



دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی کاربردی

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی کاربردی، گرایش گراف و ترکیبیات

عنوان

بررسی گراف کلی روی گراف‌های میشلسکی، گراف‌های مرکزی و اعداد پوششی

استادان راهنما

دکتر نادر جعفری راد و سید فرخ فروهنده

دانشجو

بهاره وقاری مطلق

شهریور ۱۳۹۳

تقدیم بہ ہر امان، ہمیشگی ام،

ہمسر عزیزم و پدر و مادر مہربانم

خدا را سپاسگزارم
که هموز راه‌هایی برای پی‌سی‌موند
و پله‌هایی برای صعود کردن برایم باقی است...

مشکر و سپاس ویژه از استاد دانشمند و پرمیله ام جناب آقای دکتر نادر جعفری راد که از محضر پر فیض
تدریسان، بهره‌بردم.
همچنین واجب می‌دانم از دیگر اساتید ارجمند، آقایان سید فرخ فروزنده، دکتر شیم علیشاهی و
دکتر صادق رحیمی شعر باف، که همواره از راهنماییشان استفاده نمودم، قدردانی نمایم.

بهاره وقاری مطلق
شهریور ۱۳۹۳

تعمدنامه

اینجانب بهاره وقاری مطلق دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی دانشکده علوم ریاضی دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان بررسی گراف کلی روی گراف‌های میشلسکی، گراف‌های مرکزی و اعداد پوششی، تحت راهنمایی دکتر نادر جعفری راد متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تاکنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه شاهرود “ یا “ Shahrood University “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

بهاره وقاری مطلق

شهریور ۱۳۹۳

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در این پایان‌نامه رنگ آمیزی، تعداد خوشه‌ها و اعداد استقلال و پوشش یالی را در گراف‌های کلی روی گراف‌های میشلسکی و مرکزی بررسی می‌کنیم. برای این منظور ابتدا عدد رنگ ناپذیری گراف مرکزی، میانی و کلی گراف ستاره و عدد رنگی متعادل گراف مرکزی گراف ستاره، گراف دوبخشی کامل و گراف کامل و هم‌چنین گراف کلی مسیر و دور را محاسبه می‌کنیم. سپس با توجه به اهمیت تعداد خوشه‌ها در شبکه‌های ارتباطی، تعداد مثلث‌های گراف کلی، میانی، مرکزی، میشلسکی و برخی ترکیب‌های آن‌ها برای یک گراف را می‌یابیم و کران‌های بالایی برای تعداد مثلث‌های گراف کلی، گراف میشلسکی مرتبه n و گراف کلی گراف میشلسکی مرتبه n یک گراف ارائه می‌دهیم. در ادامه اعداد استقلال و پوشش یالی گراف کلی گراف میشلسکی گراف ستاره و برخی از درخت‌ها را بر حسب اعداد استقلال و پوشش راسی و یالی گراف و میشلسکی آن به دست می‌آوریم و بعلاوه اعداد استقلال و پوشش راسی و یالی گراف مرکزی، میانی و کلی گراف هزارپا را محاسبه می‌کنیم. در انتها نتایج جدید خود را در رنگ ناپذیری ارائه می‌دهیم و عدد رنگ ناپذیری گراف مرکزی مسیر، دور، گراف دوبخشی و گراف هزارپا را می‌یابیم. کلمات کلیدی: گراف کلی، گراف مرکزی، گراف میانی، گراف میشلسکی، عدد استقلال، عدد پوششی، عدد استقلال یالی، عدد پوشش یالی، عدد رنگی، عدد رنگ ناپذیری، عدد رنگی متعادل.

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

1. S.F. Forouhandeh, N. Jafari Rad, B. Vaqari Motlagh, H.P. Patil and R. Pandiya Raj, *A note on total graphs*, *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, accepted.

فهرست مطالب

خ	لیست تصاویر	
۱	مقدمات و تعاریف	۱
۱	۱.۱ تعاریف و قضایا	۱
۱۳	۲ رنگ آمیزی روی برخی از گراف‌های مرکزی، میانی و کلی	۱۳
۱۳	۱.۲ مقدمه و تعاریف اولیه	۱۳
۱۴	۲.۲ رنگ ناپذیری گراف مرکزی، میانی و کلی گراف ستاره	۱۴
۱۸	۳.۲ رنگ آمیزی متعادل گراف مرکزی گراف ستاره، گراف دوبخشی کامل و گراف کامل	۱۸
۲۱	۴.۲ رنگ آمیزی متعادل گراف کلی مسیر و دور	۲۱
۲۵	۳ تعداد مثلث‌ها، اعداد پوششی و استقلال روی گراف‌های کلی و میشلسکی	۲۵
۲۵	۱.۳ مقدمه	۲۵
	۲.۳ بررسی تعداد مثلث‌های گراف کلی، مرکزی و میانی روی یک گراف و گراف میشلسکی	
۲۶	آن	۲۶
۳۹	۳.۳ اعداد پوشش و رنگ ناپذیری خانواده ویژه‌ای از گراف‌ها	۳۹
۴۲	۴.۳ کران‌های بالا	۴۲
۴۷	۴ نتایج جدیدی برای اعداد استقلال، پوششی و رنگ ناپذیری	۴۷
۴۷	۱.۴ اعداد استقلال و پوشش راسی و یالی گراف کلی، مرکزی و میانی هزارپا	۴۷
۵۱	۲.۴ اعداد استقلال و پوشش یالی گراف کلی گراف میشلسکی برخی از درخت‌ها	۵۱
۷۲	۳.۴ بررسی عدد رنگ ناپذیری برخی از گراف‌ها	۷۲
۸۳	آ جدول نمادها	۸۳
۸۵	مراجع	۸۵
۸۶	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی	۸۶

لیست تصاویر

۱	گراف G	۱.۱
۲	گراف G	۲.۱
۲	(الف) گراف متناهی و (ب) گراف نامتناهی	۳.۱
۳	گراف تهی	۴.۱
۳	گراف‌های ساده	۵.۱
۳	(الف) گراف همبند و (ب) گراف ناهمبند دو مولفه‌ای	۶.۱
۴	(الف) گراف دوبخشی و (ب) گراف دوبخشی کامل	۷.۱
۴	گراف ستاره	۸.۱
۵	(الف) مسیر با طول ۳ و (ب) دور فرد	۹.۱
۵	درخت	۱۰.۱
۶	گراف مثلث آزاد	۱۱.۱
۶	گراف G	۱۲.۱
۷	گراف G	۱۳.۱
۷	(الف) گراف G و (ب) گراف \bar{G}	۱۴.۱
۸	نمونه‌هایی از گراف‌های جهت‌دار	۱۵.۱
۸	(الف) گراف G و (ب) زیرگراف القایی $G - \{v_1, v_2\}$	۱۶.۱
۹	حاصل ضرب دکارتی K_2 در K_2	۱۷.۱
۹	(الف) گراف G و (ب) گراف میشلسکی G	۱۸.۱
۱۰	زیرتقسیم یال e	۱۹.۱
	(الف) پوشش راسی، (ب) پوشش راسی مینیمم، (ج) پوشش یالی و (د) پوشش	۲۰.۱
۱۰	یالی مینیمم	
	(الف) مجموعه مستقل راسی، (ب) مجموعه مستقل راسی ماکزیمم، (ج) مجموعه	۲۱.۱
۱۱	مستقل یالی و (د) مجموعه مستقل یالی ماکزیمم	
۱۴	(الف) گراف G و (ب) گراف مرکزی G	۱.۲
۱۴	(الف) گراف G و (ب) گراف میانی G	۲.۲
۱۵	(الف) گراف G و (ب) گراف کلی G	۳.۲

۱۶	(الف) گراف ستاره $K_{1,n}$ و (ب) گراف مرکزی گراف ستاره $K_{1,n}$	۴.۲
۱۶	(الف) گراف ستاره $K_{1,n}$ و (ب) گراف میانی گراف ستاره $K_{1,n}$	۵.۲
۱۷	(الف) گراف ستاره $K_{1,n}$ و (ب) گراف کلی گراف ستاره $K_{1,n}$	۶.۲
۳۰	(الف) گراف K_2 و (ب) گراف کلی K_2	۱.۳
۴۰	(الف) گراف ستاره $K_{1,n}$ و (ب) گراف میشلسکی $K_{1,n}$	۲.۳
۴۰	گراف کلی گراف میشلسکی $K_{1,n}$	۳.۳
۴۲	(الف) گراف کلی $K_{1,n}$ ، (ب) گراف میانی $K_{1,n}$ و (ج) گراف مرکزی $K_{1,n}$	۴.۳
۴۸	گراف هزارپا C	۱.۴
۴۸	گراف کلی گراف هزارپا C	۲.۴
۴۹	گراف کلی K_{1,n_1}	۳.۴
۵۰	گراف میانی گراف هزارپا C	۴.۴
۵۱	گراف مرکزی گراف هزارپا C	۵.۴
۵۳	گراف هزارپا C	۶.۴
۵۳	گراف میشلسکی گراف هزارپا C	۷.۴
۵۵	درخت T	۸.۴
۵۷	گراف میشلسکی درخت T	۹.۴
۵۸	درخت T	۱۰.۴
۶۰	گراف میشلسکی درخت T	۱۱.۴
۶۲	درخت T	۱۲.۴
۶۳	گراف میشلسکی درخت T	۱۳.۴
۶۴	درخت T	۱۴.۴
۶۶	گراف میشلسکی درخت T	۱۵.۴
۶۸	درخت T	۱۶.۴
۷۰	گراف میشلسکی درخت T	۱۷.۴
۷۲	گراف مرکزی P_n	۱۸.۴
۷۳	رنگ آمیزی گراف $C(P_n)$ برای $۲ \leq n \leq ۵$	۱۹.۴
۷۴	رنگ آمیزی گراف $C(C_4)$	۲۰.۴
۷۵	رنگ آمیزی گراف های $C(C_3)$ و $C(C_5)$	۲۱.۴
۷۶	رنگ آمیزی گراف $C(K_{1,1})$	۲۲.۴
۷۷	گراف مرکزی $K_{m,n}$	۲۳.۴
۷۸	گراف مرکزی K_{1,n_1}	۲۴.۴
۷۹	گراف مرکزی گراف هزارپا C	۲۵.۴
۷۹	گراف های خاص	۲۶.۴

۸۲	گراف K_{1,n_1} ۲۷.۴
۸۲	گراف هزارپا C ۲۸.۴

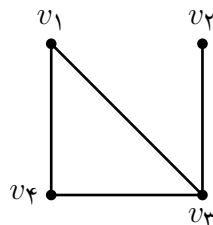
فصل ۱

مقدمات و تعاریف

در این فصل برخی از تعاریف و مفاهیم اولیه و همچنین قضایایی که در فصل‌های بعد به آن‌ها نیاز داریم را بیان می‌کنیم. تعاریف و قضایای این فصل برگرفته از مراجع [۲]، [۵] و [۱۱] می‌باشند.

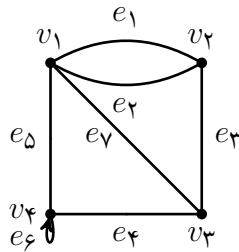
۱.۱ تعاریف و قضایا

تعریف ۱.۱.۱ (گراف). گراف G ، یک سه‌تایی مرتب $(V(G), E(G), \psi(G))$ ، شامل مجموعه غیر تهی $V(G)$ از راس‌ها، مجموعه $E(G)$ از یال‌ها و تابع وقوع $\psi(G)$ که به هر یال G یک زوج نامرتب از راس‌های G (که لزوماً متمایز نیستند) را نسبت می‌دهد. اگر e یک یال u و v دو راس از G باشند، به طوری که $\psi_G(e) = \{u, v\}$ ، در این صورت می‌گویند e را به u و v وصل می‌کند و راس‌های u و v ، دو سر یال e نامیده می‌شوند. معمولاً گراف $G = (V(G), E(G), \psi(G))$ را به طور خلاصه با $(V(G), E(G))$ یا $G = (V, E)$ نشان می‌دهند. تعداد یال‌های گراف G با $|E(G)|$ و تعداد راس‌های آن با $|V(G)|$ نشان داده می‌شود. به عنوان مثال، در شکل ۱.۱، مجموعه رئوس $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ و مجموعه یال‌های گراف G می‌باشند $\{\{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}\}$ اگر $\{u, v\}$ یالی از گراف دلخواه G باشد، به طور خلاصه آن را با uv نشان می‌دهند.



شکل ۱.۱: گراف G

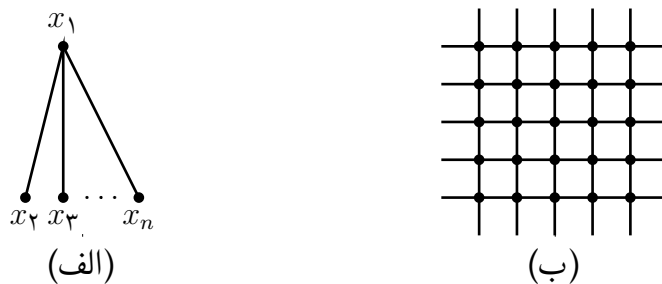
تعریف ۲.۱.۱ (طوقه و پیوند). یال با دو سر یکسان، طوقه^۱ و با دو سر مجزا، پیوند^۲ نامیده می‌شود. دو یا چند پیوند با دو سر یکسان، یال‌های چندگانه (موازی) را تشکیل می‌دهند. در شکل ۲.۱، e_6 طوقه و $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_7$ پیوند هستند و e_1 و e_2 تشکیل یال‌های چندگانه می‌دهند.



شکل ۲.۱: گراف G

تعریف ۳.۱.۱ (مرتبه). مرتبه گراف G تعداد رئوس گراف G می‌باشد و با $n(G)$ یا n نشان داده می‌شود. اگر G گرافی از مرتبه p بوده و دارای q یال باشد، آن‌گاه G را یک (p, q) -گراف نامیم. در شکل ۱.۱، G یک $(4, 4)$ -گراف است.

تعریف ۴.۱.۱ (گراف متناهی). گرافی است که مجموعه راس‌ها و مجموعه یال‌های آن متناهی باشد. در غیر این صورت گراف نامتناهی می‌باشد (شکل ۳.۱).



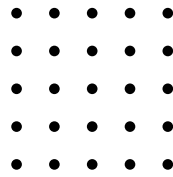
شکل ۳.۱: (الف) گراف متناهی و (ب) گراف نامتناهی

تعریف ۵.۱.۱ (گراف تهی). گرافی که مجموعه یال‌های آن تهی باشد، گراف تهی نامیده می‌شود. به عبارت دیگر، گرافی که در آن هیچ دو راسی مجاور نباشند (شکل ۴.۱).

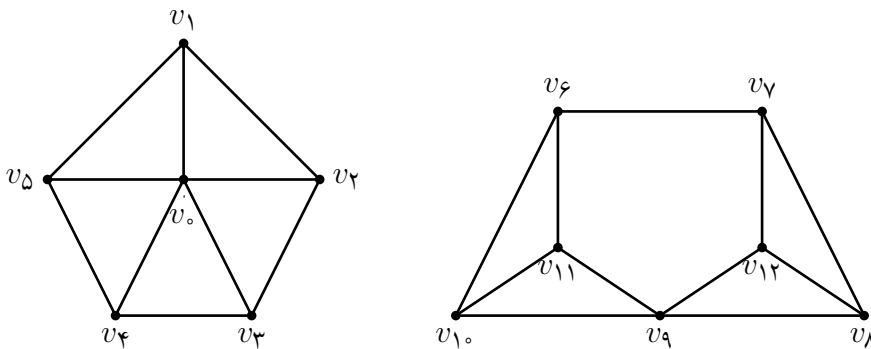
تعریف ۶.۱.۱ (گراف ساده). گراف ساده گرافی است که فاقد طوقه و یال چندگانه باشد (شکل ۵.۱).

^۱Loop

^۲Link

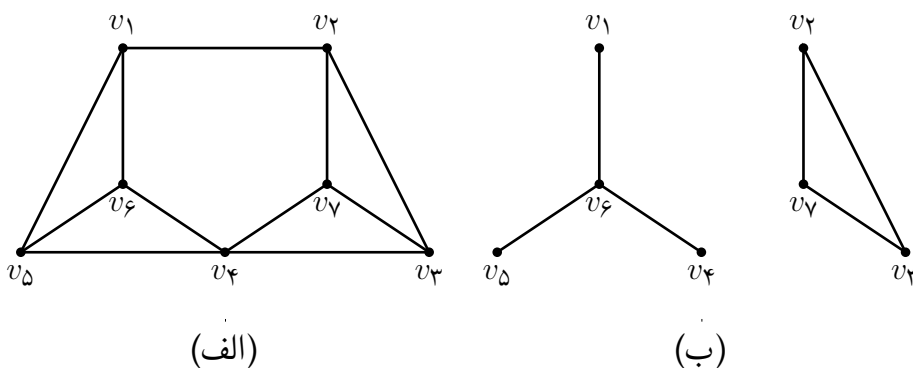


شکل ۴.۱: گراف تهی



شکل ۵.۱: گراف‌های ساده

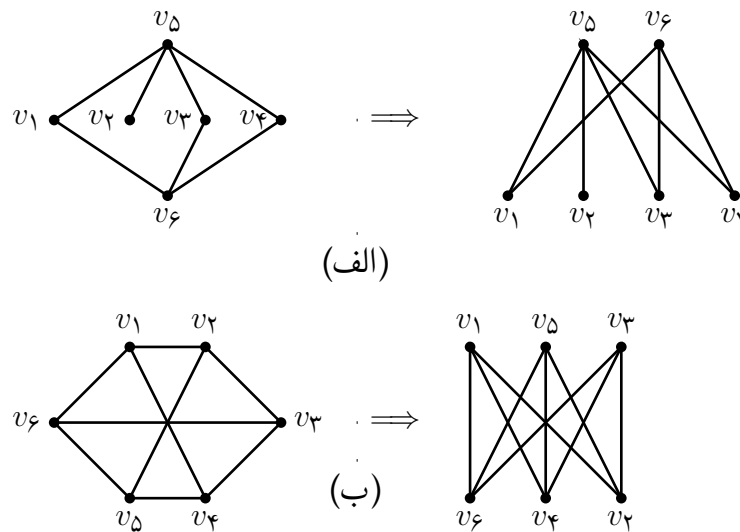
تعریف ۷.۱.۱ (گراف همبند). گراف $G = (V, E)$ همبند است، اگر برای هر افزاز مجموعه رئوس V به دو زیرمجموعه غیر تهی X و Y ، یالی با یک سر در X و یک سر در Y موجود باشد و در غیر این صورت گراف G ناهمبند است (شکل ۶.۱). بدیهی است که هر گراف ناهمبند متناهی را می‌توان به صورت اجتماع تعداد متناهی از گراف‌های همبند با مجموعه راس‌های مجزا در نظر گرفت. در این صورت هر یک از این گراف‌های همبند را یک مولفه گراف G می‌نامند.



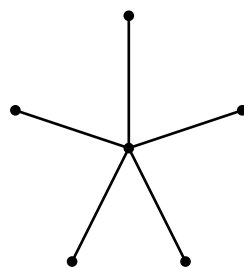
شکل ۶.۱: (الف) گراف همبند و (ب) گراف ناهمبند دو مولفه‌ای

تعریف ۸.۱.۱ (گراف کامل). گراف ساده‌ای که هر دو راس آن با هم مجاور باشند، گراف کامل نامیده می‌شود. گراف کامل n راسی با K_n نمایش داده می‌شود (شکل ۱۳.۱).

تعریف ۹.۱.۱ (گراف دوبخشی). فرض کنید مجموعه رئوس گراف G را بتوان به دو زیرمجموعه غیر تهی X و Y افراز کرد، به طوری که یک سر از هر یال در X و سر دیگر آن در Y باشد. در این صورت G گراف دوبخشی با بخش‌های X و Y نامیده شده و با $G[X, Y]$ نشان داده می‌شود. اگر $G[X, Y]$ ساده بوده و هر راس از X با هر راس از Y مجاور باشد و $|X| = m, |Y| = n$ یا $|X| = n, |Y| = m$ ، گراف دوبخشی کامل نامیده شده و با $K_{m,n}$ یا $K_{n,m}$ نمایش داده می‌شود (شکل ۷.۱). گراف $G[X, Y]$ کامل که $|X| = 1$ یا $|Y| = 1$ است، گراف ستاره نامیده و با $K_{1,n}$ یا $K_{1,m}$ نشان داده می‌شود (شکل ۸.۱). اغلب، بخشی از ستاره را که اندازه آن برابر یک است، مرکز ستاره می‌نامند.



شکل ۷.۱: (الف) گراف دوبخشی و (ب) گراف دوبخشی کامل



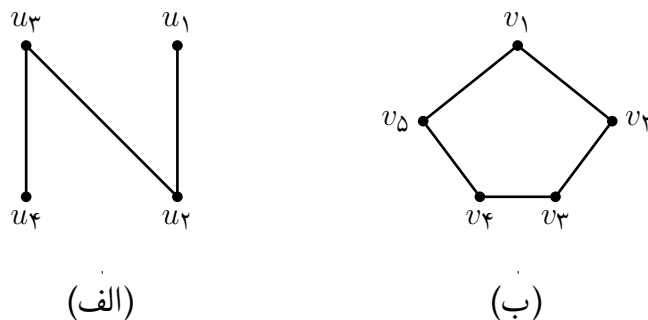
شکل ۸.۱: گراف ستاره

تعریف ۱۰.۱.۱ (گراف k -بخشی). گرافی که بتوان مجموعه رئوس آن را به k زیرمجموعه غیر تهی افراز کرد، به طوری که هیچ یالی دو سرش در یک زیرمجموعه نباشد، گراف k -بخشی نامیده می‌شود.

تعریف ۱۱.۱.۱ (گراف k -بخشی کامل). گراف k -بخشی که هر دو راس از بخش‌های مختلف آن با هم مجاور باشند، گراف k -بخشی کامل نامیده می‌شود.

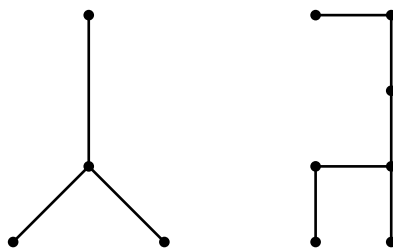
تعریف ۱۲.۱.۱ (مسیر). گشت، دنباله‌ای از راس‌ها و یال‌ها است که به دنبال یکدیگر می‌آیند. گشتی که در آن هیچ راسی بیش از یک بار ظاهر نشده باشد، مسیر نامیده شده و تعداد یال‌های مسیر، طول مسیر نامیده می‌شود (شکل ۹.۱ قسمت (الف)). مسیر n راسی با P_n نمایش داده می‌شود.

تعریف ۱۳.۱.۱ (دور). دور گرافی است که از یک مسیر با مجاور کردن دو راس انتهایی به دست می‌آید. دور n راسی با C_n نمایش داده می‌شود و تعداد یال‌های دور، طول دور نامیده می‌شود. دور با طول فرد، دور فرد و با طول زوج، دور زوج نامیده می‌شود (شکل ۹.۱ قسمت (ب)). اغلب، C_3 مثلث، C_4 چهار ضلعی، C_5 پنج ضلعی و به همین ترتیب، C_n ، n ضلعی نامیده می‌شود.



شکل ۹.۱: (الف) مسیر با طول ۳ و (ب) دور فرد

تعریف ۱۴.۱.۱ (درخت). گراف همبند و فاقد دور، درخت نامیده می‌شود (شکل ۱۰.۱).

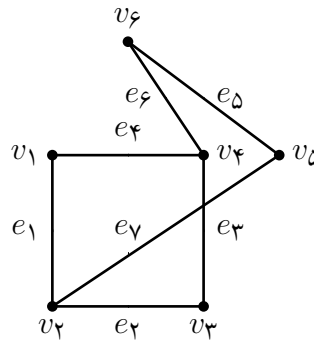


شکل ۱۰.۱: درخت

تعریف ۱۵.۱.۱ (گراف مثلث آزاد). گرافی که فاقد مثلث است را گراف مثلث آزاد گویند (شکل ۱۱.۱).

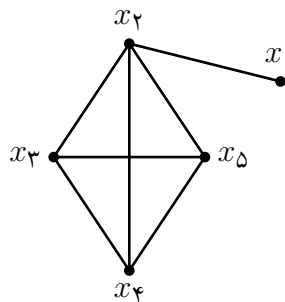
تعریف ۱۶.۱.۱ (درجه راس). تعداد یال‌هایی که از راس v می‌گذرند را درجه آن راس گویند و با $d_G(v)$ یا $deg_G(v)$ نشان می‌دهند. مینیمم و ماکزیمم درجه رئوس گراف G ، به ترتیب، با $\delta(G)$ و $\Delta(G)$ نشان داده می‌شوند. در شکل ۱۲.۱، $\delta(G) = ۱$ و $\Delta(G) = ۴$ می‌باشد.

تعریف ۱۷.۱.۱ (راس آویزان). راس آویزان (برگ) راسی از درجه یک می‌باشد. در شکل ۱۲.۱، x_1 یک راس آویزان است.



شکل ۱۱.۱: گراف مثلث آزاد

تعریف ۱۸.۱.۱ (گراف هزارپا). [۶] هزارپا^۳ درختی است که با حذف رئوس آویزان به یک مسیر تبدیل می‌شود.



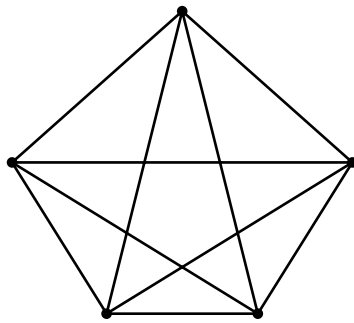
شکل ۱۲.۱: گراف G

تعریف ۱۹.۱.۱ (گراف منتظم). گراف G را منتظم نامند، هرگاه درجه تمام رئوس آن با هم برابر باشند. اگر درجه هر راس G ، k باشد، آن‌گاه گراف G را k -منتظم می‌نامند. گراف تهی گرافی منتظم از درجه صفر و گراف کامل K_n گرافی منتظم از درجه $n - 1$ است. در شکل ۱۳.۱، گراف G ، 4 -منتظم است.

تعریف ۲۰.۱.۱ (خوشه). یک خوشه از یک گراف، مجموعه‌ای از رئوس دوه‌دو مجاور آن گراف است. اندازه بزرگ‌ترین خوشه گراف G ، عدد خوشه‌ای G نامیده شده و با $\omega(G)$ نشان داده می‌شود. گراف نمایش داده شده در شکل ۱۳.۱، خود یک خوشه است و $\omega(G) = 5$ می‌باشد.

تعریف ۲۱.۱.۱ (ماتریس مجاورت و وقوع). فرض کنید $G = (V, E)$ گرافی ساده با مجموعه رئوس $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ و مجموعه یال‌های $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ باشد. ماتریس مجاورت گراف G ، ماتریس $n \times n$ ، $A(G) := (a_{i,j})$ است که تعداد یال‌های بین v_i و v_j می‌باشد. ماتریس وقوع

^۳caterpillar

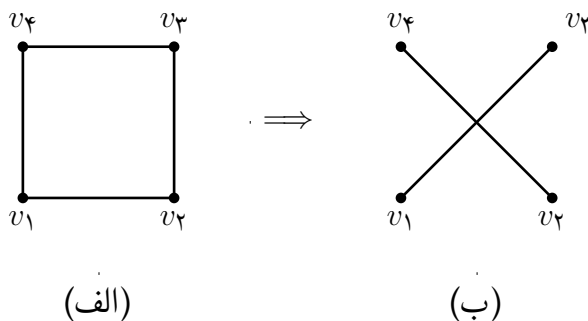


شکل ۱۳.۱: گراف G

گراف n راسی و m یالی G ، که با $M(G) := (m_{i,j})$ نشان داده می‌شود، ماتریسی $n \times m$ است که

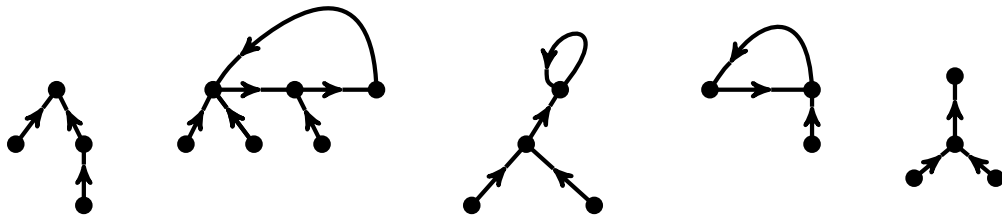
$$m_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{روی } e_j \text{ باشد } v_i \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

تعریف ۲۲.۱.۱ (مکمل یک گراف ساده). فرض کنید G گرافی ساده با مجموعه راس‌های $V(G)$ باشد. مکمل G ، که با نماد \bar{G} نشان داده می‌شود، گراف ساده‌ای است که مجموعه راس‌های آن $V(G)$ می‌باشد و در آن هر دو راسی که در G مجاور نیستند، مجاور می‌باشند (شکل ۱۴.۱). در نتیجه اگر G ، n راس داشته باشد، آن‌گاه \bar{G} را می‌توان با حذف تمام یال‌های G از K_n به دست آورد. توجه کنید که مکمل یک گراف کامل، گراف تهی است و مکمل یک گراف دوبخشی کامل عبارت است از اجتماع دو گراف کامل.



شکل ۱۴.۱: (الف) گراف G و (ب) گراف \bar{G}

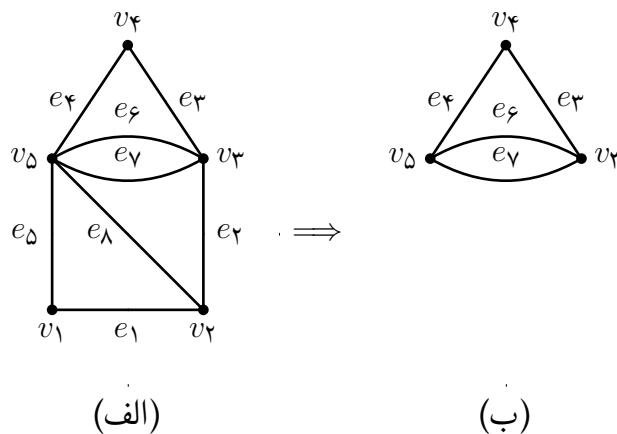
تعریف ۲۳.۱.۱ (گراف جهت‌دار). گراف جهت‌دار G ، یک سه‌تایی، شامل مجموعه غیر تهی $V(G)$ از رئوس، مجموعه $E(G)$ از یال‌ها و تابعی که به هر یال یک زوج مرتب از رئوس را نسبت می‌دهد، می‌باشد. راس ابتدایی زوج مرتب دم یال و راس دوم سر یال نامیده می‌شود و هر دو با هم نقاط انتهایی یال هستند. در گراف جهت‌دار، طوقه یالی با دو نقطه انتهایی یکسان است و یال‌های چندگانه جفت مرتب‌های یکسان دارند (شکل ۱۵.۱). گرافی که جهت‌دار نباشد، گراف غیر جهت‌دار نامیده می‌شود.



شکل ۱۵.۱: نمونه‌هایی از گراف‌های جهت‌دار

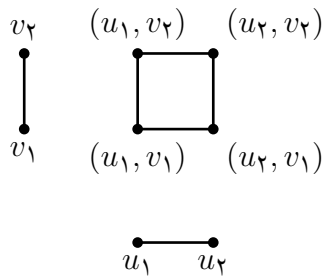
تعریف ۲۴.۱.۱ (زیرگراف). گراف H را زیرگراف G گویند و با $H \subseteq G$ نشان می‌دهند، هرگاه $V(H) \subseteq V(G)$ ، $E(H) \subseteq E(G)$ و ψ_H از محدود کردن ψ_G به $E(H)$ حاصل شده باشد. اگر $H \subseteq G$ و $H \neq G$ را زیرگراف سره G گفته و با نماد $H \subset G$ نشان می‌دهند.

زیرگراف القایی G ، زیرگرافی است که فقط از حذف رئوس حاصل می‌شود. اگر X مجموعه رئوس حذف شده باشد، زیرگراف حاصل با $G - X$ نشان داده می‌شود. هم‌چنین اگر $Y := V \setminus X$ مجموعه رئوس باقی‌مانده باشد، زیرگراف القا شده توسط Y با $G[Y]$ یا $\langle Y \rangle$ نشان داده می‌شود؛ که Y مجموعه رئوس زیرگراف القایی است و مجموعه یال‌های آن، یال‌هایی از G است که دو سر آن‌ها در Y باشد (شکل ۱۶.۱).



شکل ۱۶.۱: (الف) گراف G و (ب) زیرگراف القایی $G - \{v_1, v_2\}$

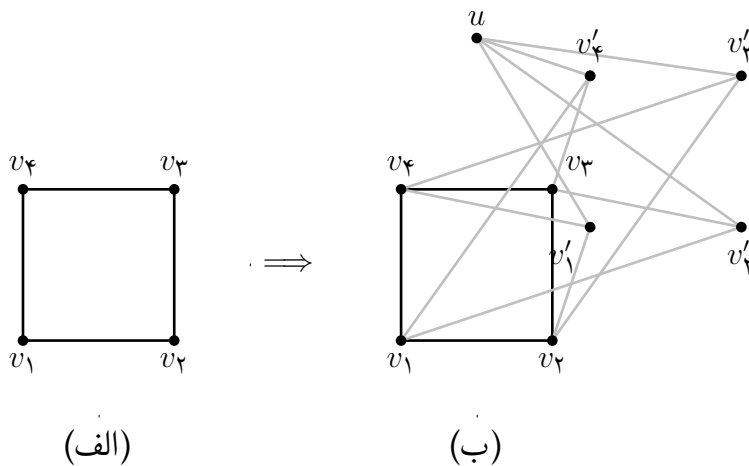
تعریف ۲۵.۱.۱ (حاصل ضرب دکارتی گراف‌ها). [۸] فرض کنید $\{G_1, G_2, \dots, G_n\}$ مجموعه‌ای از گراف‌های ساده باشد. حاصل ضرب دکارتی آن‌ها، که با $\square_{i=1}^n G_i = G_1 \square G_2 \square \dots \square G_n$ نمایش داده می‌شود، گرافی با مجموعه رئوس $V(G_1) \times V(G_2) \times \dots \times V(G_n)$ است؛ دو راس (a_1, a_2, \dots, a_n) و (b_1, b_2, \dots, b_n) در $\square_{i=1}^n G_i$ مجاورند اگر a_i با b_i در G_i مجاور بوده و برای هر $j \neq i$ داشته باشیم $a_j = b_j$ (شکل ۱۷.۱).



شکل ۱۷.۱: حاصل ضرب دکارتی K_2 در K_2

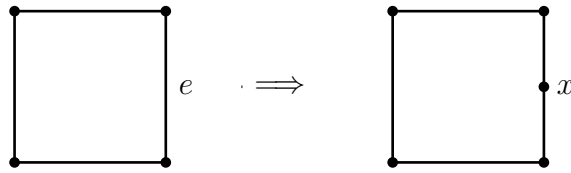
تعریف ۲۶.۱.۱ (گراف میشلسکی). [۸] فرض کنید $V = \{v_i : 1 \leq i \leq n\}$ مجموعه رئوس گراف G باشد. گراف میشلسکی G ، که با $\mu(G)$ نشان داده می‌شود، گرافی است که با اضافه کردن $n + 1$ رأس جدید $V' \cup \{u\}$ ، که در آن $V' = \{v'_i : 1 \leq i \leq n\}$ می‌باشد، به مجموعه رئوس G و مجاور کردن v'_i با همسایه‌های v_i ($1 \leq i \leq n$) و با u ایجاد می‌شود (شکل ۱۸.۱). که v'_i و v_i ، $1 \leq i \leq n$ ، رئوس جفت، V و V' مجموعه‌های جفت و u ریشه گراف میشلسکی G نامیده می‌شوند. بوضوح $V[\mu(G)] = V \cup V' \cup \{u\}$. گراف میشلسکی مرتبه n ($n \geq 0$) گراف G به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mu^n(G) = \begin{cases} \mu[\mu^{n-1}(G)] & n \geq 1 \\ G & n = 0 \end{cases}$$



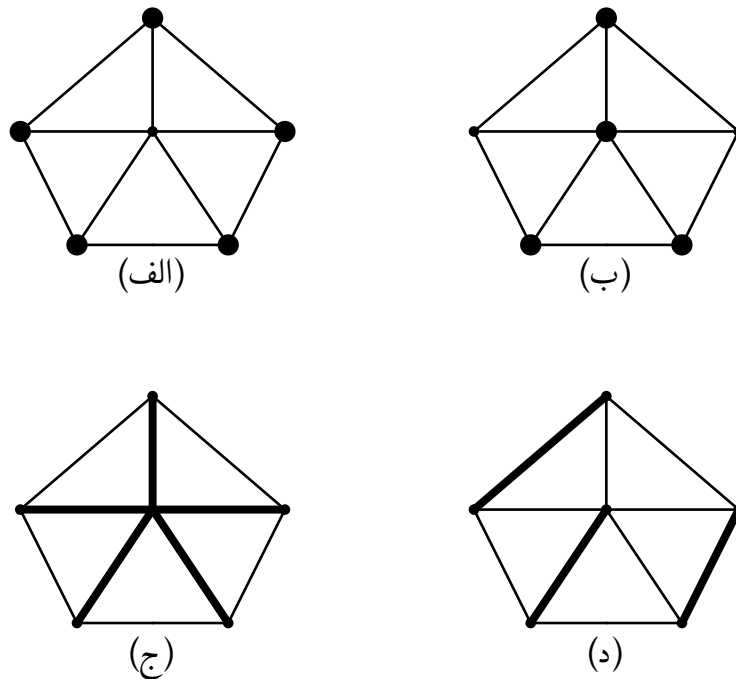
شکل ۱۸.۱: (الف) گراف G و (ب) گراف میشلسکی G

تعریف ۲۷.۱.۱ (زیرتقسیم). زیرتقسیم یال e عبارت است از حذف یال e ، اضافه کردن رأس جدید x و مجاور کردن x با دو سر e (شکل ۱۹.۱).



شکل ۱۹.۱: زیرتقسیم یال e

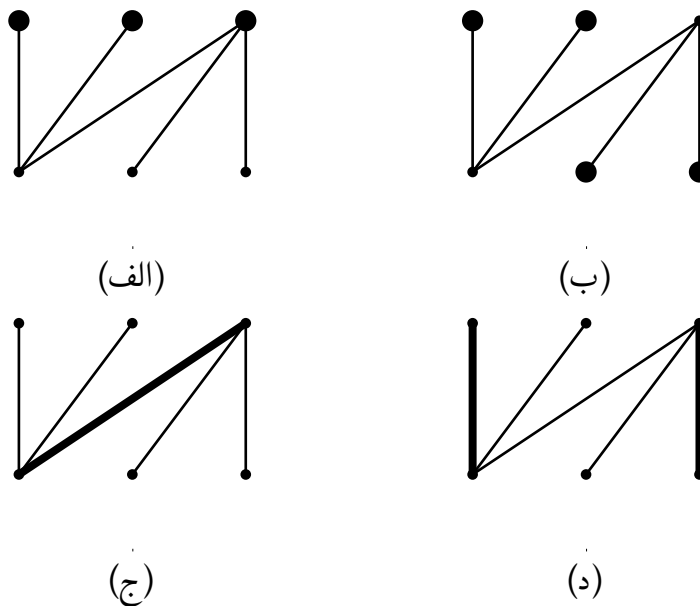
تعریف ۲۸.۱.۱ (پوشش راسی گراف). پوشش راسی گراف G ، مجموعه‌ای از رئوس گراف است به طوری که حداقل یک سر از هر یال G در آن باشد. اندازه کوچک‌ترین پوشش راسی گراف G ، عدد پوششی G نامیده شده و با $\beta(G)$ نشان داده می‌شود. به طور مشابه، پوشش یالی گراف G ، مجموعه‌ای از یال‌های گراف است که شامل تمام رئوس می‌شود و عدد پوشش یالی G ، اندازه کوچک‌ترین پوشش یالی گراف G می‌باشد و با $\beta'(G)$ نشان داده می‌شود. در شکل ۲۰.۱ پوشش راسی و یالی و کوچک‌ترین آن‌ها مشخص شده است.



شکل ۲۰.۱: (الف) پوشش راسی، (ب) پوشش راسی مینیمم، (ج) پوشش یالی و (د) پوشش یالی مینیمم

تعریف ۲۹.۱.۱ (مجموعه مستقل راسی). یک مجموعه مستقل راسی در گراف G ، مجموعه رئوسی از G است که هیچ دو راسی از آن با هم مجاور نباشند و مجموعه مستقل یالی گراف G ، مجموعه‌ای از یال‌های G می‌باشد که هیچ دو یالی از آن دارای راس مشترک نباشند. اندازه بزرگ‌ترین مجموعه مستقل راسی و بزرگ‌ترین مجموعه مستقل یالی G ، به ترتیب، عدد استقلال و عدد استقلال یالی گراف G نامیده

شده و، به ترتیب، با $\alpha(G)$ و $\alpha'(G)$ نشان داده می‌شود. در شکل ۲۱.۱ مجموعه مستقل راسی و یالی و بزرگ‌ترین آن‌ها مشخص شده است.



شکل ۲۱.۱: (الف) مجموعه مستقل راسی، (ب) مجموعه مستقل راسی ماکزیمم، (ج) مجموعه مستقل یالی و (د) مجموعه مستقل یالی ماکزیمم

قضیه ۳۰.۱.۱ [۱۱] برای هر گراف دلخواه $G = (V, E)$ داریم

$$\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2|E(G)|.$$

قضیه ۳۱.۱.۱ [۱۱] گراف G دوبخشی است اگر و تنها اگر فاقد دور فرد باشد.

قضیه ۳۲.۱.۱ [۱۱] در گراف دلخواه G ، $S \subseteq V(G)$ مجموعه‌ای مستقل است، اگر و تنها اگر $V(G) - S = \bar{S}$ یک پوشش راسی باشد. بنابراین $\alpha(G) + \beta(G) = n(G)$.

قضیه ۳۳.۱.۱ (گالای^۴ ۱۹۵۹). [۱۱] اگر گراف G فاقد راس تنها باشد، آنگاه $\alpha'(G) + \beta'(G) = n(G)$.

قضیه ۳۴.۱.۱ (کونینگ^۵ ۱۹۱۶). [۱۱] اگر G گرانی دوبخشی و فاقد راس تنها باشد، آنگاه $\alpha(G) = \beta'(G)$.

تعریف ۳۵.۱.۱ (رنگ آمیزی). تابع (برچسب گذاری) $c : V(G) \rightarrow S$ که $|S| = k$ یک k -رنگ آمیزی برای گراف G است (برچسب‌ها رنگ‌ها هستند) و راس‌های هم‌رنگ، تشکیل یک کلاس رنگی

^۴Gallai

^۵König

می‌دهند. اگر راس‌های مجاور G رنگ‌های متمایز داشته باشند، k -رنگ آمیزی مجاز است و G ، k -رنگ پذیر نامیده می‌شود. کوچکترین عدد k ی که G ، k -رنگ پذیر باشد، عدد رنگی G نامیده شده و با $\chi(G)$ نشان داده می‌شود.

در این پایان‌نامه گراف‌های همبند، غیر جهت‌دار، متناهی و بدون طوقه و یال‌های چندگانه را بررسی می‌کنیم.

فصل ۲

رنگ آمیزی روی برخی از گراف‌های مرکزی، میانی و کلی

۱.۲ مقدمه و تعاریف اولیه

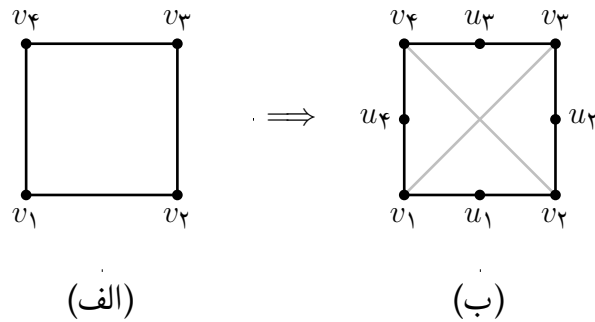
در نظریه گراف، رنگ آمیزی گراف یکی از حالت‌های خاص مسئله‌های برچسب‌گذاری گراف است. رویکرد کلی آن استفاده از نظیر کردن رنگ‌هایی به یال‌ها یا راس‌هاست که این رنگ آمیزی محدودیت خاصی را رعایت می‌کند.

رنگ آمیزی گراف کاربردهای زیادی در زمینه‌های عملی و تئوری دارد. علاوه بر مسئله‌های کلاسیک تعریف شده در این زمینه، با در نظر گرفتن محدودیت‌های مختلفی روی انواع گراف‌ها، روش رنگ آمیزی و حتی تعداد رنگ گراف، مسئله‌های متنوعی با کاربردهای وسیع در صنعت و علوم تعریف و حل می‌شود. از جمله این کاربردها می‌توان به رنگ آمیزی نقشه‌های جغرافیایی و رنگ آمیزی مسیر در ارتباطات فیبر نوری، نحوه چیدن ترکیب‌های شیمیایی در قفسه‌ها، برنامه‌ریزی جدول زمانی و برنامه‌ریزی آموزشی و همچنین زمان‌بندی مسابقات چرخشی و فرآیندهای تولیدی اشاره کرد.

در این فصل دو نوع رنگ آمیزی را برای برخی از گراف‌های مرکزی، میانی و کلی گراف‌هایی خاص بررسی می‌کنیم. برای این منظور، در ابتدا تعریف گراف مرکزی، میانی و کلی را بیان نموده و سپس با معرفی رنگ آمیزی‌های جدید در بخش‌های بعد، عدد رنگی آن‌ها را برای بعضی از گراف‌ها می‌یابیم. علاوه بر مراجع ذکر شده در هر بخش، مفاهیم این فصل در [۷] و [۹] نیز بررسی شده‌اند.

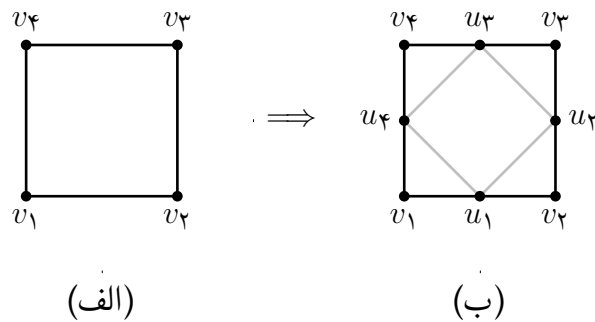
تعریف ۱.۱.۲ (گراف مرکزی). [۱۰] گراف مرکزی از گراف G که با $C(G)$ نشان داده می‌شود، گرافی با مجموعه رئوس $V(G) \cup E(G)$ است و دو راس u و v از $C(G)$ در یکی از حالات زیر با هم مجاورند:
۱. $u, v \in V(G)$ و دو راس در G غیر مجاور باشند. ۲. $u \in V(G)$ و $v \in E(G)$ و در G با هم مجاور باشند (شکل ۱.۲). به عبارت دیگر، گراف مرکزی G از زیرتقسیم کردن یال‌های گراف G و مجاور کردن رئوس غیر مجاور آن حاصل می‌شود.

تعریف ۲.۱.۲ (گراف میانی). [۱۰] گراف میانی از گراف G که با $M(G)$ نشان داده می‌شود، گرافی با



شکل ۱.۲: (الف) گراف G و (ب) گراف مرکزی G

مجموعه رئوس $V(G) \cup E(G)$ است و دو راس u و v از $M(G)$ در یکی از حالات زیر با هم مجاورند:
 ۱. $u, v \in E(G)$ و در G با هم مجاور باشند. ۲. $u \in V(G)$ و $v \in E(G)$ و در G با هم مجاور باشند (شکل ۲.۲).



شکل ۲.۲: (الف) گراف G و (ب) گراف میانی G

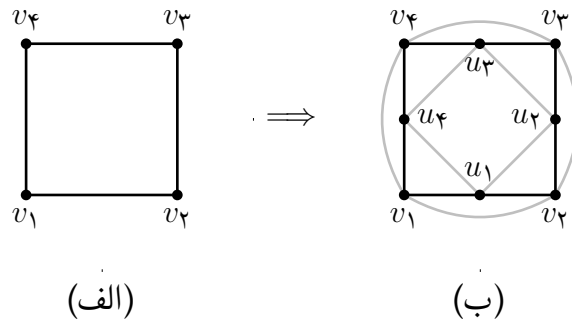
تعریف ۳.۱.۲ (گراف کلی). [۱۰] گراف کلی از گراف G که با $T(G)$ نشان داده می‌شود، گرافی با مجموعه رئوس $V(G) \cup E(G)$ است و دو راس u و v از $T(G)$ در یکی از حالات زیر با هم مجاورند:
 ۱. $u, v \in V(G)$ و در G مجاور باشند. ۲. $u, v \in E(G)$ و در G مجاور باشند. ۳. $u \in V(G)$ و $v \in E(G)$ و در G با هم مجاور باشند (شکل ۳.۲).

۲.۲ رنگ ناپذیری گراف مرکزی، میانی و کلی ستاره

در این بخش، ابتدا رنگ ناپذیری^۱ را تعریف نموده و سپس اعداد رنگی و رنگ ناپذیری گراف مرکزی، میانی و کلی گراف ستاره (بجز عدد رنگی گراف مرکزی ستاره) را می‌یابیم.

تعریف ۱.۲.۲ (رنگ ناپذیری). [۱۰] یک رنگ آمیزی مجاز گراف G که برای هر جفت رنگ متمایز c_1 و c_2 ، حداقل یک یال با دو سر رنگ شده با c_1 و c_2 موجود باشد، رنگ ناپذیری G نامیده می‌شود.

^۱achromatic



شکل ۳.۲: (الف) گراف G و (ب) گراف کلی G

بیشترین تعداد رنگ در رنگ آمیزی گراف G ، به طوری که بتوان برای G یک رنگ ناپذیری با آن تعداد رنگ پیدا کرد، عدد رنگ ناپذیری G نامیده شده و با $\chi_c(G)$ نشان داده می شود.

قضیه ۲.۲.۲. [۱۰] عدد رنگ ناپذیری گراف مرکزی گراف ستاره $K_{1,n}$ به صورت زیر است

$$\chi_c[C(K_{1,n})] = n + 1.$$

برهان. فرض کنید v_1, v_2, \dots, v_n رئوس آویزان گراف ستاره $K_{1,n}$ بوده و v مرکز ستاره باشد. بوضوح $d_{K_{1,n}}(v) = n$ فرض کنید یال $(e_i =)vv_i$ به وسیله راس u_i ($1 \leq i \leq n$) در $C(K_{1,n})$ زیرتقسیم شود و داشته باشیم

$$V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}, \quad V' = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}.$$

بوضوح $V[C(K_{1,n})] = V \cup V' \cup \{v\}$. تعداد یالها در $C(K_{1,n})$ برابر $\binom{n}{2} + 2n$ است و

$$\binom{n}{2} + 2n = \frac{n^2 + 3n}{2} < \binom{n+2}{2}.$$

بنابراین $\chi_c[C(K_{1,n})] \leq n + 1$. اکنون، با توجه به این که در گراف $C(K_{1,n})$ ، زیرگراف القایی $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} <$ گرافی کامل و $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ مجموعه ای مستقل است، رنگ آمیزی زیر برای $C(K_{1,n})$ یک رنگ ناپذیری خواهد بود

$$c(v) = c_1,$$

$$c(u_i) = c_{n+1} \quad 1 \leq i \leq n,$$

$$c(v_i) = c_i \quad 1 \leq i \leq n.$$

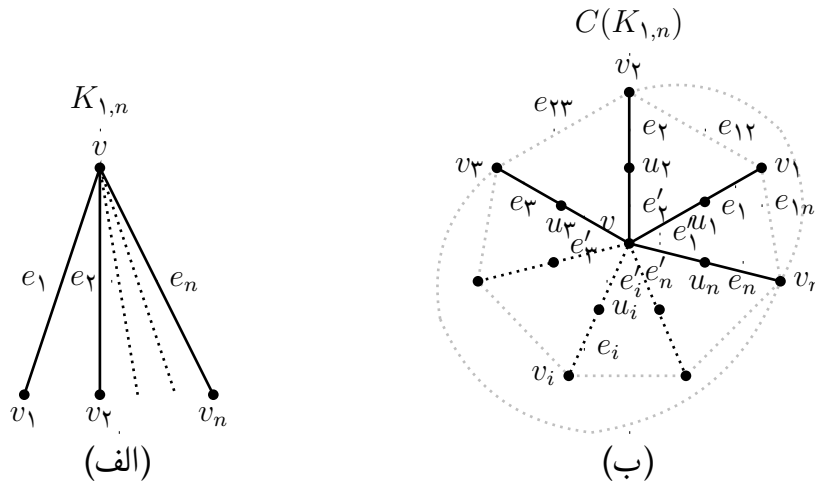
لذا $\chi_c[C(K_{1,n})] \geq n + 1$ و بنابراین داریم

$$\chi_c[C(K_{1,n})] = n + 1.$$

□

قضیه ۳.۲.۲. [۱۰] برای گراف ستاره $K_{1,n}$ داریم

$$\chi_c[M(K_{1,n})] = n + 1.$$

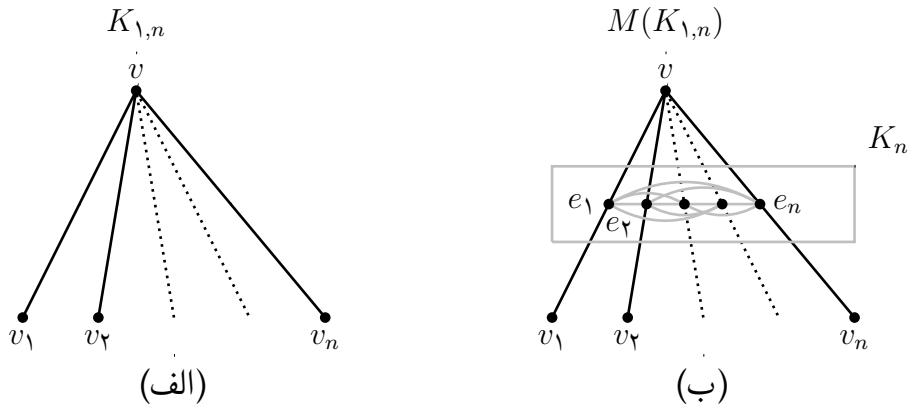


شکل ۴.۲: (الف) گراف ستاره $K_{1,n}$ و (ب) گراف مرکزی گراف ستاره $K_{1,n}$

برهان. فرض کنید مجموعه رئوس گراف ستاره $K_{1,n}$ باشد. با توجه به تعریف گراف میانی، هر یال vv_i از $K_{1,n}$ توسط راس e_i در $M(K_{1,n})$ زیرتقسیم شده و رئوس v, e_1, e_2, \dots, e_n خوشه‌ای از مرتبه $n + 1$ را در $M(K_{1,n})$ القا می‌کنند. لذا داریم

$$V[M(K_{1,n})] = \{v\} \cup \{v_i \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{e_i \mid 1 \leq i \leq n\}.$$

حال، مجموعه رنگ‌های $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, \dots, c_n, c_{n+1}\}$ را در نظر گرفته و رنگ ناپذیری زیر را به



شکل ۵.۲: (الف) گراف ستاره $K_{1,n}$ و (ب) گراف میانی گراف ستاره $K_{1,n}$

$M(K_{1,n})$ اختصاص دهید

$$c(v) = c(v_1) = c_{n+1},$$

$$c(e_i) = c_i \quad 1 \leq i \leq n,$$

$$c(v_i) = c_1 \quad 2 \leq i \leq n.$$

بنابراین داریم

$$\chi_c[M(K_{1,n})] \geq n + 1.$$

از طرفی تعداد یال‌ها در $M(K_{1,n})$ برابر $\frac{n^2+3n}{2}$ است و $(n+2) < \frac{n^2+3n}{2}$. لذا

$$\chi_c[M(K_{1,n})] \leq n + 1.$$

□

در نتیجه $\chi_c[M(K_{1,n})] = n + 1$.

قضیه ۴.۲.۲. [۱۰] برای گراف ستاره $K_{1,n}$ داریم

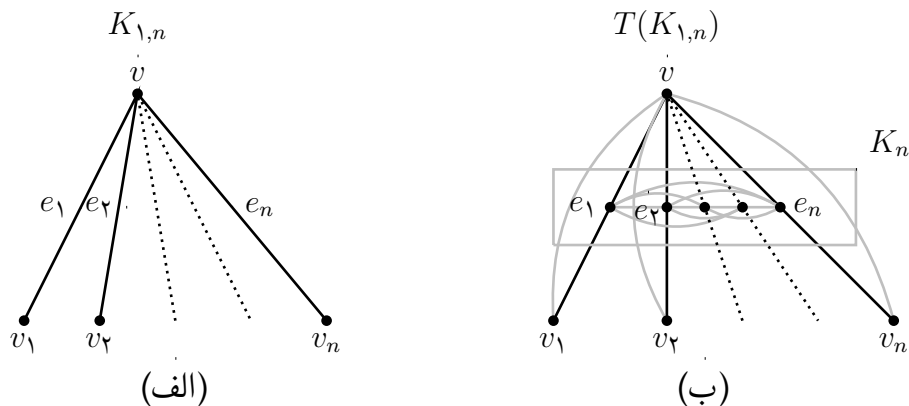
$$\chi_c[T(K_{1,n})] = n + 2.$$

برهان. فرض کنید $V(K_{1,n}) = \{v, v_1, v_2, \dots, v_n\}$ و $E(K_{1,n}) = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. با توجه به تعریف گراف کلی، اگر نام راس زیرتقسیم کننده هر یال را نام یال متناظر با آن در نظر بگیریم،

$$V[T(K_{1,n})] = \{v\} \cup \{e_i \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_i \mid 1 \leq i \leq n\}$$

و رئوس v, e_1, e_2, \dots, e_n خوشه‌ای از مرتبه $n + 1$ را القا می‌کنند. چون تعداد یال‌ها در $T(K_{1,n})$ برابر $\frac{n^2+5n}{2}$ است و این مقدار اکیدا کمتر از $(n+2)$ است، بنابراین

$$\chi_c[T(K_{1,n})] \leq n + 2.$$



شکل ۶.۲: (الف) گراف ستاره $K_{1,n}$ و (ب) گراف کلی گراف ستاره $K_{1,n}$

بوضوح $(n + 2)$ -رنگ آمیزی زیر برای $T(K_{1,n})$ یک رنگ ناپذیری است

$$c(v) = c_{n+1},$$

$$c(e_i) = c_i \quad 1 \leq i \leq n,$$

$$c(v_i) = c_{n+2} \quad 1 \leq i \leq n.$$

لذا $\chi_c[T(K_{1,n})] \geq n + 2$ و در نتیجه

$$\chi_c[T(K_{1,n})] = n + 2.$$

□

قضیه ۵.۲.۲. [۱۰] برای گراف ستاره $K_{1,n}$ داریم

$$\chi_c[C(K_{1,n})] = \chi_c[M(K_{1,n})] = \chi[M(K_{1,n})] = n + 1,$$

$$\chi[T(K_{1,n})] = n + 1, (n \geq 2).$$

برهان. در قضایای ۲.۲.۲ و ۳.۲.۲ ثابت شد $\chi_c[C(K_{1,n})] = \chi_c[M(K_{1,n})] = n + 1$ اکنون، فرض کنید $V(K_{1,n}) = \{v, v_1, v_2, \dots, v_n\}$ و همچنین فرض کنید هر یال vv_i از $K_{1,n}$ توسط راس e_i ($1 \leq i \leq n$) در $M(K_{1,n})$ زیرتقسیم شده باشد. بنابراین

$$V[M(K_{1,n})] = \{v\} \cup \{e_i \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_i \mid 1 \leq i \leq n\}.$$

با توجه به تعریف گراف میانی رئوس v, e_1, e_2, \dots, e_n خوشه‌ای از مرتبه $n + 1$ را در $M(K_{1,n})$ القا می‌کنند. لذا $\chi[M(K_{1,n})] \geq n + 1$ از طرفی رنگ آمیزی زیر برای $M(K_{1,n})$ مجاز است

$$c(v) = c(v_1) = c_{n+1}, c(v_i) = c_1 \quad 2 \leq i \leq n,$$

$$c(e_i) = c_i \quad 1 \leq i \leq n.$$

بنابراین $\chi[M(K_{1,n})] \leq n + 1$ و در نتیجه $\chi[M(K_{1,n})] = n + 1$. مشابه فوق، برای $n \geq 2$ ثابت می‌شود $\chi[T(K_{1,n})] = n + 1$. \square

۳.۲ رنگ آمیزی متعادل گراف مرکزی گراف ستاره، گراف دوبخشی کامل و گراف کامل

در این بخش، پس از تعریف رنگ آمیزی متعادل^۲ و عدد رنگی متناظر با آن و همچنین بیان چند کاربرد از این رنگ آمیزی، عدد رنگی متعادل را برای گراف مرکزی گراف ستاره، گراف دوبخشی کامل و گراف کامل بررسی می‌نماییم.

تعریف ۱.۳.۲ (رنگ آمیزی متعادل). [۱] اگر بتوان مجموعه رئوس گراف G را به k کلاس V_1, V_2, \dots, V_k افزایش داد، به طوری که برای هر $1 \leq i \leq k$ مجموعه‌ای مستقل بوده و برای هر i, j که $i \neq j$ ، شرط $||V_i| - |V_j|| \leq 1$ برقرار باشد ($1 \leq i, j \leq k$)، آن‌گاه G ، k -رنگ پذیر متعادل و (V_1, V_2, \dots, V_k) افزایش مستقل متعادل نامیده می‌شود. کوچکترین عدد k یی که G ، k -رنگ پذیر متعادل باشد، عدد رنگی متعادل گراف G نامیده شده و با $\chi_{=} (G)$ نشان داده می‌شود.

ملاحظه ۲.۳.۲. بوضوح k -رنگ آمیزی مجاز گراف G که اختلاف اندازه هر دو کلاس رنگی دلخواه آن حداکثر یک است، معادل با k -رنگ آمیزی متعادل گراف G می‌باشد.

بسیاری از مسائل، از جمله مسئله جمع آوری زباله در شش روز کاری هفته و همچنین مسئله برنامه‌ریزی جدول ساعات کار را می‌توان با استفاده از این رنگ آمیزی، مدل‌سازی و بررسی نمود. در

^۲equitable coloring

مسئله جمع آوری زباله، مسیرهای جمع آوری زباله را رئوس یک گراف در نظر گرفته و مسیرهایی که نباید در یک روز پیموده شوند را به وسیله یک یال با هم مجاور می‌کنیم. اختصاص یکی از شش روز کاری هفته به هر مسیر را می‌توان به مسئله ساده‌تر ۶-رنگ تبدیل کرد و اگر داشتن تعداد مسیر برابر در هر روز مورد نظر باشد، می‌توان آن را به کمک رنگ آمیزی متعادل با ۶-رنگ حل کرد. در برنامه‌ریزی جدول ساعات کار، اگر برنامه‌ریزی جدول ساعات کار دانشگاه مورد نظر باشد، به گونه‌ای که هر کلاس و هر استاد در هر روز تعداد سخنرانی برابر داشته باشند، باید گراف دوبخشی $G[X, Y]$ که X مجموعه رئوس متناظر با اساتید و Y مجموعه رئوس متناظر با کلاس‌ها است را مدل‌سازی کنیم. در این صورت رئوس $x \in X$ و $y \in Y$ مجاورند، اگر و تنها اگر استاد x در کلاس y سخنرانی داشته باشد. حال، مسئله یافتن جدول برنامه‌ریزی مناسب به رنگ آمیزی یالی متعادل $G[X, Y]$ کاهش می‌یابد.

قضیه ۳.۳.۲ [۱] عدد رنگی متعادل گراف مرکزی گراف ستاره $K_{1,n}$ ، برای $n \geq 3$ ، به صورت زیر است

$$\chi = [C(K_{1,n})] = n.$$

برهان. فرض کنید $V(K_{1,n}) = \{v, v_1, v_2, \dots, v_n\}$ و برای هر $1 \leq i \leq n$ ، u_i راس زیرتقسیم‌کننده یال vv_i در $C(K_{1,n})$ باشد. با توجه به تعریف گراف مرکزی،

$$V[C(K_{1,n})] = V(K_{1,n}) \cup \{u_i \mid 1 \leq i \leq n\}$$

و مجموعه رئوس $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ خوشه‌ای n راسی را در $C(K_{1,n})$ القا می‌کند. حال، مجموعه رئوس $V[C(K_{1,n})]$ را به زیرمجموعه‌های زیر افزایش می‌کنیم

$$V_1 = \{v, v_1\},$$

$$V_2 = \{u_1, v_2, u_n\},$$

$$V_i = \{v_i, u_{i-1}\} \quad 3 \leq i \leq n.$$

بوضوح V_i ها مجزا هستند و $\bigcup_{i=1}^n V_i = V[C(K_{1,n})]$. چون $n \geq 3$ ، پس هر یک از V_i ها مجموعه‌ای مستقل هستند و برای هر $i \neq j$ ، $||V_i|| - ||V_j|| \leq 1$ ، $(1 \leq i, j \leq n)$. لذا $\chi = [C(K_{1,n})] \leq n$. برای اثبات $\chi = [C(K_{1,n})] \geq n$ ، به خلف فرض کنید $\chi = [C(K_{1,n})] < n$. چون $C(K_{1,n})$ شامل خوشه‌ای از مرتبه n است، پس $\chi[C(K_{1,n})] \geq n$. از طرفی با توجه به ملاحظه ۲.۳.۲، چون رنگ آمیزی متعادل یک رنگ آمیزی مجاز است، لذا $\chi = [C(K_{1,n})] \geq n$. این تناقض نشان می‌دهد که $\chi = [C(K_{1,n})] = n$ بنابراین $\chi = [C(K_{1,n})] \geq n$. \square

قضیه ۴.۳.۲ [۱] اگر $n \geq 3$ باشد، عدد رنگی متعادل گراف مرکزی گراف دوبخشی کامل $K_{n,n}$ به صورت زیر است

$$\chi = [C(K_{n,n})] = n.$$

برهان. فرض کنید X و Y بخش‌های گراف دوبخشی $K_{n,n}$ بوده و $X = \{v_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ و $Y = \{v'_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ باشد. با توجه به تعریف گراف مرکزی، رئوس X خوشه‌ای n راسی را در

$C(K_{n,n})$ القا می‌کنند و به صورت مشابه، رئوس Y نیز خوشه‌ای از مرتبه n را در $C(K_{n,n})$ القا می‌کنند. حال، فرض کنید یال $v_i v'_j$ ($1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$) توسط راس u_{ij} در $C(K_{n,n})$ زیرتقسیم شده باشد. بنابراین

$$V[C(K_{n,n})] = X \cup Y \cup \{u_{ij} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n\}.$$

چون $C(K_{n,n})$ شامل خوشه‌هایی از مرتبه n است، پس با توجه به ملاحظه ۲.۳.۲، $\chi_{=} [C(K_{n,n})] \geq n$. اکنون، مجموعه رئوس $V[C(K_{n,n})]$ را به صورت زیر افزایش می‌کنیم

$$V_1 = \{v_1, v'_1, u_{23}\} \cup \{u_{nj} \mid 2 \leq j \leq n\},$$

$$V_i = \{v_i, v'_i, u_{(i+1)(i+2)}\} \cup \{u_{(i-1)j} \mid 1 \leq j \leq n, j \neq i\} \quad 2 \leq i \leq n.$$

توجه شود که، در افزایش فوق محاسبات در پیمانه n می‌باشند. بوضوح V_i ها مجزا بوده و $\bigcup_{i=1}^n V_i$ برابر $V[C(K_{n,n})]$ می‌باشد. از طرفی چون $n \geq 3$ ، پس برای هر $1 \leq i \leq n$ ، V_i مجموعه‌ای مستقل بوده و $|V_i| = n + 2$ می‌باشد. لذا برای هر $i \neq j$ ($1 \leq i, j \leq n$) داریم

$$\left| |V_i| - |V_j| \right| \leq 1.$$

بنابراین $\chi_{=} [C(K_{n,n})] \leq n$ و در نتیجه $\chi_{=} [C(K_{n,n})] = n$. □

قضیه ۵.۳.۲. [۱] عدد رنگی متعادل گراف مرکزی گراف کامل K_n ، که $n \geq 4$ ، به صورت زیر است

$$\chi_{=} [C(K_n)] = 3.$$

برهان. فرض کنید $V[C(K_n)] = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \cup \{u_{ij} \mid 1 \leq i \leq n-1, i+1 \leq j \leq n\}$ ، که u_{ij} راس زیرتقسیم کننده یال $\{v_i, v_j\}$ از K_n می‌باشد. راسی دلخواه مانند v_1 را در نظر گرفته و رنگ c_1 را به آن اختصاص می‌دهیم. v_1 با $n-1$ راس u_{1j} ($2 \leq j \leq n$) مجاور است. برای آن‌که رنگ آمیزی مجاز باشد به u_{1j} ها، که دوه‌دو غیر مجاورند، رنگ c_2 را اختصاص می‌دهیم. رئوس رنگ شده با رنگ c_2 هر یک با یک راس دیگر مجاور هستند و این رئوس دوه‌دو غیر مجاورند. مجدداً برای آن‌که رنگ آمیزی مجاز باشد به آن‌ها رنگ c_1 را اختصاص می‌دهیم. رئوس رنگ نشده باقی‌مانده، رئوس زیرتقسیم کننده $\binom{n-1}{2}$ یال از K_n می‌باشند. این رئوس دوه‌دو غیر مجاور بوده و رئوس مجاورشان با c_1 رنگ شده است. به این رئوس رنگ c_2 را اختصاص می‌دهیم. اگر V_1 و V_2 را، به ترتیب، مجموعه رئوس رنگ شده با c_1 و c_2 در نظر بگیریم، با توجه به رنگ‌های اختصاص داده شده به رئوس داریم

$$|V_1| = 1 + n - 1 = n,$$

$$|V_2| = n - 1 + \binom{n-1}{2}.$$

در نتیجه برای $n \geq 4$ خواهیم داشت $\left| |V_1| - |V_2| \right| > 1$. توجه شود که، اگر رنگ آمیزی را از یکی از رئوس زیرتقسیم کننده یال‌های K_n نیز شروع کنیم، به نتیجه مشابه خواهیم رسید. بنابراین $C(K_n)$ را نمی‌توان با دو رنگ به صورت متعادل رنگ آمیزی نمود و لذا $\chi_{=} [C(K_n)] \geq 3$.

نشان می‌دهیم $C(K_n)$ را می‌توان با سه رنگ به صورت متعادل رنگ آمیزی نمود. فرض کنید V_1 ، V_2 و V_3 ، به ترتیب، مجموعه رئوس رنگ شده با رنگ‌های c_1 ، c_2 و c_3 در رنگ آمیزی زیر برای $C(K_n)$

باشند. از راس v_1 شروع کرده و رئوس بیرونی $C(K_n)$ را، به ترتیب دوری، با c_1, c_2 و c_3 رنگ آمیزی می‌کنیم (منظور از رئوس بیرونی $C(K_n)$ ، مجموعه رئوس $\{v_1, u_{12}, v_2, u_{23}, v_3, \dots, u_{n-1n}, v_n, u_{1n}\}$ می‌باشد). توجه شود، در حالتی که باقی‌مانده n بر 3 دو است، رنگ u_{1n} را c_2 در نظر می‌گیریم. چون در غیر این صورت $c(u_{1n}) = c_1$ می‌شود و دو راس v_1 و u_{1n} که مجاورند رنگ‌های یکسان خواهند داشت و این با مجاز بودن رنگ آمیزی در تناقض است. اکنون، رئوس u_{ij} ای ($1 \leq i, j \leq n, i \neq j$) را که $c(v_i) \neq c(v_j)$ می‌باشد، با رنگ سومی که با $c(v_i)$ و $c(v_j)$ متمایز است، رنگ می‌کنیم. رئوس رنگ شده تا به این جا را در V_i ها ($1 \leq i \leq 3$) قرار داده و تعداد اعضای آن‌ها را می‌شماریم. هم‌چنین $\frac{n + \binom{n}{2}}{3}$ را محاسبه می‌کنیم تا دریابیم، اگر مجموعه رئوس $C(K_n)$ را به سه زیرمجموعه با شرط $||V_i| - |V_j|| \leq 1$ ($1 \leq i, j \leq 3$) افراز کنیم، این سه مجموعه چه اندازه‌هایی باید داشته باشند. بدین طریق تعداد رئوس باقی‌مانده‌ای که باید با هر یک از رنگ‌های c_1, c_2 و c_3 رنگ شوند، مشخص می‌شود. به راحتی می‌توان رئوس باقی‌مانده را با این سه رنگ به‌گونه‌ای رنگ کرد که شرط فوق برای آن‌ها برقرار بوده و رنگ آمیزی مجاز باشد. حال، چون V_i ها مستقل بوده و $\bigcup_{i=1}^3 V_i = V[C(K_n)]$ است، بنابراین مجموعه رئوس $C(K_n)$ را می‌توان به سه مجموعه به صورت فوق افراز کرد، به طوری که شرایط رنگ آمیزی متعادل برقرار باشد. بنابراین $\chi = [C(K_n)] \leq 3$. با توجه به مطالب فوق داریم

$$\chi = [C(K_n)] = 3.$$

□

۴.۲ رنگ آمیزی متعادل گراف کلی مسیر و دور

در این بخش، با توجه به تعریف رنگ آمیزی متعادل در بخش قبل، عدد رنگی متعادل گراف کلی مسیر و دور را محاسبه می‌کنیم.

قضیه ۱.۴.۲ [۱] عدد رنگی متعادل گراف کلی مسیر P_n ، که $n \geq 3$ ، به صورت زیر است

$$\chi = [T(P_n)] = 3.$$

برهان. فرض کنید $V(P_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ و هم‌چنین فرض کنید

$$V[T(P_n)] = \{v_i | 1 \leq i \leq n\} \cup \{u_i | 1 \leq i \leq n-1\},$$

که u_i راس زیرتقسیم کننده یال $v_i v_{i+1}$ در $T(P_n)$ می‌باشد. روی حالات ممکن برای n بحث می‌کنیم.

حالت ۱. اگر $n \equiv 0 \pmod{3}$ ، مجموعه‌های مستقل از $T(P_n)$ به صورت زیر را در نظر می‌گیریم

$$V_1 = \{v_i | i \equiv 1 \pmod{3}, 1 \leq i \leq n-2\} \cup \{u_j | j \equiv 2 \pmod{3}, 2 \leq j \leq n-1\},$$

$$V_2 = \{v_i | i \equiv 2 \pmod{3}, 2 \leq i \leq n-1\} \cup \{u_j | j \equiv 0 \pmod{3}, 3 \leq j \leq n-3\},$$

$$V_3 = \{v_i | i \equiv 0 \pmod{3}, 3 \leq i \leq n\} \cup \{u_j | j \equiv 1 \pmod{3}, 1 \leq j \leq n-2\}.$$

توجه کنید، در حالتی که $n = 3$ است، مجموعه دوم از V_2 را برابر تهی در نظر می‌گیریم. بوضوح $V[T(P_n)] = \bigcup_{i=1}^3 V_i$ و V_i ها، که $|V_1| = |V_2| = |V_3| = \frac{2n}{3}$ و $|V_2| = \frac{2n-3}{3}$ ، دوبه‌دو مجزا هستند. بنابراین در این حالت افزایش (V_1, V_2, V_3) از $V[T(P_n)]$ موجود است که برای هر $i \neq j$ ، $\chi_{=}[T(P_n)] \leq 3$ لذا $\|V_i| - |V_j|\| \leq 1$.

حالت ۲. اگر $n \equiv 1 \pmod{3}$ ، مجموعه‌های مستقل به صورت زیر را در نظر می‌گیریم

$$\begin{aligned} V_1 &= \{v_i | i \equiv 1 \pmod{3}, 1 \leq i \leq n\} \cup \{u_j | j \equiv 2 \pmod{3}, 2 \leq j \leq n-2\}, \\ V_2 &= \{v_i | i \equiv 2 \pmod{3}, 2 \leq i \leq n-2\} \cup \{u_j | j \equiv 0 \pmod{3}, 3 \leq j \leq n-1\}, \\ V_3 &= \{v_i | i \equiv 0 \pmod{3}, 3 \leq i \leq n-1\} \cup \{u_j | j \equiv 1 \pmod{3}, 1 \leq j \leq n-3\}. \end{aligned}$$

مجموعه‌های V_1 و V_2 و V_3 افزایشی از $V[T(P_n)]$ هستند که $|V_1| = \frac{2n+1}{3}$ ، $|V_2| = \frac{2n-2}{3}$ و $|V_3| = \frac{2n-2}{3}$ هم‌چنین بوضوح برای هر $i \neq j$ ، $\|V_i| - |V_j|\| \leq 1$ پس $\chi_{=}[T(P_n)] \leq 3$.

حالت ۳. اگر $n \equiv 2 \pmod{3}$ ، مجموعه‌های مستقل زیر را در نظر می‌گیریم

$$\begin{aligned} V_1 &= \{v_i | i \equiv 1 \pmod{3}, 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{u_j | j \equiv 2 \pmod{3}, 2 \leq j \leq n-3\}, \\ V_2 &= \{v_i | i \equiv 2 \pmod{3}, 2 \leq i \leq n\} \cup \{u_j | j \equiv 0 \pmod{3}, 3 \leq j \leq n-2\}, \\ V_3 &= \{v_i | i \equiv 0 \pmod{3}, 3 \leq i \leq n-2\} \cup \{u_j | j \equiv 1 \pmod{3}, 1 \leq j \leq n-1\}. \end{aligned}$$

بوضوح مجموعه‌های فوق افزایشی برای $V[T(P_n)]$ هستند و برای هر $i \neq j$ ، $\|V_i| - |V_j|\| \leq 1$ می‌باشد. لذا $\chi_{=}[T(P_n)] \leq 3$.

بنابراین برای هر $n \geq 3$ ، $\chi_{=}[T(P_n)] \leq 3$ از طرفی چون $T(P_n)$ شامل حداقل یک دور به طول ۳ است، لذا $\chi_{=}[T(P_n)] \geq 3$ و در نتیجه $\chi_{=}[T(P_n)] = 3$.

قضیه ۲.۴.۲. [۱] اگر n مضربی از ۳ باشد، عدد رنگی متعادل گراف کلی دور C_n به صورت زیر است

$$\chi_{=}[T(C_n)] = 3.$$

برهان. فرض کنید

$$\begin{aligned} V(C_n) &= \{v_1, v_2, \dots, v_n\}, \\ V[T(C_n)] &= \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \cup \{u_1, u_2, \dots, u_n\}, \end{aligned}$$

که u_n راس زیرتقسیم کننده یال $v_n v_1$ و u_i ($1 \leq i \leq n-1$) راس زیرتقسیم کننده یال $v_i v_{i+1}$ در $T(C_n)$ می‌باشند. حال، مجموعه‌های مستقل از $V[T(C_n)]$ به صورت زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned} V_1 &= \{v_i | i \equiv 0 \pmod{3}, 3 \leq i \leq n\} \cup \{u_j | j \equiv 1 \pmod{3}, 1 \leq j \leq n-2\}, \\ V_2 &= \{v_i | i \equiv 1 \pmod{3}, 1 \leq i \leq n-2\} \cup \{u_j | j \equiv 2 \pmod{3}, 2 \leq j \leq n-1\}, \\ V_3 &= \{v_i | i \equiv 2 \pmod{3}, 2 \leq i \leq n-1\} \cup \{u_j | j \equiv 0 \pmod{3}, 3 \leq j \leq n\}. \end{aligned}$$

مجموعه‌های مستقل فوق افرازی از $V[T(C_n)]$ می‌باشند که $|V_1| = |V_2| = |V_3| = \frac{2n}{3}$. بنابراین برای هر $j, i \neq j$ ، $0 \leq |V_i| - |V_j| \leq 1$ و لذا $\chi=[T(C_n)] \leq 3$. از طرفی چون $T(C_n)$ شامل حداقل یک دور به طول ۳ می‌باشد، پس $\chi=[T(C_n)] \geq 3$ و در نتیجه $\chi=[T(C_n)] = 3$. \square

فصل ۳

تعداد مثلث‌ها، اعداد پوششی و استقلال روی گراف‌های کلی و میشلسکی

۱.۳ مقدمه

امروزه نقش پررنگ کامپیوتر، شبکه‌های ارتباطی و علوم وابسته به آن‌ها، در زندگی بشر انکارناپذیر است. لذا بهینه‌سازی و کاهش هزینه‌ها در بخش‌های مختلف مربوط به این امور مسئله‌ای مهم تلقی می‌شود. در همین راستا، با توجه به این‌که شبکه‌های حسگر دارای انرژی محدودی هستند و در اغلب کاربردهای شبکه‌های حسگر بی‌سیم امکان شارژ کردن باتری گره‌ها وجود ندارد، پرتکل‌های طراحی شده برای این شبکه‌ها باید حتی المقدور انرژی-کارآمد باشند. از این سو مدیریت انرژی در طراحی پرتکل‌های آن‌ها یک نیاز مهم است و خوشه‌بندی یک رویکرد کارآمد برای تعدیل بار بین گره‌های حسگر و افزایش طول عمر شبکه است. خوشه‌بندی یکی از رویکردهای اصلی برای طراحی پرتکل‌های انرژی-کارآمد و مقیاس‌پذیر شبکه‌های حسگر بی‌سیم است. به این وسیله داده‌های ارسالی گره‌های درون خوشه توسط سرخوشه جمع‌شده و به ایستگاه پایه ارسال می‌شود و هم‌چنین بار اضافی ارتباطی ناشی از ارسال داده‌ها و در نتیجه مصرف انرژی و تداخل امواج بین گره‌ها کاهش می‌یابد و در مصرف انرژی و منابع صرفه‌جویی می‌شود.

در این فصل، ابتدا تعداد مثلث‌ها (خوشه‌های سه راسی) را برای برخی از تبدیلات یک گراف محاسبه نموده و سپس اعداد پوشش و استقلال راسی و یالی، عدد رنگی و عدد رنگ ناپذیری را برای برخی از ساختارهای گراف ستاره بررسی می‌کنیم. در انتها، کران‌های بالایی را برای تعداد مثلث‌ها در ساختارهای معروف گراف‌ها مطرح می‌کنیم. نتایج این فصل از مرجع [۸] بوده و در تمام فصل تعداد مثلث‌های گراف دلخواه G با $t(G)$ نشان داده شده است.

۲.۳ بررسی تعداد مثلث‌های گراف کلی، مرکزی و میانی روی یک گراف و گراف میشلسکی آن

در این بخش تعداد مثلث‌های گراف کلی و میانی یک گراف و میشلسکی آن و همچنین گراف کلی گراف مرکزی یک گراف را بررسی می‌کنیم. در هر قسمت مقدار آن‌ها را برای برخی از گراف‌های ویژه نیز محاسبه می‌کنیم.

قضیه ۱.۲.۳. برای هر (p, q) -گراف G داریم

$$t[T(G)] = 2t(G) + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^p \left[d_G^2(v_i) + 2m_i \binom{d_G(v_i)}{3} \right],$$

که اگر $d_G(v_i) \geq 3$ ، $m_i = 1$ و در غیر این صورت $m_i = 0$ است.

برهان. برای هر یال $e = uv$ از G ، مثلث $\langle \{u, v, e\} \rangle$ در $T(G)$ تولید می‌شود. چون G ، q یال دارد، پس q مثلث در $T(G)$ ایجاد می‌شود. حال، فرض کنید v راسی دلخواه از G بوده و e_1, e_2, \dots, e_n یال‌های واقع بر آن باشند. دو حالت زیر را برای $T(G)$ داریم

حالت ۱. برای دو یال متمایز e_i و e_j ، مثلث $\langle \{v, e_i, e_j\} \rangle$ در $T(G)$ ظاهر می‌شود. لذا برای $n \geq 2$ مثلث متمایز در $T(G)$ خواهیم داشت.

حالت ۲. برای سه یال متمایز e_i, e_j, e_k ، مثلث $\langle \{e_i, e_j, e_k\} \rangle$ را در $T(G)$ خواهیم داشت. پس برای $n \geq 3$ مثلث متمایز در $T(G)$ ایجاد می‌شود.

هم‌چنین به ازای هر مثلث در G ، دو مثلث در $T(G)$ خواهیم داشت؛ یکی مثلث ایجاد شده توسط سه راس مثلث و دیگری مثلث تولید شده توسط یال‌های آن. با توجه به مطالب فوق و قضیه ۳۰.۱.۱ داریم

$$\begin{aligned} t[T(G)] &\geq q + \sum_{i=1}^p \binom{d_G(v_i)}{2} + \sum_{i=1}^p m_i \binom{d_G(v_i)}{3} + 2t(G) \\ &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^p d_G(v_i) + \sum_{i=1}^p \frac{d_G(v_i)!}{2!(d_G(v_i) - 2)!} + \sum_{i=1}^p m_i \binom{d_G(v_i)}{3} + 2t(G) \\ &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^p d_G(v_i) + \sum_{i=1}^p \frac{d_G(v_i)(d_G(v_i) - 1)}{2} + \sum_{i=1}^p m_i \binom{d_G(v_i)}{3} + 2t(G) \\ &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^p d_G(v_i) + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^p d_G^2(v_i) - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^p d_G(v_i) + \sum_{i=1}^p m_i \binom{d_G(v_i)}{3} + 2t(G) \\ &= 2t(G) + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^p \left[d_G^2(v_i) + 2m_i \binom{d_G(v_i)}{3} \right], \end{aligned}$$

که اگر $d_G(v_i) \geq 3$ ، $m_i = 1$ و در غیر این صورت $m_i = 0$ است.

از طرف دیگر، فرض کنید $\langle \{v_i, v_j, v_k\} \rangle$ مثلثی در $T(G)$ باشد. حکم قضیه هنگامی برقرار است که مثلث $\langle \{v_i, v_j, v_k\} \rangle$ از یکی از حالات فوق حاصل شود. روی حالات ممکن برای v_i, v_j و v_k بحث می‌کنیم.

(۱) اگر $\{v_i, v_j, v_k\} \subseteq V(G)$ ، آن‌گاه $\langle \{v_i, v_j, v_k\} \rangle$ مثلثی در G است.

(۲) اگر دقیقاً یکی از رئوس v_i, v_j و v_k یالی از G باشد، آن‌گاه $\langle \{v_i, v_j, v_k\} \rangle$ مثلثی از نوع مثلث‌های تولید شده در ابتدای اثبات خواهد بود.

(۳) اگر دقیقاً دو راس از v_i, v_j و v_k یال‌هایی از G باشند، آن‌گاه مثلث $\langle \{v_i, v_j, v_k\} \rangle$ از نوع حالت ۱ است.

(۴) اگر هر سه راس v_i, v_j و v_k یال‌های G بوده و زیرگراف القایی آن‌ها در G گراف ستاره باشد، مثلث $\langle \{v_i, v_j, v_k\} \rangle$ از نوع حالت ۲ خواهد بود.

۱. اگر هر سه راس v_i, v_j و v_k یال‌های G بوده و زیرگراف القایی آن‌ها در G گراف ستاره نباشد، آن‌گاه v_i, v_j و v_k یال‌های یک مثلث در G می‌باشند.

توجه کنید که، در برهان فوق نام راس زیرتقسیم‌کننده یال‌های G در $T(G)$ را نام یال متناظر با آن در G در نظر گرفته‌ایم. \square

نتیجه ۲.۲.۳. الف) برای $n \geq 2$ ، $t[T(P_n)] = 2n - 3$.

ب) $t[T(C_3)] = 8$ و برای $n > 3$ ، $t[T(C_n)] = 2n$.

ج) $t[T(K_{m,n})] = \frac{mn}{2}(m^2 + n^2 + 4)$.

د) $t[T(K_n)] = \frac{1}{2}[n(n-1)(n^2-1)]$.

برهان. الف) بوضوح P_n فاقد مثلث بوده و درجه هر راس آن، بجز راس ابتدا و انتها که یک است، ۲ می‌باشد. بنابراین از قضیه ۱.۲.۳ داریم

$$\begin{aligned} t[T(P_n)] &= 2 \times 0 + \frac{1}{2} \left(1^2 + \overbrace{2^2 + \dots + 2^2}^{n-2 \text{ بار}} + 1^2 + 2 \times 0 \right) \\ &= \frac{1}{2} [2 + 4(n-2)] \\ &= \frac{1}{2} (4n - 6) \\ &= 2n - 3. \end{aligned}$$

(ب) بوضوح C_3 دارای یک مثلث است و درجه هر راس آن ۲ می‌باشد. از قضیه ۱.۲.۳ داریم

$$\begin{aligned} t[T(C_3)] &= 2 \times 1 + \frac{1}{4}(2^2 + 2^2 + 2^2 + 2 \times 0) \\ &= 2 + \frac{1}{4}(4 \times 3) \\ &= 8. \end{aligned}$$

اما برای $n > 3$ بدیهی است که C_n فاقد مثلث بوده و درجه هر راس آن ۲ می‌باشد. از قضیه ۱.۲.۳ خواهیم داشت

$$\begin{aligned} t[T(C_n)] &= 2 \times 0 + \frac{1}{4}(\overbrace{2^2 + \dots + 2^2}^{n \text{ بار}} + 2 \times 0) \\ &= 2n. \end{aligned}$$

(ج) بوضوح $K_{m,n}$ فاقد مثلث بوده و دارای m راس از درجه n و n راس از درجه m می‌باشد. با استفاده از قضیه ۱.۲.۳ روی حالات مختلف برای m و n بحث می‌کنیم.

$$m = n = 1 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} t[T(K_{1,1})] &= 2 \times 0 + \frac{1}{4}(1^2 + 1^2 + 2 \times 0) \\ &= 1 \\ &= \frac{1 \times 1}{6}(1^2 + 1^2 + 4). \end{aligned}$$

(۲) $m = 1$ و $n = 2$ (برای $m = 2$ و $n = 1$ نیز مشابه است).

$$\begin{aligned} t[T(K_{1,2})] &= 2 \times 0 + \frac{1}{4}(1^2 + 1^2 + 2^2 + 2 \times 0) \\ &= 3 \\ &= \frac{1 \times 2}{6}(1^2 + 2^2 + 4). \end{aligned}$$

$$m = n = 2 \quad (3)$$

$$\begin{aligned} t[T(K_{2,2})] &= 2 \times 0 + \frac{1}{4}(2 \times 2^2 + 2 \times 2^2 + 2 \times 0) \\ &= 8 \\ &= \frac{2 \times 2}{6}(2^2 + 2^2 + 4). \end{aligned}$$

(۴) $m = 1$ و $n = 3$ (برای $m = 3$ و $n = 1$ نیز مشابه است).

$$\begin{aligned} t[T(K_{1,3})] &= 2 \times 0 + \frac{1}{6}(3^2 + 3 \times 1^2 + 2 \times 1 \binom{3}{3}) \\ &= 7 \\ &= \frac{1 \times 3}{6}(1^2 + 3^2 + 4). \end{aligned}$$

(۵) $m = 2$ و $n = 3$ (برای $m = 3$ و $n = 2$ نیز به‌طور مشابه برقرار است).

$$\begin{aligned} t[T(K_{2,3})] &= 2 \times 0 + \frac{1}{6}(2 \times 3^2 + 3 \times 2^2 + 2 \times 2 \times 1 \binom{3}{3}) \\ &= 17 \\ &= \frac{2 \times 3}{6}(2^2 + 3^2 + 4). \end{aligned}$$

(۶) $m, n \geq 3$

$$\begin{aligned} t[T(K_{m,n})] &= 2 \times 0 + \frac{1}{6}(m \times n^2 + n \times m^2 + m \times 2 \times 1 \binom{n}{3} + n \times 2 \times 1 \binom{m}{3}) \\ &= \frac{1}{6}(mn^2 + nm^2 + 2m \frac{n(n-1)(n-2)}{6} + 2n \frac{m(m-1)(m-2)}{6}) \\ &= \frac{mn}{6}(3n + 3m + n^2 - 3n + 2 + m^2 - 3m + 2) \\ &= \frac{mn}{6}(m^2 + n^2 + 4). \end{aligned}$$

(د) بوضوح درجه هر راس K_n ، $n-1$ بوده و برای $n \geq 3$ ، دارای $\binom{n}{3}$ مثلث می‌باشد. روی مقادیر مختلف n بحث می‌کنیم.

(۱) $n = 1$. بدیهی است که $T(K_1)$ فاقد مثلث است. هم‌چنین از حکم قضیه داریم

$$t[T(K_1)] = \frac{1}{6}[1(1-1)(1^2-1)] = 0.$$

لذا حکم برای $n = 1$ برقرار است.

(۲) $n = 2$. چون به ازای هر یال در گراف یک مثلث در گراف کلی آن ایجاد می‌شود، لذا $T(K_2)$ یک مثلث دارد (شکل ۱.۳ را ببینید). از طرفی با توجه به حکم قضیه داریم

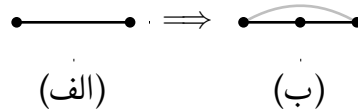
$$t[T(K_2)] = \frac{1}{6}[2(2-1)(2^2-1)] = 1.$$

پس حکم برای $n = 2$ نیز برقرار است.

(۳) $n = 3$. چون $C_3 = K_3$ ، با توجه به قسمت (ب)، $T(K_3)$ ، ۸ مثلث دارد. از حکم قضیه نیز داریم

$$t[T(K_3)] = \frac{1}{6}[3(3-1)(3^2-1)] = 8.$$

لذا در این حالت نیز حکم برقرار است.



شکل ۱.۳: (الف) گراف K_2 و (ب) گراف کلی K_2

(۴) $n \geq 4$. با توجه به قضیه ۱.۲.۳ داریم

$$\begin{aligned} t[T(K_n)] &= 2 \binom{n}{3} + \frac{1}{2} \left[n(n-1)^2 + n \times 2 \times 1 \binom{n-1}{3} \right] \\ &= 2 \frac{n(n-1)(n-2)}{6} + \frac{1}{2} \left[n(n-1)^2 + 2n \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6} \right] \\ &= \frac{1}{6} [2n(n-1)(n-2) + 3n(n-1)^2 + n(n-1)(n-2)(n-3)] \\ &= \frac{n(n-1)}{6} (2n-4 + 3n-3 + n^2 - 5n + 6) \\ &= \frac{1}{6} [n(n-1)(n^2-1)]. \end{aligned}$$

□

نتیجه ۳.۲.۳. اگر برای هر $n \geq 2$ و هر $m_i > 3$ ($1 \leq i \leq n$) قرار دهیم $M = m_1 m_2 \dots m_n$ آن‌گاه

$$t[T(\square_{i=1}^n C_{m_i})] = \frac{2Mn}{3} (2n^2 + 1).$$

برهان. با توجه به تعریف ضرب دکارتی، $\square_{i=1}^n C_{m_i}$ گراف $2n$ -منتظم (چون درجه هر راس C_{m_i} ، 2 بوده و $1 \leq i \leq n$ است، پس هر راس $\square_{i=1}^n C_{m_i}$ به n تا 2 تا وصل است) و مثلث آزاد (چون برای هر $1 \leq i \leq n$ ، $m_i > 3$ است، لذا C_{m_i} فاقد مثلث بوده و در نتیجه $\square_{i=1}^n C_{m_i}$ نیز فاقد مثلث می‌باشد) از مرتبه $M = m_1 m_2 \dots m_n$ است. از قضیه ۱.۲.۳ داریم

$$\begin{aligned} t[T(\square_{i=1}^n C_{m_i})] &= 2 \times 0 + \frac{M}{2} \left[(2n)^2 + 2 \times 1 \binom{2n}{3} \right] \\ &= \frac{M}{2} \left[4n^2 + 2 \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{6} \right] \\ &= \frac{M}{6} (12n^2 + 8n^3 - 12n^2 + 4n) \\ &= \frac{M}{6} (8n^3 + 4n) \\ &= \frac{2Mn}{3} (2n^2 + 1). \end{aligned}$$

□

توجه شود که چون $n \geq 2$ می‌باشد، ضرب $\binom{2n}{3}$ یک در نظر گرفته شده است.

قضیه ۴.۲.۳. فرض کنید G یک (p, q) -گراف با $t(G)$ مثلث و $\delta(G) \geq 2$ باشد. داریم

$$t[T(\mu(G))] = \lambda t(G) + \frac{1}{6} \sum_{i=1}^p [3d_G^{\check{}}(v_i) + d_G^{\check{}}(v_i)] + \left(\frac{18q + 5p + p^3}{6} \right).$$

برهان. فرض کنید $V = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ مجموعه رئوس گراف G باشد. با توجه به تعریف گراف میشلسکی داریم

$$V[\mu(G)] = V \cup V' \cup \{w\},$$

$$E[\mu(G)] = E(G) \cup \{wv'_i : wv_i \in E(G), 1 \leq i \leq p\} \cup \{v'_i w : 1 \leq i \leq p\},$$

که $V' = \{v'_i : 1 \leq i \leq p\}$. فرض کنید v_1, v_2, \dots, v_n رئوس مجاور راس دلخواه v از درجه n در G باشند. لذا $v_1, v'_1, v_2, v'_2, \dots, v_n, v'_n$ رئوس مجاور v در $\mu(G)$ خواهند بود. بنابراین $d_{\mu(G)}(v) = 2n$. متناظر با راس v در G ، راس v' در $\mu(G)$ موجود است که با رئوس v_1, v_2, \dots, v_n و w مجاور است. لذا $d_{\mu(G)}(v') = n + 1$. بعلاوه، راس w با تمام p راس V' مجاور است. در نتیجه $d_{\mu(G)}(w) = p$. چون $\delta(G) \geq 2$ است (بنا به فرض قضیه)، لذا $p \geq 3$ و برای هر راس دلخواه v در $\mu(G)$ ، $d_{\mu(G)}(v) \geq 3$ می‌باشد. از طرفی با اعمال ساختار میشلسکی به گراف هر مثلث به چهار مثلث افزایش می‌یابد و چون $t(G)$ ، $\mu(G)$ مثلث دارد، لذا $t(G)$ ، $\mu(G)$ مثلث خواهد داشت. حال، با توجه به قضیه ۳۰.۱.۱ و ۱.۲.۳ داریم

$$\begin{aligned} t[T(\mu(G))] &= 2 \times 4t(G) + \frac{1}{6} \left[\sum_{i=1}^p (2d_G(v_i))^2 + \sum_{i=1}^p (d_G(v_i) + 1)^2 + p^2 \right] \\ &+ \sum_{i=1}^p \binom{2d_G(v_i)}{3} + \sum_{i=1}^p \binom{d_G(v_i) + 1}{3} + \binom{p}{3} \\ &= \lambda t(G) + \frac{1}{6} \left[4 \sum_{i=1}^p d_G^{\check{}}(v_i) + \sum_{i=1}^p d_G^{\check{}}(v_i) + 2 \sum_{i=1}^p d_G(v_i) + \sum_{i=1}^p 1 + p^2 \right] \\ &+ \sum_{i=1}^p \frac{2d_G(v_i)(2d_G(v_i) - 1)(2d_G(v_i) - 2)}{6} \\ &+ \sum_{i=1}^p \frac{(d_G(v_i) + 1)d_G(v_i)(d_G(v_i) - 1)}{6} + \frac{p(p-1)(p-2)}{6} \\ &= \lambda t(G) + \frac{1}{6} \left[5 \sum_{i=1}^p d_G^{\check{}}(v_i) + 4q + p + p^2 \right] + \frac{1}{6} \sum_{i=1}^p [\lambda d_G^{\check{}}(v_i) \\ &- 12d_G^{\check{}}(v_i) + 4d_G(v_i) + d_G^{\check{}}(v_i) - d_G(v_i)] + \frac{p^3 - 3p^2 + 2p}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lambda t(G) + \frac{1}{\varphi} \left[5 \sum_{i=1}^p d_G^{\vee}(v_i) + 4q + p + p^2 \right] + \frac{1}{\varphi} \sum_{i=1}^p [9d_G^{\vee\vee}(v_i) - 12d_G^{\vee}(v_i) + 3d_G(v_i)] \\
 &+ \frac{p^3 - 3p^2 + 2p}{\varphi} \\
 &= \lambda t(G) + \frac{1}{\varphi} \sum_{i=1}^p [3d_G^{\vee\vee}(v_i) + d_G^{\vee}(v_i)] + \frac{1}{\varphi} (4q + p + p^2) \\
 &+ \frac{1}{\varphi} \sum_{i=1}^q d_G(v_i) + \frac{p^3 - 3p^2 + 2p}{\varphi} \\
 &= \lambda t(G) + \frac{1}{\varphi} \sum_{i=1}^p [3d_G^{\vee\vee}(v_i) + d_G^{\vee}(v_i)] + \frac{1}{\varphi} (12q + 3p + 3p^2 + 6q + p^3 - 3p^2 + 2p) \\
 &= \lambda t(G) + \frac{1}{\varphi} \sum_{i=1}^p [3d_G^{\vee\vee}(v_i) + d_G^{\vee}(v_i)] + \left(\frac{18q + 5p + p^3}{\varphi} \right).
 \end{aligned}$$

□

نتیجه ۵.۲.۳. برای $n > 3$ ، داریم

$$t[T(\mu(C_n))] = \frac{n^3 + 107n}{\varphi}.$$

برهان. بوضوح C_n دارای n راس از درجه ۲ و n یال است و فاقد مثلث می‌باشد. حال، چون $\delta(C_n) \geq 2$ ، با توجه به قضیه ۴.۲.۳ داریم

$$\begin{aligned}
 t[T(\mu(C_n))] &= \lambda \times 0 + \frac{1}{\varphi} \times n(3 \times 2^3 + 2^2) + \left(\frac{18n + 5n + n^3}{\varphi} \right) \\
 &= 14n + \frac{n^3 + 23n}{\varphi} \\
 &= \frac{n^3 + 107n}{\varphi}.
 \end{aligned}$$

□

نتیجه ۶.۲.۳.

$$t[T(\mu(K_{m,n}))] = \frac{1}{\varphi} [9mn(m^2 + n^2 + 2) + m^3 + n^3 + (m+n)(6mn + 5)].$$

برهان. بوضوح $K_{m,n}$ و $\mu(K_{m,n})$ فاقد مثلث‌اند. روی حالت‌های مختلف m و n بحث می‌کنیم.

حالت ۱. $m = n = 1$. با توجه به این‌که $\mu(K_{1,1})$ دارای ۵ راس از درجه ۲ می‌باشد، از قضیه ۱.۲.۳ خواهیم داشت

$$t[T(\mu(K_{m,n}))] = 2 \times 0 + \frac{1}{\varphi} (5 \times 2^2 + 2 \times 0) = 10.$$

از طرفی، با توجه به صورت قضیه داریم

$$t[T(\mu(K_{m,n}))] = \frac{1}{\varphi} [9 \times 1 \times 1 (1^2 + 1^2 + 2) + 1^3 + 1^3 + (1+1)(6 \times 1 \times 1 + 5)] = 10.$$

لذا در این حالت حکم برقرار است.

حالت ۲. $m = 1$ و $n \geq 2$ (برای $n = 1$ و $m \geq 2$ نیز مشابه است). فرض کنید مجموعه رئوس $V = \{x_1, x_2, \dots, x_{n+1}\}$ و مجموعه یال‌های $K_{1,n}$ باشد. در این صورت برای گراف $\mu(K_{1,n})$ داریم

$$\begin{aligned} V[\mu(K_{1,n})] &= \{x_i : 1 \leq i \leq n+1\} \cup \{x'_i : 1 \leq i \leq n+1\} \cup \{u\}, \\ E[\mu(K_{1,n})] &= \{x_1 x_i : 2 \leq i \leq n+1\} \cup \{x_1 x'_i : 2 \leq i \leq n+1\} \\ &\cup \{x'_i x_i : 2 \leq i \leq n+1\} \cup \{u x'_i : 1 \leq i \leq n+1\}. \end{aligned}$$

لذا $d_{\mu(K_{1,n})}(x_1) = 2n$ ، $d_{\mu(K_{1,n})}(x_i) = d_{\mu(K_{1,n})}(x'_i) = 2$ ($2 \leq i \leq n+1$) و $d_{\mu(K_{1,n})}(x'_1) = d_{\mu(K_{1,n})}(u) = n+1$ چون $n \geq 2$ ، لذا $n+1 \geq 3$ و بنابراین از قضیه ۱.۲.۳ خواهیم داشت

$$\begin{aligned} t[T(\mu(K_{m,n}))] &= 2 \times 0 + \frac{1}{4} [(2n)^2 + 2n \times 2^2 + 2(n+1)^2 + 2 \times 1 \binom{2n}{3}] \\ &\quad + 2 \times 2 \times 1 \binom{n+1}{3} \\ &= \frac{1}{4} [4n^2 + 8n + 2n^2 + 4n + 2 + 2 \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{6} \\ &\quad + 4 \frac{(n+1)n(n-1)}{6}] \\ &= \frac{1}{4} (6n^2 + 12n + 2 + \frac{8n^3 - 12n^2 + 4n + 2n^3 - 2n}{3}) \\ &= \frac{1}{6} (18n^2 + 36n + 6 + 10n^3 - 12n^2 + 2n) \\ &= \frac{1}{6} (10n^3 + 6n^2 + 38n + 6). \end{aligned}$$

از طرفی اگر در رابطه قضیه ۱ $m = 1$ را قرار دهیم، داریم

$$\begin{aligned} t[T(\mu(K_{m,n}))] &= \frac{1}{6} [9n(1+n^2+2) + 1+n^3 + (1+n)(6n+5)] \\ &= \frac{1}{6} (9n^3 + 27n + 1 + n^3 + 6n^2 + 11n + 5) \\ &= \frac{1}{6} (10n^3 + 6n^2 + 38n + 6). \end{aligned}$$

حالت ۳. $m, n \geq 2$. گراف $K_{m,n}$ دارای $m+n$ راس و mn یال است که، m راس از درجه n و n راس از درجه m می‌باشند. چون $m, n \geq 2$ ، لذا $\delta(K_{m,n}) \geq 2$ و از قضیه ۴.۲.۳ خواهیم

داشت

$$\begin{aligned}
 t[T(\mu(K_{m,n}))] &= 8 \times 0 + \frac{1}{4} [m \times 3n^3 + n \times 3m^3 + m \times n^2 + n \times m^2] \\
 &\quad + \frac{18mn + 5(m+n) + (m+n)^3}{6} \\
 &= \frac{1}{4} (3mn^3 + 3nm^3 + mn^2 + nm^2) + \frac{18mn + 5(m+n) + (m+n)^3}{6} \\
 &= \frac{1}{6} [9mn^3 + 9nm^3 + 3mn^2 + 3nm^2 + 18mn + 5(m+n) + m^3 \\
 &\quad + 3mn^2 + 3nm^2 + n^3] \\
 &= \frac{1}{6} [9mn^3 + 9nm^3 + 6mn^2 + 6nm^2 + 18mn + 5(m+n) + m^3 + n^3] \\
 &= \frac{1}{6} [9mn(m^2 + n^2 + 2) + m^3 + n^3 + 6mn(m+n) + 5(m+n)] \\
 &= \frac{1}{6} [9mn(m^2 + n^2 + 2) + m^3 + n^3 + (m+n)(6mn + 5)].
 \end{aligned}$$

□

نتیجه ۷.۲.۳. برای $n \geq 3$ داریم

$$t[T(\mu(K_n))] = \frac{1}{6} (9n^4 - 15n^3 + 6n^2 + 6n).$$

برهان. فرض کنید $V(K_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. بوضوح گراف K_n دارای n راس از درجه $n-1$ ، $\binom{n}{2}$ یال و $\binom{n}{3}$ مثلث می‌باشد. چون $n \geq 3$ ، لذا $\delta(K_n) \geq 2$ و بنابراین از قضیه ۴.۲.۳ داریم

$$\begin{aligned}
 t[T(\mu(K_n))] &= 8 \binom{n}{3} + \frac{1}{4} [n \times 3(n-1)^3 + n(n-1)^2] + \left[\frac{18 \binom{n}{2} + 5n + n^3}{6} \right] \\
 &= 8 \frac{n(n-1)(n-2)}{6} + \frac{1}{4} [3n(n^3 - 3n^2 + 3n - 1) + n(n^2 - 2n + 1)] \\
 &\quad + \left[\frac{18 \frac{n(n-1)}{2} + 5n + n^3}{6} \right] \\
 &= \frac{1}{6} (8n^3 - 24n^2 + 16n + 9n^4 - 27n^3 + 27n^2 - 9n + 3n^3 - 6n^2 \\
 &\quad + 3n + 9n^2 - 9n + 5n + n^3) \\
 &= \frac{1}{6} (9n^4 - 15n^3 + 6n^2 + 6n).
 \end{aligned}$$

□

قضیه ۸.۲.۳. برای هر (p, q) -گراف G داریم

$$t[M(G)] = t(G) + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^p \left[d_G^2(v_i) + 2m_i \binom{d_G(v_i)}{3} \right] - q,$$

که

$$m_i = \begin{cases} 1 & d_G(v_i) \geq 3 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

برهان. به ازای هر مثلث در G یک مثلث در $M(G)$ ، توسط رئوس روی یال‌های آن مثلث ایجاد می‌گردد. حال، فرض کنید نام راس زیرتقسیم‌کننده یال‌های G در $M(G)$ را نام یال متناظر با آن در G در نظر بگیریم و هم‌چنین فرض کنید v راسی دلخواه در G از درجه n بوده e_1, e_2, \dots, e_n یال‌های واقع بر آن باشند. دو حالت زیر را برای $M(G)$ داریم

حالت ۱. برای دو یال متمایز e_i و e_j ، مثلث $\langle \{v, e_i, e_j\} \rangle$ در $M(G)$ ظاهر می‌شود. لذا برای $n \geq 2$ ، مثلث متمایز در $M(G)$ خواهیم داشت.

حالت ۲. برای سه یال متمایز e_i, e_j و e_k ، مثلث $\langle \{e_i, e_j, e_k\} \rangle$ را در $M(G)$ خواهیم داشت. پس برای $n \geq 3$ ، مثلث متمایز در $M(G)$ ایجاد می‌شود.

با توجه به مطالب فوق و قضیه ۳۰.۱.۱ داریم

$$\begin{aligned} t[M(G)] &\geq t(G) + \sum_{i=1}^p \binom{d_G(v_i)}{2} + \sum_{i=1}^p m_i \binom{d_G(v_i)}{3} \\ &= t(G) + \sum_{i=1}^p \frac{d_G(v_i)(d_G(v_i) - 1)}{2} + \sum_{i=1}^p m_i \binom{d_G(v_i)}{3} \\ &= t(G) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p d_G^2(v_i) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p d_G(v_i) + \sum_{i=1}^p m_i \binom{d_G(v_i)}{3} \\ &= t(G) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p \left[d_G^2(v_i) + 2m_i \binom{d_G(v_i)}{3} \right] - q, \end{aligned}$$

که اگر $d_G(v_i) \geq 3$ ، $m_i = 1$ و در غیر این صورت $m_i = 0$ است. از طرف دیگر، فرض کنید $\langle \{v_i, v_j, v_k\} \rangle$ مثلثی در $M(G)$ باشد. اگر مثلث $\langle \{v_i, v_j, v_k\} \rangle$ توسط یکی از حالات فوق ایجاد شده باشد، قضیه برقرار خواهد بود. لذا روی حالات ممکن برای v_j, v_i و v_k بحث می‌کنیم.

(۱) اگر دقیقاً دو راس از v_i, v_j و v_k یال‌هایی از G باشند، آنگاه مثلث $\langle \{v_i, v_j, v_k\} \rangle$ از نوع حالت ۱ است.

(۲) اگر هر سه راس v_i, v_j و v_k یال‌های G بوده و زیرگراف القایی آن‌ها در G ستاره باشد، مثلث $\langle \{v_i, v_j, v_k\} \rangle$ از نوع حالت ۲ خواهد بود.

(۳) اگر هر سه راس v_i, v_j و v_k یال‌های G بوده و زیرگراف القایی آن‌ها در G گراف ستاره نباشد، آنگاه v_i, v_j و v_k یال‌های یک مثلث در G می‌باشند.

□ برای حالات دیگر، بوضوح مثلثی در $M(G)$ ایجاد نخواهد شد.

نتیجه ۹.۲.۳. برای $n > ۳$ ، $t[M(C_n)] = n$.

برهان. بوضوح C_n دارای n راس از درجه ۲ و n یال می‌باشد و چون $n > ۳$ ، لذا C_n فاقد مثلث است. بنابراین از قضیه ۸.۲.۳ داریم

$$t[M(C_n)] = ۰ + \frac{1}{۲}(n \times ۲^۲ + ۲ \times ۰) - n = n.$$

□

نتیجه ۱۰.۲.۳. برای هر (p, q) -گراف G ، که $\delta(G) \geq ۲$ ، داریم

$$t[M(\mu(G))] = ۴t(G) + \frac{1}{۲} \sum_{i=1}^p [۳d_G^{\vee}(v_i) + d_G^{\vee}(v_i)] + \frac{p(p^۲ - ۱)}{۶}.$$

برهان. از قضیه ۱.۲.۳ داریم

$$\frac{1}{۲} \sum_{i=1}^p \left[d_G^{\vee}(v_i) + ۲m_i \binom{d_G(v_i)}{۳} \right] = t[T(G)] - ۲t(G).$$

با جایگذاری این مقدار در قضیه ۸.۲.۳ خواهیم داشت

$$t[M(G)] = t[T(G)] - t(G) - q.$$

با توجه به تعریف گراف میشلسکی، $\mu(G)$ دارای $۴t(G)$ مثلث و $۳q + p$ یال می‌باشد. بنابراین

$$t[M[\mu(G)]] = t[T[\mu(G)]] - ۴t(G) - (۳q + p).$$

حال چون $\delta(G) \geq ۲$ است، با جایگذاری $t[T[\mu(G)]]$ از قضیه ۴.۲.۳ در رابطه فوق داریم

$$\begin{aligned} t[M[\mu(G)]] &= ۸t(G) + \frac{1}{۲} \sum_{i=1}^p [۳d_G^{\vee}(v_i) + d_G^{\vee}(v_i)] + \frac{۱۸q + ۵p + p^۳}{۶} - ۴t(G) - (۳q + p) \\ &= ۴t(G) + \frac{1}{۲} \sum_{i=1}^p [۳d_G^{\vee}(v_i) + d_G^{\vee}(v_i)] + \frac{p(p^۲ - ۱)}{۶}. \end{aligned}$$

□

قضیه ۱۱.۲.۳. برای هر (p, q) -گراف G ، که $p \geq ۴$ و $m = t(\bar{G})$ ، داریم

$$t[T(C(G))] = ۲m + \frac{1}{۶}(p^۴ - ۳p^۳ + ۵p^۲ - ۳p + ۱۲q).$$

برهان. فرض کنید $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$. با توجه به تعریف گراف مرکزی، $V(G) \cup E(G)$ مجموعه رئوس گراف $C(G)$ می‌باشد و برای راس دلخواه $v \in V[C(G)]$ داریم

$$d_{C(G)}(v) = \begin{cases} p - ۱ & v \in V(G) \\ ۲ & v \in E(G) \end{cases}.$$

حال، برای هر i که $1 \leq i \leq p$ ، $v_i = (b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{ip})$ را تعریف می‌کنیم، به طوری که $(b_{ij})_{p \times p}$ ماتریس مجاورت گراف \bar{G} است ($1 \leq i, j \leq p$) و در آن

$$b_{ij} = \begin{cases} 0 & i = j \text{ یا } v_i v_j \in E(G) \\ 1 & i \neq j \text{ و } v_i v_j \notin E(G) \end{cases}.$$

اگر v_i, v_j و v_k رئوس یک مثلث در گراف G باشند، ماتریس مجاورت آن به صورت زیر خواهد بود

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

که دترمینان آن ۲ است. در غیر این صورت (یعنی اگر v_i, v_j و v_k رئوس یک مثلث در گراف G نباشند)، دترمینان ماتریس مجاورت آن صفر می‌باشد. در گراف $C(G)$ ، با زیر تقسیم کردن یال‌ها، مثلث‌های G از بین می‌روند و تنها مثلث‌هایی که در $C(G)$ خواهیم داشت، مثلث‌هایی هستند که از مجاور کردن رئوس غیر مجاور G حاصل می‌شوند و متناظر با مثلث‌های گراف \bar{G} هستند. لذا $t[C(G)] = t(\bar{G}) = m$. بنابراین تعداد مثلث‌ها در گراف $C(G)$ نصف مجموع مقدار دترمینان مثلث‌ها در \bar{G} خواهد بود. در نتیجه داریم

$$t[C(G)] = \frac{1}{3} \sum_{i=j=k=1}^p \begin{vmatrix} b_{ii} & b_{ij} & b_{ik} \\ b_{ji} & b_{jj} & b_{jk} \\ b_{ki} & b_{kj} & b_{kk} \end{vmatrix} = t(\bar{G}) = m,$$

که $i < j < k$.

اکنون، با توجه به این که $p \geq 4$ ، از قضیه ۱.۲.۳ داریم

$$\begin{aligned} t[T(C(G))] &= 2t[C(G)] + \frac{1}{3} \sum_{v \in V[C(G)]} \left[d_{C(G)}^{\vee}(v) + 2m_v \binom{d_{C(G)}(v)}{3} \right] \\ &= 2m + \frac{1}{3} \left[p(p-1)^2 + q \times 2^2 + p \times 2 \times 1 \binom{p-1}{3} \right] \\ &= 2m + \frac{1}{3} \left[p^3 - 2p^2 + p + 4q + 2p \frac{(p-1)(p-2)(p-3)}{6} \right] \\ &= 2m + \frac{1}{3} \left[p^3 - 2p^2 + p + 4q + \frac{p^4 - 6p^3 + 11p^2 - 6p}{3} \right] \\ &= 2m + \frac{1}{6} (3p^3 - 6p^2 + 3p + 12q + p^4 - 6p^3 + 11p^2 - 6p) \\ &= 2m + \frac{1}{6} (p^4 - 3p^2 + 5p^2 - 3p + 12q). \end{aligned}$$

□

نتیجه ۱.۲.۳.۳ برای $n \geq 4$ داریم

$$t[T(C(K_n))] = \frac{1}{6} (n^4 - 3n^3 + 11n^2 - 9n).$$

برهان. چون K_n فاقد رئوس غیر مجاور است، لذا با توجه به اثبات قضیه ۱۱.۲.۳، $C(K_n)$ مثلث آزاد خواهد بود. حال، با جایگذاری $p = n$ ، $q = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ و $m = 0$ در قضیه ۱۱.۲.۳ خواهیم داشت

$$\begin{aligned} t[T[C(K_n)]] &= 2 \times 0 + \frac{1}{6} \left[n^4 - 3n^3 + 5n^2 - 3n + 12 \frac{n(n-1)}{2} \right] \\ &= \frac{1}{6} (n^4 - 3n^3 + 5n^2 - 3n + 6n^2 - 6n) \\ &= \frac{1}{6} (n^4 - 3n^3 + 11n^2 - 9n). \end{aligned}$$

□

نتیجه ۱۳.۲.۳. برای $m, n \geq 3$ داریم

$$t[T(C(K_{m,n}))] = t[T(K_{m+n})] - mn(m+n-4).$$

برهان. با استفاده از تعریف گراف مرکزی، $C(K_{m,n})$ دارای $m+n$ رأس از درجه 1 و mn رأس از درجه 2 می‌باشد. بعلاوه چون $m, n \geq 3$ ، با توجه به اثبات قضیه ۱۱.۲.۳، $C(K_{m,n})$ شامل $\binom{m}{3} + \binom{n}{3}$ مثلث خواهد بود. حال، با توجه به مطالب فوق، از قضیه ۱۰.۲.۳ و نتیجه ۲.۲.۳ قسمت (د) خواهیم داشت

$$\begin{aligned} t[T[C(K_{m,n})]] &= 2t[C(K_{m,n})] + \frac{1}{2} \sum_{v \in V[C(K_{m,n})]} \left[d_{C(K_{m,n})}^2(v) + 2m_v \binom{d_{C(K_{m,n})}(v)}{3} \right] \\ &= 2 \left[\binom{m}{3} + \binom{n}{3} \right] + \frac{1}{2} [(m+n)(m+n-1)^2 + mn \times 2^2 \\ &\quad + (m+n) \times 2 \times 1 \binom{m+n-1}{3}] \\ &= 2 \left[\binom{m}{3} + \binom{n}{3} \right] + \frac{1}{2} [(m+n)[(m+n)^2 - 2(m+n) + 1] + 4mn \\ &\quad + 2(m+n) \frac{(m+n-1)(m+n-2)(m+n-3)}{6}] \\ &= 2 \left[\binom{m}{3} + \binom{n}{3} \right] + \frac{1}{6} [3(m+n)^3 - 6(m+n)^2 + 3(m+n) \\ &\quad + 12mn + (m+n)^4 - 6(m+n)^3 + 11(m+n)^2 - 6(m+n)] \\ &= 2 \left[\binom{m}{3} + \binom{n}{3} \right] + \frac{1}{6} [(m+n)^4 - 3(m+n)^3 + 5(m+n)^2 \\ &\quad - 3(m+n) + 12mn] \\ &= 2 \left[\binom{m}{3} + \binom{n}{3} \right] + \frac{1}{6} [(m+n)^4 - (m+n)^3 - (m+n)^2 + (m+n)] \\ &\quad + \frac{1}{6} [-2(m+n)^3 + 6(m+n)^2 - 4(m+n) + 12mn] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{6}(2m^3 - 6m^2 + 4m + 2n^3 - 6n^2 + 4n) + t[T(K_{m+n})] + \frac{1}{6}(-2m^3 - 2n^3 - 6m^2n \\
&- 6mn^2 + 6m^2 + 6n^2 + 12mn - 4m - 4n + 12mn) \\
&= t[T(K_{m+n})] + \frac{1}{6}[-6mn(m+n-4)] \\
&= t[T(K_{m+n})] - mn(m+n-4).
\end{aligned}$$

□ لازم به ذکر است که، این نتیجه را با استفاده از قضیه ۱۱.۲.۳ نیز می‌توان ثابت کرد.

۳.۳ اعداد پوشش و رنگ ناپذیری خانواده ویژه‌ای از گراف‌ها

در این بخش، ابتدا اعداد استقلال یالی و پوشش یالی گراف کلی گراف میشلسکی گراف ستاره را بررسی می‌کنیم. سپس اعداد پوشش، پوشش یالی، رنگ ناپذیری و رنگی گراف کلی، میانی و مرکزی گراف ستاره (بجز عدد رنگی گراف مرکزی گراف ستاره و عدد رنگ ناپذیری گراف کلی گراف ستاره)، اعداد پوشش و پوشش یالی گراف میشلسکی گراف کامل و همچنین عدد استقلال گراف میانی گراف ستاره را می‌یابیم.

قضیه ۱.۳.۳. برای گراف ستاره $K_{1,n}$ ، که $n \geq 2$ داریم

$$\alpha'[T(\mu(K_{1,n}))] = \alpha[\mu(K_{1,n})] + \alpha(K_{1,n}) + \alpha'[\mu(K_{1,n})] - \alpha'(K_{1,n}) \quad (\text{الف})$$

$$\beta'[T(\mu(K_{1,n}))] = \beta'[\mu(K_{1,n})] + \beta'(K_{1,n}) + \beta[\mu(K_{1,n})] - \beta(K_{1,n}) \quad (\text{ب})$$

برهان. برای $n \geq 2$ فرض کنید

$$V(K_{1,n}) = \{x_i : 1 \leq i \leq n+1\},$$

$$E(K_{1,n}) = \{e_j = x_1x_{j+1} : 1 \leq j \leq n\}.$$

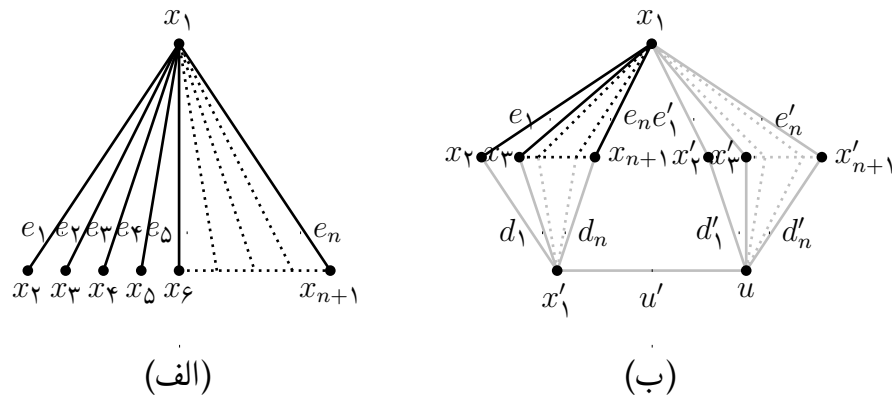
بوضوح $\alpha = n$ و $\beta = 1$. چون $K_{1,n}$ گرافی دوبخشی است، با بکارگیری قضایای ۳۳.۱.۱ و ۳۴.۱.۱ خواهیم داشت $\alpha' = \beta = 1$ و $\beta' = \alpha = n$ (قسمت (الف) شکل ۲.۳ را ببینید).

با توجه به تعریف گراف میشلسکی برای گراف ستاره $K_{1,n}$ داریم $|V[\mu(K_{1,n})]| = 2n + 3$ و $|E[\mu(K_{1,n})]| = 4n + 1$ (قسمت (ب) شکل ۲.۳ را ببینید). بوضوح $\{x_1, x'_1, u\}$ پوششی برای $\mu(K_{1,n})$ است و لذا $\beta[\mu(K_{1,n})] \leq 3$. برای پوشش دلخواه S از $\mu(K_{1,n})$ داریم

$$\sum_{v_i \in S} d_{\mu(K_{1,n})}(v_i) \geq |E[\mu(K_{1,n})]| = 4n + 1.$$

چون $\Delta[\mu(K_{1,n})] = 2n$ ، لذا $|S| \geq 3$. در نتیجه $\beta[\mu(K_{1,n})] = 3$. اکنون، با توجه به مفروضات فوق، از قضیه ۳۲.۱.۱ خواهیم داشت $\alpha[\mu(K_{1,n})] = 2n$.

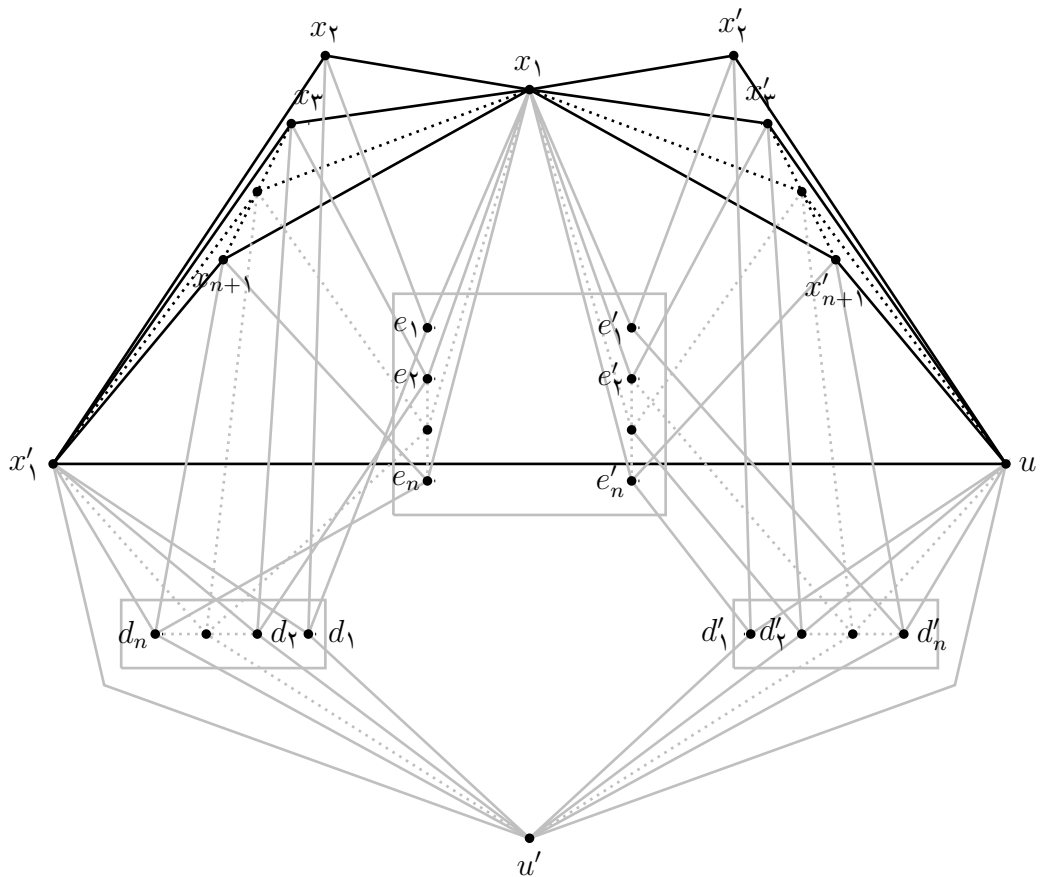
مجموعه یال‌های $K = \{x_1x_i : 2 \leq i \leq n\} \cup \{x_1x'_i : 2 \leq i \leq n\} \cup \{x_{n+1}x'_1, x'_{n+1}u\}$ ، $|K| = 2n$ ، تمام رئوس $\mu(K_{1,n})$ را می‌پوشاند. لذا $\beta'[\mu(K_{1,n})] \leq 2n$ از طرفی چون



شکل ۲.۳: (الف) گراف ستاره $K_{1,n}$ و (ب) گراف میشلسکی $K_{1,n}$

بنابراین $\alpha[\mu(K_{1,n})] = 2n$ پس حداقل $2n$ یال برای پوشاندن رئوس گراف $\mu(K_{1,n})$ لازم است. $\beta'[\mu(K_{1,n})] \geq 2n$ و در نتیجه $\beta'[\mu(K_{1,n})] = 2n$. با استفاده مجدد از قضیه ۳.۱.۱ خواهیم داشت $\alpha'[\mu(K_{1,n})] = 3$

لذا با توجه به تعریف گراف کلی برای $\mu(K_{1,n})$ داریم $|V[T(\mu(K_{1,n}))]| = 6n + 4$ (شکل ۳.۳).



شکل ۳.۳: گراف کلی گراف میشلسکی $K_{1,n}$

حداقل $\frac{|V[T(\mu(K_{1,n}))]|}{۲} = ۳n + ۲$ یال برای پوشاندن رئوس $T[\mu(K_{1,n})]$ لازم است. پس

$$\beta'[T[\mu(K_{1,n})]] \geq ۳n + ۲. \quad (۱.۳)$$

حال، در گراف $\mu(K_{1,n})$ ، برای هر $۱ \leq i \leq n$ ، قرار می‌دهیم

$$e_i = x_1 x_{i+1}, e'_i = x_1 x'_{i+1}, d_i = x'_1 x_{i+1}, d'_i = ux'_{i+1}.$$

در این صورت مجموعه یال‌های

$$L = \{e_i e'_i : ۱ \leq i \leq n\} \cup \{x_{i+1} d_i : ۲ \leq i \leq n\} \cup \{x'_{i+1} d'_i : ۱ \leq i \leq n\} \\ \cup \{x_1 x_2, d_1 x'_1, uu'\},$$

که $|L| = ۳n + ۲$ ، تمام رئوس $T[\mu(K_{1,n})]$ را می‌پوشاند. لذا

$$\beta'[T[\mu(K_{1,n})]] \leq ۳n + ۲. \quad (۲.۳)$$

بنابراین از ۱.۳ و ۲.۳ داریم $\beta'[T[\mu(K_{1,n})]] = ۳n + ۲$ با استفاده از قضیه ۳.۳.۱.۱ برای $T[\mu(K_{1,n})]$ خواهیم داشت $\alpha'[T[\mu(K_{1,n})]] = ۳n + ۲$. \square

نتیجه ۲.۳.۳. برای گراف ستاره $K_{1,n}$ ، که $n \geq ۲$ ، داریم

$$\alpha'[T(\mu(K_{1,n}))] = \beta'[T(\mu(K_{1,n}))].$$

قضیه ۳.۳.۳. الف) $\beta[T(K_{1,n})] = \beta'[T(K_{1,n})] = \beta'[M(K_{1,n})] = \beta'[C(K_{1,n})] = n + ۱$ هم‌چنین $\alpha[M(K_{1,n})] = n + ۱$

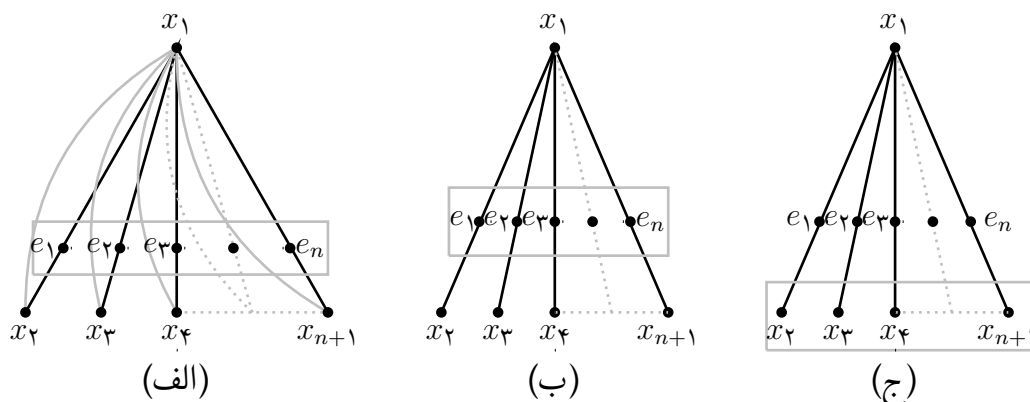
ب) $(n \geq ۲), \beta[C(K_{1,n})] = \beta[\mu(K_n)] = \beta'[\mu(K_n)] = \chi[T(K_{1,n})] = n + ۱$

ج) $\chi_c[C(K_{1,n})] = \chi_c[M(K_{1,n})] = \chi[M(K_{1,n})] = n + ۱$

برهان. با توجه به قسمت الف) شکل ۴.۳، $\{x_2, x_3, \dots, x_{n+1}\}$ یک مجموعه مستقل راسی برای $T(K_{1,n})$ می‌باشد. لذا $\alpha[T(K_{1,n})] \geq n$. چون x_1 با تمام رئوس $T(K_{1,n})$ مجاور است، پس هر مجموعه مستقل در $T(K_{1,n})$ با حداقل دو راس شامل x_1 نمی‌باشد. هم‌چنین با توجه مجدد به قسمت الف) شکل ۴.۳، چون e_i ها ($۱ \leq i \leq n$) دوه‌دو مجاورند، لذا هر مجموعه مستقل در $T(K_{1,n})$ حداکثر شامل یکی از e_i ها است. ادعا می‌کنیم $\alpha[T(K_{1,n})] \leq n$. به خلف فرض کنید $\{v_1, v_2, \dots, v_{n+1}\}$ مجموعه‌ای مستقل در $T(K_{1,n})$ باشد. با توجه به مطالب فوق $v_i \neq x_1$ ($۱ \leq i \leq n + ۱$). لذا v_i یی موجود است که برای یک $۱ \leq j \leq n$ ، $v_i = e_j$ می‌باشد. اما این مطلب با این واقعیت که e_j مجاور x_{j+1} است در تناقض است. لذا ادعا درست است و خواهیم داشت $\alpha[T(K_{1,n})] = n$. از قضیه ۳.۳.۱.۱ نتیجه می‌شود $\beta[T(K_{1,n})] = n + ۱$. به صورت مشابه می‌توان نشان داد

$$\beta'[T(K_{1,n})] = \beta'[M(K_{1,n})] = \alpha[M(K_{1,n})] = \beta'[C(K_{1,n})] = n + ۱,$$

$$\beta[C(K_{1,n})] = n + ۱ \quad (n \geq ۲).$$



شکل ۴.۳: (الف) گراف کلی $K_{1,n}$ ، (ب) گراف میانی $K_{1,n}$ و (ج) گراف مرکزی $K_{1,n}$

حال، برای هر $n \geq 2$ ثابت می‌کنیم

$$\beta[\mu(K_n)] = \beta'[\mu(K_n)] = n + 1.$$

فرض کنید مجموعه رئوس گراف کامل K_n باشد. با توجه به تعریف گراف میشلسکی برای گراف K_n داریم $|V[\mu(K_n)]| = 2n + 1$. چون هر یال حداکثر ۲ راس متمایز را می‌پوشاند، لذا $\beta'[\mu(K_n)] \geq n + 1$. از طرفی مجموعه یال‌های

$$K = \{v_i v'_{i+1} : 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{v_n v'_1, v'_n u\},$$

که $|K| = n + 1$ ، تمام رئوس $\mu(K_n)$ را می‌پوشانند. پس $\beta'[\mu(K_n)] \leq n + 1$. بنابراین

$$\beta'[\mu(K_n)] = n + 1.$$

حال، چون $\{v'_1, v'_2, \dots, v'_n\}$ در $\mu(K_n)$ مجموعه‌ای مستقل است، پس $\alpha[\mu(K_n)] \geq n$. ادعا می‌کنیم $\alpha[\mu(K_n)] = n$. به برهان خلف فرض کنید $S = \{u_1, u_2, \dots, u_{n+1}\}$ یک مجموعه مستقل راسی در $\mu(K_n)$ باشد. چون v_i ها $(1 \leq i \leq n)$ دوه‌دو مجاورند، لذا حداکثر یکی از v_i ها در S واقع است. فرض کنیم $v_j \in S$. با توجه به تعریف گراف میشلسکی v_j با تمام v'_k هایی که $k \neq j$ است، مجاور می‌باشد و این با مستقل بودن S متناقض است. همچنین اگر $u \in S$ باشد، در این صورت برای هر $1 \leq i \leq n$ ، $v'_i \notin S$ که مجدداً تناقض است (u ریشه گراف میشلسکی K_n در نظر گرفته شده است). بنابراین $\alpha[\mu(K_n)] = n$ و از قضیه ۳۲.۱.۱ داریم

$$\beta[\mu(K_n)] = n + 1.$$

□

با توجه به مطالب فوق و قضیه ۵.۲.۲ اثبات قضیه کامل می‌شود.

۴.۳ کران‌های بالا

در این بخش، بعد از تعریف دنباله درجات تایید شده گراف، کران‌های بالایی برای تعداد مثلث‌های گراف کلی، گراف میشلسکی مرتبه n و گراف کلی گراف میشلسکی مرتبه n یک گراف می‌یابیم.

تعریف ۱.۴.۳ (دنباله درجات تایید شده گراف). فرض کنید (p_1, p_2, \dots, p_n) و (q_1, q_2, \dots, q_n) دنباله‌هایی از اعداد حقیقی باشند. در این صورت دنباله (p_1, p_2, \dots, p_n) توسط دنباله (q_1, q_2, \dots, q_n) تایید شده است، اگر برای هر $1 \leq i \leq n$ ، $p_i \leq q_i$ باشد. حال، فرض کنید G و H دو گراف هم مرتبه باشند. اگر دنباله غیر کاهشی درجات G توسط دنباله غیر کاهشی درجات H تایید شده باشد، گوئیم دنباله درجات G توسط دنباله درجات H تایید شده است.

قبل از ارائه کران‌های بالا برای تعداد مثلث‌های گراف‌های ذکر شده در ابتدای بخش، لم زیر را که در ادامه مورد استفاده قرار می‌گیرد یادآوری می‌کنیم.

لم ۲.۴.۳ [۲، ۴] اگر گراف G فاقد K_n باشد، آنگاه دنباله درجات گراف G توسط دنباله درجات یک گراف $(n-1)$ -بخشی کامل تایید می‌شود.

قضیه ۳.۴.۳. فرض کنید دنباله درجات H توسط دنباله درجات G تایید شده و $t(H) \leq t(G)$ باشد. داریم

$$(الف) \quad t[T(H)] \leq t[T(G)]$$

$$(ب) \quad t[\mu^n(H)] \leq t[\mu^n(G)]$$

$$(ج) \quad t(T[\mu^n(H)]) \leq t(T[\mu^n(G)])$$

در حالت خاص، برای $n \geq 2$ داریم $t(T[\mu^n(C(K_{1,n})]) \leq t(T[\mu^{n+1}(K_n)])$

برهان. فرض کنید $V(H) = \{v_i : 1 \leq i \leq n\}$ و $V(G) = \{u_i : 1 \leq i \leq n\}$

(الف) چون دنباله درجات H توسط دنباله درجات G تایید شده است، لذا

$$\sum_{i=1}^n d_H^{\checkmark}(v_i) \leq \sum_{i=1}^n d_G^{\checkmark}(u_i),$$

$$\sum_{i=1}^n m_{v_i} \binom{d_H(v_i)}{3} \leq \sum_{i=1}^n m_{u_i} \binom{d_G(u_i)}{3},$$

که m_{v_i} و m_{u_i} ($1 \leq i \leq n$) را در قضیه ۱.۲.۳ تعریف کردیم. هم‌چنین طبق فرض قضیه داریم

$$t(H) \leq t(G) \quad \text{بنابراین}$$

$$2t(H) + \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n \left[d_H^{\checkmark}(v_i) + 2m_{v_i} \binom{d_H(v_i)}{3} \right] \leq 2t(G) + \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n \left[d_G^{\checkmark}(u_i) + 2m_{u_i} \binom{d_G(u_i)}{3} \right].$$

در نتیجه از قضیه ۱.۲.۳ خواهیم داشت $t[T(H)] \leq t[T(G)]$

(ب) به استقرا روی n ثابت می‌کنیم حکم برقرار است.

آزمون استقرا. $n = 0$. بوضوح با توجه به تعریف گراف میشلسکی مرتبه n و فرض قضیه حکم برقرار است.

$n = 1$. چون دنباله درجات H توسط دنباله درجات G تایید شده و $t(H) \leq t(G)$ است، لذا با

توجه به تعریف گراف میشلسکی دنباله درجات $\mu(H)$ نیز توسط دنباله درجات $\mu(G)$ تایید شده

و $t[\mu(H)] \leq t[\mu(G)]$ خواهد بود.

فرض استقرا. فرض کنید حکم برای گراف‌های میشلسکی با مرتبه کمتر از n برقرار باشد.

حکم استقرا. نشان می‌دهیم برای گراف‌های میشلسکی از مرتبه n نیز حکم برقرار است. با توجه به فرض استقرا داریم $t[\mu^{n-1}(H)] \leq t[\mu^{n-1}(G)]$. لذا $t[\mu^{n-1}(H)] \leq 4t[\mu^{n-1}(G)]$. حال، با توجه به این‌که تعداد مثلث‌ها در گراف میشلسکی یک گراف 4 برابر تعداد مثلث‌های آن گراف است، پس $t[\mu(\mu^{n-1}(H))] \leq t[\mu(\mu^{n-1}(G))]$. در نتیجه از تعریف گراف میشلسکی مرتبه n خواهیم داشت $t[\mu^n(H)] \leq t[\mu^n(G)]$. لذا حکم برای گراف میشلسکی مرتبه n نیز برقرار است.

(ج) طبق فرض دنباله درجات H توسط دنباله درجات G تایید شده است. لذا با توجه به تعریف گراف میشلسکی مرتبه n ، دنباله درجات $\mu^n(H)$ نیز توسط دنباله درجات $\mu^n(G)$ تایید شده خواهد بود. هم‌چنین طبق قسمت (ب)، $t[\mu^n(H)] \leq t[\mu^n(G)]$ می‌باشد. پس شرایط قسمت (الف) برقرار است و لذا خواهیم داشت $t(T[\mu^n(H)]) \leq t(T[\mu^n(G)])$.

با توجه به تعریف گراف میشلسکی و گراف مرکزی، $\mu(K_n)$ و $C(K_{1,n})$ از مرتبه $2n + 1$ هستند. هم‌چنین $\mu(K_n)$ شامل n راس از درجه $2 - 2n$ ، n راس از درجه n و یک راس دیگر از درجه n است و $C(K_{1,n})$ نیز شامل n راس از درجه n ، n راس از درجه 2 و یک راس دیگر از درجه n می‌باشد. چون $n \geq 2$ ، پس دنباله درجات $C(K_{1,n})$ توسط دنباله درجات $\mu(K_n)$ تایید می‌شود. حال، با توجه به اثبات قضیه ۱۱.۲.۳، چون $K_{1,n}$ ، n راس غیر مجاور دارد، لذا $t[C(K_{1,n})] = \binom{n}{3}$. از طرفی چون K_n ، $\binom{n}{3}$ مثلث دارد، لذا $t[\mu(K_n)] = 4\binom{n}{3}$. بنابراین $t[C(K_{1,n})] \leq t[\mu(K_n)]$. با توجه به مفروضات فوق از قسمت (ج) داریم $t(T[\mu^n(C(K_{1,n}))]) \leq t(T[\mu^n(\mu(K_n))])$. در نتیجه از تعریف گراف میشلسکی مرتبه n خواهیم داشت

$$t(T[\mu^n(C(K_{1,n}))]) \leq t(T[\mu^{n+1}(K_n)]).$$

□

قضیه ۴.۴.۳. ۱. فرض کنید G گرافی از مرتبه n باشد. داریم

$$t[T(G)] \leq t[T(K_n)] \quad (\text{الف})$$

$$t[\mu^n(G)] \leq t[\mu^n(K_n)] \quad (\text{ب})$$

$$t[T(\mu^n(G))] \leq t[T(\mu^n(K_n))] \quad (\text{ج})$$

۲. اگر G گرافی مثلث آزاد از مرتبه n باشد، آن‌گاه اعداد صحیح و مثبت a و b که $a + b = n$ موجود است، به‌طوری‌که

$$t[T(G)] \leq t[T(K_{a,b})] \quad (\text{د})$$

$$t[\mu^n(G)] \leq t[\mu^n(K_{a,b})] \quad (\text{ه})$$

$$t[T(\mu^n(G))] \leq t[T(\mu^n(K_{a,b}))] \quad (\text{و})$$

برهان. بوضوح دنباله درجات گراف G از مرتبه n توسط دنباله درجات گراف K_n تایید شده و هم‌چنین $t(G) \leq t(K_n)$ است. بنابراین قسمت‌های (الف)، (ب) و (ج) از قضیه ۳.۴.۳ نتیجه می‌شوند. در قسمت ۲، چون G گرافی مثلث آزاد از مرتبه n است، با توجه به لم ۲.۴.۳ دنباله درجات گراف G توسط دنباله درجات گراف دوبخشی $K_{a,b}$ ، که $a + b = n$ ، تایید می‌شود. بنابراین با استفاده مجدد از قضیه ۳.۴.۳ قسمت‌های (د)، (ه) و (و) نیز حاصل می‌شوند. \square

فصل ۴

نتایج جدیدی برای اعداد استقلال، پوششی و رنگ ناپذیری

در این فصل، در ادامه فصل‌های قبل، اعداد پوشش و استقلال راسی و یالی را برای برخی از ساختارهای درخت‌هایی خاص بررسی می‌نماییم و سپس به اعداد رنگی و رنگ ناپذیری گراف مرکزی برخی از گراف‌های معروف می‌پردازیم. در انتها عدد رنگ ناپذیری گراف هزارپا را نیز محاسبه می‌کنیم. نتایج این فصل توسط نگارنده حاصل شده است.

۱.۴ اعداد استقلال و پوشش راسی و یالی گراف کلی، مرکزی و میانی هزارپا

این بخش شامل بررسی اعداد پوشش و استقلال راسی و یالی گراف مرکزی، میانی و کلی هزارپا می‌باشد.

قضیه ۱.۱.۴. برای گراف هزارپا C (شکل ۱.۴) داریم

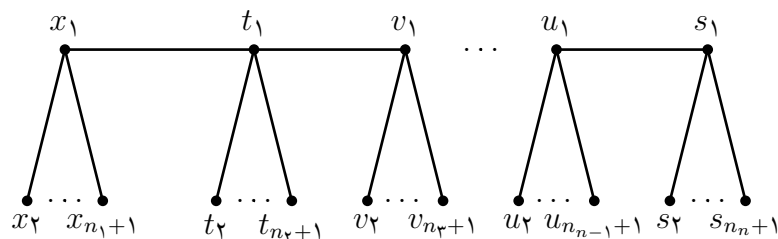
$$\alpha[T(C)] = \alpha[C(C)] = \beta[M(C)] = \sum_{i=1}^n n_i + n - 1 \quad (\text{الف})$$

$$\alpha'[T(C)] = \alpha'[C(C)] = \alpha'[M(C)] = \sum_{i=1}^n n_i + n - 1 \quad (\text{ب})$$

$$\beta[T(C)] = \beta[C(C)] = \alpha[M(C)] = \sum_{i=1}^n n_i + n \quad (\text{ج})$$

$$\beta'[T(C)] = \beta'[C(C)] = \beta'[M(C)] = \sum_{i=1}^n n_i + n \quad (\text{د})$$

اگر $\{x_1, t_1, \dots, u_1, s_1\}$ را مجموعه رئوس مخصوص گراف C بنامیم (شکل ۱.۴ را ببینید)، n_1 تعداد رئوس آویزان راس مخصوص x_1 ، n_2 تعداد رئوس آویزان راس مخصوص t_1 و به همین ترتیب، n_n تعداد رئوس آویزان راس مخصوص s_1 می‌باشد.

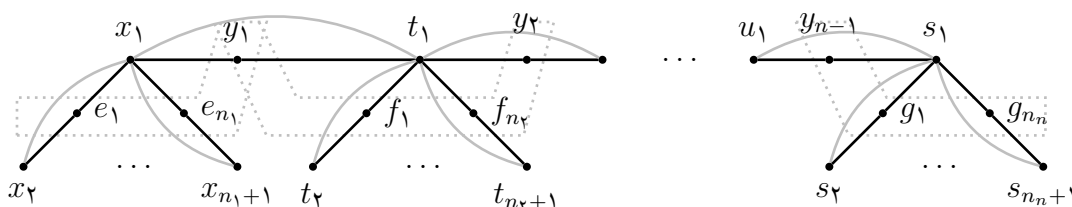


شکل ۱.۴: گراف هزارپا \mathcal{C}

برهان. این قضیه را در سه قسمت ثابت می‌کنیم. قسمت اول. با استفاده از تعریف گراف کلی داریم

$$\begin{aligned} |V[T(\mathcal{C})]| &= 2n_1 + \dots + 2n_n + n + n - 1 \\ &= 2 \sum_{i=1}^n n_i + 2n - 1. \end{aligned}$$

با توجه به شکل ۲.۴ مجموعه رئوس $K = \{x_2, \dots, x_{n_1+1}, \dots, s_2, \dots, s_{n_n+1}, y_1, \dots, y_{n-1}\}$ که $|K| = \sum_{i=1}^n n_i + n - 1$ ، مجموعه‌ای مستقل برای $T(\mathcal{C})$ است. لذا



شکل ۲.۴: گراف کلی گراف هزارپا \mathcal{C}

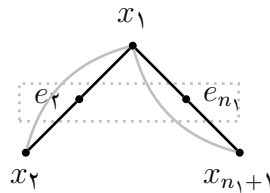
$$\alpha[T(\mathcal{C})] \geq \sum_{i=1}^n n_i + n - 1. \quad (1.4)$$

ادعا می‌کنیم

$$\alpha[T(\mathcal{C})] \leq \sum_{i=1}^n n_i + n - 1. \quad (2.4)$$

اثبات ادعا. اگر گراف کلی گراف هزارپا با n راس مخصوص را با $T(\mathcal{C}_n)$ نشان دهیم، با استقرا روی تعداد رئوس مخصوص، نشان می‌دهیم ادعا برقرار است.

آزمون استقرا. $n = 1$. بوضوح با توجه به شکل ۲.۴ داریم $\alpha[T(\mathcal{C}_1)] = n_1$

شکل ۳.۴: گراف کلی K_{1, n_1}

فرض استقرا. فرض کنید ادعا برای گراف کلی گراف هزارپا با کمتر از n راس مخصوص برقرار باشد. پس برای گراف کلی گراف هزارپا با $n - 1$ راس مخصوص داریم

$$\alpha[T(C_{n-1})] \leq \sum_{i=1}^{n-1} n_i + n - 2.$$

حکم استقرا. نشان می‌دهیم برای گراف کلی گراف هزارپا با n راس مخصوص نیز ادعا برقرار است. به برهان خلف فرض کنیم $\alpha[T(C_n)] > \sum_{i=1}^n n_i + n - 1$. راس مخصوص انتهایی و رئوس مجاور غیر مخصوص آن را از گراف $T(C_n)$ حذف کرده تا به گراف $T(C_{n-1})$ برسیم. بوضوح قسمت حذف شده $n_n + 1$ راس مستقل دارد. لذا گراف باقیمانده، که گراف کلی گراف هزارپا با $n - 1$ راس مخصوص است، بیشتر از $\sum_{i=1}^{n-1} n_i + n - 2$ راس مستقل دارد. لذا گراف کلی گراف $n - 1$ راس مستقل خواهد داشت. این مطلب با فرض استقرا در تناقض است. لذا فرض خلف باطل و ادعا برقرار است.

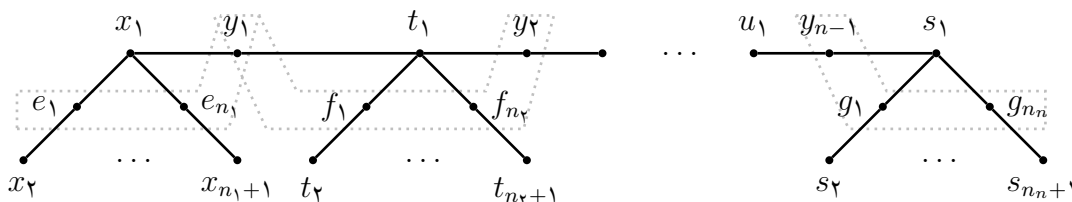
لذا از ۱.۴ و ۲.۴ نتیجه می‌شود $\alpha[T(C)] = \sum_{i=1}^n n_i + n - 1$. حال، چون با توجه به قضیه ۳۲.۱.۱ $\beta[T(C)] = \sum_{i=1}^n n_i + n$ است، بنابراین $\alpha[T(C)] + \beta[T(C)] = 2 \sum_{i=1}^n n_i + 2n - 1$ مجدداً با توجه به شکل ۲.۴ مجموعه یال‌های

$$L = \{e_i x_{i+1} : 1 \leq i \leq n_1\} \cup \dots \cup \{g_i s_{i+1} : 1 \leq i \leq n_n\} \\ \cup \{x_1 y_1, t_1 y_2, \dots, u_1 y_{n-1}, s_1 s_2\},$$

که $|L| = \sum_{i=1}^n n_i + n$ ، تمام رئوس $T(C)$ را می‌پوشاند. پس $\beta'[T(C)] \leq \sum_{i=1}^n n_i + n$. نشان می‌دهیم $\beta'[T(C)] \geq \sum_{i=1}^n n_i + n$ و لذا خواهیم داشت $\beta'[T(C)] = \sum_{i=1}^n n_i + n$. به برهان خلف فرض کنیم $\beta'[T(C)] < \sum_{i=1}^n n_i + n$. بدون آن‌که به کلیت خللی وارد آید فرض کنیم $\beta'[T(C)] = \sum_{i=1}^n n_i + n - 1$. لذا باید $\sum_{i=1}^n n_i + n - 1$ یال، $2 \sum_{i=1}^n n_i + 2n - 1$ راس را بپوشانند. اما چون هر یال حداکثر دو راس دارد، پس این تعداد یال حداکثر $2 \sum_{i=1}^n n_i + 2n - 2$ راس را پوشش می‌دهد و حداقل یک راس پوشیده نشده باقی می‌ماند و این یک تناقض است. بنابراین $\beta'[T(C)] \geq \sum_{i=1}^n n_i + n$.

با استفاده از قضیه ۳۳.۱.۱ داریم $\alpha'[T(C)] + \beta'[T(C)] = 2 \sum_{i=1}^n n_i + 2n - 1$ چون $\beta'[T(C)] = \sum_{i=1}^n n_i + n$ ، لذا خواهیم داشت $\alpha'[T(C)] = \sum_{i=1}^n n_i + n - 1$.

قسمت دوم. با توجه به شکل ۴.۴ مجموعه رئوس $J = \{x_1, \dots, x_{n_1+1}, \dots, s_1, \dots, s_{n_n+1}\}$ که $|J| = \sum_{i=1}^n n_i + n$ است. پس $\alpha[M(C)] \geq \sum_{i=1}^n n_i + n$ مشابه قسمت قبل، با استقرا روی تعداد رئوس مخصوص C ثابت می‌شود $\alpha[M(C)] \leq \sum_{i=1}^n n_i + n$ و بنابراین $\alpha[M(C)] = \sum_{i=1}^n n_i + n$



شکل ۴.۴: گراف میانی گراف هزارپا C

چون با توجه به تعریف گراف میانی $|V[M(C)]| = 2 \sum_{i=1}^n n_i + 2n - 1$ است، لذا با استفاده از قضیه ۳۲.۱.۱ و مقدار فوق خواهیم داشت $\beta[M(C)] = \sum_{i=1}^n n_i + n - 1$ با توجه به شکل ۴.۴ مجموعه یال‌های

$$I = \{e_i x_{i+1} : 1 \leq i \leq n_1\} \cup \dots \cup \{g_i s_{i+1} : 1 \leq i \leq n_n\} \\ \cup \{x_1 y_1, t_1 y_2, \dots, u_1 y_{n-1}, s_1 g_1\},$$

که $|I| = \sum_{i=1}^n n_i + n$ ، تمام رئوس $M(C)$ را می‌پوشاند. لذا $\beta'[M(C)] \leq \sum_{i=1}^n n_i + n$ مشابه قسمت قبل نتیجه می‌شود $\beta'[M(C)] \geq \sum_{i=1}^n n_i + n$ پس $\beta'[M(C)] = \sum_{i=1}^n n_i + n$ و از قضیه ۳۳.۱.۱ خواهیم داشت $\alpha'[M(C)] = \sum_{i=1}^n n_i + n - 1$ قسمت سوم. با توجه به شکل ۵.۴ مجموعه رئوس

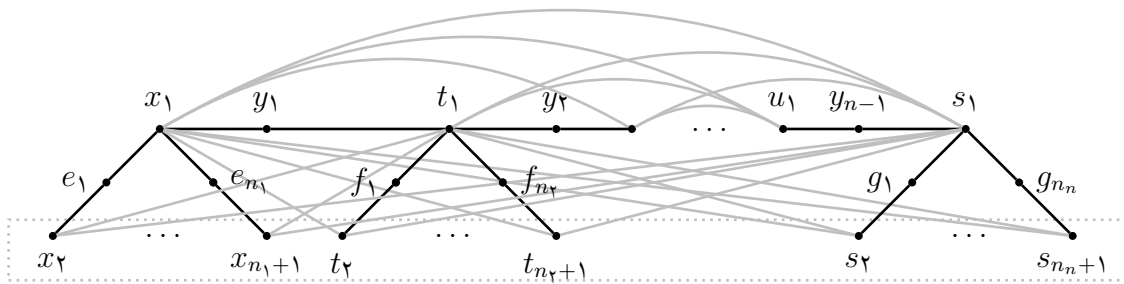
$$R = \{e_1, \dots, e_{n_1}, \dots, g_1, \dots, g_{n_n}, y_1, \dots, y_{n-1}\},$$

که $|R| = \sum_{i=1}^n n_i + n - 1$ ، مجموعه‌ای مستقل برای $C(C)$ است. لذا $\alpha[C(C)] \geq \sum_{i=1}^n n_i + n - 1$ مشابه قسمت اول، با استقرا روی تعداد رئوس مخصوص C ثابت می‌شود $\alpha[C(C)] \leq \sum_{i=1}^n n_i + n - 1$ و در نتیجه $\alpha[C(C)] = \sum_{i=1}^n n_i + n - 1$

از تعریف گراف مرکزی داریم $|V[C(C)]| = 2 \sum_{i=1}^n n_i + 2n - 1$. حال، با توجه به دو مقدار فوق از قضیه ۳۲.۱.۱ خواهیم داشت $\beta[C(C)] = \sum_{i=1}^n n_i + n$ با توجه به شکل ۵.۴ مجموعه یال‌های

$$S = \{e_i x_{i+1} : 1 \leq i \leq n_1\} \cup \dots \cup \{g_i s_{i+1} : 1 \leq i \leq n_n\} \cup \{x_1 y_1, \dots, u_1 y_{n-1}, s_1 g_1\},$$

که $|S| = \sum_{i=1}^n n_i + n$ ، تمام رئوس $C(C)$ را می‌پوشاند. پس $\beta'[C(C)] \leq \sum_{i=1}^n n_i + n$ با استفاده مجدد از برهان خلف نتیجه می‌شود $\beta'[C(C)] \geq \sum_{i=1}^n n_i + n$ و لذا $\beta'[C(C)] = \sum_{i=1}^n n_i + n$ با توجه به این مقدار و این که $|V[C(C)]| = 2 \sum_{i=1}^n n_i + 2n - 1$ ، از قضیه ۳۳.۱.۱ خواهیم داشت $\alpha'[C(C)] = \sum_{i=1}^n n_i + n - 1$ □



شکل ۵.۴: گراف مرکزی گراف هزارپا C

۲.۴ اعداد استقلال و پوشش یالی گراف کلی گراف میشلسکی برخی از درختها

در این بخش، پس از ارائه کران‌هایی برای عدد استقلال گراف میشلسکی یک گراف، اعداد استقلال یالی و پوشش یالی گراف کلی گراف میشلسکی برخی از درختها را بررسی می‌کنیم.

قضیه ۱.۲.۴. برای گراف G داریم

$$\alpha[\mu(G)] \leq \max\{2\alpha(G), |V(G)|\}.$$

برهان. فرض کنید $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ مجموعه رئوس گراف G باشد. اگر $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ مجموعه جفت متناظر با V باشد، آن‌گاه $V[\mu(G)] = V \cup U \cup \{w\}$ است. هم‌چنین $E[\mu(G)] = E(G) \cup \{u_i v' : v_i v' \in E(G), 1 \leq i \leq n\} \cup \{u_i w : 1 \leq i \leq n\}$.

اگر $\alpha(G) = n$ ، آن‌گاه بوضوح G تهی است. لذا با توجه به تعریف گراف میشلسکی خواهیم داشت $\alpha[\mu(G)] = 2\alpha(G)$. پس در حالتی که $\alpha(G) = n$ ($G = \emptyset$) داریم $\alpha[\mu(G)] = 2\alpha(G) \leq \max\{2\alpha(G), |V(G)|\}$.

حال، فرض کنید $\alpha(G) < n$ و S بزرگ‌ترین مجموعه مستقل $\mu(G)$ باشد. روی حالات ممکن برای ریشه گراف $\mu(G)$ بحث می‌کنیم.

حالت ۱. $w \in S$. پس $S \cap U = \emptyset$ و $S \cap V$ مجموعه‌ای مستقل برای G خواهد بود. در نتیجه $\alpha(G) \geq \alpha[\mu(G)] - 1$ و لذا

$$\alpha[\mu(G)] \leq \alpha(G) + 1 \leq n - 1 + 1 = n = |V(G)|.$$

بنابراین $\alpha[\mu(G)] \leq \max\{2\alpha(G), |V(G)|\}$.

حالت ۲. $w \notin S$. پس $S \cap U \neq \emptyset$. ادعا می‌کنیم برای هر $u_i \in S \cap U$ ، راس جفت آن (یعنی v_i) نیز عضو S است. به برهان خلف فرض کنیم چنین نباشد. لذا u_i یی موجود است که $u_i \in S$ و $v_i \notin S$. پس همسایه‌ای از v_i در S می‌باشد. چون u_i با تمام همسایه‌های v_i مجاور

است، لذا همسایه‌ای از u_i نیز در S خواهد بود و بنابراین $u_i \notin S$. در نتیجه $u_i \notin S \cap U$ ، که این یک تناقض است. پس ادعا برقرار است.

حال، چون $S \cap V$ مجموعه‌ای مستقل برای G است، پس $\alpha[\mu(G)] \geq |S \cap V| \geq \frac{\alpha[\mu(G)]}{4}$ و لذا $\alpha(G) \geq 2\alpha(G)$. بنابراین در این حالت نیز حکم برقرار است.

□

قضیه ۲.۲.۴. برای گراف G داریم

$$\alpha[\mu(G)] \geq 2\alpha(G).$$

برهان. فرض کنید $V(G)$ مجموعه رئوس گراف G باشد. اگر U مجموعه جفت متناظر با $V(G)$ در $\mu(G)$ باشد، آنگاه $V[\mu(G)] = V(G) \cup U \cup \{w\}$ است. فرض کنید S بزرگ‌ترین مجموعه مستقل راسی G باشد. لذا $|S| = \alpha(G)$. حال، رئوس مجموعه جفت متناظر با S در U را به S اضافه می‌کنیم. با توجه به تعریف گراف میشلسکی، مجموعه حاصل مجموعه‌ای مستقل برای $\mu(G)$ است. بنابراین $\alpha[\mu(G)] \geq 2\alpha(G)$.

□

نتیجه ۳.۲.۴. اگر $\alpha(G) \geq \frac{|V(G)|}{4}$ باشد، آنگاه $\alpha[\mu(G)] = 2\alpha(G)$.

برهان. چون طبق فرض $\alpha(G) \geq \frac{|V(G)|}{4}$ است، پس $2\alpha(G) \geq |V(G)|$ و لذا با توجه به قضیه ۱.۲.۴ داریم

$$\alpha[\mu(G)] \leq 2\alpha(G). \quad (۳.۴)$$

از طرفی با توجه به قضیه ۲.۲.۴ داریم

$$\alpha[\mu(G)] \geq 2\alpha(G). \quad (۴.۴)$$

□

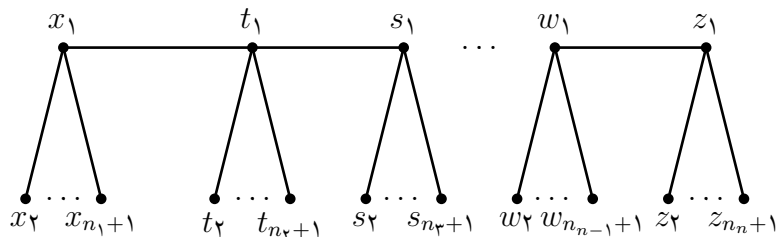
بنابراین از ۳.۴ و ۴.۴ خواهیم داشت $\alpha[\mu(G)] = 2\alpha(G)$.

قضیه ۴.۲.۴. برای گراف هزارپا C (شکل ۶.۴)، که برای هر $1 \leq i \leq n$ ، $n_i \geq 1$ و حداقل برای یک $1 \leq i \leq n$ ، $n_i \geq 2$ داریم

$$\alpha'[T(\mu(C))] = \alpha[\mu(C)] + \alpha(C) + 5\alpha'(C) - \alpha'[\mu(C)] \quad (\text{الف})$$

$$\beta'[T(\mu(C))] = \beta'[\mu(C)] + \beta'(C) + 5\beta(C) - \beta[\mu(C)] \quad (\text{ب})$$

برهان. بوضوح با توجه به شکل ۶.۴ داریم $\alpha(C) = \sum_{i=1}^n n_i$ و $\beta(C) = n$. چون C درخت و فاقد دور است، لذا با توجه به قضیه ۳۱.۱.۱، C دوبخشی خواهد بود. از آنجایی که C گرافی دوبخشی از مرتبه $\sum_{i=1}^n n_i + n$ است، لذا از قضایای ۳۳.۱.۱ و ۳۴.۱.۱، $\alpha'(C) = n$ و $\beta'(C) = \sum_{i=1}^n n_i$ حاصل می‌شوند.



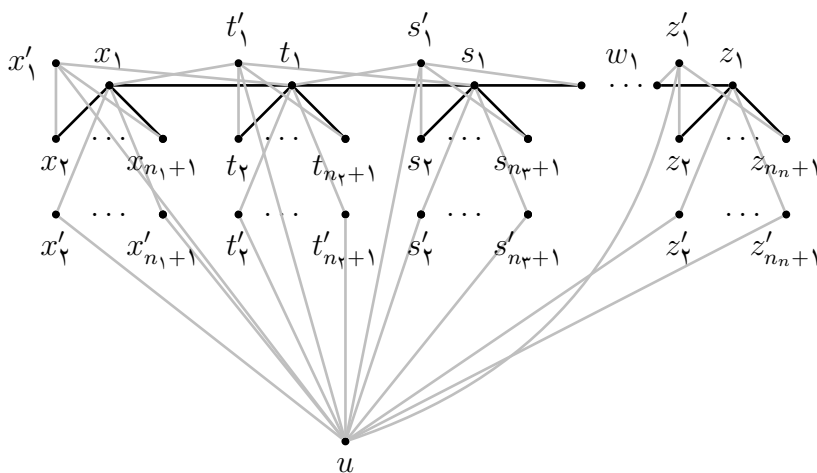
شکل ۶.۴: گراف هزارپا C

چون بنا به فرض برای هر $1 \leq i \leq n$ ، $n_i \geq 1$ است، پس بوضوح $\frac{|V(C)|}{4} \geq \alpha(C)$ می‌باشد. لذا از نتیجه ۳.۲.۴ داریم $\alpha[\mu(C)] = 2 \sum_{i=1}^n n_i$ از تعریف گراف میشلسکی برای C داریم

$$|V[\mu(C)]| = 2 \sum_{i=1}^n n_i + 2n + 1,$$

$$|E[\mu(C)]| = \sum_{i=1}^n n_i + n + 3 \left(\sum_{i=1}^n n_i + n - 1 \right) = 4 \sum_{i=1}^n n_i + 4n - 3.$$

لذا از قضیه ۳۲.۱.۱ خواهیم داشت $\alpha[\mu(C)] + \beta[\mu(C)] = 2 \sum_{i=1}^n n_i + 2n + 1$ و در نتیجه $\beta[\mu(C)] = 2n + 1$.



شکل ۷.۴: گراف میشلسکی گراف هزارپا C

بدون کاستن از کلیت قضیه فرض کنید $n_1 \geq 2$. در این صورت با توجه به شکل ۷.۴ مجموعه

یال‌های

$$K = \{x_1 x_i : 2 \leq i \leq n_1\} \cup \{x_1 x'_i : 2 \leq i \leq n_1\} \cup \{x_{n_1+1} x'_1, x'_{n_1+1} u\} \cup \\ \{t_1 t'_i : 2 \leq i \leq n_2 + 1\} \cup \{t'_1 t_i : 2 \leq i \leq n_2 + 1\} \cup \dots \cup \\ \{z_1 z'_i : 2 \leq i \leq n_n + 1\} \cup \{z'_1 z_i : 2 \leq i \leq n_n + 1\},$$

که $|K| = 2 \sum_{i=1}^n n_i$ ، تمام رئوس $\mu(C)$ را می‌پوشاند. پس $\beta'[\mu(C)] \leq 2 \sum_{i=1}^n n_i$. از طرفی چون $\alpha[\mu(C)] = 2 \sum_{i=1}^n n_i$ ، لذا $\beta'[\mu(C)] \geq 2 \sum_{i=1}^n n_i$ و بنابراین $\beta'[\mu(C)] = 2 \sum_{i=1}^n n_i$. با استفاده مجدد از قضیه ۳۳.۱.۱ داریم $\alpha'[\mu(C)] + \beta'[\mu(C)] = 2 \sum_{i=1}^n n_i + 2n + 1$ و در نتیجه $\alpha'[\mu(C)] = 2n + 1$.

با توجه به تعریف گراف کلی برای گراف میشلسکی گراف هزارپا C داریم

$$|V[T(\mu(C))]| = |V[\mu(C)]| + |E[\mu(C)]| = 6 \sum_{i=1}^n n_i + 6n - 2.$$

بنابراین حداقل $\frac{|V[T(\mu(C))]|}{3} = 2 \sum_{i=1}^n n_i + 3n - 1$ یال برای پوشاندن رئوس $T[\mu(C)]$ لازم است. پس

$$\beta'[T(\mu(C))] \geq 3 \sum_{i=1}^n n_i + 3n - 1. \quad (5.4)$$

حال، اگر قرار دهیم

- برای $1 \leq i \leq n_1$ ، $d'_i = ux'_{i+1}$ ، $d_i = x'_1 x_{i+1}$ ، $e'_i = x_1 x'_{i+1}$ ، $e_i = x_1 x_{i+1}$ ،
- برای $1 \leq i \leq n_2$ ، $c'_i = ut'_{i+1}$ ، $c_i = t'_1 t_{i+1}$ ، $f'_i = t_1 t'_{i+1}$ ، $f_i = t_1 t_{i+1}$ ،
- ⋮
- برای $1 \leq i \leq n_n$ ، $h'_i = uz'_{i+1}$ ، $h_i = z'_1 z_{i+1}$ ، $g'_i = z_1 z'_{i+1}$ ، $g_i = z_1 z_{i+1}$ ،
- $z_w = z_1 w_1, \dots, t_x = t_1 x_1, u_{z'_1} = uz'_1, \dots, u_{x'_1} = ux'_1$ ،
- $w'_{1z_1} = w'_1 z_1, \dots, x'_{1t_1} = x'_1 t_1, z'_{1w_1} = z'_1 w_1, \dots, t'_{1x_1} = t'_1 x_1$ ،

در این صورت مجموعه یال‌های

$$L = \{e_i e'_i : 1 \leq i \leq n_1\} \cup \{f_i f'_i : 1 \leq i \leq n_2\} \cup \dots \cup \{g_i g'_i : 1 \leq i \leq n_n\} \cup \\ \{x_{i+1} d_i : 1 \leq i \leq n_1\} \cup \{t_{i+1} c_i : 1 \leq i \leq n_2\} \cup \dots \cup \{z_{i+1} h_i : 1 \leq i \leq n_n\} \cup \\ \{x'_{i+1} d'_i : 1 \leq i \leq n_1\} \cup \{t'_{i+1} c'_i : 1 \leq i \leq n_2\} \cup \dots \cup \{z'_{i+1} h'_i : 1 \leq i \leq n_n\} \cup \\ \{uu_{x'_1}, x'_1 t_1, t'_{1x_1} x_1, x'_{1t_1} t_x\} \cup \{u_{t'_1} t'_1, \dots, u_{z'_1} z'_1\} \cup \{t'_{1s_1} s_1, s'_{1t_1} s_t, \dots, w'_{1z_1} z_1, z'_{1w_1} z_w\},$$

که $|L| = 3 \sum_{i=1}^n n_i + 3n - 1$ ، تمام رئوس گراف $T[\mu(C)]$ را، بجز حالتی که $n = 1$ است، می پوشاند. بنابراین

$$\beta'[T(\mu(C))] \leq 3 \sum_{i=1}^n n_i + 3n - 1. \quad (۶.۴)$$

در حالت $n = 1$ نیز مجموعه یال های

$$\{e_i e'_i : 1 \leq i \leq n_1\} \cup \{x_{i+1} d_i : 2 \leq i \leq n_1\} \cup \{x'_{i+1} d'_i : 1 \leq i \leq n_1\} \cup \{x_1 x_2, d_1 x'_1, uu_{x'_1}\},$$

که تعدادش برابر $3n_1 + 2$ است و در رابطه فوق صدق می کند، تمام رئوس $T[\mu(C)]$ را می پوشاند. لذا از ۵.۴ و ۶.۴ نتیجه می شود $\beta'[T(\mu(C))] = 3 \sum_{i=1}^n n_i + 3n - 1$. با توجه به این مقدار از

قضیه ۳۳.۱.۱ خواهیم داشت

$$\alpha'[T(\mu(C))] + 3 \sum_{i=1}^n n_i + 3n - 1 = 6 \sum_{i=1}^n n_i + 6n - 2$$

□ در نتیجه $\alpha'[T(\mu(C))] = 3 \sum_{i=1}^n n_i + 3n - 1$.

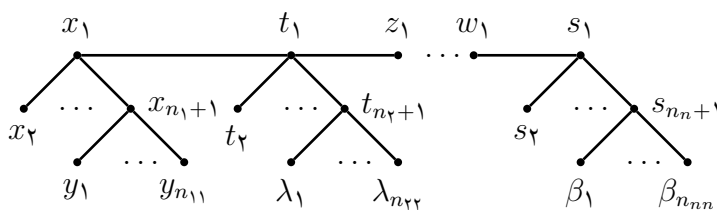
نتیجه ۵.۲.۴. برای گراف هزارپای C (شکل ۶.۴)، که برای هر $1 \leq i \leq n$ ، $n_i \geq 1$ و حداقل برای یک $1 \leq i \leq n$ ، $n_i \geq 2$ داریم

$$\alpha'[T(\mu(C))] = \beta'[T(\mu(C))].$$

قضیه ۶.۲.۴. برای درخت T در شکل ۸.۴، که برای هر $1 \leq i \leq n$ ، $n_i \geq 2$ و $n_{ii} \geq 1$ و برای حداقل یک $1 \leq i \leq n$ ، $n_i \geq 3$ داریم

$$\alpha'[T(\mu(T))] = \alpha[\mu(T)] + \alpha(T) + 5\alpha'(T) - \alpha'[\mu(T)] \quad (\text{الف})$$

$$\beta'[T(\mu(T))] = \beta'[\mu(T)] + \beta'(T) + 5\beta(T) - \beta[\mu(T)] \quad (\text{ب})$$



شکل ۸.۴: درخت T

برهان. T یک درخت و فاقد دور است. لذا بنا به قضیه ۳۱.۱.۱، T دوبخشی خواهد بود. حال، با توجه به شکل ۸.۴، دوبخشی بودن T و نیز استفاده از قضایای ۳۳.۱.۱ و ۳۴.۱.۱ داریم

$$\alpha(T) = \beta'(T) = \sum_{i=1}^n n_i + \sum_{i=1}^n n_{ii} - n,$$

$$\beta(T) = \alpha'(T) = 2n.$$

چون برای هر $1 \leq i \leq n$ ، $n_i \geq 2$ و $n_{ii} \geq 1$ است، پس بوضوح $\frac{|V(T)|}{4} \geq \alpha(T)$ می‌باشد و لذا از نتیجه ۳.۲.۴ خواهیم داشت $\alpha[\mu(T)] = 2 \sum_{i=1}^n n_i + 2 \sum_{i=1}^n n_{ii} - 2n$. با توجه به تعریف گراف میشلسکی داریم

$$\begin{aligned} |V[\mu(T)]| &= 2(n_1 + 1) + 2n_{11} + \dots + 2(n_n + 1) + 2n_{nn} + 1 \\ &= 2 \sum_{i=1}^n n_i + 2 \sum_{i=1}^n n_{ii} + 2n + 1, \\ |E[\mu(T)]| &= 4n_1 + 1 + 4n_{11} + 3 + 4n_2 + 1 + 4n_{22} + 3 \dots + 3 + 4n_n + 1 \\ &\quad + 4n_{nn} \\ &= 4 \sum_{i=1}^n n_i + 4 \sum_{i=1}^n n_{ii} + 4n - 3. \end{aligned}$$

با توجه به مقادیر فوق، از قضیه ۳۲.۱.۱ خواهیم داشت $\beta[\mu(T)] = 4n + 1$ بدون کاستن از کلیت قضیه فرض کنید $n_1 \geq 3$. در این صورت مجموعه یال‌های

$$\begin{aligned} K = & \{x_1 x_i : 2 \leq i \leq n_1 - 1\} \cup \{x_{n_1+1} y'_i : 1 \leq i \leq n_{11}\} \cup \{x'_{n_1+1} y_i : 1 \leq i \leq n_{11}\} \cup \\ & \{x_1 x'_i : 2 \leq i \leq n_1 - 1\} \cup \{x'_1 x_{n_1}, x'_{n_1} u\} \cup \\ & \{t_1 t'_i : 2 \leq i \leq n_2\} \cup \{t_{n_2+1} \lambda'_i : 1 \leq i \leq n_{22}\} \cup \{t'_{n_2+1} \lambda_i : 1 \leq i \leq n_{22}\} \cup \\ & \{t'_1 t_i : 2 \leq i \leq n_2\} \cup \dots \cup \{s_1 s'_i : 2 \leq i \leq n_n\} \cup \{s_{n_n+1} \beta'_i : 1 \leq i \leq n_{nn}\} \cup \\ & \{s'_{n_n+1} \beta_i : 1 \leq i \leq n_{nn}\} \cup \{s'_1 s_i : 2 \leq i \leq n_n\}, \end{aligned}$$

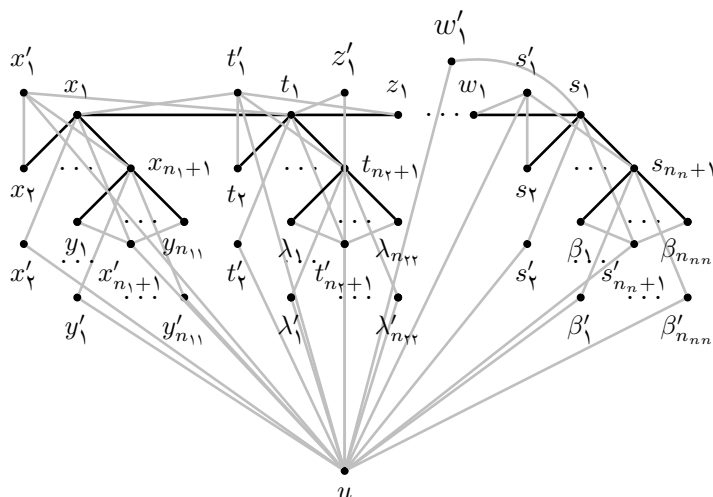
که $|K| = 2 \sum_{i=1}^n n_i + 2 \sum_{i=1}^n n_{ii} - 2n$ ، تمام رئوس $\mu(T)$ را می‌پوشاند (شکل ۹.۴ را ببینید) و لذا $\beta'[\mu(T)] \leq 2 \sum_{i=1}^n n_i + 2 \sum_{i=1}^n n_{ii} - 2n$ و بنابراین $\beta'[\mu(T)] \geq 2 \sum_{i=1}^n n_i + 2 \sum_{i=1}^n n_{ii} - 2n$ است، لذا $\beta'[\mu(T)] = 2 \sum_{i=1}^n n_i + 2 \sum_{i=1}^n n_{ii} - 2n$.

$$\beta'[\mu(T)] = 2 \sum_{i=1}^n n_i + 2 \sum_{i=1}^n n_{ii} - 2n.$$

حال، چون $\mu(T)$ فاقد راس تنها است، لذا از قضیه ۳۳.۱.۱ داریم $\alpha'[\mu(T)] = 4n + 1$ با توجه به تعریف گراف کلی برای $\mu(T)$ داریم

$$\begin{aligned} |V[T(\mu(T))]| &= 2 \sum_{i=1}^n n_i + 2 \sum_{i=1}^n n_{ii} + 2n + 1 + 4 \sum_{i=1}^n n_i + 4 \sum_{i=1}^n n_{ii} + 4n - 3 \\ &= 6 \sum_{i=1}^n n_i + 6 \sum_{i=1}^n n_{ii} + 6n - 2. \end{aligned}$$

لذا حداقل $\frac{|V[T(\mu(T))]|}{4} = 3 \sum_{i=1}^n n_i + 3 \sum_{i=1}^n n_{ii} + 3n - 1$ یال برای پوشاندن رئوس $T[\mu(T)]$ لازم است. پس $\beta'[T(\mu(T))] \geq 3 \sum_{i=1}^n n_i + 3 \sum_{i=1}^n n_{ii} + 3n - 1$ قرار می‌دهیم



شکل ۹.۴: گراف میشلکی درخت T

- برای $1 \leq i \leq n_1$ ، $e_i = x_1 x_{i+1}$ ، $e'_i = x'_1 x'_{i+1}$ ، $d_i = x'_1 x_{i+1}$ ، $d'_i = ux'_{i+1}$.
- برای $1 \leq i \leq n_{11}$ ، $m_i = x_{n_1+1} y_i$ ، $m'_i = x_{n_1+1} y'_i$ ، $\alpha_i = x'_{n_1+1} y_i$ ، $\alpha'_i = uy'_i$.
- ⋮
- برای $1 \leq i \leq n_n$ ، $g_i = s_1 s_{i+1}$ ، $g'_i = s'_1 s'_{i+1}$ ، $h_i = s'_1 s_{i+1}$ ، $h'_i = us'_{i+1}$.
- برای $1 \leq i \leq n_{nn}$ ، $p_i = s_{n_n+1} \beta_i$ ، $p'_i = s_{n_n+1} \beta'_i$ ، $\gamma_i = s'_{n_n+1} \beta_i$ ، $\gamma'_i = u\beta'_i$.
- $t'_{x_1} = t'_1 x_1$ ، $z'_{t_1} = z'_1 t_1$ ، $s'_{w_1} = s'_1 w_1$ ، \dots ، $t'_{z_1} = t'_1 z_1$ ، $x'_{t_1} = x'_1 t_1$.
- $w'_{s_1} = w'_1 s_1$ ، \dots ، $t'_{z_1} = t'_1 z_1$ ، $x'_{t_1} = x'_1 t_1$.
- $u_{s'_1} = us'_1$ ، \dots ، $u_{t'_1} = ut'_1$ ، $u_{x'_1} = ux'_1$ ، $s_w = s_1 w_1$ ، \dots ، $z_t = z_1 t_1$ ، $t_x = t_1 x_1$.

در این صورت مجموعه یال‌های

$$\begin{aligned}
 L = & \{e_i e'_i : 1 \leq i \leq n_1\} \cup \dots \cup \{g_i g'_i : 1 \leq i \leq n_n\} \cup \\
 & \{m_i m'_i : 1 \leq i \leq n_{11}\} \cup \dots \cup \{p_i p'_i : 1 \leq i \leq n_{nn}\} \cup \\
 & \{x'_{i+1} d_i : 1 \leq i \leq n_1\} \cup \dots \cup \{s'_{i+1} h_i : 1 \leq i \leq n_n\} \cup \\
 & \{y'_i \alpha'_i : 1 \leq i \leq n_{11}\} \cup \dots \cup \{\beta'_i \gamma'_i : 1 \leq i \leq n_{nn}\} \cup \\
 & \{x_{i+1} d_i : 1 \leq i \leq n_1\} \cup \dots \cup \{s_{i+1} h_i : 1 \leq i \leq n_n\} \cup \\
 & \{y_i \alpha_i : 1 \leq i \leq n_{11}\} \cup \dots \cup \{\beta_i \gamma_i : 1 \leq i \leq n_{nn}\} \cup \\
 & \{uu_{x'_1}, x'_1 t_1, t'_{x_1} x_1, x'_{t_1} t_x\} \cup \{u_{t'_1} t'_1, \dots, u_{s'_1} s'_1\} \cup \\
 & \{t'_{z_1} z_1, z'_{t_1} z_t, \dots, w'_{s_1} s_1, s'_{w_1} s_w\},
 \end{aligned}$$

که $|L| = 3 \sum_{i=1}^n n_i + 3 \sum_{i=1}^n n_{ii} + 3n - 1$ ، تمام رئوس $T[\mu(T)]$ را، بجز حالتی که $n = 1$ است، می‌پوشاند. در این حالت نیز مجموعه یال‌های

$$\begin{aligned} & \{e_i e'_i : 1 \leq i \leq n_1\} \cup \{m_i m'_i : 1 \leq i \leq n_{11}\} \cup \{x'_{i+1} d'_i : 2 \leq i \leq n_1\} \cup \\ & \{y'_i \alpha'_i : 1 \leq i \leq n_{11}\} \cup \{x_{i+1} d_i : 1 \leq i \leq n_1\} \cup \{y_i \alpha_i : 1 \leq i \leq n_{11}\} \cup \\ & \{x_1 x'_1, d'_1 u, u x'_1\}, \end{aligned}$$

که تعدادش برابر $2 + 3n_{11} + 3n_1$ است، تمام رئوس گراف $T[\mu(T)]$ را می‌پوشاند. بنابراین

$$\begin{aligned} \beta'[T(\mu(T))] & \leq 3 \sum_{i=1}^n n_i + 3 \sum_{i=1}^n n_{ii} + 3n - 1 \text{ و در نتیجه} \\ \beta'[T(\mu(T))] & = 3 \sum_{i=1}^n n_i + 3 \sum_{i=1}^n n_{ii} + 3n - 1. \end{aligned}$$

اکنون، با توجه به مقادیر $\beta'[T(\mu(T))]$ و $|V[T(\mu(T))]|$ ، از قضیه ۳۳.۱.۱ خواهیم داشت

$$\alpha'[T(\mu(T))] = 3 \sum_{i=1}^n n_i + 3 \sum_{i=1}^n n_{ii} + 3n - 1.$$

□

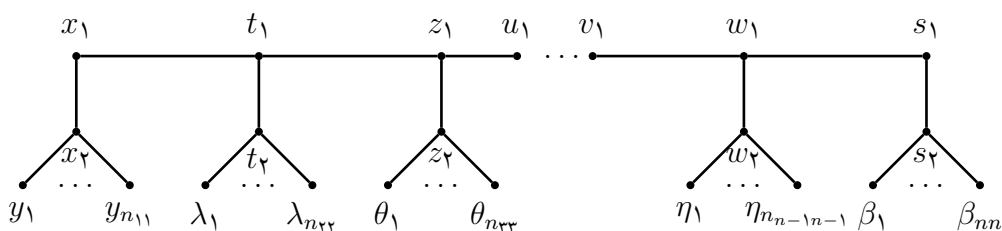
نتیجه ۷.۲.۴. برای درخت T در شکل ۸.۴، که برای هر $1 \leq i \leq n$ ، $n_i \geq 2$ و $n_{ii} \geq 1$ و برای حداقل یک $1 \leq i \leq n$ ، $n_i \geq 3$ داریم

$$\alpha'[T(\mu(T))] = \beta'[T(\mu(T))].$$

قضیه ۸.۲.۴. برای درخت T در شکل ۱۰.۴، که برای هر $1 \leq i \leq n$ ، $n_{ii} \geq 1$ و در صورت زوج بودن n ، برای حداقل یک $1 \leq i \leq n$ ، $n_{ii} \geq 2$ داریم

$$\alpha'[T(\mu(T))] = \alpha[\mu(T)] + \alpha(T) + 5\alpha'(T) - \alpha'[\mu(T)] \text{ (الف)}$$

$$\beta'[T(\mu(T))] = \beta'[\mu(T)] + \beta'(T) + 5\beta(T) - \beta[\mu(T)] \text{ (ب)}$$



شکل ۱۰.۴: درخت T

برهان. قضیه را در دو حالت بررسی می‌کنیم.

حالت اول. n زوج باشد. بوضوح $\alpha(\mathcal{T}) = \sum_{i=1}^n n_{ii} + \frac{n}{2}$ و $\beta(\mathcal{T}) = \frac{3n}{2}$. چون \mathcal{T} درخت و فاقد دور است، لذا بنا به قضیه ۳۱.۱.۱، \mathcal{T} دوبخشی است. با توجه به مفروضات فوق، از قضایای ۳۳.۱.۱ و ۳۴.۱.۱ نتیجه می‌شود $\beta'(\mathcal{T}) = \sum_{i=1}^n n_{ii} + \frac{n}{2}$ و $\alpha'(\mathcal{T}) = \frac{3n}{2}$.

چون برای هر $1 \leq i \leq n$ ، $n_{ii} \geq 1$ است، لذا بوضوح $\alpha(\mathcal{T}) \geq \frac{|V(\mathcal{T})|}{2}$ می‌باشد و بنابراین از نتیجه ۳.۲.۴ داریم $\alpha[\mu(\mathcal{T})] = 2 \sum_{i=1}^n n_{ii} + n$. هم‌چنین با توجه به تعریف گراف میشلسکی داریم

$$|V[\mu(\mathcal{T})]| = 2 \sum_{i=1}^n n_{ii} + 4n + 1,$$

$$|E[\mu(\mathcal{T})]| = 4 \sum_{i=1}^n n_{ii} + 8n - 3.$$

لذا از قضیه ۳۲.۱.۱، $\beta[\mu(\mathcal{T})] = 3n + 1$ به دست می‌آید.

بدون کاستن از کلیت قضیه فرض کنید $n_{11} \geq 2$. در این صورت مجموعه یال‌های

$$K = \{x_2 y'_i : 1 \leq i \leq n_{11} - 1\} \cup \{y'_{n_{11}} u\} \cup \{x'_i y_i : 1 \leq i \leq n_{11}\} \cup \{x'_1 t_1, t'_1 x_1\} \cup \\ \{t_2 \lambda'_i : 1 \leq i \leq n_{22}\} \cup \{t'_2 \lambda_i : 1 \leq i \leq n_{22}\} \cup \{z'_1 u_1, u'_1 z_1\} \cup \dots \cup \\ \{s_2 \beta'_i : 1 \leq i \leq n_{nn}\} \cup \{s'_2 \beta_i : 1 \leq i \leq n_{nn}\} \cup \{w'_1 s_1, w_1 s'_1\},$$

که $|K| = 2 \sum_{i=1}^n n_{ii} + n$ ، تمام رئوس $\mu(\mathcal{T})$ را می‌پوشاند (شکل ۱۱.۴ را ببینید) و لذا $\beta'[\mu(\mathcal{T})] \leq 2 \sum_{i=1}^n n_{ii} + n$ از طرفی چون عدد استقلال $\mu(\mathcal{T})$ برابر $2 \sum_{i=1}^n n_{ii} + n$ است، پس $\beta'[\mu(\mathcal{T})] \geq 2 \sum_{i=1}^n n_{ii} + n$ بنابراین

$$\beta'[\mu(\mathcal{T})] = 2 \sum_{i=1}^n n_{ii} + n.$$

با توجه به مقادیر فوق و استفاده مجدد از قضیه ۳۳.۱.۱ خواهیم داشت $\alpha'[\mu(\mathcal{T})] = 3n + 1$.

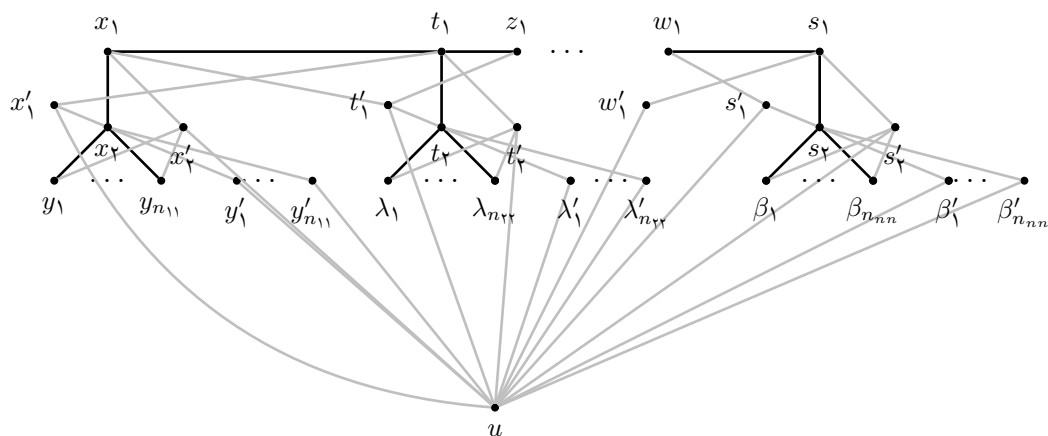
حالت دوم. n فرد باشد. با برهانی مشابه حالتی که n زوج است، داریم

$$\alpha(\mathcal{T}) = \beta(\mathcal{T}) = \sum_{i=1}^n n_{ii} + \frac{n+1}{2},$$

$$\beta(\mathcal{T}) = \alpha'(\mathcal{T}) = \frac{3n-1}{2},$$

$$\alpha[\mu(\mathcal{T})] = \beta'[\mu(\mathcal{T})] = 2 \sum_{i=1}^n n_{ii} + (n+1),$$

$$\beta[\mu(\mathcal{T})] = \alpha'[\mu(\mathcal{T})] = 3n.$$



شکل ۱۱.۴: گراف میشلسکی درخت T

در این حالت مجموعه یال‌هایی که رئوس $\mu(T)$ را می‌پوشاند، عبارت است از

$$K = \{x_2 y'_i : 1 \leq i \leq n_{11}\} \cup \{x'_2 y_i : 1 \leq i \leq n_{11}\} \cup \{x'_1 t_1, t'_1 x_1\} \cup \\ \{t_2 \lambda'_i : 1 \leq i \leq n_{22}\} \cup \{t'_2 \lambda_i : 1 \leq i \leq n_{22}\} \cup \{z'_1 u_1, u'_1 z_1\} \cup \dots \cup \\ \{s_2 \beta'_i : 1 \leq i \leq n_{nn}\} \cup \{s'_2 \beta_i : 1 \leq i \leq n_{nn}\} \cup \{v'_1 w_1, v_1 w'_1\} \cup \\ \{s_1 s_2, s'_1 u\}.$$

حال، با توجه به تعریف گراف کلی برای گراف میشلسکی T داریم

$$|V[T(\mu(T))]| = 2 \sum_{i=1}^n n_{ii} + 4n + 1 + 4 \sum_{i=1}^n n_{ii} + 8n - 3 \\ = 6 \sum_{i=1}^n n_{ii} + 12n - 2.$$

بنابراین حداقل $\frac{|V[T(\mu(T))]|}{4} = 3 \sum_{i=1}^n n_{ii} + 6n - 1$ یال برای پوشاندن رئوس $T[\mu(T)]$ لازم است.

لذا $1 \leq i \leq n_{11}$ برای $\beta'_i[T(\mu(T))] \geq 3 \sum_{i=1}^n n_{ii} + 6n - 1$ قرار می‌دهیم

$$\bullet d'_1 = ux'_2, d_1 = x'_2 x_2, e'_1 = x_1 x'_2, e_1 = x_1 x_2$$

⋮

$$\bullet h'_1 = us'_2, h_1 = s'_2 s_2, g'_1 = s_1 s'_2, g_1 = s_1 s_2$$

$$\bullet \alpha'_i = uy'_i, \alpha_i = x'_2 y_i, m'_i = x_2 y'_i, m_i = x_2 y_i, 1 \leq i \leq n_{11}$$

⋮

$$\bullet \gamma'_i = u\beta'_i, \gamma_i = s'_2 \beta_i, p'_i = s_2 \beta'_i, p_i = s_2 \beta_i, 1 \leq i \leq n_{nn}$$

$$\bullet \cdot u_{s'_1} = us'_1, \dots, u_{t'_1} = ut'_1, u_{x'_1} = ux'_1$$

$$\bullet \cdot s'_{w_1} = s'_1 w_1, w'_{s_1} = w'_1 s_1, \dots, t'_{x_1} = t'_1 x_1, x'_{t_1} = x'_1 t_1$$

$$\bullet \cdot s_w = s_1 w_1, \dots, z_t = z_1 t_1, t_x = t_1 x_1$$

در این صورت مجموعه یال‌های

$$L = \{e_1 e'_1, \dots, g_1 g'_1\} \cup \{m_i m'_i : 1 \leq i \leq n_{11}\} \cup \dots \cup \{p_i p'_i : 1 \leq i \leq n_{nn}\} \cup \\ \{x_1 d_1, \dots, s_1 h_1\} \cup \{y_i \alpha_i : 1 \leq i \leq n_{11}\} \cup \dots \cup \{\beta_i \gamma_i : 1 \leq i \leq n_{nn}\} \cup \\ \{x'_1 d'_1, \dots, s'_1 h'_1\} \cup \{y'_i \alpha'_i : 1 \leq i \leq n_{11}\} \cup \dots \cup \{\beta'_i \gamma'_i : 1 \leq i \leq n_{nn}\} \cup \\ \{uu_{x'_1}, x'_1 t_1, t'_1 x_1, x'_1 t_1 t_x\} \cup \{u_{t'_1} t'_1, \dots, u_{s'_1} s'_1\} \cup \\ \{t'_1 z_1, z_1, z'_1 t_1, z_t, \dots, w'_{s_1} s_1, s'_{w_1} w_1\},$$

که $|L| = 3 \sum_{i=1}^n n_{ii} + 6n - 1$ ، تمام رئوس گراف $T[\mu(\mathcal{T})]$ را، بجز حالتی که $n = 1$ است، می‌پوشاند. در این حالت نیز مجموعه یال‌های

$$\{m_i m'_i : 1 \leq i \leq n_{11}\} \cup \{y_i \alpha_i : 1 \leq i \leq n_{11}\} \cup \{y'_i \alpha'_i : 1 \leq i \leq n_{11}\} \cup \\ \{x_1 e_1, e'_1 x'_1, x_1 d_1, x'_1 u_{x'_1}, d'_1 u\},$$

که تعدادش برابر $5n_{11} + 3$ است، تمام رئوس $T[\mu(\mathcal{T})]$ را می‌پوشاند. لذا بنا به تعریف عدد پوشش یالی، $\beta'[T(\mu(\mathcal{T}))] \leq 3 \sum_{i=1}^n n_{ii} + 6n - 1$ و در نتیجه $\beta'[T(\mu(\mathcal{T}))] = 3 \sum_{i=1}^n n_{ii} + 6n - 1$. حال، با توجه به مقادیر فوق، از قضیه ۳۳.۱.۱ خواهیم داشت

$$\alpha'[T(\mu(\mathcal{T}))] = 3 \sum_{i=1}^n n_{ii} + 6n - 1.$$

□

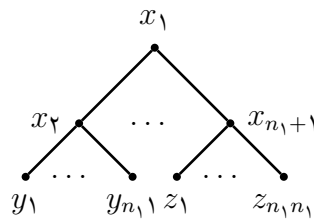
نتیجه ۹.۲.۴. برای درخت \mathcal{T} در شکل ۱۰.۴، که برای هر $1 \leq i \leq n$ ، $n_{ii} \geq 1$ و در صورت زوج بودن n ، برای حداقل یک $1 \leq i \leq n$ ، $n_{ii} \geq 2$ داریم

$$\alpha'[T(\mu(\mathcal{T}))] = \beta'[T(\mu(\mathcal{T}))].$$

قضیه ۱۰.۲.۴. برای درخت \mathcal{T} در شکل ۱۲.۴، که برای هر $1 \leq i \leq n_1$ ، $n_{1i} \geq 1$ داریم

$$\bullet \text{ الف) } \alpha'[T(\mu(\mathcal{T}))] = \alpha[\mu(\mathcal{T})] + \alpha(\mathcal{T}) + 5\alpha'(\mathcal{T}) - \alpha'[\mu(\mathcal{T})]$$

$$\bullet \text{ ب) } \beta'[T(\mu(\mathcal{T}))] = \beta'[\mu(\mathcal{T})] + \beta'(\mathcal{T}) + 5\beta(\mathcal{T}) - \beta[\mu(\mathcal{T})]$$



شکل ۱۲.۴: درخت \mathcal{T}

برهان. چون \mathcal{T} درخت و فاقد دور است، پس بنا بر قضیه ۳۱.۱.۱، \mathcal{T} دوبخشی است. لذا با توجه به شکل ۱۲.۴، دوبخشی بودن \mathcal{T} و نیز استفاده از قضایای ۳۳.۱.۱ و ۳۴.۱.۱ خواهیم داشت

$$\alpha(\mathcal{T}) = \beta'(\mathcal{T}) = \sum_{i=1}^{n_1} n_1 i + 1,$$

$$\beta(\mathcal{T}) = \alpha'(\mathcal{T}) = n_1.$$

بنا بر فرض قضیه برای هر $1 \leq i \leq n_1$ ، $n_1 i \geq 1$ است. لذا بوضوح $\frac{|V(\mathcal{T})|}{4} \leq \alpha(\mathcal{T})$ می‌باشد. حال، با توجه به این‌که مجموعه یال‌های

$$K = \{x_2 y'_i : 1 \leq i \leq n_1\} \cup \dots \cup \{x_{n_1+1} z'_i : 1 \leq i \leq n_1 n_1\} \cup \\ \{x'_2 y_i : 1 \leq i \leq n_1\} \cup \dots \cup \{x'_{n_1+1} z_i : 1 \leq i \leq n_1 n_1\} \cup \{x'_1 u, x_1 x_2\}$$

تمام رئوس $\mu(\mathcal{T})$ را می‌پوشاند (شکل ۱۳.۴ را ببینید)، مشابه اثبات قضیه ۶.۲.۴ خواهیم داشت

$$\alpha[\mu(\mathcal{T})] = \beta'[\mu(\mathcal{T})] = 2 \sum_{i=1}^{n_1} n_1 i + 2,$$

$$\beta[\mu(\mathcal{T})] = \alpha'[\mu(\mathcal{T})] = 2n_1 + 1.$$

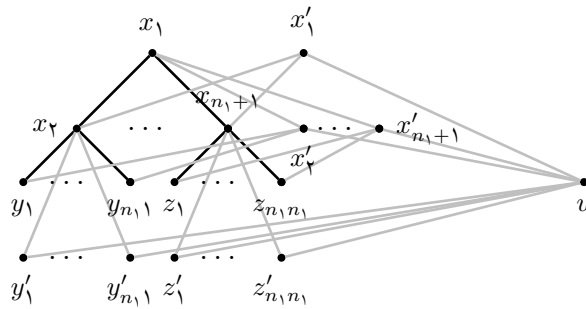
چون تعداد رئوس و یال‌های گراف $\mu(\mathcal{T})$ به صورت زیر است

$$|V[\mu(\mathcal{T})]| = 2n_1 + 2 \sum_{i=1}^{n_1} n_1 i + 3,$$

$$|E[\mu(\mathcal{T})]| = 4n_1 + 4 \sum_{i=1}^{n_1} n_1 i + 1,$$

لذا برای گراف کلی گراف میشلسکی \mathcal{T} داریم

$$|V[T(\mu(\mathcal{T}))]| = 2n_1 + 2 \sum_{i=1}^{n_1} n_1 i + 3 + 4n_1 + 4 \sum_{i=1}^{n_1} n_1 i + 1 \\ = 6n_1 + 6 \sum_{i=1}^{n_1} n_1 i + 4.$$



شکل ۱۳.۴: گراف میشلسکی درخت T

پس حداقل $\frac{|V[T(\mu(T))]|}{3} = 3n_1 + 3 \sum_{i=1}^{n_1} n_1 i + 2$ یال برای پوشاندن رئوس $T[\mu(T)]$ لازم است و بنابراین $\beta'[T(\mu(T))] \geq 3n_1 + 3 \sum_{i=1}^{n_1} n_1 i + 2$ قرار می‌دهیم

- برای $1 \leq i \leq n_1$ ، $d_i = ux'_{i+1}, c_i = x'_{i+1}x_{i+1}, e'_i = x_1x'_{i+1}, e_i = x_1x_{i+1}$ ،
- برای $1 \leq i \leq n_1 - 1$ ، $s_i = uy'_i, q_i = x'_iy_i, f'_i = x_2y'_i, f_i = x_2y_i$ ،
- ⋮

• برای $1 \leq i \leq n_1(n_1 - 1)$ ، $l_i = uw'_i, t_i = x'_{n_1}w_i, g'_i = x_{n_1}w'_i, g_i = x_{n_1}w_i$ ، توجه شود که، w_i ها رئوس آویزان راس x_{n_1} در T و w'_i ها رئوس جفت متناظر با آنها در $\mu(T)$ می‌باشند ($1 \leq i \leq n_1(n_1 - 1)$) .

- برای $1 \leq i \leq n_1n_1$ ، $m_i = uz'_i, r_i = x'_{n_1+1}z_i, p'_i = x_{n_1+1}z'_i, p_i = x_{n_1+1}z_i$ ،
- $x'_{1u} = x'_1u$.

در این صورت مجموعه یال‌های

$$K = \{c_i e_i : 1 \leq i \leq n_1\} \cup \{x'_{i+1} e'_i : 2 \leq i \leq n_1\} \cup \{x_2 y'_1, \dots, x_{n_1+1} z'_1\} \cup \\ \{y'_i s_i : 2 \leq i \leq n_1 - 1\} \cup \dots \cup \{z'_i m_i : 2 \leq i \leq n_1 n_1\} \cup \\ \{f_i f'_i : 1 \leq i \leq n_1 - 1\} \cup \dots \cup \{p_i p'_i : 1 \leq i \leq n_1 n_1\} \cup \\ \{y_i q_i : 1 \leq i \leq n_1 - 1\} \cup \dots \cup \{z_i r_i : 1 \leq i \leq n_1 n_1\} \cup \\ \{e'_1 d_1, s_1 d_2, \dots, l_1 d_{n_1}\} \cup \{m_1 u, x'_{1u} x'_1\} \cup \{x_1 x'_2\},$$

که $|K| = 3n_1 + 3 \sum_{i=1}^{n_1} n_1 i + 2$ ، تمام رئوس $T[\mu(T)]$ را، بجز حالتی که $n_1 = 1$ است، می‌پوشاند. در حالتی که $n_1 = 1$ می‌باشد، مجموعه یال‌های

$$\{f_i f'_i : 1 \leq i \leq n_1 - 1\} \cup \{y_i q_i : 1 \leq i \leq n_1 - 1\} \cup \{y'_i s_i : 1 \leq i \leq n_1 - 1\} \cup \\ \{x_1 e'_1, x'_1 c_1, x_2 e_1, x'_2 d_1, ux'_{1u}\},$$

که تعدادش برابر $5 + 3n_1$ است، تمام رئوس $T[\mu(\mathcal{T})]$ را می‌پوشاند. لذا

$$\beta'[T(\mu(\mathcal{T}))] \leq 3n_1 + 3 \sum_{i=1}^{n_1} n_1 i + 2.$$

بنابراین $\beta'[T(\mu(\mathcal{T}))] = 3n_1 + 3 \sum_{i=1}^{n_1} n_1 i + 2$ با توجه به مقادیر فوق، از قضیه ۳۳.۱.۱ داریم

$$\alpha'[T(\mu(\mathcal{T}))] = 3n_1 + 3 \sum_{i=1}^{n_1} n_1 i + 2.$$

□

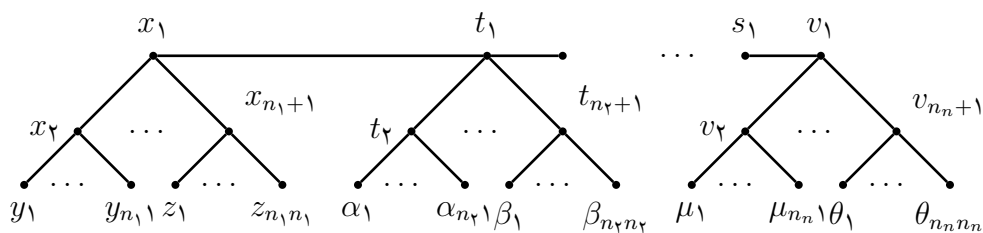
نتیجه ۱۱.۲.۴. برای درخت \mathcal{T} در شکل ۱۲.۴، که برای هر $1 \leq i \leq n_1$ ، $n_1 i \geq 1$ داریم

$$\alpha'[T(\mu(\mathcal{T}))] = \beta'[T(\mu(\mathcal{T}))].$$

قضیه ۱۲.۲.۴. برای درخت \mathcal{T} در شکل ۱۴.۴، که برای هر $1 \leq i \leq n$ و هر $1 \leq j \leq n_i$ ، $n_i \geq 1$ و $n_{ij} \geq 1$ و در صورت زوج بودن n ، برای حداقل یک $1 \leq i \leq n$ و یک $1 \leq j \leq n_i$ ، $n_{ij} \geq 2$ داریم

$$\alpha'[T(\mu(\mathcal{T}))] = \alpha[\mu(\mathcal{T})] + \alpha(\mathcal{T}) + 5\alpha'(\mathcal{T}) - \alpha'[\mu(\mathcal{T})] \quad (\text{الف})$$

$$\beta'[T(\mu(\mathcal{T}))] = \beta'[\mu(\mathcal{T})] + \beta'(\mathcal{T}) + 5\beta(\mathcal{T}) - \beta[\mu(\mathcal{T})] \quad (\text{ب})$$



شکل ۱۴.۴: درخت \mathcal{T}

برهان. درستی حکم در حالتی که $n = 1$ است، در قضیه ۱۰.۲.۴ و در حالتی که برای هر $1 \leq i \leq n$ ، $n_i = 1$ است، در قضیه ۸.۲.۴ اثبات شده است. حال، اگر $n \geq 2$ بوده و برای حداقل یک i ($1 \leq i \leq n$)، $n_i \geq 2$ باشد، قضیه را دو حالت بررسی می‌کنیم.

حالت اول. n زوج باشد. چون \mathcal{T} درخت و فاقد دور است، لذا با توجه به قضیه ۳۱.۱.۱، \mathcal{T} دوبخشی می‌باشد. بنابراین با توجه به شکل ۱۴.۴ و نیز استفاده از قضایای ۳۳.۱.۱ و ۳۴.۱.۱ داریم

$$\alpha(\mathcal{T}) = \beta'(\mathcal{T}) = \sum_{i=1}^{n_1} n_1 i + \dots + \sum_{i=1}^{n_n} n_n i + \frac{n}{2},$$

$$\beta(\mathcal{T}) = \alpha'(\mathcal{T}) = \sum_{i=1}^n n_i + \frac{n}{2}.$$

از طرفی چون برای هر $1 \leq i \leq n$ و هر $1 \leq j \leq n_i$ ، $n_i \geq 1$ و $n_{ij} \geq 1$ است، لذا بوضوح $\alpha(\mathcal{T}) \geq \frac{|V(\mathcal{T})|}{2}$ می‌باشد. بدون کاستن از کلیت قضیه فرض کنیم $n_1 \geq 2$. بنابراین مشابه برهان قضیه ۸.۲.۴ (در حالتی که n زوج است) خواهیم داشت

$$\alpha[\mu(\mathcal{T})] = \beta'[\mu(\mathcal{T})] = 2\left(\sum_{i=1}^{n_1} n_{1i} + \dots + \sum_{i=1}^{n_n} n_{ni}\right) + n,$$

$$\beta[\mu(\mathcal{T})] = \alpha'[\mu(\mathcal{T})] = 2\sum_{i=1}^n n_i + n + 1.$$

مجموعه یال‌هایی که در این حالت $\mu(\mathcal{T})$ را می‌پوشاند (شکل ۱۵.۴ را ببینید)، عبارت است از

$$K = \{x_2 y'_i : 1 \leq i \leq n_1 - 1\} \cup \{y'_{n_1} u\} \cup \{x_3 w'_i : 1 \leq i \leq n_1 - 2\} \cup \dots \cup$$

$$\{x_{n_1+1} z'_i : 1 \leq i \leq n_1 n_1\} \cup \dots \cup \{v_2 \mu'_i : 1 \leq i \leq n_n - 1\} \cup \dots \cup$$

$$\{v_{n_n+1} \theta'_i : 1 \leq i \leq n_n n_n\} \cup \{x'_2 y_i : 1 \leq i \leq n_1 - 1\} \cup \dots \cup$$

$$\{x'_{n_1+1} z_i : 1 \leq i \leq n_1 n_1\} \cup \dots \cup \{v'_2 \mu_i : 1 \leq i \leq n_n - 1\} \cup \dots \cup$$

$$\{v'_{n_n+1} \theta_i : 1 \leq i \leq n_n n_n\} \cup \{x_1 t'_1, t_1 x'_1, \dots, s_1 v'_1, s'_1 v_1\}.$$

توجه شود که، برای هر $1 \leq i \leq n_1 - 2$ ، w_i راس آویزان راس x_3 در \mathcal{T} و w'_i راس جفت متناظر با w_i در $\mu(\mathcal{T})$ می‌باشد.

حالت دوم. n فرد باشد. مشابه حالت قبل خواهیم داشت

$$\alpha(\mathcal{T}) = \beta'(\mathcal{T}) = \sum_{i=1}^{n_1} n_{1i} + \dots + \sum_{i=1}^{n_n} n_{ni} + \frac{n+1}{2},$$

$$\beta(\mathcal{T}) = \alpha'(\mathcal{T}) = \sum_{i=1}^n n_i + \frac{n-1}{2},$$

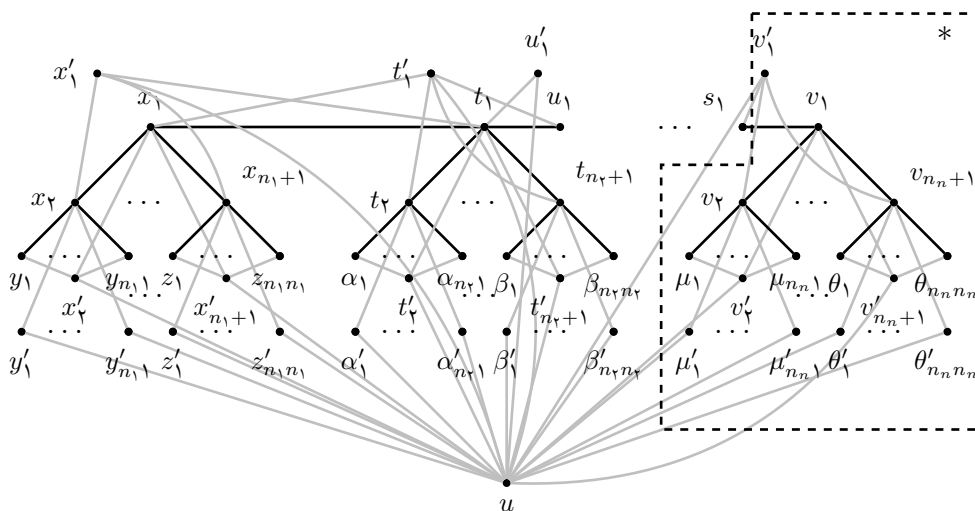
$$\alpha[\mu(\mathcal{T})] = \beta'[\mu(\mathcal{T})] = 2\left(\sum_{i=1}^{n_1} n_{1i} + \dots + \sum_{i=1}^{n_n} n_{ni}\right) + n + 1,$$

$$\beta[\mu(\mathcal{T})] = \alpha'[\mu(\mathcal{T})] = 2\sum_{i=1}^n n_i + n.$$

مجموعه یال‌هایی که در این حالت $\mu(\mathcal{T})$ را می‌پوشاند (شکل ۱۵.۴ را ببینید)، عبارت است از

$$K = \{x_\nu y'_i : 1 \leq i \leq n_\nu\} \cup \dots \cup \{x_{n_\nu+1} z'_i : 1 \leq i \leq n_\nu n_\nu\} \cup \dots \cup \\ \{v_\nu \mu'_i : 1 \leq i \leq n_\nu\} \cup \dots \cup \{v_{n_\nu+1} \theta'_i : 1 \leq i \leq n_\nu n_\nu\} \cup \dots \cup \\ \{x'_\nu y_i : 1 \leq i \leq n_\nu\} \cup \dots \cup \{x'_{n_\nu+1} z_i : 1 \leq i \leq n_\nu n_\nu\} \cup \dots \cup \\ \{v'_\nu \mu_i : 1 \leq i \leq n_\nu\} \cup \dots \cup \{v'_{n_\nu+1} \theta_i : 1 \leq i \leq n_\nu n_\nu\} \cup \dots \cup \\ \{x_\nu t'_1, t_\nu u'_1, \dots, s_\nu v'_1, s'_\nu v_\nu, x'_\nu u\}.$$

حال، با توجه به تعریف گراف میشلکی، برای هر دو حالت داریم



شکل ۱۵.۴: گراف میشلکی درخت \mathcal{T}

$$|V[\mu(\mathcal{T})]| = 2 \sum_{i=1}^n n_i + 2 \left(\sum_{i=1}^{n_1} n_1 i + \dots + \sum_{i=1}^{n_n} n_n i \right) + 2n + 1,$$

$$|E[\mu(\mathcal{T})]| = 4 \sum_{i=1}^n n_i + 4 \left(\sum_{i=1}^{n_1} n_1 i + \dots + \sum_{i=1}^{n_n} n_n i \right) + n + 3(n - 1)$$

و لذا برای گراف کلی گراف میشلکی \mathcal{T} خواهیم داشت

$$|V[T(\mu(\mathcal{T}))]| = 2 \sum_{i=1}^n n_i + 2 \left(\sum_{i=1}^{n_1} n_1 i + \dots + \sum_{i=1}^{n_n} n_n i \right) + 2n + 1 \\ + 4 \sum_{i=1}^n n_i + 4 \left(\sum_{i=1}^{n_1} n_1 i + \dots + \sum_{i=1}^{n_n} n_n i \right) + n + 3(n - 1) \\ = 6 \sum_{i=1}^n n_i + 6 \left(\sum_{i=1}^{n_1} n_1 i + \dots + \sum_{i=1}^{n_n} n_n i \right) + 6n - 2.$$

بنابراین حداقل $\beta'[T(\mu(\mathcal{T}))] = 3 \sum_{i=1}^n n_i + 3(\sum_{i=1}^{n_1} n_1 i + \dots + \sum_{i=1}^{n_n} n_n i) + 3n - 1$ پوشاندن رئوس $T[\mu(\mathcal{T})]$ لازم است. لذا

$$\beta'[T(\mu(\mathcal{T}))] \geq 3 \sum_{i=1}^n n_i + 3 \left(\sum_{i=1}^{n_1} n_1 i + \dots + \sum_{i=1}^{n_n} n_n i \right) + 3n - 1. \quad (7.4)$$

حال، ادعا می‌کنیم

$$\beta'[T(\mu(\mathcal{T}))] \leq 3 \sum_{i=1}^n n_i + 3 \left(\sum_{i=1}^{n_1} n_1 i + \dots + \sum_{i=1}^{n_n} n_n i \right) + 3n - 1. \quad (8.4)$$

اثبات ادعا. اگر $x_1, t_1, \dots, s_1, v_1$ را رئوس ویژه گراف \mathcal{T} بنامیم (شکل ۱۴.۴ را ببینید) و گراف \mathcal{T} با n راس ویژه را با \mathcal{T}_n نشان دهیم، با استقرا روی n ثابت می‌کنیم ادعا برقرار است.

آزمون استقرا. $n = 1$. در قضیه ۱۰.۲.۴ ثابت شد.

فرض استقرا. فرض کنیم ادعا برای گراف \mathcal{T} با کمتر از n راس ویژه برقرار باشد.

حکم استقرا. نشان می‌دهیم برای \mathcal{T}_n نیز برقرار است.

بوضوح $\beta'[T(\mu(\mathcal{T}_n))]$ کمتر یا مساوی $\beta'[T(\mu(\mathcal{T}_{n-1}))]$ بعلاوه مینیم تعداد یال‌هایی که برای پوشاندن رئوس قسمت * لازم است، می‌باشد (شکل ۱۵.۴ را ببینید). قرار می‌دهیم

$$- \text{ برای } 1 \leq i \leq n_n, e_i = v_1 v_{i+1}, e'_i = v_1 v'_{i+1}, e_i = v_1 v_{i+1}, e'_i = v_1 v'_{i+1}, c_i = v'_1 v_{i+1}, c'_i = v'_1 v'_{i+1}, d_i = uv'_{i+1},$$

$$- \text{ برای } 1 \leq i \leq n_n, f_i = v_2 \mu_i, f'_i = v_2 \mu'_i, q_i = v'_2 \mu_i, q'_i = v'_2 \mu'_i, k_i = u \mu'_i,$$

⋮

$$- \text{ برای } 1 \leq i \leq n_n, p_i = v_{n_n+1} \theta_i, p'_i = v_{n_n+1} \theta'_i, r_i = v'_{n_n+1} \theta_i, r'_i = v'_{n_n+1} \theta'_i, m_i = u \theta'_i,$$

$$- v'_{1s_1} = v_1 s_1, v_{1s'_1} = v_1 s'_1, v'_{1s_1} = v_1 s_1, v_{1s'_1} = v_1 s'_1, v'_{1u} = v_1 u,$$

در این صورت مجموعه یال‌های

$$J = \{c_i e_i : 1 \leq i \leq n_n\} \cup \{v'_{i+1} e'_i : 1 \leq i \leq n_n\} \cup \\ \{f_i f'_i : 1 \leq i \leq n_n\} \cup \dots \cup \{p_i p'_i : 1 \leq i \leq n_n\} \cup \\ \{\mu'_i k_i : 2 \leq i \leq n_n\} \cup \dots \cup \{\theta'_i m_i : 2 \leq i \leq n_n\} \cup \\ \{\mu_i q_i : 1 \leq i \leq n_n\} \cup \dots \cup \{\theta_i r_i : 1 \leq i \leq n_n\} \cup \\ \{v_2 \mu'_1, \dots, v_{n_n+1} \theta'_1\} \cup \{k_1 d_1, \dots, m_1 d_{n_n}\} \cup \{v_{1s'_1} v_1, v_{1s_1} v'_{1s_1}, v'_1 v'_{1u}\},$$

که $|J| = 3n_n + 3 \sum_{i=1}^{n_n} n_n i + 3$ ، تمام رئوس قسمت * را می‌پوشاند (توجه شود که، s'_1, s_1 و u در $T[(\mu(\mathcal{T}_{n-1}))]$ پوشیده شده‌اند). لذا از فرض استقرا و مقدار فوق داریم

$$\beta'[T(\mu(\mathcal{T}_n))] \leq 3 \sum_{i=1}^n n_i + 3 \left(\sum_{i=1}^{n_1} n_1 i + \dots + \sum_{i=1}^{n_n} n_n i \right) + 3n - 1.$$

بنابراین از ۷.۴ و ۸.۴ نتیجه می‌شود

$$\beta'[T(\mu(\mathcal{T}))] = 3 \sum_{i=1}^n n_i + 3 \left(\sum_{i=1}^{n_1} n_1 i + \dots + \sum_{i=1}^{n_n} n_n i \right) + 3n - 1$$

و از قضیه ۳۳.۱.۱ خواهیم داشت

$$\alpha'[T(\mu(\mathcal{T}))] = 3 \sum_{i=1}^n n_i + 3 \left(\sum_{i=1}^{n_1} n_1 i + \dots + \sum_{i=1}^{n_n} n_n i \right) + 3n - 1.$$

□

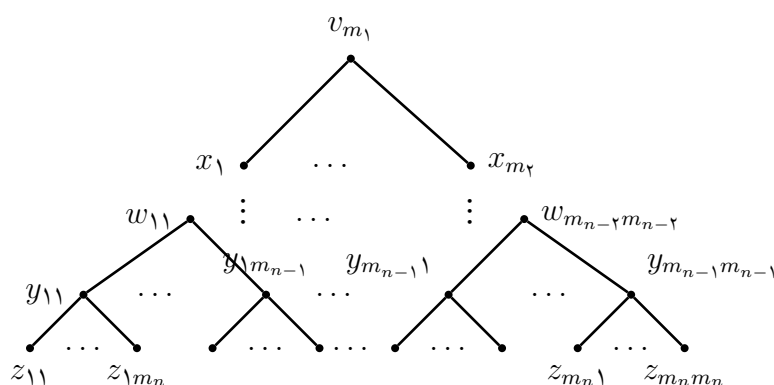
نتیجه ۱۳.۲.۴. برای درخت \mathcal{T} در شکل ۱۴.۴، که برای هر $1 \leq i \leq n$ و هر $1 \leq j \leq n_i$ ، $n_i \geq 1$ و $n_i j \geq 1$ و در صورت زوج بودن n ، برای حداقل یک $1 \leq i \leq n$ و یک $1 \leq j \leq n_i$ ، $n_i j \geq 2$ داریم

$$\alpha'[T(\mu(\mathcal{T}))] = \beta'[T(\mu(\mathcal{T}))].$$

قضیه ۱۴.۲.۴. اگر $n > 1$ تعداد سطرهای درخت \mathcal{T} در شکل ۱۶.۴ بوده و تمام رئوس هر سطر، بجز سطر آخر، حداقل یک یال رو به پایین داشته باشند و در حالتی که n زوج است، حداقل یکی از سطرهای زوج دست کم دو راس داشته باشد، داریم

$$\alpha'[T(\mu(\mathcal{T}))] = \alpha[\mu(\mathcal{T})] + \alpha(\mathcal{T}) + 5\alpha'(\mathcal{T}) - \alpha'[\mu(\mathcal{T})] \quad (\text{الف})$$

$$\beta'[T(\mu(\mathcal{T}))] = \beta'[\mu(\mathcal{T})] + \beta'(\mathcal{T}) + 5\beta(\mathcal{T}) - \beta[\mu(\mathcal{T})] \quad (\text{ب})$$



شکل ۱۶.۴: درخت \mathcal{T}

برهان. با فرض این که $n > 1$ بوده و برای هر $3 \leq k \leq n$ (در حالتی که $n \geq 3$) $\sum_{j=1}^{m_k} j m_k = m_k$ باشد، قضیه را در دو حالت بررسی می‌کنیم.

حالت اول. n زوج باشد. چون T درخت و فاقد دور است، لذا با استفاده از قضایای ۳۱.۱.۱، ۳۳.۱.۱ و ۳۴.۱.۱ خواهیم داشت

$$\alpha(T) = \beta'(T) = m_n + m_{n-2} + \dots + m_2,$$

$$\beta(T) = \alpha'(T) = m_{n-1} + m_{n-3} + \dots + m_1.$$

حال، چون تمام رئوس هر سطر، بجز سطر آخر، حداقل یک یال رو به پایین دارند، بوضوح $\alpha(T) \geq \frac{|V(T)|}{2}$ است و از نتیجه ۳.۲.۴ داریم $\alpha[\mu(T)] = 2(m_n + m_{n-2} + \dots + m_2)$. از طرفی با توجه به تعریف گراف میشلسکی داریم

$$|V(\mu(T))| = 2 \sum_{i=1}^n m_i + 1,$$

$$|E(\mu(T))| = 4 \sum_{i=2}^n m_i + 1.$$

بنابراین از قضیه ۳۲.۱.۱ خواهیم داشت $\beta[\mu(T)] = 2(m_{n-1} + m_{n-3} + \dots + m_1) + 1$ بدون کاستن از کلیت قضیه فرض کنید $m_2 \geq 2$. در این صورت مجموعه یالهای

$$K = \{y'_{11} z_{1i} : 1 \leq i \leq m_n\} \cup \dots \cup \{y'_{m_{n-1} m_{n-1}} z_{m_n i} : 1 \leq i \leq m_n\} \cup \\ \{y_{11} z'_{1i} : 1 \leq i \leq m_n\} \cup \dots \cup \{y_{m_{n-1} m_{n-1}} z'_{m_n i} : 1 \leq i \leq m_n\} \cup \dots \cup \\ \{v'_{m_1} x_i : 1 \leq i \leq m_2\} \cup \{v_{m_1} x'_i : 1 \leq i \leq m_2 - 1\} \cup \{x'_{m_2} u\},$$

که $|K| = 2(m_n + m_{n-2} + \dots + m_2)$ ، تمام رئوس $\mu(T)$ را می پوشاند (شکل ۱۷.۴ را ببینید). پس

$$\beta'[\mu(T)] \leq 2(m_n + m_{n-2} + \dots + m_2).$$

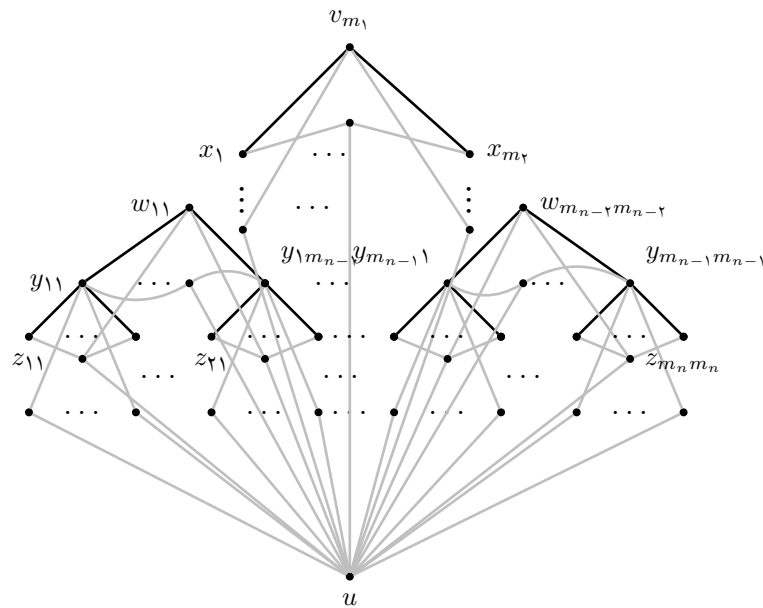
توجه شود که، در شکل ۱۷.۴ راس پایین هر راس از T راس جفت آن می باشد.

حال، چون $\alpha[\mu(T)] = 2(m_n + m_{n-2} + \dots + m_2)$ ، لذا

$$\beta'[\mu(T)] \geq 2(m_n + m_{n-2} + \dots + m_2)$$

و بنابراین $\beta'[\mu(T)] = 2(m_n + m_{n-2} + \dots + m_2)$. با توجه به مرتبه $\mu(T)$ و مقدار به دست آمده برای $\beta'[\mu(T)]$ ، از قضیه ۳۳.۱.۱ خواهیم داشت

$$\alpha'[\mu(T)] = 2(m_{n-1} + m_{n-3} + \dots + m_1) + 1.$$



شکل ۱۷.۴: گراف میشلکی درخت \mathcal{T}

حالت دوم. n فرد باشد. مشابه حالت قبل خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \alpha(\mathcal{T}) &= \beta'(\mathcal{T}) = m_n + m_{n-2} + \dots + m_1, \\ \beta(\mathcal{T}) &= \alpha'(\mathcal{T}) = m_{n-1} + m_{n-3} + \dots + m_2, \\ \alpha[\mu(\mathcal{T})] &= \beta'[\mu(\mathcal{T})] = 2(m_n + m_{n-2} + \dots + m_1), \\ \beta[\mu(\mathcal{T})] &= \alpha'[\mu(\mathcal{T})] = 2(m_{n-1} + m_{n-3} + \dots + m_2) + 1. \end{aligned}$$

در این حالت مجموعه یال‌هایی که $\mu(\mathcal{T})$ را می‌پوشاند، عبارت است از

$$\begin{aligned} K' &= \{y'_{1,1} z_{1,1} : 1 \leq i \leq m_n\} \cup \dots \cup \{y'_{m_{n-1}, m_{n-1}} z_{m_n, m_n} : 1 \leq i \leq m_n\} \cup \\ &\quad \{y_{1,1} z'_{1,1} : 1 \leq i \leq m_n\} \cup \dots \cup \{y_{m_{n-1}, m_{n-1}} z'_{m_n, m_n} : 1 \leq i \leq m_n\} \cup \dots \cup \\ &\quad \{x'_1 t_{1,1} : 1 \leq i \leq m_2\} \cup \dots \cup \{x'_{m_2} t_{m_2,1} : 1 \leq i \leq m_2\} \cup \\ &\quad \{x_1 t'_{1,1} : 1 \leq i \leq m_2\} \cup \dots \cup \{x_{m_2} t'_{m_2,1} : 1 \leq i \leq m_2\} \cup \\ &\quad \{v_{m_1} x_1, v'_{m_1} u\}. \end{aligned}$$

توجه شود که، برای هر $1 \leq i \leq m_2$ ، $t_{1,i}$ رئوس مجاور زیرین راس x_1 ، \dots و $t_{m_2,i}$ رئوس مجاور زیرین راس x_{m_2} می‌باشد. هم‌چنین برای هر $1 \leq i, j \leq m_2$ ، راس جفت $t_{i,j}$ است.

با توجه به تعریف گراف کلی برای گراف میشلسکی \mathcal{T} داریم

$$\begin{aligned} |V[T(\mu(\mathcal{T}))]| &= ۲ \sum_{i=۱}^n m_i + ۱ + ۴ \sum_{i=۲}^n m_i + ۱ \\ &= ۲m_۱ + ۶ \sum_{i=۲}^n m_i + ۲. \end{aligned}$$

بنابراین حداقل $\frac{|V[T(\mu(\mathcal{T}))]|}{۲} = m_۱ + ۳ \sum_{i=۲}^n m_i + ۱$ یال برای پوشاندن رئوس $T[\mu(\mathcal{T})]$ لازم است. لذا $\beta'[T(\mu(\mathcal{T}))] \geq m_۱ + ۳ \sum_{i=۲}^n m_i + ۱$ قرار می‌دهیم

• برای $۱ \leq i \leq m_۲$ ، $\beta_i = v'_{m_۱} x_i$ ، $\alpha'_i = v_{m_۱} x'_i$ ، $\alpha_i = v_{m_۱} x_i$ ،

• برای $۱ \leq i \leq m_۳$ ، $\gamma_{m_۲i} = x_{m_۲} t_{m_۲i}$ ، \dots ، $\gamma_{۱i} = x_{۱} t_{۱i}$ ،

• برای $۱ \leq i \leq m_۳$ ، $\gamma'_{m_۲i} = x_{m_۲} t'_{m_۲i}$ ، \dots ، $\gamma'_{۱i} = x_{۱} t'_{۱i}$ ،

• برای $۱ \leq i \leq m_۳$ ، $\lambda_{m_۲i} = x'_{m_۲} t_{m_۲i}$ ، \dots ، $\lambda_{۱i} = x'_{۱} t_{۱i}$ ،

⋮

• برای $۱ \leq i \leq m_n$ ، $\omega_{m_ni} = y_{m_{n-۱}} z_{m_ni}$ ، \dots ، $\omega_{۱i} = y_{۱} z_{۱i}$ ،

• برای $۱ \leq i \leq m_n$ ، $\omega'_{m_ni} = y_{m_{n-۱}} z'_{m_ni}$ ، \dots ، $\omega'_{۱i} = y_{۱} z'_{۱i}$ ،

• برای $۱ \leq i \leq m_n$ ، $\theta_{m_ni} = y'_{m_{n-۱}} z_{m_ni}$ ، \dots ، $\theta_{۱i} = y'_{۱} z_{۱i}$ ،

• $d_{۲i} = x'_i u$ ، $۱ \leq i \leq m_۲$ و $d_{۱m_۱} = v'_{m_۱} u$ ،

• برای $۱ \leq i \leq m_۳$ ، $d_{۳m_۲i} = t'_{m_۲i} u$ ، \dots ، $d_{۳۱i} = t'_{۱i} u$ ،

⋮

• برای $۱ \leq i \leq m_n$ ، $d_{nm_ni} = z'_{m_ni} u$ ، \dots ، $d_{n۱i} = z'_{۱i} u$ ،

در این صورت مجموعه یال‌های

$$\begin{aligned} L = & \{v_{m_۱} x_۱\} \cup \{v'_{m_۱} \beta_۱\} \cup \{\alpha_i \alpha'_i : ۱ \leq i \leq m_۲\} \cup \{\beta_i x_i : ۲ \leq i \leq m_۲\} \cup \\ & \{\gamma_{۱i} \gamma'_{۱i} : ۱ \leq i \leq m_۳\} \cup \dots \cup \{\gamma_{m_۲i} \gamma'_{m_۲i} : ۱ \leq i \leq m_۳\} \cup \\ & \{\lambda_{۱i} t_{۱i} : ۱ \leq i \leq m_۳\} \cup \dots \cup \{\lambda_{m_۲i} t_{m_۲i} : ۱ \leq i \leq m_۳\} \cup \dots \cup \\ & \{\omega_{۱i} \omega'_{۱i} : ۱ \leq i \leq m_n\} \cup \dots \cup \{\omega_{m_ni} \omega'_{m_ni} : ۱ \leq i \leq m_n\} \cup \\ & \{\theta_{۱i} z_{۱i} : ۱ \leq i \leq m_n\} \cup \dots \cup \{\theta_{m_ni} z_{m_ni} : ۱ \leq i \leq m_n\} \cup \\ & \{u d_{۱m_۱}\} \cup \{x'_i d_{۲i} : ۱ \leq i \leq m_۲\} \cup \\ & \{t'_{۱i} d_{۳۱i} : ۱ \leq i \leq m_۳\} \cup \dots \cup \{t'_{m_۲i} d_{۳m_۲i} : ۱ \leq i \leq m_۳\} \cup \dots \cup \\ & \{z'_{۱i} d_{n۱i} : ۱ \leq i \leq m_n\} \cup \dots \cup \{z'_{m_ni} d_{nm_ni} : ۱ \leq i \leq m_n\}, \end{aligned}$$

که $|L| = 1 + m_1 + 3 \sum_{i=2}^n m_i$ ، تمام رئوس گراف $T[\mu(\mathcal{T})]$ را می‌پوشاند و لذا

$$\beta'[T(\mu(\mathcal{T}))] \leq m_1 + 3 \sum_{i=2}^n m_i + 1.$$

بنابراین $\beta'[T(\mu(\mathcal{T}))] = m_1 + 3 \sum_{i=2}^n m_i + 1$ ، حال، با توجه به قضیه ۳۳.۱.۱ داریم

$$\alpha'[T(\mu(\mathcal{T}))] = m_1 + 3 \sum_{i=2}^n m_i + 1.$$

□

نتیجه ۱۵.۲.۴. اگر $n > 1$ تعداد سطرهای درخت \mathcal{T} در شکل ۱۶.۴ بوده و تمام رئوس هر سطر، بجز سطر آخر، حداقل یک یال رو به پایین داشته باشند و در حالتی که n زوج است، حداقل یکی از سطرهای زوج دست کم دو راس داشته باشد، داریم

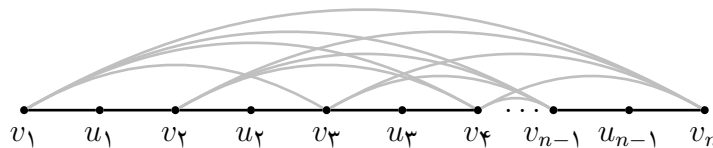
$$\alpha'[T(\mu(\mathcal{T}))] = \beta'[T(\mu(\mathcal{T}))].$$

۳.۴ بررسی عدد رنگ ناپذیری برخی از گراف‌ها

در این بخش، با توجه به کاربرد وسیع رنگ آمیزی‌های مختلف، عدد رنگ ناپذیری گراف مرکزی مسیر، دور، گراف دوبخشی کامل و گراف هزارپا، عدد رنگی گراف مرکزی گراف هزارپا و همچنین عدد رنگ ناپذیری گراف هزارپا را می‌یابیم و یا کران‌هایی برای آن‌ها ارائه می‌دهیم.

قضیه ۱.۳.۴. برای هر $n \geq 2$ داریم

$$n - 1 \leq \chi_c[C(P_n)] \leq n.$$



شکل ۱۸.۴: گراف مرکزی P_n

برهان. فرض کنید $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ مجموعه راس‌های P_n باشد و برای هر $1 \leq i \leq n - 1$ ، یال $v_i v_{i+1}$ توسط راس u_i در $C(P_n)$ زیرتقسیم شده باشد (شکل ۱۸.۴ را ببینید). تعداد یال‌های $C(P_n)$

برابر

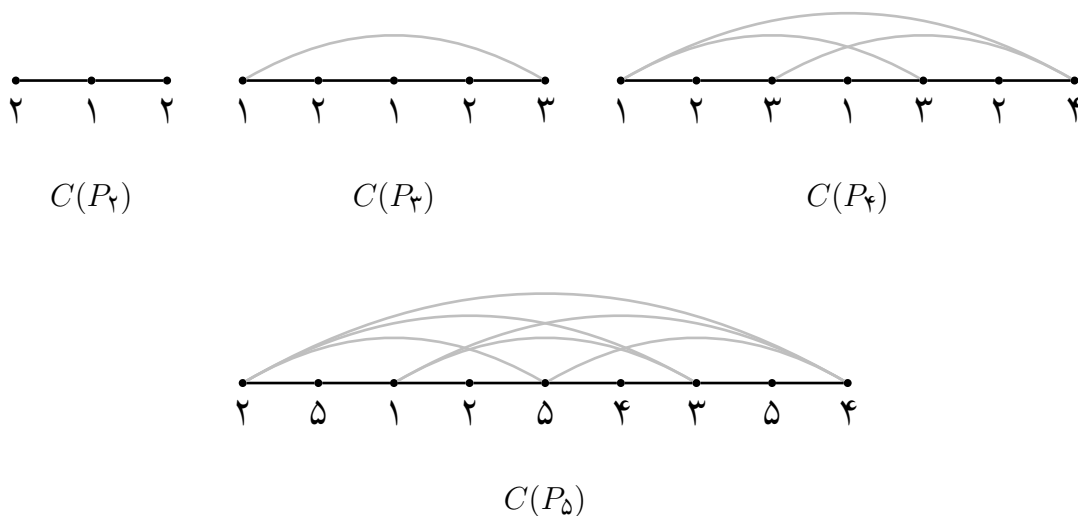
$$\begin{aligned} & 2(n-1) + (n-2) + (n-3) + \dots + 1 \\ &= 2n - 2 + \frac{(n-2)(n-1)}{2} \\ &= \frac{n^2 + n - 2}{2} \end{aligned}$$

است و این مقدار اکیدا کمتر از $\frac{n^2+n}{2} = \binom{n+1}{2}$ می‌باشد. بنابراین

$$\chi_c[C(P_n)] \leq n. \quad (9.4)$$

حال، $C(P_n)$ را به صورت زیر رنگ آمیزی می‌کنیم
برای $2 \leq n \leq 5$ رنگ آمیزی در شکل ۱۹.۴ نشان داده شده است و برای $n \geq 6$ نیز به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned} c(v_1) = 2, c(v_2) = 1, c(v_3) = 1, c(v_4) = 3, c(v_5) = 4, \dots, c(v_n) = n-1, \\ c(u_1) = 3, c(u_2) = 2, c(u_3) = 4, c(u_4) = 5, \dots, c(u_{n-2}) = n-1, c(u_{n-1}) = 1. \end{aligned}$$



شکل ۱۹.۴: رنگ آمیزی گراف $C(P_n)$ برای $2 \leq n \leq 5$

چون رنگ آمیزی فوق مجاز بوده و برای هر دو رنگ دلخواه c' و c'' یالی با دو سر رنگ شده با c' و c'' موجود است، پس یک رنگ ناپذیری است. حال، چون این رنگ ناپذیری برای $C(P_n)$ با حداقل $n-1$ رنگ امکان پذیر است، لذا خواهیم داشت

$$n-1 \leq \chi_c[C(P_n)]. \quad (10.4)$$

□

بنابراین از ۹.۴ و ۱۰.۴ داریم $n-1 \leq \chi_c[C(P_n)] \leq n$.

قضیه ۲.۳.۴. اگر $n \geq 3$ ، آنگاه $\chi_c[C(C_n)] = n$.

برهان. فرض کنید $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ مجموعه رئوس C_n باشد و یال $v_n v_1$ توسط راس u_n و یال $v_i v_{i+1}$ توسط راس u_i ($1 \leq i \leq n-1$) در $C(C_n)$ زیرتقسیم شده باشد. با توجه به زوج یا فرد بودن n ، رنگ آمیزی زیر را برای $C(C_n)$ تعریف می‌کنیم

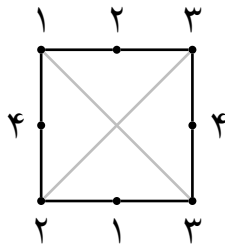
n زوج باشد. برای $n = 4$ شکل ۲۰.۴ را ببینید و برای $n \geq 6$ رنگ آمیزی زیر را در نظر بگیرید

$$c(v_1) = 1, c(v_2) = n, c(v_3) = 3, \dots, c(v_{n-1}) = n-1, c(v_n) = 2,$$

$$c(u_1) = 2, c(u_2) = 4, c(u_3) = n,$$

$$c(u_i) = \begin{cases} i+2 & i \in \mathbb{E}, 4 \leq i < n-2 \\ i-1 & i \in \mathbb{O}, 5 \leq i \leq n-3 \end{cases},$$

$$c(u_{n-2}) = 2, c(u_{n-1}) = n-2, c(u_n) = n.$$



شکل ۲۰.۴: رنگ آمیزی گراف $C(C_4)$

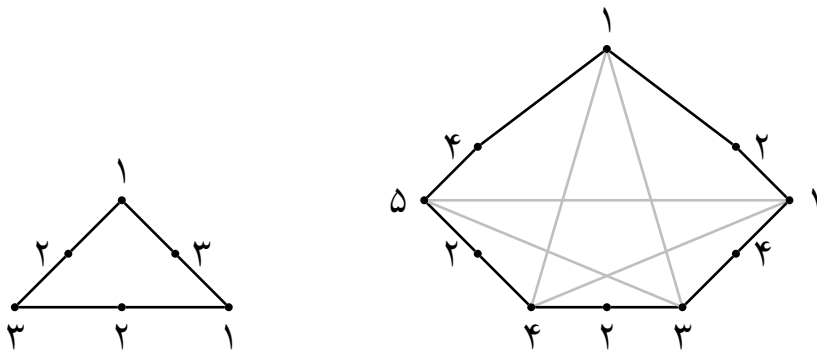
n فرد باشد. برای $n = 3, 5$ شکل ۲۱.۴ را ببینید و برای $n \geq 7$ رنگ آمیزی زیر را در نظر بگیرید

$$c(v_1) = 1, c(v_2) = n, c(v_3) = 3, \dots, c(v_{n-1}) = n-1, c(v_n) = 2,$$

$$c(u_1) = 2, c(u_2) = 1, c(u_3) = n, c(u_i) = i-1 \quad (4 \leq i \leq n).$$

چون رنگ آمیزی فوق مجاز بوده و برای هر دو رنگ دلخواه c' و c'' یالی با دو سر رنگ شده با c' و c'' موجود است، لذا یک رنگ ناپذیری است. بنابراین

$$\chi_c[C(C_n)] \geq n. \quad (11.4)$$

شکل ۳.۴.۱: رنگ آمیزی گراف‌های $C(C_5)$ و $C(C_3)$

حال، با توجه به تعریف گراف مرکزی، داریم

$$\begin{aligned} |E[C(C_n)]| &= \binom{n}{2} + n \\ &= \frac{n^2 + n}{2}. \end{aligned}$$

چون این تعداد یال اکیدا کمتر از $\binom{n+2}{2} = \frac{n^2+3n+2}{2}$ است، لذا $\chi_c[C(C_n)] \leq n+1$ ادعا می‌کنیم
(۱۲.۴) $\chi_c[C(C_n)] \leq n$.

به برهان خلف فرض کنیم $\chi_c[C(C_n)] = n+1$. لذا یک رنگ ناپذیری با $n+1$ رنگ برای $C(C_n)$ موجود است. چون n رأس u_i داریم، پس حداقل یک رنگ به یکی از v_i ها اختصاص داده می‌شود. فرض کنیم $c(v_n) = c_{n+1}$. چون برای هر $1 \leq i \leq n$ ، $d_{C(C_n)}(v_i) = n-1$ ، پس c_{n+1} با $n-1$ رنگ مجاور می‌شود. با فرض این که این $n-1$ رنگ متمایز باشند، یک رنگ مانند c_n باقی می‌ماند که با c_{n+1} مجاور نشده است. با این روند فقط دو رأس اصلی می‌ماند که در مورد آن‌ها بحث نکرده‌ایم و بقیه رئوس بحث نشده، رئوس روی یال‌ها هستند. بدون آن که به کلیت خللی وارد آید، فرض کنیم

$$c(u_n) = c_1, c(u_{n-1}) = c_{n-1}.$$

حالت‌های زیر را خواهیم داشت

۱. $c(v_{n-1}) = c_{n+1}, c(v_1) = c_n$. در این صورت c_{n+1} با n رنگ مجاور می‌شود. حال، چون رئوس باقی‌مانده همگی از درجه دو هستند، پس c_1 و c_{n-1} با هم مجاور نمی‌شوند، که تناقض است (برای $c(v_{n-1}) = c_n, c(v_1) = c_{n+1}$ نیز مشابه است).

۲. $c(u_1) = c_{n+1}, c(v_1) = c_n$. پس c_{n+1} با n رنگ مجاور می‌شود. حال، برای این که c_1 با c_{n-1} مجاور باشد، باید داشته باشیم $c(v_{n-1}) = c_1$. در این صورت با توجه به درجه رئوس باقی‌مانده c_{n-1} با c_n مجاور نمی‌شود، که تناقض است (برای $c(v_{n-1}) = c_n, c(u_{n-2}) = c_{n+1}$ نیز مشابه است).

۳. $c(u_1) = c_n, c(v_1) = c_{n+1}$. مجدداً c_{n+1} با n رنگ مجاور می‌شود. اما با توجه به درجه رئوس باقی‌مانده c_1 و c_n هرگز با هم مجاور نمی‌شوند، که این با رنگ ناپذیر بودن رنگ آمیزی در تناقض است (برای $c(u_{n-2}) = c_n, c(v_{n-1}) = c_{n+1}$ نیز مشابه است).

۴. در هر حالتی بجز حالت‌های فوق، c_n با c_{n+1} مجاور نمی‌شود که تناقض است.

لذا در هر حالت به تناقض می‌رسیم. از طرفی اگر رئوس مجاور v_n رنگ‌های متمایز نداشته باشند، c_{n+1} با n رنگ مجاور نخواهد شد و تناقض ایجاد می‌شود. پس در هر صورت به تناقض می‌رسیم. بنابراین فرض خلف باطل و ادعا برقرار است.

در نتیجه از ۱۱.۴ و ۱۲.۴ خواهیم داشت $\chi_c[C(C_n)] = n$. \square

قضیه ۳.۳.۴. برای هر $m, n \geq 1$ داریم

$$\chi_c[C(K_{m,n})] = m + n.$$

برهان. با استقرا روی تعداد رئوس گراف $K_{m,n}$ حکم را ثابت می‌کنیم.

آزمون استقرا. $m = n = 1$. با توجه به رنگ آمیزی نشان داده شده در شکل ۲۲.۴ داریم $\chi_c[C(K_{1,1})] \geq 2$. از طرفی چون $\binom{2}{2} = 3 < 2 = |E[C(K_{1,1})]|$ ، لذا $\chi_c[C(K_{1,1})] \leq 2$.



شکل ۲۲.۴: رنگ آمیزی گراف $C(K_{1,1})$

بنابراین

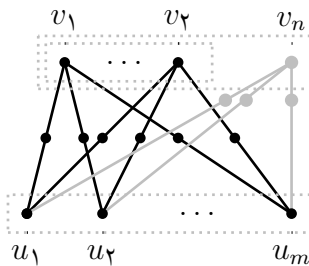
$$\chi_c[C(K_{1,1})] = 2.$$

فرض استقرا. فرض کنید حکم برای گراف‌های مرکزی از گراف‌های دویخشی کامل با کمتر از $m + n$ راس برقرار باشد.

حکم استقرا. نشان می‌دهیم برای گراف $C(K_{m,n})$ نیز حکم برقرار است.

فرض کنید گراف $C(K_{m,n-1})$ را، که بنا به فرض استقرا با $m + n - 1$ رنگ با شرایط رنگ ناپذیری رنگ آمیزی می‌شود، داشته باشیم. راس v_n را به گراف $C(K_{m,n-1})$ افزوده و رئوس و یال‌های مورد نیاز برای برقراری تعریف گراف مرکزی $K_{m,n}$ را اضافه می‌کنیم (شکل ۲۳.۴ را ببینید). رنگ c_n را به راس v_n اختصاص می‌دهیم. با توجه به فرض استقرا رئوس v_i برای هر $1 \leq i \leq n - 1$ رنگ‌های متمایزی دارند (چون v_i ها $1 \leq i \leq n - 1$ در گراف $C(K_{m,n-1})$ دو به دو مجاورند، برای حفظ شرایط رنگ ناپذیری باید $n - 1$ رنگ متمایز داشته باشند). بدین

ترتیب c_n با $n - 1$ رنگ متمایز v_i ‌ها مجاور می‌شود. حال، جایگشتی از m رنگ بخش پایین را به‌گونه‌ای به رئوس رنگ نشده مجاور v_n نسبت می‌دهیم که مجاز بودن رنگ آمیزی حفظ شود (چون m راس بخش پایین به دلیل رنگ ناپذیر بودن رنگ آمیزی رنگ‌های متمایز دارند، این امر امکان‌پذیر است). پس c_n با m رنگ دیگر نیز مجاور می‌شود و لذا $\chi_c[C(K_{m,n})] \geq m + n$.



شکل ۲۳.۴: گراف مرکزی $K_{m,n}$

حال، به برهان خلف فرض کنیم $\chi_c[C(K_{m,n})] > m + n$. در این صورت حداقل یک رنگ جدید به یکی از رئوس رنگ نشده مجاور v_n اختصاص می‌یابد و در هیچ صورتی با v_i ‌ها ($1 \leq i \leq n - 1$)، که برای هر $1 \leq i \leq n - 1$ رنگ متمایزی دارند، مجاور نمی‌شود و این با رنگ ناپذیر بودن رنگ آمیزی در تناقض است. لذا فرض خلف باطل بوده و داریم $\chi_c[C(K_{m,n})] \leq m + n$. بنابراین $\chi_c[C(K_{m,n})] = m + n$.

□

قضیه ۴.۳.۴. برای گراف هزارپا C داریم

$$\chi[C(C)] = \sum_{i=1}^n n_i \quad (\text{الف})$$

که $C(C) \notin \{C(K_{1,1}), C(K_{1,2}), S\}$ در شکل ۲۶.۴ نشان داده شده است).

$$\sum_{i=1}^n n_i + (n - 1) \leq \chi_c[C(C)] \leq \sum_{i=1}^n n_i + n \quad (\text{ب})$$

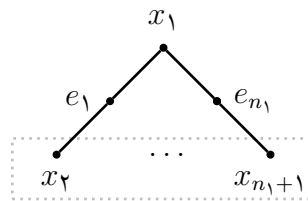
توجه کنید که، مشابه قضیه ۱.۱.۴، $\{x_1, t_1, \dots, w_1, s_1\}$ را مجموعه رئوس مخصوص گراف هزارپا C نامیده و n_1, n_2, \dots, n_n را، به ترتیب، تعداد راس‌های آویزان رئوس مخصوص x_1, t_1, \dots, s_1 در نظر گرفته‌ایم.

برهان. (الف) این قسمت را در دو حالت بررسی می‌کنیم.

حالت اول. $n = 1$ و $n_1 \geq 3$. با توجه به شکل ۲۴.۴ رنگ آمیزی زیر را برای $C(C)$ تعریف می‌کنیم

$$c(x_1) = c_3, c(x_{i+1}) = c_i \quad (1 \leq i \leq n_1), c(e_1) = c_2, c(e_i) = c_1 \quad (2 \leq i \leq n_1).$$

رنگ آمیزی فوق مجاز است. پس



شکل ۲۴.۴: گراف مرکزی K_{1, n_1}

$$\chi[C(\mathcal{C})] \leq n_1. \quad (13.4)$$

از طرفی مجموعه رئوس $L = \{x_2, \dots, x_{n_1+1}\}$ ، که $|L| = n_1$ ، تشکیل خوشه می‌دهند. لذا

$$\chi[C(\mathcal{C})] \geq n_1. \quad (14.4)$$

بنابراین از ۱۳.۴ و ۱۴.۴ داریم $\chi[C(\mathcal{C})] = n_1$.

حالت دوم. $n \geq 2$ ، $n_i \geq 1$ ، $C(\mathcal{C}) \neq S$ و $(1 \leq i \leq n)$. با توجه به شکل ۲۵.۴ رنگ آمیزی زیر را برای $C(\mathcal{C})$ تعریف می‌کنیم

$$c(x_2) = c_1, \dots, c(x_{n_1+1}) = c_{n_1}, c(t_2) = c_{n_1+1}, \dots, c(t_{n_2+1}) = c_{n_1+n_2}, \dots,$$

$$c(s_2) = c_{\sum_{i=1}^{n-1} n_i+1}, \dots, c(s_{n_n+1}) = c_{\sum_{i=1}^n n_i},$$

$$c(e_i) = c_{n_1+1} \quad 1 \leq i \leq n_1,$$

$$c(f_i) = c_{n_1+n_2+1} \quad 1 \leq i \leq n_2,$$

⋮

$$c(g_i) = c_{\sum_{i=1}^{n-1} n_i+1} \quad 1 \leq i \leq n_{n-1},$$

$$c(h_i) = c_1 \quad 1 \leq i \leq n_n,$$

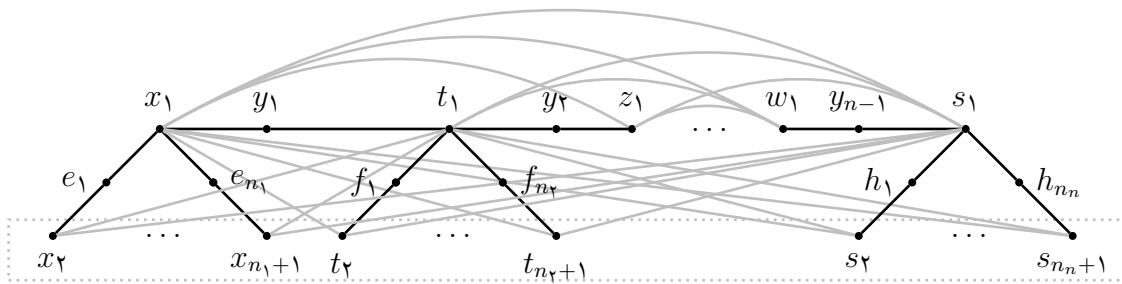
$$c(x_1) = c_1, c(t_1) = c_{n_1+1}, \dots, c(s_1) = c_{\sum_{i=1}^{n-1} n_i+1}$$

و به y_i ها ($1 \leq i \leq n-1$)، رنگی از رنگ‌های فوق بجز دو رنگ مجاورش را اختصاص می‌دهیم (این امر برای هر گراف هزارپا، بجز S ، با شرایط فوق امکان‌پذیر است).

توجه شود که، در رنگ آمیزی فوق g_i راس زیرتقسیم کننده یال $w_i w_{i+1}$ است ($1 \leq i \leq n_{n-1}$).

رنگ آمیزی فوق مجاز است. پس

$$\chi[C(\mathcal{C})] \leq \sum_{i=1}^n n_i. \quad (15.4)$$



شکل ۲۵.۴: گراف مرکزی گراف هزارپا C

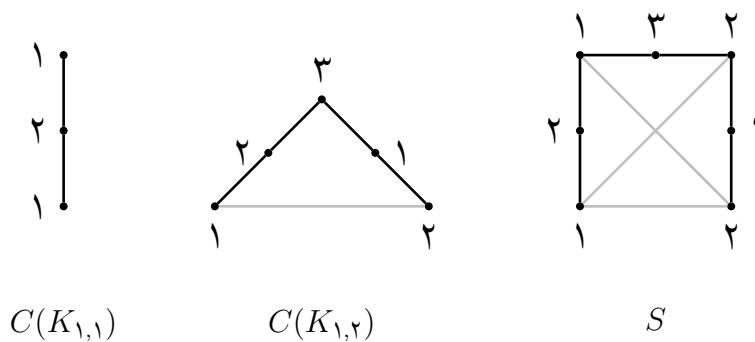
از طرفی مجموعه رئوس $L' = \{x_2, \dots, x_{n_1+1}, \dots, s_2, \dots, s_{n_n+1}\}$ که $|L'| = \sum_{i=1}^n n_i$ تشکیل خوشه می‌دهند. لذا

$$\chi[C(C)] \geq \sum_{i=1}^n n_i. \quad (۱۶.۴)$$

بنابراین از ۱۵.۴ و ۱۶.۴ خواهیم داشت $\chi[C(C)] = \sum_{i=1}^n n_i$.

اگر $C(C) \in \{C(K_{1,1}), C(K_{1,2}), S\}$ باشد، بوضوح با توجه به شکل ۲۶.۴ داریم

$$\chi[C(K_{1,1})] = ۲, \chi[C(K_{1,2})] = ۳, \chi(S) = ۳.$$



شکل ۲۶.۴: گراف‌های خاص

(ب) اگر $n = ۱$ باشد، با توجه به قضیه ۲.۲.۲ حکم برقرار است. لذا فرض کنید $n > ۱$. با توجه

به تعریف گراف مرکزی برای گراف هزارپا C داریم

$$\begin{aligned}
 |E[C(C)]| &= 2n_1 + \dots + 2n_n + 2(n-1) + (n-2) + (n-3) + \dots + 1 \\
 &+ (n-1) \sum_{i=1}^n n_i + \binom{\sum_{i=1}^n n_i}{2} \\
 &= 2 \sum_{i=1}^n n_i + (n-1) + \sum_{i=1}^{n-1} i + (n-1) \sum_{i=1}^n n_i + \frac{(\sum_{i=1}^n n_i)!}{2!(\sum_{i=1}^n n_i - 2)!} \\
 &= (n+1) \sum_{i=1}^n n_i + (n-1) + \frac{(n-1)n}{2} + \frac{(\sum_{i=1}^n n_i)(\sum_{i=1}^n n_i - 1)}{2} \\
 &= \frac{1}{2} \left[(2n+1) \sum_{i=1}^n n_i + n^2 + n - 2 + \left(\sum_{i=1}^n n_i \right)^2 \right].
 \end{aligned}$$

از طرفی

$$\begin{aligned}
 \binom{\sum_{i=1}^n n_i + n + 1}{2} &= \frac{(\sum_{i=1}^n n_i + n + 1)(\sum_{i=1}^n n_i + n)}{2} \\
 &= \frac{1}{2} \left[(2n+1) \sum_{i=1}^n n_i + n^2 + n + \left(\sum_{i=1}^n n_i \right)^2 \right].
 \end{aligned}$$

پس $|E[C(C)]| < \binom{\sum_{i=1}^n n_i + n + 1}{2}$. بنابراین خواهیم داشت

$$\chi_c[C(C)] \leq \sum_{i=1}^n n_i + n. \quad (17.4)$$

حال، رئوس $C(C)$ را به صورت زیر رنگ آمیزی می‌کنیم

(۱) اگر برای هر $1 \leq i \leq n$ ، $n_i = 1$ باشد

$$\begin{aligned}
 c(x_2) &= c_1, c(t_2) = c_2, \dots, c(w_2) = c_{n-1}, c(s_2) = c_n, \\
 c(x_1) &= c_{n+1}, c(y_1) = c_1, c(t_1) = c_{n+2}, c(y_2) = c_2, c(f_1) = c_{n+1}, \dots, \\
 c(w_1) &= c_{2n-1}, c(y_{n-1}) = c_{n-1}, c(g_1) = c_{2n-2}, \\
 c(e_1) &= c_2, c(s_1) = c_2, c(h_1) = c_1.
 \end{aligned}$$

(۲) اگر برای هر $1 \leq i \leq n$ ، $n_i \geq 2$ باشد

$$c(x_{\nu}) = c_1, \dots, c(x_{n_1+1}) = c_{n_1}, c(t_{\nu}) = c_{n_1+1}, \dots, c(t_{n_2+1}) = c_{n_1+n_2}, \dots,$$

$$c(s_{\nu}) = c_{\sum_{i=1}^{n-1} n_i+1}, \dots, c(s_{n_n+1}) = c_{\sum_{i=1}^n n_i},$$

$$c(e_{n_1}) = c_1, c(e_i) = c(x_{i+2}) \quad 1 \leq i \leq n_1 - 1,$$

$$c(f_{n_2}) = c_{n_1+1}, c(f_i) = c(t_{i+2}) \quad 1 \leq i \leq n_2 - 1,$$

⋮

$$c(g_{n_{n-1}}) = c_{\sum_{i=1}^{n-2} n_i+1}, c(g_i) = c(w_{i+2}) \quad 1 \leq i \leq n_{n-1} - 1,$$

$$c(h_{n_n}) = c_{\sum_{i=1}^{n-1} n_i+1}, c(h_i) = c(s_{i+2}) \quad 1 \leq i \leq n_n - 1,$$

رئوس $\{x_1, t_1, \dots, s_1, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}\}$ را، برای $n \geq 6$ ، با حداقل $n-1$ رنگ جدید با توجه به اثبات قضیه ۱.۳.۴ رنگ می‌کنیم و هم‌چنین برای $n \leq 5$ نیز می‌توان، به راحتی و با حفظ شرایط رنگ ناپذیری، با حداقل $n-1$ رنگ، رنگ آمیزی نمود.

(۳) اگر برای برخی از i ها، $n_i = 1$ و برای برخی $n_i \geq 2$ باشد ($1 \leq i \leq n$)، رئوس گراف $C(C)$ را با ترکیبی از دو رنگ آمیزی فوق رنگ می‌کنیم.

چون رنگ آمیزی فوق مجاز بوده و برای هر دو رنگ دلخواه c' و c'' یالی با دو سر رنگ شده با c' و c'' موجود است، لذا یک رنگ ناپذیری است. پس

$$\chi_c[C(C)] \geq \sum_{i=1}^n n_i + (n-1). \quad (18.4)$$

بنابراین از ۱۷.۴ و ۱۸.۴ خواهیم داشت

$$\sum_{i=1}^n n_i + (n-1) \leq \chi_c[C(C)] \leq \sum_{i=1}^n n_i + n.$$

□

قضیه ۵.۳.۴. برای گراف هزارپا C با m راس مخصوص، که $n_1 \geq 1$ و برای هر $2 \leq i \leq m$ ، داریم $n_i \geq i-1$

$$\chi_c(C) = m + 1.$$

توجه کنید که در گراف هزارپا C ، v_1, v_2, \dots, v_m را، رئوس مخصوص گراف نامیده (شکل ۲۸.۴ را ببینید) و n_i را نیز، تعداد رئوس آویزان راس مخصوص v_i در نظر می‌گیریم ($1 \leq i \leq m$).

برهان. ابتدا ثابت می‌کنیم

$$\chi_c(C) \leq m + 1. \quad (19.4)$$

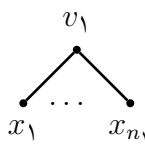
به برهان خلف فرض کنیم $\chi_c(C) > m + 1$. چون گراف C ، m راس مخصوص دارد، پس در رنگ آمیزی گراف حداقل دو رنگ به رئوس آویزان C اختصاص می‌یابد. چون رئوس آویزان مجاور نیستند،

لذا رنگ آمیزی خواهیم داشت که در آن حداقل دو رنگ غیر مجاورند و این با تعریف رنگ ناپذیری متناقض است. پس فرض خلف باطل است و داریم $\chi_c(C) \leq m + 1$.

حال، به استقرا روی تعداد رئوس مخصوص نشان می‌دهیم
 $\chi_c(C) \geq m + 1$. (۲۰.۴)

آزمون استقرا. $m = 1$. گراف C را به صورت زیر رنگ می‌کنیم (شکل ۲۷.۴ را ببینید)
 $c(v_1) = c_1, c(x_i) = c_2 (1 \leq i \leq n_1)$.

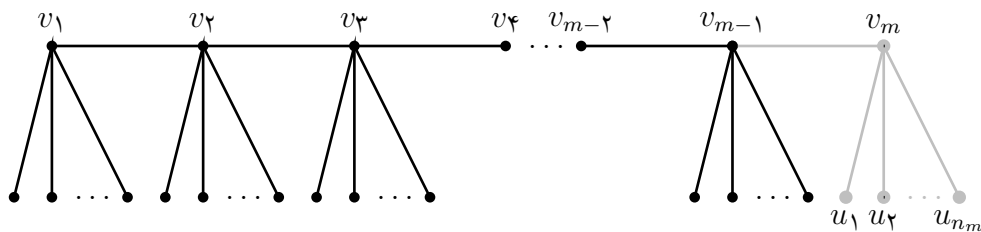
چون خواص رنگ ناپذیری برقرار می‌باشد، پس رنگ آمیزی فوق یک رنگ ناپذیری است و لذا
 $\chi_c(C) \geq 2$.



شکل ۲۷.۴: گراف K_{1, n_1}

فرض استقرا. فرض کنیم حکم برای گراف هزارپا با کمتر از m راس مخصوص برقرار باشد.
 حکم استقرا. نشان می‌دهیم برای گراف هزارپا با m راس مخصوص نیز حکم برقرار است.

گراف $K_{1, n_{m+1}}$ با راس مخصوص v_m را به گراف هزارپا با $m - 1$ راس مخصوص، مطابق شکل ۲۸.۴، می‌افزاییم. طبق فرض استقرا گراف هزارپا با $m - 1$ راس مخصوص با m رنگ، رنگ آمیزی می‌شود. حال، رنگ c_{m+1} را به راس v_m اختصاص می‌دهیم. پس c_{m+1} با رنگ راس مخصوص همسایه‌اش مجاور می‌شود. برای آن‌که با باقی رنگ‌ها نیز مجاور شود، آن‌ها را به رئوس آویزان راس v_m اختصاص می‌دهیم (با توجه به شرایط قضیه این امر امکان‌پذیر است) و لذا رنگ ناپذیری با $m + 1$ رنگ خواهیم داشت.



شکل ۲۸.۴: گراف هزارپا C

□

در نتیجه از ۱۹.۴ و ۲۰.۴ داریم $\chi_c(C) = m + 1$

پیوست آ

جدول نمادها

تعداد مثلث‌های گراف G	$t(G)$
حاصل ضرب دکارتی گراف‌های G_1, G_2, \dots, G_n	$\square_{i=1}^n G_i$
درجه راس x در گراف G	$d_G(x)$
دور n راسی	C_n
زیرگراف H از گراف G	$H \subseteq G$
زیرگراف سره H از گراف G	$H \subset G$
عدد استقلال	α
عدد استقلال یالی	α'
عدد پوششی	β
عدد پوشش یالی	β'
عدد خوشه‌ای	ω
عدد رنگ ناپذیری	χ_c
عدد رنگی	χ
عدد رنگی متعادل	$\chi=$
گراف دوبخشی G با بخش‌های X و Y	$G[X, Y]$
گراف دوبخشی کامل با بخش‌های X و Y که $ X = n$ و $ Y = m$	$K_{m,n}$
گراف ستاره با n راس آویزان	$K_{1,n}$
گراف کامل n راسی	K_n
گراف کلی از گراف G	$T(G)$
گراف مرکزی از گراف G	$C(G)$
گراف میانی از گراف G	$M(G)$
گراف میشلسکی G	$\mu(G)$

ماکزیمم درجه در گراف	Δ
مرتبه گراف G	$n(G)$
مسیر n راسی	P_n
مکمل گراف G	\bar{G}
مینیمم درجه در گراف	δ

مراجع

- [1] M.M. Ali Akbar, K. Kaliraj, J. Vivin Vernold, *On equitable coloring of central graphs and total graphs*, Electronic Notes in Discrete mathematics, 33 (2009) 1-6.
- [2] J.A. Bondy and U.S.R. Murty, *Graph theory with applications*, Springer, 2008.
- [3] G.J. Chang, L. Huang, X. Zhu, *Circular chromatic numbers of Mycielski's graphs*, Discrete Mathematics, 205 (1999) 23-37.
- [4] Z. Füredi, *A proof of the stability of extremal graphs*, Rényi Alfréd Mathematical Institute, Budapest, Aug 2010.
- [5] F. Harary, *Graph theory*, Narosa Publishing House, 1969.
- [6] F. Harary and A.J. Schwenk, *The number of caterpillars*, Discrete Mathematics, 6 (1973) 359-365.
- [7] G. Kortsarz and S. Shende, *Approximating the achromatic number problem on bipartite graphs*, (Springer, Berlin / Heidelberg, 2003) LNCS Vol. 2832 385-396.
- [8] H.P. Patil and R. Pandiya Raj, *On the total graph of Mycielski graphs, central graphs and their covering numbers*, Discussiones Mathematicae Graph Theory, 33 (2013) 361-371.
- [9] V. Ramakrishnan, *Studies on mediate graphs and related topics*, Ph.D. thesis, Pondicherry University, India, April 1988.
- [10] J. Vivin Vernold, M. Venkatachalam, M.M. Ali Akbar, *A note on achromatic coloring of star graph families*, Filomat 23(3) (2009) 251-255.
- [11] D.B. West, *Introduction to graph theory*, Prentice Hall, 2000.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

k -coloring k -رنگ آمیزی

k -colorable k -رنگ پذیر

equitable k -colorable k -رنگ پذیر متعادل

الف

equitable independence-partition افراز مستقل متعادل

ب

vertex cover پوشش راسی

edge cover پوشش یالی

خ

clique خوشه

د

sequence majorized دنباله تایید شده

degree-majorized دنباله درجات تایید شده

cycle دور

ر

pendant vertex راس آویزان

isolated vertex راس تنها

internal vertex راس داخلی

coloring رنگ آمیزی

proper coloring رنگ آمیزی واقعی

achromatic coloring رنگ ناپذیری

root ریشه

twin-vertices رئوس جفت

ز

subdividing زیرتقسیم

subgraph	زیرگراف
induced subgraph	زیرگراف القایی
proper subgraph	زیرگراف سره
ض	
Cartesian product	ضرب دکارتی
ع	
independence number	عدد استقلال
edge independence number	عدد استقلال یالی
covering number	عدد پوششی
edge covering number	عدد پوشش یالی
clique number	عدد خوشه‌ای
achromatic number	عدد رنگ ناپذیری
chromatic number	عدد رنگی
equitable number	عدد رنگی متعادل
گ	
k-partite graph	گراف k -بخشی
complete k-partite graph	گراف k -بخشی کامل
k-regular graph	گراف k -منتظم
empty graph	گراف تهی
directed graph, digraph	گراف جهت‌دار
bipartite graph	گراف دوبخشی
complete bipartite graph	گراف دوبخشی کامل
simple graph	گراف ساده
nondirected graph	گراف غیر جهت‌دار
complete graph	گراف کامل
total graph	گراف کلی
triangle-free graph	گراف مثلث آزاد
central graph	گراف مرکزی
complement graph	گراف مکمل
regular graph	گراف منتظم
middle graph	گراف میانی
Mycielski graph	گراف میشلسکی

n-iterated Mycielski graph.....	گراف میشلسکی مرتبه n
infinity graph.....	گراف نامتناهی
disconnected graph.....	گراف ناهمبند
caterpillar graph.....	گراف هزارپا
connected graph.....	گراف همبند
م	
adjacency matrix.....	ماتریس مجاورت
incidence matrix.....	ماتریس وقوع
triangle.....	مثلث
adjacent.....	مجاور
independent set.....	مجموعه مستقل
twin-sets.....	مجموعه‌های جفت
component.....	مولفه
ه	
neighborhood.....	همسایگی
ی	
multiple edges.....	یال‌های چندگانه

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

A

achromatic coloring رنگ ناپذیری
achromatic number عدد رنگ ناپذیری
adjacency matrix ماتریس مجاورت
adjacent مجاور

B

bipartite graph گراف دوبخشی

C

Cartesian product ضرب دکارتی
caterpillar graph گراف هزارپا
central graph گراف مرکزی
chromatic number عدد رنگی
clique خوشه
clique number عدد خوشه‌ای
coloring رنگ آمیزی
complement graph گراف مکمل
complete bipartite graph گراف دوبخشی کامل
complete graph گراف کامل
complete k -partite graph گراف k -بخشی کامل
component مولفه
connected graph گراف همبند
covering number عدد پوششی
cycle دور

D

degree-majorized دنباله درجات تایید شده

directed graph, digraph گراف جهت‌دار
 disconnected graph گراف ناهمبند

E

edge cover پوشش یالی
 edge covering number عدد پوشش یالی
 edge independence number عدد استقلال یالی
 empty graph گراف تهی
 equitable independence-partition افراز مستقل متعادل
 equitable k -colorable k -رنگ پذیر متعادل
 equitable number عدد رنگی متعادل

I

incidence matrix ماتریس وقوع
 independence number عدد استقلال
 independent set مجموعه مستقل
 induced subgraph زیرگراف القایی
 infinity graph گراف نامتناهی
 internal vertex راس داخلی
 isolated vertex راس تنها

K

k -colorable k -رنگ پذیر
 k -coloring k -رنگ آمیزی
 k -partite graph گراف k -بخشی
 k -regular graph گراف k -منتظم

M

middle graph گراف میانی
 multiple edges یال‌های چندگانه
 Mycielski graph گراف میشلسکی

N

neighborhood همسایگی
 n -iterated Mycielski graph گراف میشلسکی مرتبه n
 nondirected graph گراف غیر جهت‌دار

P

pendant vertex..... راس آویزان
 proper coloring..... رنگ آمیزی واقعی
 proper subgraph..... زیرگراف سره

R

regular graph..... گراف منتظم
 root..... ریشه

S

sequence majorized..... دنباله تایید شده
 simple graph..... گراف ساده
 subdividing..... زیرتقسیم
 subgraph..... زیرگراف

T

total graph..... گراف کلی
 triangle..... مثلث
 triangle-free graph..... گراف مثلث آزاد
 twin-sets..... مجموعه‌های جفت
 twin-vertices..... رئوس جفت

V

vertex cover..... پوشش راسی

نمایه

- k -رنگ آمیزی، ۱۱
 k -رنگ پذیر، ۱۲
 k -رنگ پذیر متعادل، ۱۸
افراز مستقل متعادل، ۱۸
پوشش راسی، ۱۰
پوشش یالی، ۱۰
حاصل ضرب دکارتی، ۸
خوشه، ۶
دنباله درجات تایید شده، ۴۰
دور، ۵
راس آویزان، ۶
رنگ آمیزی، ۱۱
رنگ آمیزی متعادل، ۱۸
رنگ آمیزی واقعی، ۱۲
رنگ ناپذیری، ۱۵
ریشه، ۹
رئوس جفت، ۹
زیرتقسیم، ۹
زیرگراف، ۸
زیرگراف القایی، ۸
زیرگراف سره، ۸
طول مسیر، ۵
عدد استقلال، ۱۰
- عدد استقلال یالی، ۱۰
عدد پوششی، ۱۰
عدد پوشش یالی، ۱۰
عدد خوشه‌ای، ۶
عدد رنگ ناپذیری، ۱۵
عدد رنگی، ۱۲
عدد رنگی متعادل، ۱۸
قضیه کونینگ (۱۹۱۶)، ۱۱
قضیه گالای (۱۹۵۹)، ۱۱
گراف k -بخشی، ۴
گراف k -بخشی کامل، ۴
گراف k -منتظم، ۶
گراف تهی، ۲
گراف جهت‌دار، ۷
گراف دوبخشی، ۳
گراف دوبخشی کامل، ۴
گراف ساده، ۲
گراف ستاره، ۴
گراف غیر جهت‌دار، ۷
گراف کامل، ۳
گراف کلی، ۱۳
گراف مثلث آزاد، ۵
گراف مرکزی، ۱۳
گراف منتظم، ۶
گراف میانی، ۱۳
گراف میشلسکی، ۹

- گراف میشلسکی مرتبه n ، ۹
گراف نامتناهی، ۲
گراف ناهمبند، ۳
گراف هزارپا، ۶
گراف همبند، ۳
گشت، ۵
- ماتریس مجاورت، ۶
ماتریس وقوع، ۶
مثلث، ۵
- مجموعه مستقل راسی، ۱۰
مجموعه مستقل یالی، ۱۰
مجموعه‌های جفت، ۹
مکمل یک گراف ساده، ۷
مؤلفه، ۳
- یال‌های چندگانه، ۲

Aabstract

In this dissertation, we analyze the coloring, the number of cliques and the edge independence number and edge covering number in the total graphs on the Mycielski graphs and central graphs. For this purpose, we first calculate the achromatic number of the central graph, middle graph and total graph on the star graphs and the equitable chromatic number of the central graphs on the star graphs, complete bipartite graphs and complete graphs and also total graph of paths and cycles. Then, we find the number of triangles for the total graph, middle graph, central graph, Mycielski graph and some of their combinations and we provide upper bounds for the number of triangles of the n -iterated Mycielski graph of a graph and the total graph of the n -iterated Mycielski graph of it. Moreover we obtain the edge independence number and edge covering number of the total graph of the Mycielski graphs on the star graphs and some of the trees in terms of the vertex and edge independence number and the vertex and edge covering number. In addition we calculate the vertex and edge independence number and vertex and edge covering number of the central graphs, middle graphs and total graphs on the caterpillar. Finally, we present our new results on the achromatic coloring and find the achromatic number of the central graph on the paths, cycles, bipartite graphs and caterpillar graphs.

Keywords: Total graph, Central graph, Middle graph, Mycielski graph, Independence number, Covering number, Edge independence number, Edge covering number, Chromatic number, Achromatic number, Equitable chromatic number.



Shahrood University
Faculty Of Mathematical Sciences

Dissertation Submitted in Partial
Fulfillment of The Requirements For The
Degree of Master of Science in
Applied Mathematics

**On the total graph of Mycielski graphs,
central graphs and their covering numbers**

Supervisors

Dr.N. Jafari Rad and S.F. Foroohande

by

Bahare Vaqari Motlaq

September 2014