



دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی کاربردی

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی کاربردی، گرایش معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

عنوان

روش المان مرزی روی معادله هلمهولتز

استاد راهنما

دکتر علی مس فروش

استاد مشاور

دکتر حجت احسنی طهرانی

دانشجو

زهرا مهربان

۱۳۹۳

تقدیم به مقدس ترین واژه مادر لغت نامه دلم

پدرم

بزرگواری که الفبای زندگی را از او آموختم،

مادر مهربانم

بلند تنیه کا هم، که دامن پر مهرش یگانه پناهم است،

برادر و خواهرم

همراهان همیشگی و پشتوانه های زندگی ام،

استادی

که سپیدی را بر تخته سیاه زندگی ام نگاشت.

در میان دشت شقایق و نور

تورا صدا کردم

در کویر غم و اندوه بی عبور

تورا صدا کردم

در هر جای نزدیک

هر جای دور

تورا صدا کردم

که وارثانی ام از غم.

امروز صدای زخم تورا

که شکر بگویمت

برای آنچه نمودی ام فراهم.

ای نزدیک تر از نزدیک

ای با من اما من دور

ای آفریننده مهربان و غفور

تنها تورا ستایش می کنم

ای حاضر، همواره، لحظه ها

ای آشکار، پیدای

تنها تورا ستایش می کنم

تورا

ای خدا...!

سپاس گزاری...

نخستین سپاس و ستایش از آن خداوندی است که بنده کوچکش را در دریای بی کران اندیشه، قطره‌ای ساخت تا وسعت آن را از دریچه اندیشه‌های ناب آموزگارانی بزرگ به تماشا نشیند. لذا اکنون که در سایه سار بنده نوازی‌هایش پایان نامه حاضر به انجام رسیده است، بر خود لازم می‌دانم تا مراتب سپاس را از بزرگوارانی به جا آورم که اگر دست یاری‌گشان نبود، هرگز این پایان نامه به انجام نمی‌رسید.

ابتدا از استاد گرامی جناب آقای دکتر علی مس فروش که زحمات راهبردی این پایان نامه را بر عهده داشتند، کمال سپاس را دارم.

از استاد عالی قدرم جناب آقای دکتر حجت احسنی طهرانی که زحمات مشاوره این پایان نامه را متحمل نمودند، کمال تشکر را دارم.

سپاس آخر را به مهربان‌ترین هم‌رئان زندگی‌ام به پدر و مادرم و تمامی دوستانی که در طول انجام این پروژه کمک رسان من بوده‌اند تقدیم می‌کنم.

زهره مهربان
۱۳۹۳

تعمدنامه

اینجانب زهره مهربان دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی دانشکده علوم ریاضی دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان روش المان مرزی روی معادله هلمهولتز، تحت راهنمایی دکتر علی مس فروش متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های دیگر پژوهشگران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه شاهرود “ یا “ Shahrood University “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

زهره مهربان
۱۳۹۳

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی باشد.

چکیده

روش المان مرزی از جمله روش‌های عددی است که مزایای بسیاری در حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی دارد. در این روش، معادلات دیفرانسیل به اتحادهای انتگرالی تبدیل می‌شوند که بر روی سطح یا مرز اعمال شده‌اند و برخلاف روش المان محدود که کل دامنه المان‌بندی می‌شود، تنها مرزهای جسم المان‌بندی شده و در نهایت مانند دیگر روش‌های عددی یک دستگاه معادلات جبری خطی حاصل می‌گردد که جوابی یکتا خواهد داشت. برتری اصلی این روش به دیگر روش‌های عددی، المان‌بندی سطحی به جای المان‌بندی حجمی است. این روش به‌طور هندسی و به‌سادگی برای هر شکل پیچیده مرزی قابل اعمال است. در این پایان‌نامه هدف حل مساله هلمهولتز با روش المان مرزی است. در فصل اول به مزایا و معایب این روش نسبت به سایر روش‌های عددی و تاریخچه مختصری از این روش پرداخته‌ایم. در فصل دوم مقدمات و پیش‌نیازهای لازم را به منظور اجرای روش المان مرزی بیان کرده‌ایم و در ادامه این روش را بر روی مساله لاپلاس که حالت خاصی از مساله هلمهولتز می‌باشد، با فرض ثابت بودن المان‌ها اعمال کرده‌ایم، در فصل بعد توسط کدنویسی به زبان متلب به تحلیل یک مثال عددی و مقایسه نتایج حاصل با مقادیر واقعی جواب و تاثیر افزایش المان‌ها در دقت جواب تقریبی پرداخته‌ایم و در فصل انتهایی مساله هلمهولتز را به روش المان مرزی تحلیل کرده‌ایم.

کلمات کلیدی: معادله لاپلاس، معادله هلمهولتز، معادله انتگرال مرزی، گسسته‌سازی، روش المان مرزی

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

۱. مهربان.ز، مس فروش.ع، ”روش المان مرزی روی معادله پواسون”، چهل و پنجمین کنفرانس ریاضی ایران، شهریور ۱۳۹۳

فهرست مطالب

۱	مقدمه	۱
۲	۱.۱ مزایای روش المان مرزی	۱.۱
۳	۲.۱ معایب روش المان مرزی	۲.۱
۴	۳.۱ تاریخچه‌ای از روش المان مرزی	۳.۱
۷	۲ معرفی روش المان مرزی	۲
۸	۱.۲ تعاریف و قضایا	۱.۲
۱۰	۲.۲ معادلات دیفرانسیل پاره‌ای	۲.۲
۱۰	۱.۲.۲ دسته‌بندی معادلات دیفرانسیل پاره‌ای	۱.۲.۲
۱۱	۳.۲ مساله لاپلاس	۳.۲
۱۱	۴.۲ قضیه دیورژانس و گرین	۴.۲
۱۴	۵.۲ تابع دلتای دیراک و جواب اساسی	۵.۲
۱۴	۱.۵.۲ تابع دلتای دیراک	۱.۵.۲
۱۴	۲.۵.۲ جواب اساسی	۲.۵.۲
۲۰	۶.۲ معادله انتگرال مرزی	۶.۲
۲۰	۱.۶.۲ معادله انتگرال مرزی در نقاط درونی ناحیه Ω	۱.۶.۲
۲۳	۲.۶.۲ معادله انتگرال مرزی در نقاط مرزی ناحیه Ω	۲.۶.۲
۲۶	۷.۲ انتگرال‌های تکین	۷.۲
۲۷	۸.۲ گسسته‌سازی	۸.۲
۲۹	۹.۲ اعمال روش المان مرزی بر روی معادلات انتگرال مرزی	۹.۲
۳۱	۳ تحلیل معادله لاپلاس با روش المان مرزی	۳
۳۱	۱.۳ چگونگی محاسبه ماتریس ضرایب	۱.۳
	۲.۳ محاسبه انتگرال هنگامی که چشمه روی المانی که انتگرال روی آن محاسبه می‌شود،	۲.۳
۳۱	باشد	۳۱
	۳.۳ محاسبه انتگرال هنگامی که چشمه روی المانی که انتگرال روی آن محاسبه می‌شود،	۳.۳
۳۲	نباشد	۳۲

۳۳	شبه‌سازی انتقال گرما در ناحیه مستطیل شکل	۴.۳
۳۹	دما در نقاط درونی	۱.۴.۳
۴۰	ارزیابی دما با در نظر گرفتن مکانی دلخواه برای چشمه	۲.۴.۳
۴۲	افزایش تعداد المان‌ها در درستی جواب	۳.۴.۳
۴۵	تحلیل معادله هلمهولتز با روش المان مرزی	۴
۴۶	معادله هلمهولتز	۱.۴
۴۸	معادله بسل	۲.۴
۴۸	توابع بسل	۱.۲.۴
۴۹	جواب اساسی معادله هلمهولتز	۳.۴
۴۹	جواب اساسی در فضای سه بعدی	۱.۳.۴
۵۲	جواب اساسی در فضای دو بعدی	۲.۳.۴
۵۵	معادله انتگرال مرزی برای مساله هلمهولتز	۴.۴
۵۶	گسسته‌سازی و اعمال روش المان مرزی بر روی معادله انتگرال مرزی	۵.۴
۵۸	تحلیل عددی مساله هلمهولتز همگن	۶.۴
۵۹	نتیجه‌گیری و پیشنهاد	۷.۴
۶۱	مراجع	
۶۶	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی	
۶۸	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی	
۷۰	نمایه	

فصل ۱

مقدمه

امروزه روش‌های عددی یکی از متداول‌ترین و محبوب‌ترین روش‌ها برای تحلیل بسیاری از مسایل مهندسی می‌باشند، زیرا در مقابل روش‌های تجربی و آزمایشگاهی هزینه‌های بسیار کمتری در پی دارند. علاوه بر این بسیاری از قطعات صنعتی آنچنان با ارزش و کمیاب هستند که قرار دادن آن‌ها در شرایط آزمایشگاهی جهت تجزیه و تحلیل بسیار پرخطر و عملاً ناممکن است.

روش‌های عددی به حافظه‌ی سخت افزاری و قدرت پردازش بالایی نیاز ندارند و از این رو با گذر زمان و پیشرفت رایانه‌ها بیش از پیش مورد استقبال قرار گرفتند، به همین دلیل روش‌های عددی روز به روز در حال گسترش هستند. در این میان می‌توان از روش‌های تفاضلات متناهی، المان محدود و المان مرزی به عنوان رایج‌ترین روش‌ها نام برد. در ادامه بصورت خلاصه به بیان اساس کار هریک می‌پردازیم. روش‌های عددی متداول معمولاً براساس گسسته‌سازی ناحیه محاسباتی توسط یک شبکه محاسباتی و اعمال معادلات حاکم روی شبکه مورد نظر پایه‌ریزی شده‌اند. به هر میزان که اندازه‌ی فاصله‌ی بین گره‌های^۱ این شبکه کوچکتر باشد، دقت محاسبات بالاتر خواهد بود. در این بین زمان انجام محاسبات نیز با افزایش دقت افزایش خواهد یافت. یکی از مسایلی که در حل مسایل به روش‌های عددی گریبان‌گیر مهندسین می‌باشد، تعیین اندازه مناسب شبکه محاسباتی است به گونه‌ای که جواب مسایل از دقت لازم برخوردار بوده و از محاسبات اضافی پرهیز شود. از این رو در بین روش‌های عددی مختلف که در تحلیل مسایل کاربرد دارند، علاقه به روش‌هایی که با تعداد المان‌های کمتر بتوانند از دقت مطلوب برخوردار باشند بیشتر است. روش‌های عددی متداول برای حل مسایل مهندسی را می‌توان به سه گروه عمده زیر تقسیم‌بندی نمود.

۱. روش تفاضلات متناهی (FDM)^۲

۲. روش المان محدود (FEM)^۳

^۱Nodes

^۲Finite Difference Method

^۳Finite Element Method

۳. روش المان مرزی (BEM)^۴

۱. در روش تفاضلات متناهی با شبکه‌بندی ناحیه مورد نظر، یک سری گره در ناحیه ایجاد می‌شود. در این روش پس از تبدیل معادلات حاکم به یک سری معادلات دیفرانسیلی، مشتقات مورد نظر را با استفاده از سری تیلور به شکل تفاضلات متناهی تبدیل کرده و روی هریک از این گره‌ها اعمال می‌نمایند. این روش در حالت کلی ساده‌تر از دو روش دیگر می‌باشد. از معایب عمده این روش، ضعف آن در تحلیل مسایل با هندسه‌ی پیچیده می‌باشد.

۲. در روش المان محدود، با تقسیم ناحیه به تعداد محدودی المان‌های کوچک و اعمال معادلات حاکم روی هریک از این المان‌ها، مساله حل می‌شود. این روش، دیگر محدودیت‌های روش تفاضلات متناهی را نداشته و کارایی مناسب برای تحلیل مسایل با هندسه‌های پیچیده را دارا می‌باشد.

۳. روش المان مرزی همان‌گونه که از نامش پیداست با تبدیل معادلات حاکم به فرم معادلات انتگرالی که بر روی سطح (مرز ناحیه) تعریف شده‌اند، به حل مساله می‌پردازد. در این روش با تقسیم مرز مساله به تعداد محدودی المان، انتگرال‌های فوق روی این المان‌ها، با روشی عددی یا تحلیلی تعیین و به این وسیله مجهولات روی مرز مشخص می‌شوند. با تعیین این مجهولات دیگر مقادیر تابع در هر نقطه داخلی قابل تعیین می‌باشد.

پس از بررسی مختصر روش‌های عددی متداول، می‌توان دریافت که روش المان مرزی با کاهش یک بعد از مساله و به عبارتی تبدیل مسایل سه بعدی به دو بعدی و یا تبدیل مسایل دو بعدی به یک بعدی تأثیر به‌سزایی در کاهش حجم تعداد محاسبات دارد. علاوه بر این مزیت، طبق نتایج بدست آمده از حل مسایل بدین روش، روش المان مرزی از دقت بسیار مناسب در اغلب مسایل برخوردار است. از دیگر مزایای این روش، می‌توان به قابلیت فوق‌العاده آن برای استفاده در شرایط هندسی پیچیده اشاره نمود و در این حالت روش المان مرزی از برتری نسبی نسبت به روش المان محدود است. در ادامه به مقایسه مزایا و معایب هریک از دو روش المان مرزی و المان محدود پرداخته می‌شود.

۱.۱. مزایای روش المان مرزی

۱. چون در بیشتر مسایل، شرایط بحرانی مانند تمرکز تنش، شوک دمایی، خوردگی الکتروشیمیایی و دیگر موارد مشابه روی سطح یا مرز مساله رخ می‌دهد، برای بررسی پاسخ یک سیستم به شرایط بحرانی تنها نیاز به بررسی پاسخ سیستم روی مرز بوده و نیازی به حل مساله در کل ناحیه نمی‌باشد. حال به هر میزان هندسه سطح پیچیده‌تر باشد، میزان محاسبات اضافی نیز برای تحلیل ناحیه افزایش می‌یابد. از این‌رو استفاده از روش المان مرزی باعث حذف محاسبات اضافی در چنین مسایلی می‌شود.

۲. زمان آماده‌سازی اطلاعات اولیه به منظور شبکه‌بندی ناحیه برای حل توسط این روش، بسیار کمتر از زمان شبکه‌بندی مساله مشابه برای حل توسط روش المان محدود می‌باشد. همچنین با توجه

^۴Boundary Element Method

به اینکه شبکه‌بندی بیشتر روی مرز مساله مطرح می‌شود، تغییر در نوع و اندازه المان‌ها راحت‌تر و سریع‌تر از موارد مشابه برای حل با روش‌های دیگر می‌باشد.

۳. با توجه به کاهش یک بعد از مساله، فضای کمتری از حافظه اشغال شده و زمان انجام محاسبات نسبت به روش‌های مشابه به شدت کاهش می‌یابد.

۴. از دیگر مزایای این روش قابلیت کاربرد آن در حل مسایل مرتبط با مواد تراکم‌ناپذیر می‌باشد. برای مثال روش المان محدود برای تحلیل تنش و کرنش یک ماده با عدد پواسون نزدیک به ۵/۰ (مربوط به مواد غیر قابل تراکم) جواب نادرست داده و غیر قابل استفاده می‌شود. در حالی که با روش المان مرزی به راحتی می‌توان این‌گونه مسایل را تحلیل نمود.

۲.۱ معایب روش المان مرزی

۱. از معایب روش المان مرزی می‌توان به استفاده از روابط ریاضی غیر متعارف با سایر روش‌های عددی اشاره نمود. با توجه به کاربرد وسیع و طولانی مدت روش المان محدود در مقایسه با روش المان مرزی، ترجیح بر استفاده از روش المان محدود در عوض رویارویی با یک روش جدید می‌باشد.

۲. از دیگر معایب روش المان مرزی می‌توان به عدم کارایی این روش در حل مسایل با ضخامت کم (پوسته‌ها) اشاره نمود که ناشی از نزدیکی گره‌های روی المان در دو طرف پوسته می‌باشد. برای این‌گونه مسایل استفاده از روش المان محدود توصیه می‌شود.

۳. عیب دیگری که می‌توان به روش المان مرزی گرفت، در رابطه با ماتریس جواب می‌باشد. برخلاف ماتریس‌های نهایی برای حل n معادله و n مجهول در روش‌هایی مانند تفاضلات متناهی و المان محدود که اکثر درایه‌های آن صفر بوده و قابل تبدیل به ماتریس‌های سه قطری می‌باشند، ماتریس جواب به روش المان مرزی یک ماتریس با درایه‌های غیر صفر است.

۴. هرچند ماتریس روش المان محدود از نظر ابعاد بزرگتر از ماتریس روش المان مرزی می‌باشد، ولی با توجه به ماهیت آن، قابلیت تقسیم به چند بخش مختلف را داشته و از این رو می‌توان آن را بصورت چند بخش مجزا در حافظه ذخیره کرده و در وقت مناسب فراخوانی نمود. ماتریس روش المان محدود بصورت:

$$\begin{bmatrix} \Delta & \Delta & \circ & \circ & \circ & \dots & \circ \\ \Delta & \Delta & \Delta & \circ & \circ & \dots & \circ \\ \circ & \Delta & \Delta & \Delta & \circ & \dots & \circ \\ \vdots & \ddots & & & & \ddots & \vdots \\ \circ & \dots & \circ & \Delta & \Delta & \Delta & \circ \\ \circ & \dots & \circ & \circ & \Delta & \Delta & \Delta \\ \circ & \dots & \circ & \circ & \circ & \Delta & \Delta \end{bmatrix}$$

و ماتریس روش المان مرزی بصورت:

$$\begin{bmatrix} \Delta & \Delta & \Delta & \Delta & \Delta \\ \Delta & \Delta & \Delta & \Delta & \Delta \\ \Delta & \Delta & \Delta & \Delta & \Delta \\ \Delta & \Delta & \Delta & \Delta & \Delta \\ \Delta & \Delta & \Delta & \Delta & \Delta \end{bmatrix}$$

می باشد. هرچند این موضوع را نمی توان از معایب عمده این روش برشمرد؛ چرا که با کاهش ابعاد ماتریس توسط این روش، افزایش زمان حل ناشی از این قضیه تا حدی قابل اغماض می باشد.

۳.۱ تاریخچه ای از روش المان مرزی

روش المان مرزی نخستین بار در سال ۱۹۷۸ توسط بریبا^۵ برای تحلیل معادله ی لاپلاس معرفی شد [۵]، قدرت و کارایی بالای روش المان مرزی برای تحلیل این معادله موجب اقبال روزافزون پژوهشگران به تحلیل مسایل انتقال حرارت پایا و حفاظت کاتدیک به کمک این روش عددی شد [۳۴، ۱۶، ۱۹، ۳۵، ۳۰، ۶]. همچنین در سال های اخیر شاهد پیشرفت های زیادی در این روش بوده ایم به طوری که در پژوهش های جدیدتر شاهد بکارگیری این روش در تحلیل مسایل گوناگون مهندسی هستیم که از آن جمله می توان به تحلیل مسایل آکوستیک [۳۳، ۸، ۴۲] و انتقال حرارت گذرا [۳۸، ۱۳، ۳۳، ۳۷] اشاره نمود.

با وجود توسعه ی روزافزون این روش عددی همچنان نیاز به برخی اصلاحات و اعمال برخی تکنیک ها به آن در جهت توانمند کردن آن در رویارویی با شرایط پیچیده تر، بخصوص در هندسه های سه بعدی ضروری می نماید. از جمله ی این تکنیک ها می توان به روش چندقطبی سریع^۶ و تکنیک های تجزیه ی دامنه^۷ اشاره کرد. در این فصل به مرور پژوهش های صورت گرفته در زمینه ی تحلیل انتقال حرارت به روش المان مرزی همراه با تکنیک های تجزیه ی دامنه می پردازیم.

^۵C.A.Berbbia

^۶Fast Multipole

^۷Domain Decomposition

کامیا^۸ و همکارانش [۲۳] در سال ۱۹۹۶ به مدل‌سازی انتقال حرارت پایا در سه هندسه‌ی دو بعدی پرداختند، ایشان برای این مدل‌سازی، از روش المان مرزی و تکنیک تجزیه دامنه‌ای استفاده کرده‌اند و با بررسی روش‌های مختلف تصحیح جواب زیردامنه‌ها سعی کردند مقدار بهینه پارامترهای تصحیح را بیابند.

ایشان به این منظور، یک مستطیل را به دو زیردامنه، سپس یک مربع را به چهار زیردامنه و در نهایت یک هندسه I-شکل را به دو زیر دامنه تقسیم نمودند.

از دیگر فرضیات این مدل‌سازی می‌توان به شرایط مرزی مساله اشاره کرد که در تمام موارد بخشی از هندسه شرط دمایی ثابت و بخش دیگر دارای شرط عایق می‌باشد.

اکیف آتالای^۹ و همکارانش [۳] در سال ۲۰۰۲ معادله‌ی انتقال حرارت را در محیط ناهمگن به روش المان مرزی و با استفاده از تجزیه‌ی ناحیه، مدل نموده‌اند. ایشان برای این منظور از دو هندسه‌ی دوبعدی استفاده نموده‌اند و با کمک روش تصحیح شوارتز^{۱۰} توانستند جواب را در کل ناحیه محاسباتی بدست آورند.

ایشان در این مثال شرایط مرزی را بصورت عایق در سمت چپ و پایین مربع و دمایی ثابت ۱۰۰ درجه سلیسیوس و ۵۰ درجه سلیسیوس به ترتیب در مرزهای بالا و راست در نظر گرفته‌اند.

مثال دیگر ایشان دایره‌ای با چهار ناحیه‌ی همگن بود که تمام مرز آن در شرایط دمایی صفر قرار داشته و در داخل ناحیه‌ی محاسباتی دارای تولید حرارت می‌باشد. نتایج این دو مثال در مقایسه با نتایج حاصل از روش المان محدود، درستی روش را تأیید می‌نماید.

الجیبلی^{۱۱} و همکارانش [۱۲] در سال ۲۰۰۲ مستطیل با ابعاد دو در یک را به روش المان مرزی و المان محدود مدل نموده‌اند و برای این منظور از روش تجزیه‌ی دامنه استفاده نموده‌اند. در این مدل‌سازی جهت تصحیح جواب‌های بدست آمده برای زیر دامنه‌ها، از سه روش شوارتز-دیریکله-نویمن، شوارتز-دیریکله-نویمن موازی و شوارتز-نویمن-نویمن موازی استفاده شده است.

از دیگر فرضیات این مدل‌سازی می‌توان به شرط عایق بودن در بالا و پایین و شرط دمایی ثابت صفر در سمت چپ و دمایی ثابت ۲۰۰ درجه در سمت راست اشاره نمود.

نتایج این پژوهش نشان می‌دهد که روش تصحیح شوارتز نویمن-نویمن موازی بیشترین سرعت همگرایی را در مقایسه با دو روش دیگر دارا می‌باشد.

اینگبر^{۱۲} و تانسکین^{۱۳} [۲۱] در سال ۲۰۰۵ یک مساله جابجایی-پخش را به روش المان مرزی و تکنیک‌های تجزیه ناحیه‌ای مدل کرده‌اند. ایشان در این پژوهش از المان‌های ثابت استفاده نموده‌اند و به بررسی تأثیر افزایش تعداد زیر دامنه‌ها بر سرعت همگرایی پرداخته‌اند و نتایج بدست آمده نشان می‌دهد که با افزایش تعداد زیر دامنه‌ها، سرعت همگرایی افزایش می‌یابد.

^۸N.Kamiya

^۹Akif Atalay

^{۱۰}Schwartz

^{۱۱}M.El-Gebeily

^{۱۲}S.Ingber

^{۱۳}A.Tanskin

ارهارت^{۱۴} و همکارانش [۱۳] در سال ۲۰۰۵ جهت مدل سازی انتقال حرارت گذرای یک پرهی توربین از روش المان مرزی استفاده نموده اند. ایشان در این پژوهش با اعمال تبدیل لاپلاس بر معادلات حاکم، شرایط را برای بکارگیری روش تجزیه ی دامنه ی اصلی به سه زیر دامنه فراهم کردند. مقایسه ی نتایج بدست آمده با نتایج حاصل از حل به روش المان محدود درستی نتایج را تأیید می نماید.

گامز^{۱۵} و همکارانش [۱۵] در سال ۲۰۰۷ یک مساله ی ترمو الاستیسیته را به کمک روش المان مرزی و تجزیه ی ناحیه، مدل سازی نمودند. هندسه ی این مساله یک مکعب مستطیل فرض شده است که به ترتیب به یک، دو و پنج زیر دامنه تجزیه شده است و با اعمال پردازش موازی بر این سه حالت تأثیر افزایش زیر دامنه ها، تعداد تکرارها و زمان مورد نیاز کامپیوتر کاهش می یابد و در عین حال جواب های هر سه مرحله یکسان می باشد.

جاوو^{۱۶} و همکارانش [۱۷] در سال ۲۰۰۷ برای مدل سازی معادله ی پواسون در مواد مرکب، یک هندسه مشخص را انتخاب کرده و به روش تجزیه ی دامنه، دامنه ی اصلی آن را به سه زیر دامنه تقسیم کرده و با اعمال روش المان مرزی بر زیر دامنه ها و اصلاح جواب بدست آمده برای آن ها، جواب را در کل ناحیه ی محاسباتی بدست آورده اند و در نهایت با مقایسه ی نتایج بدست آمده با دو منبع دیگر درستی پژوهش خود را اثبات کرده اند.

بویی^{۱۷} و پاپو^{۱۸} [۳۹] در سال ۲۰۰۸ به مدل سازی یک هندسه ی دو بعدی به کمک روش المان مرزی و تکنیک های تجزیه دامنه پرداخته اند، معادله حاکم در این مساله معادله ی لاپلاس می باشد و نتایج حاصل این پژوهش نشان می دهد که با افزایش تعداد زیر دامنه ها، زمان محاسبات و تعداد تکرارها کاهش می یابد.

کساب^{۱۹} و دیوو^{۲۰} [۲۵] در سال ۲۰۰۳ یک ایرفویل را مدل سازی کرده اند. ایشان برای تحلیل انتقال حرارت این ایرفویل از معادلات هلمهولتز تصحیح شده^{۲۱} به عنوان معادلات حاکم استفاده کرده اند و با اعمال روش المان مرزی و تکنیک های تجزیه دامنه ای توانستند جواب مساله را در کل دامنه محاسباتی بدست آورند.

نتایج بدست آمده آن ها با نتایج روش المان محدود که از نرم افزار فلوئنت استخراج شده است از هم خوانی قابل قبولی برخوردار می باشد، این مقایسه شامل یک نقطه خاص از پره در کل بازه زمانی و همچنین نتایج در کل ناحیه محاسباتی در یک زمان مشخص می باشد.

^{۱۴}Erhart

^{۱۵}B.Game

^{۱۶}S.Xiao-Wei Gao

^{۱۷}Thanh Tu Bui

^{۱۸}V.papov

^{۱۹}A.Kassab

^{۲۰}E.divo

^{۲۱}Modified Helmholtz Equation

فصل ۲

معرفی روش المان مرزی

اخیرا روش المان مرزی به ابزاری قدرتمند در تعیین جواب‌های عددی معادلات دیفرانسیل و حل مسایل مختلف مهندسی مرتبط با آن‌ها تبدیل شده است. معمولا در بیان پدیده‌های فیزیکی بصورت یک فرم ریاضی از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی استفاده می‌شود. در بسیاری از موارد، شکل دیگری از این بیان ریاضی می‌تواند بر حسب معادلات انتگرالی نوشته شود. معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی رفتار یک متغیر را درون و روی مرز یک ناحیه مشخص بیان می‌کند، با مجموعه‌ای از عملیات ریاضی به معادلات انتگرال تبدیل می‌شوند.^۱ روش المان مرزی، روشی است که بر پایه‌ی نظریه معادلات انتگرال استوار است و به کمک تکنیک معادلات انتگرال به حل مسایل مقدار مرزی می‌پردازد. پس از تبدیل فرم دیفرانسیلی معادله به فرم انتگرالی، معادله حاصل شامل چند عبارت انتگرالی بر روی ناحیه محاسباتی می‌شود. در صورتی که معادله حاکم بر مساله دارای جواب اساسی^۱ باشد، با استفاده از قضیه گرین می‌توان تمامی عبارت‌های انتگرالی روی ناحیه کل را به عبارت‌های انتگرالی بر روی مرز تبدیل کرد و فقط رابطه بین مقادیر مرزی را نشان داد. با گسسته‌سازی مرز مساله و انتگرال‌گیری روی هریک از المان‌های مرزی معادله مطلوب با استفاده از روش‌های انتگرال‌گیری عددی حل شده و از آنجا مجهولات مساله بدست می‌آیند. چگونگی مراحل فوق، به تفصیل در این فصل برای فرمولاسیون معادله لاپلاس بیان خواهد شد. روش المان مرزی دارای مزایایی است که از جمله آن‌ها می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

- دقت: المان مرزی روشی نیمه تحلیلی است، بنابراین دارای دقت بالایی بخصوص در مسایل تمرکز تنش همچون آنالیز شکست داده‌ها می‌باشد.
- کارآمدی در تولید هندسه: با استفاده از این روش، تولید شبکه در هندسه‌های سه بعدی یا مسایل با مرز بی‌نهایت بسیار ساده‌تر از دیگر روش‌ها انجام می‌شود.
- نیاز به حافظه کامپیوتری کمتر: روش المان مرزی با کاهش یک بعد از ابعاد مساله و به عبارتی تبدیل مسایل سه بعدی به دو بعدی و یا تبدیل مسایل دو بعدی به یک بعدی سهم به‌سزایی در کاهش حجم محاسبات دارد.

^۱Fundamental Solution

روش المان مرزی برای حل، نیازی به گسسته‌سازی کل ناحیه نداشته و فقط با گسسته‌سازی بر روی مرز قادر به حل مساله در تمامی ناحیه است. بی‌نیازی روش المان مرزی به گسسته‌سازی کامل ناحیه محاسباتی، باعث شده است که این روش قابلیت فوق‌العاده‌ای در مسایل با هندسه‌های پیچیده پیدا نماید و باعث برتری آن نسبت به سایر روش‌های عددی گردیده است.

۱.۲ تعاریف و قضایا

تعاریف و قضایای این بخش از مراجع [۹، ۲۸] انتخاب شده است.

تعریف ۱.۱.۲. Ω دامنه نامیده می‌شود، هرگاه $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ باز و همبند باشد، به عبارتی نتوان آن را به شکل اجتماعی از مجموعه‌های باز نوشت.

• برای $d = 1$ ، Ω بازه است.

• برای $d = 2$ ، Ω زیرمجموعه‌ای از صفحه است.

• برای $d = 3$ ، Ω زیر مجموعه‌ای از فضا است.

چون Ω به عنوان دامنه‌ی کرانداری در $\mathbb{R}^d$ در نظر گرفته می‌شود، بنابراین برای Ω مرزی را در نظر می‌گیریم. این مرز را با نماد $\partial\Omega$ یا Γ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲.۱.۲. • بستار Ω را به شکل $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ تعریف می‌شود.

• اگر $X = (x_1, x_2, \dots, x_d)^T \in \mathbb{R}^d$ آنگاه $dx = dx_1 dx_2 \dots dx_d$

• اگر $X, Y \in \mathbb{R}^d$ آنگاه ضرب داخلی اقلیدسی به شکل:

$$X \cdot Y = \sum_{i=1}^d x_i y_i,$$

تعریف می‌شود.

تعریف ۳.۱.۲. اگر u تابع اسکالری باشد، گرادیان u به شکل:

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_d} \right)^T,$$

تعریف می‌شود.

تعریف ۴.۱.۲. اگر W تابعی برداری مقدار باشد، دیورژانس W به شکل:

$$\text{div} W = \nabla \cdot W = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_d} \right)^T \cdot (w_1, w_2, \dots, w_d) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial w_i}{\partial x_i},$$

تعریف می‌شود.

تعریف ۵.۱.۲. عملگر لاپلاس با نماد Δu نمایش داده می‌شود و به شکل:

$$\Delta u = \nabla \cdot \nabla u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_d^2} = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2},$$

تعریف می‌شود.

قضیه ۶.۱.۲ (قضیه مقدار میانگین).

- قضیه اول مقدار میانگین: اگر $f(x)$ در فاصله $[a, b]$ پیوسته باشد، آنگاه نقطه‌ای چون c در فاصله $[a, b]$ وجود دارد به‌طوری‌که:

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)f(c).$$

- قضیه دوم مقدار میانگین: اگر $f(x)$ و $g(x)$ بر فاصله $[a, b]$ پیوسته باشند و $g(x)$ در این فاصله تغییر علامت ندهد آنگاه نقطه‌ای چون c در (a, b) وجود دارد به‌طوری‌که:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx.$$

تعریف ۷.۱.۲ (تغییر متغیر برای انتگرال‌ها). اگر $f(t)$ تابعی پیوسته بر فاصله $[a, b]$ باشد آنگاه با استفاده از تغییر متغیر برای انتگرال‌گیری در فاصله $[a, b]$ خواهیم داشت:

$$\int_a^b f(t)dt = \int_{-1}^1 f\left(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}x\right) \frac{b-a}{2} dx.$$

تعریف ۸.۱.۲ (BVP). یک مساله مقدار مرزی:^۲

- در $\mathbb{R}$ باید در مقادیر روی مرز، یعنی نقطه ابتدا و انتهای بازه مقدار u مشخص باشد. برای مثال معادله:

$$\begin{cases} -(a(x)u'(x))' = f(x), & 0 < x < 1, \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

یک مساله BVP در $\mathbb{R}$ می‌باشد.

- در $\mathbb{R}^d$ باید مقدار u سرتاسر مرز ناحیه $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ معلوم باشد. برای مثال معادله:

$$\begin{cases} u - \Delta u = 0, & x \in \Omega, t > 0, \\ u(x, t) = f(x), & x \in \partial\Omega, t > 0, \end{cases}$$

یک مساله BVP در $\mathbb{R}^d$ می‌باشد.

تعریف ۹.۱.۲. فرض کنید Ω دامنه‌ای باشد که لزوماً کراندار نیست و k عددی صحیح و نامنفی باشد. مجموعه توابعی که k بار به‌طور پیوسته در Ω مشتق‌پذیر باشند با $C^k(\Omega)$ نمایش داده می‌شود. اگر Ω دامنه کرانداری باشد، آنگاه:

$$C^k(\overline{\Omega}) = \{v \in C^k(\Omega) : D^\alpha v \in C(\overline{\Omega}), \forall |\alpha| \leq k\}$$

^۲Boundary Value Problem

۲.۲ معادلات دیفرانسیل پاره‌ای

تعریف ۱.۲.۲. هر رابطه‌ای میان تابع نامعلوم u و مشتق‌های u^n که n یک مقدار صحیح نامنفی است را معادله دیفرانسیل می‌نامند. [۲۸]

تعریف ۲.۲.۲. بالاترین مرتبه مشتق ظاهر شده در یک معادله دیفرانسیل مرتبه معادله دیفرانسیل نامیده می‌شود. [۲۸]

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی که به اختصار PDE^۳ نامیده می‌شود، به دسته‌ای از معادلات دیفرانسیل گفته می‌شود که در آن‌ها توابع مجهول بر حسب چند متغیر مستقل به همراه مشتق پاره‌ای توابع نسبت به آن متغیرها شرکت داشته باشند. به این دسته از معادلات دیفرانسیل، معادلات دیفرانسیل پاره‌ای، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی یا معادلات دیفرانسیل جزئی گفته می‌شود. برای مثال:

$$u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0,$$

یک PDE همگن از مرتبه دوم است.

۱.۲.۲ دسته‌بندی معادلات دیفرانسیل پاره‌ای

در حالت کلی یک معادله دیفرانسیل پاره‌ای مرتبه دوم با ضرایب ثابت بصورت زیر است: [۲۸]

$$Au_{xx}(x, y) + 2Bu_{xy}(x, y) + Cu_{yy}(x, y) + Du_x(x, y) + Eu_y(x, y) + Fu(x, y) = G,$$

معادلات دیفرانسیل پاره‌ای خطی مرتبه دوم که وابسته به دو متغیر می‌باشند، با توجه به ضرایب معادله‌ی فوق به سه دسته تقسیم می‌شوند:

۱. بیضوی (Elliptic)

۲. سهموی (Parabolic)

۳. هذلولوی (Hyperbolic)

توجه: برای تعیین نوع PDE ابتدا مشخصه

$$d = AC - B^2,$$

را تشکیل داده و از جدول زیر استفاده کنید.

نوع معادله	مشخصه
بیضوی	$d > 0$
سهموی	$d = 0$
هذلولوی	$d < 0$

^۳Partial Differential Equation

۳.۲ مساله لاپلاس

مثال استاندارد از یک BVP، مساله دیریکله معادله لاپلاس می باشد که بصورت زیر بیان می گردد:

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x), & x \in \Omega, \\ u = g(x), & x \in \Gamma, \end{cases} \quad (۱.۲)$$

که $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)^T$ برداری در $\mathbb{R}^d$ و Δ عملگر لاپلاس است.

در (۱.۲)، معادله دوم شرط مرزی دیریکله^۴ نامیده می شود. به جای این شرط می توان از شرایط مرزی دیگری بصورت زیر استفاده کرد:

• شرط مرزی نویمان^۵: این شرط مرزی به شکل:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g(x), \quad x \in \Gamma,$$

است که $\frac{\partial u}{\partial n}$ ، مشتق در جهت بردار نرمال خارجی n بر Γ است و داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = n \cdot \nabla u,$$

• شرط مرزی رابین^۶: این شرط مرزی به شکل زیر تعریف می شود:

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \beta(x)u = g(x), \quad x \in \Gamma,$$

استفاده نمود. در این فصل به حل معادله (۱.۲) با در نظر گرفتن $f(x) = 0$ می پردازیم.

۴.۲ قضیه دیورژانس و گرین

برای حل معادلات به روش المان مرزی، معادلات به حالتی که در آن تنها مقادیر مرزی درگیرند، داریم. بدین منظور از قضیه های دیورژانس^۷ و گرین^۸ استفاده می کنیم. مطالب این بخش بر اساس مراجع [۴، ۲۸] تنظیم شده است.

قضیه ۱.۴.۲ (قضیه دیورژانس). اگر Ω زیر مجموعه ای از $\mathbb{R}^d$ (در حالت $d = 3$ ، محدوده Ω یک حجم در فضای سه بعدی خواهد بود) و $F = (f_1, f_2, \dots, f_d)^T \in C^1(\bar{\Omega})^d$ تابعی برداری مقدار باشد، قضیه دیورژانس را می توان بصورت زیر بیان کرد:

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot F) dV = \int_{\partial\Omega} (F \cdot n) dS, \quad (۲.۲)$$

که n بردار نرمال خارجی سطح و dS المان طول قوس است. [۴]

^۴Dirichlet Boundary Condition

^۵ Neumann Boundary Condition

^۶ Robin Boundary Condition

^۷Divergence Theorem

^۸Green Theorem

حال با تعریف تابع برداری M در فضای سه بعدی بصورت:

$$M := M_x \hat{i} + M_y \hat{j} + M_z \hat{k},$$

که $\hat{i}$ بردار یکه در جهت محور x ها، $\hat{j}$ بردار یکه در جهت محور y ها و $\hat{k}$ بردار یکه در جهت محور z ها است و تعریف تابع N به شکل:

$$N := \nabla \cdot M,$$

قضیه دیورژانس را بصورت زیر بیان می‌کنیم:

$$\int_{\Omega} N \, dV = \int_{\partial\Omega} M \cdot n \, dS.$$

بنابراین با بکاربردن قضیه دیورژانس توانستیم انتگرال روی ناحیه Ω را به انتگرال روی مرز محدود کننده این ناحیه، یعنی $\partial\Omega$ (یا Γ) تبدیل کنیم. حال با در نظر گرفتن u و u^* به عنوان توابعی با مقدار مشخص در هر نقطه از ناحیه Ω ، تابع M را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$M := u \nabla u^*,$$

در این صورت داریم:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot M &= \nabla \cdot (u \nabla u^*) \\ &= u \nabla^2 u^* + \nabla u \cdot \nabla u^*. \end{aligned} \quad (3.2)$$

با انتگرال‌گیری از $\nabla \cdot M$ روی ناحیه Ω و استفاده از (۳.۲) و اعمال قضیه دیورژانس، معادله زیر حاصل می‌شود:

$$\int_{\Omega} (u \nabla^2 u^* + \nabla u \cdot \nabla u^*) \, dV = \int_{\partial\Omega} u \nabla u^* \cdot n \, dS, \quad (4.2)$$

با تعریف تابع P بصورت $P := u^* \nabla u$ داریم:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot P &= \nabla \cdot (u^* \nabla u) \\ &= u^* \nabla^2 u + \nabla u^* \cdot \nabla u. \end{aligned} \quad (5.2)$$

با انتگرال‌گیری از $\nabla \cdot P$ روی ناحیه Ω و استفاده از (۵.۲) و اعمال قضیه دیورژانس، معادله زیر حاصل می‌شود:

$$\int_{\Omega} (u^* \nabla^2 u + \nabla u^* \cdot \nabla u) \, dV = \int_{\partial\Omega} u^* \nabla u \cdot n \, dS. \quad (6.2)$$

با کم کردن (۴.۲) از (۶.۲) داریم:

$$\int_{\Omega} (u^* \nabla^2 u - u \nabla^2 u^*) \, dV = \int_{\partial\Omega} (u^* \nabla u - u \nabla u^*) \cdot n \, dS. \quad (7.2)$$

در نتیجه قضیه گرین را بصورت زیر بیان می‌کنیم:

قضیه ۲.۴.۲. [۴]

- **قضیه اول گرین:** فرض کنید φ و ψ توابعی تعریف شده بر روی ناحیه $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ باشند و فرض کنید $\varphi \in C^2(\bar{\Omega})$ و $\psi \in C^1(\bar{\Omega})$ باشد، آنگاه:

$$\int_{\Omega} (\psi \nabla^2 \varphi + \nabla \varphi \cdot \nabla \psi) dV = \int_{\partial \Omega} \psi (\nabla \varphi \cdot n) dS,$$

که ∇^2 عملگر لاپلاس و n بردار نرمال خارجی سطح است.

- **قضیه دوم گرین:** اگر $\psi, \varphi \in C^2(\bar{\Omega})$ توابعی بر روی ناحیه $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ باشند و $\varepsilon \in C^1(\bar{\Omega})$ باشد، آنگاه:

$$\int_{\Omega} ((\psi \nabla \cdot (\varepsilon \nabla \varphi) - \varphi \nabla \cdot (\varepsilon \nabla \psi))) dV = \int_{\partial \Omega} \varepsilon (\psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n}) dS,$$

در حالت خاص $\varepsilon = 1$ روی ناحیه Ω خواهیم داشت:

$$\int_{\Omega} (\psi \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 \psi) dV = \int_{\partial \Omega} (\psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n}) dS,$$

که $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ مشتق جهت‌دار φ در جهت بردار نرمال n ، رو به بیرون و عمود بر سطح کوچک dS می‌باشد و داریم:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \nabla \varphi \cdot n.$$

بنابراین معادله (۷.۲) به‌عنوان **قضیه دوم گرین** شناخته شده و نخستین گام برای بدست آوردن معادله انتگرال مرزی مساله لاپلاس می‌باشد.

در (۷.۲) متغیر u در هر نقطه از ناحیه Ω به‌عنوان پتانسیل آن نقطه در نظر گرفته می‌شود، بنابراین مشتق u در جهت n نیز معرف شار بوده و با q نمایش داده می‌شود:

$$q = \frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot n,$$

از طرفی متغیر دلخواه u^* هنوز تعریف نشده و همچون u می‌توان مقدار مشتق آن در جهت n را به شکل q^* نمایش داد:

$$q^* = \frac{\partial u^*}{\partial n} = \nabla u^* \cdot n, \quad (۸.۲)$$

بنابراین (۷.۲) را می‌توان به شکل زیر بیان کرد:

$$\int_{\Omega} u^* \nabla^2 u dV - \int_{\Omega} u \nabla^2 u^* dV = \int_{\partial \Omega} u^* q dS - \int_{\partial \Omega} q^* u dS. \quad (۹.۲)$$

در (۹.۲) دو عبارت انتگرال روی کل ناحیه Ω موجود است و در بخش بعدی در مورد انتخاب متغیر دلخواه u^* به گونه‌ای که این دو عبارت انتگرال روی ناحیه به انتگرال‌هایی روی مرز تبدیل شوند، بحث خواهد شد.

۵.۲ تابع دلتای دیراک و جواب اساسی

قبل از آنکه به بررسی روش المان مرزی بپردازیم لازم است با تابع جواب اساسی^۹ بیشتر آشنا شویم. تابع جواب اساسی به تابع دلتای دیراک^{۱۰} بسیار وابسته است. مطالب این بخش بر اساس مراجع [۷، ۳۶، ۴۳] تنظیم شده است.

۱.۵.۲ تابع دلتای دیراک

این تابع که با حرف یونانی δ نمایش می‌دهیم، در مبدا مقداری برابر بی‌نهایت و در دیگر نقاط مقداری برابر با صفر دارد، یعنی:

$$\delta(X - X_0) = \begin{cases} \infty, & X = X_0, \\ 0, & X \neq X_0, \end{cases} \quad (10.2)$$

در نتیجه انتگرال آن روی بازه منفی بی‌نهایت تا مثبت بی‌نهایت یک می‌شود، یعنی:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(X - X_0) dX = 1.$$

از طرفی تابع دلتای دیراک دارای خاصیت زیر است: [۷]

$$\int_{\Omega} \delta(X - X_0) dV = \begin{cases} 1, & X_0 \in \Omega, \\ \frac{1}{2}, & X_0 \in \partial\Omega, \\ 0, & X_0 \notin \bar{\Omega}. \end{cases}$$

باید توجه داشت که تابع دلتا با وجود آنکه تابع خوانده می‌شود، در مفهوم تابع نیست و بیشتر به یک تابع توزیع که در آمار کاربرد دارد، شبیه است. این تابع دارای ویژگی بنیادین زیر است:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(X) \delta(X - X_0) dX = f(X_0).$$

در واقع برای $\varepsilon > 0$ داریم:

$$\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} f(X) \delta(X - X_0) dX = f(X_0),$$

که $f(X)$ تابعی پیوسته و $\delta(X - X_0)$ توزیع دلتای دیراک متمرکز شده در $X = X_0$ است.

۲.۵.۲ جواب اساسی

با در نظر گرفتن معادله لاپلاس ($\nabla^2 u = 0$)، (۹.۲) به فرم زیر تبدیل می‌شود:

^۹Fundamental Solution

^{۱۰}Dirac-Delta Function

$$-\int_{\Omega} u \nabla^2 u^* dV = \int_{\partial\Omega} u^* q dS - \int_{\partial\Omega} q^* u dS, \quad (11.2)$$

متغیر u^* هنوز دلخواه است و هدف ما تبدیل (۱۱.۲) به رابطه‌ای است که در آن تنها انتگرال‌هایی روی مرز قرار دارند. به این منظور متغیر u^* را طوری تعریف می‌کنیم که عبارت انتگرال روی ناحیه کل واقع در سمت چپ (۱۱.۲) یا صفر شود یا انتگرال آن به انتگرال روی مرز تبدیل گردد. از بهترین انتخاب‌های ممکن، انتخاب u^* بصورتی است که $\nabla^2 u^*$ با ضریبی از تابع دلتای دیراک برابر شود. با در نظر گرفتن چشمه $X_0 = (\xi, \eta)$ و $X = (x, y)$ که نقطه‌ای دلخواه در ناحیه Ω می‌باشد، رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\nabla^2 u^* = -\delta(x - \xi, y - \eta), \quad (12.2)$$

در این حالت u^* جواب اساسی برای عملگر لاپلاس است. این انتخاب دو مزیت دارد:

- (۱) تنها عبارت انتگرال روی کل ناحیه محاسباتی رابطه (۱۱.۲) از بین می‌رود.
 - (۲) پارامترهای دلخواه u^* و q^* تعیین می‌شوند، در نتیجه امکان انتگرال‌گیری روی مرزها برای بدست آوردن مجهولات فراهم می‌گردد.
- با جایگذاری (۱۲.۲) در انتگرال سمت چپ (۱۱.۲) و استفاده از خاصیت دلتای دیراک رابطه زیر برای $X_0 \in \Omega$ حاصل می‌شود:

$$\int_{\Omega} u \nabla^2 u^* dV = - \int_{\Omega} u \delta(x - \xi, y - \eta) dV = -u(\xi, \eta) = -u(X_0). \quad (13.2)$$

با در نظر گرفتن رابطه (۱۳.۲) معادله (۱۱.۲) را می‌توان به شکل زیر مرتب نمود:

$$u(\xi, \eta) + \int_{\partial\Omega} q^* u dS = \int_{\partial\Omega} u^* q dS, \quad (\xi, \eta) \in \Omega,$$

یا

$$u(X_0) + \int_{\partial\Omega} q^* u dS = \int_{\partial\Omega} u^* q dS, \quad X_0 \in \Omega, \quad (14.2)$$

در اینجا انتگرال‌ها تنها به انتگرال روی مرز محدود می‌شوند و تنها تابع $u(X_0)$ به نقاط درون ناحیه وابسته است.

تعیین جواب اساسی مساله لاپلاس

در این مرحله هدف ما یافتن جواب معادله $\nabla^2 u^* = 0$ (معادله‌ی همگن از (۱۲.۲)) در فضای $\mathbb{R}^2$ که شامل یک تکینگی در نقطه X_0 است، می‌باشد. از (۵.۱.۲) داریم:

$$\nabla^2 u^* = \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} = 0,$$

همان‌گونه که قبلاً ذکر شد، ماهیت تابع دلتای دیراک بصورت تابعی از فاصله نقطه‌ی دلخواه $X = (x, y)$ از محل چشمه $X_0 = (\xi, \eta)$ می‌باشد، بنابراین پارامتر r را می‌توان به‌عنوان فاصله از محل چشمه فرضی X_0 بصورت زیر تعریف نمود:

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}, \quad (15.2)$$

با در نظر گرفتن مختصات قطبی:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta, \end{cases}$$

که $r \geq 0$ و $0 \leq \theta \leq 2\pi$ است، داریم:

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial r} = \cos \theta, & \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r \sin \theta, \\ \frac{\partial y}{\partial r} = \sin \theta, & \frac{\partial y}{\partial \theta} = r \cos \theta. \end{cases} \quad (16.2)$$

با استفاده از قاعده‌ی مشتق زنجیری برای $\frac{\partial u^*}{\partial r}$ و استفاده از (۱۶.۲) داریم:

$$\frac{\partial u^*}{\partial r} = \frac{\partial u^*}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u^*}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = \cos \theta \frac{\partial u^*}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial u^*}{\partial y}, \quad (17.2)$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u^*}{\partial r^2} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u^*}{\partial r} \right) \\ &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial u^*}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial u^*}{\partial y} \\ &= \cos \theta \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u^*}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u^*}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial r} \right) + \sin \theta \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u^*}{\partial y} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u^*}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \right) \\ &= \cos^2 \theta \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} + 2 \cos \theta \sin \theta \frac{\partial^2 u^*}{\partial x \partial y} + \sin^2 \theta \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2}. \end{aligned} \quad (18.2)$$

حال به محاسبه $\frac{\partial u^*}{\partial \theta}$ و $\frac{\partial^2 u^*}{\partial \theta^2}$ می‌پردازیم.

$$\frac{\partial u^*}{\partial \theta} = \frac{\partial u^*}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u^*}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} = -r \sin \theta \frac{\partial u^*}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial u^*}{\partial y},$$

بنابراین:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 u^*}{\partial \theta^2} &= -r \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u^*}{\partial x} \right) + r \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cos \theta \frac{\partial u^*}{\partial y} \right) \\
 &= -r \cos \theta \frac{\partial u^*}{\partial x} - r \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial u^*}{\partial x} - r \sin \theta \frac{\partial u^*}{\partial y} + r \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial u^*}{\partial y} \\
 &= -r \cos \theta \frac{\partial u^*}{\partial x} - r \sin \theta \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u^*}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u^*}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial \theta} \right) \\
 &\quad - r \sin \theta \frac{\partial u^*}{\partial y} + r \cos \theta \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u^*}{\partial y} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u^*}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} \right) \\
 &= -r \cos \theta \frac{\partial u^*}{\partial x} - r \sin \theta \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} (-r \sin \theta) + \frac{\partial u^*}{\partial x \partial y} r \cos \theta \right) \\
 &\quad - r \sin \theta \frac{\partial u^*}{\partial y} + r \cos \theta \left(\frac{\partial u^*}{\partial x \partial y} (-r \sin \theta) + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} r \cos \theta \right) \\
 &= -r \left(\cos \theta \frac{\partial u^*}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial u^*}{\partial y} \right) + r^2 \left(\sin^2 \theta \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} - 2 \cos \theta \sin \theta \frac{\partial^2 u^*}{\partial x \partial y} + \cos^2 \theta \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right). \quad (19.2)
 \end{aligned}$$

با تقسیم طرفین (۱۹.۲) بر r^2 و استفاده از (۱۷.۲) داریم:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial \theta^2} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u^*}{\partial r} + \sin^2 \theta \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} - 2 \cos \theta \sin \theta \frac{\partial^2 u^*}{\partial x \partial y} + \cos^2 \theta \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2}. \quad (20.2)$$

با جمع (۱۸.۲) با (۲۰.۲) و استفاده از خاصیت $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ خواهیم داشت:

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial \theta^2} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u^*}{\partial r} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2},$$

که با مرتب‌سازی و استفاده از تعریف عملگر لاپلاس داریم:

$$\nabla^2 u^* = \frac{1}{r} \frac{\partial u^*}{\partial r} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial \theta^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u^*}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial \theta^2}$$

در (۱۲.۲) برای $r > 0$ داریم:

$$\delta(x - \xi, y - \eta) = 0.$$

به علت تقارن خواهیم داشت:

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial \theta^2} = 0,$$

بنابراین داریم:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u^*}{\partial r} \right) = 0. \quad (21.2)$$

با حل (۲۱.۲) به جواب زیر در فضای دو بعدی خواهیم رسید:

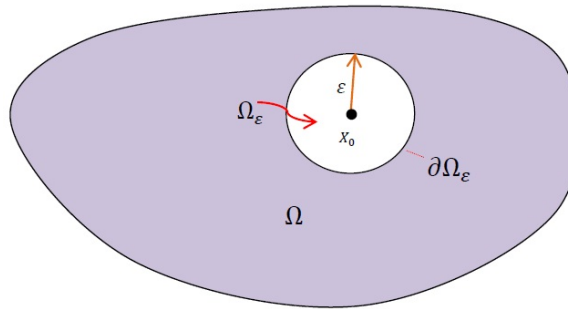
$$u^* = A \ln \left(\frac{1}{r} \right), \quad (22.2)$$

برای یافتن مقدار A از ماهیت جواب اساسی استفاده می‌شود. به این منظور با در نظر گرفتن ناحیه کوچک Ω_ε اطراف چشمه X بصورتی که در شکل ۱.۲ نمایش داده شده و استفاده از (۱۲.۲) و خاصیت انتگرال دلتای دیراک، معادله‌ی زیر را می‌توان نتیجه گرفت:

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla^2 u^* dV_\varepsilon = \int_{\Omega_\varepsilon} -\delta(x - \xi, y - \eta) dV_\varepsilon = -1.$$

با اعمال قضیه دیورژانس داریم:

$$-1 = \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla^2 u^* dV_\varepsilon = \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{\partial u^*}{\partial n} dS_\varepsilon, \quad (23.2)$$



شکل ۱.۲: دایره‌ای با شعاع ε به مرکز چشمه X .

با توجه به شکل ۱.۲ مشاهده می‌شود که بردار نرمال یکه خارجی n واقع بر مرز $\partial\Omega_\varepsilon$ با r هم‌جهت است، بنابراین داریم:

$$\frac{\partial u^*}{\partial n} = \frac{\partial u^*}{\partial r},$$

با توجه به رابطه (۲۲.۲) مشاهده می‌شود که u^* فقط تابعی از r می‌باشد، بنابراین با توجه به ثابت بودن r روی مرز، u^* مقدار ثابتی را روی مرز اختیار می‌کند، بنابراین $\frac{\partial u^*}{\partial r}$ روی مرز ثابت می‌باشد و خواهیم داشت:

$$\left. \frac{\partial u^*}{\partial r} \right|_{r=\varepsilon} = -\frac{A}{\varepsilon}. \quad (24.2)$$

از (۲۳.۲) و (۲۴.۲) داریم:

$$\int_{\partial\Omega_\varepsilon} \left(-\frac{A}{\varepsilon} \right) dS_\varepsilon = -1, \quad (25.2)$$

با توجه به اینکه ناحیه مورد نظر دایره‌ای به شعاع ε بود، خواهیم داشت:

$$\int_{\partial\Omega_\varepsilon} dS_\varepsilon = 2\pi\varepsilon. \quad (26.2)$$

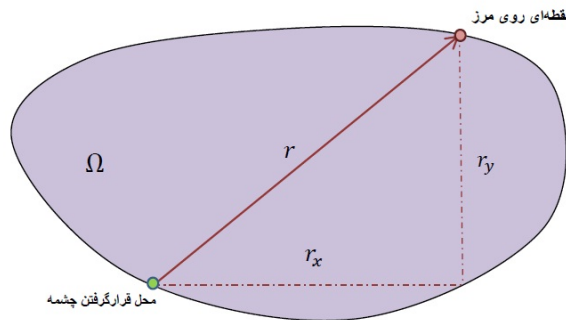
از (۲۵.۲) و (۲۶.۲) مقدار A در حالت دوبعدی بدست خواهد آمد و داریم:

$$A = \frac{1}{2\pi}.$$

در نهایت، جواب اساسی برای مساله لاپلاس در فضای دوبعدی نتیجه می‌شود:

$$u^* = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{1}{r} \right), \quad (27.2)$$

که r بیانگر فاصله بین چشمه X و نقطه انتگرال گیری است (شکل ۲.۲).



شکل ۲.۲: فاصله بین چشمه و نقاط ناحیه

مشابه تکنیک ذکر شده جواب اساسی برای مساله لاپلاس در فضای سه بعدی بدست می آید:

$$u^* = \frac{1}{4\pi r}.$$

با معلوم شدن جواب اساسی به محاسبه متغیر q^* در فضای دو بعدی می پردازیم. بنا به تعریف (۸.۲) و قاعده مشتق زنجیری داریم:

$$q^* = \frac{\partial u^*}{\partial n} = \frac{\partial u^*}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n}, \quad (28.2)$$

از (۲۷.۲) داریم:

$$\frac{\partial u^*}{\partial r} = -\frac{1}{4\pi r^2} \quad (29.2)$$

از طرفی:

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \nabla r \cdot n,$$

از تعریف ∇ و بردار n داریم:

$$\nabla r \cdot n = \left(\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y} \right) \cdot (n_x, n_y), \quad (30.2)$$

با جایگذاری روابط (۲۹.۲) و (۳۰.۲) در (۲۸.۲) داریم:

$$q^* = -\frac{1}{4\pi r} \left(\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y} \right) \cdot (n_x, n_y),$$

از تعریف فاصله r داریم:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{(x - \xi)}{r},$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{(y - \eta)}{r}.$$

با فرض $r_x = x - \xi$ و $r_y = y - \eta$ خواهیم داشت:

$$q^* = -\frac{1}{4\pi r} \left(\frac{1}{r} \right) (r_x, r_y) \cdot (n_x, n_y)$$

$$= -\frac{1}{4\pi r^2} (r_x n_x + r_y n_y)$$

طی روندی مشابه، مقدار q^* در فضای سه بعدی از رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$q^* = -\frac{1}{4\pi r^3}(r_x n_x + r_y n_y + r_z n_z).$$

۶.۲ معادله انتگرال مرزی

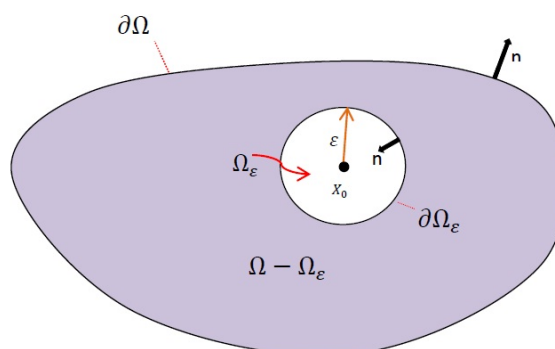
معادلاتی که در آن‌ها تابع مجهول زیر انتگرال قرار داشته باشد، معادله انتگرال گویند. با تعیین پارامتر u^* و q^* ، در رابطه (۱۴.۲) تنها یک تابع وابسته به مقادیر درون ناحیه Ω وجود دارد، این تابع همان $u(X_0)$ می‌باشد که نشاندهنده پتانسیل در محل قرارگرفتن چشمه است. با توجه به اینکه شکل تابع u^* تعیین شده ولی مکان چشمه X_0 همچنان دلخواه می‌باشد. در این بخش درباره قرارگرفتن X_0 در نقاط مختلف ناحیه Ω بحث می‌شود و معادله انتگرال با توجه به آن تعیین می‌گردد. مطالب این بخش بر اساس مراجع [۴۰، ۳۶، ۵] تنظیم شده است.

۱.۶.۲ معادله انتگرال مرزی در نقاط درونی ناحیه Ω

معادله (۱۴.۲) را می‌توان به شکل نهایی زیر مرتب نمود:

$$u(X_0) + \int_{\partial\Omega} q^*(X_0, X)u(X) dS = \int_{\partial\Omega} u^*(X_0, X)q(X) dS, \quad X_0 \in \Omega.$$

با توجه به ماهیت توابع u^* و q^* و وجود تابع دلتای دیراک و تکنیکی در X_0 ($r=0$)، برای محاسبه انتگرال معادله (۹.۲) نیاز به رفع مشکل تکنیکی داریم. بدین منظور ناحیه چشمه را از ناحیه انتگرال جدا می‌کنیم. برای جدا کردن چشمه X_0 ، در حالت دو بعدی دایره‌ای به شعاع ε حول چشمه X_0 در نظر می‌گیریم. این ناحیه در فضای سه بعدی به کره تبدیل می‌شود. ناحیه جدید مطابق شکل ۳.۲ برابر با $\Omega - \Omega_\varepsilon$ با مرز $\partial\Omega \cup \partial\Omega_\varepsilon$ می‌باشد.



شکل ۳.۲: ناحیه انتگرال‌گیری برای نقاط درونی ناحیه Ω

با در نظر گرفتن این ناحیه جدید قضیه دوم گرین (۹.۲) را می‌توان بصورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega - \Omega_\varepsilon} (u \nabla^\top u^* - u^* \nabla^\top u) dV &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial\Omega \cup \partial\Omega_\varepsilon} (uq^* - u^*q) dS \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial\Omega} (uq^* - u^*q) dS + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial\Omega_\varepsilon} (uq^* - u^*q) dS_\varepsilon.\end{aligned}$$

با توجه به اینکه معادله حاکم، معادله لاپلاس می‌باشد خواهیم داشت:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega - \Omega_\varepsilon} u^* \nabla^\top u dV = 0.$$

از آنجا که چشمه X خارج ناحیه انتگرال‌گیری $\Omega - \Omega_\varepsilon$ می‌باشد و این ناحیه محل چشمه را در بر نمی‌گیرد (با توجه به تعریف تابع دلتای دیراک و رابطه (۱۲.۲)) خواهیم داشت:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega - \Omega_\varepsilon} u \nabla^\top u^* dV = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(- \int_{\Omega - \Omega_\varepsilon} u \delta(x - \xi, y - \eta) dV \right) = 0.$$

بنابراین:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega - \Omega_\varepsilon} (u \nabla^\top u^* - u^* \nabla^\top u) dV = 0,$$

در نتیجه:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial\Omega} (uq^* - u^*q) dS + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial\Omega_\varepsilon} (uq^* - u^*q) dS_\varepsilon = 0, \quad (31.2)$$

حال به محاسبه $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial\Omega_\varepsilon} (uq^* - u^*q) dS_\varepsilon$ می‌پردازیم. با فرض اینکه تابع u در چشمه X پیوسته باشد داریم:

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial\Omega_\varepsilon} uq^* dS_\varepsilon &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial\Omega_\varepsilon} (u - u(X_\circ) + u(X_\circ))q^* dS_\varepsilon \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\partial\Omega_\varepsilon} (u - u(X_\circ))q^* dS_\varepsilon \right) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(u(X_\circ) \int_{\partial\Omega_\varepsilon} q^* dS_\varepsilon \right).\end{aligned}$$

از [۴۰] داریم:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\partial\Omega_\varepsilon} (u - u(X_\circ))q^* dS_\varepsilon \right) = 0,$$

از این رو:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial\Omega_\varepsilon} uq^* dS_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(u(X_\circ) \int_{\partial\Omega_\varepsilon} q^* dS_\varepsilon \right),$$

از آنجایی که ناحیه Ω_ε در فضای دوبعدی، دایره‌ای با شعاع ε می‌باشد و

$$dS_\varepsilon = \varepsilon d\theta, \quad q^* = \frac{\partial u^*}{\partial n} \Big|_{n=\varepsilon} = \frac{1}{2\pi\varepsilon}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(u(X_\circ) \int_{\partial\Omega_\varepsilon} q^* dS_\varepsilon \right) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(u(X_\circ) \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi\varepsilon} \varepsilon d\theta \right) \\ &= u(X_\circ)\end{aligned}$$

در نتیجه:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial\Omega_\varepsilon} u q^* dS_\varepsilon = u(X_0). \quad (32.2)$$

در مسایل سه بعدی با استفاده از مختصات کروی:

$$dS_\varepsilon = \varepsilon^2 \cos \varphi d\varphi d\theta, \quad q^* = \frac{\partial u^*}{\partial n} \Big|_{n=\varepsilon} = \frac{1}{4\pi\varepsilon^2}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(u(X_0) \int_{\partial\Omega_\varepsilon} q^* dS_\varepsilon \right) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(X_0) \int_0^{2\pi} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \varepsilon^2 \cos \varphi d\varphi \right) d\theta \\ &= \frac{u(X_0)}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi \right) d\theta \\ &= \frac{u(X_0)}{4\pi} \int_0^{2\pi} 2 d\theta \\ &= u(X_0), \end{aligned}$$

در نتیجه:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial\Omega_\varepsilon} u q^* dS_\varepsilon = u(X_0),$$

از طرفی:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial\Omega_\varepsilon} u^* q dS_\varepsilon &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(-\frac{\ln \varepsilon}{4\pi} \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial n} dS_\varepsilon \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(-\frac{\ln \varepsilon}{4\pi} \frac{\partial u(X_0)}{\partial n} \int_{\partial\Omega_\varepsilon} dS_\varepsilon \right) \quad (\text{از قضیه مقدار میانگین}) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(-\frac{\ln \varepsilon}{4\pi} \frac{\partial u(X_0)}{\partial n} \int_0^{2\pi} \varepsilon d\theta \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(-\varepsilon \ln \varepsilon \frac{\partial u(X_0)}{\partial n} \right), \end{aligned}$$

اما $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \ln \varepsilon = 0$ ، در نتیجه:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial\Omega_\varepsilon} u^* q dS_\varepsilon = 0, \quad (33.2)$$

به همین ترتیب در حالت سه بعدی:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial\Omega_\varepsilon} u^* q dS_\varepsilon &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial n} dS_\varepsilon \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{\partial u(X_0)}{\partial n} \int_0^{2\pi} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \varepsilon^2 \cos \varphi d\varphi \right) d\theta \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{\partial u(X_0)}{\partial n} (4\pi\varepsilon^2) \right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

با جایگذاری (۳۳.۲) و (۳۲.۲) در (۳۱.۲) و با توجه به اینکه:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial\Omega} (uq^* - u^*q) dS = \int_{\partial\Omega} (uq^* - u^*q) dS,$$

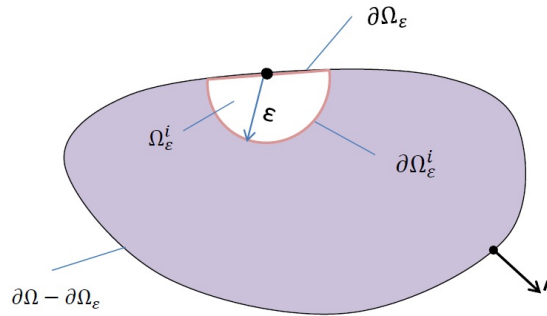
در نتیجه جواب معادله انتگرال مرزی برای نقاط داخلی طبق معادله زیر بدست می‌آید:

$$u(X_0) = \int_{\partial\Omega} (u^*q - uq^*) dS,$$

این رابطه بیانگر این است که با مشخص بودن u و q روی مرز $\partial\Omega$ ، می‌توان مقدار تابع u را در نقاط درونی این ناحیه مشخص نمود.

۲.۶.۲ معادله انتگرال مرزی در نقاط مرزی ناحیه Ω

مراحل تعیین معادله انتگرال مرزی برای نقاط مرزی مانند قبل می‌باشد. در این حالت برای جدا کردن چشمه X_0 ، در حالت دو بعدی نیم‌دایره‌ای به شعاع ε حول چشمه X_0 در نظر می‌گیریم. در حالت سه بعدی این قطاع به یک نیم‌کره تبدیل می‌شود. ناحیه جدید مطابق شکل ۴.۲ برابر با $\Omega - \Omega_\varepsilon^i$ با مرز $\partial\Omega - \partial\Omega_\varepsilon^i \cup (\partial\Omega - \partial\Omega_\varepsilon)$ می‌باشد.



شکل ۴.۲: ناحیه انتگرال‌گیری برای نقاط مرزی ناحیه Ω

با در نظر گرفتن این ناحیه جدید، قضیه دوم گرین (۹.۲) را می‌توان به شکل زیر بازنویسی نمود:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega - \Omega_\varepsilon^i} (u \nabla^2 u^* - u^* \nabla^2 u) dV &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{(\partial\Omega - \partial\Omega_\varepsilon) \cup \partial\Omega_\varepsilon^i} (uq^* - u^*q) dS \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial\Omega - \partial\Omega_\varepsilon} (uq^* - u^*q) dS + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial\Omega_\varepsilon^i} (uq^* - u^*q) dS_\varepsilon^i. \end{aligned}$$

با توجه به اینکه معادله حاکم، معادله لاپلاس می‌باشد خواهیم داشت:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega - \Omega_\varepsilon^i} u^* \nabla^2 u dV = 0,$$

از طرفی چشمه X_0 خارج ناحیه انتگرال‌گیری $\Omega - \Omega_\varepsilon^i$ می‌باشد و این ناحیه محل چشمه را در بر نمی‌گیرد، (با توجه به خاصیت تابع دلتای دیراک و (۱۲.۲)) پس خواهیم داشت:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega - \Omega_\varepsilon^i} u \nabla^2 u^* dV = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(- \int_{\Omega - \Omega_\varepsilon^i} u \delta(x - \xi, y - \eta) dV \right) = 0,$$

بنابراین:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega - \Omega_\varepsilon^i} (u \nabla^2 u^* - u^* \nabla^2 u) dV = 0,$$

در نتیجه:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial\Omega - \partial\Omega_\varepsilon} (u q^* - u^* q) dS + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial\Omega_\varepsilon^i} (u q^* - u^* q) dS_\varepsilon^i = 0, \quad (34.2)$$

از طرفی داریم:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial\Omega_\varepsilon^i} u q^* dS_\varepsilon^i = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\partial\Omega_\varepsilon^i} (u - u(X_0)) q^* dS_\varepsilon^i \right) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(u(X_0) \int_{\partial\Omega_\varepsilon^i} q^* dS_\varepsilon^i \right)$$

از [۴۰] داریم:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\partial\Omega_\varepsilon^i} (u - u(X_0)) q^* dS_\varepsilon^i \right) = 0,$$

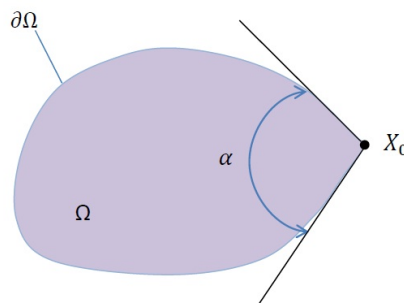
با در نظر گرفتن اینکه Ω_ε^i در حالت دو بعدی، نیم دایره‌ای با شعاع ε است:

$$dS_\varepsilon^i = \varepsilon d\theta, \quad q^* = \frac{\partial u^*}{\partial n} \Big|_{n=\varepsilon} = \frac{1}{2\pi\varepsilon}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(u(X_0) \int_{\partial\Omega_\varepsilon^i} q^* dS_\varepsilon^i \right) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(u(X_0) \int_{\partial\Omega_\varepsilon^i} \frac{1}{2\pi\varepsilon} \varepsilon d\theta \right) \\ &= C(X_0) u(X_0), \end{aligned}$$

که $C(X_0) = \frac{\alpha}{2\pi}$ است و طبق شکل ۵.۲ تعیین می‌شود.



شکل ۵.۲: زاویه داخلی در نقاط مرزی Ω

در نتیجه:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial\Omega_\varepsilon^i} u q^* dS_\varepsilon^i = C(X_0) u(X_0),$$

در مسایل سه بعدی با فرض اینکه چشمه روی یک صفحه تخت قرار گرفته، با استفاده از مختصات

کروی

$$dS_\varepsilon^i = \varepsilon^2 \cos \varphi d\varphi d\theta, \quad q^* = \frac{1}{4\pi\varepsilon^2},$$

داریم:

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(u(X_0) \int_{\partial \Omega_\varepsilon^i} q^* dS_\varepsilon^i \right) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(X_0) \int_0^{2\pi} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{1}{2\pi \varepsilon^2} \cos \varphi d\varphi \right) d\theta \\ &= \frac{u(X_0)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos \varphi d\varphi \right) d\theta \\ &= \frac{1}{2} u(X_0),\end{aligned}$$

از طرفی:

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial \Omega_\varepsilon^i} u^* q dS_\varepsilon^i &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(-\frac{\ln \varepsilon}{2\pi} \int_{\partial \Omega_\varepsilon^i} \frac{\partial u}{\partial n} dS_\varepsilon^i \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(-\frac{\ln \varepsilon}{2\pi} \frac{\partial u(X_0)}{\partial n} \int_{\partial \Omega_\varepsilon^i} dS_\varepsilon^i \right) \quad (\text{از قضیه مقدار میانگین}) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(-\frac{\ln \varepsilon}{2\pi} \frac{\partial u(X_0)}{\partial n} \int_0^{2\pi} \varepsilon d\theta \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(-\varepsilon \ln \varepsilon \frac{\partial u(X_0)}{\partial n} \right),\end{aligned} \quad (35.2)$$

اما $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \ln \varepsilon = 0$ ، در نتیجه:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial \Omega_\varepsilon^i} u^* q dS_\varepsilon^i = 0,$$

با جایگذاری نتایج فوق در (34.2)، رابطه زیر برای هنگامی که چشمه X_0 روی مرز هموار قرار گرفته ($\alpha = \pi$) بدست می‌آید:

$$\frac{1}{2} u(X_0) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial \Omega - \partial \Omega_\varepsilon} u q^* dS = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial \Omega - \partial \Omega_\varepsilon} u^* q dS, \quad X_0 \in \partial \Omega_\varepsilon, \quad (36.2)$$

از طرفی هنگامی که $\varepsilon \rightarrow 0$ داریم:

$$\partial \Omega - \partial \Omega_\varepsilon \rightarrow \partial \Omega,$$

در نتیجه رابطه (36.2) را در حالت کلی می‌توان بصورت زیر بیان نمود:

$$C(X_0) u(X_0) + \int_{\partial \Omega} u q^* dS = \int_{\partial \Omega} u^* q dS, \quad (37.2)$$

که در آن

$$C(X_0) = \begin{cases} \frac{\alpha}{2\pi}, & 2D, \\ \frac{\alpha}{4\pi}, & 3D. \end{cases}$$

۷.۲ انتگرال‌های تکین

در فرمولاسیون معادله انتگرال مرزی (BIE) با انتگرال‌های مختلفی که انتگرال تکین^{۱۱} نامیده می‌شوند، روبه‌رو می‌شویم. در انتگرال‌های تکین توابع زیر انتگرال در نقاط تکین به بی‌نهایت میل می‌کنند. در معادلات انتگرال مرزی و روش المان مرزی شناخت انتگرال‌های تکین بسیار مهم است. در این قسمت با بیان چند مثال که بر اساس مرجع [۲۹] تنظیم شده، به رفتار و نتایج انتگرال‌های تکین می‌پردازیم. ابتدا انتگرال زیر را در نظر بگیرید:

$$f_1(x) = \int_a^b \log|x-y|dy, \quad a < x < b. \quad (38.2)$$

تابع زیر انتگرال در $x=y$ به بی‌نهایت میل می‌کند؛ بنابراین تکین است. انتگرال (۳۸.۲) یک انتگرال ناسره^{۱۲} می‌باشد و بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \int_a^{x-\varepsilon_1} \log|x-y|dy + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \int_{x+\varepsilon_2}^b \log|x-y|dy \\ &= \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} [-(x-y)\log(x-y) - y]_{y=a}^{y=x-\varepsilon_1} + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} [(y-x)\log(y-x) - y]_{y=x+\varepsilon_2}^{y=b} \\ &= \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} [-\varepsilon_1 \log \varepsilon_1 - x + \varepsilon_1 + (x-a)\log(x-a) + a] \\ &\quad + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} [(b-x)\log(b-x) - b - \varepsilon_2 \log \varepsilon_2 + x + \varepsilon_2]. \end{aligned}$$

ازطرفی:

$$\lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \varepsilon_1 \log \varepsilon_1 = 0,$$

و

$$\lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \varepsilon_2 \log \varepsilon_2 = 0,$$

در نتیجه:

$$f_1(x) = (x-a)[\log(x-a) - 1] + (b-x)[\log(b-x) - 1],$$

بنابراین، بدون در نظر گرفتن مقادیر ε_1 و ε_2 انتگرال $f_1(x)$ وجود دارد و انتگرال تکین ضعیف^{۱۳} نامیده می‌شود. حال انتگرال تکین قوی^{۱۴} زیر را در نظر بگیرید:

$$f_2(x) = \int_a^b \frac{1}{y-x} dy, \quad a < x < b. \quad (39.2)$$

^{۱۱}Singular Integral

^{۱۲}Improper Integral

^{۱۳}Weakly Singular Integral

^{۱۴}Strongly Singular Integral

انتگرال ناسره (۳۹.۲) را بصورت زیر ارزیابی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} f_2(x) &= \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \int_a^{x-\varepsilon_1} \frac{1}{y-x} dy + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \int_{x+\varepsilon_2}^b \frac{1}{y-x} dy \\ &= \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} [\log |y-x|]_{y=a}^{y=x-\varepsilon_1} + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} [\log |y-x|]_{y=x+\varepsilon_2}^{y=b} \\ &= \log\left(\frac{b-x}{x-a}\right) + \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \log \varepsilon_1 - \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \log \varepsilon_2, \end{aligned}$$

که اگر ε_1 و ε_2 مستقل از یکدیگر باشند، انتگرال (۳۹.۲) وجود ندارد و برای $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ انتگرال (۳۹.۲) دارای مقدار متناهی زیر است:

$$f_2(x) = \log\left(\frac{b-x}{x-a}\right),$$

که انتگرال (۳۹.۲) مقدار اصلی کوشی^{۱۵} نامیده می‌شود. بنابراین، $f_2(x)$ یک انتگرال CPV نامیده می‌شود که در آن با حذف یک ناحیه کوچک "مقارن" از دامنه انتگرال‌گیری در x ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2$) محاسبه شده است.

۸.۲ گسسته سازی

معادلات بدست آمده از (۳۷.۲) بصورت انتگرالی و پیوسته بوده و برای حل عددی باید این سیستم پیوسته را با روش‌های مختلف به سیستم‌های کوچک‌تر و غیر پیوسته جداسازی نمود. به این منظور، مرز ناحیه را به N قطعه تقسیم می‌کنیم، هریک از این قطعات المان^{۱۶} نامیده می‌شوند. بدیهی است که:

$$\partial\Omega = \bigcup_{j=1}^N \partial\Omega_j. \quad (40.2)$$

بر روی هریک از این المان‌ها نقاطی در نظر گرفته شده است که مقدار مجهولات مورد نیاز در آن نقاط بدست می‌آید. هریک از این نقاط گره نامیده می‌شوند. با توجه به اینکه هر المان دارای چند گره است، دسته‌بندی‌هایی برای المان‌ها در نظر می‌گیرند که عبارتند از: [۲۰]

(۱) المان ثابت^{۱۷}:

همان‌گونه که در شکل ۶.۲ نشان داده شده، المان تنها دارای یک گره است. در این حالت مقدار شار و پتانسیل در طول المان، ثابت و برابر با مقدار آن‌ها در نقطه وسط می‌باشد.

(۲) المان خطی^{۱۸}:

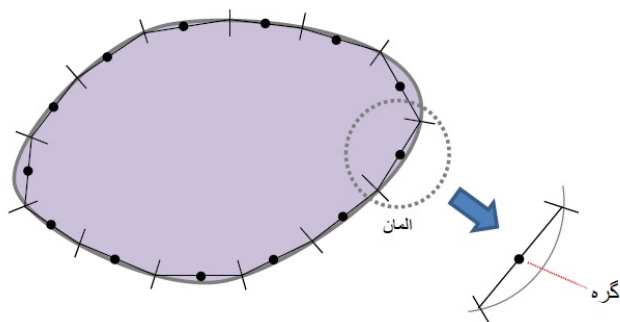
همان‌گونه که در شکل ۷.۲ نشان داده شده، هر المان دارای دو گره بوده و مقدار شار و پتانسیل بصورت خطی در طول المان توزیع شده است.

^{۱۵}Cauchy Principal Value

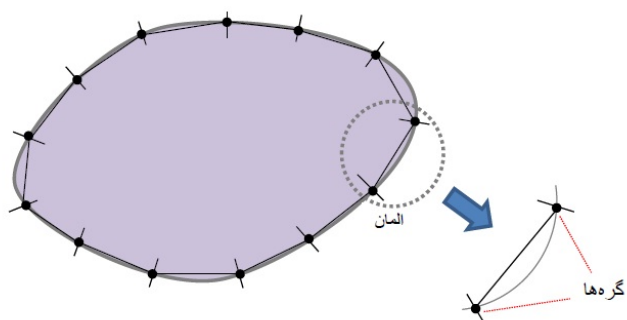
^{۱۶}Element

^{۱۷}Constant Element

^{۱۸}Linear Element



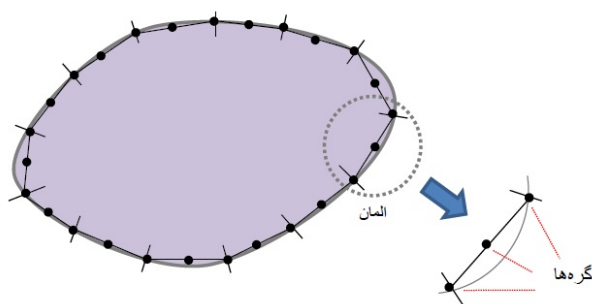
شکل ۶.۲: المان ثابت



شکل ۷.۲: المان خطی

۳) المان درجه دوم^{۱۹}:

مطابق شکل ۸.۲، هریک از المان‌ها دارای سه گره بوده و توزیع مقادیر شار و پتانسیل روی هر المان بصورت سهموی در نظر گرفته می‌شود.



شکل ۸.۲: المان درجه دو

^{۱۹}Quadratic Element

۹.۲ اعمال روش المان مرزی بر روی معادلات انتگرال مرزی

در این بخش که بر اساس مراجع [۱۱، ۳۶] تنظیم شده است، نحوه تبدیل رابطه (۳۷.۲) به یک دسته معادلات جبری برای تعیین مقادیر مرزی (همچنین مقادیر تابع درون ناحیه) مورد بررسی قرار می‌گیرد. بدین منظور با جایگذاری (۴۰.۲) در (۳۷.۲) داریم:

$$C(X_0)u(X_0) + \int_{\bigcup_{j=1}^N \partial\Omega_j} uq^* dS_j = \int_{\bigcup_{j=1}^N \partial\Omega_j} u^*q dS_j, \quad (41.2)$$

در نتیجه:

$$C(X_0)u(X_0) + \sum_{j=1}^N \int_{\partial\Omega_j} uq^* dS_j = \sum_{j=1}^N \int_{\partial\Omega_j} u^*q dS_j. \quad (42.2)$$

از طرفی روی هر المان $\partial\Omega_j$ با در نظر گرفتن φ به عنوان توابع پایه‌ای استاندارد (این توابع پایه‌ای برای u و q می‌تواند هریک از توابع پایه‌ای عناصر متناهی یک بعدی استاندارد باشند [۳۶])، معرفی می‌کنیم:

$$u_j = \sum_{\alpha} \varphi_{\alpha} u_{j\alpha}, \quad q_j = \frac{\partial u_j}{\partial n} = \sum_{\alpha} \varphi_{\alpha} q_{j\alpha}, \quad (43.2)$$

که u_j ، q_j مقادیر u ، q بر روی المان $\partial\Omega_j$ و $u_{j\alpha}$ ، $q_{j\alpha}$ مقادیری از u ، q در گره α بر روی المان $\partial\Omega_j$ می‌باشند. با جایگذاری (۴۳.۲) در (۴۲.۲) خواهیم داشت:

$$C(X_0)u(X_0) + \sum_{j=1}^N \sum_{\alpha} u_{j\alpha} \int_{\partial\Omega_j} \varphi_{\alpha} q^* dS_j = \sum_{j=1}^N \sum_{\alpha} q_{j\alpha} \int_{\partial\Omega_j} \varphi_{\alpha} u^* dS_j. \quad (44.2)$$

رابطه (۴۴.۲) برای تمام نقاط چشمه واقع بر مرز $\partial\Omega$ برقرار است. با فرض این که چشمه X_0 در گره i قرار گرفته باشد، رابطه (۴۴.۲) را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$C_i u_i + \sum_{j=1}^N \sum_{\alpha} u_{j\alpha} \left(\int_{\partial\Omega_j} \varphi_{\alpha} \frac{\partial u_i^*}{\partial n} dS_j \right) = \sum_{j=1}^N \sum_{\alpha} q_{j\alpha} \left(\int_{\partial\Omega_j} \varphi_{\alpha} u_i^* dS_j \right), \quad (45.2)$$

که u_i^* جواب اساسی با خاصیت تکینگی در گره i ام می‌باشد. بدین ترتیب رابطه (۴۵.۲) را می‌توان بصورت ساده‌تری نیز نوشت:

$$C_i u_i + \sum_{j=1}^N \sum_{\alpha} u_{j\alpha} \hat{H}_{ij} = \sum_{j=1}^N \sum_{\alpha} q_{j\alpha} G_{ij}, \quad (46.2)$$

که

$$\hat{H}_{ij} = \int_{\partial\Omega_j} \varphi_{\alpha} \frac{\partial u_i^*}{\partial n} dS_j, \quad G_{ij} = \int_{\partial\Omega_j} \varphi_{\alpha} u_i^* dS_j,$$

با تعریف H_{ij} به شکل

$$H_{ij} = \begin{cases} \hat{H}_{ij}, & i \neq j, \\ C_i + \hat{H}_{ij}, & i = j, \end{cases}$$

می‌توان رابطه (۴۶.۲) را بصورت زیر ساده نمود:

$$\sum_{j=1}^N \sum_{\alpha} u_{j\alpha} H_{ij} = \sum_{j=1}^N \sum_{\alpha} q_{j\alpha} G_{ij}, \quad (47.2)$$

برای مثال با فرض استفاده از المان‌های ثابت و قرار گرفتن گره‌های مرزی روی سطح هموار $(C(X_0) = \frac{1}{4})$ معادله (۴۵.۲) بصورت زیر در می‌آید:

$$\frac{1}{4}u_i + \sum_{j=1}^N \left(\int_{\partial\Omega_j} \frac{\partial u_i^*}{\partial n} dS_j \right) u_j = \sum_{j=1}^N \left(\int_{\partial\Omega_j} u_i^* dS_j \right) q_j,$$

که

$$\hat{H}_{ij} = \int_{\partial\Omega_j} \frac{\partial u_i^*}{\partial n} dS_j, G_{ij} = \int_{\partial\Omega_j} u_i^* dS_j,$$

و با تعریف

$$H_{ij} = \begin{cases} \hat{H}_{ij}, & i \neq j, \\ \frac{1}{4} + \hat{H}_{ij}, & i = j, \end{cases}$$

رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\sum_{j=1}^N H_{ij} u_j = \sum_{j=1}^N G_{ij} q_j,$$

معادله (۴۷.۲) برای گره‌ی i ام نوشته شده است. اگر L گره داشته باشیم، آنگاه L معادله خواهیم داشت و می‌توانیم این معادلات را به شکل ماتریسی زیر درآوریم:

$$HU = GQ, \quad (48.2)$$

که ماتریس‌های H و G ماتریس‌های اثر^{۲۰} نامیده می‌شود. برای محاسبه ماتریس‌های H و G روش‌های مختلفی از جمله روش گوس کوادراچر وجود دارد که در فصل بعد توضیح مختصری از این روش ارائه شده است.

در رابطه (۴۸.۲)، U و Q بردارهایی هستند که مقادیر پتانسیل و شار بر روی المان‌ها را بیان می‌کنند و متناسب با شرایط مرزی مساله، برخی معلوم و برخی مجهول می‌باشند. بنابراین می‌توان دستگاه معادلات جبری (۴۸.۲) را مرتب نموده تا به فرم ماتریسی زیر برسیم:

$$CX = F. \quad (49.2)$$

در رابطه (۴۹.۲)، X بردار مجهولات بوده و شامل برخی از عناصر U و برخی از عناصر Q است و F بردار معلومات می‌باشد. ماتریس‌های G و H که باعث تولید ماتریس C می‌گردند ماتریس‌هایی پر بوده و متقارن نمی‌باشند، بنابراین ماتریس C متقارن نبوده و پراست. دستگاه حاصل را می‌توان با روش‌های تکراری از جمله روش حذفی گوس حل نمود و مقادیر مجهول X را بدست آورد.

^{۲۰} Influence Matrices

فصل ۳

تحلیل معادله لاپلاس با روش المان مرزی

در این فصل ابتدا به بیان روابط مورد نیاز برای تعیین عناصر ماتریس‌های اثر با توجه به موقعیت قرارگرفتن چشمه می‌پردازیم، سپس حل عددی معادله لاپلاس با فرض ثابت بودن المان‌ها به روش المان مرزی و مقایسه جواب‌های بدست آمده با نتایج واقعی موجود مورد بررسی قرار می‌گیرد. تمامی محاسبات و نمودارها در این فصل توسط کدنویسی به زبان متلب تنظیم شده است. مطالب این بخش بر اساس مراجع [۱۰، ۱۱] تنظیم شده است.

۱.۳ چگونگی محاسبه ماتریس ضرایب

روش المان مرزی شامل انتگرال‌هایی است که می‌بایست مقادیر آن برای هر المان محاسبه شوند. در این قسمت هدف بدست آوردن اعضای ماتریس H و G است که شامل انتگرال‌هایی می‌باشند که روی مرز مساله تعریف شده‌اند. این انتگرال‌ها با توجه به موقعیت قرارگرفتن چشمه X محاسبه می‌شوند.

۲.۳ محاسبه انتگرال هنگامی که چشمه روی المانی که انتگرال روی آن محاسبه می‌شود، باشد

در فصل دوم داشتیم:

$$q^* = \frac{\partial u^*}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} = \frac{-1}{2\pi r^2} r \cdot n, \quad (2D),$$

$$q^* = \frac{\partial u^*}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} = \frac{-1}{4\pi r^3} r \cdot n, \quad (3D).$$

با فرض استفاده از المان‌های ثابت داریم:

$$\hat{H}_{ij} = \int_{\partial\Omega_j} q_i^* dS_j,$$

و همچنین با توجه به این که بردار نرمال n بر تمامی خطوطی که نقاط المان i را به هم وصل می کند عمود است، داریم:

$$r \cdot n = 0.$$

در نتیجه مقدار $\hat{H}_{ii}$ برابر با صفر است.

مقدار G_{ii} برای حالت المان ثابت در فضای دوبعدی طبق روابط زیر حاصل می شود:

$$G_{ii} = \int_{\partial\Omega_i} u_i^* dS_i = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\partial\Omega_i} \ln\left(\frac{1}{r}\right) dS_i,$$

با توجه به تقارن (به دلیل استفاده از المان ثابت)، انتگرال را فقط روی نیمی از المان محاسبه می کنیم، بنابراین:

$$G_{ii} = \frac{1}{\pi} \int_0^{l_e/2} \ln\left(\frac{1}{r}\right) dr, \quad (1.3)$$

که l_e طول المانی می باشد که انتگرال روی آن محاسبه شده است. با توجه به ماهیت جواب اساسی،



شکل ۱.۳: هندسه المان اطراف نقطه چشمه

انتگرال (۱.۳) حول مبدا تکین می باشد لذا این انتگرال را به روش تحلیلی می توان حل نمود، بنابراین:

$$G_{ii} = \lim_{r_\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\pi} \int_{r_\epsilon}^{l_e/2} \ln\left(\frac{1}{r}\right) dr \right),$$

که r_ϵ فاصله دلخواه اطراف چشمه المان می باشد. با انتگرال گیری جز به جز داریم:

$$G_{ii} = -\frac{1}{\pi} \lim_{r_\epsilon \rightarrow 0} (r \ln(r) - r) \Big|_{r_\epsilon}^{l_e/2},$$

با توجه به اینکه: $\lim_{r_\epsilon \rightarrow 0} r_\epsilon \ln r_\epsilon = 0$ داریم:

$$G_{ii} = \frac{l_e}{\sqrt{\pi}} \left(\ln\left(\frac{2}{l_e}\right) + 1 \right),$$

۳.۳ محاسبه انتگرال هنگامی که چشمه روی المانی که انتگرال روی آن محاسبه می شود، نباشد

روش المان مرزی شامل انتگرال هایی است که توابع زیر انتگرال در حالت کلی در مبدا تکین بوده و باید مقادیر این انتگرال ها برای هر المان بدست آیند. اگر از درونیابی های خطی و یا ثابت برای هندسه و

جدول ۱.۳: ضرایب گوسی

n	x_i	w_i	درجه
۲	-۰/۵۷۷۳۵۰۲۷	۱/۰	۳
	۰/۵۷۷۳۵۰۲۷	۱/۰	
۳	-۰/۷۷۴۵۹۶۶۷	۰/۵۵۵۵۵۵۵۵	۵
	۰/۰	۰/۸۸۸۸۸۸۸۹	
	۰/۷۷۴۵۹۶۶۷	۰/۵۵۵۵۵۵۵۵	
۴	-۰/۸۶۱۱۳۶۳۱	۰/۳۴۷۸۵۴۸۵	۷
	-۰/۳۳۹۹۸۱۰۴	۰/۶۵۲۱۴۵۱۵	
	۰/۳۳۹۹۸۱۰۴	۰/۶۵۲۱۴۵۱۵	
	۰/۸۶۱۱۳۶۳۱	۰/۳۴۷۸۵۴۸۵	
۵	-۰/۹۰۶۱۷۹۷۵	۰/۲۳۶۹۲۶۸۹	۹
	-۰/۵۳۸۴۶۹۳۱	۰/۴۷۸۶۲۸۶۷	
	۰/۰	۰/۵۶۸۸۸۸۸۹	
	۰/۵۳۸۴۶۹۳۱	۰/۴۷۸۶۲۸۶۷	
	۰/۹۰۶۱۷۹۷۵	۰/۲۳۶۹۲۶۸۹	

یا متغیرها استفاده کنیم می‌توان شرایطی ایجاد کرد که این انتگرال‌ها را بصورت تحلیلی بدست آوریم (حداقل برای مسایل دوبعدی). اما اگر مساله سه بعدی باشد و یا از درونیاب‌های غیر خطی استفاده کنیم لازم است انتگرال‌ها را بصورت عددی بدست آوریم. روش انتگرال‌گیری گوسی^۱ یکی از روش‌های کارا در محاسبه عددی انتگرال‌هایی بوده که بصورت تحلیلی قابل حل نیستند. این روش به فرم کلی زیر تعریف می‌شود:

$$\int_{-1}^1 f(x)w(x)dx = \sum_{i=1}^n f(x_i)w_i, \quad (2.3)$$

که w_i ها ضرایب وزنی و x_i ها بیان‌کننده نقاط گوسی می‌باشند. در رابطه (۲.۳) نکته قابل توجه حدود انتگرال می‌باشد. این رابطه انتگرال را بین ناحیه ۱- تا ۱+ تعریف کرده و بنابراین برای محاسبه انتگرال باید حدود انتگرال را به این بازه تبدیل نمود. w_i ها و x_i ها در روش انتگرال‌گیری گوسی با رتبه n انتخاب می‌شوند. در جدول ۱.۳ نمونه‌ای از ضرایب گوسی آورده شده است.

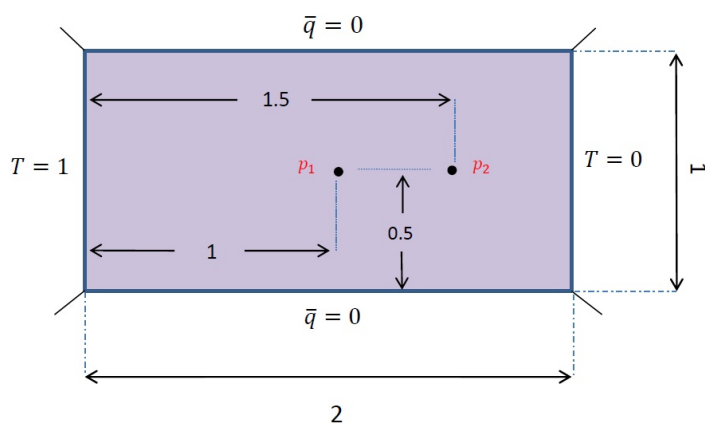
۴.۳ شبیه‌سازی انتقال گرما در ناحیه مستطیل شکل

معادله‌ی لاپلاس

^۱Gaussian Quadrature

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla^2 T = 0, & 0 < x < 2, 0 < y < 1, \\ \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{y=0} = 0, & 0 < x < 1, \\ T(2, y) = 0, & 0 < y < 1, \\ \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{y=1} = 0, & 0 < x < 2, \\ T(0, y) = 1, & 0 < y < 1, \end{array} \right. \quad (3.3)$$

را در دامنه‌ای هموار به شکل مستطیل با عرض ۱ و طول ۲ در نظر بگیرید. در این مثال شرایط مرزی مختلط بصورتی که در شکل ۴.۳ نشان داده شده، تعریف شده است.



شکل ۴.۳: مساله مقدار مرزی برای مستطیل هموار

با گسسته‌سازی چهار المان ثابت، همراه با نقاط چشمه واقع در وسط المان، این مساله مقدار مرزی همراه با نتایج کد عددی به روش المان مرزی حل شده است و مقادیر حرارت در نقاط p_1 و p_2 و نیز مقادیر مجهول T و q روی مرزها محاسبه شده است. همانطور که در فصل گذشته بیان شد، در این مثال وظیفه ما پر کردن اعضای ماتریس

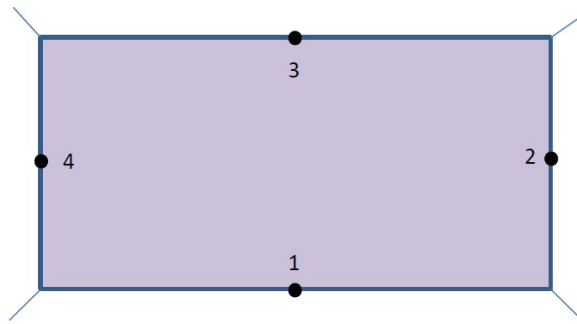
$$[H]\{T\} = [G]\{q\},$$

با در نظر گرفتن تمام شرایط مرزی نامبرده است. در بیان کلی نقاط چشمه و مکان آن بستگی به خواست کاربر دارد. در ابتدا این نقاط در جهت پادساعتگرد در وسط هر المان بصورتی که در شکل ۴.۳ نمایش داده شده، در نظر می‌گیریم. در ادامه مساله را با در نظر گرفتن چشمه در مکانی غیر وسط المان بررسی می‌کنیم.

اعضای ماتریس اثر برای حالت المان‌های ثابت توسط فرمول‌های زیر محاسبه می‌شود:

$$\hat{H}_{ij} = \int_{\partial\Omega_j} q_i^* dS_j, G_{ij} = \int_{\partial\Omega_j} u_i^* dS_j. \quad (4.3)$$

عملگر u^* جواب اساسی معادله دیفرانسیل $\nabla^2 u^* + \delta(X_0, X) = 0$ می‌باشد که همانطور که در فصل



شکل ۳.۳: مدل ۱ المان مرزی

گذشته بیان شد، برای فضای دوبعدی برابر است با:

$$u^* = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{1}{r} \right),$$

از طرفی:

$$q^* = \frac{\partial u^*}{\partial n} = -\frac{1}{2\pi r^2} (r_x n_x + r_y n_y), \quad (5.3)$$

که r فاصله چشمه $X_0 = (\xi, \eta)$ قرارگرفته بر روی المان i تا نقطه انتگرال‌گیری $X = (x, y)$ قرارگرفته بر المان j می‌باشد:

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2},$$

با جایگذاری (۵.۳) در (۴.۳) برای $i \neq j$ داریم:

$$\begin{aligned} H_{ij} &= \int_{\partial\Omega_j} q_i^* dS_j = \int_{\partial\Omega_j} -\frac{1}{2\pi r^2} (r_x n_x + r_y n_y) dS_j \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{X_j}^{X_{j+1}} \frac{1}{r^2} (r_x n_x + r_y n_y) dX, \end{aligned}$$

که X_j و X_{j+1} به ترتیب ابتدا و انتهای المان $\partial\Omega_j$ می‌باشند. حال با استفاده از تغییر متغیر:

$$\int_{X_j}^{X_{j+1}} f(t) dt = \int_{-1}^1 f \left(\frac{X_{j+1} + X_j}{2} + \frac{X_{j+1} - X_j}{2} \xi \right) \frac{X_{j+1} - X_j}{2} d\xi, \quad (6.3)$$

برای $-1 < \xi < 1$ و استفاده از قانون انتگرال‌گیری گوسی چهار نقطه‌ای خواهیم داشت:

$$H_{ij} = -\frac{X_{j+1} - X_j}{2\pi} \sum_{k=1}^4 \frac{w_k}{r_k^2} (r_{xk} n_{xk} + r_{yk} n_{yk}). \quad (7.3)$$

با تعریف:

$$l_e = X_{j+1} - X_j,$$

رابطه (۷.۳) به رابطه زیر تبدیل می‌شود:

$$H_{ij} = -\frac{l_e}{2\pi} \sum_{k=1}^4 \frac{w_k}{r_k^2} (r_{xk} n_{xk} + r_{yk} n_{yk}), \quad (8.3)$$

که

- w_k توابع وزن در جدول انتگرال گوسی،
- l_e طول المانی که انتگرال روی آن انجام شده است،
- r_k فاصله از چشمه قرار گرفته در المان i تا هریک از نقاط انتگرالی قرار گرفته بر روی المان j ،

می باشند.

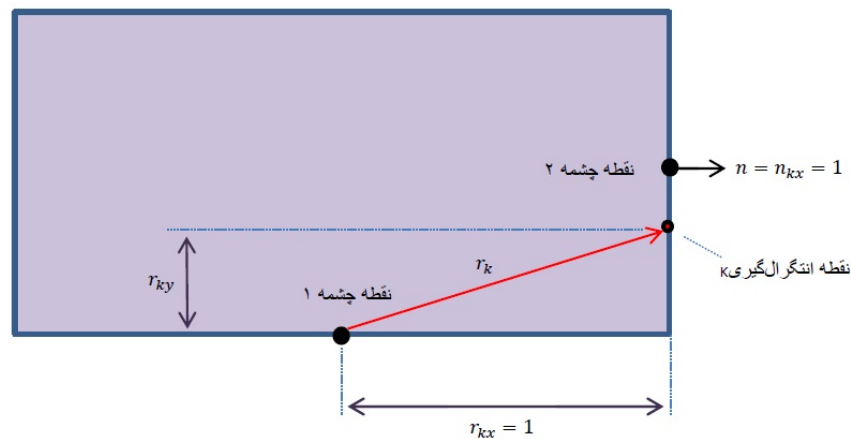
به همین ترتیب برای اعضای ماتریس $[G]$ داریم:

$$\begin{aligned} G_{ij} &= \int_{\partial\Omega_j} u_i^* dS_j = \int_{\partial\Omega_j} \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right) dS_j \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{X_j}^{X_{j+1}} \ln\left(\frac{1}{r}\right) dX. \end{aligned} \quad (9.3)$$

با استفاده از (۶.۳) و قانون انتگرال گیری گوسی چهار نقطه ای رابطه زیر بدست می آید:

$$G_{ij} = \frac{l_e}{4\pi} \sum_{k=1}^4 w_k \ln \frac{1}{r_k}.$$

برای مثال، مقدمات هندسی لازم به منظور ارزیابی یک عبارت خارج از قطر ماتریس های $[G]$ و $[H]$ در شکل (۴.۳) نشان داده شده است.



شکل ۴.۳: نمایش هندسی برای نقاط انتگرال گیری

در این حالت به دلیل هندسه خاص دامنه، بعضی از عبارات در (۸.۳) و (۹.۳) ثابت می باشند. به عنوان مثال:

$$n_{kx} = 1, n_{ky} = 0, r_{kx} = 1. \quad (10.3)$$

حال به محاسبه H_{12} و G_{12} می پردازیم. با توجه به (۸.۳)، (۹.۳) و (۱۰.۳) داریم:

جدول ۲.۳: سهم نقاط انتگرال‌گیری به ضرایب تاثیر

نقاط انتگرال‌گیری گوسی (k)	فاصله چشمه تا نقطه انتگرال‌گیری (r_k)	تابع وزن (w_k)	ضرایب تاثیر	
			سهم h_{12k}	سهم g_{12k}
۱	۱/۳۶۶۰	۰/۳۴۷۹	-۰/۰۱۴۸	-۰/۰۰۸۶
۲	۱/۰۰۲۴	۰/۳۴۷۹	-۰/۰۲۷۵	-۶/۶۵۶۳e - ۰/۵
۳	۱/۲۰۳۷	۰/۶۵۲۱	-۰/۰۳۵۸	-۰/۰۰۹۶
۴	۱/۰۵۳۰	۰/۶۵۲۱	-۰/۰۴۶۸	-۰/۰۰۲۷

$$H_{12} = -\frac{l_e}{4\pi} \sum_{k=1}^4 \frac{w_k}{r_k^2} (1(1) + r_{yk}(\circ)),$$

$$G_{12} = \frac{l_e}{4\pi} \sum_{k=1}^4 w_k \ln \frac{1}{r_k},$$

چون انتگرال‌گیری بر روی المان دوم صورت گرفته، لذا $l_e = 1$ است، بنابراین:

$$H_{12} = -\frac{0/3479}{4\pi r_1^2} - \frac{0/3479}{4\pi r_2^2} - \frac{0/6521}{4\pi r_3^2} - \frac{0/6521}{4\pi r_4^2},$$

$$G_{12} = \frac{0/3479}{4\pi} \ln\left(\frac{1}{r_1}\right) + \frac{0/3479}{4\pi} \ln\left(\frac{1}{r_2}\right) + \frac{0/6521}{4\pi} \ln\left(\frac{1}{r_3}\right) + \frac{0/6521}{4\pi} \ln\left(\frac{1}{r_4}\right),$$

در جدول (۲.۳) مقادیر سهم هریک از نقاط انتگرال‌گیری برای ضرایب تاثیر انتخاب شده، محاسبه شده است. با توجه به مقادیر محاسبه شده در جدول (۲.۳) خواهیم داشت:

$$H_{12} = -0/125, G_{12} = -0/021.$$

برای محاسبه عناصر قطری ماتریس $[G]$ از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$G_{ii} = \frac{l_e}{2\pi} \left(\ln\left(\frac{2}{l_e}\right) + 1 \right). \quad (11.3)$$

از طرفی عناصر قطری ماتریس $[H]$ همگی برابر با ۰/۵ می‌باشند، زیرا تمام نقاط چشمه بر روی مرز هموار قرار گرفته‌اند و بردار نرمال واحد در این مثال بر خطوط گذرنده از نقاط واقع بر المان i عمود است. بنابراین:

$$G_{11} = \frac{l_e}{2\pi} \left(\ln\left(\frac{2}{l_e}\right) + 1 \right)$$

$$= \frac{2}{2\pi} \left(\ln\left(\frac{2}{2}\right) + 1 \right)$$

$$= 0/3183.$$

با ادامه این روند توسط کد مربوطه سایر عناصر ماتریس‌های $[H]$ و $[G]$ بدست می‌آیند و خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} 0/5000 & -0/1250 & -0/2497 & -0/1250 \\ -0/2113 & 0/5000 & -0/2113 & -0/0780 \\ -0/2497 & -0/1250 & 0/5000 & -0/1250 \\ -0/2113 & -0/0780 & -0/2113 & 0/5000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0/3183 & -0/0210 & -0/0421 & -0/0210 \\ -0/0176 & 0/2695 & -0/0176 & -0/1119 \\ -0/0421 & -0/0210 & 0/3183 & -0/0210 \\ -0/0176 & -0/1119 & -0/0176 & 0/2695 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} \quad (12.3)$$

با اعمال شرایط مرزی مساله (۳.۳)، رابطه (۱۲.۳) به رابطه زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{bmatrix} 0/5000 & -0/1250 & -0/2497 & -0/1250 \\ -0/2113 & 0/5000 & -0/2113 & -0/0780 \\ -0/2497 & -0/1250 & 0/5000 & -0/1250 \\ -0/2113 & -0/0780 & -0/2113 & 0/5000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ 0 \\ T_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0/3183 & -0/0210 & -0/0421 & -0/0210 \\ -0/0176 & 0/2695 & -0/0176 & -0/1119 \\ -0/0421 & -0/0210 & 0/3183 & -0/0210 \\ -0/0176 & -0/1119 & -0/0176 & 0/2695 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ q_2 \\ 0 \\ q_4 \end{bmatrix} \quad (13.3)$$

با مرتب‌سازی (۱۳.۳) و تبدیل آن به فرم

$$CX = F,$$

که X بردار مجهولات و C و F ماتریس‌هایی با مقادیر معلوم هستند، بردارهای مجهول $[T]$ و $[q]$ از طریق کد مربوطه بدست می‌آیند و داریم:

$$T = [0/4993, 0, 0/4993, 1]^T, q = [0, -0/7578, 0, 0/7575]^T, \quad (14.3)$$

حال با پیاده‌سازی کد مساله برای شش المان (دو المان به المان‌هایی که طولشان دو بود اضافه شود)، نتایج عددی بصورتی که در جدول ۳.۳ نمایش داده شده‌اند، بدست می‌آیند.

جواب واقعی برای این مساله به طور خطی بین صفر و یک در امتداد طول صفحه تغییر می‌کند. هنگامی که چشمه واقع در المان اول و سوم است، جواب واقعی برابر است با:

$$T_1 = T_3 = 0/5.$$

در جدول ۳.۳ مشاهده می‌شود با افزایش تعداد المان‌ها از چهار به شش، دقت مشتق اول جواب شدیداً بهبود می‌یابد.

جدول ۳.۳: مقایسه جواب‌ها در مستطیل هموار با افزایش تعداد المان‌ها

جواب واقعی	شش المان ثابت	چهار المان ثابت	نوع نتایج
۰/۷۵	۰/۷۶۱	—	T_1
۰/۵	—	۰/۴۹۹۳	T_2
۰/۲۵	۰/۲۳۸۶	—	T_3
—۰/۵	—۰/۵۶۳۱	—۰/۷۵۷۸	q_4
۰/۲۵	۰/۲۳۸۶	—	T_5
۰/۵	—	۰/۴۹۹۳	T_6
۰/۷۵	۰/۷۶۱	—	T_7
۰/۵	۰/۵۶۵	۰/۷۵۷۵	q_8

۱.۴.۳ دما در نقاط درونی

بنا به آنچه که در فصل گذشته بیان شد، معادله انتگرال مرزی برای این مساله بصورت زیر بیان می‌شود:

$$C_i T_{(i)} + \int_{\Omega} T q^* dS = \int_{\Omega} q u^* dS, \quad (15.3)$$

که در آن

• u^* جواب اساسی مساله لاپلاس،

$$q = \frac{\partial T}{\partial n} \quad \bullet$$

$$q^* = \frac{\partial u^*}{\partial n} \quad \bullet$$

هستند. حال به منظور پیدا کردن مقادیر حرارت در نقاط درونی ناحیه، $C_i = 1$ در نظر می‌گیریم. در این صورت رابطه (۱۵.۳) به رابطه زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} T_{(i)} &= \int_{\Omega} q u^* dS - \int_{\Omega} T q^* dS \\ &= \sum_{k=1}^N \left(\int_{\partial\Omega_k} u_i^* dS_k \right) q_k - \sum_{k=1}^N \left(\int_{\partial\Omega_k} \frac{\partial u_i^*}{\partial n} dS_k \right) T_k. \end{aligned}$$

با در نظر گرفتن:

$$G_{ik} = \int_{\partial\Omega_k} u_i^* dS_k, \quad H_{ik} = \int_{\partial\Omega_k} \frac{\partial u_i^*}{\partial n} dS_k,$$

خواهیم داشت:

$$T_{(i)} = \sum_{k=1}^N G_{ik} q_k - \sum_{k=1}^N H_{ik} T_k. \quad (16.3)$$

در این حالت، با انتخاب نقطه درونی به عنوان چشمه و محاسبه ضرایب تاثیر توسط کد مربوطه درجه حرارت در نقاط درونی p_1 و p_2 بدست خواهند آمد:

$$\begin{aligned} T_{p_1} = & [(0.1049 \times 0) + (-0.0062 \times -0.7578) + (0.1049 \times 0) \\ & + (-0.0062 \times 0.7575)] - [(0.3397 \times 0.4993) + (-0.1476 \times 0) \\ & + (-0.3397 \times 0.4993) + (-0.1476 \times 1)] = 0.4869, \end{aligned} \quad (17.3)$$

و

$$\begin{aligned} T_{p_2} = & [(0.3285 \times 0) + (-0.2497 \times -0.7578) + (-0.3285 \times 0) \\ & + (-0.1024 \times 0.7575)] - [(0.0754 \times 0.4993) + (0.0893 \times 0) \\ & + (0.0754 \times 0.4993) + (-0.0674 \times 1)] = 0.3118, \end{aligned} \quad (18.3)$$

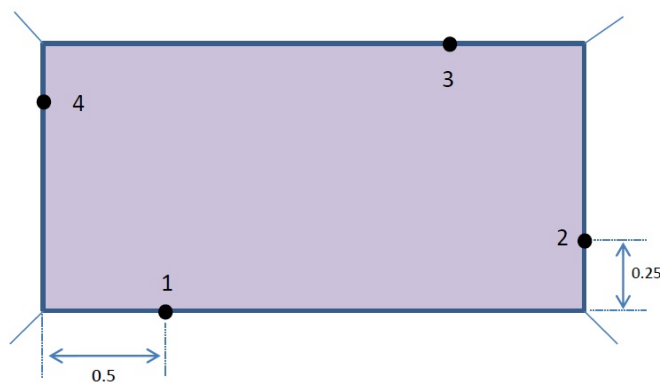
مقدار واقعی درجه حرارت در نقاط درونی p_1 و p_2 برابر است با:

$$T_{p_1} = 0.5, T_{p_2} = 0.25. \quad (19.3)$$

با مقایسه مقادیر تقریبی (۱۷.۳) و (۱۸.۳) با مقادیر دقیق (۱۹.۳)، نتیجه می شود که روش المان مرزی برای نقاط داخلی تقریب بسیار خوبی ارائه می دهد.

۲.۴.۳ ارزیابی دما با در نظر گرفتن مکانی دلخواه برای چشمه

در مثال بالا مکان نقاط چشمه در وسط المان های مرزی انتخاب شده بودند. در این قسمت به تحلیل مساله قبل با در نظر گرفتن نقاط چشمه واقع بر المان های مرزی در مکانی به جز وسط المان همان گونه که در شکل ۵.۳ نشان داده شده، می پردازیم. روش محاسبه اعضای ماتریس های اثر $[H]$ و $[G]$ بین مدل

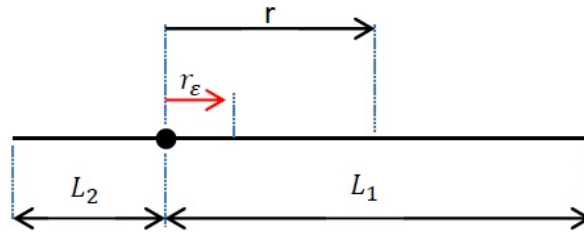


شکل ۵.۳: مدل دوم المان مرزی

اول و دوم المان مرزی یکسان است و توسط کد یکسان می توان ماتریس های اثر را بدست آورد. تفاوت در محاسبه المان های قطری از ماتریس $[G]$ است. این تفاوت به دلیل رفتار انتگرال تکین (۲۰.۳) ایجاد شده است که عناصر قطری ماتریس $[G]$ را محاسبه می کنند.

$$G_{ii} = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega_i} \ln\left(\frac{1}{r}\right) dS_i. \quad (20.3)$$

این انتگرال همراه تمام المان‌ها اجرا شده است به طوریکه هیچ تقارنی نسبت به نقطه چشمه وجود ندارد. موقعیت بهتر در شکل ۶.۳ توصیف شده است.



شکل ۶.۳: مدل ۱ المان مرزی

با در نظر گرفتن نقطه چشمه به عنوان مبدا مختصات دستگاه محلی و با توجه به شکل ۶.۳ انتگرال (۲۰.۳) به دو انتگرال بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$G_{ii} = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-L_2}^0 \ln \left(\frac{1}{r} \right) dr + \int_0^{L_1} \ln \left(\frac{1}{r} \right) dr \right].$$

با گرفتن حد اطراف نقطه چشمه مانند حالت نقطه میانی داریم:

$$G_{ii} = \frac{1}{2\pi} \lim_{r_\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{r_\epsilon}^{L_2} \ln \left(\frac{1}{r} \right) dr + \int_{r_\epsilon}^{L_1} \ln \left(\frac{1}{r} \right) dr \right]$$

که L_1 و L_2 طول‌هایی هستند که مکان نقطه چشمه را روی المان تعریف می‌کنند. با انتگرال‌گیری جز به جز داریم:

$$G_{ii} = -\frac{1}{2\pi} \left[\lim_{r_\epsilon \rightarrow 0} (r \ln r - r) \Big|_{r_\epsilon}^{L_2} + \lim_{r_\epsilon \rightarrow 0} (r \ln r - r) \Big|_{r_\epsilon}^{L_1} \right].$$

چون $\lim_{r_\epsilon \rightarrow 0} r_\epsilon \ln r_\epsilon = 0$ و با فرض $L_1 + L_2 = l_e$ داریم:

$$G_{ii} = \frac{l_e}{2\pi} \left[1 - \frac{1}{l_e} (L_1 \ln L_1 + L_2 \ln L_2) \right]. \quad (21.3)$$

رابطه (۲۱.۳) می‌تواند برای هر مدل از قرار گرفتن چشمه در المان استفاده شوند. اگر دو طول L_1 و L_2 با هم برابر باشند، رابطه (۲۱.۳) به (۱۱.۳) تبدیل می‌شود. حال مانند حالت قبل از طریق کد مربوطه به دستگاه زیر می‌رسیم:

$$\begin{bmatrix} 0.5000 & -0.0936 & -0.2304 & -0.1761 \\ -0.2392 & 0.5000 & -0.1927 & -0.0769 \\ -0.2304 & -0.1761 & 0.5000 & -0.0936 \\ -0.1927 & -0.0769 & -0.2392 & 0.5000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ 0 \\ T_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ q_2 \\ 0 \\ q_4 \end{bmatrix} \quad (22.3)$$

$$\begin{bmatrix} 0.2767 & -0.0750 & -0.0614 & 0.0533 \\ -0.0384 & 0.2487 & -0.0680 & -0.1131 \\ -0.0614 & 0.0533 & 0.2767 & -0.0750 \\ -0.0680 & -0.1131 & -0.0384 & 0.2487 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ q_2 \\ 0 \\ q_4 \end{bmatrix}$$

با حل این دستگاه توسط کد مربوطه به جواب‌های زیر می‌رسیم:

$$T = [0.705, 0, 0.3028, 1]^T, q = [0, -0.8682, 0, 0.7782]^T. \quad (23.3)$$

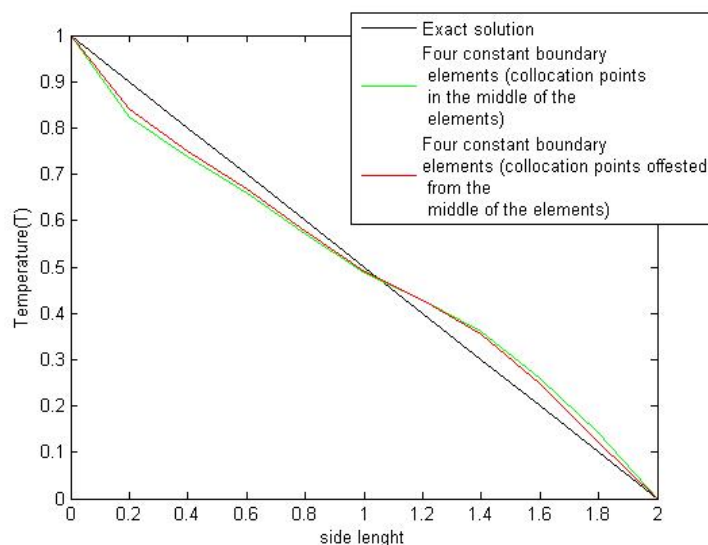
با مقایسه جواب‌های حاصل از قرار گرفتن چشمه در وسط المان (۱۴.۳) با جواب‌های حاصل از قرار گرفتن چشمه در نقطه‌ای غیر از وسط المان (۲۳.۳) مشاهده می‌شود که با تغییر مکان نقطه چشمه، دقت کاهش یافته است و این به این دلیل است که جواب واقعی به طور خطی تغییر می‌کند و انتخاب چشمه در وسط المان بهترین تقریب را می‌دهد.

مشابه آنچه که قبلاً بیان شد با فرض اینکه چشمه غیر وسط المان قرار گرفته باشد، مقادیر دما در نقاط $p_1 = (1, 0.5)$ و $p_2 = (1.5, 0.5)$ از طریق کد مربوطه حاصل می‌شود:

$$T_{p_1} = 0.4905, T_{p_2} = 0.3036. \quad (24.3)$$

با مقایسه مقادیر دما در نقطه p_1 و p_2 هنگامی که چشمه در وسط المان‌ها باشد (۱۷.۳) و (۱۸.۳) و هنگامی که چشمه وسط المان نباشد (رابطه ۲۴.۳) می‌توان نتیجه گرفت که دقت و درستی جواب در نقاط داخلی، به میزان کمی تحت تاثیر موقعیت مکانی چشمه قرار دارد.

با افزایش تعداد نقاط درونی، (نقاط قرار گرفته در وسط دامنه مستطیل شکل) می‌توان طی روندی مشابه مقادیر دما در این نقاط را با فرض ثابت بودن چهار المان و موقعیت مکانی چشمه محاسبه کرد. شکل ۷.۳ تاثیر موقعیت مکانی را در محاسبه دما در این نقاط درونی نمایش می‌دهد.

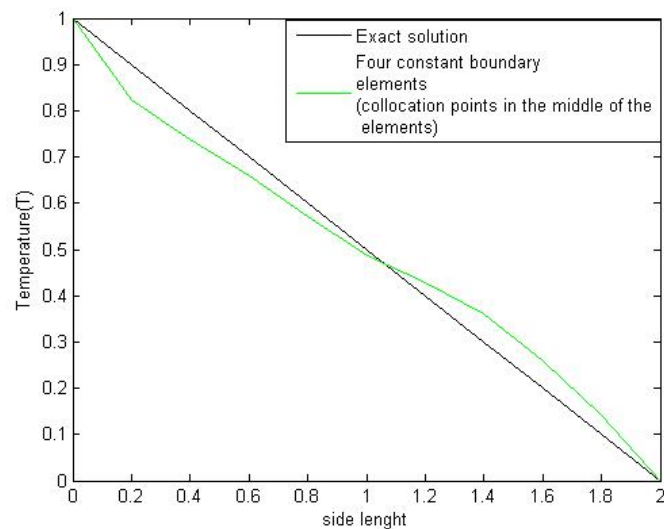


شکل ۷.۳: تاثیر موقعیت مکانی چشمه در ارزیابی دما

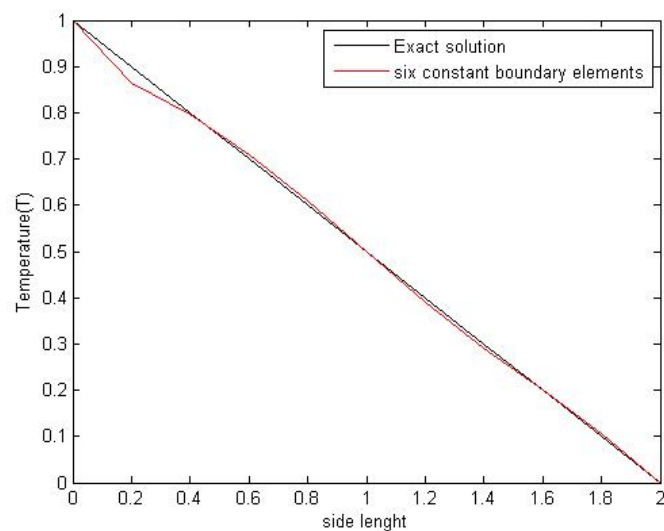
۳.۴.۳ افزایش تعداد المان‌ها در درستی جواب

در این قسمت تاثیر افزایش تعداد المان‌ها در میزان درستی جواب مورد بررسی قرار می‌گیرد. با گسسته‌سازی ناحیه مستطیلی به چهار المان ثابت، مقادیر دما در نقاط درونی قرار گرفته در وسط این ناحیه، با فرض اینکه چشمه در وسط المان قرار گرفته است، بصورت شکل ۸.۳ می‌باشد. همچنین

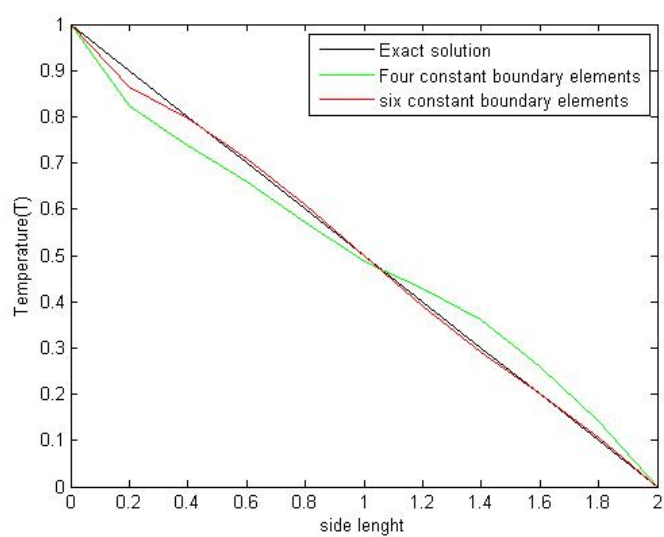
مقادیر دما در نقاط درونی قرار گرفته در وسط این ناحیه با فرض گسسته‌سازی شش المان ثابت و اینکه چشمه در وسط المان قرار گرفته است، بصورت شکل ۹.۳ می‌باشد. در شکل ۱۰.۳ مشاهده می‌شود که با افزایش تعداد المان‌ها از چهار به شش، دقت و درستی جواب افزایش می‌یابد.



شکل ۸.۳: دما در نقاط درونی با فرض چهار المان ثابت



شکل ۹.۳: دما در نقاط درونی با فرض شش المان ثابت



شکل ۳.۱۰: مقایسه نموداری افزایش تعداد المان‌ها در درستی جواب

فصل ۴

تحلیل معادله هلمهولتز با روش المان مرزی



شکل ۱۰۴: هرمان فون هلمهولتز

معادله هلمهولتز یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی بیضوی است که به نام فیزیکدان آلمانی هرمان فون هلمهولتز^۱ نامگذاری شده است. این معادله بیشتر در بررسی مسایل فیزیک شامل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای نسبت به زمان و مکان ظاهر می‌شود. ارتباط بین معادله موج و معادله هلمهولتز در زمینه مسایل مختلفی در فیزیک، تابش الکترومغناطیس، لرزه‌نگاری و پژوهش آکوستیک به‌خوبی

^۱Herman Von Helmholtz

نمایان است. در این بخش ابتدا به بیان رابطه بین معادله هلمهولتز و معادله موج پرداخته و سپس به حل عددی این مساله توسط روش المان مرزی با کدنویسی به زبان متلب می‌پردازیم.

۱.۴ معادله هلمهولتز

معادله موج،^۲ معادله‌ای خطی و کلاسیک از نوع معادلات دیفرانسیل هذلولوی پاره‌ای است. معادله درجه دوم موج به صورت زیر نمایش داده می‌شود: [۳۱]

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(r, t) = c^2 \nabla^2 u(r, t), \quad (1.4)$$

که ∇^2 عملگر لاپلاس، t زمان، u دامنه موج و c ضریبی ثابت برابر با سرعت موج می‌باشد. با فرض این‌که در تابع موج $u(r, t)$ بتوان متغیرهای r و t را بصورت جدا نوشت یا به عبارتی تابع موج $u(r, t)$ جدایی‌پذیر باشد، داریم:

$$u(r, t) = R(r)T(t). \quad (2.4)$$

با جایگذاری (۲.۴) در (۱.۴) داریم:

$$R(r) \frac{\partial^2}{\partial t^2} T(t) = c^2 T(t) \nabla^2 R(r). \quad (3.4)$$

با مرتب سازی (۳.۴) داریم:

$$c^2 \frac{\nabla^2 R(r)}{R(r)} = \frac{1}{T(t)} \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2}, \quad (4.4)$$

در رابطه (۴.۴) عبارت سمت چپ تنها به r بستگی دارد درحالی‌که عبارت سمت راست تنها به t وابسته است. در نتیجه رابطه (۴.۴) در حالت کلی برقرار است، اگر و تنها اگر هر دوطرف رابطه برابر با یک مقدار ثابت باشند. بدون از دست دادن کلیت، به منظور سادگی نتایج معادلات، عبارت $-\omega^2$ را به عنوان مقدار ثابت در نظر می‌گیریم. بنابراین با در نظر گرفتن:

$$c^2 \frac{\nabla^2 R(r)}{R(r)} = -\omega^2, \quad \frac{1}{T(t)} \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} = -\omega^2,$$

معادلات برای $R(r)$ و $T(t)$ به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$\frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} + \omega^2 T(t) = 0, \quad (5.4)$$

$$\nabla^2 R(r) + \frac{\omega^2}{c^2} R(r) = 0, \quad (6.4)$$

توجه داشته باشید که $R(r)$ و $T(t)$ توابع حقیقی از متغیرهای حقیقی می‌باشند. معادله (۵.۴) یک معادله دیفرانسیل هارمونیک با جواب:

$$T(t) = c'_\omega \cos(\omega t) + c''_\omega \sin(\omega t), \quad (7.4)$$

^۲Wave Equation

می‌باشد که c'_ω و c''_ω ثابت‌های حقیقی هستند. با فرض $c_\omega = c'_\omega + ic''_\omega$ به‌عنوان ثابت مختلط داریم:

$$\begin{aligned} c_\omega \exp(-i\omega t) &= c_\omega (\cos(-\omega t) + i \sin(-\omega t)) \\ &= (c'_\omega + ic''_\omega) (\cos(\omega t) - i \sin(\omega t)) \\ &= (c'_\omega \cos(\omega t) + c''_\omega \sin(\omega t)) + i(c''_\omega \cos(\omega t) - c'_\omega \sin(\omega t)). \end{aligned} \quad (۸.۴)$$

با مقایسه (۷.۴) با (۸.۴) داریم:

$$T(t) = \operatorname{Re}(c_\omega \exp(-i\omega t)), \quad (۹.۴)$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$u(r, t) = R(r) \operatorname{Re}(c_\omega \exp(-i\omega t)) = \operatorname{Re}(c_\omega R(r) \exp(-i\omega t)). \quad (۱۰.۴)$$

با در نظر گرفتن $u(r) = c_\omega R(r)$ به‌عنوان اندازه میدان مختلط رابطه (۱۰.۴) به رابطه زیر تبدیل می‌شود:

$$u(r, t) = \operatorname{Re}(u(r) \exp(-i\omega t)) = u(r) \cos(\omega t). \quad (۱۱.۴)$$

توجه کنید که $u(r)$ میدانی مختلط است در حالی که $u(r, t)$ میدانی حقیقی است. با جایگذاری معادله (۱۱.۴) در (۱.۴) داریم:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(u(r) \cos(\omega t)) = c^2 \nabla^2(u(r) \cos(\omega t)),$$

در نتیجه:

$$u(r) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \cos(\omega t) = c^2 \cos(\omega t) \nabla^2 u(r),$$

از طرفی داریم:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \cos(\omega t) = -\omega^2 \cos(\omega t),$$

بنابراین:

$$-\omega^2 u(r) \cos(\omega t) = c^2 \cos(\omega t) \nabla^2 u(r), \quad (۱۲.۴)$$

با ضرب طرفین (۱۲.۴) در $\frac{1}{c^2}$ داریم:

$$\nabla^2 u(r) + \frac{\omega^2}{c^2} u(r) = 0.$$

با فرض $k = \frac{\omega}{c}$ داریم:

$$\nabla^2 u(r) + k^2 u(r) = 0, \quad (۱۳.۴)$$

که معادله هلمهولتز است. اگر در معادله هلمهولتز $k = 0$ باشد، آنگاه معادله هلمهولتز تبدیل به معادله لاپلاس می‌شود و اگر تابع f در طرف سمت راست معادله (۱۳.۴) ظاهر شود، این معادله به‌عنوان معادله هلمهولتز ناهمگن شناخته می‌شود.

۲.۴ معادله بسل

معادله دیفرانسیل مرتبه دوم داده شده به صورت: [۱۴]

$$x^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + x \frac{\partial y}{\partial x} + (x^2 - \nu^2)y = 0, \quad (14.4)$$

به عنوان معادله بسل^۳ شناخته شده است. معادله بسل را نمی توان با روش های کلاسیک حل کرد و با استفاده از روش سری ها جوابی برای معادله بسل به شکل زیر خواهیم داشت:

$$y = AJ_\nu(x) + BY_\nu(x),$$

که A و B ثوابت دلخواه هستند. توابع بسل معرفی شده اغلب در فرم مرتبه صحیح هستند، یعنی $\nu = 0, 1, 2, \dots$ ، در واقع آن ها برای تمام مقادیر حقیقی $-\infty < \nu < \infty$ تعریف شده اند.

۱.۲.۴ توابع بسل

۱. $J_\nu(x)$ در جواب معادله بسل، تابع بسل نوع اول نامیده شده، به صورت زیر تعریف می شود:

$$J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(\nu + n + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu}.$$

۲. $Y_\nu(x)$ در جواب معادله بسل، تابع بسل از نوع دوم یا تابع وبر^۴ یا تابع نویمن^۵ نامیده می شود و به صورت زیر است:

$$Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos(p\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(p\pi)}.$$

۳. تابع هنکل^۶ یا تابع بسل نوع سوم به صورت زیر نمایش داده می شود:

$$\begin{aligned} H_\nu^{(1)}(x) &= J_\nu(x) + iY_\nu(x), & x > 0, \\ H_\nu^{(2)}(x) &= J_\nu(x) - iY_\nu(x), & x > 0, \end{aligned}$$

که $H_\nu^{(1)}(x)$ تابع هنکل نوع اول از مرتبه ν و $H_\nu^{(2)}(x)$ تابع هنکل نوع دوم از مرتبه ν نامیده می شوند. در واقع استقلال خطی تابع بسل نوع اول و نوع دوم یک جفت دیگر از جواب ها را برای معادله بسل فراهم می سازد. توابع هنکل نوع اول و دوم دارای ویژگی هایی بصورت زیر هستند:

۱.

$$H_{-\nu}^{(1)}(x) = (-1)^\nu H_\nu^{(1)}(x), H_{-\nu}^{(2)}(x) = (-1)^\nu H_\nu^{(2)}(x),$$

^۳Bessel Equation

^۴Weber Function

^۵Neumann Function

^۶Hankel Function

۲.

$$H'_\nu^{(1)}(x) = H_{\nu-1}^{(1)}(x) - \frac{\nu}{x} H_\nu^{(1)}(x) = -H_{\nu+1}^{(1)}(x) + \frac{\nu}{x} H_\nu^{(1)}(x) \quad (15.4)$$

$$H'_\nu^{(2)}(x) = H_{\nu-1}^{(2)}(x) - \frac{\nu}{x} H_\nu^{(2)}(x) = -H_{\nu+1}^{(2)}(x) + \frac{\nu}{x} H_\nu^{(2)}(x), \quad (16.4)$$

۳.۴ جواب اساسی معادله هلمهولتز

در این قسمت به بررسی جواب

$$\nabla^2 u^* + k^2 u^* = -\delta(x - \xi, y - \eta), \quad (17.4)$$

که شامل یک تکینگی در نقطه $X_0 = (\xi, \eta)$ است، می‌پردازیم. مطالب این بخش بر اساس مراجع [۱۸، ۴۱] تنظیم شده است.

۱.۳.۴ جواب اساسی در فضای سه‌بعدی

با در نظر گرفتن مختصات کروی:

$$\begin{cases} x &= r \sin \phi \cos \theta, \\ y &= r \sin \phi \sin \theta, \\ z &= r \cos \phi, \end{cases}$$

که $r \geq 0$ و $0 \leq \phi \leq \pi$ و $0 \leq \theta \leq 2\pi$ می‌باشد، عبارت $\nabla^2 u^*$ را می‌توان به فرم مختصات کروی زیر نوشت: [۱۸]

$$\nabla^2 u^* = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u^*}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u^*}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u^*}{\partial \phi^2}, \quad (18.4)$$

از طرفی تابع جواب اساسی وابسته به شعاع می‌باشد، بنابراین به علت تقارن کروی اطراف نقطه چشمه، تنها عبارت شعاعی مساله لاپلاس (۱۸.۴) را در نظر می‌گیریم:

$$\nabla^2 u^* = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u^*}{\partial r} \right) = \frac{\partial^2 u^*}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u^*}{\partial r}.$$

از طرفی:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (ru^*)}{\partial r^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u^*}{\partial r} + u^* \right) = \frac{\partial^2 u^*}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u^*}{\partial r}, \quad (19.4)$$

در نتیجه:

$$\nabla^2 u^* = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (ru^*)}{\partial r^2}. \quad (20.4)$$

از طرفی طبق تعریف تابع دلتای دیراک برای $r > 0$ داریم:

$$\delta(x - \xi, y - \eta) = 0. \quad (21.4)$$

با جایگذاری (۲۱.۴) و (۲۰.۴) در (۱۷.۴) داریم:

$$\frac{\partial^2 (ru^*)}{\partial r^2} + k^2 (ru^*) = 0. \quad (22.4)$$

فرم کلی جواب معادله (۲۲.۴) به صورت زیر می باشد:

$$ru^* = Ae^{-ikr} + Be^{ikr} \quad \Rightarrow \quad u^* = A \frac{e^{-ikr}}{r} + B \frac{e^{ikr}}{r},$$

که شامل امواج ورودی و خروجی است. از طرفی جواب باید تنها شامل امواج خروجی باشد و ما عامل زمانی $e^{i\omega t}$ را استفاده کرده ایم، بنابراین تنها عبارت اول را حفظ خواهیم کرد: [۱۸]

$$u^* = A \frac{e^{-ikr}}{r}, \quad (23.4)$$

که

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}.$$

مقدار تابع جواب اساسی تنها به فاصله بین چشمه (ξ, η) و نقاط مشاهده شده (x, y) بستگی دارد. حال شرایط مرزی را به منظور تعیین جوابی یکتا مطابقت می دهیم. از طرفی موج با افزایش r به صفر می گراید، این مستلزم آن است که

$$u^* \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty.$$

برای تعیین متغیر مجهول A تابع جواب اساسی را در مکان نقطه چشمه ($r = 0$) مطابقت می دهیم. به این منظور از رابطه (۱۷.۴) روی حجم کروی Ω به شعاع a اطراف نقطه چشمه انتگرال می گیریم، بنابراین:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u^* + k^2 u^*) dV = \int_{\Omega} -\delta(x - \xi, y - \eta) dV.$$

با توجه به تعریف تابع دلتای دیراک داریم:

$$\int_{\Omega} \delta(x - \xi, y - \eta) dV = 1,$$

بنابراین:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u^* + k^2 u^*) dV = -1. \quad (24.4)$$

با جایگذاری (۲۳.۴) در (۲۴.۴) داریم:

$$A \int_{\Omega} \left[\nabla \cdot \nabla \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) + k^2 \frac{e^{-ikr}}{r} \right] dV = -1. \quad (25.4)$$

از قضیه دیورژانس داریم:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \nabla \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) dV = \int_{\partial\Omega} n \cdot \nabla \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) dS. \quad (26.4)$$

روی حجم کروی Ω

$$n = r,$$

بنابراین:

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial\Omega} r \cdot \nabla \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) dS &= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) dS \\
 &= \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) \right)_{r=a} \int_{\partial\Omega} dS \\
 &= 4\pi a^2 \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) \right)_{r=a} \quad (27.4) \\
 &= 4\pi a^2 \left(\frac{-e^{-ika}(ika + 1)}{a^2} \right) \\
 &= -4\pi(e^{-ika}(ika + 1)).
 \end{aligned}$$

با جایگذاری (۲۷.۴) در (۲۶.۴) و گرفتن حد از طرفین رابطه حاصل وقتی $a \rightarrow 0$ داریم:

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_{\Omega} \nabla \cdot \nabla \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) dV = -4\pi. \quad (28.4)$$

برای عبارت دوم انتگرال رابطه (۲۵.۴) داریم:

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} k^2 \frac{e^{-ikr}}{r} dV &= k^2 \int_0^a \frac{e^{-ikr}}{r} \left(\int_{\partial\Omega} dS \right) dr \\
 &= k^2 \int_0^a \frac{e^{-ikr}}{r} (4\pi r^2) dr \quad (29.4) \\
 &= 4\pi k^2 \int_0^a r e^{-ikr} dr.
 \end{aligned}$$

با انتگرال گیری جز به جز از $\int_0^a r e^{-ikr} dr$ داریم:

$$\int_0^a r e^{-ikr} dr = \frac{a e^{-ika}}{ik} - \frac{1}{(ik)^2} e^{-ika} + \frac{1}{(ik)^2}. \quad (30.4)$$

با جایگذاری (۳۰.۴) در (۲۹.۴) و گرفتن حد از طرفین رابطه حاصل وقتی $a \rightarrow 0$ داریم:

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_{\Omega} k^2 \frac{e^{-ikr}}{r} dV = 0,$$

در نتیجه:

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_{\Omega} k^2 u^* dV = 0. \quad (31.4)$$

با جایگذاری (۳۱.۴) و (۲۸.۴) در (۲۵.۴) مجهول A بدست می آید:

$$A = \frac{1}{4\pi}.$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$u^* = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-ikr}}{r},$$

که

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}.$$

۲.۳.۴ جواب اساسی در فضای دو بعدی

با در نظر گرفتن مختصات قطبی:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta, \\ y = \rho \sin \theta, \end{cases}$$

که در آن $\rho \geq 0$ و $0 \leq \theta \leq 2\pi$ است، عبارت $\nabla^2 u^*$ را می‌توان به فرم قطبی زیر نوشت: [۱۸]

$$\nabla^2 u^* = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u^*}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial \theta^2}, \quad (32.4)$$

که

$$\rho = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}.$$

از تعریف تابع دلتای دیراک برای $\rho > 0$ داریم:

$$\delta(x - \xi, y - \eta) = 0, \quad (33.4)$$

با جایگذاری (۳۲.۴) و (۳۳.۴) در (۱۷.۴) داریم:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u^*}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial \theta^2} + k^2 u^* = 0. \quad (34.4)$$

با فرض اینکه تابع $u^*(\rho, \theta)$ جداپذیر است داریم:

$$u^*(\rho, \theta) = F(\rho)\Theta(\theta). \quad (35.4)$$

با جایگذاری (۳۵.۴) در (۳۴.۴) داریم:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \Theta \frac{\partial F}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(F \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) + k^2 u^* \\ &= \frac{\Theta}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial F}{\partial \rho} \right) + \frac{F}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \theta^2} + k^2 F \Theta \end{aligned} \quad (36.4)$$

با ضرب طرفین رابطه (۳۶.۴) در $\frac{\rho^2}{F\Theta}$ رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\left(\frac{\rho}{F} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial F}{\partial \rho} \right) + \rho^2 k^2 \right) + \frac{1}{\Theta} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \theta^2} = 0. \quad (37.4)$$

چون که جواب نسبت به θ باید تناوبی باشد، بنابراین جمله دوم رابطه (۳۷.۴) باید برابر با یک ثابت جداپذیر منفی باشد یعنی:

$$\frac{1}{\Theta} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \theta^2} = -n^2, \quad (38.4)$$

که دارای جواب زیر می‌باشد:

$$\Theta(\theta) = A \cos(n\theta) + B \sin(n\theta),$$

با جایگذاری (۳۸.۴) در (۳۷.۴) رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{\rho}{F} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial F}{\partial \rho} \right) + k^2 \rho^2 - n^2 = 0. \quad (39.4)$$

از طرفی

$$\frac{\rho}{F} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial F}{\partial \rho} \right) = \frac{\rho^2}{F} \frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} + \frac{\rho}{F} \frac{\partial F}{\partial \rho}.$$

بنابراین رابطه (۳۹.۴) به رابطه زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{\rho^2}{F} \frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} + \frac{\rho}{F} \frac{\partial F}{\partial \rho} + k^2 \rho^2 - n^2 = 0, \quad (40.4)$$

با ضرب طرفین (۴۰.۴) در F و با فرض $p = k\rho$ و قاعده مشتق زنجیری

$$\frac{\partial F}{\partial \rho} = \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \rho} = k \frac{\partial F}{\partial p},$$

رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\rho^2 k^2 \frac{\partial^2 F}{\partial p^2} + \rho k \frac{\partial F}{\partial p} + (p^2 - n^2) F = 0, \quad (41.4)$$

با جایگذاری $p = k\rho$ در رابطه (۴۱.۴) داریم:

$$p^2 \frac{\partial^2 F}{\partial p^2} + p \frac{\partial F}{\partial p} + (k^2 \rho^2 - n^2) F = 0,$$

که یک معادله بسل است و توابع هنکل نوع اول و دوم جوابی برای آن می‌باشند، بنابراین:

$$F(\rho) = H_n^{(\gamma)}(k\rho),$$

با فرض اینکه جواب مستقل از θ باشد، داریم:

$$\frac{1}{\theta} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \theta^2} = -n^2 = 0 \rightarrow n = 0,$$

بنابراین:

$$F(\rho) = H_0^{(\gamma)}(k\rho), \quad (42.4)$$

و

$$\Theta(\theta) = A \cos(\circ \times \theta) + B \sin(\circ \times \theta) = A, \quad (43.4)$$

با جایگذاری (۴۲.۴) و (۴۳.۴) در (۳۵.۴) داریم:

$$u^*(\rho, \theta) = AH_0^{(\gamma)}(k\rho),$$

بنابراین با فرض $\rho = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$ جواب برای معادله

$$\nabla^2 u^* + k^2 u^* = -\delta(x - \xi, y - \eta), \quad (44.4)$$

به صورت زیر می‌باشد:

$$u^* = AH_0^{(\gamma)}(k\rho), \quad (45.4)$$

به منظور تعیین مجهول A از تقریب زیر استفاده می‌کنیم: [۱۸]

$$H_0^{(\gamma)}(k\rho) \approx 1 - i \frac{\gamma}{\pi} \log\left(\frac{\gamma k \rho}{2}\right), \quad \rho \rightarrow 0. \quad (46.4)$$

که $\gamma = 1/781$. از (۴۴.۴) روی یک دایره کوچک Ω به شعاع a انتگرال می‌گیریم:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u^* + k^2 u^*) dV = - \int_{\Omega} \delta(x - \xi, y - \eta) dV, \quad (47.4)$$

از طرفی طبق تعریف تابع دلتای دیراک برای $X_0 \in \Omega$ داریم:

$$\int_{\Omega} \delta(x - \xi, y - \eta) dV = 1, \quad (48.4)$$

با جایگذاری (۴۵.۴)، (۴۶.۴) و (۴۸.۴) در (۴۷.۴) رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$A \int_{\Omega} [\nabla \cdot \nabla + k^2] \left[1 - i \frac{2}{\pi} \log\left(\frac{\gamma k \rho}{2}\right) \right] dV = -1, \quad (49.4)$$

با استفاده از قضیه دیورژانس داریم:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \cdot \nabla \left(1 - i \frac{2}{\pi} \log\left(\frac{\gamma k \rho}{2}\right) \right) dV &= \int_{\partial\Omega} \nabla \left(1 - i \frac{2}{\pi} \log\left(\frac{\gamma k \rho}{2}\right) \right) \cdot n dS \\ &= \int_0^{2\pi} \rho \nabla \left(1 - i \frac{2}{\pi} \log\left(\frac{\gamma k \rho}{2}\right) \right) \cdot n d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \rho \frac{\partial}{\partial n} \left(1 - i \frac{2}{\pi} \log\left(\frac{\gamma k \rho}{2}\right) \right) d\phi \end{aligned}$$

که n بردار یکه نرمال می‌باشد. از طرفی روی این ناحیه دایره‌ای شکل $n = \rho$ می‌باشد، در نتیجه:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \left(1 - i \frac{2}{\pi} \log\left(\frac{\gamma k \rho}{2}\right) \right) \cdot \rho dV &= -i \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\log\left(\frac{\gamma k \rho}{2}\right) \right) \rho d\phi \\ &= -i \frac{2}{\pi} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\log\left(\frac{\gamma k \rho}{2}\right) \right) \rho \right)_{\rho=a} \int_0^{2\pi} d\phi \quad (50.4) \\ &= -4i. \end{aligned}$$

از طرفی داریم:

$$\begin{aligned} k^2 \int_{\Omega} \left(1 - i \frac{2}{\pi} \log\left(\frac{\gamma k \rho}{2}\right) \right) dV &= k^2 \int_0^a \int_{\partial\Omega} \left(1 - i \frac{2}{\pi} \log\left(\frac{\gamma k \rho}{2}\right) \right) dS d\rho \\ &= k^2 \int_0^a \left(1 - i \frac{2}{\pi} \log\left(\frac{\gamma k \rho}{2}\right) \right) \left(\int_{\partial\Omega} dS \right) d\rho \quad (51.4) \\ &= k^2 \int_0^a \left(1 - i \frac{2}{\pi} \log\left(\frac{\gamma k \rho}{2}\right) \right) 2\pi \rho d\rho \\ &= \pi k^2 a^2 - 4ik^2 \int_0^a \log\left(\frac{\gamma k \rho}{2}\right) \rho d\rho. \end{aligned}$$

با انتگرال‌گیری جز به جز از $\int_0^a \log\left(\frac{\gamma k \rho}{2}\right) \rho d\rho$ داریم:

$$\int_0^a \log\left(\frac{\gamma k \rho}{2}\right) \rho d\rho = \frac{a^2}{2} \log\left(\frac{\gamma ka}{2}\right) - \frac{a^2}{4},$$

در نتیجه:

$$k^2 \int_{\Omega} \left(1 - i \frac{2}{\pi} \log\left(\frac{\gamma ka}{2}\right) \right) dV = \pi k^2 a^2 - a^2 k^2 i \log\left(\frac{\gamma ka}{2}\right) - a^2 k^2 i. \quad (52.4)$$

رابطه (۵۲.۴) هنگامی که $a \rightarrow 0$ به صفر میل می‌کند، زیرا:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^2 \log \rho = 0.$$

در نتیجه:

$$k^2 \int_{\Omega} \left(1 - i \frac{2}{\pi} \log\left(\frac{\gamma ka}{2}\right) \right) dV = 0, \quad a \rightarrow 0, \quad (53.4)$$

با جایگذاری (۵۰.۴) و (۵۳.۴) در (۴۹.۴) وقتی $a \rightarrow 0$ مقدار مجهول A بدست می‌آید:

$$A = \frac{1}{4i}, \quad i = \sqrt{-1},$$

در نتیجه جواب اساسی برای معادله هلمهولتز در فضای دو بعدی به صورت زیر حاصل می شود:

$$u^* = \frac{1}{4\sqrt{-1}} H_0^{(2)}(k\rho), \quad (54.4)$$

که

$$\rho = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}.$$

که (ξ, η) مختصات چشمه و (x, y) مختصات نقطه مشاهده شده و ρ فاصله بین نقطه چشمه و نقاط مشاهده شده می باشد. حال با معلوم شدن تابع جواب اساسی به محاسبه شار q^* در فضای دوبعدی می پردازیم. از تعریف شار و قاعده مشتق زنجیری داریم:

$$q^* = \frac{\partial u^*}{\partial n} = \frac{\partial u^*}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial n}, \quad (55.4)$$

از رابطه (54.4) داریم:

$$\frac{\partial u^*}{\partial \rho} = -\frac{1}{4\sqrt{-1}} k H_1^{(2)}(k\rho),$$

از طرفی از تعریف بردار ∇ و n داریم:

$$\frac{\partial \rho}{\partial n} = \nabla \rho \cdot n = \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}, \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) \cdot (n_x, n_y),$$

از تعریف فاصله ρ و با فرض $\rho_x = x - \xi$ و $\rho_y = y - \eta$ و با جایگذاری روابط بدست آمده در (55.4) مقدار شار q^* از رابطه زیر محاسبه می شود: [۴۱]

$$q^* = -\frac{n_x \rho_x + n_y \rho_y}{4\sqrt{-1} \rho} k H_1^{(2)}(k\rho).$$

۴.۴ معادله انتگرال مرزی برای مساله هلمهولتز

به منظور نوشتن معادله انتگرال مرزی برای معادله هلمهولتز [۲۲]

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0, \quad (56.4)$$

طرفین را در تابع جواب اساسی u^* ضرب کرده و روی دامنه دلخواه Ω انتگرال می گیریم، بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} (\nabla^2 u + k^2 u) u^* dV \\ &= \int_{\Omega} \nabla^2 u u^* dV + \int_{\Omega} k^2 u u^* dV \end{aligned} \quad (57.4)$$

از قضیه دوم گرین داشتیم:

$$\int_{\Omega} (u^* \nabla^2 u - u \nabla^2 u^*) dV = \int_{\partial \Omega} \left(u^* \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial u^*}{\partial n} \right) dS, \quad (58.4)$$

از (58.4) داریم:

$$\int_{\Omega} u^* \nabla^2 u dV = \int_{\Omega} u \nabla^2 u^* dV + \int_{\partial \Omega} \left(u^* \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial u^*}{\partial n} \right) dS, \quad (59.4)$$

با جایگذاری (۵۹.۴) در (۵۷.۴) داریم:

$$\int_{\Omega} u \nabla^2 u^* dV + \int_{\partial\Omega} (u^* \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial u^*}{\partial n}) dS + \int_{\Omega} k^2 u u^* dV = 0, \quad (۶۰.۴)$$

با مرتب‌سازی (۶۰.۴) رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u^* + k^2 u^*) u dV = \int_{\partial\Omega} (u \frac{\partial u^*}{\partial n} - u^* \frac{\partial u}{\partial n}) dS. \quad (۶۱.۴)$$

از طرفی با استفاده از خواص تابع دلتای دیراک داریم:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u^* + k^2 u^*) u dV = - \int_{\Omega} u \delta(x - \xi, y - \eta) dV = -u(X_0), \quad (۶۲.۴)$$

که X_0 مختصات چشمه می‌باشد. با جایگذاری (۶۲.۴) در (۶۱.۴) معادله انتگرال مرزی برای نقاط درونی ناحیه Ω بدست می‌آید:

$$u(X_0) + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u^*}{\partial n} dS = \int_{\partial\Omega} u^* \frac{\partial u}{\partial n} dS. \quad (۶۳.۴)$$

بنابراین با فرض اینکه چشمه بر روی المان i قرار گرفته باشد، معادله انتگرال مرزی بر حسب موقعیت مکانی چشمه در حالت کلی به صورت زیر می‌باشد:

$$C_i u_i(X_0) + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u^*}{\partial n} dS = \int_{\partial\Omega} u^* \frac{\partial u}{\partial n} dS, \quad (۶۴.۴)$$

که C_i ضریب وابسته به موقعیت مکان چشمه می‌باشد و تاثیر چشمه را در سرتاسر دامنه نمایش می‌دهد. مقادیر C_i ها عبارتند از:

$$(۱) \quad C_i = \frac{1}{4} \quad \text{برای نقاط چشمه واقع شده در مرز هموار}$$

$$(۲) \quad C_i = \frac{\text{زاویه داخلی } (\alpha)}{2\pi} \quad \text{برای نقاط چشمه واقع شده در نقاط گوشه‌ای}$$

$$(۳) \quad C_i = 1 \quad \text{برای نقاط چشمه واقع در دامنه } \Omega$$

۵.۴ گسسته‌سازی و اعمال روش المان مرزی بر روی معادله انتگرال

مرزی

معادله انتگرال مرزی (۶۴.۴) به صورت پیوسته است و به منظور حل عددی با روش المان مرزی نیاز به گسسته‌سازی مرز ناحیه Ω داریم، بدین منظور مرز $\partial\Omega$ را به N قطعه تقسیم می‌کنیم: [۲۲]

$$\partial\Omega = \bigcup_{j=1}^N \partial\Omega_j, \quad (۶۵.۴)$$

با فرض استفاده از المان‌های ثابت و قرار گرفتن چشمه بر روی مرز هموار ($C_i = \frac{1}{4}$) معادله انتگرال مرزی (۶۴.۴) به رابطه زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{1}{4} u_i(X_0) + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u^*}{\partial n} dS = \int_{\partial\Omega} u^* \frac{\partial u}{\partial n} dS, \quad (۶۶.۴)$$

با جایگذاری (۶۵.۴) در (۶۶.۴) داریم:

$$\frac{1}{r} u_i(X_0) + \int_{\bigcup_{j=1}^N \partial\Omega_j} u \frac{\partial u^*}{\partial n} dS = \int_{\bigcup_{j=1}^N \partial\Omega_j} u^* \frac{\partial u}{\partial n} dS,$$

در نتیجه:

$$\frac{1}{r} u_i(X_0) + \sum_{j=1}^N \int_{\partial\Omega_j} u \frac{\partial u_i^*}{\partial n} dS_j = \sum_{j=1}^N \int_{\partial\Omega_j} u_i^* \frac{\partial u}{\partial n} dS_j,$$

با فرض قرارگرفتن چشمه در مکان المان i ام داریم:

$$\frac{1}{r} u_i + \sum_{j=1}^N \left(\int_{\partial\Omega_j} \frac{\partial u_i^*}{\partial n} dS_j \right) u_j = \sum_{j=1}^N \left(\int_{\partial\Omega_j} u_i^* dS_j \right) q_j, \quad (67.4)$$

با در نظر گرفتن

$$\hat{H}_{ij} = \int_{\partial\Omega_j} \frac{\partial u_i^*}{\partial n} dS_j, \quad G_{ij} = \int_{\partial\Omega_j} u_i^* dS_j,$$

و با تعریف

$$H_{ij} = \begin{cases} \hat{H}_{ij}, & i \neq j, \\ \frac{1}{r} + \hat{H}_{ij}, & i = j, \end{cases}$$

رابطه (۶۷.۴) به رابطه زیر تبدیل می‌شود:

$$\sum_{j=1}^N H_{ij} u_j = \sum_{j=1}^N G_{ij} q_j, \quad (68.4)$$

رابطه (۶۸.۴) را می‌توان به فرم ماتریسی زیر نوشت:

$$HU = GQ,$$

که H و G ماتریس‌های اثر نامیده می‌شوند. پس از اعمال شرایط مرزی این دستگاه را می‌توان به فرم ماتریسی زیر تبدیل نمود:

$$CX = F,$$

که X بردار مجهولات بوده و با استفاده از روش‌های تکراری می‌توان دستگاه را حل نمود و مقادیر مجهول را تعیین نمود.

حال با فرض اینکه چشمه در داخل دامنه قرار گرفته باشد معادله انتگرال مرزی به صورت زیر می‌باشد:

$$u(X_0) + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u^*}{\partial n} dS = \int_{\partial\Omega} u^* \frac{\partial u}{\partial n} dS, \quad (69.4)$$

با جایگذاری (۶۵.۴) در رابطه (۶۹.۴) و با فرض $q = \frac{\partial u}{\partial n}$ داریم:

$$u_i(X_0) = \sum_{k=1}^N G_{ik} q_k - \sum_{k=1}^N H_{ik} u_k, \quad (70.4)$$

که

$$G_{ik} = \int_{\partial\Omega_k} u_i^* dS_k, \quad H_{ik} = \int_{\partial\Omega_k} \frac{\partial u_i^*}{\partial n} dS_k,$$

رابطه (۷۰.۴) نشان می‌دهد که با داشتن نقطه‌ای درون ناحیه Ω می‌توان مقدار پتانسیل را در آن نقطه محاسبه نمود.

۶.۴ تحلیل عددی مساله هلمهولتز همگن

در این قسمت به بیان یک مثال از معادله هلمهولتز همگن پرداخته و نتایج عددی حاصل شده از کدنویسی مربوطه را با جواب واقعی مساله مقایسه می‌کنیم و افزایش تعداد المان‌بندی‌ها را در میزان دقت و درستی جواب برای مساله هلمهولتز همانند مساله لاپلاس که در فصل گذشته تحلیل شد، توسط نمودارهایی بررسی می‌نماییم. این مثال از مرجع [۲] انتخاب شده است.

مثال ۱.۶.۴. معادله هلمهولتز همگن

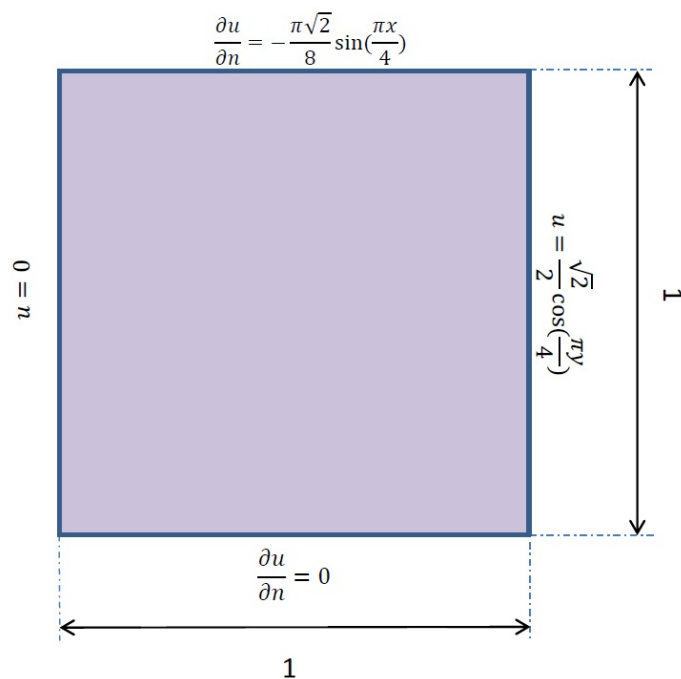
$$\begin{cases} \nabla^2 u + k^2 u = 0, & 0 < x < 1, 0 < y < 1, \\ u(0, y) = 0, & 0 < y < 1, \\ u(1, y) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\frac{\pi y}{2}\right), & 0 < y < 1, \\ \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{y=0} = 0, & 0 < x < 1, \\ \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{y=1} = -\frac{\pi\sqrt{2}}{4} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right), & 0 < x < 1, \end{cases}$$

را در دامنه‌ای هموار به شکل مربع با عرض ۱ و طول ۱ و $k = \frac{\sqrt{2}\pi}{2}$ در نظر بگیرید. در این مثال شرایط مرزی مختلط به صورتی که در شکل ۲.۴ نشان داده شده، تعریف شده است.

جواب واقعی برای این مساله مقدار مرزی به صورت زیر می‌باشد:

$$u(x, y) = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{2}\right).$$

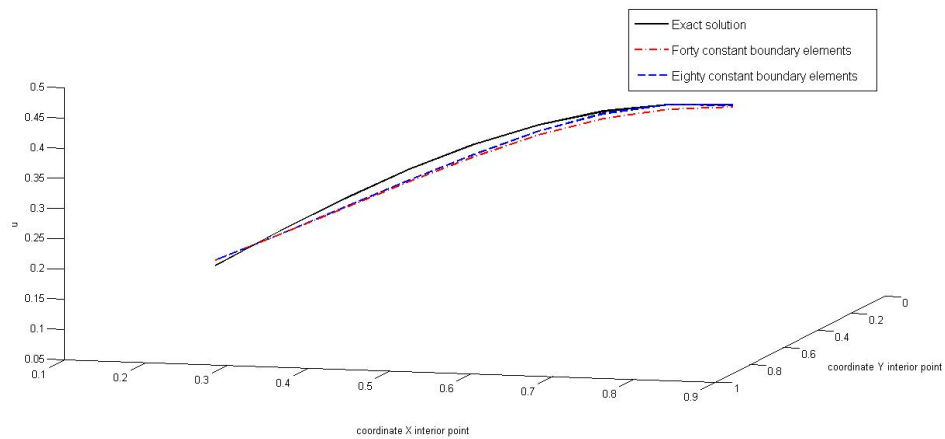
توسط روش المان مرزی به ارزیابی مقادیر u در نقاط درونی قرار گرفته بر روی قطر اصلی این ناحیه مربعی شکل می‌پردازیم. این مقادیر تحلیلی و مقادیر واقعی به صورتی که در جدول (۱.۴) نشان داده شده، توسط کد مربوطه حاصل شده‌اند.



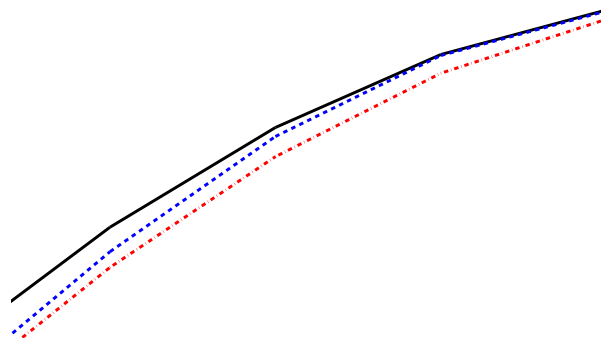
شکل ۲.۴: مساله مقدار مرزی برای مربع هموار

جدول ۱.۴: مقادیر بدست آمده u در نقاط درونی

نقاط درونی	۴۰ المان	۸۰ المان	جواب واقعی
(۰/۱, ۰/۱)	۰/۰۸۷۹	۰/۰۸۷۶	۰/۰۷۸۲
(۰/۲, ۰/۲)	۰/۱۴۸۴	۰/۱۴۹۰	۰/۱۵۴۵
(۰/۳, ۰/۳)	۰/۲۱۰۸	۰/۲۱۲۱	۰/۲۲۷۰
(۰/۴, ۰/۴)	۰/۲۷۳۳	۰/۲۷۵۶	۰/۲۹۳۹
(۰/۵, ۰/۵)	۰/۳۳۳۵	۰/۳۳۷۵	۰/۳۵۳۶
(۰/۶, ۰/۶)	۰/۳۸۸۰	۰/۳۹۴۴	۰/۴۰۴۵
(۰/۷, ۰/۷)	۰/۴۳۳۵	۰/۴۴۱۸	۰/۴۴۵۵
(۰/۸, ۰/۸)	۰/۴۶۷۸	۰/۴۷۵۱	۰/۴۷۵۵
(۰/۹, ۰/۹)	۰/۴۹۰۰	۰/۴۹۳۴	۰/۴۹۳۸



شکل ۳.۴: مقایسه نموداری افزایش تعداد المان‌ها در درستی جواب



شکل ۴.۴: مقایسه نموداری افزایش تعداد المان‌ها در درستی جواب

از نمودار (۳.۴) و جدول (۱.۴) مشاهده می‌شود که افزایش تعداد المان‌های ثابت باعث شده که مقادیر تحلیلی بدست آمده از روش المان مرزی به جواب واقعی نزدیک‌تر باشد.

۷.۴ نتیجه‌گیری و پیشنهاد

با توجه به اینکه روش المان مرزی با در نظر گرفتن المان‌های ثابت روی مسایل لاپلاس و هلمهولتز مطرح شد و با توجه به نتایج عددی مثال‌های مطرح شده در فصل گذشته و این فصل و مقایسه نموداری جواب‌های تقریبی با جواب‌های واقعی نتیجه می‌شود که روش المان مرزی روی این مسایل دقت بسیار خوبی را ارائه می‌دهد و درستی این روش مورد تایید است. با توجه به مطالعه‌ی انجام شده و مطالبی که طول انجام این پژوهش فراگرفته شده است می‌توان برای ادامه‌ی این مسیر و توسعه‌ی هرچه بیشتر این روش پیشنهادات زیر مورد بررسی قرار گیرد:

۱. این روش را با در نظر گرفتن المان‌های خطی و درجه دو روی مسایل مختلف پیاده‌سازی شود و درستی روش المان مرزی با استفاده از این نوع المان‌ها مورد بررسی قرار گیرد.
۲. این روش برخلاف بسیاری از روش‌های عددی، مشکلی با هندسه‌های گوشه‌دار و نوک‌تیز ندارد و می‌توان روش المان مرزی را روی این نوع هندسه‌ها پیاده‌سازی نمود.
۳. در برخی از مسایل ممکن است ناحیه محاسباتی از تکه‌های همگن به هم چسبیده تشکیل شده باشد. تحلیل این نوع مسایل با روش المان مرزی مورد بررسی قرار گیرد.

- [1] M. Abbaspour and M.G. Hassanabad, *A novel 2d bem with composed elements to study sloshing phenomenon*, Journal of Applied Fluid Mechanics **2** (2009), 77–83.
- [2] YWbye-Teong Ang, *A beginner's course in boundary element methods*, 2007.
- [3] M. A. Atalay, E. D. Aydin, and M. Aydin, *Multi-region heat conduction problems by boundary element method*, International Journal of Heat and Mass Transfer **47** (2004), 1549–1553.
- [4] L. Banjai, *Boundary element methods*, Institut fur Mathematik Universitat Zurich, 2007.
- [5] C. A. Brebbia and J. Dominguez, *Boundary elements an introductory course*, Computational Mechanics, 1992.
- [6] F. Brichau and J. Deconinck, *A numerical model of cathodic protection of buried pipes*, Corrosion **50** (1994), no. 1.
- [7] Pozrikidis. C, *Boundary Integral and Singularity Methods for Linearized Viscous Flow (Cambridge Texts in Applied Mathematics)*, Cambridge University Press, 1992.
- [8] J. T. Chen, K. H. Chen, and C.T. Chen, *Adaptive boundary element method of timeharmonic exterior acoustics in two dimensions*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **191** (2002), 3331–3345.
- [9] R. Courant, *Differential and integral calculus*, Differential and Integral Calculus, Wiley, 2011.

- [10] D.A.Dunavant, *High degree efficient symmetrical gaussian quadrature rules for the triangle*, International Journal of Numerical Methods in Engineering **21** (1985), 1129–1148.
- [11] Calin Druma, *Formulation of steady-state and transient potential problems using boundary elements*, College of Engineering and technology Ohio University, 1999.
- [12] M. El-Gebeily, W. M. Elleithy, and H. J. Al-Gahtani, *Convergence of the domain decomposition finite element–boundary element coupling methods*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **191** (2002), 4851–4867.
- [13] K. Erhart, E. Divo, and A. J. Kassab, *A parallel domain decomposition boundary element method approach for the solution of large-scale transient heat conduction problems*, Engineering Analysis with Boundary Elements **30** (2006), 553–563.
- [14] F.Bowman, *Introduction to bessel functions*, Dover New York, 1958.
- [15] B. Gamez, D. Ojeda, E. Divo, A. Kassab, and M. Cerrolaza, *Parallelized iterative domain decomposition boundary element method for thermoelasticity in piecewise non-homogeneous media*, Engineering Analysis with Boundary Elements **32** (2008), 1061–1073.
- [16] Wei Gao, Xiao, Wang, and Jing, *Interface integral bem for solving multi-medium heat conduction problem*, Eng. Anal. Bound. Elem **33** (2009), 239–546.
- [17] X. Gao, L. Guo, and Ch. Zhang, *Three-step multi-domain bem solver for nonhomogeneous material problems*, Engineering Analysis with Boundary Elements **31** (2007), 965–973.
- [18] Walton .C Gibson, *The Method of Moments in Electromagnetics*, Chapman and Hall/CRC, November 2007.
- [19] R. B. Griffin, J. F. Yan, S. N. R. Pakalapati, T. V. nguyen, and R. E. White, *Mathematical modeling of cathodic protection using the boundary element method white a nonlinear polarization curve*, J. Electroshem. Soc **139** (1992), no. 7, 1932–1936.

- [20] W.S. Hall, *The boundary element method*, Springer, 1994.
- [21] M. S. Ingber and J. A. Tanskin, *A parallel domain decomposition bem for diffusion problems with surface reactions*, Engineering Analysis with Boundary Elements **29** (2005), 878–885.
- [22] Mohan K. Kadalbajoo and K. Arumugam, *Boundary element method for elliptic differential equations with a small parameter*, (1995), 151–163.
- [23] N. Kamiya, H. Iwase, and E. Kita, *Parallel implementation of boundary element method with domain decomposition*, Engineering Analysis with Boundary Elements **18** (1996), 209–216.
- [24] Kamiya.N and Andoh.E, *Helmholtz eigenvalue analysis by boundary element method*, jounal of sound and vibration (1991), 279–287.
- [25] A. Kassab, E. Divo, J. Heidmann, E. Steinhorsson, and F. Rodriguez, *Bem/fvm conjugate heat transfer analysis of a tree-dimensional film cooled turbine blade*, International Journal Numerical Methods Heat and Fluid Flow **13** (2003), 581–610.
- [26] K.Fabio and A. Frank Schultz, *The boundary element method in acoustics - an internship report*, Technische Universitat Berlin, 2011.
- [27] Y. Khalighi and D. J. Bodony, *Improved near-wall accuracy for solutions of the helmholtz equation using the boundary element method*, Center for Turbulence Research Annual Research Briefs (2006), 313–326.
- [28] S. Larsson and V. Thomee, *Partial differential equations with numerical methods*, Texts in Applied Mathematics, Springer, 2008.
- [29] Y. Liu, *Fast multipole boundary element method: Theory and applications in engineering*, Cambridge University Press, 2009.
- [30] L. Morino, L. T. Chen, and E. O. Suciu, *Steady and oscillatory subsonic and supersonic aerodynamics around complex configurations*, AIAA Journal **13** (1975), 1932–1936.
- [31] B.J. Morse, M.S. Moss, R.W. Jones, and Environmental Research Laboratories (U.S.). Weather Modification Program Office, *An analytic study of mesh*

refinement applied to the wave equation, NOAA technical memorandum ERL WMPO, U.S. Dept. of Commerce, National Oceanic and Atmospheric Administration, Environmental Research Laboratories, Weather Modification Program Office, 1973.

- [32] Moses.P, *Numerical solution of helmholtz equation by boundary elements method*, Czech Technical University, Faculty of Mechanical Engineering, Department of Mathematics.
- [33] Y. Ochiai and Y. Kitayama, *Three-dimensional unsteady heat conduction analysis by triple-reciprocity boundary element method*, Engineering Analysis with Boundary Elements **33** (2009), 789–795.
- [34] Y. Ochiai and T. Sekiya, *Steady heat conduction analysis by improved multiple- reciprocity boundary element method*, Engineering Analysis with Boundary Elements.
- [35] M. E. Orazem, J. M. Esteban, K. J. Kennelley, and R. M. Degerstedt, *Mathematical models for cathodic protection of an underground pipeline whit coating holidays: Part 1 – theoretical development*, **53** (1997), no. 4, 264–272.
- [36] P.Hunter and P.Pullan, *Fem/bem notes*, The University of Auckland New Zealand, 2001.
- [37] A. Sutradhar and G. H. Paulino, *The simple boundary element method for transient heat conduction in functionally graded materials*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **193** (2004), 4511–4539.
- [38] A. Sutradhar, G. H. Paulino, and L.J. Gray, *Transient heat conduction in homogeneous and non-homogeneous materials by the laplace transform galerkin boundary element method*, Engineering Analysis with Boundary Elements **26** (2002), 119–132.
- [39] T. Tu-Bui and V. Popov, *Domain decomposition boundary element method with overlapping sub-domains*, Engineering Analysis with Boundary Elements **33** (2009), 456–466.
- [40] L.C. Wrobel, *The boundary element method, applications in thermo-fluids and acoustics*, The Boundary Element Method, John Wiley & Sons, 2002.

- [41] Yukio.K, Yonghao.S, and Zaheed.M, *Regular boundary integral formulation for the analysis of open dielectric / optical waveguides*, Memoirs of the Faculty of Engineering, **30** (1995), 47–62.
- [42] Z. Zhang, N. Vlahopoulos, and S.T. Raveendra, *Formulation of a numerical process for acoustic impedance sensitivity analysis based on the indirect boundary element method*, Engineering Analysis with Boundary Elements **27** (2003), 671–681.
- [43] D. Zill and W. Wright, *Differential equations with boundary-value problems*, TTextbooks Available with Cengage Youbook, Cengage Learning, 2012.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Constant Element	المان ثابت
Linear Element	المان خطی
Quadratic Element	المان درجه دوم
Line Integral	انتگرال خطی
Improper Integral	انتگرال ناسره
Bessel	بسل
Elliptic	بیضوی
Fully	پر
Hankel Function	تابع هنکل
Approximation	تقریب
Ordered	مرتب
Substitution	جایگزین کردن، جایگذاری
Partial	جزیی
Source	چشمه
Inner	داخلی
Arbitrary	دلخواه، اختیاری
Dirichlet	دیریکله
Differential	دیفرانسیل
Robin	رابین
Angle	زاویه
Parabolic	سهموی
Radial	شعاعی
Weakly	ضعیف
Strongly	قوی
Spherical	کروی

Small	کوچک
Cauchy	کوشی
Node	گره
Discretization	گسسته‌سازی
Matrrix	ماتریس
Origin	مبدا
Variable	متغیر
Positive	مثبت
Unknown	مجهول، ناشناخته
Equivalent	معادل، هم‌ارز
Wave Equation	معادله موج
Helmholtz equation	معادله هلمهولتز
Value	مقدار
Location	موقعیت، مکان، محل
Nonsmooth	ناهموار
Neumann	نویمن
Hyperbolic	هذلولوی
Homogeneous	همگن
Unique	یکتا

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Around	اطراف
Boundary	مرز
Boundary Integral	معادله انتگرال
Circle	دایره
Coefficient	ضریب
Collocation Point	نقطه هم‌محل
Conditions	شرایط
Consider	در نظر گرفتن
Constant	ثابت
Dimension	بعد
Diagonal	قطری
Conditions	شرایط
Consider	در نظر گرفتن
Dirac-Delta Function	تابع دلتای دیراک
Disk	گوی، دیسک
Distance	فاصله
Divergence	دیورژانس
Domain	دامنه
Element	المان
Exact	واقعی
Expression	عبارت، جمله
Finite	متناهی
Fundamental Solution	جواب اساسی
Geometry	هندسه
Green Function	تابع گرین

Influence	تاثیر
Integration	انتگرال‌گیری
Laplace Equation	معادله لاپلاس
Length	طول
Method	روش
Normal	نرمال، قایم
Numerical	عددی
Numerical Integration	انتگرال‌گیری عددی
Point	نقطه
Polar Coordinate	مختصات قطبی
Position	موقعیت، مکان
Property	خاصیت، ویژگی
Radius	شعاع
Result	نتیجه
Scheme	روش
Singular	تکین
Smooth	هموار
Symmetric	متقارن
Theorem	قضیه
Vector	بردار
Zero	صفر

نمایه

ا	گ
المان، ۲۷	گره، ۲۷
انتگرال تکین، ۲۵	گسسته‌سازی، ۲۷، ۳۴، ۵۶
انتگرال تکین ضعیف، ۲۶	م
انتگرال تکین قوی، ۲۶	معادله انتگرال مرزی، ۱۳، ۲۲، ۵۵، ۵۷
انتگرال ناسره، ۲۶	معادله بسل، ۴۸
ت	معادله لاپلاس، ۱۱، ۱۴، ۳۳
تابع دلتای دیراک، ۱۴، ۱۵، ۵۰	معادله هلمهولتز، ۴۵، ۴۷
تابع هنکل، ۴۸	
ج	
جواب اساسی، ۱۴، ۱۸، ۵۵	
خ	
خطای نسبی، ۳۸	
ر	
روش انتگرال‌گیری گوسی، ۳۳	
ش	
شار، ۱۳، ۵۵	
ض	
ضرایب گوسی، ۳۳	
ق	
قضیه دیورژانس، ۱۱، ۵۴	
قضیه گرین، ۱۲، ۱۳	
قضیه مقدار میانگین، ۹	

Aabstract

Numerical approximation for solving a differential equation has a wide range of application in engineering and mathematics. The boundary element method is a powerful tool for numerical approximation for a differential equation. In this thesis we want to approximate the Helmholtz equation by the boundary element method. This thesis organized in four sections: in the first chapter, we express disadvantages and advantages and history of the boundary element method. In the second chapter, we introduce some preliminaries and we describe the structure of the boundary element method. In the third chapter, we applied boundary element method for Laplace equation which is a special case of Helmholtz equation. Finally, in the fourth chapter we have approximated the boundary element solution of Helmholtz equation.

Keywords: Laplace equation, Helmholtz equation, boundary integral equation, discretization, boundary element method



Shahrood University
Faculty Of Mathematical Sciences

Dissertation Submitted in Partial
Fulfillment of The Requirements For The
Degree of Master of Science in
Applied Mathematics

Boundary Element Method For The Helmholtz Equation

Supervisor

Dr.Ali Mesfurosh

Advisor

Dr.Hojjat Ahsani Tehrani

by

zohreh mehraban

2014