



دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته

ریاضی محض، گرایش آنالیز ریاضی

عنوان

یک کاربرد شبکه عصبی برای حل رده ای از

مسائل بهترین تقریب

استادان راهنما

دکتر مهدی ایرانمنش و دکتر علیرضا ناظمی

دانشجو

زهرا شاپینی

شهریور ۱۳۹۳

تقدیم به همه آشنایی که

می خوانند بیشتر بدانند

با تشکر از اساتید محترم راهنمایم و خانواده عزیزم.

زهرا شایمی
شهریور ۱۳۹۳

تعمدنامه

اینجانب زهرا شاهینی دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض دانشکده علوم ریاضی دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان یک کاربرد شبکه عصبی برای حل رده‌ای از مسائل بهترین تقریب، تحت راهنمایی دکتر مهدی ایرانمنش متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تاکنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه شاهرود “ یا “ Shahrood University “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

زهرا شاهینی
شهریور ۱۳۹۳

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در این پایان نامه یک مسئله بهترین تقریب را بیان می‌کنیم. مسئله بهترین تقریب مورد نظر حل دستگاه‌های معادلات خطی است. دستگاه معادلات خطی به سه صورت است. دستگاه معادلات معین و زیرمعین و زیرمعین است. دستگاه زیرمعین، دستگاه معادلاتی هستند که بینهایت جواب دارد و ما به دنبال جواب کمترین نرم آن هستیم و جواب آن را بوسیله یک مدل شبکه عصبی همگرا بدست می‌آوریم. دستگاه‌های زیرمعین دستگاه‌هایی هستند که جواب ندارند و ما به دنبال یک جواب تقریبی برای دستگاه هستیم. این حالت نیز بوسیله یک مدل شبکه عصبی همگرا به جواب تقریبی می‌رسیم و دستگاه‌های معین نیز معمولاً جواب منحصر بفرد دارند و نیازی به تقریب زدن ندارند. مطابق قضیه، ثابت خواهیم کرد که نقطه تعادل شبکه عصبی پیشنهاد شده، معادل با جواب بهینه مسأله بهینه‌سازی اکیدا محدب و درجه دوم مطرح شده است. کلمات کلیدی: مسئله بهترین تقریب، مدل شبکه عصبی، دستگاه‌های زیرمعین، دستگاه‌های زیرمعین.

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

۱. A neural network for solving mathematical .programming
The International conference ، May ۲۰۱۴ semnan. University

فهرست مطالب

۱	مقدمه و مفاهیم اولیه	۱
۲ مقدمه	۱.۰.۱
۲ مفاهیم اولیه آنالیز بهترین تقریب	۱.۱
۴ مجموعه‌های آفین و محدب	۱.۱.۱
۵ توابع آفین و محدب	۲.۱.۱
۵ مفاهیم اولیه بهینه‌سازی و شبکه عصبی	۲.۱
۹ پایداری	۱.۲.۱
۱۱ تابع انرژی	۲.۲.۱
۱۲ اصل تغییرناپذیری لازال	۳.۲.۱
۱۳ تاریخچه‌ی مختصری از شبکه‌های عصبی	۴.۲.۱
۱۴ مبنای زیستی شبکه عصبی مصنوعی	۵.۲.۱
۱۵ کاربردهای شبکه عصبی	۶.۲.۱
۱۶ شبکه‌های عصبی در بهینه‌سازی	۳.۱
۱۷ مدل‌های مختلف شبکه‌های عصبی	۱.۳.۱
۲۰	یک مساله بهترین تقریب	۲
۲۰ مقدمه	۱.۲
۲۰ بیان مساله	۱.۱.۲
۲۴ بهترین تقریب: نظریه کمترین مربعات	۲.۲
۳۲ جواب معادلات خطی	۱.۲.۲
۳۲ جواب کمترین مربعات معادلات خطی: دستگاه‌های زبر معین	۲.۲.۲
۳۳ جواب کمترین مربعات معادلات خطی: دستگاه‌های زیر معین	۳.۲.۲
۳۴ بهترین تقریب: نظریه چیشف	۳.۲
۳۵ مشخص‌سازی بهترین تقریبها	۱.۳.۲

۴۰	جواب چیشف معادلات خطی	۴.۲
۴۱		حل دستگاه‌های خطی زیرمعین به وسیله یک مدل شبکه عصبی	۳
۴۱	مقدمه	۱.۳
۴۱	دستگاه‌های زیرمعین	۱.۱.۳
۴۲	مدل شبکه عصبی	۲.۳
۴۳	تحلیل پایداری	۳.۳
۴۶	مثال‌های عددی	۴.۳
۴۸		حل دستگاه‌های خطی زیرمعین به وسیله یک مدل شبکه عصبی	۴
۴۸	مقدمه	۱.۴
۴۸	دستگاه‌های زیرمعین	۲.۴
۴۹	مدل شبکه عصبی	۳.۴
۵۱	تحلیل پایداری	۴.۴
۵۳	مثال‌های عددی	۵.۴
۵۶			مراجع

فصل ۱

مقدمه و مفاهیم اولیه

۱.۰.۱ مقدمه

در این فصل مفاهیم مورد نیاز برای فصل‌های بعد بطور مختصر بیان شده است. ابتدا مفاهیم مربوط به آنالیز بهترین تقریب، مجموعه و توابع محدب و مفاهیم آنالیز ریاضی را بیان می‌کنیم، سپس در خصوص مسائل بهینه‌سازی مقید و نامقید به ذکر شرایط لازم و کافی بهینگی^۱ می‌پردازیم و در انتها مفاهیم پایداری^۲ و تابع انرژی در سیستم‌های دینامیکی را ارائه می‌دهیم.

۱.۱ مفاهیم اولیه آنالیز بهترین تقریب

تعریف ۱.۱.۱. تابع $\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ را تابع نرم گوییم، هرگاه برای هر $x, y \in \mathbb{R}^n$ و هر $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \|x\| \geq 0, \\ \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0, \\ \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \\ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|. \end{cases}$$

برای بردار $x \in \mathbb{R}^n$ نرم‌های l_1, l_2, l_r به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &= |x_1| + \dots + |x_n|, \\ \|x\|_2 &= \sqrt{x^T x} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}, \\ \|x\|_r &= \sqrt[r]{x_1^r + \dots + x_n^r}, \quad r \geq 1. \end{aligned}$$

تعریف ۲.۱.۱. فضای ضرب داخلی حقیقی یک فضای خطی E است که در آن یک ضرب داخلی و یک نرم با خواص زیر معرفی شده‌اند.

$$\langle f, h \rangle = \langle h, f \rangle, \quad \forall f, h \in E \quad \text{i.}$$

$$\langle f, \alpha h + \beta g \rangle = \alpha \langle f, h \rangle + \beta \langle f, g \rangle, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \text{ii.}$$

$$f \neq 0 \text{ اگر } \langle f, f \rangle > 0 \quad \text{iii.}$$

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} \quad \text{iv.}$$

دو فضای ضرب داخلی مهم عبارتند از \mathbb{R}^n با

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i,$$

^۱Optimality

^۲Stability

و $C_w[a, b]$ ، فضای توابع پیوسته بر روی $[a, b]$ با

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx,$$

است که در آن w یک تابع مثبت پیوسته معین است.

مثال ۳.۱.۱. فضای $l_2(n)$ را بصورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$l_2(n) : \{x : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{R}\}.$$

ضرب داخلی روی $l_2(n)$ بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\langle x, y \rangle = \sum x(i)y(i),$$

$$\|x\| = (\sum_{i=1}^n x^2(i))^{\frac{1}{2}}.$$

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنیم S زیرمجموعه‌ی ناتهی از فضای ضرب داخلی X باشد، آنگاه دوگان مخروطی S را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$S^\circ = \{x \in X \mid \langle x, y \rangle \leq 0 \quad \forall y \in S\},$$

و متعامد S را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$S^\perp = S^\circ \cap (-S^\circ) = \{x \in X \mid \langle x, y \rangle = 0 \quad \forall y \in S\}.$$

تعریف ۵.۱.۱. فاصله نقطه x از فضای نرم‌دار M را با $d(x, M)$ بصورت زیر نمایش می‌دهیم

$$d(x, M) = \inf_{y \in M} \|x - y\|.$$

تعریف ۶.۱.۱. ضرب داخلی روی فضای نرم‌دار $X \times X$ بصورت $\langle x, x \rangle = \|x\|^2$ است.

تعریف ۷.۱.۱. اگر y ای وجود داشته باشد بطوریکه $d(x, M) = \|x - y\|$ آنگاه y را بهترین تقریب x در M می‌نامیم.

تعریف ۸.۱.۱. مجموعه بهترین تقریب‌های نقطه x در M را با $p_M(x)$ بصورت زیر نمایش می‌دهیم.

$$p_M(x) = \{y \in M \mid \|x - y\| = d(x, M)\}.$$

اگر به ازای هر $x \in X$ ، $p_M(x) \neq \emptyset$ ، مجموعه M را پروکسیمینال می‌گویند.

۱.۱.۱ مجموعه‌های آفین و محدب

تعریف ۹.۱.۱. مجموعه $M \subset \mathbb{R}^n$ را آفین می‌نامیم، اگر خط گذرنده از هر دو نقطه متمایز در M در مجموعه M قرار گیرد. اگر M مجموعه‌ای آفین باشد، برای هر $x_1, x_2 \in M$ و $\theta \in \mathbb{R}$ خواهیم داشت:

$$\theta x_1 + (1 - \theta)x_2 \in M.$$

یک نقطه به صورت $\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \dots + \theta_k x_k$ که $\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_k = 1$ را ترکیب آفین نقاط x_1, \dots, x_k می‌نامیم. در واقع هر مجموعه آفین شامل تمام ترکیبات آفین نقاط خودش است.

تعریف ۱۰.۱.۱. مجموعه $M \subset \mathbb{R}^n$ را محدب می‌نامیم، اگر پاره‌خط گذرنده از هر دو نقطه دلخواه در مجموعه M قرار گیرد. اگر M مجموعه‌ای محدب باشد، برای هر $x_1, x_2 \in M$ و هر $0 \leq \theta \leq 1$ خواهیم داشت:

$$\theta x_1 + (1 - \theta)x_2 \in M.$$

در واقع مجموعه محدب مجموعه‌ای است که هیچ مانعی در مسیر پاره‌خط عبوری از هر دو نقطه دلخواه آن وجود نداشته باشد. نقطه به صورت $\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \dots + \theta_k x_k$ که $0 \leq \theta_i \leq 1$ ، $\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_k = 1$ را ترکیب محدب نقاط x_1, \dots, x_k می‌نامیم. در واقع هر مجموعه محدب شامل تمام ترکیبات محدب نقاط خودش است.

تعریف ۱۱.۱.۱. مجموعه همه ترکیبهای محدب نقاط انتخابی از مجموعه M پوسته محدب M می‌نامیم و بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$co(M) = \{ \sum_{i=1}^k \theta_i u_i : k \in \mathbb{N}, u_i \in M, \theta_i \geq 0, \sum_{i=1}^k \theta_i = 1 \}$$

شکل (۱.۱) نمونه‌هایی از مجموعه‌های محدب و نامحدب را نشان می‌دهد.

تعریف ۱۲.۱.۱. اگر مجموعه‌ای یک و فقط یک بهترین تقریب داشته باشد مجموعه را چبیشف می‌گویند.

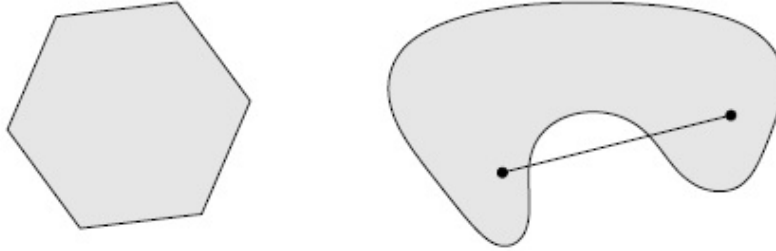
تعریف ۱۳.۱.۱. M یک زیرفضاست هرگاه

$$\forall \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}, x_i, y_i \in M \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i + \beta_i y_i \in M$$

تعریف ۱۴.۱.۱. مجموعه A وابسته خطی است، اگر و تنها اگر بتوان یکی از اعضایش را به صورت ترکیب خطی از سایر اعضا نوشت.

تعریف ۱۵.۱.۱. دستگاه معادلات $Ax = b$ را سازگار می‌گوییم هرگاه حداقل یک جواب داشته باشد و ناسازگار می‌گوییم هرگاه هیچ جوابی نداشته باشد. (A ماتریس $m \times n$ است.)

یک دستگاه معادلات خطی، یا هیچ جوابی ندارد یا فقط جواب منحصر به فرد دارد و یا بینهایت جواب دارد که جلوتر به آن می‌پردازیم.



شکل ۱.۱: برخی مجموعه‌های محدب و نامحدب. شکل چپ یک شش ضلعی کراندار و محدب است. شکل سمت راست بدلیل آنکه پاره‌خط گذرنده از دو نقطه آن تماما شامل مجموعه نیست، نامحدب است.

۲.۱.۱ توابع آفین و محدب

تعریف ۱.۶.۱.۱. تابع $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ را تابع خطی می‌گوییم، هرگاه حافظ عملیات خطی در فضای برداری \mathbb{R}^n باشد. یعنی:

$$f(x + y) = f(x) + f(y),$$

$$f(\alpha x) = \alpha f(x).$$

برای هر $x, y \in \mathbb{R}^n$ و هر $\alpha \in \mathbb{R}$.

تعریف ۱.۷.۱.۱. تابع $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$ را تابع آفین می‌گوییم، هرگاه به صورت مجموع یک تابع خطی و یک تابع ثابت باشد. به عنوان مثال $f(x) = Ax + b$ که $A \in \mathbb{R}^{l \times n}$ و $b \in \mathbb{R}^l$ تابع آفین است.

تعریف ۱.۸.۱.۱. تابع $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ بر روی مجموعه نقاط واقع در مجموعه محدب $E \subset \mathbb{R}^n$ یک تابع محدب نامیده می‌شود، اگر:

$$\forall x, y \in E, \lambda \in (0, 1) : f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

۲.۱ مفاهیم اولیه بهینه سازی و شبکه عصبی

تعریف ۱.۱۰.۲.۱. تابع $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. گرادینان تابع f در نقطه $x_0 \in \mathbb{R}^n$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\nabla f(x_0) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right)^T.$$

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنید $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ روی مجموعه $U \subseteq \mathbb{R}^n$ تابعی مشتق‌پذیر باشد. همچنین فرض کنید همه مشتقات مرتبه دوم $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ موجود و روی U پیوسته باشند، در اینصورت ماتریس هسین f را با H_f نشان می‌دهند و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H_f = \begin{bmatrix} \nabla \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \nabla \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \nabla \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}.$$

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنید تابع $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ دارای مولفه‌های f_1 و $f_2 \cdots f_m$ باشد و هر مولفه $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ دارای مشتقات جزئی نسبت به هر x_j در x_0 باشند. در اینصورت ماتریس ژاکوبین f در x_0 را که با $J_f(x_0)$ نشان می‌دهند. به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$J_f(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{bmatrix}.$$

تعریف ۴.۲.۱. زیرمجموعه E از فضای متریک X را یک مجموعه فشرده می‌گوییم، اگر هر پوشش باز E یک زیرپوشش باز متناهی داشته باشد.

تعریف ۵.۲.۱. اگر $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ، $\bar{x} \in X$ و ε -همسایگی از \bar{x} مثل $N_\varepsilon(\bar{x})$ موجود باشد که به ازای هر $x \in X \cap N_\varepsilon(\bar{x})$ داشته باشیم $f(\bar{x}) \leq f(x)$ ، آنگاه \bar{x} یک کمینه موضعی برای f است.

شرایط لازم و کافی برای مسائل نامقید

قضیه ۶.۲.۱. (شرط لازم مرتبه اول [۸]). فرض کنید X یک مجموعه باز در \mathbb{R}^n باشد. مسأله برنامه‌ریزی نامقید زیر را در نظر بگیرید:

$$\min f(x) \tag{1.1}$$

که در آن $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ در نقطه‌ای مانند \hat{x} مشتق‌پذیر است. اگر \hat{x} یک کمینه موضعی باشد^۳، آنگاه $\nabla f(\hat{x}) = 0$.

^۳Local minimum

تعریف ۷.۲.۱. ماتریس $A_{n \times n}(X)$ ، نیمه معین مثبت^۴ است هرگاه به ازای $R \in \mathbb{R}^n$ و $X \in M$ داشته باشیم:

$$R^T A(X) R \geq 0.$$

(عناصر ماتریس A توابعی روی $M \subset \mathbb{R}^n$ هستند.)

تعریف ۸.۲.۱. ماتریس $A(X)$ ، $n \times n$ معین مثبت^۵ است هرگاه به ازای $R \in \mathbb{R}^n$ و $X \in M$ داشته باشیم:

$$R^T A(X) R > 0.$$

(عناصر ماتریس A توابعی روی $M \subset \mathbb{R}^n$ هستند.)

قضیه ۹.۲.۱. (شرط لازم مرتبه دوم [۸]). فرض کنید مشتق دوم $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ در \hat{x} موجود باشد. اگر \hat{x} یک کمینه موضعی باشد، آنگاه $\nabla f(\hat{x}) = 0$ و ماتریس هسین f در \hat{x} نیمه معین مثبت است.

قضیه ۱۰.۲.۱. (شرط کافی [۸]). فرض کنید مشتق دوم $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ در \hat{x} موجود باشد. اگر $\nabla f(\hat{x}) = 0$ و ماتریس هسین f در \hat{x} معین مثبت باشد، آنگاه \hat{x} یک کمینه موضعی اکید f است.

قضیه ۱۱.۲.۱. ([۸]). فرض کنید مجموعه E به صورت زیر باشد:

$$E = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_k(x) \leq 0, k = 1, \dots, m, h_p(x) = 0, p = 1, \dots, l\}$$

اگر $g_k(x)$ ها برای $k = 1, \dots, m$ توابعی محدب و $h_p(x)$ ها برای $p = 1, \dots, l$ آفین باشند، آنگاه E یک مجموعه محدب است.

قضیه ۱۲.۲.۱. ([۸]). اگر $f(x)$ بر مجموعه محدب E تابعی محدب باشد، آنگاه $f(x)$ دارای یک کمینه موضعی است. اگر چنین کمینه‌ای یافت شود، یک کمینه سراسری^۶ است.

دو قضیه بالا بیان می‌کنند که برای یک مسأله کلی کمینه‌سازی، اگر $f(x)$ و همه $g_k(x)$ ها برای $k = 1, \dots, m$ توابعی محدب و $h_p(x)$ ها برای $p = 1, \dots, l$ آفین باشند، آنگاه یک کمینه موضعی از $f(x)$ تحت این مجموعه از قیود، یک کمینه سراسری است.

شرایط لازم و کافی برای مسائل مقید

قضیه ۱۳.۲.۱. (شرایط لازم کاروش-کان-تاکر^۷ (K.K.T), [۸]). فرض کنید X یک مجموعه باز در \mathbb{R}^n باشد. مسأله کمینه‌سازی مقید زیر را در نظر بگیرید:

$$\min f(x) \tag{۲.۱}$$

^۴Positive semi-definite

^۵Positive-definite

^۶Global minimum

^۷Karush-Kuhn-Tucker

$$\text{subject to } \begin{cases} g_k(x) \leq 0, & k = 1, \dots, m, \\ h_j(x) = 0, & j = 1, \dots, l, \\ x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in X, \end{cases} \quad (3.1)$$

که در آن $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ، $g_k: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ و $h_j: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. فرض کنید \hat{x} یک جواب شدنی این مسأله باشد و $K = \{k : g_k(\hat{x}) = 0\}$. همچنین فرض کنید f و g_k برای $k \in K$ در \hat{x} مشتق‌پذیر و g_k برای $k \notin K$ در \hat{x} پیوسته و h_j برای $j = 1, \dots, l$ دارای مشتق پیوسته باشند. به‌علاوه فرض کنید $\nabla g_k(\hat{x})$ برای $k \in K$ و $\nabla h_j(\hat{x})$ برای $j = 1, \dots, l$ مجموعاً مستقل خطی باشند. اگر \hat{x} کمینه موضعی برای (۳.۱)-(۲.۱) باشد، آنگاه اسکالره‌ای یکتای $\hat{u}_k \geq 0$ برای $k \in K$ و $\hat{v}_j \geq 0$ برای $j = 1, \dots, l$ موجود هستند، به‌طوری‌که:

$$\begin{cases} \nabla f(\hat{x}) + \sum_{k \in K} \hat{u}_k \nabla g_k(\hat{x}) + \sum_{j=1}^l \hat{v}_j \nabla h_j(\hat{x}) = 0, \\ \hat{u}_k \geq 0, \quad k \in K. \end{cases}$$

علاوه بر فرض‌های بالا اگر g_k برای $k \notin K$ در \hat{x} مشتق‌پذیر باشد، آنگاه شرایط کاروش-کان-تاگر می‌تواند به‌صورت زیر نوشته شود:

$$\begin{cases} \nabla f(\hat{x}) + \sum_{k=1}^m \hat{u}_k \nabla g_k(\hat{x}) + \sum_{j=1}^l \hat{v}_j \nabla h_j(\hat{x}) = 0, \\ \hat{u}_k g_k(\hat{x}) = 0, \quad k = 1, \dots, m, \\ \hat{u}_k \geq 0, \quad k = 1, \dots, m. \end{cases}$$

همچنین شرایط کاروش-کان-تاگر می‌تواند به‌فرم ماتریسی زیر نوشته شود:

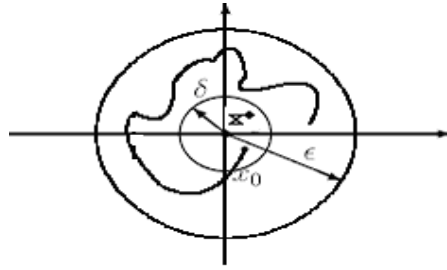
$$\begin{cases} \nabla f(\hat{x}) + \nabla g(\hat{x})^T \hat{u} + \nabla h(\hat{x})^T \hat{v} = 0, \\ \hat{u}^T g(\hat{x}) = 0, \\ \hat{u} \geq 0, \end{cases}$$

که در آن $\nabla g(\hat{x})$ ماتریس ژاکوبی $m \times n$ و $\nabla h(\hat{x})$ ماتریس ژاکوبی $l \times n$ است و \hat{u} یک بردار m تایی و \hat{v} یک بردار l تایی است. $(\hat{u}^T, \hat{v}^T)^T$ بردار ضرایب لاگرانژ نامیده می‌شود.

قضیه ۱۴.۲.۱. (شرایط کافی کاروش-کان-تاگر (K.K.T), [۸]). فرض کنید X یک مجموعه باز در \mathbb{R}^n باشد، مسأله (۳.۱) و (۲.۱) را در نظر بگیرید. فرض کنید \hat{x} یک جواب شدنی مسأله باشد و همچنین $K = \{k : g_k(\hat{x}) = 0\}$. اگر شرایط کاروش-کان-تاگر در \hat{x} برقرار باشد، یعنی اسکالره‌ای $\hat{u}_k \geq 0$ برای $k \in K$ و $\hat{v}_j \geq 0$ برای $j = 1, \dots, l$ موجود باشند، به‌طوری‌که:

$$\nabla f(\hat{x}) + \sum_{k \in K} \hat{u}_k \nabla g_k(\hat{x}) + \sum_{j=1}^l \hat{v}_j \nabla h_j(\hat{x}) = 0,$$

آنگاه \hat{x} یک کمینه موضعی برای (۳.۱) و (۲.۱) خواهد بود.



شکل ۲.۱: پایداری لیاپانوف

قضیه ۱۵.۲.۱ [۸] اگر در مسأله (۳.۱) و (۲.۱) توابع f و g_k برای $k = 1, \dots, m$ محدب باشند و توابع h_p برای $p = 1, \dots, l$ آفینی باشند، آنگاه شرایط کاروش-کان-تاکر، لازم و کافی اند.

۱.۲.۱ پایداری

تعریف ۱۶.۲.۱. به سیستمی که حالت آنها با زمان تغییر می‌کند سیستم دینامیکی می‌گوییم، عبارت دیگر یک سیستمی است که در آن توسط یک تابع، نحوه وابستگی نقاطی از یک فضای هندسی را به زمان توصیف می‌کند.

سیستم دینامیکی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x(t)), \\ x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (۴.۱)$$

که در آن $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ است. x^* یک نقطه تعادل^۸ برای (۴.۱) نامیده می‌شود، اگر $f(x^*) = 0$.

تعریف ۱۷.۲.۱. فرض کنید $x(t)$ یک جواب (۴.۱) باشد. با توجه به شکل (۲.۱) نقطه تعادل x^* پایدار به مفهوم لیاپانوف^۹ است، اگر برای هر $x(t_0) = x_0$ و هر $\epsilon > 0$ ، یک $\delta > 0$ وجود داشته باشد به طوری که اگر $\|x(t) - x_0\| \leq \delta$ ، آنگاه:

$$\|x(t) - x^*\| < \epsilon, \quad \forall t \geq t_0.$$

تعریف ۱۸.۲.۱. سیستم دینامیکی (۴.۱) همگرای سراسری^{۱۰} به مجموعه

$$\Omega^* = \{x \mid x \text{ جواب سیستم (۴.۱) است}\}$$

^۸Equilibrium point

^۹Lyapunov

^{۱۰}Global convergent

گفته می‌شود اگر هر جواب دلخواه $x(t)$ از سیستم در رابطه زیر صدق کند:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(x(t), \Omega^*) = 0,$$

که در آن

$$d(x, \Omega^*) = \inf_{y \in \Omega^*} \|x - y\|.$$

تعریف ۱۹.۲.۱. سیستم دینامیکی در نقطه تعادل یکتای x^* پایدار مجانبی سراسری^{۱۱} نامیده می‌شود، اگر x^* به مفهوم لیاپانوف پایدار باشد و در شرط زیر صدق کند:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^*.$$

تعریف ۲۰.۲.۱. مجموعه $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ، یک مجموعه تغییرناپذیر^{۱۲} نسبت به سیستم (۴.۱) گفته می‌شود، اگر $x(t_0) \in M$ و $t_0 \geq 0$ ، آنگاه به ازای هر $t \geq t_0$ ، $x(t) \in M$ باشد.

تعریف ۲۱.۲.۱. نگاشت $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ در شرط لیب شیتز^{۱۳} صدق می‌کند اگر عدد ثابت L وجود داشته باشد، به طوری که برای هر دو نقطه $x, y \in \mathbb{R}^n$ داشته باشیم:

$$\|F(x) - F(y)\| \leq L \|x - y\|.$$

F را لیب شیتز موضعی روی \mathbb{R}^n نامیم اگر به ازای هر نقطه از \mathbb{R}^n ، یک همسایگی مانند $D_0 \subset \mathbb{R}^n$ وجود داشته باشد به طوری که نامساوی بالا برای هر دو نقطه $x, y \in D_0$ برقرار باشد.

تعریف ۲۲.۲.۱. نگاشت $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ یکنوا^{۱۴} گفته می‌شود، اگر برای هر زوج از نقاط $x, y \in \mathbb{R}^n$ ، داشته باشیم:

$$(x - y)^T (F(x) - F(y)) \geq 0.$$

همچنین F روی \mathbb{R}^n اکیداً یکنوا^{۱۵} است، اگر نامساوی فوق به صورت اکید برای هر $x \neq y$ برقرار باشد. همچنین نگاشت F روی \mathbb{R}^n یکنوای قوی است اگر برای هر زوج از نقاط $x, y \in \mathbb{R}^n$ عدد ثابت $\beta > 0$ وجود داشته باشد به طوری که:

$$(x - y)^T (F(x) - F(y)) \geq \beta \|x - y\|^2.$$

قضیه ۲۳.۲.۱. ([۸]). فرض می‌کنیم که $F: K \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ، یک تابع به طور پیوسته مشتق پذیر روی K باشد. اگر ماتریس ژاکوبین F که لزوماً متقارن نیست، نیمه معین مثبت (معین مثبت) باشد، آنگاه F یکنوا (یکنوای قوی) است.

^{۱۱}Globally asymptotically stable

^{۱۲}Invariant set

^{۱۳}Lipschitz

^{۱۴}Monotone

^{۱۵}Strictly monotone

قضیه ۲۴.۲.۱ [۸] فرض می‌کنیم $F : K \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ یک تابع به‌طور پیوسته مشتق پذیر روی مجموعه‌ی محدب و باز K شامل Ω باشد. در این صورت F یکنوا (یکنوای قوی) روی Ω است، اگر و تنها اگر ماتریس ژاکوبی F برای هر $x \in \Omega$ نیمه معین مثبت (معین مثبت) باشد.

قضیه ۲۵.۲.۱ ([۱۰]). در سیستم دینامیکی (۴.۱) اگر $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ یک تابع پیوسته باشد، آنگاه برای هر $t_0 > 0$ و $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ، یک جواب موضعی^{۱۶} $x(t)$ به ازای $t \in [t_0, \tau)$ وجود دارد. علاوه بر این، اگر f در x_0 در شرط لیپ شیتز موضعی صدق کند، آنگاه جواب یکتا خواهد بود و اگر f در \mathbb{R}^n در شرط لیپ شیتز صدق کند آنگاه τ می‌تواند تا $+\infty$ توسعه داده شود.

۲.۲.۱ تابع انرژی

قضیه ۲۶.۲.۱ ([۱۸]). فرض کنید که $x = 0$ یک نقطه تعادل برای سیستم (۴.۱) و $E : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع به‌طور پیوسته مشتق پذیر باشد، اگر:

$$1. \quad E(0) = 0,$$

$$2. \quad \text{به ازای هر } x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad E(x) > 0,$$

$$3. \quad \text{به ازای هر } x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad \dot{E}(x) \leq 0,$$

آنگاه $x = 0$ نقطه پایدار سیستم خواهد بود و $E(x)$ را «تابع لیپانوف» یا «تابع انرژی» برای سیستم (۴.۱) می‌نامیم.

قضیه ۲۷.۲.۱ ([۱۸]). فرض کنید که $x = 0$ یک نقطه تعادل برای سیستم (۴.۱) و $E : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع به‌طور پیوسته مشتق پذیر باشد، اگر:

$$1. \quad E(0) = 0,$$

$$2. \quad \text{به ازای هر } x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad E(x) > 0,$$

$$3. \quad \text{به ازای هر } x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad \dot{E}(x) < 0,$$

آنگاه $x = 0$ پایدار مجانبی خواهد بود. اگر $\Omega = \mathbb{R}^n$ باشد، آنگاه نقطه $x = 0$ پایدار مجانبی سراسری است.

^{۱۶}Local solution

۳.۲.۱ اصل تغییرناپذیری لازال

تعریف ۲۸.۲.۱. فرض کنید $x(t)$ جوابی از سیستم دینامیکی $\dot{x} = f(x)$ باشد. نقطه $p \in \mathbb{R}^n$ حد مثبت^{۱۷} $x(t)$ نامیده می‌شود، اگر دنباله $(t_n)_{n \geq 0}$ موجود باشد به طوری که $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$ و همچنین $\lim_{n \rightarrow \infty} x(t_n) = p$. مجموعه حدود مثبت^{۱۸} دنباله مسیرهای $(x(t))_{t \geq 0}$ را با L^+ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲۹.۲.۱. مجموعه M را مجموعه تغییرناپذیر مثبت^{۱۹} برای سیستم دینامیکی $\dot{x} = f(x)$ می‌گوییم هرگاه:

$$x(0) \in M \Rightarrow x(t) \in M, \quad \forall t \geq 0.$$

تعریف ۳۰.۲.۱. مجموعه M را مجموعه تغییرناپذیر منفی^{۲۰} برای سیستم دینامیکی $\dot{x} = f(x)$ می‌گوییم هرگاه:

$$x(0) \in M \Rightarrow x(t) \in M, \quad \forall t \leq 0.$$

تعریف ۳۱.۲.۱. مجموعه M را مجموعه تغییرناپذیر اساسی^{۲۱} برای سیستم دینامیکی $\dot{x} = f(x)$ می‌گوییم اگر تغییرناپذیر مثبت و همچنین، تغییرناپذیر منفی باشد.

تعریف ۳۲.۲.۱. دنباله مسیرهای $(x(t))_{t \geq 0}$ پایدار مجانبی وابسته به M نامیده می‌شود، اگر برای هر $\varepsilon > 0$ وجود داشته باشد $T > 0$ ، به طوری که:

$$d(x(t), M) < \varepsilon, \quad \forall t > T,$$

که در آن d یک متر است.

قبل از بیان اصل تغییرناپذیری لازال^{۲۲} به بیان یک لم می‌پردازیم.

لم ۳۳.۲.۱. ([۱۲]). فرض کنید تابع $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ روی $D \subseteq \mathbb{R}^n$ پیوسته لیپ‌شیتس باشد که D مجموعه‌ای فشرده و شامل مبدأ است. همچنین، فرض کنید تابع $V : D \rightarrow [0, \infty)$ به طور پیوسته مشتق‌پذیر و $x(t)$ جوابی برای سیستم دینامیکی $\dot{x} = f(x)$ باشد و این جواب‌ها برای هر $t \geq 0$ توسط مجموعه D کراندار باشند. در اینصورت مجموعه حدود مثبت دنباله مسیرهای $(x(t))_{t \geq 0}$:

• ناتهی است.

^{۱۷}Positive limit

^{۱۸}Positive limits set

^{۱۹}Positive invariant set

^{۲۰}Negative invariant set

^{۲۱}Functional invariant set

^{۲۲}LaSalle's invariance principle

• فشرده است.

• تغییرناپذیر مثبت است.

قضیه ۳۴.۲.۱. (اصل تغییرناپذیری لازال، [۱۲]). سیستم دینامیکی $\dot{x} = f(x)$ را که $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ در نظر گرفته و فرض کنید $\Omega \subset D$ مجموعه‌ای فشرده و تغییرناپذیر مثبت باشد. همچنین، فرض کنید تابع $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر بوده و روی Ω داشته باشیم $\dot{V}(x) \leq 0$. فرض کنید E مجموعه نقاطی از D باشد که $\dot{V}(x) = 0$ است. اکنون اگر M بزرگترین مجموعه تغییرناپذیر مثبت در E باشد، آنگاه هر جواب این سیستم دینامیکی با نقطه شروعی در مجموعه Ω ، پایدار مجانبی وابسته به مجموعه M است.

حال نتیجه مهم زیر را که مستقیماً از اصل تغییرناپذیری لازال به‌دست می‌آید بیان می‌کنیم. این نتیجه قضیه پایداری لیاپانوف را کامل می‌کند.

نتیجه ۳۵.۲.۱. ([۱۲]). فرض کنید مبدأ نقطه تعادل سیستم دینامیکی $\dot{x} = f(x)$ باشد و تابع $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ روی $D \subset \mathbb{R}^n$ پیوسته مشتق‌پذیر و شامل مبدأ باشد به‌طوری‌که روی مجموعه D داشته باشیم $\dot{V}(x) \leq 0$. همچنین مجموعه $E = \{x \in D \mid \dot{V}(x) = 0\}$ را در نظر می‌گیریم. اگر فقط شامل نقطه $x(t) \equiv 0$ باشد، آنگاه مبدأ به‌عنوان یک نقطه تعادل سیستم دینامیکی بالا پایدار مجانبی خواهد بود.

۴.۲.۱ تاریخچه مختصری از شبکه‌های عصبی

دیدگاه جدید شبکه‌های عصبی در دهه‌ی چهارم قرن بیستم شروع شد، زمانی‌که وارن مک کلوت^{۲۳} و والتر پیتز^{۲۴} نشان دادند که شبکه‌های عصبی در اصل می‌توانند هر تابع حسابی^{۲۵} و منطقی^{۲۶} را محاسبه نمایند. کار این افراد را می‌توان نقطه‌ی شروع حوزه‌ی علمی شبکه‌های عصبی مصنوعی نامید و این موضوع با دونالد هب^{۲۷} ادامه یافت. نخستین کاربرد عملی شبکه‌های عصبی در اواخر دهه‌ی پنجاهم قرن بیستم مطرح شد، زمانی‌که فرانک روزنبلات^{۲۸} در سال ۱۹۵۸ شبکه‌ی پرسپترون^{۲۹} را معرفی نمود. روزنبلات و همکارانش شبکه‌ای ساختند که قادر بود الگوها را از هم شناسایی نماید. در همین زمان بود که برنارد ویدرو^{۳۰} در سال ۱۹۶۰ شبکه‌ی عصبی تطبیقی خطی آدلاین^{۳۱} را با قانون یادگیری جدید

^{۲۳}Warren McCulloch

^{۲۴}Walter Pitts

^{۲۵}Logical function

^{۲۶}Arithmetic

^{۲۷}Donald Hebb

^{۲۸}Frank Rosenblatt

^{۲۹}Perceptron

^{۳۰}Bernurd Widrow

مطرح نمود که از لحاظ ساختار شبیه شبکه‌ی پرسپترون می‌باشد. پیشرفت شبکه‌های عصبی تا دهه هفتاد قرن بیستم ادامه یافت. در ۱۹۷۲ تئوکوهونن^{۳۲} و جیمز اندرسون^{۳۳} به طور مستقل و بدون اطلاع از هم شبکه‌های عصبی جدید را معرفی نمودند که قادر بودند به عنوان عناصر ذخیره‌ساز عمل نمایند. استفان گروسبرگ^{۳۴} در این دهه روی شبکه‌های خود سازمانده^{۳۵} فعالیت می‌کرد. علاقه به کار کردن روی شبکه‌های عصبی در دهه شصت قرن بیستم در قیاس با دهه هشتاد به علت عدم بروز ایده‌های جدید و نبود کامپیوترهای سریع جهت پیاده‌سازی کمرنگ می‌نمود. لیکن در خلال دهه هشتاد، تحقیقات روی شبکه‌های عصبی دوباره افزایش یافت، در این زایش دوباره شبکه‌های عصبی دو نگرش جدید قابل تأمل می‌باشند. استفاده از مکانیسم تصادفی جهت توضیح عملکرد یک طبقه وسیع از شبکه‌های برگشتی^{۳۶} که می‌توان آن‌ها را جهت ذخیره‌سازی اطلاعات استفاده نمود. این ایده توسط جان هاپفیلد^{۳۷} در سال ۱۹۸۲ مطرح شد. دومین ایده‌ی مهم که کلید توسعه‌ی شبکه‌های عصبی در دهه هشتاد شد، الگوریتم پس انتشار خطا^{۳۸} می‌باشد که توسط دیوید راملهارت^{۳۹} و جیمز مک‌کلند^{۴۰} مطرح گردید. با بروز این دو ایده شبکه‌های عصبی متحول شدند و هزاران مقاله نوشته شد و شبکه‌های عصبی کاربردهای زیادی در رشته‌های مختلف علوم پیدا کردند. بیشتر پیشرفت‌ها در شبکه‌های عصبی به ساختارهای نوین و روش‌های یادگیری جدید مربوط می‌شوند.

۵.۲.۱ مبنای زیستی شبکه عصبی مصنوعی

کار بر روی شبکه‌های عصبی مصنوعی، با الهام از عملکرد مغز انسان از آنجا شروع شد که دانشمندان دریافتند مغز بشر به‌گونه‌ای کاملاً متفاوت از کامپیوترهای دیجیتالی مرسوم محاسبات را انجام می‌دهد. مغز یک سیستم پردازش داده بسیار پیچیده است که از واحدهای ساختاری به نام سلول عصبی یا نرون^{۴۱} تشکیل شده است. مغز انسان شامل ۱۰^{۱۱} عصب می‌باشد که به‌طور گسترده باهم در ارتباط اند. هر نرون با ۱۰^۴ نرون دیگر در ارتباط است که با هم تقریباً ۱۰^{۱۴} سیناپس (دستگاه عصبی)^{۴۲} را به وجود

^{۳۱} Adaptive linear element

^{۳۲} Teo Kohonen

^{۳۳} James Anderson

^{۳۴} Stefan Grossberg

^{۳۵} Self-organizing

^{۳۶} Feedback (Recurrent)

^{۳۷} John Hopfield

^{۳۸} Error back-propagation

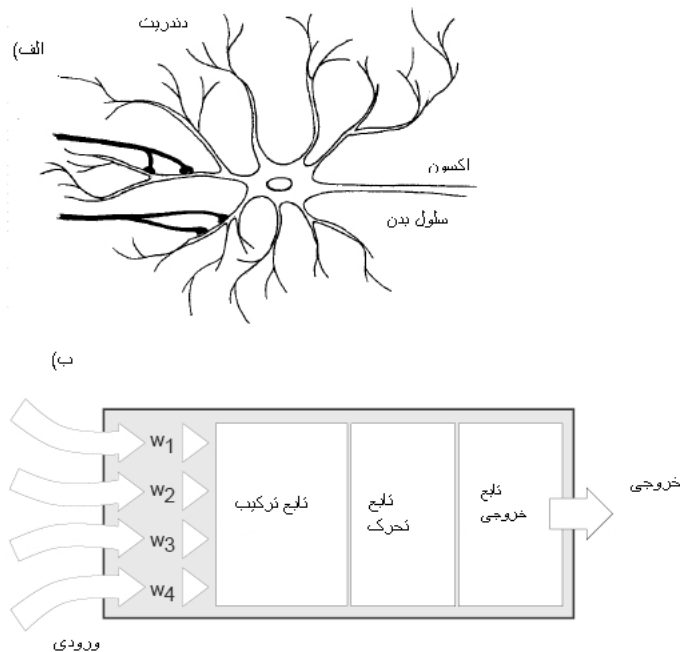
^{۳۹} David Rumelhart

^{۴۰} James Mccland

^{۴۱} Neuron

^{۴۲} Sinaps

می‌آورند. شکل (۱.۲) یک نرون و یک شبکه عصبی ساده تک خروجی را نشان می‌دهد: قسمت الف



شکل ۳.۱: یک نرون طبیعی و یک شبکه عصبی ساده

یک مدل بیولوژیکی عصب را در مغز نشان می‌دهد. ترکیب اصلی یک عصب بیولوژیکی، دندریتها هستند که کار آنها انتقال فعالیت از عصب‌های دیگر به سلول‌های بدن می‌باشد و اکسون که اطلاعات را انتقال می‌دهد. قسمت ب یک مدل ساده ولی بنیادی را نشان می‌دهد که نرون‌ها به طور منفرد در خود پیچیده‌اند. یکی از موارد مهمی که در بسیاری از مدل‌های شبکه عصبی مصنوعی مورد غفلت است، مقدار زمانی است که یک سیگنال در طول اکسون عبور می‌کند، البته در بعضی ساختارها این مورد را به طور واضح در نظر می‌گیرند.

۶.۲.۱ کاربردهای شبکه عصبی

شبکه‌های عصبی مصنوعی دارای دامنه‌ی کاربرد وسیعی می‌باشند، از جمله سامانه‌های آنالیز ریسک، کنترل هواپیما بدون خلبان، آنالیز کیفیت جوشکاری، آنالیز کیفیت کامپیوتر، آزمایش اتاق اورژانس، اکتشاف نفت و گاز، سامانه‌های تشخیص ترمز کامیون، تخمین ریسک وام، شناسایی طیفی، تشخیص دارو، فرآیندهای کنترل صنعتی، مدیریت خطا، تشخیص صدا، تشخیص هیپاتیت، بازیابی اطلاعات راه دور، شناسایی مین‌های زیردریایی، تشخیص اشیاء سه بعدی و دست نوشته‌ها و چهره و... در کل می‌توان کاربردهای شبکه‌های عصبی را به صورت زیر دسته بندی کرد: تناظر (شبکه الگوهای مغشوش و به هم

ریخته را بازشناسی می‌کند)، خوشه‌یابی، دسته‌بندی، شناسایی، بازسازی الگو، تعمیم‌دهی (به دست آوردن یک پاسخ صحیح برای محرک ورودی که قبلاً به شبکه آموزش داده نشده)، بهینه‌سازی. امروزه شبکه‌های عصبی در کاربردهای مختلفی نظیر مسائل تشخیص الگو که خود شامل مسائلی مانند تشخیص خط، شناسایی گفتار، پردازش تصویر و مسائلی از این دست می‌شود و نیز مسائل دسته‌بندی مانند دسته‌بندی متون یا تصاویر، به کار می‌روند. در کنترل یا مدل‌سازی سامانه‌هایی که ساختار داخلی ناشناخته یا بسیار پیچیده‌ای دارند نیز به صورت روز افزون از شبکه‌های عصبی مصنوعی استفاده می‌شود. به عنوان مثال می‌توان در کنترل ورودی یک موتور از یک شبکه عصبی استفاده نمود که در این صورت شبکه عصبی خود تابع کنترل را یاد خواهد گرفت.

۳.۱ شبکه‌های عصبی در بهینه‌سازی

همانطور که گفته شد یکی از کاربردهای هوش مصنوعی در مسائل بهینه‌سازی می‌باشد، بهینه‌نمودن تابع هدف (ماکزیم یا مینیم کردن آن) با استفاده از روش‌های تحلیلی سر راست بسیار پیچیده می‌باشد. با وجود این امکان رسیدن به جواب با بکارگیری روش‌های عددی رایانه‌ای میسر می‌گردد. در این روش‌ها با تغییر متغیرهای طراحی در دوره‌های متوالی و با در نظر گرفتن قیود به جواب بهینه نزدیک می‌شویم. استفاده از روش‌های بهینه‌سازی متداول و تحلیل مستقیم سازه‌ها در دفعات مکرر موجب افزایش قابل ملاحظه‌ای زمان محاسبه می‌گردد. بحث و بررسی در مورد کاربرد شبکه‌های عصبی (شبکه‌های عصبی مصنوعی) در بهینه‌سازی از اوایل سال ۱۹۸۰ میلادی آغاز شده است. نتایج پژوهش‌های انجام شده از آن زمان تاکنون، مواردی چون برنامه‌ریزی خطی، برنامه‌ریزی درجه دوم، برنامه‌ریزی هندسی و برنامه‌ریزی غیرخطی را در بر می‌گیرد. ایده اصلی در استفاده از شبکه‌های عصبی مصنوعی برای مسائل بهینه‌سازی استفاده از یک تابع انرژی (نامنفی) و یک سیستم دینامیکی است که این دو بیان‌کننده‌ی مدل‌های شبکه‌های عصبی مصنوعی متناظر مسائل بهینه‌سازی هستند. سیستم دینامیکی بیان شده معمولاً یک دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطی مرتبه اول است. انتظار می‌رود که برای یک نقطه‌ی آغازین نقطه‌ی پایداری دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطی به دست آمده، جواب بهینه‌ی مسأله بهینه‌سازی اصلی باشد. یک اصل اساسی در استفاده از تابع انرژی این است که برای همگرایی دستگاه معادلات دیفرانسیل به نقطه‌ی پایداری آن، تابع انرژی متناظر با آن حتماً باید نامنفی باشد. البته می‌توان مدل شبکه‌های عصبی نظیر مسائل بهینه‌سازی را حتی بدون در نظر گرفتن تابع انرژی نیز بیان کرد. بنابراین برای یک مدل متناظر با مسائل بهینه‌سازی، اصل اساسی استفاده از شبکه‌های عصبی در اینگونه مسائل به صورت زیر بیان می‌شود:

”برای یک نقطه‌ی آغازین دلخواه، نقطه‌ی تعادل دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطی بدست آمده جواب بهینه مسأله اصلی است و برعکس.”

مدل‌های مطرح شده متناظر مسائل مختلف بهینه‌سازی را می‌توان به دو قسمت مدل‌های دوگانی و

مدل‌های جریمه‌ای تقسیم نمود. نظریه دوگانی و توابع جریمه‌ای دو نظریه بسیار مهم در مسائل بهینه‌سازی هستند که اکثر این مسائل بر مبنای این دو روش کلاسیک قابل حل هستند. در نظریه‌ی توابع جریمه‌ای معمولاً از مدل‌های گرادیانی برای معرفی مدل مورد نظر استفاده می‌شود، ولی در نظریه دوگانی از مدل‌های اولیه - دوگان برای حل این مسائل استفاده می‌شود. اگر بتوان متناظر با هر مسأله بهینه‌سازی، روش مشخصی را ارائه نمود که آن روش برای حل آن مسأله شرایط لازم و کافی را برآورده سازد، آنگاه می‌توان متناظر با آن روش، یک مدل شبکه عصبی برای مسأله مورد نظر بسازیم. تاکنون برای مسائل برنامه‌ریزی خطی، درجه دوم و غیرخطی ارائه مدل‌های مختلفی ارائه شده است. در ادامه به ارائه چند مدل شبکه عصبی مختلف می‌پردازیم.

۱.۳.۱ مدل‌های مختلف شبکه‌های عصبی

مدل اول

مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && f(x) = a^T x \\ & \text{subject to} && \\ & && g(x) = Dx - b = 0, \\ & && x \geq 0, \end{aligned} \tag{۵.۱}$$

که در آن $D \in \mathbb{R}^{m \times n}$ و $\text{Rank}(D) = m$ و $a \in \mathbb{R}^n$ ، $x, b \in \mathbb{R}^m$ است. دوگان (۵.۱) به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && \bar{f}(y) = b^T y \\ & \text{subject to} && \\ & && \bar{g}(y) = \bar{D}^T y - a \leq 0, \\ & && y \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{۶.۱}$$

در [۱۱] مدل متناظر برای حل (۵.۱) به صورت زیر نمایش داده شده است:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -[D^T(Dx - b) - \beta(\bar{D}^T y - a)], \\ \frac{dy}{dt} = -\beta[(Dx - \bar{D}^T y - a)^+ - b], \end{cases} \tag{۷.۱}$$

که در آن $\beta = \|(x + \bar{D}^T y - a)^+ - x\|_2$ و $(x, y)^T \in \{(x, y)^T \mid x \geq 0\}$.

مدل دوم

مسئله برنامه‌ریزی درجه دوم زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && f(x) = \frac{1}{2}x^T A x + a^T x \\ & \text{subject to} && \\ & && D x - b = 0, \\ & && x \geq 0, \end{aligned} \tag{۸.۱}$$

که در آن A یک ماتریس متقارن معین مثبت است. دوگان (۸.۱) به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && \bar{f}(y) = b^T y - \frac{1}{2}x^T A x \\ & \text{subject to} && \\ & && \bar{D} y - A x - a \leq 0. \end{aligned} \tag{۹.۱}$$

در [۱۱] مدل متناظر برای حل (۸.۱) به صورت زیر نمایش داده شده است:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\{D^T(x-b) + \gamma(-D^T y + Ax + a) + \gamma A[x - (x + D^T y - Ax - a)^+]\}, \\ \frac{dy}{dt} = -\gamma\{Dx - b + D[(x + D^T y - Ax - a)^+ - x]\}, \end{cases} \tag{۱۰.۱}$$

که در آن $\gamma = \|(x + D^T y - Ax - a)^+ - x\|_2^{-1}$ و $(x, y)^T \in \{(x, y)^T \mid x \geq 0\}$.

مدل سوم

مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && f(x), \\ & \text{subject to} && \\ & && g(x) = [g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x)]^T \leq 0, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned} \tag{۱۱.۱}$$

در آن $f(x), g_i(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ و $f(x), g(x) \in C^2$. برای حل (۱۱.۱) هاپفیلد و تنک^{۴۳} در [۱۳] یک مدل شبکه عصبی به صورت زیر ارائه دادند:

$$\dot{x} = C^{-1}\{-\nabla f(x) - \nabla g(x)g^+(x) - \frac{1}{s}Q^{-1}x\}s, \tag{۱۲.۱}$$

^{۴۳}Hopfield and Tank

که در آن C یک ماتریس قطری $n \times n$ بیان‌کننده ظرفیت هر نرون و Q یک ماتریس قطری $n \times n$ است که اعضای آن به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$q_{ij} = \frac{1}{\frac{1}{\rho_i} + \sum_{j=1}^m -d_{ji}}, \quad (13.1)$$

که در آن $\frac{1}{\rho_i}$ ضریب هدایت گرمایی هر نرون، d_{ji} وزن‌های تخصیص داده شده به نرون‌های داخلی و s پارامتر جریمه است. تابع انرژی متناظر به صورت زیر انتخاب شده است:

$$E_{\lambda}(x) = f(x) + \sum_{j=1}^m [g_i^+]^2 + \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{2sr_{ii}}. \quad (14.1)$$

فصل ۲

یک مساله بهترین تقریب

۱.۲ مقدمه

در این فصل به بیان مساله بهترین تقریب می‌پردازیم. دستگاه معادلات خطی $Ax = b$ را در نظر می‌گیریم، که A ماتریس $m \times n$ و b ماتریس m بعدی و x ماتریس n بعدی است. می‌دانیم این دستگاه ممکن است جواب نداشته باشد. برای این منظور به دنبال جواب تقریبی برای دستگاه هستیم و اگر دستگاه بینهایت جواب داشته باشد بدنبال بهترین جواب با کمترین مقدار تابع به ازای هر نقطه بدست می‌آوریم. برای حل این دستگاه روش‌هایی مانند اعمال سطری مقدماتی و ... وجود دارد. ما در این فصل برای بدست آوردن جواب دستگاه به رابطه‌ای می‌رسیم که نیاز به عملیات ماتریسی زیادی مانند ضرب ماتریسی و معکوس‌گیری ماتریس‌ها است، بخصوص این عملیات برای ماتریس‌های با بعد بالاتر مشکل‌زاست به همین دلیل برای بدست آوردن جواب دستگاه از روش شبکه عصبی استفاده می‌کنیم.

۱.۱.۲ بیان مساله

فرض کنید $A = [a_{ij}]$ ماتریس $m \times n$ ، $[x]$ ماتریس n بعدی و ماتریس $[b]$ ، m بعدی است. دستگاه زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

هرگاه سطرهای ماتریس A بیشتر از ستون‌هایش باشد A را طویل می‌نامیم و اگر ستون‌های آن

بیشتر از سطرهایش باشد ماتریس A را عریض می‌نامیم.

قضیه ۱.۱.۲. مجموعه جوابهای دستگاه $Ax = b$ مجموعه ای محدب است.

برهان. حالت های مختلف جواب دستگاه ها عبارتند از:

دستگاه های مورد نظر ممکن است جواب نداشته باشد که مجموعه جواب آن \emptyset است و محدب است و یا جواب منحصر به فرد داشته باشد، در این حالت مجموعه جواب دستگاه بصورت تک نقطه‌ای است و محدب است. اگر دستگاه مورد نظر ما بینهایت جواب داشته باشد مجموعه جواب دستگاه بصورت خط است و خط محدب است، بنابراین مجموعه جواب دستگاه $Ax = b$ محدب است. \square

قضیه ۲.۱.۲. ([۹]) هر مجموعه محدب حداکثر یک بهترین تقریب دارد.

برهان. فرض کنید K مجموعه‌ای محدب باشد و دارای دو بهترین تقریب مانند y_1, y_2 باشد، بنابراین اگر $x \in X$ و $y_1, y_2 \in P_K(x)$ در نتیجه $\frac{(y_1+y_2)}{2} \in K$ است. با استفاده از تعریف مجموعه محدب داریم:

$$\begin{aligned} d(x, K) &\leq \|x - \frac{1}{2}(y_1 + y_2)\| = \left\| \frac{1}{2}(x - y_1) + \frac{1}{2}(x - y_2) \right\| \\ &\leq \frac{1}{2} \|x - y_1\| + \frac{1}{2} \|x - y_2\| = d(x, K). \end{aligned}$$

از نامساوی بالا نتیجه می‌گیریم که برای برخی $\rho \geq 0$

$$x - y_1 = \rho(x - y_2).$$

بنابراین برای $\rho = 1$ ، داریم $y_1 = y_2$. در نتیجه فرض خلف باطل و حکم ثابت است. \square

مجموعه $\{y \in X \mid y = Ax, x \in \mathbb{R}^n\}$ را \mathcal{M} در نظر می‌گیریم که در آن $X = l_2(m)$ است.

لم ۳.۱.۲. مجموعه‌ی $\mathcal{M} = \{y \in X \mid y = Ax, x \in \mathbb{R}^n\}$ زیرفضا با بعد متناهی است.

برهان. به [۹] مراجعه کنید.

\square

قضیه ۴.۱.۲. هر دنباله‌ی کراندار در \mathbb{R} دارای زیردنباله‌ای همگراست.

\square

برهان. به [۲] مراجعه کنید.

قضیه ۵.۱.۲. هر زیرفضای با بعد متناهی از فضای ضرب داخلی، بسته است.

برهان. فرض می‌کنیم \mathcal{M} توسط $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ تولید شده است و n بعدی است، با استقرا قضیه را ثابت می‌کنیم. قرار می‌دهیم $n = 1$ و y_k دنباله‌ای کراندار در \mathcal{M} باشد، $y_k = \alpha_k x_1$ را بصورت $y_k = \alpha_k x_1$ می‌توان نوشت. در نتیجه $\{\alpha_k\}$ دنباله‌ای کراندار در \mathbb{R} است. بنابر (۴.۱.۲) دارای زیردنباله‌ای همگرا در \mathbb{R} است. زیر دنباله‌ی مذکور را α_{k_j} می‌نامیم که به α_0 همگراست بطوریکه $(\alpha_{k_j} \rightarrow \alpha_0)$ ، این استدلال حد داشتن y_k در \mathcal{M} را ثابت می‌کند. بنابراین استقرا برای $n = 1$ برقرار است. فرض می‌کنیم \mathcal{M} تولید شده توسط $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ باشد، برای $n + 1$ بعدی را ثابت می‌کنیم: فرض می‌کنیم \mathcal{M} توسط $\{x_1, x_2, \dots, x_{n+1}\}$ و \mathcal{M}_n توسط $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ تولید شده باشند. طبق فرض استقرا \mathcal{M}_n بسته است و $x_{n+1} \notin \mathcal{M}_n$ پس می‌توان نتیجه گرفت $d(x_{n+1}, \mathcal{M}_n) > 0$. فرض می‌کنیم $\{y_k\}$ دنباله‌ای کراندار در \mathcal{M} و بصورت $y_k = z_k + \beta_k x_{n+1}$ و $z_k \in \mathcal{M}$ باشد.

$$\|y_k\| \geq d(y_k, \mathcal{M}_n) = d(z_k + \beta_k x_{n+1}, \mathcal{M}_n) = d(\beta_k x_{n+1}, \mathcal{M}_n)$$

$$|\beta_k| < \frac{\|y_k\|}{d(x_{n+1}, \mathcal{M}_n)}$$

در نتیجه $\{\beta_k\}$ دنباله‌ای کراندار است و

$$\|z_k\| = \|y_k - \beta_k x_{n+1}\| \leq \|y_k\| + |\beta_k| \|x_{n+1}\|$$

دنباله‌های $\{y_k\}$ و $\{\beta_k\}$ کراندارند. بنابراین $\{z_k\}$ کراندار است بنابراین دارای زیردنباله‌ای همگراست. زیردنباله‌های $z_{k_j} \rightarrow z_0$ و $\beta_{k_j} \rightarrow \beta_0$ در نظر می‌گیریم که $z_0, \beta_0 \in \mathcal{M}$ هستند. اگر $y_0 = z_0 + \beta_0 x_{n+1}$ باشد در نتیجه $y_0 \in \mathcal{M}$.

$$y_{k_j} \rightarrow y_0$$

$$\|y_{k_j} - y_0\| = \|(z_{k_j} - z_0) + (\beta_{k_j} - \beta_0)x_{n+1}\| \leq \|z_{k_j} - z_0\| + |\beta_{k_j} - \beta_0| \|x_{n+1}\| \rightarrow 0$$

□

چون $y_{k_j} \rightarrow y_0$ و $y_0 \in \mathcal{M}$ بنابراین \mathcal{M} بسته است.

نتیجه ۶.۱.۲. زیرفضای \mathcal{M} بسته است.

قضیه ۷.۱.۲. هر زیر مجموعه‌ی بسته از زیرفضای \mathcal{M} ، پروکسیمینال است.

□

برهان. برای اثبات به [۹] رجوع کنید.

قضیه ۸.۱.۲. هر زیرمجموعه محدب بسته و با بعد متناهی در $l_2(m)$ ، چبیشف است.

□

برهان. برای اثبات به [۹] مراجعه کنید.

نتیجه ۹.۱.۲. مجموعه \mathcal{M} چبیشف است. بنابراین دستگاه $Ax = b$ دارای جواب بهترین تقریب است و جواب آن یکتاست.

لم ۱۰.۱.۲. فضاهای \mathbb{R}^m و $l_2(m)$ یکرخت هستند.

□ برهان. برای اثبات به [۹] رجوع کنید.

با توجه به لم (۱۰.۱.۲) و تعریف نرم در $l_2(m)$ برای یافتن جواب دستگاه بالا یعنی $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ عبارت زیر را مینیمم می‌کنیم:

$$\sum_{i=1}^m (\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - b_i)^2$$

اگر y_0 بهترین تقریب این دستگاه باشد هدف پیدا کردن بهترین تقریب y_0 در زیر فضای \mathcal{M} است، در اینصورت بازای هر $x_0 \in \mathbb{R}^n$ داریم: $Ax_0 = y_0$

قضیه ۱۱.۱.۲. اگر \mathcal{M} زیرفضا باشد و برای هر $x \in X, y_0 \in \mathcal{M}$ آنگاه $y_0 = p_{\mathcal{M}}(x)$ اگر و فقط اگر $x - y_0 \in \mathcal{M}^\perp$ یعنی $\langle x - y_0, y \rangle = 0, \forall y \in \mathcal{M}$.

□ برهان. برای اثبات به [۹] رجوع کنید.

با استفاده از قضیه (۱۱.۱.۲) داریم: $y_0 = p_{\mathcal{M}}(b)$ اگر و فقط اگر $b - y_0 \in \mathcal{M}^\perp$ اگر و فقط اگر $\forall x \in \mathbb{R}^n \langle b - y_0, Ax \rangle = 0$ در تعریف ضرب داخلی داریم:

$$\langle y, Ax \rangle = \sum_{i=1}^m y_i (\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j) = \sum_{j=1}^n (\sum_{i=1}^m a_{ji}^* y_i) x_j = \langle A^*y, x \rangle$$

از بالا نتیجه می‌گیریم $y_0 = P_{\mathcal{M}}(b)$ اگر و تنها اگر $\forall x \in \mathbb{R}^n \langle A^*(b - y_0), x \rangle = 0$ بنابراین

$$A^*(b - y_0) = 0 \implies A^*b = A^*y_0$$

چون $y_0 \in \mathcal{M}$ ، پس بصورت زیر نوشته می‌شود

$$y_0 = Ax_0$$

بنابراین داریم:

$$A^*b = A^*Ax_0$$

چون A^*A معکوس پذیر است داریم

$$x_0 = (A^*A)^{-1}A^*b$$

ملاحظه می‌شود برای بدست آوردن جواب تقریبی دستگاه (یعنی x_0) نیاز به عملیات ماتریسی بسیاری مانند ضرب ماتریسی و معکوس گیری ماتریس‌ها است، به همین دلیل برای بدست آوردن جواب

دستگاه از روش شبکه عصبی استفاده می‌کنیم. در این فصل وجود جواب و یکتا بودن جواب برای دستگاه $Ax = b$ را ثابت کردیم. در فصل های بعد برای حالت های مختلف M بعدی بودن ماتریس $A_{m \times n}$ مدل شبکه عصبی ارائه می‌دهیم و همگرا بودن شبکه عصبی یا عبارتی دارای جواب بودن دستگاه را ثابت می‌کنیم.

۲.۲ بهترین تقریب: نظریه کمترین مربعات

یکی از مسایل کلاسیک بهترین تقریب، به صورت زیر می‌تواند بیان شود: یک تابع پیوسته بر روی بازه $[a, b]$ تعریف شده است. برای یک n ثابت، به دنبال چندجمله‌ای p از درجه حداکثر n هستیم که کمترین انحراف ممکن را از f داشته باشد. انحراف را می‌توان با عبارت زیر اندازه گرفت.

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x) - p(x)|.$$

فورا می‌توان تشخیص داد که این کاملاً با سری تیلور ساده بریده شده f ، اگر داشته باشد، متفاوت است. در حقیقت، ما در این جا یک مساله اکسترم داریم که جوابش به هیچ وجه واضح نیست.

وجود

در این جا فرض می‌کنیم E یک فضای خطی نرم‌دار و G یک زیرفضای E باشد. به ازای هر $f \in E$ ، فاصله f از G با کمیت زیر تعریف می‌شود:

$$d(f, G) = \inf_{g \in G} \|f - g\|,$$

این قدرمطلق مینیمم انحرافی را اندازه می‌گیرد که می‌توانیم امیدوار باشیم در تقریب بردار f به وسیله یک عنصر از G تحصیل نماییم. اگر یک عنصر g از G دارای خاصیت

$$\|f - g\| = d(f, G),$$

باشد، آن‌گاه g این مینیمم انحراف را اختیار می‌کند و بهترین تقریب f از G نامیده می‌شود. لذا مفهوم بهترین تقریب بستگی به نرم انتخاب شده برای مساله دارد.

در مساله کلاسیک ذکر شده فوق، فضای نرم‌دار E فضای $C[a, b]$ کلیه توابع پیوسته تعریف شده بر روی $[a, b]$ است و نرم عبارت است از

$$\|f\| = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|, \quad f \in C[a, b]. \quad (1.2)$$

پس زیرفضای G فضای Π_n تمام چندجمله‌ای‌های با درجه کوچکتر یا مساوی n می‌باشد که به عنوان یک زیرفضا از $C[a, b]$ تعبیر می‌شود.

در مساله کلی بهترین تقریب، یکی از مسایل اصلی این است که آیا بهترین تقریب برای f وجود دارد؟ در این جا یک قضیه وجودی مهم آمده است.

قضیه ۱۰.۲.۲. ([۹]) اگر G یک زیرفضای با بعد متناهی در یک فضای خطی نرم دار E باشد، آنگاه هر نقطه از E دارای لااقل یک بهترین تقریب در G است.

پرهان. فرض کنید f یک عنصر از E باشد. هر داوطلب مانند g برای بهترین تقریب f باید با عنصر صفر G مقایسه می شود، از این رو

$$\|f - g\| \leq \|f - 0\| = \|f\|,$$

بنابراین ما جستجوی خود را به مجموعه

$$K = \{g \in G : \|g - f\| \leq \|f\|\},$$

محدود می کنیم. مجموعه K بسته و کراندار است. چون G از بعد متناهی است، K فشرده است. چون تابع $\|f - g\| \rightarrow g$ پیوسته است، می توانیم این قضیه را بیان کنیم که یک تابع پیوسته حقیقی مقدار بر روی یک مجموعه فشرده اینفیم خود را اختیار می کند. \square

به طور کلی، بهترین تقریبها منحصر به فرد نیستند.

فضاهای ضرب داخلی

در واقع بدست آوردن بهترین تقریب برای G و f خاص می تواند یک کار مشکل باشد و معمولا مستلزم حل یک دستگاه غیرخطی می باشد. ولیکن یک حالت مهم وجود دارد، که ما فقط نیاز به حل معادلات خطی داریم. این حالتی است که در آن E یک فضای ضرب داخلی است.

لم ۲۰.۲.۲. ([۹]) در یک فضای ضرب داخلی داریم

$$\text{الف. } \langle \sum_{i=1}^n a_i f_i, g \rangle = \sum_{i=1}^n a_i \langle f_i, g \rangle$$

$$\text{ب. } \|f + g\|^2 = \|f\|^2 + 2\langle f, g \rangle + \|g\|^2$$

$$\text{ج. } \text{اگر } f \perp g, \text{ آنگاه } \|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2$$

$$\text{د. } |\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \|g\|$$

$$\text{ه. } \|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = 2\|f\|^2 + 2\|g\|^2$$

برهان. قسمت الف به استقرا و با استفاده از اصول i و ii تعریف فضای ضرب داخلی ثابت می‌شود. قسمت ب از اصول i و ii و iv استفاده می‌کند:

$$\begin{aligned}\|f + g\|^2 &= \langle f + g, f + g \rangle = \langle f, f \rangle + \langle f, g \rangle + \langle g, f \rangle + \langle g, g \rangle \\ &= \|f\|^2 + 2\langle f, g \rangle + \|g\|^2\end{aligned}$$

قسمت ج، قانون فیثاغورث، فورا از قسمت ب نتیجه می‌شود. قسمت د نامساوی شوارتز است. برای اثبات آن فرض کنید که برای زوج مرتب (f, g) برقرار نباشد.

$$|\langle f, g \rangle| > \|f\| \|g\|$$

چون $\langle f, 0 \rangle = 0$ واضح است که $g \neq 0$. بنابر همگن بودن، می‌توانیم فرض کنیم $\|g\| = 1$ ، بنابراین $\|f\| < 1$. پس به تناقض می‌رسیم:

$$0 \leq \|f - g\|^2 = \|f\|^2 - 2\langle f, g \rangle + \|g\|^2 = \|f\|^2 - 1$$

□

قسمت ه با محاسبات مبتنی بر قسمت ب به دست می‌آید.

به محض این‌که نامساوی شوارتز موجود باشد، نامساوی مثلثی برای نرم به صورت زیر ثابت می‌شود:

$$\begin{aligned}\|f + g\|^2 &= \|f\|^2 + 2\langle f, g \rangle + \|g\|^2 \\ &\leq \|f\|^2 + 2\|f\| \|g\| + \|g\|^2 \\ &= (\|f\| + \|g\|)^2\end{aligned}$$

قضیه ۳.۲.۲. فرض کنید G یک زیرفضا از فضای ضرب داخلی E باشد. به ازای $f \in E$ و $g \in G$ خواص زیر معادل هستند:

i. g بهترین تقریب برای f در G است.

ii. $f - g \perp G$

برهان. اگر $f - g \perp G$ ، آن‌گاه به ازای هر $h \in G$ بنابر قانون فیثاغورث داریم:

$$\|f - h\|^2 = \|(f - g) + (g - h)\|^2 = \|f - g\|^2 + \|g - h\|^2 \geq \|f - g\|^2$$

برای حالت عکس، فرض کنید که g بهترین تقریب برای f باشد، و فرض کنید $h \in G$ و $\lambda > 0$ پس

$$\begin{aligned}0 &\leq \|f - g + \lambda h\|^2 - \|f - g\|^2 \\ &= \|f - g\|^2 + 2\lambda \langle f - g, h \rangle + \lambda^2 \|h\|^2 - \|f - g\|^2 \\ &= \lambda \{2\langle f - g, h \rangle + \lambda \|h\|^2\}\end{aligned}$$

با اجازه دادن $\lambda \downarrow 0$ ، نتیجه می‌گیریم $\langle f - g, h \rangle \geq 0$. همان نامساوی باید برای $-h$ نیز برقرار باشد و بنابراین $\langle f - g, h \rangle \leq 0$. از این رو $\langle f - g, h \rangle = 0$ و چون h در G دلخواه بود پس $f - g \perp G$. \square

توجه کنید که یک نتیجه اثبات، یکتایی بهترین تقریب در این وضع خاص می‌باشد.

دستگاه‌های متعامد

راه دیگری برای حل مسایل تقریب در فضای ضرب داخلی وجود دارد که به وسیله دستگاه‌های متعامد انجام می‌شود. می‌گوییم یک دنباله متناهی یا نامتناهی از بردارهای f_1, f_2, \dots در یک فضای ضرب داخلی متعامد است اگر

$$\langle f_i, f_j \rangle = 0 \quad (i \neq j)$$

مجموعه متعامد یکه نامیده می‌شود اگر برای هر i و j داشته باشیم:

$$\langle f_i, f_j \rangle = \delta_{ij}$$

چنین دستگاه‌هایی به واسطه نتیجه زیر برای تقریب بسیار مناسب می‌باشند.

قضیه ۴.۲.۲. فرض کنید $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ یک دستگاه متعامد یکه در یک فضای ضرب داخلی E باشد. بهترین تقریب f توسط یک عنصر $\sum_{i=1}^n c_i g_i$ به دست می‌آید اگر و تنها اگر $c_i = \langle f, g_i \rangle$.

برهان. فرض کنید G زیرفضای تولیدشده توسط g_1, g_2, \dots, g_n باشد. توجه دارید که بهترین تقریب، $\sum_{i=1}^n c_i g_i$ مانند قضیه (۳.۲.۲) توسط شرط

$$f - \sum_{i=1}^n c_i g_i \perp G$$

مشخص می‌شود. لذا فقط باید بررسی کنیم که این شرط معادل شرط $c_i = \langle f, g_i \rangle$ است. حال $f - \sum_{i=1}^n c_i g_i$ عمود خواهد بود اگر و تنها اگر بر هر بردار پایه‌ای g_j عمود باشد. با محاسبه ضرب داخلی مورد نیاز (به ازای $1 \leq j \leq n$) داریم:

$$\begin{aligned} \langle f - \sum_{i=1}^n c_i g_i, g_j \rangle &= \langle f, g_j \rangle - \sum_{i=1}^n c_i \langle g_i, g_j \rangle \\ &= \langle f, g_j \rangle - c_j = 0 \end{aligned}$$

\square

استراتژی زیر بنابراین ملاحظات پیشنهاد می‌شود: اگر مایل هستیم که عناصر E را توسط عناصر یک زیرفضای G تقریب بزنیم، ابتدا باید یک پایه متعامد یکه مانند $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ برای G به دست آوریم. سپس بهترین تقریب f عبارت است از $\sum_{i=1}^n \langle f, g_i \rangle g_i$.

قانون فیثاغورث تعمیم یافته و نامساوی بسل

نتیجه بعدی قانون فیثاغورث تعمیم یافته می باشد.

لم ۵.۲.۲. ([۳]) اگر $[g_1, g_2, \dots, g_n]$ متعامد باشد، آنگاه

$$\left\| \sum_{i=1}^n a_i g_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 \|g_i\|^2. \quad \forall a_i \in \mathbb{R}$$

برهان. اگر $n = 1$ واضح است. اگر معادله برای n درست باشد آنگاه به ازای $n + 1$ نیز درست است زیرا $a_{n+1}g_{n+1}$ بر $\sum_{i=1}^n a_i g_i$ عمود بوده و به کار بردن حالت مقدماتی قانون فیثاغورث نتیجه می دهد:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^{n+1} a_i g_i \right\|^2 &= \left\| \sum_{i=1}^n a_i g_i \right\|^2 + \|a_{n+1}g_{n+1}\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^n a_i^2 \|g_i\|^2 + a_{n+1}^2 \|g_{n+1}\|^2 \end{aligned}$$

□

نتیجه زیر نامساوی بسل می باشد.

لم ۶.۲.۲. ([۳]) اگر $[g_1, g_2, \dots, g_n]$ متعامد یکه باشد، آنگاه

$$\sum_{i=1}^n |\langle f, g_i \rangle|^2 \leq \|f\|^2$$

برهان. فرض کنید $g^* = \sum_{i=1}^n \langle f, g_i \rangle g_i$. بنابر قضیه (۴.۲.۲)، g^* بهترین تقریب برای f در فضای G پدید آمده به وسیله g_i ها می باشد. بنابر قضیه (۳.۲.۲)، $f - g^* \perp G$. بنابر قانون فیثاغورث (که دو بار به کار می رود)، داریم:

$$\|f\|^2 = \|f - g^*\|^2 + \|g^*\|^2 \geq \|g^*\|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle f, g_i \rangle|^2$$

□

فرایند گرام - اشمیت

اکنون توجه خود را به این سوال معطوف می کنیم که چگونه میتوان یک پایه متعامد یکه به دست آورد؟ فرایند گرام-اشمیت در قضیه زیر توضیح داده می شود.

قضیه ۷.۲.۲. ([۲]) فرض کنید $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ یک پایه برای یک زیرفضای U از یک فضای ضرب داخلی باشد. رابطه زیر را به طور بازگشتی تعریف می‌کنیم:

$$u_i = \left(\left\| v_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle v_i, u_j \rangle u_j \right\| \right)^{-1} \left(v_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle v_i, u_j \rangle u_j \right) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

در این صورت $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ یک پایه متعامد یکه برای U است.

برهان. فضای پدید آمده توسط $\{v_1, v_2, \dots, v_i\}$ را با U_i نشان می‌دهیم. با استقرا بر روی i ثابت خواهیم کرد که

$$\{u_1, u_2, \dots, u_i\} \subseteq U_i \quad \text{آ.}$$

ب. $\{u_1, u_2, \dots, u_i\}$ متعامد یکه است.

به ازای $i = 1$ بلافاصله ملاحظه می‌کنیم که $u_1 \in U_1$ و $\|u_1\| = 1$. حال فرض کنید که روابط آ و ب برای اندیس $i - 1$ درست باشند. پس $\{u_1, u_2, \dots, u_{i-1}\} \subseteq U_{i-1}$ و $v_i \notin U_{i-1}$. بنابراین v_i یک ترکیب خطی از u_1, u_2, \dots, u_{i-1} نیست و مخرج کسر در تعریف u_i صفر نیست. نتیجه می‌شود که u_i خوش تعریف است و به U_i تعلق دارد. از این رو $\{u_1, u_2, \dots, u_i\} \subseteq U_i$. چون $\sum_{j=1}^{i-1} \langle v_i, u_j \rangle u_j$ بهترین تقریب v_i در U_{i-1} (بنابر قضیه (۴.۲.۲))، بنابر قضیه از این رو $\{u_1, u_2, \dots, u_{i-1}\} \perp u_i$. واضح است که $\|u_i\| = 1$. \square

یک ساده‌سازی قابل توجه وقتی رخ می‌دهد که فرآیند گرام-اشمیت بر روی توابع تک جمله‌ای $1, x, x^2, \dots$ (به ترتیب طبیعی‌شان) به کار گرفته می‌شود. در قضیه زیر، هر ضرب داخلی می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد به شرطی که دارای این خاصیت باشد که برای هر سه تابع داشته باشیم:

$$\langle fg, h \rangle = \langle f, gh \rangle$$

این به طور آشکار برای ضرب داخلی معمولی استفاده شده، معتبر است.

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx$$

قضیه ۸.۲.۲. دنباله چندجمله‌ای‌هایی که به طور استقرایی به صورت زیر تعریف می‌شوند، متعامد هستند:

$$p_n(x) = (x - a_n)p_{n-1}(x) - b_n p_{n-2}(x) \quad (n \geq 2)$$

با $p_1(x) = x - a_1$, $p_0(x) = 1$ و

$$a_n = \langle xp_{n-1}, p_{n-1} \rangle / \langle p_{n-1}, p_{n-1} \rangle$$

$$b_n = \langle xp_{n-1}, p_{n-2} \rangle / \langle p_{n-2}, p_{n-2} \rangle$$

برهان. از فرمول‌ها واضح است که هر p_n یک چندجمله‌ای تکین درجه n است و بنابراین صفر نیست. از این رو، مخرج کسر فرمول‌ها صفر نیست. حال با استقرا بر روی n نشان می‌دهیم که $\langle p_n, p_i \rangle = 0$ به ازای $i = 0, 1, \dots, n-1$. برای $n = 0$ ، چیزی برای اثبات نداریم. برای $n = 1$ ، به تعریف a_1 توجه می‌کنیم،

$$\langle p_1, p_0 \rangle = \langle (x - a_1)p_0, p_0 \rangle = \langle xp_0, p_0 \rangle - a_1 \langle p_0, p_0 \rangle = 0$$

حال فرض کنیم ادعای ما برای اندیس $n - 1$ معتبر است، که در آن $n \geq 2$. آنگاه

$$\langle p_n, p_{n-1} \rangle = \langle xp_{n-1}, p_{n-1} \rangle - a_n \langle p_{n-1}, p_{n-1} \rangle - b_n \langle p_{n-2}, p_{n-1} \rangle = 0$$

$$\langle p_n, p_{n-2} \rangle = \langle xp_{n-1}, p_{n-2} \rangle - a_n \langle p_{n-1}, p_{n-2} \rangle - b_n \langle p_{n-2}, p_{n-2} \rangle = 0$$

به ازای هر $i = 0, 1, \dots, n-3$ داریم:

$$\begin{aligned} \langle p_n, p_i \rangle &= \langle xp_{n-1}, p_i \rangle - a_n \langle p_{n-1}, p_i \rangle - b_n \langle p_{n-2}, p_{n-1} \rangle \\ &= \langle p_{n-1}, xp_i \rangle \\ &= \langle p_{n-1}, p_{i+1} + a_{i+1}p_i + b_{i+1}p_{i-1} \rangle = 0 \end{aligned}$$

در آخرین گام، از فرمول بازگشتی برای نمایش xp_i استفاده کردیم. اگر $i = 0$ ، باید به جای آن بنویسیم $xp_0 = p_1 + a_1p_0$. \square

قضیه ۹.۲.۲. چندجمله‌ای‌های p_n توصیف شده در قضیه (۸.۲.۲) دارای این خاصیت هستند که p_n یک چندجمله‌ای تکین درجه n است که برای آن $\|p_n\|$ مینیمم است.

برهان. یک چندجمله‌ای دلخواه تکین از درجه n می‌تواند به صورت $p_n - \sum_{i=0}^{n-1} c_i p_i$ نمایش داده شود. نرم این تابع مینیمم خواهد بود اگر

$$p_n - \sum_{i=0}^{n-1} c_i p_i \perp \prod_{n-1}$$

این رابطه تعامد با اختیار کردن $c_i = 0$ (به ازای همه مقادیر i) برقرار می‌شود زیرا $p_n \perp \prod_{n-1}$. \square

اگر $[u_1, u_2, \dots]$ یک دستگاه متعامد یکه در یک فضای ضرب داخلی E باشد، آنگاه یک خانواده از عملگرهای تصویر، p_n ، توسط معادله زیر تعریف می‌شوند:

$$P_n f = \sum_{i=1}^n \langle f, u_i \rangle u_i$$

قضیه ۱۰.۲.۲. عملگرهای P_n دارای خواص زیر هستند:

i. E, P_n را به طور خطی به یک زیرفضای U_n پدید آمده توسط u_1, u_2, \dots, u_n می‌نگارد.

ii. هر P_n یک تصویر است، یعنی $P_n^2 = P_n$.

iii. هر P_n یک نگاشت متعامد است به این مفهوم که $f - P_n f \perp U_n$.

iv. $P_n f$ بهترین تقریب f در U_n است.

v. هر P_n خودالحاق است: $\langle P_n f, g \rangle = \langle f, P_n g \rangle$.

□

برهان. به ([۳]) مراجعه کنید.

ماتریس گرام

مسائل تقریب در فضاها ضرب داخلی با یک روش مقدماتی بدون استفاده از پایه‌های متعامد یک می‌توانند حل شوند. اگر $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ پایه‌ای برای زیرفضای U باشد و اگر بخواهیم بهترین تقریب را برای یک عنصر f در U محاسبه کنیم، می‌توانیم به طریق زیر عمل کنیم:

برای این که یک عنصر $u \in U$ بهترین تقریب برای f باشد، بنابه قضیه (۳.۲.۲)، لازم و کافی است که $u - f \perp U$ باشد. یک شرط معادل آن است که $\langle u - f, u_i \rangle = 0$ به ازای $1 \leq i \leq n$ با قرار دادن $u = \sum_{j=1}^n c_j u_j$ شرط زیر را بدست می‌آوریم:

$$\sum_{j=1}^n c_j \langle u_j, u_i \rangle = \langle f, u_i \rangle \quad (1 \leq i \leq n)$$

این‌ها معادلات نرمال برای مساله هستند که یک دستگاه n معادله خطی و n مجهول c_1, c_2, \dots, c_n را پدید می‌آورند. ماتریس ضرایب ماتریس گرام نامیده می‌شود، عناصرش عبارتند از $G_{ij} = \langle u_i, u_j \rangle$.

لم ۱۱.۲.۲. اگر $[u_1, u_2, \dots, u_n]$ مستقل خطی باشند، آنگاه ماتریس گرام آن نامنفرد است.

برهان. بنابر فرآیند گرام‌اشمیت می‌توانیم یک ماتریس $n \times n$ مانند B به قسمی بیابیم که بردارهای

$$v_i = \sum_{s=1}^n B_{is} u_s$$

یک مجموعه متعامد یکه تشکیل دهند. سپس

$$\sigma_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle = \left\langle \sum_s B_{is} u_s, \sum_r B_{jr} u_r \right\rangle = \sum_s \sum_r B_{is} \langle u_s, u_r \rangle B_{rj}^T$$

□

این معادله به صورت $I = B G B^T$ است. این نتیجه می‌دهد که G نامنفرد است ([۳]).

مقاومت در مقابل ارایه اثبات دیگری از این نتیجه غیرممکن است. مساله تقریبی که در بالا بیان شد بنابر تذکر بعد از قضیه (۳.۲.۲) دارای یک جواب منحصر به فرد u است. بسط u نیز بر حسب جملات پایه، $u = \sum c_i u_i$ ، منحصر به فرد است زیرا این یک ویژگی هر پایه است. این نتیجه می‌دهد که مساله

ما یک جواب منحصر به فرد (c_1, c_2, \dots, c_n) دارد. چون این برای هر f برقرار است، ماتریس G باید نامنفرد باشد.

لم (۱۱.۲.۲) به ما اطمینان می‌دهد که معادلات نرمال یک جواب یکتا دارند. بنابراین، در اصل هر پایه برای زیرفضای U می‌تواند برای حل مساله تقریب استفاده شود. در عمل عدد وضعیت ماتریس گرام باید در نظر گرفته شود. ماتریس هیلبرت $([۲])$ ، ماتریس گرام برای توابع $u_j(x) = x^{j-1}$ می‌باشد به هنگامی که از ضرب داخلی $\langle f, h \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$ استفاده می‌شود. از نقطه نظر وضعیت، رضایت بخش‌ترین پایه‌ها، پایه‌های متعامد یکه هستند زیرا ماتریس‌های گرام آن‌ها ماتریس‌های همانی می‌باشند.

۱.۲.۲ جواب معادلات خطی

دستگاه $A_{m \times n}x = b$ را در نظر می‌گیریم، در این صورت:

۱. اگر $m > n$ ، دستگاه را زیرمعین می‌نامیم. در این حالت یا دستگاه جواب ندارد یا ممکن است جوابش منحصر به فرد باشد.

۲. اگر $m = n$ ، دستگاه را معین می‌نامیم. در این حالت با فرض معکوس پذیر بودن A دستگاه فقط یک جواب دارد.

۳. اگر $m < n$ ، دستگاه را زیرمعین می‌نامیم. در این حالت با فرض $\text{rank}(A | b) = \text{rank}(A)$ ، دستگاه بی نهایت جواب دارد.

۲.۲.۲ جواب کمترین مربعات معادلات خطی: دستگاه‌های زیر معین

دستگاه زیرمعین $Ax = b$ را در نظر بگیرید. این دستگاه در حالت کلی ناسازگار است بررسی می‌کنیم. هدف از حل دستگاه، یافتن برداری مانند X است بطوریکه فاصله b و Ax حداقل باشد. یعنی

$$\min_x \|b - Ax\|_2^2.$$

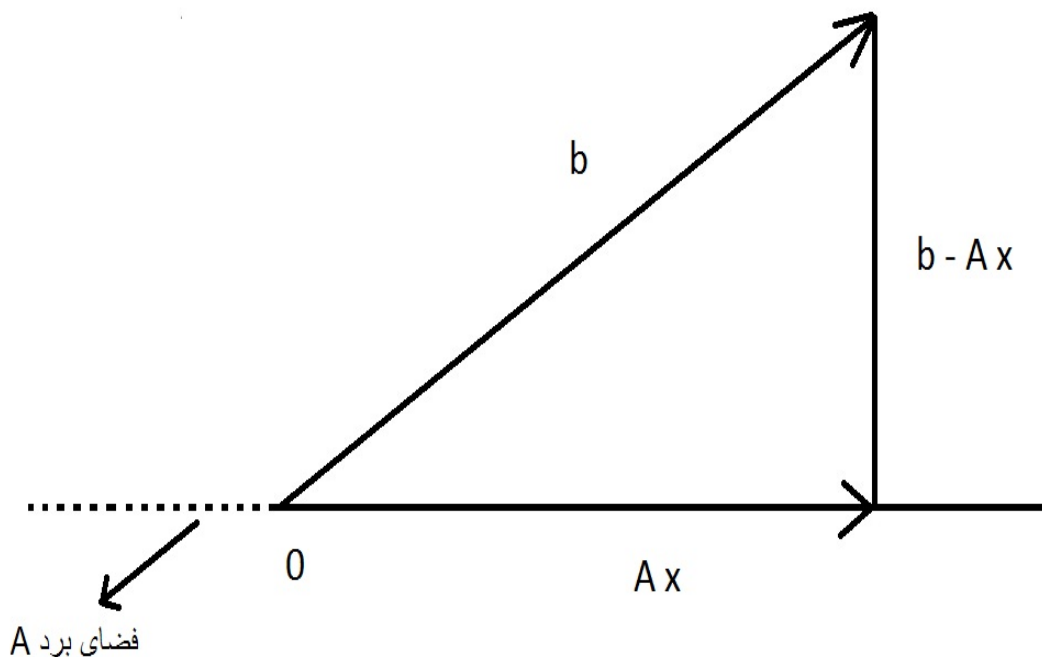
به این منظور به دنبال برداری در $R(A)$ هستیم. در نتیجه باید x را طوری محاسبه کنیم که $b - Ax$ عمود بر $R(A)$ باشد که در آن

$$R(A) = \{Ay \mid y \in \mathcal{R}^n\} = \{\text{ترکیب خطی ستونهای } A\}$$

بنابراین x ای می‌خواهیم که $b - Ax$ به تمام ستونهای ماتریس A عمود باشد: $(A_j \text{ ستون } j \text{ ماتریس } A \text{ است})$

$$A_j^T(b - Ax) = 0 \quad j = 1, \dots, n \iff A^T(b - Ax) = 0 \iff A^T Ax = A^T b.$$

پس حل معادلات نرمال منجر به جواب بهترین تقریب می‌گردد.



۳.۲.۲ جواب کمترین مربعات معادلات خطی: دستگاههای زیر معین

قضیه ۱۲.۲.۲. دستگاه زیرمعین $Ax = b$ را در نظر بگیرید. در حالت کلی این دستگاه بی نهایت جواب دارد و هر جواب آن بصورت $x = y + z$ می باشد که y یک جواب خاص برای دستگاه می باشد و z در رابطه $Az = 0$ صدق می کند.

برهان. کافی است Ax را حساب کنید.

$$Ax = A(y + z) = Ay + Az = Ay = b.$$

برای حالت عکس فرض کنید \bar{x} یک جواب برای دستگاه $Ax = b$ باشد، در این صورت داریم:

$$\bar{x} = y + (\bar{x} - y) = y + z,$$

که در آن $z = \bar{x} - y$. حال کافی است ثابت کنیم z در دستگاه $Az = 0$ صدق می کند و داریم:

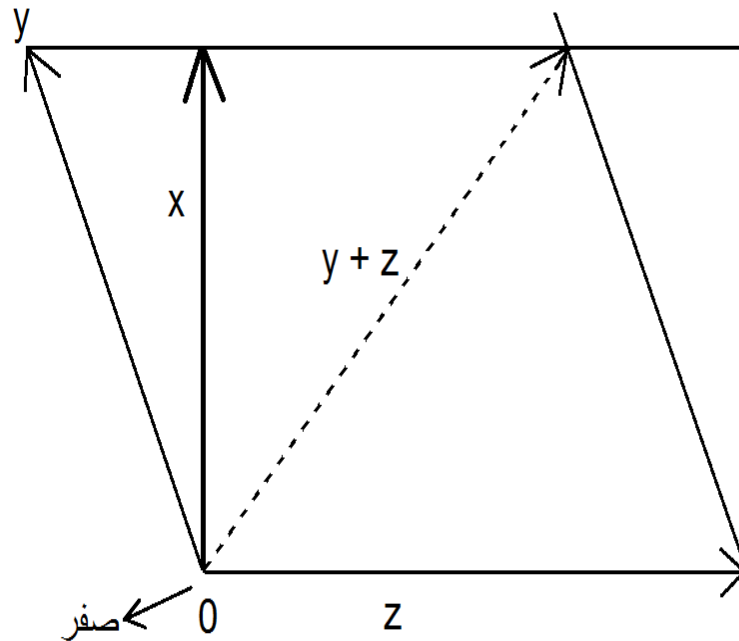
$$Az = A(\bar{x} - y) = A\bar{x} - Ay = b - b = 0.$$

□

هسته A را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$\mathcal{N}(A) = \{z \in \mathbb{R}^n \mid Az = 0\}$$

در مورد دستگاههای زیرمعین جوابی مدنظر است که دارای کمترین طول اقلیدسی است. جواب کمترین



مربعات یعنی جواب با کوتاهترین طول. بنابراین باید مساله بصورت زیر حل شود:

$$\min \|x\|_2^2$$

$$\text{subject to } Ax = b.$$

برای بدست آوردن جواب دستگاه زیرمعین باید $Ax = b$ بر $\mathcal{N}(A)$ عمود باشد. (یعنی $x \in \mathcal{N}(A)^\perp$) از طرفی $\mathcal{N}(A)^\perp = \mathcal{R}(A^T)$. بنابراین باید $x \in \mathcal{R}(A^T)$ باشد، یعنی به ازای برخی t ، $x = A^T t$ است. در نتیجه برای بدست آوردن x کافی است t را بدست آوریم. داریم:

$$b = Ax = AA^T t \implies t = A^T (AA^T)^{-1} b$$

بنابراین جواب کمترین مربعات برای حالت زیر معین بصورت $x = A^T (AA^T)^{-1} b$ است.

۳.۲ بهترین تقریب: نظریه چبیشف

در این بخش با فضای $C(X)$ از همه توابع حقیقی مقدار پیوسته تعریف شده بر روی یک فضای توپولوژیک X کار می‌کنیم. فرض می‌کنیم X فضای هاسدورف فشرده باشد. خواننده ای که مایل است از ملاحظات درباره توپولوژی کلی خودداری کند ممکن است X را یک مجموعه بسته و کراندار در فضای حقیقی \mathbb{R}^k - بعنوان مثال یک بازه $[a, b]$ در \mathbb{R} در نظر بگیرد.

فضای $C(X)$ یک فضای نرم‌دار می‌شود (در حقیقت یک فضای باناخ)، اگر نرم را به صورت زیر

تعریف کنیم

$$\|f\| = \max_{x \in X} |f(x)|$$

این نرم در سرتاسر این بخش مورد استفاده قرار می‌گیرد.

یک مسأله مهم بهترین تقریب در فضای $C(X)$ بصورت زیر است. یک عنصر f از $C(X)$ و یک زیرفضا با بعد متناهی G در $C(X)$ مفروضند، می‌خواهیم f را با یک عنصر G تقریب بزنیم. از اینرو تعریف می‌کنیم:

$$d(f, G) = \inf_{g \in G} \|f - g\|$$

و سوال می‌کنیم که آیا بهترین تقریب وجود دارد- یعنی یک عنصر $g \in G$ وجود دارد به قسمی که

$$\|f - g\| = d(f, G)$$

۱.۳.۲ مشخص سازی بهترین تقریبها

قبل از پرداختن به مشخص سازی بهترین تقریبها برای روشن شدن مطلب لم زیر را ملاحظه می‌کنیم.

لم ۱.۳.۲. برای یک عنصر $g \in G$ ، خواص زیر معادلند:

۱. g یک بهترین تقریب برای f است.

۲. 0 یک بهترین تقریب برای $f - g$ است.

برهان. اگر (۱) درست باشد، آنگاه به ازای هر $h \in G$ داریم

$$\|f - g\| \leq \|f - g - h\|$$

این ایجاب می‌کند که صفر یک بهترین تقریب $f - g$ باشد. برعکس اگر (۲) درست باشد، آنگاه نامساوی قبلی به ازای هر $h \in G$ برقرار است و (چون $g + h$ می‌تواند عنصری از G باشد)، (۱) درست می‌باشد.

□

بنابراین واقعا نیازمندیم بفهمیم که کدام عنصر f از $C(X)$ دارای بهترین تقریب در G می‌باشد، یعنی دارای خاصیت $d(f, G) = \|f\|$ است. برای $f \in C(X)$ مجموعه بحرانی را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\text{crit}(f) = \{x \in X : |f(x)| = \|f\|\}$$

قضیه ۲.۳.۲. برای یک عنصر f و یک زیرفضای G در $C(X)$ خواص زیر معادند.

$$۱. \|f\| = d(f, G)$$

۲. هیچ عنصری از G دارای همان علامت f در $\text{crit}(f)$ نیست.

برهان. فرض کنید که (۱) نادرست باشد. پس به ازای عنصری مانند $g \in G$ داریم:

$$\|f - g\| < \|f\|$$

به ازای $x \in \text{crit}(f)$ قرار می‌دهیم $\sigma(x) = \text{sgn} f(x)$ و داریم:

$$\sigma(x)[f(x) - g(x)] \leq |f(x) - g(x)| \leq \|f - g\| = |f(x)| - \sigma(x)g(x)$$

بنابراین، $\sigma(x)g(x) > 0$ و $g(x)$ همان علامت $f(x)$ را بر روی $\text{crit}(f)$ دارد.

اکنون فرض می‌کنیم (۲) نادرست باشد. فرض کنید $g(x)f(x) > 0$ بر روی $\text{crit}(f)$ برقرار باشد. بدون کاسته شدن از کلیت قضیه فرض می‌کنیم که $\|g\| = 1$. چون $\text{crit}(f)$ یک مجموعه فشرده است و gf یک تابع پیوسته است، ε مثبت وجود دارد به قسمی که $g(x)f(x) > \varepsilon$ بر روی $\text{crit}(f)$ برقرار باشد. قرار دهید

$$\wp = \{x \in X : g(x)f(x) > \varepsilon\}$$

پس \wp یک مجموعه باز شامل $\text{crit}(f)$ است. مکمل آن یک مجموعه فشرده متمایز از $\text{crit}(f)$ است. از اینرو

$$\rho \equiv \max\{|f(x)| : x \in X \setminus \wp\} < \|f\|$$

اکنون سعی می‌کنیم f را توسط λg تقریب بزنیم، که در آن ضرایب λ باید بطور متوالی انتخاب شوند. بینیم چه چیزی مورد نیاز است. ابتدا، برای نقاط داخل \wp مایلیم که نامساوی زیر نقطه ای برقرار باشد:

$$(f - \lambda g)^2 = f^2 - 2\lambda gf + \lambda^2 g^2 \leq \|f\|^2 - 2\lambda\varepsilon + \lambda^2 = \|f\|^2 - \lambda(2\varepsilon - \lambda) < \|f\|^2$$

همان گونه به سادگی بررسی می‌شود، این رابطه درست خواهد بود. اگر برای سایر نقاط - یعنی نقاطی که در $X \setminus \wp$ قرار دارند، درست باشد. می‌خواهیم داشته باشیم

$$\|f - \lambda g\| \leq \|f\| + \lambda \|g\| \leq \rho + \lambda < \|f\|$$

این عبارت اگر $\rho - \|f\| < \lambda < \|f\|$. بنابراین اگر λ درست انتخاب شود

$$\|f - \lambda g\| < \|f\|$$

و این نشان می‌دهد که (۱) نادرست است.

□

با استفاده از لم (۱.۳.۲) و قضیه (۲.۳.۲) ، نتیجه بعدی را به دست می‌آوریم.

نتیجه ۳.۳.۲. ([۲]) فرض کنید f عنصری از $C(X)$ ، G زیرفضایی از $C(X)$ و g^* عنصری از G باشد. برای اینکه g^* بهترین تقریب f در G باشد، لازم و کافی است که هیچ عنصر g ای در G در نامساوی $g(x)[f(x) - g^*(x)] > 0$ بر روی مجموعه $\{x : \|f(x) - g^*(x)\| = \|f - g^*\|\}$ صدق نکند.

نتیجه ۴.۳.۲. برای اینکه یک عنصر $g \in \Pi_1$ بهترین تقریب برای $f \in C[a, b]$ باشد، لازم و کافی است که تابع $(f - g)$ حداقل در سه نقطه از بازه $[a, b]$ مقدار $\pm \|f - g\|$ را با علامت متفاوت اختیار کند.

برهان. با به کارگیری قضیه (۲.۳.۲) در مورد $f - g$ ، خاصیت مشخصه این است که هیچ عنصری از Π_1 $g \in \Pi_1$ نمی‌تواند همان علامت $f - g$ را بر روی $\text{crit}(f - g)$ داشته باشد. لاقلاً سه نقطه در $\text{crit}(f - g)$ باید یافت شود که در آنها مقادیر $f - g$ دارای علامتهای متفاوت باشند زیرا در غیر اینصورت بایست یک نقطه ξ در $[a, b]$ یافت شود به قسمی که نقاط صادق در رابطه $f(x) - g(x) = \|f - g\|$ در یک طرف ξ بوده و نقاط صادق در رابطه $f(x) - g(x) = -\|f - g\|$ در طرف دیگر آن باشند. پس یک تابع خطی که در ξ صفر می‌شود وجود خواهد داشت که دارای همان علامت $f - g$ بر روی $\text{crit}(f - g)$ خواهد بود.

□

لم ۵.۳.۲. فرض کنید K مجموعه‌ای محدب و بسته در \mathbb{R}^n باشد. آنگاه K شامل یک نقطه منحصر به فرد با مینیمم نرم است. بعلاوه، خواص زیر در K معادل هستند.

$$۱. \circ \in K$$

$$۲. \text{ برداری مانند } v \text{ وجود دارد که برای آن } \langle v, u \rangle > 0 \text{ به ازای هر } u \in K \text{ .}$$

برهان. فرض کنید $\rho = \inf\{\|u\| : u \in K\}$ و $u_j \in K$ را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که $\|u_j\| \rightarrow \rho$.

دنباله $[u_j]$ یک دنباله کوشی است زیرا قانون متوازی الاضلاع نتیجه می‌دهد:

$$\|u_i - u_j\|^2 = 2\|u_i\|^2 + 2\|u_j\|^2 - \|u_i + u_j\|^2 \quad (2.2)$$

$$= 2\|u_i\|^2 + 2\|u_j\|^2 - 4\|(u_i + u_j)/2\|^2 \quad (3.2)$$

$$\leq 2\|u_i\|^2 + \|u_j\|^2 - 4\rho^2 \quad (4.2)$$

$$\rightarrow 2\rho^2 + 2\rho^2 - 4\rho^2 = 0$$

چون فضا، کامل است هر دنباله کوشی همگراست. مثلاً $u_j \rightarrow u$. پس $u \in K$ زیرا K بسته است. همچنین بنابر پیوستگی $\|u\| = \rho$. منحصر به فرد بودن با استدلالی نظیر بالا ثابت می‌شود: اگر u و u' دو عنصر با نرم ρ در K باشند، آنگاه

$$\|u - u'\|^2 \leq 2\|u\|^2 + 2\|u'\|^2 - 4\rho^2 = 0$$

اگر (۲) درست باشد، آنگاه (۱) فوراً نتیجه می‌شود.

برای حالت عکس، فرض کنید (۱) درست باشد، v را نقطه‌ای با کمترین نرم در K در نظر می‌گیریم. برای $u \in K$ و دلخواه $\theta \in (0, 1)$ داریم:

$$0 \leq \|\theta u + (1 - \theta)v\|^2 - \|v\|^2 = \theta^2 \|u - v\|^2 + 2\theta \langle u - v, v \rangle$$

و این نشان می‌دهد که

$$0 \leq \theta \|u - v\|^2 + 2\langle u - v, v \rangle$$

با اجازه دادن $\theta \downarrow 0$ ، نتیجه می‌گیریم که $\langle u - v, v \rangle \geq 0$ ، در حالیکه $\langle v, u \rangle \geq \langle v, v \rangle > 0$

□

قضیه ۶.۳.۲. فرض کنید S زیرمجموعه‌ای از فضای خطی n بعدی باشد، هر نقطه پوسته محدب S ترکیب محدب از حداکثر $(n + 1)$ نقطه S است.

برهان. فرض کنید P یک نقطه از پوسته محدب S باشد. بدون کاستن از کلیت قضیه فرض می‌کنیم که P صفر باشد. پس داریم

$$\sum_{i=1}^k \theta_i u_i = 0$$

بازای $\theta_i > 0$ مناسب و $u_i \in S$ ، $\sum_{i=1}^k \theta_i = 1$. می‌توانیم فرض کنیم که چنین نمایش کمینه‌ای از صفر انتخاب شده باشد (یعنی K تا حد ممکن کوچک باشد). نتیجه می‌شود $\theta_i > 0$ به ازای $i = 1, \dots, k$

اگر $k \leq n + 1$ ، اثبات تمام می‌شود. اگر $k > n + 1$ ، آنگاه یک وابستگی خطی نابدیهی $\sum_{i=1}^k \lambda_i u_i = 0$ را بدست می‌آوریم. قرار می‌دهیم $\lambda_1 = 0$.
 ملاحظه می‌کنیم که به ازای همه‌ی اعداد حقیقی t داریم

$$\sum_{i=1}^k (\theta_i + t\lambda_i) u_i = 0$$

فرض کنید

$$\phi(t) = \min_{1 \leq i \leq k} (\theta_i + t\lambda_i)$$

تابع ϕ پیوسته است و $\phi(0) > 0$. به ازای t ای، $\phi(t) < 0$. از اینرو یک t خاص وجود دارد که برای آن $\phi(t_0) = 0$. با قرار دادن $\theta'_i = \theta_i + t_0 \lambda_i$ ، داریم

$$\min \theta'_i = 0, \theta_i \geq 0, \theta'_1 = \theta_1 > 0$$

از اینرو در بسط $\sum_{i=1}^k \theta'_i u_i$ یک جمله دارای $\theta'_i = 0$ است. با تقسیم بر $\sum \theta'_i$ ، را به صورت ترکیب محدب از $k - 1$ عنصر S بیان می‌کنیم، و این با کمینه بودن K متناقض است. \square

لم ۷.۳.۲. پوسته محدب یک مجموعه فشرده در فضای خطی نرم‌دار، فشرده است.

برهان. فرض کنید S مجموعه‌ای فشرده در یک فضای n بعدی X باشد. مجموعه V متشکل از تمام $(2n + 2)$ تایی‌های زیر را در نظر بگیرید

$$v \equiv (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n, u_0, u_1, \dots, u_n),$$

که در آن $\sum_{i=0}^n \theta_i = 1$ و $\theta_i \geq 0$ ، $u_i \in S$ ، $\theta_i \in \mathbb{R}$. این $(2n + 2)$ تایی‌ها نقاطی در $\mathbb{R}^{n+1} \times X \times X \cdots \times X$ می‌باشند. این فضا دارای بعد $n + 1 + (n + 1)n = (n + 1)^2$

است و مجموعه V بسته و کراندار است، از اینرو V فشرده است. $f(v)$ را به صورت $f(v) = \sum_{i=0}^n \theta_i u_i$ تعریف می‌کنیم. پس f ، V را به توی $co(S)$ می‌نگارد. بنا بر قضیه (۶.۳.۲) ، f پوشا (به روی) است. این تابع پیوسته نیز هست. چون تصویر پیوسته یک مجموعه فشرده، فشرده است، نتیجه می‌گیریم که $co(S)$ فشرده است. \square

قضیه ۸.۳.۲. به ازای یک مجموعه فشرده S در \mathbb{R}^n ، خواص زیر معادلند:

۱. برای تمام $v, u \in S$ ای وجود دارد به قسمی که $\langle v, u \rangle > 0$.

۲. 0 در پوسته محدب S قرار ندارد.

برهان. (۲) \implies (۱) فرض می‌کنیم (۲) نادرست باشد، می‌توانیم بنویسیم $\circ = \sum_{i=1}^k \theta_i u_i$. به ازای $\theta_i > 0$ مناسب و $u_i \in S$. به ازای هر $v \in \mathbb{R}^n$ ، داریم :

$$\circ = \langle v, \circ \rangle = \sum_{i=1}^k \theta_i \langle v, u_i \rangle$$

واضح است همه‌ی اعداد $\langle v, u_i \rangle$ نمی‌تواند مثبت باشند. از اینرو (۱) نادرست است. برای حالت عکس ، فرض کنید (۲) درست باشد. بنابر لم (۷.۳.۲) ، $co(S)$ فشرده است و با استفاده از لم (۵.۳.۲) نتیجه می‌گیریم که (۱) درست است. \square

۴.۲ جواب چبیشف معادلات خطی

نتیجه ۱.۴.۲. فرض کنید A ماتریسی $m \times n$ باشد و $b \in \mathbb{R}^m, x \in \mathbb{R}^n$ و $\sigma_i = \text{sgn}(Ax - b)_i$ ،

$$I = \{i : |(Ax - b)_i| = \|Ax - b\|_\infty\}$$

برای اینکه x نرم $\|Ax - b\|_\infty$ را مینیمم کند لازم و کافی است که \circ در پوسته محدب مجموعه $\{\sigma_i A_i : i \in I\}$ قرار گیرد، که در آن A_i سطر i ام A را نمایش می‌دهد.

برهان. در جستجوی مینیمم سازی $\|Ax - b\|_\infty$ یک ترکیب خطی از ستونهای A که تا حد ممکن به b نزدیک باشد، جستجو می‌کنیم. همه بردارهای ستونی را به عنوان توابعی بر مجموعه $\mathbb{T} = \{1, 2, \dots, m\}$ تعبیر می‌کنیم. عنصری که تقریب زده می‌شود b بوده و زیرفضای G از تقریبها فضای ستونی A می‌باشد. بنابر قضیه (۲.۳.۲) ، جواب x با این حقیقت که هیچ عنصری از G علامت σ_i را بر I ندارد، مشخص می‌شود. به طور معادل ، دستگاه $\sigma_i (Av)_i$ ، $i \in I$ ، ناسازگار است. زیرا می‌تواند به صورت $\circ = \langle \sigma_i A_i, v \rangle$ نوشته شود. قضیه (۸.۳.۲) ، شرط معادلی ارائه می‌دهد، یعنی $\circ \in co\{\sigma_i A_i : i \in I\}$. \square

فصل ۳

حل دستگاه‌های خطی زبرمعین به وسیله یک مدل شبکه عصبی

۱.۳ مقدمه

در این بخش راه حلی برای مساله بهترین تقریب فصل قبل ارائه می‌دهیم. در این بخش مدل شبکه عصبی برای دستگاه‌های معادلات خطی ارائه می‌دهیم که ماتریس A طویل باشد، این دستگاه را دستگاه معادلات خطی زبرمعین می‌گویند که معمولا جواب ندارند و ما بدنبال جواب تقریبی برای آن هستیم. تاکنون روش‌های گوناگونی برای حل این دستگاه‌ها پیشنهاد شده است مانند اعمال سطری مقدماتی و روش‌های QR و LR در کتاب‌های آنالیز عددی و روش‌های متعددی نیز در مقالات مختلف بیان شده است. روش ILC در مقاله لاگمن و ...

۱.۱.۳ دستگاه‌های زبرمعین

دستگاه معادلات خطی زیر را در نظر بگیرید.

$$Ax = b \quad (1.3)$$

اگر جوابی برای دستگاه (۱.۳) وجود نداشته باشد، دستگاه را ^۱زبرمعین می‌گوییم. بیشتر اوقات این حالت وقتی اتفاق می‌افتد که ماتریس A طویل باشد. (با ستون‌های مستقل خطی)

^۱Overdetermined

معمولا در اینحالت مقدار خطا را مینیم می‌کنیم:

$$\mathcal{J}(x) = \|b - Ax\|_2^2.$$

بسط $\mathcal{J}(x)$ داریم:

$$\mathcal{J}(x) = (b - Ax)^T (b - Ax) \quad (۲.۳)$$

$$= b^T b - b^T Ax - x^T A^T b + x^T A^T Ax \quad (۳.۳)$$

$$= b^T b - ۲b^T Ax + x^T A^T Ax \quad (۴.۳)$$

با مشتق‌گیری از $\mathcal{J}(x)$ داریم:

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathcal{J}(x) = -۲A^T b + ۲A^T Ax.$$

مشتق آنرا مساوی صفر قرار می‌دهیم.

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathcal{J}(x) = 0 \implies A^T Ax = A^T b.$$

با فرض معکوس‌پذیر بودن $A^T A$ داریم:

$$x = (A^T A)^{-1} A^T b$$

بنابراین جواب کمترین مربعات دستگاه (۱.۳) برابر است با

$$\min_x \|b - Ax\|_2^2 \implies x = (A^T A)^{-1} A^T b.$$

۲.۳ مدل شبکه عصبی

برای بدست آوردن $x = (A^T A)^{-1} A^T b$ مشکلات معکوس گرفتن و پیچیدگی محاسباتی بوجود آمد، بخصوص برای ماتریس‌های با بعد بزرگتر. به این خاطر برای حل آن از شبکه عصبی استفاده می‌کنیم. ابتدا مساله برنامه‌ریزی درجه دوم زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\min_x \mathcal{J}(x) = \|b - Ax\|_2^2. \quad (۵.۳)$$

با توجه به [۱۹] $x^* \in \mathbb{R}^n$ ، یک جواب بهینه (۵.۳) است اگر و فقط اگر x^* در شرایط کاروش-کان-تاکر زیر صدق کند:

$$A^T Ax = A^T b$$

x^* را نقطه کاروش-کان-تاکر می‌گویند.

قضیه ۲.۲.۳. تابع $\mathcal{J}(x) = \|b - Ax\|_2^2$ محدب است.

برهان. ماتریس هسین $\mathcal{J}(x)$ برابر است با $2A^T A$ و معین مثبت است. لذا $\mathcal{J}(x)$ محدب است. \square
چون $\mathcal{J}(x)$ محدب است بنا بر قضیه کتاب [۱۹]، x^* جواب بهینه (۵.۳) است اگر و تنها اگر x^* نقطه کاروش-کان-تاکر برای (۵.۳) باشد.

فرض کنید $x(\cdot)$ متغیرهای وابسته به زمان باشند، هدف ساختن یک سیستم دینامیکی زمان پیوسته است که در شرایط کاروش-کان-تاکر مساله (۵.۳) صدق می‌کند. برای حل (۵.۳) از معادله دینامیکی به صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$\frac{dx}{dt} = -(A^T A x - A^T b), \quad (۶.۳)$$

با نقطه آغازین x_0 و $x \in \mathbb{R}^{n+l}$. D^* را بعنوان مجموعه‌ی نقاط بهینه (۵.۳) تعریف می‌کنیم. فرض کنید

$$\psi(x) = A^T A x - A^T b. \quad (۷.۳)$$

بنابراین شبکه عصبی (۶.۳) بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{dx}{dt} = \tau \psi(x), \quad (۸.۳)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad (۹.۳)$$

که در آن τ پارامتر بیان کننده نرخ همگرایی شبکه عصبی است.

۳.۳ تحلیل پایداری

در این قسمت پایداری و همگرایی مدل شبکه عصبی (۸.۳) و (۹.۳) بررسی می‌گردد.

قضیه ۱.۳.۳. فرض کنید x^* نقطه‌ی تعادل شبکه عصبی (۹.۳) و (۸.۳) باشد، در این صورت x^* یک نقطه کاروش-کان-تاکر برای مساله (۵.۳) است. برعکس، اگر $x^* \in \mathbb{R}^n$ یک جواب بهینه (۵.۳) باشد، x^* نقطه‌ی تعادل مدل (۹.۳) و (۸.۳) باشد.

برهان. فرض کنید x^* نقطه‌ی تعادل شبکه‌ی عصبی (۹.۳) و (۸.۳) است. آنگاه $\frac{dx^*}{dt} = 0$ ، در نتیجه داریم:

$$A^T A x^* - A^T b = 0. \quad (10.3)$$

از رابطه اخیر واضح است که x^* در شرایط کاروش-کان-تاگر صدق می‌کند. اثبات برعکس آن واضح است.

□

لم ۲.۳.۳. برای هر نقطه‌ی اولیه دلخواه $x(t_0)$ در سیستم (۹.۳) و (۸.۳) یک جواب پیوسته منحصر بفرد برای $x(t)$ وجود دارد.

برهان. تابع $A^T A x - A^T b$ پیوسته‌ی لیپ‌شیتز موضعی است ([۳]). بر طبق قضیه یکتایی جواب در معادلات دیفرانسیل معمولی [۱۵]، شبکه‌ی عصبی (۹.۳) و (۸.۳) دارای جواب پیوسته منحصر به فرد $x(t), t \in [t_0, \tau)$ برای $\tau > t_0$ که $\tau \rightarrow \infty$ است.

□

لم ۳.۳.۳. فرض کنید $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ رتبه‌ی کامل باشد. سپس ماتریس ژاکوبین $\nabla \psi(x)$ نگاهت ψ تعریف شده در (۱۰.۴) یک ماتریس معین منفی است.

برهان. با یک محاسبه ساده نشان داده می‌شود که

$$\nabla \psi(x) = -A^T A$$

به آسانی میتوان نتیجه گرفت ماتریس $\nabla \psi(y)$ معین منفی است و این اثبات را کامل می‌کند.

□

قضیه ۴.۳.۳. شبکه‌ی عصبی ارائه شده در (۹.۳) و (۸.۳) پایدار مجانبی است و همگرا به x^* است که در آن x^* جواب بهینه (۵.۴) است.

برهان. تابع لیاپانوف زیر را در نظر بگیرید:

$$E(x) = \|\psi(x)\|^2 + \frac{1}{\rho} \|x - x^*\|^2. \quad (11.3)$$

با توجه به (۱۰.۴) داریم:

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \nabla \psi(x) \psi(x).$$

بنابراین

$$\frac{dE(x(t))}{dt} = \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^T \psi + \psi^T \left(\frac{d\psi}{dt}\right) + (x - x^*)^T \frac{dx(t)}{dt} \quad (12.3)$$

$$= \psi^T (\nabla \psi(x)^T + \nabla \psi(x)) \psi + (x - x^*)^T \psi(x). \quad (13.3)$$

با به کاربردن لم (۳.۴.۴) داریم:

$$\psi^T(x)(\nabla\psi(x)^T + \nabla\psi(x))\psi(x) < \circ, \quad \forall x \neq x^*. \quad (۱۴.۳)$$

با استفاده از تعریف (۱۸.۲.۱) و لم (۲۴.۲.۱) داریم

$$(x - x^*)^T(\psi(x) - \psi(x^*)) = (x - x^*)^T\psi(x) < \circ, \quad \forall x \neq x^*.$$

بنابراین

$$\frac{dE(x(t))}{dt} < \circ. \quad (۱۵.۳)$$

یعنی شبکه عصبی (۹.۳) و (۸.۳) پایدار سراسری به مفهوم لیاپانوف است، در ادامه چون

$$E(y) \geq \frac{1}{\rho} \|y - y^*\|^2, \quad (۱۶.۳)$$

یک زیر دنباله‌ی همگرا بصورت زیر وجود دارد

$$\{x(t_k) | t_0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1}, \quad t_k \rightarrow \infty, \quad k \rightarrow \infty, \}$$

$$\text{بطوریکه } \lim_{k \rightarrow \infty} x(t_k) = \bar{x} \text{ و در رابطه زیر صدق می‌کند}$$

$$\frac{dE(y(t))}{dt} = \circ.$$

این نشان می‌دهد که \bar{x} یک $-\omega$ حدنقطه‌ای از $\{x(t) | t \geq t_0\}$ است. با استفاده از قضیه‌ی ناوردای لازال داریم $\{x(t) \rightarrow M\}$ که M بزرگترین مجموعه تغییر ناپذیر در $K = \{x(t) | \frac{dE(x(t))}{dt} = \circ\}$ است. از (۹.۳) و (۸.۳) داریم:

$$\frac{dE(y(t))}{dt} = \circ \Leftrightarrow \frac{dx}{dt} = \circ,$$

سپس $\bar{x} \in D^*$ که $M \subseteq K \subseteq D^*$

با جایگزین کردن $x^* = \bar{x}$ در (۱۵.۴) تابع لیاپانوف دیگری بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\bar{E}(x) = \|\psi(x)\|^2 + \frac{1}{\rho} \|x - \bar{x}\|^2. \quad (۱۷.۳)$$

آنگاه $\bar{E}(x)$ بطور پیوسته مشتق‌پذیر بوده و $\bar{E}(\bar{x}) = \circ$ ، از طرفی:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(t_k) = \bar{x}$$

بنابراین داریم: $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{E}x(t_k) = \bar{E}\bar{x}$

از اینرو

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists q > 0 \quad \text{s.t.} \quad t \geq t_q : \bar{E}(x(t)) < \epsilon.$$

بطور مشابه $\frac{d\bar{E}(x(t))}{dt} \leq 0$ بدست می‌آید و نتیجه می‌دهد

$$\forall t \geq t_q \quad \frac{1}{4} \|x(t) - \bar{x}\|^2 \leq \bar{E}(x(t)) \leq \epsilon.$$

بنابراین $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - \bar{x}\| = 0$ یا $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \bar{x}$ در نتیجه شبکه عصبی ارائه شده در (۹.۳) و (۸.۳) به نقطه تعادل \bar{x} همگرای سراسری است و \bar{x} جواب بهینه (۵.۳) است.

نتیجه ۵.۳.۳. اگر $D^* = \{x^*\}$ ، آنگاه شبکه عصبی (۹.۳) - (۸.۳) برای حل مسأله (۵.۳)، پایدار مجانبی به نقطه تعادل x^* می‌باشد.

۴.۳ مثال‌های عددی

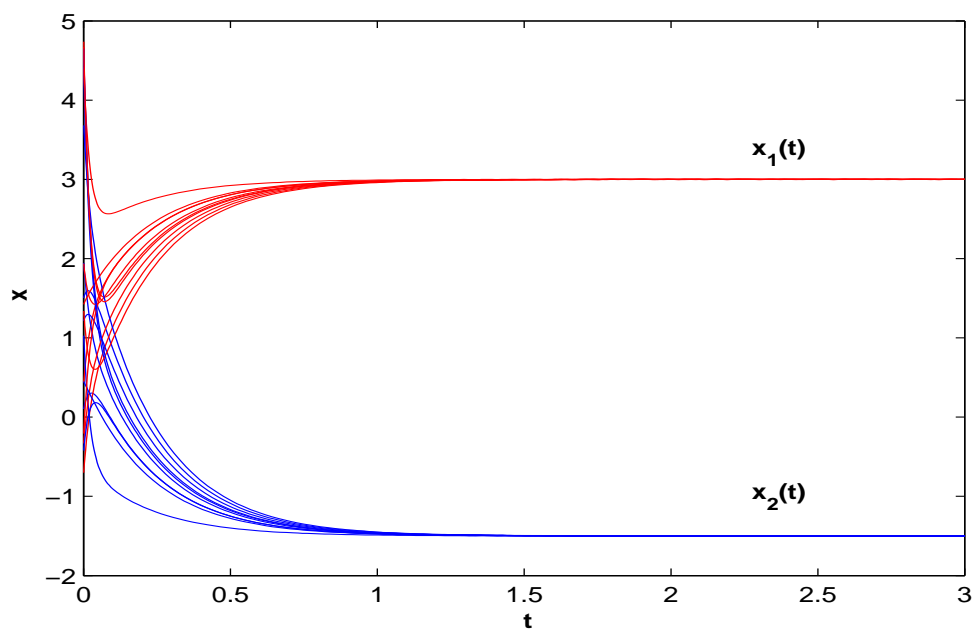
مثال ۱.۴.۳. دستگاه زبرمعین (۱.۳) را در نظر بگیرید که در آن

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

جواب کمترین مربعات دستگاه برابر است با

$$x = \begin{bmatrix} 3 \\ -1/5 \end{bmatrix}.$$

شکل (۱.۳) رفتار گذرا از شبکه عصبی (۸.۳) و (۹.۳) با 10^0 نقطه شروع را نشان می‌دهد. واضح است که مسیرها به جواب کمترین مربعات دستگاه همگرا شدند.



شکل ۱.۳: رفتار گذرا از شبکه عصبی (۹.۳) و (۸.۳) برای حل مثال (۱.۴.۳)

فصل ۴

حل دستگاه‌های خطی زیرمعین به وسیله یک مدل شبکه عصبی

۱.۴ مقدمه

در این بخش نیز راه حلی برای مساله بهترین تقریب مورد نظر ما حالتی که در دستگاه معادلات خطی $Ax = b$ ماتریس A عریض باشد. در این بخش راه حلی برای مساله بهترین تقریب فصل قبل ارائه می‌دهیم. این دستگاه را دستگاه معادلات خطی زیرمعین می‌گویند که معمولاً بینهایت جواب دارند و ما بدنبال جواب کمترین نرم برای آن هستیم. در این بخش مدل شبکه عصبی برای دستگاه‌های معادلات خطی مورد نظر ارائه می‌دهیم. تاکنون روش‌های گوناگونی برای حل این دستگاه‌ها پیشنهاد شده است مانند اعمال سطری مقدماتی و روش‌های QR و LR در کتاب‌های آنالیز عددی و روش‌های متعددی نیز در مقالات مختلف بیان شده است. روش ILC در مقاله لاگمن و ...

۲.۴ دستگاه‌های زیرمعین

دستگاه معادلات خطی زیر را در نظر بگیرید.

$$Ax = b \quad (1.4)$$

اگر بینهایت جواب برای این دستگاه وجود داشته باشد، دستگاه را ^۱زیرمعین می‌گوییم. این حالت بیشتر اوقات وقتی اتفاق می‌افتد که ماتریس A عریض با ستون‌های مستقل خطی باشد.

^۱underdetermined

معمولا در اینحالت جواب x را با کمترین نرم بصورت زیر حساب می‌کنیم.

$$\min_x \mathcal{J}(x) = \|x\|_2^2$$

$$\text{subject to } Ax = b.$$

تابع لاگرانژ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{L}(x, \mathcal{M}) = \|x\|_2^2 + \mathcal{M}^T(b - Ax).$$

مشتقات تابع لاگرانژ برابر است با

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathcal{L}(x) = 2x - A^T \mathcal{M}.$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathcal{M}} \mathcal{L}(x) = b - Ax.$$

با مساوی صفر قرار دادن مشتقات داریم:

$$x = \frac{1}{2} A^T \mathcal{M}. \quad (2.4)$$

$$b = Ax. \quad (3.4)$$

با جایگذاری (۲.۴) در (۳.۴) داریم:

$$b = \frac{1}{2} AA^T \mathcal{M}$$

فرض می‌کنیم AA^T معکوس‌پذیر باشد، در نتیجه

$$\mathcal{M} = 2(AA^T)^{-1}b \quad (4.4)$$

با جایگذاری (۴.۴) در (۲.۴) جواب کمترین نرم دستگاه (۱.۴) برابر است با $x = A^T(AA^T)^{-1}b$ واضح است که

$$Ax = A(A^T(AA^T)^{-1}b) = (AA^T)(AA^T)^{-1}b = b.$$

۳.۴ مدل شبکه عصبی

برای بدست آوردن $x = (A^T A)^{-1} A^T b$ مشکلات معکوس گرفتن و پیچیدگی محاسباتی بوجود آمد، بخصوص برای ماتریس‌های با بعد بالاتر. به این خاطر برای حل آن از یک مدل شبکه عصبی استفاده می‌کنیم.

ابتدا مساله برنامه‌ریزی درجه دوم زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\min_x \mathcal{J}(x) = \|x\|_2^2 \quad (5.4)$$

$$\text{subject to } Ax = b \quad (6.4)$$

با توجه به [۱۹] $x^* \in \mathbb{R}^n$ یک جواب بهینه (۶.۴)-(۵.۴) است اگر و فقط اگر $v^* \in \mathbb{R}^l$ موجود باشد که $(x^{*T}, v^{*T})^T$ در شرایط کاروش-کان-تاکر زیر صدق کند:

$$\begin{cases} \Upsilon x + A^T v = 0, \\ b = Ax. \end{cases} \quad (۷.۴)$$

x^* نقطه کاروش-کان-تاکر است و v^* ضریب لاگرانژ متناظر با x^* نامیده می‌شود.

قضیه ۲.۳.۴. تابع $\mathcal{J}(x)$ محدب است.

برهان. ماتریس هسین $\mathcal{J}(x)$ برابر است با ΥI و معین مثبت است. لذا $\mathcal{J}(x)$ محدب است. \square

چون $\mathcal{J}(x)$ محدب است بنابراین قضیه کتاب [۱۹]، x^* جواب بهینه (۶.۴) و (۵.۴) است اگر و تنها اگر x^* نقطه کاروش-کان-تاکر برای (۶.۴) و (۵.۴) باشد.

فرض کنید $v(\cdot), x(\cdot)$ متغیرهای وابسته به زمان باشند، هدف ساختن یک سیستم دینامیکی با زمان پیوسته است که در شرایط کاروش-کان-تاکر مساله (۶.۴) و (۵.۴) صدق می‌کند. برای حل (۶.۴) و (۵.۴)، از معادله دینامیکی بصورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$\frac{dx}{dt} = -(\Upsilon x + A^T v), \quad (۸.۴)$$

$$\frac{dv}{dt} = b - Ax, \quad (۹.۴)$$

با نقطه آغازین $(x_0^T, v_0^T)^T \in \mathbb{R}^{n+l}$ و $y = (x^T, v^T)^T \in \mathbb{R}^{n+l}$ را بعنوان مجموعه‌ی نقاط بهینه (۶.۴) و (۵.۴) تعریف می‌کنیم. فرض کنید

$$\psi(y) = \begin{bmatrix} -(\Upsilon x + A^T v) \\ b - Ax \end{bmatrix}. \quad (۱۰.۴)$$

بنابراین شبکه عصبی (۹.۴) و (۸.۴) بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{dy}{dt} = \tau \psi(y), \quad (۱۱.۴)$$

$$y(t_0) = y_0. \quad (۱۲.۴)$$

که در آن $\tau > 0$ پارامتر بیان کننده نرخ همگرایی مدل شبکه عصبی است.

۴.۴ تحلیل پایداری

در این بخش همگرایی و پایداری شبکه عصبی (۹.۴) و (۸.۴) را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

قضیه ۱.۴.۴. فرض کنید $y^* = (x^{*T}, v^{*T})^T$ نقطه‌ی تعادل شبکه عصبی (۹.۴) و (۸.۴) باشد، در این صورت x^* یک نقطه شرایط کاروش-کان-تاکر برای مساله‌ی (۶.۴) و (۵.۴) است. برعکس، اگر $x^* \in \mathbb{R}^n$ یک جواب بهینه‌ی (۶.۴) و (۵.۴) باشد، $v^* \in \mathbb{R}^l$ وجود دارد به طوری که $y^* = (x^{*T}, v^{*T})^T$ نقطه‌ی تعادل شبکه‌ی عصبی در (۹.۴) و (۸.۴) است.

برهان. فرض کنید $y^* = (x^{*T}, v^{*T})^T$ نقطه‌ی تعادل شبکه‌ی عصبی (۹.۴) و (۸.۴) باشد. سپس
یعنی: $\frac{dx^*}{dt} = \frac{dv^*}{dt} = 0$

$$2x^* + A^T v^* = 0, \quad (13.4)$$

$$Ax^* - b = 0. \quad (14.4)$$

از (۱۳.۴)-(۱۴.۴) واضح است که $y^* = (x^{*T}, v^{*T})^T$ در شرایط کاروش-کان-تاکر صدق می‌کند.
□ عکس آن نیز بوضوح برقرار است.

لم ۲.۴.۴. برای هر نقطه‌ی اولیه دلخواه $y(t_0) = (x(t_0)^T, v(t_0)^T)^T$ در سیستم (۹.۴)-(۸.۴) یک جواب پیوسته منحصر به فرد $y(t) = (x(t)^T, v(t)^T)^T$ وجود دارد.

برهان. بدلیل اینکه $2x + A^T v$ و $Ax - b$ پیوسته‌ی لیپ‌شیتز موضعی هستند. مطابق قضیه یکتایی جواب در معادلات دیفرانسیل معمولی [۱۵]، شبکه‌ی عصبی (۹.۴) و (۸.۴) یک جواب پیوسته منحصر به فرد $y(t), t \in [t_0, \tau)$ برای $\tau > t_0$ که $\tau \rightarrow \infty$ دارد.
□

لم ۳.۴.۴. فرض $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ رتبه‌ی کامل باشد. سپس ماتریس ژاکوبین $\nabla \psi(y)$ نگاشت ψ تعریف شده در (۱۰.۴) یک ماتریس نیمه‌معین منفی است.

برهان. با یک محاسبه ساده نشان داده می‌شود که

$$\nabla \psi(y) = \begin{bmatrix} -2I & -A^T \\ A & O_{l \times l} \end{bmatrix}.$$

به آسانی میتوان نتیجه گرفت ماتریس $\nabla \psi(y)$ نیمه‌معین منفی است و این اثبات را کامل می‌کند.
□

قضیه ۴.۴.۴. شبکه‌ی عصبی ارائه شده در (۹.۴) و (۸.۴) پایدار مجانبی است و همگرا به $y^* = (x^{*T}, v^{*T})^T$ است که x^* جواب بهینه (۶.۴) و (۵.۴) است.

برهان. تابع لیپانوف زیر را در نظر بگیرید:

$$E(y) = \|\psi(y)\|^2 + \frac{1}{\gamma} \|y - y^*\|^2. \quad (15.4)$$

با توجه به (۱۰.۴) داریم

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \nabla \psi(y) \psi(y).$$

آنگاه

$$\frac{dE(y(t))}{dt} = \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^T \psi + \psi^T \left(\frac{d\psi}{dt}\right) + (y - y^*)^T \frac{dy(t)}{dt} \quad (16.4)$$

$$= \psi^T (\nabla \psi(y)^T + \nabla \psi(y)) \psi + (y - y^*)^T \psi(y). \quad (17.4)$$

با به کار بردن لم (۳.۴.۴) داریم:

$$\psi^T (y) (\nabla \psi(y)^T + \nabla \psi(y)) \psi(y) \leq 0, \quad \forall y \neq y^*. \quad (18.4)$$

با استفاده از تعریف (۱۸.۲.۱) و لم (۲۴.۲.۱) داریم:

$$(y - y^*)^T (\psi(y) - \psi(y^*)) = (y - y^*)^T \psi(y) \leq 0, \quad \forall y \neq y^*.$$

در نتیجه

$$\frac{dE(y(t))}{dt} \leq 0. \quad (19.4)$$

به این معنی است که شبکه عصبی (۹.۴) و (۸.۴) پایدار مجانبی است، چون

$$E(y) \geq \frac{1}{\gamma} \|y - y^*\|^2, \quad (20.4)$$

یک زیردنباله‌ی همگرا بصورت زیر وجود دارد

$$\{(x(t_k)^T, v(t_k)^T)^T | t_0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1}, t_k \rightarrow \infty, k \rightarrow \infty\},$$

$$\text{بطوریکه } \lim_{k \rightarrow \infty} (x(t_k)^T, v(t_k)^T)^T = (\bar{x}^T, \bar{v}^T)^T \text{ که در آن } \frac{dE(y(t))}{dt} = 0,$$

این نشان می‌دهد که $(\bar{x}^T, \bar{v}^T)^T$ یک $-\omega$ حدنقطه‌ای $\{(x(t)^T, v(t)^T)^T | t \geq t_0\}$ با استفاده از قضیه‌ی ناوردای لازال یک مجموعه‌ی $\{(x(t)^T, v(t)^T)^T \rightarrow M\}$ دارد که M بزرگترین مجموعه تغییر ناپذیر در $K = \{(x(t)^T, v(t)^T)^T | \frac{dE(y(t))}{dt} = 0\}$ از (۹.۴) و (۸.۴) نشان داده می‌شود که

$$\frac{dx}{dt} = 0, \frac{dv}{dt} = 0 \Leftrightarrow \frac{dE(y(t))}{dt} = 0$$

سپس $(\bar{x}^T, \bar{v}^T)^T \in D^*$ که $M \subseteq K \subseteq D^*$ با جایگزین کردن $x^* = \bar{x}$ و $v^* = \bar{v}$ در (۱۵.۴) تابع لیپانوف دیگری بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$\bar{E}(y) = \|\psi(y)\|^2 + \frac{1}{\gamma} \|y - \bar{y}\|^2. \quad (21.4)$$

سپس $\bar{E}(y)$ بطور پیوسته مشتق پذیر بوده و $\bar{E}(\bar{y}) = 0$ توجه شود که :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (x(t_k)^T, v(t_k)^T)^T = (\bar{x}^T, \bar{v}^T)^T,$$

بنابراین:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{E}(x(t_k)^T, v(t_k)^T)^T = \bar{E}(\bar{x}, \bar{v}).$$

از اینرو

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists q > 0 \quad s.t. \quad t \geq t_q : \quad \bar{E}(y(t)) < \epsilon.$$

بطور مشابه $\frac{d\bar{E}(y(t))}{dt} \leq 0$ بنابراین

$$\forall t \geq t_q \quad \frac{1}{\gamma} \|y(t) - \bar{y}\|^2 \leq \bar{E}(y(t)) \leq \epsilon.$$

بنابراین $\lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t) - \bar{y}\| = 0$ و $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \bar{y}$. بنابراین شبکه عصبی ارائه شده در (۹.۴) و (۸.۴) همگرای سراسری به نقطه تعادل $\bar{y} = (\bar{x}^T, \bar{v}^T)^T$ که جواب بهینه (۶.۴) و (۵.۴) است.

نتیجه ۵.۴.۴. اگر $D^* = \{(x^{*T}, v^{*T})^T\}$ شبکه عصبی ((۹.۴)) و ((۸.۴)) برای حل (۶.۴) و (۵.۴) بطور مجانبی پایدار به نقطه تعادل $y^* = (x^{*T}, v^{*T})^T$ می باشد.

۵.۴ مثال های عددی

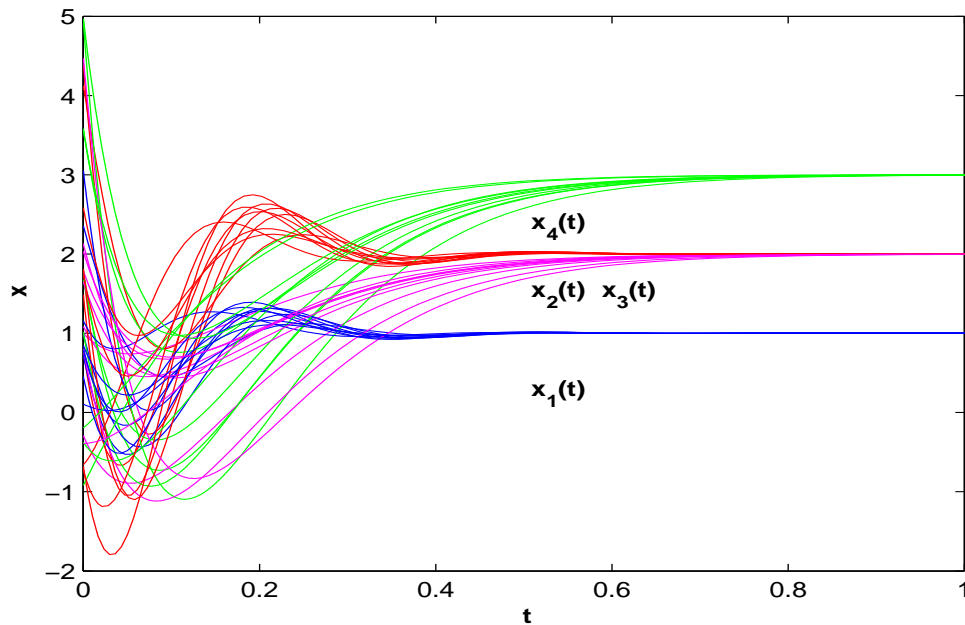
مثال ۱.۵.۴. دستگاه زیرمعمین (۱.۴) را در نظر بگیرید که در آن

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} .5 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

جواب کمترین نرم دستگاه برابر است با

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

شکل (۱.۴) رفتار گذرا از شبکه عصبی (۱۲.۴) و (۱۱.۴) با 10° نقطه شروع را نشان می‌دهد. واضح است که مسیرها به جواب کمترین نرم دستگاه همگرا شدند.



شکل ۱.۴: رفتار گذرا از شبکه عصبی (۱۲.۴) و (۱۱.۴) برای حل مثال (۱.۵.۴)

نتیجه گیری

در این پایان نامه یک مسئله بهترین تقریب را بیان کردم یعنی حل دستگاه‌های معادلات خطی را مورد بررسی قرار دادم و توسط مدل شبکه عصبی همگرا به یک جواب تقریبی رسیدم. برای حل دستگاه‌ها روش‌های متعددی مانند سطری پلکانی کردن و روش QR و LR وجود دارد. مزایای این روش عبارتند از:

- مدل شبکه عصبی ارائه شده با شروع از هر نقطه اولیه، بدلیل همگرایی سراسری مدل در یافتن جواب تأثیری ندارد.

- استفاده از این روش کمتر با پیچیدگی محاسباتی مواجه می‌شویم.

- مدل شبکه عصبی ارائه شده برای دستگاه $Ax = b$ زمانی که بعد ماتریس A بزرگ باشد بسیار مناسب است.

روش حل دستگاه‌های خطی بدست آمده را می‌توان در مسائل مهندسی بکار گرفت .

مراجع

- [۱] دکتر علی کاوه، دکتر عباس ایران منش، شبکه‌های عصبی مصنوعی در بهینه‌سازی داده‌ها، مشاور مرکز تحقیقات ساختمان، ۱۳۸۷
- [۲] دکتر مهدی ایران منش، مبانی آنالیز ریاضی، دانشگاه صنعتی شاهرود، ۱۳۹۲
- [۳] آنالیز عددی، دیوید کینکید، وارد چینی. جلد دوم، دانشگاه امام رضا (ع)، ۱۳۸۶
- [۴] آشنایی با شبکه‌های عصبی، جکسون. تی، بیل. آر، موسسه انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف، چاپ دوم، ۱۳۸۳.
- [5] Avriel. M, Nonlinear Programming: Analysis and Methods, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.
- [6] Barnoy. A, Bellare. M, Halldórsson. M, Shachnai. H, On chromatic sums and distributed resource allocation, Information and Computation 140, 183–202, 1988.
- [7] Bazaraa. M. S, Sherali. H. D, Jarvis. J. J, Linear Programming and Network Flows, 2nd ed. Wiley, New York, 1993.
- [8] Bazaraa MS, Sherali HD, Shetty CM, "Nonlinear Programming-Theory and Algorithms", 2nd ed. New York: Wiley, 1993.
- [9] Deutsch. F, "Best Approximation in Inner Product Spaces" , Springer-Verlag, 2002.
- [10] Effati S, Nazemi A. R, "Neural network models and its application for solving linear and quadratic programming problems", Appl. Math. Comput, 172, 305-331, 2006.
- [11] Giaro. K, Kubale. M, Edge-chromatic sum of trees and bounded cyclicity graphs, Information Processing Letters, 75, 1-2, 65–69, 2000.
- [12] Hu X, Wang J. Design of general projection neural network for solving monotone linear variational inequalities and linear and quadratic programming problems. IEEE Trans Syst Man Cybernet Part B: Cybernet ; 37:1414-21, 2007.

-
- [13] Hopfield. J. J, Tank. D.W, Neural computation of decisions in optimization problems, 1985.
- [14] Hull. J. C, Options Futures And Other Derivatives, 6nd ed, Perntice Hall, New Jersey, 2006.
- [15] Miller, R.K., Michel, A.N., Ordinary Differential Equations. Academic Press, *New York*, 1982.
- [16] Meng. X, Miao. L, Gong. Z, Su. B, The conditional coloring numbers of pseudo-Harlin graphs, *Ars Combinatoria*, 54, 2006.
- [17] Miller. R. K, Michel. A. N, Ordinary Differential Equations, Academic Press, New York, 1982.
- [18] Simmons G, "Differential Equations and Applications", McGraw-Hill Education (India), 2006.
- [19] Simmons. G. F, Differential Equations with Applications and Historical Notes, McGraw-Hill, New York, 1991.
- [20] Xia. Y, Feng. G, A new neural network for solving nonlinear projection equations, *Neural Networks* 20, 577–589, 2007.
- [21] Xia Y, Wang J, "Grasping-Force Optimization for Multifingered Robotic Hands Using a Recurrent Neural Network", *IEEE Transactions on robotics and Automation*, vol. 20, No. 3, june 2004.
- [22] Xia. Y, Wang. J, A recurrent neural network for nonlinear convex optimization subject to nonlinear inequality constraints, *IEEE Transactions, Circuits System*, 51, 447–458, 2004.
- [23] Xingsia. L, An entropy-based aggregate method for minimax optimization, *Engineering Optimization* 18, 277-285, 1992.
- [24] Xue. X, Bian. W, A project neural network for solving degenerate convex quadratic program, *Neural Networks* 70, 2449–2459, 2007.
- [25] Yang. Y, Cao. J, A feedback neural network for solving convex constraint optimization problems, *Applied Mathematics and Computation*, 201, 340–350, 2008.

-
- [26] Yongqing. Y, Jinde. C, Xianyun. X, Jiao. L, A generalized neural network for solving a class of minimax optimization problems with linear constraints, Applied Mathematics and Computation 218, 7528- 7537, 2012.

Abstract

In this thesis, we describe a problem of best approximation. The best approximation is solving linear equation systems. Linear equation systems are three types. Determined, Underdetermined, Overdetermined system.

Underdetermined equation system have infinite answer. We are looking for answers to the lowest norm. Answer it obtains by a neural network converges.

Overdetermined equation system usually do not have any answer and we are looking for the approximation solution. In this case, the approximation solution converges approached by a neural network model.

Answer determined system usually is unique and do not need to approximated.

According to theorem, the equilibrium point of the proposed neural network is proved to be equivalent to the optimal solution point to the optimal solution of the strictly convex quadratic optimization problem.

Keywords: Best approximation problem, neural network model, underdetermined system, overdetermined system.



Shahrood University
Faculty Of Mathematical Sciences

Dissertation Submitted in Partial
Fulfillment of The Requirements For The
Degree of Master of Science in
Applied Mathematics

**An application of a neural network for
solving the best approximation problems**

Supervisors

Dr. M. Iranmanesh and Dr. A.R. Nazemi

by

Zahra Shahini

2014