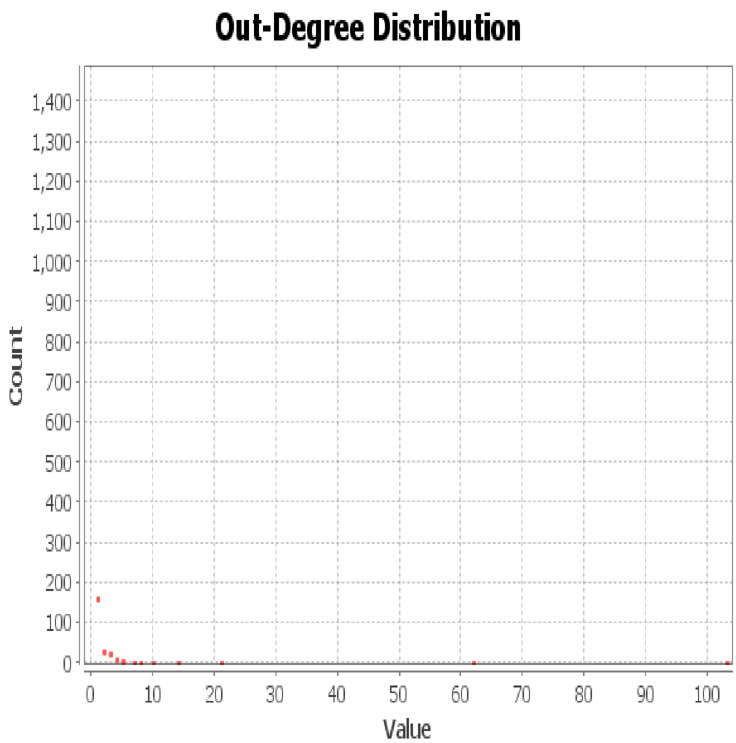
شکل آ.۱: نمایش تصویری وبلاگ‌ها با بیشترین درجه ورودی



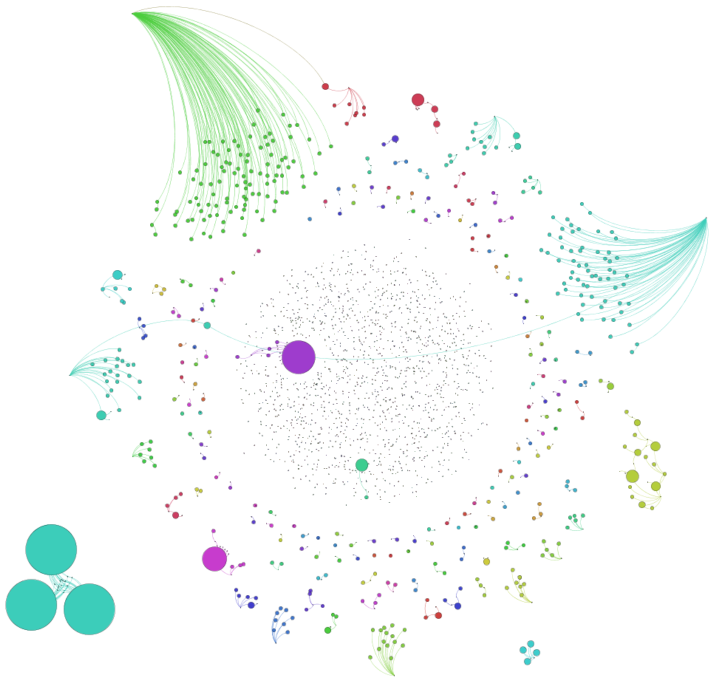
شکل آ.۲: نمایش تصویری وبلاگ‌ها با بیشترین درجه خروجی



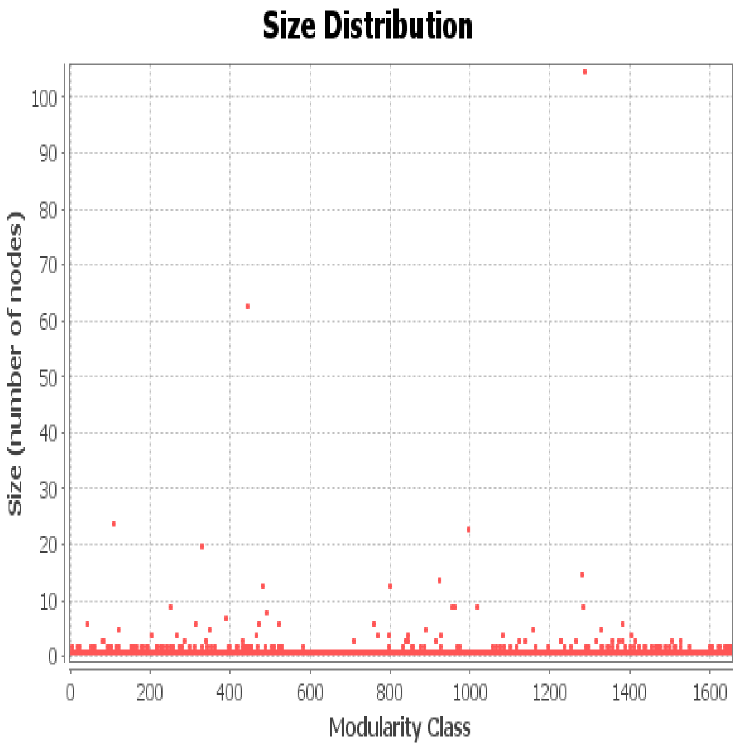
شکل آ.۳: نمودار نتایج وبلاگ‌های با بیشترین درجه ورودی



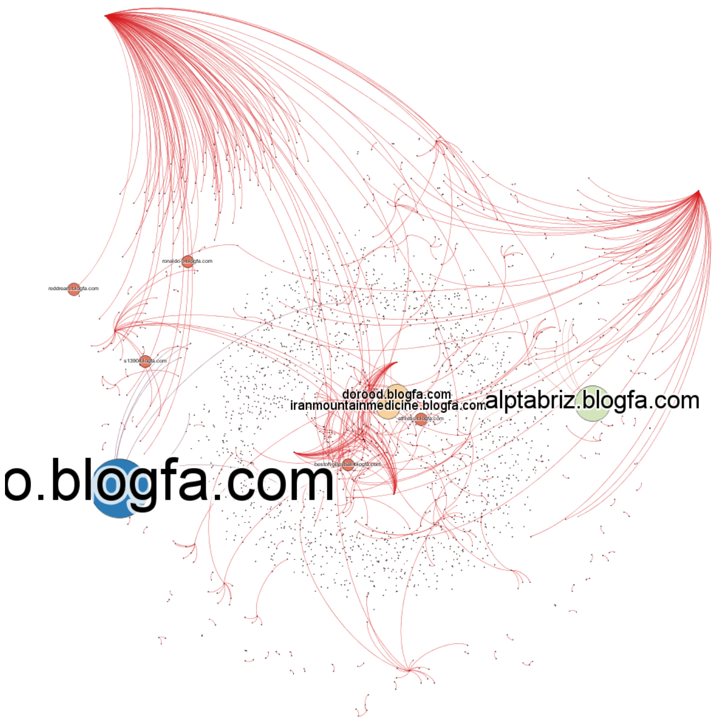
شکل آ.۴: نمودار وبلاگ‌های با بیشترین درجه خروجی



شکل آ.۵: خوشه‌بندی شبکه اجتماعی وبلاگ‌های ورزشی ایرانیان



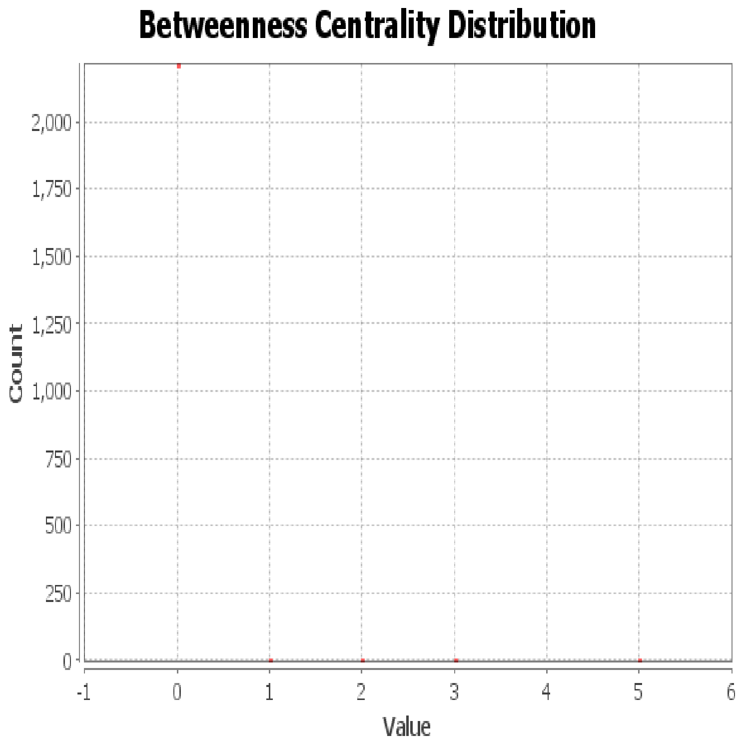
شکل آ.۶: نمودار نتایج خوشه‌بندی



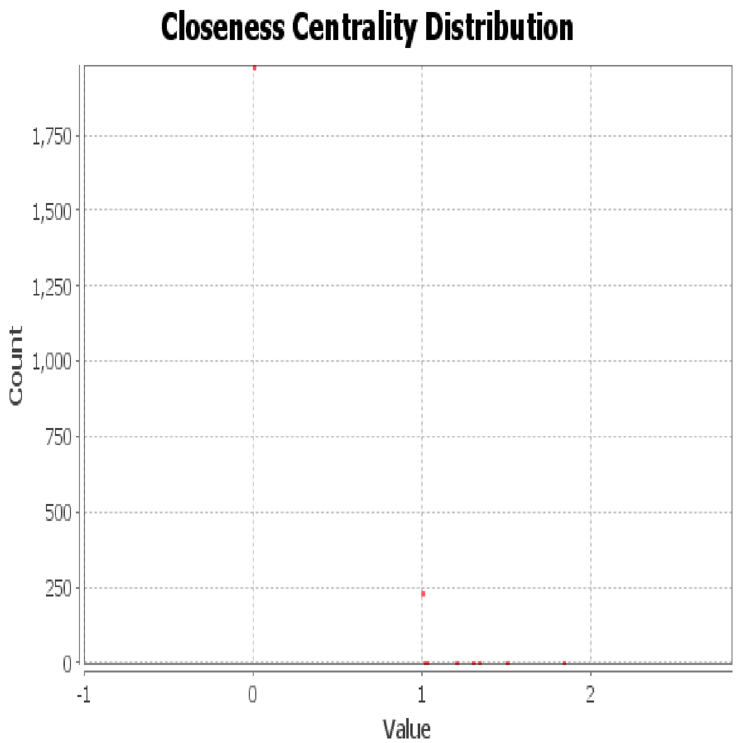
شکل آ.۷: نمایش گرافیکی رأس‌های با درجه میانی بالا

میانی و نزدیکی بالا، و محور عمودی آنها تعداد رأس‌های با این ویژگی‌ها است. رأس‌های با درجه نزدیکی بالا و میانی بالا در شبکه از اهمیت خاصی برخوردار هستند، زیرا می‌توان آنها را بعنوان سرویس دهنده به بقیه افراد شبکه قرار داد.

شکل آ.۸: نمایش رأس‌های با درجه نزدیکی بالا



شکل آ.۹: نمودار نتایج رأس‌ها با درجه میانی بالا



شکل آ.۱۰: نمودار نتایج رأس‌ها با درجه نزدیکی بالا

مراجع

[۱] اسدی سعید ، **تحلیل شبکه‌های اجتماعی مجازی و کاربرد آن در مدیریت علم‌سنجی**، عضو هیئت علمی دانشگاه شاهد.

[۲] خانیکی هادی ، بابایی محمود ، **فضای سایبر و شبکه‌های اجتماعی: مفهوم و کارکردها**، فصل‌نامه انجمن ایرانی مطالعات جامعه اطلاعاتی/ دوره اول، شماره ۱ ، پاییز و زمستان ۱۳۹۰.

[۳] بروگمان، یرون ،**درآمدی بر شبکه‌های اجتماعی**، مترجم : میرزایی خلیل ، تهران، جامعه‌شناسان، ۱۳۸۹.

[۴] رحمان‌زاده سید علی ، **کارکرد شبکه‌های اجتماعی مجازی در عصر جهانی شدن**، مقاله پژوهشی، صفحه ۴۹-۷۸، زمستان ۱۳۸۹.

[۵] رمضانی ابوالفضل ، میرزامحمدی علی ، **تحلیل شبکه‌های اجتماعی به همراه آموزش نرم‌افزار UCINET** ، ناشر : جامعه‌شناسان، ۱۳۹۱ تهران.

[۶] اسلایدها و ویدئوهای درس Analysis Network Social دانشگاه میشیگان.

[۷] گریمالدی-رالف، **ریاضیات گسسته و ترکیباتی**، ترجمه: عمیدی علی ، مرکز نشر دانشگاهی، جلد اول ۱۳۷۶.

[8] P. Arabie, S. Boorman and R. L. Breiger **An algorithm for clustering relational data with applications to social network analysis** , Journal of Mathematical Psychology (1975), pp.12: 329-383.

[9] V. Batagelj, P. Doreian, A. Ferligoj **An optimizalional approach to regular equivalence** Social Networks , (1992) ,pp.14:121-135.

[10] R. Belohlavek, **Fuzzy Relational Systems: Foundations and Principles** , Kluwer, New York, (2002).

[11] R. Belohlavek, V. Vychodil, **Fuzzy Equational Logic** , Springer, Berlin/Heidelberg, (2005).

[12] G. Birkhoff, **Lattice Theory, 3rd edn. American Mathematical Society**, Providence, RI, (1973).

[13] T. S. Blyth, **Lattices and Ordered Algebraic Structures** , Springer, London, (2005).

[14] S.Bogdanovic , M.Cirica, J.Ignjatovica and , **Uniform fuzzy relations and fuzzy functions** , Fuzzy Sets And Systems, 160 (2009), 1054-1081

[15] S.Bogdanovic, M.Ciric , **Fuzzy social network analysis**,Serbia . Faculty of Siences And Mathematics ,Grant No 144011,(2012)

[16] S. Bogdanovic,M.Ciric, J.Ignjantovic , **On the greatest solutions to weakly linear systems of fuzzy relations inequalities and equations**, Serbia . Faculty of Siences And Mathematics,(Submitted for publications)

[17] P. Bonocich, **The 'common structure semigroup', an alternative to the Boorman and White 'joint reduction'.** American Journal of Sociology,(1980), pp. 86, 159–166.

[18] S. A.Boorman, R. L. Breiger and H. C. White, **Social structure from multiple networks: I. Blockmodels of roles and positions**, American Journal of Sociology ,(1976), pp.81: 730-780.

[19] S.Borgatti , M.Everett : **Regular equvalence : General Theory**, Jornal of Mathematical Socoligy, vol. 18,no.1 (1994), pp. 29–52.

[20] S. P. Borgatti and M.G. Everett. **The class of all regular equivalences: Algebraic structure and computation** Social Networks, (1989), pp.11(1):65 88 .

[21] S. P. Borgatti and M.G. Everett. **Two algorithms for computing regular equivalence** Social Networks, (1993), pp.15(4):361 376.

[22] S .P. Borgatti and M.G. Everett **Role colouring a graph** Mathematical Social Sciences , (1991), pp. 21:183 188.

[23] S. P.Borgatti , **Regular Equivalence in Graphs, Hypergraphs, and Matrices**. Ph.D. Dissertation, University of California, Irvine ,(1989).

[24] S. P. Borgatti, J. P. Boyd and M. G.Everett, **Iterated roles: Mathematics and application**, Social Networks ,(1989), pp.11:159-172 .

[25] S. P. Borgatti, M. G.Everett and P. Marsden (Ed.) **Notions of position in social network analysis**, Sociological Methodology, , Oxford, Basil Blackwell,(1992a), pp. 1-35.

[26] S. P. Borgatti and M. G. Everett, **Graph colorings and power in experimental exchange networks** Social Networks, pp.14: 287-308, (1992b).

[27] S. P. Borgatti and M. G. Everett, **Regular blockmodels of multiway, multimode matrices** Social Networks,pp. 14: 91-120, (1992c).

[28] S. P. Borgatti and M. G. Everett, **Ecological and perfect colorings** Social Networks, in press ,(1994).

[29] S. P.Borgatti and M. G.Everett, **An extension of regular colouring of graphs to digraphs, networks and hypergraphs**, Social Networks,(1993), pp. 15: 237-254.

[30] S. P.Borgatti, J. P. Boyd and M.G.Everett, **Ego-centered and local roles: A graph theoretic approach**, Journal of Mathematical Sociology (1990), pp.15:163-172.

[31] J. P. Boyd, **Social Semigroups**, Fairfax, VA, George Mason University Press, (1991).

[32] J.Boyd , M.Everett: **Relations, residuals,regular interiors,relative regular equvalence**, Social Networks, vol. 21,no.2 (1999), pp. 147-165.

[33] U. Brandes and T. Erlebach (eds.), **Network Analysis: Methodological Foundations** , (Lecture Notes in Computer Science, vol. 3418), Springer, 2005.

[34] Burt, R. S. **Detecting role equivalence** Social Networks (1990), pp.12: 83-97.

[35] D. Cartwright and F. Harary, **Structural balance: a generalization of Heider's theory** Psychological Review 63,(1956), pp.277–293.

[36] M. Ciric, J. Ignjatovic, T. Petkovic, A. Stamenkovic, **Fuzzy relation equations and reduction of fuzzy automata** , Journal of Computer and System Sciences, (2009), .10.015.

[37] A. H. Clifford and G. B. Preston, **The Algebraic Theory of Semigroups**, American Mathematical Society, Providence, RI, (1961).

[38] M. G. Everett , **Role similarity and complexity in social networks** Social Networks, (1985), pp.7: 353-359.

[39] M. G.Everett and C.Hirschman , **The lattice of exact colorations**, Unpublished manuscript.

[40] T. F. Fan, C. J. Liau and T. S. Lin, **A theoretical investigation of regular equivalences for fuzzy graphs**, International Journal of Approximate Reasoning, Vol.49 ,(2008), pp.678–688.

[41] K. Faust and S. Wasserman, **Social Network Analysis: Methods and Applications** , Cambridge Univer-sity Press, Cambridge, 1994.

[42] J.Fodor , **Left-continuous t-norms in Fuzzy Logic: an Overview** , Dept. of Biomathematics and Informatics, Faculty of Veterinary Sci. Szent Istvan University, Istvan u. 2, H-1078 Budapest

[43] F. Gomide and W. Pedrycz , **Fuzzy Systems Engineering: Toward Human-Centric Computing** , Wiley-IEEE Press, (2007).

[44] S. Gottwald and I. Perfilieva , **Fuzzy function as a solution to a system of fuzzy relation equations**, Internat. J. Gen. Systems 32 (2003), pp.361–372.

[45] M. Granovetter, **The strength of weak ties**, American Journal of Sociology, (1973), pp.78, 1360–1380.

[46] G. Gratzer, **General Lattice Theory**, Birkhauser Verlag , (1998).

[47] P. Halmos, **Naive Set Theory**, Van Nostrand, New York,(1960).

[48] R. A. Hanneman,M. Riddle, **Introduction to Social Network Methods** , University of California, Riverside, 2005.

[49] F. Heider, **Attributes and cognitive organization**, Journal of Psychology ,(1946), pp.21: 107–112.

[50] H.Hummell and W.Sodeur, **Strukturbeschreibung von Positionen in sozialen beziehungsnetzen**, In Methoden der netzwerkanalyse, E U. Pappi (Ed.), Munich, Oldenbourg , (1987).

[51] K. H. Kim and F. W. Roush, **Group relationships and homomorphisms of Boolean matrix semigroups**, Journal of Mathematical Psychology, (1984), pp.28: 448-452.

[52] G. J. Klir, B. Yuan, **Fuzzy Sets and Fuzzy Logic, Theory and Application**, Prentice-Hall, Englevood Cliffs, NJ, (1995).

[53] S.Leinhardt , M. J. Mandel and C. Winship, **Roles and positions: A critique and extension of the blockmodelling approach** In Sociological Methodology , San Francisco, Jossey-Bass ,(1983-1984), pp.314-344.

[54] J.Lerner, **Role assignments**,Methodlogical Foundations,Vol.3418 ,Springer, (2005), pp. 216–252.

[55] F. P. Lorrain and H. C. White, **Structural equivalence of individuals in networks** Journal of Mathematical Sociology, (1971), pp.1: 49-80.

[56] F. Lorrain and H.C. White. **Structural equivalence of individuals in social networks** Journal of Mathematical Sociology, Vol.1,(1971),pp.49 80 .

[57] M. Marx and M. Masuch, **Regular equivalence and dynamic logic**, Social Networks, (2003), pp.25:51 65.

[58] P. Mika, **Social Networks and the Semantic Web** , Springer, 2007.

[59] P. S. Nair and S. Sarasamma, **Data mining through fuzzy social network analysis**, in: Proceedings of the 26th Annual Meeting of the North American Fuzzy Information Processing Society, 2007, pp. 251–255.

[60] R. Narayanam , **Game Theoretic Models for Social Network Analysis**,IBM Research, Bangalore, India,20-Feb-2012

[61] M. E. J. Newman, **Analysis of weighted networks** , Physical Review E 70 (2004), 056131:1–9.

[62] V. Novak and I. Perfilieva , **System of fuzzy relation equations as a continuous model of IF-THEN rules**, Information Sciences Vol.177 ,(2007), pp.3218–3227.

[63] R.Paige and R.E.Tarjan, **Three partition refi nement algorithms**, SIAM Journal on Computing, (1987), pp.16(6):973 983.

[64] P. E. Pattison, **The analysis of semigroups of multirelational systems**, Journal of Mathematical Psychology(1982), pp. 25: 87-118.

[65] P. E. Pattison, **Algebraic Models for Social Networks**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, (1993).

[66] I. Perfilieva, **Fuzzy function as an approximate solution to a system of fuzzy relation equations** , Fuzzy Sets and Systems Vol.147 ,(2004) , pp.363–383.

[67] K.P. Reitz and D.R. White, **Graph and semigroup homomorphisms on networks of relations**, Social Networks, (1983), pp.5:193 234.

[68] B. Rezaie , M. Zahedi and H. Mashayekhi , **Content and Network Analysis of Iranian Sports Weblogs**,Department of Computer Engineering and IT, Shahrood University, Shahrood, Iran,(Submitted for publications)

[69] S. Roman, **Lattices and Ordered Sets**, Springer, New York, (2008).

[70] H. Sachs **Uber Teiler, Faktoren und charakteristische Polynome von Graphea Teill I**, Wiss. Z. TH Ilmenau ,(1966), pp.12: 7-12.

[71] L. D. Sailer, **Structural equivalence: Meaning and definition, computation and application**, Social Networks, (1978), pp.1: 73-90.

[72] S. E. Sampson, **Crisis in a Cloister**, University Microfilms, Ann Arbor, MI,(1969), pp. 69-5775.

[73] E. Sanchez, **Resolution of composite fuzzy relation equations**, Information and Control Vol.30 ,(1976), pp.38–48.

[74] A.Tarski, **Journal of Symbolic Logic**, (1941) , pp. 6, 73–89, *incomplete reference from Birkhoff* p. 343 and 345.

[75] C. Winship **Thoughts about roles and relations: An old document revisited**, Social Networks(1988),pp. 10: 209-231.

[76] Opsahl, Tore, Agneessens, Filip, Skvoretz, John, **Node centrality in weighted networks: Generalizing degree and shortest paths**, Social Networks Journal, vol. 32, pp. 245-251, 2010.

[77] Chen, Duanbing, Lü, Linyuan, Shang, Ming-Sheng, Zhang, Yi-Cheng, Zhou, Tao, **Identifying influential nodes in complex networks**, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, vol. 391, pp. 1777-1787, 2012.

[78] Zadeh L.A. **Fuzzy sets**. Information and Control 8, pp. 338 - 353.(1965)

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

additive .... جمع‌پذیر
adjacency .... مجاورت
adjoint pair .... زوج الحاقی
alternative .... دیگر
arbitrarily role-assignable .... نقش معین دلخواه
argument .... آرگومان
automorphism .... همریختی
assignment .... اختصاص
associate .... شرکت‌پذیری
biimplication .... دو استلزام
bijection .... دوسویی
Binary relations .... روابط دودویی
chain .... زنجیر
inverse-images .... عکس تصویرها
classes .... کلاس‌ها
classification .... دسته‌بندی
coarser .... ظریف‌تر
co-image .... هم‌تصویر
complement .... متمم
complex .... پیچیده
composition .... ترکیب
connected .... همبند
consecutive .... متوالی
constraction .... ساختار
contradiction .... تناقض

ترانهاده .... converse

پوشش .... cover

دور .... cycle

درجه پوشش .... degree of overlapping

چگالی .... density

توصیف .... description

قطر .... diameter

زیرمجموعه‌های مجزا .... disjoint subsets

تهی .... empty

معادله .... equation

رابطه هم‌ارزی .... equivalence relation

ظریف‌تر .... finer

نقطه ثابت .... fixed point

تابع .... function

فازی .... fuzzy

هم‌ارزی فازی .... fuzzy equivalence

تحلیل شبکه اجتماعی فازی .... fuzzy social network analysis

گروه .... group

خودتوان .... idempotent

گراف جهتدار همانی .... identity digraph

افراز همانی .... identity partition

شمول .... inclusion

افراد .... individuals

نامعادله .... inequality

اینفیمم .... infimum

یک به یک .... injective

برگشت .... involution

تنها .... isolated

یکریختی .... isomorphism

نامنظم .... irregular

الحاق .... join

مشبکه .... lattice

lattice complete .... مشبکه کامل

left coninuous .... پیوسته چپ

line .... خط

locally finite .... موضعاً متناهی

lower bound .... کران پایین

marked .... علامت‌دار

meet .... تلاقی

monoidal .... نیم‌گروه ضربی یکه‌دار

moltiplication .... حاصلضرب

natural mapping .... نگاشت طبیعی

network analysis .... تحلیل شبکه

node .... گره

partially ordered .... ترتیب جزئی

partition .... افراز

complete partition .... افراز کامل

permutation .... جایگشت

playing .... بازی

point .... نقطه

position .... مکان

post-fixed point .... نقطه پس‌ثابت

principal ideal .... ایده‌آل اصلی

pre-fixed point .... نقطه پیش‌ثابت

reflexive .... انعکاسی

reduce .... کاهش

regular closure .... بستار منظم

regular coloration .... رنگ‌آمیزی منظم

regular equivalence .... منظم هم‌ارزی

regular hull .... اسکلت منظم

regular interior .... درونی منظم

relation .... رابطه

residual .... مانده

residuum .... تفاضل

complete residuated lattice	مشبکه مانده کامل
role assignment	اختصاص نقش
role-primitive	نقش ابتدایی
quasi-order	شبه‌ترتیب
seprated	مجزا
social network	شبکه اجتماعی
social network analysis	تحلیل شبکه اجتماعی
solution	جواب
statistic	آمار
straightforward	سرراست
strong structural equivalence	هم‌ارزی ساختار قوی
submultiplicative	مقسوم‌علیه
surjective mapping	نگاشت پوشا
supremum	سوپریمم
symmetric	متقارن
symmetric interior	درونی متقارن
system	دستگاه
transitive	تعدی
transitive closure	بستار تعدی
trivial	بدیهی
trivial	بی‌اهمیت
undirected	بدون جهت
universal	مرجع
upper bound	کران بالا
vertex	رأس
vertical	عمودی
weakly structural equivalence	هم‌ارزی ساختار ضعیف
weakly linear system	دستگاه خطی ضعیف

نمایه

Aabstract

Since network break up and classification is one of social network analysis goals. Network classification is the key to understand large and complex network. Therefore in this dissertation is studying network analysis subject with equivalence method. In classification problem, is understanding individuals position and similarity measure. In first chapter of dissertation, introduce preliminary concepts that are requirement for next chapters. In chapter 2, are studied history of social networks and social network analysis and also classification of individuals with use structure equivalence method. In chapter 3, use other classification method that is called regular equivalence. In chapter 4, introduce a sequence for computing greatest regular equivalence with residulas and relation composed. In chapter 5, introduce fuzzy social networks and is studying exist greatest fuzzy and crisp equivalence in this networks and research a sequence for greatest with all cases of truth values sets in the fuzzy logic that are called complete residuated complete. In chapter 6, introduce weak and strong fuzzy regular.

keywords:regular equivalence, residulas, regular interiors,fuzzy regular equivalence, fuzzy relations ,fuzzy relations inequalities, fuzzy relations equations, residulas of fuzzy relations,lattice ,completed resiguated lattice, fuzzy quasi-orders,fuzzy equivalences ,regular fuzzy relations

Shahrood University
Faculty Of Mathematical Sciences

Dissertation Submitted in Partial Fulfillment of The Requirements For The Degree of Master of Science in

Applied Mathematics

Fuzzy Social Networks Analysis

Supervisor

Dr. Sadegh Rahimi Sherbaf Moghadas

by

Mahmood Fallah Ghasem Abad

2015