



دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی  
گروه ریاضی کاربردی

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته  
ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

عنوان

# روش نامساوی ماتریسی خطی در تئوری کنترل

استاد راهنما

دکتر حجت احسنی طهرانی

استاد مشاور

دکتر مهدی قوتمند

دانشجو

فاطمه حمدری ماسوله

۱۳۹۳

در این خاک،  
در این پاک،  
به جز عشق،  
به جز مهر،  
دگر هیچ نداریم  
”مولانا“

تقدیم بابوسه به دستان پدر و مادر عزیز و فداکارم...

## سپاس گزار می...

سپاس خدای را که سخنوران، دستودن او بمانند و شمارندگان، شمردن نعمت های او ندانند و کوشندگان، حق او را گزاردن نتوانند.

بدون شک جایگاه و منزلت استاد، اجل از آن است که در مقام قدردانی از زحمات بی ثباتی او، بازبان قاصرو دست ناتوان، چیزی بجا نیاوریم. اما از آنجایی که تجلیل از استاد، سپاس انسانی است که هدف و غایت آفرینش را تأمین می کند و سلامت امانت بانی را که به دستش سپرده اند تضمین؛ و بر حسب وظیفه و از باب تشکر «من لم یسکر المنعم من المخلوقین لم یسکر الله». از استاد شایسته؛ جناب آقای دکتر حجت احسنی طهرانی که در کمال سع صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ گلی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این رساله را بر عهده گرفتند.

بر خود لازم می دانم حضور استاد ارجمند جناب آقای دکتر مهدی قوتمند را به عنوان استاد مشاور این طرح ارج نهم و سپاس گویم. از اساتید داور آقایان دکتر علی مس فروش و دکتر جعفر فتحعلی قبول زحمت نموده و داوری این پایان نامه را بر عهده گرفته و قطعاً نظرات این بزرگواران در هر چه بهتر شدن این پایان نامه مشمر شمر خواهد بود، تشکر می نمایم.

قدردانی می کنم از پدر بزرگوار و مادر مهربانم آن دو فرشته ای که از خواسته هایشان گذشتند، سختی ها را به جان خریدند و خود را سپر بلائی مشکلات و ناملایمات کردند تا من به جایگاهی که اکنون در آن ایستاده ام برسم. تشکر از خواهرانم که وجودشان شادی بخش و صفایشان بایه آرامش من هستند.

## تعمدنامه

اینجانب فاطمه حیدری ماسوله دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی دانشکده علوم ریاضی دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان روش نامساوی ماتریسی خطی در تئوری کنترل، تحت راهنمایی دکتر حجت احسنی طهرانی متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تاکنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه شاهرود “ یا “ Shahrood University “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

فاطمه حیدری ماسوله  
۱۳۹۳

## مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

## چکیده

در این پایان نامه به نامساوی ماتریسی خطی در تجزیه و تحلیل سیستم‌های دینامیکی پرداخته شده است. روشی توسط لیاپانوف مطرح گردیده که برای برخی از مسائل عملی خاص در مهندسی کنترل به ویژه مساله پایداری سیستم‌های کنترل با عملگری خاص اعمال گردیده است. در مسائل بهینه‌سازی عینا فرموله شده، علاقه‌مند به یافتن شرایط لازم برای راه‌حل بهینه موجود هستیم. از این رو طبیعی است که متوسل به شاخه‌ای از تجزیه و تحلیل شویم که این شرایط را فراهم نماید.

در این پایان نامه تلاش شده روش حل نامساوی ماتریسی خطی و زمینه‌های کاربردی آن با مثال‌های عینی بیان گردد، در ضمن به بررسی خصوصیات نامساوی ماتریسی خطی برای سیستم‌های توصیفی گسسته زمان خطی و طراحی کنترلگر پس‌خورد خروجی مقاوم با استفاده از این روش پرداخته شده و در نهایت پایداری سیستم‌های دوخطی را از طریق کنترل پس‌خورد حالت خطی مورد بررسی قرار داده‌ایم.

**کلمات کلیدی:** خطی، پس‌خورد، خروجی، نامساوی، دو خطی مستقیم، کنترل، پایداری، محدب.

# لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

۱. مقاله اول

۲. مقاله دوم

۳. مقاله سوم

# فهرست مطالب

۱	مقدمه و تعاریف	۱
۱	تاریخچه	۱.۱
۳	تعاریف اولیه	۲.۱
۵	تعاریف ویژه‌ی نامساوی ماتریسی خطی	۳.۱
۱۱	بهبودسازی محدب و نامساوی ماتریسی خطی	۲
۱۱	معرفی	۱.۲
۱۲	حقایقی از تجزیه و تحلیل محدب	۲.۲
۱۵	۱.۲.۲ کمینه‌ی سراسری و محلی	۱.۲.۲
۱۶	برخی از مسائل استاندارد مربوط به نامساوی ماتریسی خطی	۳.۲
۱۸	متغیر ماتریسی	۴.۲
۱۸	برخی از مسائل استاندارد	۵.۲
۱۹	۱.۵.۲ مسائل نامساوی ماتریسی خطی	۱.۵.۲
۱۹	۲.۵.۲ مسائل مقدار ویژه	۲.۵.۲
۲۰	۳.۵.۲ مسائل مقدار ویژه تعمیم یافته	۳.۵.۲
۲۱	۴.۵.۲ مسئله‌ی محدب	۴.۵.۲
۲۲	روش الگوریتم بیضوی	۶.۲
۲۳	برخی از مسائل استاندارد مربوط به نامساوی ماتریسی خطی	۷.۲
۲۵	روش نقطه درونی	۸.۲
۲۶	۱.۸.۲ مرکز آنالیزی نامساوی ماتریسی خطی	۱.۸.۲
۲۷	۲.۸.۲ مسیرهایی از مرکز	۲.۸.۲
۲۸	۳.۸.۲ روش مرکزی	۳.۸.۲
۲۹	۹.۲ نتایج دیگر در نامساوی ماتریسی	۹.۲
۲۹	۱.۹.۲ حذف از جمله نیمه معین	۱.۹.۲
۳۰	۲.۹.۲ حذف متغیرهای ماتریسی	۲.۹.۲
۳۱	۱۰.۲ پایداری جزئی سیستم‌های غیرخطی	۱۰.۲
۳۱	۱.۱۰.۲ پایداری لیاپانوف	۱.۱۰.۲

۳۲	تعریف پایداری لیاپانوف	۲.۱۰.۲
۳۳	تعریف توابع معین	۳.۱۰.۲
۳۴	پایداری جزئی از سیستم‌های خطی	۴.۱۰.۲
۳۵	نواحی پایدار عمومی برای سیستم LTI	۵.۱۰.۲
۳۷	عملکرد جزئی درجه دوم	۶.۱۰.۲
۳۸	عملکرد جزئی $H_\infty$	۷.۱۰.۲
۴۱	خصوصیات نامساوی ماتریسی خطی برای سیستم‌های توصیفی گسسته - زمان خطی	۳
۴۱	لم حقیقی مثبت برای سیستم‌های گسسته زمان خطی	۱.۳
۵۱	طراحی کنترلگر پس‌خورد خروجی مقاوم با استفاده از روش نامساوی ماتریسی خطی	۴
۵۱	پس‌خورد خروجی مقاوم	۱.۴
۵۲	فرمول‌بندی مسئله	۲.۴
۵۳	طراحی ماتریس پس‌خورد خروجی مقاوم	۳.۴
۵۶	مثال‌ها	۴.۴
۶۱	نتایج محاسبات به دست آمده از طریق روند $A$	۱.۴.۴
۶۱	نتایج محاسبات به دست آمده از طریق روند $B$	۲.۴.۴
۶۳	سیستم‌های دو خطی	۵
۶۳	پایداری سیستم دو خطی از طریق کنترل پس‌خورد حالت خطی	۱.۵
۷۳	نتیجه‌گیری	۶
۷۵	مطالبی از روند نامساوی ماتریسی خطی در نرم افزار متلب	آ
۷۵	توابع کاربردی در نامساوی ماتریسی خطی	۱.آ
۷۵	setlmi	۱.۱.آ
۷۵	getlmi	۲.۱.آ
۷۵	lmiterm	۳.۱.آ
۷۷	lmivar	۴.۱.آ
۷۷	lmivar	۵.۱.آ
۷۹	feasp	۶.۱.آ
۸۱	dellmi	۷.۱.آ
۸۱	delmvar	۸.۱.آ
۸۴	مراجع	
۸۹	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی	





# فصل ۱

## مقدمه و تعاریف

### ۱.۱ تاریخچه

تاریخچه‌ی نامساوی ماتریسی خطی در تجزیه و تحلیل سیستم‌های دینامیکی به بیش از ۱۰۰ سال می‌رسد [۵]. از سال ۱۸۹۰ فردی به نام لیاپانوف<sup>۱</sup> کار اصلی خود را که در حال حاضر به نظریه لیاپانوف معروف است ارائه نمود؛ وی نشان داد که معادله‌ی دیفرانسیل:

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) \quad (1.1)$$

پایدار است، اگر و تنها اگر ماتریس معین مثبت  $P$  ای بتوان یافت به طوری که نامساوی زیر برقرار باشد:

$$A^T P + PA < 0$$

به نامساوی فوق نامساوی لیاپانوف بر روی  $P$  گفته می‌شود که فرم خاصی از نامساوی ماتریسی خطی است. هم‌چنین لیاپانوف به صراحت نشان داد این نخستین نامساوی ماتریسی خطی است که با انتخاب  $Q = Q^T > 0$  مناسب و سپس حل معادله خطی  $A^T P + PA = -Q$  می‌توان آن را حل نمود. نقطه‌ی عطف مهم بعدی در سال ۱۹۸۰ توسط لُر<sup>۲</sup> و پاسنیکاو<sup>۳</sup> اتفاق افتاد، آنها روش‌های لیاپانوف را برای برخی از مسائل عملی خاص در مهندسی کنترل به ویژه مسأله پایداری سیستم‌های کنترل با شرایط خاص اعمال نمودند.

موفقیت بزرگ بعدی در اوایل دهه‌ی ۱۹۶۰ رخ داد؛ زمانی که پژوهشگرانی چون یاکوبوویچ<sup>۴</sup>، کالمن<sup>۵</sup>، پاپاو<sup>۶</sup> و دیگر محققان توانستند رابطه نامساوی ماتریسی خطی که در مسأله‌ی لُر موجود بوده را با

<sup>۱</sup>Lyapunov

<sup>۲</sup>Lur'r

<sup>۳</sup>Posnikow

<sup>۴</sup>Yakubovich

<sup>۵</sup>Kalman

استفاده از معیارهای ساده‌ی گرافیکی به نام لم حقیقی مثبت (pr) <sup>۷</sup> کاهش دهند. در اوایل سال ۱۹۶۰، نقش مهم نامساوی ماتریسی خطی در نظریه کنترل به رسمیت شناخته شد. در سال ۱۹۷۱ مشخص گردید نامساوی ماتریسی خطی که در لم حقیقی مثبت بیان شده را نه تنها می‌توان از طریق برنامه‌های گرافیکی حل نمود؛ بلکه توسط معادله‌ی جبری ریکاتی ARE <sup>۸</sup> قابل حل بوده است. در همین سال، جی. سی. ویلمز <sup>۹</sup> نامساوی ماتریسی خطی را بر روی مسائل کنترل بهینه‌ی درجه‌ی دوم بررسی نمود به طوریکه:

$$\begin{bmatrix} A^T + PA + Q & PB + C^T \\ B^T P + C & R \end{bmatrix} \geq 0 \quad (2.1)$$

LMI بالا را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$A^T P + PA - (PB + C^T)R^{-1}(B^T P + C) + Q = 0$$

در این سال‌ها پژوهشگران چندین روش را برای انواع خاصی از نامساوی ماتریسی خطی یافتند که می‌توان به روش مستقیم (برای سیستم‌های کوچک)، روش گرافیکی، حل از طریق معادلات ریکاتی اشاره نمود.

خلاصه‌ای از وقایع کلیدی از تاریخچه نامساوی ماتریسی خطی که در تئوری کنترل مطرح گردیده به قرار زیر می‌باشد:

◀ در سال ۱۸۹۰: اولین نامساوی ماتریسی خطی به وسیله معادله لیاپانوف مطرح گردید.

◀ در سال ۱۹۴۰: روش لیاپانوف به صورت کاربردی در مسائل مهندسی کنترل بیان شد.

◀ در اوایل سال ۱۹۶۰: لم حقیقی مثبت تکنیک‌های گرافیکی را برای حل گروهی از نامساوی ماتریسی خطی بیان نمود که در سطح گسترده‌ای مورد استفاده قرار گرفت.

◀ در اواخر سال ۱۹۶۰: به وسیله معادله‌ی جبری ریکاتی گروهی از نامساوی‌های ماتریسی خطی حل گردید.

◀ در اوایل سال ۱۹۸۰: از طریق برنامه‌نویسی محدب بسیاری از نامساوی‌های ماتریسی خطی به آسانی حل گردید.

<sup>۶</sup>Popov

<sup>۷</sup>Positive real

<sup>۸</sup>Algebraic Riccati Equation

<sup>۹</sup>J.C. Willems

◀ در اواخر دهه ۱۹۸۰: روش الگوریتم نقطه درونی برای نامساوی ماتریسی خطی طرح ریزی شد.

## ۲.۱ تعاریف اولیه

### تعریف ۱.۲.۱. معادله‌ی حرکت

بسیاری از سیستم‌های فیزیکی را می‌توان با دستگاه معادلات دیفرانسیل به صورت زیر توصیف نمود:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t), t) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t), t) \end{cases} \quad (۳.۱)$$

برای دستگاه معادلات دیفرانسیل (۳.۱) روابط زیر را در نظر بگیرید:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}$$

آنگاه آن را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \quad (۴.۱)$$

که در آن  $t$  متغیر زمان،  $x(t)$  بردار ستونی  $n$  بعدی موسوم به بردار حالت و  $u(t)$  برداری ستونی  $m$  بعدی موسوم به بردار ورودی یا متغیر کنترل می‌باشد. معادله‌ی دیفرانسیل فوق را معادله‌ی حالت سیستم می‌نامند [۳۲].

### تعریف ۲.۲.۱. بردار خروجی

فرض کنیم  $y(t)$  بردار  $r$  بعدی باشد که با زمان تغییر می‌کند و به صورت زیر به  $x(t)$  و  $u(t)$  و  $t$  وابسته است:

$$\begin{cases} y_1(t) = g_1(x_1(t), \dots, u_1(t), \dots, u_m(t), t) \\ \vdots \\ y_r(t) = g_r(x_1(t), \dots, u_1(t), \dots, u_m(t), t) \end{cases}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_r(t) \end{bmatrix} = g(x(t), u(t), t) \quad (5.1)$$

به  $y(t)$  بردار خروجی می‌گویند [۳۲].

### تعریف ۳.۲.۱. معادلات سیستم

معادلات حالت و معادلات خروجی را معادلات سیستم گوئیم و به صورت زیر نمایش می‌دهیم [۳۲]:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \\ y(t) = g(x(t), u(t), t) \end{cases} \quad (6.1)$$

### تعریف ۴.۲.۱. سیستم ناوردای پیوسته زمان خطی

برای سیستم پیوسته، معادلات حالت و خروجی به صورت زیر تعریف می‌کنیم [۳۲]:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (7.1)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (8.1)$$

### تعریف ۵.۲.۱. سیستم ناوردای گسسته زمان خطی

برای سیستم گسسته، معادلات حالت و خروجی به صورت زیر تعریف می‌کنیم [۳۲]:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (9.1)$$

$$y(k) = Cx(k) \quad (10.1)$$

### تعریف ۶.۲.۱. سیستم کنترل‌پذیر

سیستم تولید شده با معادلات (۶.۱) را کنترل‌پذیر گویند، اگر بتوان حالت سیستم را از بردار دلخواه  $x(0)$  (حالت اولیه در لحظه  $t_0$ ) در زمان متناهی، به بردار دلخواه دیگری مانند  $x(V)$  (حالت تعادل در لحظه  $t_v$ ) رساند. معمولاً  $x(V)$  را بردار صفر در نظر می‌گیریم.

ماتریس  $Q = [B, AB, \dots, A^{n-1}B]$  را ماتریس کنترل‌پذیری سیستم، می‌نامیم و سیستم معادلات (۶.۱) را کنترل‌پذیر گویند اگر و تنها اگر ستون‌های ماتریس کنترل‌پذیری سیستم فضای  $\mathbb{R}$  را تولید کند [۱۶].

## ۳.۱ تعاریف ویژه‌ی نامساوی ماتریسی خطی

تعریف ۱.۳.۱. نامساوی ماتریسی خطی به شکل زیر بیان می‌شود [۵]:

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0$$

که در آن  $x \in \mathbf{R}^m$ ,  $F_i \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ,  $F_i = F_i^T$  .  $F(x) = F(x)^T$  خواهیم داشت

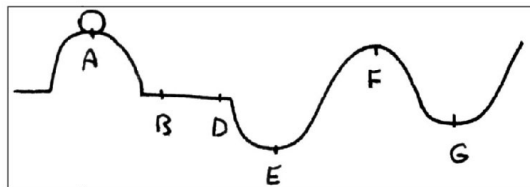
تعریف ۲.۳.۱. تعادل

به طور کلی اگر سیستمی بدون اعمال ورودی و هرگونه اغتشاش دارای خروجی باشد و در همان حالت باقی بماند سیستم را در حالت تعادل می‌گوییم [۵].

تعریف ۳.۳.۱. پایداری

اگر سیستمی کنترل خطی مستقل از زمان تحت تأثیر اغتشاش قرار گیرد و خروجی آن در نهایت به حالت تعادل بازگردد سیستم را پایدار می‌خوانیم [۵].

تعریف ۴.۳.۱. اگر سیستم ناوردای زمانی خطی LTI<sup>۱</sup> تحت تأثیر اغتشاش قرار گرفته و خروجی برای همیشه نوسان کند، آنگاه سیستم را ناپایدار می‌خوانیم. با ارائه‌ی شکل، سه تعریف فوق را نشان می‌دهیم [۵].



شکل ۱.۱: بررسی سیستم LTI

◀ A, E, F, G و بین B و D نقاط تعادل می‌گویند.

<sup>۱</sup> Linear Time – Invariant

◀ نقاطی مانند  $F$  و  $A$  نقاط ناپایدار هستند.

◀ نقاطی مانند  $G$  و  $E$  نقاط پایدار هستند.

### تعریف ۵.۳.۱. سیستم ثابت زمان خطی

این سیستم نمایش ریاضی رابطه‌ی میان ورودی و خروجی سیستم خطی تغییر ناپذیر با زمان ثابت می‌باشد.

سیستم خطی :

$$T[ax(t)] = aT[x(t)] \quad \text{قیاس}$$

$$T[x_1(t) + x_2(t)] = T[x_1(t)] + T[x_2(t)] \quad \text{انطباق}$$

سیستم زمان ثابت:

اگر  $y(t) = T[x(t)]$  باشد آنگاه  $y(t-s) = T[x(t-s)]$  است. خاصیت سیستم این است که تابع ورودی را دریافت کرده و تابع خروجی را به فرم زیر بر می‌گرداند:

$$y(t) = T[x(t)]$$

### تعریف ۶.۳.۱. نامساوی ماتریسی دوخطی

ساختار سیستم نامساوی ماتریسی دو خطی BMI<sup>۱۱</sup> به صورت زیر تعریف می‌شود [۳۹]:

$$F(x, y) = F(x, y)^T = F_0 + \sum_{i=1}^n x_i F_i + \sum_{j=1}^m y_j G_j + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i y_j H_{ij} < 0$$

### تعریف ۷.۳.۱. معادله‌ی ریکاتی

معادلات ریکاتی به‌طور وسیعی در کنترل بهینه استفاده می‌شوند که نامساوی ماتریسی می‌باشند و به صورت زیر نمایش داده می‌شود [۵]:

$$A^T P + PA + PBR^{-1}B^T P + Q < 0$$

که در آن ماتریس‌های  $A$  و  $B$  معلوم و  $P = P^T > 0$  و  $R = R^T > 0$  و  $Q = Q^T > 0$  مجهول هستند.

<sup>۱۱</sup> Bilinear Matrix Inequality

## تعریف ۸.۳.۱. پایداری

معادله دیفرانسیل  $\dot{x}(t) = f[x(t), u(t), t]$  معادله متناظر با سیستم غیر خطی تغییر پذیر با زمان است.  $t$  متغیر زمان،  $x(t)$  بردار ستونی تغییرپذیر با زمان و بردار حالت  $n$  بعدی،  $u(t)$  نشانگر متغیر ورودی یا کنترل و  $f$  تابع غیر خطی توصیف کننده سیستم است [۵].

تعریف ۹.۳.۱.  $\dot{x}(t) = f[x(t), u(t), t]$  را در نظر بگیرید:

نقطه تعادل  $x_e$  را پایدار به مفهوم لیاپانوف گویند، اگر برای هر  $t_0$  و هر  $\epsilon > 0$ ،  $\delta > 0$  وجود داشته باشد که به ازای  $\|x(t_0) - x_e\| < \delta$  برای  $t \geq t_0$  داشته باشیم:  $\|x(t) - x_e\| < \epsilon$  یعنی می توان با انتخاب حالت اولیه به اندازه کافی نزدیک به نقطه تعادل از دور شدن حالت از نقطه تعادل جلوگیری کرد. به عبارت دیگر، حالت تعادل  $x_e$  را به مفهوم لیاپانوف پایدار گوئیم، هرگاه پاسخ سیستم ناشی از هر حالت اولیه که نزدیک به  $x_e$  باشد، هیچ گاه از نقطه تعادل دور نشود. این تعریف صورت ضعیف پایداری است، صورت قوی تر و عملی تر وقتی است که پاسخ علاوه بر نزدیک ماندن به حالت تعادل، به سمت آن نیز میل کند [۵].

## تعریف ۱۰.۳.۱. نقطه تعادل پایدار مجانبی است، اگر

(الف) پایدار به مفهوم لیاپانوف باشد.

(ب) به ازای هر  $t_0$

$\rho(t_0) > 0$  وجود دارد که به ازای  $\|x(t_0) - x_e\| < \rho$  و برای هر  $t \rightarrow \infty$  رابطه زیر برقرار باشد:

$$\|x(t) - x_e\| \rightarrow 0$$

بنابراین پایداری مجانبی علاوه بر پایداری به مفهوم لیاپانوف، همگرایی سیستم به نقطه تعادل را نیز تضمین می کند [۵].

## تعریف ۱۱.۳.۱. قضیه اصلی پایداری لیاپانوف

سیستم داده شده زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}(t) = f(x, t)$$

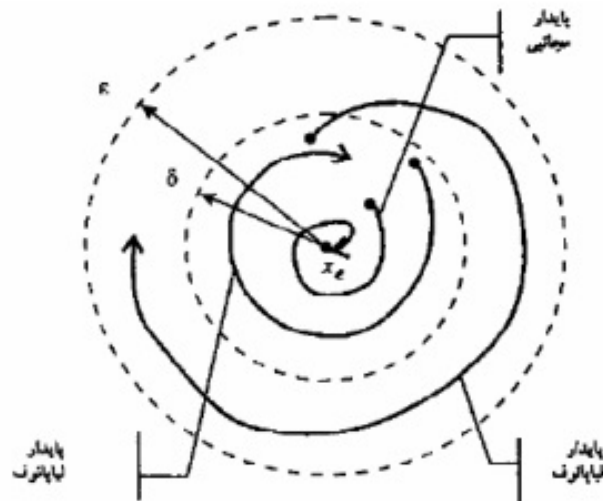
$$f(0, t) = 0$$

اگر تابع اسکالری مانند  $V(x)$  وجود داشته باشد که مشتقات جزئی آن پیوسته باشد.

(الف)  $V(x, t)$  معین مثبت باشد.

(ب)  $\dot{V}(x, t)$  معین منفی باشد.





شکل ۲.۱: بررسی تعاریف پایداری

آنگاه حالت تعادل مبدأ دارای پایداری مجانبی یکنواخت است.

یعنی اگر برای سیستم مشخص بتوان تابع اسکالر معین  $V(x)$  را به گونه ای یافت که مشتق زمانی آن روی مسیری، همواره منفی باشد آنگاه  $V(x)$  با گذشت زمان کوچکتر می شود و سرانجام به صفر می رسد و از آنجایی که  $V(x)$  معین مثبت است، لذا مبدأ دارای حالت پایداری مجانبی یکنواخت است. به عنوان مثال، در سیستم خطی مستقل زمانی  $\dot{x} = Ax$  شرط لازم و کافی پایداری آن است که قسمت حقیقی تمام مقادیر ویژه  $A$  منفی باشد.

برای فرار از محاسبه مقادیر ویژه، سیستم توصیف شده به فرم  $\dot{x}(t) = Ax(t)$  که در آن بردار حالت و  $A$  ماتریس ثابت نامنفرد است، شرط لازم و کافی برای پایداری حالت تعادل  $x = 0$  آن است که به ازای هر ماتریس هرمیتی  $(\bar{A}^T) = A^* = A$  و ماتریس معین مثبت  $Q$  ماتریس هرمیتی  $P$  موجود باشد به گونه ای که،

$$A^T P + P A = -Q$$

سیستم کنترل خطی را پایدار بحرانی گوئیم، هرگاه نوسانات خروجی برای همیشه ادامه یابد و در صورتی ناپایدار است که هنگام اعمال شرط اولیه جدید به آن، خروجی به طور بیکران واگرا شود.

$$u(t) = Kx(t) \quad (11.1)$$

اگر متغیر ورودی  $u(t)$  را متناسب با بردار حالت  $x(t)$  به صورت زیر تعریف کنیم، ماتریس  $K \in \mathbb{R}^n$  را ماتریس پس خورد حالت و رابطه فوق را قانون کنترل می‌نامیم. چنانچه  $u(t)$  متناسب با بردار خروجی  $y(t)$  انتخاب شود، یعنی  $u(t) = Ky(t)$  آنگاه سیستم کنترل را سیستم کنترل با پس خورد خروجی و  $K \in \mathbb{R}^{m \times p}$  را ماتریس پس خورد خروجی گویند.

در نتیجه رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t) \quad (۱۲.۱)$$

در این رابطه، ماتریس  $A$  را ماتریس حلقه باز و مقادیر ویژه آن را مقادیر ویژه سیستم حلقه باز سیستم گویند. همچنین ماتریس  $A + BK$  را ماتریس حلقه بسته و مقادیر ویژه آن را مقادیر ویژه سیستم حلقه بسته می‌گویند [۵].

تعریف ۱۲.۳.۱. تابع انتقال در معادلات سیستم

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

نسبت ورودی به خروجی را تابع انتقال می‌نامیم و به صورت  $G(t) = \frac{Y(t)}{U(t)}$  نمایش می‌دهیم. در صورتیکه از معادلات سیستم، تبدیل لاپلاس بگیریم خواهیم داشت:

$$sX(s) - X(0) = AX(s) + BU(s)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s)$$

در این حالت تابع انتقال عبارت است از:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

با توجه به معادلات فوق و فرض  $X(0) = 0$  داریم:

$$sX(s) - AX(s) = BU(s)$$

$$(sI - A)X(s) = BU(s)$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s)$$

$$Y(s) = (C(sI - A)^{-1}B + D)U(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D$$

با استفاده از معکوس لاپلاس رابطه فوق،  $G(t)$  محاسبه می‌گردد [۳۱].

تعریف ۱۳.۳.۱. لم کالمن-یاکوبوویچ-پاپاو  
سیستم کنترل‌پذیر

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = cx(t) + Du(t)$$

را در نظر بگیرید و فرض کنید:

$$G(S) = C(SI - A)^{-1}B + D$$

$G(S)$  حقیقی مثبت اکید است اگر و تنها اگر ماتریس‌های  $\omega$ ،  $L$  و  $P = P^T > 0$  و ثابت مثبت  $\varepsilon$  موجود باشند به طوریکه روابط زیر برقرار باشد [۳۲]:

$$PA + A^T P = -L^T L - \varepsilon P$$

$$PB = C^T - L^T \omega$$

$$\omega^T \omega = D + D^T$$

# فصل ۲

## بهینه‌سازی محدب و نامساوی ماتریسی خطی

### ۱.۲ معرفی

در این فصل تمام تعاریف و قضایا از مرجع [۵] مورد استفاده قرار گرفته است. در زندگی روزمره، سؤالات فراوانی در زمینه بهینه‌سازی و فرآیندهای تصمیم‌گیری وجود دارد، و همواره شامل منتخب‌ترین تصمیم‌هاست که از تعدادی گزینه‌ها یا مجموعه‌هایی از تصمیمات کاندید شده می‌باشند. نمونه‌های بسیاری از این موضوع را می‌توان در علوم فنی هم‌چون مهندسی شیمی و برق مکانیک، در معماری، در اقتصاد و هم‌چنین در علوم اجتماعی، بیولوژیک، در فرآیندهای زیستی و زیست محیطی و مسائل سازمانی یافت.

به عنوان مثال، فرآیندهای تولید در صنعت بیشتر به بازار محور تبدیل شده‌اند که بیشترین نیازهای آنها انعطاف‌پذیری در خصوص تغییرات محصول و مشخصات محصولات با توجه به خواسته‌های مشتری در مورد کیفیت، قیمت و خصوصیات آنها است.

نتایج مهم اقتصادی تنها در نتیجه‌ی تصمیم‌گیری مناسب در شرایط عملیاتی فرآیند تحقق می‌یابد. به علت افزایش ملزومات ایمنی و انعطاف‌پذیری پروسه‌های تولید، جهت افزایش بهره‌وری و کنترل بهتر فرآورده‌ها، نیازمند تعداد ثابتی برای بهینه‌سازی بیشتر، می‌باشیم.

سبک مسأله بهینه‌سازی در ریاضیات شامل تعیین کاندیدهای تصمیم و از همه مهم‌تر، به طور رسمی، شامل مفهوم بهترین حالت یا تصمیم‌گیری بهینه می‌باشد. مجموعه‌ای از کاندیدای تصمیم را با  $H$  مشخص نماییم (به صورت محدود یا نامحدود)؛ آنگاه روندی برای تعیین کمیت اجرایی از متغیر  $x \in H$  برای بیان مقدار آن برحسب کمیت حقیقی منفرد  $f(x)$  که  $f$  تابع حقیقی و  $f: H \rightarrow \mathbb{R}$  می‌باشد را در نظر می‌گیریم.

مقدار تصمیم‌گیری  $x \in H$  توسط  $f(x)$  داده شده است. با توجه به تفسیر تابع هدف  $f$ ، ممکن است

برای به حداقل یا حداکثر رساندن  $f$  تمامی کاندیدهای  $H$  را خواستار باشیم. در تصمیم‌گیری بهینه، از  $H$  روی همه‌ی گزینه‌های شدنی  $f$  به حداقل یا حداکثر می‌رسد.

مسئله‌ی بهینه‌سازی جهت به حداقل رساندن تابع هدف  $f$  به روی  $H$  شامل سؤالات خاص مختلف زیر می‌باشد:

۱- حداقل هزینه‌ی شدنی چقدر است؟ که مقدار بهینه را تعیین می‌نماید.

$$V_{\text{opt}} := \inf_{x \in H} f(x) = \inf \{f(x) \mid x \in H\}$$

بر اساس قرارداد، اگر  $H$  تهی باشد، مقدار بهینه برابر است با  $V_{\text{opt}} = +\infty$ ؛ در حالی که در مسأله عنوان گردیده: اگر  $V_{\text{opt}} = -\infty$  جواب نامحدود است.

۲- چگونه تقریبی از جواب بهینه را تعیین نماییم؟ به عنوان مثال برای  $\varepsilon > 0$  دلخواه را در نظر می‌گیریم:  $x_\varepsilon \in H$  را تعیین می‌کنیم به طوری که  $V_{\text{opt}} \leq f(x_\varepsilon) \leq V_{\text{opt}} + \varepsilon$  برقرار باشد.

۳- جواب بهینه‌ی  $x_{\text{opt}} \in H$  با  $f(x_{\text{opt}}) = V_{\text{opt}}$  چگونه وجود دارد؟ اگر چنین است، گوئیم کمینه (مینیمال) شده‌ی آن به قرار زیر است:

$$f(x_*) = \min_{x \in H} f(x)$$

مجموعه‌ای از تمام جواب‌های بهینه را با آرگومان  $\min_{x \in H}$  نشان می‌دهیم.

۴- اگر  $x_{\text{opt}}$  راه حل بهینه وجود داشته باشد پس آن یکتا است؟

## ۲.۲ حقایق از تجزیه و تحلیل محدب

با توجه به مسائل بهینه‌سازی فرموله شده، علاقه‌مند به یافتن شرایط لازم برای جواب‌های بهینه موجود هستیم. از این رو طبیعی است که متوسل به شاخه‌ای از تجزیه و تحلیل محدب با توجه به شرایط موجود گردیم.

نتایج و تعاریف در این بخش به طور عمده پایه و بسیار مهم و کاربردی می‌باشند. با خلاصه‌ی برخی از تعاریف و خواص ابتدایی از جبر خطی و آنالیز تابعی شروع می‌کنیم. فرض کنید که  $\mathcal{X}$  و  $\mathcal{Y}$  در فضای خطی نورم باشند. تابع  $f$  که نگاشت  $\mathcal{X}$  به  $\mathcal{Y}$  گفته می‌شود هرگاه در  $x_* \in \mathcal{X}$  پیوسته باشد. اگر برای هر  $\varepsilon > 0$   $\delta = \delta(x_*, \varepsilon)$  وجود داشته باشد به طوری که:

$$\|f(x) - f(x_*)\| < \varepsilon \quad \text{هرگاه} \quad \|x - x_*\| < \delta \quad (1.2)$$

تابع  $f$  پیوسته است، اگر در تمام  $\mathcal{X}$  پیوسته باشد. در نهایت،  $f$  به طور پیوسته یکنواخت است اگر، برای  $\varepsilon > 0$ ،  $\delta = \delta(\varepsilon)$  وجود داشته باشد، که به  $x_0$  وابسته نیست، به طوری که در (۱.۲) در نظر گرفته شده است. بدیهی است، پیوستگی به تعریف نورم در فضای نورم  $\mathcal{X}$  و  $\mathcal{Y}$  بستگی دارد. تابع  $\mathcal{Y} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  بر روی  $x_0 \in \mathcal{X}$  پیوسته است اگر و تنها اگر برای هر دنباله‌ی  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  که  $x_n \in \mathcal{X}$  که به  $x_0$  از  $n \rightarrow \infty$  همگراست، که آنها در  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$  در نظر گرفته شده‌اند.

$H$  فشرده نامیده می‌شود، اگر برای هر دنباله‌ی  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  زیر دنباله‌ای متوالی  $\{x_{nm}\}_{m=1}^{\infty}$  وجود داشته، به طوری که به عنصر  $x_0 \in H$  همگرا باشد.

مجموعه‌های فشرده در فضاهای برداری با بُعد متناهی را می‌توان به راحتی مشخص نمود، در واقع اگر  $\mathcal{X}$ ، با بُعد متناهی باشد، پس زیر مجموعه‌ی  $H$  از  $\mathcal{X}$  فشرده است اگر و تنها اگر  $H$  بسته و محدود باشد.

قضیه‌ی معروف وایرستراس<sup>۱</sup> ابزار مناسبی برای تعیین اینکه آیا مسأله‌ی بهینه‌سازی جواب قابل قبول را می‌پذیرد یا خیر می‌باشد، این قضیه را بررسی می‌نماید.

### قضیه ۱.۲.۲. وایرستراس

اگر  $f : H \rightarrow \mathbb{R}$  تابعی پیوسته تعریف شده در زیر مجموعه‌ی فشرده  $H$  از فضای خطی نورم  $\mathcal{X}$  باشد، پس  $x_{\max}, x_{\min} \in H$  وجود دارد به طوری که :

$$f(x_{\min}) = \inf f(x) \leq f(x) \leq \sup f(x) = f(x_{\max})$$

برای همه‌ی  $x \in H$  می‌باشد.

برای بسیاری از مسائل بهینه‌سازی شرایط (پیوستگی و فشردگی) به شرایط بیش از حد محدود کننده‌ای تبدیل می‌شوند. بنابراین به مجموعه‌های محدب متوسل می‌شویم.

### تعریف ۲.۲.۲. مجموعه‌های محدب

مجموعه  $H$  در فضای برداری خطی محدب گفته می‌شود اگر،

$$\{x_1, x_2 \in H\} \rightarrow \{x := \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \in H \text{ همه } \alpha \in (0, 1)\}$$

از نظر هندسی، برای هر دو نقطه از مجموعه‌ی محدب نیز پاره خط متصل به این دو نقطه متعلق به مجموعه‌ای می‌باشد. به طور کلی مجموعه‌ای تهی و منفرد (مجموعه‌های که فقط شامل یک نقطه است) محدب در نظر گرفته می‌شود.

### تعریف ۳.۲.۲. ترکیبات محدب

<sup>۱</sup>wierierstrass

$H$  را زیر مجموعه‌ای از فضای برداری در نظر می‌گیریم، نقطه‌ی  $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$  ترکیبی محدب از  $x_1, x_2, \dots, x_n \in H$  نامیده می‌شود.

اگر  $\alpha_i \geq 0$  برای  $i = 1, \dots, n$  و  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$  باشد، به راحتی می‌توان مشاهده نمود که مجموعه برای تمام ترکیبات محدب از  $n$  نقاط  $x_1, \dots, x_n$  در  $H$  محدب می‌باشند.

گزاره ۴.۲.۲.  $\tau$  و  $H$  مجموعه‌ای محدب در فضای برداری نورم  $\mathcal{X}$  در نظر گرفته می‌شوند. بنابراین

◀  $\alpha\gamma := \{x \mid x = \alpha\gamma\}, \gamma \in H$  که  $\alpha$  محدب است.

◀ جمع  $H + \tau := \{x \mid x = \gamma + t, \gamma \in H, t \in \tau\}$  محدب است.

◀ برای هر  $\alpha_1 \geq 0$  و  $\alpha_2 \geq 0$  داریم:  $(\alpha_1 + \alpha_2)H = \alpha_1 H + \alpha_2 H$  که محدب می‌باشد.

◀ اگر  $H$  و  $\tau$  بسته درونی باشند محدب هستند.

◀ برای هر تبدیل خطی  $T : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$  تصویر  $TH = \{x \mid x = T\gamma, \gamma \in H\}$  و تصویر معکوس  $T^{-1}H = \{x \mid Tx \in H\}$  آن محدب می‌باشد.

◀ محل اشتراک  $H \cap \tau = \{x \mid x \in H, x \in \tau\}$  محدب است.

خاصیت توزیع در مورد سومین گزینه بی‌اهمیت بوده و به تحدب  $H$  بستگی دارد. آخرین خاصیت در واقع به اشتراک مجموعه‌ای دلخواه از مجموعه‌های محدب اشاره دارد.

تعریف ۵.۲.۲. توابع محدب

تابع  $f : H \rightarrow \mathbb{R}$  محدب نامیده می‌شود، اگر  $H$  مجموعه محدب غیرتهی و اگر برای همه  $x_1, x_2 \in H$  و  $\alpha \in (0, 1)$  داشته باشیم.

$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2) \quad (2.2)$$

$f$  اکیداً محدب است. اگر نامساوی (۲.۲) برای همه  $x_1, x_2 \in H$  و  $x_1 \neq x_2$  و  $\alpha \in (0, 1)$  اکید باشد.

توجه داشته باشید که دامنه تابع محدب به وسیله مجموعه محدب تعریف می‌گردد.

نمونه‌ی ساده‌ای از توابع محدب:

▶ روی  $\mathbb{R}$   $f(x) = x^2$

▶ روی  $[\Pi, 2\Pi]$   $f(x) = \sin x$

▶ روی  $x > 0$   $f(x) = -\log x$

تابع  $f : H \rightarrow \mathbb{R}$  مقعر نامیده می‌شود، اگر  $-f$  محدب باشد.

بسیاری از عملیات در توابع محدب به طور طبیعی تحدب را حفظ می‌کنند. برای مثال اگر  $f_1$  و  $f_2$  توابع محدب با دامنه‌ی  $H$  باشند؛ پس تابع  $f_1 + f_2 : x \rightarrow f_1(x) + f_2(x)$  محدب است. به

طور کلی تر،  $\alpha f_1 + \alpha f_2$  و تابع ترکیبی  $g(f_1)$  برای تمامی اعداد غیر منفی  $\alpha_1$  و  $\alpha_2$  و هر تابع غیرنزولی  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  محدب‌اند.

### تعریف ۶.۲.۲. توابع آفینی

تابع  $f: H \rightarrow \tau$  آفینی است اگر

$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) = \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2)$$

برای همه  $x_1, x_2 \in H$  و  $\alpha \in \mathbb{R}$  داریم. اگر  $H$  و  $\tau$  دارای بعد متناهی باشند، آنگاه تابع آفینی  $f: H \rightarrow \tau$  می‌تواند به صورت  $f(x) = f_0 + T(x)$  که  $f_0 \in \tau$  و  $T: H \rightarrow \tau$  نگاشت خطی است نمایش داده می‌شود. در واقع، موقعیت  $f_0 = f(0)$  و  $T(x) = f(x) - f(0)$  را نمایش می‌دهد. به ویژه  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  آفینی است اگر و تنها اگر  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  وجود داشته باشد، به طوریکه  $f(x) = f(x_0) + T(x - x_0)$  که  $T$  ماتریسی با ابعاد  $m \times n$  است.

ملاحظه ۷.۲.۲. همه توابع آفینی محدب و مقعراند.

## ۱.۲.۲. کمینه‌ی سراسری و محلی

هر فردی که تجربه کار با روش‌های بهینه‌سازی عددی را داشته باشد، با چالش‌های موجود در کمینه‌ی سراسری و محلی آشناست. یکی از دلایل بسیار مهم برای مطالعه‌ی توابع محدب مربوط به فقدان کمینه‌ی محلی است.

### قضیه ۸.۲.۲. بهینگی محلی و سراسری

فرض کنید  $H$  زیر مجموعه‌ی فضای نورم دار  $\mathcal{X}$  بوده، عنصر  $x_0 \in H$  جواب بهینه محلی از  $f: H \rightarrow \mathbb{R}$  نامیده می‌شود، اگر  $\varepsilon > 0$  موجود باشد به طوریکه به ازای همه  $x \in H$  که  $\|x - x_0\| < \varepsilon$  داریم داشته باشیم:

$$f(x_0) \leq f(x) \quad (۳.۲)$$

و اگر برای همه  $x \in H$  رابطه (۳.۲) برقرار باشد، آن را جواب بهینه سراسری می‌نامیم. به عبارتی  $x_0 \in H$  جواب بهینه محلی نامیده می‌شود اگر همسایگی از  $x_0$  وجود داشته باشد به طوریکه رابطه  $f(x_0) \leq f(x)$  برای همه نقاط نزدیک به  $x_0$  برقرار باشد طبق این تعریف، جواب بهینه سراسری جواب بهینه محلی نیز می‌باشد.

قضیه ۹.۲.۲. فرض کنید  $f: H \rightarrow \mathbb{R}$  محدب باشد. هر جواب بهینه محلی از  $f$  جواب بهینه سراسری است. علاوه بر این اگر  $f$  اکیداً محدب باشد پس جواب بهینه سراسری یکتا است.



برهان.  $f$  را محدب در نظر گرفته و فرض می‌کنیم  $x_0 \in H$  جواب بهینه محلی از  $f$  باشد؛ برای همهی  $x \in H$  و  $\alpha \in (0, 1)$  به قدر کافی کوچک داریم.

$$f(x_0) \leq f(x_0 + \alpha(x - x_0)) = f((1 - \alpha)x_0 + \alpha x) \leq (1 - \alpha)f(x_0) + \alpha f(x) \quad (4.2)$$

یعنی:

$$0 \leq \alpha(f(x) - f(x_0)) \quad (5.2)$$

یا  $f(x_0) \leq f(x)$ . بنابراین  $x_0$  جواب بهینه سراسری از  $f$  می‌باشد، اگر  $f$  اکیداً محدب باشد، سپس نامساوی دوم در (۴.۲) اکید است به طوریکه (۵.۲) برای همه  $x \in H$  اکید می‌باشد. بنابراین  $x_0$  باید یکتا باشد.  $\square$

در قسمت بعدی به شرح نامساوی ماتریسی خطی می‌پردازیم.

## ۳.۲ برخی از مسائل استاندارد مربوط به نامساوی ماتریسی خطی

نامساوی ماتریس خطی به صورت زیر

$$F(x) \triangleq F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0 \quad (6.2)$$

معرفی می‌شود که  $x \in \mathbf{R}^m$  متغیر و  $F_i = F_i^T \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ,  $i = 0, \dots, m$  ماتریس‌های متقارن داده شده می‌باشند. علامت نامساوی در عبارت بدین معناست که  $F(x)$  معین مثبت بوده، یعنی  $u^T F(x) u > 0$  برای همه  $u \in \mathbf{R}^n$  مخالف صفر است. البته نامساوی ماتریسی خطی در عبارت ذکر شده برابر است با  $n$  نامساوی چند جمله‌ای در  $x$ ، یعنی اصلی‌ترین مینورهای  $F(x)$  باید مثبت باشند.

$$F(x) \geq 0 \quad (7.2)$$

نامساوی ماتریسی خطی (۶.۲) قید محدب به روی  $x$  می‌باشد، یعنی مجموعه‌ی  $\{x | F(x) > 0\}$  محدب است. به طور خاص، نامساوی خطی، نامساوی درجه دوم، نامساوی فرم قیده‌های ماتریسی در تئوری کنترل موجود است؛ از قبیل لیاپانوف و نامساوی ماتریسی محدب درجه‌ی دوم که همه آنها را می‌توان به فرم نامساوی ماتریسی خطی تبدیل نمود.

نامساوی ماتریسی خطی چندگانه  $F^{(1)}(x) > 0, \dots, F^{(p)}(x) > 0$  را می‌توان به صورت نامساوی ماتریسی خطی یکتا از  $\text{diag}(F^{(1)}(x), \dots, F^{(p)}(x)) > 0$  نشان داد. بنابراین هیچ تمایزی بین مجموعه‌ای از نامساوی ماتریسی خطی و نامساوی ماتریسی خطی یکتا نخواهیم داشت، یعنی نامساوی ماتریسی خطی  $F^{(1)}(x) > 0, \dots, F^{(p)}(x) > 0$  به معنای  $\text{diag}(F^{(1)}(x), \dots, F^{(p)}(x)) > 0$  نامساوی ماتریسی خطی  $F(x) > 0$  خواهد بود. وقتی که ماتریس‌های  $F_i$  قطری باشند، نامساوی

ماتریسی خطی  $F(x) > \circ$  تنها مجموعه‌ای از نامساوی خطی است. نامساوی‌های غیرخطی (محدب) با استفاده از متمم شور<sup>۲</sup> به فرم نامساوی ماتریسی خطی تبدیل می‌شود. ایده اولیه به شرح زیر است:

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)^T & R(x) \end{bmatrix} > \circ \quad (۸.۲)$$

که  $Q(x) = Q(x)^T$  و  $R(x) = R(x)^T$  و وابستگی آفینی به روی  $x$  دارد و برابر است با:

$$R(x) > \circ, \quad Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)^T > \circ \quad (۹.۲)$$

به عبارت دیگر، مجموعه نامساوی غیر خطی (۹.۲) را می‌توان به عنوان نامساوی ماتریسی خطی در (۸.۲) نشان داد. اکنون با ذکر چند مثال این ایده را بررسی می‌نماییم.

مثال ۱.۳.۲. بیشترین مقدار تکین

قیدهای ماتریس نرم‌دار  $\|Z(x)\| < ۱$  که  $Z(x) \in \mathbf{R}^{p \times q}$  را در نظر گرفته که وابسته آفینی به روی  $x$  می‌باشد این قید غیرخطی بوده و نمی‌توان آن را به صورت مستقیم به نامساوی ماتریسی خطی تبدیل نمود در نتیجه از متمم شور بهره می‌بریم به طوریکه:

$$\begin{bmatrix} I & Z(x) \\ Z(x)^{-1} & I \end{bmatrix} > \circ$$

را خواهیم داشت.

ملاحظه ۲.۳.۲. از طرفی می‌دانیم که  $\|Z\| < ۱$  برابر است با  $I - ZZ^T$ .

به طورکلی  $q = ۱$  را می‌توان به صورت نامساوی درجه دوم در  $x$  کاهش داد.

مثال ۳.۳.۲. اکنون این قید  $c(x)^T P(x)^{-1} c(x) < ۱$  را در نظر بگیرید:

که،  $c(x) \in \mathbf{R}^n$  و  $P(x) = P(x)^T \in \mathbf{R}^{n \times n}$  وابسته آفینی به روی  $x$  است؛ که نامساوی ماتریسی خطی بیان شده آن به قرار زیر می‌باشد:

$$\begin{bmatrix} P(x) & c(x) \\ c(x)^T & ۱ \end{bmatrix} > \circ$$

مثال ۴.۳.۲. اکنون قید

$$\text{Tr} S(x)^T P(x)^{-1} S(x) < ۱, \quad P(x) > \circ$$

<sup>۲</sup>schur

که  $P(x) = P(x)^T \in \mathbf{R}^{n \times n}$  و  $S(x)^{n \times p}$  وابستگی آفینی به روی  $x$  دارد را بررسی می‌کنیم، توسط ماتریس متغیر کمکی جدید  $X = X^T \in \mathbf{R}^{p \times p}$  و نامساوی ماتریسی خطی آن به شرح زیر می‌باشد:

$$\text{Tr}X < 1, \quad \begin{bmatrix} X & S(x)^{-1} \\ S(x) & P(x) \end{bmatrix} > 0.$$

## ۴.۲ متغیر ماتریسی

اغلب با مسائلی که دارای متغیر ماتریسی است، مواجه‌ایم. به عنوان مثال، نامساوی لیاپانوف

$$A^T P + P A < 0 \quad (10.2)$$

که  $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$  بوده و  $P = P^T$  متغیر است.

در این مورد نمی‌توانیم به طور صریح نامساوی ماتریسی خطی را به فرم  $F(x) > 0$  بنویسیم، اما در عوض متغیرهای ماتریسی به وضوح نمایان است. عبارت نامساوی ماتریسی خطی  $A^T P + P A$  نمایانگر این است که  $P$  متغیر ماتریسی می‌باشد.

فرض  $P_1, \dots, P_m$  پایه‌ای برای ماتریس  $n \times n$  متقارن و  $m = \frac{n(n+1)}{2}$  باشد. آنگاه  $F_0 = 0$  و  $F_i = -A^T P_i - P_i A$  خروجی نامساوی ماتریسی خطی به فرم (۱۰.۲) فشرده شده می‌باشد.

مثال ۱.۴.۲. نامساوی ماتریسی درجه دوم را در نظر بگیرید:

$$A^T P + P A + P B R^{-1} B^T P + Q < 0 \quad (11.2)$$

که  $A, B, Q = Q^T, R = R^T > 0$  ماتریسی با اندازه متناظر و  $P = P^T$  متغیر است. لازم به ذکر است، متغیر  $P$  در نامساوی درجه دوم قرار داشته و می‌توان آن را به عنوان نامساوی ماتریسی خطی به قرار زیر بیان نمود.

$$\begin{bmatrix} -A^T - P A - Q & P B \\ B^T P & R \end{bmatrix} > 0.$$

## ۵.۲ برخی از مسائل استاندارد

برخی از مسائل رایج محدب و شبه محدب که با آن مواجه خواهیم شد را در اینجا بیان می‌کنیم:

## ۱.۵.۲ مسائل نامساوی ماتریسی خطی

برای پیدا کردن  $x^{\text{feas}}$  به طوریکه  $F(x^{\text{feas}})$  موجود باشد یا مشخص کردن اینکه نامساوی ماتریسی خطی نشدنی است، از روش دوگان بهره می‌بریم؛ که این بدان معناست:

$G \geq 0$  غیر صفری را پیدا می‌کنیم به طوریکه  $\text{Tr}GF_i = 0$  برای  $i = 1, \dots, m$  و  $\text{Tr}G \leq 0$  داشته باشیم.

## ۲.۵.۲ مسائل مقدار ویژه

مسائل مقدار ویژه EVP<sup>۳</sup> برای به حداقل رساندن حداکثر مقدار ویژه‌های از ماتریس می‌باشد، که وابسته به متغیرهای آفینی بوده به شرط اینکه قید نامساوی ماتریسی خطی (یا تعیین قید نشدنی) موجود باشد:

$$\begin{aligned} \min \quad & \lambda \\ \text{s.t.} \quad & \lambda I - A(x) > 0, \quad B(x) > 0 \end{aligned}$$

که  $A$  و  $B$  ماتریس‌های متقارن بوده که وابسته آفینی بر روی متغیر بهینه‌ی  $x$  می‌باشند. EVP معادل است با به حداقل رساندن تابعی خطی تحت عنوان نامساوی ماتریسی خطی یعنی:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & F(x) > 0 \end{aligned} \quad (۱۲.۲)$$

که  $F$  تابعی آفینی از  $x$  است. در موارد خاص وقتی که ماتریس‌های  $F_i$  کاملاً قطری باشند، این مسئله به مسئله برنامه‌ریزی خطی متداولی کاهش می‌یابد یعنی تابع خطی  $c^T x$  را به مجموعه‌ای از نامساوی خطی در  $x$  کاهش می‌دهیم.

یکی دیگر از فرم‌های معادل برای مقادیر ویژه تعمیم یافته EVP

$$\begin{aligned} \min \quad & \lambda \\ \text{s.t.} \quad & A(x, \lambda) > 0 \end{aligned}$$

می‌باشد که  $A$  به روی  $(x, \lambda)$  آفینی است.

<sup>۳</sup>Eigenvalue problems

مثالی از EVP را در زیر مشاهده نمایید:

$$\begin{aligned} \min \quad & \gamma \\ \text{s.t.} \quad & \begin{bmatrix} -A^T - PA - C^T C & PB \\ B^T P & \gamma I \end{bmatrix} > \circ, \quad P > \circ \end{aligned}$$

که ماتریس‌های  $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$  و  $B \in \mathbf{R}^{n \times p}$  و  $C \in \mathbf{R}^{m \times n}$  را خواهیم داشت. از طرفی،  $P$  و  $\gamma$  متغیرهای بهینه‌سازی می‌باشند. EVP را نیز می‌توان به قرار زیر به نامساوی درجه دوم تبدیل نمود:

$$\begin{aligned} \min \quad & \gamma \\ \text{s.t.} \quad & A^T P + PA + C^T C + \gamma P B B^T P < \circ, \quad P > \circ \end{aligned}$$

### ۳.۵.۲ مسائل مقدار ویژه تعمیم یافته

به GEVP<sup>۴</sup> مسئله مقدار ویژه تعمیم یافته گفته می‌شود. برای به حداقل رساندن مقدار ویژه تعمیم یافته از ماتریسی که وابسته آفینی است تحت متغیر از قید نامساوی ماتریسی خطی استفاده می‌شود.

فرم کلی مسأله مقدار ویژه تعمیم یافته GEVP به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \min \quad & \lambda \\ \text{s.t.} \quad & \lambda B(x) - A(x) > \circ, \quad B(x) > \circ, \quad C(x) > \circ \end{aligned}$$

که  $A$  و  $B$  ماتریس‌های متقارن تحت تابع آفینی  $x$  هستند و می‌توانیم به این نحو آنها را شرح دهیم:

$$\begin{aligned} \min \quad & \lambda_{\max}(A(x), B(x)) \\ \text{s.t.} \quad & B(x) > \circ, \quad C(x) > \circ \end{aligned}$$

نماد بزرگترین مقدار ویژه دسته‌ای از  $\lambda Y - X$  با  $Y > \circ$  است، یعنی اینکه مقدار ویژه ماتریس  $Y^{-1} X Y^{-1}$  می‌باشد.

زمانی که قیدها محدب باشند، مسئله GEVP بهینه‌سازی شبه محدب است. در اینجا هدف یافتن  $\lambda_{\max}(A(x), B(x))$  شبه محدب بوده، بدین معنا که برای هر  $x$  و  $\tilde{x}$  با  $1 \leq \theta \leq \circ$  شدنی باشد.

<sup>۴</sup>Generalized eigenvalue problems

$$\lambda_{\max}(A(\theta x + (1-\theta)\tilde{x}), B(\theta x + (1-\theta)\tilde{x})) \leq \max\{\lambda_{\max}(A(x), B(x)), \lambda_{\max}(A(\tilde{x}), B(\tilde{x}))\}$$

توجه داشته باشید هنگامی که همه ماتریس‌های قطری  $A(x)$  و  $B(x)$  اسکالر هستند، این مسئله را به مسئله برنامه‌نویسی خطی کسری عمومی کاهش می‌دهیم یعنی تابع کسری خطی را به مجموعه‌ای از نامساوی‌های خطی به حداقل می‌رسانیم. به عبارت دیگر بسیاری از توابع شبه محدب غیرخطی را می‌توان به فرم مناسب GEVP با  $A$  و  $B$  و  $C$  نمایش داد.

فرم جایگزینی GEVP معادل است با

$$\begin{aligned} \min \quad & \lambda \\ \text{s.t.} \quad & A(x, \lambda) > \circ \end{aligned}$$

که  $A(x, \lambda)$  آفینی به روی  $x$  و آفینی به روی  $\lambda$  برای  $x$  ثابت است و در شرایط یکنواختی صدق می‌کند.

$$\lambda > \mu \implies A(x, \lambda) \geq A(x, \mu)$$

مثال ۱.۵.۲. به عنوان مثال مسأله GEVP را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \min \quad & \alpha \\ \text{s.t.} \quad & -A^T P - PA - 2\alpha P > \circ, \quad P > \circ \end{aligned}$$

که  $A$  ماتریس و متغیرهای بهینه‌سازی ماتریس متقارن  $P$  و  $\alpha$  اسکالر می‌باشد.

## ۴.۵.۲ مسئله محدب

اگرچه اغلب با  $\text{LMI}_s$  و  $\text{EVP}_s$  و  $\text{GEVP}_s$  مواجه‌ایم، در ادامه با مسئله محدبی برخورد خواهیم کرد که به اختصار به آن CP<sup>۵</sup> گوئیم و به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\begin{aligned} \min \quad & \log \det A(x)^{-1} \\ \text{s.t.} \quad & A(x) > \circ, B(x) > \circ \end{aligned} \quad (۱۳.۲)$$

که  $A$  و  $B$  ماتریس‌های متقارن بوده که وابسته آفینی به روی  $x$  می‌باشند.

ملاحظه ۲.۵.۲. در رابطه فوق  $A > \circ$  و  $\log \det A(x)^{-1}$  تابعی محدب از  $A$  است.

ملاحظه ۳.۵.۲. در مسأله CP وقتی که  $\det A(x) > \circ$  باشد را می‌توان به EVP تبدیل نمود، علاوه بر این می‌توان نامساوی ماتریسی خطی را در  $x$  و  $\lambda$  نشان داد. از آنجایی که با متغیرهایی که ماتریسی هستند سر و کار داریم می‌توان مسأله را به فرم ساده‌تری بیان می‌کنیم.

<sup>۵</sup>Convex problem

مثالی از CP را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \min \quad & \log \det P^{-1} \\ \text{s.t.} \quad & P > \circ, \quad v_i^T P v_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, L \end{aligned} \quad (14.2)$$

در اینجا  $v_i \in \mathbf{R}^n$  بوده و  $P = P^T \in \mathbf{R}^{n \times n}$  متغیر است. با تغییرات مختلف از این مسأله مواجه خواهیم شد، که دارای ویژگی‌های زیر است:

فرض کنید  $\varepsilon$  نشان‌دهنده‌ی مرکز بیضی در مبدأ تعیین شده توسط  $P$  و  $\varepsilon \triangleq \{z | z^T P z \leq 1\}$  بیضی باشد.  $v_i \in \varepsilon$  قیده‌های ساده‌ای هستند، زمانی که اندازه  $\varepsilon$  متناسب با  $(\det P)^{-\frac{1}{n}}$  باشد،  $\log \det P^{-1}$  به حداقل می‌رسد.

که این همان به حداقل رساندن اندازه  $\varepsilon$  است. بنابراین با حل (۱۴.۲)، حداقل اندازه بیضی که در مبدأ متمرکز شده را پیدا می‌کنیم که در برگرنده نقاط  $v_1, \dots, v_L$  است که معادل با  $\text{Co}\{v_1, \dots, v_L\}$  یا Co می‌باشد که نشان‌دهنده پوسته محدب است.

## ۶.۲ روش الگوریتم بیضوی

فرض کنیم زمانی که مسئله را حل می‌کنیم حداقل یک نقطه بهینه داشته باشیم یعنی اینکه قیده‌ها به ازای آن نقطه شدنی باشند. (در مسائل شدنی هر نقطه‌ی شدنی را به عنوان نقطه بهینه در نظر می‌گیریم) ایده اصلی این الگوریتم به شرح زیر است. با  $E^\circ$  بیضی که شامل نقطه بهینه شدنی است آغاز می‌کنیم. سپس با برشی در سطح که از مرکز  $x^\circ$  و از  $E^\circ$  عبور می‌کند، مسئله را بهینه می‌نماییم. این یعنی اینکه بردار غیر صفر  $g^\circ$  را به طوری که نقطه‌ای بهینه و درونی در نیم فضای  $\{z | g^{(\circ)T}(z - x^{(\circ)}) \leq 0\}$  یا نیم‌فضای  $\{z | g^{(\circ)T}(z - z^{(\circ)}) \leq 0\}$  است را بسته به شرایط پیدا می‌نماییم.

می‌دانیم که برش نیم‌بیضی

$$E^{(\circ)} \cap \{z | g^{(\circ)T}(z - x^{(\circ)}) \leq 0\}$$

شامل نقطه‌ای بهینه است. اکنون  $E^1$  بیضی را که حداقل اندازه‌اش شامل برش نیم‌بیضی است بدست می‌آوریم و بدین ترتیب این فرآیند تکرار می‌گردد. اکنون روند صریح الگوریتم را شرح می‌دهیم.  $E$  بیضی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$E = \{z | (z - a)^T A^{-1}(z - a) \leq 1\}$$

که  $A = A^T > \circ$  حداقل اندازه بیضی است که شامل نیم‌بیضی می‌باشد:

$$\{z | (z - a)^T A^{-1}(z - a) \leq 1, g^T(z - a) \leq 0\}$$

داده می‌شود که:

$$\tilde{E} = \{z \mid (z - \tilde{a})^T \tilde{A}^{-1} (z - \tilde{a}) \leq 1\}$$

که

$$\tilde{a} = a - \frac{Ag}{m+1}, \quad \tilde{A} = \frac{m^2}{m^2-1} \left( A - \frac{2}{m+1} Ag\tilde{g}^T A \right)$$

به قرار زیر است:

$$\tilde{g} = \frac{g}{\sqrt{g^T A g}}$$

ملاحظه ۱.۶.۲. این فرمول‌ها تنها برای  $m \geq 2$  برقرار است.

الگوریتم بیضوی را با  $x^{(\circ)}$  و  $A^{(\circ)}$  آغاز می‌کنیم به طوریکه بیضی شامل نقطه بهینه متناظر با آن باشد.

نتایج الگوریتم برای  $k = 1, 2, \dots$  به شرح زیر است که محاسبه  $g^k$  برشی از سطح  $x^k$  را بیان می‌کند:

$$\begin{aligned} \tilde{g} &:= (g^{(k)T} A^{(k)} g^{(k)})^{-1} g^{(k)} \\ x^{(k+1)} &:= x^{(k)} - \frac{1}{m+1} A^{(k)} \tilde{g} \\ A^{(k+1)} &:= \frac{m^2}{m^2-1} \left( A^{(k)} - \frac{2}{m+1} A^{(k)} \tilde{g} \tilde{g}^T A^{(k)} \right) \end{aligned}$$

این دنباله‌ای بازگشتی بیضی‌هایی را ایجاد نموده که شامل نقطه‌ی بهینه‌ی تضمین شده می‌باشد. به نظر می‌رسد اندازه‌ی این بیضی‌های هندسی کاهش می‌یابد به طوریکه داریم:

$$\text{vol}(E^{(k)}) \leq e^{-\frac{k}{m}} \text{vol}(E^{(\circ)})$$

## ۷.۲ برخی از مسائل استاندارد مربوط به نامساوی ماتریسی خطی

نامساوی ماتریسی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0$$

اگر  $x$  در این نامساوی ماتریسی خطی صادق نباشد،  $u$  غیر صفری موجود است، به طوریکه:

$$u^T F(x) u = u^T \left( F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i \right) u \leq 0$$



$g$  را به وسیله  $g_i = -u^T F_i u$  برای  $i = 1, \dots, m$  که در هر  $z$  صدق کند، تعیین می‌نماییم. در صورتیکه  $g^T(z - x) \geq 0$  باشد، داریم:

$$u^T F(z) u = u^T \left( F_0 + \sum_{i=1}^m z_i F_i \right) u = u^T F(x) u - g^T(z - x) \leq 0$$

در این حالت هر نقطه‌ی درونی شدنی در نیم‌فضا به شرح زیر است:

$$\{z | g^T(z - x) < 0\}$$

یعنی که این  $g$  برش سطحی برای نامساوی ماتریسی خطی می‌باشد که در نقطه  $x$  تعریف شده است.

مسأله EVP زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & F(x) > 0 \end{aligned}$$

ابتدا فرض می‌کنیم که  $x$  نقطه‌ای نشدنی باشد، یعنی  $F(x) \succ 0$ . سپس می‌توانیم برشی سطحی برای این مسئله با استفاده از روش فوق برای توصیف نامساوی ماتریسی خطی بسازیم. در این مورد، در پی اندازه‌گیری دور نیم‌فضا  $\{z | g^T(z - x) \geq 0\}$  می‌باشیم، زیرا همه‌ی نقاط نشدنی هستند.

حالا فرض می‌کنیم نقطه شدنی  $x$  یعنی  $F(x) > 0$  را داشته باشیم. در این مورد برای  $g = c$  برشی سطحی برای EVP در نقطه  $x$  تعریف می‌کنیم،  $\{z | g^T(z - x) > 0\}$  اندازه دور نیم‌فضا می‌باشد، زیرا شامل تمام نقاط از قبیل شدنی یا نشدنی می‌باشند.

مسأله GEVP زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \min \quad & \lambda_{\max}(A(x), B(x)) \\ \text{s.t.} \quad & B(x) > 0, C(x) > 0 \end{aligned}$$

در اینجا

$$A(x) = A_0 + \sum_{i=1}^m x_i A_i, B(x) = B_0 + \sum_{i=1}^m x_i B_i, C(x) = C_0 + \sum_{i=1}^m x_i C_i.$$

فرض کنید نقطه  $x$  را داشته باشیم، اگر قیدها را نقض کرد از روش شرح داده شده برای نامساوی ماتریسی خطی جهت ایجاد برشی سطحی در  $x$  استفاده می‌کنیم. حال فرض کنید  $x$  شدنی باشد، هر  $u \neq 0$  را طوری انتخاب می‌کنیم که:

$$(\lambda_{\max}(A(x), B(x))(B(x) - A(x))u = 0$$

داشته باشیم، حال  $g$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$g_i = -u^T (\lambda_{\max}(A(x), B(x))(B_i - A_i)u \quad i = 1, \dots, m$$

می‌توان ادعا نمود که  $g$  برشی سطحی برای  $GEVP$  در نقطه  $x$  است. توجه کنید برای هر  $z$

$$g_i = -u^T (\lambda_{\max}(A(z), B(z))(B_i - A_i)u \quad i = 1, \dots, m$$

اکنون،  $g^T(z - x) \geq 0$  را پیدا می‌نماییم:

$$\lambda_{\max}(A(z), B(z)) \geq \lambda_{\max}(A(x), B(x))$$

رابطه فوق نشان‌دهنده ادعای عنوان شده می‌باشد.

فرم استاندارد CP (۱۳.۲) را در نظر بگیرید:

فرض می‌کنیم  $x$  شدنی باشد. در این حالت، بر طبق هدف مدنظر، برش سطحی در  $x$  به وسیله گرادیان بدست می‌آید:

$$-\log \det A(x) = -\log \det \left( A_0 + \sum_{i=1}^m x_i A_i \right)$$

یعنی  $g_i = -\text{Tr} A_i A(x)^{-1}$  زمانی که تابع هدف برای همه  $z$  محدب باشد به قرار زیر است:

$$-\log \det A(z)^{-1} \geq \log \det A(x)^{-1} + g^T(z - x)$$

به طور خاص از  $g^T(z, x) > 0$  نتیجه می‌گیریم:

$$\log \det A(z)^{-1} > \log \det A(x)^{-1}$$

از این رو  $z$  نمی‌تواند بهینه باشد.

## ۸.۲ روش نقطه درونی

از سال ۱۹۸۸، روش نقطه درونی برای مسائل استاندارد گسترش یافت. در این بخش روش ساده نقطه درونی را برای حل EVP شرح می‌دهیم، فرض کنید نقطه‌ی اولیه شدنی را داشته باشیم.

## ۱.۸.۲ مرکز آنالیزی نامساوی ماتریسی خطی

مرکز آنالیزی روی نامساوی ماتریسی خطی نقش مهمی در روش‌های نقطه درونی دارد و در نوع خود بسیار مهم است، نامساوی ماتریسی خطی را در نظر بگیرید:

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > \circ$$

که  $F_i^T \in \mathbf{R}^{n \times n}$  تابع

$$\Phi(x) \triangleq \begin{cases} \log \det F(x)^{-1} & F(x) > \circ \\ \infty & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (15.2)$$

ممتناهی است، اگر و تنها اگر  $F(x) > \circ$  باشد و اگر  $x$  به مجموعه‌ای شدنی  $\{x | F(x) > \circ\}$  میل نماید، ناممتناهی است.

فرض می‌کنیم مجموعه شدنی پوچ و محدود باشد، که حاکی از این است که  $F_1, \dots, F_m$  مستقل خطی اند. (به عبارت دیگر مجموعه شدنی شامل خط می‌باشد) می‌توانیم نشان دهیم که  $\Phi$  به روی مجموعه شدنی اکیداً محدب است. به دنبال کاهنده‌ای یکتا می‌باشیم که با  $x^*$  نشان می‌دهیم:

$$x^* \triangleq \arg \min_x \Phi(x) \quad (16.2)$$

$x^*$  را به عنوان مرکز آنالیزی  $F(x) > \circ$  تعیین می‌کنیم که معادل است با:

$$x^* = \arg \max_{F(x) > \circ} \det F(x) \quad (17.2)$$

که  $F(x^*)$  در میان تمام ماتریس‌های معین مثبت به فرم  $F(x)$  است که تعیین‌کننده‌ی ماکزیمم می‌باشد.

گزاره ۱.۸.۲. نامساوی ماتریسی خطی را با مراکز تحلیلی متفاوت اما مجموعه‌های شدنی یکسان، مرکز آنالیزی گویند.

اکنون نوبت به محاسبه‌ی مسئله مرکز آنالیزی برای نامساوی ماتریسی خطی است. (این نوعی خاص از مسئله CP می‌باشد)

روش نیوتن، با انتخاب طول گام مناسب می‌تواند به فرم مؤثرتری در محاسبه‌ی  $x^*$  مورد استفاده قرار گیرد. با نقطه‌ی شدنی اولیه آغاز می‌کنیم، الگوریتم زیر را در نظر می‌گیریم:

$$x^{(k+1)} := x^{(k)} - \alpha^{(k)} H(x^{(k)})^{-1} g(x^{(k)}) \quad (18.2)$$

که  $\alpha^k$ ، عامل نوسانی از مرتبه تکرار  $K$  است و گرادیان و هسین از  $\Phi$  را به ترتیب با  $g(x)^k$  و  $H(x)^k$  نمایش می‌دهیم.

که علت عامل نوسان:

$$\alpha^{(k)} := \begin{cases} 1 & \delta(x^{(k)}) \leq \frac{1}{4} \\ \frac{1}{(1+\delta(x^{(k)}))} & \text{درغیراین صورت} \end{cases} \quad (19.2)$$

که

$$\delta(x) \triangleq \sqrt{g(x)^T H(x)^{-1} g(x)}$$

$\delta(x)$  کاهش نیوتن از  $\Phi$  در  $x$  نامیده می‌شود.

## ۲.۸.۲ مسیرهایی از مرکز

حالت استاندارد EVP را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & F(x) > \circ \end{aligned}$$

فرض کنید  $\lambda^{\text{opt}}$  مقدار بهینه برای هر  $\lambda > \lambda^{\text{opt}}$  باشد، بنابراین نامساوی ماتریسی خطی زیر:

$$F(x) > \circ \quad c^T x < \lambda \quad (20.2)$$

شدنی است. همچنین فرض می‌کنیم که نامساوی ماتریسی خطی (۲۰.۲) مجموعه‌ای شدنی محدود بوده و در نتیجه مرکز آنالیزی  $x^*(\lambda)$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$x^*(\lambda) \triangleq \arg \min_x (\log \det F(x)^{-1} + \log \frac{1}{\lambda - c^T x})$$

منحنی داده شده توسط  $x^*(\lambda)$  برای  $\lambda > \lambda^{\text{opt}}$  مسیری از مرکز EVP نامیده می‌شود و نشان‌دهنده‌ی آنالیزی بودن آن و دارای محدودیتی به عنوان  $\lambda \rightarrow \lambda^{\text{opt}}$  است که  $x^{\text{opt}}$  را نقطه‌ی بهینه تعریف می‌کنیم. (یا به طور دقیق‌تر، دنباله محدود را به حداقل می‌رساند).  $x^*(\lambda)$  را به وسیله‌ی رابطه‌ی زیر توصیف می‌نماییم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{x^*(\lambda)} \left( \log \det F(x)^{-1} + \log \frac{1}{\lambda - c^T x} \right) \\ = -\mathbf{Tr} F(x^*(\lambda))^{-1} F_i + \frac{c_i}{\lambda - c^T x^*(\lambda)} = 0, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (21.2)$$

### ۳.۸.۲ روش مرکزی

روش مرکزی، الگوریتم نقطه درونی ساده است که بر روی مسأله EVP بررسی می‌نماییم، با نقطه‌ای شدنی آغاز می‌کنیم. این الگوریتم با مقداردهی اولیه‌ی  $\lambda^{(0)}$  و  $x^{(0)}$  با  $F(x^{(0)}) > 0$  و  $c^T x^{(0)} < \lambda^{(0)}$  آغاز می‌گردد، که مراحل آن به شرح زیر بیان شده:

$$\begin{aligned} \lambda^{(k+1)} &:= (1 - \theta)c^T x^{(k)} + \theta\lambda^{(k)} \\ x^{(k+1)} &:= x^*(\lambda^{(k+1)}) \end{aligned}$$

که  $\theta$  پارامتری بین  $0 < \theta < 1$  می‌باشد.

زمانی‌که محاسبه آنالیز مرکزی خود نوع خاصی از CP باشد، می‌توان از طریق جواب دنباله‌ای CP را نشان داد که روش مرکزی راهی برای حل مسأله EVP است (که با استفاده از روش نیوتن صورت می‌پذیرد).

حال اثبات ساده‌ای از همگرایی را با ضرب رابطه (۲۱.۲) در  $(x_i^{(k)} - x_i^{\text{opt}})$  و حاصل جمع به روی  $i$  نشان می‌دهیم:

$$\begin{aligned} \mathbf{Tr} F(x^{(k)})^{-1} (F(x^{(k)}) - F(x^{\text{opt}})) &= \frac{1}{\lambda^{(k)} - c^T x^k} c^T (x^k - x^{\text{opt}}) \\ \text{از آنجایی که } \mathbf{Tr} F(x^{(k)}) - F(x^{\text{opt}}) &\geq 0 \text{ نتیجه می‌گیریم:} \end{aligned}$$

$$n \geq \frac{1}{\lambda^{(k)} - c^T x^k} (c^T x^k - \lambda^{\text{opt}})$$

به جای  $c^T x(k)$  رابطه‌ی زیر را خواهیم داشت:

$$(\lambda^{(k+1)} - \lambda^{\text{opt}}) \leq \frac{n + \theta}{n + 1} (\lambda^{(k)} - \lambda^{\text{opt}})$$

$\lambda^k$  با کوچکترین مرکز همگرایی به  $\lambda^{\text{opt}}$  نزدیک می‌شود. توجه داشته باشید که می‌توانیم نامساوی بالا را بدین‌گونه بیان نماییم:

$$c^T x^{(k)} - \lambda^{\text{opt}} \leq n(\lambda^{(k)} - c^T x^{(k)})$$

می‌دهد.  $\lambda^{(k)} - c^T x^{(k)} < \frac{\varepsilon}{n}$  که معرف شرط توقف بوده و مقدار بهینه‌ای در  $E$  یافت می‌گردد، نشان

نامساوی ماتریسی خطی  $F(x) > \circ$  و  $c^T x < \lambda$  را به عنوان مرکز آنالیزی نامساوی ماتریسی خطی  $F(x) > \circ$  تعریف می‌کنیم، که  $q > 1$  عدد صحیح می‌باشد به عبارت دیگر:

$$x^*(\lambda) \triangleq \arg \min_x \left( \log \det F(x)^{-1} + q \log \frac{1}{\lambda - c^T x} \right)$$

با استفاده از  $q > 1$  خواهیم داشت،  $q \approx n$  که  $F(x) \in \mathbf{R}^{n \times n}$  در هر تکرار، روند کاهش  $\lambda$  بسیار سریع‌تر صورت می‌گیرد. در میان روش‌های نقطه درونی برای مسائل استاندارد، روش مرکزی مناسب و کارآمد می‌باشد.

## ۹.۲ نتایج دیگر در نامساوی ماتریسی

### ۱.۹.۲ حذف از جمله نیمه معین

در LMIP،  $x$  را به‌گونه‌ای می‌یابیم که  $F(x) > \circ$  باشد. می‌توانیم برای هر متغیر، ضریب متناظر با  $F$  را که نیمه معین است حذف نماییم.

به عنوان مثال فرض کنید  $F_m \geq \circ$  و دارای مرتبه‌ی  $r < n$  باشد. صرف نظر از جزئیات، با در نظر گرفتن  $x_m$  بسیار بزرگ،  $F$  در محدوده  $F_m$  معین مثبت است. بنابراین با ساختن  $F$  معین مثبتی در فضای پوچ  $F_m$ ، LMIP کاهش می‌یابد.

به‌طور دقیق‌تر فرض کنید  $F_m = UU^T$  با  $U$  مرتبه کاملی است و فرض که  $\tilde{U}$  متمم متعامدی از  $U$  باشد،  $UU^T = \circ$  و  $[U, \tilde{U}]$  بیشترین مرتبه را داراست (که  $[U, \tilde{U}]$  بدین معنی است که غیرمنفرد می‌باشد). البته داریم:

$$F(x) > \circ \iff \begin{bmatrix} \tilde{U} & U \end{bmatrix}^T F(x) \begin{bmatrix} \tilde{U} & U \end{bmatrix} > \circ$$

زمانی که

$$\begin{bmatrix} \tilde{U} & U \end{bmatrix}^T F(x) \begin{bmatrix} \tilde{U} & U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{U}^T \tilde{F}(\tilde{x}) \tilde{U} & \tilde{U}^T \tilde{F}(\tilde{x}) U \\ U^T \tilde{F}(\tilde{x}) \tilde{U} & U^T \tilde{F}(\tilde{x}) U + x_m (U^T U)^2 \end{bmatrix}$$

که  $\tilde{x} = [x_1 \dots x_{m-1}]^T$  و  $\tilde{F}(\tilde{x}) \triangleq F_0 + x_1 F_1 + \dots + x_{m-1} F_{m-1}$  و  $F(x) > \circ$  اگر و تنها اگر

۰.  $U^T \tilde{F} \tilde{U}(\tilde{x}) > 0$  و برای  $x_m$  به اندازه کافی بزرگ داریم:

$$U^T \tilde{F}(\tilde{x})U + x_m(U^T U)^2 > U^T \tilde{F}(\tilde{x})\tilde{U}(\tilde{U}^T \tilde{F}(\tilde{x})\tilde{U})^{-1}\tilde{U}^T \tilde{F}(\tilde{x})U$$

بنابراین مسأله LMIP برابر است با:

پیدا کردن  $x_1 \dots x_{m-1}$  به گونه‌ای که  $\tilde{U}^T \tilde{F}(x_1 \dots x_{m-1})\tilde{U} > 0$  باشد.

## ۲.۹.۲ حذف متغیرهای ماتریسی

در نامساوی ماتریسی گاهی برخی از متغیرها به فرم خاصی ظاهر می‌شوند که می‌توانیم معادل نامساوی را بدون آن متغیرها به دست آوریم. در نظر داشته باشید:

$$G(z) + U(z)XV(z)^T + V(z)X^T(z)^T > 0 \quad (22.2)$$

$z$  بردار و  $X$  ماتریس مستقل متغیر هستند؛  $G(z) \in \mathbf{R}^{n \times n}$  و  $U(z)$  و  $V(z)$  وابسته نمی‌باشند. فرض کنید برای هر  $z$ ،  $\tilde{U}(z)$  و  $\tilde{V}(z)$  مکمل متعامدی از  $U(z)$  و  $V(z)$  باشند، پس رابطه‌ی (۲۲.۲) برای برخی از  $X$ ها و  $z = z_0$  صدق می‌کند، اگر و تنها اگر نامساوی

$$\tilde{U}(z)^T G(z) \tilde{U}(z) > 0 \quad \tilde{V}(z)^T G(z) \tilde{V}(z) > 0 \quad (23.2)$$

با  $z = z_0$  برقرار باشد. به عبارت دیگر شدنی بودن نامساوی ماتریس (۲۲.۲) با متغیرهای  $X$  و  $z$ ، شدنی می‌باشد معادل است با شدنی بودن رابطه‌ی (۲۳.۲). توجه داشته باشید اگر  $U(z)$  و  $V(z)$  برای همه‌ی  $z$ های دارای مرتبه  $n$  باشد؛ آنگاه نامساوی اول یا دوم در (۲۳.۲) از بین می‌رود.

می‌توانیم (۲۳.۲) را به شکل دیگری برای هر  $\sigma \in \mathbf{R}$  بیان کنیم:

$$G(z) - \sigma U(z)U(z)^T > 0, \quad G(z) - \sigma V(z)V(z)^T > 0$$

به عنوان مثال در مسأله LMIP با نامساوی ماتریسی خطی زیر مواجه می‌شویم:

$$Q > 0, \quad AQ + QA^T + BY + Y^T B^T < 0 \quad (24.2)$$

که  $Q$  و  $Y$  متغیر هستند. این LMIP معادل LMIP با نامساوی ماتریسی خطی زیر است:

$$Q > 0, \quad AQ + QA^T < \sigma BB^T$$

که  $Q$  و  $\sigma \in \mathbf{R}$  متغیر بوده و با LMIP زیر معادل است:

$$Q > 0, \quad \tilde{B}^T(AQ + QA^T)\tilde{B} < 0$$

با متغیر  $Q$  که هر ماتریس  $\tilde{B}$  حداکثر مرتبه را دارد به طوریکه  $\tilde{B}^T B = 0$  است. بنابراین در فرم (۲۴.۲) متغیر  $Y$  را حذف نموده و اندازه ماتریس در نامساوی ماتریسی خطی را کاهش می‌دهیم.

## ۱۰.۲ پایداری جزئی سیستم‌های غیرخطی

### ۱.۱۰.۲ پایداری لیاپانوف

مجموعه  $\mathcal{X}$  و مجموعه  $T \subseteq \mathbb{R}$  را در نظر می‌گیریم، جریان نگاشتی  $\phi : T \times T \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$  را به‌گونه‌ای تعریف می‌کنیم که شرایط زیر برقرار باشد:

$$\phi(t, t, x) = x \quad \blacktriangleleft \text{سازگاری}$$

$$\blacktriangleleft \text{نیم‌گروه: برای همه } t_1 \leq t_0 \leq t_1 \text{ و } x_0 \in \mathcal{X} \text{ نگاشت}$$

$$\phi(t_1, t_1, x_0) = \phi(t_1, t_0, \phi(t_0, t_1, x_0))$$

داشته باشیم.

مجموعه  $\mathcal{X}$  را فضای حالت می‌نامیم و جریان را به عنوان نگاشت سیر تکاملی فضای حالت تعریف می‌کنیم. سیستم دینامیکی مستقل به سیر تکاملی جریانی گفته می‌شود که به طور کامل با نوع ورودی خاص، خروجی آن تعیین می‌گردد. به عنوان مثال جواب معادله دیفرانسیل به شکل زیر نمونه‌ای از جریان است:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t) \quad (25.2)$$

که  $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$  فضای حالت با بعد متناهی بوده و  $f : \mathcal{X} \times T \rightarrow \mathcal{X}$  تابع مورد نظر می‌باشد. با جوابی از (۲۵.۲) بر روی فاصله زمانی  $T \subset \mathbb{R}$ ، تابع  $x : T \rightarrow \mathcal{X}$  خواهیم داشت که همه جا مشتق‌پذیر بوده و برای همه  $t \in T$  در رابطه‌ی (۲۵.۲) صدق می‌کند.

می‌توان برای تمامی فواصل متناهی  $T$ ، بر روی هر یک از مجموعه‌های  $\mathbb{R}_+$ ،  $\mathbb{R}_-$  و  $\mathbb{R}$  جوابی بدست آورد.

فرض  $\phi(t, t_0, x_0)$  با شرایط اولیه  $x(t_0) = x_0$  در زمان  $T$  جوابی از (۲۵.۲) باشد. برای زوج  $(t_0, x_0) \in T \times \mathcal{X}$  می‌توان وجود یکتایی جواب را تضمین نمود که  $\phi(t, t_0, x_0)$  جواب یکتایی از (۲۵.۲) با  $t \in T$  بوده است. سپس نگاشت  $\phi$  در خاصیت سازگاری و نیم‌گروه صدق می‌کند بنابراین جریان است. در این حالت به  $\phi$ ، جریان مرتبط با معادله دیفرانسیل (۲۵.۲) گفته می‌شود اگر داشته باشیم:

$$\phi = (t + \tau, t_0 + \tau, x_0) = \phi(t, t_0, x_0) \quad (26.2)$$



اگر  $\mathcal{X}$  فضای برداری و  $\phi(t, t_0, \cdot)$  نگاشت خطی برای همه زمان‌های  $t_0, T$  باشد به (۲۶.۲) خطی گوییم.

برای جریان زمان ثابت معمولاً  $t_0 = 0$  را به عنوان زمان ابتدایی در نظر می‌گیریم. به طوریکه  $f$  در شرایط عمومی لپ شیتز صدق می‌کند. یعنی اینکه  $\mathcal{X}$  دارای ساختاری از فضای برداری نورم‌دار با نورم  $\|\cdot\|$  می‌باشد. و برای برخی از  $L > 0$  نامساوی زیر را داریم:

$$\|f(x, t) - f(y, t)\| \leq L\|x - y\|$$

برای همه  $t \in T$ ،  $f(x^*, t) = 0$  موجود می‌باشد که به عنصر  $x^*$  نقطه‌ی ثابت یا نقطه تعادل از (۲۵.۲) گفته می‌شود.

$x^*$  نقطه‌ی ثابتی است اگر و تنها اگر  $\phi(t, t_0, x^*) = x^*$  برای همه  $t, t_0$  جوابی از (۲۵.۲) است. به عبارت دیگر سایر جواب‌های (۲۵.۲) در  $x^*$ ، در لحظه آغاز وجود دارند.

## ۲.۱۰.۲ تعریف پایداری لیاپانوف

فرض کنید  $\phi : T \times T \times \mathcal{X}$  جریان،  $T = \mathbb{R}$ ، فضای برداری نورم‌دار و  $x^*$  نقطه ثابت باشند، تعاریف پایداری به شرح زیر را در نظر بگیرید:

◀ اگر برای هر  $\varepsilon > 0$  و  $t_0 \in T$  پایدار (در مفهوم لیاپانوف) است که  $\delta = \delta(\varepsilon, t_0)$  موجود باشد به طوریکه برای هر  $t \geq t_0$  رابطه زیر را داریم:

$$\|x_0 - x^*\| < \delta \implies \|\phi(t, t_0, x_0) - x^*\| \leq \varepsilon \quad (۲۷.۲)$$

◀ کششی (جاذب) است اگر برای همه  $t_0 \in T$ ،  $\delta = \delta(t_0) > 0$  با خاصیت زیر موجود باشد:

$$\|x_0 - x^*\| \leq \delta \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \|\phi(t, t_0, x_0) - x^*\| = 0 \quad (۲۸.۲)$$

◀ نمایی پایدار است اگر برای همه  $t_0 \in T$ ،  $\delta = \delta(t_0)$ ،  $\alpha = \alpha(t_0) > 0$  و  $\beta = \beta(t_0) > 0$  موجود باشد به طوریکه برای هر  $t \geq t_0$  داشته باشیم:

$$\|x_0 - x^*\| \implies \|\phi(t, t_0, x_0) - x^*\| \leq \beta \|x_0 - x^*\| e^{-\alpha(t-t_0)} \quad (۲۹.۲)$$

◀ یکنواخت کششی است اگر  $\delta > 0$  موجود باشد (وابسته به  $t_0$  نیست) به طوریکه رابطه (۲۵.۲) برای همه  $t_0 \in T$  موجود باشد.

◀ پایدار نمایی یکنواخت است اگر  $\delta > 0$  موجود باشد به طوریکه (۲۵.۲) برای همه  $t_0 \in T$  داشته باشیم.

◀ مجانب یکنواخت پایدار است اگر آن را برای هر پایدار یکنواخت و کششی یکنواخت داشته باشیم.

به عبارتی نقطه ثابت پایدار است، اگر همه‌ی جریان‌هایی که وارد نمودار می‌گردد به اندازه کافی به  $x^*$  در زمان  $t_0$  نزدیک باشند؛ به عنوان نزدیکترین  $x^*$  مورد نظر برای همه زمان‌ها  $t \geq t_0$  محفوظ است. در غیر این صورت اعلام می‌نماییم، نقطه‌ای ثابت پایدار است اگر نگاشت  $(\cdot, \cdot, t_0, t)$  در  $x^*$  به طور یکنواخت به  $t_0 \geq t$  پیوسته باشد.

گزاره ۱۰۱۰۲. فرض کنید  $\phi : T \times T \times \mathcal{X}$  جریانی با  $T = \mathbb{R}$  و  $x^*$  نقطه ثابت بوده، اگر  $\phi$  خطی باشد آنگاه:

- ◀  $x^*$  کششی است اگر و تنها اگر  $x^*$  در سطح عمومی کششی باشد.
- ◀  $x^*$  به طور مجانبی پایدار است اگر و تنها اگر در سطح عمومی مجانبی و پایدار باشد.
- ◀  $x^*$  پایدار نمایی است اگر و تنها اگر در سطح عمومی نمایی و پایدار باشد.

اگر  $\phi$  زمان ثابت باشد آنگاه:

- ◀  $x^*$  پایدار است اگر و تنها اگر  $x^*$  پایدار یکنواخت باشد.
- ◀  $x^*$  به طور مجانبی پایدار است اگر و تنها اگر  $x^*$  به صورت یکنواخت و به طور مجانبی پایدار باشد.
- ◀  $x^*$  پایدار نمایی است اگر و تنها اگر  $x^*$  پایدار نمایی یکنواخت باشد.

### ۳.۱۰.۲ تعریف توابع معین

فرض کنید  $H \subset \mathbb{R}^n$  و  $x^*$  نقطه‌ی درونی  $T \subset \mathbb{R}$  باشد، تابع  $V : H \times T \rightarrow \mathbb{R}$  را در نظر بگیرید که:

◀ معین مثبت است (با توجه به  $x^*$ ) اگر به طور پیوسته، تابعی اکیداً افزایشی وجود داشته باشد به طوریکه:

برای هر  $(x, t) \in H \times T$ ،  $V(x, t) \geq a(\|x - x^*\|)$ ، که  $a(\circ) = \circ$  با  $a : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  خواهیم داشت.

◀ نیمه معین مثبت است اگر برای هر  $(x, t) \in H \times T$ ،  $V(x, t) \geq \circ$  موجود باشد.

◀ کاهشی است (با توجه به  $x$ ) اگر به طور پیوسته، تابعی اکیداً کاهشی وجود داشته باشد به طوریکه: برای هر  $(x, t) \in H \times T$ ،  $V(x, t) \leq b(\|x - x^*\|)$ ، که  $b(\circ) = \circ$  با  $b : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  را داشته باشیم.

◀ منفی یا نیمه معین منفی است (در محدوده  $x$ ) اگر  $-V$  معین مثبت یا نیمه معین مثبت باشد.

## ۴.۱۰.۲ پایداری جزئی از سیستم‌های خطی

سیستم مستقل خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = Ax \quad (۳۰.۲)$$

که  $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  تصویر خطی بدست آمده از تابع  $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$  اطراف نقطه‌ی تعادل  $x^* \in \mathcal{X}$  از (۲۵.۲) می‌باشد که دقیقاً برای هر  $x^* \in \mathcal{X}$  داریم:

$$f(x) = f(x^*) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x^*) [x - x^*] + \dots$$

و فرض می‌کنیم  $f$  حداقل یک بار مشتق‌پذیر باشد.  $f$  خطی حول  $x^*$  را توسط (۳۰.۲) با  $A$  معین توسط ماتریس حقیقی  $n \times n$  تعریف می‌کنیم:

$$A := \partial_x f(x^*)$$

تمام عناصر در هسته  $A$  شامل نقاط تعادل می‌باشند. اکنون پایداری (۳۰.۲) در نقطه تعادل  $x^* = 0$  را بررسی می‌نماییم. تابع درجه دوم معین مثبت  $V: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  را با  $V(x) = x^T \mathcal{X} x$  که به عنوان تابع لیاپانوف درجه دوم به کار برده می‌شود، تعریف می‌نماییم. در واقع،  $V$  در  $x^* = 0$  پیوسته است، فرض قوی که نقطه کمینه محلی در  $x = 0$  را داشته باشیم (در حقیقت این کمینه‌ی سراسری قوی از  $V$  می‌باشد)، در حالی که مشتق  $V(x)$  در جهت میدان برداری توسط

$$V_x A x = x^T [A^T x + X^T A] x$$

بایستی منفی باشد تا منشأ نقطه مجانبی تعادل پایدار از (۳۰.۲) را تضمین نماید.

گزاره ۴.۱۰.۲. فرض کنید سیستم خطی (۳۰.۲) در نقطه‌ی تعادل  $x^*$  از (۲۵.۲) موجود باشد. گزاره‌های زیر با هم معادل هستند:

- ◀ منشأ تعادل به‌طور مجانبی برای رابطه‌ی (۳۰.۲)، پایدار است.
- ◀ منشأ تعادل در سطح عمومی به‌طور مجانبی برای (۳۰.۲) پایدار است.
- ◀ کلیه‌ی مقادیر ویژه  $\lambda(A)$  از  $A$  دارای قسمت حقیقی اکیداً منفی است.
- ◀ نامساوی ماتریسی خطی

$$A^T X + X A < 0 \quad X > 0$$

شدنی است. علاوه بر این، اگر یکی از گزاره‌های بالا را داشته باشیم، آنگاه نقطه‌ی تعادل  $x^*$  از جریان (۲۵.۲) به‌طور مجانبی پایدار است.

## ۵.۱۰.۲ نواحی پایدار عمومی برای سیستم LTI

سیستم‌های خطی مستقل  $\dot{x} = Ax$  به طور مجانبی پایدار می‌باشند اگر و تنها اگر تمام مقادیر ویژه  $A$  در نیمه‌ی باز سمت چپ صفحه‌ی مختلط  $\mathbb{C}^-$  قرار داشته باشند. فرض کنید ناحیه‌ی پایدار از زیر مجموعه  $\mathbb{C}_{stab} \subseteq \mathbb{C}$  را با دو خاصیت زیر داشته باشیم:

$$\begin{cases} ۱ \text{ خاصیت : } \lambda \in \mathbb{C}_{stab} \Rightarrow \bar{\lambda} \in \mathbb{C}_{stab} \\ ۲ \text{ خاصیت : } \mathbb{C}_{stab} \text{ محدب است} \end{cases}$$

مثال‌های رایجی از مجموعه‌های پایداری عبارتند از:

- ▶  $\mathbb{C}_{stab1} = \bar{\mathbb{C}}$  نیمه‌ی باز سمت چپ صفحه‌ی مختلط
- ▶  $\mathbb{C}_{stab2} = \mathbb{C}$  بدون نیاز به پایداری
- ▶  $\mathbb{C}_{stab3} = \{H \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(H) < -\alpha\}$  میرایی تضمین شده
- ▶  $\mathbb{C}_{stab4} = \{H \in \mathbb{C} \mid |H| < r\}$  دایره‌ای به مرکز مبدأ
- ▶  $\mathbb{C}_{stab5} = \{H \in \mathbb{C} \mid \alpha_1 < \text{Re}(H) < \alpha_2\}$  نوار عمودی
- ▶  $\mathbb{C}_{stab6} = \{H \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(H) \tan(\theta) < |\text{Im}(H)|\}$  ناحیه‌ی پایدار مخروطی

در این جا،  $\theta \in (0, \frac{\pi}{4})$ ،  $r, \alpha, \alpha_1, \alpha_2$  اعداد حقیقی هستند.

مفهوم ناحیه LMI به شرح زیر است:

تعریف ۳.۱۰.۲. برای ماتریس متقارن  $P \in \mathbb{S}^{2m \times 2m}$ ، مجموعه اعداد مختلط زیر را در نظر می‌گیریم:

$$L_p := \{H \in \mathbb{C} \mid \begin{pmatrix} I \\ HI \end{pmatrix}^* P \begin{pmatrix} I \\ HI \end{pmatrix} < 0\}$$

که به این ناحیه LMI گفته می‌شود. اگر  $P$  را به صورت  $P = \begin{pmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{pmatrix}$  تقسیم‌بندی کنیم، آنگاه ناحیه‌ی LMI توسط  $H \in \mathbb{C}$  برای هر

$$Q + HS + \bar{H}S^T + \bar{H}RH < 0$$

تعریف می‌شود.

تمام مثال‌های بالا بر این تعریف منطبق است. در واقع، با استفاده از مجموعه‌های زیر

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 2\alpha & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_{\varphi} = \begin{pmatrix} -r^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_{\delta} = \begin{pmatrix} 2\alpha_1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2\alpha_1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_{\varphi} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \\ 0 & 0 & -\cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) & 0 & 0 \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{C}_{stab} = L_{pi}$  را بدست می‌آوریم.

به ویژه نواحی LMI شامل قسمت‌هایی بوده که توسط دایره‌ها، بیضی، نوار، سهمی و هیپربولیک احاطه شده است. از طرفی هر نوع محل اشتراک متناهی از ناحیه LMI را می‌توان در هر منطقه محدب تقریبی در صفحه مختلط بدست آورد. نتیجه‌ی اصلی را که نیازمند معرفی نمادی برای حاصل کرونگر می‌باشد، در این بخش ارائه می‌دهیم.

دو ماتریس  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$  و  $B \in \mathbb{C}^{k \times \ell}$  را در نظر می‌گیریم، حاصل کرونگر از  $A$  و  $B$  ماتریسی  $mk \times n\ell$  به شرح زیر می‌باشد:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} A_{11}B \dots A_{1n}B \\ \vdots \\ A_{m1}B \dots A_{mn}B \end{pmatrix}$$

برخی از خواص مربوط به حاصل کرونگر به قرار زیر در نظر می‌گیریم:

- ▶  $1 \otimes A = A \otimes 1$
- ▶  $(A + B) \otimes C = (A \otimes C) + (B \otimes C)$
- ▶  $(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$
- ▶  $(A \otimes B)^* = A^* \otimes B^*$
- ▶  $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$
- ▶  $(A \otimes B) \neq B \otimes A$

نواحی پایدار توسط ناحیه‌ی LMI شرح داده که منجر به تعمیم کلی زیر از نامساوی لیاپانوف شده است.

قضیه ۴.۱۰.۲. تمام مقادیر ویژه  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  در این ناحیه از LMI موجود است:

$$\left\{ H \in \mathbb{C} \mid \begin{pmatrix} I \\ HI \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ HI \end{pmatrix} \right\} < \circ$$

اگر و تنها اگر  $x > \circ$  موجود باشد به طوریکه :

$$\begin{pmatrix} I \\ A \otimes I \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} X \otimes Q & X \otimes S \\ X \otimes S^T & X \otimes R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ A \otimes I \end{pmatrix} < \circ$$

داشته باشیم،  $Q = \circ$ ،  $S = I$  و  $I$  را در نظر بگیرید:

از جمله موارد خاص جالب توجه نواحی LMI که تحت پوشش قضیه ۴.۱۰.۲ بوده پایداری مجموعه‌ی  $\mathbb{C}_{stab}$  با  $r = 1$  می‌باشد که جهت توصیف پایداری سیستم گسسته  $x(t+1) = Ax(t)$  مورد استفاده قرار می‌گیرد. این سیستم پایدار است اگر و تنها اگر مقادیر ویژه  $A$  در داخل دایره‌ی واحدی قرار گرفته باشد؛ معادل است با  $\lambda(A) \in L_p$  که  $P = \begin{pmatrix} -1 & \circ \\ \circ & 1 \end{pmatrix}$  با قضیه ۴.۱۰.۲ هم ارز گفته می‌شود. اگر  $X > \circ$  موجود باشد به طوریکه خواهیم داشت:

$$\begin{pmatrix} I \\ A \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} -X & \circ \\ \circ & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ A \end{pmatrix} = A^*XA - X < \circ$$

## ۶.۱۰.۲ عملکرد جزئی درجه دوم

گزاره ۵.۱۰.۲. سیستم (۲۵.۲) را با تابع انتقال  $T$  در نظر بگیرید. فرض کنید دارای مقادیر ویژه در  $\mathbb{C}^-$  بوده و  $x(\circ) = \circ$  باشد.

عبارات زیر با هم معادل هستند:

۱: برای هر  $\varepsilon > \circ$ ، به طوریکه  $\omega \in \ell_2$  داریم:

$$\int_{\circ}^{\infty} \begin{pmatrix} \omega \\ \mathbf{Z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ \mathbf{Z} \end{pmatrix} dt \leq -\varepsilon^2 \int_{\circ}^{\infty} \omega^T(t)\omega(t)dt \quad (۳۱.۲)$$

۲: برای همه  $\omega \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  داریم:

$$\begin{pmatrix} I \\ T(i\omega) \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ T(i\omega) \end{pmatrix} < \circ$$

۳:  $k = k^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  موجود است به طوریکه:

$$\begin{aligned} F(K) &= \begin{pmatrix} A^T K + KA & KB \\ B^T K & \circ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \circ & I \\ C & D \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \circ & I \\ C & D \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I & \circ \\ A & B \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \circ & K \\ K & \circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & \circ \\ A & B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \circ & I \\ C & D \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \circ & I \\ C & D \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I & \circ \\ A & B \\ \circ & I \\ C & D \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \circ & k & \circ & \circ \\ k & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & Q & S \\ \circ & \circ & S^T & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & \circ \\ A & B \\ \circ & I \\ C & D \end{pmatrix} \end{aligned}$$

این نتیجه ویژگی عملکرد سیستم درجه‌ی دوم (۲۵.۲) است، به این معنا که شرایط لازم و کافی جهت عملکرد تابع درجه دوم  $J := \int_0^\infty H(\omega, z) dt$  را برای همه سیستم‌های انتگرال مربعی سیستم اکیداً منفی فراهم می‌نماید.

## ۷.۱۰.۲ عملکرد جزئی $H_\infty$

معیار عملکرد عمومی سیستم زمان ثابت خطی، نورم  $H_\infty$  از تابع انتقال آن بوده که به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

سیستم (۲۵.۲) و تابع انتقال  $T$  را با هم در نظر بگیرید. در این حالت  $T(H)$  برای همه  $H \in \mathbb{C}$  که با قسمت حقیقی مثبت محدود شده است. بدین وسیله بزرگترین مقدار یکتای  $\sigma_{\max}(T(H))$  برای همه  $H \in \mathbb{C}$  با  $\text{Re}H > 0$  بوده که نمونه‌ای از تابع  $H_\infty$  می‌باشد.

فرض کنید  $\mathbb{C}^+$  نشان‌دهنده‌ی مجموعه‌ای از اعداد مختلط با قسمت حقیقی مثبت باشد. فضای هاردی  $H_\infty$  شامل همه‌ی توابع مختلط  $\mathbb{C}^{P \times m} \rightarrow \mathbb{C}^+$  که آنالیزی و برای

$$\|T\|_\infty := \sup_{H \in \mathbb{C}^+} (T(H)) < \infty$$

در سمت چپ این عبارت بر اصل موضوع نورم و تعریف نورم  $H_\infty$  از  $T$  صدق می‌کند. اگرچه تابع‌های  $H_\infty$  در سمت راست مختلط تعریف می‌شوند بنابراین هر تابع را می‌توان به بسط یکتایی با

تابع موهومی نشان داد، (معمولاً با  $T$  نشان داده می‌شود) که فرم  $H_\infty$  را بدست می‌آوریم:

$$\|T\|_\infty := \sup_{\omega \in \mathbb{R}} (T(i\omega)) < \infty$$

گزاره ۶.۱۰.۲. پاسخ‌های فرکانسی از نمایش گرافیکی، گویای بررسی خواص سیستم مانند سود، پهنای باند و غیره است.

شاید یکی از مهم‌ترین طرح‌های منحصر به فرد مقادیرهای  $\sigma_j(T(i\omega))$  باشند، که به عنوان تابعی از فرکانس  $\omega \in \mathbb{R}$  مشاهده می‌گردد. برای سیستم‌های تک ورودی و تک خروجی تنها مقداری یکتا وجود دارد که به قرار زیر است:

$$\sigma(T(i\omega)) = |T(i\omega)|$$

نمودار سیستم، حاکی از نگاشت  $\omega \mapsto |T(i\omega)|$  است که اطلاعات مفیدی را فراهم نموده و تعیین کننده‌ی اندازه‌ای جهت تقویت سیگنال‌های ورودی هارمونیک با فرکانس  $\omega \in \mathbb{R}$  می‌باشد.

گزاره ۷.۱۰.۲. فرض کنید سیستم (۲۵.۲) مجانب پایدار و  $\gamma > 0$  باشد، سپس عبارات زیر معادل یکدیگرند:

$$\|T\|_\infty < \gamma \quad \blacktriangleleft$$

برای همه  $\omega$  داریم:  $\blacktriangleleft$

$$\sup_{0 < \|\omega\|_2 < \infty} \frac{\|z\|_2}{\|\omega\|_2} < \gamma$$

اگر ورودی  $\omega$  باشد،  $z$  خروجی رابطه‌ی (۲۵.۲) است.

سیستم (۲۵.۲) با توجه به تابع منبع کاملاً اتلافی می‌باشد یعنی:  $\blacktriangleleft$

$$H(\omega, z) = \gamma^2 \|\omega\|_2^2 - \|z\|_2^2.$$

جواب  $k = k^T$  در LMI زیر موجود است:  $\blacktriangleleft$

$$\begin{pmatrix} A^T K + K A + C^T C & K B + C^T D \\ B^T K + D^T C & D^T D - \gamma^2 I \end{pmatrix} < 0$$





# فصل ۳

## خصوصیات نامساوی ماتریسی خطی برای سیستم‌های توصیفی گسسته - زمان خطی

### ۱.۳ لم حقیقی مثبت برای سیستم‌های گسسته زمان خطی

در این فصل به بررسی مفهوم لم حقیقی مثبت در تئوری کنترل می‌پردازیم. برای سیستم‌های توصیفی گسسته - زمان خطی لم حقیقی مثبت شامل نامساوی ماتریسی خطی غیراکید (LMI) بوده و منجر به مسائل عددی بسیاری می‌گردد. مشخصه‌های (LMI) اکید را برای سیستم‌های توصیفی گسسته - زمان خطی توسط قضیه‌ای شرح می‌دهیم این مشخصه‌ها را می‌توان به صورت کارآمدتری به وسیله جعبه ابزار استاندارد (LMI) در نرم افزار متلب حل نمود. سیستم‌های توصیفی می‌توانند برای بسیاری از سیستم‌های دینامیکی که شامل سیستم‌های قدرت [۱۳]، سیستم‌های بیولوژیکی [۳۷] و سیستم‌های اقتصادی [۲۳] است مورد استفاده قرار گیرند، از این رو در طول چند دهه گذشته بسیاری از مسائل کنترل برای سیستم‌های توصیفی گسترش یافته است. از این میان می‌توان به مسائلی از قبیل تجزیه و تحلیل پایداری و ثبات [۳۶] و [۵۰]، تخصیص منابع ویژه [۵۵]، تجزیه و تحلیل تکانه و حذف تکانه [۵۹]، کنترلر مقاوم - در برابر خطا [۱۹]، پایداری مطلق [۵۴]، کنترلر  $H_2$  [۵۸]، کنترلر  $H_\infty$  [۱۱] و غیره اشاره نمود.

کاربرد سیستم‌های دینامیکی حقیقی مثبت، در تئوری کنترل و بسیاری از برنامه‌های کاربردی از قبیل تجزیه و تحلیل مداری [۲]، کنترل سازگار [۳] و پایداری مطلق [۲۸] را می‌توان نام برد. لم کالمن - یاکابوویچ - پاپاو<sup>۱</sup> (KYP) به توصیف فضای حالت حقیقی مثبت سیستم‌های خطی مثبت پرداخته و توابع مهمی در تجزیه و تحلیل و ترکیب مسائل را در بر می‌گیرد. این لم نامساوی ماتریسی غیر اکید بوده که نمی‌توان آن را به صورت مستقیم توسط LMI استاندارد حل نمود. همان‌طور که در [۵۶] اشاره شد، LMI غیراکید ممکن است باعث مشکلاتی در بررسی شرایط نامساوی عددی گردد از

<sup>۱</sup>Kalman - Yakubovich - Popov

آن دست می‌توان به خطای گرد کردن در محاسبه دیجیتالی اشاره نمود. در این فصل، از  $A^T$ ،  $\det(A)$ ،  $\text{rank}(A)$  و  $A^H$  استفاده شده، که به ترتیب ترانهاده، دترمینان، رتبه و ترانهاده‌ی مزدوج ماتریس  $A$  می‌باشد. برای چند جمله‌ای  $\alpha(s)$ ، از  $\deg(\alpha(s))$  به مفهوم درجه‌ای از  $\alpha(s)$  استفاده گردیده است. نماد  $X > (\geq) \circ$  به معنای این بوده که  $X$  ماتریس معین مثبت متقارن و  $I$  نماد ماتریسی با ابعاد مناسب می‌باشد. برای ماتریس  $E \in \mathbf{R}^{m \times n}$ ، فرض کنیم که  $\text{rank}(E) = r < \min\{m, n\}$  باشد،  $E^\perp$  با درجه‌ی  $(m-r) \times m$  ماتریسی است که در  $E^\perp E = \circ$  و  $\text{rank}(E^\perp) = m - r$  صادق است.

به برخی از نمادهای اساسی در خصوص سیستم‌های توصیفی گسسته - زمانی خطی می‌پردازیم که توسط معادلات حالت نشان داده می‌شود:

$$\begin{aligned} Ex(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \end{aligned} \quad (1.3)$$

$x(k) \in \mathbf{R}^n$  متغیر حالت،  $u(k) \in \mathbf{R}^m$  متغیر ورودی و  $y(k) \in \mathbf{R}^p$  سیگنال خروجی است، ماتریس‌های  $E, A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ،  $B \in \mathbf{R}^{n \times m}$ ،  $C \in \mathbf{R}^{m \times n}$  و  $D \in \mathbf{R}^{p \times m}$  داده شده و  $\text{rank}(E) = r < n$  می‌باشد. سیستم (۱.۳) منظم بوده، هرگاه چند جمله‌ای  $\det(zE - A)$  مخالف صفر باشد. [۱۳] و [۱۷]

تعریف ۱.۱.۳. سیستم توصیفی گسسته - زمان خطی (۱.۳) فیزیکی نامیده می‌شود، اگر رابطه‌ی زیر برقرار باشد:

$$\deg(\det(zE - A)) = \text{rank}(E) = r$$

و پایدار گفته می‌شود، اگر تمامی ریشه‌های  $\det(zE - A)$  درون دایره‌ای واحد بسته باشد. اگر سیستم توصیفی گسسته - زمان خطی (۱.۳) فیزیکی و پایدار باشد، آنگاه، آن را قابل قبول می‌گوییم. سیستم توصیفی گسسته - زمان خطی را می‌توان به فرم استاندارد وایرشراس تبدیل نمود:

$$(\varsigma, \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = (MEN, MAN, MB, CN)$$

با

$$\varsigma = \begin{bmatrix} I_{n_1} & \circ \\ \circ & \mathcal{N} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A} = \begin{bmatrix} A_1 & \circ \\ \circ & I_{n_2} \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{C} = [C_1 \quad C_2]$$

که  $M$  و  $N$  ماتریس‌های یکتایی نمی‌باشند و  $\mathcal{N}$  ماتریس پوچ توان است. سیستم توصیفی گسسته - زمان خطی (۱.۳) شدنی است، اگر و تنها اگر  $\mathcal{N} = \circ$  و  $A_1$  شور پایدار باشد. [۱۷]

تعریف ۲.۱.۳. سیستم توصیفی گسسته - زمان خطی را در نظر بگیرید این سیستم [۵۷]:

◀ حقیقی مثبت است، اگر تابع انتقال مربوطه  $G(z)$  در  $|z| > 1$  تحلیلی بوده و برای  $|z| > 1$  رابطه‌ی  $G(z) + G^H(z) > \circ$  برقرار باشد.

◀ حقیقی مثبت اکید است، اگر تابع انتقال آن در  $|z| \geq 1$  تحلیلی بوده و  $G(e^{j\theta}) + G^H(e^{j\theta}) > \circ$  برای همهی  $\theta \in [0, 2\pi]$  برقرار باشد.

◀ حقیقی مثبت اکید گسترش یافته بوده، اگر حقیقی مثبت اکید بوده و در  $G(\infty) + G^H(\infty) > \circ$  صدق کند.

وقتی با توابع حقیقی مثبت سر و کار داریم فرض بر آن است که  $p = m$  می‌باشد.

لم زیر مشخصه‌های LMI غیر اکید از سیستم توصیفی گسسته - زمان خطی حقیقی مثبت اکید گسترش یافته را شرح می‌دهد.

لم ۳.۱.۳. سیستم توصیفی گسسته - زمان خطی (۱.۳) شدنی و حقیقی مثبت اکید گسترش یافته است، اگر و تنها اگر ماتریس معین مثبت  $P$  موجود باشد به طوریکه [۵۷]:

$$E^T P E \geq \circ \quad (2.3)$$

و

$$\begin{bmatrix} A^T P A - E^T P E & C^T - A^T P B \\ C - B^T P A & -(D^T + D - B^T P B) \end{bmatrix} < \circ \quad (3.3)$$

باشد. اگر  $E = I$  باشد، سیستم توصیفی (۱.۳) به سیستم گسسته - زمان خطی نرمال کاهش می‌یابد. بدین معنا که، به عنوان لم معروف KYP شناخته شده است، نتیجه‌ی لم بالا به شرح زیر می‌باشد:

نتیجه ۴.۱.۳. [۵۷] فرض که  $G(z) = D + C(zI - A)^{-1}$  تابع انتقال مورد نظر باشد،  $G(z)$  حقیقی مثبت اکید گسترش یافته است، اگر و تنها اگر ماتریس مثبت  $P$  وجود داشته باشد به طوریکه:

$$\begin{bmatrix} A^T P A - P & A^T P B - C^T \\ B^T P A - C & -D^T - D + B^T P B \end{bmatrix} < \circ$$

لم بالا را می‌توان به عنوان کلیتی از این نتیجه در نظر گرفت، این لم شامل نامساوی ماتریسی غیر اکید بوده، که نمی‌توان آن را به‌طور مستقیم توسط راه حل‌های استاندارد LMI حل نمود، بدین‌سان مشکلی در بررسی شرایط نامساوی عددی به علت خطای گرد کردن در محاسبات دیجیتالی موجب می‌گردد [۲۴]. هدف در این بخش حذف چنین نامساوی‌های غیراکید و ایجاد شرایط جدید LMI اکید است. قضیه زیر این مشکل را حل می‌نماید.

**قضیه ۵.۱.۳.** سیستم توصیفی گسسته - زمان خطی (۱.۳) شدنی و حقیقی مثبت گسترش یافته است اگر و تنها اگر دو ماتریس معین مثبت  $P \in \mathbf{R}^{n \times n}$  و  $S \in \mathbf{R}^{(n-r) \times (n-r)}$  موجود باشد به طوریکه:

$$\begin{bmatrix} A^T Q A - E^T Q E & C^T - A^T Q B \\ C - B^T Q A & -(D^T + D - B^T Q B) \end{bmatrix} < \circ \quad (۴.۳)$$

که در آن:

$$Q = P - E^{\perp T} S E^{\perp} \quad (۵.۳)$$

برهان. فرض که رابطه‌ی (۴.۳) در برخی از  $S > \circ$  و  $P > \circ$  صادق باشد. سپس آشکارا می‌توان مشاهده نمود که رابطه‌ی  $E^T Q E = E^T P E \geq \circ$ ، در هر دو رابطه‌ی (۲.۳) و (۳.۳) صادق می‌باشد. سپس با توجه به لم بالا، سیستم توصیفی گسسته - زمان خطی (۱.۳) شدنی و حقیقی مثبت اکید گسترش یافته است.

(برعکس): فرض که سیستم توصیفی گسسته - زمان خطی (۱.۳) حقیقی مثبت اکید گسترش یافته و شدنی باشد، سپس دو ماتریس غیر یکتا  $M$  و  $N$  موجود است به طوریکه:

$$\zeta = M E N = \begin{bmatrix} I & \circ \\ \circ & \circ \end{bmatrix}, \mathcal{A} = M A N = \begin{bmatrix} A_1 & \circ \\ \circ & I \end{bmatrix} \quad (۶.۳)$$

$$\mathcal{B} = M B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \mathcal{C} = C N = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \quad (۷.۳)$$

تابع انتقال  $G(z)$  را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} G(z) &= C(zE - A)^{-1}B + D \\ &= C_1(zI - A_1)^{-1}B_1 - C_2B_2 + D \end{aligned} \quad (۸.۳)$$

علاوه بر این، رابطه‌ی (۶.۳) اشاره به رابطه‌ی زیر دارد:

$$\zeta^\perp = \begin{bmatrix} \circ & I \end{bmatrix} \quad (۹.۳)$$

با توجه به نتیجه‌ی بالا،  $G(z)$  حقیقی مثبت اکید گسترش یافته است اگر و تنها اگر ماتریس معین مثبت  $P_1 > \circ$  وجود داشته باشد به طوریکه در LMI زیر صدق کند:

$$\begin{bmatrix} A_1^T P_1 A_1 - P_1 & A_1^T P_1 B_1 - C_1^T \\ B_1^T P_1 A_1 - C_1 & R \end{bmatrix} < \circ \quad (۱۰.۳)$$

که

$$R = -D^T - D + B_1^T P_1 B_1 + C_2 B_2 + B_2^T C_2^T$$

از آنجایی که LMI رابطه‌ی (۱۰.۳) نامساوی اکید است، اسکالر  $\varepsilon > \circ$  بزرگی وجود دارد به طوریکه:

$$\begin{bmatrix} A_1^T P_1 A_1 - P_1 & A_1^T P_1 B_1 - C_1^T \\ B_1^T P_1 A_1 - C_1 & R \end{bmatrix} + \varepsilon^{-1} \begin{bmatrix} \circ \\ C_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \circ & C_2^T \end{bmatrix} < \circ \quad (۱۱.۳)$$

با توجه به رابطه:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-1} C_2 C_2^T &= -\varepsilon B_2^T B_2 - C_2 B_2 - B_2^T C_2^T + \varepsilon B_2^T B_2 + \varepsilon^{-1} C_2 C_2^T + B_2^T C_2^T + C_2 B_2 \\ &= -\varepsilon B_2^T B_2 - (C_2 B_2 + B_2^T C_2^T) + \varepsilon^{-1} (\varepsilon B_2^T + C_2) (\varepsilon B_2 + C_2^T) \end{aligned}$$

با استفاده از رابطه بالا، LMI در رابطه‌ی (۱۱.۳) معادل است با:

$$\begin{bmatrix} A_1^T P_1 A_1 - P_1 & A_1^T P_1 B_1 - C_1^T \\ B_1^T P_1 A_1 - C_1 & R_1 \end{bmatrix} + \varepsilon^{-1} \times \begin{bmatrix} \circ \\ \varepsilon B_2^T + C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \circ & \varepsilon B_2 + C_2^T \end{bmatrix} < \circ$$

که

$$R_1 = -D^T - D + B_1^T P_1 B_1 - \varepsilon B_2^T B_2$$

با استفاده از روش متمم شور، LMI بالا معادل است با:

$$\begin{bmatrix} A_1^T P_1 A_1 - P_1 & A_1^T P_1 B_1 - C_1^T & \circ \\ B_1^T P_1 A_1 - C_1 & R_1 & \varepsilon B_2^T + C_2 \\ \circ & \varepsilon B_2 + C_2^T & -\varepsilon I \end{bmatrix} < \circ$$

یا معادل است با:

$$\begin{bmatrix} A_1^T P_1 A_1 - P_1 & \circ & A_1^T P_1 B_1 - C_1^T \\ \circ & -\varepsilon I & \varepsilon B_1 + C_1^T \\ B_1^T P_1 A_1 - C_1 & \varepsilon B_1^T + C_1 & R_1 \end{bmatrix} < \circ$$

نامساوی بالا را می‌توان بدین‌گونه نوشت:

$$\begin{bmatrix} A^T Q A - \zeta^T Q \zeta & C^T - A^T Q B \\ C - B^T Q A & -(D^T + D) + B^T Q B \end{bmatrix} < \circ \quad (12.3)$$

که ماتریس‌های  $A, B, C, \zeta$  به فرم (۶.۳) و (۷.۳) می‌باشند.

$$Q = \begin{bmatrix} P_1 & \circ \\ \circ & -\varepsilon I \end{bmatrix} = \mathcal{P} - \zeta^{\perp T} \mathcal{S} \zeta^{\perp}$$

با

$$\mathcal{S} = P_2 + \varepsilon I$$

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} P_1 & \circ \\ \circ & P_2 \end{bmatrix}$$

$$P_2 > \circ$$

سپس با استفاده از روابط (۶.۳) و (۷.۳)،  $LMI$  (۱۲.۳) معادل با رابطه‌ی زیر است:

$$\begin{bmatrix} N^T & \circ \\ \circ & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^T Q A - E^T Q E & C^T - A^T Q B \\ C - B^T Q A & -(D^T + D) + B^T Q B \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} N & \circ \\ \circ & I \end{bmatrix} < \circ \quad (13.3)$$

که در آن

$$Q = M^T Q M \quad (14.3)$$

می‌باشد. از آنجایی که  $N$  منحصربه‌فرد نمی‌باشد،  $LMI$  در رابطه‌ی (۱۰.۳) به طور واضح با رابطه‌ی (۴.۳) معادل است. برای تکمیل اثبات کافی است نشان دهیم که رابطه‌های (۱۰.۳) و (۵.۳) با هم معادل می‌باشند. از آنجایی که  $E^{\perp} M = \zeta^{\perp}$  داریم:

$$\begin{aligned}
 Q &= M^T(\mathcal{P} - \zeta^{\perp T} S \zeta^{\perp}) M \\
 &= M^T \mathcal{P} M - M^T \zeta^{\perp T} S \zeta^{\perp} M \\
 &= M^T \mathcal{P} M - E^{\perp T} S E^{\perp} \\
 &= P - E^{\perp T} S E^{\perp}
 \end{aligned}$$

□ که  $S = \mathcal{S}$  و  $P = M^T \mathcal{P} M$  ماتریس‌های معین مثبت می‌باشند.

ملاحظه ۶.۱.۳. نامساوی ماتریسی غیر اکید در بررسی و گسترش لم حقیقی مثبت اکید در سیستم‌های توصیفی زمان - گسسته (۱.۳) دخیل است. با معرفی عبارت  $E^{\perp T} S E^{\perp}$  در قضیه بیان شده توانستیم معیار جدیدی در قالب LMI اکید بیان نماییم که با استفاده از جعبه ابزار استاندارد LMI می‌توان آن را کارآمدتری حل نمود.

مثال ۷.۱.۳. سیستم توصیفی گسسته - زمان خطی (۱.۳) را با داده‌های زیر در نظر بگیرید:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} -0.3 & 0.6 & -1 \\ 0.6 & -0.5 & -0.4 \\ 0.5 & -0.5 & 0.3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0.2 & -0.4 \\ 0 & -0.5 \\ -0.5 & 0.4 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -0.4 & 0.6 & 0.4 \\ 0.5 & 0.2 & -0.3 \end{bmatrix}$$

فرض

$$E^{\perp} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

را اینگونه انتخاب نماییم. سپس با بررسی شرایط LMI مطرح شده در قضیه  $S = 51.6429$  می‌باشد و با استفاده از برنامه زیر مقدار  $P$  بدست می‌آید:

```

setlmis ([])
p=lmivar (1,[ 3 1])
lmiterm([ 1 1 1 p] ,A',A)
lmiterm([ 1 1 1 p] ,-E',E)
lmiterm([1 2 1 0] ,C)

```



```

lmiterm([ 1 2 1 p] ,B',A)
lmiterm([ 1 2 2 0] , -D'-D)
lmiterm([ 1 2 2 p] ,B',B)
lmis=getlmis
[ tmin ,xfeas] =feasp (lmi)
p=dec2mat(lmis,xfeasp,p)

```

$$p = \begin{bmatrix} 2/83 & -2/93 & 4/27 \\ -2/93 & 4/20 & -2/32 \\ 4/27 & -2/32 & 36/9 \end{bmatrix} > 0$$

تابع انتقال سیستم به صورت زیر بیان شده:

$$G(z) = C(zE - A)^{-1}B + D$$

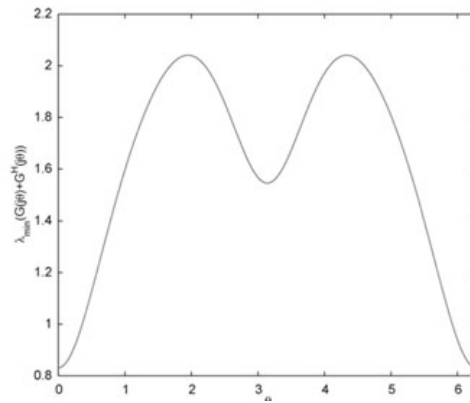
$$= \begin{bmatrix} \frac{2500z^2 + 580z - 807}{1500z^2 - 300z - 365} & \frac{-127z + 669 - 800z^2}{1500z^2 - 300z - 365} \\ \frac{-4500z^2 - 2900z - 1053}{3000z^2 - 600z - 730} & \frac{1440z^2 + 266z + 77}{600z^2 - 120z - 146} \end{bmatrix}$$

بدست می‌آید.

از آنجایی که  $A$  شور پایدار است، می‌دانیم که  $G(z)$  در  $|z| \geq 1$  تحلیلی است.

$$\lim_{z \rightarrow \infty} (G(z) + G^H(z)) = \begin{bmatrix} 1/3 & -61/30 \\ -61/30 & 24/5 \end{bmatrix} > 0$$

حداقل مقادیر ویژه از  $G(e^{j\theta}) + G^H(e^{j\theta})$  به ازای همه  $\theta \in [0, 2\pi]$  در شکل ۱.۴ رسم شده است.



شکل ۱.۳: مقادیر ویژه مینیمال از  $G(e^{j\theta}) + G^H(e^{j\theta})$  به ازای  $\theta \in [0, 2\pi]$



# فصل ۴

## طراحی کنترلر پس خورد خروجی مقاوم با استفاده از روش نامساوی ماتریسی خطی

در این فصل، شرایط نامساوی ماتریسی خطی برای مسائل کنترل پس خورد خروجی ارائه می‌گردد. دو الگوریتم محاسباتی LMI - پایه‌ای ساده ( $V - K$  تکراری و غیر تکراری) را پیشنهاد می‌نماییم که با تئوری پایداری لیاپانوف و طراحی پس خورد حالت خطی مرتبه دوم LQR<sup>۱</sup> شدیداً مرتبط است.

### ۱.۴ پس خورد خروجی مقاوم

از مشکلات گسترده‌ای که اغلب در نظریه کنترل به آن اشاره می‌گردد، مسئله پایداری پس خورد خروجی مقاوم (ROFSC)<sup>۲</sup> می‌باشد. تاکنون روش‌های متفاوتی برای مطالعه دو جنبه از مسائل پایداری مورد استفاده قرار گرفته است، یعنی شرایطی که تحت آن سیستم خطی در فضای حالت را می‌توان از طریق پس خورد خروجی پایدار، و روش‌های مربوطه جهت به دست آوردن کنترل پایدار مقاوم شرح داد.

شرایط لازم و کافی برای پایداری پس خورد خروجی از ثابت زمان خطی، پیوسته و سیستم‌های گسسته به ترتیب در منابع [۳۵] و [۴۱] به دست آمده است. اگرچه، نتایج ارائه شده در این دو مقاله، وجود و جنبه‌های محاسباتی مسئله را حل نمی‌نماید. اخیراً نشان داده شده که طیف گسترده‌ای از مسائل طراحی کنترل پس خورد خروجی را می‌توان به نقطه‌ی شدنی تحت قید نامساوی ماتریسی دو آفینی BMI کاهش داد. با این حال، مسائل BMI به «NP - سخت» معروف هستند [۴۸].

در منبع [۴۸] نشان داده شده که پایداری به طور هم‌زمان از طریق پس خورد خروجی ایستایی، مسئله «NP - سخت» می‌باشد. یعنی، با توجه به ساختارهای  $N$ ، مسئله موجود به دست آوردن ماتریس پس خورد خروجی ایستایی  $F$  را بررسی می‌نماید که همه  $N$  مسأله به طور هم‌زمان پایدار باشند.

<sup>۱</sup>Linear Quadratic Regulator

<sup>۲</sup>Robust output feedback system controller

در این فصل، مسئله‌ی BMI از کنترلر پس خورد خروجی طراحی شده که به نامساوی ماتریسی خطی، کاهش می‌یابد.

در منابع [۱۲]، [۸] و [۴] نظریه LMI برای کنترلر پس خورد خروجی ارائه شده است. در منبع [۲۰] الگوریتم تکراری  $V - K$  که به وسیله تثبیت ماتریس لیاپانوف یا ماتریس کنترلر بدست آمده مورد استفاده قرار گرفته است.

## ۲.۴ فرمول‌بندی مسئله

دستگاه  $G$  شامل  $N$  سیستم هم‌زمان را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$G : \quad \dot{x} = \sum_{i=1}^N \alpha_i (A_i x + B_i u) \quad y = C_i x \quad (1.4)$$

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1 \quad \text{برای} \quad \alpha_i \in \langle 0, 1 \rangle \quad \text{و} \quad i = 1, 2, \dots, N$$

که  $x \in \mathbf{R}^n$  متغیر حالت،  $u \in \mathbf{R}^m$  متغیر ورودی،  $y \in \mathbf{R}^l$  بردار خروجی و  $N$  مرتبه‌ای از  $G$  می‌باشد.

برای سیستم ناوردای پیوسته - زمان خطی (۱.۴) ماتریس پس خورد خروجی ایستائی مقاوم که با الگوریتم کنترلر به فرم زیر طراحی شده است:

$$u = FC_i x \quad (2.4)$$

به طوریکه سیستم حلقه بسته‌ی رابطه‌ی زیر پایدار باشد:

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^N \alpha_i (A_i x + B_i FC_i x) = \sum_{i=1}^N \alpha_i A_{Ci} x \quad (3.4)$$

$$A_{Ci} = A_i + B_i FC_i$$

تابع هزینه‌ی مرتبط با سیستم (۱.۴) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (۴.۴)$$

که  $Q = Q^T \geq 0$  و  $R = R^T > 0$  ماتریس‌هایی با ابعاد سازگاراند.

تعریف ۱.۲.۴. سیستم نامعین (۱.۴) را در نظر بگیرید. اگر  $u^*$  قانون کنترل موجود و  $J^*$  اسکالر مثبت باشد به طوریکه برای همه سیستم‌های نامعین حلقه بسته پایدار بوده و تابع هزینه‌ی رابطه‌ی (۴.۴) در  $J \leq J^*$  صدق نماید، سپس  $J^*$  هزینه‌ی تضمین شده و  $u^*$  قانون کنترل هزینه‌ی تضمین شده برای سیستم نامعین (۱.۴) گویند.

لم ۲.۲.۴. فرض کنید  $P > 0$  جوابی برای معادله ماتریسی لیاپانوف زیر باشد، اگر رابطه‌ی زیر:

$$A^T P + P A + Q = 0 \quad (۵.۴)$$

را داشته باشیم، آنگاه  $A$  پایدار است اگر و تنها اگر  $Q > 0$  باشد، اگر  $P$  و  $Q$  موجود باشند، ماتریس  $A$  پایدار درجه‌ی دوم گفته می‌شود.

نتیجه ۳.۲.۴. سیستم حلقه بسته‌ی (۳.۴) پایدار درجه‌ی دوم است اگر و تنها اگر ماتریس معین مثبت  $P > 0$  موجود باشد به طوریکه نامساوی زیر را برقرار باشد:

$$A_{ci}^T P + P A_{ci} < 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (۶.۴)$$

سیستم ارائه شده (۱.۴) سیستم خطی چند بخشی است. با توجه به نتیجه‌ی بالا، می‌توان رئوسی از آن را به قرار زیر لیست نمود:

$$\{(A_1, B_1, C_1), (A_2, B_2, C_1), \dots, (A_N, B_N, C_1)\} \quad (۷.۴)$$

## ۳.۴ طراحی ماتریس پس خورد خروجی مقاوم

قضیه ۱.۳.۴. سیستم نامعین خطی (۱.۴) را در نظر گرفته، آنگاه عبارات زیر معادل یکدیگرند:

◀ سیستم (۱.۴) پس خورد خروجی ایستایی مقاوم از درجه‌ی دوم می‌باشد.

◀ ماتریس معین مثبت  $P = P^T > \circ$  و ماتریس  $F$  موجود است به طوریکه نامساوی ماتریسی زیر برقرار باشد:

$$(A_i + B_i F C)^T P + P(A_i + B_i F C) < \circ, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (۸.۴)$$

قضیه ۲.۳.۴. سیستم (۷.۴) را در نظر گرفته، عبارات زیر معادل یکدیگرند:

◀ سیستم (۷.۴)، پس خورد خروجی ایستایی هم‌زمان پایدار با هزینه‌ی تضمین شده زیر می‌باشند.

$$\int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \leq x_0^T P x_0 = J^* \quad \text{و} \quad P > \circ \quad (۹.۴)$$

◀ ماتریس‌های  $P > \circ, Q > \circ, R > \circ$  و ماتریس  $F$  موجودند به طوریکه در نامساوی زیر صدق می‌کنند:

$$(A_i + B_i F C)^T P + P(A_i + B_i F C) + Q + C^T F^T R F C \leq \circ, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (۱۰.۴)$$

◀ ماتریس‌های  $P > \circ, Q > \circ, R > \circ$  و ماتریس  $F$  موجودند به طوریکه در نامساوی‌های زیر صدق می‌کنند:

$$A_i^T P + P A_i - P B_i R^{-1} B_i^T P + Q \leq \circ \quad (۱۱.۴)$$

$$(B_i^T P + R F C) \Phi_{ui}^{-1} (B_i^T P + R F C)^T - R \leq \circ \quad (۱۲.۴)$$

که در آن

$$\Phi_{ui} = -(A_i^T P + P A_i - P B_i R^{-1} B_i^T P + Q), \quad i = 1, 2, \dots, N$$

برای سیستم (۷.۴) فضایی ۱.۳.۴ و ۲.۳.۴ منجر به طراحی دو روند  $A$  و  $B$  برای پایداری پس خورد خروجی ایستایی هم‌زمان با هزینه‌ی تضمین شده از سیستم (۷.۴) می‌باشد.

## روند A (الگوریتم تکراری)

در نظر می‌گیریم:  
گام اول:  $F_0 = 0, j = 0$ .

گام دوم: با استفاده از الگوریتم LMI - پایه،  $P_j = P_j^T > 0$  از نامساوی زیر محاسبه می‌گردد:

$$(A_i + B_i F C)^T P_j + P_j (A_i + B_i F C) + Q + C^T F_{j-1}^T R F_{j-1} C \leq 0,$$

$$i = 1, 2, \dots, N, \quad P_j > 0, \quad P_j \leq \rho I$$

که  $\rho$  ثابت مثبت و  $I$  ماتریس واحد است.

گام سوم: ماتریس  $F_j$  با استفاده از الگوریتم LMI - پایه به وسیله نامساوی زیر محاسبه می‌گردد:

$$\begin{bmatrix} (A_i + B_i F_j C)^T P_j + P_j (A_i + B_i F_j C) + Q & C^T F_j^T R \\ R F_j C & -R \end{bmatrix} \leq 0 \quad (13.4)$$

گام چهارم: مقدار  $er = \|F_j - F_{j-1}\|$  را محاسبه می‌نماییم اگر  $er < \text{error}$  باشد آنگاه الگوریتم متوقف می‌شود، در غیر این صورت به گام دوم مراجعه می‌کنیم. در گام دوم،  $\rho$  را می‌توان به حداقل رسانید و در گام سوم، شرط حدود نورم ماتریس کنترلگر را به صورت زیر اعمال می‌نماییم.

$$F^T F < F_{\max}$$

## روند B (الگوریتم غیر تکراری)

گام اول: با استفاده از الگوریتم LMI - پایه، ماتریس  $S = S^T > 0$  از نامساوی زیر محاسبه می‌گردد:

$$\begin{bmatrix} S A_i^T + A_i S - B_i R^{-1} B_i^T & S Q \\ Q S & -Q \end{bmatrix} < 0 \quad \gamma < S, \quad i = 1, \dots, N \quad (14.4)$$



که  $\gamma \geq 0$  ثابت غیر منفی و  $S = P^{-1}$  می باشد.

گام دوم: با استفاده از الگوریتم LMI - پایه، ماتریس  $F$  از نامساوی زیر محاسبه می گردد:

$$\begin{bmatrix} -R & B_i^T P + RFC \\ (B_i^T P + RFC)^T & -\Phi_{ui} \end{bmatrix} < 0 \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (15.4)$$

در گام ۱،  $\gamma$  را می توان به حداکثر رسانید و در گام ۲، می توان حدود نورم را بر روی  $F$  پس خورد خروجی ایستایی اعمال نمود.

اگر نتایج حل روابط (۱۲.۴) - (۱۵.۴) شدنی نباشند، سیستم (۷.۴) با هزینهی تضمینی مشخص شده پایدار نیست، لازم است به منظور یافتن جواب شدنی  $Q, R$  و  $\rho$  و  $\gamma$  را تغییر داد. اگر جواب های (۱۲.۴) - (۱۵.۴) شدنی باشند، سپس  $u = Fy$  قانون کنترل هزینهی تضمین شده و  $J^*$  مورد نظر

$$J^* = x_0^T P x_0 \geq \int_0^t (x^T Q x + u^T R u) dt$$

را هزینهی تضمین شده گویند.

## ۴.۴ مثالها

مثال ۱.۴.۴. برای نشان دادن دو روند ارائه شده، کنترلگر طراحی شده PI جهت کنترل سرعت موتور DC کوچک را در نظر می گیریم:

$$A_i = A_0 + \varepsilon_1 A_{V1} + \varepsilon_2 A_{V2} \quad (16.4)$$

$$B_i = B_0 + \varepsilon_1 B_{V1} + \varepsilon_2 B_{V2} \quad i = 1, \dots, 4$$

که

$$A_0 = \begin{bmatrix} -0.9235 & 1 & 0 \\ -0.2363 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.4221 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{V1} = \begin{bmatrix} 0.11 & 0 & 0 \\ -0.172 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_{V1} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.529 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{V2} = \begin{bmatrix} 0,4065 & 0 & 0 \\ -0,06433 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, BV2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,2522 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_i \in \langle \underline{\varepsilon}_i, \bar{\varepsilon}_i \rangle, \quad i = 1, 2, \quad |\varepsilon_i| = 1.$$

طبق رابطه‌ی (۷.۴)، سیستم چهار بخشی موجود که رئوس را برای جایگشت‌های مختلف که از دو متغیر  $\varepsilon_i$ ،  $i = 1, 2$  می‌باشد را محاسبه نموده و به ترتیب حداقل و حداکثر در نظر می‌گیریم یعنی:

$$\begin{aligned} A_1 &= A_0 + \underline{\varepsilon}_1 A_{V1} + \underline{\varepsilon}_2 A_{V2} \\ A_2 &= A_0 + \underline{\varepsilon}_1 A_{V1} + \bar{\varepsilon}_2 A_{V2} \\ A_3 &= A_0 + \bar{\varepsilon}_1 A_{V1} + \underline{\varepsilon}_2 A_{V2} \\ A_4 &= A_0 + \bar{\varepsilon}_1 A_{V1} + \bar{\varepsilon}_2 A_{V2}. \end{aligned} \quad (17.4)$$

نتایج در جدول ۱۰.۵ با در نظر گرفتن  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$ ،  $Q = Iq$ ،  $R = Ir$  نشان داده شده است. بیشترین مقدار ویژه نشان‌دهنده‌ی حداکثر بخش حقیقی از مقادیر ویژه‌ی حلقه بسته است که در همه سیستم‌های چهار بخشی در نظر گرفته شده است.

طبق جدول ۱۰.۵ نتایج در ردیف ۳ با استفاده از الگوریتم  $B$  یعنی  $B/3$  و به طور مشابه  $A/7$  و  $B/7$  به دست آمده است.

محاسبه‌ی ماتریس  $F$  به شرح زیر می‌باشد:

$$3/B : F = \begin{bmatrix} -4,8696 & -0,8469 \end{bmatrix}$$

$$7/A : F = \begin{bmatrix} -2,2403 & -0,6094 \end{bmatrix}$$

$$7/B : F = \begin{bmatrix} -0,0544 & -0,0852 \end{bmatrix}$$

به علاوه، نتایج این جدول نشان می‌دهد که:

♦ طراحی ماتریس پس‌خورد خروجی ایستایی مقاوم «NP - سخت» می‌باشد.

♦ با انتخاب  $\rho$  و  $\gamma$  تغییرات کلی در نتایج طراحی به دست می‌آید. (روابط (۱.۴)، (۲.۴)، (۳.۴)، (۶.۴)، (۱۲.۴)، (۱۳.۴) را مشاهده نمایید.)

No	r	q	$\rho$	$\gamma$	MaxEig	
					Procedure A	Procedure B
1	1	1	$1/\gamma$	0.01	-0.0256	0.1984
2	1	5	$1/\gamma$	0.001	-0.0518	0.7266
3	1	5	$1/\gamma$	0.01	0.285	-0.1349
4	1	10	$1/\gamma$	0.001	-0.0496	1.2416
5	1	$10^{-7}$	$1/\gamma$	0.001	-0.0029	$-3.614 \times 10^{-4}$
6	1	1	$10^6$	0.03	-0.0207	-0.0484
7	1	1	$10^6$	0.03	-0.2543	-0.1689
8	1	0.01	$10^6$	0.03	-0.0198	-0.0152
9	1	0.0001	$10^6$	0.03	-0.0205	-0.0132
10	2	1	$10^6$	0.03	-0.0209	-0.047
11	5	1	$10^6$	0.03	-0.0207	-0.0162
12	10	1	$10^6$	0.03	-0.0247	-0.055
13	10	1	$10^3$	0.03	-0.0331	-0.055
14	1	1	$10^4$	0.03	-0.0231	-0.0484

جدول ۱۰۴: نتایج محاسبات به دست آمده با استفاده از روندهای  $A$  و  $B$

♦ جواب‌های محلی برای بهینه‌سازی LMI موجود است. (رابطه‌های (۱۰.۴)، (۱۱.۴)، (۱۲.۴) را مشاهده نمایید.)

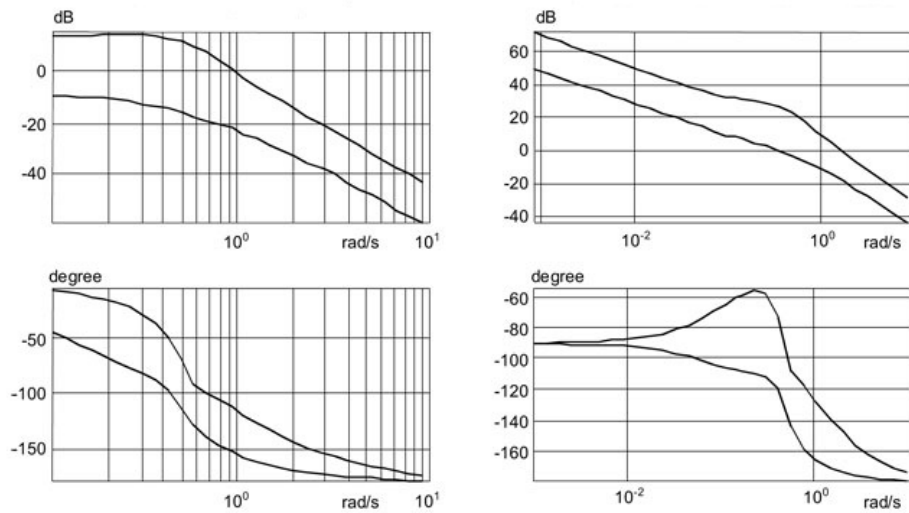
تابع انتقال مربوط به سیستم چند بخشی (۱۶.۴)، به صورت زیر بدست می‌آید:

$$G(s) = (0.4229 + \varepsilon_1(-0.0529) + \varepsilon_2(0.2522)) / (s^2 + 0.9235s + 0.2363 + \varepsilon_1(0.11s - 0.0172) + \varepsilon_2(-0.4055s - 0.0643))$$

نتایجی از حوزه‌ی فرکانسی کنترلگر PI به قرار زیر می‌باشد:

$$F_{R1}(s) = \frac{2.5s + 0.5}{s} \quad \text{یا} \quad -0.111 \quad \text{با مقدار ویژه}$$

$$F_{R2}(s) = \frac{4.87s + 0.85}{s} \quad \text{با مقدار ویژه} \quad -0.12.$$



شکل ۱.۴: سیستم نامعین تحت PI و کنترلر FR2

برای بدست آوردن ماتریس  $P_1$  از برنامه زیر در نرم افزار متلب استفاده شده است.

```

setlmis ([])
p1=lmivar (1,[3 1])
lmiterm([1 1 1 p1],1,A1,'S')
lmiterm([1 1 1 p1],1,B1*(F0)*C,'S')
lmiterm([1 1 1 0],Q)
lmiterm([1 1 1 0],C'*(F'0)*R*F0*C)
lmis=getlmis
[ tmin , xfeas] =feasp(lmi)
p1=dec2ma(lmis,xfeas,p1)

```

و آنگاه برای به دست آوردن  $F_1$  از برنامه‌ی زیر استفاده می‌نماییم.

```

setlmis ([])
F1=lmivar (2,[1 2])
lmiterm([1 1 1 0],A1*p1*'S')

```

```

lmiterm([1 1 1 F1],p1*(B'1),C','S')
lmiterm([1 1 1 0],Q)
lmiterm([1 2 1 F1],R,C,'S')
lmiterm([1 2 2 0]-R)
lmis=getlmis
[ tmin ,xfeas] =feasp(lmi)
F1=dec2mat(lmis,xfeasp,F1)

```

روند به دست آوردن مقادیر سیستم  $P_2, P_3, P_4$  و  $F_2, F_3$  همانند روندهای ذکر شده در بالا می‌باشند.

مثال ۲.۴.۴. مثال دوم به طراحی کنترلگر مقاوم برای سیستم‌های خطی مقاوم می‌پردازد. مقادیر پارامتر مدل خطی عددی از ژنراتور هم‌زمان با محرک و نقطه‌ی عملیاتی از منبع [۴۴] به دست آمده است. سیستم چند بخشی با توجه به (۱۶.۴) به دست آمده که مقادیر به شرح ذیل می‌باشد.

$$A_o = 10^3 \times$$

$$\begin{bmatrix} 0.403 & -0.04 & -0.0093 & 0.377 & -0.0001 & 0.163 & -0.0409 & -0.0061 \\ 0.0602 & -0.0797 & -0.0215 & 0.0746 & -0.0001 & 2.8733 & -0.06 & -0.0147 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1.2085 & -1.0788 & -0.1958 & 0.961 & -0.0014 & 0.0112 & -1.0795 & -0.1646 \\ -0.3021 & 0.2895 & -0.0226 & -0.3533 & 0.0007 & 0.0043 & 0.2892 & 0.0106 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0021 & 0 & 0 \\ 0.9688 & -1.1518 & -0.3461 & 1.201 & -0.0014 & -2.8454 & -1.1733 & -0.2366 \\ 0.6006 & 0.063 & 0.2872 & -0.3979 & -0.0002 & -0.0085 & 0.0635 & 0.1268 \end{bmatrix}$$

$$B_o^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1.9896 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 669 & 0 & 0 & 110 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x^T = [u_t \quad i_{fd} \quad \delta \quad \omega \quad u_{fd} i_{kd} \quad i_{kq}]$$

$$y^T = [u_t \quad i_{fd} \quad \delta \quad i_t] \quad u^T = [\Delta u_i \quad \Delta P_m]$$

$$A_1 = 0.1A, B_1 = 0.1B, \quad \varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = 0$$

$$Q = 10^{-5}I \quad R = I$$

۱.۴.۴ نتایج محاسبات به دست آمده از طریق روند A

$$F = \begin{bmatrix} -15/9037 & -2/6736 & -25/3321 & 0/7755 \\ -1/2949 & 0/1602 & 0/8665 & 1/6986 \end{bmatrix}$$

$$\text{ماکسیم مقدار ویژه} = -1/6952$$

هزینه‌ی تضمین شده:

$$J^* = \int_0^{\infty} [x^T(Q + C^T F^T R F C)x] dt \leq 9/1069 \times 10^3 \|x_0\|^2$$

۲.۴.۴ نتایج محاسبات به دست آمده از طریق روند B

$$F = \begin{bmatrix} -0/0087 & -0/0196 & -0/0414 & -0/0106 \\ -0/068 & 0/0089 & -0/1028 & -0/0057 \end{bmatrix}$$

$$\text{ماکسیم مقادیر ویژه} = -0/8669$$

هزینه‌ی تضمین شده:

$$J^* = \int_0^{\infty} [x^T(Q + C^T F^T R F C)x] dt \leq 624/9463 \|x_0\|^2$$



# فصل ۵

## سیستم‌های دو خطی

### ۱.۵ پایداری سیستم دو خطی از طریق کنترل پس‌خورد حالت خطی

در این فصل مسأله پایداری سیستم دو خطی را با استفاده از کنترل پس‌خورد حالت خطی بررسی می‌نماییم. روشی ارائه گردیده که  $P$  چند بخشی در حوالی فضای حالت پیدا می‌نماییم، اگر کنترلگری به فرم  $u = Kx$  موجود باشد به طوریکه، نقطه تعادل صفر در سیستم حلقه بسته به طور مجانبی پایدار و  $P$  در دامنه‌ی جاذبه‌ی تعادل قرار داشته باشد. طراحی کنترلگر نیاز به حل مسأله‌ی بهینه‌سازی محدب مربوط به نامساوی ماتریسی خطی دارد. به عنوان مثالی کاربرد روش پیشنهادی را نشان می‌دهیم.

سیستم دو خطی از اوایل سال ۱۹۶۰ به عنوان گذرگاهی بین سیستم خطی و غیر خطی در نظر گرفته شده است. محور مطالعه‌ی سیستم دو خطی از محدوده‌های مدل‌های خطی که کاربردهای عملی در زمینه‌ی جامعه شناسی، مدل‌های جمعیت، زیست‌شناسی [۴۳] و همچنین در شکافت هسته‌ای [۴۲]، انتقال و سیستم‌های قدرت ناشی می‌گردد.

در ابتدا، به نوعی از کلاس سیستم‌های غیر خطی که نزدیک به دنیای خطی است اشاره می‌نماییم. در حقیقت ممکن است بتوان برای تعمیم سیستم‌های دو خطی بسیاری از تعاریف و روش‌های آنالیزی را در چهارچوب خطی توسعه داد. از طرفی ساختار غیر خطی مزایای مهمی از نظر مدلسازی و کنترل پذیری را ارائه می‌دهد. از سال ۱۹۸۰ مسأله‌ی کنترل سیستم دو خطی با استفاده از روش‌های مختلف مانند اسلاید کنترل حالت [۳۸]، پس‌خورد درجه‌ی دوم [۲۳]، پس‌خورد حالت خطی [۳۳] و کنترل مدل [۲۲] مورد بررسی قرار گرفت. در دهه‌های پس از آن روش‌های طراحی شده دیگری در این امر دخیل بوده، به عنوان مثال تجزیه و تحلیل کیفی و روش تثبیت کاپلاو<sup>۱</sup> و مولر<sup>۲</sup> [۲۹]، [۳۰]، [۴۱]، و همچنین

<sup>۱</sup>Khpalov

<sup>۲</sup>Mohler



تکنیک‌های کنترل بهینه در چهارچوب دو خطی گسترش یافته است.

در خصوص پایداری، مسائل متعددی جهت یافتن شرایط پایداری مجانبی سراسری GAS<sup>۳</sup> تحت پس‌خورد حالت [۳۹]، [۲۵]، مورد بررسی قرار گرفته است. هر چند این نتایج به زیر مجموعه‌های ویژه سیستم دو خطی محدود می‌شود. در اینجا هدف اصلی بررسی پایداری سیستم دو خطی با استفاده از پس‌خورد حالت خطی می‌باشد. در این فصل مسأله‌ی عملی‌تری از طراحی قانون کنترل پس‌خورد حالت که تضمین‌کننده‌ی سیستم حلقه بسته‌ی (محلی) پایدار مجانبی و  $b$  ناحیه‌ی چند بخشی از پیش تعیین شده‌ی فضای حالت با تعادلی (طیف وسیعی از سیستم مورد نظر) که متعلق به دامنه‌ی جاذب (DA) است<sup>۴</sup> را در نظر می‌گیریم. شرایط طراحی در قالب نامساوی ماتریسی خطی (LMI) مسأله‌ی شدنی است، که می‌توان با استفاده از الگوریتم عددی آن را به صورت مؤثری حل نمود. ساختار این فصل به شرح زیر می‌باشد:

در بخش دوم به برخی از تعاریف اولیه پرداخته و مسأله‌ی کنترل با معادله‌ی حالت را به طور دقیق بیان می‌کنیم. نتیجه‌ی اصلی در بخش سوم ارائه می‌گردد و در بخش چهارم مؤثر بودن روش را با مثالی ارائه می‌نماییم. در نهایت، برخی از نتایج در بخش پنجم شرح داده شده است.

### بخش دوم: ارائه‌ی مسأله

سیستم دو خطی به فرم زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + N(x, u) \quad (۱.۵)$$

که  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  سیستم حالت بوده  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  ورودی کنترل و

$$N(x, u) = \begin{pmatrix} x^T N_1 \\ x^T N_2 \\ \vdots \\ x^T N_n \end{pmatrix} u \quad (۲.۵)$$

که  $N_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ،  $i = 1, \dots, n$  می‌باشد. سیستم پایدار (۱.۵) را از طریق کنترلگر پس‌خورد حالت خطی به فرم زیر در نظر می‌گیریم:

$$u(t) = Kx(t) \quad (۳.۵)$$

<sup>۳</sup>Global Asymptotic Stability

<sup>۴</sup>Domain of Attraction

که  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$  است. سیستم (۱.۵) تحت کنترلگر (۳.۵) منجر به سیستم غیر خطی (درجهی دوم) به فرم زیر می‌شود:

$$\dot{x}(t) = (A + Bk)x(t) + \begin{pmatrix} x^T N_1 K \\ x^T N_2 K \\ \vdots \\ x^T N_n K \end{pmatrix} x \quad (۴.۵)$$

جهت حصول اطمینان از پایداری تقریبی با نسبت ساده سیستم (۴.۵)، مقادیر ماتریس  $K$  را از رابطه  $A + BK$  هوریتز پیدا می‌نماییم [۱۸]. در برنامه‌ی مهندسی کاربردی، تضمین پایداری سیستم حلقه بسته‌ی مجانب ساده کافی نیست، که اغلب نقطه‌ای از فضای حالت لازم است، یعنی محدوده‌ی عمل سیستم از نقطه‌ی تعادل متعلق به  $DA$  می‌باشد. به منظور تعریف دقیق مسئله‌ی چند بخشی،  $\mathcal{P} \in \mathbb{R}^n$  به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\mathcal{P} = \text{conv}\{x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(p)}\} \quad (۵.۵)$$

$$= \{x \in \mathbb{R}^n : a_k^T x \leq 1, k = 1, 2, \dots, q\} \quad (۶.۵)$$

$p$  و  $q$  اعداد صحیح،  $x_{(i)}$  نشان دهنده‌ی رأس  $i$ ام  $\mathcal{P}$  چند بخشی  $\mathbb{R}^n$  و  $a_k \in \mathbb{R}^n$  و  $\text{conv}\{\cdot\}$  عملیات بخش محدب می‌باشند. به عنوان مثال در جعبه‌ی فضای  $\mathbb{R}^2$

$$\mathcal{P} = [-1, 2] \times [-1, 3]$$

می‌توان هر دو بازه را به فرم (۵.۵) به صورت زیر شرح داد:

$$x_{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}^T, x_{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}^T$$

$$x_{(3)} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \end{pmatrix}^T, x_{(4)} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix}^T$$

و فرم (۶.۵) روابط زیر را داریم:

$$a_1^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, a_2^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a_3^T = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, a_4^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \end{pmatrix}$$

سیستم (۱.۵) و  $\mathcal{P}$  چند بخشی در رابطه‌ی (۵.۵) و (۶.۵) تعریف شده، به طوریکه  $x = 0$  نقطه درونی از  $\mathcal{P}$  می‌باشد، کنترلگر را به فرم رابطه‌ی (۳.۵) پیدا می‌نماید از طرفی سیستم حلقه بسته‌ی رابطه‌ی (۴.۵) پایدار بوده و  $\mathcal{P}$  متعلق به  $DA$  متعادل است.

ملاحظه ۱.۱.۵. هنگامی سیستم (۱.۵) پایدار مجانبی حلقه باز باشد (به معنی اینکه  $A$  هوریتزی است) مسأله بالا برای  $K = 0$  به صورت بدیهی حل می‌گردد، مسأله‌ی کنترلگری به قیده‌های بیشتری برای صدق کردن در سیستم حلقه بسته نیازمند می‌باشد؛ در واقع حالت  $K = 0$  جواب قابل قبول دیگری است.

### بخش سوم: نتایج اصلی

ماتریس  $K$  را به صورت سیستم حلقه بسته‌ی (۴.۵) را در نظر بگیرید (یعنی  $A + BK$  ماتریس هوریتزی است).

قضیه ۲.۱.۵. [۲۷] مجموعه‌ی بسته‌ی  $E \subset \mathbb{R}^n$  را در نظر بگیرید؛ به طوری که  $x = 0$  نقطه‌ی درونی از  $E$  بوده، برآورد  $DA$  از سیستم (۴.۵) متعادل است اگر:

(i) مجموعه‌ای ثابت برای سیستم (۴.۵) باشد؛

(ii) تابع لیاپانوف  $v(x)$  موجود باشد به طوری که؛

- $v(x)$  بر روی  $E$  مثبت متناهی باشد؛
- $\dot{v}(x)$  در طول مسیری از سیستم (۴.۵) بر  $E$  معین منفی باشد؛

قضیه ۳.۱.۵. سیستم پایدار مجانبی را به یاد داریم،  $DA$  به بزرگ‌ترین مجموعه‌ی  $\Omega$  متصل شده که حاوی مبدأ بوده به طوری که هر جواب با شروع همگرایی  $\Omega$  به صفر میل می‌کند. در هر ناحیه‌ی  $E$  بسته، اگر  $x = 0$  نقطه‌ی درونی از  $E$  باشد  $\Omega$  موجود است که تخمینی از  $DA$  می‌باشد. جهت اطمینان، مجموعه‌ی  $E$  تخمینی از  $DA$  است، و یافتن تابع لیاپانوف معین مثبت با مشتق معین منفی بر روی  $E$  کافی نیست. در واقع، همان‌طور که در قضیه ۲.۱.۵ بیان شد، برای حصول اطمینان نیاز است  $E$  را مجموعه‌ای ثابت در نظر بگیریم.

قضیه‌ی زیر نتیجه‌ی اصلی این فصل می‌باشد. شرط کافی برای پس‌خورد حالت خطی در فرم (۳.۵) فراهم می‌گردد به طوری که، با توجه به  $\mathcal{P}$  چند بخشی، سیستم حلقه بسته‌ی رابطه‌ی (۴.۵) پایدار مجانبی و  $DA$  شامل تعدادی  $\mathcal{P}$  چند بخشی می‌باشد.

زیر بنای ایده‌ی اصلی نتیجه شامل ساخت تابع درجه‌ی دوم لیاپانوف با مشتق معین منفی بوده که بیش از یک مجموعه‌ی ثابت می‌باشد (یعنی منطقه‌ی مدنظر موجود، مربوط به منحنی سطحی از تابع لیاپانوف آن می‌باشد) که در  $\mathcal{P}$  چند بخشی محصور شده است.

قضیه ۴.۱.۵. سیستم (۱.۵) و  $\mathcal{P}$  چندبخشی در رابطه‌ی (۵.۵) و (۶.۵) تعریف شده است، مسئله‌ی بالا قابل حل بوده اگر اسکالرهای  $\gamma, c$  ماتریس متقارن  $\mathbb{R}^{n \times n}$  و ماتریس  $W \in \mathbb{R}^{m \times n}$  موجود بوده به طوریکه:

$$0 < \gamma < 1 \quad (7.5)$$

$$c > 0 \quad (8.5)$$

$$P > 0 \quad (9.5)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \gamma a_k^T c \\ c P a_k \gamma & P c \end{pmatrix} \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, q \quad (10.5)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x_{(i)}^T \\ x_{(i)} & c P \end{pmatrix} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (11.5)$$

$$\gamma(AP + PA^T) + \gamma(BW + W^T B^T) + \begin{pmatrix} x_{(1)}^T N_1 \\ x_{(2)}^T N_2 \\ \vdots \\ x_{(p)}^T N_p \end{pmatrix} W$$

$$+ \left( W^T (N_1^T x_{(1)} \quad N_2^T x_{(2)} \quad \dots \quad N_p^T x_{(p)}) \right) < 0 \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (12.5)$$

در این حالت کنترلگر مسئله‌ی بالا را به وسیله‌ی رابطه‌ی (۳.۵) با  $K = WP^{-1}$  حل می‌نماییم.

برهان. سیستم حلقه بسته‌ی (۴.۵) توسط اتصال از سیستم (۱.۵) و کنترلگر (۳.۵) را در نظر گرفته، اسکالر  $\gamma$  داده شده در فرضیات در قضیه صدق می‌کند، فرض کنید  $\rho := \frac{1}{\gamma} > 1$  و تعریف  $\rho \mathcal{P}$  چند بخشی است که به عنوان مضربی از  $\rho$  با مختصات رئوس  $\mathcal{P}$  به دست آمده‌اند. صرف نظر از جزئیات چند بخشی  $\rho \mathcal{P}$  نسخه‌ی کوچکی از چند بخشی  $\mathcal{P}$  است.

تابع لیاپانوف  $v(x) = x^T P^{-1} x$  را در نظر بگیرید. شرایط (۹.۵) و (۱۲.۵) در  $v(x)$  مثبت معین است که با مشتق معین منفی به روی  $\rho \mathcal{P}$  تضمین شده است. در واقع شرط (۹.۵)،  $b(x)$  مثبت معین را تضمین می‌کند. علاوه بر این قبل و بعد عبارت (۱۲.۵) را در  $P^{-1}$  ضرب می‌کنیم که منجر به رابطه‌ی  $K = WP^{-1}$  می‌گردد داریم:

$$P^{-1}(A + BK) + (A + BK)^T P^{-1} + \rho P^{-1} \begin{pmatrix} x_{(i)}^T N_1 \\ x_{(i)}^T N_2 \\ \vdots \\ x_{(i)}^T N_n \end{pmatrix} K$$

$$+ \rho K^T \begin{pmatrix} N_1^T x_{(i)} & N_2^T x_{(i)} & \dots & N_n^T x_{(i)} \end{pmatrix} P^{-1} < 0, i = 1, 2, \dots, P \quad (13.5)$$

نامساوی آخر برابر است با:

$$P^{-1}(A + BK) + (A + BK)^T P^{-1} + \rho P^{-1} \begin{pmatrix} x^T N_1 \\ x^T N_2 \\ \vdots \\ x^T N_n \end{pmatrix} K$$

$$+ \rho K^T \begin{pmatrix} N_1^T x & N_2^T x & \dots & N_n^T x \end{pmatrix} P^{-1} < 0, \forall x \in \mathcal{P}. \quad (14.5)$$

معادله بین رابطه‌ی (۱۳.۵) و (۱۴.۵) به شرح زیر می‌باشد واقعیت این است که تابع ماتریسی شکافت تک در رابطه‌ی (۱۴.۵) تابع آفینی به روی  $x$  حالت می‌باشد؛ بنابراین معین منفی بودن در رئوس  $\mathcal{P}$  چند بخشی شرط لازم و کافی برای معین بودن بر کل  $\mathcal{P}$  چند بخشی است [۱۸].

در نهایت رابطه‌ی (۱۴.۵) را بدین گونه می‌توان بازنویسی نمود:

$$P^{-1}(A + BK) + (A + BK)^T P^{-1} + P^{-1} \begin{pmatrix} x^T N_1 \\ x^T N_2 \\ \vdots \\ x^T N_n \end{pmatrix} K$$

$$+ K^T \begin{pmatrix} N_1^T x & N_2^T x & \dots & N_n^T x \end{pmatrix} P^{-1} < 0, \forall x \in \rho \mathcal{P} \quad (15.5)$$

حال مشتق  $v(x)$  را در امتداد مدار سیستم (۱.۵) در نظر بگیرد:

$$\dot{v}(x) = \dot{x}^T P^{-1} x + x^T P^{-1} \dot{x}$$

$$= x^T \left\{ \left[ (A + BK)^T + K^T \begin{pmatrix} N_1^T x & N_2^T x & \dots & N_n^T x \end{pmatrix} \right] P^{-1} + P^{-1} \left[ A + BK + \begin{pmatrix} x^T N_1 \\ x^T N_2 \\ \vdots \\ x^T N_n \end{pmatrix} K \right] \right\} x \quad (16.5)$$

بقیه اثبات به نشان دادن چند بخشی بودن  $\mathcal{P}$  که شامل منحنی سطحی از تابع منتخب لیاپانوف است اختصاص داده شده و به نوبه‌ی خود شامل چند بخشی  $\mathcal{P}$  می‌باشد. در واقع شرط (۱۱.۵) نشان می‌دهد که بیضی رابطه‌ی زیر:

$$\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^n : x^T P^{-1} x \leq c\} \quad (17.5)$$

شامل  $\mathcal{P}$  چند بخشی است [۶].

در حال حاضر توجه داریم  $\rho\mathcal{P}$  چند بخشی را می‌توان به صورت معادل، به شرح زیر بیان نمود:

$$\begin{aligned} \rho\mathcal{P} &= \{x \in \mathbb{R}^n : a_k^T \leq \rho, k = 1, 2, \dots, q\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n : \frac{a_k^T}{\rho} x \leq 1, k = 1, 2, \dots, q\} \end{aligned} \quad (18.5)$$

بنابراین، شرط (۱۰.۵) را با استفاده از متمم شور می‌توان به صورت معادل زیر بازنویسی نمود:

$$\frac{a_k^T}{\rho} c P \frac{a_k}{\rho} \leq 1 \quad k = 1, 2, \dots, q \quad (19.5)$$

با توجه به [۶] می‌توان نتیجه گرفت که  $\rho\mathcal{P}$  چند بخشی شامل  $\varepsilon$  بیضی می‌باشد.  $\rho\mathcal{P} \supset \varepsilon$  شامل تضمینی از  $v(x)$  معین مثبت است و دارای مشتق منفی بر روی  $\varepsilon$  می‌باشد، به عبارتی دیگر مرز  $\varepsilon$  بیضی سطحی از منحنی  $v(x)$  است و در نتیجه  $\varepsilon$  مجموعه‌ای ثابت می‌باشد. این اجازه داده می‌شود تا این قضیه را به گونه‌ای به کار ببندیم که تضمین کننده‌ی  $\varepsilon$  تخمینی از DA باشد.  $\square$

ملاحظه ۵.۱.۵. تشخیص این ساده است اگر  $\gamma, c, P$  و  $W$  در رابطه‌ی (۷.۵)–(۱۲.۵) صدق کنند و همچنین روابط چهار گانه  $\tilde{W} := Wc$  و  $\tilde{\gamma} = \gamma, \tilde{c} = 1, \tilde{P} := Pc$  برقرار باشند. بنابراین، بدون از دست دادن کلیت می‌توانیم مجموعه‌ی  $c = 1$  از قضیه ۴.۱.۵ را عنوان نمود.

### بخش چهارم: مثال

مثال ۶.۱.۵. سیستم دو خطی به فرم (۱.۵) را با مقادیر زیر در نظر بگیرید:

$$A = \begin{pmatrix} -0.5 & 1.5 & 4.0 \\ 4.3 & 6.0 & 5.0 \\ 3.2 & 6.8 & 7.2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -0.7 & -1.3 \\ 0 & -4.3 \\ 0.8 & -1.5 \end{pmatrix} \quad (20.5)$$

$$N_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, N_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, N_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

از آنجایی که مقادیر ویژه ماتریس  $A$  برابر  $0.6 \pm 0.7i$ ،  $13.96$ ، سیستم حلقه باز ناپایدار می‌باشد. هدف حل مسئله‌ی (۱.۵) و بررسی سیستم‌های (۱.۵) و (۲.۵)، (۲۰.۵) می‌باشد، با توجه به:

$$\mathcal{P} := [-0.4, 0.9] \times [-0.6, 0.4] \times [-0.6, 0.4] \quad (21.5)$$

به منظور عملکرد دینامیکی بهتر از سیستم حلقه بسته، حداقل تضمین‌های کنترل مورد نیاز است، که قطب بخش خطی از سیستم کنترل متعلق به نیم فضای  $\text{Re}(z) < -\alpha$ ، با  $z \in \mathbb{C}$  و  $\alpha = 2/5$  می‌باشد. این محدودیت بیشتر در ماتریس حلقه بسته  $A + BK$  تخمین زده شده است [۹].

$$\forall \alpha P + (A + BK)P + P(A + BK)^T < 0 \quad (22.5)$$

با فرض  $KP = W$ ، نامساوی (۲۲.۵) را می‌توان بدین‌گونه بازنویسی نمود:

$$\forall \alpha P + AP + PA^T + BW + W^T B^T < 0 \quad (23.5)$$

قضیه ۴.۱.۵ نیاز به تعریف بردارهای  $a_k$  برای  $k = 1, 2, \dots, 6$  و  $2^3 = 8$  راس از جعبه‌ی  $\mathcal{P}$  دارد. برای این سیستم جواب قابل قبول به قرار زیر می‌باشد:

$$\gamma = 0.20$$

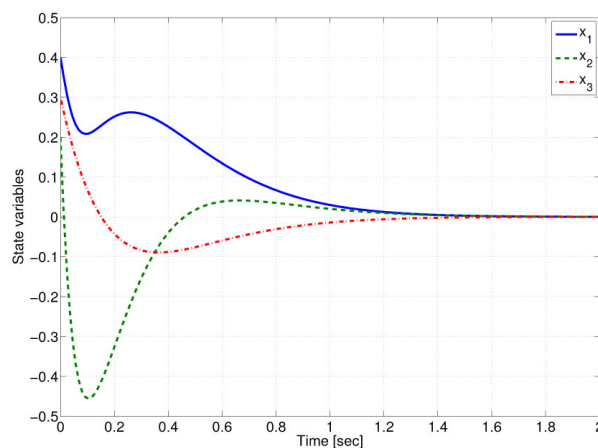
$$P = \begin{pmatrix} ۳,۹۵۶۹ & ۰,۳۷۱۷ & -۱,۲۹۳۵ \\ ۰,۳۷۱۷ & ۳,۷۱۰۸ & -۰,۳۵۹۹ \\ -۱,۲۹۳۵ & -۰,۳۵۹۹ & ۱,۱۱۳۱ \end{pmatrix}, W = \begin{pmatrix} ۱,۳۲۱۶ & ۰,۹۷۱۶ & -۱,۰۶۴۰ \\ ۴,۳۱۲۷ & ۱۲,۲۴۳۸ & ۴,۲۶۸۱ \end{pmatrix}$$

موجود است. بنابراین با  $K = WP^{-1}$ ، نشان می‌دهیم که می‌توانیم کنترلگری به فرم (۳.۵) را بیابیم:

$$K = \begin{pmatrix} ۰,۰۳۸۰ & ۰,۱۷۵۱ & -۰,۸۵۵۱ \\ ۳,۸۵۱۴ & ۳,۸۴۰۰ & ۹,۵۵۱۰ \end{pmatrix}.$$

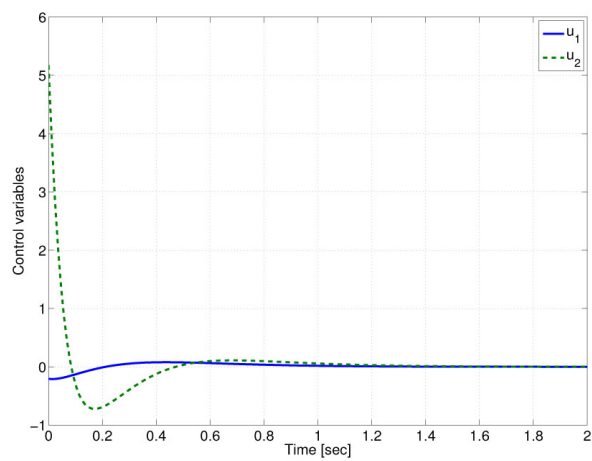
کنترلگر طراحی شده تضمین کننده که مرتبط به سیستم حلقه بسته است، جعبه‌ی عملی  $\mathcal{P}$  را با  $DA$  تعادلی محصور نموده و قطب‌های خطی، بخشی از سیستم حلقه بسته به زیر مجموعه‌ی  $\text{Re}(z) < -۲/۵$  می‌باشد.

رفتار زمانی متغیرهای حالت سیستم حلقه بسته با شرایط  $x^T = [۰,۴ \quad ۰,۲ \quad ۰,۳]$  در جعبه‌ی  $\mathcal{P}$ ، در شکل ۱۰۶ رسم شده و متغیر کنترل مربوطه در شکل ۲۰۶ گزارش داده شده است. با توجه به اینکه متغیرهای حالت و متغیرهای کنترل در شکل‌های ارائه شده به صفر میل می‌کنند لذا سیستم پایدار می‌باشد.



شکل ۱۰۵: واکنش حالت سیستم کنترل از اختلالات اولیه





شکل ۲۰۵: متغیرهای کنترل از سیستم حلقه بسته

# فصل ۶

## نتیجه‌گیری

در این پایان نامه، خصوصیات LMI را برای سیستم‌های توصیفی گسسته زمان خطی مورد بررسی قرار دادیم. در سیستم گسسته زمان خطی گاهی با LMI غیر اکید مواجه می‌شویم که نمی‌توانستیم آنها را به وسیله نرم افزار حل نماییم به عنوان مثال لم KYP از این دسته نامساوی‌های ماتریسی خطی است که برای رفع این مشکل از لم حقیقی مثبت بهره بردیم و توانستیم LMI مورد نظر را حل نماییم.

روش جدیدی برای طراحی کنترل مقاوم از طریق پس‌خورد خروجی ایستایی برای سیستم پیوسته - زمان خطی ارائه گردید که الگوریتم تکراری و غیر تکراری می‌باشد. این الگوریتم مبتنی بر راه‌حل جایگزین مسئله بهینه‌سازی LMI دو محدبی بوده که توسط تثبیت ماتریس لیاپانوف یا ماتریس کنترلگر  $V - K$  بدست آمده است. که برای سیستم ناوردای پیوسته - زمان توسط دستگاه پایدار هم‌زمان کنترلگر پس‌خورد خروجی ایستایی مقاوم با استفاده از الگوریتم کنترل طراحی گردید و بدین‌گونه می‌توان کنترل مقاوم را حل نمود.

مسئله پایداری سیستم دو خطی را با استفاده از کنترل پس‌خورد حالت خطی مورد بررسی قرار دادیم. روشی ارائه گردید که  $\mathcal{P}$  چند بخشی را در حوالی فضای حالت پیدا می‌نمود، اگر کنترلگری به فرم  $u = Kx$  موجود باشد به طوریکه، نقطه تعادل صفر در سیستم حلقه بسته به طور مجانبی پایدار و  $\mathcal{P}$  در دامنه‌ی جاذبه‌ی تعادل قرار داشته باشد. می‌دانیم که طراحی کنترلگر نیازمند حل مسئله‌ی بهینه‌سازی محدب مربوط به نامساوی ماتریسی خطی می‌باشد. فقط کافی است محدوده‌ی عمل سیستم از نقطه‌ی تعادل، متعلق به DA باشد. آنگاه سیستم پایدار دو خطی را از طریق کنترلگر پس‌خورد حالت خطی محاسبه می‌نماییم.



# پیوست آ

## مطالبی از روند نامساوی ماتریسی خطی در نرم افزار متلب

### آ.۱ توابع کاربردی در نامساوی ماتریسی خطی

در این بخش ابتدا به بررسی توابع کاربردی نامساوی ماتریسی خطی که در نرم افزار matlab لحاظ شده می پردازیم. در قسمت lmisolvers به معرفی چند تابع کاربردی می پردازیم.

#### آ.۱.۱ setlmi

از این تابع برای آغاز برنامه استفاده می شود.

#### آ.۱.۲ getlmi

برای خاتمه دادن به اجرای برنامه از این تابع استفاده می کنیم.

#### آ.۱.۳ lmiterm

ساختار آن به صورت زیر است:

```
lmiterm(termID,A,B,flag)
```

این تابع محتوای عبارت lmi را در زمانی مشخص می نماید. قبل از استفاده ی این تابع بایستی داده های ماتریس را درج نموده و سپس با فرمان setlmi برنامه را آغاز و با دستور lmi var ماتریس متغیر مورد نظر را اعلام می کنیم.

دستورات بالا به تفصیل در قسمت‌های بعدی شرح داده می شود:

$$\text{TermID}(1) = \begin{cases} +p \\ -p \end{cases}$$

عبارت بالا، نوع معادله را مشخص می‌کند اگر معادله مورد نظر در سمت چپ قرار داشته باشد از  $+p$  و اگر در سمت راست باشد از  $-p$  استفاده می‌کنیم.

$$\text{TermID}(2 : 3) = \begin{cases} [0, 0] & \text{برای فاکتورهای خارجی} \\ [i, j] & \text{نوعی از بلوک‌های (i,j) که فاکتورهای داخلی در دو طرف قرار دارند.} \end{cases}$$

$$\text{TermID}(4) = \begin{cases} 0 & \text{برای فاکتورهای خارجی} \\ x & \text{برای حالت } Ax B \\ -x & \text{برای حالت } Ax^T B \end{cases}$$

مثال ۱۰.۱۰. عبارت  $AxB + (Ax B)^T$  را داریم می‌دانیم که حاصل عبارت به قرار زیر است:

$$Ax B + B^T x^T A^T$$

اگر دقت کنیم حاصل بالا متقارن است. پس کافی است در قسمت flag از عبارت 'S' استفاده کنیم و دیگر نیاز به تعریف lmiterm دیگر نداریم. پس این دستور را به صورت زیر در نرم‌افزار می‌نویسیم.

```
lmiterm([1 1 1 X],A,1,'S')
```

که اولین یک از سمت چپ نشان‌دهنده TermID(1) و به ترتیب برای ماتریس‌های  $A$  و  $B$  دو عدد یک را در نظر می‌گیریم و هم چنین  $X$  نشان‌دهنده متغیر مجهول مسأله می‌باشد حال کافی است در خارج براکت به ترتیب عملیات ضرب را انجام دهیم.

توجه داشته باشید به علت متقارن بودن از 'S' استفاده نمودیم تا از نوشتن lmiterm دیگر خودداری نماییم.

مثال آ.۱.۲. lmi زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{bmatrix} 2AX_2A^T - X_2E + DD^T & B^T X_1 \\ X_1B & -I \end{bmatrix} < M^T \begin{bmatrix} CX_1C^T + CX_1^T + CX_1^T C^T & \circ \\ \circ & -FX_1 \end{bmatrix} M$$

در این مثال سه متغیر  $X_1$  و  $X_2$  و  $X_3$  را بایستی با `lmivar` معرفی کنیم که شرح کامل این تابع به تفصیل بیان خواهد شد.

طریقه نوشتن ماتریس سمت چپ در برنامه به قرار زیر است:

```
lmiterm([1 1 1 X2],2*A,A')
lmiterm([1 1 1 X3],-1,B)
lmiterm([1 1 0],D*D')
lmiterm([1 2 1 -X1],1,B)
lmiterm([1 2 2 0],-1)
```

حال سمت راست نامساوی:

```
lmiterm([-1 0 0 0 ],M)
lmiterm([-1 1 1 1 X1],C,C','S')
lmiterm([-1 2 2 X2],-F,1)
```

## آ.۱.۴ `lmivar`

برای این تابع دو دستور با متغیر خاص داریم که به قرار زیر است:

`X = lmivar(type,struct) [X n sX]=lmivar(type,struct)`

## آ.۱.۵ `lmivar`

در این تابع با دو نوع ساختار مواجه هستیم.

- (1) `x=lmivar(type , struct)`
- (2) `[ x ,n ,sX] =lmivar(type ,struct)`

ابتدا نوع Type را که شامل سه قسمت می باشد مورد بررسی قرار می دهیم:

Type=1: برای حالتی که ماتریس متقارن با ساختار بلوکی قطری داشته باشیم، برای struct داریم:

اگر  $X$  دارای  $R$  بلوک قطری باشد ساختار ماتریس  $R$  دو حالت خواهد داشت:

struct (r,1):  $r$  سایز بلوک مورد نظر را درج می کنیم.

struct (r,2): اگر بلوک full بود عدد ۱ اگر اسکالر بود عدد ۰ و اگر صفر بود عدد ۱- را در قسمت

$r$  قرار می دهیم.

Type =2: برای معرفی ماتریس مستطیلی  $m, n$  که ساختار آن اینگونه تعریف می شود:

struct=[m , n]

Type =3

برای ساختارهای دیگر و یا حالات پیچیده تر از این مورد استفاده می کنیم. بر این اساس ساختار

ماتریس از همان ابعاد  $x$  است بطوریکه:

$$(1) \text{ struct } (i, j) = 0$$

$$(2) \text{ struct } (i, j) = x_n$$

$$(3) \text{ struct } (i, j) = -x_n$$

در ساختار ۱، اگر در  $x(i, j)$  صفر مطلق داشته باشیم.

در ساختار ۲، اگر در  $x(i, j) = x_n$  وجود داشته باشد.

در ساختار ۳، اگر در  $x(i, j) = -x_n$  را داشته باشیم.

مثال ۳.۱.۰. فرض می کنیم  $x_1$  ماتریس متقارن  $3 \times 3$  باشد و  $x_2$  ماتریس  $2 \times 4$  و ماتریس  $x_3$  به قرار زیر

باشد:

$$\begin{bmatrix} \Delta & \circ & \circ \\ \circ & \delta_1 & \circ \\ \circ & \circ & \delta_2 I_2 \end{bmatrix}$$

که  $\Delta$  ماتریس متقارن  $5 \times 5$  و  $\delta_1$  و  $\delta_2$  اسکالر و  $I_2$  ماتریس همانی از مرتبه دوم است.

که قطعه کد آن را بدین نحو می نویسیم:

```
setlms ([ ])
x1 =lmivar(1,[3 1])
x2=lmivar(2,[2 4])
x3=lmivar(1,[5 1 1 0 2 0])
```

مثال آ.۱.۴. ماتریس زیر را داریم:

$$X = \begin{bmatrix} X_1 & \circ \\ \circ & X_2 \end{bmatrix}$$

ماتریس بالا از نوع Type =3 می باشد که  $X_1$  و  $X_2$  به ترتیب ماتریس های  $2 \times 3$  و  $3 \times 2$  هستند که بعلت اینکه ماتریس مورد نظر ماتریسی پیچیده می باشد از فرم دوم برای نوشتن قطعه کد آن استفاده می کنیم که به شرح زیر است:

```
setlms ([ ])
[x1 n sX1]=lmivar(2,[2 3])
[x2 n sx2]=lmivar(2,[3 2])
```

که خروجی آن بدین صورت بدست می آید:

$$sX_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$sX_2 = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{bmatrix}$$

## آ.۱.۶ feasp

پس از وارد نمودن داده ها و نوشتن نامساوی های مورد نظر نوبت به اجرای برنامه می رسد که برای حل lmi از این تابع استفاده می کنیم نحوه فراخوانی به قرار زیر است:



```
[tmin,xffeas] = feasp(lmisys,options,target)
```

با مثالی روند را بیان می‌کنیم.  
فرض می‌کنیم  $P > I$  باشد بطوریکه:

$$A_1^T P + P A_1 < 0$$

$$A_2^T P + P A_2 < 0$$

$$A_3^T P + P A_3 < 0$$

و ماتریس‌های زیر را در نظر بگیرید:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -0.8 & 1.5 \\ 1.3 & -2.7 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} -1.4 & 0.9 \\ 0.7 & -2.0 \end{bmatrix}$$

می‌خواهیم پایداری و مقادیر ویژه آن را بدست آوریم:

قبل از نوشتن قطعه کد ابتدا ماتریس‌های مورد نظر را وارد می‌کنیم و سپس از قطعه کد زیر خروجی می‌گیریم.

```
setlmis ([ ])
p= lmivar(1,[2 1])
lmiterm([1 1 1 p],1, A1,'S')
lmiterm([2 1 1 p],1,A2,'S')
lmiterm([3 1 1 p],1 A3,'S')
lmiterm([-4 1 1 0],1)
lmis= getlmis
p = dec2mat(lmis,xffeas,p)
```

خروجی به قرار زیر است:

$$tmin = -3.1363$$

$$P = \begin{bmatrix} 270.8 & 126.4 \\ 126.4 & 155.1 \end{bmatrix}$$

### آ.۱.۷ dellmi

اگر بخواهیم یکی از معادلات lmi را حذف کنیم از این تابع استفاده می‌کنیم.

به عنوان مثال :

$$A_1^T X_1 + X_1 A_1 + Q_1 < \circ$$

$$A_2^T X_2 + X_2 A_2 + Q_2 < \circ$$

$$A_3^T X_3 + X_3 A_3 + Q_3 < \circ$$

با استفاده از دستور زیر :

```
lmi=dellmi(lmisys,lmi2)
```

داریم:

$$A_1^T X_1 + X_1 A_1 + Q_1 < \circ$$

$$A_2^T X_2 + X_2 A_2 + Q_2 < \circ$$

دستور بالا را می‌توان به صورت زیر هم نوشت:

```
lmi=dellmi(lmisys,2)
```

### آ.۱.۸ delmvar

با اجرای دستور زیر می‌توانیم متغیری را حذف کنیم:

```
lmisys=delmvar(lmisys,X)
```

به عنوان مثال lmi زیر را در نظر بگیرید:

$$\circ < \begin{bmatrix} A^T y + B^T y A + Q & C X + D \\ X^T C^T + D^T & X + X^T \end{bmatrix}$$

با اجرای دستور بالا خواهیم داشت:

$$\circ < \begin{bmatrix} A^T y + B^T y A + Q & D \\ D^T & \circ \end{bmatrix}$$

در نتیجه هر متغیر دلخواه را می توان با دستور بالا حذف نمود.  
دستور زیر را در نظر بگیرید:

`[lopt,xopt] = gevp(lmisys,nlfc,options,limit,xinit,target)`

gevp مقادیر ویژه توسعه داده شده مینیمال  $\lambda$  را حل می کند.

$C(x) < D(x)$  فرض کنید :

$\circ < B(x)$

$A(x) < \lambda(Bx)$

که  $C(x) < D(x)$  و  $A(x) < \lambda B(x)$  نمایشی از سیستم lmi می باشد.  
در `gevp` ، `lopt` ، مینیمال کلی و `xopt` مقدار مینیمال و بردار از متغیر تصمیم  $x$  را در بر می گیرد.

مثال ۵.۱.۰.۵. در این مسأله هدف یافتن تابع لیاپانوف  $v(x) = x^T p x$  برای اثبات پایداری

$\dot{x} = A_i x \quad (i = 1, 2, 3)$  می باشد.

ماتریس های زیر را داریم:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -0.8 & 1.5 \\ 1.3 & -2.7 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} -1.4 & 0.9 \\ 0.7 & -2.0 \end{bmatrix}$$

نامساوی های زیر در نظر بگیرید:

$$I < P$$

$$A_1^T P + P A_1 < \alpha P$$

$$A_2^T P + P A_2 < \alpha P$$

$$A_3^T P + P A_3 < \alpha P$$

در ابتدا داده ها و سپس از قطعه کد زیر اجرا می گیریم، در این مثال  $\alpha = 1$  در نظر گرفته شده است.

`setlmis ([ ])`

`p=lmivar (1,[2 1])`

`lmiterm([1 1 1 0],1)`

`lmiterm([-1 1 1 p],1 1)`

`lmiterm([2 1 1 p],1,A1,'S')`

`lmiterm([-2 1 1 p],1 ,1)`

```
lmiterm([3 1 1 p],1,A2,'S')  
lmiterm([-3 1 1 p],1 1)  
lmiterm([4 1 1 p],1,A3,'S')  
lmis=getlmis  
[alpha, pop] =gevp(lmis,3)
```

در نتیجه خروجی برابر است با:

$$p = \begin{bmatrix} 5/58 & -8/35 \\ -8/35 & 18/64 \end{bmatrix}$$

## مراجع

- [1] Aganovic.Z. and Gajic. Z. , “The successive approximation procedure for finite – time optimal control of bilinear systems,” IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 39, pp. 1932-1935,1994.
- [2] Anderson. B.D.O, Vongpanitlerd S.: ”Network analysis and synthesis”(Prentice-Hall, 1973).
- [3] Astron. K.J.: ”Theory and applications of adaptive control: a survey”, Automatica, 1983, 19, (1), pp. 471-486.
- [4] Benton, R.E. – Smith,D.: ”A Non-Iterative LMI-Based Algorithm for Robust Stabilization”, International Journal of Control 72 No. 14 (1999), 1322-1330.
- [5] Boyd S., Ghaoui. E., Feron E., Balakrishnan V.: ”Linear matrix inequalities in systems and control theory” (SIAM, 1994).
- [6] Boyd. S. ,Ghaoui. L. Ei , Feron. E, and Balakrishnan.V. , ”Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory”. SIAM Press, 1994.
- [7] Bruni. C,Di Pillo. G. , and Koch. G. , “Bilinear Systems: An Appealing Class of “ Nearly Linear” Systems in Theory And Applications,” IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 19, pp. 334-348, 1974.
- [8] Cao.Y.Y, and Sun.Y,X.: ”Static Output Feedback Simultaneous Stabilization via LMI Approach”, Int. Journal of Control 70 No. 5 (1998), 803 – 814.
- [9] Chilali. M. ,Chilali. P. , and Apkarian. P. , “Robust pole Placment in LMI Regions,” IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 44, pp. 2257-2270, 1999.
- [10] Chu, D , Tan. R.C.E.: ”Algebraic characterization for positive realness of descriptor systems” SIAM J. Matrix Anal. Appl. 2008, 30, (1), pp. 197-222.
- [11] Chu. D, Tan R.C.E.: ”The extended J-spectral factorization for descriptor systems”. Automatica, 2008, 44, pp. 585 – 597.

- [12] Crusins, A.R.-Trofino, A.: "Sufficient LMI Conditions for Output Feedback Control Problems", IEEE Trans. On AC 44 (1999), 1053-1057.
- [13] Dai.L.: "Singular control system" (Springer – Verlag, 1989).
- [14] Darouach M., Zasadzinski M.: "Optimal unbiased reduced order filtering for discrete – time descriptor systems via LMI", Syst. Control Lett., 2009, 58, (6), pp. 436-444.
- [15] Daun G.R., Yu. H.H.: "Robust pole assignment in high – order descriptor linear systems via proportional plus derivative state feedback", IET Control Theory Appl., 2008, 2, (4), pp. 277 – 287.
- [16] Dorf. R. ,Bishop. R. H. , (Published 2007), "Modern Control System, (11th Edition), Publisher": Prentice Hall Pages: 1056.
- [17] Duan G.R: "Linear descriptor systems" in "Advances in design and control", SIAM (to appear).
- [18] Garofalo. F. ,Celentano. G. , and Glielmo. L. , "Stability robustness of interval matrices via quadratic Lyapunov forms," IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 38, pp. 281-284, 1993.
- [19] Gao Z., Ding S.X.: "Fault estimation and fault – tolerant control for descriptor systems via proportional, multiple – integral and derivative observer design". IET Control Theory Appl., 2007, 1, (5), pp. 1208-1218.
- [20] Ghaoui. El , L.- Balakrishnen, V.: Synthesis of Fixed Structure Controller via Numerical Optimization, In Proc. Of the 33rd Conf. on Decision and Control, Lake Buena Vista, FL- December 1994, pp. 2678-2683.
- [21] Goh, K.C.- Safonov, M.G.-Ly, J.H.: "Robust Synthesis via Bilinear Matrix Inequalities"., Int. Journal of Robust and Nonlinear Control 6 (1996), 1079 – 1095.
- [22] Guo. L, and Schawarz. H. , "A Control Scheme for Bilinear Systems and Application to a Secondary Controlled Hydraulic Rotary Drive," in Proc. Of the 28th IEEE Conference on Decision and Control, Tampa, Florida, 1989.
- [23] Gutman. P.O., "Stabilizing Controllers for Bilinear Systems," IEEE Transaction on Automatic Control, vol. 26, pp. 917-922, 1981.
- [24] Ikeda M., Lee T.W., Uezato E.A.: "A strict LMI condition for h2 control of descriptor systems". Proc. 39th IEEE Conf. on Decision and Control, Sydney, Australia, 2000, pp. 601 – 604.
- [25] Jerbih. , "Global Feedback Stabilization of New Class of Bilinear Systems, Systems and Control Letters", vol. 42, pp. 313-320, 2001.

- [26] Kachanaka,A.- Krbatar,R.- Belansy,J.: "Design of optimal Robust Controller for a Thermoplastic Process", In 3rd IFAC Conference ROCOND, Prague, June 21-28, 2000, PNO54.
- [27] Khalil. H. K. , "Nonlinear Systems". MacMillan, 1992.
- [28] Khalil H.K.: "Nonlinear systems" (Prentice-Hall, 2002).
- [29] Khapalov. A. Y, and Mohler R. R, "Reachable sets and Controllability of Bilinear Time – Invariant Systems: A Qualitative Approach," IEEE Transactions on Automatic Control, vol. .41, pp. 1342-1346, 1996.
- [30] Khapalov. A. Y, and Mohler. R. R, "Asymptotic Stabilization of the Bilinear Time – Invariant System via piecewise – Constant Feedback," Systems and Control Letters, vol.33, pp. 47-54, 1998.
- [31] Kim. B. - S. ,Kim. Y,-J , and Lim. M.T. , "Robust  $H_{\infty}$  State Feedback Control Methods for Bilinear Systems," IEE Proc.-Control Theory Appl., Vol. 152, pp. 553-559, 2005.
- [32] Kirk, D. E. , "Optimal Control Theory, An Introduction", (published 2004), Dover Publications, Mineola, New York.
- [33] Koditschek. D.E. and NarendraK. S. , "Stabilizability of Second Order Bilinear Systems," IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 28, pp. 987-989, 1983.
- [34] Krokavec. D,-Filasov. A.: "Unmatched Uncertainties in Robust LQ Control, In 3rd IFAC Conference ROCOND, Prague, June 21-28, 2000, PNO.65.
- [35] Kucera, V – De Souza. C.E.: "A necessary and Sufficient Condition for output Feedback Stabilizability", Automatica 31 No. 9 (1995), 1357-1359.
- [36] Lin. C., Lam J., Wang. J., Yang. G.: "Analysis on robust stability for interval descriptor system", Syst. Control Lett., 2001, 42, (4), pp. 267 – 278.
- [37] Liu P.: Zhang Q., Yang X., Yang L.: "Passivity and optimal control of descriptor biological complex systems", IEEE Trans Autom. Control, Special Issue Syst. Biol., 2008, 53, pp. 122 – 125.
- [38] Longchamp. R. , " Stable Feedback Control of Bilinear Systems," IEEE Transaction on Automatic Control, vol. 25, pp. 302-306,1980.
- [39] Lu. G. , Zheng Y. ,Zhang. C. , and X. Yu, "Global Asymptotic Stabilization of MIMO Bilinear Systems with Undamped Natural Response," in Proc. Of the 37th IEEE Conference on Decision and Control, Tampa, Florida, 1998. s

- [40] Mehdi.I, Al Hamid. D.- , Perrin.M.:”Robustness and Optimality of Linear Quadratic Controller for Uncertain Systems”, *Automatica* 32 No. 7 (1996), 1081-1083.
- [41] Mohler. R.R. and Khapalov. A. Y. , “ Bilinear Control and Application to Flexible a.c. Transmission Systems,” *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 105, pp. 621-637,2000.
- [42] Mohler R.R. , ”Bilinear Control Process”. Academic Press, New York, NY, 1973.
- [43] Mohler.R.R. ,Bruni. C. , and Gandolfi A. , “ A systems Approach to Immunology,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 68, pp. 964-990.
- [44] Papadopoulos, Bandekas. D.P.-,D.V.: ”Enhancement of Synchronous Generator Dynamic Stability Characteristics with Output Feedback”, *Acta. SAV*, 40 (1995), 103 – 117.
- [45] Premarantne. K., Jury. E.I.: ”Discrete – time positive –real lemma revisited: the discrete – time counterpart of the Kalman – Yakubovich lemma”, *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, 1994, 41, pp. 747 – 750.
- [46] Prokop. R.- Corriou, J.P.: ”Design and Analysis of Simple Robust Controllers”, *Int. Journal of Control* 66 No. 6 (1987), 905-921.
- [47] Rosinova,D.,Vesely, Kucera.V. ,V.: ”A Necessary and Sufficient Condition for Output Feedback Stabilizability of Linear Discrete –Time Systems”. In *IFAC Conf. Control Systems Design*, Bratislava, Slovak republic, 2000, pp. 164-167.
- [48] Toker, O.- Ozbay, H: ”On the NP-Hardness of Solving Bilinear Matrix Inequalities and Simultaneous Stabilization with Static Output Feedback, In Proc”. Of the American Control Conference, Seattle, Washington, June 1995,pp . 2525-2526.
- [49] Veselt,V.: ”Output Robust Controller Design for linear Parametric Uncertain Systems, In 3rd IFAC Conference ROCOND”, Prague , June 21-28, 2000, EUR-22.
- [50] Wang Z.: ”Parametric circular eigenvalue assignment for descriptor systems via state feedback”, *IMA J.Math. Control Inf.*, 2000, 17, (1), pp. 57 – 66.
- [51] Xia Y., Boukas. E, Shi P., Zhang J.: ”Stability and stabilization of continuous – time singular hybrid systems”, *Automatica*, 2009, 45, (6), pp. 1504 – 1509.
- [52] Xia Y., Zhang J., Boukas E.: ”Control for discrete singular hybrid systems”, *Automatica*, 2008, 44, (10), pp. 2635-2641.
- [53] Xu. S., Yang. C.: ”Stabilization of discrete – time singular systems: a matrix inequalities approach”, *Automatica*, 1999, 35, (9), pp. 1613 – 1617.



- 
- [54] Yang. C., Zhang. Q., Zhou. L.: "Generalized absolute stability analysis and synthesis for Lur'e-type descriptor systems", IET Control Theory Appl., 2007,1, (3), pp. 617-623.
- [55] Zhang. B.: "Parametric eigenstructure assignment by state feedback in descriptor systems", IET Control Theory Appl., 2008, 2, (4), pp. 303 – 309.
- [56] Zhang. G., Xia. Y., Shi. P.: "New bounded real lemma for discrete – time singular systems", Automatica, 2008, 44, (3), pp. 886 – 890.
- [57] Zhang. L, Lam. J., Xu. S.: "On positive realness of descriptor systems". IEEE Trans. Circuits Syst. I, Fund. Theory Appl., 2002, 49, (3), pp. 401-407.
- [58] Zhang. L.Q., Huang. B., Lam. J.: "LMI synthesis of  $h_2$  and Mixed  $H_\infty/H_1$  controllers for singular systems", IEEE Trans. Cricuits Syst. II, 2003, 50, (9), pp. 615 – 626.
- [59] Zhang. Q.L., Lam. J.: "Robuts impulse - eliminating control for descriptor systems", Dyn. Contin. Discret. Impulsive Syst., 2002, 9, (1), pp. 13 – 28.

# واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Dimension	ابعاد
Static	استاتیک
Transfer	انتقال
Optimal	بهین
Optimization	بهینه‌سازی
Stability	پایداری
Establish	ثابت کردن
Attraction	جذب
Polytopic	چندبخشی
Domain	دامنه
Vertical	رئوس
Schure	شور
Controller	کنترلگر
Lyapanov	لیاپانوف
Variable	متغیر
Symmetric	متقارن
Localy	محلی
Equivalent	معادل
Definite	معین
Regular	منظم
Inequality	نامساوی
Semi-definite	نیمه معین

# واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Asymptotic	مجاابی
Bilinear	دوخطی
Boundary	حد
Closed loop	حلقه بسته
Continuous – time	پیوسته - زمان
Control	کنترل
Convex	محدب
Discreat – time	گسسته - زمان
Domain	دامنه
Eigenvalues	مقدار ویژه
Equilibrium point	نقطه تعادل
Feedback	پس‌خورد
Interior point	نقطه‌ی درونی
Linear	خطی
Lyapanov function	تابع لیاپانوف
Non linear	غیرخطی
Non-strict	غیراکید
Positive real	حقیقی مثبت
Quadratic	معادله‌ی درجه‌ی دوم
Rank	مرتبه
Robust	مقاوم
Schur	شور
Translate function	تابع انتقال

# نمایه

آ	روش نقطه درونی، ۳۳
آفینی، ۲۳	روش بیضی، ۳۴
ابر صفحه، ۱۵	روش تثبیت کاپلاو، ۶۹
الگوریتم بیضی، ۲۵	س
اعداد مختلط، ۴۷	سیستم‌های دینامیکی، ۱
اتلافی، ۴۸	سیستم خطی، ۵
ب	سیستم خطی گسسته زمان، ۶
بردار خروجی، ۵	سیستم خطی پیوسته زمان، ۶
بهینه‌سازی، ۱۱	سیگنال ورودی هارمونیک، ۴۷
ت	سیستم‌های دینامیکی حقیقی مثبت، ۴۹
تعادل، ۷	سیستم حلقه بسته، ۶۰
تابع هدف، ۱۲	سیستم نامعین، ۶۰
توابع معین، ۳۹	سیستم دوخطی، ۶۹
تابع انتقال، ۵۱	ع
پ	عملکرد جزئی درجه دوم، ۴۶
پایداری، ۷	عملکرد جزئی $H_{\infty}$ ، ۴۶
پایداری سیستم‌های $LTI$ ، ۹	ف
پایداری مجانبی، ۱۰	فرم نامساوی شور، ۹
پس‌خورد خروجی مقاوم، ۵۸	فضای خطی نورم، ۱۳
خ	فاکتورهای چولسکی، ۳۳
خطی‌سازی، ۴۲	ق
د	قضیه وایرشراس، ۱۳
دوگان، ۴۲	قضیه ترکیبات محدب، ۱۴
ر	ل
روش کرونکر، ۳۱	لم $Pr$ ، ۲

## م

معادله دیفرانسیل، ۱

ماتریس معین مثبت، ۱

معادله جبری ریکاتی، ۲

ماتریس هامیلتونی، ۲

معادله حرکت، ۴

معادله حالت، ۶

معادله ریکاتی، ۸

محدب، ۱۱

مقدار تکین، ۱۹

متغیر ماتریسی، ۱۹

مسائل مقدار ویژه، ۲۱

ماتریس کنترلگر، ۵۹

مینور، ۱۸

متمم شور، ۱۸

## ن

نامساوی ماتریسی خطی، ۱

نامساوی لیاپانوف، ۱

نورم، ۱۳

نیم فضا، ۱۵

نامساوی غیر خطی، ۱۸

## **Aabstract**

In this thesis the linear matrix inequality analysis of dynamical system investigated.lyapunov method that has been raised by a number of specific practical problems in engineering controls, particularly the stability control system have been applied to a particular function.

formulated identically in optimization problem, are interested in finding conditions for optimal solutions are available. Hence it is natural to resort a branch of analysis that provide these conditions.

In this thesis, we have tried solving linear matrix inequality and its application fields have expressed a concrete example, in addition to the characterization for linear system, descriptive and design of robust output feedback controller using this method the stability of the linear state feedback control via a linear investigated.

**keywords:** Linear, Feedback, Output, Inequality, Bilinear, Control, Stability, Convex



Shahrood University  
Faculty Of Mathematical Sciences

Dissertation Submitted in Partial  
Fulfillment of The Requirements For The  
Degree of Master of Science in  
Applied Mathematics

# Linear Matrix Inequality Method of the Control Theory

Supervisor

**Dr. Hojjat Ahsani Tehrani**

Advisor

**Dr. Mehdi Ghovvatmand**

by

**Fatheme Heydari Masoule**

2015