دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

عنوان

تعمیم ضرایب لاگرانژ برای تکرارهای وردشی بکار رفته درحل دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل

استاد راهنما
دکتر مهدی قوتمند

استاد مشاور
دکتر علی مس‌فروش

دانشجو
هدا ساکی

۱۳۹۳

ما حصل آموخته هایم را تقدیم می کنم به آنان که مهر آسمانی شان آرام بخش آلام زمینی ام است.

به استوار ترین تکیه گاه ام، دستان پر مهر پدرم

سبز ترین نگاه زندگی ام، چشمان مادرم

همسفر مهربان دنیایم، برادر عزیزم هادی

سپاس گزاری...

سپاس خدای را که سخنوران، در ستودن او بمانند و شمارندگان، شمردن نعمت های او ندانند و کوشندگان، حق او را گزاردن نتوانند و سلام و درود بر محمد و خاندان پاک او، طاهران معصوم، هم آنان که وجودمان وامدار وجودشان است...

بعد از مدتها، پس از پیمودن راه های فراوان که با حضور شیرین اساتید عزیزم، با راهنمایی ها و دغدغه های فراوانشان، نگاه های پدر و مادرم با چشم های پر از برق شوق و زیبایی حضور برادرم در کنارم، که خستگی های این راه را به امید و روشنی راه تبدیل کرده، امیدوارم بتوانم در آینده ای نزدیک جواب گوی این همه محبت آنها باشم...

اکنون واجب می دانم از زحمات بی دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر مهدی قوتمند، صمیمانه تشکر کنم که قطعا بدون راهنمایی های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی رسید.

از جناب آقای دکتر علی مس فروش که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل نمودند و در آماده سازی این رساله، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.

هدا ساکی
۱۳۹۳

تعهدنامه

اینجانب **هدا ساکی** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی کاربردی** **دانشکده علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **تعمیم ضرایب لاگرانژ برای تکرارهای وردشی بکار رفته درحل دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل** ، تحت راهنمایی **دکتر مهدی قوتمند** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تاکنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام " دانشگاه شاهرود " یا " Shahrood University " به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

هدا ساکی
۱۳۹۳

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در این پایان‌نامه شیوه جدیدی از روش تکرار وردشی برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول معرفی می‌شود. این شیوه بر خلاف شیوه کلاسیک تغییرات محدود را در عبارات غیرخطی بکار می‌برد. این روش در مقایسه با شیوه کلاسیک با تعمیم ضرایب لاگرانژ میزان محاسبات را کاهش می‌دهد و جواب را سریعتر به‌دست می‌آورد. برای تایید روش جدید در حل دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی و غیر خطی مثال‌هایی را ارایه می‌دهیم که نشان می‌دهد استفاده از ضرایب لاگرانژ تعمیم یافته قابل اعتمادتر است. همچنین روش تکرار وردشی را برای مسایل مقدار مرزی و اولیه بکار می‌بریم. همچنین الگوریتم جدیدی را برای مسایل مقدار مرزی خطی و غیر خطی معرفی می‌کنیم که نیازمند استفاده از تابع گرین نیست.

کلمات کلیدی: روش تکرار وردشی، دستگاه معادلات دیفرانسیل، تغییرات محدود، ضریب لاگرانژ.

لیست مقالات مستخرج از پایان‌نامه

۱. ساکی.ه، قوتمند.م،''حل مسایل مقدار اولیه با استفاده از روش تکرار وردشی و تبدیل جردن''
،چهل و پنجمین کنفرانس ریاضی سمنان، شهریور ۱۳۹۳.

فهرست مطالب

فصل ۱

تعاریف و مقدمات

۱.۱ مقدمه

روش تکرار وردشی [۱] (VIM) توسط ریاضی‌دان چینی جان-هوآن-هی [۲] در سال ۱۹۹۷ ارایه شده است که روشی تکراری برای حل معادلات دیفرانسیل خطی و غیرخطی است. ایده اصلی این روش تعیین ضریب لاگرانژ است که برای بدست آوردن آن از نظریه وردشی [۸] استفاده می‌شود.

روش VIM برای حل انواع معادلات شامل معادله کلین - جردن [۵] [۳] ،هلم هلتز [۴][۱۷]، معادلات دیفرانسیل جبری [۹]، مدل‌های شکار شکارچی [۱۱]، دستگاه هایپر چاوتیک روسلر [۳]، مسایل مقدار مرزی غیر خطی [۱۴] و بسیاری مسایل دیگر بکار می‌رود[۱۶]، [۴].

در سال‌های اخیر اصلاحات گوناگونی برای VIM ارایه شده است.

◄ در سال ۲۰۰۷ : باتیها[۵][۲]روش تکرار وردشی چند مرحله‌ای را ارایه نموده است.

◄در سال۲۰۰۸ : ادیبات [۶][۶] تغییرات VIM را برای جواب‌های مسایل غیر خطی توسعه داده است.

◄در سال ۲۰۰۸:توکلیمازو [۷] روش تکرار وردشی بهینه[۱۲] را پیشنهاد کرده است.

◄در سال ۲۰۱۱ :سالکویه [۸]روش را برای دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل خطی معمولی با ضرایب ثابت[۱۵]بکار برده است.

اصلاحات دیگری از روش تکرار وردشی در [۱۰] ارایه شده است. در این پایان‌نامه شیوه جدید روش تکرار وردشی برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول ارایه می‌شود که جواب دستگاه‌ها بدون تغییرات محدود در عبارات خطی، بدست می‌آید. این شیوه ضرایب لاگرانژ را به توابع ماتریسی تعمیم

---

[۱] Variational Iteration Method
[۲] J.-H. He
[۳] Klein-Gordan
[۴] Helmholtz
[۵] Batiha
[۶] Odibat
[۷] Turkyilmazogu
[۸] Salkuyeh

می‌دهد و تعداد تکرارها و میزان محاسبات را کاهش می‌دهد.
در فصل اول مفاهیم و تعاریفی که در کل پایان‌نامه مورد نیاز است گردآوری شده است. در فصل دوم شیوه جدید روش تکرار وردشی برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول ارایه می‌شود، در فصل سوم روش تکرار وردشی را برای حل مسایل مقدار مرزی و اولیه بکار می‌بریم. در فصل چهارم شیوه جدید روش تکرار وردشی را برای دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل خطی و غیر خطی بکار می‌بریم و نتایج حاصله را بررسی می‌کنیم. در فصل پنجم با استفاده از برنامه نویسی با زبان میپل به تحلیل مثال‌های عددی پرداخته می‌شود.
برای گردآوری این بخش از مراجع [۱۶]و[۱۳] استفاده شده است.

۲.۱ تعاریف و مفاهیم اولیه

معادله‌ای که شامل یک تابع مجهول و مشتقات آن باشد را معادله دیفرانسیل نامند، هرگاه تابع مجهول در معادله، تنها به یک متغییر مستقل وابسته باشد، معادله دیفرانسیل را معمولی می‌نامند و اگر تابع مجهول به چند متغییر مستقل وابسته باشد آن‌را معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی می‌نامند. تابعی که در معادله دیفرانسیل و قیود آن صدق کند جواب معادله دیفرانسیل می‌نامند.

تعریف ۱.۲.۱. شکل کلی معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه n به صورت زیر است

$$F(x,y,y',\dots,y^{(n)})=0 \qquad (۱.۱)$$

معادله دیفرانسیل (۱.۱) خطی است اگر F تابعی خطی از متغیرهای $y,y',\dots,y^{(n)}$ باشد. شکل کلی معادله دیفرانسیل خطی مرتبه n به صورت زیر است:

$$a_n(x)y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\dots+a_0(x)y=g(x)$$

معادله دیفرانسیلی که خطی نباشد، معادله دیفرانسیل غیرخطی نامیده می‌شود.

تعریف ۲.۲.۱. بالاترین مرتبه مشتق در معادله دیفرانسیل را مرتبه معادله دیفرانسیل می‌گوییم.

تعریف ۳.۲.۱. معادله غیرخطی

$$y'+p(x)=q(x)y^n \qquad (۲.۱)$$

به‌ازای $n\neq 0,1$ معادله دیفرانسیل برنولی [۹] نامیده می‌شود.
بدیهی است اگر $n=0$ باشد آنگاه معادله دیفرانسیل (۲.۱) خطی مرتبه اول است و اگر $n=1$ باشد، معادله جدایی‌پذیر می‌باشد.

تعریف ۴.۲.۱. معادلات با فرم کلی $y'+P(x)y+Q(x)y^2=R(x)$ را معادله ریکاتی [۱۰] می‌نامند که در آن P، Q و R توابعی از متغیر x هستند.
با داشتن یک جواب خصوصی مثل y_0 می‌توان جواب عمومی معادله ریکاتی را بدست آورد. در واقع با تغییر متغیر $y=\frac{1}{u}+y_1$ معادله‌ای خطی مرتبه اول بر حسب u خواهیم داشت.

[۹] Bernoulli Differential Equation
[۱۰] Riccati Equation

تعریف ۱.۲.۵. مساله مقدار اولیه، معادله دیفرانسیل مرتبه n همراه با شرایط اولیه به صورت زیر است

$$F(x,y,y',\dots,y^{(n)})=0, \tag{۱.۳}$$

$$y^{(i)}(a)=\alpha_i, \qquad i=0,1,\dots,n-1, \tag{۱.۴}$$

که در آن a نقطه اولیه و α_i ها مقادیر ثابتی هستند. هدف از حل مساله مقدار اولیه، پیدا کردن تابع $y(x)$ است که در معادله دیفرانسیل (۱.۳) و شرایط (۱.۴) صدق کند.

تعریف ۱.۲.۶. معادله دیفرانسیل مرتبه n همراه با مجموعه‌ای از شرایط مرزی را مساله مقدار مرزی می‌نامند. شکل کلی یک مساله مقدار مرزی مرتبه n را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0, \tag{۱.۵}$$

$$\sum_{j=0}^{n-1}(\alpha_{ij}y^{(i)}(a)+\beta_{ij}y^{(j)}(b))=\gamma_i, \quad i=0,1,\cdots,n-1, \tag{۱.۶}$$

که در آن α_{ij} ها، β_{ij} ها و γ_i ها مقادیری ثابت و a و b مقادیر مرزی هستند. منظور از حل مساله مقدار مرزی پیدا کردن تابع $y(x)$ است که در معادله دیفرانسیل (۱.۵) و شرایط مرزی (۱.۶) صدق کند.

تعریف ۱.۲.۷. بردار های $\mathbf{x}^{(1)},\cdots,\mathbf{x}^{(k)}$ را وابسته خطی گویند، اگر اعدادی مانند $c_1,\cdots c_k$ موجود باشند، به‌طوریکه

$$c_1\mathbf{x}^{(1)}+\cdots+c_k\mathbf{x}^{(k)}=0, \tag{۱.۷}$$

و حداقل یکی از آنها ناصفر باشد. اگر به ازای همه مقادیر $c_1,\cdots,c_k$ که برای آن معادله (۱.۷) برقرار است، $c_1=c_2=\cdots=c_k=0$، $\mathbf{x}^{(1)},\cdots,\mathbf{x}^{(k)}$ را مستقل خطی می‌نامند.

حال مجموعه ای از n بردار در نظر می‌گیریم که هر یک n مولفه دارد. فرض کنیم $x_{ij}=x_i^{(j)}$ مولفه iام بردار $x^{(j)}$ بوده و $X=(x_{ij})$ در اینصورت معادله (۱.۷) را می‌توان به شکل زیر نوشت.

$$\begin{pmatrix} x_1^{(1)}c_1+\cdots+x_1^{(1)}c_1 \\ \vdots \\ x_n^{(1)}c_1+\cdots+x_n^{(1)}c_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_{11}c_1+\cdots+x_{1n}c_n \\ \vdots \\ x_n^{(1)}c_1+\cdots+x_n^{(1)}c_n \end{pmatrix}=Xc=0 \tag{۱.۸}$$

هرگاه $detX\neq 0$، آنگاه تنها جواب معادله (۱.۸) عبارت است از $c=0$، ولی برای $detX=0$ جوابهای ناصفر وجود دارند. لذا مجموعه بردارهای $\mathbf{x}^{(1)},\cdots,\mathbf{x}^{(n)}$ مستقل خطی‌اند اگر و فقط اگر $detX\neq 0$ باشد.

تعریف ۱.۲.۸. معادله دیفرانسیل

$$a_0(x)y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0$$

و شرایط مرزی همگن $\beta_1y(b)=\beta_2y'(b)$ و $\alpha_1y(a)=\alpha_2y'(a)$ را در نظر می‌گیریم که در آن α_1، α_2، β_1، β_2 همزمان صفر نباشند. تابع $G(x,y)$ را تابع گرین [11] مساله با شرایط مرزی می‌نامند که در خواص زیر صدق کند

[11] Green Funection

(۱) $G(x,s)$ برای $a \leq x \leq s$ و $s \leq x \leq b$ در معادله دیفرانسیل صدق کند.

(۲) به ازای $a \leq s \leq b$، $\beta_۱ G(b,s) = \beta_۲ G_x(b,s)$ و $\alpha_۱ G(a,s) = \alpha_۲ G_x(a,s)$.

(۳) به ازای $a \leq x \leq b$، $G(x,s)$ تابع پیوسته‌ای از x باشد.

(۴) به ازای $a \leq x \leq s$ و $s \leq x \leq b$، $G_x(s,x)$ پیوسته بوده و در $x = s$ ناپیوستگی پله‌ای به اندازه $\frac{-۱}{a_۰(s)}$ داشته باشد.

مثال ۹.۲.۱. با استفاده از تعریف (۸.۲.۱) تابع گرین را برای معادله دیفرانسیل $y'' + k^۲ y = ۰$ و شرایط مرزی $y(۰) = y(b) = ۰$ بسازید.

چون هر جواب معادله $y'' + k^۲ y = ۰$ به شکل $y = A\cos x + B\sin kx$ است، از خاصیت (۱) معلوم می‌شود که تابع مطلوب $G(x,s)$ باید به شکل زیر تعریف شود:

$$G(x,s) = \begin{cases} A_۱ \cos kx + B_۱ \sin kx & ۰ \leq x \leq s \\ A_۲ \cos kx + B_۲ \sin kx & s \leq x \leq b \end{cases} \tag{۹.۱}$$

برای آنکه شرط مرزی چپ برآورده شود، از خاصیت (۲) نتیجه می‌شود $A_۱ = ۰$. به همین صورت برای برقراری شرط مرزی در $x = b$ لازم است $A_۲ \cos kb + B_۲ \sin kb = ۰$ که در آن‌ها $c_۱$ دلخواه می‌باشد. لذا $G(x,s)$ به شکل زیر است

$$\begin{cases} B_۱ \sin kx & ۰ \leq x \leq s \\ c(\sin kb \cos kx - \cos kb \sin kx) = c \sin k(b-x) s \leq x \leq b \end{cases} \tag{۱۰.۱}$$

علاوه بر این برای آنکه $G(x,s)$ در $x = s$ پیوسته باشد، طبق خاصیت (۳) باید داشته باشیم $B_۱ \sin ks = c \sin k(b-s)$ که از آن داریم $B_۱ = E \sin k(b-s)$ و $c = E \sin ks$ و در آن E دلخواه است. لذا $G(x,s)$ به شکل تبدیل می‌شود

$$G(x,s) = \begin{cases} E \sin k(b-s) \sin kx & ۰ \leq x \leq s \\ E \sin ks \sin k(b-x) & ۰ \leq x \leq b \end{cases} \tag{۱۱.۱}$$

در نهایت برای برقراری خاصیت (۴) باید رابطه

$$\lim_{x \to s^+} G_x(x,s) - \lim_{x \to s^+} G_x(x, s-۱)$$

برقرار باشد که بدست می‌آید

$$E = \frac{۱}{k \sin kb}$$

با معلوم بودن E، داریم

$$G(x,s) = \begin{cases} \frac{\sin k(b-s) \sin kx}{k \sin kb} & ۰ \leq x \leq s \\ \frac{\sin ks \sin k(b-x)}{k \sin kb} & ۰ \leq x \leq b \end{cases} \tag{۱۲.۱}$$

به شرط آنکه $kb \neq n\pi$ باشد.

تعریف ۱۰.۲.۱. برای چندجمله‌ای تکین

$$a(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$$

ماتریس همدم [12]، ماتریس مربعی $n \times n$ به صورت

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ \vdots & 1 & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

با زیر قطر اصلی یک و ستون آخر قرینه ضرایب $a(x)$ ودر بقیه جاها صفر است.

۳.۱ دستگاه معادلات دیفرانسیل

دستگاه معادلات دیفرانسیل با شرایط اولیه زیر را در نظر می‌گیریم

$$\begin{cases} y_1' = f_1(t, y_1, y_2, \ldots, y_n); \quad y_1(a) = \alpha_1, \\ y_2' = f_2(t, y_1, y_2, \ldots, y_n); \quad y_2(a) = \alpha_2, \\ \vdots \\ y_n' = f_2(t, y_1, y_2, \ldots, y_n); \quad y_n(a) = \alpha_n, \end{cases} \tag{۱۳.۱}$$

منظور از حل یک دستگاه معادلات دیفرانسیل، تعیین توابع $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$ است که در (۱۳.۱) صدق کنند. اگر معادله دیفرانسیل مرتبه n را بتوان به صورت صریح بر حسب بالاترین مرتبه مشتق به صورت

$$y^{(n)}(t) = f(x, y'(t), y''(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)) \tag{۱۴.۱}$$

با شرایط اولیه $i = 0, 1, \ldots, n-1 \qquad y^{(i)}(a) = \alpha_i$ بیان کرد، آنگاه با قرار دادن

$$\begin{aligned} &z_1(t) = y(t), \\ &z_2(t) = y'(t), \\ &\vdots, \\ &z_n(t) = y^{(n-1)}(t), \end{aligned}$$

معادله دیفرانسیل (۱۴.۱) به دستگاه معادلات مرتبه اول با شرایط اولیه زیر تبدیل می‌شود

$$Z' = \begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \\ \vdots \\ z_{n-1}' \\ z_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_n \\ f(t, z_1, z_2, \ldots, z_n) \end{pmatrix}$$

[12] Copanion Matrix

$$\begin{cases} z_1(a) = \alpha_1, \\ z_2(a) = \alpha_2, \\ \vdots \\ z_n(a) = \alpha_3, \end{cases}$$

۴.۱ معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب غیر ثابت

در این قسمت می‌خواهیم معادلات با ضرایب غیر ثابت را مورد بررسی قرار دهیم که با تغییر متغیر مناسبی می‌توان آنها را به معادلات دیفرانسیل با ضرایب ثابت تبدیل کرد.
معادله دیفرانسیل مرتبه دوم با ضرایب غیر ثابت زیر را در نظر بگیرید.

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0. \tag{۱۵.۱}$$

قرار می‌دهیم $t = u(x)$ در این‌صورت

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx}) = \frac{d^2y}{dt^2}(\frac{dt}{dx})^2 + \frac{dy}{dt}\frac{d^2t}{dx^2}.$$

بنابراین معادله به‌صورت زیر حاصل می‌شود

$$(\frac{dt}{dx})^2\frac{d^2y}{d^2t} + (\frac{d^2t}{dx^2} + P(x)\frac{dt}{dx})\frac{dy}{dt} + Q(x)y = 0. \tag{۱۶.۱}$$

حال اگر قرار دهیم $t = u(x) = \int \sqrt{Q(x)}\mathrm{d}x$ و

$$\frac{t'' + P(x)t'}{Q(x)} = \frac{Q'(x) + 2P(x)Q(x)}{2Q(x)\sqrt{Q(x)}} \tag{۱۷.۱}$$

مقداری ثابت باشد، آنگاه معادله (۱۶.۱)دارای ضرایب ثابت خواهد بود.
توجه کنید در رابطه (۱۷.۱) هنگامی‌که جایگزینی $t = u(x)$ را قرار دهیم اگر مقدار حقیقی باشد باید $Q(x) \geq 0$ باشد. بنابراین شرط لازم و کافی برای این‌که معادله دیفرانسیل (۱۵.۱) را با تغییر متغیر مستقل به معادله با ضرایب ثابت تبدیل کنیم این است که تابع $\frac{Q'+2PQ}{Q\sqrt{Q}}$ مقداری ثابت باشد.

مثال ۱.۴.۱. معادله دیفرانسیل $y'' - \frac{2}{x} + 9x^4y = 0$ را در نظر می‌گیرید. با توجه به اینکه $P(x) = -\frac{2}{x}$ و $Q(x) = 9x^4$ داریم

$$t = \int \sqrt{Q(x)}\mathrm{d}x = \int 3x^2\mathrm{d}x = x^3$$

لذا $\frac{t''+Pt'}{Q} = 0$. بنابراین با قراردادن $t = x^3$ در معادله، معادله دیفرانسیل با ضرایب ثابت زیر را خواهیم داشت.

$$y''(t) + y(t) = 0.$$

از این رو:

$$y(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t,$$

در نتیجه:

$$y(x) = c_1 \cos(x^3) + c_2 \sin(x^3).$$

بنابراین در حالت‌های خاصی می‌توان معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب غیر ثابت را حل نمود، که معادله کوشی اویلر یک نمونه از آن است.

تعریف ۲.۴.۱. معادله دیفرانسیل مرتبه n ام

$$a_n x^n y^{(n)}(x) + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 x y'(x) + a_0 y(x) = f(x)$$

را که در آن ضرایب $a_i, 0 \leqslant i \leqslant n$ اعداد ثابت هستند، به معادله کوشی-اویلر [۱۳] مرتبه n ام معروف است. این نوع معادلات را با تغییر متغیر $x = \mathrm{e}^t$ یا $t = \ln x$ وقتی که $x > 0$ و $t = \ln(-x)$ وقتی‌که $x < 0$ ، می‌توان به معادله با ضرایب ثابت تبدیل می‌شوند.

۵.۱ قطری سازی

تعریف ۱.۵.۱. ماتریس مربعی A را قطری‌پذیر گویند اگر ماتریس P موجود باشد به طوری‌که

$$P^{-1}AP = D,$$

که در آن D ماتریس قطری است. به عبارت دیگر مساله قطری سازی ، یافتن ماتریس قطری است که با A متشابه باشد.

اگر D ماتریس قطری باشد، آنگاه مقادیر ویژه‌اش عناصر قطری آن می‌باشد همچنین هرگاه A با D متشابه باشد، آنگاه A و D مقادیر ویژه یکسان دارند. در نتیجه اگر A قطری پذیر باشد، A با ماتریسی قطری که عناصر قطریش مقادیر ویژه A هستند متشابه می‌باشد.

در ادامه قضیه‌ای را بیان می‌کنیم که تعیین می‌کند چه ماتریس‌هایی قطری‌پذیر است.

قضیه ۲.۵.۱. ماتریس $n \times n$، A قطری پذیر است اگر و فقط اگر دارای n بردار ویژه مستقل خطی باشد. در اینصورت، ماتریس قطری D متشابه با A عبارت است از

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{۱۸.۱}$$

که در آن $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ مقادیر ویژه A می‌باشند. هرگاه P ماتریسی باشد که ستون‌هایش بردارهای ویژه مستقل خطی باشند، آنگاه

$$D = P^{-1}AP$$

[۱۳] Cauchy-Euler Differential Equation

قطری‌سازی همواره امکان‌پذیر نیست. در صورتی‌که بتوان یک ماتریس را قطری کرد محاسبه توان‌های آن ماتریس ساده خواهد بود، در واقع داریم

$$\begin{aligned} A^k = (PDP^{-1})^k &= (PDP^{-1}).(PDP^{-1})\cdots(PDP^{-1}) \\ &= PD(P^{-1}P)D(P^{-1}P)\cdots(P^{-1}P)DP^{-1} \\ &= PD^kP^{-1}. \end{aligned} \tag{۱۹.۱}$$

از دیگر کاربردهای قطری سازی، محاسبه نمای یک ماتریس است که در حل معادلات دیفرانسیل کاربرد دارد. معادله دیفرانسیل خطی زیر را در نظر بگیرید

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x} \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

که در آن $\mathbf{x}$ یک بردار (متغیر با زمان) و Aیک ماتریس است. منظور ازمشتق $\mathbf{x}$ نسبت به زمان، مشتق مولفه‌های آن نسبت به زمان است. می‌توان نشان داد که جواب این معادله دیفرانسیل به شکل زیر است

$$\mathbf{x}(t) = \mathrm{e}^{tA}\mathbf{x}_0,$$

که برای ماتریس دلخواه A، بصورت زیر تعریف می‌شود

$$\mathrm{e}^{tA} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(tA)^m}{m!}.$$

اگر ماتریس $D = diag(d_{11}, \cdots, \cdots, d_{nn})$ قطری باشد با دایه‌های d_{ii} روی قطر، ماتریس e^{tD} نیز قطری خواهد بود و در ایه‌های روی قطرش برابر $\mathrm{e}^{td_{ii}}$ خواهد بود. برای مثال $\mathrm{e}^{tI} = \mathrm{e}^{t}I$.

اگر ماتریس A توسط ماتریس وارون پذیر P قطری شدنی باشد، دیدیم که

$$A^k = PD^kP^{-1}$$

و در نتیجه

$$\mathrm{e}^{tA} = P\mathrm{e}^{tD}P^{-1}$$

۶.۱ فرم متعارف جردن

در عمل ماتریس‌هایی که قطری‌پذیر نیستند نیز وجود دارند. در این حالت ماتریس A با ماتریس شبه قطری که فرم جردن آن خوانده می‌شود متشابه است. این فرم دارای مقدارهای ویژه A روی قطر اصلی است و در بعضی از مواقع در بالای قطر اصلی دارای یک بوده و در سایر جاها صفر است.

برای توضیح این حالت ماتریس N_k را مساوی ماتریس $k \times k$ زیر تعریف می‌کنیم

$$N_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

ماتریس N_k ماتریسی است که در بالای قطر اصلی ۱ و در سایر جاها۰ باشد. ماتریس بلوکی $k \times k$ جردن $B(\lambda)$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$B(\lambda) = \lambda I + N_k = \begin{pmatrix} \lambda & ۱ & ۰ & \dots & ۰ & ۰ \\ ۰ & \lambda & ۱ & \dots & ۰ & ۰ \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ ۰ & ۰ & \dots & \dots & \lambda & ۱ \\ ۰ & ۰ & \dots & \dots & ۰ & \lambda \end{pmatrix}$$

یعنی $B(\lambda)$ ماتریسی $k \times k$ است با مقدار ثابت λ روی قطر و بالای قطر یک و در سایر جاها صفر است.

درنهایت ماتریس جردن به شکل زیر است

$$J = \begin{pmatrix} B_۱(\lambda_۱) & ۰ & \dots & ۰ \\ ۰ & B_۲(\lambda_۲) & \dots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & ۰ & \dots & B_r(\lambda_r) \end{pmatrix}$$

که در آن هر $B_i(\lambda_i)$ ماتریس بلوکی جردن می‌باشد. لذا ماتریس جردن ماتریسی است با ماتریس‌های بلوکی روی قطر و در سایر جاها صفر است.

قضیه ۱.۶.۱. فرض می‌کنیم A ماتریسی $n \times n$ باشد. در اینصورت، یک ماتریس $n \times n$ معکوس پذیر مانند Pوجود دارد به طوریکه

$$P^{-۱}AP = J$$

که در آن J ماتریس جردن است که عناصر قطریش مقادیر ویژه A می‌باشند. بعلاوه صرف نظر از ترتیب ظاهر شدن بلوک‌های جردن، J منحصر به فرد می‌باشد.

منظور از آخرین جمله قضیه این است که به عنوان مثال اگر A با

$$J_۱ = \begin{pmatrix} ۲ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۳ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۴ \end{pmatrix}$$

متشابه باشد، A همچنین با ماتریس‌های زیر نیز متشابه است

$$J_۲ = \begin{pmatrix} ۳ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۴ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۲ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۲ \end{pmatrix}$$ و $$J_۳ = \begin{pmatrix} ۴ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۳ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۳ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۳ \end{pmatrix}$$ یعنی بلوک‌های جردن ثابت

می‌مانند اما می‌توان ترتیب نگارش آنها را تغییر داد.

یادآوری: هرگاه A قطری پذیر باشد، آنگاه $J = D = diag(\lambda_۱, \lambda_۲, \cdots, \lambda_n)$، که در آن $\lambda_۱, \lambda_۲, \cdots, \lambda_n$ مقادیر ویژه A می‌باشند.

۷.۱ بردارهای ویژه تعمیم یافته

تعریف ۱.۷.۱. بردار $u \neq ۰$ یک بردار ویژه تعمیم یافته[۱۴] ماتریس A است، هرگاه $(A - \lambda I)^m u = ۰$ برای مقدار m برقرار باشد. اگر $m = ۱$ باشد، u همان بردار ویژه است، که m تعداد تکرارهای مقدار ویژه λ است.

قضیه ۲.۷.۱. اگر λ مقدار ویژه با تعداد تکرار m باشد، آنگاه بردارهای ویژه تعمیم یافته $\epsilon_۱ = \bigcap_{۱\leq i\leq l} \epsilon_i$ و مجموعه $\{V_۱^i, \cdots, V_{ri}^i\}$ برای $۱ \leq i \leq l$ وجود وجود دارند که $r_۱ + \cdots + r_l = m$ مستقل خطی است. به علاوه اگر قرار دهیم $V_۰^i = ۰$، داریم

$$(A - \lambda I)V_k^i = V_{k-۱}^i \qquad ۱ \leq i \leq l, ۱ \leq k \leq r_i$$

مثال ۳.۷.۱. فرض کنیم A یک ماتریس ۲×۲ با مقدار ویژه مضاعف λ باشد همچنین $v_۱$ یک بردار ویژه A باشد. در اینصورت، بردار $v_۲$ تعریف شده با

$$(A - \lambda I)v_۲ = v_۱ \tag{۲۰.۱}$$

بردار ویژه تعمیم یافته A نظیر مقدار ویژه λ نام دارد.

مثال ۴.۷.۱. فرض می‌کنیم $A = \begin{pmatrix} ۳ & -۲ \\ ۸ & -۵ \end{pmatrix}$. مقدار ویژه مضاعف آن $\lambda = -۱$ است. در اینصورت بردار ویژه نظیر $\lambda = -۱$، $v_۱ = \begin{pmatrix} ۱ \\ ۲ \end{pmatrix}$ است. بردار ویژه مستقل خطی دیگری وجود ندارد. برای یافتن یک بردار ویژه تعمیم یافته $(A + I)v_۲ = v_۱$ را حساب می‌کنیم و $v_۲ = \begin{pmatrix} \frac{۱}{۴} \\ ۰ \end{pmatrix}$ بدست می‌آید.

در قضیه زیر دلیل یافتن بردارهای ویژه تعمیم یافته داده شده است.

قضیه ۵.۷.۱. فرض کنیم A، λ، $v_۱$ ، $v_۲$ همانند مثال (۳.۷.۱) بوده و P ماتریسی با ستون‌های $v_۱$ و $v_۲$ باشد. در اینصورت، $P^{-۱}AP = J$، که در آن $J = \begin{pmatrix} \lambda & ۱ \\ ۰ & \lambda \end{pmatrix}$ فرم کانونی جردن A می‌باشد.

برهان. چون $v_۱$ و $v_۲$ مستقل خطی‌اند، P معکوس‌پذیر می‌باشد. همچنین

$$AP = A(v_۱, v_۲) = (Av_۱, Av_۲) = (\lambda v_۱, Av_۲)$$

[۱۴] Generalized Eigenvector

ولی از معادله (۲۰.۱) داریم $Av_2 = v_1 + \lambda v_2$ ، پس $AP = (\lambda v_1, v_1 + \lambda v_2)$. از طرفی داریم

$$PJ = (v_1, v_2)\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix} = (\lambda v_1, v_1 + \lambda v_2)$$

لذا، $AP = PJ$ در نتیجه $P^{-1}AP = J$ و قضیه اثبات شد. $\square$

۸.۱ دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل خطی

دستگاه n معادله ی دیفرانسیل و n تابع مجهول زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t),\\ x_2'(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \cdots + a_{2n}x_n(t),\\ \vdots,\\ x_n'(t) = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t), \end{cases} \tag{۲۱.۱}$$

که در آن a_{ij} ها اعدادی حقیقی می باشند. دستگاه (۲۱.۱) را یک دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی می‌نامند. حال فرض کنید

$$\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \cdots, x_n(t))^T.$$

در اینجا $x(t)$ یک تابع برداری است و داریم

$$\mathbf{x}'(t) = (x_1'(t), x_2'(t), \cdots, x_n'(t))^T.$$

در این‌صورت، اگر A ماتریس $n \times n$ به صورت

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

تعریف شود، دستگاه (۲۱.۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t). \tag{۲۲.۱}$$

برای حل معادله (۲۲.۱) باید یک جواب به شکل e^{At} را حدس بزنیم . بنابراین ابتدا بسط تابع e^t را یاد آور می‌شویم

$$\mathrm{e}^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots$$

این سری به ازای هر عدد حقیقی t همگراست. بنابراین به ازای هر عدد حقیقی a داریم

$$\mathrm{e}^{at} = 1 + (at) + \frac{(at)^2}{2!} + \frac{(at)^3}{3!} + \cdots.$$

تعریف ۱.۸.۱. فرض کنیم A ماتریسی $n \times n$ با درایه‌های حقیقی (یا مختلط) باشد. در اینصورت e^A ماتریسی $n \times n$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mathrm{e}^A = I + A + \frac{A^۲}{۲!} + \frac{A^۳}{۳!} + \cdots \qquad (۲۳.۱)$$

قضیه ۲.۸.۱. به ازای هر بردار ثابت c، $\mathbf{x}(t) = \mathrm{e}^{At}c$ جوابی از (۲۲.۱) است. به‌علاوه، جوابی از (۲۲.۱) که با $\mathbf{x}(t) = \mathrm{e}^{At}\mathbf{x}_۰$ داده می‌شود درشرط $\mathbf{x}(۰) = \mathbf{x}_۰$ صدق می‌کند.

برهان. با استفاده از (۲۳.۱) داریم

$$\mathbf{x}(t) = \mathrm{e}^{At}c = [I + At + A^۲\frac{t^۲}{۲!} + A^۳\frac{t^۳}{۳!} + \cdots]c \qquad (۲۴.۱)$$

ولی چون A ماتریسی ثابت است، داریم

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\frac{t^k}{k!}A^k) =& \frac{kt^{k-۱}}{k!}A^k = kA^kt^{k-۱}\\ &= \frac{A^kt^{k-۱}}{(k-۱)!} = A[A^{k-۱}\frac{t^{k-۱}}{(k-۱)!}]\end{aligned} \qquad (۲۵.۱)$$

پس از تلفیق (۲۴.۱) و(۲۵.۱) بدست می‌آید

$$\mathbf{x}'(t) = \frac{d}{dt}\mathrm{e}^{At}c = A[I + At + A^۲\frac{t^۲}{۲!} + A^۳\frac{t^۳}{۳!} + \cdots]c = A\mathrm{e}^{At}c = A\mathbf{x}(t)$$

بنابراین، چون $I = \mathrm{e}^۰ = \mathrm{e}^{A\times ۰}$ خواهیم داشت

$$\mathbf{x}(۰) = \mathrm{e}^{A\times ۰}\mathbf{x}_۰ = I\mathbf{x}_۰ = \mathbf{x}_۰$$

□

تعریف ۳.۸.۱. ماتریس e^{At} را جواب اصلی ماتریسی [۱۵] دستگاه $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ می‌نامند.

طریقه محاسبه e^{At} را با دو مثال توضیح می‌دهیم.

مثال ۴.۸.۱. فرض کنیم $A = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{pmatrix}$ در اینصورت،

$$A^۲ = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲^۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳^۲ \end{pmatrix}, \quad A^۳ = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲^۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳^۳ \end{pmatrix}, \quad \cdots A^m = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲^m & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳^m \end{pmatrix}$$

[۱۵] Fundamental Solution

و

$$\mathrm{e}^{tA} = I + At + \frac{A^۲}{۲!}t^۲ + \frac{A^۳}{۳!}t^۳ + \cdots = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲t & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳t \end{pmatrix}$$
$$+ \begin{pmatrix} \frac{t^۲}{۲!} & ۰ & ۰ \\ ۰ & \frac{۲^۲t^۲}{۲!} & ۰ \\ ۰ & ۰ & \frac{۳^۲t^۲}{۲!} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{t^۳}{۳!} & ۰ & ۰ \\ ۰ & \frac{۲^۳t^۳}{۲!} & ۰ \\ ۰ & ۰ & \frac{۳^۳t^۳}{۳!} \end{pmatrix} + \cdots$$
$$= \begin{pmatrix} ۱ + t + \frac{t^۲}{۲!} + \frac{t^۳}{۳!}\cdots & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ + (۲t) + \frac{(۲t)^۲}{۲!} + \frac{(۲t)^۳}{۳!} + \cdots & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ + (۳t) + \frac{(۳t)^۲}{۲!} + \frac{(۳t)^۳}{۳!} + \cdots \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & ۰ & ۰ \\ ۰ & \mathrm{e}^{۲t} & ۰ \\ ۰ & ۰ & \mathrm{e}^{۳t} \end{pmatrix}$$

مثال ۵.۸.۱. فرض کنیم $A = \begin{pmatrix} a & ۱ \\ ۰ & a \end{pmatrix}$ به آسانی :نشان داده می‌شود

$$A^۲ = \begin{pmatrix} a^۲ & ۲a^۲ \\ ۰ & a^۲ \end{pmatrix}, A^۳ = \begin{pmatrix} a^۳ & ۳a^۲ \\ ۰ & a^۳ \end{pmatrix}, \cdots, A^m = \begin{pmatrix} a^m & ma^{m-۱} \\ ۰ & a^m \end{pmatrix}, \cdots$$

در نتیجه

$$\mathrm{e}^{At} = \begin{pmatrix} \sum_{m=۰}^{\infty} \frac{(at)^m}{m!} & \sum_{m=۱}^{\infty} \frac{ma^{m-۱}t^m}{m!} \\ ۰ & \sum_{m=۰}^{\infty} \frac{(at)^m}{m!} \end{pmatrix}$$

و در نهایت

$$\begin{aligned} \sum_{m=۱}^{\infty} \frac{ma^{m-۱}t^m}{m!} &= \sum_{m=۱}^{\infty} \frac{a^{m-۱}t^m}{(m-۱)!} \\ &= t + at^۲ + \frac{a^۲t^۳}{۲!} + \frac{a^۳t^۴}{۳!} + \cdots \\ &= t(۱ + at + \frac{a^۲t^۲}{۲!} + \frac{a^۳t^۳}{۳!} + \cdots) = te^{at} \end{aligned}$$

لذا

$$\mathrm{e}^{At} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{at} & t\mathrm{e}^{at} \\ ۰ & \mathrm{e}^{at} \end{pmatrix}.$$

مثال (۴.۸.۱) نشان می‌دهد که اگر $D = diag(\lambda_۱, \lambda_۲, \cdots, \lambda_n)$ آنگاه
$$\mathrm{e}^{Dt} = diag(\mathrm{e}^{\lambda_۱ t}, \mathrm{e}^{\lambda_۲ t}, \cdots, \mathrm{e}^{\lambda_n t}).$$

همچنین در مثال (۵.۸.۱)، به ازای ماتریس A، e^{At} به فرم کانونی جردن تبدیل شد.

قضیه ۶.۸.۱. فرض کنید J شکل کانونی جردن ماتریس A باشد و $J = P^{-1}AP$ در اینصورت $A = PJP^{-1}$ و داریم

$$e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1}$$

برهان.

$$\begin{aligned} A^n =&(PJP^{-1})^n = (PJP^{-1})(PJP^{-1})\cdots(PJP^{-1}) \\ =&PJ(P^{-1}P)J(P^{-1}P)J(P^{-1}P)\cdots(P^{-1}P)JP^{-1} \\ =&PJP^{-1} \end{aligned}$$

پس داریم

$$(At)^n = P(Jt)^nP^{-1}$$

لذا

$$\begin{aligned} e^{At} &= I + (At) + \frac{(At)^2}{2!} + \cdots = PIP^{-1} + P(Jt)P^{-1} + P\frac{(Jt)^2}{2!}P^{-1} + \cdots \\ &= P[I + (Jt) + \frac{(Jt)^2}{2!} + \cdots]P^{-1} = Pe^{Jt}P^{-1} \end{aligned}$$

این قضیه بیان می‌کند برای محاسبه e^{At} کافی است e^{Jt} را حساب کنیم.

□

۹.۱ توابع ماتریسی

گاهی بردارها یا ماتریس‌هایی در نظر می‌گیریم که عنصرهایشان توابعی از متغییر حقیقی t هستند. ماتریس $A(t)$ در $t = t_0$ یا بر بازه $\alpha < t < \beta$ را پیوسته می‌نامند اگر هر عنصر A تابع پیوسته‌ای در نقطه یا بازه داده شده باشد. به طور مشابه $A(t)$ را مشتق‌پذیر نامند اگر هر یک از عناصرش مشتق‌پذیر بوده و مشتق آن $\frac{dA}{dt}$ با

$$\frac{dA}{dt} = (\frac{da_{ij}}{dt})$$

تعریف شود، یعنی هر عنصر $\frac{dA}{dt}$، مشتق عنصر نظیر A است. به همین نحو، انتگرال یک تابع ماتریسی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\int_a^b A(t)\mathrm{d}t = \Big(\int_a^b a_{ij}(t)\mathrm{d}t\Big)$$

مثال ۱.۹.۱. اگر $A(t)$ به صورت زیر باشد

$$A(t)=\begin{pmatrix}\sin t & t\\ ۱ & \cos t\end{pmatrix}$$

آنگاه

$$\int_{۰}^{\pi} A(t)\mathrm{d}t=\begin{pmatrix}۲ & \frac{\pi^{۲}}{۲}\\ \pi & ۰\end{pmatrix} \quad , \quad A'(t)=\begin{pmatrix}\cos t & ۱\\ ۰ & -\sin t\end{pmatrix}$$

۱۰.۱ فرم جردن توابع ماتریسی

فرض می‌کنیم $A=PJP^{-۱}$ وقتی B_iها بلوک‌های جردن $B_i\in C^{m_i\times m_i}$ و $J=diag(B_۱,\dots,B_p)$ فرم کانونی جردن باشد آنگاه

$$\begin{aligned} f(A)&=Pf(J)P^{-۱}\\ &=Pdiag(f(B_۱),\dots,f(B_p))P^{-۱} \end{aligned} \tag{۲۶.۱}$$

که

$$B_i=\begin{pmatrix}\lambda_i & ۱ & \cdots & \cdots & ۰\\ ۰ & \lambda_i & ۱ & \cdots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & ۱\\ ۰ & \cdots & \cdots & ۰ & \lambda_i\end{pmatrix} \Longrightarrow f(B_i)=\begin{pmatrix}\lambda_i & f^{(۱)}(\lambda_i) & \cdots & \cdots & \frac{f^{(m-۱)}(\lambda_i)}{(m-۱)!}\\ ۰ & f(\lambda_i) & \ddots & \cdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & f^{(۱)}(\lambda_i)\\ ۰ & \cdots & \cdots & \cdots & f(\lambda_i)\end{pmatrix}$$

۱۱.۱ جواب‌های اساسی دستگاه معادلات دیفرانسیل

در این بخش جواب‌های اساسی

$$y''+p(t)y'+q(t)y=۰ \tag{۲۷.۱}$$

با شرایط اولیه

$$y(t_۰)=y_۰ \quad , \quad y'(t_۰)=y'_۰ \tag{۲۸.۱}$$

را بدست می‌آوریم. برای این منظور قضیه زیر را بیان می‌کنیم.

قضیه ۱.۱۱.۱. اگر $y_۱$ و $y_۲$ دو جواب معادله دیفرانسیل (۲۷.۱) باشند

$$L[y]=y''+p(t)y'+q(t)y=۰$$

که L عملگر دیفرانسیلی است، در این‌صورت ترکیب خطی $c_۱y_۱(t)+c_۲y_۲(t)$ نیز برای همه مقادیر $c_۱$ و $c_۲$ یک جواب است.

برهان. برای اثبات قضیه فقط نیازمند جانشین کردن

$$y = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) \tag{۲۹.۱}$$

در معادله (۲۷.۱) هستیم، در نتیجه

$$\begin{aligned} L[c_1y_1 + c_2y_2] &= [c_1y_1'' + c_2y_2'' + p[c_1y_1' + c_2y_2'] + q[c_1y_1 + c_2y_2] \\ &= c_1y_1'' + c_2y_2'' + c_1py_1' + c_2py_2' + c_1qy_1 + c_2qy_2 \\ &= c_1[y_1'' + py_1' + qy_1] + c_2[y_2'' + py_2' + qy_2] \\ &= L[y_1] + c_2L[y_2] \end{aligned}$$

چون $L[y_1] = 0$ و $L[y_2] = 0$ بنابراین $L[c_1y_1 + c_2y_2] = 0$ بدست می‌آید. بنابراین صرف نظر از مقادیر c_1 و c_2، yای که از معادله (۲۹.۱) حاصل می‌شود در معادله دیفرانسیل (۲۷.۱) صدق می‌کند. □

حال ثابت‌های c_1 و c_2 را طوری می‌یابیم که در شرط اولیه (۲۸.۱) صدق کند. این شرط مستلزم آن است که c_1 و c_2 از معادلات زیر پیروی کنند

$$\begin{aligned} c_1y_1(t_0) + c_2y_2(t_0) &= y_0 \\ c_1y_1'(t_0) + c_2y_2'(t_0) &= y_0 \end{aligned} \tag{۳۰.۱}$$

از حل معادلات (۳۰.۱) برای c_1 و c_2 در می‌یابیم که

$$c_1 = \frac{y_0y_2'(t_0) - y_0'y_2(t_0)}{y_1(t_0)y_2'(t_0) - y_1'(t_0)y_2(t_0)}, c_2 = \frac{-y_0y_1'(t_0) - y_0'y_1(t_0)}{y_1(t_0)y_2'(t_0) - y_1'(t_0)y_2(t_0)}$$

یا برحسب دترمینان می‌توان نوشت

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & y_2(t_0) \\ y_0' & y_2'(t_0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{vmatrix}} \quad , \quad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_0 \\ y_1'(t_0) & y_0' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{vmatrix}} \tag{۳۱.۱}$$

با این مقادیر c_1 و c_2، عبارت (۲۹.۱) هم در شرایط اولیه و هم در معادله دیفرانسیل (۲۷.۱) صدق می‌کند.

برای اینکه مقادیر c_1 و c_2 در معادله (۳۱.۱) معنی داشته باشند باید مخرج کسرهای بالا غیر صفر باشند. بنابراین

$$W = \begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{vmatrix} = y_1(t_0)y_2'(t_0) - y_1'(t_0)y_2(t_0)$$

دترمینان W، دترمینان رونسکین یا رونسکین جواب‌های y_1 و y_2 نامیده می‌شود.

قضیه ۲.۱۱.۱. اگر y_1 و y_2 دو جواب معادله دیفرانسیل (۲۷.۱) باشند

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

و اگر نقطه $t_\circ$ وجود داشته باشد به‌طوری که رونسکین y_1 و y_2 غیر صفر باشد در اینصورت مجموعه جواب‌های

$$y = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

با ضرایب دلخواه c_1 و c_2 هر جوابی از معادله (۲۷.۱) را در بر می‌گیرد.

قضیه (۲.۱۱.۱) بیان می‌کند تا وقتیکه رونسکین y_1 و y_2 در هیچ نقطه‌ای صفر نیست، ترکیب خطی $c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ همه جواب‌های معادله (۲۷.۱) را در برمی‌گیرد. بنابراین

$$y = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

با ضرایب ثابت اختیاری را جواب (۲۷.۱) می‌نامیم که جواب‌های y_1 و y_2 توام با رونسکین غیر صفر، مجموعه اساسی از جواب‌های معادله را می‌سازند.

۱۲.۱ ماتریس اساسی

ساختار جواب‌های دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی را می‌توان با معرفی ماتریس اساسی [16] تشریح کرد. فرض کنیم $\mathbf{x}^{(1)}(t), \dots \mathbf{x}^{(n)}(t)$ یک مجموعه از جواب‌های اساسی معادله

$$\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x} \tag{۳۲.۱}$$

بر بازه‌ای چون $\alpha < t < \beta$ تشکیل دهند که A ماتریسی $n \times n$ است. در اینصورت ماتریس

$$\psi(t) = \begin{pmatrix} x_1^{(1)}(t) & \dots & x_n^{(n)}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_n^{(1)}(t) & \dots & x_n^{(n)}(t) \end{pmatrix} \tag{۳۳.۱}$$

ماتریس اساسی دستگاه (۳۲.۱) نام دارد که ستون‌هایش بردارهای $\mathbf{x}^{(1)}(t), \dots, \mathbf{x}^{(n)}(t)$ اند. ماتریس اساسی نامنفرد است زیرا ستون‌هایش بردارهایی مستقل خطی‌اند.

جواب یک مساله مقدار اولیه [17] را می‌توان بر حسب ماتریس اساسی به صورت زیر بیان کرد. جواب عمومی معادله (۳۲.۱) عبارت است از

$$\mathbf{x} = c_1 \mathbf{x}^{(1)}(t) + \dots + c_n \mathbf{x}^{(n)}(t)$$

یا برحسب $\psi(t)$ ،

$$\mathbf{x} = \psi(t)c \tag{۳۴.۱}$$

که در آن c برداری ثابت با مولفه‌های دلخواه $c = (c_1, \cdots, c_n)^T$ است. برای مساله مقداراولیه

$$\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x} \qquad \mathbf{x}(t_\circ) = \mathbf{x}^\circ \tag{۳۵.۱}$$

که در آن $t_\circ$ نقطه‌ای مفروض در $\alpha < t < \beta$ بوده و $\mathbf{x}^\circ$ یک بردار اولیه داده شده است، کافی است بردار c در معادله (۳۴.۱) را طوری بگیریم که در شرط اولیه (۳۵.۱) صدق کند. لذا c باید در

$$\psi(t_\circ)c = \mathbf{x}^\circ \tag{۳۶.۱}$$

[16] Fundamental Matrix

[17] Initial Value Problems

صدق نماید. بنابراین، چون $\psi(t_\circ)$ نامنفرد است و

$$c = \psi^{-1}(t_\circ)\mathbf{x}^\circ \tag{۳۷.۱}$$

بنابراین

$$\mathbf{x} = \psi(t)\psi^{-1}(t_\circ)\mathbf{x}^\circ \tag{۳۸.۱}$$

جواب مساله مقدار اولیه (۳۵.۱) است.

هر ستون ماتریس اساسی ψ یک جواب معادله (۳۲.۱) است در اینصورت ψ در معادله دیفرانسیل ماتریسی زیر صدق می‌کند

$$\psi' = A(t)\psi \tag{۳۹.۱}$$

این رابطه به سادگی با مقایسه ستونهای متناظر در دو طرف معادله (۳۹.۱) بررسی می‌شود. گاهی از ماتریس اساسی دیگری که با $\phi(t)$ نشان داده می‌شود و ستون‌هایش بردارهای $\mathbf{x}^{(1)}(t), \cdots, \mathbf{x}^{(n)}(t)$ هستند استفاده می‌کنیم که علاوه بر معادله دیفرانسیل (۳۲.۱)، این بردارها در شرایط اولیه

$$\mathbf{x}^{(j)}(t_\circ) = \mathrm{e}^{(j)}$$

صدق می‌کنند که در آن $\mathrm{e}^{(j)}$ بردار یکه است که در موضع j ام عدد یک و در سایر جاها صفر است. لذا $\phi(t)$ دارای خاصیت زیر است

$$\phi(t_\circ) = I$$

از آنجاییکه $\phi^{-1}(t_\circ) = I$ از معادله (۳۸.۱) داریم

$$\mathbf{x} = \phi(t)\mathbf{x}^\circ \tag{۴۰.۱}$$

از مقایسه (۳۸.۱) و (۴۰.۱) داریم

$$\phi(t) = \psi(t)\psi^{-1}(t_\circ).$$

یادآور می‌شویم که جواب مساله مقدار اولیه اسکالر

$$x' = ax \quad , \quad x(\circ) = x_\circ \tag{۴۱.۱}$$

که در آن a ثابت است، عبارت است از

$$x = x_\circ \mathrm{e}^{(at)} \tag{۴۲.۱}$$

حال مساله مقدار اولیه نظیر برای دستگاه $n \times n$، یعنی

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} \quad , \quad \mathbf{x}(\circ) = \mathbf{x}^\circ \tag{۴۳.۱}$$

را در نظر می‌گیریم که در آن A ماتریس ثابت است. با استفاده از نتایج این بخش در مساله (۴۳.۱) می‌توان جوابش را به صورت زیر نوشت

$$\mathbf{x} = \phi(t)\mathbf{x}^\circ$$

که در آن $\phi(\circ) = I$ است. از مقایسه (۴۱.۱) و (۴۳.۱) و جواب‌هایشان برمی‌آید که ماتریس $\phi(t)$ ممکن است ویژگی نمایی داشته باشد. حال این ویژگی را بررسی می کنیم.

ماتریس $e^{(At)}$ در معادله دیفرانسیل زیر صدق می‌کند

$$\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{(At)}$$

همچنین وقتی $t = 0$ است، $e^{(At)}$ در شرایط اولیه

$$e^{(At)}|_{t=0} = I$$

صدق می‌کند. ماتریس اساسی ϕ در همان مساله مقدار اولیه صادق به وسیله $e^{(At)}$، یعنی

$$\phi' = A\phi \quad , \quad \phi(0) = I$$

صدق می‌کند. لذا $e^{(At)}$ را می‌توان با ماتریس اساسی $\phi(t)$ یکسان کرد و جواب مساله مقدار اولیه (۴۳.۱) را به شکل زیر نوشت

$$\mathbf{x} = e^{(At)}\mathbf{x}^{\circ}$$

که شبیه جواب (۴۲.۱) مساله مقدار اولیه (۴۱.۱) است.

فصل ۲

تعمیم ضرایب لاگرانژ در روش تکرار وردشی برای حل دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل خطی و غیر خطی

۱.۲ مقدمه

در این فصل شیوه جدیدی از روش تکرار وردشی با تعمیم ضرایب لاگرانژ ارایه می‌شود که در مقایسه با روش کلاسیک میزان محاسبات کاهش می‌یابد و جواب سریعتر بدست می‌آید. یکی از کاربردهای شیوه جدید استفاده از فرم‌های کانونی جردن برای دستگاه معادلات دیفرانسیل با ضرایب ثابت است. در چنین مواقعی برای یافتن ضربگر لاگرانژ تعمیم یافته در روش تکرار وردشی، مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس ضرایب را محاسبه می‌کنیم و با استفاده از آنها جواب را بدست می‌آوریم.

۲.۲ روش تکرار وردشی :شیوه کلاسیک

برای توصیف روش تکرار وردشی کلاسیک، دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید:

$$Lu(t) + Nu(t) = g(t), \quad t \in I, \tag{۱.۲}$$

که L و N به ترتیب عملگر های خطی و غیر خطی هستند و $g(t)$ تابعی برای $t \in I$ است. روش تکرار وردشی برای معادله (۱.۲) تابعک تصحیح به صورت زیر معرفی می‌کند:

$$u^{n+1}(t) = u^n(t) + \int_{t_0}^{t} \mu\{Lu^n(s) + N\tilde{u}^n(s) - g(s)\}\mathrm{d}s \tag{۲.۲}$$

که $\mu = \mu(s,t)$ ضریب لاگرانژ است که با نظریه وردشی[۱] [۳، ۱۰] تعیین می‌شود. در اینجا $u^n(t)$ بیانگر جواب تقریبی مرحله nام و $\tilde{u}^n(t)$ متغیر محدود نسبت به زمان t، یعنی $\delta\tilde{u}^n(t) = 0$ برای هر

[۱] variational theoty

$n \in \mathbb{N}$ است. متاسفانه هنگامی‌که دستگاه معادلات دیفرانسیل در نظر گرفته می‌شود دو دسته عملگر های خطی و غیر خطی L و N در (۱.۲) نقض می شوند. برای مثال دستگاه زیر شامل m معادله دیفرانسیل غیر خطی مرتبه اول را با شرایط اولیه در نظر بگیرید

$$\begin{aligned}
&\frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1m}x_m + f_1(t, x_1, \ldots, x_m) \\
&\vdots \\
&\frac{dx_m}{dt} = a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mm}x_m + f_m(t, x_1, \ldots, x_m)
\end{aligned} \tag{۳.۲}$$

با شرایط اولیه

$$x_1(t_0) = \alpha_1, \ldots, x_m(t_0) = \alpha_m,$$

که $A(t) = (a_{ij})$ ماتریسی $m \times m$ و $f_j : I \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ توابع غیر خطی برای $1 \le i, j \le m$ است. تابعک اصلاحگر (۲.۲) در روش تکرار وردشی کلاسیک برای هر معادله به‌صورت زیر است

$$\begin{aligned}
x_k^{n+1}(t) =& x_k^n(t) + \int_{t_0}^{t} \mu_k\{(x_k^n)'(s) - a_{k1}(s)\tilde{x}_1^n(s) \\
& - a_{k2}(s)\tilde{x}_2^n(s) - \ldots - a_{k,k-1}(s)\tilde{x}_{k-1}^n(s) \\
& - a_{kk}(s)x_k^n(s) - a_{k,k+1}(s)\tilde{x}_{k+1}(s) \\
& - \ldots - a_{km}(s)\tilde{x}_m^n(s) - \\
& f_k(s, \tilde{x}_1^n(s), \tilde{x}_2^n(s), \ldots, \tilde{x}_1^m(s)\}\mathrm{ds}
\end{aligned} \tag{۴.۲}$$

با تقریب‌های اولیه

$$x_k^0(t) = \alpha_k$$

که $\mu_k = \mu_k(s,t)$ضریب لاگرانژ برای هر $k = 1, 2, \ldots, m$ و $\tilde{x}_i^n(s)$ تغییر محدود برای $i = 1, 2, \ldots, k-1, k+1, \ldots, m$ و $(x_k^n)'(s)$ بیانگر مشتق $dx_k^n(s)/ds$ است. باید توجه داشت که در روش کلاسیک تغییرات محدود را نه تنها در عبارات غیر خطی بلکه در عبارات خطی نیزمی‌توان بکار برد. برای غلبه برچنین نابرابری و کاربرد درست روش، شیوه جدیدی برای VIM ارایه می‌دهیم و دستگاه (۳.۲) را به‌طور کامل در نظر می‌گیریم.

۳.۲ شیوه جدید روش تکرار وردشی: تعمیم ضرایب لاگرانژ

دستگاه (۳.۲) را با در نظر گرفتن ماتریس ثابت $m \times m$

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

بردارهای m تایی

$$\mathbf{x}=(x_۱,\ldots,x_m)^T,\quad \mathbf{x}(t_۰)=\alpha_۰=(\alpha_۱,\ldots,\alpha_m)^T$$

و تابع برداری

$$f(t,\mathbf{x})=\begin{pmatrix} f_۱(t,x_۱,\cdots,x_m)\\ \vdots \\ f_m(t,x_۱,\cdots,x_m)\end{pmatrix},$$

را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\mathbf{x}'(t)=A(t)\mathbf{x}+f(t,\mathbf{x})\quad \mathbf{x}(t_۰)=\alpha_۰ \tag{۵.۲}$$

تابعک تصحیح برای معادله (۵.۲) به صورت زیر است

$$\mathbf{x}^{n+۱}(t)=\mathbf{x}^n(t)+\int_{t_۰}^{t}\Lambda_A(s,t)\{L\mathbf{x}^n(s)+N\tilde{\mathbf{x}}^n(s)\}\mathrm{d}s \tag{۶.۲}$$

که $\Lambda_A=\Lambda_A(s,t)$ ماتریس ضریب لاگرانژ و $L\mathbf{x}=\dfrac{d\mathbf{x}}{dt}-A(t)\mathbf{x}$ و $N\mathbf{x}=-f(t,\mathbf{x})$ به ترتیب عبارات خطی و غیر خطی هستند و $\tilde{\mathbf{x}}^n(s)$ بردار تغییر محدود است. ضریب لاگرانژ $\Lambda_A(s,t)$ تابع ماتریسی $m\times m$ است. Λ_A با حساب تغییرات و با استفاده از انتگرال گیری جز به جز و شرایط پایستاری [۲] به صورت زیر بدست می آید:

$$\delta\mathbf{x}^{n+۱}(t)=\delta\mathbf{x}^n(t)+\delta\int_{t_۰}^{t}\Lambda_A(s,t)\{\frac{d\mathbf{x}^n(s)}{ds}-A(s)\mathbf{x}^n(s)-\tilde{f}(s,\mathbf{x}^n(s))\}\mathrm{d}s \tag{۷.۲}$$

بنابراین

$$\delta\mathbf{x}^{n+۱}(t)=\delta\mathbf{x}^n(t)+\delta\Lambda_A(s,t)\mathbf{x}^n(s)|_{s=t}-\int_{۰}^{t}(\frac{\partial\Lambda'_A(s,t)}{\partial s}+A(s))\delta\mathbf{x}^n(s)\mathrm{d}s \tag{۸.۲}$$

که با اعمال شرایط پایستاری $\delta\mathbf{x}^{n+۱}(t)=۰$ داریم:

$$\begin{aligned}\Lambda'_A(s,t)&=\Lambda_A(s,t)A(s)\\ \Lambda_A(t,t)&=-E\end{aligned} \tag{۹.۲}$$

بنابراین داریم

$$\Lambda_A(s,t)=-\mathrm{e}^{-\mathrm{A(s-t)}},$$

که E ماتریس همانی است.

بجای حل دستگاه (۹.۲) برای محاسبه ضریب لاگرانژ Λ_A، معادله دیفرانسیل ماتریسی

$$X'=A(t)X, \tag{۱۰.۲}$$

را با شرط اولیه

$$X(s)=E, \tag{۱۱.۲}$$

در نظر بگیرید. جواب منحصر به فرد (۱۰.۲) به صورت زیر است

$$X(t)=\phi(t,s):=\phi(t)\phi^{-۱}(s)$$

[۲] stationary conditions

که $\phi(t)$ ماتریس اساسی دستگاه همگن (۵.۲)، یعنی

$$\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x} \tag{۱۲.۲}$$

است. دستگاه الحاقی (۱۰.۲) به صورت زیر تعریف می شود

$$Y' = -A^T(t)Y. \tag{۱۳.۲}$$

اگر علاوه بر این شرط اولیه زیر را اعمال کنیم

$$Y(s) = -E$$

جواب منحصر به فرد دستگاه الحاقی (۱۳.۲) که درشرط $Y(s) = -E$ برای هر $s \in I$ صدق کند به صورت زیر است

$$Y(t) = -\psi(t,s) = -\psi(t)\psi^{-1}(s)$$

که $\psi(t)$ ماتریس اساسی دستگاه الحاقی (۱۲.۲) است که این دستگاه الحاقی به‌صورت

$$\mathbf{y}' = -A^T(t)\mathbf{y}$$

است. داریم $\psi^T(t,s) = \phi^{-1}(t,s)$ که باتوجه به اینکه ماتریس A و $-A^T$ دارای مقادیر ویژه قرینه و بردار های ویژه متعامد هستند این تساوی اثبات می‌شود. ترانهاده دستگاه (۱۳.۲) به صورت زیر خواهد بود

$$Y'^T = -Y^T A(t) \quad ; \quad Y^T(s) = -E$$

که با تغییر متغیر s و t با دستگاه (۹.۲) تطابق دارد، بنابراین

$$Y^T(t) = \Lambda_A(t,s) = -\psi^T(t,s) = -\phi^{-1}(t,s).$$

با توجه به اینکه $\phi^{-1}(t,s) = \phi(s,t)$ گزاره زیر ثابت می‌شود.

گزاره ۱.۳.۲. فرض کنید $\Lambda_A(s,t)$ ضریب لاگرانژ ماتریسی وابسته به تابعک تصحیح (۶.۲) برای معادله دیفرانسیل (۵.۲) باشد، بنابراین

$$\Lambda_A(s,t) = -\phi(t)\phi^{-1}(s) = -\phi(t,s)$$

که $\phi(t)$ ماتریس اساسی معادله همگن خطی (۱۲.۲) است.

نتیجه ۲.۳.۲. فرض کنید $A(t) = A$ ماتریسی ثابت $m \times m$ در (۵.۲) باشد. بنابراین ضریب لاگرانژ متناظر در (۶.۲) به صورت زیر است

$$\Lambda_A(s,t) = -\mathrm{e}^{-\mathrm{A(s-t)}}$$

برهان. ازآنجاییکه $\phi(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{At}}$ ماتریس اساسی است، از (۱.۳.۲) بدست می‌آید که

$$\Lambda_A(s,t) = -\phi(t,s) = -\phi(t)\phi^{-1}(s) = -\mathrm{e}^{\mathrm{At}}\mathrm{e}^{-\mathrm{As}} = -\mathrm{e}^{-\mathrm{A(s-t)}}$$

□

در ادامه، توضیحات و اثبات بدست آمده را برای هنگامیکه معادله دیفرانسیل همگن (۵.۲) ماتریس ضرایب ثابت دارد، ارایه می‌دهیم. بعلاوه روش غیر مستقیمی را توضیح می‌دهیم و برای ضریب لاگرانژ تعمیم یافته اشکال مختلف جردن را فرمول بندی می‌کنیم.

۴.۲ دستگاه معادلات با ضرایب ثابت

در این بخش روش دیگری از VIM را برای حل دستگاه ها به شکل

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + f(t,\mathbf{x}) \quad \mathbf{x}(t_\circ) = \alpha_\circ \tag{۱۴.۲}$$

بیان می‌کنیم، که A ماتریس $m \times m$ ثابت و $f : I \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ تابعی غیر خطی است. بعلاوه نشان می دهیم روش جدید دستگاه (۱۴.۲) را بدون در نظر گرفتن تغییرات محدود در عبارات خطی حل می کند.

اگر چه ضریب لاگرانژ را می توان مستقیما از (۱.۳.۲) یا از (۲.۳.۲) بدست آورد، اما تبدیل $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ را معرفی می کنیم که P ماتریس وارون‌پذیر $m \times m$ است به طوری‌که، ماتریس $J = P^{-1}AP$ شکل جردن ماتریس ضرایب A است.

با جایگذاری $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ در(۱۴.۲) بدست می‌آوریم

$$P\mathbf{y}' = AP\mathbf{y} + f(t, P\mathbf{y})$$

بنابراین

$$\mathbf{y}' = P^{-1}AP\mathbf{y} + P^{-1}f(t, P\mathbf{y})$$

که با توجه به اینکه

$$P^{-1}AP = J$$

داریم

$$\mathbf{y}' = J\mathbf{y} + F(t,\mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(t_\circ) = \beta_\circ \tag{۱۵.۲}$$

که$F(t,\mathbf{y}) = P^{-1}f(t,P\mathbf{y})$ و $\beta_\circ = P^{-1}\alpha_\circ$ است.

با به کاربردن روش تکرار وردشی برای دستگاه (۱۵.۲) تابعک تصحیح زیر را داریم

$$\mathbf{y}^{n+1}(t) = \mathbf{y}^n(t) + \int_{t_\circ}^{t} \Lambda_J\{\ell\mathbf{y}^n(s) + \mathcal{N}\tilde{\mathbf{y}}^n(s)\}\mathrm{d}s \tag{۱۶.۲}$$

که$\Lambda_J = \Lambda_J(s,t)$ ضریب لاگرانژ و$\tilde{\mathbf{y}}^n(s)$ بردار تغییر محدود می‌باشد، یعنی $\delta\tilde{\mathbf{y}}^n(s) = \circ$ برای هر $n \in \mathbb{N}$ که عبارات خطی و غیر خطی به ترتیب به صورت

$$\ell\mathbf{y} = \frac{d\mathbf{y}}{dt} - J\mathbf{y}, \quad \mathcal{N}\mathbf{y} = -F(t,\mathbf{y})$$

است. باید توجه داشت که Λ_J در (۱۶.۲) تابعی ماتریسی $m \times m$ است در حالیکه در روش کلاسیک ضرایب لاگرانژ به صورت اسکالر تعریف می شود. با استفاده از حساب تغییرات در (۱۶.۲) و شرایط پایستاری، بدست می‌آوریم

$$\delta\mathbf{y}^{n+1}(t) = \delta\mathbf{y}^n(t) + \delta\int_{t_\circ}^{t} \Lambda_J(s,t)\{\frac{d\mathbf{y}^n(s)}{ds} - J\mathbf{y}^n(s) - \tilde{F}(s,\mathbf{y}^n(s))\}\mathrm{d}s \tag{۱۷.۲}$$

بنابراین

$$\delta\mathbf{y}^{n+1}(t) = \delta\mathbf{y}^n(t) + \delta\Lambda_J(s,t)\mathbf{y}^n(s)|_{s=t} - \int_{\circ}^{t}(\frac{\partial\Lambda_J'(s,t)}{\partial s} + J\Lambda_J(s,t))\delta\mathbf{y}^n(s)\mathrm{d}s \tag{۱۸.۲}$$

که با اعمال شرایط پایستاری $\delta\mathbf{y}^{n+1}(t) = 0$ داریم:

$$\begin{aligned} \Lambda'_J(s,t) &= -\Lambda_J(s,t)J \\ \Lambda_J(t,t) &= -E \end{aligned} \tag{۱۹.۲}$$

بنابراین جواب یکتای معادله دیفرانسیل ماتریسی در (۱۹.۲) به صورت زیر بدست می‌آید

$$\Lambda_J(s,t) = -\mathrm{e}^{-J(s-t)}$$

در واقع اگر تبدیل $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ را به کار نبریم بنابراین دستگاه (۹.۲) با ماتریس ثابت A حل می‌شود، یعنی

$$\begin{aligned} \Lambda'_A(s,t) &= -\Lambda_A(s,t)A \\ \Lambda_A(t,t) &= -E \end{aligned} \tag{۲۰.۲}$$

برای تعیین ضریب لاگرانژ$\Lambda_A(s,t)$ مانند نتیجه (۲.۳.۲)، $\Lambda_A(s,t) = -\mathrm{e}^{-\mathrm{A(s-t)}}$ بدست می‌آید. بنابراین از آنجاییکه $J = P^{-1}AP$ داریم

$$\begin{aligned} &\Lambda_J(s,t) = -\mathrm{e}^{-J(s-t)} \\ &= -\mathrm{e}^{-\mathrm{P^{-1}Ap(s-t)}} = -(I - P^{-1}AP(s-t) + \frac{P^{-1}A^2P(s-t)}{2!} - \cdots) \\ &= -P^{-1}(I - A(s-t) + \frac{A^2(s-t)}{2!} - \cdots)P = P^{-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{A(s-t)}}P = P^{-1}\Lambda_A(s,t)P \end{aligned}$$

که می‌توان از مقایسه (۱۹.۲) و (۲۰.۲) آنرا بدست آورد. علاوه بر این بدست می‌آید

$$\Lambda_A(s,t) = -\phi(t,s) := -\phi(t)\phi^{-1}(s)$$

زیرا $\phi(t) = \mathrm{e}^{At}$ ماتریس اساسی دستگاه (۱۴.۲) می‌باشد و همچنین گزاره (۱.۳.۲) راتایید می‌کند.

به وضوح از مباحث بالا نتیجه می‌گیریم که

$$\mathbf{y}^{n+1}(t) = \mathbf{y}^n(t) + \int_{t_0}^{t} \Lambda_J(s,t)\{\ell\mathbf{y}^n(s) + \mathcal{N}\mathbf{y}^n(s)\}\mathrm{d}s$$

که همان (۱۶.۲) است. همچنین از آنجاییکه $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ و $\Lambda_J(s,t) = P^{-1}\Lambda_A(s,t)P$ از (۱۶.۲) داریم

$$P^{-1}\mathbf{x}^{n+1}(t) = P^{-1}\mathbf{x}^n(t) + \int_{t_0}^{t} P^{-1}\Lambda_A(s,t)P\{\ell(p^{-1}\mathbf{x}^n(s)) + \mathcal{N}(P^{-1}\mathbf{x}^n(s))\mathrm{d}s$$

بنابراین

$$\mathbf{x}^{n+1}(t) + \mathbf{x}^n(t) + \int_{t_0}^{t} \Lambda_A(s,t)\{P(\ell o P^{-1})\mathbf{x}^n(s) + P(\mathcal{N} o P^{-1})\mathbf{x}^n(s)\}\mathrm{d}s \tag{۲۱.۲}$$

که نماد o نشان دهنده ترکیب است و به صورت زیر تعریف می‌شود

$$(\ell o P^{-1})\mathbf{x} = \ell(P^{-1}\mathbf{x})\ ,\ \ (\mathcal{N} o P^{-1})\mathbf{x} = \mathcal{N}(P^{-1}\mathbf{x})$$

$$L = P(\ell o P^{-1})\ ,\ \ N = P(\mathcal{N} o P^{-1})$$

متاسفانه، چنین روابطی نقض می‌شوند هنگامی‌که VIM برای دستگاه های معادلات دیفرانسیل بکار برده می شود زیرا ضرایب لاگرانژ طبق فرض اسکالر است. بنابراین نتیجه زیر ضرایب لاگرانژ ماتریسی را برای شکل‌های خاص جردن فرمول بندی می کند.

نتیجه ۱.۴.۲. برای $m = 2$ داریم

(۱) اگر $J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ باشد بنابراین

$$\Lambda_J(s,t) = -\begin{pmatrix} e^{-\lambda_1(s-t)} & 0 \\ 0 & e^{-\lambda_2(s-t)} \end{pmatrix}$$

(۲) اگر $J = \begin{pmatrix} \xi & \eta \\ -\eta & \xi \end{pmatrix}$ باشد بنابراین

$$\Lambda_J(s,t) = -e^{-\xi(s-t)} \begin{pmatrix} \cos\eta(s-t) & -\sin\eta(s-t) \\ \sin\eta(s-t) & \cos\eta(s-t) \end{pmatrix}$$

(۳) اگر $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ باشد بنابراین

$$\Lambda_J(s,t) = -e^{-\lambda(s-t)} \begin{pmatrix} 1 & -(s-t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

که $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \xi, \eta$ ثابت‌های وابسته به مقادیر ویژه A هستند.

برهان. (۱) با استفاده از ماتریس نمایی و اینکه هر توان یک ماتریس قطری یک ماتریس قطری است اثبات می‌شود.

(۲) داریم $J = \begin{pmatrix} \xi & \eta \\ -\eta & \xi \end{pmatrix}$ بنابراین مقادیر ویژه این ماتریس $\lambda_1 = \xi + \eta i$ و $\lambda_2 = \xi - \eta i$ هستند.

پس ماتریس J با ماتریس قطری $D = \begin{pmatrix} \xi - \eta i & 0 \\ 0 & \xi + \eta i \end{pmatrix}$ متشابه است. ماتریس‌های p و معکوس آن به صورت زیر است

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-i}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \end{pmatrix}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^J = P\mathrm{e}^D P^{-1} =& \mathrm{e}^{-\xi(s-t)}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i\end{pmatrix}\\ &\begin{pmatrix}\cos\eta(s-t)+i\sin\eta(s-t) & 0 \\ 0 & \cos\eta(s-t)-i\sin\eta(s-t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{-i}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{i}{2}\end{pmatrix}\\ =& \mathrm{e}^{-\xi(s-t)}\begin{pmatrix}\cos\eta(s-t) & \sin\eta(s-t) \\ -\sin\eta(s-t) & \cos\eta(s-t)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

(۳) با استفاده از فرم جردن توابع ماتریسی ثابت می‌شود به این صورت که اگر

$$J = \begin{pmatrix}\lambda & 1 \\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$$

آنگاه داریم

$$f(J) = -\mathrm{e}^{-J(s-t)} = \begin{pmatrix} f(\lambda) & f'\lambda) \\ 0 & f(\lambda)\end{pmatrix} = -\mathrm{e}^{-\lambda(s-t)}\begin{pmatrix} 1 & -(s-t) \\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

□

همچنین توجه داشته باشید که تغییرات محدود تنها در عبارات غیر خطی $N\mathbf{y} = -f(t,\mathbf{y})$ بکار می‌رود. سرانجام با استفاده از تبدیل $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ جواب دستگاه اصلی (۱۴.۲) با تکرارهای (۲۱.۲) بدست می‌آید. تعمیم گزاره بالا برای ابعاد بالاتر بدیهی است زیرا فرم بلوکی جردن برای ماتریس $m\times m$ یکی از همان فرم‌های (۱.۴.۲) است.

برای بدست آوردن شکل جردن J از ماتریس ثابت A در دستگاه معادلات خطی، ابتدا مقدار ویژه و سپس بردارهای ویژه را بدست می‌آوریم که ستون‌های ماتریس تبدیل P را تشکیل می‌دهند.

مثال‌های زیر اهمیت عبارت‌های خطی را برای یافتن ضریب لاگرانژ برای نتیجه (۱.۴.۲) توضیح می‌دهد.

مثال ۲.۴.۲. حالت (۱)، دستگاه زیر را در نظر بگیرید

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -1\end{pmatrix}\mathbf{x} \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix}1 \\ 2\end{pmatrix}\mathbf{x} \tag{۲۲.۲}$$

که جواب آن

$$\mathbf{x}(t) = \left(\mathrm{e}^{-2\mathrm{t}}, 2\mathrm{e}^{-2\mathrm{t}}\right)^T$$

روش کلاسیک مساله. مطابق روش VIM تابعک تصحیح زیر به طور مجزا بدست می‌آید

$$\begin{aligned} x_1^{n+1}(t) &= x_1^n(t) + \int_0^t \mu_1\{(x_1^n)'(s) + \tilde{x}_2^n(s)\}\mathrm{d}s \\ x_2^{n+1}(t) &= x_2^n(t) + \int_0^t \mu_2\{(x_2^n)'(s) + 2\tilde{x}_1^n(s) + x_2^n(s)\}\mathrm{d}s \end{aligned} \tag{۲۳.۲}$$

که $\mu_1 = \mu_1(s,t)$ و $\mu_2 = \mu_2(s,t)$ ضرایب لاگرانژ و$\tilde{x}_1^n(s)$ و $\tilde{x}_2^n(s)$ متغیر های محدودند یعنی $\delta\tilde{x}_1^n(s) = 0$ و $\delta\tilde{x}_2^n(s) = 0$ برای هر $n \in \mathbb{N}$. ضرایب لاگرانژ در روش کلاسیک به صورت

$$\delta x_1^{n+1}(t) = \delta x_1^n(t) + \delta \int_0^t \mu_1\{(x_1^n)'(s) + \tilde{x}_2^n(s)\}\mathrm{d}s$$

می‌باشد، بنابراین

$$\delta x_1^{n+1}(t) = \delta x_1^n(t) + \delta\mu_1(s,t)x_1(s)|_{s=t} - \int_0^t (\frac{\partial \mu_1(s,t)}{\partial s})\delta x_1^n(s)\mathrm{d}s$$

و

$$\delta x_2^{n+1}(t) = \delta x_2^n(t) + \delta \int_0^t \mu_2\{(x_2^n)'(s) + 2\tilde{x}_1^n(s) + x_2^n(s)\}\mathrm{d}s$$

در نتیجه

$$\delta x_2^{(n+1)} = \delta x_2^n(t) + \delta\mu_2(s,t)x_2^n(t) - \int_0^t (\frac{\partial \mu_2}{s} - \mu_2)\delta x_2^n(s)\mathrm{d}s$$

با اعمال شرایط پایستاری $\delta x_1^{(n+1)}(t) = 0$ و $\delta x_2^{(n+1)}(t) = 0$ داریم :

$$\begin{cases} 1 + \mu_1(s,t)|_{t=s} = 0 \\ -\frac{\partial \mu_1}{\partial s} = 0 \end{cases} \tag{۲۴.۲}$$

و

$$\begin{cases} 1 + \mu_2(s,t)|_{t=s} = 0 \\ -\frac{\partial \mu_2}{\partial s} + \mu_2 = 0 \end{cases} \tag{۲۵.۲}$$

که ضرایب لاگرانژ زیر حاصل می‌شود

$$\mu_1(s,t) = -1 \tag{۲۶.۲}$$

و

$$\mu_2(s,t) = -\mathrm{e}^{(s-t)} \tag{۲۷.۲}$$

باجایگذاری این ضرایب در تابعک تصحیح (۲۳.۲) بدست می‌آید

$$\begin{aligned} x_1^{n+1}(t) =& x_1^n(t) - \int_0^t \{(x_1^n)'(s) + \tilde{x}_2^n(s)\}\mathrm{d}s \\ x_2^{n+1}(t) =& x_2^n(t) - \int_0^t \mathrm{e}^{(s-t)}\{(x_2^n)'(s) + 2\tilde{x}_1^n(s) + x_2^n(s)\}\mathrm{d}s \end{aligned} \tag{۲۸.۲}$$

با $n = 1, \cdots, 9$، $x_2^{(0)} = x(0) = 2$ و $x_1^{(0)} = x(0) = 1$ داریم

$$\begin{cases} x_1^1 = 1 - 2t \\ x_2^1 = 2 - 4t \end{cases} \tag{۲۹.۲}$$

$$\begin{cases} x_1^2 = 1 - 2t + 2t^2 \\ x_2^2 = 2 - 4t + 4t^2 \end{cases} \tag{۳۰.۲}$$

$$\begin{cases} x_1^3 = 1 - 2t + 2t^2 - \frac{4}{3}t^3 \\ x_2^3 = 2 - 4t - \frac{4}{3}t^3 \end{cases} \tag{۲.۳۱}$$

و با ادامه دادن این روش وقتی $n = 9$ می‌شود، سری بدست آمده با بسط تیلور جواب دقیق $x_1(t) = e^{-2t}$ و $x_2(t) = 2e^{-2t}$ مطابقت دارد.

روش جدید مساله. با استفاده از تبدیل $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ که $\mathbf{y} = (y_1, y_2)^T$ از (۲.۲۲) بدست می‌آید

$$\mathbf{y}' = J\mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(0) = P^{-1}\mathbf{x}(0)$$

که $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ و $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ و $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ هستند. به عبارت دیگر

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{y} \tag{۲.۳۲}$$

با مقدار اولیه $\mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = (0, 1)^T$. تابعک تصحیح (۲.۳۲) به صورت زیر ساخته می‌شود

$$\mathbf{y}^{n+1}(t) = \mathbf{y}^n(t) + \int_0^t \Lambda_J(s,t)\{(\mathbf{y}^n)'(s) - J\mathbf{y}^n(s)\}\mathrm{d}s \tag{۲.۳۳}$$

که نیاز به تغییرات محدود نیست و ضریب لاگرانژ به صورت زیر است

$$\Lambda_J(s,t) = -\mathrm{e}^{-\mathrm{J}(\mathrm{s}-\mathrm{t})} = -\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-(\mathrm{s}-\mathrm{t})} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{2(\mathrm{s}-\mathrm{t})} \end{pmatrix}$$

از آنجاییکه $P\Lambda_J(s,t)P^{-1} = \Lambda_A(s,t) = -\phi(t,s)$ داریم

$$\Lambda_A(s,t) = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{-(\mathrm{s}-\mathrm{t})} + \mathrm{e}^{2(\mathrm{s}-\mathrm{t})} & -\mathrm{e}^{-(\mathrm{s}-\mathrm{t})} + \mathrm{e}^{2(\mathrm{s}-\mathrm{t})} \\ -2\mathrm{e}^{-(\mathrm{s}-\mathrm{t})} + 2\mathrm{e}^{2(\mathrm{s}-\mathrm{t})} & \mathrm{e}^{-(\mathrm{s}-\mathrm{t})} + 2\mathrm{e}^{2(\mathrm{s}-\mathrm{t})} \end{pmatrix}$$

که با ماتریس های P و $\phi(t)$ بدست می‌آید. حال فرض کنید $\mathbf{y}^0(t) = \mathbf{y}(0)$ جواب تقریبی اولیه باشد، از (۲.۳۳) تقریب مرحله اول بدست می‌آید

$$\mathbf{y}^1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-(\mathrm{s}-\mathrm{t})} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{2(\mathrm{s}-\mathrm{t})} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}s = \left(0, \mathrm{e}^{-2\mathrm{t}}\right)^T$$

با بکار بردن تبدیل $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ تقریب وردشی مرحله اول زیر بدست می‌آید

$$\mathbf{x}^1(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^{-2\mathrm{t}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-2\mathrm{t}} \\ 2\mathrm{e}^{-2\mathrm{t}} \end{pmatrix}$$

بنابراین جواب دقیق مساله (۲.۲۲) همانطورکه انتظار می‌رفت به دلیل عدم تغییرات محدود در عبارات خطی بدست می‌آید.

جدول ۱.۲: مقایسه روش جدید و کلاسیک VIM برای(۲۲.۲)

n	ϵ_1^{VIM}	ϵ_2^{VIM}	ϵ_1^{GVIM}	ϵ_2^{GVIM}
۱	۱٫۱۳۵۳	۰٫۷۹۹۲	۰٫۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۰
۲	۰٫۳۳۶۲	۰٫۶۷۲۴		
۳	۰٫۱۱۹۲۳	۰٫۱۵۶۷		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
۷	۰٫۰۰۰۵			
۸	۰٫۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۱		
۹		۰٫۰۰۰۰		

جدول (۱.۲) خطاهای مطلق تقریبهای بدست آمده مرتبه n ام شیوه کلاسیک و جدید را نشان می‌دهد. از این پس تعریف می‌کنیم

$$\epsilon_i^{VIM}(t) = |x_i^E(t) - x_i^{VIM}(t)|, \quad \epsilon_i^{GVIM}(t) = |x_i^E(t) - x_i^{GVIM}(t)|, \quad i = 1, 2$$

که $x_i^E(t) = x_i(1)$ جواب دقیق و x_i^{VIM} و x_i^{GVIM} به ترتیب جوابهای تقریبی بدست آمده از (۲۸.۲) و (۳۳.۲) در $t = 1$ است.

مثال ۳.۴.۲. حالت (۲)، دستگاه زیر را در نظر بگیرید

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{۳۴.۲}$$

روش کلاسیک. مطابق روش VIM تابعک تصحیح زیر به طور مجزا بدست می‌آید

$$\begin{aligned} x_1^{(n+1)}(t) =& x_1^n(t) + \int_0^t \mu_1\{(x_1^n)'(s) - 7x_1^n(s) + 5\tilde{x}_2^n(s)\}\mathrm{d}s \\ x_2^{(n+1)}(t) =& x_2^n(t) + \int_0^t \mu_2\{(x_2^n)'(s) - 5\tilde{x}_1^n(s) + x_2^n(s)\}\mathrm{d}s \end{aligned} \tag{۳۵.۲}$$

که $\mu_1 = \mu_1(s,t)$ و $\mu_2 = \mu_2(s,t)$ ضرایب لاگرانژ و $\tilde{x}_1^n(s)$ و $\tilde{x}_2^n(s)$ متغیر های محدودند یعنی $\delta\tilde{x}_1^n(s) = 0$ و $\tilde{x}_2^n(s) = 0$ برای هر $n \in \mathbb{N}$. ضرایب لاگرانژدر کلاسیک به صورت زیر بدست می‌آید

$$\delta x_1^{n+1}(t) = \delta x_1^n(t) + \delta \int_0^t \mu_1\{(x_1^n)'(s) - 7x_1^n(s) + 5\tilde{x}_2^n(s)\}\mathrm{d}s$$

بنابراین

$$\delta x_1^{n+1}(t) = \delta x_1^n(t) + \delta\mu_1(s,t)x_1^n(t)|_{s=t} - \int_0^t (\frac{\partial \mu_1(s,t)}{\partial s} + 7\mu_1(s,t))\delta x_1^n(s)\mathrm{d}s$$

و

$$\delta x_2^{(n+1)}(t) = \delta x_2^n(t) + \delta \int_0^t \mu_2\{(x_2^n)'(s) - 5\tilde{x}_1^n(s) + x_2^n(s)\}\mathrm{d}s$$

سپس

$$\delta x_2^{n+1}(t) = \delta x_2^n(t) + \delta\mu_2(s,t)x_2^n(t)|_{s=t} - \int_0^t (\frac{\partial \mu_2(s,t)}{\partial s} - \mu_2(s,t))\delta x_2^n(s)\mathrm{d}s$$

با اعمال شرایط پایستاری $\delta x_1^{(n+1)}(t) = 0$ و $\delta x_2^{(n+1)}(t) = 0$، داریم :

$$\begin{cases} 1 + \mu_1(s,t)|_{t=s} = 0 \\ -7\mu_1 - \frac{\partial \mu_1}{\partial s} = 0 \end{cases} \tag{۳۶.۲}$$

و

$$\begin{cases} 1 + \mu_2(s,t)|_{t=s} = 0 \\ \mu_2 - \frac{\partial \mu_2}{\partial s} = 0 \end{cases} \tag{۳۷.۲}$$

که ضرایب لاگرانژ به صورت زیر بدست می‌آیند.

$$\begin{cases} \mu_1(s,t) = -\mathrm{e}^{7(t-s)} \\ \mu_2(s,t) = \mathrm{e}^{(s-t)} \end{cases} \tag{۳۸.۲}$$

باجایگذاری این ضرایب در تابعک تصحیح (۳۵.۲) بدست می‌آید

$$\begin{aligned} x_1^{(n+1)}(t) =& x_1^n(t) + \int_0^t -\mathrm{e}^{7(t-s)}\{(x_1^n)'(s) - 7x_1^n(s) + 5\tilde{x}_2^n(s)\}\mathrm{d}s \\ x_2^{(n+1)}(t) =& x_2^n(t) + \int_0^t \mathrm{e}^{(t-s)}\{(x_2^n)'(s) - 5\tilde{x}_1^n(s) + x_2^n(s)\}\mathrm{d}s \end{aligned} \tag{۳۹.۲}$$

با $n = 1, \cdots, 22$، $x_2(0) = x(0) = 0$ و $x_1(0) = x(0) = 1$ داریم

$$\begin{cases} x_1^1 = 1 + 7t \\ x_1^1 = -5t \end{cases} \tag{۴۰.۲}$$

$$\begin{cases} x_2^2 = 1 + 7t + 37t^2 \\ x_1^2 = -15t - 20t^2 \end{cases} \tag{۴۱.۲}$$

$$\begin{cases} x_1^3 = 1 + 7t + 37t^2 + 62t^2 + \frac{359}{3}t^3 \\ x_1^3 = -35t - 65t^2 - \frac{205}{3}t^3 \end{cases} \tag{۴۲.۲}$$

و با ادامه دادن این روش برای $n = 22$، سری بدست آمده، بسط تیلور جواب دقیق $x_1(t) = \mathrm{e}^t(\frac{4}{3}\sin(3t) + \cos(3t))$ و $x_2(t) = \frac{5}{3}\mathrm{e}^{3t}\sin(3t)$ خواهد بود.

روش جدید. برای بدست آوردن بردار ویژه داریم $(A - \lambda I)\mathbf{x} = 0$
بنابراین

$$\begin{bmatrix} 4 - 3i & -5 \\ 5 & -4 - 3i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

که از اینجا بردار ویژه زیر را بدست می‌آوریم

$$v = \begin{bmatrix} \frac{4+3i}{5} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ 1 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ 0 \end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس $P = \begin{bmatrix} \frac{۳}{۵} & \frac{۴}{۵} \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ بدست می‌آید. مقادیر ویژه مختلط ماتریس ضرایب A، $۳ \mp ۳i$ هستند با معرفی تبدیل $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ بدست می آوریم

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} ۳ & ۳ \\ -۳ & ۳ \end{pmatrix} \mathbf{y}$$

با اعمال شرط اولیه $\mathbf{y}(۰) = P^{-۱}\mathbf{x}(۰) = (۰, ۵/۳)^T$ و با استفاده از شیوه جدید روش تکرار وردشی تابعک تصحیح زیر را داریم

$$\mathbf{y}^{n+۱}(t) = \mathbf{y}^n(t) + \int_۰^t \Lambda_J(s,t)\{(\mathbf{y}^n)'(s) - J\mathbf{y}^n(s)\}\mathrm{d}s \qquad (۴۳.۲)$$

و ضریب لاگرانژ

$$\Lambda_J(s,t) = -\mathrm{e}^{-۳(\mathrm{s}-\mathrm{t})} \begin{pmatrix} \cos ۳(s-t) & -\sin ۳(s-t) \\ \sin ۳(s-t) & \cos ۳(s-t) \end{pmatrix}$$

با استفاده از تقریب اولیه $\mathbf{y}^۰(t) = (۰, ۵/۳)^T$ در (۴۳.۲) برای $n = ۰$ داریم

$$\mathbf{y}^۱(t) = (۵/۳\mathrm{e}^{۳\mathrm{t}} \sin ۳t, ۵/۳\mathrm{e}^{۳\mathrm{t}} \cos ۳t)^T$$

بنابراین

$$\mathbf{x}^۱(t) = (\mathrm{e}^{۳\mathrm{t}}(۴/۳ \sin ۳t + \cos ۳t), ۵/۳\mathrm{e}^{۳\mathrm{t}} \sin ۳t)^T$$

که جواب دقیق (۳۴.۲) است. مانند جدول (۱.۲) در(۲.۲) نتایج عددی حاصل از روش کلاسیک و روش جدیدVIM مقایسه می‌شود.

جدول ۲.۲: مقایسه روش جدید وکلاسیک VIM برای(۳۴.۲)

n	$\epsilon_۱^{VIM}$	$\epsilon_۲^{VIM}$	$\epsilon_۱^{GVIM}$	$\epsilon_۲^{GVIM}$
۱	۱۱۱۲٫۷۳۸۴	۱٫۵۶۳۵	۰٫۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۰
۲	۰٫۳۳۶۲	۰٫۶۷۲۴		
۳	۶۲۵٫۵۹۱۸	۶۸۰٫۴۴۱۷		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
۲۲	۰٫۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۰		

مثال ۴.۴.۲. حالت (۳)، حال دستگاه زیر را در نظر بگیرید

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -۱۱ & ۱۶ \\ -۹ & ۱۳ \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad \mathbf{x}(۰) = \begin{pmatrix} ۱ \\ ۱ \end{pmatrix} \qquad (۴۴.۲)$$

که جواب آن به صورت زیر است

$$\mathbf{x}(t) = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{t}}(۱ + ۴\mathrm{t}), \mathrm{e}^{\mathrm{t}}(۱ + ۳\mathrm{t})\right)^T$$

مطابق روش VIM تابعک تصحیح زیر به طور مجزا بدست می‌آید

$$x_1^{n+1}(t)=x_1^n(t)+\int_0^t \mu_1\{(x_1^n)'(s)+11x_1^n(s)-16\tilde{x}_2^n(s)\}\mathrm{d}s$$
$$x_2^{n+1}(t)=x_2^n(t)+\int_0^t \mu_2\{(x_2^n)'(s)+9\tilde{x}_1^n(s)-13x_2^n(s)\}\mathrm{d}s \qquad (۴۵.۲)$$

که $\mu_1=\mu_1(s,t)$ و $\mu_2=\mu_2(s,t)$ ضرایب لاگرانژ و $\tilde{x}_1^n(s)$ و $\tilde{x}_2^n(s)$ متغیر های محدودند یعنی $\delta\tilde{x}_1^n(s)=0$ و $\delta\tilde{x}_2^n(s)=0$ برای هر $n\in\mathbb{N}$ است. ضرایب لاگرانژ در روش کلاسیک به صورت زیر بدست می‌آید

$$\delta x_1^{n+1}(t)=\delta x_1^n(t)+\delta\int_0^t \mu_1\{(x_1^n)'(s)+11x_1^n(s)-16\tilde{x}_2^n(s)\}\mathrm{d}s$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\delta x_1^{n+1}(t)=&\delta x_1^n(t)+\delta\mu_1(s,t)x_1(t)|_{s=t}-\int_0^t(\frac{\partial\mu_1(s,t)}{\partial s})\delta x_1^n(s)\mathrm{d}s\\&+\int_0^t\mu_1(s,t)\delta 11x_1^n(s)\mathrm{d}s\end{aligned}$$

و

$$\delta x_2^{n+1}(t)=\delta x_2^n(t)+\delta\int_0^t \mu_2\{(x_2^n)'(s)+9\tilde{x}_1^n(s)-13x_2^n(s)\}\mathrm{d}s$$

سپس

$$\begin{aligned}\delta x_2^{n+1}(t)=&\delta x_2^n(t)+\delta\mu_2(s,t)x_2(t)|_{s=t}-\int_0^t(\frac{\partial\mu_2(s,t)}{\partial s})\delta x_2^n(s)\mathrm{d}s\\&-\int_0^t\mu_2(s,t)\delta 13x_2^n(s)\mathrm{d}s\end{aligned}$$

با اعمال شرایط پایستاری $\delta x_1^{(n+1)}(t)=0$ و $\delta x_2^{(n+1)}(t)=0$ داریم

$$\begin{cases}1+\mu_1(s,t)|_{t=s}=0\\ -\frac{\partial\mu_1}{\partial s}+11\mu_1|_{s=t}=0\end{cases} \qquad (۴۶.۲)$$

و

$$\begin{cases}1+\mu_2(s,t)|_{t=s}=0\\ -\frac{\partial\mu_2}{\partial s}-13\mu_2|_{s=t}=0\end{cases} \qquad (۴۷.۲)$$

که ضرایب لاگرانژ به صورت زیر حاصل می‌شوند

$$\mu_1(s,t)=-\mathrm{e}^{11(s-t)} \qquad (۴۸.۲)$$

و

$$\mu_2(s,t)=-\mathrm{e}^{13(t-s)} \qquad (۴۹.۲)$$

باجایگذاری این ضرایب در تابعک تصحیح (۴۵.۲) بدست می‌آید

$$x_1^{n+1}(t)=x_1^n(t)+\int_0^t -\mathrm{e}^{11(s-t)}\{(x_1^n)'(s)+11x_1^n(s)-16\tilde{x}_2^n(s)\}\mathrm{d}s$$

$$x_2^{n+1}(t) = x_2^n(t) + \int_0^t -\mathrm{e}^{13(t-s)}\{(x_2^n)'(s) + 9\tilde{x}_1^n(s) - 13x_2^n(s)\}\mathrm{d}s$$

با $n = 0, \cdots, 39$، $x_1^{(0)} = x_1(0) = 1$ و $x_2^{(0)} = x_2(0) = 1$ داریم

$$\begin{cases} x_1^1 = 1 + 5t \\ x_2^1 = 1 + 4t \end{cases} \tag{۵۰.۲}$$

$$\begin{cases} x_1^1 = 1 + 5t + \frac{9}{2}t^2 \\ x_2^1 = 1 + 4t + \frac{7}{2}t^2 \end{cases} \tag{۵۱.۲}$$

$$\begin{cases} x_1^1 = 1 + 5t + \frac{9}{2}t^2 + \frac{13}{6}t^3 \\ x_2^1 = 1 + 4t + \frac{7}{2}t^2 \end{cases} \tag{۵۲.۲}$$

که با ادامه روش دادن وقتی به $n = 39$ می‌رسیم، سری حاصل بسط تیلور جواب دقیق $x_1(t) = \mathrm{e}^t(1+4t)$ و $x_2(t) = \mathrm{e}^t(1+3t)$ است.

روش جدید. مقادیر ویژه تکراری ماتریس A ، $\lambda_{1,2} = 1$ است که برای بدست آوردن بردارهای ویژه داریم

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = 0$$

بنابراین بردار ویژه اول به صورت

$$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

است برای بدست آوردن بردار ویژه دوم از بردار ویژه تعمیم یافته استفاده می‌کنیم، بنابراین

$$(A - \lambda I)v_2 = v_1$$

که v_2 بردار ویژه تعمیم یافته است و به صورت زیر حاصل می‌شود

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

بنابراین $P = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & 1 \\ 1 & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$ و $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{15}{2} & -9 \\ -9 & 12 \end{pmatrix}$ است. برای بدست آوردن ماتریس جردن داریم

$$P^{-1}AP = J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

به عبارت دیگر

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{y} \tag{۵۳.۲}$$

با مقدار اولیه $\mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} \frac{15}{2} & -9 \\ -9 & 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = (-\frac{3}{2}, 3)^T$. تابعک تصحیح (۵۳.۲) به صورت

$$\mathbf{y}^{n+1}(t) = \mathbf{y}^n(t) + \int_0^t \Lambda_J(s,t)\{(\mathbf{y}^n)'(s) - J\mathbf{y}^n(s)\}\mathrm{d}s \tag{۵۴.۲}$$

است که نیاز به تغییرات محدود نیست و ضریب لاگرانژ به صورت زیر است

$$\Lambda_J(s,t) = -\mathrm{e}^{-(\mathrm{s-t})}\begin{pmatrix} ۱ & -(s-t) \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

از آنجاییکه $P\Lambda_J(s,t)P^{-۱} = \Lambda_A(s,t) = -\phi(t,s)$ داریم

$$\Lambda_A(s,t) = -\frac{۱}{۳}\begin{pmatrix} -۱۲(s-t)\mathrm{e}^{-(\mathrm{s-t})} - \mathrm{e}^{(\mathrm{s-t})} & ۱۶(s-t)\mathrm{e}^{(\mathrm{s-t})} \\ -۹(s-t)\mathrm{e}^{-(\mathrm{s-t})} & -\mathrm{e}^{(\mathrm{s-t})} + ۱۲(s-t)\mathrm{e}^{۲(\mathrm{s-t})} \end{pmatrix}$$

که با ماتریس های P و$\phi(t)$ تعیین می‌شود. حال فرض کنید $\mathbf{y}^{۰}(t) = \mathbf{y}(۰)$ جواب تقریبی اولیه باشد، از (۵۴.۲) تقریب مرحله اول زیر بدست می‌آید

$$\begin{aligned}\mathbf{y}^{۱}(t) &= \begin{pmatrix} -\frac{۳}{۲} \\ ۳ \end{pmatrix} + \int_{۰}^{t}\begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{-(\mathrm{s-t})} & -\mathrm{e}^{-(\mathrm{s-t})}(s-t) \\ ۰ & -\mathrm{e}^{(\mathrm{s-t})} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{۳}{۲} \\ ۳ \end{pmatrix}\mathrm{d}s \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{۳}{۲}\mathrm{e}^{t} + ۳t\mathrm{e}^{t} \\ ۳\mathrm{e}^{t} \end{pmatrix}^{T}\end{aligned}$$

با بکار بردن تبدیل $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ تقریب وردشی مرحله اول زیر بدست می‌آید

$$\mathbf{x}^{۱}(t) = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{t}}(۱+۴\mathrm{t}), \mathrm{e}^{\mathrm{t}}(۱+۳\mathrm{t})\right)^{T}$$

که همان جواب دقیق دستگاه (۴۴.۲) است. برای مقایسه شیوه جدید و کلاسیک جدول (۳.۲) را ببینید

جدول ۳.۲: مقایسه روش جدید وکلاسیک VIM برای (۴۴.۲)

n	$\epsilon_۱^{VIM}$	$\epsilon_۲^{VIM}$	$\epsilon_۱^{GVIM}$	$\epsilon_۲^{GVIM}$
۱	۱۲/۱۳۶۹	۱۳۶۱۱۷/۰۱۶۷	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰
۲	۹۰۷۳۸/۸۸۰۶	۷۲۳۰۷/۷۰۷۶		
۳	۴۸۱۹۹/۵۸۹۰	۶۴۷۵۳۶/۰۵۰۸		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
۳۹	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰		

۵.۲ معادلات با ضرایب متغیر

در بخش‌های قبلی روش را برای معادلات باضرایب ثابت بکار می‌بردیم اما می‌توان آنرا برای معادلات با ضرایب متغیر نیز گسترش داد.

در این بخش معادلات خطی با ضرایب متغیر و همچنین معادلات غیر خطی با ضرایب متغیر را بررسی می‌کنیم. در حقیقت استفاده از تعمیم ضریب لاگرانژ حتی در معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب غیر ثابت حایز اهمیت است، وقتی به‌درستی تقریب شود. بعلاوه با روش ارایه شده، به‌ویژه در ترکیب با مدل چند مرحله‌ای ($MGVIM$) نتایج قابل ملاحظه‌ای در موارد غیر خطی حاصل می‌شود.

مثال ۱.۵.۲. معادله کوشی اویلر زیر را

$$t^۲x'' - ۳tx' + ۴x = t \tag{۵۵.۲}$$

با شرط اولیه $x'(۱) = ۲$، $x(۱) = ۲$ در نظر بگیرید.

برای حل معادله اویلر داریم

$$D(D-۱)y(x) - ۳Dy(x) + ۴y(x) = ۰$$

یا

$$(D^۲ - ۴D + ۴)y(t) = ۰$$

بنابراین معادله مفسر قسمت همگن معادله، یعنی $r^۲ - ۴r + ۴ = ۰$ دارای یک ریشه مضاعف $r = ۲$ است، لذا جواب عمومی به صورت زیر می‌باشد

$$y(x) = c_۱\mathrm{e}^{۲x} + c_۲x\mathrm{e}^{۲x}$$

با توجه به تغییر متغیر $x = \ln t$ داریم

$$x_۱ = \mathrm{e}^{۲x} = t^۲ \qquad x_۲ = x\mathrm{e}^{۲x} = t^۲\ln t$$

حال با استفاده از تبدیل $x_۱ = x$ و $x_۲ = x'$ از معادله (۵۵.۲) و شرایط اولیه بدست می‌آوریم

$$\mathbf{x}'(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + f(t,\mathbf{x}(t)) \quad \mathbf{x}(۱) = (۲,۲)^T \tag{۵۶.۲}$$

که

$$A(t) = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ -\frac{۴}{t^۲} & \frac{۳}{t} \end{pmatrix} \quad f(t,\mathbf{x}(t)) = \begin{pmatrix} ۰ \\ \frac{۱}{t} \end{pmatrix}$$

برای دستگاه همگن $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}(t)$ ماتریس اساسی $\phi(t)$ به صورت زیر است

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} t^۲ & t^۲\ln(t) \\ ۲t & ۲t\ln(t) + t \end{pmatrix}$$

که جواب (۵۶.۲) به صورت زیر بدست می‌آید

$$\mathbf{x}(t) = \left(t^۲ - \ln(t)t^۲ + t, t - ۲t\ln(t) + ۱\right)^T$$

برای جواب تقریبی با استفاده از VIM تابعک تصحیح زیر را داریم

$$\begin{aligned} x_۱^{n+۱}(t) &= x_۱^n(t) + \int_۱^t \mu_۱\{(x_۱^n)'(s) - \tilde{x}_۲^n(s)\}\mathrm{d}s \\ x_۲^{n+۱}(t) &= x_۲^n(t) + \int_۱^t \mu_۲\{(x_۲^n)'(s) + \frac{۴\tilde{x}_۱^n(s)}{s^۲} - \frac{۳\tilde{x}_۲^n(s)}{s} - \frac{۱}{s}\}\mathrm{d}s \end{aligned} \tag{۵۷.۲}$$

که $\mu_۱ = \mu_۱(s,t)$ و$\mu_۲ = \mu_۲(s,t)$ ضرایب لاگرانژ و$\tilde{x}_۱^n(s)$ و$\tilde{x}_۲^n(s)$ متغیر های محدودند یعنی $\delta\tilde{x}_۱^n(s) = ۰$ و $\tilde{x}_۲^n(s) = ۰$ برای هر $n \in \mathbb{N}$. ضرایب لاگرانژدر روش کلاسیک به صورت زیر بدست می‌آید

$$\delta x_۱^{n+۱}(t) = \delta x_۱^n(t) + \delta\int_۰^t \mu_۱\{(x_۱^n)'(s) - \tilde{x}_۲^n(s)\}\mathrm{d}s$$

بنابراین

$$\delta x_1^{n+1}(t) = \delta x_1^n(t) + \delta\mu_1(s,t)x_1(t)|_{s=t} - \int_0^t (\frac{\partial\mu_1(s,t)}{\partial s})\delta x_1^n(s)\mathrm{d}s$$

و

$$\delta x_2^{n+1}(t) = \delta x_2^{n+1}(t) + \delta\int_1^t \mu_2\{(x_2^n)'(s) + \frac{4\tilde{x}_1^n(s)}{s^2} - \frac{3\tilde{x}_2^n(s)}{s} - \frac{1}{\tilde{s}}\}$$

بنابراین

$$\delta x_2^{n+1}(t) = \delta x_2^n(t) + \delta\mu_2(s,t)x_2^n(t)|_{s=t} - \int_1^t (\frac{\partial\mu_2(s,t)}{\partial s})\delta x_2^n(s)\mathrm{d}s$$

با اعمال شرایط پایستاری $\delta x_1^{(n+1)}(t) = 0$ و $\delta x_2^{(n+1)}(t) = 0$ داریم :

$$\begin{cases} 1 + \mu_1(s,t)|_{t=s} = 0 \\ -\frac{\partial\mu_1}{\partial s} = 0 \end{cases} \tag{۵۸.۲}$$

و

$$\begin{cases} 1 + \mu_2(s,t)|_{t=s} = 0 \\ -\frac{\partial\mu_2}{\partial s} = 0 \end{cases} \tag{۵۹.۲}$$

که $\mu_1(s,t) = -1$ و $\mu_2(s,t) = -1$ بدست می‌آید.

باجایگذاری این ضرایب در تابعک تصحیح (۴۵.۲) بدست می‌آید

$$x_1^{n+1}(t) = x_1^n(t) - \int_0^t \{(x_1^n)'(s) - x_2^n(s)\}\}\mathrm{d}s$$
$$x_2^{n+1}(t) = x_2^n(t) - \int_1^t \mu_2\{(x_2^n)'(s) + \frac{4\tilde{x}_1^n(s)}{s^2} - \frac{3\tilde{x}_2^n(s)}{s} - \frac{1}{\tilde{s}}\}$$

با $x_1^{(0)} = x_1(0) = 1$ و $x_2^{(0)} = x_2(0) = 1$ داریم

$$\begin{cases} x_1^1 = 2t \\ x_2^1 = 2 + \frac{-8t+7t\ln(t)+8}{t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^2 = -13t + 15 + 7t\ln(t) + 8\ln(t) \\ x_2^2 = 2 + \frac{-8t+7t\ln(t)+8}{t} + \frac{64t+21\ln(t)^2t-64t\ln(t)-6}{2t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^3 = 72t - 70 - 46t\ln(t) - 24\ln(t) + \frac{21}{2}\ln(t)^2t \\ x_2^3 = 2 + \frac{-8t+7t\ln(t)+8}{t} + \frac{64t+21\ln(t)^2t-64t\ln(t)-6}{2t} + \cdots \end{cases}$$

و با ادامه دادن این روش وقتی $n = 5$ می‌شود، سری بدست آمده، بسط تیلور جواب دقیق $x_1(t) = t^2 - \ln(t)t^2 + t$ و $x_2(t) = t - 2t\ln(t) + t$ است.

شیوه جدید . در روش جدید با تعمیم ضرایب لاگرانژ تابعک تصحیح زیر را داریم

$$\mathbf{x}^{n+1}(t) = \mathbf{x}^n(t) + \int_1^t \Lambda_A(s,t)\{(\mathbf{x}^n)'(s) - A(s)\mathbf{x}^n(s) - \tilde{f}(s,\mathbf{x}^n(s))\mathrm{d}s\}$$

که $\tilde{f}(s,x^n(s))$ بیانگر متغیر محدود است. در اینجا ضربگر لاگرانژ $\Lambda_A(s,t) = -\phi(t,s) = -\phi(t)\phi^{-1}(t)$

$$\Lambda_A(s,t) = -\begin{pmatrix} \frac{t^2}{s^2}(1+2\ln(s)) - \frac{2t^2}{s^2}\ln(t) & \frac{t^2}{s}(\ln(t)-\ln(s)) \\ \frac{4t}{s^2}(\ln(s)-\ln(t)) & \frac{2t}{s}(\ln(t)-\ln(s)) + \frac{t}{s} \end{pmatrix}$$

که با استفاده از آن می‌توان جواب دقیق را به صورت زیر در یک تکرار بدست آورد

$$\mathbf{x}^1(t) = \mathbf{x}^0(t) + \int_1^t \begin{pmatrix} \frac{t^2}{s^2}(1+2\ln(s)) - \frac{2t^2}{s^2}\ln(t) & \frac{t^2}{s}(\ln(t)-\ln(s)) \\ \frac{4t}{s^2}(\ln(s)-\ln(t)) & \frac{2t}{s}(\ln(t)-\ln(s)) + \frac{t}{s} \end{pmatrix}$$
$$\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{4}{s^2} & \frac{3}{s} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{s} \end{pmatrix}\}\mathrm{d}s = (t^2 - \ln(t)t^2 + t, t - 2t\ln(t) + 1)^T$$

که جواب دقیق در یک تکرار بدست می‌آید. جدول (۴.۲) خطای مطلق تکرار مرتبه پنجم را برای VIM و $GVIM$ برای برخی مقادیر $t \in [1,4]$ نشان می‌دهد.

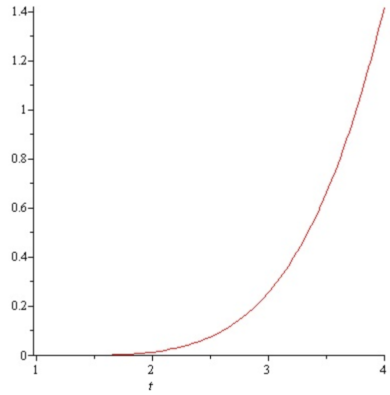
$$\epsilon_i^{VIM}(t) = |x_i^E(t) - x_i^{VIM}(t)|, \quad \epsilon_i^{GVIM}(t) = |x_i^E(t) - x_i^{GVIM}(t)|, \quad i = 1,2$$

که $x_i^{VIM}(t)$ و x_i^{GVIM} به‌ترتیب بیانگر جواب تقریبی بدست آمده از VIM و $GVIM$ برای تکرارهای مرتبه پنجم و x_i^E بیانگر مقادیر جواب دقیق در t برای $i = 1,2$ است. بعلاوه در جدول (۴.۲) نشان می‌دهیم

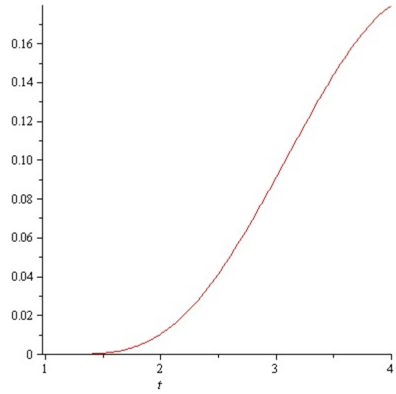
$$\epsilon^{VIM}(t) = \|x^E(t) - x^{VIM}(t)\|_2, \quad \epsilon^{GVIM}(t) = \|x^E(t) - x^{GVIM}(t)\|_2,$$

جدول ۴.۲: مقایسه روش جدید وکلاسیک VIM برای (۵۶.۲)

t	ϵ_1^{VIM}	ϵ_1^{GVIM}	ϵ_2^{VIM}	ϵ_2^{GVIM}
۱	۰	۰	۰	۰
۱/۵	۰/۰۰۰۲		۰/۰۰۰۵	
۲	۰/۰۰۸۴		۰/۰۱۰۵	
۲/۵	۰/۰۰۰۲		۰/۰۰۰۵	
۳	۰/۲۳۹۹		۰/۰۹۱۴	
۳/۵	۰/۶۴۶۸		۰/۱۴۴۵	
۴	۱/۴۰۸۱		۰/۱۸۰۲	



شکل ۱.۲: ϵ_1^{VIM} در زمان ۴ , $t = 1,\cdots$



شکل ۲.۲: ϵ_2^{VIM} در زمان ۴ , $t = 1,\cdots$

۶.۲ روش تکرار وردشی چند مرحله‌ای

روش تکرار وردشی برای tهای بزرگ در برخی دستگاه‌ها موثر نیست، برای حل این دستگاه‌ها از روش تکرار وردشی چند مرحله‌ای استفاده می‌کنیم. روش تکرار وردشی چند مرحله‌ای[۳] یا $MVIM$ اولین بار توسط باتیها و همکارانش برای دستگاه معادلات دیفرانسیل غیر خطی معرفی شده است. این روش توسط محققانی که روش ADM یا روش آدومیان مرکب چند مرحله‌ای را برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی و غیر خطی استفاده می‌کردند، به وجود آمده است. این روش اصلاحی ساده از VIM استاندارد است. در انتگرال موجود در تابعک تصحیح (۲.۲) با حد پایین ثابت صفر، متغیر $t^\star$ را بجای آن استفاده می‌کنیم، بنابراین داریم

$$x_{n+1}(t) = x_n(t) + \int_{t^\star}^{t} \lambda\{Lx_n(s) + N\tilde{x}_n(s) - g(s)\}\mathrm{d}s \qquad (۶۰.۲)$$

که $t^\star$ محاسبات را در هر تکرار بنا به اندازه زمان معین افزایش می‌دهد. در این روش بازه $[t_0, T]$ را به $m+1$ زیر بازه $[t_0,t_1),[t_1,t_2),\ldots,[t_m,t_{m+1})$ افراز می‌کنیم و برای هر زیر بازه، رابطه بازگشتی

[۳] multistage variational iteration method

(۶۰.۲) را بکار می‌بریم و $t_{m+1}=t$ قرار می‌دهیم. در(۶۰.۲) ، t^* را نقاط مرزی چپ زیر بازه‌ها و درون هر بازه $[t^*,t_k)$ با $1 \le k \le m+1$ انتخاب می‌کنیم. جواب تقریبی اولیه $x^n(t^\star)$ از زیر بازه قبلی یا شرط اولیه بدست می‌آید که این باعث افزایش سرعت در رسیدن به جواب می‌شود، خطا کاهش می‌یابد اما عیب این روش این است که محاسبات در زمان طولانی‌تری نسبت به VIM انجام می‌شود.

در [۸] گنگ [۴] تبدیل خاصی از VIMرا برای معادله ریکارتی به شکل زیر ارایه داد.

۷.۲ روش تکرار وردشی اصلاح شده

عیب اصلی روش تکرار وردشی این است که دنباله تقریب‌های متوالی جواب بدست آمده در ناحیه کوچکی همگراست که دامنه کارایی روش را محدود می‌کند. برای افزایش ناحیه همگرایی دنباله تقریب‌های متوالی بدست آمده روش تکرار وردشی را با معرفی یک پارامتر معین اصلاح می‌کنیم. معادله (۱.۲) را دوباره به صورت زیر می‌نویسیم

$$Lx-Lx+\gamma[Lx+Nx-g(s)]=0$$

که γ پارامتر معین و $\gamma\neq 0$ که برای اصلاح ناحیه همگرایی فرمول تکراری زیر استفاده می‌شود. تابعک تصحیح (۲.۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$x_{n+1}(t)=x_n(t)+\int_0^t \lambda\{Lx_n(s)-Lx_n(s)+\gamma[L\tilde{x}_n(s)+N\tilde{x}_n(s)-g(s)]\}\mathrm{d}s$$

که λ ضریب لاگرانژ است و از طریق نظریه وردشی تعیین می‌شود و $\tilde{x}_n$ متغیر محدود است یعنی $\delta\tilde{x}_n=0$ است.

مطابق روش تکرار وردشی تابعک تصحیح زیر را داریم

$$x_{n+1}(t)=x_n(t)+\gamma\int_0^t \lambda(s,t)[Lx_n(s)+Nx_n(s)-g(s)]\mathrm{d}s,\quad n=0,1,2,\cdots \tag{۶۱.۲}$$

که با انتخاب مقدار کوچکتر $|\gamma|$ ناحیه همگرایی دنباله تکراری (۶۱.۲) وسیعتر می‌شود.

در حقیقت فرمول تکراری (۶۱.۲) آزادی عمل زیادی در انتخاب به ما می‌دهد. برای برخی مسایل غیر خطی با انتخاب مقدار نسبتا کوچکی از $|\gamma|<1$ می‌توان تقریب مناسبی در ناحیه وسیعی بدست آورد. این روش جواب تقریبی دقیقتری در ناحیه وسیعتری بدست می‌آورد که این مزیت اصلی این روش است. این روش می‌تواند بر محدودیت کارایی روش تکرار وردشی غلبه کند و کارایی را افزایش دهد. درکل هنگامیکه $|\gamma|$ انتخاب شده کوچک است، سرعت همگرایی فرمول‌های تکراری نسبتا کم می‌شود بنابراین گام‌های تکراری بیشتری نیاز است که این عیب اصلی روش تکرار وردشی اصلاح شده است.

این روش را برای معادله ریکاتی زیر بکار می‌بریم، بنابراین داریم

$$x'(t)=R(t)+P(t)x(t)+Q(t)x^2(t)\qquad x(0)=\alpha \tag{۶۲.۲}$$

برای معادله (۶۲.۲) مطابق روش تکرار وردشی اصلاح شده تابعک تصحیح زیر را داریم

$$x_{n+1}(t)=x_n(s)+\int_0^t \lambda(s)\{(x'(s)_n-\tilde{x}'_n(s)+\gamma[\tilde{x}'_n(s)-P(s)\tilde{x}_n(s)-Q(s)\tilde{x}_n^2(s)-R(s)]\}\mathrm{d}s,$$

[۴] Geng

که $\tilde{x}_n$ متغیر محدود است یعنی $\delta\tilde{x}_n = ۰$ است وλ ضریب لاگرانژ است و به سادگی $\lambda = -۱$ بدست می‌آید.

بنابراین فرمول تکراری زیر را داریم

$$x_{n+۱}(t) = x_n(t) - \gamma \int_۰^t [x'_n(s) - P(s)x_n(s) - Q(s)x_n^۲(s) - R(s)]\mathrm{d}s,$$

که $x_۰(t)$ تقریب اولیه است که در شرط اولیه $x(۰) = \alpha$ صدق می‌کند.

در مثال بعدی روش تکرار وردشی چند مرحله‌ای تعمیم یافته برای حل معادله دیفرانسیل برنولی استفاده می‌شود و نتایج بدست آمده با روش تکرار وردشی اصلاح شده برای حل معادله دیفرانسیل ریکارتی ارایه شده توسط گنگ [۸] مقایسه می‌شود.

مثال ۱.۷.۲. معادله برنولی معادله دیفرانسیل غیر خطی مرتبه اول به شکل زیر است

$$x'(t) + P(t)x(t) = Q(t)x^q(t) \quad x(۰) = \alpha_۰ \tag{۶۳.۲}$$

که P و Q توابعی پیوسته روی $I = [۰, T]$ و$q \in \{۰, ۱\}$ است. برای این مثال خاص فرض می‌کنیم $p(t) = Q(t) = t$ و $q = ۲$ به‌طوریکه (۶۳.۲) تبدیل به معادله زیر می‌شود

$$x'(t) + tx(t) = tx^۲(t) \tag{۶۴.۲}$$

و جواب دقیق برای $\alpha_۰ \neq ۰$ به صورت زیر می‌باشد.

$$x(t) = \frac{۱}{۱ - \mathrm{e}^{t^۲/۲}(۱ - \frac{۱}{\alpha_۰})}$$

هنگامی‌که $\alpha_۰ = ۰$، جواب بدیهی $x \equiv ۰$ است. مطابق روش تکرار وردشی چند مرحله‌ای تعمیم یافته، تابعک تصحیح زیر را داریم

$$x^{n+۱}(t) = x^n(t) + \int_{t^*}^t \Lambda\{(x^n)'(s) + sx^n(s) - s(\tilde{x}^n)^۲(s)\}\mathrm{d}s \tag{۶۵.۲}$$

بنابراین

$$\delta x^{n+۱}(t) = \delta x^n(t) + \delta \int_{t^*}^t \Lambda\{(x^n)'(s) + sx^n(s) - s(\tilde{x}^n)^۲(s)\}\mathrm{d}s$$

که $\Lambda = \lambda(s,t)$ ضریب لاگرانژ،$\tilde{x}^n(s)$ متغیر محدود و$x^۰(t) = \alpha_۰$ است.

با استفاده از حساب تغییرات شامل عبارات خطی و اینکه $\delta x^n(t^\star) = ۰$ است و یا از گزاره (۱.۳.۲) ضریب لاگرانژ متناظر را به صورت زیر بدست می‌آوریم

$$\lambda(s,t) = -\mathrm{e}^{(s^۲-t^۲)/۲}$$

با جایگذاری ضریب لاگرانژ تابعک تصحیح برای (۶۴.۲) به صورت

$$x^{n+۱}(t) = x^n(t) - \int_{t^*}^t \mathrm{e}^{(s^۲-t^۲)/۲}\{(x^n)'(s) + sx^n(s) - s(x^n)^۲(s)\}\mathrm{d}s$$

با تقریب اولیه $x^۰(t) = \alpha_۰$ است.

حال معادله ریکارتی را در نظر می‌گیریم که در آن $R = ۰$ قرار می‌دهیم که معادله برنولی که $q = ۲$ است بدست می‌آید. بنابراین طبق اصلاح گنگ برای معادله برنولی تابعک تصحیح زیر را داریم

$$x^{n+۱}(t) = x^n(t) - \gamma \int_۰^t \{(x^n)'(s) + sx^n(s)^۲(s) - s(x^n)^۲(s)\}\mathrm{d}s$$

با پارامتر اسکالر γ به‌طوریکه $|\gamma|$ نسبتا کوچک است. بهترین مقدار برای γ از یک مساله به مساله دیگر متفاوت است و با امتحان عددی بدست می‌آید.

در جدول (۲.۵) هر دو روش را برای دستگاه (۲.۶۲) برای تکرارهای مرحله پنج و ده با $\alpha_\circ = \frac{۱}{۲}$ و $T = ۴$ و $\gamma = ۰/۰۰۱$ مقایسه می‌کنیم و به این نتیجه می‌رسیم که روش تکرار وردشی چند مرحله‌ای تعمیم یافته بدون نیاز به یافتن بهترین مقدار برای پارامتر فرضی، موثرتر از روش ارایه شده در [۸] است.

جدول ۲.۵: مقایسه روش گنگ و روش $MGVIM$

t	جواب دقیق	مرحله پنجم		مرحله دهم	
		خطا MGVIM	**خطا VIM[۸]**	**خطای MGVIM**	**خطا VIM[۸]**
۰	۰/۵۰۰۰	۰	۰	۰	۰
۰/۵	۰/۴۶۸۸	۰/۰۰۰۰	۰/۰۳۱۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۳۰۹
۱	۰/۳۷۷۵	۰/۰۰۱۷	۰/۱۲۱۸	۰/۰۰۰۰	۰/۱۲۱۲
۱/۵	۰/۲۴۵۱	۰/۰۲۶۷	۰/۲۵۳۵	۰/۰۰۴۳	۰/۲۵۲۰
۲	۰/۱۱۹۲	۰/۰۸۹۰	۰/۳۷۸۲	۰/۰۳۷۵	۰/۳۷۵۷
۲/۵	۰/۰۴۲۱	۰/۱۴۳۱	۰/۴۵۳۹	۰/۰۸۱۱	۰/۴۵۰۰
۳	۰/۰۰۲۲	۰/۱۷۵۶	۰/۴۹۰۱	۰/۱۱۰۶	۰/۴۸۲۴
۴	۰/۰۰۰۳	۰/۱۷۷۲	۰/۴۸۹۶	۰/۱۱۲۲	۰/۴۷۹۵

فصل ۳

حل مسایل مقدار اولیه و مقدار مرزی با استفاده از روش تکرار وردشی

۱.۳ مقدمه

در این فصل VIM را برای حل مسایل مقدار مرزی و اولیه بکار می‌بریم و ثابت می‌کنیم هنگامیکه تقریب اولیه در شرایط اولیه صدق کند جواب مسایل مقدار اولیه با تنها یک تکرار بدست می‌آید. مشابه مسایل مقدار اولیه برای مسایل مقدار مرزی نیز ثابت می‌شود که اگر تقریب اولیه در شرایط مرزی صدق کند، جواب مسایل مقدار مرزی خطی نیز با تنها یک تکرار بدست می‌آید. با استفاده از این حقیقت الگوریتم جدیدی برای مسایل مقدار مرزی غیر خطی ارایه می‌دهیم. خوشبختانه این نیازمند استفاده از تابع گرین نیست. برای نشان دادن تاثیر الگوریتم جدید مثال‌هایی از مسایل مقدار مرزی خطی و غیر خطی بیان می‌کنیم.

۲.۳ حل مسایل مقدار اولیه

در این بخش برخی مفاهیم اساسی ضریب لاگرانژ برای روش تکرار وردشی در حل مسایل مقدار اولیه و مرزی بررسی می‌شود. علاوه بر این با این خواص ثابت می‌شود که هرگاه تقریب اولیه در شرط اولیه صدق کند، جواب معادله دیفرانسیل معمولی خطی همگن خطی مرتبه m با تنها یک گام از VIM بدست می‌آید.
معادله دیفرانسیل خطی همگن مرتبه m با شرایط اولیه زیر را در نظر بگیرید

$$p_0(t)x^{(m)}(t) + p_1(t)x^{(m-1)}(t) + \cdots + p_m(t)x(t) = 0 \qquad (۱.۳)$$

$$x(t_0) = \alpha_1, \quad x'(t_0) = \alpha_2, \ldots, x^{(m-1)}(t_0) = \alpha_m$$

که$t\in I=[a,b]$ و $t_\circ \in I, p_i \in C^{m-i}(I,\mathbb{R}), p_\circ(t)>\circ$ و $x^{(i)}=\dfrac{d^i x(t)}{dt^i}$ نشان دهنده مشتق برای $i=۱,۲,\cdots,m$ است. تابعک تصحیح روش تکرار وردشی برای (۱.۳) به صورت زیر است

$$x_{n+۱}(t)=x_n(t)+\int_{t_o}^{t}\lambda(s,t)L_{m,s}x_n(s)\mathrm{d}s \tag{۲.۳}$$

که$L_{m,s}$عملگر دیفرانسیل خطی به صورت زیر است

$$L_{m,s}=p_\circ(s)\frac{d^m}{ds^m}+p_۱(s)\frac{d^{m-۱}}{d^{m-۱}}+\cdots+p_m(s) \tag{۳.۳}$$

با حساب تغییرات و انتگرال‌گیری جزبه جز و اعمال شرط $\delta x_n(t_\circ)=\circ$ در می‌یابیم که در $s=t$ باید شرایط زیر برقرار باشد

$$\begin{aligned}
&\circ=\{(-۱)^{m-۱}(\lambda(s,t)p_\circ(s))^{(m-۱)}+(-۱)^{(m-۲)}(\lambda(s,t)p_۱(s))^{(m-۲)}+\ldots+\lambda(s,t)p_{m-۱}(s)+۱\}|_{s=t}\\
&\circ=\{(-۱)^{(m-۲)}(\lambda(s,t)p_\circ(s))^{(m-۲)}+(-۱)^{(m-۳)}(\lambda(s,t)p_۱(s))^{(m-۳)}+\ldots+\lambda(s,t)p_{m-۲}(s)\}|s=t\\
&\vdots\\
&\circ=p_\circ(s)\lambda(s,t)|_{s=t}
\end{aligned} \tag{۴.۳}$$

بطوری‌که

$$L^t_{m,s}\lambda(s,t)=\circ \tag{۵.۳}$$

که عملگر الحاقی$L^t_{m,s}$ به صورت

$$L^t_{m,s}(.)=(-۱)^m\frac{d^m}{ds^m}(p_\circ(s).)+(-۱)^{m-۱}\frac{d^{m-۱}}{ds^{m-۱}}(p_۱(s).)+\cdots+(p_m(s).)$$

است. با توجه به اینکه $p_\circ(t)>\circ$ از (۴.۳)بدست می‌آید که $\lambda(t,t)=\circ$. باجایگذاری پسرو در (۴.۳) مشتق ضرایب لاگرانژ به صورت زیر حاصل می‌شود

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial^j\lambda(s,t)}{\partial s^j}|_{t=s}=\circ \quad j=\circ,۱,۲,\ldots,m-۱\\
\dfrac{\partial^{m-۱}\lambda(s,t)}{\partial s^{m-۱}}|_{t=s}=\dfrac{(-۱)^m}{p_\circ(t)} \qquad j=\circ,۱,\cdots,m-۲
\end{cases} \tag{۶.۳}$$

به عبارت دیگر دستگاه معادلات مرتبط با(۱.۳) در شکل ماتریسی به‌صورت زیر است

$$\mathbf{x}'=A\mathbf{x} \tag{۷.۳}$$

که$\mathbf{x}=(x_۱,x_۲,\ldots,x_m)^T=(x,x',\ldots,x'^{(m-۱)})^T$ و $A(t)$ ماتریس همدم می‌باشد

$$A=\begin{pmatrix}
\circ & ۱ & \circ & \ldots & \circ\\
\circ & \circ & ۱ & \ldots & \circ\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & ۱\\
-\tilde{p}_m & -\tilde{p}_{m-۱} & -\tilde{p}_{m-۲} & \cdots & \tilde{p}_۱
\end{pmatrix}$$

که$\tilde{p}_i=\dfrac{p_i(t)}{p_\circ(t)}$ برای $i=۱,۲,\cdots,m$. با بکار بردن روش تکرار وردشی برای دستگاه همگن خطی(۷.۳) تابعک تصحیح زیر را داریم

$$\mathbf{x}_{n+۱}=\mathbf{x}_n(t)+\int_{t_\circ}^{t}\Lambda(s,t)\{(\mathbf{x}_n(s))'-A(s)\mathbf{x}_n(s)\}\mathrm{d}s \tag{۸.۳}$$

که $\Lambda(s,t)$ ضریب لاگرانژ است که تابع ماتریسی $m\times m$ است.
در [۵] ثابت شد ضریب لاگرانژ ماتریسی $\Lambda(s,t)$ به صورت

$$\Lambda(s,t)=-\psi^T(s,t) \tag{۹.۳}$$

است که $\psi(s,t)$ماتریس اساسی دستگاه الحاقی

$$\mathbf{y}'=-A^T(s)\mathbf{y},\ \ \mathbf{y}=(y_۱,y_۲,\cdots,y_m)^T \tag{۱۰.۳}$$

برای (۷.۳) می‌باشد که $\psi(t,t)=E$ و Eماتریس همانی است. در اینجا y_m مولفه mام y است که در معادله الحاقی زیر صدق می‌کند

$$L^t_{m,s}y_m=۰$$

که همان $L^t_{m,s}\lambda(s,t)=۰$ است. بنابراین رابطه زیر حاصل می‌شود

$$\lambda(s,t)=y_m=\mathrm{e}_\mathrm{m}^\mathrm{T}\psi(s,t)c \tag{۱۱.۳}$$

که$\mathrm{e}_m=(۰,۰,\cdots,۱)^T$ و $c=(c_۱,c_۲,\cdots,c_m)^T$ برداری ثابت است. ماتریس ضرایب لاگرانژ برای (۷.۳) به صورت $\Lambda=(\Lambda_{im})$ است، به‌علاوه با توجه به (۶.۳) و (۹.۳) داریم

$$\lambda(s,t)=\Lambda_{۱m}(s,t) \tag{۱۲.۳}$$

بدین معنی که $c_۱=۱$ و $c_i=۰$ برای $i=۲,۳,\cdots,m$ که در اینجا $c=(۱,۰,۰,\cdots,۰)$ است.
تا اینجا مشتق ضرایب لاگرانژ $\lambda(s,t)$ را نسبت به متغییر s بدست آورده ایم. بنابراین برای اثبات اینکه تابعک تصحیح (۲.۳) جواب (۱.۳) است باید مشتق $\lambda(s,t)$ را نسبت به t بدست آوریم. در نتیجه (۱۲.۳) کمک می‌کند تا مشتقات ضرایب لاگرانژ را نسبت به t بدست آوریم پس فرایند مشابه زیر را انجام می‌دهیم.
از(۹.۳) داریم که $\Lambda(s,t)=-\phi^{-۱}(s,t)$که $\phi(t,s)$ ماتریس اساسی دستگاه معادله همگن زیر است

$$\mathbf{x}'=A(t)\mathbf{x}$$

و$\phi(s,s)=E$، در نتیجه

$$L_{m,t}\lambda(s,t)=۰$$

با استفاده از مشتق مولفه‌های $\Lambda(s,t)$ و با رابطه (۱۲.۳) بدست می‌آوریم

$$\frac{\partial^j\lambda(s,t)}{\partial t^j}|_{t=s}=۰\qquad j=۰,۱,\cdots,m-۲\qquad \frac{\partial^{m-۱}\lambda(s,t)}{\partial t^{m-۱}}|_{t=s}=\frac{(-۱)^m}{p_۰(s)} \tag{۱۳.۳}$$

در ادامه قضیه زیر را ثابت می‌کنیم.

قضیه ۱.۲.۳. فرض کنید

$$L_{m,t}x=f(t) \tag{۱۴.۳}$$

است با شرایط اولیه

$$x(t_۰)=\alpha_۱,\ \ x'(t_۰)=\alpha_۲,\cdots,x^{(m-۱)}(t_۰)=\alpha_m,$$

که $I=[a,b]$، $t_\circ, t \in I$، $p_i \in C^{m-i}(I,R)$، $f \in C(I,R)$، برای همه $t \in I$ است. برای هر $x_\circ$ که به اندازه کافی هموار باشد و در شرایط اولیه صدق می‌کند داریم

$$x_1(t) = x_\circ(t) + \int_{t_\circ}^{t} \lambda(s,t)\{L_{m,s}x_\circ(s) - f(s)\}\mathrm{d}s$$

که جواب یکتای (۱۴.۳) است.

برهان. با استفاده از (۱۳.۳) به آسانی ثابت می‌شود که

$$x_1^{(j)}(t) = x_\circ^{(j)}(t) + \int_{t_\circ}^{t} \frac{\partial^j \lambda(s,t)}{\partial t^j}\{L_{m,s}x_\circ(s) - f(s)\}\mathrm{d}s \quad j = 1, 2, \cdots, m-1,$$

و

$$\begin{aligned} x_1^{(m)}(t) = x_\circ^{(m)}(t) &+ \frac{\partial^{m-1}\lambda(s,t)}{\partial t^{m-1}}|_{s=t}\{L_{m,s}x_\circ(t) - f(t)\} \\ &- \int_{t_\circ}^{t} \frac{\partial^{m-1}\lambda(s,t)}{\partial t^{m-1}}\{L_{m,s}x_\circ(s) - f(s)\}\mathrm{d}s \end{aligned}$$

بنابراین

$$L_{m,t}x_1(t) = L_{m,t}x_\circ(t) - \{L_{m,t}x_\circ(t) - f(t)\} + \int_{t_o}^{t} L_{m,t}\lambda(s,t)\{L_{m,s}x_\circ(s) - f(s)\}\mathrm{d}s$$

از آنجاییکه $L_{m,t}\lambda(s,t) = \circ$ داریم

$$L_{m,t}x_1(t) = f(t)$$

بدیهی است که $x_1(t)$ در شرایط اولیه $x_1^{(j)}(t_\circ) = \alpha_{j+1}$ برای $j = \circ, 1, \cdots, m-1$ صدق کند، این اثبات را کامل می‌کند. □

توجه کنید انتخاب تقریب اولیه که در شرایط اولیه صدق کند و همچنین تعیین مقدار صحیح ضرایب لاگرانژ برای یافتن جواب دقیق معادله دیفرانسیل خطی حایز اهمیت است.

۳.۳ حل مسایل مقدار مرزی

با استفاده از نتایج بخش قبلی، قضیه ای شبیه به قضیه (۱.۲.۳) را برای مسایل مقدار مرزی اثبات می‌کنیم. این قضیه الگوریتم جدیدی برای حل مسایل مقدار مرزی خطی و غیر خطی معرفی می‌کند.
دستگاه زیر را در نظر بگیرید

$$Sx = f(t) \tag{۱۵.۳}$$

که عملگر S در اینجا به صورت زیر تعریف می‌شود

$$L_{m,t}x = p_\circ(t)x^{(m)}(t) + p_1(t)x^{(m-1)}(t) + \cdots + p_m(t)x(t) \tag{۱۶.۳}$$

که Sروی فضای توابع $x \in C^m(I,\mathbb{R})$ در شرایط مرزی همگن به شکل زیر صدق می‌کند

$$U(x) = M\hat{x}(a) + N\hat{x}(b) \tag{۱۷.۳}$$

که $I=[a,b]$ ، $f:I\to\mathbb{R}$ ، $p_j\in C^{m-j}(I,\mathbb{R})$، $\hat{x}=(x,x^{(1)},\dots,x^{(m-1)})$، $U=(U_1,U_2,\dots,U_m)^T$ و M و N ماتریس‌های $m\times m$ به‌ترتیب با عناصر M_{vj} و N_{vj} است.

مساله مقدار مرزی همگن را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$Sx=0 \tag{۱۸.۳}$$

که تنها جواب بدیهی $x\equiv 0$ را دارد. بنابراین جواب منحصر به فرد مساله مقدار مرزی غیر همگن (۱۵.۳) به صورت زیر تعریف می‌شود

$$x(t)=\int_a^b G(t,s)f(s)\mathrm{d}s$$

که $G(t,s)$ تابع گرین عملگر S است.

حال با توجه به نتایج بخش قبل قضیه زیر را اثبات می‌کنیم که الگوریتم جدیدی با روش تکرار وردشی برای حل مسایل مقدار مرزی نوع (۱۵.۳) ارایه می‌دهد. به‌علاوه الگوریتم ارایه شده از تابع گرین استفاده نمی‌کند. البته باید تقریب اولیه را طوری انتخاب کرد که در شرایط مرزی صدق کند.

قضیه ۱.۳.۳. فرض کنید $x_0\in C(I,\mathbb{R})$ در شرایط مرزی (۱۷.۳) صدق کند، بنابراین

$$x_1(t)=\tilde{x}_1(t)-y_1(t) \tag{۱۹.۳}$$

جواب مساله مقدار مرزی (۱۵.۳) است، که $\tilde{x}_1$تقریب حاصل با تابعک تصحیح

$$\tilde{x}_1(t)=x_0(t)+\int_a^t \lambda(s,t)\{L_{m,s}x_0(s)-f(s)\}\mathrm{d}s$$

می‌باشد و تابع $y_1:I\to\mathbb{R}$ در شرایط زیر صدق می‌کند

$$L_{m,t}y_1=0,\quad U(y_1)=U(\tilde{x}_1) \tag{۲۰.۳}$$

که $U(y_1)=U(\tilde{x}_1)$ یعنی شرایط مرزی y_1 و $\tilde{x}_1$ یکسان است و $L_{m,t}y_1=0$ یعنی $p_0(t)y_1^{(m)}(t)+p_1(t)y_1^{(m-1)}(t)+\dots+p_m(t)y_1(t)=0$ است.

برهان. از قضیه (۱.۲.۳)داشتیم

$$L_{m,t}\tilde{x}_1(t)=f(t)$$

واز اینرو

$$L_{m,t}(\tilde{x}_1-y_1)=L_{m,t}(\tilde{x}_1)-L_{m,t}(y_1)=f(t)$$

علاوه بر این

$$U(\tilde{x}_1(t)-y_1(t))=U(\tilde{x}_1(t))-U(y_1(t))=0$$

واثبات کامل می‌شود. □

در اثبات قضیه (۱.۳.۳) وجود تابع yای که

$$L_{m,t}y=0\quad U(y)=u \tag{۲۱.۳}$$

برای برخی u ها بدیهی است. در واقع چنین تابع y را می‌توان به طور منحصر به فرد تعیین کرد. برای مشاهده این موضوع، فرض کنید $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_m$ جواب‌های مستقل خطی $L_{m,t}y = 0$ باشد. بنابراین ماتریس اساسی که ستون‌های آن جواب‌های مستقل خطی $L_{m,t}y = 0$ است به صورت زیر می‌باشد

$$\hat{\phi} = [\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \cdots, \hat{\phi}] = \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \cdots & \phi_m \\ \phi_1' & \phi_2' & \cdots & \phi_m' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_1'^{(m-1)} & \phi_2'^{(m-1)} & \cdots & \phi_m'^{(m-1)} \end{pmatrix}$$

با استفاده از ماتریس اساسی شرایط مرزی را دوباره به صورت زیر می‌نویسیم

$$U\hat{\phi} = M\hat{\phi}(a) + N\hat{\phi}(b)$$

چون‌که y به شکل

$$y = \hat{\phi}(t)c$$

که در آن $c = (c_1, c_2, \ldots, c_m)^T$ از شرایط مرزی $U(y) = u$ تعیین می‌شود، در نتیجه

$$(U\hat{\phi})c = u$$

از آنجایی‌که مساله مقدار مرزی همگن فقط جواب بدیهی دارد، مقدار c به طور منحصربفرد به صورت زیر تعیین می‌شود

$$c = (U\hat{\phi})^{-1}u$$

در ادامه دو مثال ارایه می‌دهیم. ابتدا کاربرد مستقیم قضیه (۱.۳.۳) را برای مسایل مقدار مرزی خطی بکار می‌بریم و ثانیا نشان می‌دهیم که الگوریتم ارایه شده اخیر در مورد مسایل مقدار مرزی غیر خطی چگونه بکار می‌رود.

مثال ۲.۳.۳. با مثال ساده زیر نتایج این قضیه را توضیح می‌دهیم

$$x'' + x = t^2 - t, \quad x(0) = 0, \quad x'(\pi) = 0 \qquad (۲۲.۳)$$

با انتخاب

$$x_0(t) = \cos(t) - 1$$

که $x_0(0) = 0, \quad x_0'(\pi) = 0$ است. با بکار بردن روش تکرار وردشی، تابعک تصحیح زیر را داریم

$$x_{n+1}(t) = x_n(t) + \int_0^t \lambda(s,t)\{x_n''(s) + x_n(s) - \tilde{f}(s)\}\mathrm{d}s$$

که $\lambda(s,t)$ ضریب لاگرانژ و $\tilde{x}_1^n(s)$ و $\tilde{x}_2^n(s)$ متغیر های محدودند یعنی $\delta\tilde{x}_1^n(s) = 0$، $\delta\tilde{x}_2^n(s) = 0$ برای هر $n \in \mathbb{N}$. ضریب لاگرانژ در روش کلاسیک به صورت زیر بدست می‌آید

$$\begin{aligned} \delta x_{n+1}(t) =& \delta x_n(t) + \delta\int_0^t \lambda(s,t)\{x_n''(s) + x_n(s) - \tilde{f}(s)\}\mathrm{d}s \\ =& \delta x_n(t) + \delta\lambda x_n'(t) - \delta\int_0^t \{\frac{\partial\lambda}{\partial s}x_n'(s) + \lambda x_n(s)\}\mathrm{d}s \\ =& \delta x_n(t) + \delta\lambda x_n'(t) - \delta\frac{\partial\lambda}{\partial s}x_n(t) + \delta\int_0^t (\frac{\partial^2\lambda}{\partial s^2} + \lambda(s,t))x_n(t)\mathrm{d}s \end{aligned}$$

با اعمال شرایط پایستاری و $\delta x_{n+1}(t) = ۰$ داریم :

$$\begin{cases} ۱ - \frac{\partial\lambda(s,t)}{\partial s}|_{s=t} = ۰ \\ \lambda(s,t)|_{s=t} = ۰ \\ \frac{\partial^۲\lambda}{\partial s^۲} + \lambda = ۰ \end{cases} \tag{۲۳.۳}$$

بنابراین ضریب لاگرانژ به صورت زیر حاصل می‌شود.

$$\lambda(s,t) = \sin(s-t)$$

اولین تقریب به صورت زیر حاصل می‌شود

$$\tilde{x}_۱(t) = x_۰(t) + \int_۰^t \lambda(s,t)\{L_{m,s}x_۰(s) - f(s)\}\mathrm{d}s$$

با توجه به اینکه

$$p_۰(t) = ۱ \quad p_۱(t) = ۰ \quad p_۲(t) = ۱ \quad f(s) = s^۲ - s$$

داریم

$$L_{m,s}x_۰(s) = p_۰(s)x_۰''(s) + p_۱(s)x_۰'(s) + p_۲(s)x_۰(s) = -\cos s + \cos s - ۱ = -۱$$

بنابراین به سادگی بدست می‌آید

$$\begin{aligned} \tilde{x}_۱(t) =& x_۰(t) + \int_۰^t \sin(s-t)\{-۱ - s^۲ + s\}\mathrm{d}s \\ =& ۲\cos(t) + \sin(t) + t^۲ - t - ۲ \end{aligned}$$

با مقادیر مرزی

$$\tilde{x}_۱(۰) = ۰ \quad , \tilde{x}_۱'(\pi) = ۲\pi - ۲$$

حال باید تابع $y_۱$ را به گونه‌ای بیابیم که در مساله مقدار مرزی زیر صدق کند

$$y_۱'' + y_۱ = ۰ \quad , y_۱(۰) = ۰ \quad , y_۱'(\pi) = ۲\pi - ۲ \tag{۲۴.۳}$$

که جواب (۲۴.۳) به صورت زیر است

$$y_۱(t) = (-۲\pi + ۲)\sin(t)$$

که در یک تکرار جواب بدست می‌آید

$$x_۱(t) = \tilde{x}_۱(t) - y_۱(t) = ۲\cos(t) + (۲\pi - ۱)\sin(t) + t^۲ - t - ۲$$

که جواب دقیق مساله مقدار مرزی (۲۲.۳) است.

به عنوان یک اصل، توجه داریم که بدون توجه به تقریب اولیه انتخاب شده تا زمانیکه تقریب اولیه در شرایط مرزی صدق می‌کند، اگر ضریب لاگرانژ مشخص باشد روش به جواب دقیق مساله همگرا است برای مثال با انتخاب

$$x_۰(t) = t^۲/۲ - \pi t$$

به عنوان تقریب اولیه‌ای که در شرایط مرزی صدق می‌کند همان $x_1(t) = \tilde{x}_1(t) - y_1(t)$ که در این حالت

$$\tilde{x}_1(t) = 2\cos(t) + (1-\pi)\sin(t) + t^2 - t - 2$$

و

$$y_1(t) = (-3\pi + 2)\sin(t).$$

نتیجه‌ی حاصل از قضیه (۱.۳.۳) و مثال (۲.۳.۳) در واقع الگوریتم عددی برای مساله مقدار مرزی از نوع

$$L_{m,t}x = f(t) \quad U(x) = 0 \tag{۲۵.۳}$$

است. اگر چه می‌توان آن‌را به مساله مقدار مرزی غیر خطی به شکل

$$\begin{aligned} &L_{m,t}x = f(t, x(t), x^{(1)}(t), x^{(2)}, \cdots, x^{(m-1)}(t)) \\ &U(x) = 0 \end{aligned} \tag{۲۶.۳}$$

تعمیم داد که f تابعی پیوسته نسبت به تمام مولفه‌هایش است. باید توجه داشت که خواص مسایل مقدار مرزی خطی در (۲۵.۳) شناخته شده است اما نظریه مسایل مقدار مرزی غیر خطی از نوع (۲۶.۳) به همان اندازه مورد مطالعه قرار نگرفته است.

اگر VIM کلاسیک را بکار ببریم تابعک تصحیح به شکل زیر است

$$x_{n+1}(t) = x_n(t) + \int_a^t \lambda(s,t)\{L_{m,s}(x_n(s)) - f_n\}\mathrm{d}s \tag{۲۷.۳}$$

که

$$f_n = f_n(s, x_n(s), (x_n)^{(1)}(s), (x_n)^{(2)}(s), \cdots, (x_n)^{(m-1)}(s))$$

با $x'(i) = \dfrac{d^i x}{ds^i}$ برای $i = 1, 2, \ldots, (m-1)$. بر اساس قضیه (۱.۳.۳) تابعک تصحیح (۲۷.۳) را در تکرار n ام به صورت زیر اصلاح می‌کنیم

$$\tilde{x}_{n+1}(t) = x_n(t) + \int_a^t \lambda(s,t)\{L_{m,s}(x_n(s)) - f_n\}\mathrm{d}s$$

اینجا x_n بیانگر جواب تقریبی مرتبه n ام برای مساله مقدار مرزی (۲۶.۳) و $\tilde{x}_{n+1}$ جواب تقریبی مرتبه $(n+1)$ام است که در شرایط مرزی $U(x) = 0$ صدق نمی‌کند اما

$$U(\tilde{x}_{n+1}) = u_{n+1}$$

که u_{n+1} یک بردار m تایی است. با توجه به بحث‌های قبل امکان یافتن تابع y_{n+1} که در شرایط زیر صدق کند، وجود دارد

$$L_{m,t}y_{n+1} = 0 \qquad U(y_{n+1}) = u_{n+1}$$

بنابراین در الگوریتم جدید جواب تقریبی $(n+1)$ ام به صورت زیر تعریف می‌شود

$$x_{n+1}(t) = \tilde{x}_{n+1}(t) - y_{n+1}(t)$$

توجه کنید که

$$L_{m,t}x_{n+1} = L_{m,t}\tilde{x}_{n+1} - L_{m,t}y_{n+1} = \tilde{f}_{n+1}$$

$$U(x_{n+1}) = U(\tilde{x}_{n+1}) - U(y_{n+1}) = 0$$

که $\tilde{f}_{n+1} = L_{m,t}\tilde{x}_{n+1}$ است. با استفاده از این رابطه بازگشتی برای $n = 0, 1, 2, \dots,$ می‌توان جواب (۲۶.۳) را تقریب زد. برای توضیح الگوریتم به‌منظور یافتن جواب تقریبی x_n برای مساله مقدار مرزی غیرخطی، مثال زیر را ارایه می‌دهیم.

مثال ۳.۳.۳. مساله مقدار مرزی غیر خطی زیر را در نظر بگیرید

$$x'' = (x')^2 - 1 \qquad (۲۸.۳)$$

با $x(0) = 0$ و $x'(1) = 0$. جواب دقیق این مساله مقدار مرزی

$$x(t) = t - \ln(e^{2t} + e^2) + \ln(1 + e^2)$$

با تعریف $x_0 = 0$ در شرایط مرزی صدق می‌کند. برای بدست آوردن ضریب لاگرانژ داریم

$$x_{n+1}(t) = x_n(t) + \int_0^t \lambda\{x''_n(s) - \tilde{f}(s)\}\mathrm{d}s$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
\delta x_{n+1}(t) &= \delta x_n(t) + \delta \int_0^t \lambda(s,t)\{x''_n(s) - \tilde{f}(s)\}\mathrm{d}s \\
&= \delta x_n(t) + \delta\lambda(s,t)x'_n(s) - \delta \int_0^t \frac{\partial \lambda}{\partial s}x'_n(s)\mathrm{d}s \\
&= \delta x_n(t) + \delta\lambda(s,t)x'_n(t) - \delta\frac{\partial \lambda}{\partial s}x_n(t) + \int_0^t \frac{\partial^2 \lambda}{\partial s^2}\delta x_n(s)\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

که با اعمال شرایط پایستاری $\delta x_1^{(n+1)}(t) = 0$ داریم

$$\begin{cases} 1 - \frac{\partial \lambda(s,t)}{\partial s} = 0 \\ \lambda(s,t)|_{s=t} = 0 \\ \frac{\partial^2 \lambda}{\partial s^2} = 0 \end{cases} \qquad (۲۹.۳)$$

$\lambda(s,t) = s - t$ بدست می آید. با بکار بردن روشVIM با ضریب لاگرانژ $\lambda(s,t) = s - t$ جواب تقریبی $\tilde{x}_1$ به صورت زیر است

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_1(t) =& x_0(t) + \int_a^t \lambda(s,t)\{L_{m,s}x_0(s) - f(s)\}\mathrm{d}s \\
=& \int_0^t (s-t)\mathrm{d}s = -\frac{t^2}{2}
\end{aligned}$$

و$\tilde{x}'_1(1) = -1$, $\tilde{x}_1(0) = 0$. از آنجاییکه جواب‌های اساسی $y'' = 0$ ، $\hat{\phi}_1 = 1$ و$\hat{\phi}_2 = t$ هستند بنابراین داریم

$$y_1(t) = c_0 + c_1 t$$

که جواب دستگاه همگن $y'' = 0$ که c_0 و c_1 پارامترهای معین هستند به‌طوریکه $y_1(0) = 0$ و $y_1'(1) = -1$، بنابراین $y_1(t) = -t$. اولین جواب تقریبی الگوریتم برای مساله مقدار مرزی (۲۸.۳)

$$x_1(t) = \tilde{x}_1(t) - y_1(t) = -\frac{t^2}{2} + t$$

با محاسبه گام‌های بعدی بدست می‌آید

$$\begin{aligned}\tilde{x}_2(t) &= x_1(t) + \int_0^t \lambda(s,t)\{L_{m,s}x_1(s) - f(s)\}\mathrm{d}s\\ &= -\frac{t^2}{2} + t + \int_0^t (s-t)\{-1 - s^2 + 2s\}\mathrm{d}s\\ &= \frac{t^4}{12} - \frac{t^3}{3} + t\end{aligned}$$

که جواب تقریبی دوم حاصل می‌شود. که در بالا

$$L_{m,s}x_1(s) = P_0(t)x'' + P_1(t)x' + P_2(t)x(t) = -2 - t^2 + 2t$$

همچنین داریم $y_2(t) = c_0 + c_1(t)$ که با توجه به شرایط $y_2(t) = \tilde{x}_2(0) = 0$ و $y_2'(1) = \tilde{x}_2'(1) = \frac{1}{3}$ بدست می‌آید

$$y_2(t) = \frac{t}{3}$$

$$x_2(t) = \frac{t^4}{12} - \frac{t^3}{3} + \frac{2t}{3}$$

با انجام الگوریتم، به طور مکرر جواب تقریبی مساله مقدار مرزی محاسبه می‌شود. شکل (۱.۳) جواب تقریبی $x_i(t)$ برای $i = 1, 3, 5, 7$ وجواب دقیق $x_E(t)$ در زمان t را بیان می‌کند.

در جدول (۱.۳) برای همگرایی الگوریتم ارایه شده خطای ϵ_n را معرفی می‌کنیم

$$\epsilon_n = \sum_{i=0}^{i=k} |\tilde{f}_n(t_i)) - f_E(t_i)| \quad n = 1, 3, 5, 7$$

که

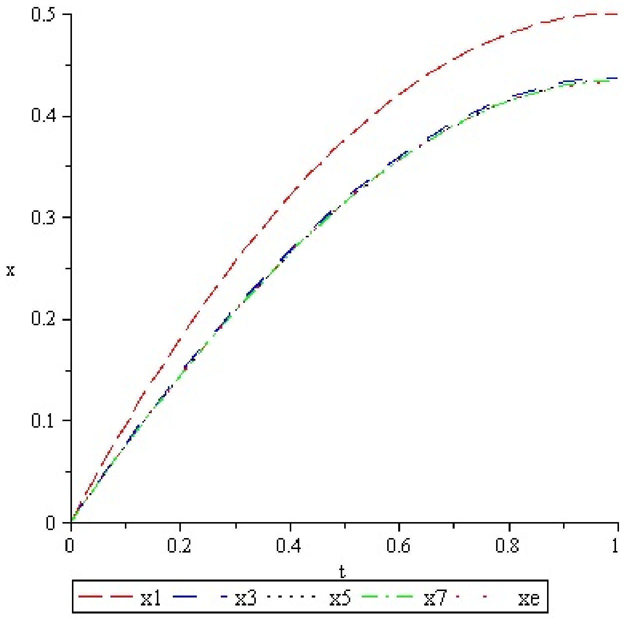
$$\tilde{f}_n(t_i) = (\tilde{x}_n'(t_i))^2 - 1 \quad f_E(t_i) = (x_E'(t_i))^2 - 1$$

با

$$k = 10 \quad t_i = \frac{i}{k}, \quad i = 0, 1, \cdots, k$$

جدول ۳.۱: محاسبه خطابرای معادله ناهمگن (۳.۲۸)

n	۱	۳	۵	۷
ϵ_n	۰٫۳۲۶۱۶۰۷	۰٫۰۰۱۵۶۳۶	۰٫۰۰۰۰۰۱۱	۰٫۰۰۰۰۰۰۰



شکل ۳.۱: مقایسه بین جواب دقیق و جواب حاصل از الگوریتم جدید برای معادله(۳.۲۸)

فصل ۴

مقایسه روش تکرار وردشی کلاسیک و تعمیم یافته

۱.۴ معرفی

در این فصل شیوه جدید و کلاسیک روش تکرار وردشی را برای مسایل خطی و غیر خطی بکار می‌بریم و نشان می‌دهیم که روش تکرار وردشی جدید برای مسایل خطی در یک تکرار به جواب می‌رسد در حالیکه برای مسایل غیر خطی، اگر ماتریس ضرایب منفرد باشد تقریب‌های بدست آمده با شیوه جدید و کلاسیک اغلب یکسان است، ولی اگر ماتریس ضرایب نامنفرد باشد روش جدید در مقایسه با روش کلاسیک با تعداد تکرارهای کمتری به جواب می‌رسد.

۲.۴ مثال‌ها

مثال ۱.۲.۴. معادله دیفرانسیل حاکم بر رفتار یک مدار الکتریکی به صورت زیر داده می‌شود

$$Lq''(t) + Rq'(t) + \frac{q(t)}{C} = ۰ \qquad q(۰) = ۱ \quad , \quad q'(۰) = ۵ \tag{۱.۴}$$

که L، C، R و q به ترتیب بیانگر ظرفیت القا مغناطیسی، ظرفیت التریکی، مقاومت و هزینه سنسور خازنی است. با تعریف توابع $x_۱(t) = q(t)$ و $x_۲(t) = q'(t)$ معادله (۱.۴) تبدیل به دستگاهی از دو معادله مرتبه اول زیر می‌شود

$$\begin{aligned} &x'_۱(t) = x_۲(t) \quad x_۱(۰) = ۱ \\ &x'_۲(t) = \frac{-۱}{LC}x_۱(t)\frac{-R}{L}x_۲(t) \quad x_۲(۰) = ۵ \end{aligned} \tag{۲.۴}$$

شیوه کلاسیک. فرض کنید $L=۱$، $R=۰/۵$ و $C=۲۰$ باشد. بنابراین

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_2(t) \quad x_1(0)=1,\\ x_2'(t) &= -0{,}05x_1(t) - 0{,}5x_2(t) \quad x_2(0)=5 \end{aligned} \tag{۳.۴}$$

مطابق روش تکرار وردشی کلاسیک، تابعک تصحیح زیر را داریم

$$\begin{aligned} x_1^{n+1} &= x_1^n + \int_0^t \lambda_1(s,t)\{(x_1^n)'(s) - \tilde{x}_2^n(s)\}\mathrm{d}s\\ x_2^{n+1} &= x_2^n + \int_0^t \lambda_2(s,t)\{(x_2^n)'(s) + 0{,}05\tilde{x}_1^n(s) + 0{,}5x_2^n(s)\}\mathrm{d}s \end{aligned} \tag{۴.۴}$$

که $\lambda_1 = \lambda_1(s,t)$ و $\lambda_2 = \lambda_2(s,t)$ ضرایب لاگرانژ هستند و $\tilde{x}_1^n$، $\tilde{x}_2^n$ متغیرهای محدودند یعنی $\delta\tilde{x}_1^n = \delta\tilde{x}_2^n = 0$ برای هر $n\in\mathbb{N}$. بنابراین ضرایب لاگرانژ را می‌توان به صورت زیر بدست می‌آیند

$$\lambda_1(s,t) = -1, \lambda_2(s,t) = -\mathrm{e}^{0{,}5(s-t)}$$

با جایگذاری ضرایب لاگرانژ در دستگاه (۴.۴) داریم

$$\begin{aligned} x_1^{n+1} &= x_1^n - \int_0^t \{(x_1^n)'(s) - \tilde{x}_2^n(s)\}\mathrm{d}s\\ x_2^{n+1} &= x_2^n - \int_0^t \mathrm{e}^{0{,}5(s-t)}\{(x_2^n)'(s) + 0{,}05\tilde{x}_1^n(s) + 0{,}5x_2^n(s)\}\mathrm{d}s \end{aligned}$$

که تقریب‌های اولیه $x_1^0(t)=۱$ و $x_2^0(t)=۵$ هستند.

شیوه جدید با فرض $\mathbf{x}=(x_1,x_2)^T$ دستگاه (۳.۴) را به شکل زیر داریم

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} \quad \mathbf{x}(0) = (1,5)^T \tag{۵.۴}$$

که $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0{,}5 & -0{,}05 \end{pmatrix}$ و مقادیر ویژه ماتریس A به صورت زیر هستند

$$\lambda_1 = -0{,}1382, \quad ,\lambda_2 = -0{,}3618$$

بنابراین

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}9906 & -0{,}9403 \\ -0{,}1369 & 0{,}3402 \end{pmatrix}$$

و

$$J = \begin{pmatrix} -0{,}1382 & 0 \\ 0 & -0{,}3618 \end{pmatrix}$$

است.

با استفاده از تبدیل $\mathbf{x}=P\mathbf{y}$، $y=(y_1,y_2)$ در معادله (۵.۴) بدست می‌آید

$$\mathbf{y}(0) = (24{,}2066, 24{,}4365)^T$$

بنابراین

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0/1382 & 0 \\ 0 & -0/3618 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \qquad (6.4)$$

تابعک تصحیح دستگاه (۶.۴) به صورت

$$y_1^{n+1}(t) = y_1^n(t) + \int_0^t \mu_1(s,t)\{(y_1^n)'(s) + 0/1382 y_1^n(s)\}\mathrm{d}s$$
$$y_1^{n+1}(t) = y_2^n(t) + \int_0^t \mu_2(s,t)\{(y_2^n)'(s) + 0/3618 y_2^n(s)\}\mathrm{d}s \qquad (7.4)$$

می‌باشدکه $\mu_1 = \mu_1(s,t)$ و $\mu_2 = \mu_2(s,t)$ ضرایب لاگرانژ هستند و بدست می‌آیند

$$\mu_1(s,t) = -\mathrm{e}^{0/1382(s-t)} \quad , \quad \mu_2(s,t) = -\mathrm{e}^{0/3618}$$

در نتیجه فرمول‌های زیر را داریم

$$y_1^{n+1} = y_1^n + \int_0^t (-\mathrm{e}^{0/1382(s-t)})\{(y_1^n)'(s) + 0/1382 y_1^n(s)\}\mathrm{d}s$$

$$y_2^{n+1} = y_2^n + \int_0^t (-\mathrm{e}^{0/3618(s-t)})\{(y_1^n)'(s) + 0/1382 y_1^n(s)\}\mathrm{d}s$$

در اینجا

$$\mathbf{y}^{n+1}(t) = y^n(t) + \int_0^t \mu\{Ly^n(s)\}\mathrm{d}s$$

که

$$\mu = diag(-\mathrm{e}^{0/1382(s-t)}, -\mathrm{e}^{0/13618(s-t)}) \quad , \quad L = (\frac{d}{dt} - D) \quad , \quad N = F(t, \mathbf{y})$$

بنابراین با استفاده از تبدیل $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ داریم

$$x_1^{n+1}(t) = 0/9906 y_1^{n+1}(t) - 0/9403 y_2^{n+1}(t)$$

$$x_2^{n+1}(t) = -0/1369 y_1^{n+1}(t) + 0/3402 y_2^{n+1}(t)$$

در جدول (۵.۴) نتایج عددی برای روش کلاسیک و روش جدید مقایسه شده است.

جدول ۱.۴: مقایسه VIM و$GVIM$

n	ϵ_1^{VIM}	ϵ_2^{VIM}	ϵ_1^{GVIM}	ϵ_2^{GVIM}
۱	۱/۱۱۹	۰/۰۸۹۵	۰	۰
۲	۰/۰۳۲۵	۰/۰۰۱۷		
۳	۰/۰۰۴۵	۰/۰۰۰۴		
۴	۰/۲۳۹۹	۰/۰۰۰۱		
۵	۰	۰		

مثال ۲.۲.۴. دستگاه زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= 0/5 - 1/1x_1(t) + (x_1)^2(t)x_2(t), \quad x_1(0) = 0/4 \\ x_1'(t) &= 0/1x_1(t) - (x_1)^2(t)x_2(t), \quad x_2(0) = 1/5 \end{aligned} \tag{8.4}$$

شیوه کلاسیک. برای حل دستگاه (۸.۴)، تابعک تصحیح زیر را داریم

$$\begin{aligned} x_1^{n+1}(t) &= x_1^n(t) + \int_0^t \lambda_1(s,t)\{(x_1^n)'(s) + 1/1x_1^n(s) - (x_1^n)^2(s)\tilde{x}_2^n(s) - 0/5\}\mathrm{d}s \\ x_2^{n+1}(t) &= x_2^n + \int_0^t \lambda_2(s,t)\{(x_2^n)'(s) - 0/1\tilde{x}_1^n(s) + (\tilde{x}_1^n)^2(s)x_2^n(s)\}\mathrm{d}s \end{aligned}$$

که $\lambda_1 = \lambda_1(s,t)$، $\lambda_2 = \lambda_2(s,t)$ ضرایب لاگرانژ و $\tilde{x}_1^n$، $(\tilde{x}_1^n)^2$ و $(x_1^n)^2\tilde{x}_2^n$ تغییرات محدود هستند یعنی $\delta\tilde{x}_1^n = \delta(\tilde{x}_1^n)^2x_2^n = \delta(x_1^n)^2\tilde{x}_2^n = 0$ است. بنابراین بدست می‌آوریم

$$\lambda_1(s,t) = -\mathrm{e}^{1/1(s-t)} \quad , \quad \lambda_2(s,t) = -1$$

بنابراین

$$\begin{aligned} x_1^{n+1}(t) &= x_1^n(t) + \int_0^t -\mathrm{e}^{1/1(s-t)}\{(x_1^n)'(s) + 1/1x_1^n(s) - (x_1^n)^2(s)\tilde{x}_2^n(s) - 0/5\}\mathrm{d}s \\ x_2^{n+1}(t) &= x_2^n - \int_0^t \{(x_2^n)'(s) - 0/1\tilde{x}_1^n(s) + (\tilde{x}_1^n)^2(s)x_2^n(s)\}\mathrm{d}s \end{aligned} \tag{9.4}$$

با

$$x_1^0(t) = 0/4, x_2^0(t) = 1/5$$

شیوه جدید فرض کنید $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$ بنابراین دستگاه (۸.۴) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + f(t,\mathbf{x}) \quad , \quad \mathbf{x}(0) = (0/4, 1/5)^T \tag{10.4}$$

که $A = \begin{pmatrix} -1/1 & 0 \\ 0/1 & 0 \end{pmatrix}$ و $f(t,\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0/5 + x_1^2x_2 \\ -x_1^2x_2 \end{pmatrix}$ است. مقادیر ویژه A، $\lambda_1 = 0$ و $\lambda_2 = -1/1$ و ماتریس P به صورت زیر است.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0/9959 \\ 1 & -0/0905 \end{pmatrix}$$

حال با معرفی تبدیل $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$، $\mathbf{y} = (y_1, y_2)^T$ دستگاه (۱۰.۴) به دستگاه

$$\mathbf{y}' = J\mathbf{y} + F(t,\mathbf{y}) \tag{11.4}$$

تبدیل می‌شود که $F(t,\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{22} - \frac{55}{61}y_2^2y_1 + \frac{55}{61\sqrt{122}}y_2^3 \\ \frac{\sqrt{122}}{22} + \frac{11}{\sqrt{122}}y_2^2y_1 - \frac{11}{122}y_2^3 \end{pmatrix}$ بنابراین

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1/1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{22} - \frac{55}{61}y_2^2y_1 + \frac{55}{61\sqrt{122}}y_2^3 \\ \frac{\sqrt{122}}{22} + \frac{11}{\sqrt{122}}y_2^2y_1 - \frac{11}{122}y_2^3 \end{pmatrix}$$

با $y(0) = (1/5364, 0/4016)^T$ تابعک تصحیح برای دستگاه (۱۱.۴) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned}
y_1^{n+1} &= y_1^n(t) + \int_0^t \mu_1(s,t)\{(y_1^n)'(s) - \frac{1}{22} + \frac{55}{61}(\tilde{y}_2^n)^2(s)y_1^n(s) \\
&\quad - \frac{55}{61\sqrt{122}}(\tilde{y}_2^n)^3(s)\}\mathrm{d}s \\
y_2^{n+1} &= y_2^n(t) + \int_0^t \mu_2(s,t)\{(y_2^n)'(s) + 1/1 y_n(s) - \frac{\sqrt{122}}{22} \\
&\quad - \frac{11}{\sqrt{122}}(y_2^n)^2(s)\tilde{y}_1^n(s) + \frac{11}{122}(\tilde{y}_2^n)^3(s)\}\mathrm{d}s
\end{aligned} \tag{۱۲.۴}$$

که $\mu_1 = \mu_1(s,t)$ و $\mu_2 = \mu_2(s,t)$ ضرایب لاگرانژ و $(\tilde{y}_2^n)^2 y_1^n$، $(y_2^n)^2 \tilde{y}_1^n$، $(\tilde{y}_2^n)^3$، تغییرات محدودند و ضرایب لاگرانژ به صورت زیر حاصل می‌شوند

$$\mu_1(s,t) = -1, \quad \mu_2(s,t) = -\mathrm{e}^{1/1(s-t)}$$

با جایگذاری ضرایب لاگرانژ در تابعک تصحیح داریم

$$\begin{aligned}
y_1^{n+1} &= y_1^n(t) - \int_0^t \{(y_1^n)'(s) - \frac{1}{22} + \frac{55}{61}(\tilde{y}_2^n)^2(s)y_1^n(s) - \frac{55}{61\sqrt{122}}(\tilde{y}_2^n)^3(s)\}\mathrm{d}s \\
y_2^{n+1} &= y_2^n(t) - \int_0^t \mathrm{e}^{1/1(s-t)}\{(y_2^n)'(s) + 1/1 y_n(s) \\
&\quad - \frac{\sqrt{122}}{22} - \frac{11}{\sqrt{122}}(y_2^n)^2(s)\tilde{y}_1^n(s) + \frac{11}{122}(\tilde{y}_2^n)^3(s)\}\mathrm{d}s
\end{aligned} \tag{۱۳.۴}$$

در اینجا

$$\mathbf{y}^{n+1}(t) = y^n(t) + \int_0^t \mu\{Ly^n(s) + N\tilde{y}^n(s)\}\mathrm{d}s,$$

که

$$\mu = diag(-1, -\mathrm{e}^{1/1(s-t)}) \quad , \quad L = (\frac{d}{dt} - D) \quad , \quad N = F(t, \mathbf{y}).$$

بنابراین با معرفی تبدیل $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ جواب دستگاه (۸.۴) را بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned}
x_1^{n+1}(t) &= 0/9959 y_2^{n+1}(t) \\
x_2^{n+1}(t) &= y_1^{n+1}(t) - 0/0905 y_2^{n+1}(t)
\end{aligned}$$

جدول ۲.۴: مقایسه VIM و $GVIM$ برای معادله (۵۶.۲)

n	ϵ_1^{VIM}	ϵ_2^{VIM}	ϵ_1^{GVIM}	ϵ_2^{GVIM}
۱	۰/۱۲۲۸	۰/۱۵۵۵	۰/۱۲۲۸	۰/۱۶۶۳
۲	۰/۰۸۱	۰/۱۰۱۲	۰/۰۸۰۶	۰/۱۰۷۷
۳	۰/۰۸۳	۰/۶۵۳	۰/۰۵۲۴	۰/۰۶۹۲
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
۱۷	۰	۰/۰۰۰۱	۰	۰۰/۰۰۰۱
۱۸		۰		۰

مثال ۳.۲.۴. دستگاه غیر خطی زیر را در نظر بگیرید

$$
\begin{aligned}
x_1'(t) &= 0.5 - 1.05x_1(t) + x_2(t) + x_1^2(t)x_2(t) \\
x_1'(t) &= 0.05x_1(t) + 0.1x_2(t) - x_1^2(t)x_2(t)
\end{aligned}
\tag{۱۴.۴}
$$

شیوه کلاسیک تابعک تصحیح زیر را برای دستگاه (۱۴.۴) داریم

$$
\begin{aligned}
x_1^{n+1} &= x_1^n + \int_0^t \lambda_1(s,t)\{(x_1^n)')(s) - 0.5 + 1.05x_1^n(s) - x_2^n(s) - (x_1^n)^2(s)\tilde{x}_2^n(s)\}\mathrm{d}s \\
x_2^{n+1} &= x_2^n + \int_0^t \lambda_2(s,t)\{(x_1^n)')(s) - 0.05 - 0.1x_2^n(s) - (\tilde{x}_1^n)^2(s)x_2^n(s)\}\mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

که $\lambda_1 = \lambda_1(s,t)$ و $\lambda_2 = \lambda_2(s,t)$ ضرایب لاگرانژند و $\tilde{x}_1^n$، $\tilde{x}_2^n$ ، $(\tilde{x}_1^n)^2x_2^n$ ، $(x_1^n)^2\tilde{x}_2^n$ تغییرات محدودند و بدست می‌آوریم

$$
\lambda_1(s,t) = -\mathrm{e}^{1.05(s-t)} \quad , \quad \lambda_2(s,t) = -\mathrm{e}^{-0.1(s-t)}
$$

$$
\begin{aligned}
x_1^{n+1} &= x_1^n + \int_0^t -\mathrm{e}^{1.05(s-t)}\{(x_1^n)')(s) - 0.5 + 1.05x_1^n(s) - x_2^n(s) - (x_1^n)^2(s)\tilde{x}_2^n(s)\}\mathrm{d}s \\
x_2^{n+1} &= x_2^n + \int_0^t -\mathrm{e}^{-0.1(s-t)}\{(x_1^n)')(s) - 0.05 - 0.1x_2^n(s) - (\tilde{x}_1^n)^2(s)x_2^n(s)\}\mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

با $x_1^0(t) = 1$ و $x_2^0(t)$.

شیوه جدید مانند مثال‌های قبل برای این مثال نیز داریم

$$
\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + f(t,\mathbf{x}) \quad , \quad \mathbf{x}(0) = (1,0)^T
$$

که

$$
\mathbf{x} = (x_1, x_2) \quad , \quad \begin{pmatrix} -1.05 & 1 \\ 0.05 & 0.1 \end{pmatrix} \quad , \quad f(t,\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + x_1^2x_2 \\ -x_1^2x_2 \end{pmatrix}
$$

همچنین

$$
P = \begin{pmatrix} -0.9991 & -0.6427 \\ 0.0419 & -0.7661 \end{pmatrix} \quad , \quad J = \begin{pmatrix} -1.0919 & 0 \\ 0 & 0.1419 \end{pmatrix}
$$

حال با معرفی تبدیل $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$، $\mathbf{y} = (y_1, y_2)^T$ داریم

$$
\mathbf{y}' = J\mathbf{y} + F(t,\mathbf{y}) \tag{۱۵.۴}
$$

با $\mathbf{y}(\circ) = (-\circ/۹۶۶۹, -\circ/\circ۵۲۹)$
که

$$F(t,\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} -\circ/۴۸۳۴۳ - \circ/\circ۷۴۳۸۷y_۱^۳ + ۱/۲۶۴y_۱^۲y_۲ + ۱/۷۱۸۶y_۱y_۲^۲ + \circ/۵۶۲۷y_۲^۳ \\ -\circ/\circ۲۶۴۴۷ + \circ/\circ۵\circ۵۳۹y_۱^۳ - \circ/۸۵۵۸y_۲y_۱^۲ - ۱/۱۶۷۷y_۱y_۲^۲ - \circ/۳۸۲۳y_۲^۳ \end{pmatrix}$$

بنابراین

$$\begin{pmatrix} y_۱' \\ y_۲' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -۱/\circ۹۱۹ & \circ \\ \circ & \circ/۱۴۱۹ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_۱ \\ y_۲ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\circ/۴۸۳۴۳ - \circ/\circ۷۴۳۸۷y_۱^۳ + ۱/۲۶۴y_۱^۲y_۲ + ۱/۷۱۸۶y_۱y_۲^۲ + \circ/۵۶۲۷y_۲^۳ \\ -\circ/\circ۲۶۴۴۷ + \circ/\circ۵\circ۵۳۹y_۱^۳ - \circ/۸۵۵۸y_۲y_۱^۲ - ۱/۱۶۷۷y_۱y_۲^۲ - \circ/۳۸۲۳y_۲^۳ \end{pmatrix} \tag{۱۶.۴}$$

تابعک تصحیح برای دستگاه (۱۵.۴) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned} y_۱^{n+۱} &= y_۱^n(t) + \int_\circ^t \mu_۱(s,t)\{(y_۱^n)'(s) + ۱/\circ۹۱۹y_۱^n(s) \\ &+ \circ/۴۸۳۴۳ + \circ/\circ۷۴۳۸۷(\tilde{y}_۱^n)^۳(s) - ۱/۲۶۴(y_۱^n)^۲(s)\tilde{y}_۲^n)^۲ - \circ/۵۶۲۷(\tilde{y}_۲^n)^۳(s)\}\mathrm{d}s \end{aligned} \tag{۱۷.۴}$$

$$\begin{aligned} y_۲^{n+۱} &= y_۲^n(t) + \int_\circ^t \mu_۲(s,t)\{(y_۲^n)'(s) - \circ/۱۴۱۹y_۲^n(s) + \circ/\circ۲۶۴۴۷ \\ &- \circ/\circ۵\circ۵۳۹(\tilde{y}_۱^n)^۳(s) + \circ/۸۵۵۸y_۲^n(s)(\tilde{y}_۱^n)^۲(s) + ۱/۱۶۷۷۲\tilde{y}_۱^n(s)(y_۲^n)^۲(s) \\ &+ \circ/۳۸۲۳(\tilde{y}_۲^n)^۳(s)\}\mathrm{d}s \end{aligned} \tag{۱۸.۴}$$

که $\mu_۱ = \mu_۱(s,t)$ و $\mu_۲ = \mu_۲(s,t)$ ضرایب لاگرانژ و $(\tilde{y}_۱^n)^۳$، $(\tilde{y}_۱^n)^۲y_۲^n$، $(\tilde{y}_۲^n)^۲y_۱^n$،$(y_۲^n)^۲\tilde{y}_۱^n$، $(\tilde{y}_۲^n)^۳$، $(y_۱^n)^۲\tilde{y}_۲^n$ تغییرات محدودند و ضرایب لاگرانژ به صورت زیر حاصل می‌شوند

$$\mu_۱(s,t) = -\mathrm{e}^{۱/\circ۹۱۹(s-t)}, \quad \mu_۲(s,t) = -\mathrm{e}^{-\circ/۱۴۱۹(s-t)}$$

با جایگذاری ضرایب لاگرانژ در تابعک تصحیح داریم

$$\begin{aligned} y_۱^{n+۱} &= y_۱^n(t) + \int_\circ^t -\mathrm{e}^{۱/\circ۹۱۹(s-t)}\{(y_۱^n)'(s) + ۱/\circ۹۱۹y_۱^n(s) + \circ/۴۸۳۴۳ \\ &+ \circ/\circ۷۴۳۸۷(\tilde{y}_۱^n)^۳(s) - ۱/۲۶۴(y_۱^n)^۲(s)\tilde{y}_۲^n)^۲ - \circ/۵۶۲۷(\tilde{y}_۲^n)^۳(s)\}\mathrm{d}s \\ y_۲^{n+۱} &= y_۲^n(t) + \int_\circ^t -\mathrm{e}^{-\circ/۱۴۱۹(s-t)}\{(y_۲^n)'(s) - \circ/۱۴۱۹y_۲^n(s) + \circ/\circ۲۶۴۴۷ \\ &- \circ/\circ۵\circ۵۳۹(\tilde{y}_۱^n)^۳(s) + \circ/۸۵۵۸y_۲^n(s)(\tilde{y}_۱^n)^۲(s) + ۱/۱۶۷۷۲\tilde{y}_۱^n(s)(y_۲^n)^۲(s) \\ &+ \circ/۳۸۲۳(\tilde{y}_۲^n)^۳(s)\}\mathrm{d}s \end{aligned} \tag{۱۹.۴}$$

در اینجا

$$\mathbf{y}^{n+۱}(t) = y^n(t) + \int_\circ^t \mu\{Ly^n(s) + N\tilde{y}^n(s)\}\mathrm{d}s$$

که

$$\mu = diag(-e^{1/0919(s-t)}, -e^{0/1419(s-t)}) \quad , \quad L = (\frac{d}{dt} - D) \quad , \quad N = F(t, \mathbf{y})$$

بنابراین با تبدیل $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ جواب معادله (۱۴.۴) را بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned} x_1^{n+1}(t) &= -0/9991 y_1^{n+1}(t) - 0/6427 y_2^{n+1}(t) \\ x_2^{n+1}(t) &= 0/0119 y_1^{n+1}(t) - 0/7661 y_2^{n+1}(t) \end{aligned} \tag{۲۰.۴}$$

در جدول زیر برخی نتایج عددی قابل مشاهده است

جدول ۳.۴: مقایسه VIM و $GVIM$

n	ϵ_1^{VIM}	ϵ_2^{VIM}	ϵ_1^{GVIM}	ϵ_2^{GVIM}
۱	۰/۱۸۱	۰/۰۲۰۹	۰/۰۰۲	۰/۰۱۰۸
۲	۰/۰۰۲	۰/۰۰۸۳	۰/۰۰۰۵	۰/۰۰۴۳
۳	۰/۰۰۰۵	۰/۰۰۳۲	۰	۰/۰۰۱۶
۴	۰/۰۰۰۵	۰/۰۰۱۲		۰/۰۰۰۶
۵	۰/۰۰۰۶	۰/۰۰۴		۰/۰۰۰۲
۶	۰/۰۰۰۴	۰/۰۰۰۲		۰/۰۰۰۱
۷	۰/۰۰۰۲	۰		۰
۸	۰/۰۰۰۱			
۹	۰/۰۰۰۱			
۱۰	۰			

۳.۴ نتیجه گیری

در این پایان نامه شیوه جدید روش تکرار وردشی با تعمیم ضرایب لاگرانژ ارایه می‌شود که در مقایسه با شیوه کلاسیک میزان تکرارها کاهش می‌یابد و جواب سریعتر بدست می‌آید.
تفاوتهای بین شیوه جدید و کلاسیک عبارت است از

- در شیوه جدید ضرایب لاگرانژ، توابع ماتریسی است در حالیکه در روش کلاسیک ضرایب لاگرانژ اسکالر است.
- شیوه کلاسیک تغییرات محدود را هم در عبارات خطی و هم در عبارات غیرخطی بکار می‌برد در حالیکه شیوه جدید تغییرات محدود را تنها در عبارات غیر خطی استفاده می‌کند که این منجر به تعمیم روش برای معادلات مرتبه بالاتر یا دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول می‌شود.

استفاده از فرم‌های کانونی جردن در دستگاه معادلات با ضرایب ثابت یکی از کاربردهای روش جدید است که در چنین مواردی برای یافتن ضرایب لاگرانژ بکار رفته در روش تکرار وردشی باید مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس ضرایب را بیابیم. در روش تکرار وردشی فرض براین است که ضربگر لاگرانژ از قبل مشخص باشد یا آنرا با استفاده از حساب تغییرات بدست می‌آوریم.
شیوه جدید روش تکراروردشی را برای معادلات دیفرانسیل به شکل زیر ارایه دادیم

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + f(t, \mathbf{x}) \quad , \quad \mathbf{x}(t_\circ) = \alpha_\circ$$

که $m \in N$، $\mathbf{x}$ بردار m تایی، A ماتریسی $m \times m$ و $f : R^{m+1} \longrightarrow R^m$ است.
نتایج نشان می‌دهد که

- اگر $f(t, \mathbf{x}) = \circ$ و A ماتریس نامنفرد باشد، با استفاده از روش جدید VIM تنها با یک تکرار به جواب دقیق می‌رسیم.
- اگر $f(t, \mathbf{x}) \neq \circ$ و A منفرد باشد تقریب‌های بدست آمده با شیوه جدید اغلب همان تقریب‌هایی است که با شیوه کلاسیک بدست می‌آیند.
- اگر $f(t, \mathbf{x}) \neq \circ$ و A نامنفرد باشد، تقریب‌های بدست آمده با روش جدید در مقایسه با روش کلاسیک با استفاده از تعداد تکرارهای کمتری همگرا به جواب دقیق می‌شود.

در نهایت روش VIM را برای مسایل مقدار مرزی و اولیه بکار می‌بریم و نشان می‌دهیم هنگامیکه تقریب اولیه در شرایط اولیه صدق کند، جواب مسایل مقدار اولیه با تنها یک تکرار بدست می‌آید. مشابه مسایل مقدار اولیه برای مسایل مقدار مرزی نیز، ثابت می‌شود که اگر تقریب اولیه در شرایط مرزی صدق کند بنابراین جواب مسایل مقدار مرزی خطی نیز در یک تکرار بدست می‌آید که خوشبختانه نیازمند استفاده از تابع گرین نیستیم. با استفاده از این حقیقت الگوریتم جدیدی را برای حل مسایل مقدار مرزی غیر خطی ارایه می‌دهیم[۴]. برای نشان دادن کارایی الگوریتم جدید، مثال‌هایی از مسایل مقدار مرزی خطی و غیر خطی ارایه می‌دهیم.

پیوست آ

کد های میپل

آ.۱ کد مثال۱.۵.۲

```
> restart;
> with(linalg);
> m := 4;
> ode := t^2*(diff(y(t), t, t))-3*t*(diff(y(t), t))+4*y(t) = t;
> dsolve(ode, y(t));
> a11 := 0; a12 := 1; a21 := -4/t^2; a22 := 3/t;
> eq1 := diff(x(t), t) = a11*x(t)+a12*y(t);
> eq2 := diff(y(t), t) = a21*x(t)+a22*y(t)+1/t;
> vars := {x(t), y(t)};
> sol := dsolve({eq1, eq2, x(1) = 2, y(1) = 2}, vars);
> x1[0] := 2;
> unapply(x1[0], t);
> x2[0] := 2;
> unapply(x2[0], t);
> h := t^2-t^2*ln(t)+t;
> h := unapply(h, t);
> f := 1-2*t*ln(t)+t;
> f := unapply(f, t);
> for n from 0 to m do
```

```
x1[n+1] := x1[n](t)-(int(diff(x1[n](s), s)-x2[n](s), s = 1 .. t));
x1[n+1] := unapply(x1[n+1], t);
b[n] := `assuming`([int(diff(x2[n](s), s)+4*x1[n](s)/s^2
-3*x2[n](s)/s-1/s, s = 1 .. t)], [t > 1]);
b[n] := unapply(b[n], t);
x2[n+1] := x2[n](t)-b[n](t);
x2[n+1] := unapply(x2[n+1], t);
end do;
> ss1 := evalf(h(t)-x1[m+1](t));
> ss2 := evalf(f(t)-x2[m+1](t));
> plot(sqrt(ss1^2+ss2^2), t = 1 .. 4);
> x2 := 1-2*t*ln(t)+t;
> x2 := unapply(x2, t);
> x210 := x2[m+1](t);
> x210 := unapply(x210, t);
> err := abs(x2(t)-x210(t));
> x22 := t^2-t^2*ln(t)+t;
> unapply(x22, t);
> ho := x1[m+1](t);
> x20 := unapply(x20, t);
> plot(abs(x22-ho), t = 1 .. 4);
> A := -array([[t^2*(1+2*ln(s))/s^2-2*t^2*ln(t)/s^2, t^2*(ln(t)-ln(s))/s],
[4*t*(ln(s)-ln(t))/s^2, 2*t*(ln(t)-ln(s))/s+t/s]]);
> v := vector([diff(x1[n](s), s)-x2[n](s),
diff(x2[n](s), s)+4*x1[n](s)/s^2-3*x2[n](s)/s-1/s]);
> S := multiply(A, v);
> x11[0] := 2;
> unapply(x1[0], t);
> x22[0] := 2;
> unapply(x2[0], t);
> for n from 0 to m do
x11[n+1] := x11[n](t)+int((-t^2*(1+2*ln(s))/s^2
+2*t^2*ln(t)/s^2)*(diff(x11[n](s), s)-x22[n](s))
-t^2*(ln(t)-ln(s))*(diff(x22[n](s), s)+4*x11[n](s)/s^2
```

```
-3*x22[n](s)/s-1/s)/s, s = 1 .. t);
x11[n+1] := `assuming`([x11[n+1]], [t > 0]);
x11[n+1] := unapply(x11[n+1], t);
x22[n+1] := x22[n](t)+int(-4*t*(ln(s)-ln(t))*(diff(x11[n](s), s)
- x22[n](s))/s^2+(-2*t*(ln(t)-ln(s))/s-t/s)*(diff(x22[n](s), s)
+4*x11[n](s)/s^2-3*x22[n](s)/s-1/s), s = 1 .. t);
x22[n+1] := `assuming`([x22[n+1]], [t > 0]);
x22[n+1] := unapply(x22[n+1], t)
end do;
> x23 := t^2-t^2*ln(t)+t;
> x20 := x11[m+1](t);
> er1 := abs(x23-x20);
> x24 := 1-2*t*ln(t)+t;
> x25 := x22[m+1](t);
> er2 := abs(x24-x25);
> ss1 := h(t)-x11[m+1](t);
> ss2 := f(t)-x22[m+1](t);
> sqrt(ss1(t)^2+ss2(t)^2);
```

آ.۲ مثال ۲.۴.۲

```
> restart;
> with(linalg);
> m := 9;
> a11 := 0; a12 := -1; a21 := -2; a22 := -1;
> eq1 := diff(x(t), t) = a11*x(t)+a12*y(t);
> eq2 := diff(y(t), t) = a21*x(t)+a22*y(t);
> vars := {x(t), y(t)};
> sol := dsolve({eq1, eq2, x(0) = 1, y(0) = 2}, vars);
> f := -exp(s-t);
> g := mtaylor(f, t = s, m);
> g1 := unapply(g, t);
> x1[0] := 1;
> unapply(x1[0], t);
```

```
> x2[0] := 2;
> unapply(x2[0], t);
> f := exp(-2*t);
> g2 := mtaylor(f, t, m);
> g22 := unapply(g2, t);
> ff := 2*exp(-2*t);
> g21 := mtaylor(ff, t, m);
> g221 := unapply(g21, t);
> for n from 0 to m do
x1[n+1] := x1[n](t)-(int(diff(x1[n](s), s)+x2[n](s), s = 0 .. t));
x1[n+1] := unapply(x1[n+1], t);
er1 := evalf(abs(g22(1)-x1[n+1](1)));
x2[n+1] := x2[n](t)+int(g1(s)*(diff(x2[n](s), s)+2*x1[n](s)+x2[n](s)), s = 0 .. t);
x2[n+1] := unapply(x2[n+1], t);
er2 := evalf(abs(g221(1)-x2[n+1](1)));
end do;
> B := array([[exp(t-s), 0], [0, exp(2*(s-t))]]);
> A := array([[1, 0], [0, -2]]);
> v := vector([0, 1]);
> E := evalm(`&*`(B, A));
> Z := multiply(E, v);
> k := map(int, Z, s = 0 .. t);
> y[0] := vector([0, 0, 1]);
> v := matadd(k, v);
> P := array([[1, 1], [0, -2]]);
> x[1] := multiply(P, v);
```

آ.۳ کد مثال ۱.۷.۲

```
> restart;
> with(linalg);
> m := 9;
> n := mtaylor(exp((1/2)*t^2), t = 0, 10);
> n := unapply(n, t);
```

```
> r := 1/(1+n(t));
> r := unapply(r, t);
> f := -exp((s^2-t^2)*(1/2));
> g2 := mtaylor(f, t = s, m);
> g2 := unapply(g2, t);
> x[0] := 1/2;
> x[0] := unapply(x[0], t);
> for n from 0 to 9 do
x[n+1] := x[n](t)-0.1e-2*(int(diff(x[n](s), s)+s*x[n](s)-s*x[n](s)^2, s = 0 .. t));
x[n+1] := unapply(x[n+1], t)
end do;
> evalf(er = abs(r(1)-x[10](1)));
> y[0] := 1/2;
> y[0] := unapply(y[0], t);
> for n from 0 to 9 do
y[n+1] := y[n](t)+int(g2(s)*(diff(y[n](s), s)+s*y[n](s)-s*y[n](s)^2),
 s = .5*n .. t);
y[n+1] := unapply(y[n+1], t)
end do;
> er2 := abs(y[m](t)-r(t));
```

آ.۴ کد مثال ۳.۲.۳

```
> restart;
> with(linalg);
> m := 7;
> ode := (D(D(x)))(t)-(D(x))(t)^2+1 = 0;
> IC := x(0) = 0, (D(x))(1) = 0;
> simplify(h = dsolve({IC, ode}, {x(t)}));
> h := unapply(h, t);
> plo := mtaylor(t-ln(exp(2*t)+exp(2))+ln(1+exp(2)), t = 0, m);
> plo := unapply(plo, t);
> plot(plo(t), t = 0 .. 1);
> x[0] := 0;
```

```
> x[0] := unapply(x[0], t);
> for n from 0 to 7 do
z[n+1] := x[n](t)+int((s-t)*(diff(x[n](s), s, s)-(diff(x[n](s), s))^2+1),
 s = 0 .. t);
z[n+1] := unapply(z[n+1], t);
c := z[n+1](0); c1 := diff(z[n+1](t), t);
c1 := unapply(c1, t); d := c1(1);
y[n+1] := c+d*t; y[n+1] := unapply(y[n+1], t);
x[n+1] := z[n+1](t)-y[n+1](t); x[n+1] := unapply(x[n+1], t);
er := sum(diff(abs((diff(z[n+1]((1/10)*i), t))^2
-(diff(x[n+1]((1/10)*i), t))^2), x), 'i' = 0 .. 10);
er := unapply(er, t) end do;
> plot([x[1](t), x[3](t), x[5](t), x[7](t), plo(t)], t = 0 .. 1, linestyle
= [dot, dash, dot, dash, dot], color = [red, blue, black, green, red]);
```

مراجع

[1] A. Howard, *"Elementary linear algebra"*, John Wiley and Sons. 2010.

[2] B. Batiha, MSM. Noorani, I. Hashim, ES. Ismail, *"the multistage variational iteration method for a class of nonlinear system of odes"*, Physica Scripta, 76(4):388, 2007.

[3] B.A. Finlayson, *"The method of weighted residuals and variational principles"*, Siam, 2013.

[4] D. Altintan, Ö. Uğur, *"solution of initial and boundary value problems by the variational iteration method"*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 259:790–797, 2014.

[5] D. Altintan, Ö. Uğur, *"generalisation of the lagrange multipliers for varia- tional iterations applied to systems of differential equations"*, Mathematical and Computer Modelling, 54(9):2040–2050 2011.

[6] D.K. Salkuyeh, *"convergence of the variational iteration method for solving linear systems of odes with constant coefficients"*, Computers and Mathematics with Applications, 56(8):2027–2033, 2008.

[7] E. Yusufoğlu, *"the variational iteration method for studying the klein–gordon equation"*, Applied Mathematics Letters, 21(7):669–674, 2008.

[8] F. Geng, *"a modified variational iteration method for solving riccati differential equations"*, Computers and Mathematics with Applications, 60(7):1868–1872, 2010.

[9] F. Soltanian, SM. Karbassi, MM. Hosseini *"application of he's variational iteration method for solution of differential-algebraic equations"*, Chaos, Solitons and Fractals, 41(1):436–445, 2009.

[10] M. Inokuti, H. Sekine, T. Mura, *"general use of the lagrange multiplier in nonlinear mathematical physics"*, Variational method in the mechanics of solids. 33(5):156–162, 2013.

[11] M. Rafei, H. Daniali, DD, Ganji, *"variational iteration method for solving the epidemic model and the prey and predator problem"*, Applied Mathematics and Computation. 186(2):1701–1709, 2007.

[12] M. Turkyilmazoglu, *"an optimal variational iteration method"*, Applied Mathematics Letters. 24(5):762–765, 2011.

[13] S.M. Goh, M.S.N. Noorani, I. Hashim, MM. Al-Sawalha, *"variational iteration method as a reliable treatment for the hyperchaotic rössler system"*, International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation. 10(3):363–372, 2009.

[14] S. Momani, S. Abuasad *"application of he's variational iteration method to helmholtz equation"*Chaos, Solitons and Fractals. 27(5):1119–1123, 2006.

[15] T.A. Abassy, *"modified variational iteration method (nonlinear homogeneous initial value problem)"*, Computers mathematics with applications, 59(2):912–918, 2010.

[16] W. Boyce, R. DiPrima, C. Haines, *"Elementary differential equations and boundary value problems"*, Wiley New York. 1992.

[17] Z. M. Odibat, *"reliable approaches of variational iteration method for nonlinear operators"*, Mathematical and Computer Modelling. 48(1):222–231, 2008.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

اجتناب کردن	Avoid
اصلاح	Modification
اصلی	Original
انتگرال‌گیری جزبه‌جز	Integration By Parts
بردارویژه	Agenvector
بعد	Dimension
بلوک جردن	Block Jordan
تابعک تصحیح	Correction Funectional
تایید	Varification
تبدیل	Transformation
ترانهاده	Transpose
تعمیم	Generalisation
تغییرات محدود	Restricted Variations
تقریب اولیه	Initia Approximation
تکرار	Iterate
ثابت	Constract
چندمرحله‌ای	Multistage
خطی	ELinear
دنباله	Sequel
رابطه	Relation
رابطه نزدیک	Close relation
روش کلاسیک	Classical Approach
زیربازه	Subinterval
ضربگرلاگرانژ	Lagrange Mutiplier
ضریب	Coefficient

دستگاه الحاقی .... Ajoint System
دیگر .... Alternative
ساختن .... Constract
شرایط پایستاری .... Stationary Condition
شرط .... Condition
عددی .... Numerical
فرض کردن .... Assume
فرم کانونی جردن .... Jordan Canonical Form
فرمول بندی کردن .... Furmulate
قرار دادن .... Subject
کاهش دادن .... Deduced
ماتریس اساسی .... Fundamental Matrix
متغییر .... Vblearia
متناظر .... Corresponding
محاسبه .... Calculus
مختلط .... Complex
مرتبه .... Order
مصنوعی .... Artificial
مقایسه .... Compare
مقدارویژه .... Egenvalue
منحصربه فرد .... Unique
نامنفرد .... Nonsingular
نتیجه .... Result
همگن .... Homogeneous

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Adjoint System	دستگاه الحاقی
Alternative	دیگر
Artificial	مصنوعی
Assume	فرض کردن
Avoid	اجتناب کردن
Block Jordan	بلوک جردن
Calculus	محاسبه
Classical Approach	روش کلاسیک
Close Relation	رابطه نزدیک
Coefficient	ضریب
Compare	مقایسه
Complex	مختلط
Condition	شرط
Constant	ثابت
Constract	ساختن
Correction Funectional	تابعک تصحیح
Corresponding	متناظر
Deduced	کاهش دادن
Dimension	بعد
Eigenvalue	مقدار ویژه
Eigenvector	بردار ویژه
Fundamental Matrix	ماتریس اساسی
Furmulate	مساله‌های بیضوی
Generalisation	تعمیم
Homogeneous	همگن

Initial Approximation .... تقریب اولیه
Integration By Parts .... انتگرال گیری جز به جز
Iterate .... تکرار
Jordan Canonial form .... فرم کانونی جردن
Lagrange Multiplier .... ضربگر لاگرانژ
Linear .... خطی
Modification .... اصلاح
Multistage .... چند مرحله‌ای
Nonsingular .... نامنفرد
Numerical .... عددی
Order .... مرتبه
Original .... اصلی
Redtricted Variations .... تغییرات محدود
Relation .... رابطه
Result .... نتیجه
Sequel .... دنباله
Stationary Condition .... شرایط پایستاری
Subinterval .... زیر بازه
Subject .... قراردادن
Transformation .... تبدیل
Transpose .... ترانهاده
Unique .... منحصر به فرد
Variable .... متغییر
Variational Iteration Method .... روش تکرار وردشی
Varification .... تایید

نمایه

Aabstract

In this thesis, a new method of variational iteration method for solving first order system of differential equations are introduced. This approach, unlike the classical method, restricted variations in nonlinear expressions is usesd. The method compared to the classical method with generalized lagrange multipliears which reduces the computation and obtain faster result.To confirm the new method for solving linear and nonlinear differential equations, we provide examples that demonstrate the use of generalized lagrange multipliear is more reliable.

The variational iteration method for initial and boundary value problems apply. A new algorithm for linear and nonlinear boundary value problems that dose not require the use of the Green funection is introduced.

keywords: Variationa iteration method, System of differential equations, Restricted variations, Lagrange multipliers.

Shahrood University of Technology

Shahrood University
Faculty of Mathematical Sciences

Dissertation Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of Master of Science in Applied Mathematics

Generalisation of the Lagrange multipliers for variational iterations applied to systems of differential equations

Supervisor
Dr. Mehdi Ghovatmand

Advisor
Dr. Ali Mesforush

by

Hoda Saki

2015