



دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی کاربردی

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی کاربردی، گرایش تحقیق در عملیات

عنوان

یک کاربرد از موجک هار برای حل رده‌ای از مسائل کوتاهترین مسیر

استاد راهنما

دکتر علیرضا ناظمی

دانشجو

گل بهار نقه

۱۳۹۳

تقدیم به

بهترین هدیه های خداوند متعال

پدر که اقتدر و مادر صبورم
برادران و خواهران عزیزم

که همیشه مشوق و پشتیبانم بوده اند

همه آموزگارانی که مسیر زندگی ام را روشنایی بخشیده اند
و دوستان نازنینم.

مشکر و قدردانی

پس بی پایان پرودگار بی همتا که فرصت علم و دانش را ارزانیم داشت و در تمام مراحل زندگی یاری نمود برستی که می نمودن راه دشوار زندگی جزء با اتکاب قدرت لایزال او ممکن نیست و تنها با داری و التفات اوست که انسان می تواند بر مشکلات فائق آید. در پایان این مرحله از تحصیل بر خود لازم می دانم از بزرگوارانی که در طی مراحل زندگی و تحصیل یاریم نمودند، مشکر و قدردانی نمایم.

نخست از پدر ماد گرامی ام مشکر و قدردانی نمایم، آنان که دعای خیرشان در تمام مراحل زندگی حامی و پشتیبان اینجانب است، بی شک آنچه که بر خاک وجودم روئیده، حاصل محبت های بی دریغ عزیزان است. از برداران و خواهران مهربانم که با بهدلی فرصت تحصیل را برایم فراهم آوردند و مراد این وادی یاری نمودند، صمیمانه مشکر و قدردانی می نمایم و بردستان پر مهرشان بوسه می زنم.

این پایان نامه تحت راهنمایی های ارزنده و علمی استاد گرامی ام جناب آقای دکتر علیرضا ناظمی انجام شد که در طی انجام آن حضوری فعال داشته و علم و دانش خود را بدون هیچ چشمداشتی بر من ارزانی داشتند و در پناه یاری ایشان سخت ترین لحظات این راه شیرین ترین خاطر اتم شد. بی شک بدون مساعدت و یاری ایشان انجام این تحقیق محال بوده است، لذا از محبت های بی دریغ ایشان صمیمانه سپاسگزارم و تلاش و یاری ایشان را می ستایم.

تعمدنامه

اینجانب گل بهار یقه دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی دانشکده علوم ریاضی دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان یک کاربرد از موجک هار برای حل رده‌ای از مسائل کوتاهترین مسیر، تحت راهنمایی دکتر علیرضا ناظمی متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تاکنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه شاهرود “ یا “ Shahrood University “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

گل بهار یقه
۱۳۹۳

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در این پایان‌نامه به حل مسائل کنترل بهینه و حساب تغییرات با استفاده از روش عددی موجک هار می‌پردازیم. فصل اول شامل بیان مقدمه، معرفی مساله کنترل بهینه و حساب تغییرات، موجک هار و تعاریف مورد نیاز است. در فصل دوم، مساله کوتاهترین مسیر را معرفی می‌کنیم سپس با استفاده از روش موجک هار به حل آن می‌پردازیم و در پایان فصل نتایج عددی را برای سه مساله بررسی خواهیم کرد. فصل سوم شامل معرفی مساله بهینه‌سازی مسیر ربات بازوی ماهر می‌باشد که با استفاده از روش موجک هار در این فصل حل شده است همچنین در پایان فصل نتایج عددی مساله بهینه‌سازی مسیر ربات اسکارا نشان داده شده است. شایان ذکر است که نتایج عددی این مسائل با استفاده از نرم‌افزارهای لینگو ۱۱ و گمز به دست آمده است و نمودارها در سرتاسر این پایان‌نامه با نرم‌افزار متلب ۷.۱۲ رسم شده‌اند.

کلمات کلیدی: موجک هار، نقاط کالوکیشن، برنامه‌ریزی غیرخطی، کوتاهترین مسیر، ربات بازوی ماهر.

فهرست مطالب

۱	مفاهیم و مقدمات لازم	۱
۱	مقدمه‌ای بر نظریه کنترل	۱.۱
۲	مقدمه‌ای بر حساب تغییرات	۲.۱
۳	مقدمه‌ای بر موجک هار	۳.۱
۴	شکل کلی مساله کنترل بهینه	۴.۱
۵	کنترل‌پذیری سیستم‌های دینامیکی	۱.۴.۱
۵	شکل کلی مساله حساب تغییرات	۵.۱
۶	معادله اوپلر-لاگرانژ	۱.۵.۱
۹	مفاهیم اساسی در توپولوژی و آنالیز	۶.۱
۱۴	توابع موجک هار	۷.۱
۱۶	ویژگی تعامد توابع هار گویا	۱.۷.۱
۱۶	تقریب توابع با توابع هار	۲.۷.۱
۱۸	ماتریس عملگر انتگرال‌گیری	۳.۷.۱
۲۱	حل مسائل کنترل بهینه در حالت کلی با استفاده از روش موجک هار	۸.۱
۲۱	تبدیل بازه	۱.۸.۱
۲۲	کالوکیشن مستقیم	۹.۱
۲۲	روش گسسته‌سازی هار	۱.۹.۱
۲۳	برنامه‌ریزی غیرخطی	۲.۹.۱
۲۴	مثال‌های عددی	۱۰.۱
۳۰	حل مساله کوتاهترین مسیر با استفاده از روش موجک هار	۲
۳۰	مقدمه	۱.۲
۳۰	فرمول‌بندی مساله	۲.۲
۳۱	تبدیل بازه	۱.۲.۲
۳۲	کالوکیشن مستقیم	۳.۲
۳۲	گسسته‌سازی هار	۱.۳.۲
۳۳	برنامه‌ریزی غیرخطی	۲.۳.۲

۳۴	مثال‌های عددی	۴.۲
۳۸		حل مساله بهینه‌سازی مسیر ربات بازوی ماهر با استفاده از روش موجک هار	۳
۳۸	مقدمه	۱.۳
۳۸	معرفی ربات اسکارا	۱.۱.۳
۴۰	تعریف و فرمول‌بندی مساله	۲.۳
۴۱	تبدیل بازه	۱.۲.۳
۴۳	کالوکیشن مستقیم	۳.۳
۴۳	گسسته‌سازی هار	۱.۳.۳
۴۴	برنامه‌ریزی غیرخطی	۲.۳.۳
۴۴	مثال عددی	۴.۳
۴۹		نتایج	
۵۰		مراجع	
۵۳		واژه‌نامه فارسی به انگلیسی	
۵۵		واژه‌نامه انگلیسی به فارسی	

فصل ۱

مفاهیم و مقدمات لازم

۱.۱ مقدمه‌ای بر نظریه کنترل

در بیشتر شاخه‌های ریاضیات کاربردی، هدف، تجزیه و تحلیل وضعیت یک سیستم است. سیستم در اینجا عبارت از مجموعه اشیایی است که بوسیله روابط علت و معلولی به هم مرتبط می‌شوند و برای ورودی‌های متفاوت، خروجی‌های گوناگونی تولید می‌کنند. این تعریف کاربرد وسیعی در بسیاری از زمینه‌ها به‌عنوان مثال در کارخانجات شیمیایی، فولادسازی و ماشین‌های برقی مکانیکی مانند موتور اتومبیل یا هواپیما پیدا می‌کند. در نظریه کنترل نشان داده شده است که رفتار دینامیکی این سیستم‌ها را می‌توانیم به شکل معادلات یا نامعادلات ریاضی و به‌خصوص به شکل معادلات دیفرانسیل^۱ بیان نماییم. البته ساختن مدل ریاضی برای این سیستم‌ها ممکن است بسیار پیچیده باشد که این مبحث در جای خود از اهمیت زیادی برخوردار است. در اینجا فرض می‌کنیم که معادلات ریاضی حاکم بر خواص دینامیکی سیستم مورد بررسی، از قبل تعیین شده باشد. برای کنترل یک سیستم لازم است کنترل‌ها طوری انتخاب شوند که معادلات ریاضی مربوط به نحوه عملکرد قابل قبول سیستم را برآورد کنند که معمولاً برحسب مشخصه‌های زمانی نظیر زمان صعود، زمان قرار و حداکثر جهش بیان می‌شوند. البته محاسبه جواب‌های معادلات به‌خصوص معادلات دیفرانسیل غیرخطی عموماً پیچیده است. به‌عنوان مثال می‌توانیم مساله راکتی که یک ماهواره را به مداری حول زمین پرتاب می‌کند در نظر بگیریم، هدف ما در اینجا انتخاب کنترل‌هایی است که این انتقال را با مینیمم سوخت انجام دهند.

معادله حاکم بر حرکت راکت عبارت است از:

$$m \frac{dV}{dt} = F + F_{ext},$$

که در آن m جرم راکت، V سرعت آن، F نیروی پرتاب که بوسیله راکت تولید می‌شود و F_{ext} نیروهای خارجی هستند که از محیط به راکت وارد می‌شوند. همچنین داریم [۷]:

^۱Differential Equations

$$|F| = \frac{c}{m}\beta,$$

که c سرعت نسبی آگروز و $\beta = -\frac{dm}{dt}$ نرخ مصرف سوخت است. اگر φ زاویه^۲ واقعی پرتاب (زاویه بین محور راکت و افق) باشد، آنگاه معادلات حرکت عبارتند از:

$$\begin{aligned}\frac{dv_1}{dt} &= \frac{c\beta}{m} \cos \varphi, \\ \frac{dv_2}{dt} &= \frac{c\beta}{m} \sin \varphi - mg,\end{aligned}$$

که $V = (v_1, v_2)^T$ و $F_{ext} = (0, -mg)^T$ اختیار شده است. مساله مصرف مینیم سوخت عبارت است از انتخاب کنترل‌های β و φ که راکت را از نقطه اولیه به ارتفاع مورد نظر \bar{y} برساند به قسمی که مقدار سوخت مصرفی مینیم شود. سوخت مصرف شده عبارت است از:

$$I = \int_0^T \beta dt,$$

که T زمان رسیدن به \bar{y} است.

۲.۱ مقدمه‌ای بر حساب تغییرات

حساب تغییرات^۳ شاخه‌ای از آنالیز است که با مسائل ماکزیم و مینیم سر و کار دارد. دیدو^۴ ملکه کارتاژ اولین کسی بود که با چنین مساله‌ای مواجه بود. به او قول داده شده بود که تمام زمینی را که با قطعه طنابی محدود کند، می‌تواند تصاحب نماید. برای این منظور او طناب را به رشته‌های نازک مختلف تقسیم و آن‌ها را بهم گره زد، آنگاه مساله این بود که در بین سطوح هندسی مختلف که محیط ثابتی دارند کدام بزرگترین مساحت را خواهد داشت. تاریخچه مساله حساب تغییرات مربوط به یونان قدیم است، ولی پیشرفت زیاد اروپا در این زمینه تا قرن هفده میلادی به طول انجامید. مساله تاریخی جالب دیگر، مساله بارچيستوچرون^۵ است و در سال ۱۶۹۶ توسط برنولی ارائه گردید. او به یک منحنی بین دو نقطه ثابت A و B در صفحه قائم احتیاج داشت که جسمی در آن (تحت نیروی ثقل و بدون اصطکاک) بلغزد و در مینیم زمان به پایین بیاید. جواب این مساله بدیهی نبود. خط مستقیم بین A و B جواب مساله نیست، این مطلب را به‌طور تجربی با سراندن مهره‌های سیمی به شکل‌های مناسب می‌توان دریافت. در هر دو مساله دیدو و بارچيستوچرون، منحنی‌هایی که مورد جستجو قرار می‌گیرند باعث می‌شوند که معیاری مقدار نهایت خود را بپذیرد. در نتیجه برخی از مسائل مورد توجه مربوط به شاخه حساب تغییرات عبارت‌اند از:

- پیدا کردن کوتاهترین فاصله بین دو نقطه،

^۲ Angle

^۳ Calculus of variations

^۴ Dido

^۵ Barchistochrone

- پیدا کردن یک منحنی بین همه منحنی‌های واقع در صفحه xy به طوری که سطح حاصل از دوران آن حول محور x مینیمم باشد.

- پیدا کردن خمی که دو نقطه را وصل کند به طوری که اگر گلوله ای از نقطه بالاتر به سمت پایین حرکت کند زمان طی شده مینیمم باشد.

۳.۱ مقدمه‌ای بر موجک هار

در روش کلاسیک، حل مسائل کنترل بهینه با استفاده از روش‌های حساب تغییرات^۶ و پونتریاگین^۷ متداول است [۱۱]. این روش‌ها دارای محدودیت‌ها و مشکلاتی هستند، به همین منظور در کتاب‌ها و مقالات علمی روش‌های محاسباتی متفاوتی برای حل مسائل کنترل بهینه آمده است. روش جایگزینی که قرار است در این پایان‌نامه مورد بررسی قرار گیرد، روش عددی موجک هار^۸ است. موجک هار سری خاصی از توابع است که به‌عنوان ساده‌ترین و اولین نوع موجک شناخته می‌شود. این نوع موجک اولین بار در سال ۱۹۱۰ توسط آلفرد هار^۹ برای شکلی از جفت پالس‌های منظم [۱] ارائه شده است. توابع هار^{۱۰} مجموعه‌ای متعامد^{۱۱} هستند که مقادیر خود را از مجموعه‌ی $\{0, \sqrt{2^i}, -\sqrt{2^i}\}$, $i = 0, 1, \dots$ اختیار می‌کنند [۱۴]. توابع هار ناپیوسته‌اند و در نقاط ناپیوستگی مشتق ناپذیرند. این موضوع باعث می‌شود که کاربرد مستقیم این موجک برای حل معادلات دیفرانسیل غیرممکن شود. یک راه غلبه بر این مشکل استفاده از روش انتگرال‌گیری است. در این روش بالاترین درجه مشتق موجود در معادله توسط سری هار بسط داده می‌شود. ایده اصلی این روش بر اساس تبدیل یک معادله دیفرانسیل به یک معادله جبری^{۱۲} است. در این روش بازه زمانی به زیر بازه‌هایی با طول یکسان تقسیم می‌شود و توابع در این زیر بازه‌ها^{۱۳} تقریب زده می‌شوند. به نقاط میانی این زیر بازه‌ها نقاط کالوکیشن^{۱۴} گفته می‌شود که به صورت تصاعدی افزایش می‌یابند و با افزایش تعداد این نقاط دقت جواب به دست آمده بیشتر می‌شود.

^۶Variational Calculus

^۷Pontryagin

^۸Haar Wavelets

^۹Alfred Haar

^{۱۰}Haar Functions

^{۱۱}Orthogonal Set

^{۱۲}Algebraic Equations

^{۱۳}Subintervals

^{۱۴}Collocation

۴.۱ شکل کلی مساله کنترل بهینه

در این بخش شکل کلی یک مساله کنترل بهینه^{۱۵} را معرفی می‌کنیم، که با استفاده از روش عددی موجک هار به حل آن می‌پردازیم. اگر

$$x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t),$$

متغیرهای حالت در زمان t و

$$u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t),$$

متغیرهای کنترل در زمان t باشند، آنگاه سیستم دینامیکی می‌تواند با n معادله دیفرانسیل مرتبه اول^{۱۶} به صورت زیر بیان شود:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = g_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t), t), \\ \dot{x}_2(t) = g_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t), t), \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = g_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t), t), \end{cases} \quad (1.1)$$

که در آن

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

محورهای مختصات n بعدی به نام فضای حالت^{۱۷} و

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix},$$

بردار m از متغیر کنترل تعریف می‌شود، آنگاه معادلات وضعیت سیستم در حالت کلی می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$\begin{cases} \dot{x} = g(t, x, u) & t_a \leq t \leq t_b, \\ x(t_a) = x_a & x(t_b) = x_b, \end{cases} \quad (2.1)$$

^{۱۵}Optimal Control Problem

^{۱۶}First-Order Differential Equations

^{۱۷}State Space

که در آن $x(t_a)$ حالت اولیه و $x(t_b)$ حالت نهایی است. در نتیجه مساله کنترل بهینه عبارت است از پیدا کردن $(x, u)^T$ که در (۲.۱) صدق کرده و تابعی زیر را ماکزیمم یا مینیمم کند:

$$I = \int_{t_a}^{t_b} f_0(t, x(t), u(t)) dt. \quad (3.1)$$

۱.۴.۱ کنترل‌پذیری سیستم‌های دینامیکی

تعریف ۱.۴.۱ [۷] اگر در زمان محدود $t \in [t_0, t_f]$ بتوانیم تابع کنترلی مانند $u(t)$ پیدا کنیم، که یک سیستم مانند (۲.۱) را از وضعیت اولیه x_0 به وضعیت نهایی مطلوب x_f برساند، آنگاه آن سیستم را کنترل‌پذیر^{۱۸} می‌نامیم.

ملاحظه ۲.۴.۱. باید توجه داشته باشیم که کنترل‌پذیری یک سیستم بسیار مهم است، زیرا زمانی که مسائلی با هدف انتقال سیستم از وضعیت اولیه اختیاری به وضعیت نهایی مطلوب با حداقل کردن تابع هدف مشخص، را مطالعه می‌نماییم، کنترل‌پذیری سیستم شرط لازم وجود جواب است.

قضیه ۳.۴.۱ [۷] شرط لازم و کافی برای کنترل‌پذیری سیستم

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu, \\ y = c^T x, \end{cases} \quad (4.1)$$

که در آن A ماتریس $n \times n$ ، b بردار $n \times 1$ و c بردار سطری است، آن است که:

$$\text{rank}(Q = [b \mid Ab \mid \dots \mid A^{n-1}b]) = n.$$

تعریف ۴.۴.۱ [۷] ماتریس Q را ماتریس کنترل‌پذیری سیستم می‌نامیم.

۵.۱ شکل کلی مساله حساب تغییرات

مساله حساب تغییرات، پیدا کردن مسیری مانند $y = y(x)$ است که مقادیر تابعی به صورت

$$J = \int_a^b F(y, y', x) dx, \quad (5.1)$$

را اکستریم کند، که در آن F تابعی از y ، $y' (= \frac{dy}{dx})$ و x است و $y = y(x)$ مسیری بین $A(a, \alpha)$ و $B(b, \beta)$ است که

$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta.$$

^{۱۸}Controllability

۱.۵.۱ معادله اویلر-لاگرانژ

فرض کنید مسیری مانند $y = y(x)$ می‌خواهیم که تابعی (۵.۱) را اکسترم کند و فرض کنید به‌طور مثال C_0 برابر $y_0(x)$ منحنی مطلوب و C_ϵ یک منحنی مجاور آن باشد که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$y_\epsilon(x) = y_0(x) + \epsilon\eta(x), \quad (۶.۱)$$

که در آن ϵ پارامتر کوچک و $\eta(x)$ تابع دلخواه مشتق‌پذیر از x است که باید در شرط $\eta(a) = \eta(b) = 0$ صدق کند، تا مطمئن شویم هر دو منحنی از A شروع شده و به B ختم می‌شوند. پس معادله (۶.۱) کلاسی از منحنی‌های مجاور C_0 را تولید می‌کند که به مقدار ϵ بستگی دارند. مقدار $\epsilon = 0$ منحنی بهینه C_0 را می‌دهد. به‌عنوان یک مثال ساده، به مساله پیدا کردن یک منحنی با کوتاهترین طول بین دو نقطه، $(0, 0)^T$ و $(1, 1)^T$ می‌پردازیم. می‌دانیم منحنی بهینه C_0 به‌صورت زیر داده می‌شود:

$$y_0(x) = x, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

با انتخاب $\eta(x) = x(1-x)$ ، می‌توانیم خانواده منحنی‌های مجاور C_ϵ را به‌صورت زیر بسازیم:

$$y_\epsilon(x) = x + \epsilon x(1-x), \quad 0 \leq x \leq 1.$$

حال مقدار J بر مسیر C_ϵ در مساله کلی به‌صورت زیر داده می‌شود:

$$J = \int_a^b F(y_\epsilon + \epsilon\eta, y'_\epsilon + \epsilon\eta', x) dx, \quad (۷.۱)$$

که در آن $y' = \frac{dy}{dx}$ و $\eta' = \frac{d\eta}{dx}$ ، برای تابع مفروض $y(x)$ ، J تابعی از پارامتر ϵ است، یعنی $J = J(\epsilon)$. برای این‌که مقادیر J ، اکسترم شود باید $\frac{dJ}{d\epsilon} = 0$ ولی C_ϵ را به‌قسمی انتخاب می‌کنیم که مقادیر اکسترم به‌ازای $\epsilon = 0$ به‌دست آیند. پس شرط را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\left. \frac{dJ}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = 0. \quad (۸.۱)$$

از رابطه (۷.۱) نسبت به ϵ مشتق می‌گیریم، آنگاه داریم:

$$\frac{dJ}{d\epsilon} = \int_a^b \{ \eta F_y(y_0 + \epsilon\eta, y'_0 + \epsilon\eta', x) + \eta' F_{y'}(y_0 + \epsilon\eta, y'_0 + \epsilon\eta', x) \} dx, \quad (۹.۱)$$

که در آن

$$F_y = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad F_{y'} = \frac{\partial F}{\partial y'}.$$

در اینجا از قاعده زنجیری برای مشتق نسبی استفاده می‌کنیم:

$$\frac{dJ}{d\epsilon} = \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{d\epsilon} + \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{dy'}{d\epsilon} = \eta F_y + \eta' F_{y'},$$

زیرا

$$y = y_0 + \epsilon\eta \quad \text{و} \quad y' = y'_0 + \epsilon\eta'.$$

با توجه به شرط (۸.۱) نتیجه می‌گیریم:

$$\int_a^b \{\eta F_y(y_0 + \epsilon\eta, y'_0 + \epsilon\eta', x) + \eta' F_{y'}(y_0 + \epsilon\eta, y'_0 + \epsilon\eta', x)\} dx = 0,$$

بنابراین داریم:

$$\int_a^b (\eta F_y + \eta' F_{y'}) dx = 0, \quad (10.1)$$

در (10.1) جمله دوم را با استفاده از انتگرال جزء به جزء محاسبه می‌کنیم:

$$\eta F_{y'}|_a^b + \int_a^b \{\eta F_y - \eta \frac{d}{dx}(F_{y'})\} dx = 0,$$

$$\eta(b) F_{y'}|_{x=b} - \eta(a) F_{y'}|_{x=a} + \int_a^b \{\eta F_y - \eta \frac{d}{dx}(F_{y'})\} dx = 0, \quad (11.1)$$

و چون $\eta(a) = \eta(b) = 0$ آنگاه برای رابطه (11.1) داریم:

$$\int_a^b \eta \{F_y - \frac{d}{dx}(F_{y'})\} dx = 0. \quad (12.1)$$

این رابطه به‌ازای تمام توابع مشتق‌پذیر $\eta(x)$ که در شرط

$$\eta(a) = \eta(b) = 0,$$

صدق می‌کنند برقرار است. اکنون به‌لم زیر نیاز داریم.

لم 1.5.1. فرض کنید تابع $\eta(x)$ بر $a \leq x \leq b$ مشتق‌پذیر و $\eta(a) = \eta(b) = 0$ است. اگر f بر $a \leq x \leq b$ پیوسته باشد و برای این $\eta(x)$ ‌ها داشته باشیم:

$$\int_a^b f(x)\eta(x) dx = 0,$$

آنگاه بر $a \leq x \leq b$ ، $f = 0$.

اگر لم (1.5.1) در مورد رابطه (13.1) استفاده شود، داریم:

$$F_y - \frac{d}{dx}(F_{y'}) = 0, \quad (13.1)$$

که این رابطه به معادله اویلر (یا اویلر لاگرانژ) معروف است، و باید مسیرهای $y(x)$ که مقادیر اکسترمم تابعی J را می‌دهند در آن صدق کنند.

معادله اویلر (12.1) وقتی تابع F مستقل از x و y باشد صورت‌های خاصی پیدا می‌کند:

(الف) F مستقل از y باشد.

در این صورت از رابطه (13.1) نتیجه می‌شود:

$$\frac{d}{dx}(F_{y'}) = 0,$$

که انتگرال آن برابر است با

$$F_{y'} = (\text{ثابت}). \quad (14.1)$$

مثال ۲.۵.۱. منحنی $y(x)$ را به قسمی تعیین کنید که تابع

$$J = \int_a^b (y'^2 + 1) dx,$$

اکسترمم شود در صورتی که $y(0) = 1$ ، $y(1) = 2$.

حل: در اینجا تابع زیر انتگرال $F = (1 + y'^2)$ مستقل از y است، در نتیجه طبق (۱۴.۱) داریم:

$$\frac{d}{dx}(F_{y'}) = 0 \implies 2y' = A,$$

و با انتگرال گیری مجدد داریم:

$$y = \frac{Ax}{2} + B,$$

که در آن B عدد ثابت است، برای آن که $y(x)$ در شرایط $y(0) = 1$ و $y(1) = 2$ صدق کند باید داشته باشیم $B = 1$ و $A = 2$ ، در نتیجه منحنی بهینه به صورت خط راست زیر خواهد بود:

$$y = x + 1.$$

(ب) F مستقل از x باشد، داریم:

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dx} &= \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{dy'}{dx} + \frac{\partial F}{\partial x} \\ &= y' F_y + y'' F_{y'}. \end{aligned} \quad (15.1)$$

با استفاده از معادله اوایلر (۱۳.۱) برای حذف F_y از رابطه (۱۵.۱) داریم:

$$\frac{dF}{dx} = y' \frac{d}{dx}(F_{y'}) + y'' F_{y'} = \frac{d}{dx}(y' F_{y'}), \quad (16.1)$$

و با انتگرال گیری از رابطه (۱۶.۱) داریم:

$$F - y' F_{y'} = (\text{ثابت}). \quad (17.1)$$

مثال ۳.۵.۱. یک منحنی مسطح $y = y(x)$ از نقاط $(0, b)$ و (a, c) در صفحه xy می‌گذرد (a)، b و c ثابت‌های مثبت هستند همچنین $b \neq c$ است. و منحنی بالای محور x قرار دارد. منحنی $y(x)$ را به قسمی تعیین کنید که وقتی حول محور x دوران کند رویه‌ای دوار با مینیمم مساحت تولید کند.

حل: مساحت رویه دوار به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$A = \int 2\pi y ds = 2\pi \int_0^a y \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dx.$$

بنابراین منحنی $y(x)$ را به قسمی تعیین می‌کنیم که این انتگرال مینیمم شود. تابع انتگرال عبارت است از $F = y(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}}$ که مستقل از x است در نتیجه می‌توانیم معادله (۱۷.۱) را در مورد آن به کار ببریم، آنگاه داریم:

$$y(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} - y'^2 \frac{y}{(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}}} = A,$$

که پس از ساده کردن به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$y^2 = A^2(1 + y'^2),$$

یا

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{A}(y^2 - A^2)^{\frac{1}{2}},$$

یا

$$\int \frac{dy}{(y^2 - A^2)^{\frac{1}{2}}} = \int \frac{1}{A} dx,$$

که پس از انتگرال‌گیری داریم:

$$\cosh^{-1}\left(\frac{y}{A}\right) = \frac{x}{A} + B,$$

یا

$$y = A \cosh\left(\frac{x}{A} + B\right).$$

که در آن ثابت‌های انتگرال‌گیری به قسمی انتخاب می‌شوند که منحنی از $(0, b)$ و (a, c) بگذرد.

در فصل دو مساله کوتاهترین مسیر را در قالب یک مساله حساب تغییرات در نظر می‌گیریم و با استفاده از روش موجک هار به حل عددی آن می‌پردازیم.

۶.۱ مفاهیم اساسی در توپولوژی و آنالیز

در این بخش به طور خلاصه به بیان تعاریفی که در این پایان نامه از آن استفاده شده است می‌پردازیم.

تعریف ۱.۶.۱. اگر X و Y دو مجموعه باشند، حاصلضرب دکارتی^{۱۹} $X \times Y$ مجموعه همه زوج‌های مرتب (x, y) است که $x \in X$ و $y \in Y$.

تعریف ۲.۶.۱. یک رابطه^{۲۰} از X به Y یک زیر مجموعه از $X \times Y$ است. اگر R یک رابطه از X به Y باشد، می‌توانیم xRy را به جای $(x, y) \in R$ استفاده کنیم. مهمترین رابطه‌ها به صورت زیر هستند.

^{۱۹}Cartesian Product

^{۲۰}Relation

- رابطه‌های هم‌ارزی^{۲۱}: یک رابطه هم‌ارزی روی X ، رابطه R روی X است که برای هر $x \in X$ ، xRx ، xRy اگر و تنها اگر yRx ، اگر xRy و yRz آن‌گاه xRz .
- کلاس هم‌ارزی^{۲۲} عنصر x مجموعه $\{y \in X : xRy\}$ است. X اجتماع مجزایی از کلاس‌های هم‌ارزی است.
- رابطه‌های ترتیب^{۲۳}.
- نگاشت‌ها: نگاشت^{۲۴} $f : X \rightarrow Y$ یک رابطه R از X به Y است با این خاصیت که برای هر $x \in X$ عنصر یکتای $y \in Y$ وجود دارد به طوری که xRy ، در این حالت $y = f(x)$ تعریف می‌کنیم.
- تعریف ۳.۶.۱. یک نگاشت زمانی که Y مجموعه \mathbb{C} یا یک زیر مجموعه آن باشد، تابع^{۲۵} نامیده می‌شود.
- تعریف ۴.۶.۱. f تابع خطی از x است اگر و تنها اگر در اصل همگنی $f(\alpha x) = \alpha f(x)$.
- به‌ازای هر $x \in X$ و هر عدد $\alpha \in R$ به‌قسمی که $\alpha x \in X$ ، صادق باشد و نیز در اصل جمع‌پذیری $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$.
- به‌ازای هر $x_1, x_2 \in X$ و $x_1 + x_2 \in X$ صدق نماید.
- تعریف ۵.۶.۱. گروه^{۲۶} مجموعه‌ای است از اعضای G همراه با نگاشت $G \times G \rightarrow G : *$ به طوری که
 ۱. عضو $e \in G$ چنان موجود باشد که برای تمام $g \in G$ داشته باشیم $e * g = g * e = g$ ، این عضو را عضو خنثی^{۲۷} گروه G گوئیم.
 ۲. برای هر عضو $g \in G$ عضو منحصر به فرد^{۲۸} $h \in G$ موجود باشد به طوری که $h * g = g * h = e$ ، عضو h را وارون^{۲۹} g نامیده و آن را با g^{-1} نشان می‌دهیم.
 ۳. برای کلیه g, h و j در G داشته باشیم $g * (h * j) = (g * h) * j$ ، یعنی نسبت به عمل $*$ شرکت‌پذیر^{۳۰} باشند.

^{۲۱}Equivalence Relations

^{۲۲}Equivalence Class

^{۲۳}Order Relations

^{۲۴}Mapping

^{۲۵}Function

^{۲۶}Group

^{۲۷}Neutral Element

^{۲۸}Unique Element

^{۲۹}Inverse

^{۳۰}Associative

در این صورت گروه را با $(G, *)$ نشان می‌دهیم. به‌علاوه اگر برای کلیه $g, h \in G$ داشته باشیم $g * h = h * g$ آن‌گاه G را یک گروه جابجایی^{۳۱} (تعویض‌پذیر) گوئیم.

تعریف ۶.۶.۱. میدان مجموعه‌ای از اعضای F همراه با دو عمل $+$ و $\cdot : F \times F \rightarrow F$ است که به ترتیب جمع و ضرب نامیده می‌شوند، به‌طوری‌که $(F, +)$ گروهی جابجایی با عضو همانی صفر و $(F - \{0\}, \cdot)$ نیز گروهی جابجایی با عضو همانی یک یعنی واحد^{۳۲} می‌باشند. چنین میدانی را به‌صورت $(F, +, \cdot)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۷.۶.۱. یک فضای برداری^{۳۳} روی میدان F (که اعضای آن اسکالر نامیده می‌شود) مجموعه‌ای مانند V است که اعضای آن را بردار^{۳۴} می‌نامیم به طوری‌که:

نگاشتی مانند $+$: $V \times V \rightarrow V$ که آن را جمع نامیده و $(V, +)$ گروهی جابجایی باشد. عضو همانی این گروه را با 0 نشان می‌دهیم. همچنین نگاشت $\rightarrow V : F \times V$ را که ضرب اسکالر^{۳۵} نامیده می‌شود، تعریف می‌کنیم. ضرب اسکالر F و V را برای هر $f \in F$ و $V \in V$ به‌صورت fV نشان می‌دهیم. برای کلیه $a, b \in F$ و $U, V \in V$ ضرب اسکالر دارای خواص زیر است:

$$1. a(U + V) = aU + aV \quad (\text{توزیع ضرب اسکالر روی جمع برداری}),$$

$$2. (a + b)V = aV + bV \quad (\text{توزیع ضرب برداری روی جمع اسکالر}),$$

$$3. a(bV) = (a \cdot b)V \quad (\text{شرکت‌پذیری ضرب اسکالر}),$$

$$4. 1V = V$$

$$5. 0V = 0$$

چنین فضای برداری را با (V, F) نشان می‌دهیم.

تعریف ۸.۶.۱. فضای برداری V روی میدان اعداد مختلط^{۳۶} را فضای ضرب داخلی (و یا فضای شبه هیلبرت) می‌نامیم هرگاه تابعی چون $\langle \cdot, \cdot \rangle \times V \rightarrow \mathbb{C}$ وجود داشته باشد، به‌طوری‌که برای هر $U, V, W \in V$ و $a \in \mathbb{C}$ داشته باشیم:

$$1. \langle U, V \rangle \geq 0 \quad \text{و} \quad \langle V, V \rangle = 0 \quad \text{اگر و تنها اگر} \quad V = 0,$$

$$2. \langle U, V + W \rangle = \langle U, V \rangle + \langle U, W \rangle,$$

$$3. \langle aU, V \rangle = a \langle U, V \rangle.$$

^{۳۱}Commutative

^{۳۲}Identity Element

^{۳۳}Vector Space

^{۳۴}Vector

^{۳۵}Scalar Multiplication

^{۳۶}Complex Number

۴. $\langle U, V \rangle = \overline{\langle V, U \rangle}$ ، که خط بالایی عمل مزدوج در اعداد مختلط است.

تابع $\langle \cdot, \cdot \rangle$ را ضرب داخلی گوییم.

تعریف ۹.۶.۱. دنباله $(V_j)_{j \in \mathbb{N}}$ در فضای ضرب داخلی (V, \mathbb{C}) کشی نامیده می‌شود هرگاه برای هر $\epsilon > 0$ ، $N \in \mathbb{N}$ چنان یافت شود که برای هر $m, n \geq N$ داشته باشیم $d(V_m, V_n) \leq \epsilon$.

تعریف ۱۰.۶.۱. فضای ضرب داخلی^{۳۷} را کامل گوییم هرگاه هر دنباله کشی^{۳۸} در آن همگرا^{۳۹} باشد.

تعریف ۱۱.۶.۱. فضای ضرب داخلی کامل را فضای هیلبرت^{۴۰} گوییم.

تعریف ۱۲.۶.۱. فضای $L^2[a, b]$ برای بازه $[a, b]$ را به صورت

$$L^2([a, b]) = \left\{ f : \int_{[a, b]} |f|^2 < \infty \right\}.$$

تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱۳.۶.۱. فرض می‌کنیم $X \neq \emptyset$ یک مجموعه باشد، جبری از مجموعه‌ها روی X عبارت است از خانواده غیرتهی A از زیر مجموعه‌های X به طوری که در دو شرط زیر صدق کند:

۱. اگر $E_1, \dots, E_n \in A$ آنگاه $\cup_{k=1}^n E_k \in A$

۲. اگر $E \in A$ آنگاه $E^c \in A$.

جبر روی X را σ -جبر می‌گوییم، هرگاه تحت اجتماع شمارش‌پذیر بسته باشد. یعنی اگر $E_k \in A$ برای هر $k \in \mathbb{N}$ ، آنگاه $\cup_{k=1}^{\infty} E_k \in A$.

تعریف ۱۴.۶.۱. فرض کنید $A \subseteq X$ یک σ -جبر باشد، تابع μ از A بتوی $[0, \infty)$ را اندازه روی σ -جبر A می‌نامیم هرگاه:

۱. $\mu(\emptyset) = 0$.

۲. فرض کنید $E_k \in A$ ، $k \in \mathbb{N}$ و برای هر $k \neq l$ داشته باشیم $E_k \cap E_l = \emptyset$ ، در نتیجه داریم:

$$\mu(\cup_{k=1}^{\infty} E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$$

تعریف ۱۵.۶.۱. اگر A یک σ -جبر روی مجموعه X و μ اندازه (X, A) باشد، (X, A) را فضای اندازه‌پذیر^{۴۱} می‌نامیم.

^{۳۷}Inner Product Space

^{۳۸}Cauchy

^{۳۹}Convergent

^{۴۰}Hilbert Space

^{۴۱}Measurable Space

تعریف ۱۶.۶.۱. فرض می‌کنیم $\{G_\alpha\}_{\alpha=1}^\infty$ خانواده‌ای از زیر مجموعه‌های باز X و $E \subseteq \bigcup_{\alpha=1}^\infty G_\alpha$ باشد. $\{G_\alpha\}_{\alpha=1}^\infty$ را پوشش باز مجموعه E در فضای متریک X می‌نامیم.

تعریف ۱۷.۶.۱. زیر مجموعه E از فضای متریک X را مجموعه فشرده می‌گوییم اگر هر پوشش باز E یک زیر پوشش باز متناهی داشته باشد.

تعریف ۱۸.۶.۱. فرض می‌کنیم $f: X \rightarrow Y$ یک تابع، (X, M) و (Y, N) فضاهای اندازه‌پذیر باشند. تابع f را اندازه‌پذیر^{۴۲} گوئیم اگر برای هر $E \in N$ داشته باشیم:

$$f^{-1}(E) \in M.$$

تعریف ۱۹.۶.۱. تابع اندازه‌پذیر f که روی \mathbb{R} تعریف شده است را انتگرال لبگ^{۴۳} می‌گوییم اگر دنباله‌ای از توابع (f_n) وجود داشته باشد به طوری که در دو شرط زیر صدق کند:

$$۱. \sum_{n=1}^\infty \int |f_n| < \infty,$$

$$۲. f(x) = \sum_{n=1}^\infty f_n(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad s.t. \quad \sum_{n=1}^\infty |f_n| < \infty.$$

آنگاه انتگرال f به صورت

$$\int f = \sum_{n=1}^\infty \int f_n,$$

تعریف می‌شود.

تعریف ۲۰.۶.۱. تابع f که روی \mathbb{R} تعریف شده است، انتگرال‌پذیر موضعی^{۴۴} گفته می‌شود اگر

$$\int_a^b f,$$

برای هر $-\infty < a < b < \infty$ موجود باشد.

تعریف ۲۱.۶.۱. فرض می‌کنیم (X, A) فضای اندازه‌پذیر باشد و $E \subseteq X$ ، تابع مشخصه^{۴۵} E به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\chi_E = \begin{cases} 0, & x \notin E, \\ 1, & x \in E. \end{cases}$$

تعریف ۲۲.۶.۱. مجموعه S اندازه‌پذیر گفته می‌شود اگر تابع مشخصه χ_S تابعی انتگرال‌پذیر موضعی باشد.

^{۴۲}Measurable

^{۴۳}Lebesgue Integral

^{۴۴}Locally Integrable

^{۴۵}Characteristic Function

تعریف ۲۳.۶.۱. فرض کنید S مجموعه اندازه‌پذیر باشد، اگر تابع مشخصه χ_S تابعی انتگرال‌پذیر باشد آنگاه $\mu(S)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu(S) = \int \chi_S,$$

اگر χ_S انتگرال‌پذیر نباشد آن‌گاه:

$$\mu(S) = \infty.$$

تعریف ۲۴.۶.۱. مجموعه توابع $\{u_0(x), u_1(x), u_2(x), \dots\}$ را در فاصله $[a, b]$ متعامد^{۴۶} گوئیم، اگر داشته باشیم:

$$\int_a^b u_m(x)u_n(x) dt \begin{cases} = 0, & m \neq n, \\ > 0, & m = n. \end{cases}$$

۷.۱ توابع موجک هار

تعریف ۱.۷.۱. توابع هار را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$H(0, t) = 1, \quad 0 \leq t < 1,$$

$$H(1, t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \frac{1}{4}, \\ -1, & \frac{1}{4} \leq t < 1, \end{cases}$$

$$H(2, t) = \begin{cases} \sqrt{2}, & 0 \leq t < \frac{1}{4}, \\ -\sqrt{2}, & \frac{1}{4} \leq t < \frac{3}{4}, \\ 0, & \frac{3}{4} \leq t < 1, \end{cases}$$

$$H(3, t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \frac{1}{4}, \\ \sqrt{2}, & \frac{1}{4} \leq t < \frac{3}{8}, \\ -\sqrt{2}, & \frac{3}{8} \leq t < 1. \end{cases}$$

به‌طور کلی داریم:

$$H(2^p + n - 1, t) = \begin{cases} \sqrt{2^p} & J_1 \leq t \leq J_{\frac{1}{4}}, \\ -\sqrt{2^p} & J_{\frac{1}{4}} \leq t \leq J_0, \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

^{۴۶}Orthogonal

که در آن

$$J_u = \frac{n-u}{2^p}, \quad u = 0, \frac{1}{2}, 1,$$

$$p = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad n = 1, 2, 3, \dots, 2^p.$$

لینچ^{۴۷} و ریس^{۴۸} توابع هار را گویا کردند [۲۱]. توابع هار گویا^{۴۹} تمام ویژگی توابع هار اصلی را دارند و آن‌ها را با RH نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲.۷.۱. توابع هار گویا مقادیر خود را از مجموعه‌ی $\{1, -1, 0\}$ اختیار می‌کنند و روی بازه‌ی $(0, 1)$ به صورت زیر تعریف می‌شوند [۱۰]:

$$RH(r, t) = \begin{cases} 1, & J_1 \leq t < J_{\frac{1}{2}}, \\ -1, & J_{\frac{1}{2}} \leq t < J_0, \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

که در آن

$$J_u = \frac{j-u}{2^i}, \quad u = 0, \frac{1}{2}, 1,$$

و مقدار r و پارامترهای j, i به صورت زیر است:

$$r = 2^i + j - 1, \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad j = 1, 2, 3, \dots, 2^i.$$

$RH(0, t)$ برای $i = j = 0$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$RH(0, t) = 1, \quad 0 \leq t < 1.$$

$RH(0, t)$ موجک پدر نام دارد، متناظرا نوعی موجک مادر هار متناسب با موجک پدر وجود دارد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

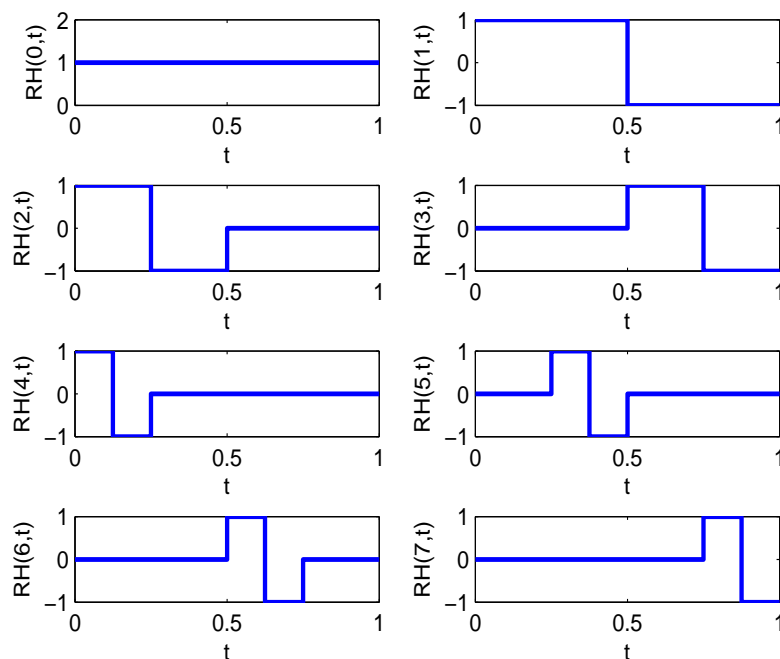
$$RH(1, t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \frac{1}{2}, \\ -1, & \frac{1}{2} \leq t < 1, \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

نمودار موجک هار مادر و دیگر توابع هار گویا برای $r = 0, 1, 2, \dots, 7$ را می‌توانیم در شکل (۱.۱) ببینیم [۱۵].

^{۴۷}Lynch

^{۴۸}Reis

^{۴۹}Rationalized Haar Functions



شکل ۱.۱: نمودار $RH(r, t)$ برای $r = 0, 1, 2, \dots, 7$

۱.۷.۱ ویژگی تعامد توابع هار گویا

هر موجک هار از یک جفت مقدار ثابت با علامت مخالف در طول بازه زمانی تشکیل شده است و در غیر این صورت برابر صفر می‌باشد. در نتیجه داریم [۱۰]:

$$\int_0^1 RH(r, t)RH(v, t)dt = \begin{cases} 2^{-i}, & r = v, \\ 0, & r \neq v, \end{cases}$$

که در آن

$$v = 2^n + m - 1, n = 0, 1, 2, 3, \dots, m = 0, 1, 2, 3, \dots, 2^n.$$

این رابطه نشان می‌دهد که مجموعه‌ی توابع هار گویا مجموعه‌ای متعامد کامل هستند، بنابراین تشکیل یک پایه متعامد می‌دهند. این ویژگی توابع هار گویا باعث می‌شود که بتوانیم هر تابع انتگرال‌پذیر در بازه زمانی $[0, 1]$ را با دنباله‌های هار تقریب بزنیم.

۲.۷.۱ تقریب توابع با توابع هار

همان‌طور که اشاره شد مجموعه توابع هار گویا مجموعه‌ای متعامد کامل در فضای هیلبرت $L^2[0, 1]$ هستند که در بازه‌ی زمانی $\tau \in [0, 1]$ تعریف می‌شوند. بنابراین برای تقریب هر تابع پیوسته مانند \mathcal{F} با توابع هار گویا در این فضا لازم است ابتدا هر بازه‌ی زمانی مانند $[t_0, t_f]$ را با استفاده از تبدیل خطی زیر به بازه‌ی زمانی $[0, 1]$ تبدیل کنیم:

$$t = [(t_f - t_0)\tau + t_0]. \quad (18.1)$$

که در آن t_0 زمان ابتدایی و t_f زمان نهایی است. بعد از این تبدیل هر تابع پیوسته مانند \mathcal{F} می‌تواند به صورت زیر با توابع هارگویا تقریب زده شود [۱۰]:

$$\mathcal{F}(t) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r RH(r, t). \quad (19.1)$$

اگر تابع \mathcal{F} معلوم باشد a_r به صورت زیر به دست می‌آید:

$$a_r = \Psi^i \int_0^1 \mathcal{F} RH(r, t) dt, \quad r = 0, 1, 2, \dots,$$

که در آن Ψ^i , $i = 0, 1, 2, 3, \dots$, $r = 0, 1, 2, 3, \dots$, $j = 1, 2, 3, \dots$, $r = \Psi^i + j - 1$, $i = 0, 1, 2, 3, \dots$ برای $r = 0, i = j = 0$ است. سری (۱۹.۱) نامتناهی است. برای تبدیل این سری به یک سری متناهی فرض می‌کنیم $i = \alpha$, $\alpha = 0, 1, 2, \dots$ باشد، بنابراین جملات سری به K جمله‌ی اولش محدود می‌شود، در نتیجه داریم:

$$\mathcal{F}(t) \simeq \sum_{r=0}^{K-1} a_r RH(r, t) = A^T \Phi(t), \quad (20.1)$$

که

$$K = \Psi^{\alpha+1}, \alpha = 0, 1, 2, 3, \dots$$

A را بردار ضرایب توابع هارگویا و $\Phi(t)$ را بردار توابع هارگویا می‌نامیم و آن‌ها را به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$A = [a_0, a_1, \dots, a_{K-1}]^T,$$

$$\Phi(t) = [\phi_0(t), \phi_1(t), \dots, \phi_{K-1}(t)]^T,$$

که

$$\phi_r(t) = RH(r, t), \quad r = 0, 1, 2, \dots, K-1.$$

نقاط موجود در بین زیر بازه موجک را نقاط کالوکیشن می‌نامیم و آن‌ها را به صورت زیر نمایش می‌دهیم [۲۰]:

$$t_l = \frac{l - 0.5}{K}, \quad l = 1, 2, \dots, K.$$

با انتخاب این نقاط کالوکیشن تابع به زیر بازه‌هایی با فاصله‌های مساوی گسسته‌سازی می‌شود. می‌توان بردار $\Phi(t)$ را در این نقاط مشخص کرد. فرض می‌کنیم $\hat{\Phi}_{K \times K}$ به عنوان ماتریس هار، ترکیبی از بردارهای $\Phi(t)$ در نقاط کالوکیشن باشد. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}_{K \times K} &= [\Phi(t_1), \Phi(t_2), \dots, \Phi(t_K)] \\ &= \begin{bmatrix} \phi_0(t_1) & \phi_0(t_2) & \cdots & \phi_0(t_K) \\ \phi_1(t_1) & \phi_1(t_2) & \cdots & \phi_1(t_K) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{K-1}(t_1) & \phi_{K-1}(t_2) & \cdots & \phi_{K-1}(t_K) \end{bmatrix}_{K \times K} \end{aligned} \quad (21.1)$$

به‌عنوان مثال ماتریس هار هشت موجک اول به‌صورت زیر است [۱۳]:

$$\hat{\Phi}_{\lambda \times \lambda} = [\Phi(t_1), \Phi(t_2), \dots, \Phi(t_\lambda)]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (22.1)$$

درایه‌های ماتریس (۲۲.۱) مقادیر توابع هار در نقاط کالوکیشن هستند. همچنین ماتریس $\hat{\Phi}_{K \times K}$ می‌تواند به‌صورت زیر بیان شود:

$$\hat{\Phi}_{K \times K} = [\Phi(\frac{1}{\sqrt{K}}), \Phi(\frac{3}{\sqrt{K}}), \dots, \Phi(\frac{2K-1}{\sqrt{K}})]. \quad (23.1)$$

با استفاده از رابطه (۲۳.۱) و سری (۲۰.۱) داریم:

$$[\mathcal{F}(\frac{1}{\sqrt{K}}), \mathcal{F}(\frac{3}{\sqrt{K}}), \dots, \mathcal{F}(\frac{2K-1}{\sqrt{K}})] = A^T \hat{\Phi}_{K \times K}. \quad (24.1)$$

در نتیجه:

$$A^T = [\mathcal{F}(\frac{1}{\sqrt{K}}), \mathcal{F}(\frac{3}{\sqrt{K}}), \dots, \mathcal{F}(\frac{2K-1}{\sqrt{K}})] \hat{\Phi}_{K \times K}^{-1}. \quad (25.1)$$

در انتها رابطه‌ی (۲۵.۱) را می‌توانیم به‌صورت زیر بنویسیم:

$$A^T = [\mathcal{F}(t_1), \mathcal{F}(t_2), \dots, \mathcal{F}(t_K)] \hat{\Phi}_{K \times K}^{-1},$$

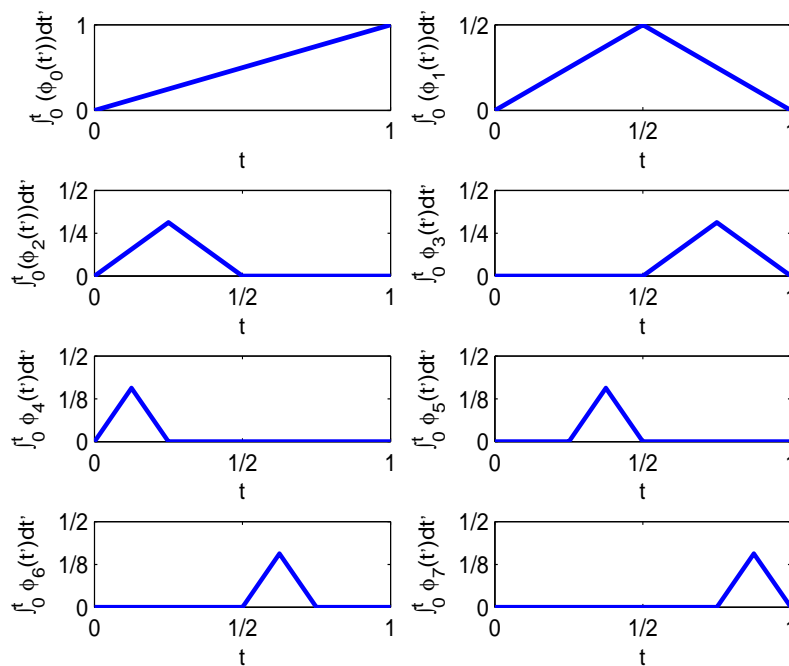
که

$$\hat{\Phi}_{K \times K}^{-1} = (\frac{1}{K}) \hat{\Phi}_{K \times K}^T \text{diag}(1, 1, \underbrace{2, 2^2, \dots, 2^2}_{\sqrt{2}}, \underbrace{2^3, \dots, 2^3}_{\sqrt{3}}, \dots, \underbrace{\frac{K}{2}, \dots, \frac{K}{2}}_{\frac{K}{2}}). \quad (26.1)$$

۳.۷.۱ ماتریس عملگر انتگرال‌گیری

همیشه در حل مسائل کنترل بهینه با روابطی سر و کار داریم که مشتق‌گیری یا انتگرال‌گیری از آن‌ها اجتناب‌ناپذیر است. برای سیستم‌هایی که توابع را با موجک هار تقریب زده‌ایم مشتق‌گیری از موج‌های پله‌ای امکان‌پذیر نیست در حالی‌که انتگرال‌گیری از آن‌ها توابعی خطی نتیجه می‌دهد و به‌صورت زیر بیان می‌شود [۱۳]:

$$\int_0^t \Phi(t') dt' \simeq P \Phi(t). \quad (27.1)$$



شکل ۲.۱: نمودار توابع انتگرال $\phi_r(t)$ برای $r = 0, 1, \dots, 7$

که در آن ماتریس $P_{K \times K}$ ، ماتریس عملگر انتگرال‌گیری^{۵۰} است و به صورت زیر به دست می‌آید [۱۳]:

$$P_{K \times K} = \frac{1}{\sqrt{K}} \begin{bmatrix} \sqrt{K} P_{\frac{K}{\sqrt{K}} \times \frac{K}{\sqrt{K}}} & -\hat{\Phi}_{\frac{K}{\sqrt{K}} \times \frac{K}{\sqrt{K}}} \\ \hat{\Phi}_{\frac{K}{\sqrt{K}} \times \frac{K}{\sqrt{K}}}^{-1} & 0 \end{bmatrix}, \quad (28.1)$$

به طوری که $\hat{\Phi}_{1 \times 1} = [1]$ ، $P_{1 \times 1} = [\frac{1}{\sqrt{1}}]$ و $\hat{\Phi}_{\frac{K}{\sqrt{K}} \times \frac{K}{\sqrt{K}}}^{-1}$ و $\hat{\Phi}_{\frac{K}{\sqrt{K}} \times \frac{K}{\sqrt{K}}}$ به ترتیب از رابطه‌های (۲۱.۱) و (۲۶.۱) به دست می‌آیند. به عنوان مثال ماتریس عملگر انتگرال‌گیری مرتبه هشت $P_{8 \times 8}$ به صورت زیر است:

$$P_{8 \times 8} = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{bmatrix} \sqrt{8} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (29.1)$$

انتگرال‌گیری از توابع $\phi_r(t)$ ، $r = 0, 1, \dots, 7$ را که در شکل (۲.۱) رسم شده است، به صورت زیر نمایش می‌دهیم [۴]:

^{۵۰}Operational Integration Matrix

$$\int_0^t \phi_0(t') dt' = t, \quad 0 \leq t < 1 \simeq \frac{1}{16} [1 \ 3 \ 5 \ 7 \ 9 \ 11 \ 13 \ 15], \quad (30.1)$$

$$\int_0^t \phi_1(t') dt' = \begin{cases} t, & 0 \leq t < \frac{1}{4}, \\ 1-t, & \frac{1}{4} \leq t < 1, \end{cases} \simeq \frac{1}{16} [1 \ 3 \ 5 \ 7 \ 7 \ 5 \ 3 \ 1], \quad (31.1)$$

$$\int_0^t \phi_2(t') dt' = \begin{cases} t, & 0 \leq t < \frac{1}{4}, \\ \frac{1}{4} - t, & \frac{1}{4} \leq t < \frac{1}{2}, \end{cases} \simeq \frac{1}{16} [1 \ 3 \ 3 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0], \quad (32.1)$$

$$\int_0^t \phi_3(t') dt' = \begin{cases} t - \frac{1}{4}, & \frac{1}{4} \leq t < \frac{3}{4}, \\ 1-t, & \frac{3}{4} \leq t < 1, \end{cases} \simeq \frac{1}{16} [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 3 \ 3 \ 1], \quad (33.1)$$

$$\int_0^t \phi_4(t') dt' = \begin{cases} t, & 0 \leq t < \frac{1}{8}, \\ \frac{1}{4} - t, & \frac{1}{8} \leq t < \frac{1}{4}, \end{cases} \simeq \frac{1}{16} [1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0], \quad (34.1)$$

$$\int_0^t \phi_5(t') dt' = \begin{cases} t - \frac{1}{4}, & \frac{1}{4} \leq t < \frac{3}{8}, \\ \frac{1}{4} - t, & \frac{3}{8} \leq t < \frac{1}{2}, \end{cases} \simeq \frac{1}{16} [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1], \quad (35.1)$$

$$\int_0^t \phi_6(t') dt' = \begin{cases} t - \frac{1}{4}, & \frac{1}{4} \leq t < \frac{5}{8}, \\ \frac{3}{4} - t, & \frac{5}{8} \leq t < \frac{3}{2}, \end{cases} \simeq \frac{1}{16} [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0], \quad (36.1)$$

$$\int_0^t \phi_7(t') dt' = \begin{cases} t - \frac{3}{4}, & \frac{3}{4} \leq t < \frac{7}{8}, \\ 1-t, & \frac{7}{8} \leq t < 1, \end{cases} \simeq \frac{1}{16} [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1], \quad (37.1)$$

با ادغام روابط (30.1) و (37.1) داریم:

$$\int_0^t \hat{\Phi}_{8 \times 8}(t') dt' \simeq \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 & 15 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 7 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (38.1)$$

اکنون با جایگذاری روابط (22.1) و (38.1) در رابطه‌ی (27.1) ماتریس $P_{8 \times 8}$ به دست می‌آید که همان ماتریس (29.1) است.

۸.۱ حل مسائل کنترل بهینه در حالت کلی با استفاده از روش موجک هار

در اینجا مسائل بولزا^{۵۱} را مورد بررسی قرار می‌دهیم [۳]، که در حالت کلی به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\min J = \phi(t_f, X_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(t, X(t), U(t)) dt, \quad (39.1)$$

subject to

$$\dot{X} = G(t, X(t), U(t)), \quad t \in [t_0, t_f], \quad (40.1)$$

$$S(t, X(t), U(t)) \leq 0, \quad t \in [t_0, t_f], \quad (41.1)$$

$$X(t_0) = X_0, \quad X(t_f) = X_f, \quad (42.1)$$

که X بردار $n \times 1$ بعدی از متغیرهای حالت، U بردار $m \times 1$ بعدی از متغیرهای کنترل، G بردار $n \times 1$ بعدی از توابع به طور مشتق پذیر پیوسته، S بردار $q \times 1$ بعدی و t متغیر زمان است. متغیرهای حالت دارای شرایط اولیه و نهایی معلوم $X(t_0) = X_0$ و $X(t_f) = X_f$ هستند. همچنین ϕ تابع اسکالر از زمان نهایی t_f و متغیر حالت X_f و $L(t, X(t), U(t))$ تابع اسکالر از زمان، متغیر حالت X و متغیر کنترل U است.

۱.۸.۱ تبدیل بازه

همان طور که بیان کردیم توابع هارگویا روی بازه $\tau \in [0, 1]$ تعریف می‌شوند، به همین دلیل از تبدیل خطی $t = (t_f - t_0)\tau + t_0, t \in [t_0, t_f]$ استفاده می‌کنیم تا بازه $[t_0, t_f]$ را به بازه $[0, 1]$ تبدیل کنیم. در نتیجه داریم:

$$\min J = \phi(t_f, X_f) + \int_{t_0}^{t_f} L((t_f - t_0)\tau + t_0, X((t_f - t_0)\tau + t_0), U((t_f - t_0)\tau + t_0)) d((t_f - t_0)\tau + t_0), \quad (43.1)$$

subject to

$$\dot{X}((t_f - t_0)\tau + t_0) = G((t_f - t_0)\tau + t_0, X((t_f - t_0)\tau + t_0), U((t_f - t_0)\tau + t_0)), \quad (44.1)$$

$$S((t_f - t_0)\tau + t_0, X((t_f - t_0)\tau + t_0), U((t_f - t_0)\tau + t_0)) \leq 0, \quad (45.1)$$

$$X(t_0) = X_0, \quad X(t_f) = X_f. \quad (46.1)$$

حال برای ساده کردن مساله (۴۳.۱) - (۴۶.۱)، تعریف می‌کنیم:

$$X((t_f - t_0)\tau + t_0) = x(\tau), \quad (47.1)$$

$$U((t_f - t_0)\tau + t_0) = u(\tau). \quad (48.1)$$

^{۵۱}Bolza

همچنین داریم:

$$\dot{X}((t_f - t_0)\tau + t_0) = \frac{dX((t_f - t_0)\tau + t_0)}{dt} = \frac{dX((t_f - t_0)\tau + t_0)}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt}, \quad (49.1)$$

$$\implies \dot{X}((t_f - t_0)\tau + t_0) = \frac{dx(\tau)}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt}. \quad (50.1)$$

از طرفی داریم:

$$dt = d((t_f - t_0)\tau + t_0) = (t_f - t_0)d\tau \implies \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{(t_f - t_0)}. \quad (51.1)$$

در نهایت با جایگذاری (51.1) در (50.1) داریم:

$$\dot{X}((t_f - t_0)\tau + t_0) = \frac{\dot{x}(\tau)}{(t_f - t_0)}. \quad (52.1)$$

حال با جایگذاری تبدیلات بالا در مساله (43.1) - (46.1) مساله کنترل بهینه زیر را به دست می آوریم:

$$\min J = \phi(1, X_f) + (t_f - t_0) \int_0^1 L((t_f - t_0)\tau + t_0, x(\tau), u(\tau)) d\tau, \quad (53.1)$$

subject to

$$\dot{x}(\tau) = (t_f - t_0)G((t_f - t_0)\tau + t_0, x(\tau), u(\tau)), \quad (54.1)$$

$$S((t_f - t_0)\tau + t_0, x(\tau), u(\tau)) \leq 0, \quad (55.1)$$

$$x(0) = X_0, \quad x(1) = X_f, \quad \tau \in [0, 1]. \quad (56.1)$$

۹.۱ کالوکیشن مستقیم

۱.۹.۱ گسسته سازی هار

همان طور که در بخش (2.7.1) چگونگی تقریب یک تابع با استفاده از موجک هار و ماتریس عملگر انتگرال گیری آن را بیان کردیم، در این بخش می خواهیم روش گسسته سازی هار را به صورت کالوکیشن مستقیم برای حل مسائل کنترل بهینه استفاده کنیم. بازه استاندارد در این روش بازه $[0, 1]$ ، با مجموع نقاط کالوکیشن به صورت زیر است:

$$\tau_l = \frac{l - 0.5}{K}, \quad l = 1, 2, \dots, K,$$

که K تعداد نقاط کالوکیشن در گسسته سازی است. K به صورت توانی از دو است و با افزایش توان، نقاط کالوکیشن نیز افزایش می یابد. نقاط کالوکیشن با فواصل مساوی $\frac{1}{K}$ روی بازه زمانی $[0, 1]$ قرار دارند. مشتق متغیرهای حالت $\dot{x}(\tau)$ و متغیرهای کنترل $u(\tau)$ را با توابع موجک هار در K نقطه

کالوکیشن به صورت زیر تقریب می‌زنیم:

$$\dot{x}(\tau) \approx C_x^T \Phi(\tau), \quad (57.1)$$

$$u(\tau) \approx C_u^T \Phi(\tau), \quad (58.1)$$

که

$$C_x^T = [C_{x1}, C_{x2}, \dots, C_{xK}], \quad C_u^T = [C_{u1}, C_{u2}, \dots, C_{uK}]. \quad (59.1)$$

همچنین با استفاده از ماتریس عملگر انتگرال‌گیری P تعریف شده در بخش (۳.۷.۱) متغیر حالت $x(\tau)$ را می‌توانیم به صورت زیر تقریب بزنیم:

$$x(\tau) = \int_0^\tau \dot{x}(\tau') d\tau' + x_0 = \int_0^\tau C_x^T \Phi(\tau') d\tau' + x_0 = C_x^T P \Phi(\tau) + x_0. \quad (60.1)$$

همان‌طور که در بخش (۳.۷.۱) بیان شده، از توسیع ماتریس $\Phi(t)$ در K نقطه کالوکیشن، ماتریس‌ها را $\hat{\Phi}_{K \times K} = [\Phi(t_1), \Phi(t_2), \dots, \Phi(t_K)]$ ، $K \times K$ به دست می‌آید. در نتیجه داریم:

$$\dot{x}(\tau_l) = C_x^T \Phi(\tau_l), \quad u(\tau_l) = C_u^T \Phi(\tau_l) \quad x(\tau_l) = C_x^T P \Phi(\tau_l) + x_0. \quad l = 1, \dots, K. \quad (61.1)$$

روابط (۶۱.۱) نشان می‌دهد که هریک از متغیرها را می‌توانیم در هر نقطه کالوکیشن با استفاده از ضرب بردار ضرایب در ستون متناظر آن در ماتریس‌ها تقریب بزنیم.

۲.۹.۱ برنامه‌ریزی غیرخطی

هنگامی که از روش کالوکیشن‌ها در مسائل کنترل بهینه استفاده می‌کنیم، متغیرهای برنامه‌ریزی غیرخطی را می‌توان به صورت مجموعه‌ای از بردار ضرایب مجهول متغیرهای حالت و متغیرهای کنترل به شکل زیر بیان کرد:

$$\tilde{x} = [C_{x1}, C_{x2}, \dots, C_{xK}, C_{u1}, C_{u2}, \dots, C_{uK}]^T. \quad (62.1)$$

بنابراین با جایگذاری $\dot{x}(\tau)$ ، $u(\tau)$ و $x(\tau)$ به صورت عبارت موجک‌های (۵۸.۱)، (۶۰.۱) و (۶۱.۱) در تابع هدف (۵۳.۱) داریم:

$$J \approx \phi(1, X_f) + (t_0 - t_f) \int_0^1 L((C_x^T P \Phi(\tau) + x_0), C_u^T \Phi(\tau), (t_f - t_0)\tau + t_0) d\tau. \quad (63.1)$$

چون موجک‌های τ در هر بازه زمانی مقدار ثابتی دارند می‌توانیم (۶۳.۱) را به صورت زیر بنویسیم:

$$J \approx \phi(1, X_f) + \frac{(t_0 - t_f)}{K} \sum_{l=1}^K L((t_f - t_0)\tau_l + t_0, (C_x^T P \Phi(\tau_l) + x_0), C_u^T \Phi(\tau_l)), \quad (64.1)$$

همچنین با جایگذاری $\dot{x}(\tau)$ ، $u(\tau)$ و $x(\tau)$ به صورت عبارت‌های (۶۱.۱) در محدودیت‌های (۵۴.۱) و (۵۵.۱) داریم:

$$C_x^T \Phi(\tau_l) \approx (t_f - t_0)G((t_f - t_0)\tau_l + t_0, (C_x^T P \Phi(\tau_l) + x_0), C_u^T \Phi(\tau_l)) \quad (65.1)$$

$$S((t_f - t_0)\tau_l + t_0, (C_x^T P \Phi(\tau_l) + x_0), C_u^T \Phi(\tau_l)) \leq 0. \quad (66.1)$$

باید توجه داشته باشیم که مجموعه نقاط کالوکیشن شامل زمان اولیه و نهایی t_0 و t_f نیستند بنابراین متغیرهای حالت مربوط به آن‌ها را می‌توان به صورت زیر نوشت [۲۰]:

$$x_0 = x(\tau_1) - \frac{\dot{x}(\tau_1)}{\sqrt{K}}, \quad x_f = x(\tau_K) + \frac{\dot{x}(\tau_K)}{\sqrt{K}}. \quad (۶۷.۱)$$

در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned} x_0 &= C_x^T P \Phi(\tau_1) + x_0 - \frac{C_x^T \Phi(\tau_1)}{\sqrt{K}}, \\ x_f &= C_x^T P \Phi(\tau_K) + x_0 + \frac{C_x^T \Phi(\tau_K)}{\sqrt{K}}. \end{aligned} \quad (۶۸.۱)$$

۱۰.۱ مثال‌های عددی

در این بخش جوابهای دو مساله کنترل بهینه را که با استفاده از کالوکیشن مستقیم تقریب زده شده‌اند را بیان می‌کنیم.

مثال ۱۰.۱.۱. در حالت ریاضی مساله بارچیسوچرون را به منظور یافتن مینیمم زمان t_f برای حرکت یک مهره از نقطه شروع $[x_0, y_0]$ به نقطه انتهایی $[x_f, y_f]$ ، زمانی که سیستم محدودیت‌های زیر را داشته باشد، در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sqrt{2g(y_0 - y)} \cos u, \\ \dot{y} &= \sqrt{2g(y_0 - y)} \sin u, \end{aligned}$$

که u زاویه شیب منحنی است و به عنوان متغیر کنترل برای این مساله عمل می‌کند. با قرار دادن متغیرهای حالت و متغیرهای کنترل برای عبارات‌های هار، محدودیت‌های مساله مینیمم کردن $J = t_f$ به صورت زیر نوشته می‌شود:

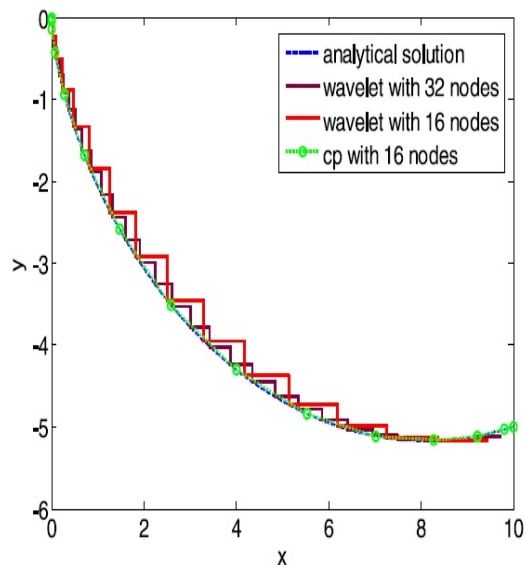
$$\begin{aligned} C_x^T \Phi(\tau_l) &= (t_f - t_0) \sqrt{2g(y_0 - (C_y^T P \Phi(\tau) + y_0))} \cos(C_u^T \Phi(\tau_l)), \\ C_y^T \Phi(\tau_l) &= (t_f - t_0) \sqrt{2g(y_0 - (C_y^T P \Phi(\tau) + y_0))} \sin(C_u^T \Phi(\tau_l)), \quad l = 1 \dots K. \end{aligned} \quad (۶۹.۱)$$

همچنین شرایط مرزی مساله را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$\begin{aligned} x_0 &= C_x^T P \Phi(\tau_1) + x_0 - \frac{C_x^T \Phi(\tau_1)}{\sqrt{K}}, \quad y_0 = C_y^T P \Phi(\tau_1) + y_0 - \frac{C_y^T \Phi(\tau_1)}{\sqrt{K}}, \\ x_f &= C_x^T P \Phi(\tau_K) + x_0 + \frac{C_x^T \Phi(\tau_K)}{\sqrt{K}}, \quad y_f = C_y^T P \Phi(\tau_K) + y_0 + \frac{C_y^T \Phi(\tau_K)}{\sqrt{K}}, \end{aligned} \quad (۷۰.۱)$$

که C_x^T ، C_y^T و C_u^T همه متغیرهای برنامه‌ریزی غیرخطی هستند. جواب تحلیلی این مساله به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} x(\theta) &= R(\theta - \sin \theta), \\ y(\theta) &= R(1 - \cos \theta), \\ u(t) &= \frac{t}{\sqrt{R}} \sqrt{\frac{g}{R}} - \frac{\pi}{\sqrt{R}}, \end{aligned} \quad (۷۱.۱)$$



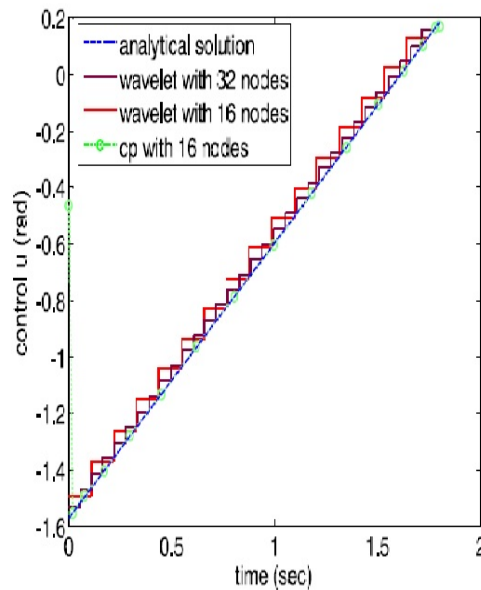
شکل ۳.۱: منحنی مسیر مثال (۱.۱۰.۱)

که شعاع دایره یا مهره و θ زاویه شیب منحنی است. برای به دست آوردن جواب عددی مساله با استفاده از روش گسسته‌سازی هار، نقطه مبدا را $(0, 0)^T$ و نقطه انتهایی را $(10, -5)^T$ فرض می‌کنیم. نتایج حاصل برای متغیرهای حالت $x(t)$ و متغیرهای حالت $u(t)$ با استفاده از گسسته‌سازی هار برای ۱۶ و ۳۲ نقطه کالوکیشن مجزا، به ترتیب در شکل‌های (۳.۱) و (۴.۱) نمایش داده شده‌اند. همچنین خطای مطلق بین مقدار تابع هدف روش هار یعنی J و مقدار تابع هدف جواب تحلیلی یعنی J^* در شکل (۵.۱) نمایش داده شده است.

مثال ۲.۱۰.۱. مساله کنترل بهینه زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \min \quad & J = t_f, \\ \text{subject to} \quad & \\ & \dot{x}_1 = x_2, \\ & \dot{x}_2 = u, \\ & x_1(0) = x_{10} = 1, \quad x_2(0) = x_{20} = 3, \\ & x_1(t_f) = 0, \quad x_2(t_f) = 0, \end{aligned}$$

که در آن کنترل بنگ - بنگ با ماکزیمم و مینیمم کران‌ها به کار رفته است. u متغیر کنترل است و



شکل ۴.۱: منحنی مقادیر متغیرهای کنترل مثال (۱.۱۰.۱)

به صورت $|u(t)| \leq 1$ محدود می‌شود. جواب تحلیلی برای این مساله به صورت زیر است [۲]:

$$\begin{cases} -\frac{t^2}{\gamma} + x_{\psi_0} \cdot t + x_{\psi_0}, & t < t_1, \\ \frac{t^2}{\gamma} - t_f \cdot t + \frac{t_f^2}{\gamma}, & t > t_1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -t + x_{\psi_0}, & t < t_1, \\ t - t_f, & t > t_1, \end{cases}$$

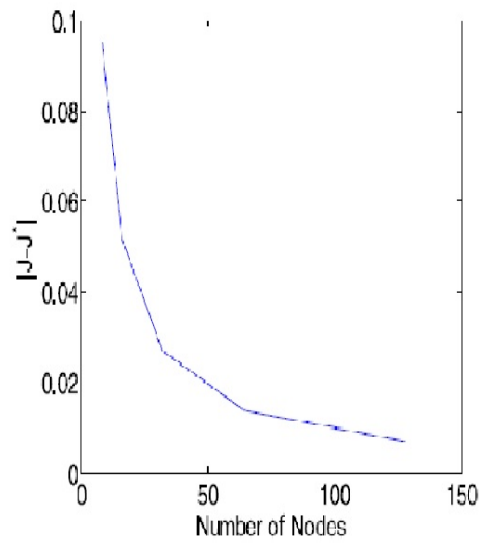
$$\begin{cases} -1, & t < t_1, \\ 1, & t > t_1, \end{cases}$$

که

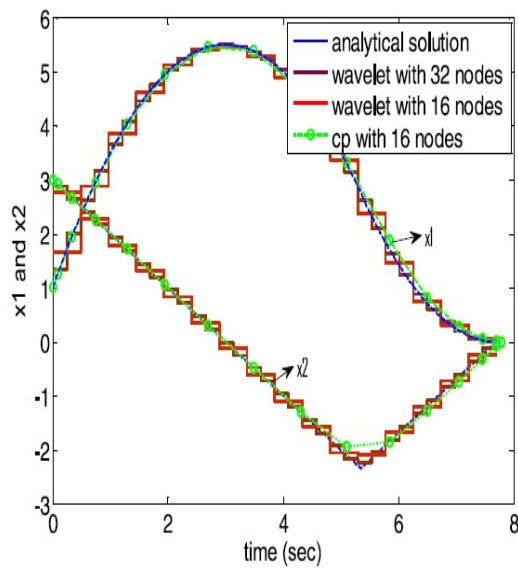
$$t_1 = x_{\psi_0} + \sqrt{0.5x_{\psi_0}^2 + x_{\psi_0}},$$

$$t_f = 2t_1 - x_{\psi_0},$$

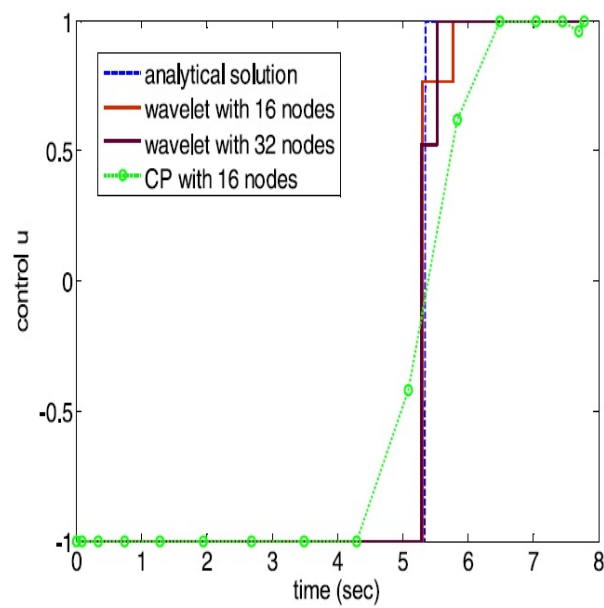
برای به دست آوردن جواب بهینه مساله کنترل بهینه بالا با استفاده از روش گسسته‌سازی هار، نقطه شروع را $(1, 3)^T$ و نقطه انتها را $(0, 0)^T$ در نظر می‌گیریم. جواب‌های به دست آمده برای متغیرهای حالت در شکل (۶.۱) و متغیرهای کنترل در شکل (۷.۱) برای ۱۶ و ۳۲ نقطه کالوکیشن نمایش داده شده است. همچنین خطای مطلق بین تابع هدف جواب تحلیلی مساله و تابع هدف روش موجک هار در شکل (۸.۱) آمده است.



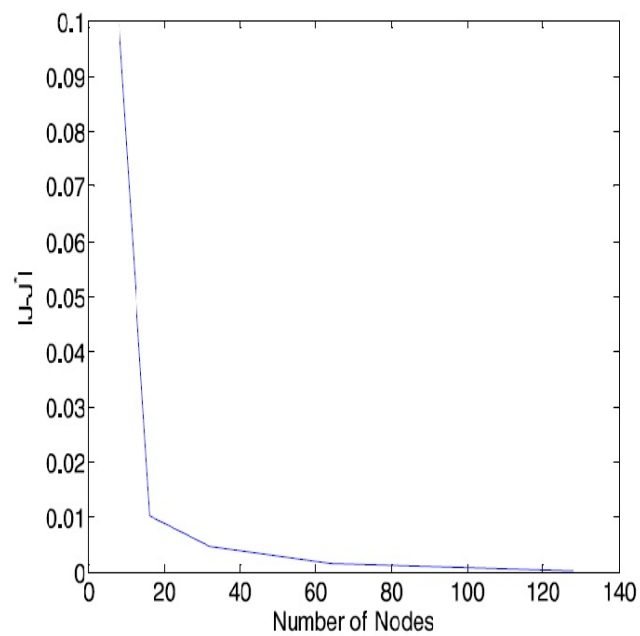
شکل ۵.۱: خطای تابع هدف مثال (۱.۱۰.۱)



شکل ۶.۱: منحنی مسیر مثال (۲.۱۰.۱)



شکل ۷.۱: منحنی مقادیر متغیرهای کنترل مثال (۲.۱۰.۱)



شکل ۸.۱: خطای تابع هدف مثال (۲.۱۰.۱)

فصل ۲

حل مساله کوتاهترین مسیر با استفاده از روش موجک هار

۱.۲ مقدمه

واضح است که هدف مساله کوتاهترین مسیر، یافتن کوتاهترین مسیر از یک مبدأ مشخص به یک مقصد مشخص با مینیمم هزینه زمانی است. مساله کوتاهترین مسیر در یک عرصه وسیعی از علوم و مهندسی شامل مسیریابی وسایل نقلیه در دستگاه‌های حمل و نقل، ترافیک، مسیریابی در شبکه‌های ارتباطات، برنامه‌ریزی مسیر در دستگاه‌های رباتیک و غیره کاربرد دارد. قضیه‌ای از هاردی^۱، لیتل وود^۲ و پولیا^۳ اولین بار برای یافتن مدل تغییرات مساله مشهور کوتاهترین مسیر استفاده شده است. این قضیه جواب مساله کوتاهترین مسیر را با استفاده از برنامه‌ریزی درجه دوم^۴، به دست می‌آورد. حل کردن مساله کوتاهترین مسیر آسان نیست [۶]-[۱۹]. در این فصل مساله کوتاهترین مسیر را در قالب یک مساله حساب تغییرات در نظر می‌گیریم و به حل آن با استفاده از روش عددی موجک هار در نقاط کالوکیشن می‌پردازیم.

۲.۲ فرمول‌بندی مساله

شکل کلی یک مساله کوتاهترین مسیر در قالب یک مساله حساب تغییرات به صورت زیر است:

^۱Hardy

^۲Littlewood

^۳Polya

^۴Quadratic Programming

$$\begin{aligned} \min J &= \int_a^b (1 + \dot{x}^\nu(t))^{\frac{1}{\nu}} dt, \\ \text{subject to} \\ \mathcal{F}_1(t) &\leq x(t) \leq \mathcal{F}_2(t), \quad t \in [a, b], \\ x(a) &= x_0, \quad x(b) = x_1, \end{aligned}$$

که در آن $\mathcal{F}_1(t)$ و $\mathcal{F}_2(t)$ توابع تقریباً همه جا پیوسته هستند. مسیر $x(t)$ تابعی به‌طور پیوسته مشتق پذیر است، که x_0 و x_1 به ترتیب نقاط ابتدایی و انتهایی مسیر هستند، به‌طوری‌که:

$$\mathcal{F}_1(a) \leq x_0 \leq \mathcal{F}_2(a), \quad (۱.۲)$$

$$\mathcal{F}_1(b) \leq x_1 \leq \mathcal{F}_2(b), \quad (۲.۲)$$

که x بردار n بعدی از متغیرهای حالت، \mathcal{F}_1 و \mathcal{F}_2 دو بردار n بعدی از توابع پیوسته و t متغیر زمان است. متغیرهای حالت دارای شرایط مرزی معلوم $x(a) = x_0$ و $x(b) = x_1$ هستند. a زمان اولیه و b زمان نهایی است.

۱.۲.۲ تبدیل بازه

همانطور که در فصل ۲ بیان کردیم توابع هارگویا روی بازه $\tau \in [0, 1]$ تعریف می‌شوند، بنابراین از تغییر متغیر $t = [(t_f - t_0)\tau + t_0]$ استفاده می‌کنیم تا بازه $[t_0, t_f]$ را به بازه $[0, 1]$ تبدیل کنیم. در نتیجه داریم:

$$\min J = \int_a^b (1 + \dot{x}^\nu((t_f - t_0)\tau + t_0))^{\frac{1}{\nu}} d((t_f - t_0)\tau + t_0), \quad (۳.۲)$$

subject to

$$\mathcal{F}_1((t_f - t_0)\tau + t_0) \leq x((t_f - t_0)\tau + t_0) \leq \mathcal{F}_2((t_f - t_0)\tau + t_0), \quad t \in [a, b], \quad (۴.۲)$$

$$x(a) = x_0, \quad x(b) = x_1. \quad (۵.۲)$$

برای ساده کردن دستگاه معادلات (۳.۲) - (۵.۲) قرار می‌دهیم:

$$x((t_f - t_0)\tau + t_0) = y(\tau),$$

همچنین داریم:

$$\dot{x}((t_f - t_0)\tau + t_0) = \frac{dx((t_f - t_0)\tau + t_0)}{dt} = \frac{dx((t_f - t_0)\tau + t_0)}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt}, \quad (۶.۲)$$

$$\implies \dot{x}((t_f - t_0)\tau + t_0) = \frac{dy(\tau)}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt}. \quad (۷.۲)$$

که

$$dt = d((t_f - t_0)\tau + t_0) = (t_f - t_0)d\tau \implies \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{(t_f - t_0)}. \quad (۸.۲)$$

در نتیجه با ادغام رابطه‌های (۸.۲) و (۷.۲) داریم:

$$\dot{x}((t_f - t_0)\tau + t_0) = \frac{\dot{y}(\tau)}{t_f - t_0}. \quad (۹.۲)$$

بنابراین با جایگذاری تبدیلات بالا در سیستم معادلات (۳.۲) - (۵.۲) و با در نظر گرفتن شرایط مرزی، مساله کوتاهترین مسیر به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\min J = (b - a) \int_0^1 \left(1 + \left(\frac{\dot{y}(\tau)}{b - a} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} d\tau, \quad (۱۰.۲)$$

subject to

$$\mathcal{F}_1((t_f - t_0)\tau + t_0) \leq y(\tau) \leq \mathcal{F}_2((t_f - t_0)\tau + t_0), \quad \tau \in [0, 1], \quad (۱۱.۲)$$

$$y(0) = x_0, \quad y(1) = x_1. \quad (۱۲.۲)$$

۳.۲ کالوکیشن مستقیم

۱.۳.۲ گسسته‌سازی هار

در این بخش با استفاده از روش عددی موجک هار مساله کوتاهترین مسیر را به یک مساله برنامه‌ریزی غیرخطی تبدیل می‌کنیم و جواب پیوسته متغیر حالت مساله را به صورت مجموع توابع هار نمایش می‌دهیم. همان‌طور که در فصل دو بیان کردیم بازه‌ی استاندارد در این روش بازه‌ی $[0, 1]$ ، با مجموعه نقاط کالوکیشن به صورت زیر است:

$$\tau_l = \frac{l - 0.5}{K}, \quad l = 1, 2, \dots, K. \quad (۱۳.۲)$$

K به صورت توانی از دو است و با افزایش توان، نقاط کالوکیشن نیز افزایش می‌یابد. نقاط کالوکیشن با فواصل مساوی $\frac{1}{K}$ روی بازه‌ی زمانی $[0, 1]$ قرار دارند. مشتق متغیرهای حالت $y'(\tau)$ را با موجک هار با K نقطه‌ی کالوکیشن به صورت زیر تقریب می‌زنیم:

$$\dot{y}(\tau) \approx C_y^T \Phi(\tau), \quad (۱۴.۲)$$

که در آن

$$C_y^T = [C_{y1}, C_{y2}, \dots, C_{yK}].$$

با استفاده از ماتریس عملگر انتگرال‌گیری P تعریف شده در (۲۱.۱) متغیر حالت $y(\tau)$ به صورت زیر بیان می‌شود:

$$y(\tau) = \int_0^\tau \dot{y}(\tau') d\tau' + y_0 = \int_0^\tau C_y^T \Phi(\tau') d\tau' + y_0 = C_y^T P \Phi(\tau) + y_0.$$

همان‌طور که در فصل ۲ بیان شد و با توجه به روابط (۶۱.۱) هر یک از متغیرها را می‌توانیم در هر نقطه کالوکیشن با استفاده از ضرب بردار ضرایب در ستون متناظر آن در ماتریس هار تقریب بزنیم. در نتیجه داریم:

$$\dot{y}(\tau_l) = C_y^T \Phi(\tau_l), \quad y(\tau_l) = C_y^T P \Phi(\tau_l) + y_0, \quad l = 1, \dots, K. \quad (15.2)$$

۲.۳.۲ برنامه‌ریزی غیرخطی

هنگامی که از روش کالوکیشن هار در این نوع مسائل استفاده می‌کنیم، متغیرهای برنامه‌ریزی غیرخطی مجموعه‌ای شامل بردار ضرایب مجهول متغیرهای حالت به صورت زیر هستند:

$$\tilde{x} = [C_{y1}, C_{y2}, \dots, C_{yK}]^T.$$

بنابراین با جایگذاری $y(\tau)$ در عبارتهای هار، تابع هدف (۱۰.۲) به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$J = (b - a) \int_a^b \left(1 + \left(\frac{C_y^T \Phi(\tau)}{b - a} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} d\tau. \quad (16.2)$$

از آنجا که توابع هار در هر بازه دارای مقادیر ثابت هستند داریم:

$$J = \frac{(b - a)}{K} \sum_{l=1}^K \left(1 + \left(\frac{C_y^T \Phi(\tau_l)}{b - a} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (17.2)$$

همچنین با جایگذاری متغیر حالت $y(\tau)$ به صورت مجموع توابع هار در محدودیت (۱۱.۲) داریم:

$$\mathcal{F}_1((t_f - t_0)\tau + t_0) \leq C_y^T P \Phi(\tau_l) + y_0 \leq \mathcal{F}_1((t_f - t_0)\tau + t_0).$$

طبق رابطه‌ی (۶۸.۱) متغیرهای حالت در زمان اولیه و نهایی می‌توانند به صورت زیر تقریب زده شوند:

$$y_0 = C_y^T P \Phi(\tau_1) + y_0 - \frac{C_y^T \Phi(\tau_1)}{2K},$$

$$y_1 = C_y^T P \Phi(\tau_K) + y_0 + \frac{C_y^T \Phi(\tau_K)}{2K}.$$

با جایگذاری‌های تبدیلات بالا مساله کوتاهترین مسیر در این فصل به یک مساله برنامه‌ریزی غیرخطی تبدیل می‌شود که با استفاده از نرم‌افزار لینگو ۱۱^۵ و گمز^۶ قابل حل است.

^۵Lingo 11 software

^۶Gams

۴.۲ مثال‌های عددی

در این بخش کارایی روش موجک هار با بررسی سه مثال توضیح داده می‌شود.

مثال ۱.۴.۲. مساله حساب تغییرات

$$\min \int_a^b (1 + \dot{x}^2(t))^{\frac{1}{2}} dt$$

subject to

$$\mathcal{F}_1(t) \leq x(t) \leq \mathcal{F}_2(t), \quad \forall t \in [a, b]$$

$$x(a) = x_0, \quad x(b) = x_1,$$

را در نظر بگیرید، که

$$\mathcal{F}_1(t) = \sin(t - 0.25), \quad \mathcal{F}_2(t) = 1 + \sin(t),$$

$$a = 3, \quad b = 6,$$

$$x_0 = 0.75, \quad x_1 = 0.5.$$

حل:

با استفاده از روش عددی موجک هار و با توجه به مطالبی که در این فصل بیان کردیم مساله حساب تغییرات مثال (۱.۴.۲) به مساله برنامه‌ریزی غیر خطی زیر تبدیل می‌شود:

$$\min J = \frac{1}{K} \sum_{l=1}^K \left(1 + \left(\frac{C_x^T \Phi(\tau_l)}{3} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

subject to

$$\mathcal{F}_1(3\tau_l + 3) \leq C_x^T P \Phi(\tau_l) + 0.75 \leq \mathcal{F}_2(3\tau_l + 3), \quad (18.2)$$

$$C_x^T P \Phi(\tau_1) + 0.75 - \frac{C_x^T \Phi(\tau_1)}{2K} = 0.75,$$

$$C_x^T P \Phi(\tau_K) + 0.75 + \frac{C_x^T \Phi(\tau_K)}{2K} = 0.5,$$

$$l = 1 \dots K.$$

اگر در اینجا به‌طور مثال $K = 4$ قرار دهیم خواهیم داشت:

$$\tau_1 = \frac{1}{\lambda}, \quad \tau_2 = \frac{2}{\lambda}, \quad \tau_3 = \frac{3}{\lambda}, \quad \tau_4 = \frac{4}{\lambda}.$$

همچنین متغیرهای حالت $x(\tau)$ و مشتق متغیرهای حالت $\dot{x}(\tau)$ برای $K = 4$ به‌صورت زیر تقریب زده

می‌شوند.

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(\tau_1) &= a_1 + a_2 + a_3, \\
 \dot{x}(\tau_2) &= a_1 + a_2 - a_3, \\
 \dot{x}(\tau_3) &= a_1 - a_2 + a_4, \\
 \dot{x}(\tau_4) &= a_1 - a_2 - a_4, \\
 x(\tau_1) &= \frac{1}{\lambda}a_1 + \frac{1}{\lambda}a_2 + \frac{1}{\lambda}a_3 + 0.75, \\
 x(\tau_2) &= \frac{2}{\lambda}a_1 + \frac{2}{\lambda}a_2 + \frac{2}{\lambda}a_3 + 0.75, \\
 x(\tau_3) &= \frac{6}{\lambda}a_1 + \frac{2}{\lambda}a_2 + \frac{1}{\lambda}a_4 + 0.75, \\
 x(\tau_4) &= \frac{5}{\lambda}a_1 + \frac{1}{\lambda}a_2 + \frac{1}{\lambda}a_4 + 0.75.
 \end{aligned} \tag{۱۹.۲}$$

حال با قرار دادن مقادیر $x(\tau)$ و $\dot{x}(\tau)$ به صورت روابط (۱۹.۲) در مساله (۱۸.۲)، سیستم به یک مساله بهینه‌سازی غیرخطی به صورت زیر تبدیل می‌شود:

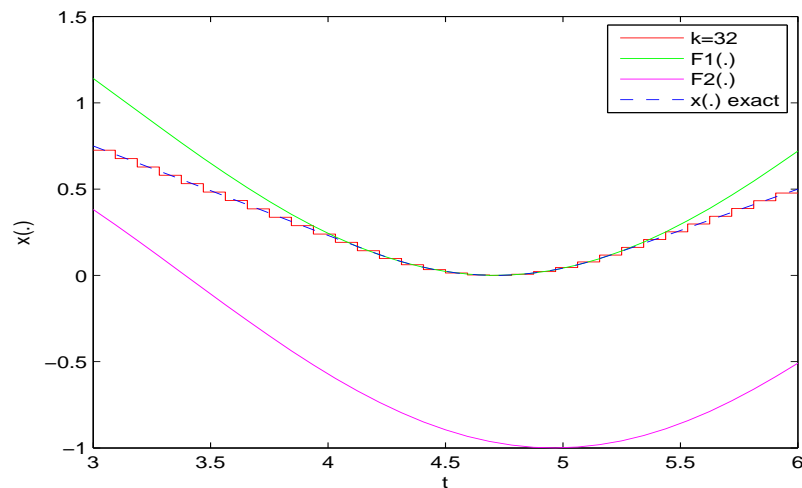
$$\begin{aligned}
 \min J &= \frac{2}{\sqrt{e}} \left(\left(1 + \frac{(a_1 + a_2 + a_3)^2}{9} \right)^{\frac{1}{2}} + \left(1 + \frac{(a_1 + a_2 - a_3)^2}{9} \right)^{\frac{1}{2}} \right. \\
 &\left. + \left(1 + \frac{(a_1 - a_2 + a_4)^2}{9} \right)^{\frac{1}{2}} + \left(1 + \frac{(a_1 - a_2 - a_4)^2}{9} \right)^{\frac{1}{2}} \right),
 \end{aligned}$$

subject to

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\lambda}a_1 + \frac{1}{\lambda}a_2 + \frac{1}{\lambda}a_3 + 0.75 &\leq \sin\left(3 \times \frac{1}{\lambda} + 3\right) + 1, \\
 \frac{2}{\lambda}a_1 + \frac{2}{\lambda}a_2 + \frac{1}{\lambda}a_3 + 0.75 &\leq \sin\left(3 \times \frac{2}{\lambda} + 3\right) + 1, \\
 \frac{6}{\lambda}a_1 + \frac{2}{\lambda}a_2 + \frac{1}{\lambda}a_4 + 0.75 &\leq \sin\left(3 \times \frac{6}{\lambda} + 3\right) + 1, \\
 \frac{5}{\lambda}a_1 + \frac{1}{\lambda}a_2 + \frac{1}{\lambda}a_4 + 0.75 &\leq \sin\left(3 \times \frac{5}{\lambda} + 3\right) + 1, \\
 \frac{1}{\lambda}a_1 + \frac{1}{\lambda}a_2 + \frac{1}{\lambda}a_3 + 0.75 &\geq \sin\left(\left(3 \times \frac{1}{\lambda} + 3\right) - 0.25\right), \\
 \frac{2}{\lambda}a_1 + \frac{2}{\lambda}a_2 + \frac{1}{\lambda}a_3 + 0.75 &\geq \sin\left(\left(3 \times \frac{2}{\lambda} + 3\right) - 0.25\right), \\
 \frac{6}{\lambda}a_1 + \frac{2}{\lambda}a_2 + \frac{1}{\lambda}a_4 + 0.75 &\geq \sin\left(\left(3 \times \frac{6}{\lambda} + 3\right) - 0.25\right), \\
 \frac{5}{\lambda}a_1 + \frac{1}{\lambda}a_2 + \frac{1}{\lambda}a_4 + 0.75 &\geq \sin\left(\left(3 \times \frac{5}{\lambda} + 3\right) - 0.25\right), \\
 \frac{1}{\lambda}a_1 + \frac{1}{\lambda}a_2 + \frac{1}{\lambda}a_3 + 0.75 - \frac{a_1 + a_2 + a_3}{\lambda} &= 0.75, \\
 \frac{5}{\lambda}a_1 + \frac{1}{\lambda}a_2 + \frac{1}{\lambda}a_4 + 0.75 + \frac{a_1 - a_2 - a_4}{\lambda} &= 0.5,
 \end{aligned} \tag{۲۰.۲}$$

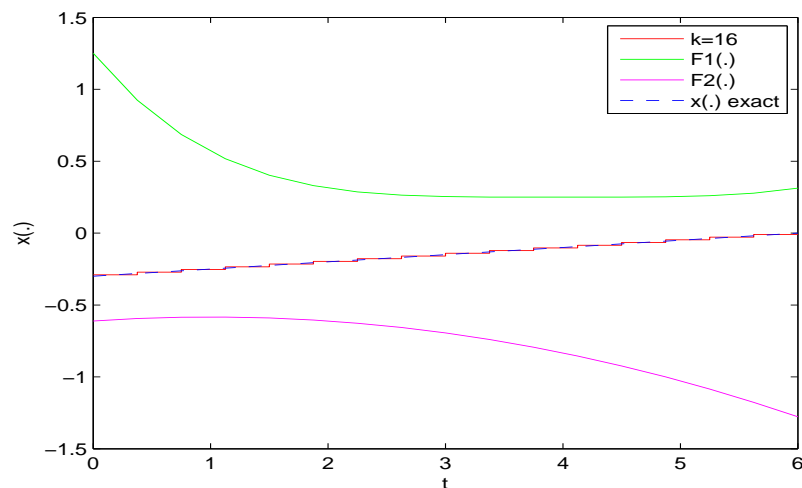
a_i ها متغیر آزاد

در شکل (۱۰.۲) تقریب کوتاهترین مسیر مثال (۱۰.۴.۲) برای $K = 32$ نمایش داده شده است و مقدار عددی به دست آمده برای تابع هدف این مثال، با استفاده از نرم‌افزار گمز ۳/۲۷۸ و مقدار داده شده در [۱۷] برابر ۳/۴۱۹۱ است.



شکل ۱.۲: نمودار کوتاهترین مسیر برای مثال (۱.۴.۲)

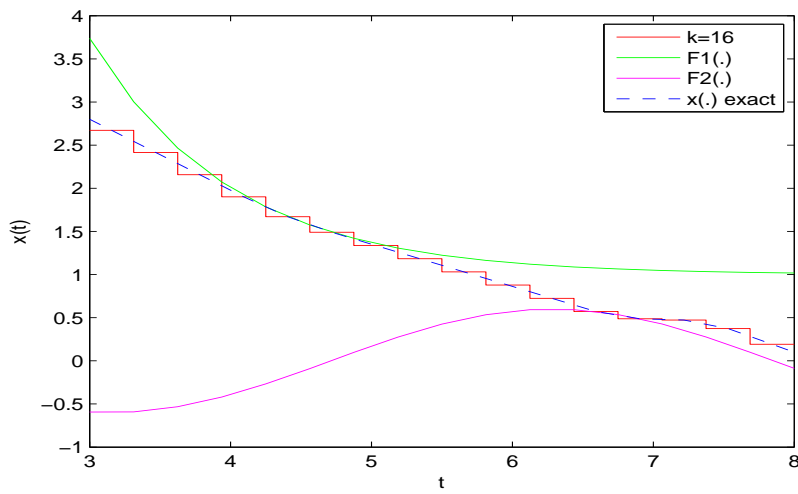
مثال ۲.۴.۲. فرض کنید $\mathcal{F}_1(t) = \frac{(t-4)^4}{4^4} + 0.25$ ، $\mathcal{F}_2(t) = -\frac{((t-1)^2 + 12)}{36} - 0.25$ ، این مساله را با استفاده از روش تقریبی موجک هار برای $K = 16$ حل می‌کنیم مقدار به‌دست آمده برای J برابر 670.74 است و مقدار داده شده در [۱۷] برابر 670.75 است. کوتاهترین مسیر تقریبی به‌دست آمده در شکل (۲.۲) نشان داده شده است.



شکل ۲.۲: نمودار کوتاهترین مسیر برای مثال (۲.۴.۲)

مثال ۳.۴.۲. فرض کنید $\mathcal{F}_1(t) = 55e^{-t} + 1$ ، $\mathcal{F}_2(t) = 0.6 \cos(t)$ ، $a = 3$ ، $b = 8$ ، $x_0 = 2/8$ و $x_1 = 0.1$ هستند. این مساله را با استفاده از روش تقریبی موجک هار برای $K = 16$ حل می‌کنیم. مقدار به‌دست آمده برای J برابر 5439.07 است و مقدار داده شده در [۱۷] برابر 5780.4 است.

کوتاهترین مسیر تقریبی به دست آمده در شکل (۳.۲) نشان داده شده است.



شکل ۳.۲: نمودار کوتاهترین مسیر برای مثال (۳.۴.۲)

فصل ۳

حل مساله بهینه‌سازی مسیر ربات بازوی ماهر با استفاده از روش موجک هار

۱.۳ مقدمه

برنامه‌ریزی مسیر برای ربات بازوی ماهر^۱ ایده جالبی است. رده مهمی از روش‌ها را می‌توانیم در [۱۶] برای حل مساله برنامه‌ریزی مسیر ربات بازوی ماهر بیابیم. تقریباً همه روش‌های معمولی، به‌طور مثال روش‌های پرتابی^۲، حل کردن به‌طریق بهینه‌سازی پارامتر نیمه‌متناهی^۳ [۱۶] و روش گسسته‌سازی^۴ [۸] که برای یافتن جواب تقریبی مسائل کنترل بهینه مرتبط به برنامه‌ریزی مسیر ربات بازوی ماهر استفاده می‌شوند، یک مساله برنامه‌ریزی غیرخطی را به‌وجود می‌آورند که سیستم غیرخطی حاصل، مشکلات جدی را برای حل کردن مسائل ایجاد می‌کند [۱۲]. یک پیشنهاد برای فرار از پیچیدگی محاسباتی روش‌های معمولی، که حاصل وجود توابع غیرخطی در مدل‌بندی مساله است، استفاده از روش عددی موجک هار است که اساس این روش تبدیل یک معادله دیفرانسیل به یک دستگاه غیرخطی در نقاط کالوکیشن است. در انتهای فصل در یک مثال عددی مسیر بهینه نوعی ربات اسکارا^۵ را با استفاده از روش عددی موجک هار به‌دست می‌آوریم.

۱.۱.۳ معرفی ربات اسکارا

اصطلاح اسکارا مخفف (بازوی رباتیک ماهر منعطف و دارای برتری برای مونتاژ^۶) است و برای اولین بار در سال ۱۹۷۹ در ژاپن طراحی و ارائه شد، همان‌طور که از اسم این ربات پیداست این نوع ربات

^۱Robot Manipulators

^۲Shooting Methods

^۳Semi-infinite Parameter Optimization

^۴Method Of Discretization

^۵Scara

^۶Selective Compliance Articulated Assembly Robot Arm

برای عملیات مونتاژ استفاده می‌شود که مهمترین و نخستین کاربرد ربات اسکارا است. همچنین ربات اسکارا یکی از بازوهایی است که کاربردهای فراوانی در صنعت، آزمایشگاه و اکتشاف دارد. اسکارا یک ساختار (RRP^۷)، یعنی مفصل اول و دوم دارای حرکت دورانی بوده و مفصل سوم حرکت خطی دارد. ربات‌های اسکارا دارای قدرت مانور بسیاری در صفحه XY هستند به همین علت کاملاً مناسب مونتاژ کاری می‌باشند. از این ربات‌ها علاوه بر کارهای مونتاژ در کارهای بلند کردن و قرار دادن (جابه جایی جسمی از محلی به محل دیگر) نیز بهره برداری می‌شود. ربات اسکارا نمونه بارز از ربات "بردار و بگذار"^۸ است و هنگامی که با یک سیستم بینایی ترکیب می‌شود می‌تواند با سرعتی بالا محصولات را از روی تسمه نقاله برداشته و به داخل جعبه بسته‌بندی منتقل نماید. ساختمان مفصل ربات به آن اجازه می‌دهد تا نسبت به نیروهای وارده در صفحه افقی انعطاف‌پذیر باشند. اهمیت این موضوع در کاربرد هایی است که باید قطعات در مکان هایی بسیار تنگ، با دقت جاسازی شوند. ویژگی اصلی ربات اسکارا اتصال دو رابط لولایی پی در پی با محورهای موازی، شبیه دست انسان می‌باشد. به همین دلیل به آن ربات هنرمند^۹ نیز می‌گویند. این ویژگی به ربات این قدرت را می‌دهد که در مساحتی محدود، باز جمع شود و به سرعت خود را از نقطه‌ای به نقطه‌ی دیگر برساند. ربات اسکارا مانند شکل (۱.۳) تنها با یک پایه محکم شده، و برای نصب به جای کمی نیاز دارد و براحتی آماده کار می‌شود.



شکل ۱.۳: نوعی ربات اسکارا

^۷Relvolute Relvolute Prismatic

^۸Remove and Let

^۹Robot Artist

۲.۳ تعریف و فرمول‌بندی مساله

شکل کلی مساله بهینه‌سازی مسیر ربات بازوی ماهر در قالب یک مساله کنترل بهینه، به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود [۱۶]:

$$\min I(q(\cdot), u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_f} f_0(t, q(t), u(t)) dt, \quad (1.3)$$

subject to

$$M(q(t))\ddot{q}(t) = u(t) + \chi(q(t), \dot{q}(t)), \quad (2.3)$$

$$q(t_0) = q_0, \quad \dot{q}(t_0) = \dot{q}_0, \quad (3.3)$$

$$q(t_f) = q_f, \quad \dot{q}(t_f) = \dot{q}_f, \quad (4.3)$$

$$q_{\min} \leq q \leq q_{\max}, \quad (5.3)$$

$$\dot{q}_{\min} \leq \dot{q} \leq \dot{q}_{\max}, \quad (6.3)$$

$$u_{\min} \leq u \leq u_{\max}. \quad (7.3)$$

که در آن n تعداد مفصل‌ها، $M_{n \times n}$ ماتریس نامنفردی از مولفه‌های اینرسی، χ نتایج حاصل از نیروهای گریز از مرکز، گرانشی و اصطکاک است، $u \in \mathbb{R}^n$ بردار کنترل گشتاور دورانی مفصل‌ها را نشان می‌دهد که مقادیر آن بین دو بردار u_{\min} و u_{\max} قرار دارد. همچنین $q = (q_1, \dots, q_n)^T$ مختصات تعمیم‌یافته هستند، به طوری که q_i زاویه بازوی i ام ربات با امتداد بازوی $(i-1)$ ام است و مقداری میان q_{\min} و q_{\max} اختیار می‌کنند، $\dot{q} \in \mathbb{R}^n$ بردار سرعت مفصل‌های ربات است که مقداری بین دو بردار \dot{q}_{\min} و \dot{q}_{\max} اختیار می‌کند و $\ddot{q} \in \mathbb{R}^n$ بردار شتاب نقطه را نمایش می‌دهد. برای اینکه مساله (۱.۳) - (۷.۳) به یک سیستم مرتبه اول تبدیل شود تعریف می‌کنیم:

$$\dot{q}(t) = s(t), \quad t \in [t_0, t_f].$$

با جایگذاری این تغییر متغیر در رابطه (۲.۳) و ضرب دو طرف این رابطه در وارون ماتریس نامنفرد $M_{n \times n}$ داریم:

$$\dot{s}(t) = M^{-1}(q(t))u(t) + M^{-1}(q(t))\chi(q(t), s(t)). \quad (8.3)$$

در نتیجه مساله (۱.۳) - (۷.۳) به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\min I(q(\cdot), u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_f} f_0(t, q(t), u(t)) dt, \quad (9.3)$$

subject to

$$\dot{q}(t) = s(t), \quad (10.3)$$

$$\dot{s}(t) = M^{-1}(q(t))u(t) + M^{-1}(q(t))\chi(q(t), s(t)), \quad (11.3)$$

$$q(t_0) = q_0, \quad s(t_0) = s_0, \quad (12.3)$$

$$q(t_f) = q_f, \quad s(t_f) = s_f, \quad (13.3)$$

$$q_{\min} \leq q \leq q_{\max}, \quad (14.3)$$

$$s_{\min} \leq s \leq s_{\max}, \quad (15.3)$$

$$u_{\min} \leq u \leq u_{\max}. \quad (16.3)$$

هدف مساله بهینه سازی مسیر پیدا کردن مسیر زمان بهینه است که ربات باید در آن حرکت کند تا از یک نقطه ابتدایی به یک نقطه نهایی تعیین شده (بطور مثال جابجایی اجسام) برسد. در این مسیر بهینه مفاصل ربات باید حرکت نقطه به نقطه ای را دنبال کنند که مختصات دکارتی این نقاط با استفاده از ماتریس زیر محاسبه می شوند [۲۳]:

$$A_j = T_1 T_2 T_3 \cdots T_j,$$

که در آن A_j و T_j ماتریس های تبدیل مشابه 4×4 هستند که به صورت زیر تعریف می شوند:

$$T_j = \begin{pmatrix} \cos \theta_j & -\sin \theta_j & 0 & a_j \cos \theta_j \\ \sin \theta_j & \cos \theta_j & 0 & a_j \sin \theta_j \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & 0 & a_{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

در ماتریس A_j مولفه های (a_{14}, a_{24}) مختصات دکارتی یعنی $(x, y)^T$ نقطه واصل z ام را نسبت به مبدا مختصات نشان می دهد و θ_j زاویه های بین نقاط واصل ربات یعنی q_j ها هستند که در اینجا با استفاده از روش موجک هار محاسبه می شوند.

۱.۲.۳ تبدیل بازه

همان طور که در فصل ۲ اشاره کردیم توابع هار در بازه ی $(0, 1)$ تعریف شده اند، حال برای تبدیل بازه ی $[t_0, t_f]$ به بازه ی $(0, 1)$ از تغییر متغیر $t = [(t_f - t_0)\tau + t_0]$ استفاده می کنیم و این تغییر متغیر را در

مساله (۹.۳) - (۱۶.۳) قرار می‌دهیم در نتیجه داریم:

$$\min I(q(\cdot), u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_f} f_0 \left(((t_f - t_0)\tau + t_0), q((t_f - t_0)\tau + t_0), u((t_f - t_0)\tau + t_0) \right) d((t_f - t_0)\tau + t_0), \quad (17.3)$$

subject to

$$\dot{q}((t_f - t_0)\tau + t_0) = s((t_f - t_0)\tau + t_0) \quad (18.3)$$

$$\begin{aligned} \dot{s}((t_f - t_0)\tau + t_0) &= M^{-1}(q((t_f - t_0)\tau + t_0))u((t_f - t_0)\tau + t_0) \\ &+ M^{-1}(q((t_f - t_0)\tau + t_0))\chi(q((t_f - t_0)\tau + t_0), s((t_f - t_0)\tau + t_0)), \end{aligned} \quad (19.3)$$

$$q(t_0) = q_0, \quad s(t_0) = s_0, \quad (20.3)$$

$$q(t_f) = q_f, \quad s(t_f) = s_f, \quad (21.3)$$

$$q_{\min} \leq q \leq q_{\max}, \quad (22.3)$$

$$s_{\min} \leq s \leq s_{\max}, \quad (23.3)$$

$$u_{\min} \leq u \leq u_{\max}, \quad (24.3)$$

حال برای ساده کردن مساله (۱۷.۳) - (۲۴.۳) تعریف می‌کنیم:

$$q(t) = q((t_f - t_0)\tau - t_0) = Q(\tau), \quad (25.3)$$

$$s(t) = s((t_f - t_0)\tau - t_0) = S(\tau), \quad (26.3)$$

$$u(t) = u((t_f - t_0)\tau + t_0) = U(\tau). \quad (27.3)$$

از طرفی داریم:

$$\begin{aligned} \dot{q}((t_f - t_0)\tau - t_0) &= \frac{dq((t_f - t_0)\tau - t_0)}{dt} = \frac{dq((t_f - t_0)\tau - t_0)}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt}, \\ \implies \dot{q}((t_f - t_0)\tau - t_0) &= \frac{dQ(\tau)}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt}. \end{aligned} \quad (28.3)$$

$$\begin{aligned} \dot{s}((t_f - t_0)\tau - t_0) &= \frac{ds((t_f - t_0)\tau - t_0)}{dt} = \frac{ds((t_f - t_0)\tau - t_0)}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt}, \\ \implies \dot{s}((t_f - t_0)\tau - t_0) &= \frac{dS(\tau)}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt}. \end{aligned} \quad (29.3)$$

همچنین داریم:

$$dt = (t_f - t_0)d\tau \implies \frac{d\tau}{dt} = (t_f - t_0), \quad (30.3)$$

حال با جایگذاری رابطه (۳۰.۳) در رابطه‌های (۲۸.۳) و (۲۹.۳) نتیجه می‌شود:

$$\dot{q}((t_f - t_0)\tau - t_0) = \frac{\dot{Q}(\tau)}{(t_f - t_0)}. \quad (31.3)$$

$$\dot{s}((t_f - t_0)\tau - t_0) = \frac{\dot{S}(\tau)}{(t_f - t_0)}. \quad (32.3)$$

بنابراین با جایگذاری تبدیلات بالا در مساله (۱۷.۳)-(۲۴.۳) مساله کنترل بهینه زیر به دست می‌آید:

$$\min I(Q(\cdot), U(\cdot)) = (t_f - t_0) \int_0^1 d\tau \quad (۳۳.۳)$$

subject to

$$\dot{Q}(\tau) = (t_f - t_0)S(\tau), \quad (۳۴.۳)$$

$$\dot{S}(\tau) = (t_f - t_0) \left(M^{-1}(Q(\tau))U(\tau) + M^{-1}(Q(\tau))\chi(Q(\tau), S(\tau)) \right), \quad (۳۵.۳)$$

$$Q(0) = Q_0, S(0) = S_0, \quad (۳۶.۳)$$

$$Q(1) = Q_f, S(1) = S_f, \quad (۳۷.۳)$$

$$q_{\min} \leq Q(\tau) \leq q_{\max}, \quad (۳۸.۳)$$

$$s_{\min} \leq S(\tau) \leq s_{\max}, \quad (۳۹.۳)$$

$$u_{\min} \leq U(\tau) \leq u_{\max}, \quad (۴۰.۳)$$

$$(۴۱.۳)$$

۳.۳ کالوکیشن مستقیم

۱.۳.۳ گسسته‌سازی هار

در این بخش چگونگی تقریب توابع با موجک هار و ماتریس عملگر انتگرال‌گیری متناظر با آن را توضیح خواهیم داد. مشتق متغیر حالت $\dot{Q}(\tau)$ ، مشتق متغیر حالت $\dot{S}(\tau)$ و متغیر حالت $U(\tau)$ را با موجک هار با K نقطه کالوکیشن به صورت زیر می‌توانیم تقریب بزنیم:

$$\begin{cases} \dot{Q}(\tau) \approx C_Q^T \Phi(\tau), \\ \dot{S}(\tau) \approx C_S^T \Phi(\tau), \\ U(\tau) \approx C_U^T \Phi(\tau), \end{cases} \quad (۴۲.۳)$$

که

$$\begin{cases} C_Q^T = [C_{Q1}, C_{Q2}, \dots, C_{QK}], \\ C_S^T = [C_{S1}, C_{S2}, \dots, C_{SK}], \\ C_U^T = [C_{U1}, C_{U2}, \dots, C_{UK}], \end{cases}$$

با استفاده از ماتریس عملگر انتگرال‌گیری P تعریف شده در بخش (۳.۷.۱) متغیر حالت $Q(\tau)$ و $S(\tau)$ به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{aligned} Q(\tau) &= \int_0^\tau \dot{Q}(\tau') d\tau' + Q_0 = \int_0^\tau C_Q^T \Phi(\tau') d\tau' + Q_0 = C_Q^T P \Phi(\tau) + Q_0, \\ S(\tau) &= \int_0^\tau \dot{S}(\tau') d\tau' + S_0 = \int_0^\tau C_S^T \Phi(\tau') d\tau' + S_0 = C_S^T P \Phi(\tau) + S_0. \end{aligned} \quad (۴۳.۳)$$

همچنین با توجه به این مطلب که می‌توانیم متغیرها را در نقاط کالوکیشن با استفاده از ضرب داخلی بردار ضرایب در بردار ستونی متناظر آن در ماتریس هار تقریب بزینیم، داریم:

$$\begin{cases} \dot{Q}(\tau_l) = C_Q^T \Phi(\tau_l), \\ \dot{S}(\tau_l) = C_S^T \Phi(\tau_l), \\ U(\tau_l) = C_U^T \Phi(\tau_l), \\ Q(\tau_l) = C_Q^T P \Phi(\tau_l) + Q_0, \\ S(\tau_l) = C_S^T P \Phi(\tau_l) + S_0. \end{cases} \quad (۴۴.۳)$$

که در آن $l = 1, 2, \dots, K$ است.

۲.۳.۳ برنامه‌ریزی غیرخطی

هنگامی که از روش کالوکیشن هار در مسائل کنترل بهینه استفاده می‌کنیم، متغیرهای برنامه‌ریزی غیر خطی مجموعه‌ای شامل بردار ضرایب مجهول از متغیرهای حالت و متغیرهای کنترل به صورت زیر هستند:

$$\tilde{x} = [C_{Q1}, C_{Q2}, \dots, C_{QK}, C_{S1}, C_{S2}, \dots, C_{SK}, C_{U1}, C_{U2}, \dots, C_{UK}]^T.$$

با جایگذاری متغیرهای حالت $Q(\tau)$ و $S(\tau)$ و متغیر کنترل $u(\tau)$ به صورت عبارتهای هار (۴۴.۳) در رابطه‌های (۳۴.۳) و (۳۵.۳) داریم:

$$\begin{aligned} C_Q^T \Phi(\tau_l) &= (t_f - t_0)(C_S^T P \Phi(\tau_l) + S_0), \\ C_S^T \Phi(\tau_l) &= (t_f - t_0) \left(M^{-1} (C_Q^T P \Phi(\tau_l) + Q_0) (C_U^T \Phi(\tau_l)) + \right. \\ &\quad \left. M^{-1} (C_Q^T P \Phi(\tau_l) + Q_0) \chi (C_Q^T P \Phi(\tau_l) + Q_0, C_S^T P \Phi(\tau_l) + S_0) \right). \end{aligned} \quad (۴۵.۳)$$

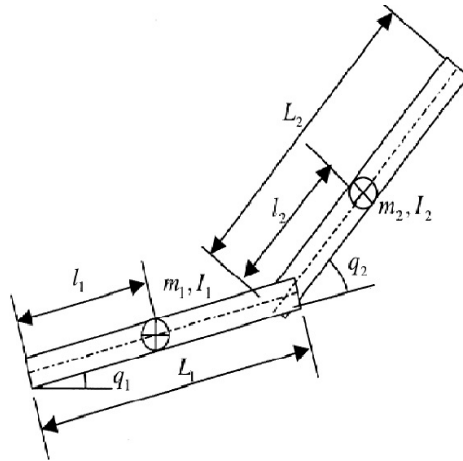
همچنین متغیرهای حالت در زمان اولیه و نهایی می‌توانند به صورت زیر تقریب زده شوند:

$$\begin{aligned} Q_0 &= Q(\tau_1) - \frac{\dot{Q}(\tau_1)}{2K}, & Q_f &= Q(\tau_K) + \frac{\dot{Q}(\tau_K)}{2K}, \\ S_0 &= S(\tau_1) - \frac{\dot{S}(\tau_1)}{2K}, & S_f &= S(\tau_K) + \frac{\dot{S}(\tau_K)}{2K}. \end{aligned} \quad (۴۶.۳)$$

با این روش مساله بهینه‌سازی مسیر ربات بازوی ماهر به یک مساله بهینه‌سازی غیرخطی تبدیل می‌شود که با استفاده از نرم‌افزار لینگو ۱۱ و گمز قابل حل است.

۴.۳ مثال عددی

در این بخش به حل یک مثال عددی از مساله بهینه‌سازی مسیر ربات بازوی ماهر از نوع اسکارا که در شکل (۲.۳) نمایش داده شده است، با استفاده از موجک هار می‌پردازیم. حرکت بازوی ماهر با استفاده از یک تابع کنترل مناسب مانند نیروی گشتاوری برای هر نقطه کنترل می‌شود. به‌طور کلی سیستم حاکم



شکل ۲.۳: نوعی ربات اسکارای دو لینکی در صفحه دکارتی

بر حرکت این نوع ربات‌ها می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$\begin{cases} \ddot{q}_1(t) = \Upsilon [2\delta(t)M_{22}\dot{q}_1(t)\dot{q}_2(t) + \\ \delta(t)M_{22}\dot{q}_2^2(t) + \delta(t)M_{12}\dot{q}_1^2(t) + M_{22}u_1(t) - M_{12}u_2(t)], \\ \ddot{q}_2(t) = \Upsilon [-2\delta(t)M_{12}\dot{q}_1(t)\dot{q}_2(t) - \delta(t)M_{11}\dot{q}_1^2(t) + \delta(t)M_{12}\dot{q}_2^2(t) + \\ M_{11}u_2(t) - M_{12}u_1(t)], \end{cases} \quad (۴۷.۳)$$

که در آن $q = (q_1, q_2)^T$ مختصات تعمیم‌یافته هستند، به طوری که q_1 زاویه‌ی بازوی اول ربات با مبدا مختصات و q_2 زاویه‌ی بازوی دوم ربات با امتداد بازوی اول است [۸]. همچنین داریم:

$$\Upsilon = \frac{1}{M_{11}M_{22} - M_{12}^2},$$

$$\delta(t) = m_2 L_1 l_2 \sin(q_2(t)).$$

که در آن M_{ij} ، $i, j = 1, 2$ ، آرایه‌های ماتریس گشتاور اینرسی هستند که می‌توانند به صورت زیر تعیین شوند:

$$\begin{cases} M_{11} = I_1 + I_2 + m_1 l_1^2 + m_2 (L_1^2 + l_2^2 + 2L_1 l_2 \cos(q_2(t))), \\ M_{12} = M_{21} = I_2 + m_2 l_2^2 + m_2 L_1 l_2 \cos(q_2(t)), \\ M_{22} = I_2 + m_2 l_2^2, \end{cases}$$

همچنین I_1 و I_2 مقادیر گشتاور اینرسی و m_1 و m_2 و L_1 و L_2 به ترتیب جرم و طول بازوهای ربات مورد نظر هستند. جدول (۱.۳) ویژگی‌های فیزیکی ربات اسکارای مورد نظر را نشان می‌دهد. همچنین شرایط نهایی و ابتدایی برای نقاط اتصال ربات در جدول (۲.۳) داده شده است. در اینجا مساله یافتن مسیر زمان بهینه است. شکل (۴.۳) توابع کنترل گشتاوری بهینه‌ی تقریبی حاصل از حل مساله را نشان می‌دهد. نمودار شکل (۳.۳) و شکل (۵.۳) به ترتیب زوایا و سرعت بهینه‌ی نقاط واصل ربات را نمایش

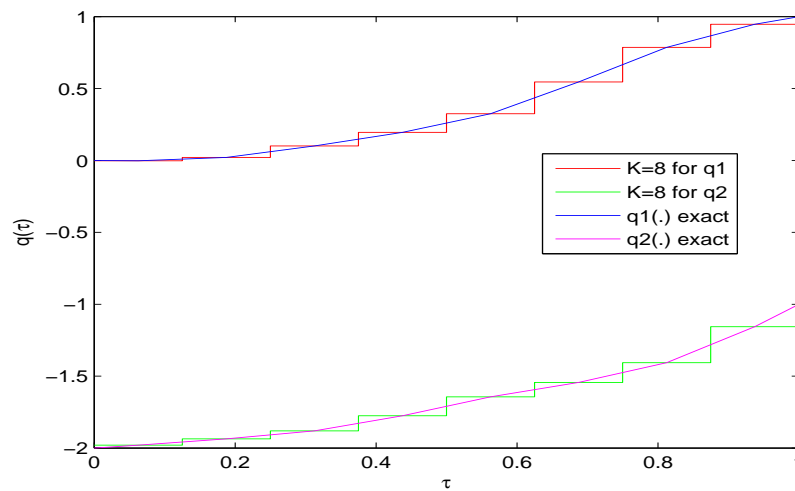
مقدار	پارامتر
$[0/5, 0/5]$	پارامتر $[m_1, m_2], (kg)$
$[0/4, 0/4]$	طول نقاط $[L_1, L_2], (m)$
$[0, 35]$	مولفه اینرسی نقاط $[I_1, I_2], (kgm^2)$
$[-15, 15]$	دامنه کنترل توابع برای دو نقطه $[u_{min}, u_{max}]$

جدول ۱۰.۳: ویژگی‌های ربات بازوی مکانیکی ماهر از نوع اسکارا

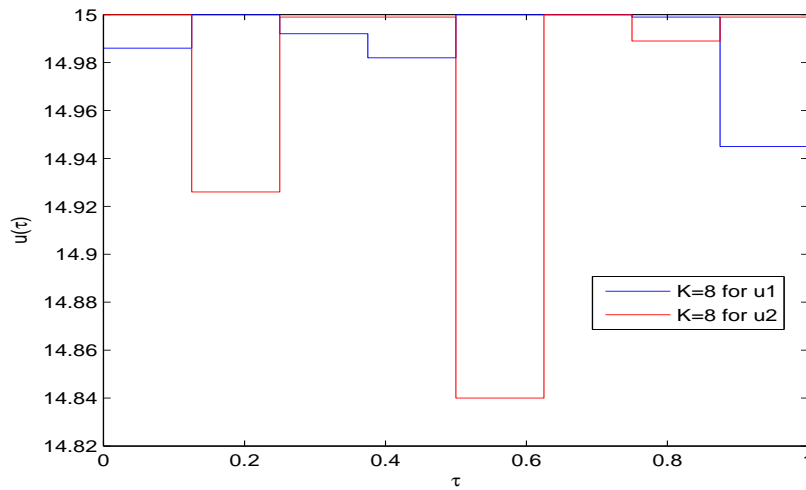
$q_{max}^T, (rad)$	$q_{min}^T, (rad)$	
$[1/00, -1/00]$	$[0/00, -2/00]$	شرایط مرزی

جدول ۲۰۳: شرایط ابتدایی و انتهایی

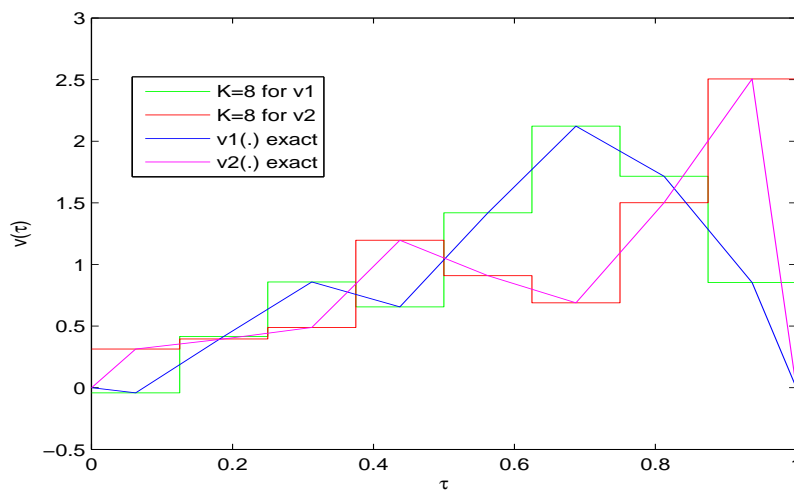
می‌دهند. همچنین مسیر بهینه شبیه‌سازی شده ربات بازوی ماهر را می‌توانیم در شکل (۶.۳) ببینیم. زمان بهینه‌ی حاصل برای این مساله $(t^* = 3/216)$ می‌باشد.



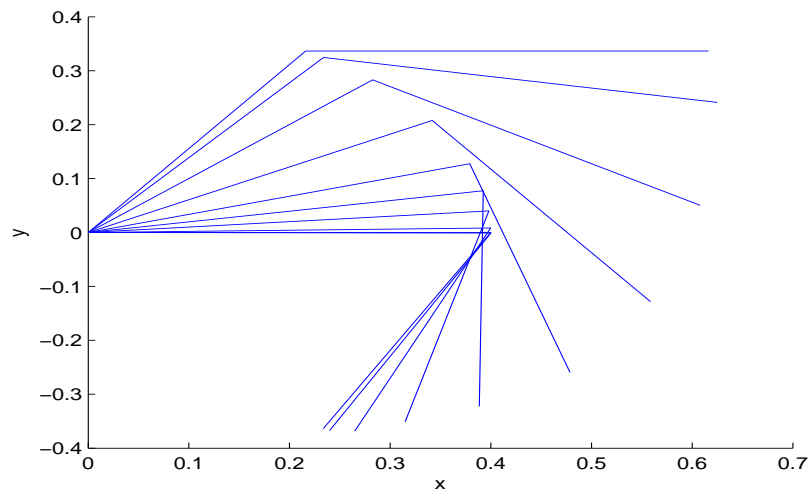
شکل ۳.۳: زوایای تقریبی به‌دست آمده برای نقاط اتصال بازوهای نوعی ربات اسکارای دو لینکی



شکل ۴.۳: کنترل گشتاور های به دست آمده برای نقاط اتصال بازوهای نوعی ربات اسکارای دو لینکی



شکل ۵.۳: سرعت تقریبی به دست آمده برای نقاط اتصال بازوهای نوعی ربات اسکارای دو لینکی



شکل ۶.۳: حرکت شبیه‌سازی شده بازوهای نوعی ربات اسکارای دو لینکی

نتایج

مزایای روش موجک هار عبارتند از:

- ماتریس هار و معکوس آن درایه‌های صفر زیادی دارند و در روش موجک هار از این ماتریس‌ها برای تقریب متغیرهای حالت و کنترل استفاده می‌شود.
- روش تقریبی موجک هار ساختار محاسباتی ساده‌ای دارد.
- کاربرد حقیقی بسیار خوبی در مسائل کنترل بهینه دارد، به طوری که بازه $(0, 1]$ را به زیربازه‌هایی با طول یکسان تقسیم می‌کند و توابع را به طور ثابت در هر زیربازه تقریب می‌زند. بنابراین در این روش پیچیدگی محاسبات کاهش می‌یابد.
- با افزایش نقاط کالوکیشن سرعت همگرایی افزایش می‌یابد و جواب تقریبی به جواب دقیق مساله نزدیک می‌شود.

پیشنهاداتی برای کارهای آینده:

- استفاده این روش در حل مسائل بهینه‌سازی مسیر ربات بازوی ماهر با مانع،
- کاربرد موجک در مسائل طراحی راکتور در شیمی.

مراجع

- [1] F. Narcowich, A. Boggess, *A first course in wavelets with fourier analysis prentice-hall*, Englewood Cliffs, NJ (2001).
- [2] D. Benson, *A gauss pseudospectral transcription for optimal control*, Ph.D. thesis, Massachusetts Institute of Technology, 2005.
- [3] A. E. Bryson, *Applied optimal control: optimization, estimation and control*, CRC Press, 1975.
- [4] C.H. Hsiao, C.F. Chen, *Haar wavelet method for solving lumped and distributed-parameter systems*, Control Theory and Applications, IEE Proceedings-, vol. 144, IET, 1997, pp. 87–94.
- [5] J. J. Craig, *Introduction to robotics: mechanics and control*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, MA (1989), 211–215.
- [6] M. Westcott, D.J. Gates, *Solar cars and variational problems equivalent to shortest paths*, SIAM journal on control and optimization **34** (1996), no. 2, 428–436.
- [7] A. Graham, D.N. Burghes, *Introduction to control theory, including optimal control*, (1980).
- [8] T. Furukawa, *Time-subminimal trajectory planning for discrete non-linear systems*, Engineering optimization **34** (2002), no. 3, 219–243.

- [9] P. G. Howlett, *A markov model for the stochastic optimal control of a solar powered car*, Springer, 2001.
- [10] M. Razzaghi, H.R. Marzban, *Rationalized haar approach for nonlinear constrained optimal control problems*, Applied Mathematical Modelling **34** (2010), no. 1, 174–183.
- [11] R.V. Gamkrelidze E. Mishchenko L.S. Pontryagin, V.G. Boltyanskii, *The mathematical theory of optimal processes (international series of monographs in pure and applied mathematics)*, Interscience, New York (1962).
- [12] C. Shetty, M. Bazaraa, H. Sherali, *Nonlinear programming: theory and algorithms.*, John Wiley&Sons, New York.
- [13] Y. Kobayashi, M. Ohkita, *An application of rationalized haar functions to solution of linear differential equations*, Circuits and Systems, IEEE Transactions on **33** (1986), no. 9, 853–862.
- [14] J. Nazarzadeh, M. Razzaghi, *Walsh functions*, Wiley Encyclopedia of Electrical and Electronics Engineering (1999), no. 23, 429–440.
- [15] Y. Ordokhani, M. Razzaghi, *Solution of differential equations via rationalized haar functions*, Mathematics and computers in simulation **56** (2001), no. 3, 235–246.
- [16] G. Gruebel, M. Schlemmer, *Real-time collision-free trajectory optimization of robot manipulators via semi-infinite parameter optimization*, The International Journal of Robotics Research **17** (1998), no. 9, 1013–1021.
- [17] A.R. Nazemi, M. Zamirian, M.H. Farahi, *An applicable method for solving the shortest path problems*, Applied mathematics and computation **190** (2007), no. 2, 1479–1486.
- [18] R.P. Paul, *Robot manipulators: mathematics, programming, and control, 1981*, MIT Press **28**, 307–316.

-
- [19] P. J. Pudney, *Optimal energy management for solar-powered cars*, University of South Australia, 2000.
- [20] J. E. Cochran, R. Dai, *Wavelet collocation method for optimal control problems*, Journal of optimization theory and applications **143** (2009), no. 2, 265–278.
- [21] J.J. Reis, R.T. Lynch, *Haar transform image coding*, Proceedings of the conference on national telecommunication, Dallas, TX, 1976, pp. 44.3–1–44.3.
- [22] J.E. Rubio, *Control and optimization: The linear treatment of non-linear problems. 1986*.
- [23] X. Y. Jasbir, S. Arora Karim Abdel-Malek *Optimization-based motion prediction of mechanical systems: sensitivity analysis*, Structural and Multidisciplinary Optimization **37** (2009), no. 6, 595–608.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Mesurable	اندازه‌پذیر
Locally Integrable	انتگرال‌پذیر موضعی
Lebesgue Integral	انتگرال لبگ
Manipulators	بازوی ماهر
Trajectory Optimization	بهینه‌سازی مسیر
Characteristic Function	تابع مشخصه
Laplace Transformation	تبدیل لاپلاس
Variation of Variable	تغییر متغیر
Haar Functions	توابع هار
Rationalized Haar Functions	توابع هار گویا
Variational Calculus	حساب تغییرات
Quadratic	درجه دوم
Robot	ربات
Angle	زاویه
Terminal Condition	شرایط نهایی
Initial Condition	شرایط ابتدایی
Scalar Multiplication	ضرب اسکالر
Complex Number	عدد مختلط
Neutral Element	عضو خنثی
Unique Element	عضو منحصر بفرد
Identity Element	عضو همانی
Vector Space	فضای برداری
State Space	فضای حالت
Hilbert Space	فضای هیلبرت
Terminal Inequality Constrain	قید نامساوی نهایی

Controllability	کنترل‌پذیری
Group	گروه
Two-sided Laplace	لاپلاس دو طرفه
Inverse Laplace	لاپلاس معکوس
Operational Integration Matrix	ماتریس عملگر انتگرال‌گیری
non-singular matrix	ماتریس نامنفرد
Semi-positive definite matrix	ماتریس نیمه معین مثبت
Real Variable	متغیر حقیقی
Symmetric	متقارن
Compact Set	مجموعه فشرده
Orthogonal Set	مجموعه متعامد
Optimal Control Problem	مساله کنترل بهینه
shortest path problem	مساله کوتاهترین مسیر
Derivative	مشتق
Algebraic Equations	معادلات جبری
Differential Equations	معادلات دیفرانسیل
Haar Wavelet	موجک هار

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Algebraic Equations	معادلات جبری
Angle	زاویه
Characteristic Function	تابع مشخصه
Compact Set	مجموعه فشرده
Complex Number	عدد مختلط
Controllability	کنترل‌پذیری
Derivative	مشتق
Differential Equations	معادلات دیفرانسیل
Group	گروه
Haar Functions	توابع هار
Haar Wavelet	موجک هار
Hilbert Space	فضای هیلبرت
Identity Element	عضو همانی
Initial Condition	شرایط ابتدایی
Inverse Laplace	لاپلاس معکوس
Laplace Transformation	تبدیل لاپلاس
Lebesgue Integral	انتگرال لبگ
Locally Integrable	انتگرال‌پذیر موضعی
Manipulators	بازوی ماهر
Mesurable	اندازه‌پذیر
Neutral Element	عضو خنثی
Non-singular matrix	ماتریس نامنفرد
Operational Integration Matrix	ماتریس عملگر انتگرال‌گیری
Optimal Control Problem	مساله کنترل بهینه
Orthogonal Set	مجموعه متعامد

Quadratic	درجه دوم
Rationalized Haar Functions	توابع هارگویا
Real Variable	متغیر حقیقی
Robot	ربات
Scalar Multiplication	ضرب اسکالر
Semi-positive definite matrix	ماتریس نیمه معین مثبت
Shortest Path Problem	مساله کوتاهترین مسیر
State Space	فضای حالت
Symmetric	متقارن
Terminal Condition	شرایط نهایی
Terminal Inequality Constrain	قید نامساوی نهایی
Trajectory Optimization	بهینه‌سازی مسیر
Two-sided Laplace	لاپلاس دو طرفه
Unique Element	عضو منحصر بفرد
Variational Calculus	حساب تغییرات
Variation of Variable	تغییر متغیر
Vector Space	فضای برداری

Aabstract

In this thesis, we solve a class of optimal control problems and varitional calculus using Haar wavelets. In the first chapter, we introduce general optimal control problems, varitional calculus problems, the needed definitions, Haar wavelets and using of them we solve optimal control problems. The second chapter, consists of the shortest path problems and the fourth chapter consists of the trajectory optimization problems of robot manipulators and numerical results are also given for some examples, then it is approximated using Haar wavelet. In this thesis all graphs are plotted by matlab software.

keywords: Haar wavelets, Collocation points, Nonlinear programming, Shortest path, Robot manipulator.



Shahrood University
Faculty Of Mathematical Sciences

Dissertation Submitted in Partial
Fulfillment of The Requirements For The
Degree of Master of Science in
Applied Mathematics

An Application of Haar Wavelet for Solving the Shortest Path Problem

Supervisor

Dr. Ali Reza Nazemi

by

Golbahar Pagheh

2014