



دانشکده علوم ریاضی  
گروه آمار

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته  
آمار، گرایش آمار ریاضی

عنوان

# آنالیز واریانس چندمتغیره در توزیع نوع کاتز

استاد راهنما

دکتر محمد آرشی

دانشجو

علی یعقوبی جناسمی

۱۳۹۳

پروردگارا...

نه می توانم مویشان را که در راه عزت من سفید شد، سیاه کنم و نه برای دست های  
پینه بسته شان که شمره تلاش برای افتخار من است، مرهمی دارم. پس توفیقم ده که  
هر لحظه سگر گزارشان باشم و ثانیه های عمرم را در عصای دست بودشان بگذارم.

اگر تنها ترین تنها شوم، باز خدا هست

او جان شین همه نداشتن هست...

تقدیم بہ

پدر و مادر عزیزم

# حمد و سپاس خدایی را که لطف و کرمش شامل من شد و این توانایی را به من عطا نمود تا گامی کوچک در اقیانوس بی‌کران علم و معرفت بردارم.

اکنون که با لطف خداوند متعال، این دوره تحصیلی را به پایان رسانده‌ام، ابتدا، از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای محترم، جناب آقای دکتر محمد آرشی که از ابتدای راه و در طی انجام تحقیق، با راهنمایی‌های خود مرا در نگارش این اثر یاری نمودند، سپاسگزاری می‌کنم. بر خود لازم می‌دانم که از اساتید محترم داور، جناب آقای دکتر احمد رضازاده نزاکتی و خانم دکتر نگار اقبال، و همچنین از تمام اساتید فرهیخته گروه آمار دانشگاه شاهرود تشکر و قدردانی نمایم.

وظیفه خود می‌دانم که از زحمات پدر و مادر بسیار عزیز، دلسوز و فداکارم که پیوسته راهنمای من در زندگی بوده‌اند، قدردانی به عمل آورم. همچنین از برادرم و خواهرانم که همواره پشتیبان من بوده‌اند، صمیمانه سپاسگزاری می‌کنم.

با سپاس بی‌دریغ خدمت دوستان و همکلاسی‌های گران‌مایه‌ام، آقایان احسان اسحق، میعاد ولیپور، پیمان برآبادی، محسن مهدی‌زاده و خانم مینا نوروزی‌راد که مرا صمیمانه و مشفقانه یاری داده‌اند.

علی یعقوبی جناسی  
۱۳۹۳

## تعمدنامه

اینجانب علی یعقوبی جناسمی دانشجوی کارشناسی ارشد رشته آمار دانشکده علوم ریاضی دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان آنالیز واریانس چندمتغیره در توزیع نوع کاتز، تحت راهنمایی دکتر محمد آرشی متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه شاهرود “ یا “ Shahrood University “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

علی یعقوبی جناسمی  
۱۳۹۳

## مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

## چکیده

در بسیاری از روش‌های آماری، استفاده از روش‌های چندمتغیره مورد توجه محققین است. یکی از کاربردهای روش‌های چندمتغیره در تجزیه و تحلیل واریانس است، که در این خصوص یافتن بهترین برآوردگر برای پارامتر مجهول جامعه در درجه اول اهمیت قرار دارد. مسئله‌ای که همواره در برآورد پارامتر مطرح است، بررسی اندازه دقت برآوردگر است. یکی از راه‌های بررسی این موضوع روش تجزیه و تحلیل واریانس می‌باشد. پایه و اساس تجزیه و تحلیل چندمتغیره، توزیع نرمال چندمتغیره است. از آنجایی که در مسائل واقعی حالاتی وجود دارد که در نظر گرفتن توزیع نرمال چندمتغیره برای آن مناسب نیست، در این حالت از کلاس‌های دیگری از توزیع‌های چندمتغیره به عنوان جانشین می‌توان استفاده کرد. در این تحقیق ابتدا به بررسی توزیع نرمال چندمتغیره پرداخته و سپس خانواده توزیع‌های بیضی‌گون را مورد مطالعه قرار دادیم. در این راستا قصد داریم با استفاده از توزیع نوع کاتز، تجزیه و تحلیل واریانس را مورد بررسی قرار دهیم.

## کلمات کلیدی:

توزیع‌های بیضی‌گون، توزیع نوع کاتز، برآوردگر مجانبی، آنالیز واریانس چندمتغیره، فاصله اطمینان همزمان

## پیشگفتار

توزیع نوع کاتز به عنوان تعمیمی از توزیع نرمال چندمتغیره، توسط کاتز (۱۹۷۵) معرفی شد. از سال ۱۹۹۰ که موجی از فعالیت‌های مربوط به نظریه توزیع‌ها در راستای این توزیع آغاز گردید، برخی به تعداد ۲۵ مقاله در توزیع نوع کاتز در طول دوره (۲۰۰۰-۱۹۹۰)، در مقایسه با تنها ۵ مقاله در طول دوره (۱۹۸۹-۱۹۸۰) شناسایی کرده‌اند. هدف از این پایان‌نامه، بررسی بیشتر خواص این توزیع در زمینه‌های: توزیع‌های حاشیه‌ای، گشتاورها، تابع مشخصه، مشخصه‌سازی، توزیع مجانبی، آزمون فرضیه و تحلیل واریانس می‌باشد. در این راستا توجه بیشتر به تحلیل واریانس چندمتغیره و برآورد پارامترهای این توزیع با استفاده از تکنیک‌های برآورد در خانواده کلی‌تر از این توزیع به نام توزیع‌های بیضی‌گون می‌باشد. با توجه به این مقدمه، ساختار این پایان‌نامه به صورت زیر است:

- در فصل اول، توزیع‌های بیضی‌گون را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.
- در فصل دوم، توزیع نوع کاتز را معرفی و سپس به محاسبه توزیع‌های حاشیه‌ای، گشتاورها، تابع مشخصه، مشخصه‌سازی، توزیع مجانبی و برآورد پارامترها می‌پردازیم.
- در فصل سوم، حالت خاصی از توزیع معرفی شده در فصل دوم را در نظر می‌گیریم و با استفاده از این حالت خاص آزمون فرضیه و تحلیل واریانس انجام می‌دهیم.
- در فصل چهارم، خلاصه و نتیجه‌گیری به همراه پیشنهادات برای آینده تحقیق ارائه می‌گردد.
- پیوست این پایان‌نامه نیز شامل تعاریف و مفاهیم اولیه و کدهای نوشته‌شده در محیط  $R$  برای رسم شکل‌ها و بازتولید مثال‌های موجود در پایان‌نامه است.

در این پایان‌نامه، در مواردی که با  $(\otimes)$  مشخص شده‌اند، لم یا قضیه در منبع اصلی موجود بوده و برهان آن از نگارنده این پایان‌نامه می‌باشد و مواردی که با  $(\otimes\otimes)$  مشخص شده‌اند، قضیه یا لم و برهان آن هر دو از نگارنده این پایان‌نامه می‌باشد.

# لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

۱. یعقوبی جناسمی، ع. آرشی، م. (۱۳۹۳)، آنالیز واریانس چندمتغیره با استفاده از توزیع نمایی - توانی، هفتمین کنفرانس بین‌المللی انجمن ایرانی تحقیق در عملیات، دانشگاه سمنان، ایران.
۲. یعقوبی جناسمی، ع. آرشی، م. (۱۳۹۳)، توزیع نوع کاتز دو متغیره، همایش ملی آمار کاربردی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تبریز، ایران.
۳. یعقوبی جناسمی، ع. آرشی، م. (۱۳۹۳)، توزیع مجانبی برآوردگر ماکزیمم درست‌نمایی بردار پارامتر مکان در توزیع نوع کاتز  $p$ -متغیره، مجله اندیشه آماری، تحت داوری،



# فهرست نشانه‌ها و نمادها

بردار تصادفی $X$	$X$
یافته‌ی بردار تصادفی $X$	$x$
ترانزاده‌ی ماتریس $A$	$A'$
معکوس ماتریس $A$	$A^{-1}$
ماتریس همانی $m \times m$	$I_m$
بردار ی با درایه‌های صفر	$o$
ماتریس مقیاس	$\Sigma$
ماتریس قطری $A$	$diag(A)$
رتبه‌ی ماتریس $A$	$rank(A)$
دترمینان ماتریس $A$	$det(A)$
ضریب نرمال‌ساز	$c_n$
عملگر مشتق	$\partial$
تابع گامای یک‌متغیره	$\Gamma(\cdot)$
تابع مشخصه	$\phi(\cdot)$
توزیع کی- دو مرکزی با درجه آزادی $q$	$\chi^2(q)$
برآورد واریانس جامعه	$\hat{\sigma}^2$
ضریب همبستگی	$\rho$
هم‌توزیعی بردار $X$ با بردار $Y$	$X \stackrel{d}{=} Y$
توزیع چندمتغیره پیرسن نوع VII	$MPVII_p(\mu, \Sigma, g)$
توزیع چندمتغیره پیرسن نوع II	$MPII_p(\mu, \Sigma, g)$
توزیع کوشی چندمتغیره	$MC_p(\mu, \Sigma)$
توزیع $t$ -استودنت چندمتغیره	$MT_p(m, \mu, \Sigma)$

# فهرست مطالب

ز	لیست جداول
۱	لیست تصاویر
۲	۱ توزیع‌های بیضی‌گون
۲	۱.۱ مقدمه
۳	۲.۱ توزیع نرمال چندمتغیره
۶	۱.۲.۱ ویژگی متغیرهای تصادفی نرمال $p$ -متغیره
۱۰	۲.۲.۱ برآورد در نرمال چندمتغیره
۱۱	۳.۱ توزیع کروی
۱۳	۴.۱ تابع چگالی
۱۴	۵.۱ توزیع‌هایی با منحنی تراز بیضی شکل
۱۴	۱.۵.۱ توزیع بیضی‌گون
۲۶	۲.۵.۱ توزیع حاشیه‌ای
۲۸	۶.۱ توزیع شرطی
۲۸	۷.۱ تابع مشخصه
۳۲	۸.۱ برآورد پارامترها
۳۴	۹.۱ بررسی یک مثال از خانواده توزیع بیضی‌گون
۳۵	۱.۹.۱ نمایش تصادفی

۳۸	گشتاورها	۲.۹.۱
۴۰	تابع مشخصه	۳.۹.۱
۴۳	برآورد پارامترها	۴.۹.۱
۴۴	آزمون فرضیه	۵.۹.۱
۴۷	توزیع نوع کاتز	۲
۴۷	مقدمه	۱.۲
۴۷	توزیع نوع کاتز پیشنهاد شده در فنگ و همکاران (۱۹۹۰)	۲.۲
۴۹	چگالی حاشیه‌ای	۳.۲
۵۳	گشتاور	۴.۲
۵۵	تابع مشخصه	۵.۲
۵۹	مشخصه‌سازی	۶.۲
۶۲	برآورد پارامترها	۷.۲
۶۴	تحلیل واریانس با استفاده از توزیع نوع کاتز	۳
۶۴	مقدمه	۱.۳
۶۴	حالت خاص توزیع نوع کاتز	۲.۳
۶۸	الگوریتم شبیه‌سازی	۳.۳
۷۱	برآورد پارامترها	۴.۳
۷۲	توزیع مجانبی	۵.۳
۷۴	آزمون فرضیه	۶.۳
۷۷	فاصله اطمینان‌های همزمان	۷.۳
۷۷	فاصله اطمینان برای تابع‌های خطی از یک میانگین	۱.۷.۳
۸۰	فاصله اطمینان همزمان برای میانگین چندجمله‌ای	۲.۷.۳
۸۲	نتیجه‌گیری و پیشنهادات برای آینده تحقیق	۸.۳

۸۴	آ تعاریف و مفاهیم اولیه
۸۴	۱.آ جبر ماتریس ها
۸۶	۲.آ توابع ریاضی
۹۰	۳.آ برخی توزیع های آماری
۹۱	۴.آ لم ها و قضایای اساسی
۹۳	ب برنامه رایانه ای مربوط برای رسم شکل ها و حل مثال ها در نرم افزار $R$
۱۰۶	مراجع
۱۱۰	واژه نامه فارسی به انگلیسی
۱۱۲	واژه نامه انگلیسی به فارسی

# لیست جداول

۱.۱ توزیع‌های بیضی‌گون به همراه تابع وزن  $W$  ..... ۳۰

۱.۳ داده‌های کلاه‌ایمنی بازیکنان فوتبال ( $HS$ : دبیرستان،  $C$ : دانشگاه،  $NF$ : غیر فوتبالی). ۷۸

# لیست تصاویر

- ۱۰۱ توزیع نرمال دو متغیره به همراه منحنی تراز ..... ۵
- ۲۰۱ توزیع پیرسون نوع  $VII$  دو متغیره به ازای  $m$  های مختلف به همراه منحنی های تراز ..... ۱۶
- ۳۰۱ توزیع کوشی دو متغیره به همراه منحنی های تراز ..... ۱۷
- ۴۰۱ توزیع پیرسون نوع  $II$  دو متغیره به ازای  $m$  های مختلف به همراه منحنی های تراز ..... ۱۸
- ۵۰۱ توزیع پیرسون نوع  $II$  دو متغیره برای به همراه منحنی های تراز ..... ۱۹
- ۶۰۱ تابع توزیع نمایی-توانی به ازای  $\beta$  های مختلف و  $\mu = 0$  و  $\Sigma = I_2$  ..... ۳۶
- ۷۰۱ تابع توزیع نمایی-توانی به ازای  $\beta$  های مختلف و  $\mu = 0$  و  $\Sigma = I_2$  و منحنی تراز  
برای  $\beta = 1$  ..... ۳۷
- ۱۰۲ توزیع نوع کاتز دو متغیره به همراه منحنی های تراز ..... ۵۰
- ۲۰۲ توزیع نوع کاتز دو متغیره به همراه منحنی های تراز ..... ۵۱
- ۱۰۳ حالت خاص توزیع نوع کاتز دو متغیره به همراه منحنی های تراز ..... ۶۶
- ۲۰۳ حالت خاص توزیع نوع کاتز دو متغیره به همراه منحنی های تراز ..... ۶۷

# فصل ۱

## توزیع‌های بیضی‌گون

### ۱.۱ مقدمه

توزیع‌های نرمال تک‌متغیره و چندمتغیره نقش مهمی در آمار کلاسیک ایفا می‌کنند، اما بسیاری از پدیده‌های طبیعی از مدل نرمال پیروی نمی‌کنند و از مدل‌های یک یا چندمتغیره غیر نرمال برای مدل‌بندی آنها استفاده می‌شود. در این میان به توزیع‌های چندمتغیره کروی<sup>۱</sup> و بیضی‌گون<sup>۲</sup> در چند دهه اخیر، توجه بیشتری شده است.

توزیع‌های بیضی‌گون، بسیاری از خواص توزیع نرمال چندمتغیره را دارا هستند. بنابراین بسیاری از روش‌های مرسوم تحلیل داده‌ها را می‌توان بطور مستقیم در خانواده توزیع‌های بیضی‌گون به کار برد. مقالاتی در این خصوص توسط ماکسول<sup>۳</sup> (۱۸۶۰)، بارتلت<sup>۴</sup> (۱۹۳۴) ارائه شده است. تحقیقات نوین در این باره در خصوص کاربردهای این توزیع در علم مهندسی، توسط بلیک و توماس<sup>۵</sup> (۱۹۶۸)، مک‌گرو و واگنر<sup>۶</sup> (۱۹۶۸) شروع و توسط چو<sup>۷</sup> (۱۹۷۳) دنبال شد. و پس از آن بررسی رفتار سیستماتیک این خانواده از توزیع‌ها، توسط کمبانیس<sup>۸</sup> و همکاران (۱۹۸۱) انجام گرفت. چندین مقاله مروری بر

---

<sup>۱</sup>Spherical distribution

<sup>۲</sup>Elliptically contoured distribution

<sup>۳</sup>Maxwell

<sup>۴</sup>Bartlett

<sup>۵</sup>Blake and Thomas

<sup>۶</sup>McGraw and Wagner

<sup>۷</sup>Chu

<sup>۸</sup>Cambanis

روی توزیع‌های بیضی‌گون و استنباط آماری از اندرسن و فنگ<sup>۹</sup> (۱۹۹۱) و اندرسن (۱۹۹۳) موجود است. جانسون و کاتز<sup>۱۰</sup> (۱۹۷۲) بحث کاملی بر روی این خانواده از توزیع‌ها، مانند توزیع  $t$ -استیودنت چندمتغیره انجام داده‌اند. مطالعه‌ی جامع بر روی این توزیع‌ها و استنباط آماری آنها توسط میرهد<sup>۱۱</sup> (۱۹۸۲) و فنگ و ژانگ<sup>۱۲</sup> (۱۹۹۰) صورت گرفته است.

توزیع‌های زیادی متعلق به خانواده توزیع‌های بیضی‌گون می‌باشند که برخی از آنها را ذکر خواهیم کرد. برای آگاهی بیشتر در مورد توزیع‌های بیضی‌گون و مثال‌هایی از آن به فنگ و همکاران (۱۹۹۰) و گوپتا و وارگا<sup>۱۳</sup> (۱۹۹۳) مراجعه کنید. راه‌های بسیاری برای تعریف توزیع‌های کروی و بیضی‌گون وجود دارد. یک توزیع کروی بسط و تعمیمی از توزیع نرمال چندمتغیره استاندارد است و یک توزیع بیضی‌گون بسط و تعمیم توزیع نرمال چندمتغیره، با پارامترهای بردار میانگین  $\mu$  و ماتریس واریانس کوواریانس  $\Sigma$  است. از این رو در این فصل ابتدا توزیع‌های کروی و سپس توزیع‌های بیضی‌گون و ویژگی‌های آنها را مورد بررسی قرار می‌دهیم. و در انتها با یک مثال خاص مربوط به توزیع نمایی-توانی آزمون فرضیه در مورد پارامترهای توزیع‌های بیضی‌گون را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

## ۲۰۱. توزیع نرمال چندمتغیره

توزیع نرمال همواره به عنوان یکی از مهمترین و پرکاربردترین توزیع‌های آماری مورد توجه بوده است. انگیزه اصلی استفاده گسترده از نرمال چندمتغیره سهولت استفاده در محاسبات ریاضی آن است. از فرض نرمال چندمتغیره روش‌های مفید زیادی منتج می‌شود و خیلی از این روش‌ها در بسته‌های نرم‌افزاری موجود هستند. روش‌های عملی در نرمال چندمتغیره، کمتر از حالت یک‌متغیره است. اگرچه داده‌های واقعی، اغلب، دقیقاً نرمال چندمتغیره نیستند، معمولاً از توزیع نرمال چندمتغیره به عنوان تقریب مفید برای توزیع حقیقی به کار برده می‌شود. آزمون‌ها و روش‌های گرافیکی برای ارزیابی نرمال بودن، در دسترس هستند. خوشبختانه، خیلی از روش‌ها که بر اساس نرمال چندمتغیره هستند، اگر از توزیع نرمال

<sup>۹</sup>Anderson and Fang

<sup>۱۰</sup>Johnson and Kotz

<sup>۱۱</sup>Muirhead

<sup>۱۲</sup>Zhang

<sup>۱۳</sup>Gupta and Varga



دور شوند همچنان هم تنومند خواهند بود. در ذیل پس از ارائه تعریف توزیع نرمال چندمتغیره، برخی از ویژگی‌های مفید آن را ارائه می‌دهیم.

تعریف ۱.۲.۱. می‌گوییم بردار تصادفی  $Y$  دارای توزیع نرمال  $p$ -متغیره با بردار میانگین  $\mu$  و ماتریس

واریانس کوواریانس  $\Sigma$  است اگر تابع چگالی آن به صورت زیر باشد

$$f(Y) = \frac{1}{\sqrt{(\pi)^p |\Sigma|}} \exp \left\{ -\frac{(Y - \mu)' \Sigma^{-1} (Y - \mu)}{2} \right\} \quad (1.1)$$

وقتی که  $Y$  دارای چگالی (۱.۱) باشد از نماد  $Y \sim N_p(\mu, \Sigma)$  استفاده می‌کنیم. شکل (۱.۱) رویه‌ی

توزیع نرمال دومتغیره را به همراه منحنی‌های تراز آن به ازای  $\mu = 0$  و به ترتیب  $\Sigma = I_2$  و  $\Sigma =$

$\begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 5 \end{pmatrix}$  را نشان می‌دهد. به طور مشابه، عبارت  $(Y - \mu)' \Sigma^{-1} (Y - \mu)$  در توان چگالی نرمال

چندمتغیره (۱.۱) مربع فاصله کلی از  $Y$  تا  $\mu$  را می‌دهد، که فاصله مالهونوبیس<sup>۱۴</sup> نامیده می‌شود. فرض

کنید

$$\Delta^2 = (Y - \mu)' \Sigma^{-1} (Y - \mu) \quad (2.1)$$

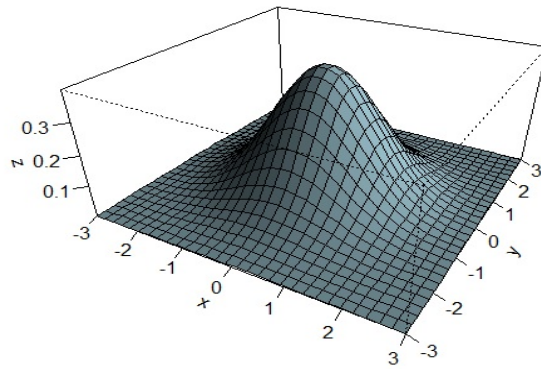
توجه کنید که  $\Delta$ ، ریشه دوم معادله (۲.۱) می‌باشد، که مانند  $(y - \mu)/\sigma$  انحراف استاندارد نیست.

فاصله  $\Delta$ ، با تعداد متغیرها  $p$ ، افزایش پیدا می‌کند. ضرایب در تابع نمایی معادله (۱.۱)،  $|\Sigma|^{-1/2}$  مانند

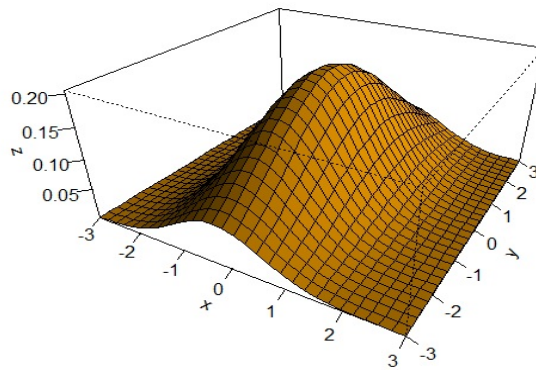
$\sqrt{\sigma^2}$  در حالت یک‌متغیره ظاهر شده است. با توجه به شکل (۱.۱) اعداد روی منحنی‌های تراز نشان

دهنده‌ی مقادیر مختلف  $\Delta^2$  می‌باشد.

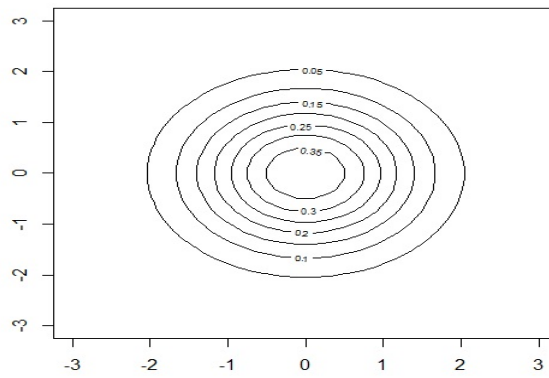
<sup>۱۴</sup>Mahalanobis distance



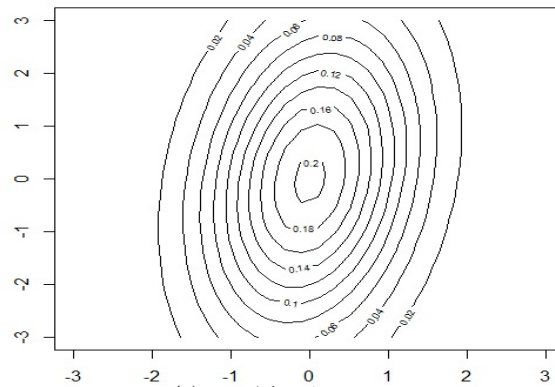
(آ)



(ب)



منحنی تراز شکل آ (ج)



منحنی تراز شکل ب (د)

شکل ۱.۱: توزیع نرمال دو متغیره به همراه منحنی تراز

### ۱.۲.۱ ویژگی متغیرهای تصادفی نرمال $p$ -متغیره

برخی از ویژگی‌های بردار تصادفی  $Y$ ، دارای توزیع نرمال  $p$ -متغیره  $N_p(\mu, \Sigma)$ ، که در رنچر<sup>۱۵</sup> (۲۰۰۱) و میرهد (۱۹۸۲) آمده است، را ذکر می‌کنیم:

۱. نرمال بودن ترکیبات خطی از متغیر  $Y$ :

(الف) اگر  $a$  برداری  $p$ -بعدی به صورت  $a = (a_1, \dots, a_p)'$  با مقادیر ثابت باشد، تابع خطی

$a'Y = a_1y_1 + a_2y_2 + \dots + a_py_p$  دارای توزیع نرمال یک‌متغیره است. میانگین و واریانس

$a'Y$  برای هر بردار تصادفی  $Y$  برابر  $E(a'Y) = a'\mu$  و  $Var(a'Y) = a'\Sigma a$ ، است.

(ب) اگر  $A$  ماتریسی با مقدار ثابت در اندازه  $q \times p$  و با رتبه  $q$  باشد، که  $q \leq p$ ، ترکیب خطی

$AY$  دارای توزیع نرمال  $q$  متغیره است. بنابراین،  $E(Ay) = A\mu$  و  $Cov(Ay) = A\Sigma A'$ ، و

لذا

$$AY \sim N_q(A\mu, A\Sigma A')$$

۲. متغیرهای استاندارد شده: یک بردار استاندارد شده  $Z$  از متغیرهای نرمال به دو روش می‌تواند بدست آید:

$$Z = (T')^{-1}(Y - \mu) \quad (۳.۱)$$

که  $\Sigma = TT'$  با روش چولسکی تجزیه شده، یا

$$Z = (\Sigma^\dagger)^{-1}(Y - \mu) \quad (۴.۱)$$

که در آن  $\Sigma^\dagger$  ریشه دوم ماتریس متقارن  $\Sigma$ ، به طوری که  $\Sigma = \Sigma^\dagger \Sigma^\dagger$ .

در هر یک از معادلات (۳.۱) و (۴.۱) بردار استاندارد شده متغیرهای تصادفی، میانگین همگی آنها برابر صفر، واریانس برابر یک، و همه ضریب همبستگی‌ها صفر هستند. در حالت از ویژگی (ب) نتیجه می‌شود که  $Z$  نرمال چندمتغیره است.

۳. توزیع کای-دو: متغیر تصادفی کای-دو با  $p$  درجه آزادی، توسط مجموع توان دوم متغیرهای

تصادفی نرمال استاندارد تعریف می‌شود. بنابراین، اگر  $Z$  بردار استاندارد تعریف شده در (۳.۱)

<sup>۱۵</sup>Rencher

و (۴.۱) باشد، آنگاه  $Z'Z = \sum_{i=1}^p Z_j^2$  دارای توزیع کای-دو با  $p$  درجه آزادی است و با نماد  $\chi_p^2$  یا  $\chi^2(p)$  نمایش می‌دهند. از روابط (۳.۱) و (۴.۱) نتیجه می‌شود که

$$Z'Z = (Y - \mu)' \Sigma^{-1} (Y - \mu) \text{ به عبارتی،}$$

$$(5.1) \quad \text{اگر، } Y \sim N_p(y, \Sigma), \text{ آنگاه } (Y - \mu)' \Sigma^{-1} (Y - \mu) \sim \chi_p^2,$$

۴. نرمال بودن توزیع‌های حاشیه‌ای:

(الف) هر زیر مجموعه از  $y$ ها در  $Y$  یک توزیع نرمال چندمتغیره دارد، با بردار میانگین که خود شامل زیر بردار  $\mu$  و ماتریس واریانس کوواریانس، شامل زیر ماتریس‌های  $\Sigma$  تشکیل شده است. برای نشان دادن این موضوع اگر  $Y_1 = (y_1, y_2, \dots, y_r)'$  زیر بردارهایی را نشان دهد که در بردارنده‌ی اولین  $r$  عنصر از  $Y$  باشد و  $Y_2 = (y_{r+1}, \dots, y_p)'$  شامل  $p - r$  عنصر می‌باشد. آنگاه خواهیم داشت.

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix},$$

که  $Y_1$  و  $\mu_1$  بردارهای  $1 \times r$  تایی بوده و  $\Sigma_{11}$  ماتریس کوواریانس با بعد  $r$ ، در این صورت  $Y_1$  نرمال  $r$ -متغیره می‌باشد.

(ب) به عنوان یک حالت که نتیجه‌ی آن مشخص است، هر  $y_j$  در  $Y$  دارای توزیع نرمال یک‌متغیره است.

برعکس این مطلب صحیح نمی‌باشد، یعنی اگر چگالی  $y_j$  در  $Y$  نرمال باشد الزاما نشان دهنده‌ی این نیست که تابع  $Y$  نرمال چندمتغیره است. در سه ویژگی بعدی فرض می‌کنیم که بردار مشاهده‌ای

به دو زیر بردار  $X$  و  $Y$  افراز می‌شود، که  $X$ ،  $p \times 1$  و  $Y$ ،  $q \times 1$  هستند. در این صورت

$$E \begin{pmatrix} Y \\ X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_y \\ \mu_x \end{pmatrix}, \quad cov \begin{pmatrix} Y \\ X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma_{yy} & \Sigma_{yx} \\ \Sigma_{xy} & \Sigma_{xx} \end{pmatrix}.$$

در ویژگی‌های بعدی فرض می‌کنیم:

$$\begin{pmatrix} Y \\ X \end{pmatrix} \rightarrow N_{p+q} \left[ \begin{pmatrix} \mu_x \\ \mu_y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Sigma_{yy} & \Sigma_{yx} \\ \Sigma_{xy} & \Sigma_{xx} \end{pmatrix} \right].$$

۵. استقلال :

(الف) زیر بردارهای  $X$  و  $Y$  مستقل هستند اگر  $\Sigma_{xy} = 0$ .

(ب) دو متغیر تکی  $y_k$  و  $y_j$  مستقل هستند اگر  $\sigma_{jk} = 0$  باشد. به یاد داشته باشید که این فرض برای بیشتر متغیرهای تصادفی غیر نرمال درست نیست.

۶. توزیع شرطی :

اگر  $X$  و  $Y$  مستقل نباشند، آنگاه  $\Sigma_{yx} \neq 0$ ، و توزیع شرطی  $Y$  نسبت به  $X$ ، که با نماد  $f(Y|X)$  نشان می‌دهیم. دارای نرمال چندمتغیره بوده که میانگین و ماتریس واریانس کوواریانس به ترتیب عبارتند از

$$E(Y|X) = \mu_y + \Sigma_{yx} \Sigma_{xx}^{-1} (X - \mu_x), \quad (6.1)$$

$$Cov(Y|X) = \Sigma_{yy} - \Sigma_{xx}^{-1} \Sigma_{xy}. \quad (7.1)$$

توجه کنید  $E(Y|X)$  برداری از تابع خطی  $X$  می‌باشد، در حالی که  $cov(Y|X)$  ماتریسی است که به مقدار  $X$  بستگی ندارد. روش خطی در (۷.۱) برای هر جفت متغیر نیز به کار می‌رود. بنابراین می‌توان با استفاده از (۷.۱) نرمال بودن را بررسی کرده و می‌توانیم نمودارهای پراکنش را برای همه‌ی جفت متغیرها، برای نشان دادن غیرخطی بودن به کار ببریم. ماتریس  $\Sigma_{yx} \Sigma_{xx}^{-1}$  در (۶.۱) را ماتریس ضرایب رگرسیونی می‌نامند زیرا  $E(Y|X)$  را در  $X$  توصیف می‌کند.

۷- توزیع مجموع دو زیر بردار :

اگر  $X$  و  $Y$  دو بردار  $1 \times p$  باشند، آنگاه

$$Y + X \sim N_p(\mu_y + \mu_x, \Sigma_{yy} + \Sigma_{xx}) \quad (8.1)$$

$$Y - X \sim N_p(\mu_y - \mu_x, \Sigma_{yy} + \Sigma_{xx}) \quad (9.1)$$

در ادامه این بخش، ویژگی ۶ را برای حالت خاصی از نرمال دو متغیره شرح می‌دهیم.

فرض کنید

$$U = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

دارای توزیع نرمال دومتغیره با بردار میانگین و ماتریس واریانس کوواریانس به صورت زیر باشد

$$E(U) = \begin{pmatrix} \mu_y \\ \mu_x \end{pmatrix}, Cov(U) = \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_y^2 & \sigma_{yx} \\ \sigma_{yx} & \sigma_x^2 \end{pmatrix}$$

همچنین فرض کنید  $f(y|x) = g(y, x)/h(x)$ ، که در آن  $h(x)$  تابع چگالی حاشیه‌ای  $x$  و  $g(y, x)$  تابع چگالی توام  $y$  و  $x$  می‌باشد. بنابراین

$$g(y, x) = f(y|x)h(x),$$

و بدلیل اینکه عبارت سمت راست حاصل ضرب است، پس تابع توام  $y$  و  $x$  مستقل از  $x$  می‌باشد و می‌توانیم با  $f(y|x)$  نمایش دهیم. همانطور که ترکیب‌های خطی از  $y$  و  $x$  با توجه به ویژگی (الف.۱) نرمال هستند،  $y - \beta x$  را در نظر گرفته و مقدار  $\beta$  را بدست می‌آوریم بنابراین  $y - \beta x$  و  $x$  از هم مستقل هستند. چون که  $z = y - \beta x$  و  $x$  نرمال و مستقل هستند،  $cov(x, z) = 0$ . حال  $cov(x, z)$  را محاسبه می‌کنیم، برای این منظور توابع  $x$  و  $y$  را بر حسب  $U$  بیان می‌کنیم، به عبارتی داریم

$$x = (0, 1) \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = (0, 1)U = \mathbf{a}'U,$$

$$z = y - \beta x = (1, -\beta)U = \mathbf{b}'U.$$

بنابراین

$$\begin{aligned} Cov(z, x) &= Cov(\mathbf{a}'U, \mathbf{b}'U) \\ &= \mathbf{a}'\Sigma\mathbf{b} \\ &= (0, 1) \begin{pmatrix} \sigma_y^2 & \sigma_{yx} \\ \sigma_{yx} & \sigma_x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -\beta \end{pmatrix} = (\sigma_{yx}, \sigma_x^2) \begin{pmatrix} 1 \\ -\beta \end{pmatrix} \\ &= \sigma_{yx} - \beta\sigma_x^2. \end{aligned}$$

از آنجایی که  $cov(x, z) = 0$ ، داریم  $\beta = \sigma_{yx}/\sigma_x^2$ ، و از  $z = y - \beta x$  نتیجه می‌شود

$$z = y - \frac{\sigma_{yx}}{\sigma_x^2}x$$

با استفاده از ویژگی (۱.الف)، چگالی  $(\sigma_{yx}/\sigma_x)x - y$  نرمال بوده و میانگین و واریانس به ترتیب عبارتند از

$$\begin{aligned} E\left(y - \frac{\sigma_{yx}}{\sigma_x^2}x\right) &= \mu_y - \frac{\sigma_{yx}}{\sigma_x^2}\mu_x, \\ \text{Var}\left(y - \frac{\sigma_{yx}}{\sigma_x^2}x\right) &= \text{Var}(\mathbf{b}'U) = \mathbf{b}'\Sigma\mathbf{b} \\ &= \begin{pmatrix} 1, -\frac{\sigma_{yx}}{\sigma_x^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_y^2 & \sigma_{yx} \\ \sigma_{yx} & \sigma_x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\sigma_{yx}}{\sigma_x^2} \end{pmatrix} \\ &= \sigma_y^2 - \frac{\sigma_{yx}^2}{\sigma_x^2} \end{aligned}$$

برای یک مقدار داده شده  $x$ ، با توجه به برابری  $y = \beta x + (y - \beta x)$ ، در حقیقت یک مدل خطی داریم که مولفه  $y - \beta x$  یک خطای تصادفی است. آنگاه  $f(y|x)$  نرمال می‌باشد با

$$\begin{aligned} E(y|x) &= \beta x + E(y - \beta x) = \beta x + \mu_y - \beta\mu_x \\ &= \mu_y + \beta(x - \mu_x) = \mu_y + \frac{\sigma_{yx}}{\sigma_x^2}(x - \mu_x), \\ \text{Var}(y|x) &= \sigma_y^2 - \frac{\sigma_{yx}^2}{\sigma_x^2}. \end{aligned}$$

## ۲.۲.۱ برآورد در نرمال چندمتغیره

در این قسمت برآوردهای ماکزیمم درست‌نمایی پارامترهای  $\mu$  و  $\Sigma$  را در  $N_p(\mu, \Sigma)$  ارائه می‌کنیم.

### برآورد ماکزیمم درست‌نمایی

وقتی جامعه‌ای دارای توزیعی مانند توزیع نرمال چندمتغیره می‌باشد، برآورد پارامترها اغلب از روش ماکزیمم درست‌نمایی به دست می‌آیند. این تکنیک مفهوم ساده‌ای دارد: بردار مشاهدات  $y_1, y_2, \dots, y_n$  را در نظر می‌گیریم. مقادیر  $\mu$  و  $\Sigma$  چگالی توأم  $y$  ها را که تابع درست‌نمایی نامیده می‌شود را ماکزیمم می‌کنند. برای توزیع نرمال چندمتغیره، برآورد حداکثر درست‌نمایی  $\mu$  و  $\Sigma$  به صورت زیر به دست می‌آیند

$$\hat{\mu} = \bar{y}, \quad (10.1)$$

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})(y_i - \bar{y})'$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{n} W \\
 &= \frac{n-1}{n} S,
 \end{aligned} \tag{۱۱.۱}$$

به طوری که  $W = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})(y_i - \bar{y})'$  و  $S$  ماتریس واریانس کوواریانس نمونه است. چون  $\hat{\Sigma}$  به جای  $n$  بر  $n-1$  تقسیم شده است، که اریب بوده و معمولاً از  $S$  به جای  $\hat{\Sigma}$  استفاده می‌کنیم. حال  $\bar{y}$  را برآوردگر حداکثر درستنمایی  $\mu$  در نظر می‌گیریم.  $y_i$ ها یک نمونه تصادفی هستند. بنابراین مستقل بوده و چگالی آن‌ها برابر ضرب چگالی‌های  $y$ ها است. لذا با توجه به تابع درستنمایی

$$\begin{aligned}
 L(\mu, \Sigma, y_1, y_2, \dots, y_n) &= \prod_{i=1}^n f(y_i, \mu, \Sigma) \\
 &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^p |\Sigma|^{1/2}} e^{-(y_i - \mu)' \Sigma^{-1} (y_i - \mu) / 2} \\
 &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^{np} |\Sigma|^{n/2}} e^{-\sum_{i=1}^n (y_i - \mu)' \Sigma^{-1} (y_i - \mu) / 2}.
 \end{aligned} \tag{۱۲.۱}$$

برای این که ببینیم  $\hat{\mu} = \bar{y}$  تابع درستنمایی را ماکزیم می‌کند، در توان رابطه (۱۲.۱)،  $\bar{y}$  را اضافه و کم می‌کنیم، داریم

$$-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y} + \bar{y} - \mu)' \Sigma^{-1} (y_i - \bar{y} + \bar{y} - \mu)$$

وقتی این جمله را به صورت جملات جداگانه  $y_i - \bar{y}$  و  $\bar{y} - \mu$  می‌نویسیم، دو جمله از چهار جمله ایجاد شده بخاطر  $\sum_i (y_i - \bar{y}) = 0$  حذف شد و رابطه (۱۲.۱) به صورت زیر تغییر می‌کند

$$L = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^{np} |\Sigma|^{n/2}} e^{-\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})' \Sigma^{-1} (y_i - \bar{y}) / 2 - n(\bar{y} - \mu)' \Sigma^{-1} (\bar{y} - \mu) / 2}. \tag{۱۳.۱}$$

چون  $\Sigma^{-1}$  معین مثبت است، داریم  $0 \leq e^{n(\bar{y} - \mu)' \Sigma^{-1} (\bar{y} - \mu) / 2} \leq 1$  و  $n(\bar{y} - \mu)' \Sigma^{-1} (\bar{y} - \mu) / 2 \geq 0$  باشد. بنابراین  $L$  زمانی ماکزیم می‌شود که  $\hat{\mu} = \bar{y}$ .

## ۳.۱ توزیع کروی

در این قسمت به طور مختصر توزیع‌های کروی را معرفی می‌کنیم. مطالب این بخش برگرفته از فنگ و همکاران (۱۹۹۰) می‌باشد.



تعریف ۱.۳.۱. بردار تصادفی  $x = (X_1, \dots, X_p)$  با  $p \geq 1$ ، دارای توزیع کروی است اگر برای هر

$\Gamma \in O(p)$ ، تبدیلات متعامد  $\Gamma x$  و  $x$  هم‌توزیع باشند به عبارتی داشته باشیم

$$\Gamma x \stackrel{d}{=} x \quad (14.1)$$

که  $O(p)$  مجموعه ماتریس‌ها متعامد<sup>۱۶</sup>  $p \times p$  است.

قضیه ۲.۳.۱. بردار  $x = (X_1, \dots, X_p)$  دارای توزیع کروی است اگر و فقط اگر تابع مشخصه آن

$\psi(t)$  در یکی از شرایط معادل زیر صدق کند.

۱. به ازای هر  $\Gamma \in O(p)$ ،

$$\psi(\Gamma' t) = \psi_{\Gamma x}(t).$$

۲. اگر  $\phi(\cdot)$  تابعی از یک متغیر اسکالر باشد آنگاه

$$\exists \phi(\cdot) \quad s.t. \quad \psi(t) = \phi(t't).$$

یعنی تابع مشخصه آن را بتوان به صورت درجه دوم نوشت.

برای برهان حجتی (۱۳۹۲) را ببینید.

نکته: اگر بردار  $x_{p \times 1}$  دارای توزیع کروی باشد می‌نویسیم  $x \sim S_p(\phi)$  و به آن معنی است که

تابع مشخصه  $x$ ، تابعی از صورت درجه دوم  $t't$  به صورت  $\phi(t't)$  است. در واقع  $\phi$  تابعی از یک

اسکالر<sup>۱۷</sup> است.  $\phi$  را مولد مشخصه<sup>۱۸</sup> توزیع کروی می‌نامیم و در ادامه از آن استفاده خواهیم کرد.

مثال ۳.۳.۱. فرض کنید  $X \sim N_p(0, I_p)$ . از آنجا که تابع مشخصه  $X_1$ ، برابر  $\exp\{-\frac{t_1^2}{2}\}$  می‌باشد، بنابراین

تابع مشخصه  $X$  عبارت است از

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}(t_1^2 + \dots + t_p^2)\right\} = \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{t}'\mathbf{t})\right\}$$

که در آن  $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_p)'$  از این رو بنابر قضیه ۲.۳.۱،  $X$  دارای توزیع کروی  $S_p(\phi)$  همراه با تابع

مولد مشخصه  $\phi(u) = \exp\{-\frac{u}{2}\}$  ( $u = \mathbf{t}'\mathbf{t}$ ) می‌باشد.

<sup>۱۶</sup>Orthogonal

<sup>۱۷</sup>Scaller

<sup>۱۸</sup>Characteristic Generator

## ۴.۱ تابع چگالی

اگر  $X \sim S_p(\phi)$ ، آنگاه لزوماً تابع چگالی احتمال برای  $\mathbf{X}$  وجود ندارد. با این حال در صورت وجود این چگالی بنا به قضیه ۲.۳.۱ تابعی از صورت درجه دوم یعنی  $g(x'x)$  می‌باشد، که  $g(\cdot)$  تابعی غیر منفی و اسکالر است. از این رو داریم

$$\int g(x'x)dx = \frac{\pi^{\frac{p}{2}}}{\Gamma(\frac{p}{2})} \int_0^\infty y^{\frac{p}{2}-1} g(y)dy = 1 \quad (15.1)$$

بنابراین از تابع نامنفی  $g(\cdot)$  می‌توان برای بدست آوردن چگالی  $cg(x'x)$  برای توزیع‌های کروی استفاده کرد، اگر و فقط اگر

$$\int_0^\infty y^{\frac{p}{2}} dy < \infty \quad (16.1)$$

در این صورت به جای  $X \sim S_p(\phi)$  می‌نویسیم  $X \sim S_p(g)$  و  $g(\cdot)$  را تابع مولد چگالی<sup>۱۹</sup> توزیع‌های کروی می‌نامیم.

قضیه ۱.۴.۱ (کلکر<sup>۲۰</sup>، ۱۹۷۰) اگر  $X \stackrel{d}{=} r\mathbf{u}^p \sim S_p(\phi)$ ، آنگاه  $X$  دارای تابع مولد چگالی  $g(\cdot)$  است

اگر و فقط اگر  $r$  دارای چگالی  $f(\cdot)$  به صورت زیر باشد

$$f(r) = \frac{2\pi^{\frac{p}{2}}}{\Gamma(\frac{p}{2})} r^{p-1} g(r^2) \quad (17.1)$$

برهان. طرف اول) فرض کنید که  $X$  دارای چگالی  $g(x'x)$  است. همچنین فرض کنید  $h(\cdot)$  تابعی اندازه‌پذیر و نامنفی باشد. از طرفی  $x \stackrel{d}{=} ru^{(n)}$ ، بنابراین  $x' = (ru^{(n)})' = u^{(n)'}r$  پس

$$\begin{aligned} X'X &= \left( u^{(p)'}r \right) \left( ru^{(p)} \right) \\ &= u^{(p)'}r^2u^{(p)} = r^2u^{(p)'}u^{(p)} \\ &= r^2 \end{aligned}$$

بنابراین  $(X'X)^{\frac{1}{2}} = r$ ، همچنین با استفاده از رابطه ۲.۴.۱ داریم

$$E(h(\cdot)) = \int h\left((X'X)^{\frac{1}{2}}\right) g(X'X)dX$$

<sup>۱۹</sup>Density generator function

<sup>۲۰</sup>Kelker

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\pi^{\frac{p}{2}}}{\Gamma(\frac{p}{2})} \int_0^\infty h(y^{\frac{1}{2}}) y^{\frac{p}{2}-1} g(y) dy, \quad r = y^{\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{2\pi^{\frac{p}{2}}}{\Gamma(\frac{p}{2})} \int_0^\infty h(r) r^{p-1} g(r^2) dr
 \end{aligned}$$

از رابطه فوق مشاهده می‌شود که  $r$  دارای چگالی (۱۷.۱) است. طرف دوم بدیهی است.  $\square$

## ۵.۱ توزیع‌هایی با منحنی تراز بیضی شکل

چگالی توزیع نرمال چندمتغیره با بردار میانگین  $\mu$  و ماتریس کوواریانس  $\Sigma$  را در نظر بگیرید این تابع چگالی برای هر مقدار ثابت  $k$ ، در یک فضای اقلیدسی  $p$  بعدی، دارای مقدار ثابت بر روی بیضی‌های

$$(x - \mu)' \Sigma^{-1} (x - \mu) = k$$

به مرکز  $\mu$  می‌باشد. شکل و جهت دهی بیضی توسط  $\Sigma$  و اندازه بیضی برای  $\Sigma$  داده شده توسط  $k$  تعیین می‌شود. حال اگر به جای عبارت نمایی در توزیع نرمال یک تابع اندازه‌پذیر مانند  $g: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^+$  را جایگزین کنیم، کلاس کلی‌تری از توزیع‌ها معروف به کلاس توزیع‌های بیضی‌گون (توزیع‌هایی با منحنی تراز بیضی شکل) به صورت زیر بدست می‌آید.

$$|\Sigma|^{-\frac{1}{2}} g[(x - \mu)' \Sigma^{-1} (x - \mu)], \quad (18.1)$$

که در آن  $\Sigma$  ماتریس معین مثبت،  $\circ \geq g(\cdot)$  و

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} g(y' y) dy_1 \dots dy_p = 1 \quad (19.1)$$

### ۱.۵.۱ توزیع بیضی‌گون

تعریف ۱.۵.۱. بردار تصادفی  $X_{p \times 1}$  دارای توزیع بیضی‌گون با پارامترهای  $\mu_{p \times 1} \in \mathbb{R}^p$  و  $\Sigma \geq \circ$  می‌باشد اگر

$$X \stackrel{d}{=} \mu + A'Y \quad Y \sim S_p(\phi)$$

باشد که در آن  $A$  یک ماتریس  $p \times k$  و  $\Sigma = A'A$ ، همچنین رتبه‌ی ماتریس  $\Sigma$  برابر  $k$  می‌باشد. اگر  $X$  دارای توزیع بیضی‌گون با پارامترهای  $\mu$  و  $\Sigma$  باشد می‌نویسیم  $X \sim EC_p(\mu, \Sigma, \phi)$ ، در این صورت

داریم

(۱) تابع مشخصه  $X$  به صورت زیر است

$$\begin{aligned}\phi(t) &= E(\exp\{it'x\}) \\ &= \exp\{it'\mu\}\psi(t'\Sigma t)\end{aligned}\quad (20.1)$$

که  $\psi$  یک تابع اسکالر است.

(۱)  $X$  دارای نمایش تصادفی زیر می‌باشد

$$X \stackrel{d}{=} \mu + rA'u^{(k)} \quad (21.1)$$

که در آن  $u^{(k)}$  دارای توزیع یکنواخت بر کره واحد است و  $r \geq 0$  از  $u^{(k)}$  مستقل است، همچنین

$$\Sigma = A'A.$$

توزیع‌های بیضی‌گون، توزیع‌هایی با منحنی‌های تراز بیضی شکل می‌باشند. از اینکه  $X \sim EC_p(\mu, \Sigma, \phi)$  نمی‌توان نتیجه گرفت که متغیر تصادفی  $X$  دارای تابع چگالی است، ولی در صورتی که تابع چگالی احتمال وجود داشته‌باشد، به صورت زیر خواهد بود:

$$f_X(x) = d_n |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} h[(x - \mu)' \Sigma^{-1} (x - \mu)], \quad (22.1)$$

که در آن  $h(\cdot)$  تابع مولد چگالی نامیده می‌شود و دارای شرط زیر است:

$$\int_0^\infty x^{\frac{n}{2}-1} h(x) dx < \infty$$

و همچنین  $d_n$  ضریب نرمال‌سازی می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$d_n = \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \left[ \int_0^\infty x^{\frac{n}{2}-1} h(x) dx \right] \quad (23.1)$$

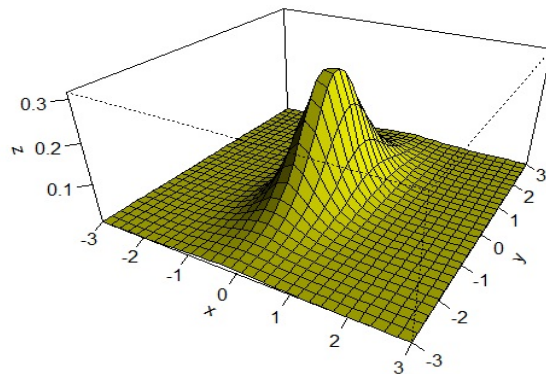
اگر تابع چگالی وجود داشته‌باشد برای تابع معلوم  $h$ ، تابع  $\phi$  مشخص می‌شود و برعکس. برای آگاهی بیشتر در این زمینه، فنگ و همکاران (۱۹۹۰) و میرهد (۱۹۸۲) را ببینید. در ادامه نمودار برخی از توزیع‌های خانواده بیضی‌گون را رسم می‌کنیم که تابع چگالی آن‌ها در پیوست آمده است.

برای بدست آوردن امید ریاضی و کوواریانس بردار  $X$  ابتدا قضیه زیر را بیان می‌کنیم سپس با استفاده

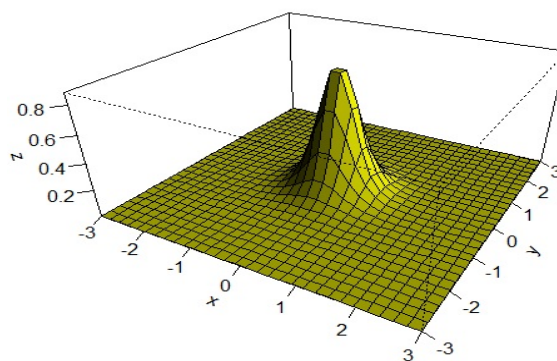
از تعریف فوق و نتیجه‌ای که از قضیه می‌گیریم با انجام یک سری محاسبات امید ریاضی و کوواریانس

را بدست می‌آوریم. در ادامه نمودار برخی از توزیع‌های بیضی‌گون به ازای  $\mu = 0$  و  $\Sigma = \begin{pmatrix} s_1 & r \\ r & s_2 \end{pmatrix}$

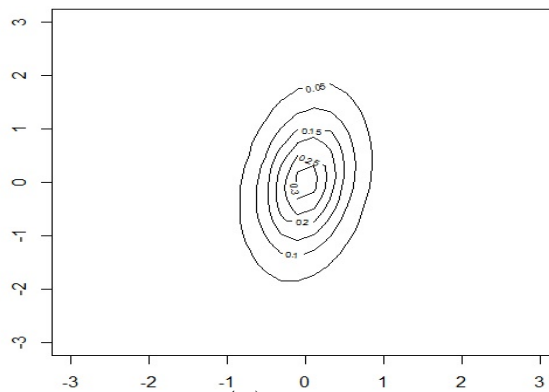
و  $m$ ‌های مختلف رسم کردیم.



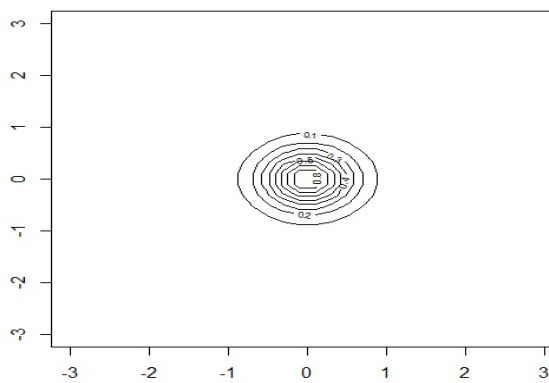
(آ)  $m = 3, s_1, s_2 = 1, \mu = 0$



(ب)  $m = 4, s_1 = 1, s_2 = 5, \mu = 0$

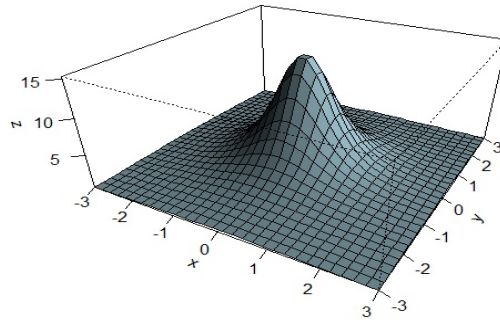


(ج)  $m = 3$

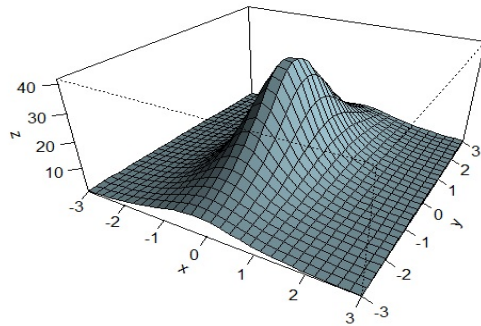


(د)  $m = 4$

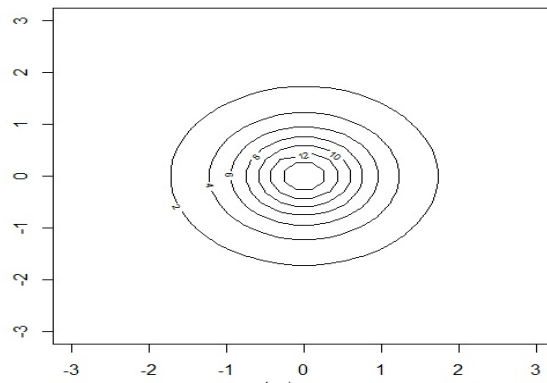
شکل ۲.۱: توزیع پیرسون نوع VII دو متغیره به ازای  $m$  های مختلف به همراه منحنی‌های تراز



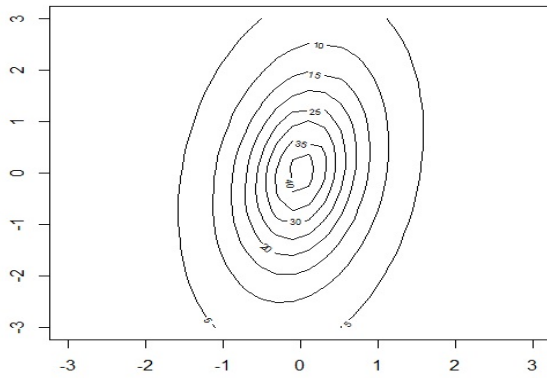
(ا)  $s_1, s_2 = 1, r = 0, \mu = 0$



(ب)  $s_1 = 1, s_2 = 5, r = 0, \mu = 0$

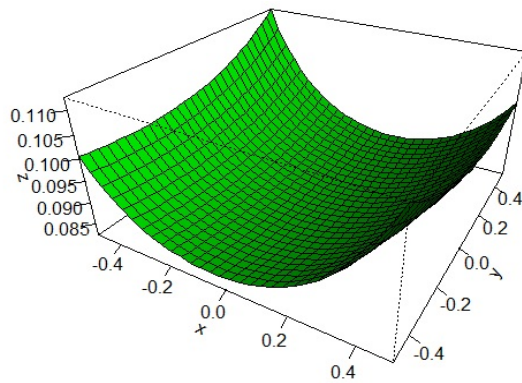


(ج)

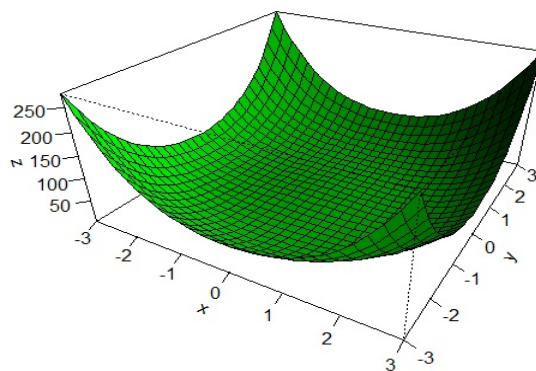


(د)

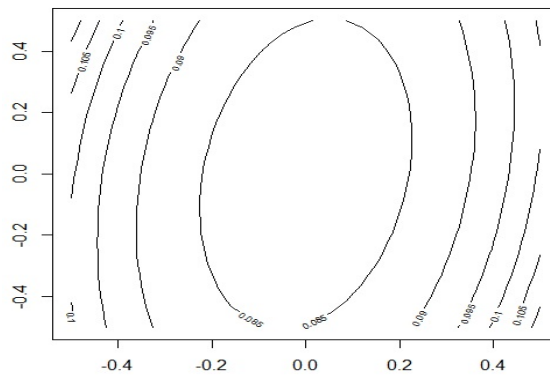
شکل ۳.۱: توزیع کوشی دو متغیره به همراه منحنی‌های تراز



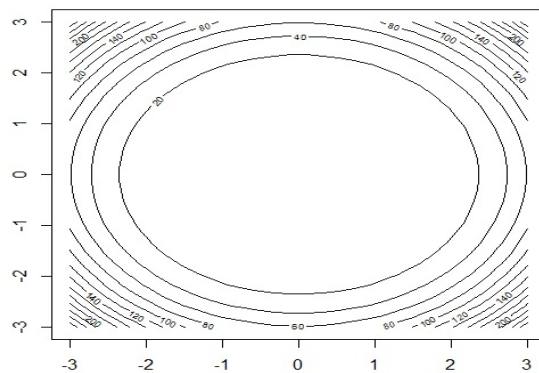
(آ)  $m = -0.5, r = 0.5$



(ب)  $m = 2, r = 0$

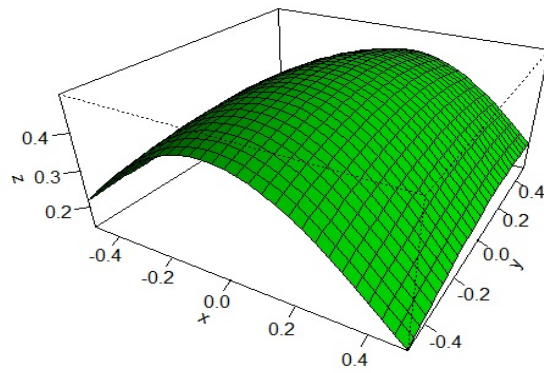


(ج)  $m = -0.5, r = 0.5$

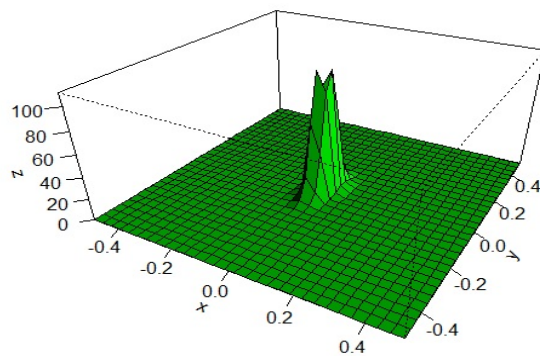


(د)  $m = 2, r = 0$

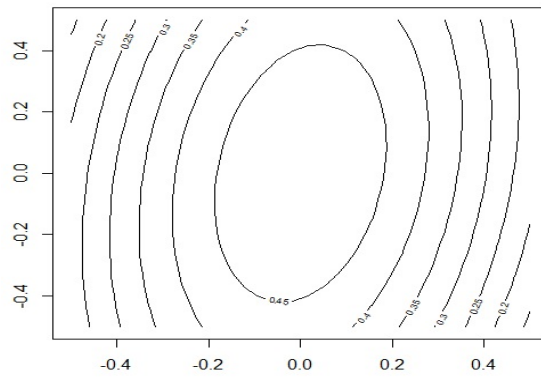
شکل ۴.۱: توزیع پیرسون نوع II دو متغیره به ازای  $m$  های مختلف به همراه منحنی‌های تراز



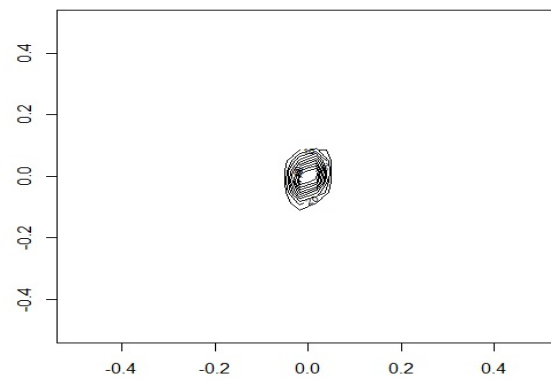
(آ)  $m = 2, r = 0.5$



(ب)  $m = 1000, r = 0.5$



(ج)  $m = 2, r = 0.5$



(د)  $m = 1000, r = 0.5$

شکل ۵.۱: توزیع پیرسون نوع II دو متغیره برای به همراه منحنی‌های تراز



قضیه ۲.۵.۱. (آلن گات<sup>۲۱</sup>، ۲۰۰۵) فرض کنید  $X$  یک متغیر تصادفی با تابع توزیع  $F$  و تابع مشخصه  $\phi$  باشد، اگر  $n$  وجود داشته باشد به قسمی که  $E|X|^n < \infty$  در این صورت  $\phi^{(K)}$  برای  $k = 1, 2, \dots, n$ ، موجود و به طور یکنواخت پیوسته است که در آن

$$\phi^{(K)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (ix)^k e^{itx} dF(x)$$

نتیجه ۳.۵.۱. تحت شرایط قضیه فوق

$$\phi^{(K)}(0) = i^K \cdot EX^k \quad (24.1)$$

لم ۴.۵.۱. فرض کنید که  $X \sim EC_p(\mu, \Sigma, \psi)$  در این صورت

$$\begin{aligned} E(X) &= \mu, \\ cov(X) &= \frac{E(r^2)}{rank(\Sigma)} \Sigma = -2\Sigma\psi'(0) \end{aligned}$$

برهان. برای بدست آوردن امید ریاضی با مشتق‌گیری از تابع مشخصه (۲۰.۱) می‌توان نوشت

$$\frac{\partial \phi_X(t)}{\partial t} = [i\mu\psi(t'\Sigma t) + 2\Sigma t\psi'(t'\Sigma t)] e^{it'\mu}$$

با توجه به اینکه مقدار تابع مشخصه هر توزیع در نقطه  $t = 0$ ، برابر یک است، پس اگر در رابطه (۲۰.۱)

قرار دهیم  $t = 0$  نتیجه می‌گیریم که  $\psi(0) = 1$ ، بنابر این مطلب و با استفاده از نتیجه ۳.۵.۱ داریم

$$\phi'(0) = i \cdot EX = i\mu \Rightarrow EX = \mu \quad (25.1)$$

به طریق مشابه برای کوواریانس داریم

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi_X(t)}{\partial t \partial t'} &= \frac{\partial}{\partial t'} [i\mu\psi(t'\Sigma t) + 2\Sigma t\psi'(t'\Sigma t)] e^{it'\mu} \\ &= [i\mu\psi(t'\Sigma t) + 2\Sigma t\psi'(t'\Sigma t)] i\mu' e^{it'\mu} \\ &+ [2i\mu(\Sigma t)'\psi'(t'\Sigma t) + 2\Sigma\psi'(t'\Sigma t) + 4(\Sigma t)(\Sigma t)'\psi''(t'\Sigma t)] e^{it'\mu} \end{aligned}$$

از نتیجه ۳.۵.۱ داریم

$$\psi''(0) = i^2 EXX' = i\mu\mu' - 2i^2\Sigma\psi'(0)$$

<sup>۲۱</sup>Allan Gut

لذا می‌توان نتیجه گرفت

$$\begin{aligned} \text{cov}(X) &= EXX' - EXEX' = \mu\mu' - 2\Sigma\psi'(\circ) - \mu\mu' \\ &= -2\Sigma\psi'(\circ) \end{aligned} \quad (26.1)$$

پس در صورتی که  $|\psi'(\circ)| < \infty$ ، کوواریانس  $X$  موجود است و اثبات کامل می‌شود  $\square$

در محاسبات فوق،  $\psi'$  و  $\psi''$  به ترتیب مشتق‌های مرتبه اول و دوم تابع مولد مشخصه و همچنین  $\phi'$  و  $\phi''$  مشتق‌های مرتبه اول و دوم تابع مشخصه می‌باشند.

توزیع‌های بیضی‌گون در واقع حالت پارامتری توزیع‌های متقارن کروی هستند که تحت تبدیلات متعامد پایا می‌باشند و اگر تابع چگالی موجود باشد دارای چگالی یکسان روی دایره‌اند.

اگر  $C$  یک ماتریس ناویژه باشد به طوری که  $C'\Sigma C = I$  آنگاه  $X - \nu = CY$  دارای شکل (۱۰.۱) با چگالی  $g(\mathbf{y}'\mathbf{y})$  است. ترازهای ثابت چگالی  $g(\mathbf{y}'\mathbf{y})$  دوایری به مرکز مبدا است. کلاس چنین چگالی‌ها به عنوان توزیع‌ها با تراز دایره‌ای شناخته می‌شوند.

از آنجا که توزیع‌های با تراز بیضی شکل الزاما دارای چگالی نیستند، در این پایان‌نامه تنها توزیع‌هایی که دارای چگالی هستند مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌گیرند. چگالی یک تراز بیضی شکل در مختصات قطبی به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} y_1 &= r \sin \theta_1, \\ y_2 &= r \cos \theta_1 \sin \theta_2, \\ y_3 &= r \cos \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_3, \\ &\vdots \\ y_{p-1} &= r \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cdots \cos \theta_{p-2} \sin \theta_{p-1}, \\ y_p &= r \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cdots \cos \theta_{p-2} \sin \theta_p, \end{aligned} \quad (27.1)$$

که در آن  $r \geq 0$  و  $-\frac{\pi}{2} < \theta_i \leq \frac{\pi}{2}$  و  $i = 1, 2, \dots, p-2$  و  $-\pi < \theta_{p-1} \leq \pi$ .

لم ۵.۵.۱. ژاکوبی تبدیل ۲۷.۱ عبارت است از

$$J(r, \theta) = r^{p-1} [\cos \theta_1]^{p-2} [\cos \theta_2]^{p-3} \cdots [\cos \theta_{p-3}]^2 \cos \theta_{p-2} \quad (28.1)$$

و اگر چگالی  $g(y/y)$  باشد آنگاه  $R$  و  $\Theta$  مستقل از هم و چگالی توأم آن‌ها به صورت زیر خواهد بود:

$$r^{p-1} g(r^2) [\cos\theta_1]^{p-2} [\cos\theta_2]^{p-3} \dots [\cos\theta_{p-3}]^2 \cos\theta_{p-2}$$

برهان. به فنگ و اندرسن (۱۹۹۰) مراجعه کنید.

در ادامه به دنبال بدست آوردن چگالی حاشیه‌ای  $R$  هستیم که برای این منظور ابتدا ثابت می‌کنیم که

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^{h-1} d\theta = \frac{\Gamma(\frac{h}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{h+1}{2})} \quad (29.1)$$

با توجه به زوج بودن تابع زیر انتگرال و استفاده از تغییر متغیر  $\theta - \theta$  به جای  $\theta$  داریم

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^{h-1} d\theta = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 (\cos\theta)^{h-1} d\theta = -2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2\theta)^{\frac{h-1}{2}} d\theta$$

در نهایت با به کار بردن تغییر متغیرهای

$$\begin{cases} y = \cos^2\theta \\ dy = -2 \sin\theta \cos\theta d\theta \end{cases}$$

می‌توان نتیجه گرفت

$$\begin{aligned} -2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2\theta)^{\frac{h-1}{2}} d\theta &= \int_0^1 y^{h/2-1} (1-y)^{1/2-1} dy \\ &= \frac{\Gamma(\frac{h}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{h+1}{2})} \end{aligned}$$

که تساوی آخر از تعریف انتگرال بتا بدست آمده است. حال با استفاده از رابطه (۲۹.۱) چگالی حاشیه‌ای

به صورت زیر بدست می‌آید

$$\begin{aligned} f_R(r) &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \dots \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f_Y(y) d\theta_1 \dots d\theta_{p-2} d\theta_{p-1} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \dots \int_{-\pi/2}^{\pi/2} g(r^2) J(r, \theta) d\theta_1 \dots d\theta_{p-2} d\theta_{p-1} \\ &= \frac{\Gamma(\frac{p-1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{p}{2})} \times \frac{\Gamma(\frac{p-1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{p-1}{2})} \times \dots \times \frac{\Gamma(1)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2})} \times 2\pi \times r^{p-1} g(r^2) \\ &= \frac{[\Gamma(\frac{1}{2})]^{p-2}}{\Gamma(\frac{p}{2})} \times 2\pi \times r^{p-1} g(r^2) \\ &= \frac{2\pi^{p/2}}{\Gamma(\pi/2)} g(r^2) r^{p-1} = C(p) g(r^2) r^{p-1} \quad (30.1) \end{aligned}$$

همچنین برای بدست آوردن چگالی حاشیه‌ای  $\theta_i$  با استفاده از این نکته که  $\int_0^\infty r^{p-1} g(r^2) dr = \frac{\Gamma(p/2)}{2\pi^{p/2}}$  و با استفاده از فرمول (۳۰.۱)، پس از ساده سازی چگالی حاشیه‌ای  $\theta_i$ ،  $i = 1, 2, \dots, p-2$  به

صورت

$$\frac{\Gamma(\frac{p-i+1}{2})(\cos\theta_i)^{p-i-1}}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{p-i}{2})} \quad (31.1)$$

می‌باشد. و چگالی  $\theta_{p-1}$ ، ثابت و برابر  $1/2\pi$  است. در حالت نرمال  $N(0, I)$  چگالی  $Y$  عبارت است از

$$g(y'y) = (2\pi)^{-p/2} \exp\left(-\frac{1}{2}y'y\right),$$

و چگالی  $R = (Y'Y)^{1/2}$  به صورت  $r^{p-1} \frac{\exp(-r^2/2)}{2^{p/2}\Gamma(p/2)}$  می‌باشد. حال اگر  $r^2 = \nu$  آنگاه چگالی  $\nu$  به شکل  $\nu^{p-1} \frac{\exp(-\nu/2)}{2^{p/2}\Gamma(p/2)}$  خواهد بود که توزیع کی دو با  $p$  درجه آزادی است. ثابت  $c_p$  مساحت کره  $p$  بعدی با شعاع واحد است. بردار تصادفی  $U$  با مختصات  $\theta_1, \cos\theta_1 \sin\theta_2, \dots, \cos\theta_1 \cos\theta_2 \dots \cos\theta_{p-1}$  به طور یکنواخت بر روی کره واحد توزیع شده است. که در آن  $\theta_1, \dots, \theta_{p-1}$  مستقل از یکدیگر و  $\theta_i$ ،  $i = 1, \dots, p-2$  دارای توزیع یکنواخت بر روی  $(-\pi/2, \pi/2)$  و  $\theta_{p-1}$  دارای توزیع یکنواخت بر روی  $(-\pi, \pi)$  است. (مثالی از یک توزیع کروی شکل که دارای چگالی نیست)

نمایش تصادفی  $Y$  با چگالی  $g(y'y)$  به صورت

$$Y \stackrel{d}{=} RU \quad (32.1)$$

است. که در آن  $R$  دارای چگالی (۳۰.۱) می‌باشد. از آنجا که  $\theta_1, \dots, \theta_{p-1}$  دارای توابع چگالی زوج‌اند، بنابراین

$$EU = 0$$

زیرا

$$E[U] = E \begin{bmatrix} \sin\theta_1 \\ \cos\theta_1 \sin\theta_2 \\ \cos\theta_1 \cos\theta_2 \sin\theta_3 \\ \vdots \\ \cos\theta_1 \dots \cos\theta_{p-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{\pi} \sin\theta_1 d\theta_1 \\ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{\pi} \cos\theta_1 d\theta_1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \\ \vdots \\ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{\pi} \cos\theta_1 d\theta_1 \dots \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2\pi} \cos\theta_{p-1} d\theta_{p-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{bmatrix} \circ \\ \circ \\ \vdots \\ (\frac{1}{\pi})^{p-1} \sin\theta_1 |_{-\pi/\gamma}^{\pi/\gamma} \sin\theta_2 |_{-\pi/\gamma}^{\pi/\gamma} \cdots \sin\theta_{p-1} |_{-\pi}^{\pi} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \circ \\ \circ \\ \vdots \\ (\frac{1}{\pi})^{p-1} \times 2 \times 2 \times \circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \circ \\ \circ \\ \vdots \\ \circ \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

از طرفی اگر  $ER < \infty$ ، آنگاه  $E[Y]$  وجود دارد و چون  $R$  و  $U$  مستقل از یکدیگرند می‌توان نتیجه گرفت

$$EY = EREU = \circ \tag{۳۳.۱}$$

همچنین اگر  $ER^2 < \infty$  آنگاه

$$EY'Y = ER^2 EU'U$$

بردار  $U$  به طور یکنواخت بر روی کره واحد توزیع شده است پس توزیع مولفه‌های  $U$  یکسان است بنابراین از تقارن ( $EU_i^2$  یک تابع زوج و حدود انتگرال متقارن است) و اینکه  $\sum_{i=1}^p U_i = 1$  نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}
 EU_1^2 &= \dots = EU_p^2 = \frac{1}{p} \\
 EU_1 U_2 &= EU_1 U_3 = \dots = EU_{p-1} U_p \\
 EU_1 U_2 &= E \sin\theta_1 \cos\theta_1 \sin\theta_2
 \end{aligned}$$

که تابع انتگرالده<sup>۲۲</sup> تابعی فرد نسبت به  $\theta_1$  و  $\theta_2$  است، بنابراین برای هر  $i \neq j$ ،  $EU_i U_j = \circ$

$$EUU' = \frac{1}{p} I_p$$

اگر  $ER^2 < \infty$ ، می‌توان نوشت

$$EYY' = \frac{1}{p} ER^2 EI_p \tag{۳۴.۱}$$

مشخصه اصلی توزیع‌های با تراز دایره‌ای شکل این است که با ازای هر ماتریس متعامد  $O$  داریم

$$OY \stackrel{d}{=} Y$$

<sup>۲۲</sup>Integrand

به عبارتی توزیع تحت تبدیلات متعامد پایدار است.

قضیه ۶.۵.۱. اگر  $Y$  دارای چگالی  $g(y'y)$  باشد، آنگاه  $Z = OY$  دارای چگالی  $g(z'z)$  است که در آن  $O$  یک ماتریس متعامد است.

برهان. با استفاده از تغییر متغیر

$$Z = OY, \quad Y = O^{-1}Z, \quad |J| = \left| \frac{dY}{dZ} \right| = |O^{-1}| = 1$$

می‌توان نوشت

$$f(y) = g(y'y)$$

$$f(z) = g(z'O^{-1}O^{-1}z) = g(z'z).$$

پس هر توزیع با خاصیت  $OY \stackrel{d}{=} Y$  دارای توزیع کروی شکل است.

نتیجه ۷.۵.۱. اگر  $Y$  دارای توزیع کروی شکل با نمایش تصادفی  $Y \stackrel{d}{=} RU$ ،  $R^2 = Y'Y$  باشد، آنگاه  $U$  دارای توزیع با منحنی‌های تراز دایره‌ای شکل است.

برهان. با توجه به اینکه  $Y$  دارای توزیع کروی شکل است برای هر ماتریس متعامد  $O$  اگر  $Z = OY$  آنگاه با توجه به قضیه  $Z \stackrel{d}{=} Y$  پس  $Z$  دارای توزیع کروی شکل است و با توجه به (۳۲.۱) دارای نمایش تصادفی  $Z = SV$  می‌باشد، که در آن  $S^2 = Z'Z = Y'Y$  بنابراین  $S = R$  و با توجه به هم توزیع بودن  $Y$  و  $Z$  داریم  $S = OU \stackrel{d}{=} U$ .

چگالی  $X = \nu + CY$  به صورت (۱۸.۱) است و با استفاده از روابط (۳۳.۱) و (۳۴.۱) قضیه زیر نتیجه می‌شود.

قضیه ۸.۵.۱. اگر  $X$  دارای چگالی (۱۸.۱) باشد و  $ER^2 < \infty$  آنگاه

$$EX = \mu = \nu$$

$$Cov(X) = E(X - \mu)(X - \mu)' = \Sigma = \frac{1}{p} ER^2 \Sigma \quad (35.1)$$

### ۲.۵.۱ توزیع حاشیه‌ای

قضیه ۹.۵.۱. فرض کنید که  $X' = (X^{(1)}, X^{(2)})$  که در آن  $X^{(1)}$  و  $X^{(2)}$  به ترتیب بردارهایی با  $q$

و  $p - q$  مولفه می‌باشند در این صورت چگالی حاشیه‌ای  $X^{(2)}$  عبارت است از

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} g(X^{(1)} X^{(1)} + X^{(2)} X^{(2)}) dX_1 \dots dX_q \quad (۳۶.۱)$$

برهان. سلیمانی (۱۳۸۹) را ببینید.

قضیه ۱۰.۵.۱. فرض کنید که  $X' = (X^{(1)}, X^{(2)})$  دارای چگالی (۳۲.۱) به صورت زیر افزاز

شده‌باشد

$$\begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}$$

تعریف می‌کنیم

$$Z^{(1)} = X^{(1)} - \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} X^{(2)} = X^{(1)} - \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} X^{(2)}$$

$$Z^{(2)} = X^{(2)}$$

$$\tau^{(1)} = \nu^{(1)} - \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} \nu^{(2)} = \nu^{(1)} - \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} \nu^{(2)}$$

$$\tau^{(2)} = \nu^{(2)}$$

آنگاه چگالی  $Z' = (Z^{(1)}, Z^{(2)})$  به صورت زیر است

$$|\Sigma_{11}|^{-\frac{1}{2}} |\Sigma_{22}|^{-\frac{1}{2}} g \left[ (Z^{(1)} - \tau^{(1)})' \Sigma_{11}^{-1} (Z^{(1)} - \tau^{(1)}) + (Z^{(2)} - \tau^{(2)})' \Sigma_{22}^{-1} (Z^{(2)} - \tau^{(2)}) \right].$$

برهان. سلیمانی (۱۳۸۹) را ببینید.

فرض کنید  $X \sim EC_p(\circ, \Sigma, g)$  که در آن

$$\Sigma = \{\rho_{ij} : \rho_{ii} = 1, -1 < \rho < 1, i \neq j, \rho_{ij} = \rho_{ji}; i, j = 1, 2, \dots, p\}$$

در این حالت همه توزیع‌های حاشیه‌ای  $X$  به طور یکسان دارای تابع چگالی احتمال

$$q_g(x) = \frac{\pi^{\frac{n-1}{\nu}}}{\Gamma^{\frac{n-1}{\nu}}} \int_{x^2}^{\infty} (z - x^2)^{\frac{n-1}{\nu} - 1} g(z) dz \quad (۳۷.۱)$$

و تابع چگالی تجمعی

$$Q_g(x) = \frac{1}{\nu} + \int_0^x \int_{u^2}^{\infty} (z - u^2)^{\frac{n-1}{\nu} - 1} g(z) dz du \quad (۳۸.۱)$$

می‌باشند. حال ما در این قسمت توجه خود را به توزیع‌های بیضی‌گون دو متغیره ( $n = 2$ ) محدود می‌کنیم. بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض می‌کنیم

$$\mu = \circ, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}, \quad -1 < \rho < 1$$

آنگاه چگالی توام (۱۸.۱) به صورت زیر بدست می‌آید

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} g\left(\frac{x_1^2 + x_2^2 - 2\rho x_1 x_2}{1-\rho^2}\right) \quad (39.1)$$

که در آن  $g(\cdot)$  مولد چگالی اختیاری می‌باشد. به ترتیب تابع چگالی احتمال و تابع چگالی تجمعی حاشیه‌ای برابرند با

$$\begin{aligned} q_g(x) &= \int_{x^2}^{\infty} (z - x^2)^{-\frac{1}{2}} g(z) dz \\ Q_g(x) &= \frac{1}{2} + \int_{x^2}^{\infty} \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{z}}\right) g(z) dz. \end{aligned} \quad (40.1)$$

و  $q_g(x) = q_g(-x)$  و  $Q_g(x) = 1 - Q_g(x)$ ، به ازای  $x > 0$ . برای بررسی بیشتر می‌توانید به فنگ و همکاران (۱۹۹۸) مراجعه کنید. با توجه به قضیه ۵.۴.آ و ۶.۴.آ، گشتاورهای چگالی (۳۹.۱) برابر است با

$$\begin{aligned} E(x_j) &= \circ, \quad j = 1, 2 \\ \text{Var}(x_j) &= \frac{D_1}{2}, \quad j = 1, 2 \\ \text{Cov}(x_1, x_2) &= \frac{D_1 \rho}{2} \\ E(x_1^{t_1} x_2^{t_2}) &= \pi^{-1} D_{t_1+t_2} B\left(\frac{1}{2} + t_1, \frac{1}{2} + t_2\right) \end{aligned}$$

که  $t_1 > 1$ ،  $t_2 > 1$  عدد صحیح بوده و

$$\begin{aligned} D_t &= \pi \int_{\circ}^{\infty} z^t g(z) dz \\ B(\alpha, \beta) &= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)} \end{aligned}$$



## ۶.۱ توزیع شرطی

با در نظر گرفتن توزیع  $y = (y^{(1)}, y^{(2)})'$  به صورت کروی شکل  $g(y'y)$ ، چگالی  $y^{(1)}$  به شرط  $y^{(2)}$  به صورت زیر است

$$\frac{g(y^{(1)}y^{(1)} + y^{(2)}y^{(2)})}{g_2(y^{(2)}y^{(2)})} = \frac{g(y^{(1)}y^{(1)} + r_2^*)}{g_2(r_2^*)} \quad (۴۱.۱)$$

که در آن  $r_2^* = y^{(2)}y^{(2)}$  و چگالی حاشیه‌ای  $g_2(y^{(2)}y^{(2)})$  در قضیه ۹.۵.۱ داده شده است. رابطه (۳۴.۱) بر حسب  $y^{(1)}$  دارای توزیع کروی شکل است.

فرض کنید  $X = (X^{(1)}, X^{(2)})'$  دارای توزیع (۱۸.۱) باشد، در این صورت چگالی شرطی  $X^{(1)}$  به شرط  $X^{(2)} = x^{(2)}$  عبارت است از

$$\begin{aligned} & |\Sigma_{11,2}| g \{ [(x^{(1)} - \nu^{(1)})' - (x^{(2)} - \nu^{(2)})' B'] \times \Sigma_{11,2}^{-1} [(x^{(1)} - \nu^{(1)}) - B(x^{(2)} - \nu^{(2)})] \\ & + (x^{(2)} - \nu^{(2)})' \Sigma_{22}^{-1} (x^{(2)} - \nu^{(2)}) \} \\ & \div g_2 [(x^{(2)} - \nu^{(2)})' \Sigma_{22}^{-1} (x^{(2)} - \nu^{(2)})] \\ & = \left( |\Sigma_{11,2}|^{-1/2} g \{ [(x^{(1)} - \nu^{(1)}) - B(x^{(2)} - \nu^{(2)})]' \right. \\ & \left. \times \Sigma_{11,2} [(x^{(1)} - \nu^{(1)}) - B(x^{(2)} - \nu^{(2)})] + r_2^* \} \right) \div g(r_2^*) \end{aligned} \quad (۴۲.۱)$$

که در آن  $r_2^* = (x^{(2)} - \nu^{(2)}) \Sigma_{22}^{-1} (x^{(2)} - \nu^{(2)})$  و  $B = \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1}$ . توزیع در (۳۵.۱) تابعی از  $x^{(1)}$  و به ازای  $[(x^{(1)} - \nu^{(1)}) - B(x^{(2)} - \nu^{(2)})]$  بیضی‌گون است. میانگین  $X^{(1)}$  به شرط  $X^{(2)} = x^{(2)}$ ، اگر  $E(R_1^*) | y^{(2)}y^{(2)} = r_2 < \infty$  که در آن  $R_1^* = Y^{(1)}Y^{(1)}$ ، عبارت است از

$$E(X^{(1)} | X^{(2)} = x^{(2)}) = \nu^{(1)} + B(x^{(2)} - \nu^{(2)}) \quad (۴۳.۱)$$

## ۷.۱ تابع مشخصه

تابع مشخصه بردار تصادفی  $Y$  با توزیع کروی‌گون،  $Ee^{it'Y}$ ، دارای خاصیت پایایی بر روی تبدلات متعامد است، یعنی

$$Ee^{it'OY} = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{it'oy} g(y'y) dy_1 \dots dy_p$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} e^{it'z} g(z'z) dz_1 \cdots dz_p \\
&= E e^{it'Z} \tag{۴۴.۱}
\end{aligned}$$

که در آن  $Z = OY$  دارای چگالی  $g(y'y)$  است. تساوی (۴۴.۱) به ازای هر ماتریس متعامد  $O$  نتیجه می‌دهد که  $E e^{it'Z}$  تابعی از  $t't$  است. پس می‌توان نوشت

$$E e^{it'Y} = \phi(t't)$$

آنگاه برای  $X = \mu + CY$

$$\begin{aligned}
E e^{it'X} &= e^{it'\mu} E e^{it'CY} \\
&= e^{it'\mu} \phi(t'CC't) \\
&= E e^{it'\mu} \phi(t'\Sigma t)
\end{aligned}$$

و  $\Sigma = CC'$ . بر عکس هر تابع مشخصه به فرم  $e^{it'\mu} \phi(t'\Sigma t)$  متناظر با چگالی بردار تصادفی  $X$  با

چگالی (۱۸.۱) است. با توجه به رابطه ۲۰.۱ تابع مشخصه (۴۴.۱) به صورت زیر می‌باشد

$$\psi(u_1, u_2) = E (\exp \{i(u_1 z_1 + u_2 z_2)\}) = \phi(u_1^2 + u_2^2 + 2\rho u_1 u_2) \tag{۴۵.۱}$$

که

$$\phi(u^2) = E (\exp(iuz_1)) = E (\exp(iuz_2)).$$

لم ۱.۷.۱. (چو<sup>۲۳</sup>، ۱۹۷۳) فرض کنید بردار تصادفی  $X$  با  $p$  مولفه، دارای توزیع  $EC_p(\mu, \Sigma, \phi)$  با تابع

چگالی احتمال  $g(\cdot)$ ، تابع مولد چگالی  $h(\cdot)$  باشد. اگر  $h(t)$  برای  $t \in [0, \infty)$  دارای تبدیل معکوس

لاپلاس باشد آنگاه تابع وزن  $W$  روی بازه  $(0, \infty)$  وجود دارد به طوری که

$$g(W) = \int_0^{\infty} W(t) f_N(x) dt, \tag{۴۶.۱}$$

و در آن  $f_N(x)$  نشان‌دهنده تابع چگالی  $N_p(\mu, t^{-1}\Sigma)$  است. به عبارتی

$$g_X(x) = \int_0^{\infty} W(t) \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}} |t^{-1}\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \exp \left[ -\frac{1}{2} (x - \mu)' (t^{-1}\Sigma)^{-1} (x - \mu) \right] dt$$

همچنین

$$W(t) = (2\pi)^{\frac{p}{2}} |t^{-1}\Sigma|^{\frac{1}{2}} L^{-1} \{h(s)\}$$

که در آن  $L^{-1}\{(h(s))\}$  نشان‌دهنده تبدیلی معکوس لاپلاس  $h(s)$  به ازای  $s = \frac{(x-\mu)'\Sigma(x-\mu)}{\nu}$  است. برهان. به چو (۱۹۷۳) مراجعه کنید.

برای آگاهی از خواص تبدیل لاپلاس و معکوس آن به دنبات و باتا<sup>۲۴</sup> (۲۰۰۷) مراجعه کنید. برای برخی کاربردهای لم فوق، سریواستا و بیلودیو<sup>۲۵</sup> (۱۹۸۹)، گوپتا و وارگا (۱۹۹۵)، چنگ<sup>۲۶</sup> (۱۹۹۹) را ببینید.

توجه به این نکته ضروری است که ممکن است تابعی تبدیل لاپلاس نداشته باشد که در این صورت لم فوق کاربردی ندارد. اما در اکثر توزیع‌های چندمتغیره معروف، تبدیل معکوس لاپلاس وجود دارد. در جدول زیر برخی از توزیع‌های بیضی‌گون به همراه تابع وزن  $W$  آمده است.

جدول ۱.۱: توزیع‌های بیضی‌گون به همراه تابع وزن  $W$

توزیع	تابع چگالی احتمال	$W(t)$
توزیع نرمال چندمتغیره	$\frac{ V ^{-1/2} e^{-s}}{(\sqrt{\pi})^{n/2}}$	$\delta(t - 1)$
اسلش تعمیم یافته	$\frac{\nu s^{-n/2-\nu}  V ^{-1/2} [\Gamma(n/2+\nu) - \Gamma(n/2+s)]}{(\sqrt{\pi})^{n/2}}$	$\nu t^{\nu-1}$
چندمتغیره پیرسن VII	$\frac{\Gamma(m V ^{-1/2})}{(q\pi)^{n/2} \Gamma(m-\frac{m}{q})} (1 + \frac{\nu s}{q})^{-m}$	$\frac{t^{m-\frac{m}{q}-1} e^{-\frac{qt}{\sqrt{q}}}}{(\frac{q}{\sqrt{q}})^{n/2} \Gamma(m-\frac{m}{q})}$
توزیع لاپلاس چندمتغیره	$\frac{\Gamma(n/2)  V ^{-1/2} e^{-\sqrt{\nu} s}}{(\sqrt{\pi})^{n/2} \Gamma(n)}$	$\delta(t - \sqrt{\nu})$
t چندمتغیره با $\nu$ درجه آزادی	$\frac{\nu^\nu / 2  V ^{-1/2} \Gamma((\nu+n)/2)}{(\pi)^{n/2} \Gamma(\nu/2)} \times (\nu + \sqrt{2} s)^{-(\nu+n)/2}$	$\frac{\nu(\nu t/2)^{\nu/2-1} e^{-\nu t/2}}{2\Gamma(\nu/2)}$

در جدول فوق  $s = \frac{(x-\mu)'\Sigma^{-1}(x-\mu)}{\nu}$ ،  $\delta(t)$  تابع دلتا دیراک با خواص زیر است

$$\int_0^\infty \delta(t) dt = 1 \quad (i)$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(t) \delta(t) dt = f(0), f(\cdot) \text{ پذیر اندازه بولر} \quad (ii)$$

<sup>۲۴</sup>Debnath and Bhatta

<sup>۲۵</sup>Srivastava and Bilodeau

<sup>۲۶</sup>Cheong

همچنین  $\delta^m(t)$  نمایانگر مشتق  $m$ ام از  $\delta(t)$  نسبت به  $t$  است. فرض کنید که  $W(t)$  یک تابع نامنفی

باشد، با توجه به اینکه  $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$  بر اساس لم ۱.۷.۱

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_N(x) W(t) &= 1 \\ \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} W(t) \int_{-\infty}^{\infty} f_N(x) dx dt &= 1 \\ \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} W(t) dt &= 1 \end{aligned}$$

با توجه به اینکه  $f_N(\cdot)$  نشان دهنده تابع چگالی  $N_p(\mu, t^{-1}\Sigma)$  است. با تعویض ترتیب انتگرال‌گیری

بر اساس قضیه فوبینی می‌توان نتیجه گرفت تابع نامنفی  $W$  یک تابع چگالی است. اما گاهی اوقات

$W(t)$  می‌تواند منفی باشد مثلاً اگر تابع چگالی به صورت  $c[1 + (x'C^{-1}x)^2]^{-1}$  باشد آنگاه  $W(t) =$

$ct^{-n/2} \cdot \sin(t/2)$  (چو ۱۹۷۳) که در آن  $c$  یک مقدار ثابت است. در این صورت  $W$  تابع چگالی نخواهد

بود. همه توابع  $W$ ، که در جدول بالا ارائه شده، توابع نامنفی بوده‌اند و در نتیجه تابع چگالی‌اند. حال به

کمک لم ۱.۷.۱ تابع مشخصه به صورت زیر نیز قابل محاسبه می‌باشد.

$$\begin{aligned} \phi_X(s) &= Ee^{is'X} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{is'x} W(t) f_N(x) dt \\ &= e^{is'\mu} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{is'(t^{-1}\Sigma)s}{t}} W(t) dt \end{aligned}$$

و همچنین برای کوواریانس داریم

$$\begin{aligned} cov(X) &= E[(X - \mu)(X - \mu)'] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)(x - \mu)' W(t) f_N(x) dt dx \\ &= \Sigma \int_{-\infty}^{\infty} t^{-1} W(t) dt \end{aligned}$$

بنابراین با مقایسه رابطه فوق و رابطه (۲۶.۱) نتیجه می‌گیریم که

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^{-1} W(t) dt = -2\psi'(\circ)$$

و در نهایت به کمک لم ۱.۷.۱ برای امید ریاضی داریم

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \int_{-\infty}^{\infty} W(t) f_N(x) dx dt$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^\infty W(t) \int_{-\infty}^\infty x f_x dx dt \\ &= \mu \int_0^\infty W(t) dt \\ &= \mu \end{aligned}$$

در نهایت نشان می‌دهیم که هر ترکیب خطی از متغیرهای دارای توزیع بیضی‌گون خود دارای توزیع بیضی‌گون با همان تابع مولد مشخصه می‌باشد.

**قضیه ۲.۷.۱.** فرض کنید  $X \sim EC_p(\mu, \Sigma, \phi)$  و  $A_{q \times p}$  و  $C_{q \times 1}$  ماتریس‌های ثابت باشند، آنگاه

$$AX + C \sim EC_q(A\mu + C, A\Sigma A', \psi).$$

**برهان.** با توجه به اینکه  $X$  دارای توزیع بیضی‌گون است، تابع مشخصه آن به صورت زیر می‌باشد

$$\phi_X(t) = e^{it'\mu} \psi(t'\Sigma t)$$

حال تابع مشخصه  $Y = AX + C$  را بدست می‌آوریم برای این منظور داریم

$$\begin{aligned} \phi_Y(t) &= Ee^{it'Y} = Ee^{it'(AX+C)} \\ &= Ee^{i(A't)'X} e^{it'C} = e^{it'C} \phi_X(A't) \\ &= e^{it'C} e^{i(A't)'\mu} \psi(t'A\Sigma A't) \\ &= e^{it'(A\mu+C)} \psi(t'(A\Sigma A')t). \end{aligned}$$

بنابراین با مقایسه تابع مشخصه‌های  $X$  و  $Y$  نتیجه می‌گیریم که هر ترکیب خطی از یک متغیر تصادفی با توزیع بیضی‌گون، دارای توزیع بیضی‌گون بوده و نکته حائز اهمیت در این است که  $\psi(\cdot)$  تابع مولد مشخصه برای هر ترکیب خطی از یک متغیر تصادفی با توزیع بیضی‌گون ثابت باقی می‌ماند.

## ۸.۱ برآورد پارامترها

در این قسمت برای برآورد پارامتر در توزیع‌های بیضی‌گون قضیه‌ی کلی اندرسن و همکاران (۱۹۸۶) را

بیان می‌کنیم

قضیه ۱.۸.۱ (۵). فرض کنید  $X \sim EC_p(\mu, \Sigma, \psi)$  و  $(\mu, \Sigma)$  مجموعه‌ای در فضای  $\Omega$  باشد، بطوریکه اگر  $(\mu, \Sigma) \in \Omega$  آنگاه  $\forall c > 0, (\mu, c\Sigma) \in \Omega$ . همچنین فرض کنید  $g$  به گونه‌ای باشد که  $g(x'x)$  یک تابع چگالی در  $\mathbb{R}^p$  و  $y_g^{\frac{p}{2}}g(y)$  دارای یک مقدار ماکزیم مثبت متناهی مانند  $y_g$  باشد. علاوه بر این فرض کنید بر اساس تک مشاهده  $x$  از  $|\Sigma|^{-\frac{1}{p}}g[(x - \mu)' \Sigma^{-1}(x - \mu)]$ ، برآوردگر درستنمایی ماکزیم  $(\tilde{\mu}, \tilde{\Sigma}) \in \Omega$  تحت نرمال بودن موجود و منحصر به فرد باشد. آنگاه برآورد درستنمایی ماکزیم برای  $g$  عبارت است از

$$\hat{\mu} = \tilde{\mu}, \quad \hat{\Sigma} = \frac{p}{y_g} \tilde{\Sigma} \quad (۴۷.۱)$$

و تابع درستنمایی ماکزیم به صورت زیر است

$$|\tilde{\Sigma}|^{-\frac{1}{p}}g(y_g)$$

برهان. فرض کنید  $B = |\Sigma|^{-\frac{1}{p}}\Sigma$ ، بنابراین

$$\begin{aligned} L(\mu, \Sigma) &= |\Sigma|^{-\frac{1}{p}}g[(x - \mu)' \Sigma^{-1}(x - \mu)] \\ &= |\Sigma|^{-\frac{1}{p}}g[d] \end{aligned}$$

از طرفی

$$\begin{aligned} d &= (x - \mu)' \Sigma^{-1}(x - \mu) \\ &= \frac{(x - \mu)' B^{-1}(x - \mu)}{\Sigma^{-\frac{1}{p}}} \end{aligned}$$

در نتیجه

$$|\Sigma|^{\frac{1}{p}} = \frac{(x - \mu)' B^{-1}(x - \mu)}{d}$$

$$|\Sigma|^{-\frac{1}{p}} = \left[ \frac{(x - \mu)' B^{-1}(x - \mu)}{d} \right]^{-\frac{p}{p}}$$

طرفین را به توان  $-\frac{p}{p}$  می‌رسانیم

آنگاه  $(\tilde{\mu}, \tilde{\Sigma}) \in \Omega$  و  $|B| = 1$ ، تابع درستنمایی عبارت است از

$$L(\mu, B) = \underbrace{[(x - \mu)' B^{-1}(x - \mu)]^{-\frac{p}{p}}}_{(۱)} \underbrace{d^{\frac{p}{p}}g(d)}_{(۲)} \quad (۴۸.۱)$$

تحت نرمال بودن، ماکزیمم (۴۸.۱) در  $\mu = \tilde{\mu}$  و  $B = \tilde{B} = |\tilde{\Sigma}|^{-\frac{1}{p}} \tilde{\Sigma}$  و  $d = p$  رخ می‌دهد. در حالت کلی ماکزیمم (۴۸.۱) عبارت است از ماکزیمم قسمت (۱) و (۲) که برابر  $\tilde{\mu} = \hat{\mu}$  و  $\tilde{B} = \hat{B}$  و  $\hat{d} = y_g$  می‌باشد. از آنجایی که  $B = |\Sigma|^{-\frac{1}{p}}$  در نتیجه داریم

$$\begin{aligned} \Sigma &= |\Sigma|^{\frac{1}{p}} B \\ \hat{\Sigma} &= |\hat{\Sigma}|^{\frac{1}{p}} \hat{B} \\ &= |\hat{\Sigma}|^{\frac{1}{p}} |\tilde{\Sigma}|^{-\frac{1}{p}} \tilde{\Sigma} = \left( \frac{|\hat{\Sigma}|}{|\tilde{\Sigma}|} \right)^{\frac{1}{p}} \tilde{\Sigma} \end{aligned}$$

از طرفی

$$\hat{d} = \frac{(x - \hat{\mu})' \hat{B}^{-1} (x - \hat{\mu})}{|\hat{\Sigma}|^{\frac{1}{p}}}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} |\hat{\Sigma}|^{\frac{1}{p}} &= \frac{(x - \hat{\mu})' \hat{B}^{-1} (x - \hat{\mu})}{y_g} = \frac{(x - \tilde{\mu})' |\tilde{\Sigma}|^{\frac{1}{p}} \tilde{\Sigma}^{-1}}{y_g} \\ |\hat{\Sigma}|^{\frac{1}{p}} |\tilde{\Sigma}|^{-\frac{1}{p}} &= \frac{(x - \tilde{\mu})' \tilde{\Sigma}^{-1} (x - \tilde{\mu})}{y_g} \end{aligned}$$

از آنجایی که ماکزیمم نرمال در  $d = p$  رخ می‌دهد داریم

$$|\hat{\Sigma}|^{\frac{1}{p}} |\tilde{\Sigma}|^{-\frac{1}{p}} = \frac{p}{y_g}$$

□

## ۹.۱ بررسی یک مثال از خانواده توزیع بیضی‌گون

در این قسمت با استفاده از مطالب گفته‌شده، آزمون فرضیه را برای یکی از توزیع‌های خانواده بیضی‌گون، توزیع نمایی-توانی انجام می‌دهیم.

**تعریف ۱.۹.۱.** بردار تصادفی  $X = (x_1, \dots, x_p)'$  با  $p \geq 1$ ، دارای توزیع نمایی-توانی  $p$ -متغیره با پارامترهای  $\mu$ ،  $\Sigma$  و  $\beta$ ، که  $\mu \in \mathbb{R}^p$ ،  $\Sigma$  ماتریس معین مثبت  $p \times p$  و  $\beta \in (0, \infty)$  است. اگر تابع چگالی آن به صورت زیر باشد

$$f(x; \mu, \Sigma, \beta) = k |\Sigma|^{-\frac{1}{\beta}} \exp \left( -\frac{1}{\beta} [(x - \mu)' \Sigma^{-1} (x - \mu)]^{\beta} \right), \quad (۴۹.۱)$$

که

$$k = \frac{p\Gamma(\frac{p}{\nu})}{\pi^{\frac{p}{\nu}}\Gamma(1 + \frac{p}{\nu\beta})\nu^{1+\frac{p}{\nu\beta}}}$$

و می‌نویسیم  $X \sim PE_p(\mu, \Sigma, \beta)$ .

تابع (۴۹.۱) در واقع تابع چگالی بردار تصادفی دارای توزیع‌های بیضی‌گون  $EC_p(\mu, \Sigma, g)$  می‌باشد. با  $g(t) = \exp(-\frac{1}{\nu}t^\beta)$ ، از این‌رو تابع  $g$  با توجه به  $\int_0^\infty t^{\frac{p}{\nu}-1}g(t)dt < \infty$  (فنگ و همکاران (۱۹۹۰)) را ببینید، در حقیقت

$$\int_0^\infty t^{\frac{p}{\nu}-1}\exp\left(-\frac{1}{\nu}t^\beta\right)dt = \frac{1}{\beta}\left(\frac{1}{\nu}\right)^{-\frac{p}{\nu\beta}}\Gamma\left(\frac{p}{\nu\beta}\right).$$

وقتی  $p = ۲$  می‌توانیم از روی نمودار چگالی (۴۹.۱) را مورد مطالعه قرار دهیم. در اینجا برای  $\beta$ ‌های متفاوت با  $\mu = 0$  و  $\Sigma = I_2$  نمودار چگالی نمایی-توانی را رسم کردیم. وقتی که  $\beta$  افزایش می‌یابد، دقت نمودار تقلیل پیدا می‌کند. تابع چگالی نمایی-توانی چندمتغیره از توزیع یک بعدی استاندارد می‌باشد. از این‌رو برای  $p = ۱$ ، چگالی (۴۹.۱) به چگالی یک بعدی کاهش پیدا می‌کند. با این حال، اگرچه مولفه‌های بردار تصادفی  $X = (x_1, \dots, x_p)'$  را تایید می‌کنند که  $X_i$  به صورت  $EP_p(0, 1, \beta)$  برای  $i = 1, \dots, p$ ، توزیع شده و مستقل هستند. ولی این مفهوم را نمی‌رساند که  $X$  توسط  $PE_p(0, I_p, \beta)$  توزیع شده است، به جز برای حالتی که  $\beta = ۱$  باشد با توزیع نرمال تطابق دارد. وقتی  $\beta = \frac{1}{\nu}$ ، چگالی (۴۹.۱) به توزیع نمایی-توانی دو نمایی کاهش می‌یابد. و وقتی که  $\beta$  به سمت بی‌نهایت میل کند توزیع چندمتغیره به توزیع یکنواخت میل می‌کند.

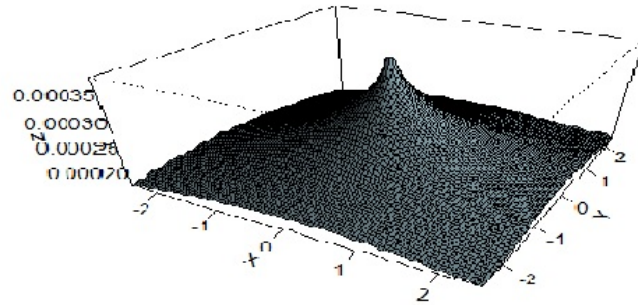
## ۱.۹.۱ نمایش تصادفی

از آنجائیکه توزیع نمایی-توانی متعلق به خانواده توزیع‌های بیضی‌گون می‌باشد، می‌توانیم برای آن نمایش تصادفی در نظر بگیریم. کمبانیس و همکاران (۱۹۸۱)، جانسون (۱۹۸۷) و فنگ و ژانگ (۱۹۹۰) را ببینید.

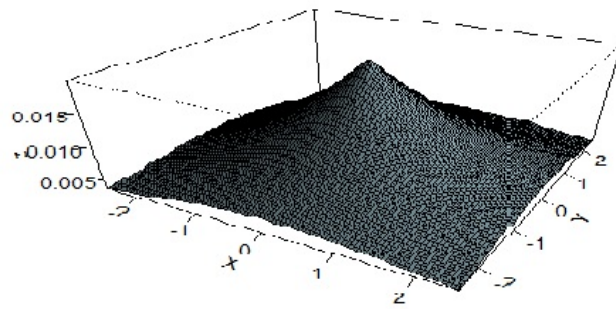
قضیه ۲.۹.۱. (الف) اگر  $X$  دارای توزیع نمایی-توانی  $PE_p(\mu, \Sigma, \beta)$  باشد، آن‌گاه  $X$  برابر است با

$$\mu + RA'u^{(p)}, \quad (50.1)$$

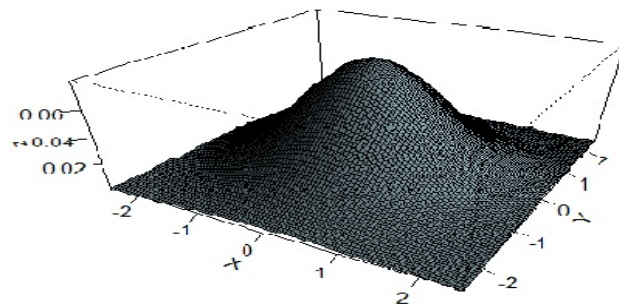




(ا)  $\beta = 0,25$

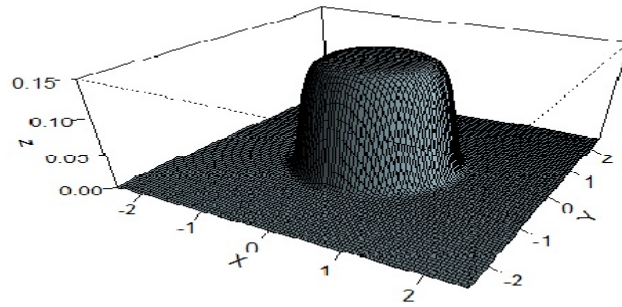


(ب)  $\beta = 0,5$

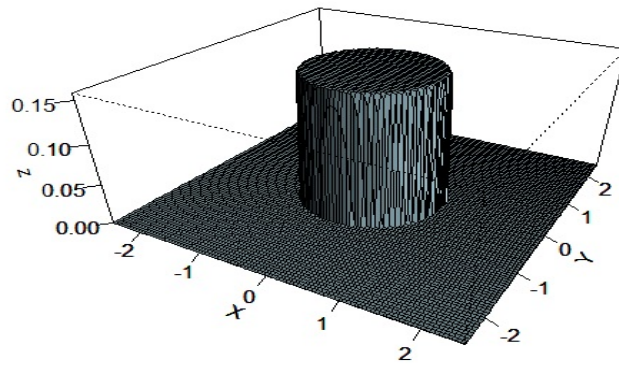


(ج)  $\beta = 1$

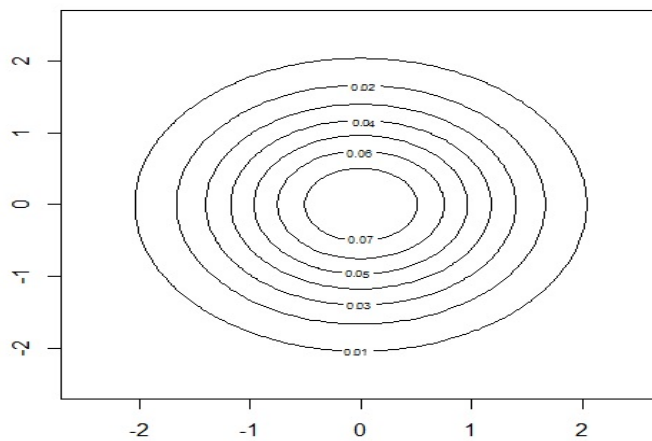
شکل ۶.۱: تابع توزیع نمایی-توانی به ازای  $\beta$  های مختلف و  $\mu = 0$  و  $\Sigma = I_2$



(آ)  $\beta = 5$



(ب)  $\beta = 5^\circ$



(ج)  $\beta = 1$

شکل ۷.۱: تابع توزیع نمایی-توانی به ازای  $\beta$  های مختلف و  $\mu = 0$  و  $\Sigma = I_2$  و منحنی تراز برای  $\beta = 1$

که  $u^{(p)}$  بردار تصادفی دارای توزیع یکنواخت بر روی کره واحد در  $\mathbb{R}^p$  است،  $R$  متغیر تصادفی نامنفی پیوسته، مستقل از  $u^{(p)}$ ، دارای تابع چگالی

$$h_R(r) = \frac{p}{\Gamma\left(1 + \frac{p}{\sqrt{\beta}}\right)} r^{p-1} \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{\beta}} r^{\sqrt{\beta}}\right) I_{(\cdot, \infty)}(r), \quad (51.1)$$

و  $A$  ماتریس مربعی با مرتبه  $p$  می‌باشد که  $A'A = \Sigma$ .

(ب) برعکس، اگر  $X = (x_1, \dots, x_p)'$  برابر با  $\mu + RA'u^{(p)}$  باشد که  $u^{(p)}$  بردار تصادفی دارای توزیع یکنواخت بر روی کره واحد در  $\mathbb{R}^p$ ،  $R$  متغیر تصادفی نامنفی پیوسته، مستقل از  $u^{(p)}$ ، با تابع چگالی (51.1)،  $\beta \in (0, \infty)$  و  $A_{p \times p}$  ماتریس نامنفرد باشد، آنگاه  $X$  دارای توزیع نمایی-توانی  $PE_p(\mu, \Sigma, \beta)$  است به طوری که  $\Sigma = A'A$ .

## ۲.۹.۱ گشتاورها

قضیه ۳.۹.۱. (الف) گشتاورهای متغیر تصادفی  $R$  که از چگالی (51.1) تولید می‌شوند به صورت زیر است.

$$E(R^s) = \frac{\sqrt{\frac{s}{\beta}} \Gamma\left(\frac{p+s}{\sqrt{\beta}}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{\sqrt{\beta}}\right)} \quad (52.1)$$

برای هر مقدار مثبت  $s$ .

(ب) متغیر تصادفی  $T = R^{\sqrt{\beta}}$  دارای توزیع  $Ga\left(\frac{p}{\sqrt{\beta}}, \frac{1}{\sqrt{\beta}}\right)$  می‌باشد.

(ج) صورت درجه دوم  $Z = (x - \mu)' \Sigma^{-1} (x - \mu)$  با  $R^{\sqrt{\beta}}$  هم توزیع است.

برهان.

(الف)

$$\begin{aligned} E(R^s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} r^s h_R(r) dr \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} r^s \frac{p}{\Gamma\left(1 + \frac{p}{\sqrt{\beta}}\right)} r^{p-1} \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{\beta}} r^{\sqrt{\beta}}\right) I_{(\cdot, \infty)}(r) dr \\ &= \frac{p}{\Gamma\left(1 + \frac{p}{\sqrt{\beta}}\right)} \int_0^{+\infty} r^{p+s-1} \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{\beta}} r^{\sqrt{\beta}}\right) dr \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{(تغییر متغیر } z = \frac{1}{\sqrt{\beta}} r^{2\beta} \text{ را در نظر بگیرید)} \\
 &= \frac{p}{\Gamma(1 + \frac{p}{\sqrt{\beta}}) 2^{\frac{p}{\sqrt{\beta}}}} \int_0^{+\infty} (2z)^{\frac{p+s-1}{\sqrt{\beta}}} \exp(-z) \left(\frac{1}{\beta}\right) (2z)^{\frac{1}{\sqrt{\beta}}-1} dz \\
 &= \frac{p 2^{\frac{p+s}{\sqrt{\beta}}}}{2^{\frac{p}{\sqrt{\beta}}} \Gamma(1 + \frac{p}{\sqrt{\beta}})} \int_0^{+\infty} (z)^{\frac{p+s}{\sqrt{\beta}}-1} \exp(-z) dz \\
 &= \frac{2^{\frac{s}{\sqrt{\beta}}} \Gamma\left(\frac{p+s}{\sqrt{\beta}}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{\sqrt{\beta}}\right)}
 \end{aligned}$$

(ب) با جایگذاری  $t = r^{2\beta}$  در معادله‌ی (۵۱.۱) داریم

$$\begin{aligned}
 f_T(t) &= f_R(t^{\frac{1}{2\beta}}) |j| \\
 &= \frac{p}{\Gamma(1 + \frac{p}{\sqrt{\beta}}) 2^{\frac{p}{\sqrt{\beta}}}} (t^{\frac{p-1}{2\beta}}) \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{\beta}} t\right) \left(\frac{1}{2\beta}\right) t^{\frac{1}{2\beta}-1} \\
 &= \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{\beta}}\right)^{\frac{p}{\sqrt{\beta}}}}{\Gamma\left(\frac{p}{\sqrt{\beta}}\right)} t^{\frac{p}{\sqrt{\beta}}-1} \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{\beta}} t\right)
 \end{aligned}$$

یعنی  $T \sim Ga\left(\frac{p}{\sqrt{\beta}}, \frac{1}{\sqrt{\beta}}\right)$

(ج) از آنجائیکه داریم  $\Sigma = A'A$  در نتیجه

$$\begin{aligned}
 \Sigma^{-1} &= (A'A)^{-1} = A^{-1}(A')^{-1} \\
 A\Sigma^{-1} &= AA^{-1}(A')^{-1} \\
 A\Sigma^{-1}A' &= (A')^{-1}A' \\
 A\Sigma^{-1}A' &= I \tag{۵۳.۱}
 \end{aligned}$$

از رابطه (۵۰.۱) داریم

$$x - \mu = RA'u^{(p)}$$

حال قرار می‌دهیم

$$\begin{aligned}
 Y &= \Sigma^{-\frac{1}{2}}(x - \mu) \\
 &= \Sigma^{-\frac{1}{2}}RA'u^{(p)}
 \end{aligned}$$

آن‌گاه با استفاده از رابطه‌ی (۵۳.۱) و با توجه به این‌که  $u^{(p)}$  دارای توزیع یکنواخت است، در نتیجه  $[u^{(p)}]'[u^{(p)}] = I$  و یک متغیر تصادفی یک‌بعدی است داریم

$$\begin{aligned} Y'Y &= (x - \mu)' \Sigma^{-1} (x - \mu) \\ &= \left[ \Sigma^{-\frac{1}{2}} R A' u^{(p)} \right]' \left[ -\frac{1}{\sqrt{\beta}} R A' u^{(p)} \right] \\ &= R' [u^{(p)}]' [u^{(p)}] \\ &= R' \end{aligned}$$

□ در نتیجه صورت درجه دوم  $Z = (x - \mu)' \Sigma^{-1} (x - \mu)$  با  $R'$  هم‌توزیع است.

### ۳.۹.۱ تابع مشخصه

قضیه ۴.۹.۱. اگر  $X \sim PE_p(\mu, \Sigma, \beta)$  آن‌گاه

(الف) تابع مشخصه‌ی آن به صورت زیر است

$$\phi_X(t) = \frac{p}{\Gamma(1 + \frac{p}{\sqrt{\beta}}) \sqrt{\frac{p}{\sqrt{\beta}}}} \exp(it' \mu) \int_0^{+\infty} \psi_p(r \sqrt{t' \Sigma t}) r^{p-1} \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{\beta}} r^{\sqrt{\beta}}\right) dr \quad (۵۴.۱)$$

که در آن  $\psi_1(x) = \cos x$  و  $\psi_p(x) = \frac{\Gamma(\frac{p}{\sqrt{\beta}})}{\pi^{\frac{1}{2}} \Gamma(\frac{p-1}{\sqrt{\beta}})} \int_0^\pi \exp(ix \cos \theta) \sin^{p-2} \theta d\theta$  برای هر  $p > 1$ .

$$E(X) = \mu \quad (\text{ب})$$

$$Cov(X) = \frac{\sqrt{\frac{1}{\beta}} \Gamma(\frac{p+1}{\sqrt{\beta}})}{p \Gamma(\frac{p}{\sqrt{\beta}})} \Sigma \quad (\text{ج})$$

$$b_1(X) = 0 \quad (\text{د})$$

$$b_2(X) = \frac{p^2 \Gamma(\frac{p}{\sqrt{\beta}}) \Gamma(\frac{p+4}{\sqrt{\beta}})}{\Gamma^2(\frac{p+1}{\sqrt{\beta}})} - p(p+2) \quad (\text{ه})$$

به طوری که  $b_1(X)$  و  $b_2(X)$  به ترتیب ضریب چولگی و برجستگی چند بعدی هستند.

برهان.

(الف) با استفاده از تعریف و چگالی (۵۰.۱) می‌توان نوشت

$$\phi_X(t) = E(\exp(it'x))$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_R \int_{U^{(p)}} \exp(it' A' r u^{(p)}) h_{U^{(p)}}(u) h_R(r) du dr \\
 &= \int_0^\infty E_{U^{(p)}} [\exp(it' A' r u^{(p)})] h_R(r) dr \\
 &= \int_0^\infty \phi_{u^{(p)}}(r A t) h_R(r) dr \quad (55.1)
 \end{aligned}$$

با توجه به قضیه‌ی (۲۰۵۰۱) فنگ و زنگ (۱۹۹۰) تابع مشخصه  $u^{(p)}$  برابر  $\phi_{u^{(p)}} = \psi_p(\|t\|)$  از این‌رو داریم

$$\begin{aligned}
 \phi_{R u^{(p)}} &= \int_0^\infty \psi_p(\sqrt{r t' A' A t r}) h_R(r) dr \\
 &= \int_0^\infty \psi_p(r \sqrt{t' \Sigma t}) h_R(r) dr \\
 &= \frac{p}{\Gamma(1 + \frac{p}{\nu\beta}) 2^{\frac{p}{\nu\beta}}} \int_0^\infty \psi_p(r \sqrt{t' \Sigma t}) r^{p-1} \exp\left(-\frac{1}{2} r^{2\beta}\right) dr \quad (56.1)
 \end{aligned}$$

با جایگذاری معادله‌ی (۵۶.۱) در (۵۵.۱) نتیجه‌ی مورد نظر بدست می‌آید.

(ب) با استفاده از رابطه‌ی (۵۰.۱) داریم

$$X = \mu + R A' u^{(p)}$$

از آن‌جایی‌که بنا بر قضیه‌ی (۳.۹.۱)،  $E(R)$  موجود و همچنین  $R$  و  $u^{(p)}$  از هم مستقل‌اند، داریم

$$E(X) = \mu + E(R) A' E(u^{(p)})$$

از آن‌جایی‌که  $E(u^{(p)}) = 0$ ، بنابراین  $E(X) = \mu$ .

(ج) می‌دانیم

$$Cov(X) = E[(X - \mu)(X - \mu)']$$

از رابطه (۵۰.۱) داریم

$$\begin{aligned}
 Cov(X) &= E \left[ R A' u^{(p)} u^{(p)'} A R \right] \\
 &= E(R^2) A' E \left( u^{(p)} u^{(p)'} A \right) \\
 &= E(R^2) A' Var(u^{(p)}) A \\
 &= E(R^2) A' \frac{1}{p} I_p A
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{p} E(R^2) \Sigma.$$

و با استفاده از قضیه ۳.۹.۱، نتیجه می‌شود

$$Cov(X) = \frac{\frac{1}{2} \Gamma(\frac{p+2}{2\beta})}{p \Gamma(\frac{p}{2\beta})} \Sigma$$

(د) با استفاده از رابطه (۵۰.۱)،  $x$  و  $y$  به ترتیب دارای توزیع‌های  $\mu + SA'v^{(p)}$  و  $\mu + RA'u^{(p)}$

هستند، به طوری که  $R, S, u^{(p)}$  و  $v^{(p)}$  از یکدیگر مستقل می‌باشند. بنابراین اگر در قضیه ۴.۹.۱

قسمت (ج) فرض کنیم  $a = \frac{\frac{1}{2} \Gamma(\frac{p+1}{2\beta})}{p \Gamma(\frac{p}{2\beta})} \frac{p}{\frac{1}{2\beta}}$  آن‌گاه

$$\begin{aligned} b_1(X) &= E \left[ ((X - \mu)' Cov(X)^{-1} (X - \mu))^3 \right] \\ &= E \left[ ((RA'u^{(p)})' (a\Sigma)^{-1} (SA'v^{(p)}))^3 \right] \\ &= a^{-3} E \left[ (Ru^{(p)' AS^{-1} A' v^{(p)} S)^3 \right] \\ &\quad \text{( با استفاده از رابطه (۵۳.۱) )} \\ &= a^{-3} E \left[ (RS)^3 (u^{(p)' v^{(p)})^3 \right] \\ &= a^{-3} E \left[ (RS)^3 \right] E \left[ u^{(p)' v^{(p)} \right]^3 \end{aligned}$$

از آنجایی که برای هر  $u^{(p)}$ ،  $u^{(p)' v^{(p)}}$  نسبت به مبدا متقارن است، و  $v^{(p)}$  دارای توزیع یکنواخت

روی کره واحد در  $\mathbb{R}^p$  است، بنابراین

$$E \left[ (u^{(p)' v^{(p)})^3 | u^{(p)} = u^{(p)} \right] = E \left[ u^{(p)' v^{(p)} \right]^3 = 0$$

پس  $E \left[ u^{(p)' v^{(p)} \right]^3 = 0$  و در نتیجه

$$b_1(X) = 0$$

(ه) دوباره فرض می‌کنیم  $a = \frac{\frac{1}{2} \Gamma(\frac{p+1}{2\beta})}{p \Gamma(\frac{p}{2\beta})} \frac{p}{\frac{1}{2\beta}}$ ، آن‌گاه با استفاده از قضیه ۴.۹.۱ قسمت (ج) داریم

$$\begin{aligned} b_2(X) &= E \left[ (X - \mu)' Cov(X)^{-1} (X - \mu) \right]^2 - p(p + 2) \\ &= a^{-2} E \left[ (X - \mu)' \Sigma^{-1} (X - \mu) \right]^2 - p(p + 2) \\ &= a^{-2} E(R^4) - p(p + 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left( \frac{p^{\frac{1}{\beta}} \Gamma^{\frac{1}{\beta}}\left(\frac{p}{\beta}\right)}{\frac{1}{\beta} \Gamma^{\frac{1}{\beta}}\left(\frac{p+1}{\beta}\right)} \right) \left( \frac{\frac{1}{\beta} \Gamma^{\frac{1}{\beta}}\left(\frac{p+1}{\beta}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{\beta}\right)} \right) - p(p+1) \\
 &= \frac{p^{\frac{1}{\beta}} \Gamma\left(\frac{p}{\beta}\right) \Gamma\left(\frac{p+1}{\beta}\right)}{\Gamma^{\frac{1}{\beta}}\left(\frac{p+1}{\beta}\right)} - p(p+1)
 \end{aligned}$$

□

### ۴.۹.۱ برآورد پارامترها

قضیه ۵.۹.۱ (⊙⊙). فرض کنید  $X \sim PE_p(\mu, \Sigma, \beta)$  و  $\tilde{\mu}$ ،  $\tilde{\Sigma}$  برآورد ماکزیمم درست‌نمایی در نرمال

چندمتغیره باشند. آن‌گاه برآورد ماکزیمم درست‌نمایی در توزیع نمایی-توانی برابر است با

$$\hat{\mu} = \tilde{\mu} = \bar{X}, \quad \hat{\Sigma} = \frac{p}{y_g} \tilde{\Sigma} = \sqrt{\beta p^{p-1} \frac{n-1}{n}} S.$$

برهان. در توزیع نمایی-توانی داریم

$$g(y) = \exp\left(-\frac{1}{\beta} y^{\beta}\right)$$

با توجه به قضیه ۱.۸.۱، ماکزیمم  $y^{\frac{p}{\beta}} g(y)$  را بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned}
 h(y) &= y^{\frac{p}{\beta}} \exp\left(-\frac{1}{\beta} y^{\beta}\right) \\
 h'(y) &= \frac{p}{\beta} y^{\frac{p}{\beta}-1} \exp\left(-\frac{1}{\beta} y^{\beta}\right) - \frac{\beta}{\beta} y^{\beta-1} y^{\frac{p}{\beta}} \exp\left(-\frac{1}{\beta} y^{\beta}\right) \\
 &= \frac{1}{\beta} \exp\left(-\frac{1}{\beta} y^{\beta}\right) y^{\frac{p}{\beta}-1} [p - \beta y^{\beta}] = 0 \\
 y^{\beta} &= \frac{p}{\beta}
 \end{aligned}$$

در نتیجه ماکسیمم  $h(y)$  برابر است با

$$y_g = \left(\frac{p}{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

از این رو برآورد ماکزیمم درست‌نمایی پارامترها در توزیع نمایی-توانی برابر هستند با

$$\hat{\mu} = \tilde{\mu} = \bar{X}, \quad \hat{\Sigma} = \frac{p}{y_g} \tilde{\Sigma} = \sqrt{\beta p^{\beta-1} \frac{n-1}{n}} S$$

□

که در آن  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$  و  $S = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(x_i - \bar{x})'$  می‌باشند.



### ۵.۹.۱ آزمون فرضیه

الف) آزمون فرضیه  $H_0 = \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_g = \mu$  با فرض  $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \dots = \Sigma_g = \Sigma$  و  $\sigma_1 = \dots = \sigma_g = \sigma$  که  $\sigma = (\sigma_{11}, \dots, \sigma_{1p}, \dots, \sigma_{(p-1)p}, \sigma_{pp})$  است را در نظر بگیرید. تحت فرضیه  $H_0$ ،  $\tilde{\theta} = (\tilde{\mu}', \tilde{\sigma}')$  را  $MLE$  پارامتر  $\theta$  در نظر بگیرید. آنگاه تابع درست‌نمایی ماکزیم برابر است با

$$L(\tilde{\theta}) = k^n |\Sigma|^{-\frac{n}{\nu}} \exp \left\{ -\frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} [(x_{ij} - \tilde{\mu})' \tilde{\Sigma}^{-1} (x_{ij} - \tilde{\mu})]^\beta \right\}$$

که در آن

$$\tilde{\mu} = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^g \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}, \quad \tilde{\Sigma} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^g \sum_{j=0}^{n_i} (x_{ij} - \tilde{\mu})(x_{ij} - \tilde{\mu})', \quad n = \sum_{i=1}^g n_i$$

تحت  $H_0$ ،  $\hat{\theta} = (\hat{\mu}_1', \dots, \hat{\mu}_g', \hat{\Sigma}')'$  را  $MLE$  پارامتر  $\theta \in \Theta$  در نظر بگیرید. آنگاه تابع درست‌نمایی ماکزیم برابر است با

$$L(\hat{\theta}) = c^n |\Sigma|^{-\frac{n}{\nu}} \exp \left\{ -\frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} [(x_{ij} - \hat{\mu}_i)' \hat{\Sigma}^{-1} (x_{ij} - \hat{\mu}_i)]^\beta \right\}$$

که در آن

$$\hat{\mu}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij} = \bar{X}_{i.}, \quad \hat{\Sigma} = \tilde{\Sigma}$$

آزمون نسبت درست‌نمایی برای  $H_0 : \theta \in \Theta_0$  در مقابل  $H_1 : \theta \in \Theta - \Theta_0$  را رد می‌کند اگر

$$\Lambda = \frac{L(\tilde{\theta})}{L(\hat{\theta})} < c$$

بنابراین

$$\Lambda = \frac{\exp \left\{ -\frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} [(x_{ij} - \tilde{\mu})' \tilde{\Sigma}^{-1} (x_{ij} - \tilde{\mu})]^\beta \right\}}{\exp \left\{ -\frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} [(x_{ij} - \hat{\mu}_i)' \hat{\Sigma}^{-1} (x_{ij} - \hat{\mu}_i)]^\beta \right\}} < c$$

ب) آزمون  $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_g = \mu$  وقتی که  $\Sigma_i$ ها متفاوت هستند. تحت فرض  $H_0$ ،  $\tilde{\theta} = (\tilde{\mu}', \tilde{\sigma}'_1, \dots, \tilde{\sigma}'_g)$  را  $MLE$  پارامتر  $\theta$  در نظر بگیرید. آن‌گاه تابع درستنمایی ماکزیم برابر

است با

$$L(\tilde{\theta}) = k^{\sum_{i=1}^g n_i} \prod_{i=1}^g |\tilde{\Sigma}_i|^{-\frac{n_i}{\nu}} \exp \left\{ -\frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} \left[ (x_{ij} - \tilde{\mu})' \tilde{\Sigma}_i^{-1} (x_{ij} - \tilde{\mu}) \right]^\beta \right\}$$

که در آن

$$\tilde{\mu} = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^g \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}, \quad \tilde{\Sigma}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=0}^{n_i} (x_{ij} - \tilde{\mu})(x_{ij} - \tilde{\mu})'$$

تحت فرض مقابل  $\theta \in \Theta$ ،  $\hat{\theta} = (\hat{\mu}'_1, \dots, \hat{\mu}'_g, \hat{\Sigma}'_1, \dots, \hat{\Sigma}'_g)'$  را  $MLE$  پارامتر  $\theta$  در نظر

بگیرید. آن‌گاه تابع درستنمایی ماکزیم برابر با

$$L(\hat{\theta}) = k^{\sum_{i=1}^g n_i} \prod_{i=1}^g |\hat{\Sigma}_i|^{-\frac{n_i}{\nu}} \exp \left\{ -\frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} \left[ (x_{ij} - \hat{\mu}_i)' \hat{\Sigma}_i^{-1} (x_{ij} - \hat{\mu}_i) \right]^\beta \right\}$$

که در آن

$$\hat{\mu}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}, \quad \hat{\Sigma}_i = \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \hat{\mu}_i)(X_{ij} - \hat{\mu}_i)'$$

در نتیجه آزمون نسبت درستنمایی فرض  $H_0: \theta \in \Theta$  در مقابل  $H_1: \theta \in \Theta - \Theta_0$  را رد می‌کند

اگر

$$\Lambda = \frac{L(\tilde{\theta})}{L(\hat{\theta})} < c$$

بنابراین

$$\Lambda = \prod_{i=1}^g \left[ \frac{|\hat{\Sigma}_i|}{|\tilde{\Sigma}_i|} \right]^{\frac{n_i}{\nu}} \exp \left\{ -\frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} \left( \left[ (x_{ij} - \tilde{\mu})' \tilde{\Sigma}_i^{-1} (x_{ij} - \tilde{\mu}) \right]^\beta - \left[ (x_{ij} - \hat{\mu}_i)' \hat{\Sigma}_i^{-1} (x_{ij} - \hat{\mu}_i) \right]^\beta \right) \right\} < c$$

که در آن  $c$  یک مقدار مناسب است. وقتی که  $n$  به اندازه کافی بزرگ باشد با توجه به قضیه (۱.۹)

پاریسیان (۱۳۸۸) به طور تقریبی

$$-2 \ln \Lambda = -2 \ln \left( \frac{L(\tilde{\theta})}{L(\hat{\theta})} \right) \sim \chi_r^2$$

که  $r$  درجه آزادی، به صورت زیر بدست می‌آید

$$r = \dim\Theta - \dim\Theta_0.$$

# فصل ۲

## توزیع نوع کاتز

### ۱.۲ مقدمه

در این فصل ابتدا توزیع کاتز  $p$ -متغیره را معرفی، سپس در ادامه به بررسی کامل این توزیع می‌پردازیم. برای مطالعه و بررسی بیشتر می‌توانید به کاتز و ناداراجا<sup>۱</sup> (۲۰۰۳)، لیانگ و بنتلر<sup>۲</sup> (۱۹۹۸) و فنگ و همکاران (۱۹۹۰) مراجعه کنید.

### ۲.۲ توزیع نوع کاتز پیشنهاد شده در فنگ و همکاران (۱۹۹۰)

تعریف ۱.۲.۲. اگر  $x \sim EC_p(\mu, \Sigma, g)$  و مولد چگالی  $g$  به صورت زیر باشد

$$g(u) = c_p u^{N-1} \exp\{-ru^s\} \quad r, s > 0, 2N + p > 2, \quad (1.2)$$

که در آن  $c_p$  ثابت نرمال ساز است، می‌گوییم  $X$  دارای توزیع نوع کاتز است و تابع چگالی آن به صورت زیر است

$$f(X, \mu, \Sigma) = c_p |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} [(X - \mu)' \Sigma^{-1} (X - \mu)]^{N-1} \exp\left\{-r [(X - \mu)' \Sigma^{-1} (X - \mu)]^s\right\} \quad (2.2)$$

<sup>۱</sup>Kotz and Nadarajah

<sup>۲</sup>Liang and Bentler

که ثابت نرمال‌ساز برابر

$$c_p = \frac{s\Gamma(\frac{p}{\nu})}{\pi^{\frac{p}{\nu}}\Gamma(\frac{\nu N+p-2}{\nu s})} r^{\frac{\nu N+p-2}{\nu s}}$$

می‌باشد در این حالت از نماد  $X \sim Kz_p(x; N, r, s)$  استفاده می‌کنیم. توزیع نوع کاتز حالت خاصی

از توزیع‌های بیضی‌گون متقارن است. از این رو،  $X$  دارای نمایش تصادفی می‌باشد

$$X = \mu + \sqrt{U}\Sigma^{\frac{1}{2}}V \quad (3.2)$$

که در آن  $V_{p \times 1}$  دارای توزیع یکنواخت بر روی کره واحد در  $\mathbb{R}^p$  می‌باشد و  $U$  مستقل از  $V$  است.

**قضیه ۲.۲.۲ (۵۵).** فرض کنید  $X = \mu + \sqrt{u}\Sigma^{\frac{1}{2}}V$  دارای توزیع نوع کاتز  $p$ -متغیره باشد. آنگاه

$X$  دارای تابع مولد چگالی  $g(u; N, r, s) = C_p u^{N-1} \exp\{-ru^s\}$  است اگر  $u$  دارای چگالی  $f(\cdot)$  به

صورت زیر باشد.

$$f_U(u) = \frac{\pi^{\frac{p}{\nu}}}{\Gamma(\frac{p}{\nu})} u^{\frac{p}{\nu}-1} g(u). \quad (4.2)$$

برهان. فرض کنید  $X$  دارای چگالی  $g(X'X)$  است. همچنین فرض کنید  $h(\cdot)$  تابع اندازه‌پذیر و نامنفی

باشد. بنابراین با استفاده از نتیجه ۲.۴.آ داریم

$$\begin{aligned} E[h(\cdot)] &= \int h(X'X)g(X'X)dX \\ &= \frac{\pi^{\frac{p}{\nu}}}{\Gamma(\frac{p}{\nu})} \int_0^\infty h(y)y^{\frac{p}{\nu}-1}g(y)dy \quad y = u, dy = du \\ &= \frac{\pi^{\frac{p}{\nu}}}{\Gamma(\frac{p}{\nu})} \int_0^\infty h(u)u^{\frac{p}{\nu}-1}g(u)du \end{aligned}$$

□

بنابراین چگالی فوق درست است.

توزیع نوع کاتز در ساخت روش‌های ریاضی بدون فرضیات معمول نرمال بودن بسیار مفید است. (بارینگاوس

و هنز<sup>۳</sup> ۱۹۹۲ و لیانگ و همکاران<sup>۴</sup> ۲۰۰۰ را ببینید). وقتی که  $s = 1$ ,  $N = 1$ ,  $r = \frac{1}{\nu}$  به چگالی نرمال

$p$ -متغیره، وقتی که  $s = 1$ ، چگالی (۲.۲) به توزیع نوع کاتز اصلی معرفی شده توسط کاتز (۱۹۷۵)

تبدیل می‌شود. در حالت خاص دیگر چگالی (۲.۲) به توزیع نمایی-توانی چندمتغیره (کاتز و ناداراجا<sup>۵</sup>

<sup>۳</sup>Baringhaus and Henze

<sup>۴</sup>Liang

<sup>۵</sup>Kotz and Nadarajah

۲۰۰۱a را ببینید) تبدیل می‌شود. در شکل (۱.۲) و (۲.۲) نمودار توزیع نوع کاتر به ازای  $\mu = (0, 0)'$  و  $\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$  و همچنین  $N$  و  $s$  های مختلف رسم کردیم.

### ۳.۲ چگالی حاشیه‌ای

طبق قضیه (۲۰۱۶) فنگ و همکاران (۱۹۹۰) هر توزیع حاشیه‌ای (۲.۲) دارای توزیع بیضی‌گون (نه لزوماً توزیع نوع کاتر) می‌باشد. بنابراین برای حالت  $p = 2$ ،  $X = (x_1, x_2)'$  داریم

$$\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} - 1 < \rho < 1$$

و تابع مولد چگالی عبارتست از

$$\begin{aligned} \int_0^\infty g(u) du &= \int_0^\infty u^{N-1} \exp(-ru^s) du, \quad u^s = x \\ &= \int_0^\infty x^{\frac{N-1}{s}} e^{-rx} \times \frac{1}{s} x^{\frac{1}{s}-1} dx \\ &= \frac{1}{s} \int_0^\infty x^{\frac{N}{s}-1} e^{-rx} dx \\ &= \frac{1}{s} \frac{\Gamma(\frac{N}{s})}{r^{\frac{N}{s}}} \times 1 \\ &= \frac{\Gamma(\frac{N}{s})}{sr^{\frac{N}{s}}} \end{aligned}$$

داریم

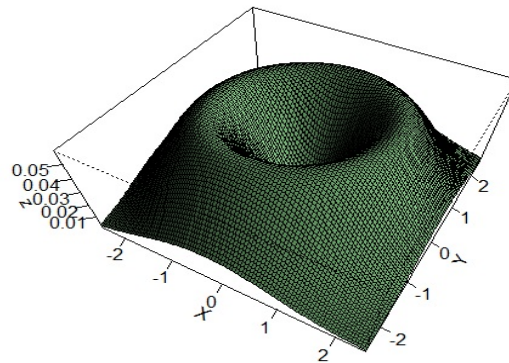
$$f(x_1, x_2) = \frac{sr^{\frac{N}{s}} (x_1^{\frac{1}{s}} + x_2^{\frac{1}{s}} - 2\rho x_1^{\frac{1}{s}} x_2^{\frac{1}{s}})^{N-1} \exp\left\{-r \left(\frac{x_1^{\frac{1}{s}} + x_2^{\frac{1}{s}} - 2\rho x_1^{\frac{1}{s}} x_2^{\frac{1}{s}}}{1-\rho^2}\right)^s\right\}}{\pi \Gamma(\frac{N}{s}) (1-\rho^2)^{N-\frac{1}{s}}} \quad (5.2)$$

وقتی  $N = 1$ ،  $s = 1$  و  $r = \frac{1}{s}$  باشد چگالی فوق به نرمال دو متغیره تبدیل می‌شود. تابع فوق هندسی تباهیده  $\Psi$  را در نظر بگیرید.

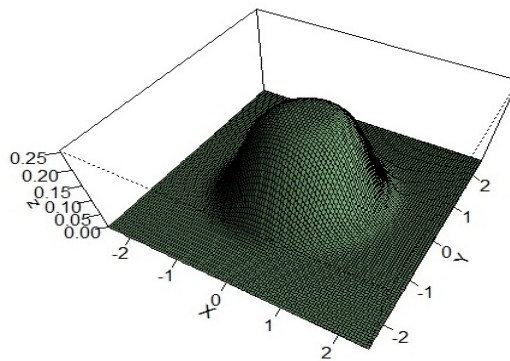
$$\Psi(\alpha, \beta, x) = \frac{\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\alpha-\beta+1)} {}_1F_1(\alpha; \beta; x) + \frac{\Gamma(\beta-1)}{\Gamma(\alpha)} x^{1-\beta} {}_1F_1(\alpha-\beta+1; 2-\beta; x)$$

با استفاده از (۴۰.۱)، تابع چگالی حاشیه‌ای (۵.۲) برابر است با

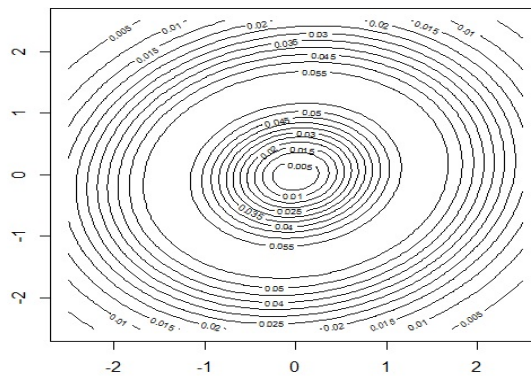
$$q_g(x) = \frac{sr^{\frac{N}{s}}}{\pi \Gamma(\frac{N}{s})} \int_{x^{\frac{1}{s}}}^\infty (z - x^{\frac{1}{s}})^{-\frac{1}{s}} z^{N-1} \exp(-rz^s) dz$$



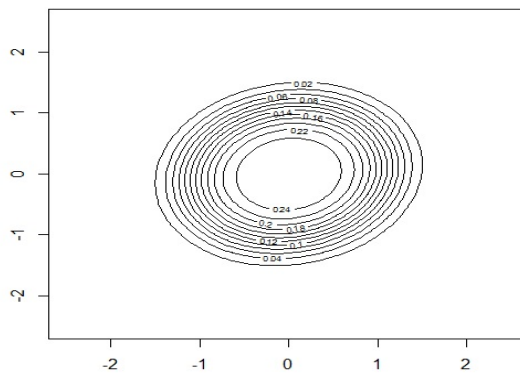
(ا)  $N = 2, s = 1$



(ب)  $N = 1, s = 2$

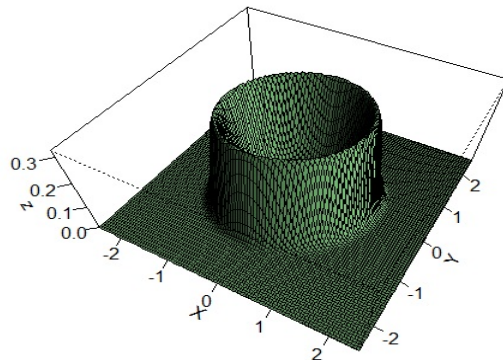


(ج)  $N = 2, s = 1$

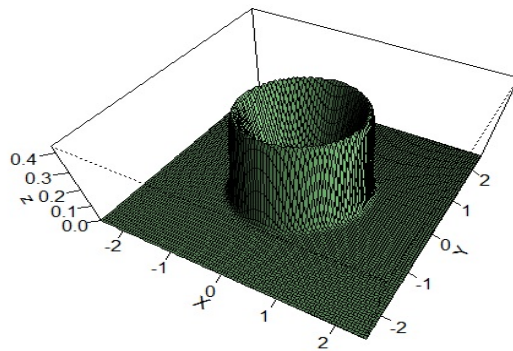


(د)  $N = 1, s = 2$

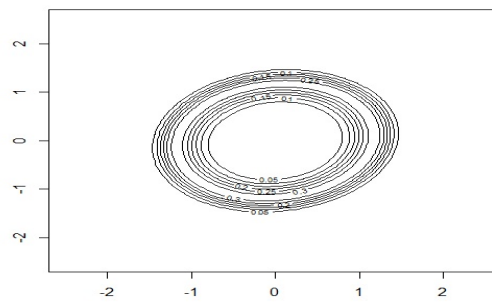
شکل ۱۰۲: توزیع نوع کاتز دو متغیره به همراه منحنی‌های تراز



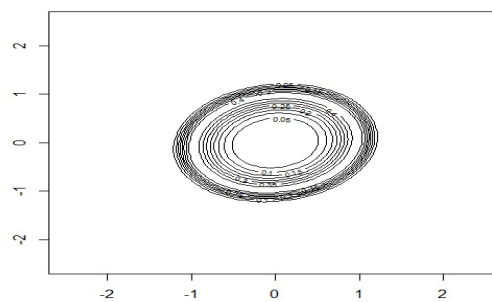
(ا)  $N = 5, s = 3$



(ب)  $N = 3, s = 5$



(ج)  $N = 5, s = 3$



(د)  $N = 3, s = 5$

شکل ۲.۲: توزیع نوع کاتز دو متغیره به همراه منحنی‌های تراز



$$\begin{aligned}
 &= \frac{sr^{\frac{N}{s}}}{\pi\Gamma(\frac{N}{s})} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-\frac{1}{\nu}}{k} x^{\nu k} \int_{x^{\nu}}^{\infty} z^{N-k-\frac{1}{\nu}} \exp(-rz^s) dz \\
 &= \frac{r^{\frac{N}{s}}}{\pi\Gamma(\frac{N}{s})} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k r^{\frac{k}{s}} \binom{-\frac{1}{\nu}}{k} x^{\nu k} \int_{rx^{\nu s}}^{\infty} y^{\frac{N}{s}-\frac{k}{s}-\frac{1}{\nu s}-1} \exp(-y) dy \\
 &= \frac{r^{\frac{1}{\nu s}} \exp(-rx^{\nu s})}{\pi\Gamma(\frac{N}{s})} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k r^{\frac{k}{s}} \binom{-\frac{1}{\nu}}{k} x^{\nu k} \\
 &\times \Psi\left(1 - \frac{N}{s} + \frac{k}{s} + \frac{1}{\nu s}, 1 - \frac{N}{s} + \frac{k}{s} + \frac{1}{\nu s}; rx^{\nu s}\right) \quad (6.2)
 \end{aligned}$$

که در بخش آخر از تعریف دوم تابع گاما در ۸.۲.آ استفاده کردیم. تابع توزیع تجمعی (cdf) متناظر، برای  $z > 0$ ، برابر است با

$$\begin{aligned}
 Q_g(x) &= 1 - \frac{r^{\frac{1}{\nu s}}}{\pi\Gamma(\frac{N}{s})} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k r^{\frac{k}{s}} \binom{-\frac{1}{\nu}}{k} \int_x^{\infty} z^{\nu k} \exp(-rz^{\nu s}) \\
 &\times \Psi\left(1 - \frac{N}{s} + \frac{k}{s} + \frac{1}{\nu s}, 1 - \frac{N}{s} + \frac{k}{s} + \frac{1}{\nu s}; rz^{\nu s}\right) dz \\
 &= 1 - \frac{r^{\frac{1}{\nu s}}}{\nu s \pi\Gamma(\frac{N}{s})} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k r^{\frac{k}{s}} \binom{-\frac{1}{\nu}}{k} x^{\nu k} \\
 &\times \int_{x^{\nu s}}^{\infty} y^{\frac{k}{s}+\frac{1}{\nu s}-1} \exp(-ry) \Psi\left(1 - \frac{N}{s} + \frac{k}{s} + \frac{1}{\nu s}, 1 - \frac{N}{s} + \frac{k}{s} + \frac{1}{\nu s}; ry\right) dy \\
 &= 1 - \frac{1}{\pi\Gamma(\frac{N}{s})} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-\frac{1}{\nu}}{k} x^{\nu k} \left\{ \frac{1}{\nu k + 1} \Gamma\left(\frac{N}{s}\right) \right. \\
 &- \frac{r^{\frac{1}{\nu s}} r^{\frac{k}{s}} x^{\nu k+1}}{\nu k + 1} \Gamma\left(\frac{N}{s} - \frac{k}{s} - \frac{1}{\nu s}\right) + \frac{sr^{\frac{N}{s}} x^{\nu n}}{N(\nu N - \nu k - 1)} \\
 &\times \left. {}_{\nu}F_{\nu}\left(\frac{N}{s} - \frac{k}{s} - \frac{1}{\nu s}, \frac{N}{s}; \frac{N}{s} - \frac{k}{s} - \frac{1}{\nu s} + 1, \frac{N}{s} + 1; -rx^{\nu s}\right) \right\} \quad (7.2)
 \end{aligned}$$

که در بخش آخر از رابطه (۱۰۱۴۰۲۰۸) در پرودنیکیف<sup>۶</sup> و همکاران (۱۹۹۰) استفاده شده است. دو چگالی حاشیه‌ای (۶.۲) و (۷.۲) مجموع نامتناهی از تابع‌های فوق هندسی هستند. اگر فرض کنیم  $N$  و  $s$  اعداد صحیح هستند می‌توانیم عبارت ساده‌تری بدست بیاوریم. با فرض اینکه  $N$  عدد صحیح باشد، می‌توان چگالی (۶.۲) را به صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned}
 q_g(x) &= \frac{sr^{\frac{N}{s}}}{\pi\Gamma(\frac{N}{s})} \int_{x^{\nu}}^{\infty} (z - x^{\nu})^{-\frac{1}{\nu}} (x^{\nu} + z - x^{\nu})^{N-1} \exp(-rz^s) dz \\
 &= \frac{sr^{\frac{N}{s}}}{\pi\Gamma(\frac{N}{s})} \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N-1}{k} x^{\nu(N-k-1)} \int_{x^{\nu}}^{\infty} (z - x^{\nu})^{k-\frac{1}{\nu}} \exp(-rz^s) dz \quad (8.2)
 \end{aligned}$$

<sup>۶</sup>Prudnikov

وقتی که  $s = 1$  باشد، چگالی (۸.۲) به رابطه زیر تبدیل می‌یابد

$$q_g(x) = \frac{r^{N-\frac{1}{\nu}} x^{\nu(N-1)} \exp(-rx^\nu)}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\nu k!}{\nu^k (N-k-1)! (k!)^\nu} r^{-k} x^{-\nu k}$$

که حاصل جمع متناهی از توابع اولیه است.

همچنین وقتی که  $s = \frac{1}{\nu}$ ، می‌توانیم چگالی (۸.۲) به صورت زیر بیان کنیم

$$\begin{aligned} q_g(x) &= \frac{r^{\nu N} |x|^{\nu N-1}}{\pi \Gamma(\nu N)} \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N-1}{k} \int_1^\infty y(y^\nu - 1)^{k-\frac{1}{\nu}} \exp(-r|x|y) dy \\ &= \frac{(N-1)! r^{\nu N} x^{\nu(N-1)}}{(\nu N - 1)! \pi} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\nu k!}{\nu^k (N-k-1)! (k!)^\nu} r^{-k} |x|^{-k+1} K_{k+1}(r|x|), \end{aligned}$$

که در آن از رابطه آ.۱۱.۲ استفاده کردیم،

و

$$K_\nu(x) = \frac{x^\nu \Gamma(\frac{1}{\nu})}{\nu^\nu \Gamma(\nu + \frac{1}{\nu})} \int_1^\infty \exp(-xy) (y^\nu - 1)^{\nu-\frac{1}{\nu}} dy$$

تابع بسل  $\nu$  می‌باشد.

همچنین وقتی که  $N = s = \frac{1}{\nu}$  آنگاه داریم

$$\begin{aligned} q_g(x) &= \frac{r}{\nu \pi} \int_{x^\nu}^\infty (z - x^\nu)^{-\frac{1}{\nu}} z^{-\frac{1}{\nu}} \exp(-r\sqrt{z}) dz \\ &= \frac{r}{\pi} \int_0^\infty (y^\nu - 1)^{-\frac{1}{\nu}} \exp(-r|x|y) dy \\ &= \frac{r}{\pi} K_0(r|x|). \end{aligned} \tag{۹.۲}$$

## ۴.۲ گشتاور

با استفاده از چگالی (۴.۲) داریم (☆)

$$\begin{aligned} E(u^t) &= \int_0^\infty \frac{\pi^{\frac{p}{\nu}}}{\Gamma(\frac{p}{\nu})} u^{t+\frac{p}{\nu}-1} g(u) du \\ &= \frac{sr^{\frac{(\nu N+p-\nu)}{\nu s}}}{\Gamma(\frac{(\nu N+p-\nu)}{\nu s})} \int_0^\infty u^{t+\frac{p}{\nu}+N-\nu} \exp(-ru^s) du \end{aligned}$$

<sup>ν</sup>Bessel function

$$\begin{aligned}
 &= \frac{sr^{\frac{(YN+p-2)}{\gamma_s}}}{\Gamma(\frac{(YN+p-2)}{\gamma_s})} \int_0^\infty y^{\frac{x}{s}} \exp(-ry) \frac{1}{s} y^{\frac{1}{s}-1} dy, \quad y = u^s, x = t + \frac{p}{\gamma} + N - 2 \\
 &= \frac{sr^{\frac{(YN+p-2)}{\gamma_s}}}{\Gamma(\frac{(YN+p-2)}{\gamma_s})} \int_0^\infty \frac{1}{s} y^{\frac{x+1}{s}-1} \exp(-ry) dy \\
 &= \frac{sr^{\frac{(YN+p-2)}{\gamma_s}}}{\Gamma(\frac{(YN+p-2)}{\gamma_s})} \frac{\Gamma(\frac{x+1}{s})}{sr^{\frac{x+1}{s}}} \underbrace{\int_0^\infty \frac{sr^{\frac{x+1}{s}}}{\Gamma(\frac{x+1}{s})} y^{\frac{x+1}{s}-1} \exp(-ry) dy}_{=1} \\
 &= \frac{sr^{\frac{(YN+p-2)}{\gamma_s}}}{\Gamma(\frac{(YN+p-2)}{\gamma_s})} \frac{\Gamma(\frac{\gamma t + p + \gamma N - 2}{\gamma_s})}{sr^{\frac{\gamma t + \gamma p + \gamma N - 2}{\gamma_s}}} \\
 &= \frac{r^{-\frac{t}{s}} \Gamma(\frac{\gamma t + p + \gamma N - 2}{\gamma_s})}{\Gamma(\frac{\gamma t + p + \gamma N - 2}{\gamma_s})} \tag{۱۰.۲}
 \end{aligned}$$

با استفاده از قضیه ۶.۴.۱، گشتاورهای حاصل ضرب مولفه‌های  $X$  برابر است با

$$\begin{aligned}
 E\left(\prod_{k=1}^p X_k^{\gamma t_k}\right) &= E\left(X_1^{\gamma t_1} X_2^{\gamma t_2} \dots X_p^{\gamma t_p}\right) \\
 &= \frac{E(u^t)}{\pi^{\frac{p}{\gamma}}} \frac{\Gamma(\frac{p}{\gamma})}{\Gamma(\frac{p}{\gamma} + t)} \prod_{k=1}^p \Gamma(\frac{1}{\gamma} + t_k) \\
 &= \frac{r^{-\frac{t}{s}} \Gamma(\frac{\gamma t + p + \gamma N - 2}{\gamma_s}) \Gamma(\frac{p}{\gamma})}{\pi^{\frac{p}{\gamma}} \Gamma(\frac{\gamma t + p + \gamma N - 2}{\gamma_s}) \Gamma(\frac{p}{\gamma} + t)} \prod_{k=1}^p \Gamma(\frac{1}{\gamma} + t_k)
 \end{aligned}$$

که  $t = t_1 + t_2 + \dots + t_p$  و  $t_1 \geq 1, t_2 \geq 1, \dots, t_p \geq 1$  علاوه بر این بنا بر

لم ۴.۵.۱ امید ریاضی و کوواریانس به ترتیب برابر است با

$$E(X) = \mu, \quad Cov(X) = r^{-\frac{1}{s}} \frac{\Gamma(\frac{\gamma N + p}{\gamma_s})}{\Gamma(\frac{\gamma N + p - 2}{\gamma_s})} \frac{\Sigma}{rank \Sigma}$$

در حالت دو متغیره ( $p = 2$ ) با استفاده از نتایج بخش (۱.۵.۲) در رابطه  $D_t$  داریم

$$\begin{aligned}
 D_t &= \frac{sr^{\frac{N}{s}}}{\Gamma(\frac{N}{s})} \int_0^\infty z^{t+N-1} \exp(-rz^s) dz \\
 &= r^{-\frac{t}{s}} \frac{\Gamma(\frac{N}{s} + \frac{t}{s})}{\Gamma(\frac{N}{s})}.
 \end{aligned}$$

بنابراین گشتاورهای مربوط به (۵.۲) برابر هستند با

$$\begin{aligned}
 E(X_j) &= 0, \quad j = 1, 2 \\
 Var(X_j) &= \frac{r^{-\frac{1}{s}} \Gamma(\frac{N}{s} + \frac{1}{s})}{\gamma \Gamma(\frac{N}{s})}, \quad j = 1, 2
 \end{aligned}$$

$$\text{Cov}(X_1, X_2) = \frac{\rho r^{-\frac{1}{s}} \Gamma(\frac{N}{s} + \frac{1}{s})}{2\Gamma(\frac{N}{s})}$$

و برای  $t_1 \geq 1$  و  $t_2 \geq 1$

$$E(X_1^{t_1} X_2^{t_2}) = \frac{\Gamma(\frac{N}{s} + \frac{t_1}{s} + \frac{t_2}{s}) B(\frac{1}{\varphi} + t_1, \frac{1}{\varphi} + t_2) r^{-\frac{(t_1+t_2)}{s}}}{\Gamma(\frac{N}{s}) \pi}$$

## ۵.۲ تابع مشخصه

برای  $s = 1$  در مولد چگالی (۲.۲)، تابع مشخصه توزیع نوع کاتز که توسط آینگار و تانگ<sup>۸</sup> (۱۹۸۹) محاسبه شده به شرح زیر است.

قضیه ۱.۵.۲ (۵). تابع مشخصه توزیع نوع کاتز برابر است با

$$E(\exp(it'X)) = \exp(it'\mu)\phi(t'\Sigma t)$$

که در آن

$$\phi(u) = \exp\left(-\frac{u}{\varphi r}\right) \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N-1}{k} \frac{\Gamma(\frac{p}{\varphi})}{\Gamma(\frac{p}{\varphi} + k)} \left(-\frac{u}{\varphi r}\right)^k \quad (11.2)$$

برهان. بدون از دست دادن کلیت مسئله، فرض می‌کنیم  $\Sigma = I$ ، همچنین

$$\lambda_{p,N}(t;t;r) = \pi^{-\frac{p}{\varphi}} \int \exp(it'X)(X'X)^{N-1} \exp(-r(X'X)) dX \quad (12.2)$$

را در نظر بگیرید، باید ثابت کنیم که

$$\lambda_{p,N}(u,r) = \exp\left(-\frac{u}{\varphi r}\right) \left(\frac{1}{\varphi}\right)^{N+\frac{p}{\varphi}-1} \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N-1}{k} \frac{\Gamma(N+\frac{p}{\varphi}-1)}{\Gamma(\frac{p}{\varphi}+k)} \left(-\frac{u}{\varphi r}\right)^k \quad (13.2)$$

با در نظر گرفتن تابع مشخصه توزیع نرمال چندمتغیره، می‌توان (۱۳.۲) را برای  $N = 1$  نشان داد. حال فرض می‌کنیم که رابطه (۱۳.۲) برای هر  $N$  برقرار است. باید نشان دهیم که برای  $N + 1$  نیز برقرار است، با مشتق گرفتن از رابطه (۱۲.۲) نسبت به  $\frac{1}{r}$  داریم

$$r^{-2} \frac{d}{d(\frac{1}{r})} (\lambda_{p,N}(t;t;r)) = r^{-2} \int \exp(it'x)(X'X)^{N-1} \frac{d}{d(\frac{1}{r})} (\exp(-r(X'X))) dX$$

<sup>۸</sup>Iyengar and Tong

$$= \int \exp(i\mathbf{t}'X)(X'X)^N \exp(-rX'X)dX = \lambda_{p,N+1}(\mathbf{t}; r)$$

در نتیجه

$$\lambda_{p,N+1}(u; r) = r^{-\nu} \frac{d}{d(\frac{1}{r})} \lambda_{p,N}(u; r)$$

می نویسیم

$$m = -\frac{u}{\nu r}, \quad C_k = \binom{N-1}{k} \frac{\Gamma(N + \frac{p}{\nu} - 1)}{\Gamma(\frac{p}{\nu} + k)}$$

و برای به اتمام رساندن مشتق داریم

$$\begin{aligned} \lambda_{p,N}(u; r) &= r^{-\nu} \frac{d}{d(\frac{1}{r})} \left[ \exp(m) \left(\frac{1}{r}\right)^{N+\frac{p}{\nu}-1} \sum_{k=0}^{N-1} C_k m^k \right] \\ &= r^{-1} \exp(m) \left[ -\frac{u}{\nu r} \sum_{k=0}^{N-1} C_k \left(-\frac{u}{\nu}\right)^k \left(\frac{1}{r}\right)^{N+k+\frac{p}{\nu}-1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{N-1} C_k \left(-\frac{u}{\nu}\right)^k (N+k+\frac{p}{\nu}-1) \left(-\frac{1}{r}\right)^{N+k+\frac{p}{\nu}-2} \right] \\ &= r^{-1} \exp(m) \left[ m \left(\frac{1}{r}\right)^{N+\frac{p}{\nu}-1} \sum_{k=0}^{N-1} C_k m^k + (N+\frac{p}{\nu}-1) \left(\frac{1}{r}\right)^{N+\frac{p}{\nu}-1} \sum_{k=0}^{N-1} C_k m^k \right. \\ &\quad \left. + k \left(\frac{1}{r}\right)^{N+\frac{p}{\nu}-1} \sum_{k=0}^{N-1} C_k m^k \right] \\ &= r^{-N-\frac{p}{\nu}} \exp(m) \left[ m + (N+\frac{p}{\nu}-1) + k \right] \left[ \sum_{k=0}^{N-1} C_k m^k \right] \\ &= \exp(m) r^{-N-\frac{p}{\nu}} \sum_{k=0}^{N-1} C_k \left( m^{k+1} + m^k (N+\frac{p}{\nu}+k-1) \right) \\ &= \exp(m) r^{-N-\frac{p}{\nu}} \left[ \sum_{v=1}^{N-1} \binom{N-1}{v-1} \frac{\Gamma(N+\frac{p}{\nu}-1)}{\Gamma(\frac{p}{\nu}+v-1)} m^v + m^N \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=0}^{N-1} C_k m^k (N+\frac{p}{\nu}+k-1) \right] \\ &= \exp(m) r^{-N-\frac{p}{\nu}} \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} \left[ \binom{N-1}{k-1} \frac{\Gamma(N+\frac{p}{\nu}-1)}{\Gamma(\frac{p}{\nu}+k-1)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \binom{N-1}{k} \frac{\Gamma(N+\frac{p}{\nu}-1)}{\Gamma(\frac{p}{\nu}+k)} (N+\frac{p}{\nu}-1) \right] m^k + m^N \right\} \\ &= \exp(m) r^{-N-\frac{p}{\nu}} \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} \sum_{k=0}^N \frac{\Gamma(N+\frac{p}{\nu})}{\Gamma(\frac{p}{\nu}+k)} m^k \end{aligned}$$

که در بخش آخر از تساوی زیر استفاده شده است

$$\begin{aligned} & \binom{N-1}{k-1} \frac{\Gamma(N + \frac{p}{\nu} - 1)}{\Gamma(\frac{p}{\nu} + k - 1)} + \binom{N-1}{k} \frac{\Gamma(N + \frac{p}{\nu} - 1)}{\Gamma(\frac{p}{\nu} + k)} (N + \frac{p}{\nu} + k - 1) \\ &= \frac{N!}{k!(p-k)!} \left[ \frac{k \Gamma(N + \frac{p}{\nu} - 1)}{N \Gamma(\frac{p}{\nu} + k)} \right. \\ & \quad \left. + \frac{N-k \Gamma(N + \frac{p}{\nu} - 1)}{N \Gamma(\frac{p}{\nu} + k)} (N + \frac{p}{\nu} + k - 1) \right] \\ &= \binom{N}{k} \frac{\Gamma(N + \frac{p}{\nu})}{\Gamma(\frac{p}{\nu} + k)} \end{aligned}$$

□

بنابراین رابطه (۱۴.۲) برای  $N + 1$  برقرار است.

عبارت صریحی برای  $\phi(\cdot)$  توسط نویسندگان مختلف بدست آمده است. همان‌طور که در قضیه فوق ذکر کردیم آینگار و تانگ (۱۹۸۹) برای حالت خاص  $s = 1$  تابع مشخصه را بدست آوردند. استریت<sup>۹</sup> (۱۹۹۱) با استفاده از قضیه شوئنبرگ و برخی از نتایج ارائه شده در فنگ و همکاران (۱۹۹۰) به گسترش این نتیجه برای هر  $s \geq \frac{1}{\nu}$ ، به صورت زیر رسیدند

$$\phi(u) = \frac{\Gamma(\frac{p}{\nu})}{\Gamma(\frac{\nu N + p - \nu}{\nu s})} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left( -\frac{u}{\nu r^{\frac{1}{\nu}}} \right)^k \frac{\Gamma(\frac{\nu N + p + \nu k - \nu}{\nu s})}{\Gamma(k + \frac{p}{\nu})}$$

کاتز و ناداراجا (۲۰۰۱b) برای حالت دو متغیره وقتی که  $p = 2$ ،  $N \geq 1$  عدد صحیح و  $s = \frac{1}{\nu}$  را به صورت زیر بدست آوردند

$$\begin{aligned} \phi(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(iux) q_g(x) dx \\ &= \nu \int_0^{\infty} \cos(ux) q_g(x) dx \\ &= \frac{(N-1)! r^{\nu N}}{(\nu N - 1)! \pi} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(\nu k)!}{\nu^{k-1} (N-k-1)! (k!)^{\nu}} r^{-k} \int_0^{\infty} \cos(ux) x^{\nu N - k - 1} K_{k+\frac{1}{\nu}}(rx) dx \\ &= \nu^{1-N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(\nu N - \nu k - \nu)!}{((N-k-1)!)^{\nu} (k!)^{\nu}} {}_{\nu}F_{\nu} \left( N + \frac{1}{\nu}, N - k - \frac{1}{\nu}; \frac{1}{\nu}; -\frac{u^{\nu}}{r^{\nu}} \right), \quad (14.2) \end{aligned}$$

که در بخش پایانی از رابطه (۴.۶۶۹.۶) در گرادشتاین و ریزیک (۱۹۹۵) استفاده شده است. با

استفاده از رابطه ۱.۱۳۱.۰۹ در گرادشتاین و ریزیک (۱۹۹۵)، می‌توانیم تبدیل

$${}_{\nu}F_{\nu} \left( N + \frac{1}{\nu}, N - k - \frac{1}{\nu}; \frac{1}{\nu}; -\frac{u^{\nu}}{r^{\nu}} \right) = r^{\nu N - \nu k - 1} (u^{\nu} + r^{\nu})^{\frac{1}{\nu} - \nu N + k} {}_{\nu}F_{\nu} \left( -N, 1 - N + k; \frac{1}{\nu}; -\frac{u^{\nu}}{r^{\nu}} \right)$$

<sup>۹</sup>Streit

با استفاده از تعریف تابع فوق هندسی تعمیم یافته داشته‌باشیم. جمله سمت راست تابع فوق هندسی یک سری متناهی می‌باشد که

$$\sum_{j=0}^{N-k-1} \frac{N!}{(N-j)!} \frac{(N-k-1)!}{(N-k-j-1)!} \frac{(-1)^j}{(2j)!} \left(\frac{4u^2}{r^2}\right)^j$$

با جایگزینی رابطه فوق در (۱۴.۲) بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \phi(u) &= N! 4^{1-N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(2N-2k-2)!}{(N-k-1)!(k!)^2} \\ &= \sum_{j=0}^{N-k-1} \frac{(-1)^j 4^j r^{4N-2k-2j-1} u^{2j} (u^2+r^2)^{\frac{1}{2}-2N+k}}{(N-j)!(N-k-j-1)!(2j)!}. \end{aligned} \quad (15.2)$$

شایان ذکر است که این عبارت حاصل جمع متناهی از توابع اولیه است. در حالی که با توجه به استریت (۱۹۹۱) و کاتز و استروفسکی (۱۹۹۴) هر دو، مجموع نامتناهی هستند.

وقتی که  $N=1$ ، (۱۵.۲) به صورت

$$\phi(u) = \frac{r^3}{(u^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

کاهش پیدا می‌کند.

وقتی که  $N = \frac{1}{2}$  و  $s = \frac{1}{2}$ ، با استفاده از (۱۰.۲) و رابطه (۶.۶۷۱.۱۴) در گرادشتاین و ریزیک (۱۹۹۵)، داریم

$$\phi(u) = \frac{2r}{\pi} \int_0^\infty \cos(ux) K_0(rx) dx = \frac{r}{\sqrt{u^2+r^2}}.$$

کاتز و استروفسکی (۱۹۹۴) رابطه (۱۳.۲) را برای طیف وسیعی از مقادیر مجاز  $s$ ، به صورت زیر بدست آوردند

$$\phi(u) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k q_k(p, N, s) |ur^{-\frac{1}{s}}|^{-ks-N+1-\frac{p}{2}}, \quad (16.2)$$

که

$$\begin{aligned} q_k(p, N, s) &= \pi k! \frac{s \Gamma(\frac{p}{2})}{\Gamma(\frac{2N-2+p}{2s})} 2^{2sk+p+2N-2} \Gamma(N-1+sk+\frac{p}{2}) \\ &\times \Gamma(N+sk) \sin \pi(N+sk). \end{aligned}$$

سری (۱۶.۲) برای هر  $u > 0$  همگرا می‌باشد.

## ۶.۲ مشخصه‌سازی

نمایش تصادفی برای متغیرهای تصادفی در مطالعه ویژگی‌های توزیع‌های کروی و بیضی‌گون نقش بسیار مهمی ایفا می‌کند. در زیر دو نمایش تصادفی مهم برای  $x \sim S_p(\phi)$ ، که توسط فنگ و همکاران (۱۹۹۰)، اشاره شده را به کار می‌گیریم.

(۱) اگر و تنها اگر  $x \sim S_p(\phi)$  دارای نمایش تصادفی

$$x \stackrel{d}{=} Ru^{(p)} \quad (۱۷.۲)$$

باشد، که  $R \geq 0$  و  $u^{(p)}$  توزیع یکنواخت بر روی کره واحد در  $\mathbb{R}^p$ ، مستقل هستند.

(۲) اگر  $x = (x^{(1)'}, x^{(2)'})' \stackrel{d}{=} Ru^p \sim S_p(\phi)$  باشد، که  $x^{(1)}$  و  $x^{(2)}$  به ترتیب، دارای  $k$ ،  $(1 < k < p)$

و  $k < p - 1$  مولفه هستند، با استفاده از  $R$  داده‌شده در رابطه (۱۷.۲) آنگاه

$$\begin{pmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \end{pmatrix} \stackrel{d}{=} \begin{pmatrix} Rd_1 u^{(k)} \\ Rd_2 u^{(p-k)} \end{pmatrix} \quad (۱۸.۲)$$

که  $d_1, d_2, R$  و  $d_1 \sim B(\frac{k}{\nu}, \frac{p-k}{\nu})$  و  $d_1^2 + d_2^2 = 1$ ،  $i = 1, 2$ ،  $d_i \geq 0$  هستند.

قضیه ۱۰.۶.۲ (☆). (مشخصه‌سازی مبتنی بر توزیع‌های حاشیه‌ای)  $X = (x_1, \dots, x_p)' \sim S_p(\phi)$  را در نظر بگیرید. آنگاه  $X$  دارای توزیع نوع کاتز  $(Kz_p(x; N, r, 1))$ ، عدد صحیح مثبت، می‌باشد اگر و تنها اگر یک زیر بردار  $k$ -بعدی  $X^{(1)} = (x_1, \dots, x_k)'$ ،  $1 \geq k \geq p - 1$ ، وجود داشته باشد به طوری که  $X^{(1)}$  دارای توزیع نوع کاتز با چگالی مولد زیر باشد

$$g(u) = \sum_{j=0}^{N-1} p_j Kz_k(u; N - j, r, 1), \quad u > 0, \quad (۱۹.۲)$$

که برای  $p_j$  برای  $j = 0, \dots, N - 1$  برابر است با

$$p_j = \binom{N-1}{j} \frac{B(\frac{p-k}{\nu} + j, N - 1 + \frac{k}{\nu} - j)}{B(\frac{k}{\nu}, \frac{p-k}{\nu})} \geq 0, \quad (۲۰.۲)$$

و  $\sum_{j=0}^{N-1} p_j = 1$



برهان. شرط لازم: طبق فرض  $X \sim Kz_p(x; N, r, 1)$  و  $N$  عدد صحیح مثبت است. سپس  $X^{(1)}$  دارای چگالی حاشیه‌ای زیر می‌باشد

$$\begin{aligned}
 g_1(a^\nu) &= C_p \int_{R^{p-k}} (X'X)^{N-1} \exp(-rX'X) dX_\nu, \quad a^\nu = X'_1 X_1 \\
 &= C_p \exp(-rX'_1 X_1) \int_{R^{p-k}} (X'_1 X_1 + X'_\nu X_\nu)^{N-1} \exp(-rX'_\nu X_\nu) dX_\nu \\
 &= C_p \exp(-ra^\nu) \frac{\pi^{\frac{p-k}{\nu}}}{\Gamma(\frac{p-k}{\nu})} \int_0^\infty (a^\nu + y)^{N-1} y^{\frac{p-k}{\nu}-1} \exp(-ry) dy \\
 &\quad (\text{با استفاده از لم ۱.۴.آ}) \\
 &= C_p \exp(-ra^\nu) \frac{\pi^{\frac{p-k}{\nu}}}{\Gamma(\frac{p-k}{\nu})} \int_0^\infty \sum_{j=0}^{N-1} \binom{N-1}{j} a^{\nu(N-1-j)} y^{\frac{p-k}{\nu}+j-1} \exp(-ry) dy \\
 &= C_p \exp(-ra^\nu) \frac{\pi^{\frac{p-k}{\nu}}}{\Gamma(\frac{p-k}{\nu})} \sum_{j=0}^{N-1} \binom{N-1}{j} a^{\nu(N-1-j)} \\
 &\quad \times \underbrace{\frac{\Gamma(\frac{p-k}{\nu} + j)}{r^{\frac{p-k}{\nu}+j}} \int_0^\infty \frac{r^{\frac{p-k}{\nu}+j}}{\Gamma(\frac{p-k}{\nu} + j)} y^{\frac{p-k}{\nu}+j-1} \exp(-ry) dy}_{=1} \\
 &= C_p \exp(-ra^\nu) \frac{\pi^{\frac{p-k}{\nu}}}{\Gamma(\frac{p-k}{\nu})} \sum_{j=0}^{N-1} \binom{N-1}{j} a^{\nu(N-1-j)} \Gamma(\frac{p-k}{\nu} + j) r^{-(\frac{p-k}{\nu}+j)} \\
 &\quad \left( \frac{\Gamma(a+b) \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)}{\Gamma(a) \Gamma(b) \Gamma(\alpha+\beta)} = \frac{B(\alpha, \beta)}{B(a, b)}, C_p \stackrel{(s=1)}{=} \frac{\Gamma(\frac{p}{\nu})}{\pi^{\frac{p}{\nu}} \Gamma(N + \frac{p}{\nu} - 1)} r^{N-\frac{p}{\nu}-1} \right) \\
 &= \sum_{j=0}^{N-1} \binom{N-1}{j} \frac{\Gamma(\frac{p}{\nu})}{\Gamma(\frac{k}{\nu}) \Gamma(\frac{p-k}{\nu})} \frac{\Gamma(j + \frac{p-k}{\nu}) \Gamma(N - j + \frac{k}{\nu} - 1)}{\Gamma(N + \frac{p}{\nu} - 1)} \\
 &\quad \times \frac{\Gamma(\frac{k}{\nu})}{\pi^{\frac{k}{\nu}} \Gamma(N - j + \frac{k}{\nu} - 1)} r^{N-j+\frac{k}{\nu}-1} a^{\nu(N-1-j)} \exp(-ra^\nu) \\
 &= \sum_{j=0}^{N-1} \binom{N-1}{j} \frac{B(\frac{p-k}{\nu} + j, N - j + \frac{k}{\nu} - 1)}{B(\frac{k}{\nu}, \frac{p-k}{\nu})} Kz_k(a^\nu; N - j, r, 1) \\
 &= \sum_{j=0}^{N-1} p_j Kz_k(a^\nu; N - j, r, 1)
 \end{aligned}$$

که  $p_j \geq 0$  و

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=0}^{N-1} p_j &= \left[ B\left(\frac{k}{\nu}, \frac{p-k}{\nu}\right) \right]^{-1} \sum_{j=0}^{N-1} \binom{N-1}{j} \int_0^1 u^{\frac{p-k}{\nu}+j-1} (1-u)^{N-1+\frac{k}{\nu}+j-1} du \\
 &= \left[ B\left(\frac{k}{\nu}, \frac{p-k}{\nu}\right) \right]^{-1} \int_0^1 u^{\frac{p-k}{\nu}-1} (1-u)^{\frac{k}{\nu}-1} \sum_{j=0}^{N-1} \binom{N-1}{j} u^j (1-u)^{N-1-j} du \\
 &= \left[ B\left(\frac{k}{\nu}, \frac{p-k}{\nu}\right) \right]^{-1} \int_0^1 u^{\frac{p-k}{\nu}-1} (1-u)^{\frac{k}{\nu}-1} du = 1
 \end{aligned}$$

شرط کافی: فرض کنید  $X = (X^{(1)'}, X^{(2)'})' \sim S_p(\phi)$  و  $X^{(1)} = (x_1, \dots, x_k)'$  دارای توزیع کاتز با چگالی مولد  $g_1(\cdot)$  باشد. که در آن  $N$  عدد صحیح مثبت است. همچنین فرض کنیم که  $X$  دارای نمایش تصادفی (۱۷.۲) بوده و  $X^{(1)} \stackrel{d}{=} R_1 u^{(k)}$ . در این صورت  $R_1^\gamma d_1^\gamma \stackrel{d}{=} R_1^\gamma d_1^\gamma$ . بنا بر قضیه ۱.۴.۱، چگالی  $R_1^\gamma$  برابر است با

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \sum_{j=0}^{N-1} \binom{N-1}{j} \frac{B(\frac{p-k}{\gamma} + j, N - j + \frac{k}{\gamma} - 1)}{B(\frac{k}{\gamma}, \frac{p-k}{\gamma})} \frac{r^{N-1+\frac{k}{\gamma}-j}}{\Gamma(N-1+\frac{k}{\gamma}-j)} \\ &\times z^{N-1+\frac{k}{\gamma}-j} \exp(-rz) \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} p_j f_{N-1+\frac{k}{\gamma}-j, r, 1}(z) \end{aligned} \quad (21.2)$$

که در آن چگالی توزیع  $Ga(N-1+\frac{k}{\gamma}-j, r)$  می‌باشد. حال متغیر تصادفی  $U$  مستقل از  $d_1^\gamma$  و دارای توزیع گاما  $Ga(u; N+\frac{p}{\gamma}-1, r, 1)$  را در نظر بگیرید. با استفاده از لم ۴.۴.آ، متغیر تصادفی  $T = U d_1^\gamma$  (در ۱۸.۲ تعریف شده)، دارای چگالی زیر می‌باشد ( $F_B(z)$  تابع توزیع  $B(\frac{k}{\gamma}, \frac{p-k}{\gamma})$  می‌باشد):

$$\begin{aligned} h(t) &= \int_0^1 z^{-1} g_2\left(\frac{t}{z}\right) dF_B(z) \\ &= \int_0^1 z^{-1} \frac{r^{N+\frac{p}{\gamma}-1}}{\Gamma(N+\frac{p}{\gamma}-1)} \left(\frac{t}{z}\right)^{N+\frac{p}{\gamma}-2} \frac{1}{B(\frac{k}{\gamma}, \frac{p-k}{\gamma})} z^{\frac{k}{\gamma}-1} (1-z)^{\frac{p-k}{\gamma}-1} \exp(-r\frac{t}{z}) dz \\ &= \underbrace{\frac{r^{N+\frac{p}{\gamma}-1} t^{N+\frac{p}{\gamma}-2}}{\Gamma(N+\frac{p}{\gamma}-1) B(\frac{k}{\gamma}, \frac{p-k}{\gamma})}}_C \int_0^1 z^{-(N+\frac{p-k}{\gamma})} (1-z)^{\frac{p-k}{\gamma}-1} \exp(-r\frac{t}{z}) dz \\ &\quad \left( \nu = \frac{1}{z} - 1, \quad d\nu = \frac{1}{z^2} dz \right) \\ &= C \int_0^\infty (\nu+1)^{-(N+\frac{p-k}{\gamma})} \left(1 - \frac{1}{1+\nu}\right)^{\frac{p-k}{\gamma}-1} \left(\frac{1}{1+\nu}\right)^\nu \exp(-rt(1+\nu)) d\nu \\ &= C \exp(-rt) \int_0^\infty \nu^{\frac{p-k}{\gamma}-1} (1+\nu)^{N-1} \exp(-rt\nu) d\nu \\ &= C \exp(-rt) \int_0^\infty \nu^{\frac{p-k}{\gamma}-1} \sum_{j=0}^{N-1} \binom{N-1}{j} \nu^j \exp(-rt\nu) d\nu \\ &= C \exp(-rt) \sum_{j=0}^{N-1} \binom{N-1}{j} \frac{\Gamma(j+\frac{p-k}{\gamma})}{(rt)^{j+\frac{p-k}{\gamma}}} \underbrace{\int_0^\infty \frac{(rt)^{j+\frac{p-k}{\gamma}}}{\Gamma(j+\frac{p-k}{\gamma})} \nu^{j+\frac{p-k}{\gamma}-1} \exp(-rt\nu) d\nu}_{=1} \\ &= C \exp(-rt) \sum_{j=0}^{N-1} \binom{N-1}{j} (rt)^{-(j+\frac{p-k}{\gamma})} \Gamma(j+\frac{p-k}{\gamma}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^{N-1} \binom{N-1}{j} r^{-(j+\frac{p-k}{\nu})} t^{-(j+\frac{p-k}{\nu})} \Gamma(j + \frac{p-k}{\nu}) \\
&\times \frac{r^{N+\frac{p}{\nu}-1} t^{N+\frac{p}{\nu}-2} \exp(-rt)}{\Gamma(N + \frac{p}{\nu} - 1) B(\frac{k}{\nu}, \frac{p-k}{\nu})} \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} \binom{N-1}{j} \frac{\Gamma(\frac{p-k}{\nu} + j) \Gamma(N - 1 + \frac{k}{\nu} - j)}{B(\frac{k}{\nu}, \frac{p-k}{\nu}) \Gamma(N + \frac{p}{\nu} - 1)} \frac{1}{\Gamma(N - 1 + \frac{k}{\nu} - j)} \\
&\times r^{N-1+\frac{k}{\nu}-j} t^{N-j+\frac{k}{\nu}-2} \exp(-rt) \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} \binom{N-1}{j} \frac{B(\frac{p-k}{\nu}, N - 1 + \frac{k}{\nu} - j)}{B(\frac{k}{\nu}, \frac{p-k}{\nu})} \frac{r^{N-1+\frac{k}{\nu}-j} t^{N-j+\frac{k}{\nu}-2}}{\Gamma(N + \frac{p}{\nu} - 1)} \exp(-rt) \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} p_j Ga(t; N - 1 + \frac{k}{\nu} - j, r, 1) \tag{۲۲.۲}
\end{aligned}$$

با مقایسه (۲۲.۲) و (۲۱.۲) داریم

$$R^{\nu} d_{\nu}^{\lambda} \stackrel{d}{=} U d_{\nu}^{\lambda},$$

که  $d_{\nu}^{\lambda}$  مستقل از  $R^{\nu}$  و  $U$  می‌باشد. از این رو، بنا بر لم ۳.۴.آ داریم

$$R^{\nu} \stackrel{d}{=} U.$$

بنابراین، با توجه به قضیه ۱.۴.۱،  $X$  دارای توزیع نوع کاتز با مولد چگالی (۱۹.۲) با  $s = 1$  است.  $\square$

## ۷.۲ برآورد پارامترها

نظریه توسعه یافته درستنمایی ماکزیمم فرض بر این است که نمونه تصادفی  $X_1, \dots, X_p$  دارای توزیع مشترک بیضی‌گون می‌باشند. در واقع در این مورد برآورد ماکزیمم درستنمایی برای  $\mu$  و  $\Sigma$  بر اساس نرمال چندمتغیره می‌باشند. در هر مورد الگوریتم‌های عددی برای پیدا کردن برآورد پارامترها مورد استفاده قرار می‌گیرد در ذیل برآورد پارامترها با استفاده از روش ماکزیمم درستنمایی وقتی که نمونه مستقل و هم توزیع، با تابع چگالی (۲.۲) محاسبه شده است.

**قضیه ۱.۷.۲ (\*\*\*).** فرض کنید  $X_1, \dots, X_p \sim Kz_p(x, N, r, s)$  باشد. همچنین  $\tilde{\mu}$  و  $\tilde{\Sigma}$  برآورد ماکزیمم درستنمایی در توزیع نرمال  $p$ -متغیره را در نظر بگیرید. آنگاه برآورد ماکزیمم درستنمایی در

توزیع نوع کاتز برابر است با

$$\hat{\mu} = \tilde{\mu}, \quad \hat{\Sigma} = \frac{p}{\sqrt{s \frac{N + \frac{p}{\nu} - 1}{rs}}} \tilde{\Sigma}$$

برهان. در توزیع نوع کاتز با چگالی (۲.۲) داریم

$$g(y) = y^{N-1} \exp(-ry^s)$$

حال بنابر قضیه (۱۰.۸.۱)، برآورد ماکزیمم درست‌نمایی بردار میانگین همان برآورد در نرمال  $p$ -متغیره می‌باشد. برای برآورد ماکزیمم درست‌نمایی ماتریس واریانس کوواریانس نیز باید ماکزیمم  $y^{\frac{p}{\nu}} g(y)$  را بدست بیاوریم از این‌رو داریم

$$h(y) = y^{N + \frac{p}{\nu} - 1} \exp(-ry^s)$$

برای بدست آوردن ماکزیمم تابع فوق، باید از آن مشتق گرفت و برابر صفر قرار دهیم در نتیجه داریم

$$\begin{aligned} h'(y) &= \left( N + \frac{p}{\nu} - 1 \right) y^{N + \frac{p}{\nu} - 2} \exp(-ry^s) - r s y^{s-1} y^{N + \frac{p}{\nu} - 1} \exp(-ry^s) \\ &= \exp(-ry^s) \left[ \left( N + \frac{p}{\nu} - 1 \right) y^{N + \frac{p}{\nu} - 2} - r s y^{s-1} y^{N + \frac{p}{\nu} - 1} \right] \\ &= \exp(-ry^s) y^{N + \frac{p}{\nu} - 2} \left[ \left( N + \frac{p}{\nu} - 1 \right) - r s y^s \right] = 0 \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\left( N + \frac{p}{\nu} - 1 \right) - r s y^s = 0$$

بنابراین ماکزیمم  $y_g$  برابر است با

$$y_g = \frac{p}{\sqrt{s \frac{N + \frac{p}{\nu} - 1}{rs}}}$$

در نتیجه برآورد ماکزیمم درست‌نمایی در توزیع نوع کاتز برابر

$$\hat{\mu} = \tilde{\mu}, \quad \hat{\Sigma} = \frac{p}{\sqrt{s \frac{N + \frac{p}{\nu} - 1}{rs}}} \tilde{\Sigma}$$

□

می‌باشند.

# فصل ۳

## تحلیل واریانس با استفاده از توزیع نوع کاتز

### ۱.۳ مقدمه

از آنجایی که دم‌های توزیع نوع کاتز پهن‌تر از توزیع نرمال است و اکثر خواص آن مشابه توزیع نرمال می‌باشد، لذا در مطالعات اقتصادی، مالی و صنعتی که با نقاط پرت و دور افتاده سروکار داریم ترجیح دارد از این توزیع استفاده کنیم. در این فصل حالت خاصی از توزیع نوع کاتز ارائه شده در فصل ۲ را در نظر گرفته و با بحث بیشتر پیرامون آزمون فرضیه و فاصله اطمینان همزمان بونفرونی در توزیع نوع کاتز، را بررسی می‌کنیم. در پایان یک مثال واقعی تحلیل واریانس چندمتغیره را با استفاده از این توزیع نشان می‌دهیم. برای مطالعه بیشتر می‌توان به پلانگپونگپان و نایک<sup>۱</sup> (۲۰۰۸)، نایک و پلانگپونگپان (۲۰۰۶) مراجعه کرد.

### ۲.۳ حالت خاص توزیع نوع کاتز

چنانچه در چگالی (۲.۲)،  $N = 1$ ،  $s = \frac{1}{p}$  و  $r = 1$  باشد توزیع مورد نظر ما نتیجه می‌شود. بنابراین

تعریف ۱.۲.۳. بردار تصادفی  $\mathbf{x} = (X_1, \dots, X_p)$  دارای توزیع نوع کاتز  $p$ -متغیره با پارامترهای  $\mu$  و  $\Sigma$  است اگر تابع چگالی آن به صورت زیر باشد:

$$f(x, \mu, \Sigma) = c_p |\Sigma|^{-\frac{1}{p}} \exp\left\{-\left[(x - \mu)' \Sigma^{-1} (x - \mu)\right]^{\frac{1}{p}}\right\}, \quad \mu \in \mathbb{R}^p, \quad (1.3)$$

<sup>۱</sup>Pungpongpun and Naik

که  $\Sigma$  ماتریس معین مثبت و  $c_p = \frac{\Gamma(\frac{p}{2})}{\sqrt{\pi}^{\frac{p}{2}} \Gamma(p)}$  است. این توزیع تعمیمی از توزیع نرمال چندمتغیره است با توجه به این که  $\int_{\mathbb{R}^p} f(x) dx = 1$ ، برای بدست آوردن ثابت نرمال ساز لم زیر را مطرح می‌کنیم.

لم ۲.۲.۳ (♦♦). اگر  $X$  دارای توزیع نوع کاتز با تابع چگالی ۱.۲ باشد آنگاه ثابت نرمال ساز برابر است با

$$c_p = \frac{\Gamma(\frac{p}{2})}{\sqrt{\pi}^{\frac{p}{2}} \Gamma(p)}.$$

برهان. فرض کنید  $f(x) = c_p g(x'x)$ ، که در آن مولد چگالی و  $x \in \mathbb{R}^p$  یک بردار تصادفی  $1 \times p$  می‌باشد. بنابراین

$$\int_{\mathbb{R}^p} c_p g(x'x) dx = 1$$

با توجه به رابطه (۱۵.۱) می‌توان نتیجه گرفت

$$\begin{aligned} c_p &= \frac{1}{\int g(x'x) dx}, & y &= x'x, \\ &= \frac{1}{\frac{\pi^{\frac{p}{2}}}{\Gamma(\frac{p}{2})} \int_0^{+\infty} y^{\frac{p}{2}-1} g(y) dy} \\ &= \frac{\Gamma(\frac{p}{2})}{\pi^{\frac{p}{2}} \int_0^{+\infty} y^{\frac{p}{2}-1} g(y) dy}, & y &= r^2, \\ &= \frac{\Gamma(\frac{p}{2})}{\sqrt{\pi}^{\frac{p}{2}} \int_0^{+\infty} r^{p-1} g(r^2) dr}, \end{aligned}$$

از آنجایی که مولد چگالی برای توزیع نوع کاتز برابر  $g(x'x) = \exp(-x'x)$  است داریم:

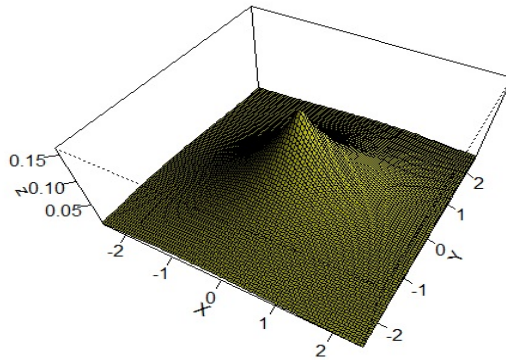
$$\int_0^{+\infty} r^{p-1} g(r^2) dr = \int_0^{+\infty} r^{p-1} \exp(-r^2) dr = \Gamma(p).$$

□

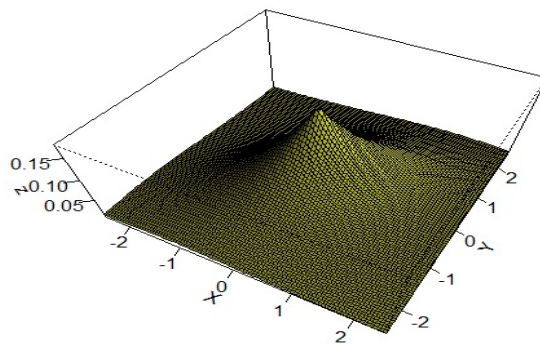
و اثبات کامل است.

در ادامه حالت خاص توزیع نوع کاتز دومتغیره را به ازای  $N = 1$ ،  $s = \frac{1}{2}$ ،  $r = 1$ ،  $\mu = (0, 0)'$

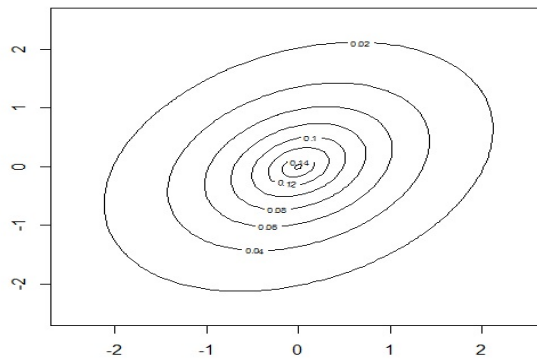
و  $\rho$ های مختلف رسم نمودیم.



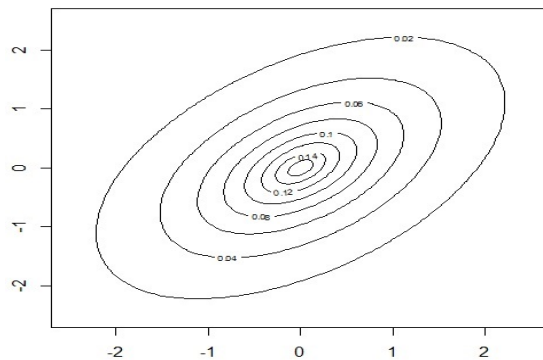
(آ)  $\rho = 0.3$



(ب)  $\rho = 0.5$

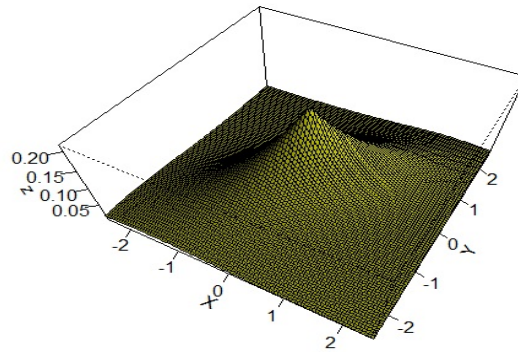


(ج)  $\rho = 0.3$

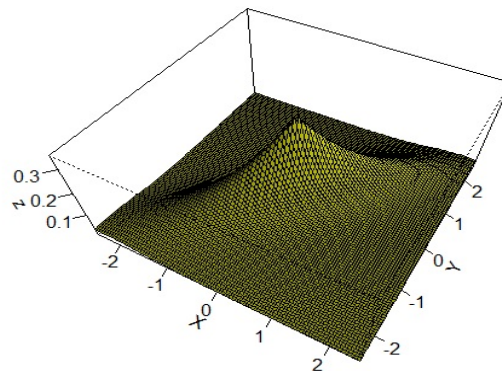


(د)  $\rho = 0.5$

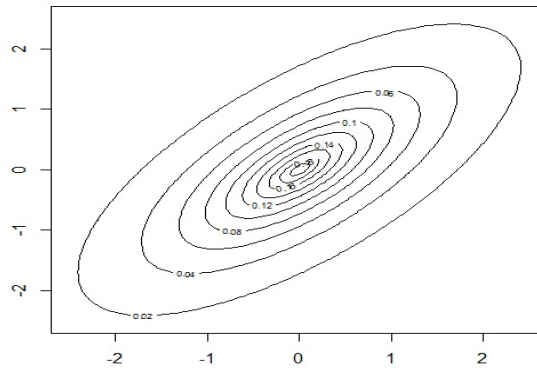
شکل ۱.۳: حالت خاص توزیع نوع کاتز دو متغیره به همراه منحنی‌های تراز



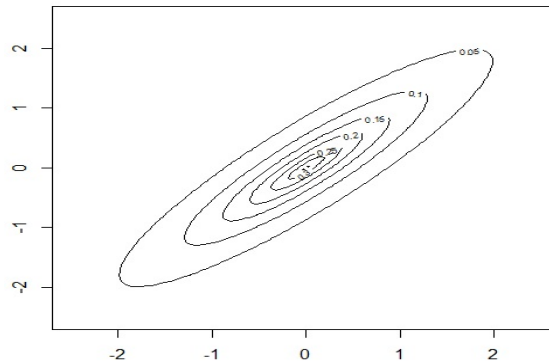
(ا)  $\rho = 0.7$



(ب)  $\rho = 0.9$



(ج)  $\rho = 0.7$



(د)  $\rho = 0.9$

شکل ۲.۳: حالت خاص توزیع نوع کاتر دو متغیره به همراه منحنی‌های تراز



### ۳.۳ الگوریتم شبیه سازی

در این بخش یک الگوریتم شبیه سازی برای داده ای دارای توزیع نوع کاتز ارائه می کنیم. نایک و پتواردهان<sup>۲</sup> (۱۹۹۱) روشی مشابه برای داده هایی از توزیع نوع کاتز دو متغیره استفاده کرده اند. الگوریتم به این صورت است که

گام ۱.  $Y' = (y_1, \dots, y_p)$  را با چگالی زیر شبیه سازی می کنیم

$$f(Y) = C \exp(-\sqrt{Y'Y}),$$

که  $-\infty < y_i < \infty$  و  $C = \frac{\Gamma(\frac{p}{2})}{\sqrt{\pi}^{\frac{p}{2}} \Gamma(p)}$ . توجه داشته باشید که  $f(Y)$  استاندارد شده توزیع نوع کاتز با چگالی (۱.۳) است و همچنین  $E(Y) = 0$ ،  $Var(Y) = (p+1)I_p$  می باشد. برای شبیه سازی  $Y$  با استفاده از تبدیل مختصات قطبی داریم

$$y_1 = R \cos \theta_1$$

$$y_2 = R \sin \theta_1 \cos \theta_2$$

⋮

$$y_{p-1} = R \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cdots \sin \theta_{p-2} \cos \theta_{p-1}$$

$$y_p = R \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cdots \sin \theta_{p-2} \sin \theta_{p-1}$$

که  $R = \sqrt{Y'Y}$ ،  $\theta_j \in [0, \pi)$  برای  $1 \leq j \leq p-2$  و  $\theta_{p-1} \in [0, 2\pi)$ . ژاکوبین تبدیل برابر است با

$$R^{p-1} \prod_{j=0}^{p-2} \sin^{p-j-1}(\theta_j).$$

برای شماره های فرد  $p$ ،  $R$  و  $\theta_j$ ،  $j = 1, \dots, p-1$ ، به طور یکسان با تابع چگالی احتمال زیر

$$g(r) = \frac{1}{\Gamma(p)} r^{p-1} \exp(-r),$$

توزیع شده اند.  $R \sim Ga(p, 1)$  (کوتراس، ۱۹۸۶ را ببینید). و

$$g(\theta_1) = \frac{p-2}{2} \left[ \frac{(p-4) \cdots 3 \cdot 3 \cdot 1}{(p-3) \cdots 4 \cdot 2} \right] \sin^{p-2}(\theta_1)$$

<sup>۲</sup>Naik and Patwardhan

$$\begin{aligned}
g(\theta_2) &= \frac{2^{\pi-3}}{\pi} \frac{[(\frac{p-3}{2})!]^2}{(p-3)!} \sin^{p-3}(\theta_2) \\
g(\theta_3) &= \frac{p-4}{2} \left[ \frac{(p-6) \dots 3 \cdot 3 \cdot 1}{(P-5) \dots 4 \cdot 2} \right] \sin^{p-4}(\theta_3) \\
g(\theta_4) &= \frac{2^{\pi-5}}{\pi} \frac{[(\frac{p-5}{2})!]^2}{(p-5)!} \sin^{p-5}(\theta_4) \\
&\vdots \\
g(\theta_{p-2}) &= \frac{1}{2} \sin(\theta_{p-2}) \\
g(\theta_{p-1}) &= \frac{1}{2\pi}
\end{aligned}$$

برای شماره‌های زوج  $p, R$  و  $\theta_j, j = 1, \dots, p-1$ ، به طور یکسان با تابع چگالی احتمال زیر

$$g(r) = \frac{1}{\Gamma(p)} r^{p-1} \exp(-r),$$

توزیع شده‌اند، از اینرو

$$\begin{aligned}
g(\theta_1) &= \frac{2^{\pi-2}}{\pi} \frac{[(\frac{p-2}{2})!]^2}{(p-2)!} \sin^{p-2}(\theta_1) \\
g(\theta_2) &= \frac{p-3}{2} \left[ \frac{(p-5) \dots 3 \cdot 3 \cdot 1}{(P-4) \dots 4 \cdot 2} \right] \sin^{p-3}(\theta_2) \\
g(\theta_3) &= \frac{2^{\pi-4}}{\pi} \frac{[(\frac{p-4}{2})!]^2}{(p-4)!} \sin^{p-4}(\theta_3) \\
g(\theta_4) &= \frac{p-5}{2} \left[ \frac{(p-7) \dots 3 \cdot 3 \cdot 1}{(P-6) \dots 4 \cdot 2} \right] \sin^{p-5}(\theta_4) \\
&\vdots \\
g(\theta_{p-2}) &= \frac{1}{2} \sin(\theta_{p-2}) \\
g(\theta_{p-1}) &= \frac{1}{2\pi}
\end{aligned}$$

برای شبیه‌سازی  $\theta \sim g(\theta)$ ، از روش دوبخشی استفاده می‌کنیم، که یک الگوریتم عددی معکوس عمومی است.

الگوریتم: یافتن فاصله اولیه  $[a, b]$  که به حل مسئله وابسته است.

• قرار بده  $\theta \leftarrow \frac{a+b}{2}$

• اگر  $G(\theta) \leq U$  باشد آنگاه  $\theta \leftarrow a$ ، در غیر این صورت  $\theta \leftarrow b$

• تازمانی که  $b - a \leq 2\delta$  شد.  $\theta$  را چاپ کن.

که  $\delta > 0$  یک عدد کوچک است.

گام ۲.  $X' = (x_{(1)}, \dots, x_{(p)})$  با توزیع (۱.۳)، به کمک تبدیل  $X = \Gamma + \mu$ ، که  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_p)$  و  $\Gamma\Gamma = \Sigma$  بدست می‌آید.

برای مثال، بردار تصادفی  $X' = (x_1, \dots, x_5)$ ،  $(p = 5)$  با تابع چگالی (۱.۳) را تولید می‌کنیم. ابتدا  $Y' = (y_1, \dots, Y_5)$  را شبیه‌سازی می‌کنیم که چگالی آن برابر است با

$$f(y) = \frac{1}{64\pi^2} \exp\left(-\sqrt{Y'Y}\right), \quad -\infty < y_i < \infty$$

در آن

$$y_1 = R \cos \theta_1$$

$$y_2 = R \sin \theta_1 \cos \theta_2$$

$$y_3 = R \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3$$

$$y_4 = R \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \cos \theta_4$$

$$y_5 = R \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \sin \theta_4$$

که  $R$  و  $\theta_j$  به طور یکسان با چگالی

$$g(r) = \frac{1}{24} r^4 \exp(-r), \quad R \sim Ga(5, 1)$$

توزیع شده‌اند. و

$$g(\theta_1) = \frac{3}{4} \sin^3(\theta_1)$$

$$g(\theta_2) = \frac{2}{\pi} \sin^2(\theta_2)$$

$$g(\theta_3) = \frac{1}{2} \sin(\theta_3)$$

$$g(\theta_4) = \frac{1}{2\pi}$$

که  $\theta_j \in [0, \pi)$  برای  $j = 1, 2, 3$  و  $\theta_4 \in [0, 2\pi)$  آنگاه،  $X$  را با تبدیل  $X = \Gamma Y + \mu$  برای  $\mu$  و

$\Gamma$  ثابت می‌سازیم.

## ۴.۳ برآورد پارامترها

در این قسمت برآورد ماکزیمم درستنمایی توزیع نوع کاتز  $p$ -متغیره با تابع چگالی (۱.۳) را با استفاده از قضیه ۱.۸.۱ بدست می‌آوریم.

قضیه ۱.۴.۳ (♦♦). فرض کنید  $(X_1, \dots, X_p) \sim Kz_p(x; 1, 1, \frac{1}{\nu})$  و  $\tilde{\mu}$  و  $\tilde{\Sigma}$  برآوردهای ماکزیمم درستنمایی بر اساس نرمال  $p$ -متغیره باشند. آنگاه برآوردهای ماکزیمم درستنمایی  $\mu$  و  $\Sigma$  برابر است با

$$\hat{\mu} = \tilde{\mu}, \quad \hat{\Sigma} = \frac{p}{p-2} \tilde{\Sigma}$$

برهان. در توزیع نوع کاتز داریم

$$g(y) = \exp\left(-y^{\frac{1}{\nu}}\right)$$

حال با توجه به قضیه (۱.۸.۱)، برآورد ماکزیمم درستنمایی بردار میانگین همان برآورد در نرمال  $p$ -متغیره می‌باشد. برای برآورد ماکزیمم درستنمایی ماتریس واریانس کوواریانس نیز باید ماکزیمم  $y^{\frac{p}{\nu}} g(y)$  را بدست بیاوریم از این‌رو داریم

$$h(y) = y^{\frac{p}{\nu}} \exp\left(-y^{\frac{1}{\nu}}\right)$$

با مشتق‌گیری و مساوی صفر قرار دادن داریم

$$\begin{aligned} h'(y) &= \frac{p}{\nu} y^{\frac{p}{\nu}-1} \exp\left(-y^{\frac{1}{\nu}}\right) - \frac{1}{\nu} y^{\frac{1}{\nu}-1} y^{\frac{p}{\nu}} \exp\left(-y^{\frac{1}{\nu}}\right) \\ &= \exp\left(-y^{\frac{1}{\nu}}\right) \left[ \frac{p}{\nu} y^{\frac{p}{\nu}-1} - \frac{1}{\nu} y^{\frac{p-1}{\nu}} \right] \\ &= \exp\left(-y^{\frac{1}{\nu}}\right) \frac{1}{\nu} y^{\frac{p}{\nu}} \left[ \frac{p}{y} - \frac{1}{\sqrt{y}} \right] = 0 \\ &\Rightarrow \frac{p\sqrt{y} - y}{y\sqrt{y}} = 0 \end{aligned}$$

بنابراین  $y = p^2$ ، ریشه معادله  $h'(y) = 0$  بوده و لذا

$$y_g = p^2$$

لذا برآوردهای ماکزیمم درستنمایی در توزیع نوع کاتز عبارتند از

$$\hat{\mu} = \tilde{\mu}, \quad \hat{\Sigma} = \frac{p}{y_g} \tilde{\Sigma} \quad (2.3)$$

□

که اثبات کامل می‌شود

### ۵.۳ توزیع مجانبی

قضیه ۱.۵.۳ (⊙⊙). فرض کنید  $x_1, \dots, x_n$  یک نمونه تصادفی  $p$ -متغیره از توزیع نوع کاتز با میانگین  $\mu$  و ماتریس واریانس کوواریانس  $\Sigma$  و برآورد ماکزیمم درستنمایی  $\hat{\mu}$  باشد. آن‌گاه توزیع مجانبی  $\hat{\mu}$  نرمال است. به ویژه داریم

$$\sqrt{n}(\hat{\mu} - \mu) \xrightarrow{D} N_p \left( 0, \Sigma^{\dagger} A_z^{-1} B_z A_z^{-1} \Sigma^{\dagger} \right)$$

که  $X_i - \mu = \Sigma^{-\dagger} (Z_i - \mu)$  و

$$A_z = E \left[ \frac{1}{\sqrt{(Z - \mu)' \Sigma^{-1} (Z - \mu)}} \left( \Sigma - \frac{(Z - \mu)(Z - \mu)'}{(Z - \mu)' \Sigma^{-1} (Z - \mu)} \right) \right]$$

$$B_z = E \left[ \frac{(Z - \mu)(Z - \mu)'}{(Z - \mu)' \Sigma^{-1} (Z - \mu)} \right]$$

برهان. از آنجایی که توزیع نوع کاتز حالت خاصی از توزیع‌های بیضی‌گون است، از این رو فرض کنید  $X$  یک نمونه تصادفی  $p$ -متغیره از توزیع بیضی‌گون با میانگین  $\mu$  و ماتریس مقیاس  $\Sigma$  باشد. آن‌گاه

$$X \sim \mu + R \Sigma^{\dagger} U \quad (3.3)$$

که  $U$  بردار تصادفی با توزیع یکنواخت در  $\mathbb{R}^p$  و  $R$  متغیر نامنفی پیوسته مستقل از  $U$  می‌باشد. طبق نتیجه مگیار و تایلر<sup>۳</sup> (۲۰۱۱) داریم

$$\sqrt{n}(\hat{\mu} - \mu) \rightarrow N_p \left( 0, \frac{1}{E \left[ \frac{1}{R} \right]} A^{-1} B A^{-1} \right)$$

که در آن

$$A = E \left[ \frac{1}{\|\Sigma^{\dagger} U\|} \left( I_p - \frac{\Sigma^{\dagger} U U' \Sigma^{\dagger}}{\|\Sigma^{\dagger} U\|^2} \right) \right]$$

<sup>۳</sup>Magyar and Tyler

$$B = E \left[ \frac{\Sigma^{\frac{1}{2}} U U' \Sigma^{\frac{1}{2}}}{\|\Sigma^{\frac{1}{2}} U\|^2} \right]$$

از آن جایی که  $R$  مستقل از  $U$  می باشد می توانیم نتیجه ی فوق را به صورت زیر بنویسیم

$$\sqrt{n}(\hat{\mu} - \mu) \longrightarrow N_p(\circ, \Lambda^{-1} B \Lambda^{-1})$$

که

$$\Lambda = E \left[ \frac{\mathbb{1}}{R} \right] \quad A = E \left[ \frac{\mathbb{1}}{R} \frac{\mathbb{1}}{\|\Sigma^{\frac{1}{2}} U\|^2} \left( I_p - \frac{\Sigma^{\frac{1}{2}} U U' \Sigma^{\frac{1}{2}}}{\|\Sigma^{\frac{1}{2}} U\|^2} \right) \right]$$

حال رابطه (۳.۳) را در نظر بگیرید، داریم  $\Sigma^{\frac{1}{2}} U \sim \frac{X-\mu}{R}$ . بنابراین با جانشینی  $\frac{X-\mu}{R}$  به جای  $\Sigma^{\frac{1}{2}} U$  در

$A$  و  $B$  داریم

$$\begin{aligned} A &= E \left[ \frac{\mathbb{1}}{\|\frac{X-\mu}{R}\|^2} \left( I_p - \frac{(X-\mu)(X-\mu)'}{R^2 \|\frac{X-\mu}{R}\|^2} \right) \right] \\ &= E \left[ \frac{R}{\sqrt{(X-\mu)'(X-\mu)}} \left( I_p - \frac{(X-\mu)(X-\mu)'}{(X-\mu)'(X-\mu)} \right) \right] \end{aligned}$$

یا

$$\Lambda = E \left[ \frac{\mathbb{1}}{\sqrt{(X-\mu)'(X-\mu)}} \left( I_p - \frac{(X-\mu)(X-\mu)'}{(X-\mu)'(X-\mu)} \right) \right]$$

و

$$B = E \left[ \frac{(X-\mu)(X-\mu)'}{(X-\mu)'(X-\mu)} \right]$$

از آن جایی که  $X - \mu = \Sigma^{-\frac{1}{2}}(Z - \mu)$  می توان نتیجه گرفت

$$\begin{aligned} \Lambda &= E \left[ \frac{\mathbb{1}}{\sqrt{(Z-\mu)' \Sigma^{-1} (Z-\mu)}} \left( I_p - \frac{\Sigma^{-\frac{1}{2}}(Z-\mu)(Z-\mu)' \Sigma^{-\frac{1}{2}}}{(Z-\mu)'(Z-\mu)} \right) \right] \\ &= \Sigma^{-\frac{1}{2}} A_z \Sigma^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

که در آن

$$A_z = \left[ \frac{\mathbb{1}}{\sqrt{(Z-\mu)' \Sigma^{-1} (Z-\mu)}} \left( \Sigma - \frac{(Z-\mu)(Z-\mu)'}{(Z-\mu)'(Z-\mu)} \right) \right]$$

و

$$B = \Sigma^{-\frac{1}{2}} B_z \Sigma^{-\frac{1}{2}}$$

که

$$B_z = E \left[ \frac{(Z - \mu)(Z - \mu)'}{(Z - \mu)' \Sigma^{-1} (Z - \mu)} \right]$$

و در نتیجه برای کوواریانس داریم

$$\begin{aligned} \Lambda^{-1} B \Lambda^{-1} &= \Sigma^{\frac{1}{2}} A_z^{-1} \Sigma^{\frac{1}{2}} \Sigma^{-\frac{1}{2}} B_z \Sigma^{-\frac{1}{2}} \Sigma^{\frac{1}{2}} A_z^{-1} \Sigma^{\frac{1}{2}} \\ &= \Sigma^{\frac{1}{2}} A_z^{-1} B_z A_z^{-1} \Sigma^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

□

که اثبات کامل می‌شود.

### ۶.۳ آزمون فرضیه

در این قسمت روش آزمونی که غالباً مورد استفاده قرار می‌گیرد، یعنی روش آزمون نسبت درستنمایی<sup>۴</sup> ( $LRT$ ) را بررسی می‌کنیم.

روش  $LRT$  در سال ۱۹۲۸ توسط نیمن و پیرسون مطرح شد. برای مطالعه‌ی بیشتر می‌توانید به پارسیان (۱۳۸۸)، کسلا و برگر<sup>۵</sup> (۱۹۹۰) مراجعه کنید.

فرض کنید  $X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in_i}$  یک نمونه تصادفی به حجم  $n_i$  از جامعه دارای توزیع نوع کاتز با پارامترهای  $\mu_i$  و  $\Sigma_i$ ،  $i = 1, \dots, g$  باشد. نمونه تصادفی از  $g$  جامعه‌ی مختلف و مستقل فرض می‌شوند.

همچنین  $\mu_i = (\mu_{i1}, \dots, \mu_{ip})'$  و  $\sigma_i = (\sigma_{i,11}, \dots, \sigma_{i,1p}, \dots, \sigma_{i,(p-1)p}, \sigma_{i,pp})'$  را  $i = 1, \dots, g$  در نظر بگیرید. به علاوه فرض کنید  $\Theta = (\mu'_1, \dots, \mu'_g, \sigma'_1, \dots, \sigma'_g)'$  برداری از پارامترهای نامعلوم باشد.

<sup>۴</sup>Likelihood ratio test

<sup>۵</sup>Casella and Berger

الف) آزمون فرضیه  $H_0 = \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_g = \mu$

فرض کنید  $\Sigma = \Sigma_1 = \Sigma_2 = \dots = \Sigma_g = \Sigma$  و  $\sigma_1 = \dots = \sigma_g = \sigma$  که  $\sigma = (\sigma_{11}, \dots, \sigma_{1p}, \dots, \sigma_{(p-1)p}, \sigma_{pp})$

است را در نظر بگیرید. تحت فرضیه  $H_0$ ،  $\tilde{\theta} = (\tilde{\mu}', \tilde{\sigma}')$  را  $MLE$  پارامتر  $\theta$  در نظر بگیرید.

آن‌گاه تابع ماکزیمم درست‌نمایی برابر است با

$$L(\tilde{\theta}) = c^n |\Sigma|^{-\frac{n}{p}} \exp \left\{ - \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} \sqrt{(x_{ij} - \tilde{\mu})' \tilde{\Sigma}^{-1} (x_{ij} - \tilde{\mu})} \right\}$$

که در آن

$$\tilde{\mu} = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^g \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}, \quad \tilde{\Sigma} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^g \sum_{j=0}^{n_i} (x_{ij} - \tilde{\mu})(x_{ij} - \tilde{\mu})', \quad n = \sum_{i=1}^g n_i$$

تحت  $\theta \in \Theta$  را  $MLE$  پارامتر  $\theta \in \Theta$  در نظر بگیرید. آن‌گاه تابع

ماکزیمم درست‌نمایی برابر است با

$$L(\hat{\theta}) = c^n |\Sigma|^{-\frac{n}{p}} \exp \left\{ - \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} \sqrt{(x_{ij} - \hat{\mu}_i)' \hat{\Sigma}^{-1} (x_{ij} - \hat{\mu}_i)} \right\}$$

که در آن

$$\hat{\mu}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij} = \bar{X}_i, \quad \hat{\Sigma} = \tilde{\Sigma}$$

بر اساس آزمون نسبت درست‌نمایی برای  $\theta \in \Theta : H_0$  در مقابل  $\theta \in \Theta - H_0$ ،  $H_0$  را رد

می‌کنیم اگر

$$\Lambda = \frac{L(\tilde{\theta})}{L(\hat{\theta})} < c$$

بنابراین

$$\Lambda = \frac{\left[ \frac{|\hat{\Sigma}|}{|\tilde{\Sigma}|} \right]^{\frac{\sum_{i=1}^g n_i}{p}} \exp \left\{ - \sum_{i=0}^g \sum_{j=0}^{n_i} \left[ \sqrt{(x_{ij} - \tilde{\mu})' \tilde{\Sigma}^{-1} (x_{ij} - \tilde{\mu})} - \sqrt{(x_{ij} - \hat{\mu}_i)' \hat{\Sigma}^{-1} (x_{ij} - \hat{\mu}_i)} \right] \right\} < c$$



ب) آزمون  $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_g = \mu$  وقتی که  $\Sigma_i$  ها متفاوت هستند. تحت فرضیه  $H_0$ ،  $\tilde{\theta} = (\tilde{\mu}', \tilde{\sigma}'_1, \dots, \tilde{\sigma}'_g)$  را  $MLE$  پارامتر  $\theta$  در نظر بگیرید. آنگاه تابع درستنمایی ماکزیمم برابر است با

$$L(\tilde{\theta}) = c^{\sum_{i=1}^g n_i} \prod_{i=1}^g |\Sigma_i|^{-\frac{n_i}{2}} \exp \left\{ - \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} \sqrt{(x_{ij} - \tilde{\mu})' \Sigma_i^{-1} (x_{ij} - \tilde{\mu})} \right\}$$

که در آن

$$\tilde{\mu} = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}, \quad \tilde{\Sigma}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \tilde{\mu})(x_{ij} - \tilde{\mu})'$$

تحت فرض مقابل  $\theta \in \Theta$ ،  $\hat{\theta} = (\hat{\mu}'_1, \dots, \hat{\mu}'_g, \hat{\Sigma}'_1, \dots, \hat{\Sigma}'_g)'$  را  $MLE$  پارامتر  $\theta$  در نظر بگیرید. آنگاه تابع ماکزیمم درستنمایی برابر با

$$L(\hat{\theta}) = c^{\sum_{i=1}^g n_i} \prod_{i=1}^g |\hat{\Sigma}_i|^{-\frac{n_i}{2}} \exp \left\{ - \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} \sqrt{(x_{ij} - \hat{\mu}_i)' \hat{\Sigma}_i^{-1} (x_{ij} - \hat{\mu}_i)} \right\}$$

که در آن

$$\hat{\mu}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}, \quad \hat{\Sigma}_i = \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \hat{\mu}_i)(X_{ij} - \hat{\mu}_i)'$$

در نتیجه بر اساس آزمون نسبت درستنمایی، فرضیه  $H_0: \theta \in \Theta$  در مقابل  $H_1: \theta \in \Theta - \Theta$  را رد می‌کنیم اگر

$$\Lambda = \frac{L(\tilde{\theta})}{L(\hat{\theta})} < c$$

بنابراین

$$\Lambda = \prod_{i=1}^g \left[ \frac{|\hat{\Sigma}_i|}{|\tilde{\Sigma}_i|} \right]^{\frac{n_i}{2}} \exp \left\{ - \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} \left[ \sqrt{(x_{ij} - \tilde{\mu})' \tilde{\Sigma}_i^{-1} (x_{ij} - \tilde{\mu})} - \sqrt{(x_{ij} - \hat{\mu}_i)' \hat{\Sigma}_i^{-1} (x_{ij} - \hat{\mu}_i)} \right] \right\} < c$$

که در آن  $c$  یک مقدار مناسب است. وقتی که  $n$  به اندازه کافی بزرگ باشد با توجه به قضیه (۱.۹)

پارسیان (۱۳۸۸) به طور تقریبی

$$-2 \ln \Lambda = -2 \ln \left( \frac{L(\tilde{\theta})}{L(\hat{\theta})} \right) \sim \chi_r^2$$

که  $r$  درجه آزادی بوده و به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$r = \dim\Theta - \dim\theta.$$

در ادامه آزمون برابری میانگین چندین جامعه با استفاده از داده‌های فوتبال داده شده در رنچر (۲۰۰۲)، را شرح می‌دهیم. قبل از آزمون برابری میانگین‌ها، ابتدا آزمون برابری ماتریس واریانس کوواریانس را انجام می‌دهیم.

مثال ۱.۶.۳. داده‌ها سه متغیر می‌باشند،  $x_1$  اندازه چشم تا بالای سر،  $x_2$  اندازه گوش تا بالای سر، و  $x_3$ : عرض فک برای سه گروه از بازیکنان داده شده، یعنی بازیکنان فوتبال دبیرستان، بازیکنان فوتبال دانشگاه و بازیکنان غیر فوتبالی. داده‌ها در جدول (۱.۳) داده شده و در هر گروه ۳۰ مشاهده وجود دارد.

الف) آزمون فرضیه  $H_0: \Sigma_1 = \Sigma_2 = \Sigma_3 = \Sigma$ .

با استفاده از نرم افزار آماری  $R$  مقدار آماره آزمون برابر است با

$$-2\ln\Lambda = 91.12892$$

و با استفاده از توزیع تقریبی  $\chi^2_{12}$ ،  $-2\ln\Lambda \sim \chi^2_{12}$ ،  $p\text{-value} = 0.3650646$ ، بنابراین، نمی‌توانیم فرضیه  $H_0$  را رد کنیم و نتیجه می‌گیریم که ماتریس واریانس کوواریانس در سه گروه یکسان هستند.

ب) در آزمون  $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu$ ، با فرض برابری  $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \Sigma_3 = \Sigma$ ، مقدار آماره آزمون برابر است با  $-2\ln\Lambda = 88.73001$  و با توجه به این‌که

$p\text{-value} = p[\chi^2_6 > 88.73001] < 0.0001$ ، نتیجه می‌گیریم فرضیه  $H_0$  رد نمی‌شود لذا حداقل یکی از  $\mu_i$  با بقیه متفاوت است.

## ۷.۳ فاصله اطمینان‌های همزمان

### ۱.۷.۳ فاصله اطمینان برای تابع‌های خطی از یک میانگین

نتایج این بخش در خصوص فاصله اطمینان برای مولفه‌های تکی یا برای برخی از تابع‌های خطی از  $\mu$  است که بر اساس منابع هابر<sup>۶</sup> (۱۹۸۱)، دوچارم و میلانویچ<sup>۷</sup> (۱۹۸۷)، نایک (۱۹۹۳) و بنابر قضیه

<sup>۶</sup>Hober

جدول ۱۰۳: داده‌های کلاه‌ایمنی بازیکنان فوتبال (*HS*: دبیرستان، *C*: دانشگاه، *NF*: غیر فوتبالی).

<i>HS</i>			<i>C</i>			<i>NF</i>		
$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_1$	$x_2$	$x_3$
۱۲.۵	۱۴.۰	۱۱.۰	۱۰.۳	۱۳.۴	۱۲.۴	۷.۵	۱۳.۰	۱۲.۰
۱۲.۰	۱۶.۰	۱۲.۰	۱۲.۸	۱۴.۵	۱۱.۳	۱۰.۵	۱۳.۸	۱۱.۵
۱۲.۰	۱۶.۰	۱۲.۰	۱۲.۸	۱۴.۱	۱۲.۱	۹.۷	۱۳.۳	۱۱.۵
۱۳.۵	۱۵.۰	۱۲.۰	۱۱.۰	۱۳.۴	۱۱.۰	۸.۵	۱۲.۰	۱۱.۵
۱۳.۰	۱۵.۵	۱۲.۰	۹.۶	۱۱.۱	۱۱.۷	۱۱.۵	۱۴.۵	۱۱.۸
۱۲.۰	۱۴.۰	۱۳.۰	۹.۹	۱۲.۸	۱۱.۴	۱۳.۰	۱۳.۴	۱۱.۵
۱۳.۵	۱۵.۵	۱۳.۰	۱۰.۲	۱۲.۸	۱۱.۹	۱۰.۸	۱۲.۸	۱۲.۶
۱۳.۰	۱۴.۰	۱۳.۰	۸.۸	۱۳.۰	۱۲.۹	۱۱.۱	۱۳.۹	۱۱.۲
۱۳.۵	۱۴.۵	۱۲.۵	۱۰.۵	۱۳.۹	۱۱.۸	۱۱.۵	۱۳.۴	۱۱.۹
۱۳.۰	۱۵.۰	۱۳.۰	۱۰.۴	۱۴.۵	۱۲.۰	۱۰.۶	۱۳.۷	۱۲.۲
۱۴.۰	۱۴.۵	۱۱.۵	۱۱.۲	۱۳.۴	۱۲.۴	۱۰.۴	۱۳.۵	۱۱.۴
۱۳.۰	۱۶.۰	۱۲.۵	۹.۲	۱۲.۸	۱۲.۲	۱۰.۰	۱۳.۱	۱۰.۹
۱۴.۰	۱۴.۵	۱۲.۰	۱۱.۸	۱۲.۶	۱۲.۵	۱۲.۰	۱۳.۶	۱۱.۵
۱۴.۰	۱۶.۰	۱۲.۰	۱۱۰.۲	۱۲.۷	۱۲.۳	۱۰.۲	۱۳.۶	۱۱.۵
۱۳.۵	۱۵.۰	۱۲.۰	۱۱.۲	۱۳.۸	۱۱.۳	۱۳.۳	۱۳.۶	۱۱.۳
۱۵.۰	۱۵.۰	۱۲.۰	۹.۴	۱۴.۳	۱۲.۲	۱۰.۵	۱۳.۵	۱۲.۱
۱۲.۰	۱۴.۵	۱۲.۰	۹.۸	۱۳.۸	۱۲.۶	۹.۹	۱۴.۰	۱۲.۱
۱۳.۰	۱۴.۰	۱۲.۵	۱۰.۱	۱۴.۲	۱۱.۶	۱۱.۰	۱۵.۱	۱۱.۷
۱۲.۵	۱۴.۰	۱۲.۵	۱۲.۰	۱۲.۶	۱۱.۶	۱۲.۱	۱۴.۶	۱۲.۱
۱۲.۰	۱۴.۰	۱۱.۰	۹.۹	۱۳.۴	۱۱.۵	۱۱.۷	۱۳.۸	۱۲.۱
۱۲.۰	۱۳.۰	۱۲.۰	۹.۹	۱۴.۴	۱۱.۹	۱۱.۸	۱۴.۷	۱۱.۸
۱۴.۵	۱۴.۵	۱۳.۰	۹.۱	۱۲.۸	۱۱.۷	۱۰.۸	۱۳.۹	۱۲.۰
۱۴.۰	۱۵.۵	۱۳.۵	۸.۶	۱۴.۲	۱۱.۵	۱۱.۳	۱۴.۰	۱۱.۴
۱۳.۰	۱۵.۵	۱۲.۵	۸.۲	۱۳.۰	۱۲.۶	۱۰.۴	۱۳.۸	۱۲.۲
۱۲.۰	۱۳.۰	۱۲.۵	۹.۸	۱۳.۸	۱۰.۵	۱۰.۲	۱۳.۹	۱۱.۷
۱۴.۵	۱۵.۵	۱۲.۵	۹.۶	۱۳.۰	۱۱.۲	۱۲.۴	۱۳.۴	۱۲.۱
۱۴.۵	۱۶.۵	۱۳.۵	۸.۶	۱۳.۵	۱۱.۸	۱۰.۷	۱۴.۲	۱۰.۸
۱۳.۰	۱۶.۰	۱۰.۵	۹.۶	۱۴.۱	۱۲.۳	۱۳.۱	۱۴.۵	۱۱.۷
۱۳.۵	۱۴.۰	۱۲.۰	۹.۰	۱۳.۹	۱۳.۳	۱۲.۱	۱۳.۰	۱۲.۷
۱۲.۵	۱۴.۵	۱۲.۵	۱۰.۳	۱۳.۸	۱۲.۸	۱۱.۹	۱۳.۳	۱۳.۳

۱.۵.۳ ارائه شده است.

قضیه ۱.۷.۳. اگر  $\hat{\mu}$  و  $\hat{\Sigma}$  برآوردهای  $MLE$ ،  $\mu$  و  $\Sigma$  در توزیع نوع کاتز باشند، آنگاه فاصله‌های  $(1 - \alpha)100$  درصد برای  $\mu_i$ ها برابر است با

$$\left( \hat{\mu}_i - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{\tau}_i}{n}}, \quad \hat{\mu}_i + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{\tau}_i}{n}} \right) \quad i = 1, \dots, p$$

که در آن  $\hat{\tau}_i$  برآوردگر  $i$ امین مولفه روی قطر ماتریس  $\hat{\Sigma}^{-1} \hat{A}_z^{-1} \hat{B}_z \hat{A}_z^{-1} \hat{\Sigma}^{-1}$ ،  $z_{\frac{\alpha}{2}}$  و  $z_{\frac{\alpha}{2}}$  چندک  $(1 - \frac{\alpha}{2})$  بالایی توزیع نرمال استاندارد است.

قضیه ۲.۷.۳. با استفاده از قضیه ۱.۵.۳، فاصله‌های  $(1 - \alpha)100$  درصد فاصله‌های اطمینان همزمان بونفرونی برای  $m$  ترکیب خطی از  $\mu_i$ ها برابر است با

$$\left( a'_i \mu - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{a'_i \hat{\tau} a_i}{n}}, \quad a'_i \mu + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{a'_i \hat{\tau} a_i}{n}} \right) \quad i = 1, \dots, m$$

که در آن  $a_i$  بردار ثابت معلوم و  $z_{\frac{\alpha}{2}}$  چندک  $(1 - \frac{\alpha}{2})$  بالایی توزیع نرمال استاندارد می‌باشد.

برهان. برای مقدار ثابت  $a$ ،  $a' \mu$  یک تابع خطی از  $\mu_i$ ها می‌باشد. و با استفاده از قضیه ۱.۵.۳ برای یک نمونه بزرگ، توزیع تقریبی  $a' \hat{\mu}$  برابر است با

$$a' \hat{\mu} \xrightarrow{D} N(a' \mu, a' \hat{\tau} a).$$

آنگاه فاصله اطمینان  $(1 - \alpha)100$  درصد همزمان بونفرونی برای تابع‌های خطی  $a'_1 \mu, \dots, a'_m \mu$  برابر است با

$$\left( a'_i \mu - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{a'_i \hat{\tau} a_i}{n}}, \quad a'_i \mu + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{a'_i \hat{\tau} a_i}{n}} \right) \quad i = 1, \dots, m$$

□

### ۲.۷.۳ فاصله اطمینان همزمان برای میانگین چند جامعه

$g$  نمونه مستقل  $x_{i1}, \dots, x_{in_i}$  را با حجم  $n_i$  از توزیع نوع کاتز (۱.۳) با پارامترهای  $\mu_i, \Sigma_i$ ،  $i = 1, \dots, g$  در نظر بگیرید. فرض کنید که آزمون‌ها، اختلاف معنی‌داری بین میانگین‌های جامعه را نشان دهد؛ به منظور مشخص کردن تفاوت ساختار فاصله اطمینان‌های همزمان، اختلاف بین هر دو بردار میانگین را مقایسه می‌کنیم.

(الف) فرض کنید  $\Sigma_1 = \dots = \Sigma_g = \Sigma$  که  $\sigma_1 = \dots = \sigma_g = \sigma$  و  $\sigma = (\sigma_{11}, \dots, \sigma_{1p}, \dots, \sigma_{p-1,p}, \sigma_{pp})$

قضیه ۳.۷.۳. تحت مفروضات این بخش فرض کنید  $\Sigma_1 = \dots = \Sigma_g = \Sigma$  با استفاده از قضیه‌های ۱.۵.۳ و ۱.۷.۳، فاصله اطمینان همزمان بونفرونی برای  $m$  ترکیب خطی از  $\mu_l - \mu_{l'}, l < l' = 1, \dots, g$  برابر است با

$$a'_k(\hat{\mu}_l - \hat{\mu}_{l'}) \pm z_{\frac{\alpha}{\sqrt{m}}} \sqrt{a'_k \left( \frac{1}{n_l} \hat{\tau}_l + \frac{1}{n_{l'}} \hat{\tau}_{l'} \right) a_k} \quad k = 1, \dots, m \quad (4.3)$$

که در آن  $a_k$ ها بردارهایی با مقادیر معلوم و ثابت هستند و  $z_{\frac{\alpha}{\sqrt{m}}}$ ، چندک  $(1 - \frac{\alpha}{\sqrt{m}})$  بالایی توزیع نرمال استاندارد می‌باشد، که در آن

$$\hat{\tau}_i = \hat{\Sigma}_i^{-1} \hat{A}_i^{-1} \hat{B}_i^{-1} \hat{A}_i^{-1} \hat{\Sigma}_i^{-1}, \quad i = l, l' = 1, \dots, g$$

برهان. برای مقدار ثابت  $a$ ،  $a' \mu_i$  یک تابع خطی از  $\mu_{ij}$ ها می‌باشد. با استفاده از قضیه‌های ۱.۵.۳ و ۱.۷.۳ داریم

$$a'(\hat{\mu}_l - \hat{\mu}_{l'}) \xrightarrow{D} N \left( a'(\mu_l - \mu_{l'}), a' \left( \frac{1}{n_l} \tau_l + \frac{1}{n_{l'}} \tau_{l'} \right) \right)$$

آن‌گاه فاصله اطمینان‌های  $(1 - \alpha) 100\%$  درصد همزمان بونفرونی برای تابع‌های خطی  $a'_k(\hat{\mu}_l - \hat{\mu}_{l'})$  برابر است با

$$a'_k(\hat{\mu}_l - \hat{\mu}_{l'}) \pm z_{\frac{\alpha}{\sqrt{m}}} \sqrt{a'_k \left( \frac{1}{n_l} \hat{\tau}_l + \frac{1}{n_{l'}} \hat{\tau}_{l'} \right) a_k} \quad k = 1, \dots, m$$

□

ب) فرض کنید  $\Sigma_i$ ها متفاوتند، از اینرو  $\sigma_i$ ها نیز متفاوت هستند.

قضیه ۴.۷.۳. تحت مفروضات این بخش و با استفاده از قضیه‌های ۱.۵.۳ و ۱.۷.۳، فاصله اطمینان  $(1 - \alpha)100$  فاصله بونفرونی برای  $m$  ترکیب خطی از  $\mu_l - \mu_{l'}$ ،  $l < l' = 1, \dots, g$ ، برابر است با

$$a'_k(\hat{\mu}_l - \hat{\mu}_{l'}) \pm z_{\frac{\alpha}{\sqrt{m}}} \sqrt{a'_k \left( \frac{1}{n_l} \hat{\tau}_l + \frac{1}{n_{l'}} \hat{\tau}_{l'} \right) a_k} \quad k = 1, \dots, m \quad (5.3)$$

که در آن  $a_k$ ها بردارهایی با مقادیر معلوم و ثابت هستند و  $z_{\frac{\alpha}{\sqrt{m}}}$ ، چندک  $(1 - \frac{\alpha}{\sqrt{m}})$  بالایی توزیع نرمال استاندارد می‌باشد، که

$$\hat{\tau}_i = \hat{\Sigma}_i^{-\frac{1}{2}} \hat{A}_i^{-1} \hat{B}_i^{-1} \hat{A}_i^{-1} \hat{\Sigma}_i^{-\frac{1}{2}}, \quad i = l, l' = 1, \dots, g$$

از آنجایی که فرضیه‌ی برابری میانگین در مثال ۱.۶.۳ رد شده است، از این رو می‌خواهیم فاصله اطمینان همزمان برای تابع‌های خطی از  $\mu_l - \mu_{l'}$ ،  $l < l' = 1, 2, 3$  را پیدا کنیم. فرض کنید  $a'_j = (0, 1, 0)$ ،  $a'_j = (1, 0, 0)$ ،  $i = 1, 2, 3$ ،  $\mu_i = (\mu_{i1}, \mu_{i2}, \dots, \mu_{ip})$  و  $a'_j = (0, 0, 1)$  با استفاده از رابطه (۴.۳)، فاصله اطمینان همزمان بونفرونی ۹۵ درصد برای  $j = 1, 2, 3$ ،  $\mu_{1j} - \mu_{2j}$  برابر است با

$$\mu_{11} - \mu_{21} = (2,986,760 \quad , \quad 3,019,906)$$

$$\mu_{12} - \mu_{22} = (1,279,126 \quad , \quad 1,307,540)$$

$$\mu_{13} - \mu_{23} = (0,312,3675 \quad , \quad 0,334,2992)$$

همچنین فاصله اطمینان همزمان بونفرونی ۹۵ درصد برای  $\mu_{1j} - \mu_{3j}$ ،  $j = 1, 2, 3$  برابر است با

$$\mu_{11} - \mu_{31} = (2,119,333 \quad , \quad 2,154,000)$$

$$\mu_{12} - \mu_{32} = (1,024,066 \quad , \quad 1,049,268)$$

$$\mu_{13} - \mu_{33} = (0,463,2485 \quad , \quad 0,483,4181)$$

و در نهایت فاصله اطمینان همزمان بونفرونی ۹۵ درصد برای  $\mu_{2j} - \mu_{3j}$ ،  $j = 1, 2, 3$  برابر است با

$$\mu_{21} - \mu_{31} = (-0.8837942, -0.8495392)$$

$$\mu_{22} - \mu_{32} = (-0.2666368, -0.2466965)$$

$$\mu_{23} - \mu_{33} = (0.1394448, 0.1605552)$$

### ۸.۳ نتیجه‌گیری و پیشنهادات برای آینده تحقیق

در این پایان‌نامه ابتدا خانواده توزیع‌های بیضی‌گون را بررسی کردیم و در همین راستا توزیع نرمال  $p$ -متغیره که کاربرد فراوانی در علم آمار دارد را مورد مطالعه قرار دادیم. همانطور که در مقدمه ذکر شد، برخی توزیع‌های چندمتغیره در ناحیه‌ی دم پهن‌تر از توزیع نرمال  $p$ -متغیره هستند از اینرو، توزیع نوع کاتز که عضو خانواده توزیع‌های بیضی‌گون می‌باشد را در نظر گرفتیم. و به عنوان حالت خاص،  $s = \frac{1}{p}$ ، توزیع نوع کاتز را بررسی کردیم. همچنین با استفاده از توزیع مجانبی برآوردگر میانگین توزیع نوع کاتز، آنالیز واریانس چندمتغیره را انجام دادیم و ساختار فاصله اطمینان همزمان بونفرونی را معرفی و برای مجموعه‌ای از داده‌ها شرح دادیم.

با توجه به مطالب نظری و شبیه‌سازی در این پایان‌نامه، می‌توان به موضوعات زیر به عنوان آینده تحقیق اشاره کرد.

- در تحلیل واریانس برای توزیع نوع کاتز ما حالت خاص  $s = \frac{1}{p}$  را در نظر گرفتیم. بنابراین می‌توان به ازای  $s$ های مختلفی این تحلیل واریانس را انجام و مثال‌های متنوعی نیز ذکر کرد.
- می‌توان نتایج فصل ۳ را برای توزیع نمایی-توانی تعمیم داد.
- به عنوان تعمیمی دیگر می‌توان با در نظر گرفتن توزیع‌های بیضی‌گون چوله، نتایج فصل ۳ را برای توزیع نوع کاتز چوله بازنویسی کرد.
- از آنجایی که اساس این پایان‌نامه در زمینه نظریه‌ی توزیع‌ها می‌باشد، به عنوان تعمیمی از نتایج ارائه شده در فصل‌های ۲ و ۳، می‌توان توزیع نوع کاتز چندمتغیره منفرد را تعریف کرده و خواص

آن را بررسی کرد.

- توزیع مجانبی برآوردگر محاسبه‌شده در این پایان‌نامه که در ساختار فاصله اطمینان‌های همزمان بکار گرفته شده است را می‌توان در توزیع‌های خانواده بیضی‌گون مانند، توزیع نمایی-توانی و توزیع پیرسن محاسبه کرد.
- در این پایان‌نامه برای تحلیل واریانس از آزمون نسبت درست‌نمایی استفاده شده است، بنابراین می‌توان، تحلیل واریانس مورد نظر را در قالب طرح آزمایش‌ها نیز مورد مطالعه قرار داد.
- در نهایت نتایج فصل ۳ را می‌توان برای فضاهاى مختلط نیز تعمیم داد.



# پیوست آ

## تعاریف و مفاهیم اولیه

### آ.۱ جبر ماتریس‌ها

در این بخش تعریف و قضایای مورد نیاز این رساله، از جبر ماتریس‌ها را بیان می‌کنیم. این مطالب را می‌توان در اکثر کتاب‌های جبر خطی و یا کتاب‌های تحلیل چندمتغیره مشاهده کرد که از جمله می‌توان به ماردیا و همکاران (۱۹۷۹)، میرهد (۱۹۸۲) و اندرسن (۲۰۰۳) اشاره کرد.

تعریف آ.۱.۱. اگر جای سطر و ستون‌های ماتریس  $A$  را با ستون و سطرهای آن تعویض نمائیم، ماتریس حاصل را ترانواده<sup>۱</sup> ماتریس  $A$  می‌شود و با نماد  $A'$  یا  $A^T$  نمایش می‌دهند.

$$A' = (a_{ij})' = (a_{ji})$$

همچنین

$$(A')' = A$$

تعریف آ.۲.۱. اگر  $A' = A$  و یا به طور معادل  $(a_{ji}) = (a_{ij})$ ، آنگاه ماتریس  $A$  متقارن است.

تعریف آ.۳.۱. اگر  $A$  و  $B$  ماتریس‌های  $n \times p$  باشند، آنگاه  $C = A + B$  نیز یک ماتریس  $n \times p$  است، که در آن  $C = (c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$ .

---

<sup>۱</sup>Transpose

قضیه ۴.۱.۱. اگر  $A$  و  $B$  ماتریس‌های  $n \times p$  باشند، آن‌گاه

$$A + B = B + A$$

$$(A + B)' = A' + B'$$

تعریف ۵.۱.۱. اگر  $A$  یک ماتریس  $n \times m$  و  $B$  یک ماتریس  $m \times p$  باشند، آن‌گاه  $(ij)$  امین عنصر

$$C = AB \text{ به صورت } c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj} \text{ تعریف می‌شود.}$$

قضیه ۶.۱.۱. اگر  $A$  یک ماتریس  $n \times p$  و  $B$  یک ماتریس  $p \times m$  باشند، آن‌گاه

$$(AB)' = B'A'$$

قضیه ۷.۱.۱. اگر  $A$  یک ماتریس  $n \times p$  باشد، آن‌گاه

$$AA' \text{ و } A'A \text{ متقارن هستند.}$$

$$-۲ \text{ اگر } A'A = 0 \text{ باشد، آن‌گاه } A = 0.$$

تعریف ۸.۱.۱. بردارهای  $a_1, a_2, \dots, a_n$  وابسته خطی‌اند هرگاه اسکالرهای  $c_1, c_2, \dots, c_n$  (همگی

صفر نباشند) وجود داشته باشند، به طوری که

$$c_1 a_1 + c_2 a_2 + \dots + c_n a_n = 0$$

تعریف ۹.۱.۱. بردارهای  $a_1, a_2, \dots, a_n$  مستقل خطی‌اند، اگر  $Ac = 0$  نتیجه دهد  $c = 0$ .

تعریف ۱۰.۱.۱. اگر  $A$  یک ماتریس مربع باشد، آن‌گاه تعداد ستون‌ها و یا سطرهای مستقل خطی  $A$

رتبه<sup>۲</sup> آن نامیده می‌شود.

تعریف ۱۱.۱.۱. فرض کنید  $A = (a_{ij})$  یک ماتریس مربع از مرتبه  $p$  باشد. آن‌گاه

$$(i) \ A \text{ نامنفرد}^۳ \text{ است اگر } \det(A) \neq 0$$

<sup>۲</sup>Rank

<sup>۳</sup>Nonsingular

(ii)  $A$  یک ماتریس قطری<sup>۴</sup> است و با نماد  $diag(a_{11}, \dots, a_{pp})$  نشان داده می‌شود اگر به ازای

$$a_{ij} = 0, i \neq j$$

(iii)  $A$  یک ماتریس متقارن<sup>۵</sup> است اگر به ازای  $a_{ij} = a_{ji}, i \neq j$  به عبارت دیگر  $A = A'$ .

(iv)  $A$  یک ماتریس متعامد<sup>۶</sup> است اگر  $AA' = A'A = I_p$ .

(v)  $A$  یک ماتریس معین مثبت<sup>۷</sup> (نیمه معین مثبت<sup>۸</sup>) است و با  $A > 0$  و  $A \geq 0$  نشان داده می‌شود

اگر  $A$  متقارن باشد و برای هر بردار غیر صفر  $X_{p \times 1}$  داشته باشیم،  $X'AX > 0$  (یا  $X'AX \geq 0$ ).

تعریف آ.۱۲.۱. (تجزیه چولسکی). تجزیه چولسکی یک ماتریس متقارن معین مثبت به صورت

$$\Sigma = Q^T Q$$

است که در آن  $Q$  یک ماتریس بالامثلثی است.

## آ.۲ توابع ریاضی

تعریف آ.۱۰.۲. (نرم<sup>۹</sup>). فرض کنید  $X$  فضای برداری باشد. تابع  $\|\cdot\| : X \rightarrow R$  را یک نرم روی  $X$

می‌نامیم، هرگاه شرایط زیر برقرار باشند:

۱. به ازای هر  $x \in X$  داشته باشیم  $\|x\| \geq 0$ ،

۲. به ازای هر  $x \in X$  داشته باشیم  $\|x\| = 0$  اگر و تنها اگر  $x = 0$ ،

۳. به ازای هر  $x \in X$  و هر اسکالر  $\alpha$  داشته باشیم  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ ،

۴. به ازای هر  $x, y \in X$  داشته باشیم  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (نامساوی مثلثی).

<sup>۴</sup>Diagonal matrix

<sup>۵</sup>Symmetric matrix

<sup>۶</sup>Orthogonal matrix

<sup>۷</sup>Positive definite

<sup>۸</sup>Positive semidefinite

<sup>۹</sup>Norm

تعریف ۲.۲.۰. (نرم اقلیدسی<sup>۱۰</sup>).  $\|X\|$  را روی بردار  $X = (x_1, \dots, x_p)$  نرم اقلیدسی گوئیم، هرگاه به صورت

$$\|X\| = (X'X)^{\frac{1}{2}} = \left( \sum_{i=1}^p x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

تعریف شود. در این پایان نامه هر جا از نرم استفاده می‌کنیم، منظورمان نرم اقلیدسی است.

تعریف ۲.۲.۰. (تبدیل ژاکوبی). فرض کنید  $X = (x_1, \dots, x_p)$  و  $Y = (y_1, \dots, y_p)$  دو بردار باشند که دارای تعداد مولفه‌های یکسان و مستقل باشند. تبدیل  $Y = F(X)$  را در نظر بگیرید. ژاکوبی تبدیل  $X$  به  $Y$  به صوت زیر است.

$$J(X \rightarrow Y) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial y_p} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_p}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial x_p}{\partial y_p} \end{pmatrix}$$

تعریف ۲.۲.۰. (ضریب پوش هامر). ضریب پوش هامر با نماد  $q^{(n)}$  نشان داده و به صورت زیر می‌باشد.

$$q^{(n)} = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ q(q+1) \cdots (q+n-1) & n > 0 \end{cases}$$

همچنین

$$q^{(n)} = \frac{\Gamma(q+n)}{\Gamma(q)}$$

تعریف ۲.۲.۰. (تابع مشخصه<sup>۱۱</sup>). تابع مشخصه بردار تصادفی  $X_{p \times 1}$  به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\phi_X(t) = E[\exp(it'X)], \quad \mathbf{t}, X \in \mathbb{R}^p \quad i = \sqrt{-1}$$

تعریف ۲.۲.۰. (تبدیل لاپلاس). فرض کنید  $f$  تابعی حقیقی (یا مختلط) پیوسته بر روی هر زیر بازه کراندار بازه‌ی  $[0, \infty)$  باشد. در این صورت انتگرال ناسره‌ی

$$L(f(t)) = F(s) = \int_0^{\infty} \exp\{-st\} f(t) dt$$

را در صورت وجود با نماد  $L(f(t))$  نشان می‌دهند و آن را تبدیل لاپلاس تابع  $f$  می‌نامند.

<sup>۱۰</sup>Euclidean norm

<sup>۱۱</sup>Characteristic function

تعریف آ.۷.۲. (تابع دلتای دیراک). تابع دلتای دیراک تابعی است روی خط حقیقی که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\delta(x - a) = \begin{cases} +\infty & x = a \\ 0 & x \neq a \end{cases}$$

به طوری که  $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - a) dx = 1$ .

تابع دلتای دیراک به عنوان حد دنباله‌ای از توابع چگالی نرمال نیز تعریف می‌شود

$$\delta_{\sigma}(x - a) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x - a)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

تعریف آ.۸.۲. (تابع گاما یک متغیره). تابع گاما یک متغیره، انتگرالی همگراست و مقدار آن برابر عددی مثبت است که به صورت زیر می‌باشد

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} x^{a-1} \exp(-x) dx, \quad a > 0$$

و همچنین تعریف دوم تابع گاما (گراشتاین و ریزیک<sup>۱۲</sup>، ۱۹۹۵) به صورت

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha, x) &= x^{\alpha} e^{-x} \Psi(1, 1 + \alpha; x) \\ &= e^{-x} \Psi(1 - \alpha, 1 - \alpha; x) \end{aligned}$$

می‌باشد.

تعریف آ.۹.۲. (تابع بتا یک متغیره). تابع بتا به صورت زیر تعریف می‌شود

$$B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1} (1 - x)^{b-1} dx$$

همچنین

$$B^x(a, b) = \int_0^x t^{a-1} (1 - t)^{b-1} dt$$

همواره داریم

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = B(b, a)$$

<sup>۱۲</sup>Gradshteyn and Ryzhik

تعریف ۲.آ.۱۰. (تعمیم‌های توزیع فوق هندسی یک متغیره). برای متغیر مختلط  $|z| < 1$  تابع فوق هندسی یک متغیره بوسیله‌ی سری توانی زیر تعریف می‌شود

$${}_pF_q(a_1 \cdots a_p; b_1 \cdots b_p; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_1^{(k)} \cdots a_p^{(k)} z^k}{b_1^{(k)} \cdots b_p^{(k)} k!}, \quad a_i, b_j, i = 1, \dots, p; j = 1, \dots, q$$

به‌طوریکه  $a_i$ ها و  $b_j$ ها اعداد صحیح نامنفی بوده و نمادهای  $a_i^{(k)}$  و  $b_j^{(k)}$  ضرایب پوش هامر هستند. فرض کنیم شرایط همگرایی سری معرفی شده تحت عنوان تابع فوق هندسی برقرار باشد، به‌طوریکه  $a$  و  $b$  اعداد صحیح نامنفی و  $c \neq 0, -1, -2, \dots$  داریم

$$\begin{aligned} {}_0F_0(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = \exp(z), \quad |z| < 1 \\ {}_0F_1(c; z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{c^{(k)} k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c+k)} \frac{z^k}{k!}, \quad |z| < 1 \\ {}_1F_1(a; c; z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{(k)} z^k}{c^{(k)} k!}, \quad |z| < 1 \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)\Gamma(c+k)} \frac{z^k}{k!}, \quad |z| < 1 \\ {}_2F_1(a, b; c; z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{(k)} b^{(k)} z^k}{c^{(k)} k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+k)\Gamma(b+k)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c+k)} \frac{z^k}{k!}, \quad |z| < 1 \end{aligned}$$

اگر  $1 < z < -1$  آن‌گاه از بسط سری  ${}_2F_1$  استفاده می‌کنیم اگر  $z > 1$ ، آن‌گاه  ${}_2F_1$  را با استفاده از تساوی‌های زیر باز نویسی می‌کنیم

$$\begin{aligned} {}_2F_1(a, b; c; z) &= (1-z)^{-a} {}_2F_1(a, c-b; \frac{-z}{1-z}) \\ &= (1-z)^{-b} {}_2F_1(c-a, b; \frac{z}{1-z}) \\ &= (1-z)^{c-a-b} {}_2F_1(c-a, c-b; c; z). \end{aligned}$$

و همچنین داریم

$${}_2F_1(b, a+b+h; a+b+h; \frac{1}{z}) = z^{-b}$$

$${}_2F_1(b, a+b; a+b+1; \frac{1}{\nu}) \leq 2^b$$

نمایش انتگرالی  ${}_1F_1(a; c; z)$  و  ${}_2F_1(a, b; c; z)$  به صورت زیر به دست می آید

$$\begin{aligned} {}_1F_1(a; c; z) &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} \exp(zt) dt \\ {}_2F_1(a, b; c; z) &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} (1-zt)^{-b} dt \\ &, \quad |arg(1-z)| < \pi, a > 0, c-a > 0. \end{aligned}$$

تعریف آ.۱۱.۲. (۳۰۳۸۹۰۴)، گرادشتاین و ریزیک).

$$\int_u^\infty x(x^2 - u^2)^{v-1} e^{-\mu x} dx = 2^{v-\frac{1}{2}} (\sqrt{\pi})^{-1} \mu^{\frac{1}{2}-v} u^{v+\frac{1}{2}} \Gamma(v) K_{v+\frac{1}{2}}(u\mu).$$

### آ.۳ برخی توزیع‌های آماری

تعریف آ.۱.۳. (توزیع بتا). گوییم متغیر تصادفی  $X$  دارای توزیع بتا با پارامترهای  $\alpha$  و  $\beta$  است و

می‌نویسیم  $X \sim Beta(\alpha, \beta)$ ، اگر تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر باشد

$$f(x) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}, \quad 0 \leq x \leq 1, \alpha \geq 0, \beta \geq 0$$

در این صورت

$$E(X) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}, \quad Var(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)(\alpha + \beta + 1)}$$

تعریف آ.۲.۳. (توزیع گاما). گوییم متغیر تصادفی  $X$  دارای توزیع گامای یک متغیره با پارامترهای  $a$

و  $b$  است، اگر تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر باشد

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(a)b^a} x^{a-1} e^{-\frac{x}{b}}$$

و با نماد  $X \sim Ga(a, b)$  نشان داده می‌شود. در این صورت  $E(X) = ab$  و  $Var(X) = ab^2$ .

اگر  $a = \frac{n}{\nu}$  و  $b = \frac{1}{\nu}$  آن‌گاه  $X$  دارای توزیع کی‌دو با  $n$  درجه‌ی آزادی است و می‌نویسیم  $X \sim$

$$Ga(\frac{n}{\nu}, \frac{1}{\nu}) = \chi_{(n)}^2$$

تعریف ۳.۳.آ. (توزیع چندمتغیره پیرسن نوع II). گوئیم بردار تصادفی  $X_{p \times 1}$  که  $X \sim EC_p(\mu, \Sigma, g)$  دارای توزیع چندمتغیره پیرسن نوع II می‌باشد اگر تابع چگالی آن به صورت زیر باشد.

$$f(x) = \frac{\Gamma(\frac{p}{\nu} + M + 1)}{\Gamma(m + 1)\pi^{\frac{p}{\nu}}|\Sigma|^{\frac{1}{\nu}}} [1 - (x - \mu)' \Sigma^{-1} (x - \mu)]^m$$

که در آن  $x \sim MPH_p(\mu, \Sigma)$  و به صورت  $(x - \mu)' \Sigma^{-1} (x - \mu) \leq 1$  و  $\Sigma > \circ$ ,  $\mu \in \mathbb{R}^p$ ,  $x \in \mathbb{R}^p$  نمایش داده می‌شود.

تعریف ۴.۳.آ. (توزیع چندمتغیره پیرسون نوع VII). گوئیم بردار تصادفی  $X_{p \times 1}$  که  $X \sim EC_p(\mu, \Sigma, g)$  دارای توزیع چندمتغیره پیرسون نوع VII می‌باشد اگر تابع چگالی آن به صورت زیر باشد.

$$f(x) = \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(m - \frac{p}{\nu})\pi^{\frac{p}{\nu}}|\Sigma|^{\frac{1}{\nu}}} [1 + (x - \mu)' \Sigma^{-1} (x - \mu)]^{-m}$$

که در آن  $x \sim MPVII_p(\mu, \Sigma)$  و به صورت  $m > \frac{p}{\nu}$ ,  $\Sigma > \circ$ ,  $\mu \in \mathbb{R}^p$ ,  $x \in \mathbb{R}^p$  و  $-\infty < x_i < +\infty$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$  نمایش داده می‌شود.

تعریف ۵.۳.آ. (توزیع کوشی چندمتغیره). گوئیم بردار تصادفی  $X_{p \times 1}$  که  $X \sim EC_p(\mu, \Sigma, g)$  دارای توزیع کوشی می‌باشد اگر تابع چگالی آن به صورت زیر باشد.

$$f(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{\nu})}{\pi^{\frac{p}{\nu}}\Gamma(\frac{p}{\nu})} |\Sigma|^{-\frac{1}{\nu}} [1 + (x - \mu)' \Sigma^{-1} (x - \mu)]^{\frac{p+1}{\nu}}$$

که در آن  $x \sim MCP_p(\mu, \Sigma)$  و به صورت  $\Sigma > \circ$  و  $\mu \in \mathbb{R}^p$ ,  $x \in \mathbb{R}^p$  نمایش داده می‌شود.

## ۴.آ. لم‌ها و قضایای اساسی

لم ۱.۴.آ. (لم فنگ و همکاران، ۱۹۹۰). به ازای هر  $(i = 1, \dots, p)$  داریم  $\alpha_i > \circ$

$$\int_{\mathbb{R}^m} f\left(\sum_{i=1}^p x_i\right) \left(\prod_{i=1}^p |x_i|^{\alpha_i-1} dx_i\right) = I_m(f|\alpha).$$

□

برهان. فنگ و همکاران (۱۹۹۰) را ببینید.

نتیجه ۲.۴.آ.

$$\int f\left(\sum_{i=1}^p x_i\right) dx_1 dx_2 \cdots dx_p = \frac{\pi^{\frac{p}{\nu}}}{\Gamma(\frac{p}{\nu})} \int_0^\infty y^{\frac{p}{\nu}-1} f(y) dy$$



$$= \frac{\pi^{\frac{p}{2}}}{\Gamma(\frac{p}{2})} I_1 \left( f \left| \frac{p}{2} \right. \right).$$

لم ۳.۴.آ. (لم فنگ و همکاران، ۱۹۹۰). متغیرهای تصادفی  $x, y$  و  $z$  را که  $z$  مستقل از  $x$  و  $y$  می‌باشد در نظر بگیرید آن‌گاه عبارات زیر درست هستند:

الف) اگر  $x \stackrel{d}{=} v$  آن‌گاه  $zx \stackrel{d}{=} zv$ .

ب) اگر  $E(z^{it})$  و  $E(|z|^{it} \operatorname{sgn}(z))$  برای تمام مقادیر حقیقی  $t$  مخالف صفر باشند، آن‌گاه از  $zx \stackrel{d}{=} zy$  نتیجه می‌شود که  $x \stackrel{d}{=} y$ .

برهان. فنگ و همکاران (۱۹۹۰) را ببینید.  $\square$

لم ۴.۴.آ. (لم کمبانیس<sup>۱۳</sup> و همکاران، ۱۹۸۱). فرض کنید متغیر تصادفی نامنفی  $R$  و  $S$  مستقل از هم هستند،  $R$  دارای تابع توزیع  $F$  و  $S$  تابع پیوسته با چگالی  $g$  می‌باشند. سپس  $T = RS$  دارای یک اندازه کوچک  $F(\circ)$  در صفر است اگر  $F(\circ) > \circ$ ، که در بازه  $(\circ, \infty)$  پیوسته با تابع چگالی زیر می‌باشد

$$h(t) = \int_{(\circ, \infty)} r^{-1} g\left(\frac{t}{r}\right) dF(r)$$

قضیه ۵.۴.آ. (فنگ و همکاران، ۱۹۹۰). بردار میانگین و ماتریس کوواریانس  $u^{(p)}$  برابر هستند با

$$E(u^{(p)}) = \circ, \quad \operatorname{Cov}(u^{(p)}) = \frac{1}{p} I_p.$$

برهان. فنگ و همکاران (۱۹۹۰) را ببینید.  $\square$

قضیه ۶.۴.آ. (فنگ و همکاران، ۱۹۹۰). گشتاورهای  $X = ru^{(p)}$ ، موجود است، می‌توانیم در شرایط

یک انتگرال یک بعدی بیان کنیم. برای هر عدد صحیح زوج  $s$ ،  $s_i \geq \circ$ ،  $i = 1, \dots, p$ ، داریم

$$E \left( \prod_{i=1}^p X_i^{s_i} \right) = E(r^{2s}) \pi^{-\frac{p}{2}} \frac{\Gamma(\frac{p}{2})}{\Gamma(\frac{p}{2} + s)} \prod_{i=1}^p \Gamma\left(\frac{1}{2} + s_i\right)$$

که  $s = s_1 + s_2 + \dots + s_p$ .

<sup>۱۳</sup>Cambanis

# پیوست ب

## برنامه رایانه‌ای مربوط برای رسم شکل‌ها و حل مثال‌ها در نرم‌افزار $R$

۱. کد شکل (۱.۱) توزیع نرمال دو متغیره به همراه منحنی تراز

```
require(mnormt)
require(graphics)
require(stats)
x=seq(-3,3,length= 30)
y=seq(-3,3,length= 30)
f=function(x,y)(1/sqrt(2*pi)*exp(-0.5*(x^2+y^2)))
z=outer(x,y,f)
persp(x, y, z, theta = 30, phi = 30, expand = 0.5, col = "lightblue",
ltheta = 120, shade = 0.75, ticktype = "detailed")
contour(x,y,z)
#graph of normal beyzi
require(MASS)
require(mnormt)
require(graphics)
```

```

require(stats)

x=seq(-3,3,length= 30)

y=seq(-3,3,length= 30)

s1=1

s2=5

r=0.5

f=function(x,y)((1/sqrt(2*pi))*(1/(sqrt(s1*s2*(1-r^2))))
*exp(-(1/2)*(1/(1-r^2))*((x^2/s1)+(y^2/s2)-2*r*(x/s1)*(y/s2))))

z=outer(x,y,f)

persp(x, y, z, theta = 30, phi = 30, expand = 0.5, col = "orange",
ltheta = 120, shade = 0.75, ticktype = "detailed")

contour(x,y,z)

```

۲. کد رسم شکل (۱۰۲) توزیع پیرسون نوع VII دو متغیره به همراه منحنی تراز

```

require(MASS)

require(mnormt)

require(graphics)

require(stats)

#####graph of pearson type 7, m=4#####

par(mfrow=c(2,2))

x=seq(-3,3,length= 30)

y=seq(-3,3,length= 30)

s1=1

s2=1

r=0

```

```

m=4

f=function(x,y)((m-1)/pi)*(1/(sqrt(s1*s2*(1-r^2))))*
(1+(1/(1-r^2))*((x^2/s1)+(y^2/s2)-2*r*(x/s1)*(y/s2)))^(-m)

z=outer(x,y,f)

persp(x, y, z, theta = 30, phi = 30, expand = 0.5, col = "yellow",
ltheta = 120, shade = 0.75, ticktype = "detailed")

contour(x,y,z)

#####graph of pearson type 7, m=3#####

x=seq(-3,3,length= 30)
y=seq(-3,3,length= 30)

s1=1
s2=5
r=0.5
m=3

f=function(x,y)((m-1)/pi)*(1/(sqrt(s1*s2*(1-r^2))))*
(1+(1/(1-r^2))*((x^2/s1)+(y^2/s2)-2*r*(x/s1)*(y/s2)))^(-m)

z=outer(x,y,f)

persp(x, y, z, theta = 30, phi = 30, expand = 0.5, col = "yellow",
ltheta = 120, shade = 0.75, ticktype = "detailed")

contour(x,y,z)

```

۳. کد رسم شکل (۱.۳) توزیع کوشی دومتغیره به همراه منحنی تراز

```

#####graph of cochy for m=1#####

par(mfrow=c(2,2))

x=seq(-3,3,length= 30)

```

```

y=seq(-3,3,length= 30)

s1=1

s2=1

r=0

m=1

f=function(x,y)(1/(2*pi)*(1/(sqrt(s1*s2*(1-r^2))))*(1+(1/m)*
(1/(1-r^2))*((x^2/s1)+(y^2/s2)-2*r*(x/s1)*(y/s2))))^(-(m+2)/2))

z=outer(x,y,f)

persp(x, y, z, theta = 30, phi = 30, expand = 0.5, col = "blue",
ltheta = 120, shade = 0.75, ticktype = "detailed")

contour(x,y,z)

#####graph of cochy for m=1#####

x=seq(-3,3,length= 30)

y=seq(-3,3,length= 30)

s1=1

s2=5

r=0.5

m=1

f=function(x,y)(1/(2*pi)*(1/(sqrt(s1*s2*(1-r^2))))*(1+(1/m)*
(1/(1-r^2))*((x^2/s1)+(y^2/s2)-2*r*(x/s1)*(y/s2))))^(-(m+2)/2))

z=outer(x,y,f)

persp(x, y, z, theta = 30, phi = 30, expand = 0.5, col = "blue",
ltheta = 120, shade = 0.75, ticktype = "detailed")

contour(x,y,z)

```

۴. کد رسم شکل (۱۰۴) توزیع پیرسون نوع II دو متغیره به همراه منحنی تراز

```
#####graph of pearson type 2, m=2#####
par(mfrow=c(2,2))
x=seq(-3,3,length= 30)
y=seq(-3,3,length= 30)
s1=1
s2=1
r=0
m=2
f=function(x,y)((m+1)/pi)*(1/(sqrt(s1*s2*(1-r^2))))*
(1-(1/(1-r^2))*((x^2/s1)+(y^2/s2)-2*r*(x/s1)*(y/s2)))^m
z=outer(x,y,f)
persp(x, y, z, theta = 30, phi = 30, expand = 0.5, col = "green",
ltheta = 120, shade = 0.75, ticktype = "detailed")
contour(x,y,z)
#####graph of pearson type 2, m=-0.5#####
x=seq(-0.5,0.5,length= 30)
y=seq(-0.5,0.5,length= 30)
s1=1
s2=5
r=0.5
m=-0.5
f=function(x,y)((m+1)/pi)*(1/(sqrt(s1*s2*(1-r^2))))*
(1-(1/(1-r^2))*((x^2/s1)+(y^2/s2)-2*r*(x/s1)*(y/s2)))^m
```

```

z=outer(x,y,f)

persp(x, y, z, theta = 30, phi = 30, expand = 0.5, col = "green",
ltheta = 120, shade = 0.75, ticktype = "detailed")

contour(x,y,z)

```

۵. کد رسم شکل (۱.۵) توزیع پیرسون نوع  $II$  دو متغیره به همراه منحنی تراز

```

#####graph of pearson type 2, m=2#####

x=seq(-0.5,0.5,length= 30)
y=seq(-0.5,0.5,length= 30)

s1=1
s2=5
r=0.5
m=1000

f=function(x,y)((m+1)/pi)*(1/(sqrt(s1*s2*(1-r^2))))*
(1-(1/(1-r^2))*((x^2/s1)+(y^2/s2)-2*r*(x/s1)*(y/s2)))^m

z=outer(x,y,f)

persp(x, y, z, theta = 30, phi = 30, expand = 0.5, col = "green",
ltheta = 120, shade = 0.75, ticktype = "detailed")

contour(x,y,z)

```

۲. کد شکل (۱.۶) توزیع نمایی-توانی به ازای  $\beta$ ‌های مختلف، که در اینجا  $b$  همان  $\beta$  می‌باشد.

```

require(MASS)

require(stats)

```

```

require(mnormt)

require(graphics)

b=0.25

x=seq(-2.5,2.5,length= 100)
y=seq(-2.5,2.5,length= 100)

s=c(1,0,0,1)

sigma=matrix(s,2,2)

k=(1)/(pi*gamma(1+(1/b))*(2^(1+1/b)))

s1=1

s2=sqrt(1)

g=function(x,y)k*((det(sigma))^(0.5))*exp(-0.5*((x/s1)^2+(y/s2)^2)^b)

z=outer(x,y,g)

persp(x, y, z, theta=30, phi=30, expand=0.5, col="lightblue",
ltheta=120, shade=0.75, xlab="X", ylab="Y", ticktype="detailed")

```

۳. کد مربوط به مثال (۱.۶.۳)

( الف )

```

E =read.table("F:/payannname/R va SAS/ex3.31.txt");
E=matrix(c(E[,1],E[,2],E[,3]),nrow(E),3);

H =read.table("F:/payannname/R va SAS/ex3.32.txt");
H=matrix(c(H[,1],H[,2],H[,3]),nrow(H),3);

S =read.table("F:/payannname/R va SAS/ex3.33.txt");
S=matrix(c(S[,1],S[,2],S[,3]),nrow(S),3);

A =E+H+S

```



```

N =apply(A,2,sum)

NN=N/90

#####

mu_tilde=NN

mu1_hat=apply(E,2,mean)

mu2_hat=apply(H,2,mean)

mu3_hat=apply(S,2,mean)

e =list(E,H,S)

s =list(mu1_hat,mu2_hat,mu3_hat)

h =list(replicate(30,matrix(0,3,3)),replicate(30,matrix(0,3,3)),
replicate(30,matrix(0,3,3)))

a =list(matrix(0,3,3),matrix(0,3,3),matrix(0,3,3))

aa=list(matrix(0,3,3),matrix(0,3,3),matrix(0,3,3))

sigma_hat=list(matrix(0,3,3),matrix(0,3,3),matrix(0,3,3))

for (k in 1:3){

  g =e[[k]]

  hh =s[[k]]

  i =h[[k]]

  ii=h[[k]]

  for (j in 1:30){

    i[,j]=(g[j,]-hh)%*%t(g[j,]-hh)

    a[[k]] =a[[k]]+i[,j]

    ii[,j]=(g[j,]-mu_tilde)%*%t(g[j,]-mu_tilde)

    aa[[k]] =aa[[k]]+ii[,j]
  }
}

```

```

    }

sigma_hat[[k]]=a[[k]]/90

}

sigma_tilde=(aa[[1]]+aa[[2]]+aa[[3]])/90

test=(det(sigma_hat[[1]])^(-15))*(det(sigma_hat[[2]])^(-15))*
(det(sigma_hat[[3]])^(-15))/(det(sigma_tilde)^(-45))

-2*log(test)

#####

```

( ب

```

mu_tilde=NN

mu1_hat=apply(E,2,mean)

mu2_hat=apply(H,2,mean)

mu3_hat=apply(S,2,mean)

e =list(E,H,S)

s =list(mu1_hat,mu2_hat,mu3_hat)

h =list(replicate(30,matrix(0,3,3)),replicate(30,matrix(0,3,3)),
replicate(30,matrix(0,3,3)))

a =list(matrix(0,3,3),matrix(0,3,3),matrix(0,3,3))

aa=list(matrix(0,3,3),matrix(0,3,3),matrix(0,3,3))

sigma_hatt=list(matrix(0,3,3),matrix(0,3,3),matrix(0,3,3))

sigma_tildee=list(matrix(0,3,3),matrix(0,3,3),matrix(0,3,3))

for (k in 1:3){

    g =e[[k]]

    hh =s[[k]]

```

```

i =h[[k]]

ii=h[[k]]

for (j in 1:30){

  i[,j]=(g[j,]-hh)%*%t(g[j,]-hh)

  a[[k]] =a[[k]]+i[,j]

  ii[,j]=(g[j,]-mu_tilde)%*%t(g[j,]-mu_tilde)

  aa[[k]] =aa[[k]]+ii[,j]

}

sigma_hatt[[k]]=a[[k]]/30

sigma_tildee[[k]]=aa[[k]]/30

}

lam=list(numeric(30),numeric(30),numeric(30))

for (k in 1:3){

  g =e[[k]]

  hh =s[[k]]

  for (j in 1:30){

lam[[k]][j]=sqrt(t(g[j,]-mu_tilde)%*%solve(sigma_tildee[[k]])%*%

(g[j,]-mu_tilde))-sqrt(t(g[j,]hh)%*%solve(sigma_hatt[[k]])%*%(g[j,]-hh))

}

}

Lamb=exp(-sum(lam[[1]]+lam[[2]]+lam[[3]]))

Lambdd=numeric(3)

for (m in 1:3){

  Lambdd[m]=((det(sigma_hatt[[m]])/det(sigma_tildee[[m]]))^15)*Lamb

```

```

}

Lambda=(Lambdd[1]*Lambdd[2]*Lambdd[3])

-2*log(Lambda)

```

۴. کد مربوط به فاصله اطمینان همزمان در مثال (۱.۶.۳)

```

##### Confidence Intervals #####

B=list(replicate(30,matrix(0,3,3)),replicate(30,matrix(0,3,3)),
replicate(30,matrix(0,3,3)))

B_hat=list(matrix(0,3,3),matrix(0,3,3),matrix(0,3,3))

A_hat=list(matrix(0,3,3),matrix(0,3,3),matrix(0,3,3))

for (k in 1:3){

  g =e[[k]]

  hh =s[[k]]

  i =B[[k]]

  ii=B[[k]]

  for (j in 1:3){

    w=(g[j,]-hh)%*%t(g[j,]-hh)

    f=as.numeric(t(g[j,]-hh)%*%solve(sigma_hat)%*(g[j,]-hh))

    i[,j]=(w/f)/30

    ii[,j]=(1/sqrt(f))*(sigma_hat-(w/f))

    B_hat[[k]] =B_hat[[k]]+i[,j]

    A_hat[[k]] =A_hat[[k]]+ii[,j]

  }

}

tau_hat=list(matrix(0,3,3),matrix(0,3,3),matrix(0,3,3))

```

```

for (k in 1:3){
    tau_hat[[k]]=sigma_hat%%solve(A_hat[[k]])%%B_hat[[k]]%*
    %solve(A_hat[[k]])%%sigma_hat
}

alpha=0.3

aa=list(c(1,0,0),c(0,1,0),c(0,0,1))

Interval_1=list(numeric(2),numeric(2),numeric(2))

Interval_2=Interval_1

Interval_3=Interval_1

#####

for (k in 1:3){

Interval_1[[k]][1]=as.numeric(t(aa[[k]])%%(mu1_hat-mu2_hat)-qnorm
(1-alpha/6)*sqrt(t(aa[[k]])%%(tau_hat[[1]]/30+tau_hat[[2]]/30)%%aa[[k]]))

Interval_1[[k]][2]=as.numeric(t(aa[[k]])%%(mu1_hat-mu2_hat)+qnorm
(1-alpha/6)*sqrt(t(aa[[k]])%%(tau_hat[[1]]/30+tau_hat[[2]]/30)%%aa[[k]]))

Interval_2[[k]][1]=as.numeric(t(aa[[k]])%%(mu1_hat-mu3_hat)-qnorm
(1-alpha/6)*sqrt(t(aa[[k]])%%(tau_hat[[1]]/30+tau_hat[[3]]/30)%%aa[[k]]))

Interval_2[[k]][2]=as.numeric(t(aa[[k]])%%(mu1_hat-mu3_hat)+qnorm
(1-alpha/6)*sqrt(t(aa[[k]])%%(tau_hat[[1]]/30+tau_hat[[3]]/30)%%aa[[k]]))

Interval_3[[k]][1]=as.numeric(t(aa[[k]])%%(mu2_hat-mu3_hat)-qnorm
(1-alpha/6)*sqrt(t(aa[[k]])%%(tau_hat[[2]]/30+tau_hat[[3]]/30)%%aa[[k]]))

Interval_3[[k]][2]=as.numeric(t(aa[[k]])%%(mu2_hat-mu3_hat)+qnorm
(1-alpha/6)*sqrt(t(aa[[k]])%%(tau_hat[[2]]/30+tau_hat[[3]]/30)%%aa[[k]]))

}

```

۵. کد رسم شکل (۱.۳) حالت خاص توزیع نوع کاتر به ازای  $\rho$  های مختلف

```
##### Kotze #####  
  
library(MASS)  
  
require(MASS)  
  
require(stats)  
  
require(graphics)  
  
x=seq(-2.5,2.5,length= 100)  
y=seq(-2.5,2.5,length= 100)  
  
X=cbind(x,y)  
  
N=1  
  
s=1/2  
  
r=1  
  
rho=0.5  
  
f=function(x,y){((s*(r^(N/s))*(x^2+y^2-2*rho*x*y)^(N-1))/(pi*gamma(N/s)  
*(1-rho^2)^(N-0.5)))*exp(-r*((x^2+y^2-2*rho*x*y)/(1-rho^2))^s)}  
  
z=outer(x,y,f)  
  
persp(x, y, z, theta=30, phi=50, expand=0.5, col="lightblue",  
ltheta=120, shade=0.75, xlab="X", ylab="Y", ticktype="detailed")  
  
contour(x,y,z)
```

# مراجع

- [۱] بابایی، الف. (۱۳۹۱). بررسی برخی ویژگی‌های توزیع نمایی-توانی در حالت یک‌متغیره، دونمایی و چندمتغیره، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه آزاد اسلامی واحد مشهد، ایران.
- [۲] پارسیان، الف. (۱۳۸۸). مبانی آمار ریاضی، چاپ ششم، انتشارات دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان
- [۳] حاجتی، م، ج. (۱۳۹۲)، مباحثی در توزیع‌های بیضی‌گون با بررسی چند توزیع خاص، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه آزاد اسلامی واحد مشهد، ایران.
- [۴] سلیمانی طرقي، ح. (۱۳۸۹). بررسی رفتار برآوردگرهای بهبود یافته در حالت دو نمونه‌ای، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه فردوسی مشهد، ایران.
- [5] Anderson, T, W. Fang, K, T. and Huang. (1986), Maximum-Likelihood Estimates and Likelihood-Ratio Criteria for Multivariate Elliptically Contoured Distribution. *The Canadian Journal of Statistics / La Revue Canadienne de Statistique*, Vol. 14, No. 1, pp. 55-59.
- [6] Baringhaus, L. and Henze, N. (1992) Limit distributions for Mardia's measure of multivariate skewness. *Annals of Statistics*, 20, 1889–1902.
- [7] Cacoullos, T. (1965). Comparing Mahalanobis distances. I. Comparing distances between k known populations and another unknown. *Sankhya, A*, 27, 1–22.
- [8] Cacoullos, T. and Koutras, M. (1984). Quadric forms in spherical random variables: Generalized non-central  $w^2$ -distribution. *Naval Research Logistics Quarterly*, 31, 447–461.
- [9] Cambanis, S., Huang, S., Simons, G., 1981. On the theory of elliptically contoured distributions. *J. Mult. Anal.* 11, 368-385.
- [10] Casella, G. and Berger, R. L. (1990). *Statistical Inference*. Wadsworth, Belmont, CA.
- [11] Ducharme, G. R., and Milasevic, P. (1987). Spatial median and directional data, *Biometrika*, 74, 212-215.
- [12] Chu, K. C. (1973). Estimation and decision for linear system with elliptically random process. *IEEE Transactions on automat control*, 18, 499-505.

- [13] Fang, K. T., Kotz, S. and Ng, K. W. (1990). *Symmetric Multivariate and Related Distributions*. Chapman and Hall, London.
- [14] Fang, K. T. and Zhang, Y. T. (1990). *Generalized Multivariate Analysis*. Springer, Berlin.
- [15] Fang, K. T., and Anderson, T. W. (1990). *Statistical Inference in Elliptically Contoured and Related Distributions*, Allerton Press, New York.
- [16] Fourdrinier, D. and Ouassou, I. (2000). Estimation of the mean of a spherically symmetric distribution with constraints on the norm. *Canadian Journal of Statistics*, **28**, 399–415.
- [17] Gradshteyn, I.S., Ryzhik, I.M., (1995). *Tables of Integrals, Series, and Products*. Academic Press, New York.
- [18] Gomez, E. Gomez-Villegas, M. A., and Marm, J. M. (1998). A multivariate generalization of the power exponential family of distributions. *Communications in Statistics—Theory and Methods*, **27**, 589-600.
- [19] Gupta, A. K. and Varga, T. (1993). *Elliptically Contoured Models in Statistics*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- [20] Huber, P. J. (1981). *Robust Statistics*, John Wiley & Sons, New York.
- [21] Haro-Lo´pez, R. A. and Smith, A. F. M. (1999). On robust Bayesian analysis for location and scale parameters. *Journal of Multivariate Analysis*, **70**, 30–56.
- [22] Henze, N. and Klein, T. (1996) The limit distribution of the largest interpoint distance from a symmetric Kotz sample. *Journal of Multivariate Analysis*, **57**, 228–239.
- [23] Hsu, H. (1990). *Noncentral distributions of quadratic forms for elliptically contoured distributions*. In: Fang, K. T. and Anderson, T. W. (Eds.), *Statistical Inference in Elliptically Contoured and Related Distributions*. Allerton Press, New York, pp. 97–102.
- [24] Iyengar, S. and Tong, Y. L. (1989). Convexity properties of elliptically contoured distributions. *Sankhya, A*, **51**, 13–29.
- [25] Johnson, M. E. (1987), *Multivariate Statistical Simulation*, J. Wiley, New York.
- [26] Kano, Y. (1994). *Consistency Property of Elliptical Probability Density Functions*, *Journal of Multivariate Analysis*, vol. 51, pp. 139-147.
- [27] Kelker, D. (1970). Distribution theory of spherical distributions and a location-scale parameter. *Sankhya, A*, **32**, 419-30.



- [28] Kim, H. M. and Mallick, B. K. (2001). A Bayesian prediction using the elliptical and the skew Gaussian processes. *Technical Report, Department of Statistics, Texas A M University, USA.*
- [29] Kotz, S. (1975). Multivariate distributions at a cross-road. In: Patil, G. P., Kotz, S. and Ord, J. K. (Eds.), *Statistical Distributions in Scientific Work*, Vol. 1. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, pp. 247–270.
- [30] Kotz, S. and Nadarajah, S. (2001a). Letter to the editor, *Communications in Statistics – Theory Methods*, **30**, 987–992.
- [31] Kotz, S. and Nadarajah, S. (2001b). Some extremal type elliptical distributions. *Statistics and Probability Letters*, **54**, 171–182.
- [32] Kotz, S. and Nadarajah, S. (2002). Letter to the editor. *Biometrics*, **58**, 689–690.
- [33] Kotz, S. and Ostrovskii, I. (1994). Characteristic functions of a class of elliptical distributions. *Journal of Multivariate Analysis*, **49**, 164–178.
- [34] Koutras, M. (1986). On the generalized noncentral chi-squared distribution induced by an elliptical gamma law. *Biometrika*, **73**, 528–532.
- [35] Li, R. Z. (1992). Some subclasses of symmetric spherical matrix distribution. *Journal of Graduate School Acad. Sinica*, **9**, 125–140.
- [36] Liang, J. and Bentler, P. M. (1998). Characterizations of some subclasses of spherical distributions. *Statistics and Probability Letters*, **40**, 155–164.
- [37] Liang, J., Li, R., Fang, H. and Fang, K. T. (2000). Testing multinormality based on low-dimensional projection. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **86**, 129–141.
- [38] Lindsey, J. K. (1999). Multivariate elliptically contoured distributions for repeated measurements. *Biometrics*, **55**, 1277–1280.
- [39] Magyar, A., and Tyler, D. E. (2011), The asymptotic efficiency of the spatial median for elliptically symmetric distributions. *Sankhya*, series B, **73**, 165-192.
- [40] Matthews, P. C. and Rukhin, A. L. (1993). Asymptotic distribution of the normal sample range. *Annals of Applied Probability*, **3**, 454–466.
- [41] Muirhead, R.J. (1982). *Aspects of Multivariate Statistical Theory*. New York: Wiley.
- [42] Naik, D. N., and Plungpongpun, K. (2006), A Kotz Type Distribution for Multivariate Statistical Inference,” in *Advances in Distribution Theory, Order Statistics, and Inference*, Balakrishnan, N., Castillo, E., and Sarabia, J. M., Eds., Birkhäuser, Boston, pp. 111-124.

- 
- [43] Naik, D. N. (1993). Multivariate Medians: A Review, *in Probability and Statistics*, Basu, S. K., and Sinha, B. K., Eds., Narosa Publishing House, New Delhi, pp. 80-90.
- [44] Naik, D. N., and Patwardhan, G. R. (1991). A Note on testing for correlation in a certain bivariate distribution. *Journal of Quantitative Economics*, **7**, 295-302.
- [45] Plungpongpun, K., Naik, N. D. (2008), Multivariate analysis of variance Using a Kotze type distribution, *proceeding of the World congress on Engineering*, vol. **II**, London, U. K. WCE .
- [46] Prudnikov, A.P., Brychkov, Y.A., Marichev, O.I., (1990). *Integral and Series*. Volume 3: More Special Functions. Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam.
- [47] Streit, F. (1991). On the characteristic functions of the Kotz-type distributions. *Comptes Rendus Mathématiques, La Société Royale du Canada (L'Académie des Sciences)*, **13**, 121-124.

# واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Probabilistic	احتمالی
Partition	افراز
Measure	اندازه
Kurtosis	برجستگی
Shape parameter	پارامتر شکل
Beta function	تابع بتا
Digamma function	تابع دای گاما
Gamma function	تابع گاما
Characteristic function	تابع مشخصه
Density generator function	تابع مولد چگالی
Moment generating function	تابع مولد گشتاور
Transpose	ترانهاد
Multivariate Bessel distribution	توزیع بسل چندمتغیره
Elliptically Contoured distribution	توزیع بیضی‌گون
Multivariate Kotz type distribution	توزیع کاتز چندمتغیره
Spherical distribution	توزیع کروی
Normal distribution	توزیع نرمال
Standard normal distribution	توزیع نرمال استاندارد
Moment generating function	تابع مولد گشتاور
Multinormal Distribution	توزیع نرمال چندمتغیره
Multivariate beta function	تابع بتا چندمتغیره
Power exponential distribution	توزیع نمایی-توانی
Hypergeometric function	تابع فوق هندسی
Marginal distributions	توزیع حاشیه‌ای
Measurable function	تابع اندازه‌پذیر

Multivariate exponential power distribution	توزیع نمایی-توانی چندمتغیره
Double exponential distribution	توزیع نمایی دوگانه
Uniform distribution continuous	توزیع یکنواخت پیوسته
Skewness	چولگی
Simulation	شبیه‌سازی
Quadratic form	صورت درجه دوم
Diagonal matrix	ماتریس قطری
Orthogonal matrix	ماتریس متعامد
Symmetric matrix	ماتریس متقارن
Positive definite matrix	ماتریس معین مثبت
Positive semi definite matrix	ماتریس نیمه معین مثبت
outlier	مقدار دور افتاده
Median	میانه
Nonsingular	نامنفرد، ناویژه
Variance-covariance matrix	ماتریس واریانس کوواریانس
Jacobian	جاکوبین
Moments	گشتاورها

# واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Asymptotic distribution	توزیع مجانبی
Bessel function	تابع بسل
Beta function	تابع بتا
Cardinal	اندازه
Charactristic function	تابع مشخصه
cumulative distribution function	تابع توزیع تجمعی
Characteristic generator function	تابع مولد مشخصه
Chi-square distribution	توزیع کی‌دو
Conditional distributions	توزیع‌های شرطی
Denisty generator function	تابع مواد چگالی
Diagonal matrix	ماتریس قطری
Expential functionon	تابع نمایی
Gamma function	تابع گاما
Hypergeometric function	تابع فوق هندسی
Jacobian	ژاکوبی
Marginal distributions	توزیع حاشیه‌ای
Measurable function	تابع اندازه‌پذیر
Moment generating function	تابع مولد گشتاور
Multinormal Distribution	توزیع نرمال چندمتغیره
Multivariate beta function	تابع بتای چندمتغیره
Multivariate exponential power	نمایی-توانی چندمتغیره
Multivariate gamma function	تابع گاما چندمتغیره
Multivariate Kotz	کاتز چندمتغیره
Nonsingular	نامنفرد
Normalizing constant	ثابت نرم‌ساز

---

Orthogonal matrix.....	ماتریس متعامد.....
Partition.....	افراز.....
Positive definite matrix.....	ماتریس معین مثبت.....
Positive semidefinite matrix.....	ماتریس نیمه معین مثبت.....
Probability density function.....	تابع چگالی احتمال.....
Quadratic form.....	صورت درجه دوم.....
Rank.....	رتبه.....
Scalar variable.....	متغیر اسکالر.....
Singular.....	منفرد.....

## **Aabstract**

In many statistical methods, the use of multivariate methods therefore it is of interest to researchers. an application of multivariate techniques in the analysis of variance, that's the best estimator for the unknown parameter is the number one concern. the problem is always the parameter estimates, check the accuracy of the estimator. one way to address this issue by analysis of variance. basis of multivariate analysis, a multivariate normal distribution. but the real problems associated states considering that it was not appropriate for the multivariate normal distribution. there is different methods for testing the target population has a multivariate normal distribution. in the case of other classes of multivariate distributions can be used as a substitute. in this research first examines the multivariate analysis based on the multivariate normal distribution, and then to this end we use the distribution of kotz, analysis of variance to examine. also interested in if you are looking analysis also extend to other elliptical family of distributions.

**Keywords:** Elliptical symmetric distribution, Kotz type distribution, Asymptotic distribution of the maximum likelihood estimator, Analysis of variance, simultaneous confidence intervals.



Shahrood University  
Faculty Of Mathematical Sciences

Dissertation Submitted in Partial  
Fulfillment of The Requirements For The  
Degree of Master of Science in  
Statistics

# **Multivariate Analysis of variance Using a Kotz Type Distribution**

Supervisor

**Dr.Mohammad Arashi**

by

**Ali Yaghoobi Jenasemi**

2014