



دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی کاربردی

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

عنوان

روش‌های بدون مش برای مسایل جریان گرمای ناپایدار

استاد راهنما

دکتر علی مس فروش

استاد مشاور

دکتر حجت احسنی طهرانی

دانشجو

خدیجه حسینی

۱۳۹۳

پروردگارا...

نه می توانم مویشان را که در راه عزت من سفید شد، سیاه کنم و نه برای دست های
پینه بسته شان که شمره تلاش برای افتخار من است، مرهمی دارم. پس توفیقم ده که
هر لحظه سگر گزارشان باشم و ثانیه های عمرم را در عصای دست بودشان بگذارم.

اگر تنها ترین تنها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن هست...

خواسم

این اثر ناخیز را که به قول ساندل «پاره‌هایی از بودن من اند»
به پدر و مادرم تقدیم نمایم
دیدم زحمات ایشان فراتر از این هست و جان را سزاوار...

خواسم

به اساتید بزرگوارم تقدیم نمایم
که همواره از ارشاد و راهنمایی‌شان بهره‌مند بودم
دیدم که ایشان را قدر و منزلتی است بس بالاتر

خواسم

به همه آنانی که همواره در ادامه راه
همگام و همراهم بوده‌اند تقدیم نمایم
دیدم که زبان را از محبت و فداکاری آنان یارای گفتن نیست.

مانده‌ام چه کنم

گویای در خلسه بودم که دیانتقم آری... بهتر آن دیدم به فردا تقدیم نمایم.

((زبان درکش ای مرد بسیار دان که فردا قلم نیست بر بی زبان

کرم کن که فردا که دیوان نهند منازل به مقدار احسان دهند.)) (سعدی)

سپاس گزارمی...

نخستین سپاس و ستایش از آن خداوندی است که بنده کوچکش را دریای بیکران اندیشه، قطره‌ای ساخت تا وسعت آن را از دریچه اندیشه‌های ناب آموزگاران بزرگ به تماشا نشیند.

لذا اکنون که در سایه سار بنده نوازی‌هایش پایان نامه حاضر به انجام رسیده است، بر حسب وظیفه و از باب "من لم یسکر المنعم من المخلوقین لم یسکر الله عزوجل" از پدر و مادر عزیزم... این دو معلم بزرگوارم... که همواره بر کوتاهی و درستی من، قلم عضو کشیده و گریانه از کنار غفلت‌هایم گذشته اند و در تمام عرصه‌های زندگی یار و یاور بی چشم داشت برای من بوده اند سپاس گویم و بر خود لازم می‌دانم از جناب آقای دکتر علی مس فروش که در کمال سعه صدر، با حسن خلق و فروتنی، از بیچ گلی در این عرصه بر من دریغ نمودند و زحمات راهنمایی این پایان نامه را بر عهده گرفتند و استاد مشاور جناب آقای دکتر حجت احسنی طهرانی که در مدت انجام این پایان نامه بار نمودهای ارزنده خویش راه‌گشای پیشرفت اینجانب بوده اند سپاس گزارمی کنم، باشد که این خردترین، بخشی از زحمات آنان را سپاس گوید.

همچنین از دوستان عزیزم که در امر تهیه این مجموعه مرایاری کردند، قدر دانی می‌کنم.

خدیجه حسینی
۱۳۹۳

تعمدنامه

اینجانب خدیجه حسینی دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی دانشکده علوم ریاضی دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان روش‌های بدون مش برای مسایل جریان گرمای ناپایدار، تحت راهنمایی دکتر علی مس‌فروش متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه شاهرود “ یا “ Shahrood University “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

خدیجه حسینی
۱۳۹۳

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

روش بدون مش از جمله روش‌های عددی است که در حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی بکار می‌رود. این روش، برخلاف روش عناصر متناهی که دامنه را المان بندی می‌کند، نیازی به المان ندارد و بر روی محمل دامنه انتگرال‌گیری صورت می‌گیرد. هدف این پایان‌نامه حل مسایل جریان گرمای ناپایدار با استفاده از روش‌های بدون مش بهبودیافته و مقایسه آن با روش عناصر متناهی و روش‌های بدون مش رایج است. در فصل اول، مقدمات و پیش‌نیازهای لازم در پایان‌نامه بیان شده است. در فصل دوم، مسایل جریان گرمای ناپایدار با روش عناصر متناهی بررسی می‌شود. در فصل سوم، روش‌های بدون مش روی مسایل جریان گرمای ناپایدار اعمال می‌گردد. در فصل چهارم، روش‌های بدون مش بهبودیافته بیان می‌شود و این روش‌ها برای مسایل جریان گرمای ناپایدار بکار می‌رود و در فصل پنجم، با استفاده از برنامه‌نویسی با زبان متلب به تحلیل مثال‌های عددی مسایل جریان گرمای ناپایدار با روش‌های گفته شده در پایان‌نامه پرداخته شده است و با بدست آوردن خطا، دقت جواب در هر روش مقایسه می‌شود.

کلمات کلیدی: اسپلاین صفحه نازک هموار، درونیابی کرینجینگ متحرک، روش بدون مش، روش درونیابی نقطه‌ای شعاعی، تقریب کمترین مربعات متحرک، روش درونیابی نقطه‌ای شعاعی منطقه‌ای، روش درونیابی گالرکین بدون المان، روش بدون المان پترو-گالرکین منطقه‌ای، مسایل جریان گرمای ناپایدار.

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

۱. مسفروش، ع. حسینی، خ. ”بهبود روش درونیابی نقطه‌ای شعاعی منطقه‌ای برای آنالیز جریان گرمای ناپایدار”، سمنان، چهل و پنجمین کنفرانس ریاضی ایران، شهریور ۱۳۹۳.
2. Mesforush. A, Hosseini. Kh, (2015), ”Interpolating element-free Galerkin method for transient heat conduction problems ”, 2nd National Conference on Applied Research in Mathematics and Physics, Tehran.
3. Mesforush. A, Hosseini. Kh, (2015), ”Local radial point interpolation method for transient heat conduction problems ”, 2nd National Conference on Applied Research in Mathematics and Physics, Tehran.

فهرست مطالب

۱	اندیشه‌های بنیادی	۱
۱	مقدمه	۱.۱
۴	روش بدون مش	۲.۱
۶	دسته‌بندی روش‌های بدون مش	۱.۲.۱
۸	تعاریف و قضایا	۳.۱
۱۱	روش تابع پناستی	۱.۳.۱
۱۲	ضریب همبستگی	۲.۳.۱
۱۳	انتگرال‌گیری عددی گاوسی	۳.۳.۱
۱۵	حل مسایل جریان گرمای ناپایدار با روش عناصر متناهی	۲
۱۵	فرمول‌بندی عناصر متناهی	۱.۲
۱۶	گسسته‌سازی دامنه	۱.۱.۲
۱۹	المان‌های چهارگه‌ای	۲.۱.۲
۲۲	مشتق تابع شکل ایزوپارامتری	۳.۱.۲
۲۳	انتگرال‌گیری گاوسی در دو بعد	۴.۱.۲
۲۶	شکل ضعیف مساله	۵.۱.۲
۲۹	حل مسایل جریان گرمای ناپایدار با روش‌های بدون مش	۳
۳۰	روش درونیایی نقطه‌ای	۱.۳
۳۱	روش درونیایی نقطه‌ای شعاعی	۱.۱.۳
۳۹	فرمول‌بندی مساله جریان گرمای ناپایدار با روش درونیایی شعاعی منطقه‌ای	۲.۳
۴۱	روش تفاضلات متناهی	۱.۲.۳
۴۳	تقریب کمترین مربعات متحرک	۳.۳
۴۶	انتخاب تابع وزن	۱.۳.۳
۴۸	فرمول‌بندی مساله جریان گرمای ناپایدار با روش بدون المان گالرکین	۴.۳

۴۹	معادله حاکم و شکل ضعیف گالرکین آن	۱.۴.۳
۵۰	گسسته‌سازی شکل ضعیف	۲.۴.۳
۵۵		حل مسایل جریان گرمای ناپایدار با روش‌های بدون مش بهبودیافته	۴
۵۶		حل مسایل جریان گرمای ناپایدار با درونیایی نقطه‌ای اسپلین صفحه‌ای نازک هموار	۱.۴
۵۶	درونیایی نقطه‌ای با استفاده از اسپلین صفحه‌ای نازک هموار	۱.۱.۴
۵۷	اسپلین صفحه نازک هموار	۲.۱.۴
۶۱	ساختار تابع شکل	۳.۱.۴
۶۲	پارامتر همبستگی برحسب توابع شکل	۴.۱.۴
۶۶	فرمول‌بندی روش درونیایی نقطه‌ای شعاعی منطقه‌ای	۵.۱.۴
۶۶	حل مسایل جریان گرمای ناپایدار با درونیایی کرینجینگ متحرک	۲.۴
۶۷	درونیایی کرینجینگ	۱.۲.۴
۶۹	کرینجینگ متحرک	۲.۲.۴
۷۱	انتخاب ضریب همبستگی	۳.۲.۴
۷۱	ویژگی‌های ریاضیاتی درونیایی کرینجینگ متحرک	۴.۲.۴
۷۴	فرمول‌بندی روش بدون المان پترو گالرکین منطقه‌ای	۵.۲.۴
۷۹		مثال‌های عددی و نتیجه‌گیری	۵
۷۹	آنالیز همگرایی و تخمین خطا	۱.۵
۷۹	مثال‌های عددی	۲.۵
۷۹	میدان گرمای ناپایدار در دامنه مربعی	۱.۲.۵
۸۴	میدان گرمای ناپایدار در دامنه مکعبی	۲.۲.۵
۸۹		آ کدنویسی با متلب	آ
۸۹	تابع شکل به روش درونیایی نقطه‌ای شعاعی	۱.آ
۹۱	تابع شکل روش تقریب کمترین مربعات متحرک	۲.آ
۹۹	تابع شکل به روش اسپلین صفحه نازک هموار	۳.آ
۱۰۱	تابع شکل روش درونیایی کرینجینگ متحرک	۴.آ
۱۰۳		مراجع	
۱۰۷		واژه‌نامه فارسی به انگلیسی	
۱۰۹		واژه‌نامه انگلیسی به فارسی	

فصل ۱

اندیشه‌های بنیادی

۱.۱ مقدمه

بسیاری از مسایل علمی و مهندسی به مسایل جریان گرمای ناپایدار^۱ مربوط می‌شوند و در بیشتر مسایل، دما برحسب زمان تغییر می‌کند. مسایل جریان گرمای ناپایدار در شاخه‌های مهندسی از قبیل مهندسی هسته‌ای و مهندسی پتروشیمی کاربرد دارد. این مسایل با معادلات دیفرانسیل جزئی با مجموعه‌ای از شرایط مرزی و شرایط اولیه شرح داده می‌شود. جواب‌های تحلیلی این مسایل و مقادیر مرزی و مقادیر اولیه معمولاً بسیار محدود هستند.

انتقال حرارت یا انتقال گرما^۲ یک رشته از مهندسی حرارتی است که مربوط به تولید، استفاده، انتقال، تغییرات انرژی گرمایی و حرارتی بین سیستم‌های فیزیکی است. گرما در فیزیک، انتقال انرژی گرمایی بین مرز مشخص در سیستم ترمودینامیکی است. این ویژگی دینامیک است و به‌طور ایستا در ماده موجود نیست. روش بنیادی در انتقال گرما در مهندسی شامل رسانش، همرفت و تابش است. روش‌های انتقال گرما در رشته‌های متعدد مورد استفاده قرار می‌گیرند، مانند مهندسی خودرو، مدیریت گرمایی وسایل الکترونیکی و سیستم‌ها، کنترل آب و هوا، روش‌های متنوع مکانیکی برای تحلیل نتایج انتقال گرما در سیستم‌ها گسترش پیدا کرده‌اند. انتقال حرارت حاصل اختلاف دمای میان دو نقطه‌ای است که انتقال حرارت بین آن‌ها صورت می‌پذیرد، بنابراین می‌توان گفت که در مبحث انتقال حرارت برخلاف ترمودینامیک، مسایل را با فرض عدم تعادل دمایی بررسی می‌کنیم و به عبارتی همین عدم تعادل دمایی است که موجبات انتقال حرارت را فراهم می‌آورد.

انتقال گرما، یک تابع مسیر است که به حالت ماده بستگی ندارد. بنابراین مقدار انتقال گرما در فرآیند ترمودینامیکی که حالت سیستم تغییر می‌کند، نه فقط به اختلاف خالص بین ابتدا و انتهای فرآیند، بلکه بستگی به این دارد که فرآیند چگونه اتفاق می‌افتد.

^۱Transient Heat Conduction

^۲Heat Transfer

اگر مجموع انرژی‌های تولید شده در جسم و ورودی به آن با مجموع انرژی‌های خروجی از جسم برابر شود، سطح انرژی جسم تغییر نمی‌کند و این موجب می‌شود که هیچ نقطه‌ای از جسم شاهد تغییرات انرژی نباشد. در این حالت، انتقال حرارت وضعیت پایدار به خود می‌گیرد و در طول زمان تغییری در وضعیت دمایی نقاط مختلف جسم ایجاد نمی‌کند. این نوع انتقال حرارت را انتقال حرارت دایم یا پایدار گویند. برعکس اگر جسم هنوز به این وضعیت نرسیده باشد، انتقال حرارت ناپایدار یا غیر دایم است. ساده‌ترین شکل از ناپایداری هدایت گرما در یک جسم جامد آن است که فرض کنیم در هر لحظه دما در هر نقاط جسم ثابت باشد.

معادله گرما، معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی است که توزیع گرما را در طول زمان شرح می‌دهد. در بعضی مواقع راه حل دقیق معادله در دسترس است و در موارد دیگر، این معادله باید با حل عددی و با استفاده از روش‌های محاسباتی حل شود.

بسیاری از مسایل انتقال حرارت وابسته به زمان هستند. وضعیت ناپایدار زمانی حاکم می‌شود که شرایط مرزی این سیستم تغییر نماید.

معادله جریان گرمای ناپایدار گونه‌ای از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی سهموی هستند. اکنون مساله جریان گرمای ناپایدار را در حالت دو بعدی در دامنه Ω و مرزبندی Γ بررسی می‌کنیم. معادله حاکم به صورت

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) - Q = 0 \quad \text{in } \Omega. \quad (1.1)$$

است. شرایط مرزی مساله را می‌توان با هر ترکیبی از شرایط زیر بدست آورد:

$$T - \bar{T} = 0 \quad \text{on } \Gamma_1, \quad (2.1)$$

$$k_x \frac{\partial T}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial T}{\partial y} n_y = \bar{q} \quad \text{on } \Gamma_2, \quad (3.1)$$

$$k_x \frac{\partial T}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial T}{\partial y} n_y - h(T_a - T) = 0 \quad \text{on } \Gamma_3, \quad (4.1)$$

که Γ_1 ، Γ_2 و Γ_3 به ترتیب بیانگر شرایط مرزی دیریکله، نویمن و رایبن هستند. T میدان دما، t زمان، ρ چگالی، c گرمای ویژه، Q چگالی منبع گرما، k_x و k_y ضرایب هدایت گرمایی در جهت x و y ، n_x و n_y کسینوس هادی بردار خارجی وارد شده بر سطح مرز، \bar{T} دمای مشخص شده، \bar{q} چگالی شار گرمای مشخص شده، h ضرایب انتقال گرما روی مرزها و T_a دمای محیط هستند. شرط اولیه، $T(x, y, 0) = T_0(x, y)$ است که T_0 دمای اولیه می‌باشد.

بیشتر مسایل جریان گرما در کاربردهای مهندسی استفاده می‌شوند که زمان، متغیری مستقل در آن است. هدف این تحلیل، تشخیص متغیر دما به عنوان تابع زمان-مکان $T(x, t)$ درون جسم جریان گرما می‌باشد. در حالت کلی اجسام حرارتی را در فضای معادله سه بعدی در مجموعه مختصات $x \in \mathbb{R}^n$ وفق می‌دهیم و هدف، ارزیابی میدان دما برای زمان $t > 0$ است.

بسیاری از مسایل فیزیکی که با استفاده از معادلات دیفرانسیل بیان می‌شوند، به صورت تحلیلی قابل

حل نبوده و برای حل آن‌ها باید از روش‌های عددی کمک گرفت [۳۳]. در دهه اخیر روش‌های عددی گوناگونی مانند روش عناصر متناهی^۳، روش تفاضلات متناهی^۴ و روش المان‌های مرزی^۵ موفقیت خوبی در بکار بردن مسایل جریان گرما داشته‌اند.

در این روش‌های عددی قبل از هر کاری باید دامنه مساله را مش‌بندی نمود. این روش‌ها به دلیل داشتن تئوری قوی و پایدار در حل مسایل جریان گرما، به‌طور گسترده از آن‌ها استفاده می‌شود. به عنوان مثال در روش عناصر متناهی، ایده اولیه جایگزینی یک تابع تقریب منطقه‌ای به جای تابع جواب اصلی در هر المان است، اما تقسیم‌بندی کل دامنه به المان‌های به هم چسبیده، یک فرآیند پیچیده و زمان‌بر است. علاوه بر آن بعضی از مسایل وجود دارند که تحلیل آن‌ها به کمک روش المان محدود امکان‌پذیر نمی‌باشد. لذا در حل این‌گونه مسایل روش‌های بدون مش می‌توانند کارایی بیشتری داشته باشند. اخیراً روش‌های بدون مش برای حل این مسایل بکار می‌روند که دارای دقت بالایی هستند. هدف این پایان‌نامه حل مسایل جریان گرمای ناپایدار با روش‌های بدون مش و مقایسه آن با روش عناصر متناهی است.

روش بدون مش دستیابی جدید عددی برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی است که وابسته به مجموعه‌ای از گره‌های مجزا در دامنه مساله هستند. روش‌های بدون مش گوناگونی در زمینه‌های مختلف ارائه شده است. عدم نیاز به مش‌بندی دامنه محاسباتی خصوصیت اصلی این روش‌ها است. به‌طور کلی در روش‌های بدون مش، مانند روش المان محدود، بین گره‌ها از یک تابع تقریب استفاده می‌شود. به این منظور از تعدادی توابع پایه برای تخمین میدان در بین گره‌ها، بر اساس مقادیر دقیق گره‌ها کمک گرفته می‌شود تا در نهایت تابع شکل تولید گردد. برای تولید تابع شکل روش‌های مختلفی وجود دارد که در حالت کلی به دو گروه تقسیم‌بندی می‌شوند: روش درونیابی نقطه‌ای^۶ و روش کمترین مربعات متحرک^۷. هر کدام از این روش‌ها از توابع پایه‌ای خاصی استفاده می‌کنند. با استفاده از این توابع پایه و دنبال نمودن روند مشخصی در هر گروه، در نهایت توابع شکل تولید می‌گردند. این توابع متناسب با نوع تابع پایه بکار گرفته شده، دارای خصوصیات خاصی هستند. بسیاری از محققان روش بدون مش را با استفاده از روش‌های تقریبی مختلفی مورد بررسی قرار می‌دهند. ساختار این پایان‌نامه به صورت زیر است:

در فصل یک، مفاهیم و تعاریفی که در کل پایان‌نامه مورد نیاز است، گردآوری شده است. در فصل دوم، روش عناصر متناهی برای حل مسایل جریان گرمای ناپایدار بررسی می‌شود. در فصل سوم، روش‌های بدون مش برای حل مسایل جریان گرمای ناپایدار توضیح داده شده است. در فصل چهارم، روش‌های بهبودیافته روش بدون مش برای حل مسایل جریان گرمای ناپایدار بیان می‌شود و در فصل

^۳Finite Element Method

^۴Finite Differences Method

^۵Boundary Element Method

^۶Point Interpolation Method

^۷Moving Least Square

پنجم، مثال‌های عددی مختلفی برای مسایل جریان گرمای ناپایدار آمده که با استفاده از روش‌های گفته شده در فصل‌های قبل، حل شده است و با یکدیگر مقایسه می‌شوند.

۲.۱ روش بدون مش

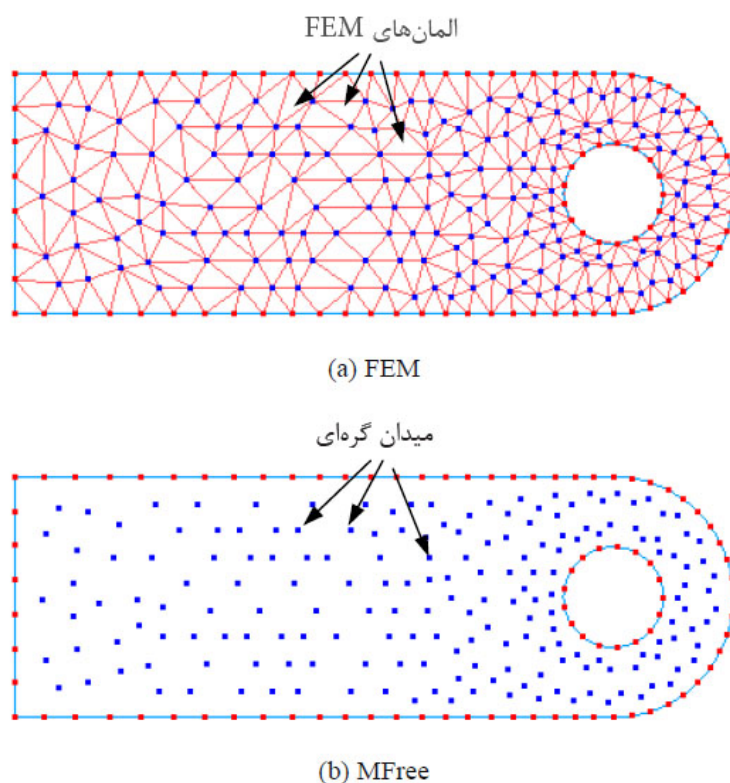
بیشتر پدیده‌ها در طبیعت مانند پدیده‌های مکانیکی، زمین‌شناسی، زیست‌شناسی یا شیمیایی را می‌توان به کمک معادلات جبری، معادلات دیفرانسیل و یا معادلات انتگرال توصیف کرد. ایده‌آل‌ترین حالت پس از مدل‌سازی زمانی رخ می‌دهد که جواب تحلیلی و دقیق معادلات بدست آید، ولی به دلیل پیچیدگی بسیاری از مسایل، تنها قادر به حل تحلیلی و دقیق برخی از این معادلات هستیم. ریاضی‌دانان برای حل این معادلات، روش‌های عددی گوناگونی ابداع کردند [۲۲]. امروزه مهندسان و محققان علوم با بسیاری از این روش‌ها و تکنیک‌ها برای انواع مختلف مسایل آشنا هستند. به دلیل پیشرفت سریع تکنولوژی محاسباتی و کامپیوتری، روش‌های شبیه‌ساز عددی با یک مسیر رو به کاهش، به‌عنوان ابزاری مهم برای حل مسایل پیچیده در مهندسی و علوم بکار می‌روند.

تعریف ۱.۲.۱. معادله دیفرانسیل حاکم بر مساله همراه با شرایط مرزی و شرایط اولیه را یک مساله مقدار مرزی می‌نامند.

تعریف ۲.۲.۱. شبیه‌سازی عددی، تبدیل مساله‌ای پیچیده به شکل گسسته است به گونه‌ای که بتوان با کامپیوتر آن را حل کرد.

معادلات اصلی مساله به صورت مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیل معمولی، معادلات دیفرانسیل جزئی و معادلات انتگرالی بیان می‌شوند و شرایط مرزی و شرایط اولیه برای تکمیل معادلات اصلی بکار می‌روند. بنابراین برای حل یک مساله به روش عددی به طوری که نتایج حاصل به خوبی نمایانگر فیزیک مساله باشد، باید از روش عددی مناسب استفاده کنیم.

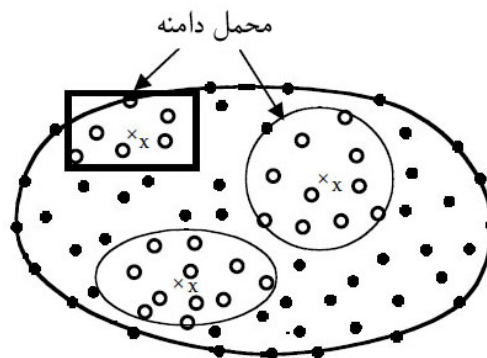
در دهه ۱۹۵۰ روش عناصر متناهی مطرح شد. روش عناصر متناهی برای حل معادلات دیفرانسیل، حاصل از مدل‌سازی سیستم‌های مهندسی، روشی کارا و مناسب است. دامنه مساله با تعداد زیادی از عنصر با اشکال ساده که در نقاطی به نام گره به یکدیگر متصل شده‌اند، نشان داده می‌شود. تقریب بدست‌آمده به ویژگی‌ها و تعداد عنصر بکار رفته بستگی دارد و برای این‌که نتایج دقیقی از این روش بدست آید باید تعداد عنصر بیشتری در نظر گرفته شود. ایجاد مش از اصلی‌ترین بخش‌های روش عناصر متناهی است. برای دسته خاصی از مسایل، استفاده از مش بندی منجر به پیچیدگی‌های زیادی می‌گردد. استفاده از روش عناصر متناهی در مسایلی که دارای تغییر شکل زیادی در دامنه هستند، به دلیل به هم خوردن عناصر، منجر به کاهش دقت خواهد شد. بنابراین ایده روش‌های بدون مش به منظور رهایی از پیچیدگی‌های حاصل از اتصال بین گره‌ها مطرح شد تا مشکلات ناشی از وجود مش را از بین ببرد [۱۴، ۲۹، ۴۰، ۴۲]. جذابیت اصلی روش‌های بدون مش در امکان به‌روز رسانی ساده آن‌ها



شکل ۱.۱: معرفی دامنه در روش عناصر متناهی و روش بدون مش

است. در روش‌های بدون مش دامنه مساله توسط مجموعه‌ای از گره‌های پراکنده با توزیع دلخواه نمایش داده می‌شود (شکل ۱.۱). این گره‌ها احتیاج به هیچ‌گونه ارتباط و اتصال با یکدیگر ندارند. بنابراین روش‌های بدون مش می‌توانند برای هر مساله یا ناحیه هندسی دلخواه با توزیع گره‌ها، مناسب باشند. در روش عناصر متناهی توابع شکل بر اساس عناصر ساخته می‌شوند. این توابع برای تمام عناصر یک شکل، یکسان هستند. در حقیقت معرفی عنصر و ایجاد اتصال بین گره‌ها به منظور محاسبه تابع شکل است. در حالی‌که در روش‌های بدون مش توابع شکل معمولا به ازای یک نقطه دلخواه در دامنه تعریف می‌شوند. در روش عناصر متناهی، توابع شکل، عنصر به عنصر ساخته می‌شوند. توابع شکل روش عناصر متناهی در هر گره تنها در همان گره مقدار یک می‌گیرند و در بقیه گره‌های متصل به آن صفر هستند. این ویژگی به خاصیت دلتای کرونکر معروف است. این ویژگی برای اعمال شرایط مرزی دیریکله بسیار مناسب است. این در حالی است که توابع شکل روش‌های بدون مش که از تقریب کمترین مربعات بدست می‌آیند، در برخی از ویژگی‌های توابع شکل عناصر متناهی مانند خاصیت افراز یکه^۸ مشترک هستند اما کل روش‌های بدون مش خاصیت دلتای کرونکر روش عناصر متناهی را ندارند. در مورد تشکیل دستگاه معادلات در روش‌های بدون مش، باید گفت که دستگاه معادلات حاصل از این روش‌ها، اسپارس و نواری بودن مانند روش عناصر متناهی است ولی بسته به روشی که بکار گرفته

^۸Unity Partition



شکل ۲.۱: محمل دامنه با گره‌های مشخص

می‌شود، می‌تواند برخلاف روش عناصر متناهی، نامتقارن باشد.

۱.۲.۱ دسته‌بندی روش‌های بدون مش

به عنوان اولین روش‌های بدون مش می‌توان روش گره‌ای، روش تفاضلات متناهی با مش‌های دلخواه و روش هیدرودینامیک ذرات هموار را معرفی کرد. در حالت کلی روش‌های بدون مش بر اساس سه فاکتور زیر در دسته‌های مربوط به خود قرار می‌گیرند:

۱. چگونگی فرمول‌بندی،

۲. نوع تقریب توابع،

۳. نوع نمایش دامنه.

چگونگی فرمول‌بندی

در حالت کلی دو نوع فرمول‌بندی در روش‌های بدون مش وجود دارد: شکل قوی و شکل ضعیف. نوع اول بر اساس شکل قوی یا هم‌مکانی^۹ است. در این روش معادلات اصلی مساله و معادلات مربوط به شرایط مرزی به‌طور مستقیم در گره‌ها توزیع شده و با استفاده از روش هم‌مکانی، گسسته‌سازی می‌شوند. به عنوان مثال‌هایی از این نوع می‌توان به روش تفاضلات متناهی تعمیم‌یافته، روش بدون مش هم‌مکانی و روش نقاط متناهی اشاره کرد. این روش‌ها الگوریتم ساده‌ای دارند و کاملاً بی‌نیاز از مش هستند ولی این روش‌ها غالباً ناپایدار می‌باشند.

در نوع دوم، روش‌های بدون مش بر اساس شکل ضعیف هستند. در روش‌های شکل ضعیف معادله دیفرانسیل جزئی به انتگرال تبدیل می‌شود. روش‌های بدون مش زیادی در این نوع قرار می‌گیرند. از

^۹Collocation

بهترین روش‌های این حالت می‌توان روش گالرکین بدون المان^{۱۰}، روش درونیابی نقطه‌ای شعاعی^{۱۱}، روش‌های درونیابی نقاط^{۱۲} و روش بدون مش پترو-گالرکین منطقه‌ای^{۱۳} را نام برد [۱۸، ۲۹، ۴۰، ۴۲].

نوع تقریب توابع

در دسته‌بندی روش‌های بدون مش براساس نوع تقریب توابع سه دسته کلی وجود دارد:

۰۱. روش‌های مبتنی بر تقریب کمترین مربعات متحرک،

۰۲. روش‌های مبتنی بر نمایش انتگرالی،

۰۳. روش‌های مبتنی بر درونیابی نقاط.

دسته اول، بر اساس تقریب کمترین مربعات متحرک که در سال ۱۹۸۱ برای تقریب رویه‌ها و سطوح در برازش داده‌های پراکنده مطرح شد، عمل می‌کنند. در حقیقت تقریب کمترین مربعات متحرک، تقریبی پیوسته برای تابع مجهول است. از روش‌های بدون مش که از این تقریب استفاده می‌کنند می‌توان روش‌های المان پراکنده^{۱۴}، روش گالرکین بدون المان، روش بدون مش پترو-گالرکین منطقه‌ای و روش گره‌های مرزی^{۱۵} را نام برد.

در دسته دوم، از شکل انتگرال برای تقریب تابع استفاده می‌شود. از جمله روش‌های این دسته، روش هیدرودینامیک ذرات هموار^{۱۶} و روش درونیابی نقطه‌ای شعاعی هستند.

دسته سوم، روش‌های مبتنی بر روش درونیابی نقاط هستند. در این روش‌ها برای ساخت توابع شکل از درونیابی نقاط استفاده می‌شود و برخلاف روش تقریب کمترین مربعات متحرک، توابع شکل در آن‌ها دارای خاصیت دلتای کرونکر می‌باشند. در این روش‌ها پایه‌های مختلفی شامل پایه‌های چندجمله‌ای و توابع پایه‌ای شعاعی بکار می‌روند.

نوع نمایش دامنه

روش‌های بدون مش بر اساس نمایش دامنه به دو دسته کلی تقسیم می‌شوند:

۰۱. روش‌های بدون مش از نوع دامنه

۰۲. روش‌های بدون مش از نوع مرز

^{۱۰}Element Free Galerkin

^{۱۱}Radial Point Interpolation Method

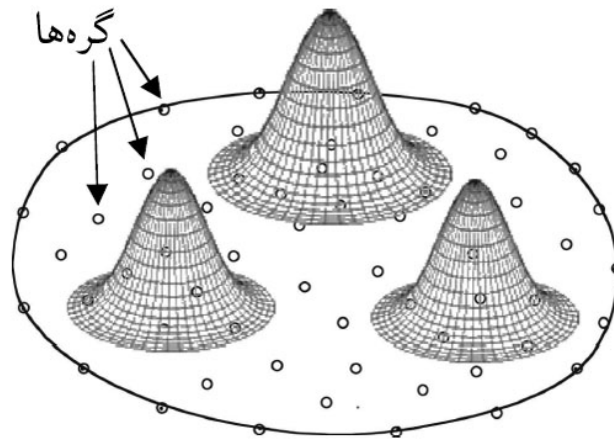
^{۱۲}Point Interpolation Method

^{۱۳}Meshless Local Petrov-Galerkin

^{۱۴}Diffuse Element Method

^{۱۵}Boundary Nodes Method

^{۱۶}Smoothed Particle Hydrodynamics



شکل ۳.۱: معرفی دامنه دوبعدی و گره‌ها در محمل دامنه وزنی منطقه‌ای

در دسته اول، گره‌های تقریب روی مرز دامنه مساله توزیع می‌شوند. بنابراین هم گره‌های روی مرز و هم گره‌های داخل دامنه مساله برای تشکیل دستگاه و یافتن جواب مساله استفاده می‌شوند. روش گالرکین بدون مش و بسیاری از روش‌های دیگر در این دسته قرار می‌گیرند. در روش‌های موجود در دسته دوم، تنها مرز مساله توسط گره‌های تقریب نمایش داده می‌شود و هیچ گره‌ای در دامنه مساله توزیع نمی‌شود. از جمله روش‌های موجود در این دسته می‌توان به روش‌های گره‌های مرزی، روش‌های معادله انتگرال مرزی منطقه‌ای^{۱۷} و روش‌های درونیابی نقاط مرزی شعاعی^{۱۸} اشاره کرد.

۳.۱ تعاریف و قضایا

تعریف ۱.۳.۱. [۱] اگر ω تابعی برداری مقدار باشد، دیورژانس Ω به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\operatorname{div} \omega = \nabla \cdot \omega = \left(\frac{d}{dx_1}, \frac{d}{dx_2}, \dots, \frac{d}{dx_d} \right) \cdot (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_d) = \sum_{i=1}^d \frac{d\omega_i}{dx_i}.$$

قضیه ۲.۳.۱. [۳۹] دیورژانس:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \omega dx = \int_{\Gamma} \omega \cdot \mathbf{x} ds.$$

که در آن ds المان طول قوس و $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_s)$ بردار نرمال خارجی بر Γ است.

^{۱۷}Local Boundary Integral Equation

^{۱۸}Boundary Radial Point Interpolation Method

قضیه ۳.۳.۱. [۱] گرین:

$$\int_{\Omega} \omega \cdot \nabla v dx = \int_{\Gamma} \omega \cdot n \cdot v ds - \int_{\Omega} \nabla \cdot \omega \cdot v dx.$$

تعریف ۴.۳.۱. [۲۲] تابع f دارای محمل فشرده در Ω نامیده می‌شود هرگاه خارج از زیرمجموعه فشرده‌ای، Ω صفر باشد.

تعریف ۵.۳.۱. [۱] یک تابع هموار نامیده می‌شود هرگاه به اندازه کافی مشتق پیوسته داشته باشد.

تعریف ۶.۳.۱. [۱] یک مساله پایدار نامیده می‌شود هرگاه تغییرات کوچک در داده‌ها منجر به تغییرات بزرگ در جواب نشود.

تعریف ۷.۳.۱. [۱] دو تابع حقیقی مقدار $u(x)$ و $v(x)$ متعامد نامیده می‌شوند اگر $\langle u, v \rangle = 0$ و با نماد $u \perp v$ نمایش می‌دهند.

تعریف ۸.۳.۱. تابع پله‌ای هوی‌ساید^{۱۹} $H(x)$ یا تابع پله‌ای یکه، تابعی ناپیوسته و چندضابطه‌ای است که مقدارش برای اعداد منفی، صفر و برای اعداد مثبت، یک است. این تابع به نام دانشمند انگلیسی الیور هوی‌ساید نام گذاری شده است.

تعریف ۹.۳.۱. [۱۳] معادله بای‌هارمونیک، معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه چهارم است که به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\nabla^4 \phi = 0,$$

یا

$$\nabla^2 \nabla^2 \phi = 0,$$

یا

$$\Delta^2 \phi = 0.$$

که به Δ^2 عملگر بای‌هارمونیک می‌گویند.

تعریف ۱۰.۳.۱. تابع دلتای دیراک با دو مشخصه زیر تعریف می‌شود:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ \infty & x = 0 \end{cases}$$

^{۱۹}Heaviside Step Function

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1.$$

در حقیقت این تابع، مشتق اول تابع پله‌ای واحد است با این شرط که همواره مساحت زیر نمودار این تابع برابر با مقدار یک است.

حال اگر تابع دلخواهی مانند f در تابع دیراک ضرب شود، طبق همین تعریف حاصل در همه نقاط برابر صفر است مگر در نقطه‌ای که مقدار تابع ضرب برابر با بی‌نهایت است. از طرفی چون مقدار y ها در نمودار حاصل ضرب به اندازه مقدار f در نقطه دیراک تغییر می‌کند، در نتیجه مساحت مستطیل به همان اندازه تغییر می‌کند.

تابع دلتا، مشتق تابع پله‌ای هوی‌ساید محسوب می‌گردد. از تبعات این تعریف این است که:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0).$$

تعریف ۱۱.۳.۱. جواب معادله دیفرانسیلی که تابع منبع آن دلتای دیراک باشد، تابع گرین می‌نامند.

تعریف ۱۲.۳.۱. تابع^{۲۰}: در ریاضیات و به خصوص آنالیز تابعی، تابعک نگاشتی از یک فضای برداری به میدان اسکالر تشکیل‌دهنده آن است. به بیان دیگر تابعی است که یک بردار را به عنوان ورودی گرفته و یک اسکالر برمی‌گرداند. بنابراین گاهی تابعک را نگاشتی از توابع به اسکالر می‌دانند. استفاده از آن از حسابان تغییرات سرچشمه می‌گیرد که در آن‌جا هدف یافتن یک تابع است که تابعک مورد نظر را کمینه کند. یک کاربرد مهم آن در فیزیک، جستجو برای حالتی از یک سیستم است که تابعک انرژی را حداقل کند.

تابعک خطی یا فرم خطی L ، تابعی است از $L: V \rightarrow \mathbb{R}$ به‌گونه‌ای که برای هر $u, v \in V$ و $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ رابطه زیر برقرار باشد:

$$L(\lambda u + \mu v) = \lambda L(u) + \mu L(v).$$

تعریف ۱۳.۳.۱. در روش عناصر متناهی همیشه دوفضا مورد استفاده قرار می‌گیرد:

۱. فضای تست:^{۲۱} فضایی که توابع متعلق به آن در نقاط مرزی صفر باشند.

۲. فضای امتحان:^{۲۲} تابع تقریب به شکل ترکیب خطی از عناصر پایه‌ای این فضا در نظر گرفته می‌شود.

ملاحظه ۱۴.۳.۱. فضای توابع قطعه‌وار پیوسته از درجه q را با نماد $V_h^{(q)}$ نشان می‌دهیم.

^{۲۰} Functional

^{۲۱} Test Space

^{۲۲} Trial Space

تعریف ۱۵.۳.۱. [۸] ضرب تانسور^{۲۳}، تانسور عنصری هندسی است که در ریاضی و فیزیک به منظور گسترش مفاهیم اسکالرها، بردارها و ماتریس‌ها به ابعاد بالاتر معرفی می‌شوند. تانسور آرایه‌ای از اعداد است که در یک جدول چیده شده‌اند. این جدول در حالت کلی می‌تواند به صورت $N \times M \times O \times P \times \dots$ باشد که حروف بزرگ هر کدام می‌توانند نماینده یک عدد طبیعی باشند و \times نشان دهنده عمل ضرب بین آنها است.

تانسور در ساده‌ترین حالت می‌تواند یک عضو داشته باشد که به آن تانسور اسکالر گوئیم. در حالت کمی پیشرفته‌تر تانسور می‌تواند به صورت بردار باشد. یعنی وقتی شما بردار A را به صورت (x, y, z) نشان می‌دهید در حقیقت یک تانسور دارید. در حالتی باز هم پیشرفته‌تر تانسور می‌تواند دو بعدی باشد. به طور کلی تانسورهای دوبعدی و بالاتر از دوبعد را به نام ماتریس هم می‌شناسند. یک تانسور رتبه $(1, 1)$ و N بعدی حقیقی مانند T نگاهی است خطی از \mathbb{R}^N به \mathbb{R} یعنی:

$$T(ax + by) = aT(x) + bT(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N, a, b \in \mathbb{R}.$$

اگر $\{e_n\}_{n=1}^{n=N}$ یک پایه برای \mathbb{R}^N باشد، آنگاه به مجموعه N عدد T_n که از $T(e_n) = T_n$ بدست می‌آیند مولفه‌های T در پایه $\{e_n\}_{n=1}^{n=N}$ می‌گویند.

با یک نگاه کلی‌تر می‌توانیم \mathbb{R}^N را با یک فضای برداری N -بعدی دلخواه چون V عوض کنیم. در این صورت معمول است که مجموعه همه چنین تانسورهایی را با V^* نشان دهیم. به طور مشابه یک تانسور رتبه $(2, 0)$ به عنوان یک نگاشت دوخطی از $V \times V$ به \mathbb{R} تعریف می‌شود:

$$T(ax + by, z) = aT(x, z) + bT(y, z), \quad \forall x, y, z \in V, a, b \in \mathbb{R},$$

$$T(z, ax + by) = aT(z, x) + bT(z, y), \quad \forall x, y, z \in V, a, b \in \mathbb{R}.$$

این بار به عدد N^2 عدد $T_{m,n}$ که با $T(e_m, e_n) = T_{m,n}$ تعریف می‌شوند مولفه‌های تانسور T گفته می‌شود. مجموعه تمام این تانسورها را با $V^* \otimes V^*$ نشان می‌دهیم و می‌نویسیم:

$$T \in V^* \otimes V^*,$$

که همان ضرب تانسور است.

۱.۳.۱ روش تابع پنالتی

روش‌های پنالتی کلاس خاصی از الگوریتم‌ها هستند که برای حل مسایل بهینه‌سازی مقید استفاده می‌شوند. روش پنالتی، مساله بهینه‌سازی مقید را با مجموعه‌ای از مسایل بدون قید جایگزین می‌کند. مسایل بدون قید با افزودن یک شرط به تابع هدف به وجود می‌آیند که متشکل از یک پارامتر پنالتی و میزانی از نقض قید و محدودیت هستند. زمانی که قیود نقض شوند، میزان نقض مخالف صفر است و زمانی که قیود نقض نشوند، میزان نقض برابر صفر می‌شوند [۱۵].

^{۲۳}Tensor Product

این روش در سال ۱۹۹۹ با استفاده از پارامترهای پنالتی منفی، در مدل‌سازی محدوده‌های سامانه‌های سازه‌ای، به منظور محاسبه بسامدهای طبیعی با روش ریلی-ریتز^{۲۴} معرفی شد. برای چنین مسایلی، نشانه خطای ناشی از نقض شرایط محدودیت به نشانه ضریب پنالتی بستگی دارد. از این رو اثبات شده است که خطای ناشی از نقض محدودیت با روش پنالتی قابل تعریف و کنترل است و با استفاده از ترکیبی از پارامترهای پنالتی، مثبت و منفی است. فرض می‌کنیم که مساله مقید زیر را می‌خواهیم حل کنیم:

$$\begin{cases} \min f(x), \\ c_i(x) \geq 0, \quad \forall i \in I. \end{cases}$$

این مساله می‌تواند به‌عنوان مجموعه‌ای از مساله‌های مقید کمینه‌سازی حل شود.

$$\min \phi_k(x) = f(x) + \sigma_k \sum_{i \in I} g(c_i(x)),$$

که در آن

$$g(c_i(x)) = \min(0, c_i(x))^2.$$

در معادله بالا $g(c_i(x))$ تابع پنالتی است که در آن σ_k ضریب‌های پنالتی هستند. در هر تکرار k از قید، ضریب پنالتی σ_k را افزایش می‌دهیم، مساله بدون قید را حل می‌کنیم و جواب را به‌عنوان حدس اولیه برای تکرار بعدی بکار می‌بریم. جواب‌های مسایل بدون قید بعدی سرانجام به جواب مساله مقید اصلی می‌انجامد.

۲.۳.۱ ضریب همبستگی

ضریب همبستگی^{۲۵} ابزاری آماری برای تعیین نوع و درجه رابطه یک متغیر کمی با متغیر کمی دیگر است. ضریب همبستگی یکی از معیارهای مورد استفاده در تعیین همبستگی دو متغیر است. ضریب همبستگی شدت رابطه و همچنین نوع رابطه (مستقیم یا معکوس) را نشان می‌دهد. این ضریب بین ۱- تا ۱ است و در عدم وجود رابطه بین دو متغیر، برابر صفر است [۳۶]. همبستگی بین دو متغیر تصادفی X و Y به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\text{corr}(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]}{\sigma_X \sigma_Y},$$

که در آن E عملگر امید ریاضی، cov به معنای کوواریانس، corr نماد معمول برای همبستگی و σ نماد انحراف معیار است.

^{۲۴}Rayleigh-Ritz

^{۲۵}Correlation Coefficient

۳.۳.۱ انتگرال‌گیری عددی گاوسی

روش انتگرال‌گیری عددی گاوسی^{۲۶} یکی از روش‌های کارا در محاسبه عددی انتگرال‌هایی بوده است که به صورت تحلیلی قابل حل نیستند [۲۸]. این روش به فرم کلی زیر تعریف می‌شود:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{i=1}^n f(x_i) w_i,$$

که w_i ها ضرایب وزنی و x_i ها نقاط گاوسی هستند. این رابطه انتگرال را بین ناحیه -1 تا 1 تعریف کرده و بنابراین برای محاسبه انتگرال باید حدود انتگرال را به این بازه تبدیل نمود. w_i ها و x_i ها در روش انتگرال‌گیری گاوسی با رتبه n انتخاب می‌شوند. در جدول ۱.۱ نمونه‌ای از ضرایب گاوسی آورده شده است.

جدول ۱.۱: ضرایب گاوسی

n	x_i	w_i	درجه
۲	-0.57735027	1.0	۳
	0.57735027	1.0	
۳	-0.77459667	0.55555555	۵
	0.0	0.88888889	
	0.77459667	0.55555555	
۴	-0.86113631	0.34785485	۷
	-0.33998104	0.65214515	
	0.33998104	0.65214515	
	0.86113631	0.34785485	
۵	-0.90617975	0.23692689	۹
	-0.53846931	0.47862867	
	0.0	0.56888889	
	0.53846931	0.47862867	
	0.90617975	0.23692689	

^{۲۶}Gaussian Quadrature

فصل ۲

حل مسایل جریان گرمای ناپایدار با روش عناصر متناهی

چندین روش متفاوت از آنالیز عددی مسایل جریان گرمای ناپایدار در دو بعد وجود دارد. در چند دهه اخیر روش‌های تفاضل متناهی و عناصر متناهی برجسته بودند. روش تفاضل متناهی شامل روش صریح، روش ضمنی و روش جایگزین مستقیم ضمنی است. روش عناصر متناهی اولین بار توسط ویلسون^۱ و نیکل^۲ بکار برده شد. روش آن‌ها برای آنالیز جریان گرمای ناپایدار بر اساس اصل وردشی است که توسط گورتین^۳ بوده است. ریچاردسون^۴ و شوم^۵ از اصل وردشی مشابه و جواب‌های عناصر متناهی برای حل مسایل جریان گرمای ناپایدار، شامل شرایط مرزی غیرخطی استفاده کردند. امری^۶، کارسون^۷ و ویسر^۸ از فرمول‌بندی وردشی در جواب‌های عناصر متناهی برای مسایل توزیع دمای نایستا استفاده کردند. این فصل روش عناصر متناهی را برای حل مسایل جریان گرمای ناپایدار در دو بعد بررسی می‌کند. [۴]

۱.۲ فرمول‌بندی عناصر متناهی

آنالیز عناصر متناهی، روشی عددی برای بدست آوردن جواب مساله است که می‌توان در قالب معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی بدست آورد. گام‌های بدست آوردن جواب به روش عناصر متناهی که توسط

^۱Wilson

^۲Nickell

^۳Gurtin

^۴Richardson

^۵Shum

^۶Emery

^۷Carson

^۸Visser

ردی^۹ در سال ۱۹۹۳ بیان شد، در زیر آمده است [۴]:

۱. گسسته‌سازی دامنه جواب به المان‌های متناهی،

۲. بدست آوردن شکل ضعیف وزنی از معادله دیفرانسیل حاکم و معادلات المان‌ها،

۳. گذاشتن معادله المان برای بدست آوردن معادلات مساله کلی،

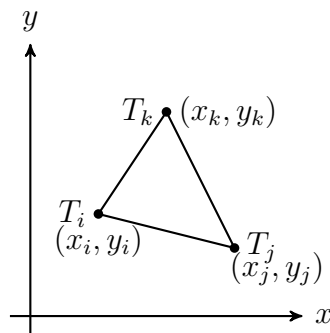
۴. اعمال شرایط مرزی،

۵. بدست آوردن جواب.

گرچه روش‌های زیادی برای بدست آوردن جواب با استفاده از روش عناصر متناهی وجود دارد، جواب را با استفاده از روش گالرکین با المان‌های دوبعدی بدست می‌آوریم.

۱.۱.۲ گسسته‌سازی دامنه

دامنه جواب به بخش‌های کوچک تقسیم می‌شود که می‌تواند مثلثی، مستطیلی یا هر شکل دیگری باشد. تعداد گره‌ها در هر شکل ممکن است به نسبت دقت و تنوع شکل هندسی آن متغیر باشد. شکل هندسی المان از مقادیر گره‌ای آن، با استفاده از توابع شکل درونیابی می‌شود. از تابع شکل مشابه برای درونیابی دمای هر نقطه المان، استفاده می‌شود. شکل زیر تابع شکل برای هندسه درونیاب را نمایش می‌دهد.



شکل ۱.۲: المان مثلثی

المان خطی مثلثی دوبعدی به صورت

$$T(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y = \begin{bmatrix} 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \mathbf{p}(x, y) \boldsymbol{\alpha}. \quad (1.2)$$

^۹Reddy

بیان می‌شود. چندجمله‌ای x و y خطی است که شامل سه ضریب می‌باشد. $p(x, y)$ چندجمله‌ای پاسکال است. چون مثلث دارای سه نقطه است، شکل ۱.۲، مقادیر $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ از روابط

$$\begin{aligned} T_i &= \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i, \\ T_j &= \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j, \\ T_k &= \alpha_1 + \alpha_2 x_k + \alpha_3 y_k. \end{aligned} \quad (2.2)$$

حاصل می‌شوند که

$$\underbrace{\begin{bmatrix} T_i \\ T_j \\ T_k \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\alpha}}.$$

رابطه بالا را می‌توان به صورت ماتریسی

$$\mathbf{d} = \mathbf{M}\boldsymbol{\alpha},$$

نوشت. با گرفتن معکوس ماتریس \mathbf{M} داریم:

$$\boldsymbol{\alpha} = (\mathbf{M})^{-1}\mathbf{d},$$

با جایگذاری رابطه بالا در (۱.۲) رابطه

$$T(x, y) = \mathbf{p}(x, y)(\mathbf{M})^{-1}\mathbf{d},$$

حاصل می‌شود، داریم:

$$T(x, y) = \mathbf{N}(x, y)\mathbf{d},$$

از دو عبارت بالا واضح است که تابع شکل به صورت

$$\mathbf{N}(x, y) = \mathbf{p}(x, y)(\mathbf{M})^{-1} \equiv \begin{bmatrix} N_i(x, y) & N_j(x, y) & N_k(x, y) \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

است که

$$(\mathbf{M})^{-1} = \frac{1}{\Delta A} \begin{bmatrix} y_j - y_k & y_k - y_i & y_i - y_j \\ x_k - x_j & x_i - x_k & x_j - x_i \\ x_j y_k - x_k y_j & x_k y_i - x_i y_k & x_i y_j - x_j y_i \end{bmatrix},$$

مقادیر $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{\Delta A} [(x_j y_k - x_k y_j)T_i + (x_k y_i - x_i y_k)T_j + (x_i y_j - x_j y_i)T_k], \\ \alpha_2 &= \frac{1}{\Delta A} [(y_j - y_k)T_i + (y_k - y_i)T_j + (y_i - y_j)T_k], \\ \alpha_3 &= \frac{1}{\Delta A} [(x_k - x_j)T_i + (x_i - x_k)T_j + (x_j - x_i)T_k]. \end{aligned} \quad (4.2)$$

که A مساحت مثلث است که به شکل

$$\Delta A = \det \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} = (x_i y_j - x_j y_i) + (x_k y_i - x_i y_k) + (x_j y_k - x_k y_j). \quad (5.2)$$

بدست می‌آید، با جایگذاری مقادیر α_1, α_2 و α_3 در معادله (۲.۲) و گردآوری ضرایب T_i, T_j و T_k داریم:

$$T = N_i T_i + N_j T_j + N_k T_k = \begin{bmatrix} N_i & N_j & N_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_i \\ T_j \\ T_k \end{Bmatrix}, \quad (6.2)$$

که

$$\begin{aligned} N_i &= \frac{1}{2A}(a_i + b_i x + c_i y), \\ N_j &= \frac{1}{2A}(a_j + b_j x + c_j y), \\ N_k &= \frac{1}{2A}(a_k + b_k x + c_k y), \end{aligned} \quad (7.2)$$

و

$$a_i = x_j y_k - x_k y_j, \quad b_i = y_j - y_k, \quad c_i = x_k - x_j,$$

$$a_j = x_k y_i - x_i y_k, \quad b_j = y_k - y_i, \quad c_j = x_i - x_k,$$

$$a_k = x_i y_j - x_j y_i, \quad b_k = y_i - y_j, \quad c_k = x_j - x_i.$$

اگر N_i را در گره i با مختصات (x_i, y_i) ارزیابی کنیم، داریم:

$$(N_i)_i = \frac{1}{2A}[(x_j y_k - x_k y_j) + (y_j - y_k)x_i + (x_k - x_j)y_i] = \frac{2A}{2A} = 1,$$

به‌طور مشابه داریم:

$$(N_j)_i = (N_k)_i = 0.$$

بنابراین توابع شکل دارای ویژگی دلتای کرونکر هستند، یعنی:

$$(N_i)_j = \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$$

پس می‌توان نشان داد که در هر المان با اعمال شرایط مرزی، $N_i + N_j + N_k = 1$ است. گرادیان

دمای T به‌صورت

$$\nabla T = \begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} T_i + \frac{\partial N_j}{\partial x} T_j + \frac{\partial N_k}{\partial x} T_k \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} T_i + \frac{\partial N_j}{\partial y} T_j + \frac{\partial N_k}{\partial y} T_k \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_j}{\partial x} & \frac{\partial N_k}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_j}{\partial y} & \frac{\partial N_k}{\partial y} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} T_i \\ T_j \\ T_k \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}} = \mathbf{Bd}.$$

است که با استفاده از معادله (۳۲.۲) ماتریس \mathbf{B} به شکل

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} (y_j - y_k) & (y_k - y_i) & (y_i - y_j) \\ (x_k - x_j) & (x_i - x_k) & (x_j - x_i) \end{bmatrix}.$$

حاصل می‌شود. توجه کنید که ماتریس \mathbf{B} در هر المان ثابت است.

همچنین می‌توان نوشت:

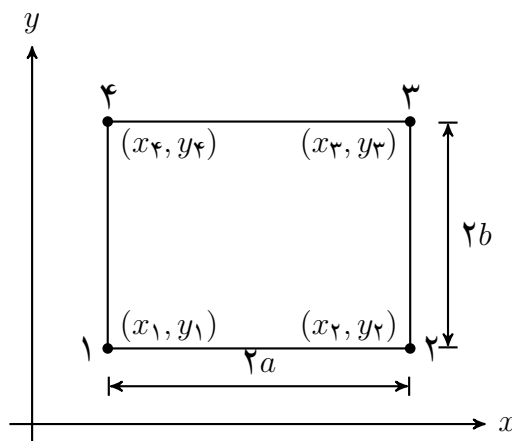
$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} &= \frac{\partial N_i}{\partial x} T_i + \frac{\partial N_j}{\partial x} T_j + \frac{\partial N_k}{\partial x} T_k = \frac{b_i}{2A} T_i + \frac{b_j}{2A} T_j + \frac{b_k}{2A} T_k, \\ \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{\partial N_i}{\partial y} T_i + \frac{\partial N_j}{\partial y} T_j + \frac{\partial N_k}{\partial y} T_k = \frac{c_i}{2A} T_i + \frac{c_j}{2A} T_j + \frac{c_k}{2A} T_k. \end{aligned} \quad (۸.۲)$$

۲.۱.۲ المان‌های چهار گره‌ای

مستطیلی

ابتدا المان مستطیلی چهار گره‌ای را بررسی می‌کنیم (شکل ۲.۲). مانند المان مثلثی گره‌ها در جهت حرکت عقربه‌های ساعت شمارش می‌شوند. این قرارداد در دنباله‌ای از المان‌ها نیز بکار می‌رود به جز وقتی که گره‌ها در طول لبه‌ها باشند. چون المان دارای چهار نقطه می‌باشد، لازم است که با عبارتی چندجمله‌ای شروع کنیم به طوری که دارای چهار پارامتر باشد. اگر خودمان از عبارت چهارجمله‌ای شروع کنیم، مجموع باید از ردیف سوم مثلث پاسکال بیاید. سوالی که مطرح می‌شود این است که کدام یک از سه جمله در ردیف سوم باید انتخاب شود؟ فقط به یک چندجمله‌ای تکین مجموع نیاز است. بنابراین ما سه پارامتر از میدان خطی داریم، می‌تواند هر سه چندجمله‌ای تکین در ردیف سوم مثلث پاسکال باشد. چندجمله‌ای تکین x^2 در طول لبه بین گره ۱ و ۲ و گره‌های ۳ و ۴ تغییر خواهد کرد. چندجمله‌ای تکین y^2 در طول لبه بین گره‌های ۲ و ۳ و گره‌های ۱ و ۴ تغییر خواهند کرد. چندجمله‌ای تکین xy خطی در طول هر لبه است، چون x یا y در طول هر لبه ثابت است بنابراین چندجمله‌ای تکین xy با گره‌های نشان داده شده در شکل ۲.۲ سازگار است که فقط دو گره در هر لبه وجود دارد. چندجمله‌ای تکین xy دوسویه^۱ نامیده می‌شود. با مجموع جملات دوسویه، تقریب المان به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\theta(x, y) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 xy. \quad (۹.۲)$$



شکل ۲.۲: المان مستطیلی چهار گره‌ای

^۱ Bilinear

تابع شکل N با روش ضرب تانسور^{۱۱} ایجاد خواهد شد. توابع شکل دوبعدی برای المان مثلثی به عنوان ضرب توابع شکل یک بعدی بدست می‌آیند. به عنوان مثال تابع شکل $N_2(x, y)$ از ضرب توابع شکل یک بعدی $N_2(x)$ و $N_1(y)$ ایجاد می‌شوند یعنی:

$$N_{[I,J]}(x, y) = N_I(x)N_J(y), \quad I = 1, 2, \quad J = 1, 2. \quad (10.2)$$

به آسانی می‌توان نشان داد که توابع شکل دوبعدی (۱۰.۲) دارای ویژگی تابع دلتای کرونگر هستند:

$$N_{[I,J]}(x_M, y_L) = N_I(x_M)N_J(y_L) = \delta_{IM}\delta_{JL}. \quad (11.2)$$

رابطه (۱۱.۲) نشان می‌دهد که ضرب تانسور تابع شکل دوبعدی واحد است، فقط وقتی تعداد گره دوتایی مشابه هر دو تابع شکل باشد. رابطه بین تعداد گره دوتایی (I, J) و تعداد گره واقعی (k) در سه ستون اول از جدول ۱۰.۲ آمده است. همچنین توابع شکل دوبعدی به روش ضرب تانسور در جدول ۱۰.۲ است.

جدول ۱۰.۲: المان

$2D : N_K(x, y) = N_{[I,J]}(x, y)$	$N_2(y_I)$	$N_1(y_I)$	$N_2(x_I)$	$N_1(x_I)$	J	I	K
$N_1(x)N_1(y)$	۰	۱	۰	۱	۱	۱	۱
$N_2(x)N_1(y)$	۰	۱	۱	۰	۱	۲	۲
$N_2(x)N_2(y)$	۱	۰	۱	۰	۲	۲	۳
$N_1(x)N_2(y)$	۱	۰	۰	۱	۲	۱	۴

از جدول ۱۰.۲ و معادله (۱۰.۲) می‌توان نشان داد که توابع شکل دوبعدی به صورت

$$\begin{aligned} N_1(x, y) &= \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \frac{y - y_4}{y_1 - y_4} = \frac{1}{A}(x - x_2)(y - y_4), \\ N_2(x, y) &= \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \frac{y - y_4}{y_1 - y_4} = -\frac{1}{A}(x - x_1)(y - y_4), \\ N_3(x, y) &= \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \frac{y - y_1}{y_4 - y_1} = \frac{1}{A}(x - x_1)(y - y_1), \\ N_4(x, y) &= \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \frac{y - y_1}{y_4 - y_1} = -\frac{1}{A}(x - x_2)(y - y_1), \end{aligned} \quad (12.2)$$

هستند که A مساحت المان است. این توابع شکل دارای ویژگی دلتای کرونگر هستند. این نحوه المان بندی برای مستطیل بکار می‌رود و برای هر چهارضلعی دلخواه مناسب نیست.

چهارضلعی دلخواه

همان طور که دیدیم توابع شکل دوسویی برحسب x و y برای مستطیل کاربرد دارد. این توابع شکل در طول هر لبه دلخواه از المان چهارضلعی خطی نیستند. حل این مشکل منجر به یکی از مهم ترین توسعه

^{۱۱}Tensor Product

در عناصر متناهی یعنی المان ایزوپارامتری^{۱۲} می شود. ابتدا نشان خواهیم داد که چگونه این دستاورد می تواند در ساختار پیوسته تقریب برای چهارضلعی چهار گره ای بکار رود. دامنه استاندارد $[-1, 1]$ را تعریف می کنیم و آنگاه دامنه استاندارد را در دامنه فیزیکی عناصر متناهی ترسیم می کنیم:

$$x = x_1 N_1(\xi) + x_2 N_2(\xi) = x_1 \frac{1-\xi}{2} + x_2 \frac{1+\xi}{2}, \quad \xi \in [-1, 1]. \quad (13.2)$$

دامنه $[-1, 1]$ را دامنه المان والد^{۱۳} می نامیم و ξ مختصات والد یا مختصات طبیعی نامیده می شود. اکنون تقریبی برای θ بر حسب x بر اساس مختصات المان والد ξ به صورت

$$\begin{aligned} \theta &= \theta_1 \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} + \theta_2 \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \\ &= \theta_1 \frac{x_1(1-\xi) + x_2(1+\xi) - 2x_2}{2(x_1 - x_2)} + \theta_2 \frac{x_1(1-\xi) + x_2(1+\xi) - 2x_1}{2(x_2 - x_1)} \quad (14.2) \\ &= \theta_1 \frac{1-\xi}{2} + \theta_2 \frac{1+\xi}{2}. \end{aligned}$$

بدست می آوریم، اکنون المان فیزیکی از المان والد را برای توابع شکل چهار گره ای به صورت

$$x(\xi, \eta) = \mathbf{N}(\xi, \eta)\mathbf{x}, \quad y(\xi, \eta) = \mathbf{N}(\xi, \eta)\mathbf{y}, \quad (15.2)$$

بیان می کنیم که $N(\xi, \eta)$ المان چهار گره ای توابع شکل در دستگاه مختصات والد است. \mathbf{x} و \mathbf{y} ماتریس ستونی از مختصات x و y به صورت

$$\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4]^T, \quad \mathbf{y} = [y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad y_4]^T.$$

است.

جدول ۲.۰۲: مختصات گره در دامنه المان پارامتری

η_I	ξ_I	گره I
-۱	-۱	۱
-۱	۱	۲
۱	۱	۳
۱	-۱	۴

در نتیجه تابع شکل به صورت

$$N_I(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi_I \xi)(1 + \eta_I \eta), \quad (16.2)$$

^{۱۲}Isoparametric

^{۱۳}Parent

خلاصه می‌شود که (ξ_I, η_I) مختصات گره‌ای در المان والد است که در جدول ۲.۲ آمده است. رابطه بالا به‌طور مستقیم با روش ضرب تانسور بدست می‌آید. جواب آزمون با تابع شکل مشابه به‌صورت

$$\theta(\xi, \eta) = \mathbf{N}(\xi, \eta)\mathbf{d}. \quad (17.2)$$

تقریب زده می‌شود بنابراین المان، ایزوپارامتری است. توابع شکل (۱۶.۲) شامل جمله ثابت است. جمله خطی در ξ و η و چندجمله‌ای تکین $\xi\eta$ چندجمله‌ای تکین دوسویی هستند. این توابع شکل، توابع شکل دوسویی نامیده می‌شوند. اگر ما چندجمله‌ای تکین را برحسب پارامترهای دلخواه بنویسیم، رابطه زیر را بدست می‌آوریم:

$$\theta(\xi, \eta) = \alpha_0 + \alpha_1\xi + \alpha_2\eta + \alpha_3\xi\eta. \quad (18.2)$$

عبارت (۱۵.۲) به دلیل توابع شکل دلخواه (۱۶.۲) دوسویی است. بنابراین چهار توابع مستقل در تقریب وجود دارد که معادل تعداد گره‌ها در هر المان می‌باشد در نتیجه فرآیند بالا ضرب تانسور در جهت مستقیم است.

۳.۱.۲ مشتق تابع شکل ایزوپارامتری

بر حسب مختصات فیزیکی، گرادیان جواب آزمون برای المان چهارضلعی چهارنقطه‌ای به‌صورت

$$\nabla\theta = \mathbf{B}\mathbf{d}, \quad (19.2)$$

است که

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial y} \end{bmatrix}, \quad (20.2)$$

برای بدست آوردن مختصات توابع شکل بیان شده در مختصات المان والد بر حسب مختصات فیزیکی (x, y) داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_I}{\partial \xi} &= \frac{\partial N_I}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_I}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_I}{\partial \eta} &= \frac{\partial N_I}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_I}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{aligned}$$

یا

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_I}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_I}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_I}{\partial x} \\ \frac{\partial N_I}{\partial y} \end{bmatrix}.$$

که \mathbf{J} ماتریس ژاکوبی است.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_I}{\partial x} \\ \frac{\partial N_I}{\partial y} \end{bmatrix} = (\mathbf{J})^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_I}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_I}{\partial \eta} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}. \quad (21.2)$$

و در شکل ماتریسی به‌صورت

$$\nabla \mathbf{N}_I = (\mathbf{J})^{-1} \mathbf{G} \mathbf{N}_I, \quad (22.2)$$

است که G عملگر گرادیان در دستگاه مختصات است که به صورت

$$G = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix}. \quad (23.2)$$

تعریف می‌شود. با جایگذاری عبارت (۱۵.۲) در عبارت ژاکوبی (۲۱.۲) داریم:

$$J = \begin{bmatrix} \sum_{I=1}^4 \frac{\partial N_I}{\partial \xi} x_I & \sum_{I=1}^4 \frac{\partial N_I}{\partial \xi} y_I \\ \sum_{I=1}^4 \frac{\partial N_I}{\partial \eta} x_I & \sum_{I=1}^4 \frac{\partial N_I}{\partial \eta} y_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix}. \quad (24.2)$$

معادله (۲۴.۲) را می‌توان به شکل ماتریسی

$$J = GN[x \ y]. \quad (25.2)$$

نوشت. با استفاده از معادلات (۲۰.۲)، (۲۴.۲) و (۲۵.۲)، ماتریس B به فرم ماتریسی

$$B = (J)^{-1}GN. \quad (26.2)$$

حاصل می‌شود. دترمینان ژاکوبی باید مثبت باشد یعنی:

$$|J| \equiv \det(J) > 0 \quad \forall(x, y). \quad (27.2)$$

۴.۱.۲ انتگرال‌گیری گاوسی در دو بعد

انتگرال‌گیری در شکل‌های مختلف توابع شکل روی المان، به فرمول‌بندی المان ماتریس‌ها و بردارها نیاز دارد. اکنون نشان می‌دهیم که چگونه فرمول‌بندی انتگرال‌گیری گاوسی یک‌بعدی، به دو بعد توسعه می‌یابد.

انتگرال‌گیری روی المان چهارضلعی

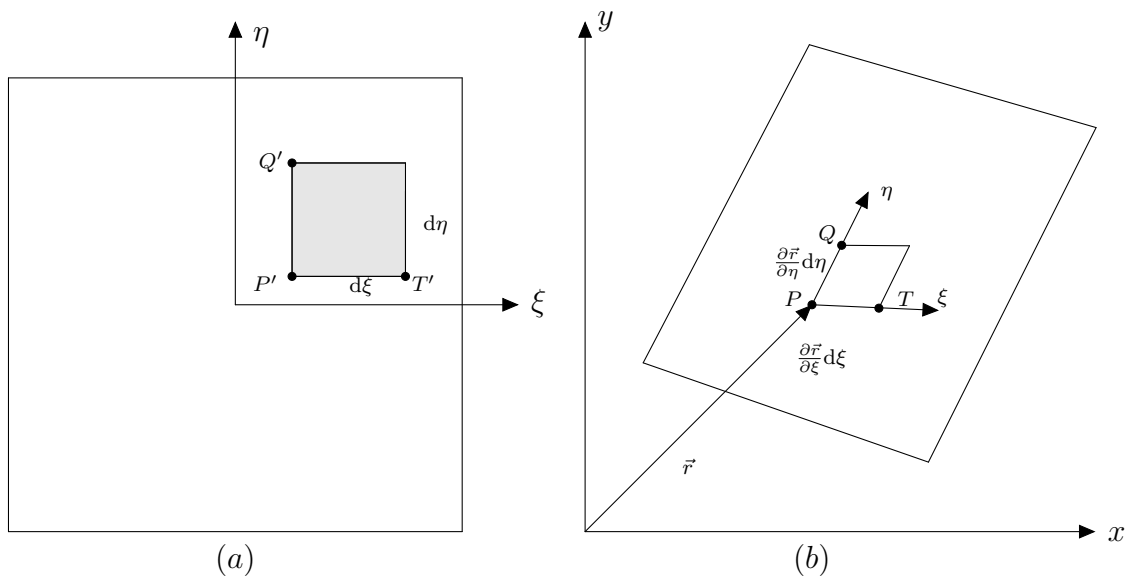
انتگرال تعریف شده روی دامنه المان چهارضلعی

$$I = \int_{\Omega} f(\xi, \eta) d\Omega. \quad (28.2)$$

را بررسی می‌کنیم. برای بدست آوردن این انتگرال، باید دامنه $d\Omega$ را بر حسب $d\xi$ و $d\eta$ بیان کنیم. بردار \vec{r} نقطه دلخواه P در دامنه فیزیکی را معرفی می‌کند. نقطه مختصات P در نقطه P' در دستگاه مختصات والد است. مختصات به صورت زیر است:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

نقاط Q' و T' در فاصله $d\eta$ و $d\xi$ از P' در دستگاه مختصات طبیعی انتخاب شده‌اند. نقاط متناظر در دامنه فیزیکی Q و T است (شکل ۳.۲). بردار \vec{a} و \vec{b} از نقاط P به T و P به Q را می‌توان به صورت



شکل ۳.۲: نقشه مساحت دامنه (a) دامنه والد، (b) دامنه فیزیکی.

زیر بدست آورد:

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} d\xi = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \vec{j} \right) d\xi,$$

$$\vec{b} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} d\eta = \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \vec{j} \right) d\eta.$$

مساحت بی نهایت کوچک از دامنه $d\Omega$ با دو بردار \vec{a} و \vec{b} محصور شده است که می توان با حاصل ضرب سه گانه زیر تعیین کرد:

$$d\Omega = \vec{k} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{k} \cdot \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi & \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} d\xi & \frac{\partial y}{\partial \xi} d\eta & 0 \end{bmatrix} = \det \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}}_{|\mathbf{J}|} d\xi d\eta = |\mathbf{J}| d\xi d\eta, \quad (29.2)$$

که $|\mathbf{J}|$ دترمینان ماتریس ژاکوبی \mathbf{J} است. بنابراین انتگرال گیری در معادله (۲۸.۲) را می توان به صورت

$$I = \int_{\eta=-1}^1 \int_{\xi=-1}^1 |\mathbf{J}(\xi, \eta)| f(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

بیان کرد. برای برآورد این انتگرال، ابتدا انتگرال گیری گاوس را روی ξ محاسبه می کنیم، که منجر به رابطه

$$I = \int_{\eta=-1}^1 \left(\int_{\xi=-1}^1 |\mathbf{J}(\xi, \eta)| f(\xi, \eta) d\xi \right) d\eta = \int_{r=-1}^1 \sum_{i=1}^{n_{gp}} w_i |\mathbf{J}(\xi_i, \eta)| f(\xi_i, \eta) d\eta,$$

می شود. در ادامه انتگرال گیری روی η رابطه

$$I = \int_{\eta=-1}^1 \sum_{i=1}^{n_{gp}} w_i f(\xi_i, \eta) |\mathbf{J}(\xi_i, \eta)| d\eta = \sum_{i=1}^{n_{gp}} \sum_{j=1}^{n_{gp}} w_i w_j |\mathbf{J}(\xi_i, \eta_j)| f(\xi_i, \eta_j).$$

حاصل می شود.

انتگرال گیری روی المان های مثلثی

برای المان های مثلثی، فرآیند انتگرال گیری عددی متفاوت با چهار ضلعی ها است. فرمول انتگرال گیری به صورت

$$I = \int_{\Omega} f d\Omega = \sum_{i=1}^{n_{gp}} w_i |J(\xi_i)| f(\xi_i), \quad (30.2)$$

است که ماتریس ژاکوبی به شکل

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi_1} & \frac{\partial y}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi_2} & \frac{\partial y}{\partial \xi_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_I^{n_{en}} \frac{\partial N_I^T}{\partial \xi_1} x_I & \sum_I^{n_{en}} \frac{\partial N_I^T}{\partial \xi_1} y_I \\ \sum_I^{n_{en}} \frac{\partial N_I^T}{\partial \xi_2} x_I & \sum_I^{n_{en}} \frac{\partial N_I^T}{\partial \xi_2} y_I \end{bmatrix} \quad (31.2)$$

می باشد. توابع شکل بر حسب (ξ_1, ξ_2, ξ_3) بیان می شوند که $\xi_3 = 1 - \xi_1 - \xi_2$ است. وزن و نقاط انتگرال گیری برای المان های مثلثی در جدول ۲.۲ خلاصه شده است. برای مثلثی با سه گره، ماتریس ژاکوبی به صورت

$$J = \begin{bmatrix} x_i - x_k & y_i - y_k \\ x_j - x_k & y_j - y_k \end{bmatrix}.$$

بیان می شود.

جدول ۳.۲: وزن های انتگرال گیری گاوسی و نقاط دامنه مثلثی

وزن ها	ξ_2	ξ_1	درجه	مرتبۀ انتگرال گیری
۰/۱۶۶۶۶۶۶۶۶۶۶	۰/۱۶۶۶۶۶۶۶۶۶۶	۰/۱۶۶۶۶۶۶۶۶۶۶	۲	سه نقطه ای
۰/۱۶۶۶۶۶۶۶۶۶۶	۰/۱۶۶۶۶۶۶۶۶۶۶	۰/۶۶۶۶۶۶۶۶۶۶۶		
۰/۱۶۶۶۶۶۶۶۶۶۶	۰/۶۶۶۶۶۶۶۶۶۶۶	۰/۱۶۶۶۶۶۶۶۶۶۶		
۰/۰۶۲۹۶۹۵۹۰۳	۰/۱۰۱۲۸۶۵۰۷۳	۰/۱۰۱۲۸۶۵۰۷۳	۵	هفت نقطه ای
۰/۰۶۲۹۶۹۵۹۰۳	۰/۱۰۱۲۸۶۵۰۷۳	۰/۷۹۷۴۲۶۹۸۵۳		
۰/۰۶۲۹۶۹۵۹۰۳	۰/۷۹۷۴۲۶۹۸۵۳	۰/۱۰۱۲۸۶۵۰۷۳		
۰/۰۶۶۱۹۷۰۷۶۴	۰/۰۵۹۷۱۵۸۷۱۷	۰/۴۷۰۱۴۲۰۶۴۱		
۰/۰۶۶۱۹۷۰۷۶۴	۰/۴۷۰۱۴۲۰۶۴۱	۰/۴۷۰۱۴۲۰۶۴۱		
۰/۰۶۶۱۹۷۰۷۶۴	۰/۴۷۰۱۴۲۰۶۴۱	۰/۰۵۹۷۱۵۸۷۱۷		
۰/۱۱۲۵	۰/۳۳۳۳۳۳۳۳۳۳	۰/۳۳۳۳۳۳۳۳۳۳		

چند جمله ای تکین از هر مرتبه را می توان روی مثلث شکل بسته، انتگرال گرفت. فرمول بندی زیر برای این هدف توسعه یافته است:

$$\int_{\Omega} \xi_1^i \xi_2^j \xi_3^k d\Omega = \frac{i!j!k!}{(i+j+k+2)!} 2A.$$

این فرمول می تواند برای جلوگیری از انتگرال گیری عددی استفاده شود.

۵.۱.۲ شکل ضعیف مساله

معادله جریان گرمای ناپایدار دو بعدی (۱.۱) را در نظر بگیرید. روش عناصر متناهی برای حل معادله (۱.۱) استفاده می‌شود، به طوری که شرایط مرزی (۲.۱)، (۳.۱) و (۴.۱) هستند که مشابه روش پیشنهادی زینکیو^{۱۴} و پارخ^{۱۵} است [۴۳]. عناصر متناهی بر پایه اصل گالرکین بدست می‌آید. با تقسیم دامنه جواب به عناصر متناهی در فضا و زمان، دما در هر المان به صورت

$$T(x, y, t) = \sum_I^m N_I(x, y, t)T_I, \quad (۳۲.۲)$$

تقریب زده می‌شود که N_I تابع شکل تعریف شده قطعه‌وار خطی المان با المان است. I اندیس مجموع، T_I نمایش گره‌ای گسسته $T(x, y, t)$ و m تعداد گره‌ها در هر المان است. در گام بعدی باید فرم ضعیف یا فرم وردشی را بدست آوریم. بدین منظور (۱.۱) را در $v \in V^{(h)}$ ضرب کرده و روی دامنه R انتگرال می‌گیریم:

$$\int_{R'} v \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + Q - \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \right] dx dy dt = 0, \quad (۳۳.۲)$$

با قراردادن $v = N_I$ و با استفاده از فرآیند مانده وزنی، که تابع وزن معادل تابع شکل تعریف شده تقریبی است، نمایش گالرکین برای معادله (۳۳.۲) به صورت

$$\int_{R'} N_I \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + Q - \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \right] dx dy dt = 0, \quad (۳۴.۲)$$

است که R' دامنه جواب المان متناهی و $dR' = dx dy dt$ است. با انتگرال‌گیری جز به جز روی جملات اول و دوم در معادله (۳۴.۲)، معادله

$$\int_{R'} \left[k_x \frac{\partial N_I}{\partial x} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + k_y \frac{\partial N_I}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} + N_I Q - N_I \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \right] dx dy dt - \int_{S'} N_I \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial T}{\partial y} n_y \right) dS' = 0,$$

حاصل می‌شود. معادله ساده شده به صورت

$$\begin{aligned} & - \int_{R'} \left[k_x \frac{\partial N_I}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + k_y \frac{\partial N_I}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} - N_I Q + N_I \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \right] dx dy dt \\ & - \int_{S'_\uparrow} N_I \bar{q} dS'_\uparrow - \int_{S'_\downarrow} N_I h(T - T_a) dS'_\downarrow = 0, \end{aligned} \quad (۳۵.۲)$$

است. که S'_\uparrow و S'_\downarrow قطعه‌ای از سطح خارجی ناحیه S' از منطقه جواب عناصر متناهی می‌باشد. با وارد

^{۱۴}Zienkiewicz

^{۱۵}Parekh

کردن تقریب دما (۳۲.۲)، داریم:

$$\begin{aligned}
 & - \int_{R'} \left[k_x \frac{\partial N_I}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_I^n N_I T_I \right) + k_y \frac{\partial N_I}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \left(\sum_I^n N_I T_I \right) - N_I \rho c \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_I^n N_I T_I \right) \right] dx dy dt \\
 & - \int_{S'_q} N_I \bar{q} dS'_q - \int_{S'_t} N_I \left(\sum_I^n N_I T - T_a \right) dS'_t = 0,
 \end{aligned}$$

(۳۶.۲)

با قرار دادن

$$T(\mathbf{x}, t) = \sum_{I=1}^n N_I(\mathbf{x}) T_I(t) = \mathbf{N}_I(\mathbf{x}) \mathbf{T},$$

و همچنین

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{I=1}^n N_I T_I(t) = \sum_{I=1}^n N_I(\mathbf{x}) \frac{\partial T_I(t)}{\partial t} = \mathbf{N}_I(\mathbf{x}) \dot{\mathbf{T}},$$

معادله (۳۶.۲) را می‌توان به صورت ماتریسی

$$\mathbf{C} \dot{\mathbf{T}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{T}(t) = \mathbf{F}(t), \quad (۳۷.۲)$$

نوشت که

$$\begin{aligned}
 \mathbf{C}_{IJ} &= \int_{R'} (\rho c N_I) dx dy, \\
 \mathbf{K}_{IJ} &= - \int_{R'} \left(k_x \frac{\partial N_I(\mathbf{x})}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial N_I(\mathbf{x})}{\partial y} n_y \right) dx dy - \int_{S'_q} N_I h dS'_q, \\
 \mathbf{F}_I &= \int_{R'} N_I Q dx dy + \int_{S'_t} N_I h T_a dS'_t + \int_{S'_q} N_I \bar{q} dS'_q.
 \end{aligned}$$

دستگاه جواب حاصل از معادله (۳۶.۲)، شامل n معادله جبری خطی با n مجهول است. انتگرال‌های بالا را با استفاده از انتگرال‌گیری عددی گاوسی بدست می‌آوریم و معادله ماتریسی (۳۷.۲) را با استفاده از روش تفاضل دو نقطه‌ای که در ادامه به بیان آن می‌پردازیم، حل می‌کنیم. برای حل مسایل به روش عناصر متناهی از نرم‌افزار فری‌فم^{۱۶} استفاده می‌کنیم.

فصل ۳

حل مسایل جریان گرمای ناپایدار با روش‌های بدون مش

در روش عناصر متناهی، تابع شکل با استفاده از روش‌های درونیایی، با مجموعه‌ای از گره‌های ثابت ایجاد می‌شوند. در تمام نسخه‌های روش‌های بدون مش، قبل از حل معادله دیفرانسیل مربوط به دامنه مساله، ابتدا تابع مجهول یا توابع شکل در دامنه مساله تقریب زده می‌شود. در روش‌های بدون مش، دامنه مساله با میدان‌های گره‌ای معرفی می‌شوند که این میدان‌ها، دارای توزیع دلخواه هستند. متغیرهای میدان در نقطه دلخواهی از دامنه مساله با استفاده از گره‌های میدانی در دامنه محمل منطقه‌ای تقریب زده می‌شوند. تکنیک‌های مختلفی برای تولید تابع شکل وجود دارند. در بخش اول این فصل به بیان تابع شکل روش درونیایی نقطه‌ای شعاعی و حل معادله جریان گرمای ناپایدار با استفاده از این روش می‌پردازیم و در بخش دوم، روش تقریب کمترین مربعات متحرک را بیان می‌کنیم و معادله جریان گرمای ناپایدار را با این روش حل می‌کنیم.

روش درونیایی نقطه‌ای شعاعی توسط وانگ^۱ و لیو^۲ در سال ۲۰۰۰ بیان شد که از توابع پایه‌ای شعاعی برای بدست آوردن این ایده استفاده شده است. روش درونیایی نقطه‌ای شعاعی برای توزیع گره‌ای دلخواه، پایدار و قوی است. بنابراین، روش درونیایی نقطه‌ای شعاعی بیشتر از روش درونیایی نقطه‌ای چندجمله‌ای استفاده می‌شود. این روش در مکانیک جامدات مسایل دوبعدی و سه‌بعدی، مسایل غیرخطی زمین شناسی، ساختار هسته‌ای و غشایی و مسایل غیرخطی مواد در مهندسی عمران بکار می‌رود.

در سال ۱۹۹۴، بلیچکو^۳ و همکارانش روش بدون المان گالرکین را ارائه دادند که از تقریب کمترین مربعات متحرک در شکل ضعیف گالرکین برای اثبات مجموعه‌ای از معادلات جبری استفاده می‌شد. در روش بدون المان گالرکین، دامنه مساله با مجموعه‌ای از گره‌های توزیع شده بیان می‌شود. تقریب کمترین

^۱Wang

^۲Liu

^۳Belytschko

مربعات متحرک برای ایجاد توابع شکل فقط بر پایه گروهی از گره‌های دلخواه در دامنه منطقه‌ای استفاده می‌شود. بلیچکو و همکارانش بیان کردند که روش بدون المان گالرکین دارای دقت بالایی است و نسبت همگرایی این روش بسیار بیشتر از روش عناصر متناهی می‌باشد. به علاوه بی‌نظمی گره‌ها روی اجرای روش بدون المان گالرکین تاثیری ندارد. این روش روی مسایل دوبعدی و سه‌بعدی خطی و غیرخطی بکار می‌رود. از تقریب کمترین مربعات متحرک برای دستیابی به پایداری در تقریب تابع استفاده می‌شود. با استفاده از فرآیند گالرکین، پایداری و خوش رفتاری دستگاه معادلات ایجاد می‌شود. ساختار توابع شکل با استفاده از تقریب کمترین مربعات متحرک، فاقد ویژگی دلتای کرونگر است که در حالت‌های خاص نیاز به شرایط مرزی ضروری دارند. روش بدون المان گالرکین نسبت به روش عناصر متناهی محاسبات بیشتری دارد، به این دلیل که مجموعه معادلات جبری باید روی هر نقطه برای ایجاد توابع شکل تقریب کمترین مربعات متحرک حل شود.

۱.۳ روش درونیابی نقطه‌ای

روش درونیابی نقطه‌ای^۴ برای تقریب تابع و ساخت توابع شکل مفید است. این روش، تابع $u(x)$ روی دامنه Ω در نقطه دلخواه x را به شکل

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m B_i(\mathbf{x})a_i.$$

تقریب می‌زند. $B_i(\mathbf{x})$ توابع پایه‌ای هستند که در فضای مختصات دکارتی $\mathbf{x}^T = [x, y]$ تعریف شده‌اند و m تعداد توابع پایه‌ای و a_i ضرایب هستند. برای تقریب ابتدا محمل دامنه منطقه‌ای نقطه x که شامل n گره است، ارایه می‌شود. تاکنون دو نوع از روش‌های درونیابی نقطه‌ای برای ساخت توابع شکل با بکارگیری توابع پایه‌ای متفاوت گسترش یافته است.

۱. روش درونیابی نقطه‌ای چندجمله‌ای،

۲. روش درونیابی نقطه‌ای شعاعی.

در این بخش به روش درونیابی نقطه‌ای شعاعی می‌پردازیم [۷].

تعریف ۱.۱.۳. محمل دامنه منطقه‌ای^۵ برای نقطه x در دامنه، گره‌هایی که برای تقریب جواب معادله در x مورد نیاز است را تعیین می‌کند. محمل دامنه منطقه‌ای می‌تواند شکل‌های متفاوتی مانند دایره یا مستطیل داشته باشد.

^۴Point Interpolation Method

^۵Local Support Domain

تعریف ۲.۱.۳. به ماتریس مربعی متقارنی که درایه‌های آن از تک‌جمله‌ای‌ها تشکیل شده باشند، ماتریس گشتاور یا ممان^۶ گفته می‌شود.

۱.۱.۳ روش درونیابی نقطه‌ای شعاعی

ساختار درونیابی $u(\mathbf{x})$ برای عبور از بین همه گره‌ها با استفاده از تابع پایه شعاعی $R_i(\mathbf{x})$ و تابع پایه‌ای چندجمله‌ای $P_j(\mathbf{x})$ به صورت

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n R_i(\mathbf{x})a_i + \sum_{j=1}^m P_j(\mathbf{x})b_j = \mathbf{R}^T(\mathbf{x})\mathbf{a} + \mathbf{P}^T(\mathbf{x})\mathbf{b}. \quad (1.3)$$

است که a_i ضریب $R_i(\mathbf{x})$ ، b_j ضریب $P_j(\mathbf{x})$ ، n تعداد گره‌ها در دامنه موثر \mathbf{x} و m تعداد جملات چندجمله‌ای می‌باشد که معمولاً $m < n$ است. زمانی که $m = 0$ ، تنها توابع پایه‌ای شعاعی بکار می‌روند. بردارها به صورت

$$\mathbf{a} = [a_1, a_2, \dots, a_n]^T,$$

$$\mathbf{b} = [b_1, b_2, \dots, b_m]^T,$$

$$\mathbf{R}^T(\mathbf{x}) = [R_1(\mathbf{x}), R_2(\mathbf{x}), \dots, R_n(\mathbf{x})],$$

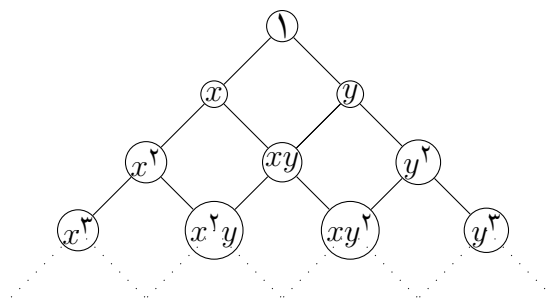
$$\mathbf{P}^T(\mathbf{x}) = [P_1(\mathbf{x}), P_2(\mathbf{x}), \dots, P_m(\mathbf{x})].$$

تعریف می‌شوند. پایه شعاعی، تابعی برحسب مسافت r_i می‌باشد و به صورت

$$R_i(\mathbf{x}) = R_i(r_i),$$

$$r_i = \left[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 \right]^{1/2}.$$

بیان می‌شود. $P_i(\mathbf{x})$ چندجمله‌ای‌های پاسکال در مختصات $\mathbf{x}^T = [x, y]$ هستند که در شکل ۱.۲ نشان داده شده است. (در حالت دوبعدی)



شکل ۱.۳: مثلث پاسکال چندجمله‌ای‌ها برای دامنه دوبعدی

^۶Moment Matrix

پایه چندجمله‌ای که دارای جملات تکین می‌باشد، در زیر آمده است:

$$\mathbf{P}^T(\mathbf{x}) = [1, x, y, x^2, xy, y^2, \dots].$$

تعداد زیادی توابع پایه‌ای شعاعی وجود دارد. جدول ۱.۳ چهار نوع از آن‌ها را که بیشتر بکار می‌رود را نشان می‌دهد. در بیشتر توابع پایه‌ای شعاعی پارامترهای ثابتی وجود دارند که مقدار آن‌ها باید براساس ماهیت مساله مورد نظر تعیین شود تا روش بهینه گردد.

جدول ۱.۳: انواع توابع پایه‌ای شعاعی با پارامترهای شکل بی‌بعد

پارامتر شکل	عبارت	اسم
$\alpha_c \geq 0, q$	$R_i(x, y) = (r_i^2 + (\alpha_c d_c)^2)^q$	چندمربعی (MQ)
α_c	$R_i(x, y) = \exp[-\alpha_c (\frac{r_i}{d_c})^2]$	گوسی (EXP)
η	$R_i(x, y) = r_i^\eta$	اسپلاین صفحه‌ای نازک (TPS)
η	$R_i(x, y) = r_i^\eta \log r_i$	لگاریتمی

برای تعیین ضرایب a_i و b_i در رابطه (۱.۳) یک محمل دامنه برای نقطه \mathbf{x} تعیین می‌شود که شامل n گره است. در نهایت منجر به معادله خطی می‌شود که هرکدام مربوط به یک گره است. شکل ماتریسی معادله (۱.۳) به صورت

$$\mathbf{U}_s = \mathbf{R}_0 \mathbf{a} + \mathbf{P}_m \mathbf{b}. \quad (2.3)$$

بیان می‌شود که

$$\mathbf{U}_s = \{ u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n \}^T,$$

برداری از مقادیر تابع است. \mathbf{R}_0 ماتریس گشتاور از توابع پایه‌ای شعاعی به صورت

$$\mathbf{R}_0 = \begin{bmatrix} R_1(x_1, y_1) & R_2(x_1, y_1) & \dots & R_n(x_1, y_1) \\ R_1(x_2, y_2) & R_2(x_2, y_2) & \dots & R_n(x_2, y_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_1(x_n, y_n) & R_2(x_n, y_n) & \dots & R_n(x_n, y_n) \end{bmatrix}_{n \times n}.$$

و \mathbf{P}_m ماتریس گشتاور چندجمله‌ای‌ها به صورت

$$\mathbf{P}_m^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_m(\mathbf{x}_1) & p_m(\mathbf{x}_2) & \dots & p_m(\mathbf{x}_n) \end{bmatrix}_{m \times n}.$$

هستند.

بنابراین $(n + m)$ متغیر در معادله (۲.۳) وجود دارد. m شرط محدودیت به صورت

$$\sum_{i=1}^n p_j(\mathbf{x}_i) a_i = \mathbf{P}_m^T \mathbf{a} = \mathbf{0}, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (۳.۳)$$

را در نظر می‌گیریم. بنابراین m معادله دیگر بدست می‌آید.

انجام درونیابی با عبور از همه n نقطه در ناحیه موثر، مجموعه‌ای از معادلات روی ضرایب a_i و b_j به صورت

$$u_k = u(x_k, y_k) = \sum_{i=1}^n a_i R_i(x_k, y_k) + \sum_{j=1}^m b_j P_j(x_k, y_k), \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (۴.۳)$$

تشکیل می‌شود. جمله شعاعی، چند بعد را به یک بعد تبدیل می‌کند و جمله چندجمله‌ای، دقت چندجمله‌ای درونیاب را بهبود می‌بخشد.

معادلات (۳.۳) و (۴.۳) به شکل ماتریسی

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{R}_n & \mathbf{P}_m \\ \mathbf{P}_m^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}} \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^e \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}, \quad (۵.۳)$$

یا

$$\mathbf{G} \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^e \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}. \quad (۶.۳)$$

بیان می‌شوند که

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{Bmatrix} = \{ a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n \ b_1 \ b_2 \ \dots \ b_m \}^T,$$

و بردار مقادیر تابعی در هر گره به صورت

$$\mathbf{u}^e = [u_1, u_2, \dots, u_n]^T.$$

است. چون \mathbf{R}_n متقارن و معین مثبت است، ماتریس \mathbf{G} نیز متقارن و معین مثبت خواهد شد پس دارای معکوس است. با حل معادله (۶.۳)، داریم:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{Bmatrix} = \mathbf{G}^{-1} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^e \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}.$$

و درونیابی به صورت

$$u(\mathbf{x}) = [\mathbf{R}^T(\mathbf{x}) \ \mathbf{P}^T(\mathbf{x})] \mathbf{G}^{-1} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^e \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} = \varphi(\mathbf{x}) \mathbf{u}^e.$$

بیان می‌شود که ماتریس توابع شکل $\varphi(\mathbf{x})$ به شکل

$$\varphi(\mathbf{x}) = [\phi_1(\mathbf{x}), \phi_2(\mathbf{x}), \dots, \phi_i(\mathbf{x}), \dots, \phi_n(\mathbf{x})],$$

تعریف می‌شود که

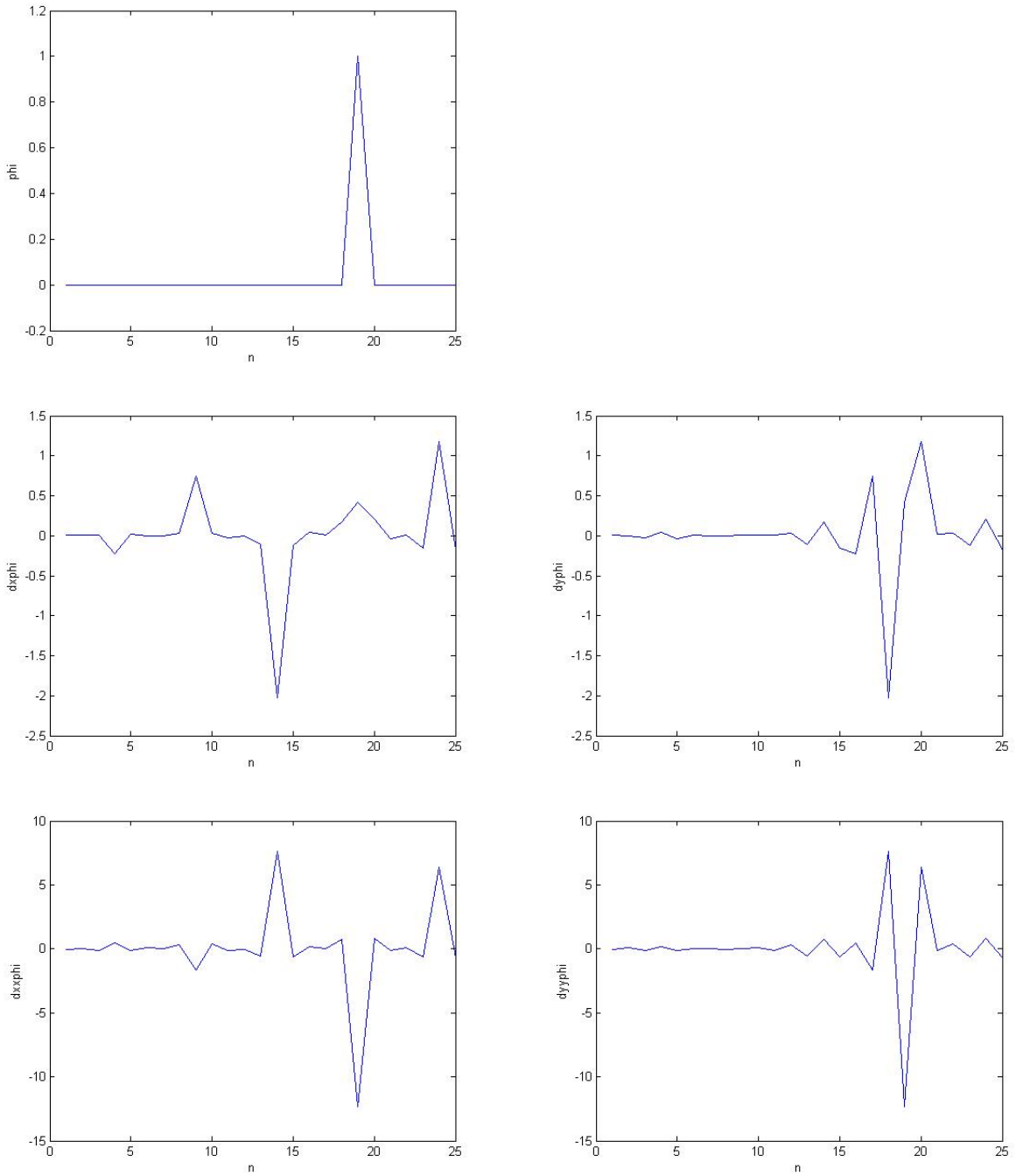
$$\phi_k(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n R_i(\mathbf{x}) \bar{G}_{i,k} + \sum_{j=1}^m P_j(\mathbf{x}) \bar{G}_{n+j,k}, \quad (7.3)$$

$\bar{G}_{i,k}$ المان (i, k) از ماتریس \mathbf{G}^{-1} است. مشتقات توابع شکل

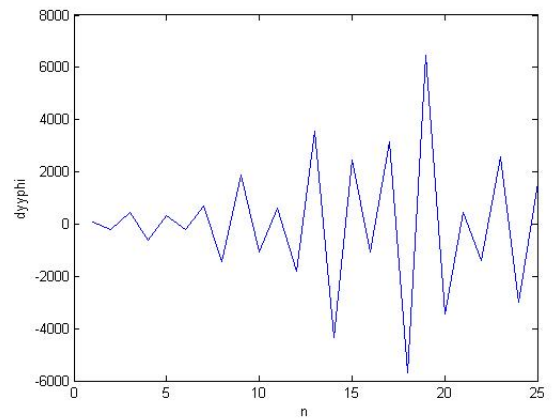
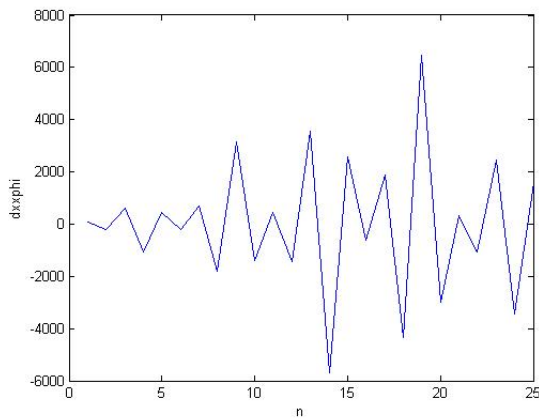
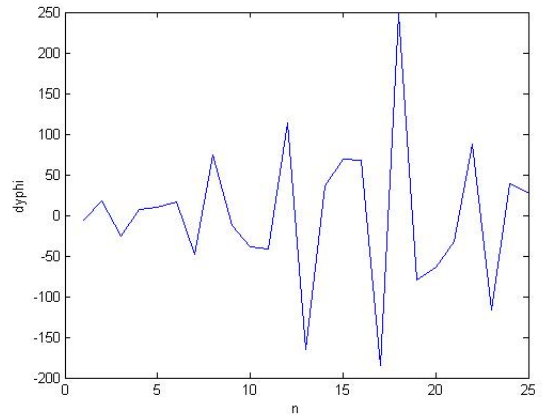
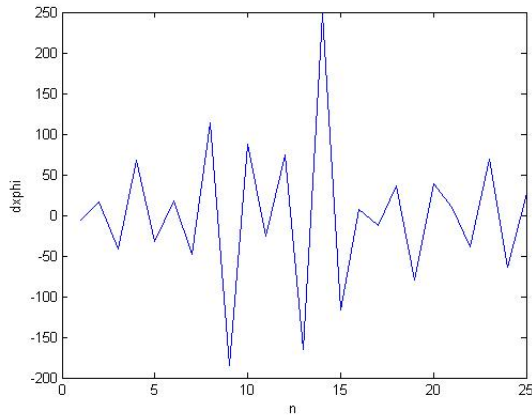
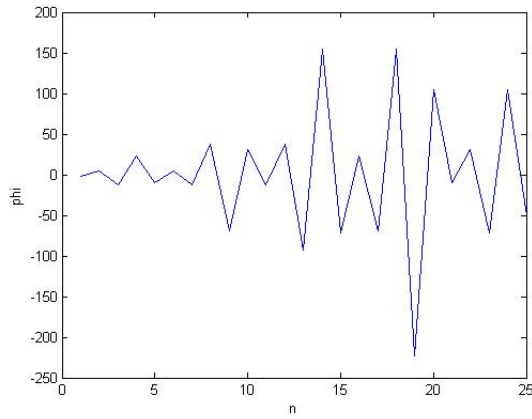
$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_k}{\partial x} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial R_i}{\partial x} \bar{G}_{i,k} + \sum_{j=1}^m \frac{\partial P_j}{\partial x} \bar{G}_{n+j,k}, \\ \frac{\partial \phi_k}{\partial y} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial R_i}{\partial y} \bar{G}_{i,k} + \sum_{j=1}^m \frac{\partial P_j}{\partial y} \bar{G}_{n+j,k}. \end{aligned} \quad (8.3)$$

هستند.

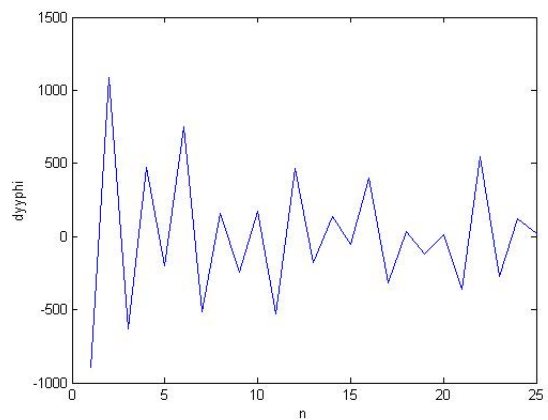
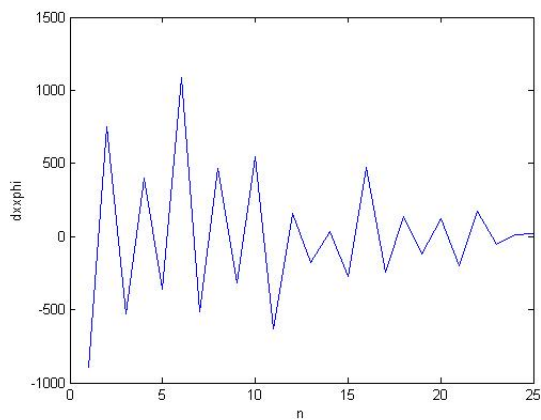
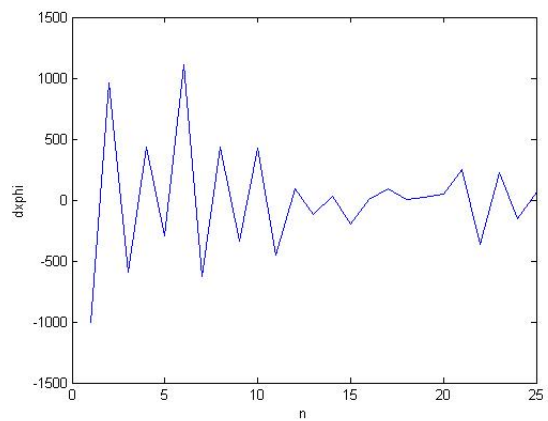
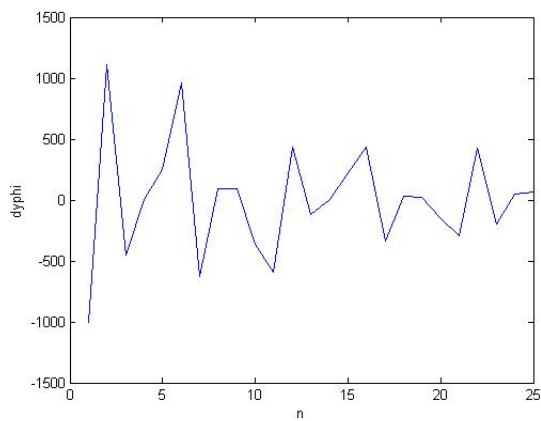
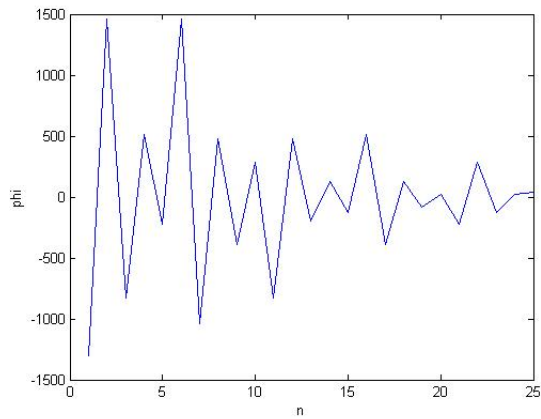
نکته: توابع شکل تعیین شده با روش درونیایی نقطه‌ای شعاعی دارای خاصیت دلتای کرونکر، یگانگی مجموع $(\sum_{i=1}^n \phi_i = 1)$ و پیوستگی هستند [۲۲].
در شکل‌های زیر تابع شکل روش درونیایی نقطه‌ای شعاعی را برای انواع توابع پایه‌ای شعاعی که در جدول ۱.۳ آمده است، بازه $[-1, 1]$ در نقطه $(0.5, 0.5)$ برای ۲۵ گره، نشان می‌دهیم.



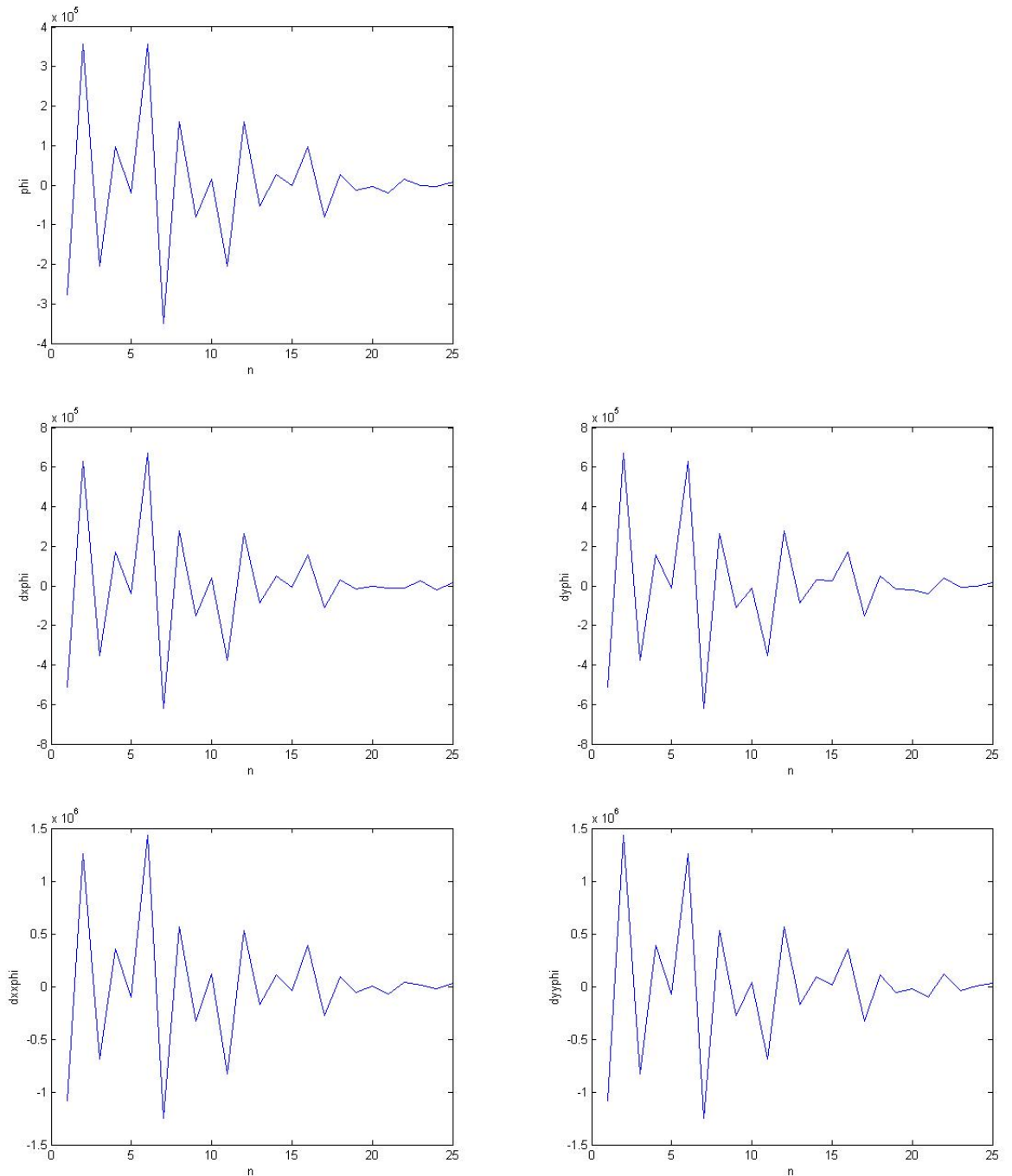
شکل ۲.۳: تابع شکل روش درونیابی نقطه‌ای شعاعی در نقطه $(0.5, 0.5)$ برای $RBF = 1$.



شکل ۳.۳: تابع شکل روش درونیابی نقطه‌ای شعاعی در نقطه $(\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{5})$ برای $2 = \text{RBF}$.



شکل ۴.۳: تابع شکل روش درونیابی نقطه‌ای شعاعی در نقطه $(\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{5})$ برای $RBF = 3$ و $\eta = 3$.



شکل ۵.۳: تابع شکل روش درونیابی نقطه‌ای شعاعی در نقطه $(0.5, 0.5)$ برای $3 = \text{RBF}$ و $\eta = 0.001$.

۲.۳ فرمول‌بندی مساله جریان گرمای ناپایدار با روش درونیایی شعاعی منطقه‌ای

معادله (۱.۱) را با شرایط مرزی (۲.۱)، (۳.۱) و (۴.۱) در نظر بگیرید. شکل ضعیف منطقه‌ای معادله

$$(۱.۱) \text{ روی زیردامنه منطقه‌ای } \Omega_s \text{ با مرز } \Gamma_s \text{ به صورت} \\ \int_{\Omega_s} w \left[\rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) - Q \right] d\Omega = 0, \quad (۹.۳)$$

نوشته می‌شود که w تابع تست است.

با استفاده از قضیه دیورژانس و انتگرال‌گیری جزء‌به‌جزء، معادله (۹.۳) به صورت زیر می‌شود:

$$\int_{\Omega_s} w \rho c \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega - \int_{\Omega_s} w \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] d\Omega - \int_{\Omega_s} w Q d\Omega = 0, \quad (۱۰.۳)$$

که بین مرز منطقه‌ای Γ_s و مرز عمومی Γ اشتراک وجود دارد. مرز Γ_s شامل چهار قسمت است: مرز

داخلی Γ_{sI} ، مرز دیریکله Γ_{s1} ، مرز نویمن Γ_{s2} ، مرز رایین Γ_{s3} .

اگر هیچ اشتراکی بین مرز منطقه‌ای Γ_s و مرز عمومی Γ وجود نداشته باشد، $\Gamma_{sI} = \Gamma_s$ و انتگرال‌های

روی Γ_{s1} ، Γ_{s2} و Γ_{s3} صفر می‌شود.

با جایگذاری معادله (۳.۱) و (۴.۱) در (۱۰.۳) داریم:

$$\int_{\Omega_s} w \left(\rho c \frac{\partial T}{\partial t} - Q \right) d\Omega + \int_{\Omega_s} \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + k_y \frac{\partial T}{\partial y} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \right) d\Omega \\ - \int_{\Gamma_s} w \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial T}{\partial y} n_y \right) d\Gamma = 0, \quad (۱۱.۳)$$

که

$$\Gamma_s = \Gamma_{sI} + \Gamma_{s1} + \Gamma_{s2} + \Gamma_{s3}.$$

تابع پله‌ای هوی‌ساید به عنوان تابع تست انتخاب می‌شود یعنی:

$$w = \begin{cases} 1 & x \in \Omega_s \\ 0 & x \notin \Omega_s \end{cases}$$

بنابراین شکل ضعیف منطقه‌ای معادله (۱۱.۳) به معادله ساده انتگرال‌گیری مرزی زیر تبدیل می‌شود:

$$\int_{\Omega_s} \left(\rho c \frac{\partial T}{\partial t} - Q \right) d\Omega - \int_{\Gamma_{sI}} \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial T}{\partial y} n_y \right) d\Gamma \\ - \int_{\Gamma_{s1}} \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial T}{\partial y} n_y \right) d\Gamma \\ - \int_{\Gamma_{s2}} \underbrace{\left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial T}{\partial y} n_y \right)}_{\bar{q}} d\Gamma \\ - \int_{\Gamma_{s3}} \underbrace{\left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial T}{\partial y} n_y \right)}_{h(T_a - T)} d\Gamma = 0, \quad (۱۲.۳)$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_s} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega - \int_{\Gamma_{sI}} \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial T}{\partial y} n_y \right) d\Gamma \\ & - \int_{\Gamma_{s\lambda}} \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial T}{\partial y} n_y \right) d\Gamma + \int_{\Gamma_{s\tau}} hT d\Gamma \\ & = \int_{\Omega_s} Q d\Omega + \int_{\Gamma_{s\bar{q}}} \bar{q} d\Gamma + \int_{\Gamma_{s\tau}} hT_a d\Gamma = 0, \end{aligned} \quad (13.3)$$

که شکل محمل دامنه را می‌توان دلخواه انتخاب کرد. معمولاً در مسایل دوبعدی محمل دامنه مستطیلی یا دایره‌ای استفاده می‌شود.

گسسته‌سازی

برای مساله جریان گرمای ناپایدار، تابع میدان دما فقط به مختصات فضا وابسته نیست، بلکه به زمان t نیز بستگی دارد. چون توابع شکل مستقل از زمان هستند پس تابع میدان دما به صورت زیر بیان می‌شود:

$$T(\mathbf{x}, t) = \sum_{I=1}^n \phi_I(\mathbf{x}) T_I(t) = \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) \mathbf{T}, \quad (14.3)$$

که

$$\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) = (\phi_1(\mathbf{x}), \phi_2(\mathbf{x}), \dots, \phi_n(\mathbf{x})),$$

و

$$\mathbf{T} = (T_1(t), T_2(t), \dots, T_n(t))^t,$$

همچنین

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \sum_{I=1}^n \phi_I T_I(t) = \sum_{I=1}^n \phi_I(\mathbf{x}) \frac{\partial T_I(t)}{\partial t} = \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) \dot{\mathbf{T}}, \quad (15.3)$$

و

$$\dot{\mathbf{T}} = \left(\frac{\partial T_1(t)}{\partial t}, \frac{\partial T_2(t)}{\partial t}, \dots, \frac{\partial T_n(t)}{\partial t} \right)^t,$$

با جایگذاری معادلات (۱۴.۳) و (۱۵.۳) در معادله (۱۳.۳)، معادله گسسته برای همه گره‌ها به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\mathbf{C}\dot{\mathbf{T}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{T}(t) = \mathbf{F}(t), \quad (16.3)$$

که

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{IJ} &= \int_{\Omega_s} \rho c \phi_J(x) d\Omega, \\ \mathbf{K}_{IJ} &= - \int_{\Gamma_{sI}} \left(k_x \frac{\partial \phi_J(x)}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial \phi_J(x)}{\partial y} n_y \right) d\Gamma \\ & - \int_{\Gamma_{s\lambda}} \left(k_x \frac{\partial \phi_J(x)}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial \phi_J(x)}{\partial y} n_y \right) d\Gamma + \int_{\Gamma_{s\tau}} h \phi_J(x) d\Gamma, \\ \mathbf{F}_I &= \int_{\Omega_s} Q d\Omega + \int_{\Gamma_{s\bar{q}}} \bar{q} d\Gamma + \int_{\Gamma_{s\tau}} h T_a d\Gamma. \end{aligned} \quad (17.3)$$

برای حل این انتگرال‌ها از روش انتگرال‌گیری گاوسی استفاده می‌شود. روش تفاضلات متناهی متداول برای گسسته‌سازی زمان انتخاب شده است.

۱.۲.۳ روش تفاضلات متناهی

روش تفاضلات متناهی برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی سهموی بکار می‌رود. این روش، روشی قوی و بسیار کارآمد در حل دسته‌ای از مسایل انتقال گرما و حرکت سیال در هندسه منظم است. یک ناحیه دوبعدی را در نظر بگیرید. در این ناحیه با رسم خطوطی موازی محورهای مختصات با فاصله‌های Δx و Δy به ترتیب در جهت محورهای x و y ، یک شبکه مستطیلی تشکیل می‌دهیم. مقدار عددی متغیرهای وابسته، در نقاط برخورد خطوط موازی بدست می‌آیند که آن‌ها را نقاط شبکه‌ای یا گره‌ای می‌نامند. این مقادیر با گسسته‌سازی معادله دیفرانسیل جزئی روی ناحیه مورد نظر، به منظور تعیین معادلات جبری هم‌ارز بدست می‌آیند. گسسته‌سازی، جایگزینی هر مشتق در معادله دیفرانسیل جزئی با تقریب تفاضلات متناهی در نقطه شبکه‌ای است که بر حسب مقادیر متغیر وابسته در نقطه شبکه‌ای، نقاط شبکه‌ای مجاور و نقاط مرزی حاصل می‌شود. با انجام آن یک دستگاه معادلات جزئی بدست می‌آید.

بکارگیری روش تفاضلات متناهی برای مسایل فیزیکی شامل سه مرحله اصلی زیر است:

۱. تقسیم ناحیه مربوطه به شبکه محاسباتی متعامد.
 ۲. گسسته‌سازی معادلات و شرایط مرزی در مکان و زمان، به طوری که بتوان معادلات جبری هم‌ارز هر گره را بدست آورد.
 ۳. حل معادلات حاصل با یکی از روش‌های وارون ماتریس یا تکرار.
- روش تفاضلات متناهی شامل دو روش صریح^۷ و ضمنی^۸ است که در این جا با روش‌های ضمنی سروکار داریم.

روش‌های ضمنی

روش‌های ضمنی از روش‌های اساسی تفاضلات متناهی برای حل معادلات دیفرانسیل سهموی هستند. روشی که در آن محاسبه چندین مجهول مستلزم حل یک دستگاه معادلات باشد را روش ضمنی نامند. برای یک مساله مفروض، انتخاب یک روش خاص به میزان دقت محاسبات، زمان لازم برای محاسبه و حافظه مورد نیاز برای ذخیره اطلاعات بستگی دارد.

^۷Explicit

^۸Implicit

طرح تفاضل زمانی

در این بخش ما از تکنیک تفاضل دونقطه‌ای متداول^۹ برای گسسته‌سازی زمان استفاده می‌کنیم که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\theta \left(\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} \right)_{t+\Delta t} + (1-\theta) \left(\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} \right)_t = \frac{\mathbf{T}_{t+\Delta t} - \mathbf{T}_t}{\Delta t} \quad (18.3)$$

همان‌طور که از شکل نیمه‌گسسته معادله (۱۶.۳) می‌بینید، عملگر دیفرانسیل شامل جمله مستقل از زمان است. با استفاده از طرح تفاضل دونقطه‌ای بر روی معادله (۱۶.۳) عبارت

$$\left(\frac{\mathbf{C}}{\Delta t} + \theta \bar{\mathbf{K}}_{t+\Delta t} \right) \mathbf{T}_{t+\Delta t} = \left(\frac{\mathbf{C}}{\Delta t} - (1-\theta) \bar{\mathbf{K}}_t \right) \mathbf{T}_t + \theta \bar{\mathbf{F}}_{t+\Delta t} + (1-\theta) \bar{\mathbf{F}}_t, \quad (19.3)$$

حاصل می‌شود که θ در شرط $0 \leq \theta \leq 1$ صدق می‌کند. اگر $\theta = 0$ باشد، طرح تفاضل پسرو اوایلر است، یعنی:

$$\left(\mathbf{C} \frac{\mathbf{T}_{t+\Delta t} - \mathbf{T}_t}{\Delta t} \right) + \bar{\mathbf{K}}_t \mathbf{T}_t = \bar{\mathbf{F}}_t,$$

اگر $\theta = 1$ باشد، طرح تفاضل پیشرو اوایلر است که به صورت

$$\left(\mathbf{C} \frac{\mathbf{T}_{t+\Delta t} - \mathbf{T}_t}{\Delta t} \right) + \bar{\mathbf{K}}_{t+\Delta t} \mathbf{T}_{t+\Delta t} = \bar{\mathbf{F}}_{t+\Delta t},$$

بدست می‌آید. اگر $\theta = 1/2$ باشد، طرح کرانک نیکلسون^{۱۰} است که به شکل

$$\left(\mathbf{C} \frac{\mathbf{T}_{t+\Delta t} - \mathbf{T}_t}{\Delta t} \right) + \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{K}}_{t+\Delta t} \mathbf{T}_{t+\Delta t} + \bar{\mathbf{K}}_t \mathbf{T}_t) = \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{F}}_{t+\Delta t} + \bar{\mathbf{F}}_t),$$

بیان می‌شود. اگر $\theta = 2/3$ باشد، طرح گالرکین نامیده و به صورت

$$\left(\mathbf{C} \frac{\mathbf{T}_{t+\Delta t} - \mathbf{T}_t}{\Delta t} \right) + \left(\frac{2}{3} \bar{\mathbf{K}}_{t+\Delta t} \mathbf{T}_{t+\Delta t} + \frac{1}{3} \bar{\mathbf{K}}_t \mathbf{T}_t \right) = \left(\frac{2}{3} \bar{\mathbf{F}}_{t+\Delta t} + \frac{1}{3} \bar{\mathbf{F}}_t \right).$$

تعریف می‌شود.

برای حل معادله (۱۶.۳) از روش کرانک نیکلسون به شکل

$$\left(\mathbf{C} + \frac{1}{2} \mathbf{K} \Delta t \right) \mathbf{T}_{t+\Delta t} = \frac{1}{2} (\mathbf{F} \Delta t) + \left(\mathbf{C} - \frac{1}{2} \mathbf{K} \Delta t \right) \mathbf{T}_t. \quad (20.3)$$

استفاده می‌کنیم [۱۰].

با فرض این‌که ماتریس‌های \mathbf{C} ، \mathbf{K} و بردار \mathbf{F} معلوم باشند باید در هر زمان t مشتق $\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t}$ را با فرمول پیشروی

$$\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t}(t) = \frac{(\mathbf{T}_{t+\Delta t} - \mathbf{T}_t)}{\Delta t},$$

تقریب بزنیم. با جایگذاری در معادله (۱۸.۳) به فرمول (۲۰.۳) می‌رسیم. برای حل آن ابتدا فرض می‌کنیم $t = 0$ و سمت راست را به کمک شرط اولیه $T(x, y, 0) = T_0(x, y)$ تشکیل می‌دهیم و با حل دستگاه معادلات، بردار \mathbf{T} در زمان Δt را بدست می‌آوریم. به کمک این بردار (با انتقال آن به سمت راست معادله (۲۰.۳)) با حل یک دستگاه دیگر، با فرض $t = \Delta t$ جواب را در $t = t + \Delta t$ بدست

^۹Traditional Two-Point Difference Technique

^{۱۰}Crank-Nicolson

می‌آوریم. البته دقت کنید که در هر بار تکرار، ماتریس ضرایب یعنی $\frac{K}{\Delta t} + \frac{C}{\Delta t}$ ثابت است و فقط سمت راست آن تغییر می‌کند پس برای کاهش هزینه محاسبات از تجزیه LU استفاده می‌کنیم.

۳.۳ تقریب کمترین مربعات متحرک

روش تقریب کمترین مربعات متحرک، یکی از روش‌های تقریب مناسب برای محاسبه جواب در معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی می‌باشد. این روش از مرتبه هموار و دقت مناسبی برخوردار است. در این روش به جای حل یک دستگاه معادلات بزرگ، چندین دستگاه معادلات کوچک حل می‌شوند. تقریب کمترین مربعات متحرک اولین بار در نظریه تقریب توسط لانکاستر^{۱۱} برای تقریب رویه‌های چندبعدی معرفی شد [۳۴]. بعدها این روش به‌طور گسترده در بسیاری از روش‌های بدون مش مانند روش گالرکین بدون مش، پترو گالرکین منطقه‌ای بدون مش، روش نقاط متناهی و ... برای ساخت توابع شکل بکار گرفته شد [۱۹].

تابع اسکالر $u(x)$ در دامنه Ω را بررسی کنید. تقریب کمترین مربعات متحرک $u(x)$ در نقطه x به صورت

$$u^h(x) = \sum_{j=1}^m p_j(x) a_j(x) = \mathbf{p}^T(x) \mathbf{a}(x), \quad (21.3)$$

تعریف می‌شود. که $\mathbf{p}(x)$ تابع پایه در مختصات $\mathbf{x}^T = [x, y]$ در مساله دوبعدی و m تعداد تابع پایه است. تابع پایه $\mathbf{p}(x)$ اغلب از مثلث پاسکال ساخته می‌شود. در معادله (۲۱.۳)، بردار ضرایب $\mathbf{a}(x)$ به شکل

$$\mathbf{a}^T(x) = \{ a_1(x) \quad a_2(x) \quad \dots \quad a_m(x) \},$$

بیان می‌شود. توجه کنید که بردار ضرایب $\mathbf{a}(x)$ در معادله (۲۱.۳) تابعی از x است. ضرایب \mathbf{a} با مینیمم‌سازی تابع وزن در نرم L_2 به صورت

$$J = \sum_{i=1}^n \widehat{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) [\mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i) \mathbf{a}(x) - u_i]^2. \quad (22.3)$$

است که n تعداد گره‌ها در محل دامنه x برای تابع وزن $\widehat{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \neq 0$ و پارامتر گره‌ای از u در $\mathbf{x} = \mathbf{x}_i$ است. معادله (۲۲.۳) تابع مانده وزنی است که با استفاده از مقادیر وزنی و پارامترهای گره‌ای از تابع میدان مجهول ساخته شده است. چون تعداد گره‌ها، n ، که در تقریب کمترین مربعات متحرک استفاده شده است بیشتر از تعداد ضرایب مجهول، m ، است، تابع تقریب u^h در طول تمام مقادیر گره‌ای عبور نمی‌کند.

ایستایی J بر حسب $\mathbf{a}(x)$ به صورت

$$\partial J / \partial \mathbf{a} = 0.$$

^{۱۱}Lancaster

است که منجر به رابطه خطی

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{U}_s. \quad (23.3)$$

می‌شود. \mathbf{U}_s برداری است که پارامترهای گره‌ای تابع میدان را برای کل گره‌ها در دامنه حامی جمع‌آوری می‌کند.

$$\mathbf{U}_s = \{ u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_n \}^T,$$

و $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ ماتریس گشتاور وزنی نامیده می‌شود که به صورت

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \widehat{W}_i(\mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x}_i)\mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i),$$

تعریف می‌شود که

$$\widehat{W}_i(\mathbf{x}) = \widehat{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i).$$

برای مساله دوبعدی و استفاده از پایه خطی ($m = 3$)، ماتریس متقارن 3×3 است که به صورت

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{3 \times 3}(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^n \widehat{W}_i(\mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x}_i)\mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i) \\ &= \widehat{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ x_1 & x_1^2 & x_1 y_1 \\ y_1 & x_1 y_1 & y_1^2 \end{bmatrix} + \widehat{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2) \begin{bmatrix} 1 & x_2 & y_2 \\ x_2 & x_2^2 & x_2 y_2 \\ y_2 & x_2 y_2 & y_2^2 \end{bmatrix} + \\ &\dots + \widehat{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) \begin{bmatrix} 1 & x_n & y_n \\ x_n & x_n^2 & x_n y_n \\ y_n & x_n y_n & y_n^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \widehat{W}_i & \sum_{i=1}^n x_i \widehat{W}_i & \sum_{i=1}^n y_i \widehat{W}_i \\ \sum_{i=1}^n x_i \widehat{W}_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \widehat{W}_i & \sum_{i=1}^n x_i y_i \widehat{W}_i \\ \sum_{i=1}^n y_i \widehat{W}_i & \sum_{i=1}^n x_i y_i \widehat{W}_i & \sum_{i=1}^n y_i^2 \widehat{W}_i \end{bmatrix}_{(3 \times 3)}. \end{aligned}$$

بیان می‌شود. ماتریس \mathbf{B} در معادله (۲۳.۳) به شکل

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \left[\widehat{W}_1(\mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x}_1) \quad \widehat{W}_2(\mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x}_2) \quad \dots \quad \widehat{W}_n(\mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x}_n) \right],$$

تعریف می‌شود که \mathbf{B} ماتریسی $3 \times n$ است که به صورت

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{3 \times n}(\mathbf{x}) &= \left[\widehat{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \quad \widehat{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2) \begin{bmatrix} 1 \\ x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad \dots \quad \widehat{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) \begin{bmatrix} 1 \\ x_n \\ y_n \end{bmatrix} \right] \\ &= \begin{bmatrix} \widehat{W}_1 & \widehat{W}_2 & \dots & \widehat{W}_n \\ x_1 \widehat{W}_1 & x_2 \widehat{W}_2 & \dots & x_n \widehat{W}_n \\ y_1 \widehat{W}_1 & y_2 \widehat{W}_2 & \dots & y_n \widehat{W}_n \end{bmatrix}_{(3 \times n)}. \end{aligned}$$

بیان می‌شود. با حل معادله (۲۳.۳) برای $a(x)$ داریم:

$$a(x) = A^{-1}(x)B(x)U_s. \quad (24.3)$$

با جایگذاری معادله بالا در (۲۱.۳)، رابطه

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x)u_i = \Phi^T(x)U_s.$$

حاصل می‌شود که $\Phi(x)$ بردار تابع شکل کمترین مربعات متحرک بر اساس n گره در دامنه حامی نقطه x است و می‌توان به صورت

$$\Phi^T(x) = \{ \phi_1(x) \quad \phi_2(x) \quad \cdots \quad \phi_n(x) \}_{(1 \times n)} = \underbrace{p^T(x)}_{1 \times 3} \underbrace{A^{-1}(x)}_{3 \times 3} \underbrace{B(x)}_{3 \times n}, \quad (25.3)$$

نوشت. تابع شکل $\phi_i(x)$ برای گره i ام به صورت

$$\phi_i(x) = \sum_{j=1}^m p_j(x)(A^{-1}(x)B(x))_{ji} = p^T(x)(A^{-1}B)_i. \quad (26.3)$$

تعریف می‌شود. در تقریب کمترین مربعات متحرک، ضریب a تابعی بر حسب x است که تقریب کمترین مربعات وزنی را به‌طور پیوسته می‌سازد. بنابراین تابع شکل کمترین مربعات متحرک در دامنه کلی پیوسته خواهد بود. در تقریب کمترین مربعات وزنی، توابع شکل قطعه‌وار خطی پیوسته هستند. تقریب کمترین مربعات وزنی را در شکلی خاص از تقریب کمترین مربعات متحرک می‌توان دید. برای راحتی در بدست آوردن مشتقات جزئی توابع شکل، معادله (۲۵.۳) به صورت

$$\Phi^T(x) = \gamma^T(x)B(x),$$

بازنویسی می‌شود که

$$\gamma^T = p^T A^{-1},$$

چون A متقارن است، $\gamma(x)$ از معادله بالا حاصل می‌شود:

$$A\gamma = p,$$

مشتقات جزئی γ را می‌توان با حل معادلات

$$A\gamma_{,i} = p_{,i} - A_{,i}\gamma$$

$$A\gamma_{,j} = p_{,j} - (A_{,j}\gamma_{,j} + A_{,j}\gamma_{,i} + A_{,ij}\gamma)$$

$$A\gamma_{,jk} = p_{,jk} - (A_{,i}\gamma_{,jkk} + A_{,j}\gamma_{,ik} + A_{,k}\gamma_{,j} + A_{,j}\gamma_{,k} + A_{,ik}\gamma_{,j} + A_{,jkk}\gamma_{,i} + A_{,jkk}\gamma).$$

بدست آورد که i, j و k بیانگر مختصات x و y هستند و کاما نشانگر مشتقات جزئی است. مشتقات جزئی تابع شکل Φ می‌توان با استفاده از عبارات زیر بدست آورد:

$$\begin{aligned}\Phi_{,i}^T &= \gamma_{,i}^T \mathbf{B} + \gamma^T \mathbf{B}_{,i} \\ \Phi_{,j}^T &= \gamma_{,j}^T \mathbf{B} + \gamma_{,i}^T \mathbf{B}_{,j} + \gamma_{,j}^T \mathbf{B}_{,i} + \gamma^T \mathbf{B}_{,j} \\ \Phi_{,jk}^T &= \gamma_{,jk}^T \mathbf{B} + \gamma_{,j}^T \mathbf{B}_{,k} + \gamma_{,ik}^T \mathbf{B}_{,j} + \gamma_{,jk}^T \mathbf{B}_{,i} \\ &\quad + \gamma_{,i}^T \mathbf{B}_{,jk} + \gamma_{,j}^T \mathbf{B}_{,ik} + \gamma_{,k}^T \mathbf{B}_{,j} + \gamma^T \mathbf{B}_{,jk}\end{aligned}$$

در تقریب کمترین مربعات متحرک دامنه حامی می‌تواند برای هر نقطه مبهم تشکیل شود. نقاط میدانی دامنه محمل، با استفاده از تقریب کمترین مربعات متحرک برای تابع مجهول در این نقطه بکار می‌رود. تعداد گره‌ها، n ، انتخاب شده در محمل دامنه، باید کافی باشد تا ماتریس \mathbf{A} در معادله (۲۴.۳) وارون پذیر باشد.

انتخاب n بستگی به توزیع گره‌ای و تعداد توابع پایه‌ای m دارد. برای بدست آوردن \mathbf{A}^{-1} و خوش‌وضع بودن \mathbf{A} ، باید $n \gg m$ باشد. متأسفانه هیچ تئوری برای بهترین مقدار n وجود ندارد و این باید با آزمایش عددی حاصل شود.

۱.۳.۳ انتخاب تابع وزن

معادله (۲۶.۳) نشان می‌دهد که پیوستگی تابع شکل تقریب کمترین مربعات متحرک تابع Φ از پیوستگی تابع پایه p و هموار بودن ماتریس‌های \mathbf{A} و \mathbf{B} پیروی می‌کند و همچنین به هموارسازی تابع وزن نیز وابسته است. بنابراین تابع وزن نقش مهمی در اجرای تقریب کمترین مربعات متحرک ایفا می‌کند. محاسبه تابع وزن w در ساخت توابع شکل ضروری است. تابع وزن باید خواص زیر را دارا باشد [۲۳]:

۱. غیر منفی باشد.

۲. دارای محمل فشرده باشد.

۳. پیوسته و مشتق‌پذیر باشد.

توابع وزن متفاوتی برای تقریب کمترین مربعات متحرک پیشنهاد شده‌اند. برای مثال توابع نمایی، مخروطی، اسپلاین، گاوسی و کسری هستند. از آنجایی که تاکنون هیچ اثبات ریاضی دقیقی برای تعیین نوع تابع وزن مناسب در دسترس نمی‌باشد، انتخاب تابع وزن دارای گستره انتخاب وسیعی است. مطالعه مقایسه سرعت همگرایی خطا در توابع وزن مختلف، در مقالات زیادی انجام شده است ولی تحقیقات بیشتری در این موضوع مورد نیاز است.

در مطالعات اخیر، $\widehat{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$ همیشه برحسب دارا بودن ویژگی‌های زیر انتخاب می‌شوند:

$$\widehat{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) > 0 \quad \bullet$$

- $\widehat{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) = 0$ خارج محمل دامنه.
- $\widehat{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$ به طور یکنواخت از نقطه \mathbf{x} کاهش می یابد.
- $\widehat{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$ روی مرز Ω_s هموار است.

انتخاب تابع وزن دلخواه می باشد که اغلب از توابع نمایی و توابع اسپلاین استفاده می شود. رایج ترین توابع وزن در زیر آمده است:

۱. تابع اسپلاین درجه سه.

$$\widehat{W}_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} 2/3 - 4\bar{r}_i^2 + 4\bar{r}_i^3, & \bar{r}_i \leq 0.5 \\ 4/3 - 4\bar{r}_i + 4\bar{r}_i^2 - 4/3\bar{r}_i^3, & 0.5 < \bar{r}_i \leq 1 \\ 0, & \bar{r}_i > 1 \end{cases} \quad (27.3)$$

که دارای پیوستگی مرتبه دوم می باشد.

۲. تابع اسپلاین درجه چهارم.

$$\widehat{W}_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 - 6\bar{r}_i^2 + 8\bar{r}_i^3 - 3\bar{r}_i^4, & \bar{r}_i \leq 1 \\ 0, & \bar{r}_i > 1 \end{cases} \quad (28.3)$$

که دارای پیوستگی مرتبه سوم می باشد.

۳. تابع نمایی.

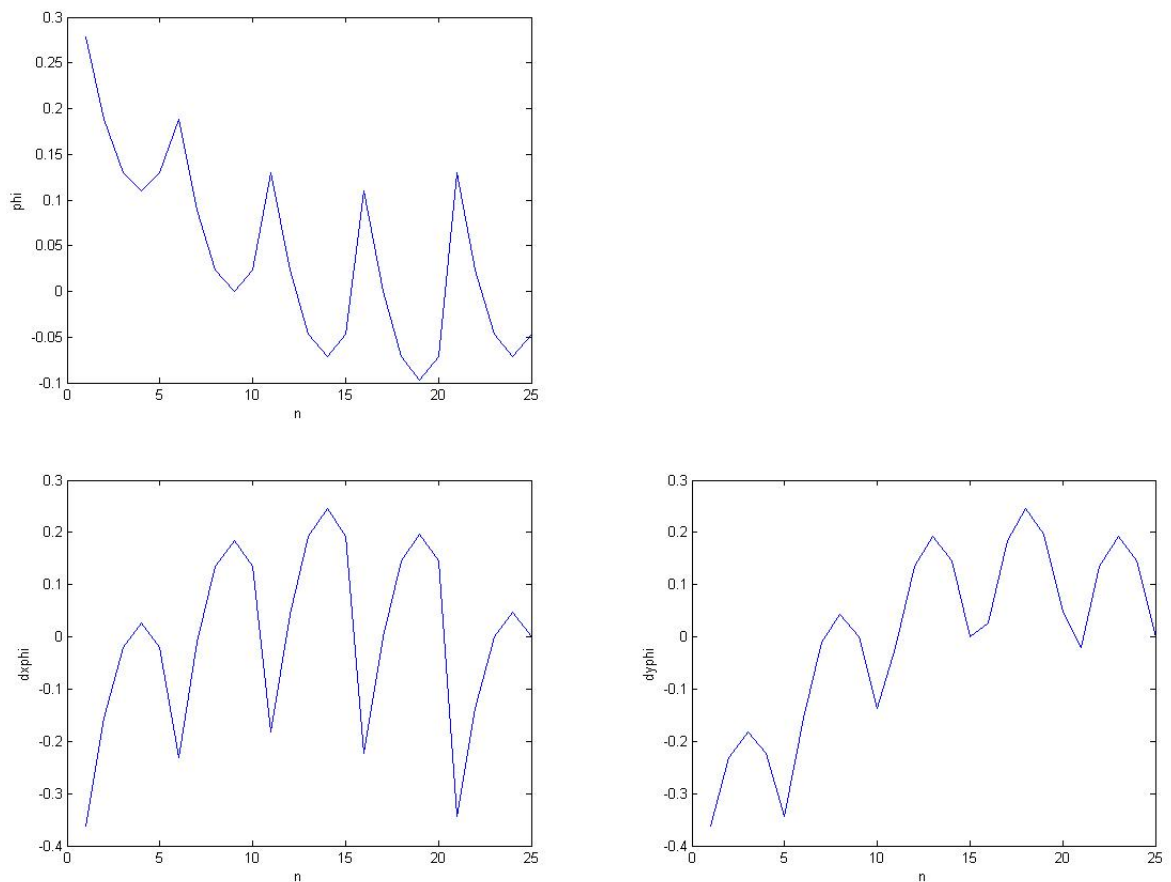
$$\widehat{W}_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} e^{-(\bar{r}_i/\alpha)^2}, & \bar{r}_i \leq 1 \\ 0, & \bar{r}_i > 1 \end{cases} \quad (29.3)$$

که α ثابت پارامتر شکل است. و

$$\bar{r}_i = \frac{d_i}{r_w} = \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|}{r_w}, \quad (30.3)$$

که $d_i = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|$ فاصله بین گره \mathbf{x}_i تا نقطه \mathbf{x} می باشد و r_w اندازه محمل دامنه برای تابع وزن است.

نکته: توابع شکل تعیین شده با روش کمترین مربعات متحرک دارای ویژگی یگانگی مجموع، پیوستگی و فاقد خاصیت دلتای کرونگر هستند [۲۲].



شکل ۶.۳: تابع شکل روش کمترین مربعات متحرک در نقطه $(0.5, 0.5)$ برای $\alpha, \beta = 0.3$ و $m = 1$.

۴.۳ فرمول‌بندی مساله جریان گرمای ناپایدار با روش بدون المان گالرکین

روش بدون المان گالرکین مشابه دیگر روش‌های بدون مش، تنها به مجموعه‌ای از گره‌های توزیع شده در دامنه مساله نیاز دارد و بی‌نیاز از ایجاد اتصالات بین گره‌ها است. ارتباط بین گره‌ها طبق تابع وزن گره‌ای که محمل فشرده نام دارد، تعریف می‌شود. منظور از محمل فشرده این است که تابع وزن، برای هر گره تنها در ناحیه اطراف خود که ناحیه تاثیر گره نامیده می‌شود، مقدار می‌گیرد. برای ساختن توابع شکل در روش بدون المان گالرکین، معمولا از تقریب کمترین مربعات متحرک استفاده می‌شود. تقریب کمترین مربعات متحرک مبتنی بر سه مولفه می‌باشد:

۱. تابع وزن با محمل فشرده متناظر با هر گره،

۲. توابع پایه‌ای چندجمله‌ای،

۳. مجموعه ضرایب که به موقعیت گره بستگی دارد.

بلیچکو با انجام دادن چندین آزمایش عددی و اعلام نتایج حاصل به سرعت همگرایی روش و مقایسه آن با روش عناصر متناهی اشاره کرد. او نشان داد که نامنظم بودن گره‌ها در دامنه مساله بر روی اعمال روش تاثیر نخواهد داشت. به این ترتیب این روش‌ها برای حل طیف وسیعی از مسایل خطی و غیرخطی الاستیک در حالت دوبعدی و سه‌بعدی، مسایل ساختارهای صفحه و پوسته و نیز مسایل الکترومغناطیس به کار رفت. تمامی کاربردهای این روش و ترکیب آن با روش‌های دیگر و بهبود آن مثلا در زمینه انتگرال‌گیری عددی، گواه بر این مطلب است که کم‌کم روش بدون المان گالرکین به عنوان روشی کارا و مناسب در حوزه محاسبات مکانیکی و نیز در مسایل گسترش شکاف و ... کاربرد گسترده‌ای خواهد داشت. برای این‌که دید کلی از روش داشته باشیم، بهتر است به‌طور خلاصه مراحل این روش را بیان کنیم. در این روش:

۱. دامنه مساله با تعدادی از گره‌های پراکنده نمایش داده می‌شود.
۲. تقریب کمترین مربعات متحرک برای ساخت توابع شکل بکار گرفته می‌شود.
۳. فرم ضعیف گالرکین روی معادله پیاده‌سازی شده و توسط تقریب کمترین مربعات متحرک، معادله گسسته‌سازی می‌شود.
۴. فرم ماتریسی مساله بدست می‌آید.
۵. برای محاسبه انتگرال‌ها، دامنه مساله سلول‌بندی می‌شود. برای حل مساله نیاز به محاسبه عبارت‌های انتگرالی است.

۱.۴.۳ معادله حاکم و شکل ضعیف گالرکین آن

معادله حاکم (۱.۱) را روی دامنه Ω و مرز Γ با شرایط مرزی (۲.۱)، (۳.۱) و (۴.۱) در نظر بگیرید. شکل ضعیف این معادله همانند فرمول‌بندی به روش درونیابی شعاعی منطقه‌ای به صورت

$$\int_{\Omega} \nabla w \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} + k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) d\Omega + \int_{\Omega} w \left(c\rho \frac{\partial T}{\partial t} - Q \right) d\Omega - \int_{\Gamma_f} w \cdot \bar{q} d\Gamma - \int_{\Gamma_r} w h (T_f - T) d\Gamma = 0. \quad (31.3)$$

است. تابع $\Pi(T)$ را می‌توان به صورت

$$\begin{aligned} \Pi(T) = & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[k_x \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + k_y \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 \right] d\Omega + \int_{\Omega} T \left(c\rho \frac{\partial T}{\partial t} - Q \right) d\Omega \\ & - \int_{\Gamma_f} T \cdot \bar{q} d\Gamma - \int_{\Gamma_r} h \left(T T_f - \frac{T^2}{2} \right) d\Gamma. \end{aligned} \quad (32.3)$$

تعریف کرد. فرض کنید $\delta\Pi = 0$ باشد، آنگاه:

$$\int_{\Omega} \delta T \cdot c\rho \cdot \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \delta(\mathbf{L}T)^T \tilde{k}(\mathbf{L}T) d\Omega - \int_{\Omega} \delta T \cdot Q d\Omega - \int_{\Gamma_r} \delta T \cdot \bar{q} d\Gamma - \int_{\Gamma_r} \delta T \cdot h(T_f - T) d\Gamma = 0, \quad (33.3)$$

که δ عملگر وردشی و \mathbf{L} عملگر دیفرانسیلی به صورت

$$\mathbf{L}(\cdot) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} (\cdot),$$

و

$$\tilde{k} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}.$$

هستند.

۲.۴.۳ گسسته‌سازی شکل ضعیف

برای گسسته‌سازی شکل ضعیف مساله، گره n_t را در دامنه Ω بکار می‌گیریم و اجتماع دامنه محمل فشرده Ω_I ، $I = 1, 2, \dots, n_t$ باید Ω را بپوشاند. از تابع تقریب کمترین مربعات متحرک، دمای $T(x, t)$ در نقطه دلخواه $x = (x, y)$ در دامنه Ω در زمان t به صورت زیر بیان می‌شود:

$$T(\mathbf{x}, t) = \sum_{I=1}^n \phi_I(\mathbf{x}) T_I(t) = \Phi(\mathbf{x}) \mathbf{T}, \quad (34.3)$$

که n تعداد گره‌ها در دامنه محمل فشرده شامل نقطه x است. به علاوه

$$\Phi(\mathbf{x}) = (\phi_1(\mathbf{x}), \phi_2(\mathbf{x}), \dots, \phi_n(\mathbf{x})),$$

و

$$\mathbf{T} = (T_1(t), T_2(t), \dots, T_n(t))^t,$$

که

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \sum_{I=1}^n \phi_I T_I(t) = \sum_{I=1}^n \phi_I(\mathbf{x}) \frac{\partial T_I(t)}{\partial t} = \Phi(\mathbf{x}) \dot{\mathbf{T}}, \quad (35.3)$$

به طوری که

$$\dot{\mathbf{T}} = \left(\frac{\partial T_1(t)}{\partial t}, \frac{\partial T_2(t)}{\partial t}, \dots, \frac{\partial T_n(t)}{\partial t} \right)^t,$$

داریم:

$$L\mathbf{T} = L \sum_{I=1}^n \phi_I(\mathbf{x}) T_I(t) = \sum_{I=1}^n \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \phi_I(\mathbf{x}) T_I(t) = \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{T}, \quad (36.3)$$

که

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = (\mathbf{B}_1(\mathbf{x}), \mathbf{B}_2(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{B}_n(\mathbf{x})),$$

و

$$\mathbf{B}_I(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \phi_{I,x}(\mathbf{x}) \\ \phi_{I,y}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}.$$

با جایگذاری معادلات (۳۴.۳)، (۳۵.۳) و (۳۶.۳) در معادله (۳۳.۳) داریم:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \delta[\Phi(\mathbf{x})\mathbf{T}]c\rho[\Phi(\mathbf{x})\dot{\mathbf{T}}]d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \delta[\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{T}]^t \tilde{k}[\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{T}]d\Omega \\ & - \int_{\Omega} \delta[\Phi(\mathbf{x})\mathbf{T}].Qd\Omega - \int_{\Gamma_r} \delta[\Phi(\mathbf{x})\mathbf{T}].\bar{q}d\Gamma \\ & - \int_{\Gamma_r} \delta[\Phi(\mathbf{x})\mathbf{T}].hT_f\Gamma \\ & + \int_{\Gamma_r} \delta[\Phi(\mathbf{x})\mathbf{T}]h[\Phi(\mathbf{x})\mathbf{T}]d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (۳۷.۳)$$

جمله اول (۳۷.۳) می‌توان به صورت

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \delta[\Phi(\mathbf{x})\mathbf{T}]c\rho[\Phi(\mathbf{x})\dot{\mathbf{T}}]d\Omega \\ & = \delta\mathbf{T}^T \left[\int_{\Omega} \Phi^T(\mathbf{x}).c\rho.\Phi(\mathbf{x})d\Omega \right].\dot{\mathbf{T}} \\ & = \delta\mathbf{T}^T.\mathbf{C}.\dot{\mathbf{T}}, \end{aligned} \quad (۳۸.۳)$$

نوشت که

$$\mathbf{C} = \int_{\Omega} \Phi^T(\mathbf{x}).c\rho.\Phi(\mathbf{x})d\Omega. \quad (۳۹.۳)$$

و $\mathbf{C} = [C_{IJ}]$ ماتریسی $n_t \times n_t$ است که:

$$C_{IJ} = \int_{\Omega} \Phi_I(\mathbf{x}).c\rho.\Phi_J(\mathbf{x})d\Omega.$$

جمله دوم معادله (۳۷.۳) به صورت

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \delta[\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{T}]^t \tilde{k}[\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{T}]d\Omega \\ & = \delta\mathbf{T}^T \left[\int_{\Omega} \mathbf{B}^T(\mathbf{x}).\tilde{k}.\mathbf{B}(\mathbf{x})d\Omega \right].\mathbf{T} \\ & = \delta\mathbf{T}^T.\mathbf{K}.\mathbf{T}, \end{aligned} \quad (۴۰.۳)$$

نوشته می‌شود که

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T(\mathbf{x}).\tilde{k}.\mathbf{B}(\mathbf{x})d\Omega. \quad (۴۱.۳)$$

و $\mathbf{K} = [K_{IJ}]$ ماتریس $n_t \times n_t$ است به طوری که:

$$K_{IJ} = \int_{\Omega} \left[k_i \frac{\partial \Phi_I}{\partial x} \frac{\partial \Phi_J}{\partial x} + k_y \frac{\partial \Phi_I}{\partial y} \frac{\partial \Phi_J}{\partial y} \right] d\Omega. \quad (۴۲.۳)$$

جمله سوم معادله (۳۷.۳) می‌توان به صورت

$$\int_{\Omega} \delta[\Phi(\mathbf{x})\mathbf{T}].Qd\Omega = \delta\mathbf{T}^T \int_{\Omega} \Phi^T.Qd\Omega = \delta\mathbf{T}^T.\mathbf{F}^{(1)}, \quad (۴۳.۳)$$

نوشت که

$$\mathbf{F}^{(1)} = \left(f_1^{(1)}(t), f_2^{(1)}(t), \dots, f_n^{(1)}(t) \right)^T, \quad (44.3)$$

$$f_I^{(1)}(t) = \int_{\Omega} \Phi_I(\mathbf{x}) \cdot Q d\Omega. \quad (45.3)$$

جمله چهارم معادله (۳۷.۳) به شکل

$$\int_{\Gamma_r} \delta[\Phi(\mathbf{x})\mathbf{T}] \cdot \bar{q} d\Gamma = \delta\mathbf{T}^T \int_{\Gamma_r} \Phi^T \cdot \bar{q} d\Gamma = \delta\mathbf{T}^T \cdot \mathbf{F}^{(2)}, \quad (46.3)$$

نوشته می‌شود که

$$\mathbf{F}^{(2)} = \left(f_1^{(2)}(t), f_2^{(2)}(t), \dots, f_n^{(2)}(t) \right)^T,$$

$$f_I^{(2)}(t) = \int_{\Gamma_r} \Phi_I(\mathbf{x}) \cdot \bar{q} d\Gamma.$$

جمله پنجم معادله (۳۷.۳) می‌توان به صورت

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_r} \delta[\Phi(\mathbf{x})\mathbf{T}] \cdot hT_f d\Gamma \\ = \delta\mathbf{T}^T \int_{\Gamma_r} \Phi^T \cdot hT_f d\Gamma \\ = \delta\mathbf{T}^T \cdot \mathbf{F}^{(3)}, \end{aligned} \quad (47.3)$$

نوشت که

$$\mathbf{F}^{(3)} = \left(f_1^{(3)}(t), f_2^{(3)}(t), \dots, f_n^{(3)}(t) \right)^T,$$

$$f_I^{(3)}(t) = \int_{\Gamma_r} \Phi_I(\mathbf{x}) \cdot hT_f d\Gamma.$$

جمله ششم معادله (۳۷.۳) به صورت

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_r} \delta[\Phi(\mathbf{x})\mathbf{T}] h[\Phi(\mathbf{x})\mathbf{T}] d\Gamma \\ = \delta\mathbf{T}^T \left[\int_{\Gamma_r} \Phi^T(\mathbf{x}) h \Phi(\mathbf{x}) d\Gamma \right] \mathbf{T} \\ = \delta\mathbf{T}^T \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{T}. \end{aligned} \quad (48.3)$$

است که $\mathbf{H} = [H_{IJ}]$ ماتریس $n_t \times n_t$ ، به طوری که

$$H_{IJ} = \int_{\Gamma_r} \Phi_I(\mathbf{x}) \cdot h \cdot \Phi_J(\mathbf{x}) d\Gamma.$$

با جایگزینی معادلات (۳۸.۳)، (۴۰.۳)، (۴۳.۳)، (۴۶.۳)، (۴۷.۳) و (۴۸.۳) در معادله (۳۷.۳)

داریم:

$$\delta\mathbf{T}^T \cdot \left(\mathbf{C}\dot{\mathbf{T}} + \mathbf{K}\mathbf{T} + \mathbf{H}\mathbf{T} - \mathbf{F}^{(1)} - \mathbf{F}^{(2)} - \mathbf{F}^{(3)} \right) = 0. \quad (49.3)$$

چون δT^T دلخواه است، داریم:

$$C\dot{T} + (K + H)T = F, \quad (50.3)$$

که

$$F = F^{(1)} + F^{(2)} + F^{(3)}.$$

اکنون معادله (۳۳.۳) به معادله دیفرانسیل معمولی (۵۰.۳) گسسته‌سازی می‌شود که زمان تنها متغیر آن است. روش طرح تفاضلات دو نقطه‌ای رایج برای گسسته‌سازی زمان انتخاب می‌شود که در این جا از روش کرانک نیکلسون استفاده شده است:

$$\left(C + \frac{\Delta t(K + H)}{2} \right) T_{n+1} = \left(C - \frac{\Delta t(K + H)}{2} \right) T_n + \frac{\Delta t(F_{n+1} + F_n)}{2}. \quad (51.3)$$

که

$$T_{n+1} = T((n + 1)\Delta t), \quad T_n = T(n\Delta t),$$

$$F_{n+1} = F((n + 1)\Delta t), \quad F_n = F(n\Delta t).$$

فصل ۴

حل مسایل جریان گرمای ناپایدار با روش‌های بدون مش بهبودیافته

در روش عناصر متناهی، شرایط مرزی دیریکله می‌تواند به‌طور مستقیم در گره‌ها اعمال شود زیرا توابع شکل در روش عناصر متناهی درونیاب هستند و نتایجی که از این طریق بدست می‌آیند در شرط‌های سازگاری مرزهای دیریکله صدق می‌کنند. روش‌های بدون مش برخلاف روش عناصر متناهی از توابع شکلی استفاده می‌کنند که به وسیله تقریب کمترین مربعات متحرک ساخته می‌شوند، بنابراین در خاصیت دلتای کرونکر صدق نمی‌کنند. شرایط مرزی دیریکله به‌طور مستقیم در مقادیر گره‌ای اعمال می‌شوند که دیگر برای روش بدون مش برپایه تقریب کمترین مربعات متحرک معتبر نیست و اعمال شرایط مرزی دیریکله به راهکارهای اضافه‌تری نیاز دارد. روش‌هایی که برای حل این مشکل گسترش پیدا کرده‌اند را می‌توان در سه رده زیر دسته‌بندی کرد [۴۵]:

۱. اصلاح توابع شکل به منظور تحمیل مستقیم شرایط مرزی دیریکله.
۲. ترکیب روش عناصر متناهی با روش بدون مش به‌طوری‌که در نزدیکی مرزهای دیریکله روش عناصر متناهی بکار گرفته شود.
۳. اصلاح فرم ضعیف به منظور شامل شدن عبارت موثر در طول مرزهای دیریکله.

در این فصل به بیان دو روش بدون مش بهبودیافته می‌پردازیم که از تابع پله‌ای هوی‌ساید به عنوان تابع تست استفاده می‌شود.

۱.۴ حل مسایل جریان گرمای ناپایدار با درونیابی نقطه‌ای اسپلاین صفحه‌ای نازک هموار

هموارسازی درونیابی اسپلاین صفحه‌ای نازک^۱ در این بخش با استفاده از روش تابع پنالتی بیان می‌شود که در آنالیز مسایل جریان گرمای ناپایدار بکار می‌رود. شکل ضعیف منطقه‌ای، برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی جریان گرمای ناپایدار استفاده می‌شود که به وسیله روش باقی‌مانده وزنی منطقه‌ای گسترش می‌یابد. در این روش تابع تست، تابع پله‌ای هوی‌ساید است. شرایط مرزی ضروری، با داشتن شرط دلتای کرونگر، می‌توانند مثل روش عناصر متناهی به عنوان توابع شکل پیاده سازی شوند.

۱.۱.۴ درونیابی نقطه‌ای با استفاده از اسپلاین صفحه‌ای نازک هموار

اسپلاین صفحه‌ای نازک

اسپلاین صفحه‌ای نازک، روش درونیابی و هموارسازی اسپلاین‌ها می‌باشد در نتیجه ممکن است در دو یا ابعاد بیشتری استفاده شود. اسپلاین صفحه‌ای نازک در طرح‌های مهندسی توسط دوچان^۲ با مینیمم‌سازی انتگرال معرفی شده است [۱۰]. این اسپلاین‌ها، تعمیمی از اسپلاین طبیعی مکعبی در یک بعد هستند. ساختار اسپلاین دارای مشتقات مرتبه دوم پیوسته است. مشتقات دوم در نقاط انتهایی صفر هستند. این مفهوم به خوبی در دوبعد بکار می‌رود. اسپلاین صفحه‌ای نازک، برانگیختن فیزیکی حالت درونیابی دوبعدی برای فضای داده‌ای دلخواه $(x_i, y_i, f(x_i, y_i))$ است. ساختار آن براساس انتخاب تابعی است که انتگرال را مینیمم‌سازی می‌کند و انرژی سطح رویه را بیان می‌نماید. در n بعد، ایده اسپلاین‌های صفحه‌ای نازک انتخاب تابع $f(x)$ است که به‌طور دقیق روی نقاط داده‌ای (x_i, y_i) که $y_i = f(x_i)$ درونیابی می‌شود و انرژی رویه به‌صورت زیر است:

$$E[f] = \int_{\mathbb{R}^n} |D^2 f|^2 dx,$$

$D^2 x$ ماتریسی با مشتقات جزئی مرتبه دوم f و $|D^2 f|^2$ مجموع مربعات عناصر ماتریس است. در حالت دوبعدی ابتدا باید تابع $f(x)$ را که با دقت نقاط داده‌ای (x_i, y_i) یعنی $y_i = f(x_i)$ را درونیابی می‌کند، انتخاب شود و تابع پنالتی تابع $J(f)$ را مینیمم‌سازی کند:

$$J(f) = \iint_{\mathbb{R}^2} (f_{xx}^2 + 2f_{xy}^2 + f_{yy}^2) dx dy.$$

در حقیقت با یک مساله بهینه‌سازی روبه‌رو هستیم که به‌صورت

$$\min J(f)$$

$$\text{s.t } h_j(f) = y_j - f(x_j) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, q.$$

^۱Smoothing Thin Plate Spline

^۲Duchon

بیان می‌شود. المان بی‌نهایت کوچک، $dx = dx_1 \cdots dx_n$ است که x_i مولفه‌های \mathbf{x} هستند. همچنین فرمول‌بندی مساله با پارامتر هموار، برای منظم‌سازی ممکن است. تابع f طوری انتخاب می‌شود که لازم نیست به‌طور دقیق همه نقاط داده‌ای درونیایی شوند اما مینیمم‌سازی انجام می‌گیرد:

$$E[f] = \sum_{i=1}^m |f(x_i) - y_i|^2 + \lambda \int_{\mathbb{R}^n} |D^2 f|^2 dx. \quad (1.4)$$

که $\lambda > 0$ پارامتر هموارسازی است که هدف انتخاب λ مناسب است که از روش معتبرسازی متقابل تعمیم‌یافته^۲ بدست می‌آید که در ادامه بیان می‌کنیم. مجموع نشان می‌دهد که m نقطه داده‌ای وجود دارد. مینیمم f ترکیب خطی از تابع گرین با آرگومان s برحسب x_i از نقاط داده‌ای است. همچنین چندجمله‌ای خطی به‌صورت

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m a_i G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) + \left(b_0 + \sum_{j=1}^n b_j x_j \right).$$

وجود دارد که x_j مولفه j ام متغیر \mathbf{x} است. \mathbf{y} را بردار $1 \times m$ برحسب مولفه مقادیر y_i, \mathbf{a} را بردار $1 \times m$ برحسب مولفه a_i و برداری $1 \times (n+1)$ برحسب مولفه b_j تعریف می‌کنیم. قید $y_i = f(x_i)$ منجر به دستگاه معادلات زیر می‌شود:

$$\mathbf{y} = \mathbf{R}_0 \mathbf{a} + \mathbf{P}_m \mathbf{b},$$

که \mathbf{R}_0 ماتریسی $m \times m$ با $R_{ij} = G(x_i, y_j)$ است و \mathbf{P}_m ماتریسی $m \times (n+1)$ است که سطر آن $(1, x_i)$ می‌باشد. شرط تعامد از آنالیز تابعی در [۲۵] می‌آید، به‌طوری‌که $\mathbf{P}_m^T \mathbf{a} = 0$. معادله دارای جواب زیر است:

$$\mathbf{a} = \mathbf{R}_0^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{P}_m \mathbf{b}),$$

$$\mathbf{b} = (\mathbf{P}_m^T \mathbf{R}_0^{-1} \mathbf{P}_m)^{-1} \mathbf{P}_m^T \mathbf{R}_0^{-1} \mathbf{y}.$$

که \mathbf{b} اول محاسبه شده است.

مینیمم انرژی خمش، $\mathbf{a}^T \mathbf{R}_0 \mathbf{a}$ می‌باشد. وقتی \mathbf{a} صفر است، شکل درجه دوم صفر می‌شود این حالتی است که f تابعی خطی باشد که منحنی آن ابرصفحه‌ای است که هیچ خمشی در سطح آن وجود ندارد.

۲.۱.۴ اسپلاین صفحه نازک هموار

درونیایی اسپلاین‌های صفحه‌ای هموار برای مشتق‌گیری از نقاط حساس است در نتیجه یکتایی در ساختار توابع شکل و مشتقات روش‌های بدون مش به آسانی اتفاق می‌افتد، بنابراین روش تابع پنالتی برای تغییر محدودیت مساله به مساله‌ای بدون محدودیت بکار می‌رود که شرط محدودیت براساس مساله بهینه سازی کم می‌شود.

^۲Generalized Cross-Validation

تنها این فرآیند نمی‌تواند تاثیر مشتق‌گیری را کم کند اما مشخصه‌های هموار کردن توابع شکل و مشتقات آن را بهبود می‌بخشد [۵].

روشی موثر و کارآمد برای تخمین مقدار بهینه هموارسازی داده بدست می‌آوریم و مشتقات آن را می‌توانیم با اسپلاین بهینه داده‌های دیفرانسیل تخمین بزنیم. مدل $y(t) = g(t) + \varepsilon(t)$ را برای $t \in [0, 1]$ بررسی می‌کنیم که $g(t)$ منحنی هموار و $\varepsilon(t)$ خطای فرآیند تصادفی است و

$$E\varepsilon(s)\varepsilon(t) = \sigma^2, \quad E\varepsilon(t) = 0, \quad s = t, = 0.$$

که

$$g \in W_{\tau}^{(m)} = \{f: f, f', \dots, f^{(m-1)}; f^{(m)} \in L_{\tau}[0, 1]\},$$

خطای واریانس σ^2 ممکن است مجهول باشد.

$y(t)$ برای $t = t_1, t_2, \dots, t_n$ که $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq 1$ است، بیان می‌شود. تخمین g به صورت $g_{n,\lambda}$ است که $g_{n,\lambda}$ جواب مساله زیر است:

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (f(t_j) - y_j)^2 + \lambda \int_0^1 (f^{(m)}(u))^2 du,$$

تابع $g_{n,\lambda}$ اسپلاین چندجمله‌ای هموار از درجه $2m - 1$ است. پارامتر λ سنجش بین جواب را کنترل می‌کند و با $\int_0^1 [f^{(m)}(u)]^2 du$ بیان می‌شود و داده به وسیله $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (f(t_j) - y_j)^2$ اندازه‌گیری می‌شود و بنابراین خطای مربع میانگین $R(\lambda, g) = R(\lambda)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$V(\lambda) = \frac{1}{n} \|(I - A(\lambda))y\|^2 / \left[\frac{1}{n} \text{trace}(I - A(\lambda)) \right]^2.$$

که $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^t$ و $A(\lambda)$ ماتریسی $n \times n$ است که در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$(g_{n,\lambda}(t_1), \dots, g_{n,\lambda}(t_n))^t = A(\lambda)y,$$

قضیه ۱.۱.۴ [۵] تخمین بی‌اثر از $ER(\lambda)$ با $\hat{R}(\lambda)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\hat{R}(\lambda) = \frac{1}{n} \|(I - A(\lambda))y\|^2 - \frac{\sigma^2}{n} \text{trace}(I - A(\lambda))^2 + \frac{\sigma^2}{n} \text{trace}A^2(\lambda),$$

که $ER\hat{R}(\lambda) = ER(\lambda)$.

بنابراین با مینیمم‌سازی $\hat{R}(\lambda)$ ، می‌توان λ مناسب انتخاب کرد. تخمین این نوع توسط مالاس^۴ پیشنهاد داده شد [۲۴]. نتیجه اصلی بدست آوردن تخمین مناسب برای مینیمم‌سازی $ER(\lambda)$ از داده‌ای است که به σ^2 نیازی ندارد. این تخمین، تخمین معتبرسازی متقابل تعمیم‌یافته می‌نامند که λ را برآورد می‌کند.

مینیمم‌سازی $V(\lambda)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$V(\lambda) = \frac{1}{n} \|(I - A(\lambda))y\|^2 / \left[\frac{1}{n} \text{trace}(I - A(\lambda)) \right]^2.$$

حال نشان خواهیم داد که تحت شرایط کلی روی g و روی دنباله مش $\{t_i\}_{i=1}^n = \{t_{in}\}_{i=1}^n$ که $n = 1, 2, \dots$ است، $EV(\lambda) - \sigma^2 \simeq ER(\lambda)$ برای همسایگی λ ، مینیمم‌سازی $ER(\lambda)$ وجود دارد.

^۴Mallows

قضیه ۲.۱.۴. [۵] برای $g \in W_2^{(m)}$ و شرایط مناسب روی دنباله مش‌های $\{t_{in}\}_{i=1}^n$ ، دنباله $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}(n)$ از مینیمسازی $EV(\lambda)$ با ویژگی زیر وجود دارد:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ER(\tilde{\lambda})}{\min ER(\lambda)} = 1.$$

این قضیه می‌گوید که خطای میانگین مربعات $\tilde{\lambda}$ منجر به مینیمسازی خطای مربعات میانگین وقتی $n \rightarrow \infty$ می‌شود.

اکنون منشا تخمین معتبرسازی متقابل تعمیم‌یافته را بررسی می‌کنیم. نظریه شهودی معتبرسازی متقابل، تقریباً ساده است و به صورت زیر می‌آید.

فرض کنید $g_{n,\lambda}^{[k]}$ اسپلاین هموار با استفاده از نقاط داده به جز k باشد، قابلیت $g_{n,\lambda}^{[k]}$ برای تولید نقطه y_k به عنوان اندازه خوب برای λ پیش‌بینی می‌شود. فرض کنید $g_{n,\lambda}^{[k]}$ تابع $f \in W_2^{(m)}$ باشد که عبارت زیر را مینیمسازی می‌کند:

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1, j \neq k}^n (f(t_j) - y_j)^2 + \lambda \int_0^1 (f^{(m)}(u))^2 du,$$

و فرض کنید

$$V_0(\lambda) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(g_{n,\lambda}^{[k]}(t_k) - y_k \right)^2.$$

تخمین معتبرسازی متقابل λ ، محوری تعریف می‌شود که $V_0(\lambda)$ را مینیمم کند.

آزمون مونت‌کارلو^۵ [۴۱] نشان می‌دهد که مینیمسازی $V_0(\lambda)$ ، تخمینی خوب برای مینیمسازی $R(\lambda)$ روی g و σ ایجاد می‌کند. نتایج تئوری وابسته به بهینه کردن مینیمم $V_0(\lambda)$ است. همچنین حالت خاص هم‌ارز با قیود g و $g_{n,\lambda}$ در $t_j = j/n$ برای $j = 1, 2, \dots, n$ بدست می‌آید که آن را حالت متقارن می‌نامیم.

توجه کنید که در حالت متقارن، تمام نقاط داده‌ای به‌طور متقارن رفتار می‌کنند که خطای پیش‌بینی در t_k مشابه هر t_j وزن دار است. در حالت کلی فرض می‌کنیم:

$$V(\lambda) = \sum_{k=1}^n \left(g_{n,\lambda}^{[k]}(t_k) - y_k \right)^2 w_k(\lambda), \quad (2.4)$$

که وزن‌های $w_k(\lambda)$ برای جبران فضای داده‌ای نامنظم و غیرتناوبی g هستند. اگر

$$w_k(\lambda) = \left[(1 - a_{kk}(\lambda)) / \frac{1}{n} \text{trace}(I - A(\lambda)) \right]^2,$$

که برای $k = 1, 2, \dots, n$ ، $\{a_{kk}(\lambda)\}$ المان قطری از $A(\lambda)$ باشند.

بنابراین می‌توان تابع پنالیتی متناظر با معادله (۱.۴) را به‌صورت زیر نوشت:

$$F(f, \lambda) = \frac{1}{q} \sum_{j=1}^q h_j^2(f) + \lambda J(f),$$

$$\min F(f, \lambda),$$

^۵Monte Carlo

که λ پارامتر هموارسازی ثابت است. اگر $\lambda = 0$ باشد، تابع f به دقت داده‌ها را درونیابی می‌کند. اگر λ بسیار بزرگ باشد، تابع f صفحه ماورایی را بدست می‌آورد. تابع هموار که در معادله (۱.۴) بیان شد، به صورت

$$E[f] = \int_{\mathbb{R}^2} \left(\sum_{i=1}^m |f(\mathbf{x}) - y_i|^2 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) + \lambda |D^2 f|^2 \right) dx,$$

بازنویسی می‌شود که $\delta(\mathbf{x})$ تابع دلتای دیراک می‌باشد. معادله دیفرانسیل اویلر-لاگرانژ به صورت

$$0 = \sum_{i=1}^m (f(\mathbf{x}) - y_i) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) + \lambda \Delta^2 f,$$

است که Δ^2 عملگر بای‌هارمونیک است. با استفاده از تابع گرین، جواب معادله دیفرانسیل به شکل

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m \frac{y_i - f(\mathbf{x}_i)}{\lambda} R(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) + \left(b_0 + \sum_{j=1}^n b_j x_j \right) = \sum_{i=1}^m w_i G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) + \left(b_0 + \sum_{j=1}^n b_j x_j \right). \quad (3.4)$$

می‌شود که x_j مولفه j ام بردار x است و

$$a_k = (y_k - f(x_k)) / \lambda,$$

که

$$y_k = f(x_k) + \lambda a_k.$$

معادله (۳.۴) در نقطه x_k به صورت

$$y_k = f(x_k) + \lambda a_k = \sum_{i=1}^m a_i R(x_k, x_i) + \left(b_0 + \sum_{j=1}^n b_j x_j^{(k)} \right) + \lambda a_k,$$

است که $a_j^{(k)}$ مولفه j ام x_k است. با نوشتن آن به فرم برداری و ماتریسی داریم:

$$y = (\mathbf{R}_0 + N\lambda\mathbf{I})\mathbf{a} + \mathbf{P}_m \mathbf{b} = \mathbf{u}, \quad (4.4)$$

که \mathbf{I} ماتریس مشخصه $m \times m$ است، معادله شرط تعامد به صورت

$$\mathbf{P}_m^T \mathbf{a} = 0, \quad (5.4)$$

است. روشی موثر و کارآمد برای تخمین مقدار بهینه هموارسازی داده بدست می‌آوریم [۱۰]. مشتقات را می‌توان از داده دیفرانسیل اسپلاین بهینه تخمین زد، که $R_i(x, y) = r_i^\eta$ و η پارامتر تابع شکل است و

r مسافت بین نقطه درونیاب x و گره x_i برای مساله دوبعدی به صورت

$$r = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2},$$

تعریف می‌شود. ماتریس‌های \mathbf{R}_0 و \mathbf{P}_m^T در زیر بیان شده است:

$$\mathbf{R}_0 = \begin{bmatrix} R_1(r_1) & R_2(r_1) & \cdots & R_q(r_1) \\ R_1(r_2) & R_2(r_2) & \cdots & R_q(r_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_1(r_q) & R_2(r_q) & \cdots & R_q(r_q) \end{bmatrix}_{q \times q},$$

$$\mathbf{P}_m^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_q \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_m(x_1) & p_m(x_2) & \cdots & p_m(x_q) \end{bmatrix}_{m \times q}$$

بردار ضرایب اسپلین صفحه‌ای نازک و بردار ضرایب چندجمله‌ای به صورت

$$\mathbf{a}^T = \{ a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n \}.$$

$$\mathbf{b}^T = \{ b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_n \}.$$

هستند.

۳.۱.۴ ساختار تابع شکل

با بررسی تابع $u(\mathbf{x})$ تعریف شده در دامنه Ω که با مجموعه‌ای از نقاط مجزای x_1, x_2, \dots, x_N گسسته‌سازی شده‌اند، مقادیر تابع گسسته‌سازی شده $u(x)$ به صورت

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n R_i(x) a_i + \sum_{j=1}^m P_j(x) b_j = \mathbf{R}^T(\mathbf{x}) \mathbf{a} + \mathbf{P}^T(\mathbf{x}) \mathbf{b}. \quad (۶.۴)$$

تعریف می‌شود که $R_i(x)$ تابع اسپلین صفحه‌ای نازک است. n تعداد گره در محمل منطقه‌ای دامنه در x ، $P_j(x)$ توابع پایه‌ای پاسکال در مختصات $x^T = [x, y]$ ، m تعداد توابع پایه‌ای چندجمله‌ای و a_i و b_i ثابت‌های درونیایی هستند [۱۰].

با ترکیب معادلات (۴.۴) و (۵.۴)، مجموعه‌ای از معادلات به شکل ماتریسی

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_0 + N\lambda \mathbf{I} & \mathbf{P}_m \\ \mathbf{P}_m^T & \circ \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \circ \end{Bmatrix}. \quad (۷.۴)$$

حاصل می‌شود. با حل دستگاه معادلات (۷.۴)، a و b به صورت زیر معین می‌شوند:

$$\mathbf{b} = \mathbf{S}_b \mathbf{u}, \quad \mathbf{a} = \mathbf{S}_a \mathbf{u},$$

$$\mathbf{S}_b = [\mathbf{P}_m^T (\mathbf{R}_0 + N\lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{P}_m]^{-1} \mathbf{P}_m^T (\mathbf{R}_0 + N\lambda \mathbf{I})^{-1},$$

$$\mathbf{S}_a = (\mathbf{R}_0 + N\lambda \mathbf{I})^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{P}_m \mathbf{S}_b),$$

معادله (۶.۴) را می‌توان به صورت

$$\begin{aligned} u^h(x) &= [\mathbf{R}^T(x) \mathbf{S}_a + \mathbf{P}^T(x) \mathbf{S}_b] \mathbf{u} \\ &= \Phi(x) \mathbf{u} = \sum_{k=1}^n \varphi_k(x) u_k, \end{aligned}$$

بازنویسی کرد که

$$\varphi_k(x) = \sum_{i=1}^n R_i(x) S_{aik} + \sum_{j=1}^m P_j(x) S_{bjk}.$$

مشتقات جزئی توابع شکل را می‌توان به آسانی به شکل

$$\phi_{k,x} = \frac{\partial \phi_k(x)}{\partial x} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial R_i}{\partial x} S_{aik} + \sum_{j=1}^m \frac{\partial p_j}{\partial x} S_{bjk},$$

$$\phi_{k,y} = \frac{\partial \phi_k(x)}{\partial y} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial R_i}{\partial y} S_{aik} + \sum_{j=1}^m \frac{\partial p_j}{\partial y} S_{bjk},$$

(۸.۴)

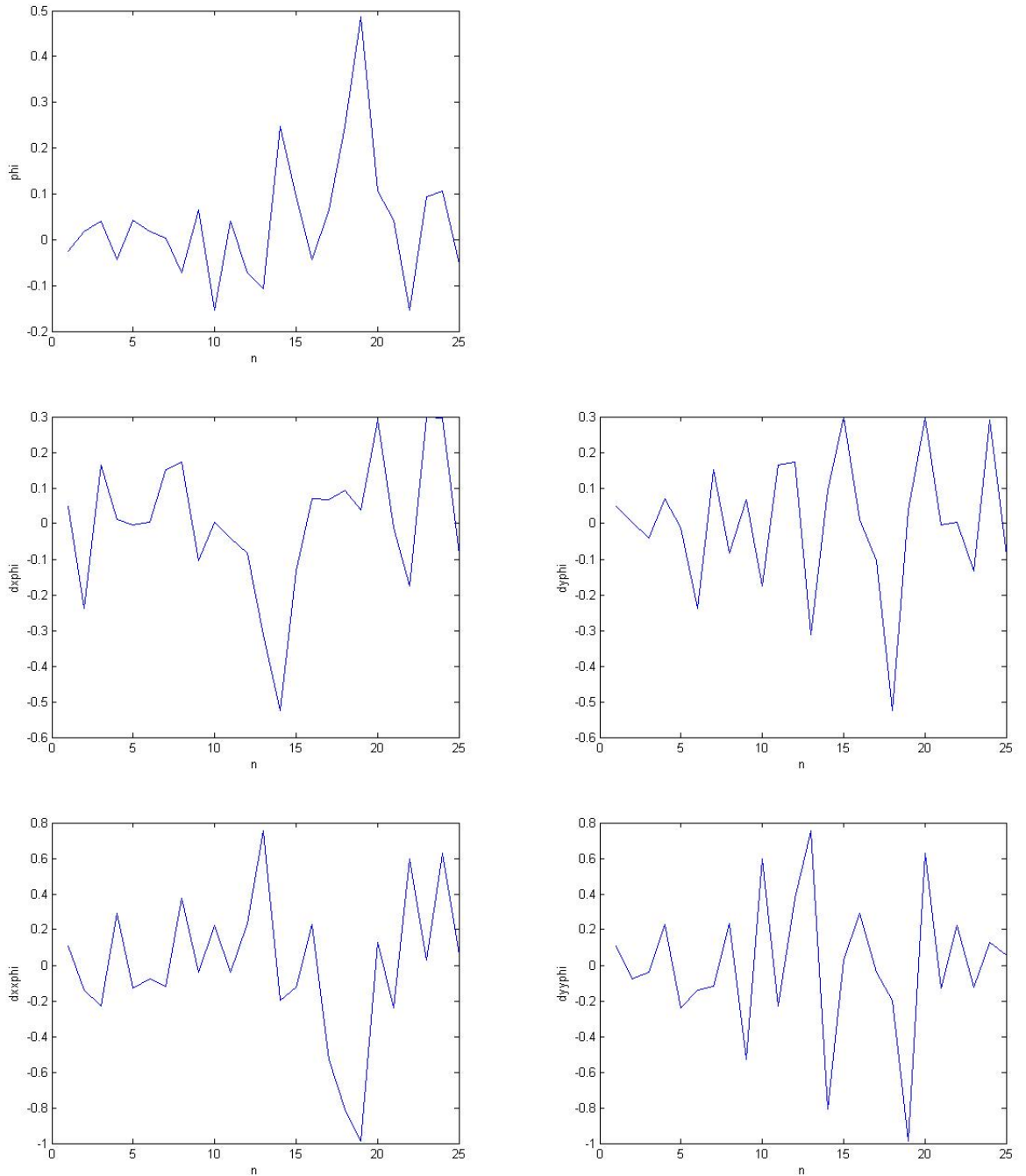
نوشت.

۴.۱.۴ پارامتر همبستگی بر حسب توابع شکل

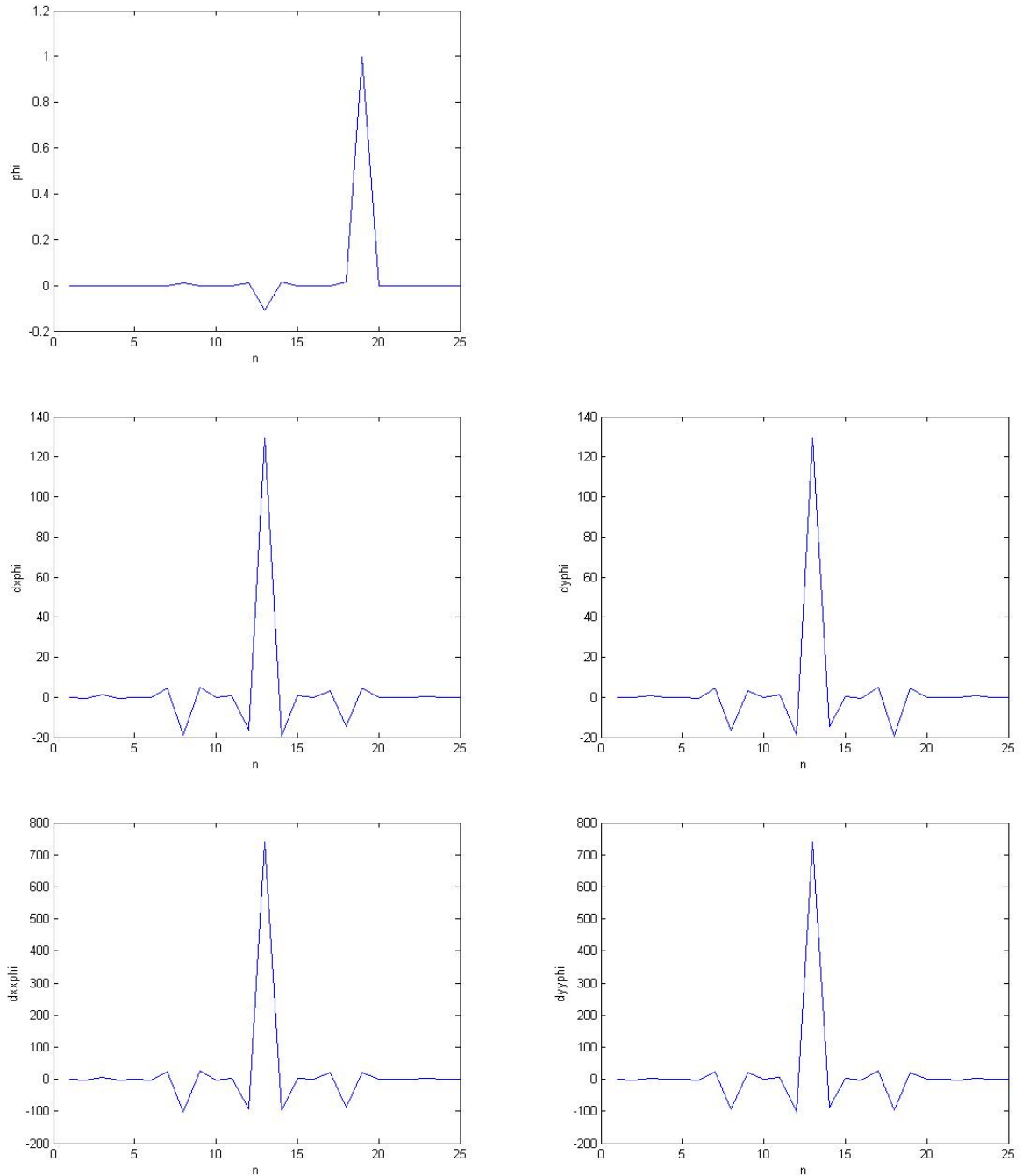
بررسی یک دامنه مستطیلی $\Omega = [-1, 1] \times [-1, 1]$ در دو بعد با ۲۵ گره (5×5) گره گسسته منظم است. η و λ پارامترهای همبستگی بر حسب توابع شکل هستند. با انتخاب $\eta = 3$ و $\lambda = 3/5 \times 10^{-4}$ تابع شکل و مشتقات مرتبه اول در نقطه $(0/5, 0/5)$ ارزیابی می‌شود. توابع شکل و مشتقات مرتبه اول نتیجه‌گیری شده از اسپلاین صفحه نازک در نقطه $(0/5, 0/5)$ وقتی $\eta = 6/001$ است، تخمین زده می‌شود.

جدول ۱.۴: مقادیر تابع شکل روش هموارسازی اسپالین صفحه نازک با $\eta = 3$ در نقطه $(0.5, 0.5)$.

$dy^2\phi$	$dx^2\phi$	$dy\phi$	$dx\phi$	ϕ	y	x	n
0.1091	0.1091	0.0480	0.0480	-0.0240	-1	-1	1
-0.0738	-0.1409	0.0038	-0.2371	0.0184	-0.5	-1	2
-0.0398	-0.2272	-0.0411	0.1651	0.0412	0	-1	3
0.2305	0.2943	0.0694	0.0130	-0.0426	0.5	-1	4
-0.2378	-0.1302	-0.0105	-0.0037	0.0418	1	-1	5
-0.1409	-0.0738	-0.2371	0.0038	0.0184	-1	-0.5	6
-0.1162	-0.1162	0.1508	0.1508	0.0047	-0.5	-0.5	7
0.2344	0.3763	-0.0841	0.1728	-0.0731	0	-0.5	8
-0.5304	-0.0369	0.0670	-0.1043	0.0658	0.5	-0.5	9
0.5957	0.2239	-0.1754	0.0052	-0.1535	1	-0.5	10
-0.2272	-0.0398	0.1651	-0.0411	0.0412	-1	0	11
0.3763	0.2344	0.1728	-0.0841	-0.0731	-0.5	0	12
0.7538	0.7538	-0.3127	-0.3127	-0.1062	0	0	13
-0.8097	-0.1959	0.0942	-0.5242	0.2469	0.5	0	14
0.0287	-0.1224	0.2990	-0.1330	0.0929	1	0	15
0.2943	0.2305	0.0130	0.0670	-0.0426	-1	0.5	16
-0.0369	-0.5304	-0.1043	0.0670	0.0658	-0.5	0.5	17
-0.1959	-0.8097	-0.5242	0.0942	0.2469	0	0.5	18
-0.9851	-0.9851	0.0388	0.0388	0.4873	0.5	0.5	19
0.6304	0.1277	0.2949	0.2910	0.1059	1	0.5	20
-0.1302	-0.2378	-0.0037	-0.0105	0.0418	-1	1	21
0.2239	0.5957	0.0052	-0.1754	-0.1535	-0.5	1	22
-0.1224	0.0287	-0.1330	0.2990	0.0929	0	1	23
0.1277	0.6304	0.2910	0.2949	0.1059	0.5	1	24
0.0567	0.0567	-0.0891	-0.0891	-0.0527	1	1	25



شکل ۱.۴: تابع شکل روش هموارسازی اسپلاین صفحه نازک با $\eta = 3$ در نقطه $(0.5, 0.5)$.



شکل ۲.۴: تابع شکل روش هموارسازی اسپالین صفحه نازک با $\eta = 6,001$ در نقطه $(0.5, 0.5)$.

۵.۱.۴ فرمول‌بندی روش درونیابی نقطه‌ای شعاعی منطقه‌ای

فرمول‌بندی این روش دقیقاً مشابه روش گفته شده در فصل ۳ برای روش درونیابی نقطه‌ای شعاعی است. معادله گسسته برای همه گره‌ها به صورت

$$C\dot{\Gamma}(t) + K\Gamma(t) = F(t), \quad (9.4)$$

حاصل می‌شود که

$$\begin{aligned} C_{IJ} &= \int_{\Omega_s} \rho c \phi_J(x) d\Omega, \\ K_{IJ} &= - \int_{\Gamma_{sI}} \left(k_x \frac{\partial \phi_J(x)}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial \phi_J(x)}{\partial y} n_y \right) d\Gamma \\ &\quad - \int_{\Gamma_{sV}} \left(k_x \frac{\partial \phi_J(x)}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial \phi_J(x)}{\partial y} n_y \right) d\Gamma + \int_{\Gamma_{sR}} h \phi_J(x) d\Gamma, \\ F_I &= \int_{\Omega_s} Q d\Omega + \int_{\Gamma_{sT}} \bar{q} d\Gamma + \int_{\Gamma_{sT}} h T_a d\Gamma. \end{aligned} \quad (10.4)$$

معادله (۹.۴)، معادله دیفرانسیل معمولی است که تنها متغیر آن، زمان است که با استفاده از روش کرانک-دنیکلسون (۲۰.۳) گسسته‌سازی زمان انجام می‌گیرد. برای حل انتگرال‌ها نیز از روش انتگرال‌گیری عددی گاوسی استفاده می‌شود.

۲.۴ حل مسایل جریان گرمای ناپایدار با درونیابی کرینجینگ متحرک

روش درونیابی بدون المان گالرکین توسط بلیچکو و همکارانش بیان شد [۲]. روش بدون المان گالرکین در سال‌های اخیر به دلیل انعطاف‌پذیری و سرعت همگرایی بالا در مسایل مقدار مرزی معروف شده است. مزیت کلیدی این روش این است که نیازی به اتصال المان‌ها ندارد و اگر گره‌ها نامنظم باشند، دقت کاهش نمی‌یابد. روش بدون المان گالرکین با تقریب کمترین مربعات متحرک امکان‌پذیر است. تقریب کمترین مربعات متحرک به عنوان وسیله‌ای برای درونیابی چندمتغیره استفاده می‌شود. این رفتار توسط لانکاستر^۶ و سالکاسکاس^۷ انجام شده است [۱۹]. تقریب کمترین مربعات متحرک دارای ویژگی دلتای کرونگر نمی‌باشد، یعنی $\phi_I(\mathbf{x}_J) \neq \delta_{IJ}$. ارایه فرمول‌بندی جدید روش درونیابی بدون المان گالرکین، این نقطه ضعف را با درونیابی کرینجینگ متحرک از بین می‌برد. بنابراین درونیابی کرینجینگ متحرک به جای تابع شکل ساخته شده با تقریب کمترین مربعات متحرک استفاده می‌شود. دو ویژگی اصلی درونیابی کرینجینگ متحرک

$$1. \text{ ویژگی دلتای کرونگر } \phi_I(\mathbf{s}_J) = \delta_{IJ}$$

^۶Lancaster

^۷Salkauskas

$$۲. ویژگی پایداری $\sum_I^n \phi_I(\mathbf{x}) = 1, \sum_I^n \phi_I(\mathbf{x})x_{Ii} = x_i$$$

است. کاربردهای کرینجینگ متحرک در طرح‌های مهندسی و بهینه‌سازی بیشمار دیده می‌شود [۳۲، ۳۵]. در این بخش، از روش درونیایی کرینجینگ متحرک به جای روش تقریب کمترین مربعات متحرک استفاده می‌شود. روش درونیایی کرینجینگ متحرک دارای ویژگی تابع دلتای کروکر است، در حالی که روش تقریب کمترین مربعات متحرک این ویژگی را ندارد. از این رو تابع پله‌ای هوی‌ساید به عنوان تابع شکل روی زیردامنه منطقه‌ای استفاده می‌شود.

۱.۲.۴ درونیایی کرینجینگ

تابع $u(\mathbf{x})$ در دامنه Ω را در نظر بگیرید. فرض کنید تقریب آن $u^h(\mathbf{x})$ باشد و همچنین فرض کنید گره‌ها به صورت s_1, \dots, s_n باشند، وقتی $s_i = x_i$ در یک بعد و $s_i = (x_i, y_i)$ در دو بعد تعریف شده باشد. مجموعه مقادیر تابعی u_1, \dots, u_n برای n گره در Ω در نظر بگیرید. کرینجینگ ترکیب خطی مدل برگشت به علاوه فاصله جبری است که به صورت زیر بیان می‌شود [۳۲]:

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_i^m a_i p_i(\mathbf{x}) + Z(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T \mathbf{a} + Z(\mathbf{x}). \quad (۱۱.۴)$$

توجه کنید که $p_i(\mathbf{x})$ می‌تواند هر تابعی غیرخطی از \mathbf{x} باشد. $p_i(\mathbf{x})$ تابعی معلوم بر حسب \mathbf{x} است (معمولا چندجمله‌ای). $Z(\mathbf{x})$ وقوع فرآیند تصادفی با میانگین صفر، واریانس σ^2 و کواریانس غیر صفر فرض می‌شود. $Z(\mathbf{x})$ انحراف موضعی ایجاد می‌کند، در نتیجه مدل کرینجینگ معادله (۱۱.۴) n گره را درونیایی می‌کند. ماتریس کواریانس $Z(\mathbf{x})$ در زیر آمده است:

$$\text{cov}\{Z(\mathbf{x}_i), Z(\mathbf{x}_j)\} = \sigma^2 \mathbf{R}[R(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)]. \quad (۱۲.۴)$$

در معادله (۱۲.۴)، σ^2 واریانس، $\mathbf{R}[R(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)]$ ماتریس همبستگی و $R(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$ تابع همبستگی بین هر دو گره \mathbf{x}_i و \mathbf{x}_j هستند. \mathbf{R} ماتریس متقارن $n \times n$ با عناصر قطری یک می‌باشد. بسیاری از توابع می‌توانند به عنوان تابع کورلاسیون $R(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$ استفاده شوند [۳۱]. ساده‌ترین نوع تابع همبستگی استفاده شده تابع گاوسی زیر است:

$$R(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = e^{-\theta r_{ij}^2}, \quad (۱۳.۴)$$

که

$$r_{ij} = \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|,$$

و $\theta > 0$ پارامتر همبستگی برای تنظیم مدل هستند. هر دو σ^2 و θ معلوم فرض شده است. مجموعه گره‌ای $\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ داده شده است و مقادیر تابعی در این گره‌ها $u = \{u(s_1), \dots, u(s_n)\}$ می‌باشد. با تخمین $u(\mathbf{x})$ در هر نقطه $x \in \Omega$ که x است، با پیشگوی خطی (چندجمله‌ای) سروکار داریم.

$$u^h(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T(\mathbf{x}) \mathbf{u} = \{c_1(\mathbf{x}), \dots, c_n(\mathbf{x})\} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix}. \quad (۱۴.۴)$$

با فرض $u^h(x)$ به عنوان تصادف، می‌توانیم خطای مربع میانگین^۸ از میانگین پیشگو را روی فرآیند تصادفی محاسبه کنیم. بنابراین بهترین خط ناریب پیشگویی شده^۹ با برداری $1 \times n$ بدست می‌آید که $c(x)$ به شکل زیر مینیمم‌سازی می‌شود [۳۱]:

$$\text{MSE}[u^h(\mathbf{x})] = E[\mathbf{c}^T(\mathbf{x})\mathbf{u} - u(\mathbf{x})]^2, \quad (15.4)$$

که

$$E[\mathbf{c}^T(\mathbf{x})\mathbf{u}] = E[u(\mathbf{x})].$$

که $E[X] = \int_{\Omega} X dx / \int_{\Omega} dx$ میانگین X است. برای اجرای بهترین خط ناریب پیشگویی شده در X ، از عبارت

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \begin{Bmatrix} p_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ p_m(\mathbf{x}) \end{Bmatrix}, \quad (16.4)$$

استفاده می‌کنیم که بردار $1 \times n$ از m تابع معلوم است. در (۱۱.۴) داریم:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1(s_1) & \cdots & p_m(s_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1(s_n) & \cdots & p_m(s_n) \end{bmatrix}, \quad (17.4)$$

ماتریسی $n \times m$ می‌باشد. مقادیر تابعی در مجموعه گره‌های $\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ ارزیابی شده به صورت

$$\mathbf{R}[R(s_i, s_j)] = \begin{bmatrix} 1 & R(s_1, s_2) & \cdots & R(s_1, s_n) \\ R(s_2, s_1) & 1 & \cdots & R(s_2, s_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R(s_n, s_1) & \cdots & R(s_n, s_{n-1}) & 1 \end{bmatrix}, \quad (18.4)$$

است که ماتریسی $n \times n$ از همبستگی بین Z در نقاط داده شده می‌باشد و

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}) = \begin{Bmatrix} R(s_1, \mathbf{x}) \\ \vdots \\ R(s_n, \mathbf{x}) \end{Bmatrix}, \quad (19.4)$$

بردار $1 \times n$ همبستگی بین نقاط داده شده و \mathbf{x} است. با این تعاریف معادله (۱۵.۴) و (۱۶.۴) منجر به مدل کرینجینگ

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\hat{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{r}^T(\mathbf{x})\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{u} - \mathbf{P}\hat{\boldsymbol{\beta}}), \quad (20.4)$$

می‌شود که

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{P}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{P})^{-1}\mathbf{P}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{u}, \quad (21.4)$$

بردار $1 \times m$ است. معادلات (۲۰.۴) و (۲۱.۴) روی روش اصلی ما تمرکز دارند.

^۸Mean Squared Error

^۹Best Linear Unbiased predictor (BLUP)

ملاحظه ۱.۲.۴. روش کمترین مربعات وزنی تعمیم یافته^{۱۰} [۲]، به صورت

$$u^h(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{a}(\mathbf{x}), \quad (22.4)$$

است که

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = (\mathbf{P}^T \mathbf{W}(\mathbf{x}) \mathbf{P})^{-1} \mathbf{P}^T \mathbf{W}(\mathbf{x}) \mathbf{u}. \quad (23.4)$$

معادله (۲۳.۴) شکلی مشابه معادله (۲۱.۴) دارد که دو تفاوت اساسی بین آن‌ها وجود دارد. اول این که \mathbf{W} تابعی از \mathbf{x} است و دوم این که \mathbf{W} ماتریسی قطری می باشد و عناصر غیرقطری صفر هستند. $\hat{\beta}$ در معادله (۲۱.۴) تخمین کمترین مربعات \mathbf{a} است. ارزش محاسباتی کرینجینگ بیشتر از روش کمترین مربعات وزنی می باشد.

ملاحظه ۲.۲.۴. کمیت $\mathbf{u} - \mathbf{P}\hat{\beta}$ در معادله (۲۰.۴)، باقی مانده بین $u(\mathbf{x})$ در رگرسیون کمترین مربعات تعمیم یافته در گره $\{s_i\}$ است. جمله دوم سمت راست معادله (۲۰.۴) مانده هموار تفسیر می شود. ما نشان می دهیم که درونیایی جایگزین رگرسیون می شود.

بهترین خط نااریب پیشگویی شده کرینجینگ در ادبیات، زمین آمار نامیده می شود [۱۷]. اگر $p(\mathbf{x}) \equiv 1$ باشد در نتیجه میانگین فرآیند ثابت فرض می شود که بهترین خط نااریب پیشگویی شده، کرینجینگ نامیده می شود. بهترین خط نااریب پیشگویی شده برای $p(\mathbf{x})$ به عنوان کرینجینگ عمومی شناخته می شود. برای مطمئن شدن از ویژگی پایداری روش های بدون مش، کرینجینگ عمومی بکار می رود.

۲.۲.۴ کرینجینگ متحرک

مشابه تقریب کمترین مربعات متحرک، روش کرینجینگ می تواند بسیاری از زیردامنه های $\Omega_x \subseteq \Omega$ را بسط دهد که کرینجینگ متحرک^{۱۱} می نامند [۱۲]. زیردامنه Ω_x را در نظر بگیرید، همسایگی نقطه \mathbf{x} در Ω قرار دارد. برای تقریب تابع توزیع u در Ω_x روی تعدادی از گره های $\{s_i\}$ که $i = 1, 2, \dots, n_c$ بررسی کنید که n_c تعداد کل گره ها در زیردامنه Ω_x است. درونیایی کرینجینگ متحرک به شکل

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_j^m p_j(\mathbf{x}) a_j + Z(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_x,$$

یا

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\hat{\beta} + \mathbf{r}^T(\mathbf{x})\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{u} - \mathbf{P}\hat{\beta}). \quad (24.4)$$

تعریف می شود که \mathbf{P} ، \mathbf{R} ، $\mathbf{r}(\mathbf{x})$ و $\hat{\beta}$ به ترتیب در معادلات (۱۷.۴)، (۱۸.۴)، (۱۹.۴) و (۲۱.۴) آمده است. $p(\mathbf{x})$ چند جمله ای پایه، \mathbf{a} بردار ضرایب و m بیانگر تعداد جملات در پایه است. \mathbf{P} ماتریسی

^{۱۰}The Weighted Least-Squares Approach

^{۱۱}Moving Kringing

یک بعد به صورت $m \times n_c$ و R ماتریسی $n_c \times n_c$ می‌باشد. β بردار $1 \times m$ و r برداری $1 \times n_c$ است. پایه خطی در

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = \{1, x\}, \quad m = 2 \quad (25.4)$$

و پایه درجه دوم به شکل

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = \{1, x, x^2\}, \quad m = 3$$

و پایه خطی در دو بعد به صورت

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = \{1, x, y\}, \quad m = 3 \quad (26.4)$$

هستند.

A و B به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\mathbf{A} = (\mathbf{P}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{P})^{-1} \mathbf{P}^T \mathbf{R}^{-1}, \quad (27.4)$$

و

$$\mathbf{B} = \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{P} \mathbf{A}). \quad (28.4)$$

که \mathbf{A} ماتریس $m \times n_c$ ، \mathbf{B} ماتریس $n_c \times n_c$ و \mathbf{I} ماتریس همانی $n_c \times n_c$ هستند. با استفاده از معادلات (27.4) و (28.4) می‌توانیم معادله (24.4) را به صورت

$$u^h(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{A} \mathbf{u} + \mathbf{r}^T(\mathbf{x}) \mathbf{B} \mathbf{u}, \quad (29.4)$$

یا

$$u^h(x) = [\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{A} + \mathbf{r}^T(\mathbf{x}) \mathbf{B}] \mathbf{u} = \sum_I^n \phi_I(x) u_I = \varphi(\mathbf{x}) \mathbf{u}. \quad (30.4)$$

بیان کنیم که تابع شکل $\phi_I(\mathbf{x})$ ، به شکل

$$\phi_I(\mathbf{x}) = \sum_j^m p_j(\mathbf{x}) A_{jI} + \sum_k^n r_k(\mathbf{x}) B_{kI}, \quad (31.4)$$

تعریف می‌شود. مشتقات جزئی $\phi_I(\mathbf{x})$ بر حسب x_i به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \phi_{k,x} &= \frac{\partial \phi_k(\mathbf{x})}{\partial x} = \sum_j^m \frac{\partial p_j(\mathbf{x})}{\partial x} A_{jk} + \sum_i^n \frac{\partial r_i(\mathbf{x})}{\partial x} B_{ik} = \sum_j^m p_{j,x}(\mathbf{x}) A_{jk} + \sum_i^n r_{i,x}(\mathbf{x}) B_{ik}, \\ \phi_{k,y} &= \frac{\partial \phi_k(\mathbf{x})}{\partial y} = \sum_j^m \frac{\partial p_j(\mathbf{x})}{\partial y} A_{jk} + \sum_i^n \frac{\partial r_i(\mathbf{x})}{\partial y} B_{ik} = \sum_j^m p_{j,y}(\mathbf{x}) A_{jk} + \sum_i^n r_{i,y}(\mathbf{x}) B_{ik}. \end{aligned} \quad (32.4)$$

کاما بیانگر مشتقات جزئی است.

۳.۲.۴ انتخاب ضریب همبستگی

در درونیایی کرینجینگ متحرک، نرمال کردن $s_i = \{x_i, y_i, z_i\} \in \Omega_x$ راحت است، به طوری که

$$0 \leq x_i, y_i, z_i \leq 1 \quad s_i \in \Omega_x, \quad (33.4)$$

در مرکزیت این متالوژی، ساختار کوواریانس فرآیند تصادفی $Z(x)$ از معادله (۱۱.۴) می باشد. فرض می کنیم $E\{Z(x)\} = 0$ و توزیع $Z(x)$ گاوسی باشند. به راحتی می توان از تابع همبستگی یک بعدی در ساختار d -بعدی به صورت

$$\hat{R}(u, v) = \prod_j^d R_j(u_j, v_j), \quad (34.4)$$

استفاده کرد که

$$R_j(u_j, v_j) = e^{-\theta(u_j - v_j)^2}, \quad u, v \in \Omega_x, \quad 0 \leq u_j, v_j \leq 1, \quad 1 \leq j \leq d, \quad (35.4)$$

بنابراین حاصل ضرب همبستگی ها به جریان محاسباتی ساده تری منجر خواهد شد.

تابع همبستگی انتخابی در این روش، تابع نمایی می باشد [۲]. یعنی

$$R(u, v) = \frac{\hat{R}(u, v) - e^{-\theta d^2}}{1 - e^{-\theta d^2}}, \quad u, v \in \Omega_x. \quad (36.4)$$

توجه کنید که σ^2 در معادله (۱۲.۴) هیچ نقشی در درونیایی کرینجینگ ایفا نمی کند. بنابراین کیفیت کرینجینگ به پارامتر آزاد θ در معادله (۳۵.۴) بستگی دارد. مقادیر بزرگ θ منجر به ماتریس خوش وضع R می شود. در حد $0 \rightarrow \theta$ عدد شرطی ماتریس R مکرراً رشد می یابد. مقادیر بهینه θ به داده u_I بستگی دارد [۳۱]. هیچ راهی وجود ندارد که θ بهینه برای روش بدون مش انتخاب شود چون u_I مجهول است. در این روش θ بهینه ای را می یابیم که به تعداد گره ها در دامنه فشرده وابسته باشد.

در بعضی حالات دترمینان ماتریس R ، شاخص خوبی برای کیفیت کرینجینگ است. در مثالی خاص θ را طوری انتخاب می کنیم که

$$1 \times 10^{-6} \leq |R| \leq 1 \times 10^{-1}, \quad (37.4)$$

مشتقات جزئی تابع همبستگی $R(x, s_I)$ بر حسب x_i به صورت

$$R_{,i}(s_I, x) = \hat{R}_{,i}(s_I, x) = -2\theta(x_i - s_{Ii})\hat{R}(s_I, x), \quad (38.4)$$

است.

۴.۲.۴ ویژگی های ریاضیاتی درونیایی کرینجینگ متحرک

درونیاب

ویژگی مهم تابع شکل کرینجینگ متحرک این است که شرط دلتای کرونگر در آن صدق می کند [۱۲]. مقدار تابع شکل $\phi_I(x)$ در s_j در زیر آمده است:

$$\phi_I(s_J) = \sum_j^m p_j(s_J)A_{jI} + \sum_k^n r_k(s_J)B_{kI}, \quad (39.4)$$

معادله زیر فرم ماتریسی معادله (۳۹.۴) است:

$$[\phi_I(s_J)] = \mathbf{PA} + \mathbf{RB}, \quad (40.4)$$

که \mathbf{P} از معادله (۱۷.۴) و \mathbf{R} از معادله (۱۸.۴) حاصل می‌شود. با جایگذاری معادلات (۲۷.۴) و (۲۸.۴) در (۴۰.۴) داریم:

$$[\phi_I(s_J)] = \mathbf{PA} + \mathbf{RR}^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{PA}) = \mathbf{I},$$

یا

$$\phi_I(s_J) = \delta_{IJ}. \quad (41.4)$$

معادله (۴۱.۴) ویژگی درونیاب کرینجینگ را نشان می‌دهد.

پایداری

ویژگی دیگر تابع شکل کرینجینگ متحرک این است که درونیابی کرینجینگ متحرک هر تابعی را در پایه دقیق معرفی خواهد کرد [۱۲]. اگر u_I از چندجمله‌ای با درجه کمتر یا مساوی m بدست آید، یعنی:

$$u_I = \mathbf{p}^T(x_I)\boldsymbol{\alpha}, \quad (42.4)$$

تقریب دقیق است، که $\boldsymbol{\alpha}$ ضرایب دلخواه هستند. فرض کنید u_I در معادله (۴۲.۴) به صورت

$$\mathbf{u} = \mathbf{P}\boldsymbol{\alpha}. \quad (43.4)$$

باشد. با جایگذاری (۴۳.۴) در (۲۱.۴) داریم:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{P}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{P})^{-1}\mathbf{P}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{u} = (\mathbf{P}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{P})^{-1}\mathbf{P}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{P}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}. \quad (44.4)$$

و

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\hat{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{r}^T(\mathbf{x})\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{u} - \mathbf{P}\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{r}^T(\mathbf{x})\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{u} - \mathbf{P}\boldsymbol{\alpha}), \quad (45.4)$$

یا

$$u^h(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\boldsymbol{\alpha} = u(\mathbf{x}). \quad (46.4)$$

در حالت خاص اگر پایه، شامل همه جملات خطی و ثابت باشند آنگاه، چندجمله‌ای خطی دقیقی را معرفی خواهد کرد، یعنی:

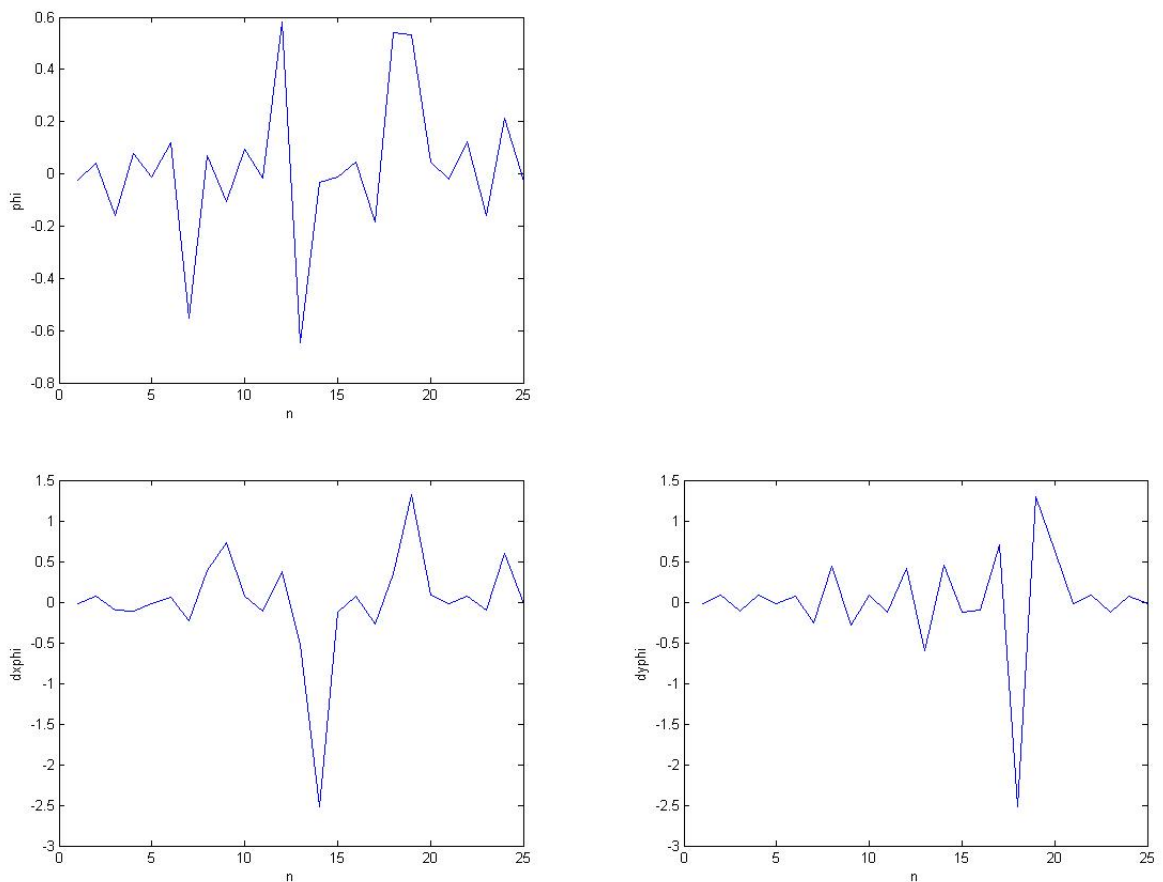
$$\sum_I^n \phi_I(\mathbf{x}) = 1 \quad (47.4)$$

$$\sum_I^n \phi_I(\mathbf{x})x_I = x \quad (48.4)$$

$$\sum_I^n \phi_I(\mathbf{x})y_I = y \quad (49.4)$$

جدول ۲.۴: تابع شکل روش کرینجینگ متحرک در نقطه (ϕ, θ) برای $\theta = 0.1$ و $m = 1$.

$dy\phi$	$dx\phi$	ϕ	y	x	n
-0.0235	-0.0194	-0.0226	-1	-1	1
0.0871	0.0757	0.0403	-0.5	-1	2
-0.1135	-0.1042	-0.1594	0	-1	3
0.0857	-0.1099	0.0776	0.5	-1	4
-0.0249	-0.0215	-0.0105	1	-1	5
0.0760	0.0604	0.1175	-1	-0.5	6
-0.2561	-0.2298	-0.5536	-0.5	-0.5	7
0.4435	0.3834	0.0711	0	-0.5	8
-0.2894	0.7353	-0.1050	0.5	-0.5	9
0.0840	0.0732	0.0939	1	-0.5	10
-0.1259	-0.1161	-0.0163	-1	0	11
0.4127	0.3728	0.5812	-0.5	0	12
-0.6022	-0.5227	-0.6461	0	0	13
0.4530	-2.5202	-0.0307	0.5	0	14
-0.1261	-0.1227	-0.0107	1	0	15
-0.0951	0.0782	0.0456	-1	0.5	16
0.7090	-0.2644	-0.1836	-0.5	0.5	17
-2.5167	0.3505	0.5418	0	0.5	18
1.2916	1.3165	0.5313	0.5	0.5	19
0.6244	0.0824	0.0435	1	0.5	20
-0.0233	-0.0202	-0.0212	-1	1	21
0.0800	0.0672	0.1214	-0.5	1	22
-0.1234	-0.1010	-0.1611	0	1	23
0.0711	0.5961	0.2144	0.5	1	24
-0.0237	-0.0208	-0.0277	1	1	25



شکل ۳.۴: تابع شکل روش کرینجینگ متحرک در نقطه $(0.5, 0.5)$ برای $\theta = 0.1$ و $m = 1$.

۵.۲.۴ فرمول‌بندی روش بدون المان پتروگالرکین منطقه‌ای

این گروه فرمول‌بندی، از روش پتروگالرکین استفاده می‌کند که تابع تست ممکن است متفاوت از تابع آزمون باشد. تابع تست در زیر دامنه مخالف صفر و در قسمت‌های دامنه به‌جز زیردامنه برابر صفر است. بنابراین در روش بدون المان پتروگالرکین منطقه‌ای، دامنه با استفاده از گره‌های پراکنده دلخواه گسسته می‌شوند. این نوع از فرمول‌بندی گسسته برای روش‌های بدون مش، طبیعی به نظر می‌رسد. آتلوری کلاس‌بندی روش بدون المان پتروگالرکین منطقه‌ای را تعیین کرد. همه آن‌ها در تابع تست با یکدیگر تفاوت دارند و آن‌ها به ترتیب از روش بدون المان پتروگالرکین منطقه‌ای ۱ تا روش بدون المان پتروگالرکین منطقه‌ای ۶ نامگذاری می‌شوند. (جدول ۳.۴) در این بخش تمرکز روی روش بدون المان پتروگالرکین منطقه‌ای ۵ است که تابع تست، تابع پله‌ای هوی‌ساید است. حال به حل معادله جریان گرمای ناپایدار به این روش می‌پردازیم.

جدول ۳.۴: طبقه‌بندی روش بدون المان پتروگالرکین منطقه‌ای

اسم	شکل تابع تست	فرمول‌بندی معادل	مثال‌های کاربردی
MLPG۱	تابع وزن w در تقریب MWLS	—	انواع روش‌های بدون مش
MLPG۲	$\delta(x - \bar{x})$ تابع دلتای دیراک	فرمول‌بندی منطقه‌ای	روش نظم نقطه‌ای
MLPG۳	$r = b(\bar{u}, v) - L(w)$ تابع خطای مانده	تابع مینیم‌سازی	روش‌های انرژی
MLPG۴	جواب‌های تابعی	—	روش المان مرزی
MLPG۵	تابع پله‌ای هوی‌ساید	—	انواع روش‌های بدون مش
MLPG۶	تابع آزمون	روش گالرکین استاندارد	روش عناصر متناهی

معادله جریان گرمای ناپایدار در این پایان‌نامه به عنوان معادله انتشار متعارفی است. معادله حاکم در جسم ایزوتروپی همگن در دامنه بسته Ω و مرز Γ در معادله (۱.۱) و مرز آن را در معادلات (۲.۱)، (۳.۱) و (۴.۱) در نظر بگیرید. در ساده‌سازی این معادله به روش کرینجینگ، شکل ضعیف تاثیر اولیه‌ای روی زیردامنه Ω_s با مرز $\partial\Omega_s$ دارد که Ω_s در درون دامنه کلی Ω مستقر شده است. با استفاده از تکنیک باقی‌مانده وزنی منطقه‌ای، شکل ضعیف معادله (۱.۱) روی زیردامنه Ω_s به صورت

$$\int_{\Omega_s} \left(\rho c \frac{\partial T}{\partial t} - k \nabla^2 T - Q \right) v d\Omega = 0,$$

نوشته می‌شود که v تابع وزن تست است.

با استفاده از $(\nabla^2 T)v = T_{,ii}v = (T_{,i}v)_{,i} - T_{,i}v_{,i}$ و قضیه دیورژانس و انتگرال‌گیری جزیه‌جزیه، فرمول‌بندی ضعیف منطقه‌ای

$$k \int_{\partial\Omega_s} T_{,i}n_i v d\Gamma - \int_{\Omega_s} \left(k T_{,i}v_{,i} - Qv + \rho c \frac{\partial T}{\partial t} v \right) d\Omega = 0,$$

حاصل می‌شود که n_i بردار خروجی واحد روی مرز $\partial\Omega_s$ است.

با بکار بردن شرط مرزی طبیعی (۳.۱) و با توجه به این‌که $T_{,i}n_i = \frac{\partial T}{\partial n} \equiv q$ در معادله (۳۵.۴) بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} & k \int_{L_s} q v d\Gamma + k \int_{\Gamma_{s1}} q v d\Gamma + \int_{\Gamma_{s2}} \bar{q} v d\Gamma + \int_{\Gamma_{s3}} h(T_a - T)v d\Gamma \\ & - \int_{\Omega_s} \left(k T_{,i}v_{,i} - Qv + \rho c \frac{\partial T}{\partial t} v \right) d\Omega = 0, \end{aligned} \quad (50.4)$$

که Γ_{s1} قسمتی از $\partial\Omega_s$ است. در حالت کلی $\partial\Omega_s = \Gamma_s \cup L_s$ با Γ_s قسمتی از مرز منطقه‌ای مستقر شده روی مرز کلی است. فرض کنید L_s قسمت‌های دیگر مرز منطقه‌ای درون دامنه جواب است.

$$\Gamma_{s1} = \Gamma_s \cap \Gamma_1$$

اشتراک بین مرز منطقه‌ای $\partial\Omega_s$ و مرز ضروری کلی Γ_1 است.

$$\Gamma_{s2} = \Gamma_s \cap \Gamma_2$$

قسمتی از مرز که روی شرایط مرزی طبیعی تعیین می‌شود، برای زیردامنه مستقرشده در دامنه کلی، هیچ اشتراک کلی بین $\partial\Omega_s$ و Γ وجود ندارد یعنی: $\Gamma_s = \partial\Omega_s$.
 برای ساده‌سازی معادله (۵۰.۴) تابع پله‌ای هوی‌ساید به‌عنوان تابع تست v در هر زیر دامنه انتخاب شده است.

$$v = \begin{cases} 1 & x \in \Omega_s \\ 0 & x \notin \Omega_s \end{cases}$$

چون مشتقات جزئی تابع تست v_i عیناً صفر است، شکل ضعیف منطقه‌ای (۵۰.۴) به شکل ساده معادله انتگرال مرزی منطقه‌ای

$$\int_{\Omega_s} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega - k \int_{\Gamma_s} q d\Gamma - k \int_{\Gamma_{s1}} q d\Gamma + \int_{\Gamma_{s2}} h T d\Gamma = \int_{\Gamma_{s2}} \bar{q} d\Gamma + \int_{\Gamma_{s2}} h T_a d\Gamma + \int_{\Omega_s} Q d\Omega. \quad (51.4)$$

تبدیل می‌شود [۶].

گسسته‌سازی شکل ضعیف

برای جریان گرمای ناپایدار، دما در هر نقطه x تابعی از مختصات فضایی و زمانی t است. ابتدا دامنه فضا را در زمان دلخواه t گسسته‌سازی می‌کنیم. از معادله (۳۰.۴)، دما در نقطه دلخواه x در دامنه می‌تواند به‌عنوان تابعی بر حسب دما از گره‌ها در دامنه حامی نقطه x بیان شود. چون تابع شکل مستقل از زمان است، دمای گره فقط تابعی نسبت به زمان است. بنابراین داریم:

$$T(x, t) = \sum_{I=1}^N \phi_I(x) T_I(t) = \Phi(x) T(t), \quad (52.4)$$

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \sum_{I=1}^n \phi_I(x) T_I(t) = \sum_{I=1}^n \phi_I(x) \frac{\partial T_I(t)}{\partial t} = \Phi(x) \dot{T}(t), \quad (53.4)$$

که

$$\Phi(\mathbf{x}) = (\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_n(x)), \quad (54.4)$$

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}) = (T_1(x, t), T_2(x, t), \dots, T_n(x, t))^T, \quad (55.4)$$

$$\dot{\mathbf{T}}(t) = \left(\frac{\partial T_1(x, t)}{\partial t}, \frac{\partial T_2(x, t)}{\partial t}, \dots, \frac{\partial T_n(x, t)}{\partial t} \right)^T. \quad (56.4)$$

برای گسسته‌سازی شکل ضعیف منطقه‌ای، معادله (۵۲.۴) و (۵۳.۴) را در (۵۱.۴) برای هر گره جایگزین می‌کنیم و مجموعه همه گره‌ها، معادله گسسته زیر را می‌دهد:

$$\mathbf{C}\dot{\mathbf{T}} + \mathbf{K}\mathbf{T} = \mathbf{F}. \quad (57.4)$$

که

$$\mathbf{C}_{IJ} = \int_{\Omega_s} \rho c \cdot \phi_J(x) d\Omega, \quad (58.4)$$

$$\mathbf{K}_{IJ} = - \int_{L_s} k \cdot \phi_{J,i}(x) n_i d\Gamma - \int_{\Gamma_{s1}} k \cdot \phi_{J,i}(x) n_i d\Gamma + \int_{\Gamma_{s3}} h \phi_J(x) d\Gamma, \quad (59.4)$$

$$\mathbf{F}_I = \int_{\Gamma_s} Q(x) d\Omega + \int_{\Gamma_{s2}} \bar{q}(x) d\Gamma + \int_{\Gamma_{s3}} h T_a d\Gamma. \quad (60.4)$$

از معادله (۵۹.۴) به نظر می‌رسد که دامنه انتگرال‌گیری روی Ω_s نادیده گرفته شده است و فقط انتگرال روی مرز را شامل می‌شود. بنابراین این روش ممکن است روشی مورد توجه در روش‌های بدون مش باشد.

همان‌طور که در فصل قبل بیان شد، برای حل معادله (۵۷.۴) از تکنیک تفاضل دونقطه‌ای متداول برای گسسته‌سازی زمان استفاده می‌کنیم. در این پایان‌نامه روش کرانک-نیکلسون (۲۰.۳) انتخاب شده است.

فصل ۵

مثال‌های عددی و نتیجه‌گیری

در این فصل به حل مثال‌های عددی می‌پردازیم و این مثال‌ها را با استفاده از نرم‌افزار متلب حل می‌کنیم.

۱.۵ آنالیز همگرایی و تخمین خطا

برای تخمین خطا و مطالعه همگرایی، نرم سوپولف $\|\cdot\|_k$ برای $k = 0, 1$ محاسبه می‌شود. نرم سوپولف به صورت

$$\|u\| = \left(\int_{\Omega} u^2 d\Omega \right)^{1/2}.$$

تعریف می‌شود. پس خطای نسبی به صورت

$$e_r = \frac{\|u^{\text{num}} - u^{\text{exact}}\|}{\|u^{\text{exact}}\|}.$$

بیان می‌شود.

۲.۵ مثال‌های عددی

در این جا به حل دو مثال با روش‌های گفته شده در فصل‌های ۲، ۳ و ۴ می‌پردازیم.

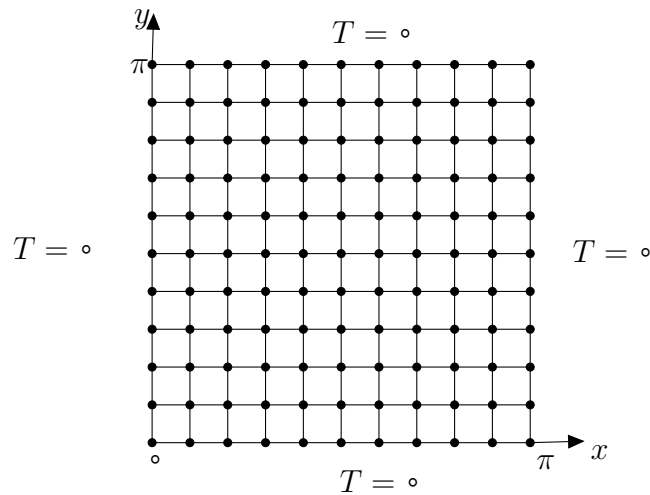
۱.۲.۵ میدان گرمای ناپایدار در دامنه مربعی

دامنه مربعی زیر را در نظر بگیرید:

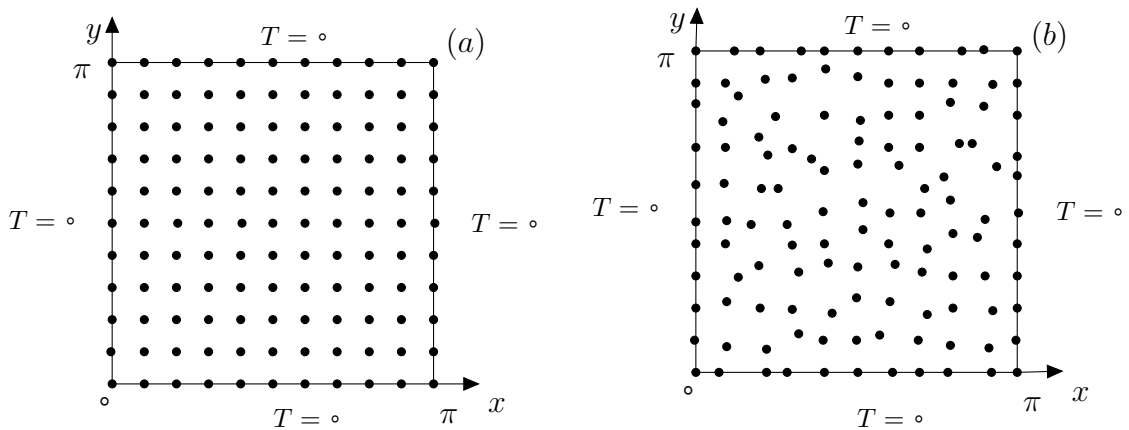
$$\Omega = \{(x, y), 0 \leq x \leq \pi m, 0 \leq y \leq \pi m\},$$

با

$$k_x = k_y = 1 \text{ W/(m} \cdot \text{°C)}, \quad \rho c = 1 \text{ J/(m}^3 \cdot \text{°C)},$$



شکل ۱.۵: مش‌بندی روش عناصر متناهی



شکل ۲.۵: روش بدون مش، (a) توزیع منظم ۱۲۱ گره، (b) توزیع نامنظم ۱۲۱ گره

هیچ منبع گرمای درونی وجود ندارد یعنی $Q = 0^\circ C$. شرایط مرزی و دمای اولیه برای این مساله از جریان گرمای ناپایدار به صورت زیر است:

$$T(0, y, t) = T(x, 0, t) = T(\pi, y, t) = T(x, \pi, t) = 0,$$

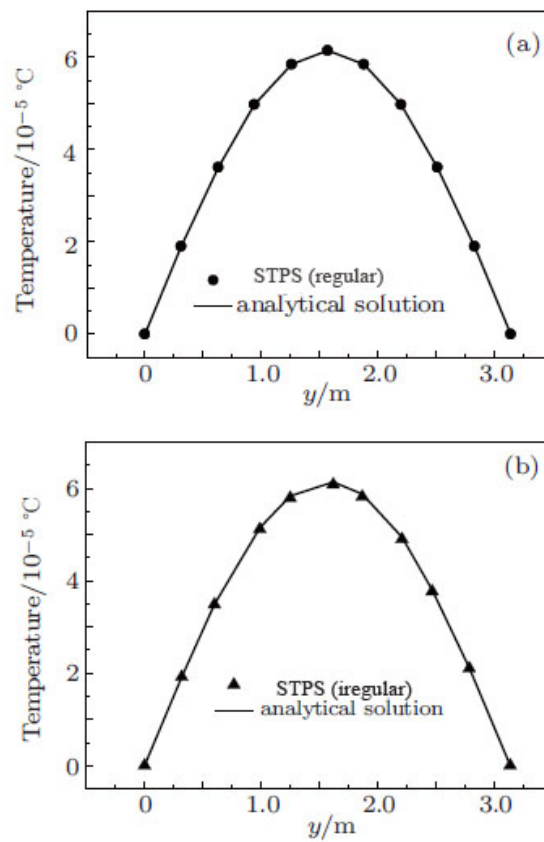
$$T(x, y, 0) = 1 \sin(x) \sin(y), \quad (x, y) \in \Omega,$$

که $T(x, y, t)$ دما در مختصات نقطه‌ای (x, y) در هر زمان t است. جواب تحلیلی متناظر برای این مساله به صورت

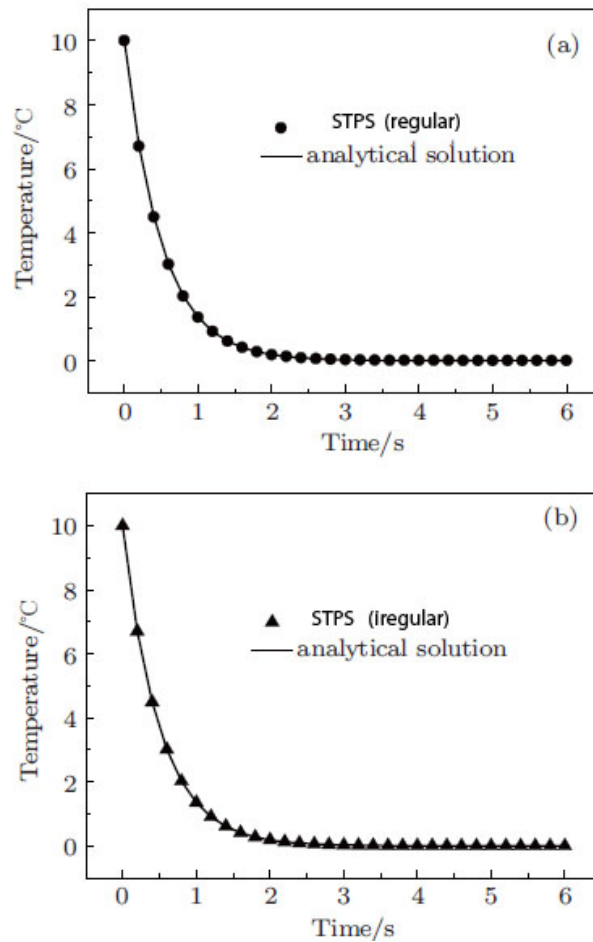
$$T(x, y, t) = 1 \sin(x) \sin(y) e^{-\lambda t}.$$

است. در این مثال، ضرایب $\alpha = 1/85$ و $\beta = 0.5$ است. همان‌طور که در شکل ۲.۵ می‌بینید توزیع گره‌ها شامل 11×11 گره می‌باشد. $\eta = 3$ و $\lambda = 7/2 \times 10^{-5}$ در ساختار تابع شکل انتخاب شده

است. گام زمانی در روش کرانک-نیکلسون $\Delta t = 0.2s$ است.



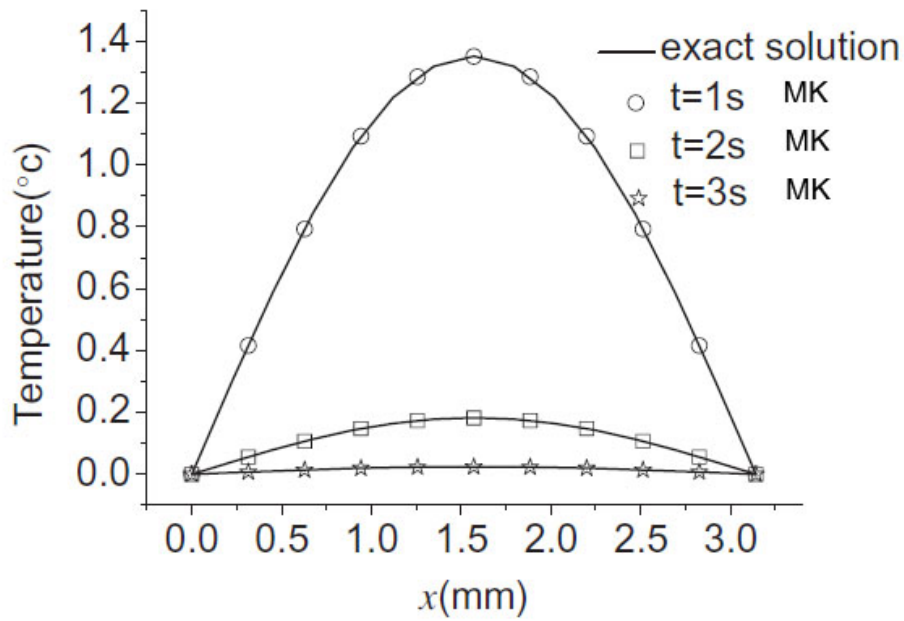
شکل ۳.۵: توزیع دما برای $x = \frac{\pi}{4}$ در زمان $t = 6s$ برای گره‌های: (a) منظم، (b) نامنظم.



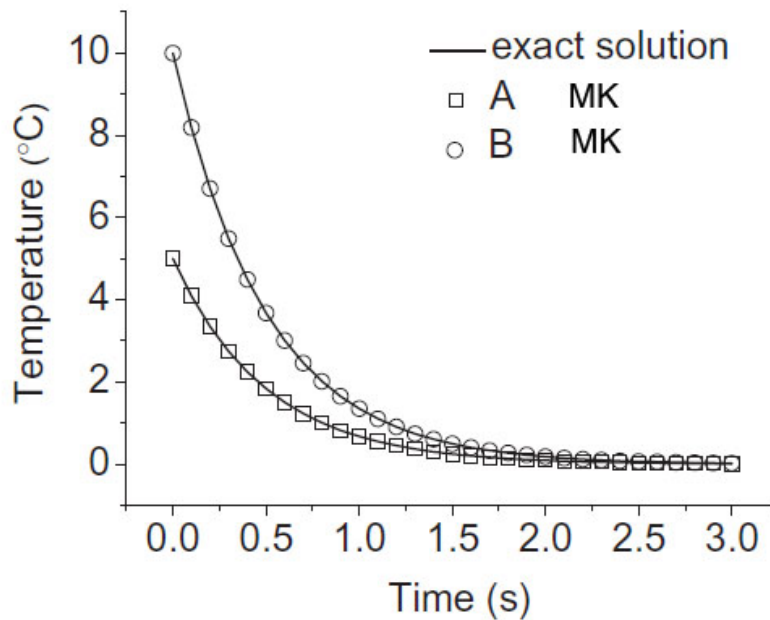
شکل ۴.۵: تغییرات دما در نقطه $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ برای گره‌های: (a) منظم، (b) نامنظم.

جدول ۱.۵: خطای نسبی و محاسبه زمان با روش‌های بدون مش

توزیع گره‌ها	محاسبه زمان بر حسب ثانیه	خطای نسبی	روش بدون مش
۱۱ × ۱۱	۲,۵۹۷	۰,۱۷	STPS (منظم)
۱۱ × ۱۱	۲,۴۴۲	۰,۷۳	STPS (نامنظم)
۱۱ × ۱۱	۲,۵۷۷	۰,۵۵	$\eta = ۶,۰۰۱$ TPS
۱۱ × ۱۱	۲,۶۴۱	۲,۶۳	$\eta = ۳,۰۰۱$ TPS



شکل ۵.۵: مقایسه توزیع دما در $y = \frac{\pi}{4}$ در طول محور x به روش MK.



شکل ۶.۵: تغییرات دما در نقاط $A = (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ و $B = (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ به روش MK.

۲.۲.۵ میدان گرمای ناپایدار در دامنه مکعبی

همان‌طور که در شکل ۷.۵ مشاهده می‌شود، طول مکعب 2° میلی‌متر و ارتفاع 1° میلی‌متر و ضخامت یک واحد است. دمای اولیه $T_0 = 2^\circ C$ فرض شده است و در دامنه هیچ منبع گرمایی وجود ندارد، آنگاه گرمای مکعب به‌طور میانگین $T_a = 100^\circ C$ است. بالا و پایین مرز ایزوله است. ضرایب انتقال گرمای تعیین شده در سطح چپ و راست $h = 1600$ ($w/(m^2 \cdot ^\circ C)$) است. در محاسبات

$$k_x = k_y = 16 \text{ (} w/(m \cdot ^\circ C) \text{)}, \quad (1.5)$$

$$\rho c = 10^6 \text{ (} j/(m^3 \cdot ^\circ C) \text{)}, \quad (2.5)$$

فرض شده است. دامنه شامل ۲۳۱ گره منظم است. پارامترهای انتخابی در این مثال

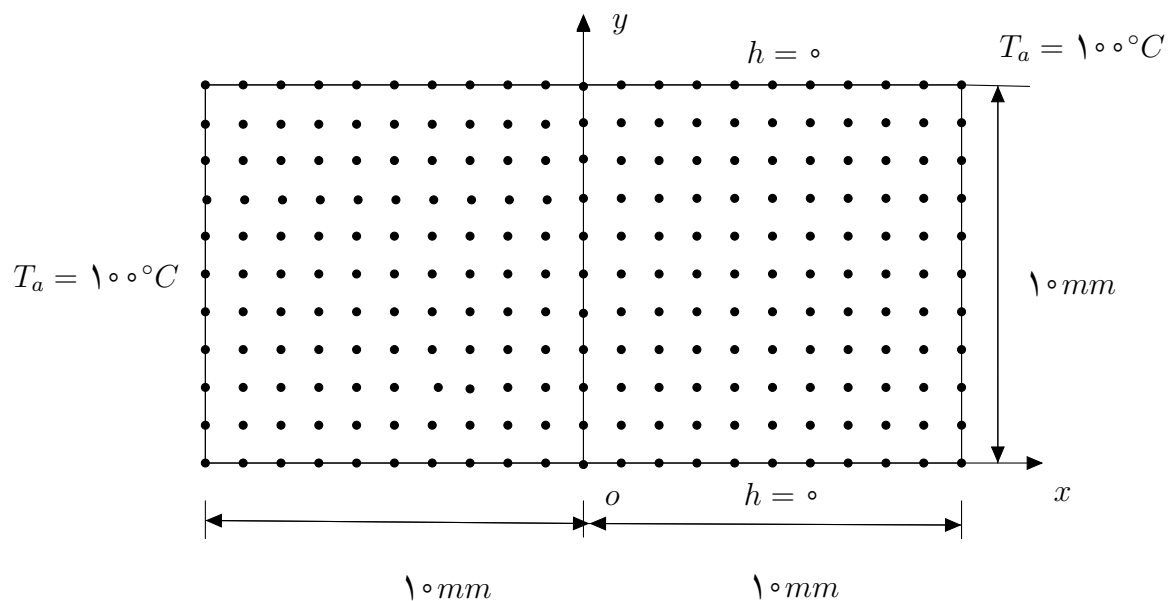
$$\Delta t = 0.01 \text{ s}, \quad \alpha = 3/5, \quad \beta = 0.5,$$

و

$$\eta = 3, \quad \lambda = 3/8 \times 10^{-5},$$

است. به دلیل تقارن کافی است فقط توزیع دما برای $x > 0$ تعیین شود.

نتایج بدست آمده در زمان‌های $t = 1 \text{ s}, 2 \text{ s}, 3 \text{ s}$ در نقاط $A(0, 0)$ ، $B(5, 5)$ و $C(10, 0)$ در جدول ۲.۵ آمده است. مقادیر محاسبه شده و مقادیر واقعی در جدول‌های ۲.۵ و ۳.۵ نشان داده‌ایم و با روش عناصر متناهی مقایسه کرده‌ایم که با کد مربوطه حاصل شده‌اند.



شکل ۷.۵: توزیع گره‌ها با ۲۳۱ گره.

جدول ۲.۵: مقایسه دماهای بدست آمده از روش STPS با روش FEM

زمان	نقطه	جواب دقیق	دما به روش FEM	دما به روش STPS	خطای نسبی
۱	A	۲۲,۳۰۴	۲۲,۳۵۶	۲۲,۳۳۱	۰,۱۱
	B	۲۷,۴۵۶	۲۷,۴۲۱	۲۷,۴۷۵	۰,۲۰
	C	۴۶,۳۸۴	۴۶,۲۷۸	۴۶,۳۶۴	۰,۱۹
۲	A	۲۹,۳۴۴	۲۹,۶۲۳	۲۹,۶۵۹	۰,۱۲
	B	۳۵,۷۷۶	۳۵,۷۲۱	۳۵,۷۷۰	۰,۱۴
	C	۵۳,۹۲۸	۵۳,۶۳۳	۵۳,۶۶۹	۰,۰۷
۳	A	۳۷,۲۳۲	۳۷,۲۵۹	۳۷,۳۱۳	۰,۱۴
	B	۴۹,۹۴۴	۴۲,۹۳۰	۴۲,۹۷۷	۰,۱۱
	C	۵۹,۰۷۲	۵۹,۰۲۳	۵۹,۰۴۵	۰,۰۴

جدول ۳.۵: مقایسه دماهای بدست آمده از روش MK با روش FEM

زمان	نقطه	جواب دقیق	دما به روش MK	درصد خطا	دما به روش FEM	درصد خطا
۱	A	۲۲,۳۰۴	۲۲,۳۳۰	۰,۱۱۷	۲۱,۳۴۰	۴,۳۲
	B	۲۷,۴۵۶	۲۷,۴۷۴	۰,۰۶۶	۲۶,۳۴۲	۴,۰۶
	C	۴۶,۳۸۴	۴۶,۳۶۹	۰,۰۳۲	۴۵,۲۳۶	۲,۴۷
۲	A	۲۹,۳۴۴	۲۹,۴۴۶	۰,۳۴۸	۲۸,۲۶۱	۳,۶۹
	B	۳۵,۷۷۶	۳۵,۷۶۸	۰,۰۲۲	۳۴,۶۴۱	۳,۱۷
	C	۵۳,۹۲۸	۵۳,۸۹۴	۰,۰۶۳	۵۲,۹۳۴	۱,۸۴
۳	A	۳۷,۲۳۲	۳۷,۳۰۷	۰,۲۰۱	۳۶,۱۶۲	۲,۸۷
	B	۴۹,۹۴۴	۴۲,۹۷۴	۰,۰۷۰	۴۱,۸۴۹	۲,۵۵
	C	۵۹,۰۷۲	۵۹,۰۴۸	۰,۰۴۱	۵۸,۲۷۱	۱,۳۶

نتایج و پیشنهاداتی برای کارهای آتی

در این پایان‌نامه برای ایجاد تابع شکل از دو روش بدون مش درونیابی نقطه‌ای شعاعی و تقریب کمترین مربعات متحرک استفاده شده است. روش درونیابی نقطه‌ای شعاعی در حالتی که تابع پایه شعاعی آن از نوع اسپلاین صفحه نازک است، دارای تغییرات زیاد و درصد خطای بالایی است و همچنین تقریب کمترین مربعات متحرک فاقد ویژگی دلتای کروئکر می‌باشد. از این رو به بیان و توسعه روش پتروگالرکین منطقه‌ای بدون مش و روش درونیابی نقطه‌ای شعاعی منطقه‌ای برای حل مسایل جریان گرمای ناپایدار می‌پردازد. مشخصه اصلی این پایان‌نامه استفاده از اسپلاین صفحه نازک هموار و درونیابی کرینجینگ متحرک به عنوان تابع شکل بوده است. تابع پله‌ای هوی‌ساید به عنوان تابع تست بکار می‌رود. شرط مرزی ضروری را می‌توان مانند روش عناصر متناهی بکار برد.

روش پتروگالرکین منطقه‌ای بدون مش و روش درونیابی نقطه‌ای شعاعی نیازی به ناحیه انتگرال‌گیری ندارند و هیچ انتگرال‌گیری روی دامنه برای ایجاد ماتریس سختی نیست. بنابراین روش تفاضلات متداول کرانک‌نیکلسون برای طرح گسسته‌سازی انتخاب می‌شود.

نتایج عددی نشان می‌دهد که این دو روش بر پایه درونیابی اسپلاین صفحه نازک هموار و درونیابی کرینجینگ متحرک روش‌های بدون مش کارآمدی نسبت به روش‌های بدون مش متداول و روش عناصر متناهی است.

مزایای روش‌های بدون مش و روش‌های بدون مش تعمیم‌یافته عبارتند از:

- برخلاف روش عناصر متناهی توابع شکل نیازی به المان‌بندی ندارند و توابع شکل برپایه محمل دامنه منطقه‌ای که شامل گره‌ها هستند، بدست می‌آیند.
- روش عناصر متناهی در حالت سه بعدی بسیار مشکل است ولی روش‌های بدون مش بسیار ساده عمل می‌کنند.
- منظم یا نامنظم بودن گره‌ها تغییرات زیادی در دقت جواب ایجاد نمی‌کنند.
- این روش‌ها کاربرد بسیار خوبی در حل مسایل حاکم در مکانیک سیالات و جامدات دارند.
- با افزایش گره‌ها سرعت همگرایی افزایش می‌یابد و جواب تقریبی به جواب دقیق مساله نزدیک می‌شود.

برای کارهای آتی

- می‌توان این روش را در حل معادله کان-هیلیارد بکار برد.
- می‌توان روش‌های بدون مش بهبودیافته را در حل معادلات مکانیک جامدات بکار برد و دقت جواب را افزایش داد.
- می‌توان از این روش در حل مسایل سه بعدی به آسانی استفاده کرد.
- یافتن روش بدون مش بهبودیافته برای تابع پایه‌ای شعاعی گاوسی.
- یافتن روشی برای بدست آوردن بهترین پارامترهای همبستگی در روش اسپلاین صفحه نازک هموار.

پیوست آ

کدنویسی با متلب

۱.آ تابع شکل به روش درونیابی نقطه‌ای شعاعی

```
clc
nx=2;
ac=2;
dc=0.5;
q=0.5;
eta=input('enter the parametr of shape function:');
dim=input('enter the dimation of cordinate:');
xlength=input('enter the xlength:');
ylength=input('enter the ylength:');
m=input('enter the dimation of p:1: Constant basis; 3: Linear basis; 6: Quadratic basis: ');
n=input('enter the dimation of R:');
nrbf=input('enter the number of radial point interpolation:');
xdiv=input('enter the divition of x axis:');
ydiv=input('enter the divition of y axis:');
numnode=input('enter the number of nodes:');
xstep=xlength/xdiv;
ystep=ylength/ydiv;
disp('node:')
for i=1:numnode
    disp(i)
end
xv1=zeros(1,(xdiv+1)*(ydiv+1));
xv2=zeros(1,(xdiv+1)*(ydiv+1));
nn=0;
for i=1:xdiv+1
    for j=1:ydiv+1
        nn=nn+1;
        xv1(nn)=-1+(i-1)*xstep;
        xv2(nn)=-1+(j-1)*ystep;
    end
end
disp('x , y:')
disp(xv1)
disp(xv2)
```

```

R=ac*dc;
B=zeros(n,n);
for i=1:n
    for j=1:n
        B(i,j)=((xv1(i)-xv1(j)).^2+(xv2(i)-xv2(j)).^2+R.^2).^q;
    end
end
B;
x=input('x:');
y=input('y:');
r=((x-xv1).^2+(y-xv2).^2).^(1/2);
rr=r.^2;
if nrbf==1    %MQ
    R1=(r.^2+R.^2).^q;
    R2=2*q*(r.^2+R.^2).^(q-1).*(x-xv1);
    R3=2*q*(r.^2+R.^2).^(q-1).*(y-xv2);
    R4=4*q*(q-1)*(r.^2+R.^2).^(q-2).*(x-xv1).^2+2*q*(r.^2+R.^2).^(q-1);
    R5=4*q*(q-1)*(r.^2+R.^2).^(q-2).*(y-xv2).^2+2*q*(r.^2+R.^2).^(q-1);
end
if nrbf==2    %exp
    R1=exp(-ac*(r/dc).^2);
    R2=-2*ac*exp(-ac*(r/dc).^2).*((x-xv1)/dc.^2);
    R3=-2*ac*exp(-ac*(r/dc).^2).*((y-xv2)/dc.^2);
    R4=-2*ac*(1/dc.^2)*exp(-ac*(r/dc).^2)+4*ac.^2*exp(-ac*(r/dc).^2).*((x-xv1).^2/dc.^4);
    R5=-2*ac*(1/dc.^2)*exp(-ac*(r/dc).^2)+4*ac.^2*exp(-ac*(r/dc).^2).*((y-xv2).^2/dc.^4);
end
if nrbf==3    %tps
    R1=(rr).^(eta);
    R2=eta*(rr).^(eta-1).*(x-xv1);
    R3=eta*(rr).^(eta-1).*(y-xv2);
    R4=eta*(rr).^(eta-1)+eta*(eta-1)*(rr).^(eta-2).*(x-xv1).^2;
    R5=eta*(rr).^(eta-1)+eta*(eta-1)*(rr).^(eta-2).*(y-xv2).^2;
end
xII = zeros(1,numnode);
yII = zeros(1,numnode);
% LOOP OVER ALL EVALUATION POINTS TO CALCULATE VALUE OF SHAPE FUNCTION Fi(X)
for j = 1 : n
% DETERMINE WEIGHT FUNCTIONS AND THEIR DERIVATIVES AT EVERY NODE
for i = 1 : numnode
    xII(1,i)=xv1(i);
    yII(1,i)=xv2(i);
end
    if (m == 1) % Shepard function
        p = [ones(1, numnode)];
        pxy = [1];
        dpdx = [0];
        dpdy = [0];
        ddpdx=[0];
        ddpdy=[0];
    elseif (m == 3)
        p = [ones(1, numnode); xII;yII];
        pxy = [1, x, y];
        dpdx = [0, 1, 0];
        dpdy = [0, 0, 1];
        ddpdx=[0, 0, 0];
    end
end

```

```

ddpdy=[0, 0, 0];
elseif (m == 6)
    p = [ones(1, numnode); xII;yII; xII.*xII;xII.*yII;yII.*yII];
    pxy = [1, x, y, x*x, x*y, y*y];
    dpdx = [0, 1, 0, 2*x, y, 0];
    dpdy = [0, 0, 1, 0, x, 2*y];
    ddpdx=[0, 0, 0, 2, 1, 0];
    ddpdy=[0, 0, 0, 0, 1, 2];
elseif (m == 0)
    p=zeros(m,n);
    pxy=zeros(m);
    dpdx=zeros(m);
    dpdy=zeros(m);
    ddpdx=zeros(m);
    ddpdy=zeros(m);
end
end
BB1=cat(1,B,p);
BB2=cat(1,p',zeros(m,m));
BB=cat(2,BB1,BB2);
RR1=cat(2,R1,pxy);
RR2=cat(2,R2,dpdx);
RR3=cat(2,R3,dpdy);
RR4=cat(2,R4,ddpdx);
RR5=cat(2,R5,ddpdy);
phi=pinv(BB)*RR1';%shape function
dxphi=pinv(BB)*RR2';% first order derivatives of shape function with respect to x
dyphi=pinv(BB)*RR3';% first order derivatives of shape function to y
dxxphi=pinv(BB)*RR4';% 2nd order derivatives of shape function with respect to x
dyphi=pinv(BB)*RR5';% 2nd order derivatives of shape function to y
plot(phi);

```

۲.آ تابع شکل روش تقریب کمترین مربعات متحرک

```

clc
dim=input('enter the dimation of cordinate:');
xlength=input('enter the xlength:');
ylength=input('enter the ylength:');
m=input('enter the dimation of p:1: Constant basis; 3: Linear basis; 6: Quadratic basis: ');
n=input('enter the dimation of R:');
xdiv=input('enter the divition of x axis:');
ydiv=input('enter the divition of y axis:');
numnode=input('enter the number of nodes:');
beta=input('enter the beta parameter:');
arfa=input('enter the alpha parameter:');
%w=0.1;
xstep=xlength/xdiv;
ystep=ylength/ydiv;
disp('node:')
for i=1:numnode
    disp(i)
end
xv1=zeros(1,(xdiv+1)*(ydiv+1));
xv2=zeros(1,(xdiv+1)*(ydiv+1));

```

```

nn=0;
for i=1:xdiv+1
    for j=1:ydiv+1
        nn=nn+1;
        xv1(nn)=-1+(i-1)*xstep;
        xv2(nn)=-1+(j-1)*ystep;
    end
end
disp('x , y:')
disp(xv1)
disp(xv2)
x=input('x:');
y=input('y:');
r=((x-xv1).^2+(y-xv2).^2).^(1/2);
nnodes_x=length(x);
nnodes_y=length(y);
w=zeros(nnodes_x,nnodes_y);
dwdx=zeros(nnodes_x,nnodes_y);
dwdy=zeros(nnodes_x,nnodes_y);
drdx=zeros(nnodes_x,nnodes_y);
drdy=zeros(nnodes_x,nnodes_y);
dwdr=zeros(nnodes_x,nnodes_y);
dwdr=zeros(nnodes_x,nnodes_y);
dwdx = dwdr .* drdx;
dwdy= dwdr .* drdy;
type=input('Gauss=1,Cubic=2, Spline3=3,Spline5=4, BSpline=5, power_function=6,;
          CSRBF2=7,CSRBF1=8,CSRBF3=9,CSRBF4=10, CSRBF5=11,CSRBF6=12:');
% weight functions
if (type == 1)
% Gauss
    if (r>1.0)
        w = 0.0;
        dwdr = 0.0;
        dwdxI=0.0;
        dwdyI=0.0;
    else
        b2 = beta*beta;
        r2 = r.*r;
        eb2 = exp(-b2);

        w = (exp(-b2*r2) - eb2) / (1.0 - eb2);
        dwdr = -2*b2.*r.*exp(-b2*r2) / (1.0 - eb2);
        dwdxI= -2*b2.*(x-xv1).*exp(-b2*r2) / (1.0 - eb2);
        dwdyI= -2*b2.*(y-xv2).*exp(-b2*r2) / (1.0 - eb2);
    end
elseif (type == 2)
% Cubic(r)
    if (r>1.0)
        w = 0.0;
        dwdr = 0.0;
        dwdxI=0.0;
        dwdyI=0.0;

    else
        w = 1-6*r.^2+8*r.^3-3*r.^4;

```

```

dwdr = -12*r+24*r.^2-12*r.^3;
dwdxI=-12*(x-xv1)*r+24*(x-xv1)*r.^2-12*(x-xv1)*r.^3;
dwdyI=-12*(y-xv2)*r+24*(y-xv2)*r.^2-12*(y-xv2)*r.^3;

end
elseif (type == 3)
% Spline3(r)
if (r>1.0)
w = 0.0;
dwdr = 0.0;
dwdxI=0.0;
dwdyI=0.0;

elseif (r<=0.5)
w = 2/3 - 4*r.^2 + 4*r.^3;
dwdr = -8*r + 12*r.^2;
dwdxI=-8*(x-xv1)*r + 12*(x-xv1)*r.^2;
dwdyI=-8*(y-xv2)*r + 12*(y-xv2)*r.^2;

else
w = 4/3 - 4*r + 4*r.^2 - 4*r.^3/3;
dwdr = -4 + 8*r -4*r.^2;
dwdxI = -4*(x-xv1) + 8*(x-xv1)*r -4*(x-xv1)*r.^2;
dwdyI = -4*(y-xv2) + 8*(y-xv2)*r -4*(y-xv2)*r.^2;

end
elseif (type == 4)
% Spline5(r)
if (r>1.0)
w = 0.0;
dwdr = 0.0;
dwdxI=0;
dwdyI=0;
else
w = 1-10*r.^3+15*r.^4-6*r.^5;
dwdr = -30*r.^2 + 60*r.^3-30*r.^4;
dwdxI = -30*(x-xv1)*r.^2 + 60*(x-xv1)*r.^3-30*(x-xv1)*r.^4;
dwdyI = -30*(y-xv2)*r.^2 + 60*(y-xv2)*r.^3-30*(y-xv2)*r.^4;

end
elseif (type == 5)
% BSpline(h,r) h is the distance between two nodes.
if (r>1.0)
w = 0.0;
dwdr = 0.0;
dwdxI=0;
dwdyI=0;

elseif (r<=0.5)
w = 1/(pi*h.^3)*(1-6*r.^2+6*r.^3);
dwdr = 1/(pi*h.^3)*(-12*r+18*r.^2);
dwdxI = 1/(pi*h.^3)*(-12*(x-xv1)*r+18*(x-xv1)*r.^2);
dwdyI = 1/(pi*h.^3)*(-12*(y-xv2)*r+18*(y-xv2)*r.^2);

else

```

```

w      = 2/(pi*h.^3)*(1-r).^3;
dwdr  = -6/(pi*h.^3)*(1-r).^2;
dwdxI = -6/(r*pi*h.^3)*(x-xv1)*(1-r).^2;
dwdyI = -6/(r*pi*h.^3)*(y-xv2)*(1-r).^2;

end

elseif (type == 6)
% power_function(arfa,r)
if (r>1.0)
w      = 0.0;
dwdr  = 0.0;
dwdxI=0;
dwdyI=0;
else
a2 = arfa*arfa;
r2 = r.*r;
w      = exp(-r2/a2);
dwdr  = (-2*r/a2).*exp(-r2/a2);
dwdxI = (-2*(x-xv1)*r/a2).*exp(-r2/a2);
dwdyI = (-2*(y-xv2)*r/a2).*exp(-r2/a2);

end

elseif (type == 7)
% CSRBF2(r)
if (r>1.0)
w      = 0.0;
dwdr  = 0.0;

else
w      = ((1-r).^6).*(6+36*r+82*r.^2+72*r.^3+30*r.^4+5*r.^5);
dwdr  = 11*r.*(r+2).*(5*r.^3+15*r.^2+18*r+4).*(r-1).^5;

end

elseif (type == 8)
% CSRBF1(r)
if (r>1.0)
w      = 0.0;
dwdr  = 0.0;

else
w      = ((1-r).^4).*(4+16*r+12*r.^2+3*r.^3);
dwdr  = (-4*(1-r).^3).*(4+16*r+12*r.^2+3*r.^3)+((1-r).^4).*(16+24*r+9*r.^2);
%dwdxI=diff(dwdr,x)
end

elseif (type == 9)
% CSRBF3(r)
if (r>1.0)
w      = 0.0;
dwdr  = 0.0;

else
w      = 1/3+r.^2-4/3*r.^3+2*r.^2.*log(r);
dwdr  = 4*r-4*r.^2+4*r.*log(r);

end

```



```

elseif (type == 10)
% CSRBF4(r)
if (r>1.0)
    w      = 0.0;
    dwdr   = 0.0;

else
    w      = 1/15+19/6*r.^2-16/3*r.^3+3*r.^4-16/15*r.^5+1/6*r.^6+2*r.^2.*log(r);
    dwdr   = 25/3*r-16*r.^2+12*r.^3-16/3*r.^4+r.^5+4*r.*log(r);

end
elseif (type == 11)
% CSRBF5(r)
if (r>1.0)
    w      = 0.0;
    dwdr   = 0.0;

else
    w      = ((1-r).^6).*(35*r.^2+18*r+3);
    dwdr   = -6*(1-r).^5.*(35*r.^2+18*r+3)+(1-r).^6.*(70*r+18);

end
elseif (type == 12)
% CSRBF6(r)
if (r>1.0)
    w      = 0.0;
    dwdr   = 0.0;

else
    w      = ((1-r).^8).*(32*r.^3+25*r.^2+8*r+1);
    dwdr   = -8*(1-r).^7.*(32*r.^3+25*r.^2+8*r+1)+(1-r).^8.*(96*r.^2+50*r+8);

end
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
X1cell=input('X1 coordination of rectangle background cell:');
X2cell=input('X2 coordinations of rectangle background cell:');
Y1cell=input('Y1 coordinations of rectangle background cell:');
Y2cell=input('Y2 coordinations of rectangle background cell:');
Ngauss=input(' exponent number of gauss integration:');
Xg=[];Yg=[];WEI=[];
if (Ngauss==1)
    WEI=2*2;
    Xg=1/2.*(X1cell+X2cell);
    Yg=1/2.*(Y1cell+Y2cell);
    Ngau=1;
elseif (Ngauss==2)
    a=0.5773502692;
    Xg(1)=1/2.*(X1cell+X2cell)-a/2*(X2cell-X1cell);
    Yg(1)=1/2.*(Y1cell+Y2cell)-a/2*(Y2cell-Y1cell);
    WEI(1)=1;
    Xg(2)=1/2.*(X1cell+X2cell)-a/2*(X2cell-X1cell);
    Yg(2)=1/2.*(Y1cell+Y2cell)+a/2*(Y2cell-Y1cell);
    WEI(2)=1;
    Xg(3)=1/2.*(X1cell+X2cell)+a/2*(X2cell-X1cell);

```

```

Yg(3)=1/2.*(Y1cell+Y2cell)-a/2*(Y2cell-Y1cell);
WEI(3)=1;
Xg(4)=1/2.*(X1cell+X2cell)+a/2*(X2cell-X1cell);
Yg(4)=1/2.*(Y1cell+Y2cell)+a/2*(Y2cell-Y1cell);
WEI(4)=1;
Ngau=2*2;
elseif (Ngauss==3)
a=0.7745966692;
W1=0.5555555556;W2=0.8888888889;
Xg(1)=1/2.*(X1cell+X2cell)-a/2*(X2cell-X1cell);
Yg(1)=1/2.*(Y1cell+Y2cell)-a/2*(Y2cell-Y1cell);
WEI(1)=W1*W1;
Xg(2)=1/2.*(X1cell+X2cell)-a/2*(X2cell-X1cell);
Yg(2)=1/2.*(Y1cell+Y2cell);
WEI(2)=W1*W2;
Xg(3)=1/2.*(X1cell+X2cell)-a/2*(X2cell-X1cell);
Yg(3)=1/2.*(Y1cell+Y2cell)+a/2*(Y2cell-Y1cell);
WEI(3)=W1*W1;
Xg(4)=1/2.*(X1cell+X2cell);
Yg(4)=1/2.*(Y1cell+Y2cell)-a/2*(Y2cell-Y1cell);
WEI(4)=W1*W2;
Xg(5)=1/2.*(X1cell+X2cell);
Yg(5)=1/2.*(Y1cell+Y2cell);
WEI(5)=W2*W2;
Xg(6)=1/2.*(X1cell+X2cell);
Yg(6)=1/2.*(Y1cell+Y2cell)+a/2*(Y2cell-Y1cell);
WEI(6)=W1*W2;
Xg(7)=1/2.*(X1cell+X2cell)+a/2*(X2cell-X1cell);
Yg(7)=1/2.*(Y1cell+Y2cell)-a/2*(Y2cell-Y1cell);
WEI(7)=W1*W1;
Xg(8)=1/2.*(X1cell+X2cell)+a/2*(X2cell-X1cell);
Yg(8)=1/2.*(Y1cell+Y2cell);
WEI(8)=W1*W2;
Xg(9)=1/2.*(X1cell+X2cell)+a/2*(X2cell-X1cell);
Yg(9)=1/2.*(Y1cell+Y2cell)+a/2*(Y2cell-Y1cell);
WEI(9)=W1*W1;
Ngau=3*3;
elseif (Ngauss==4)
a=0.3399810436;b=0.8611363116;
W1=0.3478548451;W2=0.6521451549;
Xg(1)=1/2.*(X1cell+X2cell)-b/2*(X2cell-X1cell);
Yg(1)=1/2.*(Y1cell+Y2cell)-b/2*(Y2cell-Y1cell);
WEI(1)=W1*W1;
Xg(2)=1/2.*(X1cell+X2cell)-b/2*(X2cell-X1cell);
Yg(2)=1/2.*(Y1cell+Y2cell)-a/2*(Y2cell-Y1cell);
WEI(2)=W1*W2;
Xg(3)=1/2.*(X1cell+X2cell)-b/2*(X2cell-X1cell);
Yg(3)=1/2.*(Y1cell+Y2cell)+a/2*(Y2cell-Y1cell);
WEI(3)=W1*W2;
Xg(4)=1/2.*(X1cell+X2cell)-b/2*(X2cell-X1cell);
Yg(4)=1/2.*(Y1cell+Y2cell)+b/2*(Y2cell-Y1cell);
WEI(4)=W1*W1;

Xg(5)=1/2.*(X1cell+X2cell)-a/2*(X2cell-X1cell);
Yg(5)=1/2.*(Y1cell+Y2cell)-b/2*(Y2cell-Y1cell);

```

```

WEI(5)=W2*W1;
Xg(6)=1/2.*(X1cell+X2cell)-a/2*(X2cell-X1cell);
Yg(6)=1/2.*(Y1cell+Y2cell)-a/2*(Y2cell-Y1cell);
WEI(6)=W2*W2;
Xg(7)=1/2.*(X1cell+X2cell)-a/2*(X2cell-X1cell);
Yg(7)=1/2.*(Y1cell+Y2cell)+a/2*(Y2cell-Y1cell);
WEI(7)=W2*W2;
Xg(8)=1/2.*(X1cell+X2cell)-a/2*(X2cell-X1cell);
Yg(8)=1/2.*(Y1cell+Y2cell)+b/2*(Y2cell-Y1cell);
WEI(8)=W2*W1;

Xg(9)=1/2.*(X1cell+X2cell)+a/2*(X2cell-X1cell);
Yg(9)=1/2.*(Y1cell+Y2cell)-b/2*(Y2cell-Y1cell);
WEI(9)=W1*W1;
Xg(10)=1/2.*(X1cell+X2cell)+a/2*(X2cell-X1cell);
Yg(10)=1/2.*(Y1cell+Y2cell)-a/2*(Y2cell-Y1cell);
WEI(10)=W2*W2;
Xg(11)=1/2.*(X1cell+X2cell)+a/2*(X2cell-X1cell);
Yg(11)=1/2.*(Y1cell+Y2cell)+a/2*(Y2cell-Y1cell);
WEI(11)=W2*W2;
Xg(12)=1/2.*(X1cell+X2cell)+a/2*(X2cell-X1cell);
Yg(12)=1/2.*(Y1cell+Y2cell)+b/2*(Y2cell-Y1cell);
WEI(12)=W2*W1;

Xg(13)=1/2.*(X1cell+X2cell)+b/2*(X2cell-X1cell);
Yg(13)=1/2.*(Y1cell+Y2cell)-b/2*(Y2cell-Y1cell);
WEI(13)=W1*W1;
Xg(14)=1/2.*(X1cell+X2cell)+b/2*(X2cell-X1cell);
Yg(14)=1/2.*(Y1cell+Y2cell)-a/2*(Y2cell-Y1cell);
WEI(14)=W1*W2;
Xg(15)=1/2.*(X1cell+X2cell)+b/2*(X2cell-X1cell);
Yg(15)=1/2.*(Y1cell+Y2cell)+a/2*(Y2cell-Y1cell);
WEI(15)=W1*W2;
Xg(16)=1/2.*(X1cell+X2cell)+b/2*(X2cell-X1cell);
Yg(16)=1/2.*(Y1cell+Y2cell)+b/2*(Y2cell-Y1cell);
WEI(16)=W1*W1;
Ngau=4*4;
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
DmI=[];
xII = zeros(1,numnode);
yII = zeros(1,numnode);
% LOOP OVER ALL EVALUATION POINTS TO CALCULATE VALUE OF SHAPE FUNCTION Fi(X)
for i = 1 : numnode
    xII(1,i)=xv1(i);
    yII(1,i)=xv2(i);
end

% INITIALIZE SHAPE FUNCTION MATRICES
PHI = zeros(n, numnode);
DPHIX = zeros(n, numnode);
DPHIY = zeros(n, numnode);
% EVALUATE BASIS p, B MATRIX AND THEIR DERIVATIVES
if (m == 1)

```

```

p = [ones(1, numnode)];
pxy = [1];
dpdx = [0];
dpdy = [0];

B = p .* [w];
DBdx = p .* [dwdxI];
DBdy = p .* [dwdyI];
elseif (m == 3)
p = [ones(1, numnode); xII;yII];
pxy = [1, x, y];
dpdx = [0, 1, 0];
dpdy = [0, 0, 1];

B = p .* [w; w; w];
DBdx = p .* [dwdxI; dwdxI;dwdxI];
DBdy = p .* [dwdyI; dwdyI;dwyI];
elseif (m == 6)
p = [ones(1, numnode); xII;yII; xII.*xII;xII.*yII;yII.*yII];
pxy = [1, x, y, x*x, x*y, y*y];
dpdx = [0, 1, 0, 2*x, y,0];
dpdy = [0, 0, 1, 0, x,2*y];

B = p .* [w; w; w; w; w; w];
DBdx = p .* [dwdxI; dwdxI;dwdxI;dwdxI; dwdxI;dwdxI];
DBdy = p .* [dwdyI; dwdyI;dwyI;dwyI; dwdyI;dwyI];
elseif (m == 0)
p=zeros(m,n);
pxy=zeros(m);
dpdx=zeros(m);
dpdy=zeros(m);
ddpdx=zeros(m);
ddpdy=zeros(m);
B = p;
DBdx = p;
DBdy = p;

end
% EVALUATE MATRICES A AND ITS DERIVATIVES
A = zeros (m, m);
DAdx = zeros (m, m);
DA dy= zeros (m, m);
for i = 1 : numnode
pp = p(:,i) * p(:,i)';
A = A + w(i) * pp;
DAdx = DAdx + dwdxI(i) * pp;
DA dy = DA dy + dwdyI(i) * pp;
end

AInv = inv(A);

rxy = AInv * pxy';
PHI = rxy' * B; % shape function
drdx = AInv * (dpdx' -DAdx* rxy);
DPHIX = drdx' * B + rxy' * DBdx; % first order derivatives of shape function with respect to x

```

```
drdy = AInv * (dpdy' -DAy* rxy);
DPHIy = drdy' * B + rxy' * DBdy; % first order derivatives of shape function to y
```

۳.آ. تابع شکل به روش اسپلاین صفحه نازک هموار

```
clc
nx=2;
lamda=(3.5)*10.^(-4);
eta=input('enter the parametr of shape function:');
dim=input('enter the dimation of cordinate:');
xlength=input('enter the xlength:');
ylength=input('enter the ylength:');
m=input('enter the dimation of p:'); %m=0,1,3,6
n=input('enter the dimation of R:');
xdiv=input('enter the divition of x axis:');
ydiv=input('enter the divition of y axis:');
numnode=input('enter the number of nodes:');
xstep=xlength/xdiv;
ystep=ylength/ydiv;
disp('node:')
for i=1:numnode
    disp(i)
end
xv1=zeros(1,(xdiv+1)*(ydiv+1));
xv2=zeros(1,(xdiv+1)*(ydiv+1));
nn=0;
for i=1:xdiv+1
    for j=1:ydiv+1
        nn=nn+1;
        xv1(nn)=-1+(i-1)*xstep;
        xv2(nn)=-1+(j-1)*ystep;
    end
end
B=zeros(n,n);
for i=1:n
    for j=1:n
        B(i,j)=((xv1(i)-xv1(j)).^2+(xv2(i)-xv2(j)).^2).^eta;
    end
end
disp('x , y:')
disp(xv1)
disp(xv2)
x=input('x:');
y=input('y:');
r=((x-xv1).^2+(y-xv2).^2).^(1/2);
rr=r.^2;

%tps
R1=(rr).^eta;
R2=eta*(rr).^(eta-1).*(x-xv1);
R3=eta*(rr).^(eta-1).*(y-xv2);
R4=eta*(rr).^(eta-1)+eta*(eta-1)*(rr).^(eta-2).*(x-xv1).^2;
R5=eta*(rr).^(eta-1)+eta*(eta-1)*(rr).^(eta-2).*(y-xv2).^2;
```

```

xII = zeros(1,numnode);
yII = zeros(1,numnode);
% LOOP OVER ALL EVALUATION POINTS TO CALCULATE VALUE OF SHAPE FUNCTION Fi(X)
for j = 1 : n
% DETERMINE WEIGHT FUNCTIONS AND THEIR DERIVATIVES AT EVERY NODE
for i = 1 : numnode
    xII(1,i)=xv1(i);
    yII(1,i)=xv2(i);
end
    if (m == 1) % Shepard function
        p = [ones(1, numnode)];
        pxy = [1];
        dpdx = [0];
        dpdy = [0];
        ddpdx=[0];
        ddpdy=[0];
    elseif (m == 3)
        p = [ones(1, numnode); xII;yII];
        pxy = [1, x, y];
        dpdx = [0, 1, 0];
        dpdy = [0, 0, 1];
        ddpdx=[0, 0, 0];
        ddpdy=[0, 0, 0];
    elseif (m == 6)
        p = [ones(1, numnode); xII;yII; xII.*xII;xII.*yII;yII.*yII];
        pxy = [1, x, y, x*x, x*y, y*y];
        dpdx = [0, 1, 0, 2*x, y, 0];
        dpdy = [0, 0, 1, 0, x, 2*y];
        ddpdx=[0, 0, 0, 2, 1, 0];
        ddpdy=[0, 0, 0, 0, 1, 2];
    elseif (m == 0)
        p=zeros(m,n);
        pxy=zeros(m);
        dpdx=zeros(m);
        dpdy=zeros(m);
        ddpdx=zeros(m);
        ddpdy=zeros(m);
    end
end
T1=B+n*lamda*eye(n);
T11=inv(T1);
p1=p*T11*p';
p11=inv(p1);
p2=p*T11;
sb=p11*p2;
ss=eye(n)-p'*sb;
sa=T11*ss;

RR1=cat(1,T1,p);
RR2=cat(1,p',zeros(m,m));
RR=cat(2,RR1,RR2);
Rr1=cat(2,R1,pxy);
Rr2=cat(2,R2,dpdx);
Rr3=cat(2,R3,dpdy);
Rr4=cat(2,R4,ddpdx);

```

```

Rr5=cat(2,R5,ddpdy);
%ppp=R1*sa+pxy*sb;
%phi=ppp';
phi=pinv(RR)*Rr1'; %shape function
dxphi=pinv(RR)*Rr2';% first order derivatives of shape function with respect to x
dyphi=pinv(RR)*Rr3';% first order derivatives of shape function to y
dxxphi=pinv(RR)*Rr4';% 2nd order derivatives of shape function with respect to x
dyypphi=pinv(RR)*Rr5';% 2nd order derivatives of shape function to y

```

۴.آ. تابع شکل روش درونیابی کرینجینگ متحرک

```

clc
dim=input('enter the dimention of cordinate:');
xlength=input('enter the xlength:');
ylength=input('enter the ylength:');
m=input('enter the dimention of p:1: Constant basis; 3: Linear basis; 6: Quadratic basis: ');
n=input('enter the dimention of R:');
xdiv=input('enter the divition of x axis:');
ydiv=input('enter the divition of y axis:');
numnode=input('enter the number of nodes:');
h=input('average distance of the nodes in the support domain:');
w=0.1;
xstep=xlength/xdiv;
ystep=ylength/ydiv;
disp('node:')
for i=1:numnode
    disp(i)
end
xv1=zeros(1,(xdiv+1)*(ydiv+1));
xv2=zeros(1,(xdiv+1)*(ydiv+1));
nn=0;
for i=1:xdiv+1
    for j=1:ydiv+1
        nn=nn+1;
        xv1(nn)=-1+(i-1)*xstep;
        xv2(nn)=-1+(j-1)*ystep;
    end
end
disp('x , y:')
disp(xv1)
disp(xv2)
B=zeros(n,n);
for i=1:n
    for j=1:n
        B(i,j)=exp(-(w/h.^2)*((xv1(i)-xv1(j)).^2+(xv2(i)-xv2(j)).^2));
        if (i == j)
            B(i,j)=1;
        end
    end
end
end
B;
x=input('x:');
y=input('y:');
r=((x-xv1).^2+(y-xv2).^2).^(1/2);

```

```

R1=exp(-(w/h.^2)*(r).^2);
R2=-2*w*exp(-w*(r/h).^2).*((x-xv1)/h.^2);
R3=-2*w*exp(-w*(r/h).^2).*((y-xv2)/h.^2);
R4=-2*w*(1/h.^2)*exp(-w*(r/h).^2)+4*w.^2*exp(-w*(r/h).^2).*((x-xv1).^2/h.^4);
R5=-2*w*(1/h.^2)*exp(-w*(r/h).^2)+4*w.^2*exp(-w*(r/h).^2).*((y-xv2).^2/h.^4);
xII = zeros(1,numnode);
yII = zeros(1,numnode);
% LOOP OVER ALL EVALUATION POINTS TO CALCULATE VALUE OF SHAPE FUNCTION Fi(X)
for j = 1 : n
% DETERMINE WEIGHT FUNCTIONS AND THEIR DERIVATIVES AT EVERY NODE
for i = 1 : numnode
    xII(1,i)=xv1(i);
    yII(1,i)=xv2(i);
end
    if (m == 1) % Shepard function
        p = [ones(1, numnode)];
        pxy = [1];
        dpdx = [0];
        dpdy = [0];
        ddpdx=[0];
        ddpdy=[0];
    elseif (m == 3)
        p = [ones(1, numnode); xII;yII];
        pxy = [1, x, y];
        dpdx = [0, 1, 0];
        dpdy = [0, 0, 1];
        ddpdx=[0, 0, 0];
        ddpdy=[0, 0, 0];
    elseif (m == 6)
        p = [ones(1, numnode); xII;yII; xII.*xII;xII.*yII;yII.*yII];
        pxy = [1, x, y, x*x, x*y, y*y];
        dpdx = [0, 1, 0, 2*x, y, 0];
        dpdy = [0, 0, 1, 0, x, 2*y];
        ddpdx=[0, 0, 0, 2, 1, 0];
        ddpdy=[0, 0, 0, 0, 1, 2];
    elseif (m == 0)
        p=zeros(m,n);
        pxy=zeros(m);
        dpdx=zeros(m);
        dpdy=zeros(m);
        ddpdx=zeros(m);
        ddpdy=zeros(m);
    end
end
A1=p*(inv(B))*p';
A2=p*(inv(B));
A=inv(A1)*A2;
BB=(inv(B))*(eye(n,n)-p'*A);
phi=pxy*A+R1*BB;
dxphi=dpdx*A+R2*BB;
dyphi=dpdy*A+R3*BB;

```


مراجع

- [1] Asadzadeh. M, (2010), "*An Introduction to the Finite Element Method (FEM) for Differential Equations*", January 20.
- [2] Belytschko.T, Lu. YY, Gu. L, (1994), "Element free Galerkin methods", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37:229–256.
- [3] Belytschko. T, Moes. N, Usui. S, Parimi. C, (2001), "Arbitrary discontinuities in finite elements", *Int. J. Numer. Methods Engrg.* 50,pp. 993-1013.
- [4] Bruch. J. C, Zvoloski. JR. G, (1974), "Transient two-dimensional heat conduction problems solved by the Finite Element Method", Department of Mechanical Engineering, University of California, Santa Barbara, California, U.S.A., *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, VOL. 8, 481-494.
- [5] Craven. P, Wahba. G, (1979), "Smoothing noisy data with spline functions, Estimating the correct degree of smoothing by the method of Generalized Cross-Validation", *Numerische Mathematik*, 9 by Springer-Verlag, Numer. Math, 31,377-403.
- [6] Dai. B, Zheng. B, Liang. Q, Wang. L, (2013), "Numerical solution of transient heat conduction problems using improved meshless local Petrov–Galerkin method", *Applied Mathematics and Computation* 219 10044–10052.
- [7] Dolbow. J, Belytschko. T, (1998), "*An Introduction to Programming the Meshless Element Free Galerkin Method*", *Archives of Computational Methods in Engineering*, vol. 5, pp. 207-241.
- [8] Dubrovin. B. A, Fomenko. A. T, Novikov. S. P, (1992), "*Modern Geometry - Methods and Applications*", Second Edition, Springer-Verlag, New York, 1992 ISBN 3-540-97663-9.
- [9] Eberly. D, (1996), "Thin-Plate Splines, Geometric Tools", LLC, 1 March.
- [10] Feng. W, Gao. L, Bao-Jing. Z, Zhi-Qiang. Hu, (2013), "An improved local radial point interpolation method for transient heat conduction analysis", *Chinese Physical Society and IOP Publishing Ltd*, Vol. 22, No. 6 060206.

- [11] Franke. R, (January 1982), "Scattered data interpolation: Tests of some methods", Mathematics of Computation Volume 38, Number 157.
- [12] Gu. L, (2003), "Moving kriging interpolation and element-free Galerkin method", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Int. J. Numer. Meth. Engng 2003; 56:1–11
- [13] Hayek. S. I, (2000), "*Advanced Mathematical Methods in Science and Engineering*", Marcel Dekker, 2000. ISBN 0-8247-0466-5.
- [14] Huerta. A, Fernandez-Mendez. S, (2000), "Enrichment and coupling of the finite element and meshless methods", Int. J. Numer. Methods Engrg. 48, 1615-1636.
- [15] Ilanko. S, (2005), "Asymptotic modelling theorems for the static analysis of linear elastic structures", Royal Society Proceedings A (Mathematical, Physical and Engineering Sciences) v 461, No. 2063, 3525–3542.
- [16] Kakaç. S, Yener. Y, (1985), "Heat conduction", New York: Hemisphere Publishing Co.
- [17] Krige. D. G, (1951), "A statistical approach to some basic mine valuation problems on the witwatersand", Journal of the Chemical, Metallurgical and Mining Society of South Africa, 52:119–139.
- [18] Kuhnert. J, (2000), "An upwind finite pointset method for compressible Euler and Navier-Stokes", ITWM, Kaiserslautern, Germany.
- [19] Lancaster. P, Salkauskas. K, (1981), "Surfaces generated by moving least squares methods", Mathematics of computation, vol. 37, pp. 141-158.
- [20] Langston. L. S, (1982), "Heat transfer from multidimensional objects using one-dimensional solutions for heat loss", International Journal of Heat and Mass Transfer 25, pp. 149–50.
- [21] Li. Q-H, Chen. Sh-Sh, Kou. G-X, (2011), "Transient heat conduction analysis using the MLPG method and modified precise time step integration method", Journal of Computational Physics 230, 2736–2750.
- [22] Liu. G. R, Gu. Y. T, (2005), "*An Introduction to Meshfree Methods and Their Programming*", Springer: New York.
- [23] Liu. G. R, (2003), "*MeshFree Methods: moving beyond the finite element method*", ed: CRC Press, Broca Raton.
- [24] Mallows. C.L, (1973), "Some comments on Cp", Technometrics 15, 661-675.

- [25] Meinguet. J, (1979), "Multivariate interpolation at arbitrary points made simple", Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP), vol. 30, pp. 292-304.
- [26] Mirzaei. D, Dehghan. M, (2011), "MLPG method for transient heat conduction problem with MLS as trial approximation in both time and space domains", CMES, vol.72, no.3, pp.185-210.
- [27] Mirzaei. D, Schaback. R, (2014), "Solving heat conduction problems by the direct meshless local Petrov-Galerkin (DMLPG) method", Springer Science+BusinessMedia New York 2013, Numer Algor 65:275–291.
- [28] Piessens. R, (1971), "Gaussian quadrature formulas for the numerical integration of Bromwich's integral and the inversion of the laplace transform", J. Eng. Math. 5 (1). pp. 1–9.
- [29] Prokic. A, Lukic. D, (2007), "Dynamic behavior of braced thin walled beams", International Applied Mechanics, Vol.43, pp. 1290-1303.
- [30] Prolovic. V, Bonic. Z, (2008), "Finite difference method application in design of foundation girder of variable cross-section loaded on ends", Facta Universitatis, Architecture and civil Engineering, 179-185.
- [31] Sacks. J, Welch. WJ, Mitchell. TJ, Wynn. HP, (1989), "*Design and Analysis of Computer Experiments*", Statistical Science, 4:409– 435.
- [32] Sacks. J, Susannah. SB, Welch. WJ, (1989), "*Design for Computer Experiments*", Technometrics; 31:41– 47.
- [33] Sadiku. M. N. O, (2001), "Numerical Techniques in Electromagnetic", CRC Press.
- [34] Shepard. D, (1968), "A two-dimensional interpolation function for irregularly-spaced data", In Proceedings of the 23th National Conferance ACM, pp. 517-524.
- [35] Simpson. TW, Mauery. TM, Korte. JJ, Mistree. F, (1998), "Comparison of response surface and kriging models for multidisciplinary design optimization", Proceedings of the Seventh Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization, AIAA-98-4755, Feb 01.
- [36] Schmid. Jr. J (December 1947). "The relationship between the coefficient of correlation and the angle included between regression lines". The Journal of Educational Research 41.
- [37] Sladek. V, Sladek. J, (2011), "Mesh-free methods and time integrations for transient heat conduction", Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences, 18: 115–128.

-
- [38] Sommariva. A, Vianello. M, (2005), "Numerical cubature on scattered data by radial basis functions", AMS Subject Classification: 65D05, 65D32, September 5, 2005.
- [39] Stewart, James, (2008), "*Vector Calculus, Calculus: Early Transcendentals* ", (6 ed.), Thomson Brooks/Cole, ISBN 978-0-495-
- [40] Tabarrok. B, Xiong. Y, (1991), "Finite element formulations that include particular solutions of governing equations", Int. J. Numer. Methods Engrg. 31, 777-787.
- [41] Wahba. G, Wold. S, (1975), "A completely automatic French curve: Fitting spline functions by crossvalidation", Comm. Statist. 4, 1-17.
- [42] Zenisek. A, (1973), "Polynomial approximation tetrahedrons in the finite element method", J. Approximation Theory, 7, pp. 334-351.
- [43] Zienkiewicz. O. C, Parekh. C. J, (1970), "Transient field problems: Two-dimensional and three-dimensional analysis by isoparametric finite elements", Int. J. num. Meth. Engrg, 2, 61-71.
- [44] Zhao. Na, Ren. H, (2014), "The interpolating element-free Galerkin method for 2D transient heat conduction problems", Mathematical Problems in Engineering, Volume 2014, Article ID 712834, 9 pages.
- [45] Zhuang. X, (2010), "Meshless methods: theory and application in 3D fracture modelling with level sets", Doctoral thesis Durham University.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Analysis	آنالیز
Thin Plate Spline	اسپلاین صفحه نازک
Unity Partition	افراز یکه
Transfer	انتقال
Isoparametric	ایزوپارامتری
Meshfree	بدون مش
Optimization	بهینه‌سازی
Basis	پایه
Backward	پسرو
Forward	پیشرو
Predictor	پیشگویی
Penalty Function	تابع پنالتی
Functional	تابعک
Green Function	تابع گرین
Tensor	تانسور
Generalized	تعمیم‌یافته
Differences	تفاضلات
Heat Conduction	جریان گرما
Linear	خطی
Interpolation	درونیابی
Delta Dirac	دلتای دیراک
Bilinear	دوسویه
Divergence	دیورژانس
Particle	ذرات
Traditional	رایج

Meshless Method	روش بدون مش
Finite Element Method	روش عناصر متناهی
Parabolic	سهموی
Condition	شرایط
Radial	شعاعی
Explicit	صریح
Coefficient	ضرایب
Cross-Validation	ضرب معتبرسازی
Implicit	ضمنی
Moving Kringing	کرینجینگ متحرک
Moving Least Squares	کمترین مربعات متحرک
Scattered Node	گره پراکنده
Discretization	گسسته‌سازی
Moment	گشتاور
Constraint	محدودیت
Mean Squared	مربع میانگین
Essential Boundary	مرز ضروری
Partial Differential Equation	معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی
Ordinary Differential Equation	معادلات دیفرانسیل معمولی
Local	منطقه‌ای
Field	میدان
Unbiased	نااریب
Transient	ناپایدار
Domain of Influnce	ناحیه تاثیر
Convergence Rate	نسبت همگرایی
Parent	والد
Correlation	همبستگی
Homogeneous	همگن
Smooth	هموار
Heaviside	هوی‌ساید
Hydrodynamics	هیدرودینامیک

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Analysis	آنالیز
Backward	پسرو
Basis	پایه
Bilinear	دوسویه
Coefficient	ضرایب
Condition	شرایط
Constraint	محدودیت
Convergence Rate	نسبت همگرایی
Correlation	همبستگی
Cross-Validation	ضرب معتبرسازی
Delta Dirac	دلتای دیراک
Differences	تفاضلات
Discretization	گسسته‌سازی
Divergence	دیورژانس
Domain of Influence	ناحیه تاثیر
Essential Boundary	مرز ضروری
Explicit	صریح
Field	میدان
Finite Element Method	روش عناصر متناهی
Forward	پیشرو
Functional	تابعک
Generalized	تعمیم‌یافته
Green Function	تابع گرین
Heat Conduction	جریان گرما
Heaviside	هوی‌ساید

Homogeneous	همگن
Hydrodynamics	هیدرودینامیک
Implicit	ضمنی
Interpolation	درونیابی
Isoparametric	ایزوپارامتری
Linear	خطی
Local	منطقه‌ای
Mean Squared	مربع میانگین
Meshfree	بدون مش
Meshless Method	روش بدون مش
Moment	گشتاور
Moving Kringing	کرینجینگ متحرک
Moving Least Squares	کمترین مربعات متحرک
Optimization	بهینه‌سازی
Ordinary Differential Equation	معادلات دیفرانسیل معمولی
Parabolic	سهموی
Parent	والد
Partial Differential Equation	معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی
Particle	ذرات
Penalty Function	تابع پینالتی
Predictor	پیشگویی
Radial	شعاعی
Scattered Node	گره پراکنده
Smooth	هموار
Tensor	تانسور
Thin Plate Spline	اسپلاین صفحه نازک
Traditional	رایج
Transient	ناپایدار
Transfer	انتقال
Unbiased	نااریب
Unity Partition	افراز یکه

نمایه

- اسپلین صفحه نازک هموار، ۵۵
اسپلین صفحه‌ای نازک، ۵۴
المان مثلی، ۱۶
المان‌های چهارگره‌ای، ۱۹
تابع
بای‌هامونیک، ۹
دلتای دیراک، ۱۰
هموار، ۹
پله‌ای هوی‌ساید، ۹
پنالیتی، ۱۲
گرین، ۱۰
تابع وزن، ۴۶
تابعک، ۱۰
درونیابی کرینجینگ، ۶۵
دلتای کرونگر، ۵
دیورژانس، ۸
روش
بدون المان پتروگالرکین منطقه‌ای، ۷۲
بدون مش، ۵
تفاضلات متناهی، ۴۱
تقریب کمترین مربعات متحرک، ۴۳
درونیابی شعاعی منطقه‌ای، ۳۹
درونیابی نقطه‌ای، ۳۰
درونیابی نقطه‌ای شعاعی، ۳۱
درونیابی نقطه‌ای چندجمله‌ای، ۳۰
عناصر متناهی، ۴
شبیه‌سازی عددی، ۴
- شکل
ضعیف، ۷
قوی، ۶
ضرب تانسور، ۱۱
ضریب همبستگی، ۱۲
قضیه
دیورژانس، ۸
گرین، ۹
ماتریس ممان، ۳۱
متعامد، ۹
محمل دامنه منطقه‌ای، ۳۰
محمل فشرده، ۹
مساله
مقدار مرزی، ۴
پایدار، ۹
معادله بای‌هامونیک، ۹
کرینجینگ متحرک، ۶۷
گسسته‌سازی، ۱۶، ۴۰، ۴۹

Aabstract

The thesis deals with transient heat conduction in functionally gradient materials. The spatial variation of the temperature field is approximated by using alternatively two various meshfree approximations, and two improved meshless methods. The traditional two-point difference method is selected for the time discretization scheme. Two selected numerical examples are presented in this thesis to demonstrate the availability and accuracy of the present approach comparing with the traditional meshfree methods and finite element method. In the first chapter, we introduce the transient heat conduction problem, meshless methods and the needed definitions and theorems. The second chapter, express the finite element method and using of them for solving transient heat conduction problem. The third chapter consist of the traditional meshfree methods. In the forth chapter we introduce the improved meshless methods for solving the transient heat conduction problem and in the fifth chapter we show the numerical results. In this thesis all examples are solved by Matlab software.

Keywords: Meshfree method, Smoothing thin plate splines, Transient heat conduction, Local radial point interpolation method, Meshless local Petrov–Galerkin method, Moving Kriging interpolation method, Moving least–squares approximation, Radial point interpolation method, Element–free Galerkin method.



Shahrood University of Technology

Shahrood University
Faculty of Mathematical Sciences

Dissertation Submitted in Partial
Fulfillment of the Requirements for the
Degree of Master of Science in
Applied Mathematics

Meshfree Methods for Transient Heat Conduction Problems

Supervisor

Dr. Ali Mesforush

Advisor

Dr. Hojjat Ahsani Tehrani

by

Khadijeh Hosseini

2015