



دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی  
گروه ریاضی کاربردی

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته  
ریاضی کاربردی، گرایش تحقیق در عملیات

عنوان

# الگوریتم‌های تقریبی مسائل بهینه‌سازی چندهدفه و کاربردهای آن

استادان راهنما

دکتر جعفر فتحعلی و دکتر مهرداد غزنوی

استاد مشاور

دکتر مریم قرآنی

دانشجو

زهرا غزیری

شهریور ۱۳۹۳

تقدیم بہ  
ہمسرم

و بہترین ما

فاطمہ و امیر علی

# سپاس گزارمی...

خدایا چه تیره و تاریک است راهی که دلالت تو در آن نیست و چه روشن و حقیقت‌نما راهی که هدایت تو در آن است.

سپاس و شکر مخصوص خدایست که توفیق را رفیق را هم ساخت تا بتوانم کسب علم کرده و پایان‌نامه خود را تنظیم کنم.

تقدیر و تشکر از اساتید راهنما، دلسوز و فرزانه جناب آقای دکتر فتحعلی و دکتر غزنوی و مشاور محترم سرکار خانم دکتر قرآنی که با حسن خلق و فروتنی در گردآوری این مجموعه مرا مورد لطف و محبت خود قرار دادند. از ایزد منان حسن عاقبت، سلامت و سعادت را برایشان آرزومندم.

همچنین از تمام اساتیدی که در طی مراحل تحصیل از محضرشان کسب علم کرده‌ام، قدردانی می‌کنم.

سپاس و قدردانی از خانواده محترم، همسر و فرزندانم که محیطی سرشار از آرامش و آسایش را در این مدت برای من فراهم نمودند.

زهره غزنوی

شهریور ۱۳۹۳

## تعمدنامه

اینجانب زهره عزیزی دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی دانشکده علوم ریاضی دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان الگوریتم‌های تقریبی مسائل بهینه‌سازی چندهدفه و کاربردهای آن، تحت راهنمایی دکتر جعفر فتحعلی و دکتر مهرداد غزنوی متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تاکنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه شاهرود “ یا “ Shahrood University “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

زهره عزیزی  
شهریور ۱۳۹۳

## مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

## چکیده

در این پایان نامه، ابتدا الگوریتم اصلی بنسون برای حل مسائل برنامه ریزی خطی چندهدفه در فضای هدف را بیان می‌کنیم. با تغییراتی مختصر در نحوه انجام مراحل آن، سرعت محاسبات را بهبود می‌دهیم. سپس با اعمال تغییراتی روی الگوریتم بنسون، به نسخه تقریبی الگوریتم برای مسائل بهینه‌سازی چندهدفه خطی دست می‌یابیم. این الگوریتم با ایجاد تقریبی درونی و بیرونی از مجموعه غیرتسلطی، مجموعه‌ای از نقاط  $\epsilon$ -غیرتسلطی را فراهم می‌کند. در ادامه، بهینه‌سازی چندهدفه محدب مورد بحث قرار می‌گیرد که برای اینگونه مسائل، نیاز به محاسبه مجموعه‌ای نامتناهی از نقاط غیرتسلطی است. به کمک الگوریتم اصلی بنسون برای مسائل بهینه‌سازی چندهدفه خطی، روشی برای تقریب مجموعه غیرتسلطی مسائل برنامه ریزی چندهدفه غیرخطی محدب پیشنهاد می‌گردد. ثابت می‌کنیم که تقریب درونی، مجموعه‌ای از نقاط  $\epsilon$ -غیرتسلطی ضعیف را فراهم می‌کند. در حالت مشتق‌پذیری هدف‌ها و محدودیت‌ها، روش موثری برای انجام گام اصلی الگوریتم بهینه‌سازی چندهدفه محدب، یعنی ساخت ابرصفحه جداساز نقطه بیرونی از مجموعه شدنی در فضای هدف، ارائه می‌شود. در انتها، اهمیت موضوع الگوریتم‌های تقریبی، با بیان کاربرد آن در مسائل بهینه‌سازی شدت پرتو در طرح پرتو درمانی، که می‌تواند به صورت برنامه ریزی خطی سه هدفه فرمول‌بندی شود، مشخص می‌شود.

**کلمات کلیدی:** بهینه‌سازی چندهدفه. الگوریتم تقریبی. بهینه‌سازی محدب. الگوریتم بنسون.  
نقطه  $\epsilon$ -غیرتسلطی. جواب  $\epsilon$ -کارا. پرتو درمانی.

# فهرست مطالب

۱	مقدمه‌ای بر بهینه‌سازی چندهدفه	۱
۱	پیش‌گفتار	۱.۱
۳	معرفی مساله چندهدفه	۲.۱
۴	تعاریف و قضایای اولیه	۳.۱
۱۰	روش‌هایی برای حل مسائل بهینه‌سازی چندهدفه	۴.۱
۱۰	روش مجموع وزن‌دار	۱.۴.۱
۱۱	روش $\epsilon$ -محدودیت	۲.۴.۱
۱۲	روش هیبرید	۳.۴.۱
۱۳	روش محدودیت انعطاف‌پذیر	۴.۴.۱
۱۵	برنامه‌ریزی خطی چندهدفه و الگوریتم بنسون	۲
۱۵	مقدمه	۱.۲
۱۶	الگوریتم تقریب خارجی بنسون:	۲.۲
۱۸	الگوریتم ۱	۳.۲
۱۹	نحوه اجرای مراحل الگوریتم و بهبودی بر آن	۴.۲
۳۳	الگوریتم بنسون اصلاح شده برای جواب‌های تقریباً کارا	۳
۳۳	نسخه تقریبی از الگوریتم بنسون	۱.۳
۳۶	یافتن جواب‌های تقریباً کارا	۲.۳
۴۱	مسائل برنامه‌ریزی چندهدفه محدب	۴
۴۱	مقدمه	۱.۴
۴۲	محدودیت‌های شرطی کان-تاگر در بهینه‌سازی محدب	۲.۴
۴۴	الگوریتم بنسون	۳.۴
۴۶	تعمیمی از الگوریتم تقریب خارجی بنسون برای مسائل <i>MOLP</i>	۴.۴
۴۷	توسعه الگوریتم بنسون برای یافتن جواب‌های تقریباً کارای مسائل MOP محدب	۵.۴
۵۰	ساخت ابرصفحه جداساز در حالت مشتق‌پذیری	۶.۴

۵۷	.....	ارائه چند مثال	۷۰۴
۶۵	.....	ساخت ابرصفحه جداساز در حالت مشتق‌ناپذیری	۸۰۴
۷۱		<b>۵ کاربرد از الگوریتم‌های تقریبی بهینه‌سازی چندهدفه در پرتودرمانی</b>	
۷۱	.....	مقدمه	۱۰۵
۷۱	.....	آشنایی با پرتو درمانی	۲۰۵
۷۳	.....	فرایند درمان با کمک IMRT	۳۰۵
۷۵	.....	مسائل بهینه‌سازی در IMRT	۴۰۵
۷۸	.....	مدل‌های بهینه‌سازی برای مساله بهینه‌سازی شدت پرتو	۵۰۵
۸۴	.....	مدل MOLP انتخابی برای مساله بهینه‌سازی شدت پرتو	۶۰۵
۸۵	.....	حل مساله	۷۰۵
۸۸	.....	نتیجه‌گیری و پیشنهادات	۸۰۵
۹۲		<b>مراجع</b>	
۹۶		واژه‌نامه فارسی به انگلیسی	
۹۸		واژه‌نامه انگلیسی به فارسی	

# فصل ۱

## مقدمه‌ای بر بهینه‌سازی چندهدفه

### ۱.۱ پیش‌گفتار

بهینه‌سازی چندهدفه، یکی از مهم‌ترین مدل‌هایی است که تصمیم‌گیرنده در برخورد با معیارهای مختلف از آن استفاده می‌کند. مسائل بهینه‌سازی چندهدفه، کاربردهای عملی فراوانی در زمینه‌های مختلف از جمله مهندسی، صنعت، اقتصاد، برنامه‌ریزی‌های شبکه ارتباط و سید سرمایه‌گذاری دارد.

یک جواب کارا (غیرتسلطی) از مساله بهینه‌سازی چندهدفه، جواب شدنی است که بهبود در یک هدف، حداقل منجر به بدتر شدن وضعیت در یک هدف دیگر خواهد شد. این تعریف اولین بار توسط ادوارت [۱۳] مطرح شد. اما چون ویلفردو پارتو [۳۸] اقتصاددان ایتالیایی-فرانسوی، آن را در سال ۱۸۹۶ توسعه داد، به این تعریف اغلب بهینگی پارتو می‌گویند.

تعداد جواب‌های کارا در یک مساله چندهدفه می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد. پژوهشگران روش‌های گوناگونی برای حل مسائل بهینه‌سازی چندهدفه و تولید همه یا حداقل قسمتی از مجموعه کارا ارائه داده‌اند، که از جمله می‌توان به روش اسکالر سازی، روش سیمپلکس، روش نقطه داخلی و روش بنسون که در این رساله آمده است، اشاره کرد [۲۰].

اما مطلب قابل ذکر آن است که در برخورد با برخی از مسائل چندهدفه، مانند غیرخطی‌ها، در عمل دستیابی به جواب‌های دقیق کارا غیرممکن و یا حداقل محاسبات سنگین و گرانی را دربردارد. حتی برخی از آنها فاقد جواب کارا هستند. لذا، پیدا کردن جواب‌های تقریباً کارا برای تصمیم‌گیرنده اهمیت زیادی دارد. از اینرو اکثر پژوهشگران روی تقریب مجموعه غیرتسلطی تمرکز می‌کنند [۴۱].

در این پایان‌نامه به الگوریتم‌های تقریباً کارا برای مسائل چندهدفه خطی و غیرخطی محذب اشاره می‌شود.

در فصل اول، ابتدا به معرفی مساله بهینه‌سازی چندهدفه پرداخته، سپس به بیان نمادها، تعاریف و قضایایی که در طول پایان‌نامه از آنها استفاده می‌شود، می‌پردازیم. مثال‌هایی نیز، در جهت تمایز بین مفاهیم می‌آوریم. در انتهای فصل نیز به ارائه برخی از روش‌های حل مساله بهینه‌سازی چندهدفه با تبدیل آن به مساله بهینه‌سازی تک‌هدفه اشاره خواهیم کرد. مطالب این فصل بیشتر از مراجع [۲، ۱۵، ۱۴]



استخراج شده است.

در فصل دوم پس از فراهم آوردن مقدمات لازم جهت ورود به الگوریتم بنسون، به بیان الگوریتم تقریب خارجی بنسون برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی چندهدفه می‌پردازیم. در ادامه نحوه اجرای گام‌های این الگوریتم را بیان می‌کنیم و با اجرای این الگوریتم روی یک مثال این فصل به پایان می‌رسد. برای ارائه مطالب این فصل از مراجع [۳، ۴، ۶، ۴۵] استفاده شده است.

در فصل سوم، با اعمال تغییراتی روی الگوریتم بنسون به الگوریتم بنسون اصلاح شده دست می‌یابیم. الگوریتم اصلاح شده، به تولید تقریب‌های درونی و بیرونی فضای هدف منتهی می‌شود. در ادامه فصل نشان می‌دهیم که با استفاده از تقریب درونی الگوریتم، به نقاط  $\epsilon$ -غیرتسلطی فضای هدف مساله بهینه‌سازی چندهدفه می‌توان رسید. در این فصل بیشتر از مراجع [۱۴، ۴۵، ۳۰، ۱۵] استفاده شده است.

در فصل چهارم، مسائل بهینه‌سازی چندهدفه غیرخطی محدب مورد بحث بوده و به ارائه الگوریتمی برای حل این گونه مسائل می‌پردازیم. ابتدا مختصری از قضایا و مطالب مورد استفاده این فصل یادآوری می‌شود. سپس برای دستیابی به الگوریتم مورد نظر، مشابه فصل دوم از الگوریتم تقریب خارجی بنسون استفاده می‌کنیم. تعمیم الگوریتم بنسون برای حل مسائل چندهدفه محدب، به تولید نقاط  $\epsilon$ -کارا منجر می‌شود. در ادامه فصل در مورد نحوه اجرای الگوریتم، در دو حالت مشتق‌پذیری و مشتق‌ناپذیری مساله چندهدفه، صحبت خواهیم کرد. با آوردن مثال‌هایی در این فصل و اجرای الگوریتم روی آنها به کیفیت تولید نقاط تقریباً کارا در مقایسه با حل مساله به کمک برخی روش‌های تک‌هدفه می‌رسیم. مطالب این فصل از مراجع [۳، ۴، ۱۴، ۱۹، ۶، ۳۳، ۲، ۳۴، ۱۸، ۱۷، ۴۵] تهیه شده است.

در فصل آخر، به کاربرد الگوریتم‌های تقریبی برای حل مسائل چندهدفه در مسائل پرتو درمانی اشاره می‌کنیم. برای این منظور، ابتدا مختصر مطلبی جهت آشنایی با پرتو درمانی را بیان کرده و به مسائل بهینه‌سازی در این شاخه می‌پردازیم. یک مدل بهینه‌سازی چندهدفه خطی برای مساله شدت پرتو ارائه کرده و نتایج به دست آمده از آن را روی چند حالت سرطان بالینی بیان می‌کنیم که به وضوح، بیانگر مزایای استفاده از روش‌های ارائه شده در این پایان‌نامه خواهد بود. بیشتر مطالب این فصل از مراجع [۱۶، ۴۴، ۴۳، ۴۵، ۲۳، ۴۸، ۴۹، ۴۶] تهیه شده است.

در انتها، نام مقالاتی که اساس مطلب پایان‌نامه بر آنها بنا شده است، می‌آوریم.

1. Shao, L., Ehrgott, M.: Approximately solving multiobjective linear programmes in objective space and an application in radiotherapy treatment planning. *Math. Methods Oper. Res.* 68, 257–276 (2008).
2. Ehrgott, M., Shao, L. and Schöbel, A.: An approximation algorithm for

convex multi-objective programming problems. J. Global Optim. 50(3), 397–416 (2011).

3. Benson, H.P.: An outer approximation algorithm for generating all efficient extreme points in the outcome set of a multiple objective linear programming problem. J. Global Optim. 13, 1–24 (1998).

4. Ehrgott, M., Güler, Ç., Hamacher, H.W., Shao, L.: Mathematical optimization in intensity modulated radiation therapy. Ann. Oper. Res. 175, 309–365 (2010).

## ۲.۱ معرفی مساله چندهدفه

یک مساله بهینه‌سازی چندهدفه<sup>۱</sup> بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} \min \quad & (f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x)) \\ \text{s.t} \quad & x \in X \end{aligned} \quad (1.1)$$

که در آن  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ ،  $p \geq 2$  و  $f_i$  ها توابع حقیقی مقدارند. در این مساله، هدف می‌نیم کردن همزمان  $p$  تابع هدف می‌باشد. واضح است که در یک مساله چندهدفه، اکثر مواقع، نقطه‌ای که همزمان تمام توابع هدف را می‌نیم کند، وجود ندارد. برای یک مساله بهینه‌سازی چندهدفه، یک جواب بهینه جوابی است که هیچ یک از مولفه‌هایش نمی‌توانند بهبود یابند، مگر این که حداقل یکی دیگر از مولفه‌هایش بدتر شود. به جواب‌های بهینه در این نوع مسائل، جواب‌های کارا<sup>۲</sup> (در فضای تصمیم) یا غیرتسلطی<sup>۳</sup> (در فضای هدف) گفته می‌شود. در ابتدا کار را با مسائل چندهدفه با توابع خطی  $f_i$  آغاز می‌کنیم (فصل دوم و سوم)، سپس توابع غیرخطی  $f_i$  را نیز مورد بحث قرار می‌دهیم (فصل چهارم).

به بیان نمادها، تعاریف و قضایای مورد نیاز اولیه می‌پردازیم.

نمادها: برای هر  $y^1, y^2 \in \mathbb{R}^p$  داریم:

$$\begin{aligned} y^1 < y^2 & \iff y_k^1 < y_k^2 \quad k = 1, \dots, p, \\ y^1 \leq y^2 & \iff y_k^1 \leq y_k^2 \quad k = 1, \dots, p, \\ y^1 \leq y^2 & \iff y^1 \leq y^2; y^1 \neq y^2. \end{aligned}$$

زیرمجموعه‌های  $\mathbb{R}^p$  به صورت زیر نشان داده می‌شوند:

$$\mathbb{R}_{>}^p := \{y \in \mathbb{R}^p : y > \circ\}$$

$$\mathbb{R}_{\geq}^p := \{y \in \mathbb{R}^p : y \geq \circ\}$$

$$\mathbb{R}_{\geq}^p := \{y \in \mathbb{R}^p : y \geq \circ\} = \mathbb{R}_{\geq}^p - \{\circ\}.$$

<sup>۱</sup> multiobjective optimization problem

<sup>۲</sup> efficient solutions

<sup>۳</sup> nondominated solutions

برای  $S \subseteq \mathbb{R}^p$  داریم:

$$S + \mathbb{R}_{\geq}^p := \{s + y : s \in S, y \in \mathbb{R}_{\geq}^p\}$$

### ۳.۱ تعاریف و قضایای اولیه

به طور خلاصه، یک مساله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه (MOLP) را به شکل

$$\min\{Cx : x \in X\} \quad (۲.۱)$$

بیان می‌کنیم، که در آن  $X$  مجموعه شدنی در فضای تصمیم  $\mathbb{R}^n$  و  $Y$  مجموعه شدنی در فضای هدف  $\mathbb{R}^p$  به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b\} \quad \text{و} \quad Y = \{Cx : x \in X\}$$

که در آن  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ،  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$  و  $b \in \mathbb{R}^m$  می‌باشند.

**تعریف ۱.۳.۱.** جواب شدنی  $\hat{x} \in X$  را، جواب کارا (بهینه پارتو<sup>۴</sup>) برای مساله (۲.۱) نامیم، هرگاه هیچ  $x \in X$  یافت نشود که  $Cx \leq C\hat{x}$ . مجموعه همه جواب‌های کارا را با نماد  $X_E$  نشان داده و به آن مجموعه کارا در فضای تصمیم گوییم.  $\hat{y} = C\hat{x}$  را نقطه غیرتسلطی نامیده و  $Y_N = \{Cx : x \in X_E\}$  را مجموعه غیرتسلطی در فضای هدف از مساله (۲.۱) گوییم.

به طور معادل تعریف فوق را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

جواب شدنی  $\hat{x} \in X$ ، جواب کارا برای مساله (۱.۱) است، هرگاه

$$f(X) \cap \left( f(\hat{x}) - \mathbb{R}_{\geq}^p \right) = \{f(\hat{x})\}.$$

**تعریف ۲.۳.۱.** جواب شدنی  $\hat{x} \in X$  را، جواب کارای ضعیف<sup>۵</sup> (بهینه پارتو ضعیف) برای مساله (۲.۱) نامیم، هرگاه هیچ  $x \in X$  یافت نشود که  $Cx < C\hat{x}$ . مجموعه همه جواب‌های کارای ضعیف را با نماد  $X_{WE}$  نشان داده و به آن مجموعه کارای ضعیف، در فضای تصمیم گوییم. نقطه  $\hat{y} = C\hat{x}$  را نقطه غیرتسلطی ضعیف نامیده و  $Y_{WN} = \{Cx : x \in X_E\}$  مجموعه غیرتسلطی ضعیف در فضای هدف از مساله (۲.۱) می‌باشد.

**تعریف ۳.۳.۱.** جواب شدنی  $\hat{x} \in X$ ، کارای سره<sup>۶</sup> به مفهوم جفرین<sup>۷</sup>، برای مساله (۱.۱) نامیده می‌شود هرگاه کارا بوده و عدد حقیقی  $M > 0$  موجود باشد به طوری که برای هر  $i$  و  $x \in X$  که  $f_i(x) < f_i(\hat{x})$ ، اندیس  $j$  ای یافت شود که  $f_j(\hat{x}) < f_j(x)$  و

$$\frac{f_i(\hat{x}) - f_i(x)}{f_j(x) - f_j(\hat{x})} \leq M.$$

به طور متناظر نقطه  $\hat{y} = f(\hat{x})$  غیرتسلطی سره نامیده می‌شود.

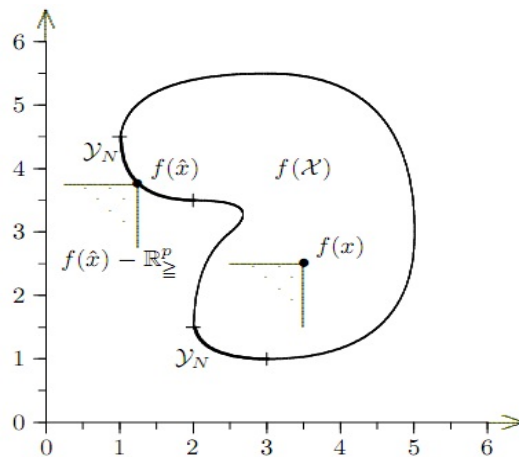
<sup>۴</sup> Pareto optimal

<sup>۵</sup> weakly efficient

<sup>۶</sup> properly efficient

<sup>۷</sup> Geoffrion

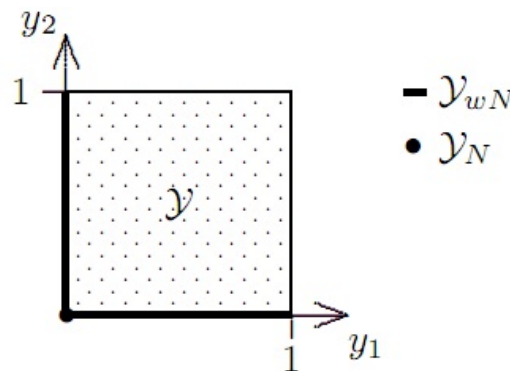
مثال ۴.۳.۱. فرض کنید که  $Y = f(X)$  فضای هدف مساله غیرمحدب چندهدفه باشد. مجموعه نقاط غیرتسلطی در شکل ۱.۱ مشخص شده است.



شکل ۱.۱: مجموعه نقاط غیرتسلطی  $Y_N$

قضیه ۵.۳.۱. [۱۴] اگر در مساله بهینه‌سازی چندهدفه منظور از  $X_{WE}$ ،  $X_E$  و  $X_{PE}$  به ترتیب مجموعه‌های کارای ضعیف، کارا و کارای سره باشند، آنگاه شمول  $X_{PE} \subseteq X_E \subseteq X_{WE}$  برقرار است.

مثال ۶.۳.۱. مجموعه  $Y = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y_i \leq 1\}$  را در نظر بگیرید. داریم  $Y_N = \{0\}$  و  $Y_{wN} = \{(y_1, y_2) \in Y : y_1 = 0 \text{ or } y_2 = 0\}$ .

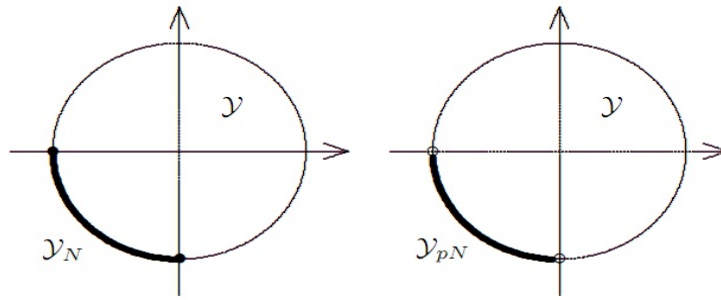


شکل ۲.۱: نقاط غیرتسلطی و غیرتسلطی ضعیف مربوط به مثال ۶.۳.۱

مثال ۷.۳.۱. فرض کنید  $Y = \{(y_1, y_2) : y_1^2 + y_2^2 \leq 1\}$ . مجموعه نقاط غیرتسلطی و غیرتسلطی سره که با نماد  $Y_{PN}$  مشخص می‌شود به صورت زیر است.

$$Y_N = \{(y_1, y_2) : y_1^2 + y_2^2 = 1, y_1 \leq 0, y_2 \leq 0\},$$

$$Y_{PN} = Y_N - \{(-1, 0), (0, -1)\}.$$



شکل ۳.۱: مجموعه‌های  $Y_N$  و  $Y_{PN}$  مربوط به مثال ۷.۳.۱

قضیه ۸.۳.۱. [۱۴] در بهینه‌سازی چندهدفه خطی، نقاط کارا و کارای سره بر هم منطبق‌اند.

تعریف ۹.۳.۱. نقطه ایده‌آل و ضدایده‌آل<sup>۱</sup>:

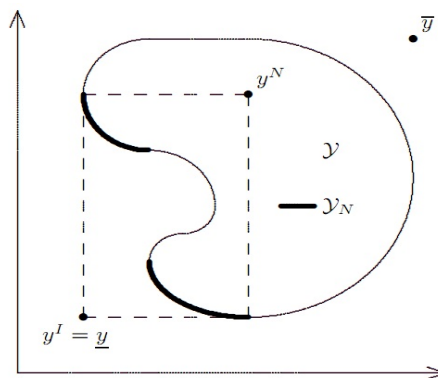
در مساله (۱.۱) نقطه  $y^I = (y_1^I, y_2^I, \dots, y_p^I)$  را نقطه ایده‌آل گوئیم، هرگاه

$$y_k^I := \min\{y_k : y \in Y\} = \min\{f_k(x) : x \in X\}$$

و نقطه  $y^{AI} = (y_1^{AI}, y_2^{AI}, \dots, y_p^{AI})$  را نقطه ضدایده‌آل گوئیم، هرگاه

$$y_k^{AI} := \max\{y_k : y \in Y\}.$$

مثال ۱۰.۳.۱. در شکل ۴.۱، نقاط ایده‌آل و ضدایده‌آل به ترتیب با  $\underline{y}$  و  $\bar{y}$  مشخص شده است.



شکل ۴.۱: مجموعه  $Y_N$  و نقاط ایده‌آل و ضدایده‌آل

تعریف ۱۱.۳.۱. مجموعه  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  را محدب نامیم، هرگاه برای هر  $x_1$  و  $x_2$  از  $S$  و برای هر  $\lambda \in [0, 1]$ ،  $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in S$

<sup>۱</sup> Anti ideal

تعریف ۱۲.۳.۱. مجموعه  $S \subset \mathbb{R}^n$  چندوجهی<sup>۹</sup> نامیده می‌شود هرگاه  $S$  از تقاطع تعداد متناهی نیم‌فضای بسته تشکیل شده باشد. یعنی

$$S = \{x : P_i^t x \leq \alpha_i \text{ for } i = 1, \dots, m\},$$

که در آن  $P_i$  بردار غیرصفر و  $\alpha_i$  برای  $i = 1, \dots, m$  اسکالر می‌باشند. واضح است که یک چندوجهی، مجموعه‌ای محدب بسته است.

تذکر:

در این پایان‌نامه فرض بر این است که  $X$ ، مجموعه شدنی در فضای تصمیم  $\mathbb{R}^n$ ، غیرتهی و فشرده است و ضرورت این مطلب طبق قضایای زیر برای دستیابی به نقاط کارا مشخص است. در این صورت چون توابع  $f_i$  ها خطی و پیوسته‌اند، مجموعه  $Y$  نیز، چندوجهی غیرتهی و فشرده می‌گردد (تحت توابع پیوسته، فشردگی انتقال می‌یابد). از آنجایی که  $Y \subset \mathbb{R}^p$ ، پس  $\dim Y \leq \dim \mathbb{R}^p = p$  است.

قضیه ۱۳.۳.۱. [۱۴] اگر  $X$  غیرتهی و فشرده باشد، و تابع  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  پیوسته باشد، در این صورت  $X_{WE} \neq \emptyset$  است.

$$\text{قضیه ۱۴.۳.۱. [۱۴]} \quad \mathcal{Y}_N = (\mathcal{Y} + \mathbb{R}_{\geq}^p)_N$$

قضیه ۱۵.۳.۱. [۱۴] اگر مرز  $Y$  را با  $\text{bd}(Y)$  نشان دهیم، داریم  $Y_N \subseteq \text{bd}(Y)$ .

برهان.  $y \in Y_N$  را در نظر بگیرید که  $y \notin \text{bd}(Y)$ . در این صورت  $y \in \text{int } Y$  و یک  $\varepsilon$ -همسایگی از  $y$  مانند  $B(y, \varepsilon)$ ، موجود است که در  $Y$  قرار دارد  $B(y, \varepsilon) := y + B(\circ, \varepsilon) \subset Y$  که  $B(y, \varepsilon)$ ، گوی بازی به مرکز مبدأ و شعاع  $\varepsilon$  است). بردار غیرصفر  $d \in \mathbb{R}_{\geq}^p$  را در نظر بگیرید.  $\alpha \in \mathbb{R}$  و  $0 < \alpha < \varepsilon$  را می‌توان طوری انتخاب کرد که  $\alpha d \in B(\circ, \varepsilon)$ . اکنون  $y - \alpha d \in Y$  به طوری که  $\alpha d \in \mathbb{R}^p \setminus \{\circ\}$ . در نتیجه  $y \notin Y_N$ . پس  $y \in \text{bd}(Y)$ .  $\square$

تعریف ۱۶.۳.۱.  $S \subset \mathbb{R}^p$  را در نظر بگیرید:

•  $S$  را  $\mathbb{R}_{\geq}^p$ -بسته نامند اگر، مجموعه  $S + \mathbb{R}_{\geq}^p$ ، بسته باشد.

•  $S$  را،  $\mathbb{R}_{\geq}^p$ -کراندار نامند اگر،  $s^\circ \in \mathbb{R}^p$  باشد که  $S \subset s^\circ + \mathbb{R}_{\geq}^p$  گردد.

•  $S$ ،  $\mathbb{R}_{\geq}^p$ -محدب است هرگاه،  $S + \mathbb{R}_{\geq}^p$  محدب باشد.

قضیه ۱۷.۳.۱. [۱۴] اگر فضای هدف  $Y$  یا  $Y + \mathbb{R}_{\geq}^p$  باز باشد، آنگاه  $Y_N = \emptyset$ .

$\square$

برهان. با توجه به قضیه قبل اثبات واضح است.

قضیه ۱۸.۳.۱. [۱۵] اگر  $S \subseteq \mathbb{R}^p$ ،  $\mathbb{R}_{\geq}^p$ -بسته و  $\mathbb{R}_{\geq}^p$ -کراندار باشد آنگاه  $S \subseteq S_N + \mathbb{R}_{\geq}^p$ .

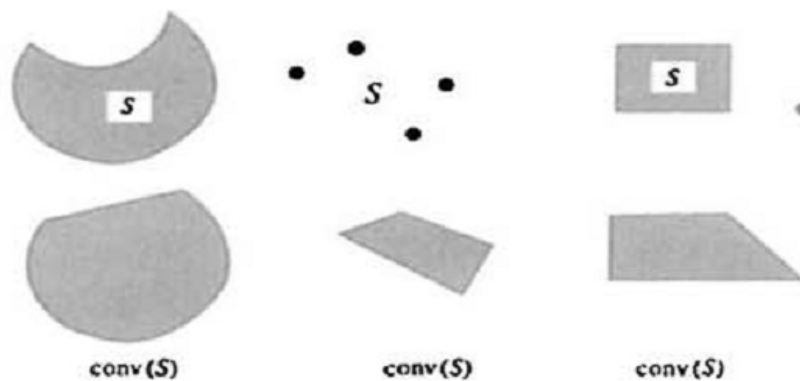
<sup>۹</sup> Polyhedral

تعریف ۱۹.۳.۱. تابع  $f$ ، روی مجموعه محدب  $X$  را محدب نامیم هرگاه به ازای هر  $x_1$  و  $x_2$  از  $X$  داشته باشیم:

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \quad \lambda \in [0, 1]$$

تعریف ۲۰.۳.۱. مساله برنامه‌ریزی چندهدفه (۱.۱) محدب است هرگاه همه توابع هدف آن به همراه مجموعه شدنی  $X$  محدب باشند.

تعریف ۲۱.۳.۱. فرض کنید  $S$  مجموعه نقاطی از فضای  $\mathbb{R}^n$  باشد. منظور از پوسته محدب<sup>۱۰</sup>  $S$  که آن را با نماد  $\text{conv}(S)$  نشان می‌دهند، کوچکترین مجموعه محدبی است که شامل  $S$  می‌باشد. به عبارتی، اشتراک همه مجموعه‌های محدب شامل  $S$  را، پوسته محدب  $S$  نامند.



شکل ۵.۱: پوسته‌های محدب

تعریف ۲۲.۳.۱. فرض که نقاط  $y_0, y_1, \dots, y_k$  در فضای  $n$  بعدی، مستقل آفینی<sup>۱۱</sup> باشند، یعنی بردارهای  $y_1 - y_0, y_2 - y_0, \dots, y_k - y_0$  مستقل خطی باشند. در این صورت  $\text{conv}(y_0, y_1, \dots, y_k)$ ، یعنی مجموعه  $S$  با تعریف زیر را، یک  $k$ -سیمپلکس<sup>۱۲</sup> با بردارهای  $y_0, y_1, \dots, y_k$  نامیم:

$$S = \left\{ \sum_{i=0}^k \lambda_i y_i : \lambda_i \geq 0, \sum_{j=0}^k \lambda_j = 1 \right\}.$$

برای مثال منظور از  $0$ -سیمپلکس، یک تک نقطه و منظور از  $1$ -سیمپلکس، یک پاره‌خط و منظور از  $2$ -سیمپلکس، یک مثلث است.

تعریف ۲۳.۳.۱. [۴۵] مساله بهینه‌سازی چندهدفه

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x)) \\ \text{s.t.} \quad & x \in X \end{aligned} \quad (3.1)$$

را در نظر بگیرید و فرض کنید که  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{\geq}^p$  داده شده باشد. در این صورت:

<sup>۱۰</sup> convex hull

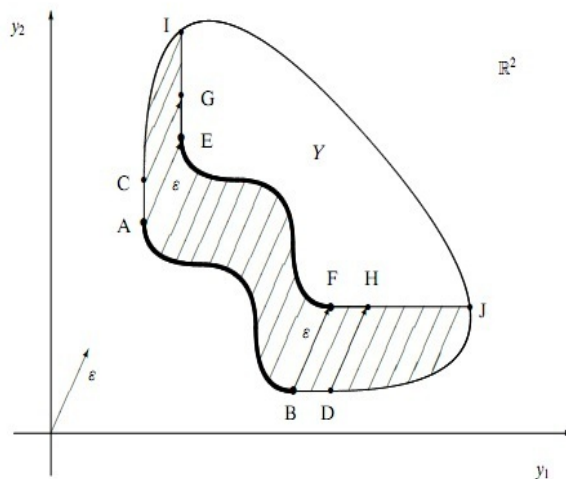
<sup>۱۱</sup> affinely independent

<sup>۱۲</sup> k-simplex

الف) جواب شدنی  $\hat{x} \in X$ ، جواب  $\varepsilon$ -کارا از (۳.۱) نامیده می‌شود، هرگاه هیچ  $x \in X$  یافت نشود که  $f(x) \leq f(\hat{x}) - \varepsilon$  باشد. به طورمتناظر  $\hat{y} = f(\hat{x})$  را نقطه  $\varepsilon$ -غیرتسلطی در فضای هدف می‌نامند.

ب) جواب شدنی  $\hat{x} \in X$ ، جواب  $\varepsilon$ -کارای ضعیف از (۳.۱) نامیده می‌شود، هرگاه  $x \in X$  یافت نشود که  $f(x) < f(\hat{x}) - \varepsilon$  باشد. متناظر با آن  $\hat{y} = f(\hat{x})$  را نقطه  $\varepsilon$ -غیرتسلطی ضعیف در فضای هدف می‌نامند.

مثال ۲۴.۳.۱. فرض کنید که فضای هدف یک مساله بهینه‌سازی چندهدفه، در شکل ۶.۱ با  $Y$  مشخص شده باشد. منحنی محصور بین نقاط  $A$  و  $B$  مجموعه نقاط غیرتسلطی و منحنی محصور بین نقاط  $C$  و  $D$  مجموعه نقاط غیرتسلطی ضعیف می‌باشد.



شکل ۶.۱: مجموعه نقاط غیرتسلطی (ضعیف) و  $\varepsilon$ -غیرتسلطی (ضعیف)

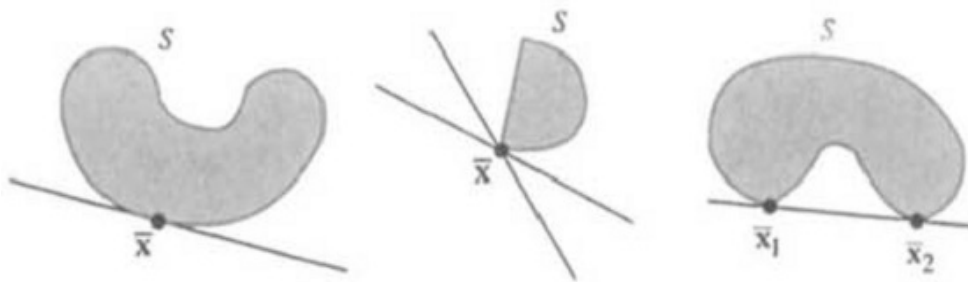
اگر  $\varepsilon$  بردار مشخص شده در شکل باشد، منحنی  $AB$  و منحنی  $EF$  و ناحیه محصور بین این دو منحنی، مجموعه نقاط  $\varepsilon$ -غیرتسلطی است. همچنین، مجموعه نقاط روی منحنی‌های  $GH$  و  $CD$  به همراه نقاط محصور بین این دو منحنی، مجموعه نقاط  $\varepsilon$ -غیرتسلطی ضعیف را تشکیل می‌دهند.

قابل ذکر است که طبق تعریف نقاط کارا و  $\varepsilon$ -کارا، چون  $f(\hat{x}) - \varepsilon \leq f(\hat{x})$  همواره برقرار است پس هر نقطه کارا،  $\varepsilon$ -کارا می‌باشد.

تعریف ۲۵.۳.۱. مجموعه غیرتهی  $S$  از  $\mathbb{R}^n$  و  $\bar{x} \in \text{bd}(S)$  را در نظر بگیرید. ابرصفحه  $H = \{x : p^t(x - \bar{x}) = 0\}$ ، ابرصفحه حمایتی<sup>۱۳</sup>  $S$  در  $\bar{x}$  است اگر  $S \subseteq H^+$ ، یعنی برای هر  $x \in S$  باید  $p^t(x - \bar{x}) \geq 0$  یا  $S \subseteq H^-$ ، یعنی  $p^t(x - \bar{x}) \leq 0$  برای هر  $x \in S$ . در شکل ۴.۱ مثال‌هایی از ابرصفحه‌های حمایتی  $S$  آمده است.

<sup>۱۳</sup> supporting hyperplane





شکل ۷.۱: ابرصفحه‌های حمایتی

## ۴.۱ روش‌هایی برای حل مسائل بهینه‌سازی چندهدفه

در این بخش به مرور برخی از روش‌های حل مسائل بهینه‌سازی چندهدفه می‌پردازیم. مساله

$$\min_{x \in X} (f_1(x), \dots, f_p(x)) \quad (۴.۱)$$

را در نظر بگیرید. روش سنتی جهت حل اینگونه مسائل شیوه‌های اسکالرسازی است. در روش‌های اسکالرسازی یک مساله تک‌هدفه متناظر با مساله چندهدفه معرفی می‌شود و سپس رابطه بین جواب‌های بهین مساله تک‌هدفه و جواب‌های بهینه‌ی پارتو (ضعیف، سره) مساله چندهدفه بررسی می‌گردد. در اینجا به برخی از روش‌های اسکالرسازی اشاره کرده و قضایایی را جهت بیان ارتباط بین جواب‌های این دسته مسائل و مساله چندهدفه ارائه می‌کنیم.

### ۱.۴.۱ روش مجموع وزن‌دار

در روش مجموع وزن‌دار<sup>۱۴</sup>، مساله تک‌هدفه متناظر با مساله (۴.۱) به صورت

$$\min_{x \in X} \sum_{k=1}^p \lambda_k f_k(x) \quad (۵.۱)$$

است که در آن  $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq}^p$  برداری از وزن‌هاست. فرض کنید  $Y \subset \mathbb{R}^p$  باشد. برای یک  $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq}^p$  تعریف می‌کنیم:

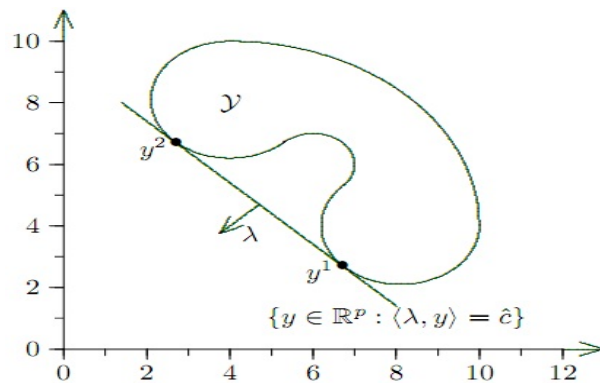
$$\mathcal{S}(\lambda, Y) := \left\{ \hat{y} \in Y : \langle \lambda, \hat{y} \rangle = \min_{y \in Y} \langle \lambda, y \rangle \right\}.$$

این مجموعه نقاط بهینه  $Y$  با توجه به  $\lambda$  است. شکل ۸.۱ مثالی از مجموعه  $\mathcal{S}(\lambda, Y)$  شامل دو نقطه  $y^1$  و  $y^2$  است.

با تعریف  $\mathcal{S}(Y)$  به صورت

$$\mathcal{S}(Y) := \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}_{\geq}^p} \mathcal{S}(\lambda, Y)$$

<sup>۱۴</sup> Weighted sum method



شکل ۸.۱: مجموعه  $S(\lambda, Y)$

اگر  $Y, \mathbb{R}_{\geq}^p$ -محدب باشد داریم  $Y_{WN} = S(Y)$  [۱۴].  
قضایای ذیل رابطه بین جواب‌های کارای (ضعیف، سره) مساله چندهدفه و جواب‌های بهینه مساله  
مجموع وزن‌دار را بیان می‌کند.

قضیه ۱.۴.۱. [۱۴] اگر  $\hat{x}$  جواب بهینه (۵.۱) باشد، نتایج زیر برقرارند.

۱. اگر  $\lambda \geq 0$ ، آنگاه  $\hat{x} \in X_{WE}$  است.

۲. اگر  $\lambda > 0$ ، آنگاه  $\hat{x} \in X_{PE}$  است.

۳. اگر  $\lambda \geq 0$  و  $\hat{x}$  جواب بهینه منحصر بفرد (۵.۱) باشد، آنگاه  $\hat{x} \in X_{PE}$  است.

قضیه ۲.۴.۱. [۱۴] فرض کنید که  $X$  مجموعه‌ای محدب و توابع  $f_k$  برای  $k = 1, \dots, p$  نیز محدب  
باشند. در این صورت داریم:

۱. اگر  $\hat{x}$  جواب کارای سره از مساله (۴.۱) باشد آنگاه،  $\lambda > 0$  موجود است به طوری که  $\hat{x}$  یک  
جواب بهینه مساله (۵.۱) است.

۲. اگر  $\hat{x}$  جواب کارای ضعیف از مساله (۴.۱) باشد، در این صورت  $\lambda \geq 0$  موجود است به گونه‌ای  
که  $\hat{x}$  جواب بهینه‌ای از مساله (۵.۱) می‌گردد.

### ۲.۴.۱ روش $\varepsilon$ -محدودیت

روش  $\varepsilon$ -محدودیت<sup>۱۵</sup> به همراه روش مجموع وزن‌دار بهترین روش‌ها برای مسائل بهینه‌سازی چندهدفه  
است. در این روش فقط یکی از هدف‌ها می‌نیم می‌شود، در حالی که مابقی آنها به محدودیت تبدیل  
می‌شوند. مساله  $\varepsilon$ -محدودیت، متناظر با مساله (۴.۱) به صورت زیر است.

$$\begin{aligned} \min_{x \in X} f_j(x) \\ \text{s.t. } f_k(x) \leq \varepsilon_k \quad k = 1, \dots, p, k \neq j \end{aligned} \quad (۶.۱)$$

<sup>۱۵</sup>  $\varepsilon$ -Constraint method

که در آن  $\varepsilon \in \mathbb{R}^p$  است و مولفه  $\varepsilon_j$  در این مساله بکار نمی‌رود. با توجه به مساله  $\varepsilon$ -محدودیت شرط کافی برای آن که  $\hat{x}$  جواب کارای ضعیف برای (۴.۱) باشد به صورت زیر است.

**قضیه ۳.۴.۱.** [۱۴] فرض کنید که  $\hat{x}$  یک جواب بهینه از مساله تک‌هدفه (۶.۱) برای اندیس  $z$ ای باشد. آنگاه  $\hat{x}$  کارای ضعیف برای مساله (۴.۱) است.

**قضیه ۴.۴.۱.** [۱۴] اگر  $\hat{x}$  جواب بهینه منحصر بفردی از مساله تک‌هدفه (۶.۱) برای اندیس  $z$ ای باشد، آنگاه  $\hat{x}$  کارای برای مساله (۴.۱) است.

شرط لازم و کافی برای کارا بودن نقطه شدنی  $\hat{x}$  در قضیه زیر بیان می‌شود.

**قضیه ۵.۴.۱.** [۱۴]  $\hat{x} \in X$  جواب کارای مساله (۴.۱) است اگر و تنها اگر  $\varepsilon$  ای موجود باشد به طوری که  $\hat{x}$  یک جواب بهینه از مساله  $\varepsilon$ -محدودیت (۶.۱) برای هر  $j = 1, \dots, p$  باشد.

در قضیه زیر رابطه بین روش  $\varepsilon$ -محدودیت و روش مجموع وزن دار را بررسی می‌کنیم.

**قضیه ۶.۴.۱.** [۱۴]

**الف.** فرض کنید که  $\hat{x}$  جواب بهینه‌ای از مساله (۵.۱) باشد. اگر  $\lambda_j > 0$  باشد آنگاه  $\hat{x}$  ای وجود دارد به طوری که  $\hat{x}$  جواب بهینه‌ای از (۶.۱) است.

**ب.** فرض کنید  $X$  مجموعه‌ای محدب بوده و توابع  $f_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ، نیز محدب باشند. اگر  $\hat{x}$  جواب بهینه‌ای از (۶.۱) برای  $z$ ای باشد، آنگاه  $\hat{\lambda} \in \mathbb{R}^p$  موجود است به گونه‌ای که  $\hat{x}$  برای (۵.۱) بهینه است.

### ۳.۴.۱ روش هیبرید

روش هیبرید<sup>۱۶</sup> ترکیبی از روش مجموع وزن دار با روش  $\varepsilon$ -محدودیت است. در این روش، مساله اسکالرسازی شده، دارای هدف مجموع وزن دار و محدودیت‌هایش روی همه هدف‌هاست. فرض کنید که  $x^\circ$  نقطه‌ای شدنی برای (۴.۱) باشد. فرمول‌بندی این روش به صورت زیر است

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{k=1}^p \lambda_k f_k(x) \\ \text{s.t.} \quad & f_k(x) \leq f_k(x^\circ) \quad k = 1, \dots, p \\ & x \in X \end{aligned} \tag{۷.۱}$$

که در آن  $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq}^p$ .

شرط لازم و کافی برای کارا بودن یک جواب شدنی از (۴.۱) در قضیه زیر بیان می‌شود.

**قضیه ۷.۴.۱.** [۱۴] فرض کنید که  $\lambda \in \mathbb{R}_{>}^p$  باشد. جواب شدنی  $x^\circ \in X$  جواب بهینه از مساله (۷.۱) است اگر و تنها اگر  $x^\circ \in X_E$ .

<sup>۱۶</sup> hybrid method

## ۴.۴.۱ روش محدودیت انعطاف‌پذیر

روش محدودیت انعطاف‌پذیر<sup>۱۷</sup>، تعمیمی از روش  $\varepsilon$ -محدودیت است. ممکن است در عمل، حل مساله اسکالرسازی به روش  $\varepsilon$ -محدودیت، به دلیل اضافه شدن محدودیت‌های  $f_k(x) \leq \varepsilon_k$  سخت باشد. زیرا مشکل انعطاف‌ناپذیر بودن قیدها وجود دارد. به منظور برطرف کردن این مشکل، می‌توان اجازه داد که محدودیت‌های  $f_k(x) \leq \varepsilon_k$  نقض شوند و جریمه‌ای برای این نقض شدن در تابع هدف در نظر گرفته می‌شود.

فرمول‌بندی این روش بصورت زیر است:

$$\begin{aligned} \min & f_j(x) + \sum_{k \neq j} \mu_k s_k \\ \text{s.t.} & f_k(x) - s_k \leq \varepsilon_k \quad \forall k \neq j \\ & s_k \geq 0 \quad \forall k \neq j \\ & x \in X \end{aligned} \quad (۸.۱)$$

که در آن  $\mu_k \geq 0$  و  $k \neq j$ .

رابطه بین جواب‌های بهینه مساله (۸.۱) و جواب‌های کارای (ضعیف، سره) مساله چندهدفه در قضایای زیر بیان می‌شود.

**قضیه ۸.۴.۱.** [۱۴] فرض کنید که  $(\hat{x}, \hat{s})$  جواب بهینه از مساله (۸.۱) با  $\mu \geq 0$  است. در این صورت  $\hat{x} \in X_{wE}$ .

**قضیه ۹.۴.۱.** [۱۴] اگر  $(\hat{x}, \hat{s})$  جواب بهینه یکتا از مساله (۸.۱) با  $\mu \geq 0$  است. آنگاه  $\hat{x} \in X_E$ .

**قضیه ۱۰.۴.۱.** [۱۴] اگر  $\hat{x} \in X_E$  باشد، آنگاه  $\varepsilon, \mu \geq 0$  ای موجود است به طوری که  $(\hat{x}, \hat{s})$ ، یک جواب بهینه مساله (۸.۱) برای هر  $j \in \{1, \dots, p\}$  است.

**قضیه ۱۱.۴.۱.** [۱۴] اگر  $(\hat{x}, \hat{s})$  جوابی بهینه از مساله (۸.۱) با  $\mu > 0$  و  $\hat{s} > 0$  باشد، در این صورت  $\hat{x} \in X_{PE}$ .

روش‌های دیگر اسکالرسازی مانند روش بنسون، روش چپی‌شف، روش چپی‌شف وزن‌دار بهبود یافته و غیره [۱۴، ۳۳] موجود است که به بیان همین تعداد از آنها بسنده می‌کنیم.

<sup>۱۷</sup> elastic constraint method



# فصل ۲

## برنامه‌ریزی خطی چندهدفه و الگوریتم بنسون

### ۱.۲ مقدمه

پژوهشگران برای تولید همه یا حداقل قسمتی از مجموعه کارای  $X_E$  روش‌های گوناگونی مانند روش نقطه درونی<sup>۱</sup> و روش سیمپلکس<sup>۲</sup> [۲۰] را بیان کرده‌اند. اگرچه بعضی از این رویکردها، در تعیین جواب‌های بهتر به تصمیم‌گیرنده کمک می‌کند، اما با توجه به محاسبات سنگین و تقریباً غیرممکن بودن مطالعات سنگین آن حذف می‌گردند.

برای یک مساله MOLP که به صورت  $\min \{Cx : x \in X\}$  تعریف می‌شود با در نظر گرفتن فضای هدف  $Y$ ، مجموعه غیرتسلطی  $Y_N$  و مجموعه کارای  $X_E$  از آنجا که  $X_E \subseteq \mathbb{R}^n$  و  $Y_N \subseteq \mathbb{R}^p$  با  $p \leq n$ ، ممکن است چند نقطه در  $X_E$  به تنها یک نقطه از  $Y_N$  نگاشته شوند. به همین دلیل بنسون<sup>۳</sup> استدلال می‌کند که تولید  $Y_N$  نیاز به محاسبات کمتری نسبت به تولید  $X_E$  دارد. بنابراین یافتن  $Y_N$  به جای  $X_E$  برای تصمیم‌گیرنده مهم‌تر است. بنسون الگوریتمی برای حل مسائل چندهدفه در فضای هدف ارائه کرد که در این فصل به آن اشاره می‌شود.

بنسون در الگوریتم تقریب خارجی<sup>۴</sup>، برای دستیابی به مجموعه نقاط غیرتسلطی  $Y_N$ ، ترجیح می‌دهد که در روند الگوریتم، به دنبال مجموعه نقاط رأسی غیرتسلطی یعنی  $Y_{NE}$  باشد، بدیهی است که مجموعه  $Y_{NE}$  نسبت به  $Y_N$  کوچکتر است و این امر در مدت زمان محاسبه بهبود حاصل می‌کند.

با داشتن نقاط رأسی غیرتسلطی و با توجه به خطی بودن مساله برنامه‌ریزی چندهدفه می‌توان، با ترکیب محدب نقاط رأسی مذکور مجموعه کامل نقاط غیرتسلطی را به دست آورد.

بنسون در طی الگوریتم به جای کار روی فضای هدف  $Y$ ، روی مجموعه  $Y'$  که توسیعی از  $Y$  است کار می‌کند که  $Y'_N = Y_N$ . بدین منظور، قبل از ورود به گام‌های الگوریتم نیاز به معرفی  $Y'$  و قضایای مربوط به آن داریم. عمده مطالب این فصل از مراجع [۳، ۴۵] است.

<sup>۱</sup> interior point method

<sup>۲</sup> simplex method

<sup>۳</sup> Benson

<sup>۴</sup> outer approximation algorithm

## ۲.۲ الگوریتم تقریب خارجی بنسون:

برای مساله خطی چندهدفه

$$\min\{Cx : x \in X\} \quad (۱.۲)$$

فرض کنید، مجموعه  $Y'$  به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$Y' = \{y \in \mathbb{R}^p : Cx \leq y \leq \hat{y} \text{ for some } x \in X\} \quad (۲.۲)$$

که در آن  $y^{AI} > \hat{y}$  می‌باشد ( $y^{AI} \in \mathbb{R}^p$ )، نقطه ضدایده‌آل مساله چندهدفه (۱.۲) است که تعریف آن در فصل قبل آمده است).

قضیه ۱.۲.۲. [۴۵]

الف. مجموعه  $Y' \subset \mathbb{R}^p$  یک چندوجهی غیرتهی و کراندار از بعد  $p$  است.

ب.  $Y_N = Y'_N$ .

برهان. الف. طبق تعریف  $Y'$  واضح است که  $Y \subset Y'$  و چون  $Y \neq \emptyset$  پس  $Y'$  غیرتهی است. از طرفی  $Y'$  را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$Y' = p_1 \cap (Y + p_2)$$

که در آن

$$p_1 := \{y \in \mathbb{R}^p \mid y \leq \hat{y}\},$$

$$p_2 := \{Z \in \mathbb{R}^p \mid Z \geq 0\}.$$

طبق تعریف  $p_1$  و  $p_2$  چندوجهی‌اند. پس  $(Y + p_2)$  نیز چندوجهی است و از آنجا  $Y'$  نیز که اشتراک دو چندوجهی است، چندوجهی می‌شود. چون برای هر  $x \in X$ ،  $Cx \leq \hat{y}$  پس درون  $Y'$  غیرتهی است. از آنجایی که یک چندوجهی دارای بعد کامل است اگر و تنها اگر درون آن ناتهی باشد [۳۹]، در نتیجه  $\dim Y' = p$ .

ب. ابتدا نشان می‌دهیم که  $Y_N \subset Y'_N$ . فرض کنید که  $y^\circ \in Y_N$  باشد پس  $x_\circ \in X$  ای موجود است که

$$y^\circ = Cx_\circ. \quad (۳.۲)$$

اگر  $y^\circ \notin Y'_N$ ، آنگاه  $y^\circ \in Y'$  موجود است که  $y^\circ \leq y^\circ$  و بنا به تعریف  $Y'$  داریم:

$$\exists x_{\circ\circ} \in X \quad ; \quad Cx_{\circ\circ} \leq y^\circ \leq y^\circ \leq \hat{y} \quad (۴.۲)$$

از نامساوی (۳.۲) و (۴.۲) داریم:

$$Cx_{\circ\circ} \leq Cx_\circ = y^\circ$$

و این با فرض  $y^\circ \in Y_N$  در تناقض است. پس حکم ثابت می‌شود و  $y^\circ \in Y'_N$ .

حال نشان می‌دهیم که  $Y'_N \subset Y_N$ . فرض کنید که  $y_0 \in Y'_N$  باشد اما  $y_0 \notin Y_N$ . در این صورت

$$\exists x_1; Cx_1 \leq y_0$$

با فرض  $Cx_1 = y_1$  داریم:

$$Cx_1 \leq y_1 \leq y_0 < \hat{y}$$

یعنی  $y_1, y_0 \in Y'$  و  $y_1 \leq y_0$ ، که این با  $y_0 \in Y'_N$  در تناقض است. پس  $y_0 \in Y_N$  و اثبات کامل است.  $\square$

قضیه ۱.۲.۲ اساس الگوریتم تقریب خارجی بنسون می‌باشد. الگوریتم، برای یافتن همه نقاط رأسی  $Y$ ، روی  $Y'$  کار می‌کند. در این مرحله از الگوریتم، ابرصفحه‌های حمایتی  $Y'$  ساخته می‌شوند. برای این منظور برنامه‌ریزی‌های خطی اولیه  $P(y)$  و دوگان  $D(y)$  وابسته به  $y \in \mathbb{R}^p$  به صورت زیر مورد نیاز است:

$$P(y) : \min\{Z : Ax \geq b, Cx - eZ \leq y\}, \quad (5.2)$$

$$D(y) : \max\{b^T u - y^T w : A^T u - C^T w = 0, e^T w = 1, u, w \geq 0\}.$$

قضیه ۲.۲.۲. [۴۵]

الف.  $\bar{p} \in \text{int}Y'$  را در نظر بگیرید و فرض کنید که  $y^k \leq \hat{y}$ ،  $y^k \notin Y'$ ،  $q^k$  را نقطه منحصر به فرد مرزی از  $Y'$  در نظر بگیرید، که متعلق به پاره‌خط واصل بین  $y^k$  و  $\bar{p}$  می‌باشد. در این صورت  $q^k \in Y'_{WN}$  است.

ب. فرض کنید که  $q^k \in Y'_{WN}$  باشد و  $(u^T, w^T)$  جوابی بهینه از برنامه‌ریزی خطی دوگان  $D(q^k)$  باشد. در این صورت  $q^k$  متعلق به وجه غیرتسلطی  $F(u, w)$  از  $Y'$  است که به صورت  $F(u, w) = \{y \in Y' : \langle w, y \rangle = \langle b, u \rangle\}$  بیان می‌شود.

برهان. الف. چون نقطه مرزی  $Y'$  است، پس  $q^k \in Y'$ . فرض کنید  $q^k \notin Y'_{WE}$ ، پس طبق تعریف  $Y'$  داریم:

$$\exists y^0 \in Y', x_0 \in X \quad \text{s.t.} \quad Cx_0 \leq y^0 < q^k.$$

از طرفی  $q^k$  متعلق به پاره‌خط واصل  $y^k$  و  $\bar{p}$  است، پس  $0 < \lambda < 1$  وجود دارد که  $q^k = \lambda \bar{p} + (1 - \lambda)y^k$ .

چون  $\bar{p} < \hat{y}$  و  $y^k \leq \hat{y}$  پس  $q^k < \hat{y}$  می‌باشد. تعریف می‌کنیم:

$$d_1 = \min\{(q^k - Cx_0)_j; | j = 1, \dots, p\}$$

$$d_2 = \min\{(\hat{y} - q^k)_j | j = 1, \dots, p\}.$$

اگر به ازای هر  $\nu \in \mathbb{R}^p$ ،  $\|\nu\|$  نرم اقلیدسی باشد،  $\varepsilon > 0$  را طوری در نظر می‌گیریم که  $\varepsilon < d_1$  و  $\varepsilon < d_2$  آنگاه

$$N_\varepsilon(q^k) = \{\nu \in \mathbb{R}^p \mid \|q^k - \nu\| < \varepsilon\}$$



واضح است که این گوی باز است. حال اگر ثابت کنیم  $N_\varepsilon(q^k) \subseteq Y'$ ، نشان داده‌ایم که  $q^k$  نقطه درونی و نه مرزی  $Y'$  است که این تناقض است، پس  $q^k \in Y'_{WE}$  می‌باشد.

برای اثبات  $N_\varepsilon(q^k) \subseteq Y'$ ، فرض کنید  $Z \in N_\varepsilon(q^k)$  در این صورت

$$\begin{aligned} -\varepsilon < Z_j - q_j^k < \varepsilon, \quad \forall j = 1, \dots, p \\ \Rightarrow q_j^k - \varepsilon < Z_j < q_j^k + \varepsilon \end{aligned}$$

همچنین از بالا داریم:

$$\begin{aligned} \varepsilon < d_1 \Rightarrow -\varepsilon > (Cx_0)_j - q_j^k, \quad \forall j = 1, \dots, p \\ \varepsilon < d_2 \Rightarrow \varepsilon < \hat{y}_j - q_j^k, \quad \forall j = 1, \dots, p \end{aligned}$$

یعنی برای هر  $j$ ،  $(Cx_0)_j < Z_j < \hat{y}_j$  و چون  $x_0 \in X$  پس  $Z \in Y'$ ، در نتیجه  $N_\varepsilon(q^k) \subseteq Y'$ .

ب. فرض کنید که  $q^k \in Y'_{WN}$  باشد. پس واضح است که  $P(q^k)$  دارای جواب بهینه  $Z = 0$  می‌باشد.

$$P(q^k) : \min\{Z : Ax \geq b, Cx - eZ \leq q^k\}$$

زیرا اگر  $Z = 0$  باشد، آنگاه  $x_0$  شدنی موجود است که  $Cx_0 - eZ \leq q^k$ ،  $Cx_0 < Cx_0$ ، پس  $Cx_0 < q^k$  و این با  $q^k \in Y'_{WN}$  در تناقض است.

در نتیجه بنا به قضیه قوی دوگانی  $D(q^k)$  نیز دارای جواب بهینه  $(u^T, w^T)$  است که

$$b^T u - (q^k)^T w = 0 \Rightarrow \langle b, u \rangle = \langle q^k, w \rangle$$

در نتیجه  $q^k$  متعلق به وجه  $F(u, w) = \{y \in Y' : \langle w, y \rangle = \langle b, u \rangle\}$  است.  $y \in Y'$  که

در  $F(u, w)$  صدق می‌کند، جواب بهینه مساله مجموع وزن‌دار است در نتیجه طبق قضیه ۱.۴.۱

$y$  یک نقطه غیرتسلطی است و  $F(u, w)$  وجه غیر تسلطی می‌گردد.

□

در بخش بعدی به بیان الگوریتم تقریب خارجی بنسون پرداخته و در ادامه به نحوه فراهم آوردن مقادیر اولیه الگوریتم، اجرای گام‌های الگوریتم، اثبات خاتمه پذیر بودن الگوریتم و اجرای آن روی یک مثال اشاره می‌کنیم.

## ۳.۲ الگوریتم ۱

الگوریتم ۱ (الگوریتم تقریب خارجی بنسون):

مقداردهی اولیه: یک نقطه  $\bar{p} \in \text{int}Y'$  را بدست آورده و یک سیمپلکس  $p$ -بعدی  $S^\circ$  را طوری بسازید که

$S^\circ \subset \hat{y} - \mathbb{R}_{\geq}^p$  و شامل  $Y'$  باشد. مجموعه رئوس  $V(S^\circ)$  از  $S^\circ$  و  $S^\circ$  را ذخیره کنید. قرار دهید  $k = 0$  و به تکرار  $k$  بروید.

تکرار  $k$  :

گام  $k_1$  : اگر برای هر  $y \in V(S^k)$  داشته باشیم  $y \in Y'$ ، آنگاه به گام  $k_2$  بروید و  $S^k = Y'$ . در غیر اینصورت  $y^k \in V(S^k)$  را انتخاب کنید به طوری که  $y^k \notin Y'$  و ادامه دهید.

گام  $k_2$  : مقدار  $\lambda_k$  ی منحصر بفردی از میان  $0 < \lambda < 1$  یافته که  $\lambda y^k + (1 - \lambda)\bar{p}$  متعلق به مرز  $Y'$  باشد و قرار دهید  $q^k = \lambda_k y^k + (1 - \lambda_k)\bar{p}$ .

گام  $k_3$  : قرار دهید  $S^{k+1} = S^k \cap \{y \in \mathbb{R}^p : \langle w^k, y \rangle \geq \langle b, u^k \rangle\}$  که  $(u^{kT}, w^{kT})$  با حل مساله  $LPD(q^k)$  می‌تواند بدست آید.

گام  $k_4$  : با استفاده از  $V(S^k)$  و تعریف  $S^{k+1}$  داده شده در گام  $k_3$ ،  $V(S^{k+1})$  را تعیین کنید. قرار دهید  $k = k + 1$  و به تکرار  $k$  بروید.

گام  $k_5$  : تعداد کلی تکرارها را  $K = k$  قرار دهید. نقاط راسی غیرتسلطی از  $Y'$  به صورت  $Y'_{NE} = \{y \in V(S^K) : y < \hat{y}\}$  است (اثبات در ادامه می‌آید).  $Y_{NE} = Y'_{NE}$  مجموعه همه نقاط راسی غیرتسلطی از  $Y$  است. پایان الگوریتم.

برای هر  $k \geq 0$ ، ابر صفحه حاصل از  $\langle w^k, y \rangle = \langle b, u^k \rangle$  به گونه‌ای ساخته می‌شود که قسمتی از  $S^k$  را که شامل  $y^k$  است برش می‌دهد پس،  $S^k \supset S^{k+1} \supset Y'$ . این نحوه رسیدن به نقاط غیرتسلطی  $Y'$  که از خارج  $Y'$  صورت می‌گیرد، دلیلی بر نامگذاری الگوریتم تقریب خارجی است. توجه شود که در پایان مساله خطی چندهدفه در فضای هدف بطور دقیق حل می‌شود.

## ۴.۲ نحوه اجرای مراحل الگوریتم و بهبودی بر آن

در این بخش به نحوه انجام گام‌های الگوریتم بنسبون اشاره می‌کنیم. قابل ذکر است که جهت اجرای گام‌های  $k_2$  و  $k_4$  الگوریتم بنسبون، روش‌های کارآمدتری پیشنهاد شده که موجب تسریع انجام الگوریتم و بهبود زمان محاسبه می‌شود. از اینرو در این گام‌ها از روش‌های موثر که به آن اشاره می‌شود، استفاده می‌کنیم.

• در گام مقداردهی اولیه برای محاسبه  $\bar{p} \in \text{int}Y'$ ،  $\bar{p}$  می‌تواند مساوی هر ترکیب محدب اکید از  $y^{AI}$  و  $\hat{y}$  باشد.

برای ساخت پوشش سیمپلکس  $p$  - بعدی  $S^\circ$  به صورت زیر عمل می‌کنیم:  
 $S^\circ$  پوسته محدب از مجموعه رئوس  $\{v^j | j = 0, 1, \dots, p\} := V(S^\circ)$  می‌باشد که در آن  $v^0 = \hat{y}$  و برای هر  $v^j \in \mathbb{R}^p$ ،  $j = 1, \dots, p$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$v_i^j = \begin{cases} \hat{y}_i & i \neq j \\ \beta + \hat{y}_j - \langle e, \hat{y} \rangle & i = j \end{cases} \quad (۶.۲)$$

که در آن  $\beta = \min_{y \in Y'} \langle e, y \rangle$  می‌باشد. قضیه زیر مبنی بر درستی  $Y' \subset S^\circ$  و  $p$ -سیمپلکس بودن  $S^\circ$  است.

**قضیه ۱.۴.۲.** [۳] پوسته محدب  $S$  از  $V(S) = \{v^j \mid j = 0, 1, \dots, p\}$  با تعریف  $v^j$  ها به صورت (۶.۲)، یک سیمپلکس  $p$ -بعدی با مجموعه رئوس  $V(S)$  است که شامل  $Y'$  است.

برهان. چون برای هر  $y \in Y'$  رابطه  $y \leq y^{AI} < \hat{y}$  برقرار است پس،  $\langle e, \hat{y} \rangle - \beta > 0$ . برای هر  $j = 1, \dots, p$  داریم:

$$\langle v^\circ - v^j \rangle_i = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \langle e, \hat{y} \rangle - \beta & i = j \end{cases} \quad (7.2)$$

که  $i = 1, \dots, p$ . دو رابطه اخیر نشان می‌دهد که  $\{v^\circ - v^j \mid j = 1, \dots, p\}$  یک مجموعه مستقل خطی است. از اینرو  $\{v^\circ, \dots, v^p\}$  مجموعه مستقل آفینی است، لذا  $S$ ، سیمپلکس  $p$ -بعدی با مجموعه رئوس  $V(S)$  است.

برای نشان دادن  $Y' \subseteq S$ ، ابتدا فرض می‌کنیم که  $\bar{y} \in Y'$  باشد. آنگاه  $\bar{y} \leq \hat{y}$  که  $(v^\circ - \bar{y}) = (\hat{y} - \bar{y}) \geq 0$  علاوه بر آن

$$\begin{aligned} \langle e, v^\circ - \bar{y} \rangle &\leq \min_{y \in Y'} \langle e, v^\circ - y \rangle \\ &= \langle e, v^\circ \rangle - \min_{y \in Y'} \langle e, y \rangle \\ &= \langle e, v^\circ \rangle - \beta \\ &= \langle e, \hat{y} \rangle - \beta \end{aligned} \quad (8.2)$$

که دو تساوی اخیر به ترتیب از تعاریف  $\beta$  و  $v^\circ$  نتیجه شده است. از آنجایی که  $(v^\circ - \bar{y}) \geq 0$ ، با توجه به رابطه (۸.۲) داریم:

$$\forall j = 1, \dots, p \quad 0 \leq (v^\circ - \bar{y})_j \leq \langle e, \hat{y} \rangle - \beta.$$

بنابراین، می‌توانیم اسکالره‌های  $\alpha_j$  که  $j = 1, \dots, p$  را طوری انتخاب کنیم که برای هر  $j = 1, \dots, p$  و  $0 \leq \alpha_j \leq 1$

$$(v^\circ - \bar{y})_j = \alpha_j (\langle e, \hat{y} \rangle - \beta)$$

با توجه به رابطه (۷.۲) می‌توان نوشت

$$(v^\circ - \bar{y}) = \sum_{j=1}^p \alpha_j (v^\circ - v^j). \quad (9.2)$$

چون  $\alpha_j \geq 0$  برای  $j = 1, \dots, p$ ، لذا  $\sum_{j=1}^p \alpha_j \geq 0$ . اگر  $\sum_{j=1}^p \alpha_j > 1$  برقرار باشد، با

استفاده از (۷.۲) و (۹.۲) داریم:

$$\begin{aligned} \langle e, v^\circ - \bar{y} \rangle &= \sum_{j=1}^p \alpha_j \langle e, v^\circ - v^j \rangle \\ &= \sum_{j=1}^p \alpha_j (\langle e, \hat{y} \rangle - \beta) \\ &> \langle e, \hat{y} \rangle - \beta \end{aligned}$$

که این با (۸.۲) در تناقض است. پس باید  $1 \leq \sum_{j=1}^p \alpha_j \leq \infty$  باشد. ضمناً از رابطه (۹.۲) داریم:

$$\bar{y} = (1 - \sum_{j=1}^p \alpha_j) v^\circ + \sum_{j=1}^p \alpha_j v^j.$$

چون برای هر  $j = 1, \dots, p$   $0 \leq \alpha_j \leq 1$  و  $0 \leq (1 - \sum_{j=1}^p \alpha_j) \leq 1$  برقرار است، بدین مفهوم است که  $\bar{y}$  ترکیب محدبی از  $\{v^j \mid j = 0, 1, \dots, p\}$  است. یعنی  $\bar{y} \in S$  و در نهایت  $S'$  شامل  $Y'$  است.  $\square$

قضیه ۲.۴.۲. [۲۶]  $p$ -سیمپلکس تعریف شده در قضیه قبل می‌تواند به صورت زیر نوشته شود.

$$S = \{y \in \mathbb{R}^p \mid y \leq \hat{y}, \beta \leq \langle e, y \rangle\}$$

پس از ساخت  $S^\circ$  اولیه و ذخیره کردن رئوس آن به نام  $V(S^\circ)$  وارد تکرار مربوط به گام‌ها می‌شویم.

- در گام  $k_1$  الگوریتم، برای بررسی عضویت  $y \in V(S^k)$  در  $Y'$  می‌توان فرایند روش سیمپلکس برای مسأله  $P(y)$  از رابطه (۵.۲) را، بکار برد. اگر مقدار بهینه این مسأله مثبت باشد، یعنی  $0 < Z$  آنگاه  $y \notin Y'$  و در غیر این صورت  $y \in Y'$ .

اگر  $V(S^k) \subset Y'$  نباشد، با انتخاب  $y^k \in V(S^k)$  که  $y^k \notin Y'$  وارد گام  $k_2$  می‌شویم.

- در گام  $k_2$  به دنبال  $\lambda_k$  منحصر بفردی در بازه  $(0, 1)$  هستیم به گونه‌ای که  $q^k = \lambda_k y^k + (1 - \lambda_k) \bar{p}$  نقطه مرزی  $Y'$  روی پاره‌خط واصل  $y^k$  و  $\bar{p}$  باشد.

بنسوز روش دوبخشی را پیشنهاد می‌کند [۲]. به هر حال، این روش نیاز به حل‌های LP زیادی دارد. نشان داده می‌شود، پیدا کردن  $\lambda$  مناسب با حل تنها یک LP ممکن است.

گزاره ۳.۴.۲. [۲۵] فرض که  $y^k$  یک رأس از  $S^K$  باشد که  $y^k \notin Y'$ . اگر  $\bar{p} \in \text{int} Y'$  و  $\mu = y^k - \bar{p}$  باشد، آنگاه  $i \in \{1, \dots, p\}$  موجود است به گونه‌ای که  $\mu_i < 0$ .

برهان. می‌دانیم که  $y^k \leq \hat{y}$  است. از آنجایی که  $y^k \notin Y'$ ، پس برای هر  $x$  شدنی  $Cx \not\leq y^k$ . از طرفی چون  $\bar{p} \in \text{int} Y'$ ، پس  $\bar{x}$  شدنی وجود دارد که  $C\bar{x} \leq \bar{p}$  است. از اینرو  $\bar{p} \not\leq y^k$ ، که این همان وضعیت مطلوب است.  $\square$

با استفاده از گزاره ۳.۴.۲، امکان انتخاب  $l \in \{1, \dots, p\}$  ای وجود دارد که  $\mu_l^k = y_l^k - \bar{p}_l < 0$ ، یعنی  $\mu_l < 0$  ای را انتخاب می‌کنیم که بزرگترین مقدار قدرمطلق را، در میان  $\mu_i$  های منفی دارد، برای هر  $i \in 1, \dots, p$  با  $\mu_i < 0$  با توجه به تحدب  $Y'$ ، در میان همه نقاط  $Y'$  روی پاره‌خط واصل نقاط  $y^k$  و  $\bar{p}$ ، نقطه مرزی  $q$  از  $Y'$ ، کوچکترین مقدار  $q_l$  است. بنابراین  $\lambda$  منحصر بفرد برای تعیین  $q^k$  می‌تواند با حل LP ی زیر پیدا شود.

$$\begin{aligned} \max \quad & \lambda \\ \text{s.t.} \quad & \lambda y^k + (1 - \lambda)\bar{p} \geq Cx \\ & Ax \geq b \\ & \lambda \leq 1 \\ & \lambda \geq 0 \end{aligned} \tag{۱۰.۲}$$

که در آن  $x, \lambda$  متغیرها هستند. توجه شود که در این مساله  $\lambda$  نمی‌تواند مقدار ۰ و ۱ را اختیار کند، زیرا اگر  $(\lambda = 1, x_0)$  جواب مساله باشد، در این صورت طبق محدودیت اول  $y^k \geq Cx_0$  که با فرض  $y^k \notin Y'$  در تناقض است، و اگر  $(\lambda = 0, x_0)$  جواب مساله باشد، در این صورت  $q^k = \bar{p}$  نقطه مرزی است و این با فرض  $\bar{p} \in \text{int}Y'$  در تناقض است. این اصلاح بطور چشمگیری در بهبود زمان محاسبه نقش دارد.

- در گام  $k_3$  چون  $q^k$  نقطه مرزی  $Y'$  است، طبق قضیه ۲.۲.۲،  $q^k \in Y'_{WN}$ . جواب بهینه  $(u^k, w^k)$  از مساله دوگان  $D(q^k)$  (۵.۲)، وجه غیرتسلطی

$$F(u^k, w^k) = \{y \in Y' : \langle w^k, y \rangle = \langle b, u^k \rangle\}$$

را ایجاد می‌کند. بدیهی است که

$$S^{k+1} = S^k \cap \{y \in \mathbb{R}^p : \langle w^k, y \rangle \geq \langle b, u^k \rangle\}$$

قسمتی از  $S^k$  را حذف می‌کند که  $y^k$  در آن قرار دارد. از طرفی شمول  $S^k \supset S^{k+1} \supset Y'$  برقرار است، زیرا طبق مرزی بودن  $q^k$

$$\nexists y \in Y' ; y < q^k \Rightarrow \nexists y \in Y' ; \langle y, w^k \rangle < \langle q^k, w^k \rangle = \langle b, u^k \rangle$$

یعنی  $\{y \in \mathbb{R}^p : \langle w^k, y \rangle \geq \langle b, u^k \rangle\}$  ابرصفحه حمایتی  $Y'$  است. در نتیجه  $S^{k+1}$  شامل  $Y'$  است.

- در گام  $k_4$ ، برای محاسبه رئوس  $S^{k+1} = S^k \cap \{y \in \mathbb{R}^p : \langle w^k, y \rangle \geq \langle b, u^k \rangle\}$  بنسون روش هورست<sup>۵</sup> و همکاران [۲۴] و روش افراز ساده<sup>۶</sup> [۴] را پیشنهاد می‌کند. در اینجا الگوریتم شمارشی رأس روی خط<sup>۷</sup> چن و هانسن<sup>۸</sup> [۶] استفاده می‌شود. این الگوریتم روی الگوریتم هورست بنا

<sup>۵</sup> Horst

<sup>۶</sup> simplicial partitioning technique

<sup>۷</sup> on-line vertex enumeration algorithm

<sup>۸</sup> Chen and Hansen

شده، اما پیچیدگی آن کمتر است [۶].

اصل الگوریتم شمارشی رأس روی خط، پیدا کردن مجموعه رئوسی از  $S^k$  در طرفین صفحه برش رأسی برای شناسایی همه یالهای تقاطع  $S^k$  و  $H(u, w)$  و سپس، استفاده از لیستهای مجاورتی از نقاط شده و لیستهای مجاورتی بروز می‌گردد (لیستهای مجاورتی، لیستهای رئوس مجاور هر رأس مانند  $S^k$  در  $S^{k+1}$  است که شامل رئوسی هستند که با  $S^k$  حداقل در یک محدودیت مشترک فعالند).

روش شمارشی رأس روی خط، که در ادامه به آن اشاره می‌شود، در مقایسه با روش افراز ساده، باعث بهبود در سرعت محاسبات می‌شود.

تعیین رأس روی خط (درون خطی) و لیستهای مجاورتی:

مساله را به صورت زیر فرمولبندی می‌کنیم.  $p$  را یک چند سقفی و  $H$  را ابرصفحه در نظر بگیرید:

$$p = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) = a^i x - b_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, m\}$$

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid h(x) = a^{m+1} x - b_{m+1} = 0\}$$

که در آن  $a^i \in \mathbb{R}^n$  و  $b_i \in \mathbb{R}$  برای  $i = 1, \dots, m+1$  می‌باشد. فرض کنید:

$$\bar{p} = p \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid h(x) \leq 0\}$$

چندسقفی، با تقاطع  $p$  و نیم‌فضای بسته‌ی پایینی  $H$ ، باشد. در نظر بگیرید:

$$V(p) = \text{مجموعه رئوس } p$$

$$S = H \cap p \quad \text{چندسقفی } S$$

$$V^+(p) = \{v \in V(p) \mid h(v) > 0\}$$

$$V^-(p) = \{v \in V(p) \mid h(v) \leq 0\}$$

$$V(\bar{p}) = V^-(p) \cup V(S)$$

$$v = |V(p)| = \text{تعداد رئوس } p$$

$$v^- = |V^-(p)| = \text{تعداد رئوس } p \text{ که در } \bar{p} \text{ است}$$

$$v^+ = |V^+(p)| = \text{تعداد رئوس } p \text{ که در } \bar{p} \text{ نیست}$$

$$v^s = |V(S)| = \text{تعداد رئوس جدید}$$

$$adj(u) = \text{مجموعه رئوس همسایه راس } u$$

$$j(u) = \{i \mid g_i(u) = 0\}.$$

گام‌های الگوریتم جهت تولید لیستهای مجاورتی به صورت زیر است:

الگوریتم شمارشی رأس روی خط:

گام ۱. رئوس شدنی و نشدنی:

Determine :  $V^+(P), V^-(P), v^+, v^-$ ,  
 if  $v^- = \circ \rightarrow \text{stop}, \bar{p} = \emptyset$ ,  
 if  $v^+ = \circ \rightarrow \text{stop}$ , the new constraint being redundant,  
 if  $v^+ \leq v^-$   
     then  $(V^+(p) \rightarrow V_1, V^-(p) \rightarrow V_2)$ ,  
     else  $(V^+(p) \rightarrow V_2, V^-(p) \rightarrow V_1)$ ,  
 End if

گام ۲. رئوس جدید:

$V(S) \leftarrow \emptyset$   
 for all  $u \in V_1$  Do  
     for all  $v \in \text{adj}(u) \cap V_2$  Do  
         Determine  $w \leftarrow [u, v] \cap H$   
          $V(S) \leftarrow V(S) \cup \{w\}$   
         if  $v^+ \leq v^-$   
             Then  $[\text{adj}(v) \leftarrow (\text{adj}(v) \setminus \{u\}) \cup \{w\}, \text{adj}(w) \leftarrow \{v\}]$   
             Else :  $(\text{adj}(u) \leftarrow \text{adj}(u) \setminus \{v\}) \cup \{w\}, \text{adj}(w) \leftarrow \{u\}$   
         End if  
      $j(w) \leftarrow [j(u) \cap j(v)] \cup \{m + 1\}$   
     End for  
 End for

گام ۳. لیست‌های مجاورتی برای رئوس جدید:

for all  $u \in V(S), v \in V(S)$  Do  
 if  $|j(u) \cap j(v)| = n - 1$   
     Then  $[\text{adj}(u) \leftarrow \text{adj}(u) \cup \{v\}$   
          $\text{adj}(v) \leftarrow \text{adj}(v) \cup \{u\}]$   
     End if  
 End for.

• زمانی که در گام  $k_1$  الگوریتم به  $V(S^k) \subset Y'$  رسیدیم، به گام  $k_5$  وارد می‌شویم. نشان می‌دهیم که  $\{y \in V(S^k) : y < \hat{y}\}$  با مجموعه نقاط رأسی غیرتسلطی  $Y'$  برابر است و  $Y_{NE} = Y'_{NE}$ . لذا به نقاط رأسی غیرتسلطی  $Y$  دست پیدا کرده‌ایم.

**قضیه ۴.۴.۲.** [۲] فرض کنید که  $k \geq 0$ ، تعداد تکراری باشد که  $S^k = Y'$  و الگوریتم خاتمه یابد. اگر  $E = \{y \in V(S^k) \mid y < \hat{y}\}$ ، آنگاه  $E$  با مجموعه همه نقاط رأسی کارای  $Y'$  برابر است.

قضیه زیر نشان می‌دهد که مراحل الگوریتم ۱ متناهی است و با یافتن تمام نقاط رأسی غیرتسلطی  $Y$  در گام  $k_5$  خاتمه می‌یابد.

**قضیه ۵.۴.۲.** [۴۵] الگوریتم ۱ در تعداد متناهی تکرار متوقف می‌شود و در خاتمه  $S^k = Y'$  است. فرض کنید که  $Y'_{NE} = \{y \in V(S^k) : y < \hat{y}\}$ ، آنگاه  $Y'_{NE}$  کاملاً، با مجموعه نقاط رأسی غیرتسلطی  $Y$  برابر است، یعنی،  $Y'_{NE} = Y_{NE}$ .

برهان. با استفاده از قضیه ۱.۴.۲، سیمپلکس اولیه  $S = S^0$  از الگوریتم، شامل  $Y'$  است. فرض کنید  $k \geq 0$  و  $S^k \supseteq Y'$ ، اما  $S^k \neq Y'$ . آنگاه در گام  $k_1$  الگوریتم، یک عضو  $y^k \in V(S^k)$  یافت می‌شود که  $y^k \notin Y'$ . با استفاده از قضیه ۲.۴.۲ و گام  $k_3$  از الگوریتم، برای هر نقطه  $y \in S^k$  باید  $y \leq \hat{y}$  برقرار باشد. از آن جایی که  $y^k \in S^k$ ، لذا  $y^k \leq \hat{y}$  است. از قضیه ۲.۲.۲ و گام  $k_2$ ، چون  $\bar{p} \in \text{int} Y'$  و  $y^k \notin Y'$ ، پس  $q^k \in Y'_{WN}$ . از گام  $k_3$  و قضیه ۲.۲.۲،  $\{y \in Y' \mid \langle w^k, y \rangle = \langle b, u^k \rangle\}$  وجه کارای ضعیف از  $Y'$  شامل  $q^k$  است.  $\bar{p} \in \text{int} Y'$ ، بیانگر آن است که،  $\langle w^k, \bar{p} \rangle \neq \langle b, u^k \rangle$ . از طرفی طبق قضیه ۲.۲.۲، برای هر  $y \in Y'$  داریم  $\langle w^k, y \rangle \geq \langle b, u^k \rangle$ ، بنابراین  $\langle w^k, \bar{p} \rangle > \langle b, u^k \rangle$ . طبق  $\langle w^k, q^k \rangle = \langle b, u^k \rangle$  و گام  $k_2$  از الگوریتم، رابطه  $\langle w^k, y^k \rangle < \langle b, u^k \rangle$  نتیجه می‌شود. پس با تعریف  $S^{k+1}$  در گام  $k_3$ ،  $y^k \notin S^{k+1}$ .

از طرف دیگر، چون  $S^k \supseteq Y'$  و برای هر  $y \in Y'$  داریم  $\langle w^k, y \rangle \geq \langle b, u^k \rangle$ ، در نتیجه  $S^{k+1} \supseteq Y'$ . با انتخاب  $k$ ، الگوریتم چندوجهی‌های متمایز  $S^k$  که  $k = 0, 1, 2, \dots$  تولید می‌کند که رابطه زیر برای آنها برقرار است.

$$S^0 \supset S^1 \supset \dots \supset S^k \supset Y'$$

علاوه بر آن، برای هر  $k \geq 0$ ، از گام  $k_3$  داریم

$$S^{k+1} = S^k \cap \{y \in \mathbb{R}^p \mid \langle w^k, y \rangle \geq \langle b, u^k \rangle\}$$

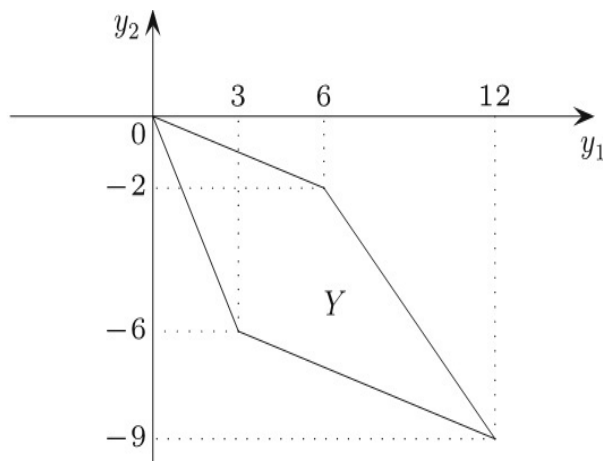
که  $\{y \in Y' \mid \langle w^k, y \rangle = \langle b, u^k \rangle\}$  وجه‌ای از  $Y'$  است. از قضیه ۱.۲.۲ نتیجه می‌گردد که الگوریتم ۱ باید متناهی باشد و در پایان الگوریتم  $S^k = Y'$  است.

بعلاوه، طبق قضیه ۳.۳، مجموعه  $Y'_{NE}$  همان مجموعه نقاط رأسی غیرتسلطی از  $Y'$  است. از طرفی طبق قضیه ۱.۲.۲،  $Y_N = Y'_N$  است و چون مساله برنامه‌ریزی خطی است، مجموعه نقاط رأسی غیرتسلطی آنها نیز با هم مساویند یعنی  $Y'_{NE} = Y_{NE}$ . زیرا فرض کنیم  $y \in Y_{NE}$  باشد اما  $y \notin Y'_{NE}$ . طبق ویژگی نقاط رأسی،  $y$  را می‌توان به صورت



ترکیب محدب از عناصر  $Y'_N$  نوشت، در صورتی که ترکیبی محدب از عناصر مجموعه  $Y_N$  نمی‌تواند باشد و این مطلب با تساوی  $Y_N = Y'_N$  در تناقض است. □

به طور خلاصه ایده کلی الگوریتم بنسون را می‌توان به صورت زیر شرح داد:  
 ابتدا یک پوشش سیمپلکس  $S^0$  شامل  $Y'$  ساخته می‌شود. یک نقطه درونی  $\bar{p}$  از  $Y'$  معرفی می‌شود. آنگاه برای هر رأس  $y^k$  از پوشش، بررسی می‌شود که آیا  $y^k$  متعلق به  $Y'$  است یا نه. اگر  $y^k \notin Y'$  آنگاه  $\bar{p}$  و  $y^k$  با یک پاره‌خط، که شامل یک نقطه مرزی منحصربفرد  $q^k$  از  $Y'$  است، مرتبط می‌شوند. یک برش (ابرفصله جدید حمایتی) شامل  $q^k$  ساخته می‌شود و پوشش  $S^k$  بروز می‌شود. روند تا زمانی تکرار می‌شود که همه رئوس پوشش در  $Y'$  باشند. آنگاه رئوس پوشش، نقاط رأسی  $Y'$  است و نقاط رأسی غیرتسلطی  $Y'$ ، به صورت  $Y'_{NE} = \{y \in V(S^k) : y < \hat{y}\}$  می‌باشد.  
 در ادامه مثالی برای نمایش الگوریتم بنسون می‌آوریم:



شکل ۱۰۲: فضای هدف  $Y$  در مثال ۶.۴.۲

مثال ۶.۴.۲. مسأله MOLP،  $\min\{Cx : Ax \geq b\}$  را در نظر بگیرید که در آن

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

مجموعه شدنی  $Y$  در فضای هدف در شکل ۱۰۲ نشان داده شده است. نقطه  $y^{AI} = (12, 0)$  است. چون  $\hat{y} > y^{AI}$  است، با انتخاب  $\hat{y} = (13, 1)$ ،  $Y'$  به صورت  $Y' = \{y \in \mathbb{R}^2 : Cx \leq y \leq \hat{y}, Ax \geq b\}$  تعریف می‌شود. جهت دستیابی به نقاط راسی غیرتسلطی، نحوه اجرای مراحل الگوریتم را طی یک تکرار در این مثال نشان می‌دهیم.

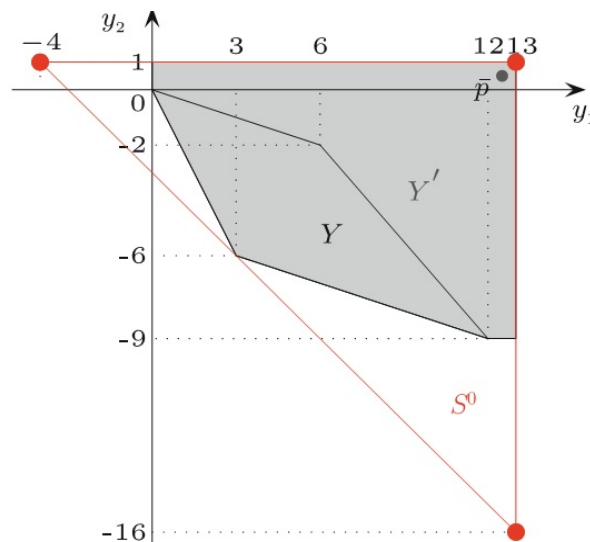
ابتدا نقطه درونی  $\bar{p} = (12/5, 0/5)$  از  $Y'$  را در نظر می‌گیریم.  $S^\circ$  پوشش محدب از مجموعه رئوس زیر است:

$$\begin{aligned} V(S^\circ) &= \{v^j | j = 0, 1, 2\}, \\ v^0 &= \hat{y} = (13, 1), \\ v^1 &= (v_1^1, v_2^1) = (\beta - \langle e, \hat{y} \rangle + \hat{y}_1, \hat{y}_2) = (-4, 1), \\ v^2 &= (v_1^2, v_2^2) = (\hat{y}_1, \beta - \langle e, \hat{y} \rangle + \hat{y}_2) = (13, -16) \end{aligned}$$

که در آن

$$\beta = \min_{y \in Y'} \langle e, y \rangle = \min\{y_1 + y_2 | y \in Y'\} = 3 - 6 = -3.$$

مجموعه محدب  $S^\circ$  ناحیه مثلثی شکل با سه راس فوق است. شکل ۲.۲،  $Y'$ ،  $Y$  و نقطه درونی  $\bar{p}$  را نشان می‌دهد. با ذخیره کردن مجموعه رئوس  $S^\circ$ ،



شکل ۲.۲: مجموعه‌های  $Y'$ ،  $S^\circ$ ،  $\bar{p} \in \text{int}Y'$

وارد گام  $k_1$  الگوریتم می‌شویم.  $V(S^\circ) = \{(13, 1), (-4, 1), (13, -16)\}$  راس  $y^0 = (-4, 1)$  را انتخاب کرده، با اجرای برنامه‌ریزی خطی زیر تعلق  $y^0$  به  $Y'$  را مورد بررسی

قرار می‌دهیم.

$$\begin{aligned}
 P(y = y^\circ) : \quad & \min \quad z \\
 & s.t \quad x_2 \leq 3 \\
 & \quad 3x_1 - x_2 \leq 6 \\
 & \quad 3x_1 + x_2 - z \leq -4 \\
 & \quad -x_1 - 2x_2 - z \leq 1 \\
 & \quad x_1 \geq 0 \\
 & \quad x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

با جواب  $(z = 4, x_1 = 0, x_2 = 0)$ ، چون مقدار بهینه  $z^* = 4$  مثبت است، پس  $y^\circ \notin Y'$  و وارد گام  $k_2$  می‌شویم (اگر مقدار بهینه  $z^* \leq 0$  باشد،  $y^\circ \in Y'$  می‌گردد). در این گام، با محاسبه  $\lambda_0$  از حل LP زیر، نقطه مرزی  $q^\circ = \lambda_0 y^\circ + (1 - \lambda_0)\bar{p}$  از  $Y'$  که روی پاره‌خط واصل  $\bar{p}$  و  $y^\circ$  است، مشخص می‌شود.

$$\begin{aligned}
 \max \quad & \lambda \\
 s.t \quad & 3x_1 + x_2 + 16/5\lambda \leq 12/5 \\
 & -x_1 - 2x_2 - 0/5\lambda \leq 0/5 \\
 & 3x_1 - x_2 \leq 6 \\
 & 0 \leq x_2 \leq 3 \\
 & x_1 \geq 0 \\
 & 0 \leq \lambda \leq 1.
 \end{aligned}$$

مقدار  $\lambda = \lambda_0 = 0/7575758$ ، جواب بهینه مساله فوق است و از آنجا  $q^\circ = (0, \frac{29}{33})$  است. در گام  $k_3$ ، با حل مساله دوگان  $D(q^\circ)$  زیر جواب بهینه  $(u^\circ, w^\circ)$  که در ساخت ابرصفحه جداساز استفاده می‌شود، مشخص می‌گردد.

$$\begin{aligned}
 D(y = q^\circ) : \max \quad & -3u_1 - 6u_2 - 0w_1 - \frac{29}{33}w_2 \\
 s.t \quad & -3u_2 - 3w_1 + w_2 \leq 0 \\
 & -u_1 + u_2 - w_1 + 2w_2 \leq 0 \\
 & w_1 + w_2 = 1 \\
 & u_1, u_2, w_1, w_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

که در آن  $(u^\circ, w^\circ) = ((0, 0), (1, 0))$  است.

حال  $S^1 = S^\circ \cap \{y \in \mathbb{R}^2 : \langle w^\circ, y \rangle \geq \langle b, u^\circ \rangle\} = S^\circ \cap \{y \in \mathbb{R}^2 : y_1 \geq 0\}$  است.

وارد گام  $k_4$  شده و می‌خواهیم رئوس  $V(S^1)$  را با استفاده از الگوریتم شمارشی رأس روی خط چن و هانسن به دست آوریم. برای این منظور تعریف می‌کنیم:

$$p = S^\circ = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid g_1(x) = x_2 - 1 \leq 0, g_2(x) = x_1 - 13 \leq 0, g_3(x) = -x_1 - x_2 - 3 \leq 0\}$$

$$H = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \langle w^\circ, x \rangle = \langle b, u^\circ \rangle\} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 0\}$$

$$S^1 = \bar{p} = p \cap \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \langle b, u^\circ \rangle - \langle w^\circ, x \rangle \leq 0\} = p \cap \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 0\}$$

$$S = p \cap H \quad j(u) = \{i \mid g_i(u) = 0\}$$

$$V(\bar{p}) = V^- \cup V(S)$$

طبق سه مرحله این الگوریتم داریم:

(I) رئوس شدنی و نشدنی:

$$V(p) = \{(-4, 1), (13, 1), (13, -16)\},$$

$$V^+(p) = \{(-4, 1)\} \quad v^+ = 1,$$

$$V^-(p) = \{(13, 1), (13, -16)\}, \quad v^- = 2.$$

چون  $v^+ \leq v^-$  پس

$$V_1 = V^+(p), \quad V_2 = V^-(p)$$

(II) رئوس جدید:

$$V(S) \leftarrow \emptyset$$

$$u = (-4, 1) \quad adj(u) = \{(13, 1), (13, -16)\} \quad adj(u) \cap V_2 = \{(13, 1), (13, -16)\}$$

$$v_1 = (13, 1)$$

$$[(13, 1), (-4, 1)] \cap H = w_1 = (0, 1)$$

$$V(S) \leftarrow V(S) \cup \{w_1\} = \{(0, 1)\}$$

چون  $v^+ \leq v^-$  داریم:

$$adj(v_1 = (13, 1)) = (\{(-4, 1), (13, -16)\} \setminus \{(-4, 1)\}) \cup \{(0, 1)\} = \{(13, -16), (0, 1)\}$$

$$adj(w_1 = (0, 1)) = \{(13, 1)\}$$

$$j(w_1) = \{4\} \cup [j(-4, 1) \cap j(13, 1)] = \{4\} \cup [\{1, 3\} \cap \{1, 2\}] = \{1, 4\}$$

$$v_2 = (13, -16)$$

$$[(13, -16), (-4, 1)] \cap H = w_2 = (0, -3)$$

$$V(S) = V(S) \cup \{w_2\} = \{(0, 1), (0, -3)\}$$

چون  $v^+ \leq v^-$ ، داریم:

$$adj(v_2 = (13, -16)) = (\{(13, 1), (-4, 1)\} \setminus \{(-4, 1)\}) \cup \{(0, -3)\} = \{(13, 1), (0, -3)\}$$

$$adj(w_2 = (0, -3)) = \{(13, -16)\}$$

$$j(w_2) = \{4\} \cup [j(-4, 1) \cap j(13, -16)] = \{4\} \cup [\{1, 3\} \cap \{2, 3\}] = \{3, 4\}$$

(III) لیست‌های مجاورتی برای رئوس جدید:

از آنجایی که  $|j(w_1) \cap j(w_2)| = 1 = n - 1$ ، داریم:

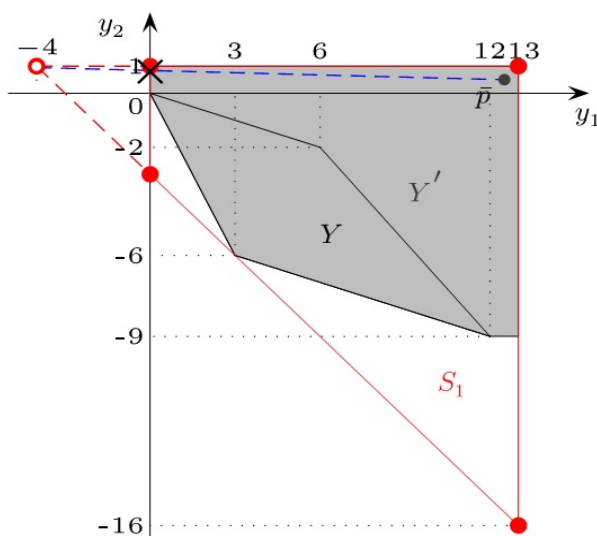
$$adj(w_1) = \{(13, 1)\} \cup \{w_2\} = \{(13, 1), (0, -3)\}$$

$$adj(w_2) = \{(13, -16)\} \cup \{w_1\} = \{(13, -16), (0, 1)\}$$

با مشخص شدن مجموعه رئوس جدید  $V(S)$ ، مجموعه رئوس  $S^1$  به شکل زیر تعیین می‌گردد.

$$V(S^1) = V^-(p) \cup V(S) = \{(13, 1), (13, -16), (0, 1), (0, -3)\}$$

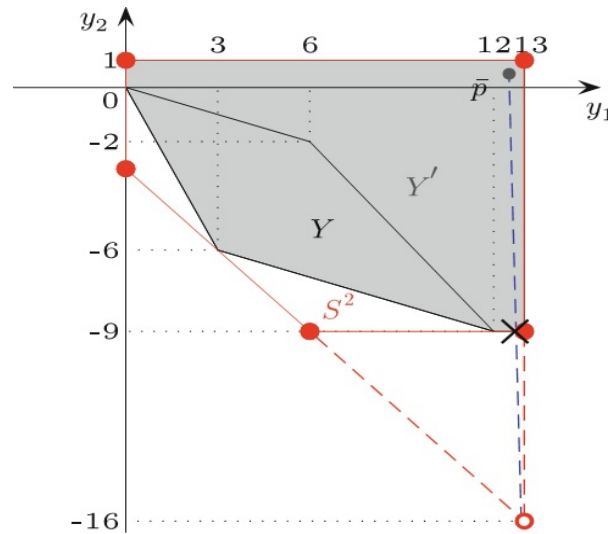
با این مجموعه وارد تکرار گام‌ها می‌شویم تا در نهایت  $V(S^k) \subset Y'$  گردد. شکل‌های ۳.۲، ۴.۲، ۵.۲



شکل ۳.۲: بعد از برش اول

و ۶.۲ به ترتیب ابرصفحه‌های اول و دوم و سوم و چهارم را نشان می‌دهد. رئوس  $S^k$  با دایره‌های پر و رأس برش یافته با دایره تو خالی و نقطه مرزی  $q^k$  با ضربدر نشان داده شده است.

اولین ابرصفحه، رأس  $(1, -4)$  را برش می‌دهد و رأس  $(13, -16)$  در برش دوم و رأس  $(0, -3)$  در برش سوم و رأس  $(6, -9)$  در برش چهارم قرار دارد. تغییر  $S^k$  را بعد از هر برش می‌توان دید. بعد از برش چهارم  $S^k = Y'$  است.



شکل ۴.۲: بعد از برش دوم

پس رئوس  $S^4$ ، نقاط رأسی  $Y'$  می‌باشد. همه نقاط رأسی غیرتسلطی  $Y'$  به صورت زیر فراهم می‌شود.

$$Y'_{NE} = \{y \in V(S^4) : y < \hat{y}\}$$

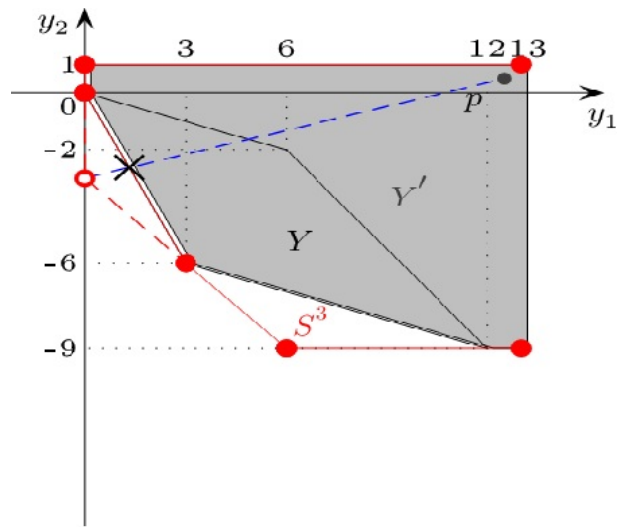
در این مثال سه نقطه رأسی غیرتسلطی زیر برای  $Y$  بدست می‌آید و الگوریتم پایان می‌یابد.

$$Y_{NE} = \{(0, 0), (3, -6), (12, -9)\}$$

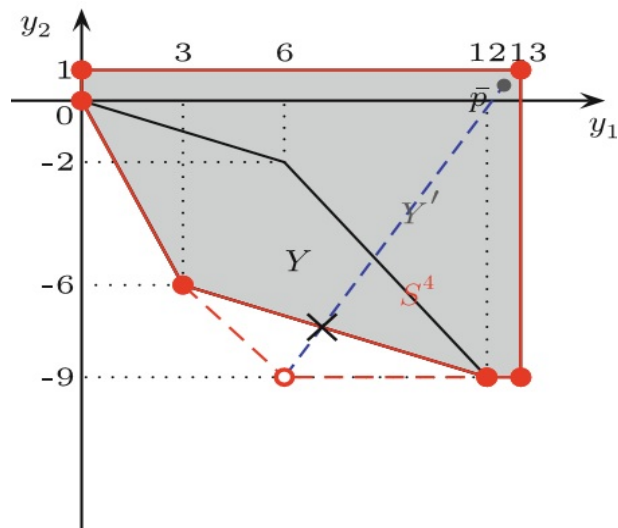
چون برنامه‌ریزی چندهدفه خطی است، با داشتن نقاط رأسی غیرتسلطی و تشکیل ترکیب محدب رئوس مجاور در آن به مجموعه غیرتسلطی  $Y_N$  می‌رسیم.

$$Y_N = \left\{ \sum_{i=1}^3 \lambda_i y_i : \sum_{i=1}^3 \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0, y_i \in Y_{NE}, \text{ مجاور} \right\}.$$

همان‌طور که دیدید در برنامه‌ریزی‌های چندهدفه خطی به کمک الگوریتم بنسون می‌توان به نقاط رأسی غیرتسلطی و در نهایت به مجموعه کامل نقاط غیرتسلطی دست یافت. در فصل بعد هدف رسیدن به نقاط  $\epsilon$ -غیرتسلطی در برنامه‌ریزی‌های خطی است و الگوریتم بنسون را برای این منظور تغییر می‌دهیم.



شکل ۵.۲: بعد از برش سوم



شکل ۶.۲: بعد از برش چهارم

# فصل ۳

## الگوریتم بنسون اصلاح شده برای جواب‌های تقریباً کارا

ابتدا در بخش اول این فصل، به ارائه نسخه تقریبی از الگوریتم بنسون<sup>۱</sup> می‌پردازیم و سپس اجرای آن را روی مثالی مشاهده می‌کنیم. در بخش بعدی نشان می‌دهیم که با کمک الگوریتم بنسون اصلاح شده، می‌توان نقاط  $\varepsilon$ -غیرتسلطی یک مساله چندهدفه خطی را تولید کرد. عمده مطالب این فصل از مرجع [۴۵] می‌باشد.

### ۱.۳ نسخه تقریبی از الگوریتم بنسون

در این بخش با توجه به تعاریف نقاط  $\varepsilon$ -کارا و  $\varepsilon$ -غیرتسلطی (تعریف ۲۳.۳.۱) از فصل اول، می‌خواهیم به تقریب‌های تعیین شده از مجموعه‌های کارا و غیرتسلطی دست یابیم. در اغلب مسائل چندهدفه، در عمل دسترسی به جواب‌های دقیق کارا و غیرتسلطی امکان پذیر نیست. از اینرو در این مسائل به تقریب این دسته از جواب‌ها بسنده می‌کنند. تولید تقریبی از مجموعه‌های کارا و غیرتسلطی با دقت تعیین شده، می‌تواند کمکی برای اینگونه مسائل باشد. الگوریتم ۱، به منظور دستیابی به نقاط  $\varepsilon$ -غیرتسلطی ضعیف از  $Y'$  تغییر داده می‌شود. علاوه بر آن، برای مجموعه رئوس  $V(S^k)$ ، مجموعه‌های  $O$  و  $I$  را تعریف می‌کنیم که شامل نقاطی است که، در ساخت تقریب خارجی و داخلی  $Y'$ ، از آنها استفاده می‌شود. مقدار اولیه این مجموعه‌ها تهی می‌باشد. در الگوریتم ۱، اگر نقطه رأسی  $y^k$  از  $V(S^k)$  به  $Y'$  نزدیک باشد، یعنی فاصله  $y^k$  از نقطه مرزی  $q^k$ ، کمتر از  $\varepsilon > 0$  باشد، ساخت ابرصفحه در گام  $k_3$  را حذف می‌کنیم، اما به یاد داشته باشیم که از هر دو نقطه  $y^k$  و  $q^k$  برای ساخت تقریب خارجی و داخلی از  $Y'$ ، استفاده می‌شود.

نسخه تقریبی ارائه شده از الگوریتم بنسون، مشابه الگوریتم ۱ است، به جز برای گام‌های  $k_1$ ،  $k_3$  و

<sup>۱</sup> Approximation version of Benson algorithm



$k_5$  که متفاوت است.

فرض که  $\epsilon \in \mathbb{R}$  و  $\epsilon \geq 0$  یک حد تغییرات<sup>۲</sup> باشد و  $d$  فاصله اقلیدسی تعریف شود، آنگاه الگوریتم بنسئون اصلاح شده برای پیدا کردن جواب‌های تقریباً کارا به صورت زیر است:

### الگوریتم ۲:

مقداردهی اولیه: یک نقطه  $\bar{p} \in \text{int}Y'$  را بدست آورده و یک سیمپلکس  $p$ -بعدی  $S^\circ$  را طوری بسازید که  $S^\circ \subset \hat{y} - \mathbb{R}_{\geq}^p$  و شامل  $Y'$  باشد. مجموعه رئوس  $V(S^\circ)$  از  $S^\circ$  و  $S^\circ$  را ذخیره کنید. قرار دهید  $k = 0$  و  $I, O = \emptyset$  و به تکرار  $k$  بروید.

تکرار  $k$ :

گام  $k_1$ . اگر برای هر  $y \in V(S^k)$ ،  $y \in Y'$  یا  $y \in O$  باشد، آنگاه به گام  $k_5$  بروید. در غیراینصورت  $y^k \in V(S^k) \setminus O$  را انتخاب کنید، که  $y^k \notin Y'$  و ادامه دهید.

گام  $k_2$ . مقدار  $\lambda_k$  منحصر بفردی از میان  $0 < \lambda < 1$  بیابید که  $\lambda y^k + (1 - \lambda)\bar{p}$  متعلق به مرز  $Y'$  باشد و قرار دهید،  $q^k = \lambda_k y^k + (1 - \lambda_k)\bar{p}$ .

گام  $k_3$ . اگر فاصله  $y^k$  تا نقطه مرزی  $q^k$  از  $Y'$ ، یعنی  $d(y^k, q^k)$ ، حداکثر  $\epsilon$  باشد، آنگاه  $y^k$  را به  $O$  و  $q^k$  را به  $I$  اضافه کرده و سپس به گام  $k_1$  بروید. در غیراینصورت، قرار دهید  $S^{k+1} = S^k \cap \{y \in \mathbb{R}^p : \langle w^k, y \rangle \geq \langle b, u^k \rangle\}$  که در آن  $(u^{kT}, w^{kT})$  با حل مساله خطی  $D(q^k)$  می‌تواند مشخص شود.

گام  $k_4$ . با استفاده از  $V(S^k)$  و تعریف  $S^{k+1}$  داده شده در گام  $k_3$ ،  $V(S^{k+1})$  را تعیین کنید. قرار دهید  $k = k + 1$  و به تکرار  $k$  بروید.

گام  $k_5$ . تعداد کلی تکرارها را  $K = k$  قرار دهید. مجموعه نقاط تقریب خارجی را  $V_o(S^K) = V(S^K)$  و مجموعه نقاط تقریب داخلی را  $V_i(S^K) = (V(S^K) \setminus O) \cup I$  تعریف کنید.

پوسته محدب  $Y^{ni}$  از  $V_i(S^K)$ ، تقریب داخلی از  $Y'$  را نشان می‌دهد. پوسته محدب  $Y^{lo}$  از  $V_o(S^K)$ ، تقریب خارجی از  $Y'$  را نشان می‌دهد. پایان الگوریتم.

الگوریتم بنسئون اصلاح شده را روی مثال ۶.۴.۲ اعمال می‌کنیم.

مثال ۱.۱.۳. مساله MOLP،  $\min\{Cx : Ax \geq b\}$  را در نظر بگیرید که در آن

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

<sup>۲</sup> tolerance

فرض می‌کنیم  $\bar{p} = (۱۲/۵, ۰/۵)$  و  $\epsilon = ۲$  باشد. با مقادیر اولیه زیر الگوریتم را اجرا می‌کنیم.

$$I = \emptyset, \quad O = \emptyset$$

$$V(S^\circ) = \{(-۴, ۱), (۱۳, ۱), (۱۳, -۱۶)\}$$

با نقطه  $(-۴, ۱) \in V(S^\circ)$ ، که  $(-۴, ۱) \notin Y' \cup O$ ، گام  $k_1$  را آغاز می‌کنیم. از برنامه‌ریزی خطی (۱۰.۲)، با فرض  $y^\circ = (-۴, ۱)$  مقدار  $\lambda_\circ = ۰/۷۵۷۵۷۵۸ < ۱$  به دست می‌آید.

نقطه مرزی  $q^\circ$  نظیر  $y^\circ$ ، به فرم زیر محاسبه می‌شود.

$$q^\circ = \lambda_\circ y^\circ + (1 - \lambda_\circ) \bar{p} = \lambda_\circ (-۴, ۱) + (1 - \lambda_\circ) (۱۲/۵, ۰/۵) = (۰, \frac{۲۹}{۳۳}) \approx (۰, ۰/۸۷)$$

چون  $۲ > ۴ \approx d(y^\circ, q^\circ)$ ، با حل مساله دوگان  $D(q^\circ)$  مقدار  $(u^\circ, w^\circ) = ((۰, ۰), (۱, ۰))$  جهت ساخت ابرصفحه جداساز مشخص می‌گردد.

$$S^1 = S^\circ \cap \{y \in \mathbb{R}^p | \langle w^\circ, y \rangle \geq \langle b, u^\circ \rangle\} = S^\circ \cap \{y \in \mathbb{R}^2 | y_1 \geq ۰\},$$

$$V(S^1) = \{(۱۳, ۱), (۱۳, -۱۶), (۰, ۱), (۰, -۳)\}.$$

در تکرار دوم با فرض  $y^1 = (۱۳, -۱۶)$ ، نقطه مرزی متناظر  $(۱۲/۷۸, -۹) \approx q^1 = (\frac{۴۲۲}{۳۳}, -۹)$  به دست می‌آید که چون  $۲ > ۷ \approx d(y^1, q^1)$  است، با یافتن  $(u^1, w^1) = ((۱, ۱), (۰, ۱))$  از حل  $LP$   $D(q^1)$ ، به تشکیل  $S^2$  می‌پردازیم.

$$S^2 = S^1 \cap \{y \in \mathbb{R}^p | \langle w^1, y \rangle \geq \langle b, u^1 \rangle\} = S^1 \cap \{y \in \mathbb{R}^2 | y_2 \geq -۹\},$$

$$V(S^2) = \{(۰, ۱), (۰, -۳), (۱۳, -۹), (۶, -۹), (۱۳, ۱)\}.$$

بعد از دو برش فوق، تنها دو نقطه  $y^2 = (۰, -۳)$  و  $y^3 = (۶, -۹)$  خارج از  $Y'$  است، شکل ۱.۳ را ببینید.

نقاط مرزی متناظر  $y^2$  و  $y^3$ ، به ترتیب  $(۱/۳۱۶, -۲/۶۳۲) \approx q^2 = (۱ \frac{۶}{۱۹}, -۲ \frac{۱۲}{۱۹})$  و  $(۷/۱۱۴, -۷/۳۷۱) \approx q^3 = (۷ \frac{۴}{۳۵}, -۷ \frac{۱۳}{۳۵})$  است. فاصله‌های بین نقاط نشدنی و نقاط مرزی برابر  $d(y^2, q^2) \approx ۱/۳۶۶$  و  $d(y^3, q^3) \approx ۱/۹۷۳$  می‌باشد، که کمتر از  $\epsilon = ۲$  است. این دو نقطه نشدنی را برای تقریب خارجی می‌پذیریم چرا که، فاصله‌هایشان از نقاط مرزی متناظرشان کمتر از  $\epsilon$  است.

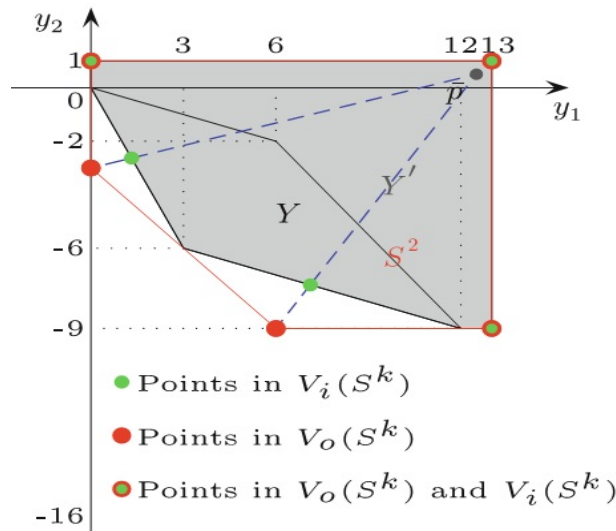
زمانی که الگوریتم پایان می‌یابد، تعداد کلی تکرارها  $k = ۲$  است و داریم:

$$I = \{(۱/۳۱۶, -۲/۶۳۲), (۷/۱۱۴, -۷/۳۷۱)\}, \quad O = \{(۰, -۳), (۶, -۹)\}$$

$$V_o(S^2) = \{(۱۳, ۱), (۰, ۱), (۰, -۳), (۶, -۹), (۱۳, -۹)\}$$

$$V_i(S^2) = \{(۱۳, ۱), (۰, ۱), (۱/۳۱۶, -۲/۶۳۲), (۷/۱۱۴, -۷/۳۷۱), (۱۳, -۹)\}.$$

در شکل ۲.۳، تقریب خارجی  $Y^{10}$  و تقریب درونی  $Y^i$  از  $Y'$  را نشان داده‌ایم و مجموعه نقاط نظیرشان مشخص است.



شکل ۱.۳: نقاط نشدنی پذیرفته شده

### ۲.۳ یافتن جواب‌های تقریباً کارا

با تعریف نسخه تقریبی از الگوریتم بنسئون، نتایج زیر را داریم:

قضیه ۱.۲.۳. [۴۵]

(الف) تعداد نقاط  $V_o(S^K)$  برابر تعداد نقاط  $V_i(S^K)$  است.

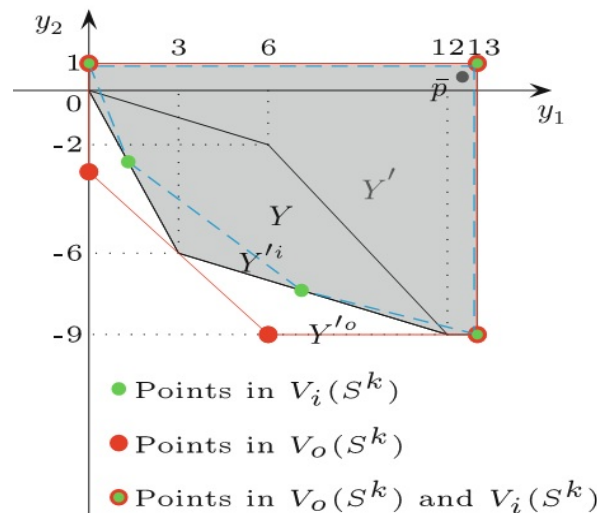
(ب) همه نقاط  $V_i(S^K)$  روی مرز  $Y'$  است. برخی از نقاط  $V_o(S^K)$  خارج از  $Y'$  است، در حالی که بقیه آنها روی مرز  $Y'$  است. علاوه بر آن،  $y \in V_o(S^K)$  روی مرز  $Y'$  نیست اگر و تنها اگر  $y \notin V_i(S^K)$ .

(ج) اگر  $y_{ov}$  نقطه‌ای در  $V_o(S^K)$  باشد، نقطه‌ای مانند  $y_{iv}$  در  $V_i(S^K)$ ، متناظر با  $y_{ov}$  موجود است که،  $d(y_{ov}, y_{iv}) \leq \epsilon$  می‌باشد و برعکس.

(د) اگر  $Y_N^{i'o}$  مجموعه غیرتسلطی از تقریب درونی  $Y^{i'o}$ ، و  $Y_N^{o'o}$  مجموعه غیرتسلطی از تقریب خارجی  $Y^{o'o}$  باشد، آنگاه رابطه‌ی  $Y_N^{i'o} + \mathbb{R}_{\geq}^p \subseteq Y_N^{o'o} + \mathbb{R}_{\geq}^p \subseteq Y_N^{i'o} + \mathbb{R}_{\geq}^p$  برقرار است.

برهان. (الف) طبق الگوریتم اصلاح شده، تعداد اعضای مجموعه  $O$  و  $I$  برابرند، زیرا در ابتدا  $O, I = \emptyset$  بوده و همزمان برای هر  $y^k \in V(S^K) \setminus O$  با خاصیت،  $y^k \notin Y'$  و  $d(y^k, q^k) < \epsilon$  که در  $O$  قرار می‌گیرد نقطه  $q^k$  نظیرش نیز، در  $I$  قرار می‌گیرد. بنا به گام  $k_5$  الگوریتم،  $V_o(S^K) = V(S^K)$ . پس تعداد اعضای آنها برابر است.

از طرفی  $V_i(S^K) = (V(S^K) \setminus O) \cup I$ ، در نتیجه تعداد نقاط این دو مجموعه نیز یکسان است. اندازه مجموعه  $(V(S^K) \setminus O) \cup I$  بدلیل هم‌اندازه بودن مجموعه‌های  $O$  و  $I$  با اندازه  $V(S^K)$  برابر است. در نتیجه تعداد نقاط  $V_o(S^K)$  و  $V_i(S^K)$  یکسان است.



شکل ۲.۳: تقریب داخلی و خارجی

(ب) طبق تعریف داریم  $V_i(S^K) = (V(S^K) \setminus O) \cup I$  پس هر نقطه از  $V_i(S^K)$  در  $I$  یا در  $V(S^K) \setminus O$  قرار دارد. با توجه به گام  $k_3$  الگوریتم اخیر، مجموعه  $I$  زیرمجموعه‌ای از نقاط مرزی  $Y'$  است.

از طرفی عضوهای  $V(S^K)$ ، در  $Y'$  یا در  $O$  قرار دارند (در غیر اینصورت طبق گام  $k_1$ ، الگوریتم پایان نیافته و  $V(S^K)$  نهایی تولید نشده است). لذا  $V(S^K) \setminus O$  زیر مجموعه‌ای از  $Y'$  می‌باشد. اگر عضوی از  $V(S^K) \setminus O$ ، نقطه درونی  $Y'$  باشد، با محدب بودن پوسته  $V(S^K)$  به تناقض می‌رسیم. پس همه نقاط  $V_i(S^K)$  روی مرز  $Y'$  قرار دارند.

در مورد  $V_o(S^K) = V(S^K)$  واضح است که عضوهای  $V_o(S^K)$  یا در  $O$  قرار دارند، که طبق ساخت آن در گام  $k_3$  الگوریتم شامل نقاطی خارج  $Y'$  اند، و یا نقاطی روی مرز  $Y'$  می‌باشند.

در مورد اثبات آخرین مطلب، فرض کنیم که  $y \in V_o(S^K)$  روی مرز  $Y'$  نباشد. در این صورت  $y$  خارج  $Y'$  است، پس  $y \notin V_i(S^K)$ . برعکس، اگر  $y \in V_o(S^K)$  که  $y \notin V_i(S^K)$ ، طبق ویژگی نقاط  $V_i(S^K)$ ، نمی‌تواند  $y$  نقطه مرزی  $Y'$  باشد.

(ج) فرض که  $y_{ov} \in V_o(S^K)$  باشد. طبق تعریف،  $V_o(S^K) = V(S^K) \subset \text{bd}Y' \cup O$  برقرار است. پس  $y_{ov} \in \text{bd}Y'$  یا  $y_{ov} \in O$ . اگر  $y_{ov} \in \text{bd}Y'$  باشد، کافیت  $y_{ov} = y_{iv}$  در نظر گرفته و داریم  $d(y_{ov}, y_{iv}) = 0 \leq \epsilon$

اگر  $y_{ov} \in O$  باشد، طبق نحوه تشکیل مجموعه  $O$ ، نقطه مرزی  $q^k$  نظیر  $y_{ov}$ ، در  $I$  موجود است که  $d(y_{ov}, q^k) \leq \epsilon$  پس کافیت  $y_{iv}$  را مساوی  $q^k \in V_i(S^K)$  در نظر بگیریم. اثبات عکس به طور مشابه است

(د) از آنجایی که  $Y^i$  تقریب داخلی از  $Y'$  است و بنا بر قضیه ۱۸.۳.۱ داریم

$$Y_N^i \subseteq Y' \subseteq Y_N' + \mathbb{R}_{\geq}^p \implies Y_N^i + \mathbb{R}_{\geq}^p \subseteq Y_N' + \mathbb{R}_{\geq}^p \quad (1.3)$$

از طرفی چون  $Y'^o$  تقریب خارجی از  $Y'$  است و با توجه به قضیه ۱۸.۳.۱ داریم

$$Y'_N \subseteq Y'^o \subseteq Y'^o_N + \mathbb{R}^p_{\geq} \implies Y'_N + \mathbb{R}^p_{\geq} \subseteq Y'^o_N + \mathbb{R}^p_{\geq} \quad (۲.۳)$$

با مقایسه روابط (۱.۳) و (۲.۳) اثبات کامل می‌گردد.

□

طبق تعریف ارگات و جاندیبلکس<sup>۳</sup> [۱۵]، بند چهارم قضیه ۱۰.۲.۳ بیانگر این است که  $Y'^o_N$  و  $Y^i_N$  مجموعه‌های کران بالا و کران پایین برای  $Y_N$  می‌باشند. به یاد داشته باشیم که تقریب، وابسته به انتخاب نقطه درونی  $\bar{p}$  است. البته اگر  $\epsilon = 0$  باشد، الگوریتم اصلاح شده به الگوریتم اصلی بنسون تبدیل می‌شود. نشان می‌دهیم  $Y^i_N$ ، همان مجموعه نقاط  $\epsilon$ -غیرتسلطی ضعیف از  $Y'$  است.

گزاره ۲.۲.۳. [۴۵] اگر  $y_o$  یک نقطه غیرتسلطی ضعیف از مجموعه‌ی تقریب خارجی  $Y'^o$  باشد، آنگاه نقطه غیرتسلطی ضعیف از مجموعه‌ی تقریب داخلی  $Y^i$ ، مانند  $y_i$  موجود است به طوری که  $d(y_o, y_i) \leq \epsilon$ .

برهان. فرض که  $y_o$  نقطه‌ای در وجه غیرتسلطی ضعیف  $F_o$ ، از مجموعه تقریب خارجی با رؤس  $y_{ov}^1, y_{ov}^2, \dots, y_{ov}^l$  باشد. در این صورت  $y_o$  می‌تواند به صورت ترکیب محدبی از رؤس بیان شود، یعنی

$$y_o = \sum_{j=1}^l \lambda_j y_{ov}^j; \quad \sum_{j=1}^l \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0, j = 1, \dots, l.$$

فرض کنید نقاط  $y_{iv}^1, y_{iv}^2, \dots, y_{iv}^l \in V_i(S^k)$  متناظر با نقاط  $y_{ov}^1, y_{ov}^2, \dots, y_{ov}^l$  در تقریب داخلی باشد. در این صورت برای  $j = 1, 2, \dots, l$  باید  $d(y_{ov}^j, y_{iv}^j) \leq \epsilon$  باشد. فرض کنید  $y_i = \sum_{j=1}^l \lambda_j y_{iv}^j$ ، آنگاه

$$d(y_o, y_i) = \left\| \sum_{j=1}^l \lambda_j y_{ov}^j - \sum_{j=1}^l \lambda_j y_{iv}^j \right\| \leq \sum_{j=1}^l \lambda_j \|y_{ov}^j - y_{iv}^j\| \leq \sum_{j=1}^l \lambda_j \epsilon = \epsilon$$

اگر  $y_i$  نقطه‌ای غیرتسلطی ضعیف از تقریب داخلی باشد، که اثبات کامل است. در غیر این صورت  $\tilde{y}$ ، نقطه تقاطع پاره‌خط  $y_o$  و  $y_i$  با مرز  $Y^i$  را انتخاب کنید. بدیهی است که

□

$$d(\tilde{y}, y_o) \leq d(y_i, y_o) \leq \epsilon$$

از ترکیب گزاره ۲.۲.۳ با تعریف ۲۳.۳.۱ نتیجه اصلی ما حاصل می‌شود.

قضیه ۳.۲.۳. [۴۵] فرض کنید  $\epsilon = \epsilon e$  که در آن  $e = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^p$ . آنگاه  $Y^i_N$  مجموعه‌ای از نقاط  $\epsilon$ -غیرتسلطی ضعیف برای  $Y'$  است.

<sup>۳</sup> Ehrgott and Gandibleux

برهان.  $y_i \in Y_N^i$  را در نظر بگیرید و فرض کنید  $y_i$  نقطه‌ای  $\varepsilon$ -غیرتسلطی ضعیف از  $Y'$  نباشد. پس  $y \in Y'$  موجود است که  $y_i - \varepsilon < y$ . بنابراین  $y_i - y > \varepsilon$  و  $\|d(y, y_i)\| > \varepsilon$ . از قضیه ۱.۲.۳ نتیجه می‌شود که  $Y' \subseteq Y_N^{lo} + \mathbb{R}_{\geq}^p$ ، یعنی  $y_o \in Y_N^{lo}$  موجود است که  $y_o \leq y$ . اکنون مشاهده می‌شود که اشتراک ابرکعب<sup>۴</sup> تعریف شده بوسیله  $y_i$  و  $y$  با  $Y^i$ ، تنها شامل نقطه  $y_i$  است زیرا،  $Y^i + \mathbb{R}_{\geq}^p$  محدب است. ابرکعب یالی به طول حداقل  $\varepsilon$  دارد. بنابراین برای هر  $\bar{y}_i \in Y_N^i$  داریم  $d(y_o, \bar{y}_i) \geq d(y, \bar{y}_i) \geq d(y, y_i) > \varepsilon$  که این با گزاره ۲.۲.۳ در تناقض است. پس  $y_i$  نقطه  $\varepsilon$ -غیرتسلطی ضعیف از  $Y'$  می‌باشد.  $\square$

قضیه قبل، نشان می‌دهد که نسخه تقریبی الگوریتم بنسون اجازه تقریب مجموعه غیرتسلطی ضعیف از  $Y'$ ، با کیفیت تضمین شده را می‌دهد.

مطلب فوق برای  $Y_N$  نیز برقرار است، یعنی به دلیل  $Y_N \subset Y_{WN}'$  می‌توان از روی  $Y_N^i$  تقریبی برای مجموعه غیرتسلطی  $Y$  به دست آورد. اما ممکن است  $Y_N^i$  شامل نقاط غیرتسلطی ضعیف  $Y$  و حتی نقاطی از  $Y' \setminus Y$  باشد (مانند نقطه  $(0, 1)$  در شکل ۲.۳). برای تقریب مجموعه غیرتسلطی  $Y$ ، و اجتناب از نقاط غیرتسلطی ضعیف و نقاط  $Y' \setminus Y$ ، مجموعه‌های زیر را تعریف می‌شوند.

$$Y_{NE}^i = \{y \in V_i(S^k) : y < \hat{y}\} \quad , \quad Y_{NE}^o = \{y \in V_o(S^k) : y < \hat{y}\} \quad (۳.۳)$$

وجه‌هایی با استفاده از نقاطی در  $Y_{NE}^o$  روی همان صفحه برش می‌سازیم (که در طی الگوریتم پیدا شده) و فرض کنید که  $Y_N^o$  اجتماع وجه‌ها باشد. به طور مشابه،  $Y_N^i$  را می‌سازیم. در نتیجه مجموعه غیرتسلطی واقعی  $Y_N$  می‌تواند از خارج بوسیله  $Y_N^o$  و از داخل با  $Y_N^i$ ، تقریب زده شود.

مثال ۴.۲.۳. در مثال ۱.۱.۳، نقاط  $(0, -3)$ ،  $(6, -9)$  در  $Y_{NE}^o$  هستند در حالی که نقاط  $(1/316, -2/632)$ ،  $(7/114, -7/371)$  در  $Y_{NE}^i$  قرار دارند.

مجموعه  $Y_N^o$  پاره‌خطی از نقطه  $(0, -3)$  تا نقطه  $(6, -9)$  می‌باشد و مجموعه  $Y_N^i$  پاره‌خطی است از  $(1/316, -2/632)$  تا نقطه  $(7/114, -7/371)$ ، شکل ۲.۳ را ببینید. توجه شود که ممکن است،  $y \in Y_N$  موجود باشد به طوری که فاصله آن از  $Y_N^o$  و  $Y_N^i$ ، بیشتر از  $\varepsilon$  شود.

همان‌طور که دیدید برای دستیابی به جواب‌های تقریباً کارا در برنامه‌ریزی‌های چندهدفه خطی می‌توان از الگوریتم اصلاح شده بنسون استفاده کرد و با ساخت تقریب درونی  $Y^i$  و تعیین  $Y_N^i$  به نقاط  $\varepsilon$ -غیرتسلطی ضعیف از  $Y'$  رسید. سپس با تشکیل  $Y_{NE}^o$  و  $Y_{NE}^i$  به صورت (۳.۳) به تقریبی از مجموعه  $Y_N$  دست یافت.

بعد از بررسی مسائل چندهدفه خطی در دو فصل اخیر، در فصل بعد به ارائه الگوریتم‌هایی برای حل مسائل چندهدفه محدب غیرخطی می‌پردازیم.

<sup>۴</sup> hypercube



# فصل ۴

## مسائل برنامه‌ریزی چندهدفه محدب

### ۱.۴ مقدمه

مساله برنامه‌ریزی چندهدفه زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \min f(x) &= (f_1(x), \dots, f_p(x))^T \\ s. t. x \in X &= \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = (g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x))^T \leq 0\} \end{aligned} \quad (1.4)$$

که  $X \neq \emptyset$  مجموعه شدنی در فضای تصمیم  $\mathbb{R}^n$  است. مجموعه شدنی  $Y$  در فضای  $\mathbb{R}^p$  به صورت زیر است:

$$Y = \{f(x) : x \in X\}.$$

مجموعه محدودیت‌های فعال در نقطه  $x^* \in X$  را که به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$J(x^*) = \{j \in \{1, \dots, m\} : g_j(x^*) = 0\}.$$

در طول این فصل، فقط برنامه‌ریزی غیرخطی چندهدفه محدب<sup>۱</sup> را در نظر می‌گیریم. به بیان دقیق‌تر، توابع  $f_i(x)$  برای  $i = 1, \dots, p$  و توابع  $g_j(x)$  برای  $j = 1, \dots, m$  باید محدب باشند. این شرط تضمین می‌کند که  $X$  و  $Y + \mathbb{R}_{\geq}^p$  محدب باشند.

حل یک مساله برنامه‌ریزی غیرخطی چندهدفه، به مراتب مشکل‌تر از حل یک مساله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه است.

در بهینه‌سازی چندهدفه محدب، چون مساله غیرخطی است، نیاز به محاسبه مجموعه‌ای نامتناهی از نقاط غیرتسلطی داریم. توصیف دقیق این مجموعه، مشکل خواهد بود. به این دلیل، روی تقریب مجموعه غیرتسلطی از مساله برنامه‌ریزی غیرخطی چندهدفه تمرکز می‌کنیم.

در فصل قبل، نسخه‌ای تقریبی از الگوریتم بنسون آورده شد که با یک تقریب خارجی و تقریب داخلی، گسترده مجموعه شدنی از برنامه‌ریزی خطی چندهدفه را فشرده می‌کرد. همچنین ثابت کردیم که

<sup>۱</sup> Convex multi-objective nonlinear programming



مجموعه غیرتسلطی تقریب داخلی، مجموعه‌ای از نقاط  $\varepsilon$ -غیرتسلطی ضعیف می‌باشد. در این فصل از پایان‌نامه، به ارائه الگوریتمی جهت حل تقریبی مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی چند هدفه محدب، می‌پردازیم. نشان می‌دهیم روش ارائه شده منجر به تولید مجموعه‌ای از نقاط  $\varepsilon$ -غیرتسلطی ضعیف از مساله غیرخطی چندهدفه اصلی می‌شود.

از این پس، فرض می‌شود که  $\hat{y} \in \mathbb{R}^p$  موجود است که برای هر  $x \in X$ ،  $\hat{y} \leq f(x)$  است. یعنی، جواب بهینه‌ای برای هر یک از مسائل تک‌هدفه  $f_i, i = 1, \dots, p$  موجود می‌باشد (در واقع نقطه ایده‌آل موجود است).

در بخش اولیه از این فصل، به بیان مطالبی در مورد مسائل برنامه‌ریزی چندهدفه محدب می‌پردازیم که در بخش‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرد. عمده مطالب این فصل از مرجع [۱۹] است.

## ۲.۴ محدودیت‌های شرطی کان-تاکر در بهینه‌سازی محدب

**تعریف ۱.۲.۴.** فرض که  $S$  مجموعه غیرتهی در  $\mathbb{R}^n$  و  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  باشد.  $f$  در  $\bar{x}$  مشتق‌پذیر است اگر، بردار  $\nabla f(\bar{x})$ ، به نام بردار گرادیان و تابعی مانند  $\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  موجود باشد به طوری که

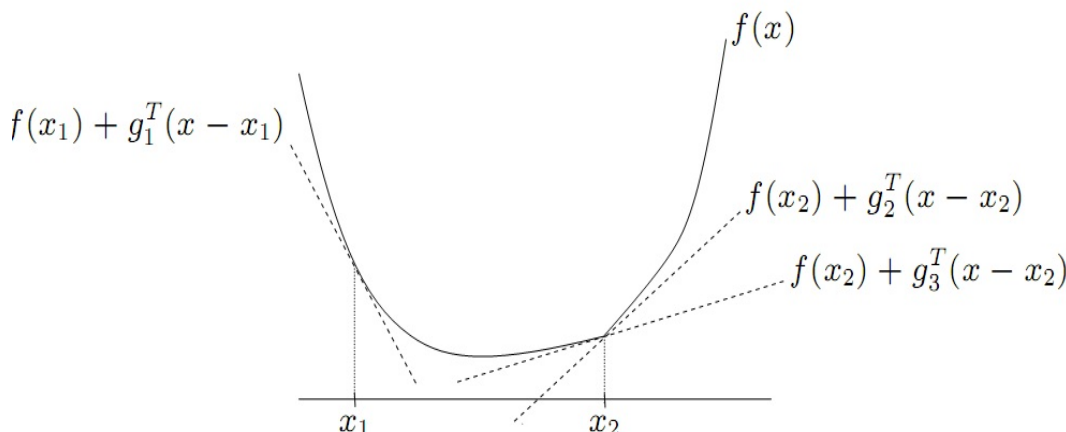
$$f(x) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^t(x - \bar{x}) + \|x - \bar{x}\|\alpha(\bar{x}; x - \bar{x}) \quad \forall x \in S$$

که  $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \alpha(\bar{x}; x - \bar{x}) = 0$ .

**تعریف ۲.۲.۴.** فرض که  $S$  مجموعه‌ای محدب در  $\mathbb{R}^n$  بوده و  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  محدب باشد. آنگاه  $\xi$  یک زیرگرادیان  $f$  در  $\bar{x} \in S$  نامیده می‌شود، اگر

$$f(x) \geq f(\bar{x}) + \xi^t(x - \bar{x}) \quad \forall x \in S.$$

در شکل ۱.۴،  $g_1$  بردار گرادیان  $f(x)$  در نقطه  $x_1$ ،  $g_2$  و  $g_3$  مثال‌هایی از بردارهای زیرگرادیان  $f(x)$  در نقطه  $x_2$  است.



شکل ۱.۴: تعبیر هندسی گرادیان و زیرگرادیان

قابل ذکر است که اگر تابع محدب  $f$  در  $\bar{x}$  مشتق‌پذیر باشد،  $f$  تنها یک زیرگرادیان دارد که به آن گرادیان گفته می‌شود و به صورت زیر تعیین می‌گردد.

$$\nabla f(\bar{x}) = \left( \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_n} \right)^T.$$

یادآوری کنیم که یک برنامه‌ریزی چندهدفه را مشتق‌پذیر گوئیم، هرگاه همه توابع هدف و توابع محدودیت آن مشتق‌پذیر باشد.

**تعریف ۳.۲.۴.** مساله بهینه‌سازی چندهدفه مشتق‌پذیر  $\min\{f(x) : g(x) \leq 0\}$  را در نظر می‌گیریم که در آن  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  و  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  است. این مساله در محدودیت‌های شرطی کان-تاکر در  $\hat{x} \in X$  صدق می‌کند، اگر برای هر  $d \in \mathbb{R}^n$  با خاصیت  $\langle \nabla g_j(\hat{x}), d \rangle \leq 0, \forall j \in J(\hat{x})$ ، موجود باشند  $\bar{t} > 0$ ، تابعی مانند  $\theta : [0, \bar{t}] \rightarrow \mathbb{R}^n$  و  $\theta(0) = \hat{x}$  به طوری که  $\alpha > 0$  و  $\theta'(\alpha) = \alpha d$  و  $g(\theta(t)) \leq 0$ .

قابل ذکر است که جواب‌های کارای سره و ضعیف مسائل برنامه‌ریزی چندهدفه محدب به کمک جواب‌های بهینه مساله مجموع وزن‌دار توصیف می‌شوند. قضیه زیر این رابطه را بیان می‌کند.

**قضیه ۴.۲.۴.** [۲۱] جواب شدنی  $\hat{x}$  از برنامه‌ریزی چندهدفه محدب (۱.۴)، کارای ضعیف (سره) است اگر و تنها اگر  $\lambda \in \mathbb{R}^p$  که  $\lambda \geq 0$  ( $\lambda > 0$ ) موجود باشد به گونه‌ای که، جواب بهینه‌ای از برنامه‌ریزی محدب تک‌هدفه زیر باشد.

$$\min\{\lambda^T f(x) : g(x) \leq 0\}.$$

به هر حال فقط برای مسائل برنامه‌ریزی خطی چند هدفه، امکان استفاده از مطلب فوق برای یافتن مجموعه‌های  $Y_N$  و  $Y_{WN}$  می‌باشد زیرا، یک مجموعه متناهی از بردارهای وزن  $\lambda$  کافی است. برای مسائل غیرخطی محدب، قضیه فوق، تنها برای یافتن مجموعه متناهی از جواب‌های کارا (نقاط غیرتسلطی) استفاده می‌شود. از اینرو نیاز به تقریب مجموعه غیرتسلطی (ضعیف) می‌باشد. رزیکا و ویسک<sup>۳</sup> [۴۱]، بررسی خوبی از روش‌های تقریب برای مسائل برنامه‌ریزی چندهدفه را ارائه داده‌اند.

در اینجا از روش تقریبی الگوریتم بنسون استفاده می‌کنیم. برای این منظور در بخش بعد، ابتدا به شرح الگوریتم بنسون برای حل مسائل خطی چندهدفه، با تفاوتی مختصر با آنچه در فصل ۲ دیده‌اید، می‌پردازیم.

اکنون، قضایای مربوط به شرایط لازم و کافی بهینگی کاروش-کان-تاکر<sup>۴</sup> (KKT) برای مساله بهینه‌سازی چندهدفه را بیان می‌کنیم.

<sup>۱</sup> constraint qualification

<sup>۲</sup> Ruzika and Wiecek

<sup>۳</sup> Karush-Kuhn-Tucker

قضیه ۵.۲.۴. [۲۳] فرض کنید که توابع هدف و توابع محدودیت در مساله (۱.۴) در نقطه  $x^* \in \mathbb{R}^n$  به طور پیوسته مشتق‌پذیر باشند. شرط لازم برای آن که  $x^*$  جواب کارا (کارای ضعیف) مساله باشد آن است که  $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq}^p$  و  $\mu \in \mathbb{R}_{\geq}^m$   $((\lambda, \mu) \neq (0, 0))$  موجود باشند به طوری که

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i \nabla f_i(x^*) + \sum_{j=1}^m \mu_j \nabla g_j(x^*) = 0$$

$$\mu_j g_j(x^*) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, m.$$

قضیه ۶.۲.۴. [۲۳] شرط کافی برای آن که  $x^* \in \mathbb{R}^n$  جواب کارا (کارای ضعیف) از (۱.۴)، باشد آن است که توابع  $f_i, g_j$  برای  $i = 1, \dots, p$  و  $j = 1, \dots, m$  محدب و در  $x^*$  به طور پیوسته مشتق‌پذیر باشند و بردارهای  $\lambda \in \mathbb{R}_{>}^p$  و  $\mu \in \mathbb{R}_{\geq}^m$   $(\lambda \geq 0, \lambda \neq 0)$  موجود باشند به طوری که

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i \nabla f_i(x^*) + \sum_{j=1}^m \mu_j \nabla g_j(x^*) = 0$$

$$\mu_j g_j(x^*) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, m.$$

قضیه ۷.۲.۴. (لم فارکاس<sup>۵</sup>) [۲] فرض کنید که  $A$  ماتریس  $m \times n$  و  $C$  بردار  $n$  تایی باشد. آنگاه فقط یکی از دو سیستم زیر جواب دارد:

سیستم ۱.  $C^t x > 0$  و  $Ax \leq 0$  برای  $x \in \mathbb{R}^n$ .

سیستم ۲.  $y \geq 0$  و  $A^t y = C$  برای  $y \in \mathbb{R}^m$ .

## ۳.۴ الگوریتم بنسون

بنسون، الگوریتم تقریب خارجی را برای حل MOLP ها در فضای هدف پیشنهاد می‌کند. برای این منظور با در نظر گرفتن

$$f(x) = Cx, g(x) = b - Ax$$

که در آن  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, C \in \mathbb{R}^{p \times n}$  به مقدمات مورد نیاز جهت ورود به الگوریتم تقریب خارجی بنسون می‌پردازیم.

از مجموعه  $\mathcal{P}$  که آن را گسترش یافته مجموعه شدنی در فضای هدف از مساله (۱.۴) نامند، استفاده می‌شود.

$$\mathcal{P} = \{y \in \mathbb{R}^p : Cx \leq y \text{ some for } x \in X\} = Y + \mathbb{R}_{\geq}^p. \quad (۲.۴)$$

نسخه ارگات و همکاران در [۱۷] طبق قضیه زیر، به جای یافتن مستقیم مجموعه  $Y_N$ ، به یافتن  $\mathcal{P}_{WN}$  می‌پردازد.

<sup>۵</sup> Farkas' s lemma

قضیه ۱.۳.۴. [۱۹] مطالب زیر برقرارند:

۱. مجموعه  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^p$  چندوجهی غیرتهی از بعد  $p$  است و  $\mathcal{P}$  از پایین  $\mathbb{R}_{\geq}^p$ -کراندار است.

$$. Y_N = \mathcal{P}_N . ۲$$

۳. هر راس  $\mathcal{P}$  متعلق به  $Y_N$  است.

$$\mathcal{P}_{WN} = \text{bd } \mathcal{P} . ۴$$

برهان. اثبات سه مورد اول، مشابه قضیه ۱.۲.۲ است. به اثبات مورد آخر می‌پردازیم. واضح است که  $\mathcal{P}_{WN} \subset \text{bd } \mathcal{P}$  همواره برقرار است. فرض کنید که  $y \in \text{bd } \mathcal{P}$  اما  $y \notin \mathcal{P}_{WN}$ . لذا  $y' \in \mathcal{P}$  با ویژگی  $y' < y$  وجود دارد. در این صورت  $d \in \text{int } \mathbb{R}_{\geq}^p$  یافت می‌شود که  $y = y' + d$ . در نتیجه  $y - d = y' \in \mathcal{P}$  است که این مطلب با  $y \in \text{bd } \mathcal{P}$  در تناقض است.  $\square$

قضیه فوق اساس نسخه ارگات و همکاران [۱۷] از الگوریتم تقریب خارجی بنسون است. الگوریتم روی  $\mathcal{P}$  برای یافتن نقاط راسی غیرتسلطی  $Y$  کار می‌کند. ایده الگوریتم به شرح زیر می‌تواند خلاصه شود.

ابتدا، یک چندوجهی شامل  $\mathcal{P}$  ساخته شده و یک نقطه درونی  $\hat{p} \in \mathcal{P}$  را مشخص می‌کنیم. آنگاه برای هر راس چندوجهی، الگوریتم چک می‌کند که متعلق به  $\mathcal{P}$  است یا نه. اگر راس در  $\mathcal{P}$  نباشد، ابرصفحه جداساز راس از  $\mathcal{P}$ ، ساخته می‌شود و چندوجهی به‌روز می‌گردد تا همه رئوس چندوجهی در  $\mathcal{P}$  قرار گیرد. به منظور ساختن برش جداکننده نقطه  $s \in \mathcal{P}$  از  $\mathcal{P}$ ، بنسون روش زیر را پیشنهاد می‌کند: نقطه  $s$  و  $\hat{p}$  با پاره‌خطی مرتبطند. این پاره‌خط مرز  $\mathcal{P}$  را در نقطه  $y$  قطع می‌کند. هدف، ساخت ابرصفحه‌ای است که  $\mathcal{P}$  را در  $y$  حمایت کند و از اینرو  $s$  و  $\mathcal{P}$  جدا می‌شوند. برای این منظور، نیاز به برنامه‌های خطی اولیه و دوگان وابسته به  $y \in \mathbb{R}^p$  داریم.

$$P(y) = \min\{z : Ax \geq b, Cx - ez \leq y\},$$

$$D(y) = \max\{b^T u - y^T \lambda : A^T u - C^T \lambda = 0; e^T \lambda = 1; u, \lambda \geq 0\}.$$

توجه کنید که مقدار  $P(y)$  بزرگتر از صفر است اگر،  $y \notin \mathcal{P}$  و مساوی صفر است اگر،  $y \in \mathcal{P}$  و کمتر از صفر است اگر  $y \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_{WN}$  باشد. در بنسون [۲] نشان داده شده که، اگر  $y$  نقطه غیرتسلطی ضعیف از  $\mathcal{P}$  باشد، جواب بهینه  $D(y)$  را می‌توان برای به دست آوردن ابرصفحه حمایتی استفاده کرد.

گزاره ۲.۳.۴. [۱۹] فرض کنید  $y^* \in \mathcal{P}_{WN}$  و  $(u^*, \lambda^*)$  جواب بهینه‌ای از  $D(y^*)$  باشد. آنگاه نتایج زیر برقرارند.

$$\text{الف. } y^{*T} \lambda^* = b^T u^*$$

$$\text{ب. برای هر } y \in \mathcal{P}, y^T \lambda^* \geq b^T u^*$$

یعنی  $H = \{y \in \mathbb{R}^p : y^T \lambda^* = b^T u^*\}$  ابرصفحه حمایتی  $\mathcal{P}$  در  $y^*$  است.

برهان. اثبات مشابه قضیه ۲.۲.۲ می‌باشد. □  
 از گزاره فوق درمی‌یابیم که  $y^*$  نقطه غیرتسلطی از  $\mathcal{P}$  است اگر و تنها اگر، جواب بهینه  $P(y^*)$  و  $D(y^*)$  صفر باشد.

## ۴.۴. تعمیمی از الگوریتم تقریب خارجی بنسون برای مسائل MOLP

الگوریتم ۳ :

۱. مقدار دهی اولیه:  $\mathcal{S}^\circ = y^I + \mathbb{R}_{\geq}^p$ ، که در آن  $y_i^I = \min\{y_i : y \in \mathcal{Y}\}$ .
۲. قرار دهید  $\text{vert } \mathcal{S}^\circ = \{y^I\}$  و آن را به عنوان نماینده  $\mathcal{S}^\circ$  ذخیره کنید.
۳. یک نقطه  $\hat{p} \in \text{int } \mathcal{P}$  را محاسبه کنید و قرار دهید  $k = 0$  و به تکرار  $k$  بروید.

تکرار گام‌ها:

- گام  $k_1$ . اگر برای هر  $s \in \mathcal{P}$ ،  $s \in \text{vert } \mathcal{S}^k$  باشد، به گام  $k_5$  رفته و  $\mathcal{P} = \mathcal{S}^k$  در غیر این صورت، انتخاب کنید  $s^k \in \text{vert } \mathcal{S}^k$  که  $s^k \notin \mathcal{P}$  و ادامه دهید.
- گام  $k_2$ . مقدار منحصربفرد  $\rho_k$  که  $0 < \rho < 1$  را به گونه‌ای بیابید که  $\rho s^k + (1 - \rho)\hat{p} \in \text{bd } \mathcal{P}$  و قرار دهید  $y^k = \rho s^k + (1 - \rho)\hat{p}$ .
- گام  $k_3$ . قرار دهید  $\mathcal{S}^{k+1} = \mathcal{S}^k \cap \{y \in \mathbb{R}^p : \lambda^{kT} y \geq b^T u^k\}$  که در آن  $(u^k, \lambda^k)$  با حل LP  $D(y^k)$ ، می‌تواند پیدا شود.
- گام  $k_4$ . با استفاده از  $\text{vert } \mathcal{S}^k$  و تعریف  $\mathcal{S}^{k+1}$  به دست آمده در گام  $k_3$ ،  $\text{vert } \mathcal{S}^{k+1}$  را تعیین کنید. قرار دهید  $k = k + 1$  و به تکرار  $k_1$  بروید.
- گام  $k_5$ . نقاط راسی غیرتسلطی  $\mathcal{P}$  به صورت  $\mathcal{P}_{NE} := \text{vert } \mathcal{S}^k$  است.  $\mathcal{V}_{NE} := \mathcal{P}_{NE}$  مجموعه همه نقاط راسی غیرتسلطی  $\mathcal{V}$  است. پایان الگوریتم.

قضیه ۱.۴.۴. الگوریتم ۳ در تعداد متناهی تکرار متوقف می‌شود و در خاتمه  $\mathcal{S}^k = \mathcal{P}$  است. فرض کنید که  $\mathcal{P}_{NE} = \text{vert } \mathcal{S}^k$ ، آنگاه  $\mathcal{P}_{NE}$  کاملاً، با مجموعه نقاط راسی غیرتسلطی  $\mathcal{V}$  برابر است یعنی  $\mathcal{P}_{NE} = \mathcal{V}_{NE}$ .

برهان. اثبات مشابه قضیه (۵.۴.۲) است. □

قضیه زیر تعمیمی از گزاره قبلی است که در بخش مشتق‌ناپذیری کاربرد دارد. این قضیه نشان می‌دهد که می‌توان برای حل مساله دوگان از هر نقطه‌ی فضای هدف، نه لزوماً غیرتسلطی از  $\mathcal{P}$  و نه حتی داخل آن، استفاده کرد.

گزاره ۲.۴.۴. [۱۹] فرض کنید که  $\hat{y} \in \mathbb{R}^p$  و  $(u^*, \lambda^*)$  جوابی بهینه از  $D(\hat{y})$  در نظر گرفته شود. آنگاه:

الف. برای هر  $y \in \mathcal{P}$ ،  $y^T \lambda^* \geq b^T u^*$  برقرار است.

ب.  $y^T \lambda^* = b^T u^*$  برای هر  $y = Cx'$  که  $x'$  جواب بهینه  $P(\hat{y})$  است، برقرار می‌باشد. یعنی ابرصفحه  $H := \{y \in \mathbb{R}^p : y^T \lambda^* = b^T u^*\}$ ، ابرصفحه حمایتی  $\mathcal{P}$  در  $Cx'$  است.

برهان.

الف. فرض که  $(u^*, \lambda^*)$  یک جواب بهینه از  $D(\hat{y})$  باشد و بر خلاف حکم مساله، برای  $\tilde{y} \in \mathcal{P}$  داشته باشیم  $\tilde{y}^T \lambda^* < b^T u^*$ . در نظر بگیرید:

$$D(\tilde{y}) \quad \max\{b^T u - \tilde{y}^T \lambda : A^T u - C^T \lambda = 0; e^T \lambda = 1; u, \lambda \geq 0\}.$$

از آن جایی که  $(u^*, \lambda^*)$  جواب شدنی برای  $D(\hat{y})$  است، جواب شدنی نیز برای  $D(\tilde{y})$  می‌باشد. چون  $0 < b^T u^* - \tilde{y}^T \lambda^*$ ، از اینرو  $D(\tilde{y})$ ، حداقل یک جواب شدنی با مقدار هدف بزرگتر از صفر دارد. دوگان  $D(\tilde{y})$  به شکل زیر است.

$$P(\tilde{y}) \quad \min\{z : Ax \geq b, Cx - ez \leq \tilde{y}\}.$$

از دوگانگی ضعیف نتیجه می‌گیریم که هر جواب شدنی از  $P(\tilde{y})$ ، مقدار هدف بزرگتر از صفر دارد. از طرف دیگر،  $\tilde{y} \in \mathcal{P}$  است. از اینرو  $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$  موجود است به گونه‌ای که  $A\tilde{x} \geq b$  و  $C\tilde{x} \leq \tilde{y}$ . با در نظر گرفتن  $\tilde{x} := x$  و  $z := 0$ ، یک جواب شدنی برای  $P(\tilde{y})$  با مقدار هدف مساوی صفر به دست می‌آوریم. که این با مطلب قبلی در تناقض است. پس حکم برقرار است.

ب. فرض که  $(x', z')$  جواب بهینه‌ای از  $P(\hat{y})$  باشد. نشان می‌دهیم که  $(Cx')^T \lambda^* = b^T u^*$ . برای این منظور به روابط زیر توجه کنید.

$$\begin{aligned} (Cx')^T \lambda^* &= \underbrace{(\lambda^*)^T Cx'}_{\geq 0} \\ &\leq (\lambda^*)^T (\hat{y} + ez') \quad P(\hat{y}) \text{ جواب شدنی برای} \\ &= (\lambda^*)^T \hat{y} + z' \underbrace{(\lambda^*)^T e}_{=1} = (\lambda^*)^T \hat{y} + z' \\ &= b^T u^* \text{ با توجه به قضیه دوگان قوی.} \end{aligned}$$

□

## ۵.۴ توسعه الگوریتم بنسون برای یافتن جواب‌های تقریباً کارای مسائل MOP محدب

در این بخش، برای حل مسائل برنامه‌ریزی چندهدفه محدب، تعمیم الگوریتم بنسون آورده شده است. فرض کنیم که توابع  $f_i(x)$  برای  $i = 1, \dots, p$  و توابع محدودیت  $g_j(x)$  برای  $j = 1, \dots, m$ ، همگی محدب باشند.

تعمیم الگوریتم بنسون در این قسمت از همان ایده الگوریتم اصلاح شده بنسون در فصل قبل استفاده می‌کند. یعنی، مجموعه

$$\mathcal{P} = \{y \in \mathbb{R}^p : f(x) \leq y \text{ some for } x \in \mathcal{X}\}$$

را با تقریب درونی و بیرونی، تقریب می‌زنیم. ابتدا، به یادآوری نتایجی از قضیه ۱.۳.۴ که برای حالت محدب حفظ می‌شود، می‌پردازیم. زیرا در اثبات آنها از خطی بودن استفاده نمی‌شود.

گزاره ۱.۵.۴. [۱۹]

۱. مجموعه  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^p$ ،  $p$  بعدی، غیرتهی و از پایین  $\mathbb{R}_{\geq}^p$ -کراندار است.

۲.  $\mathcal{Y}_N = \mathcal{P}_N$

۳.  $\mathcal{P}_{WN} = \text{bd } \mathcal{P}$

فرض کنید که  $\epsilon > 0$  خطای تقریب باشد. الگوریتم با یک چندوجهی  $\mathcal{S}$ ، که پوششی برای مجموعه  $\mathcal{P}$  است، آغاز می‌گردد. سپس نقطه‌ای درونی از  $\mathcal{P}$  مانند  $\hat{p}$  مشخص می‌کنیم.

در هر تکرار چک می‌شود که رئوس  $s$  از  $\mathcal{S}$ ، در  $\mathcal{P}$  قرار دارند یا نه. اگر در  $\mathcal{P}$  نباشند، نقطه مرزی نظیرشان از  $\mathcal{P}$  (به عنوان مثال  $y$ ) که روی پاره‌خط بین  $s$  و  $\hat{p}$  قرار دارد، محاسبه می‌شود. سپس فاصله  $d(s, y)$  تعیین می‌شود. اگر راس  $s \in \mathcal{P}$  یا  $d(s, y) \leq \epsilon$  باشد،  $s$  را به تقریب خارجی  $\mathcal{O}$  و نقطه مرزی نظیرش،  $y$  را به تقریب داخلی  $\mathcal{I}$  اضافه می‌کنیم (در حالتی که  $s \in \mathcal{P}$ ، نقطه مرزی نظیرش، خود  $s$  است).

از طرف دیگر، اگر راسی از چندوجهی  $\mathcal{S}$  یافت شود که از نقطه مرزی نظیرش فاصله‌ای بیشتر از  $\epsilon$  داشته باشد، یک ابرصفحه جداساز آن راس از  $\mathcal{P}$ ، به توضیحات  $\mathcal{S}$  اضافه شده و روند تکرار می‌شود. اکنون به بیان الگوریتم تقریب خارجی بنسون برای پیدا کردن جواب‌های  $\epsilon$ -غیرتسلطی ضعیف در مسائل برنامه‌ریزی چندهدفه محدب می‌پردازیم.

#### الگوریتم ۴:

۱. مقدار دهی اولیه:  $\mathcal{S}^\circ = y^I + \mathbb{R}_{\geq}^p$ ، که در آن  $y_i^I = \min\{y_i : y \in \mathcal{Y}\}$ ، سپس  $\text{vert } \mathcal{S}^\circ = \{y^I\}$ .

۲. یک نقطه درونی مانند  $\hat{p}$  از  $\mathcal{P}$  را بیابید.

۳. قرار دهید  $\mathcal{O} := \emptyset$ ،  $\mathcal{I} := \emptyset$  و  $k = 0$ .

#### تکرار گام‌ها:

گام  $k_1$ . اگر برای هر  $s \in \mathcal{P} \cup \mathcal{O}$ ،  $s \in \text{vert } \mathcal{S}^k$  باشد، آنگاه به گام  $k_2$  بروید. در غیر این صورت، انتخاب کنید  $\mathcal{S}^k \setminus (\mathcal{O} \cup \mathcal{P})$  و  $s^k \in \text{vert } \mathcal{S}^k$  و ادامه دهید.

گام  $k_2$ . مقدار منحصر بفرده نقطه مرزی  $y^k := \rho_k s^k + (1 - \rho_k)\hat{p} \in \mathcal{P}$  را محاسبه کنید که  $\rho_k \in (0, 1)$ .

گام  $k_3$ . اگر فاصله  $s^k$  از  $y^k$ ، یعنی  $d(s^k, y^k)$ ، حداکثر  $\epsilon$  باشد،  $s^k$  را به  $\mathcal{O}$  و  $y^k$  را به  $\mathcal{I}$  اضافه کنید و به گام  $k_1$  بروید.

گام  $k_4$ . اگر  $d(s^k, y^k) > \epsilon$  باشد، آنگاه ابرصفحه جداساز  $s^k$  از  $\mathcal{P}$  را به فرم  
 $H := \{y \in \mathbb{R}^p : y^T \lambda^k \geq b^T u^k\}$ ، تعیین کنید و قرار دهید:  
 $S^{k+1} = S^k \cap \{y \in \mathbb{R}^p : y^T \lambda^k \geq b^T u^k\}$ .

گام  $k_5$ .  $\text{vert } S^{k+1}$  را تعیین کنید. قرار دهید  $k = k + 1$  و به گام  $k_1$  بروید.

گام  $k_6$ . مجموعه نقاط تقریب خارجی و داخلی را به ترتیب با نماد  $V_o(S^k)$  و  $V_i(S^k)$  نشان داده و به شکل زیر تعریف می‌شوند.

$$V_o(S^k) = \text{vert } S^k, \quad V_i(S^k) = (\text{vert } S^k \setminus \mathcal{O}) \cup \mathcal{I}$$

نتایج:

۱. فرض کنید  $P^i = \text{conv } V_i(S^k) + \mathbb{R}_{\geq}^p$ . در این صورت  $P^i$  بیانگر تقریب درونی از  $\mathcal{P}$  است  
 $(P^i \subseteq \mathcal{P})$ .

۲. فرض کنید  $P^o = \text{conv } V_o(S^k) + \mathbb{R}_{\geq}^p$ . در این صورت  $P^o$  بیانگر تقریب بیرونی از  $\mathcal{P}$  است  
 $(\mathcal{P} \subseteq P^o)$ .

قضیه ۲.۵.۴. [۱۹] فرض کنید که  $\epsilon = \epsilon e$  و  $e = (1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^p$ . آنگاه  $P_N^i$ ، مجموعه‌ای از نقاط  $\epsilon$ -غیرتسلطی ضعیف از  $\mathcal{P}$  است.

برهان. اثبات مشابه قضیه ۳.۲.۳ برای الگوریتم اصلاح شده بنسون برای حل MOLP است. همان اثبات برای MONP محدب نیز برقرار است. با توجه به محدب بودن مساله، رابطه  
 $P^i \subseteq \mathcal{P} \subseteq P^o$  برقرار است و چون تناظر یک به یک بین رئوس  $P^i$  و  $P^o$  وجود دارد، لذا نتیجه حاصل می‌گردد.  $\square$

اجرای گام‌های  $k_2$  (یافتن نقطه مرزی منحصر بفرد) و  $k_4$  (پیدا کردن ابرصفحه جداساز)، به دلیل غیرخطی بودن مساله، از نسخه الگوریتم تقریبی بنسون در فصل قبل متفاوت است. گام  $k_2$  با حل مساله غیرخطی زیر می‌تواند اجرا شود.

$$\rho^k := \max\{\rho : g(x) \leq \circ, \circ < \rho < 1, \rho s^k + (1 - \rho)\hat{p} \geq f(x), x \in \mathbb{R}^n, \rho \in \mathbb{R}\} \quad (3.4)$$

$$y^k := \rho^k s^k + (1 - \rho^k)\hat{p}$$

توجه کنید که  $\rho^k$  با تعریف فوق موجود است زیرا برای  $i = 1, \dots, p$ ،  $f_i(x)$  پیوسته‌اند. در ادامه نتایجی در مورد جواب‌های بهینه (۳.۴) اثبات می‌کنیم.

گزاره ۳.۵.۴. [۱۹] فرض کنید  $\hat{p} \in \text{int } \mathcal{P}$  و  $s^k \notin \mathcal{P}$ . اگر  $(x^k, \rho^k)$  یک جواب بهینه از برنامه‌ریزی غیرخطی (۳.۴) باشد، آنگاه  $x^k$  جواب کارای ضعیف از (۱.۴) MOP می‌باشد.



برهان. فرض که حکم برقرار نباشد. یعنی  $\bar{x}$  با خاصیت  $g(\bar{x}) \leq 0$  موجود است به طوری که

$$f(\bar{x}) < f(x^k) \leq y^k = \rho^k s^k + (1 - \rho^k)\hat{p}.$$

در این صورت می‌توانیم  $\rho^k$  را افزایش دهیم تا  $(\rho^k + \delta)s^k + (1 - \rho^k - \delta)\hat{p}$  و حداقل یکی از مولفه‌های  $f(\bar{x})$  همان باشد. این مطلب با فرض  $\rho^k$  مقدار بهینه مساله غیرخطی (۳.۴) در تناقض است. پس حکم برقرار است.  $\square$

گزاره ۴.۵.۴ [۱۹] فرض که  $\hat{p} \in \text{int } \mathcal{P}$  و  $s^k \notin \mathcal{P}$ . اگر  $(x^k, \rho^k)$  یک جواب بهینه از مساله غیرخطی (۳.۴) باشد و  $y^k = \rho^k s^k + (1 - \rho^k)\hat{p}$ ، آنگاه  $y^k \in \mathcal{P}_{WN}$ .

برهان. واضح است که  $y^k \in \text{bd } \mathcal{P}$  است. پس طبق گزاره ۱.۵.۴ نتیجه برقرار است.  $\square$

قضیه ۲.۵.۴ نشان می‌دهد که به ازای هر اسکالر  $\epsilon > 0$ ، الگوریتم ۴ یک مجموعه از نقاط  $\epsilon$ -غیرتسلطی ضعیف را، برای مساله برنامه‌ریزی محدب چندهدفه (۱.۴) می‌سازد. تضمین کیفیت تقریب امکان دارد زیرا الگوریتم، هر دو تقریب درونی و بیرونی از  $\mathcal{P}$  را می‌سازد. یعنی  $\mathcal{P}^i \subseteq \mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}^o$ . با این روند، الگوریتم تعداد متناهی از نقاط غیرتسلطی  $y^k$  را می‌یابد. به روند اجرای گام  $k_4$  از الگوریتم ۴، یعنی یافتن ابرصفحه جداساز، در دو بخش مشتق‌پذیری و مشتق‌ناپذیری می‌پردازیم.

## ۶.۴ ساخت ابرصفحه جداساز در حالت مشتق‌پذیری

اکنون فرض کنیم که توابع هدف  $f_i(x)$  و توابع محدودیت  $g_j(x)$  برای  $i = 1, \dots, p$  و  $j = 1, \dots, m$  علاوه بر آنکه محدبند، به طور پیوسته مشتق‌پذیر بوده و مساله برای همه جواب‌های کارای ضعیف، در محدودیت‌های شرطی کان-تاکر صدق کند.

تحت این مفروضات، می‌خواهیم روش کارایی جهت انجام گام  $k_4$ ، یعنی ساخت ابرصفحه جداساز  $s$  از  $\mathcal{P}$ ، ارائه می‌شود.

ایده ساخت ابرصفحه برای استفاده برنامه دوگان مانند حالت خطی است. بنابراین، بر اساس جواب بهینه  $x^k$  از مساله برنامه‌ریزی غیرخطی (۳.۴) و نقطه متناظرش  $f(x^k)$ ، برنامه غیرخطی چندهدفه را با یک برنامه خطی چندهدفه در نقطه ثابت  $x^k$ ، تقریب می‌زنند. آنگاه ابرصفحه حمایتی  $\mathcal{P}$  در  $y^k$  ساخته می‌شود.

فرض کنید:

$$\nabla f(x^k) = (\nabla f_1(x^k), \dots, \nabla f_p(x^k)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x^k)}{\partial x_1}, & \dots, & \frac{\partial f_p(x^k)}{\partial x_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_1(x^k)}{\partial x_n}, & \dots, & \frac{\partial f_p(x^k)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

۹

$$\nabla g(x^k) = (\nabla g_1(x^k), \dots, \nabla g_m(x^k)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1(x^k)}{\partial x_1}, & \dots, & \frac{\partial g_m(x^k)}{\partial x_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_1(x^k)}{\partial x_n}, & \dots, & \frac{\partial g_m(x^k)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

به ترتیب ژاکوبین  $f(x)$  و  $g(x)$  در نقطه  $x^k \in \mathbb{R}^n$  باشند. برنامه‌ریزی خطی چندهدفه‌ی زیر تعریف می‌شود.

$$\begin{aligned} \text{MOLP}(x^k) \quad & \min f(x^k) + \nabla f(x^k)^T(x - x^k) \\ \text{s.t} \quad & g(x^k) + \nabla g(x^k)^T(x - x^k) \leq 0. \end{aligned}$$

فرض کنید  $x^k$  داده شده باشد. تعریف کنید:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^L(x^k) = \{y \in \mathbb{R}^p : f(x^k) + \nabla f(x^k)^T(x - x^k) \leq y \\ \text{for some } x \text{ with } g(x^k) + \nabla g(x^k)^T(x - x^k) \leq 0\}. \end{aligned}$$

اگر نقطه  $x^k$  که به آن اشاره می‌کنیم، مشخص باشد، به جای  $\mathcal{P}^L(x^k)$  فقط  $\mathcal{P}^L$  می‌نویسیم. توجه کنید که

$$\mathcal{P}^L(x^k) \supseteq \mathcal{P}$$

زیرا با در نظر گرفتن عضو دلخواه  $y \in \mathcal{P}$  داریم

$$\exists \hat{x} \in \mathcal{X}; y \geq f(\hat{x}). \quad (۴.۴)$$

از طرفی چون توابع  $f_i(x)$  برای  $i = 1, \dots, p$  و توابع  $g_j(x)$  برای  $j = 1, \dots, m$  محدب هستند، با تقریب زدن این توابع در نقطه  $x^k$  داریم:

$$\begin{aligned} f(\hat{x}) &= f(x^k) + \nabla f(x^k)^T(\hat{x} - x^k) + \frac{1}{2} \nabla^2 f(x^k)(\hat{x} - x^k)^2 + \dots \\ g(\hat{x}) &= g(x^k) + \nabla g(x^k)^T(\hat{x} - x^k) + \frac{1}{2} \nabla^2 g(x^k)(\hat{x} - x^k)^2 + \dots \end{aligned} \quad (۵.۴)$$

از مقایسه روابط (۴.۴) و (۵.۴) و تعریف  $\mathcal{P}^L(x^k)$  نتیجه می‌شود که  $y \in \mathcal{P}^L(x^k)$

علاوه بر آن تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} f_{x^k} &:= f(x^k) - \nabla f(x^k)^T x^k, \\ C_{x^k} &:= \nabla f(x^k)^T, \\ A_{x^k} &:= -\nabla g(x^k)^T, \\ b_{x^k} &:= g(x^k) - \nabla g(x^k)^T x^k \end{aligned} \quad (۶.۴)$$

و  $\text{MOLP}(x^k)$  را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$\min\{C_{x^k}x + f_{x^k} : A_{x^k}x \geq b_{x^k}\}.$$

جدا از ثابت  $f_{x^k}$ ، مساله برنامه‌ریزی فوق چندهدفه خطی است. برنامه‌ریزی اولیه و دوگانی که برای ساخت ابرصفحه حمایتی برای  $MOLP(x^k)$  استفاده می‌کنیم، عبارتند از:

$$\begin{aligned} LP(x^k, y^k) \quad & \min\{z : A_{x^k}x \geq b_{x^k}, C_{x^k}x - ez \leq y^k - f_{x^k}\}, \\ LD(x^k, y^k) \quad & \max\{b_{x^k}^T u - (y^k - f_{x^k})^T \lambda : A_{x^k}^T u - C_{x^k}^T \lambda = 0; e^T \lambda = 1; u, \lambda \geq 0\}. \end{aligned}$$

طبق گزاره ۲.۳.۴ می‌دانیم، در حالتی که  $y^k \in \mathcal{P}_{WN}^L(x^k)$  یک نقطه غیرتسلطی ضعیف برای  $MOLP(x^k)$  باشد، جواب بهینه  $(u^*, \lambda^*)$  از  $LD(x^k, y^k)$  منجر به ایجاد ابرصفحه  $H = \{y \in \mathbb{R}^p : (y - f_{x^k})^T \lambda^* = b_{x^k}^T u^*\}$  از  $\mathcal{P}^L(x^k)$  در  $y^k$  می‌گردد. این ابرصفحه مشابه با ابرصفحه  $H' = \{y^T \lambda^* = b^T u^*\}$  است که نشان می‌دهیم  $\mathcal{P}$  را در  $y^k$ ، در حالت مشتق‌پذیری توابع هدف و محدودیت، حمایت می‌کند. از اینرو، روند زیر را برای انجام گام  $k+1$  در الگوریتم ۴ استفاده می‌کنیم.

• گام  $k+1$  برای توابع مشتق‌پذیر:

الف. گرادیان‌های  $\nabla f(x^k)$  و  $\nabla g(x^k)$  را تعیین کنید.

ب. مساله  $LD(x^k, y^k)$  را حل کرده و جواب بهینه آن را  $(u^k, \lambda^k)$  قرار دهید.

ج. قرار دهید  $\mathcal{S}^{k+1} = \mathcal{S}^k \cap \{y \in \mathbb{R}^p : y^T \lambda^k \geq b^T u^k\}$ .

فرض که  $(x^k, \mathcal{P}^k)$  جواب بهینه (۳.۴) باشد و  $y^k = \mathcal{P}^k + (1 - \mathcal{P}^k)\hat{p}$  در ادامه جزئیات حل مساله دوگان  $LD(x^k, y^k)$  را نشان می‌دهیم که منجر به تولید ابرصفحه حمایتی  $\mathcal{P}$  در  $y^k$  می‌گردد (قضیه ۵.۶.۴). در گزاره‌های ۳.۵.۴ و ۴.۵.۴ نشان دادیم که  $f(x^k), y^k \in \mathcal{P}_{WN}$ . برای هدف اصلی، یعنی عضویت  $f(x^k)$  در  $\mathcal{P}_{WN}^L(x^k)$  به گزاره زیر نیاز داریم.

گزاره ۱.۶.۴ [۱۹] فرض که  $x^k \in X$  جواب کارای ضعیف از مساله (۱.۴)  $MOP$  باشد و مساله (۱.۴)  $MOP$  در نقطه  $x^k$ ، در محدودیت‌های شرطی کان-تاکر صدق کند. آنگاه هیچ  $d \in \mathbb{R}^p$  موجود نیست که

$$\begin{aligned} \nabla f_i(x^k)^T d &< 0, \quad \forall i = 1, \dots, p, \\ \nabla g_j(x^k)^T d &\leq 0, \quad \forall j \in J(x^k). \end{aligned} \tag{۷.۴}$$

برهان. اثبات را با برهان خلف پیش می‌بریم. فرض که  $d^k \in \mathbb{R}^n$  موجود باشد که در روابط (۷.۴) صدق کند. پس

$$\langle \nabla g_j(x^k), d^k \rangle \leq 0 \quad \forall j \in J(x^k)$$

از صلاحیت شرایط کان-تاکر در  $x^k$ ، درمی‌یابیم که تابعی مانند  $a : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  وجود دارد که در صفر به طور پیوسته مشتق‌پذیر است و اسکالر حقیقی  $\alpha > 0$  موجود است که  $a(0) = x^k$  و برای هر  $0 \leq t \leq 1$  و  $a'(0) = \alpha d^k$  و  $g(a(t)) \leq 0$  برقرار است.

چون توابع  $f_i$  برای  $i = 1, \dots, p$  به طور پیوسته مشتق‌پذیر هستند،  $f_i(a(t))$  را به طور خطی به فرم زیر تقریب می‌زنیم.

$$\begin{aligned} f_i(a(t)) &= f_i(x^k) + \nabla f_i(x^k)^T (a(t) - x^k) + \|a(t) - x^k\| \varphi(a(t), x^k) \\ &= f_i(x^k) + \nabla f_i(x^k)^T (a(t) - a(\circ)) + \|a(t) - a(\circ)\| \varphi(a(t), a(\circ)) \\ &= f_i(x^k) + t \nabla f_i(x^k)^T \left( \frac{a(t) - a(\circ)}{t} \right) + \|a(t) - a(\circ)\| \varphi(a(t), a(\circ)) \end{aligned}$$

که در آن  $\varphi(a(t), a(\circ)) \rightarrow \circ$  وقتی  $t$  به سمت صفر میل کند،  $\|a(t) - a(\circ)\|$  نیز به سمت صفر رفته و در نهایت  $(a(\circ + t) - a(\circ))/t \rightarrow a'(\circ) = \alpha d^k$ .

به علاوه، با استفاده از فرض خلف برای هر  $i = 1, \dots, p$  داریم  $\nabla f_i(x^k)^T d^k < \circ$  چون  $t \geq \circ$  برای یک  $t$  به اندازه کافی کوچک و برای هر  $i = 1, \dots, p$  رابطه  $f_i(a(t)) < f_i(x^k)$  برقرار می‌گردد. این مطلب با کارای ضعیف بودن  $x^k$  برای مساله  $MOP$  در تناقض است. پس فرض خلف باطل و حکم برقرار است.  $\square$

گزاره ۲.۶.۴. [۱۹] فرض کنید که  $x^k \in X$  جواب کارای ضعیف از  $MOP(1.4)$  باشد و  $MOP$  در محدودیت‌های شرطی کان-تاکر، در نقطه  $x^k$  صدق کند. آنگاه  $x^k$  جواب کارای ضعیف از  $MOLP(x^k)$  خواهد بود.

برهان. برخلاف حکم، فرض که  $x^k$  کارای ضعیف برای  $MOLP(x^k)$  نبوده و  $\bar{x}$  جواب شدنی باشد که بر آن تسلط اکید دارد. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} f_i(x^k) + \nabla f_i(x^k)^T (\bar{x} - x^k) &< f_i(x^k), \quad \forall i = 1, \dots, p, \\ g_j(x^k) + \nabla g_j(x^k)^T (\bar{x} - x^k) &\leq \circ, \quad \forall j = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} \nabla f_i(x^k)^T (\bar{x} - x^k) &< \circ, \quad \forall i = 1, \dots, p, \\ \nabla g_j(x^k)^T (\bar{x} - x^k) &\leq \circ, \quad \forall j \in J(x^k). \end{aligned}$$

با در نظر گرفتن  $d = \bar{x} - x^k$ ، به تناقض با گزاره قبل می‌رسیم. پس فرض خلف باطل است و  $x^k$  کارای ضعیف برای  $MOLP(x^k)$  می‌باشد.  $\square$

گزاره ۲.۶.۴ را همچنین، می‌توان با استفاده از شرایط لازم کاروش-کان-تاکر ( $KKT$ ) برای جواب‌های کارای ضعیف، شرح داد.

از آنجایی که  $x^k$  جواب کارای ضعیف برای  $MOP(1.4)$  است، برطبق شرایط لازم  $KKT$  برای کارای ضعیف، بردارهای  $\lambda \in \mathbb{R}^p$  و  $\mu \in \mathbb{R}^m$  موجودند به گونه‌ای که

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^p \lambda_i \nabla f_i(x^k) + \sum_{j=1}^m \mu_j \nabla g_j(x^k) &= \circ \\ \mu_j g_j(x^k) &= \circ \quad \forall j = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

با قرار دادن  $u^* = \mu$  و  $\lambda^* = \lambda$  به یک جواب بهینه برای  $LD(x^k, f(x^k))$  دست یافته‌ایم. برای نشان دادن این ادعا، ابتدا شدنی بودن جواب از روابط زیر واضح است

$$\begin{aligned} A_{x^k}^T u - C_{x^k}^T \lambda &= -\nabla g(x^k)u - \nabla f(x^k)\lambda \\ &= -\sum_{j=1}^m \mu_j \nabla g_j(x^k) - \sum_{i=1}^p \lambda_i \nabla f_i(x^k) = 0 \end{aligned}$$

در ادامه چون  $f(x^k) \in \mathcal{P}$  است، پس مقدار هدف  $LD(x^k, f(x^k))$  نامشبت است. از آنجایی که مقدار تابع هدف مذکور به ازای  $(u^*, \lambda^*)$  برابر صفر است، یعنی

$$\begin{aligned} b_{x^k}^T u^* - (y^k - f_{x^k})^T \lambda^* &= [g(x^k) - \nabla g(x^k)^T x^k]^T \mu - [f(x^k) - f(x^k) + \nabla f(x^k)^T x^k]^T \lambda \\ &= g(x^k)^T \mu - \nabla g(x^k)^T x^k \mu - \nabla f(x^k)^T x^k \lambda \\ &= \sum_{j=1}^m \mu_j g_j(x^k) - \sum_{j=1}^m \mu_j \nabla g_j(x^k)^T x^k - \sum_{i=1}^p \lambda_i \nabla f_i(x^k)^T x^k \\ &= 0 - 0 \cdot x^k = 0 \end{aligned}$$

بنابراین مقدار بهینه  $LD(x^k, f(x^k))$  مساوی صفر می‌گردد و در نتیجه  $f(x^k)$ ، نقطه غیرتسلطی ضعیف از  $\mathcal{P}^L(x^k)$  می‌باشد.

این نتیجه نشان می‌دهد در حالتی که  $f(x^k) = y^k$  باشد، ابرصفحه حمایتی به دست آمده از حل  $LD(x^k, y^k)$ ، ابرصفحه حمایتی  $\mathcal{P}$  در  $y^k$  نیز می‌باشد. به هر حال ممکن است جواب‌های کارای ضعیفی با  $f(x^k) \neq y^k$  موجود باشد.

برای این که قادر به اثبات نتیجه اصلی گردیم (قضیه ۵.۶.۴)، در گزاره ۴.۶.۴ نشان می‌دهیم که  $y^k$  در  $\mathcal{P}_{WN}^L$  قرار می‌گیرد، حتی زمانی که  $f(x^k) \neq y^k$  است.

گزاره ۳.۶.۴ [۱۹] فرض کنید که  $\bar{y}, f(\bar{x}) \in \mathcal{P}_{WN}$  به گونه‌ای باشند که،  $\bar{y} \geq f(\bar{x})$ . آنگاه  $\lambda \geq 0$  با خاصیت  $\lambda^T \bar{y} = \lambda^T f(\bar{x})$  موجود است که در آن  $\bar{x}$  جواب بهینه از مساله مجموع وزنی  $\min\{\lambda^T f(x), g(x) \leq 0\}$  می‌باشد.

برهان. از آنجایی که  $f(\bar{x}), \bar{y} \in \mathcal{P}_{WN}$  وجود دارند  $\lambda_1 \geq 0$  و  $\lambda_2 \geq 0$  به طوری که  $\lambda_1^T f(\bar{x})$  و  $\lambda_2^T \bar{y}$  به ترتیب، جواب‌های بهینه مسائل مجموع وزنی  $\min\{\lambda_1^T y; y \in \mathcal{P}\}$  و  $\min\{\lambda_2^T y; y \in \mathcal{P}\}$  می‌باشند. یعنی با فرض  $\lambda_1 f(\bar{x}) = c_1$  و  $\lambda_2 \bar{y} = c_2$  داریم:

$$\lambda_1^T y \geq c_1, \quad \forall y \in \mathcal{P} \quad (۸.۴)$$

$$\lambda_2^T y \geq c_2, \quad \forall y \in \mathcal{P}. \quad (۹.۴)$$

فرض که  $0 < \alpha < 1$  باشد. برای هر ترکیب محدب از  $\lambda_1^T y \geq c_1$  و  $\lambda_2^T y \geq c_2$  داریم

$$\alpha \lambda_1^T y + (1 - \alpha) \lambda_2^T y \geq \alpha c_1 + (1 - \alpha) c_2, \quad \forall y \in \mathcal{P}.$$

با جایگذاری  $c_1 = \lambda_1^T f(\bar{x})$  و  $c_2 = \lambda_2^T \bar{y}$  در نامساوی فوق، داریم

$$\alpha \lambda_1^T y + (1 - \alpha) \lambda_2^T y \geq \alpha \lambda_1^T f(\bar{x}) + (1 - \alpha) \lambda_2^T \bar{y}, \quad \forall y \in \mathcal{P}.$$

چون  $f(\bar{x}) \in \mathcal{P}$ ، با قرار دادن  $y = f(\bar{x})$  در رابطه فوق خواهیم داشت

$$\alpha \lambda_1^T f(\bar{x}) + (1 - \alpha) \lambda_2^T f(\bar{x}) \geq \alpha \lambda_1^T f(\bar{x}) + (1 - \alpha) \lambda_2^T \bar{y}$$

یعنی

$$(1 - \alpha) \lambda_2^T (f(\bar{x}) - \bar{y}) \geq 0. \quad (10.4)$$

از طرفی چون  $\bar{y} \geq f(\bar{x})$  پس

$$(1 - \alpha) \lambda_2^T (f(\bar{x}) - \bar{y}) \leq 0. \quad (11.4)$$

بنابراین از روابط (۱۰.۴) و (۱۱.۴) نتیجه می‌شود که  $\lambda_2^T (f(\bar{x}) - \bar{y}) = 0$ .

این مطلب بیانگر است که  $\lambda_2 \geq 0$  با خاصیت  $\lambda_2^T (f(\bar{x}) - \bar{y}) = 0$  موجود است که در آن  $\bar{x}$  جواب بهینه‌ای از مساله مجموع وزنی  $\min\{\lambda_2^T f(x), g(x) \leq 0\}$  است. زیرا در غیر این صورت  $\exists \hat{x} \neq \bar{x}; g(\hat{x}) \leq 0, \lambda_2^T f(\hat{x}) < \lambda_2^T f(\bar{x}) = \lambda_2^T \bar{y}$ .

□

و این مطلب متناقض با رابطه (۹.۴) است.

گزاره ۴.۶.۴. [۱۹] اگر  $f(\bar{x}), \bar{y} \in \mathcal{P}_{WN}$  که  $\bar{y} \geq f(\bar{x})$  باشد و نقطه  $\bar{x}$  در محدودیت شرطی صدق کند، آنگاه  $\bar{y} \in \mathcal{P}_{WN}^L(\bar{x})$  می‌باشد.

برهان. از آنجایی که  $f(\bar{x}), \bar{y} \in \mathcal{P}_{WN}$ ، طبق گزاره قبل،  $\lambda \geq 0$  با خاصیت  $\lambda^T \bar{y} = \lambda^T f(\bar{x})$  موجود است که در آن  $\bar{x}$ ، جواب بهینه‌ای از مساله مجموع وزنی  $\min\{\lambda^T f(x), g(x) \leq 0\}$  است. در نظر بگیرید:

$$F_0 = \{d : \sum_{i=1}^p \lambda_i \nabla f_i(\bar{x})^T d < 0\},$$

$$G'_0 = \{d : \nabla g_i(\bar{x})^T d \leq 0 \quad \forall i \in J(\bar{x})\}.$$

از محدودیت‌های شرطی نتیجه می‌شود که  $\bar{x}$  یک جواب  $KKT$  از مساله مجموع وزنی است. نشان می‌دهیم که  $F_0 \cap G'_0 = \emptyset$  است.

چون  $\bar{x}$  یک نقطه  $KKT$  از مساله مجموع وزنی است، طبق شرط لازم بهینگی، بردار  $(u_1, \dots, u_m)$  موجود است به طوری که جوابی برای سیستم زیر می‌باشد.

$$\sum_{i=1}^m u_i \nabla g_i(\bar{x}) = - \sum_{i=1}^p \lambda_i \nabla f_i(\bar{x})$$

$$u_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m$$

طبق لم فارکاس ۷.۲.۴، چون سیستم فوق جواب دارد، سیستم

$$\nabla g_i(\bar{x})^T d \leq 0 \quad i = 1, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i \nabla f_i(\bar{x})^T d < 0$$

جواب ندارد، یعنی بردار  $d$  ای موجود نیست که همزمان در نامساویهای فوق صدق کند. از اینرو  $F_0 \cap G'_0 = \emptyset$  است.

حال قرار دهیم  $I = \{i : \bar{y}_i = f_i(\bar{x})\}$  (می‌دانیم که  $\bar{y} \geq f(\bar{x})$  است). اکنون خلاف حکم را در نظر گرفته، فرض که  $\bar{y}$  غیرتسلطی ضعیف نبوده و  $f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T(x^* - \bar{x})$  در  $MOLP(\bar{x})$ ، مسلط اکید باشد. در این صورت

$$f_i(\bar{x}) + \nabla f_i(\bar{x})^T(x^* - \bar{x}) < \bar{y}_i, \quad i = 1, \dots, p,$$

$$g_j(\bar{x}) + \nabla g_j(\bar{x})^T(x^* - \bar{x}) \leq 0, \quad j = 1, \dots, m.$$

یعنی،

$$\nabla f_i(\bar{x})^T(x^* - \bar{x}) < 0 \quad \forall i \in I,$$

$$\nabla g_j(\bar{x})^T(x^* - \bar{x}) \leq 0 \quad \forall j \in J(\bar{x}).$$

توجه شود که  $I \neq \emptyset$  است. زیرا اگر به ازای هر  $i$ ،  $y_i > f_i(\bar{x})$  باشد،  $\bar{y}$  غیرتسلطی ضعیف نمی‌شود. علاوه بر آن،  $i \in I$  موجود است که  $\lambda_i > 0$ . زیرا با توجه به  $\lambda \geq 0$ ، اگر به ازای هر  $i \in I$ ،  $\lambda_i = 0$  باشد، داریم

$$\exists i \notin I; \lambda_i > 0, f_i(\bar{x}) \neq \bar{y}_i \Rightarrow \lambda_i(\bar{y}_i - f_i(\bar{x})) \neq 0$$

و این مطلب با  $\lambda^T(\bar{y} - f(\bar{x})) = 0$  متناقض است.

از اینرو رابطه زیر حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^p \lambda_i \nabla f_i(\bar{x})^T(x^* - \bar{x}) &= \sum_{i \notin I} \lambda_i \nabla f_i(\bar{x})^T(x^* - \bar{x}) + \sum_{i \in I} \lambda_i \nabla f_i(\bar{x})^T(x^* - \bar{x}) \\ &< 0 \end{aligned}$$

با قرار دادن  $d = x^* - \bar{x}$ ، با  $F_0 \cap G'_0 = \emptyset$  به تناقض می‌رسیم. پس فرض خلف رد شده و  $\bar{y} \in \mathcal{P}_{WN}^L$  است.  $\square$

حقیقت آن است که،  $\bar{y}$  نقطه غیرتسلطی از  $\mathcal{P}^L(\bar{x})$  را می‌توان با شرایط لازم  $KKT$  برای برنامه غیرخطی نیز شرح داد (به [۷] مراجعه شود). از آنجایی که  $\bar{x}$  یک جواب بهینه از مساله مجموع وزن‌دار  $\min\{\lambda^T f(x), g(x) \leq 0\}$  است ( $\lambda \geq 0$  و  $\lambda^T \bar{y} = \lambda^T f(\bar{x})$ )، شرایط لازم  $KKT$  بیانگر وجود یک بردار  $\mu \in \mathbb{R}^m$  است که

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i \nabla f_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^m \mu_j \nabla g_j(\bar{x}) = 0$$

$$\mu_j g_j(\bar{x}) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, m.$$

این مطلب بیانگر آن است که، مقدار بهینه  $LD(\bar{x}, \bar{y})$  مساوی صفر است و از آنجا نتیجه می‌شود که  $\bar{y}$  نقطه غیرتسلطی ضعیف از  $\mathcal{P}^L(\bar{x})$  است.

در نهایت نشان می‌دهیم که حل  $LD(x^k, y^k)$ ، منجر به تولید ابرصفحه حمایتی  $\mathcal{P}$  می‌گردد.

قضیه ۵.۶.۴ [۱۹] فرض کنید  $\hat{p} \in \text{int } \mathcal{P}$  و  $s^k \notin \mathcal{P}$  و  $x^k$  و  $\rho^k$  را یک جواب بهینه از مساله برنامه‌ریزی غیرخطی (۳.۴) در نظر گرفته و  $y^k = \rho^k s^k + (1 - \rho^k)\hat{p}$ ، اگر  $H$ ، ابرصفحه به دست آمده از حل  $LD(x^k, y^k)$  باشد، آنگاه  $H$  ابرصفحه حمایتی  $\mathcal{P}$  در  $y^k$  می‌باشد.

برهان. با توجه به گزاره ۴.۵.۴،  $y^k \in \mathcal{P}_{WN}$  است و از گزاره ۳.۵.۴، نتیجه می‌شود که  $f(x^k) \in \mathcal{P}_{WN}$ . با توجه به رابطه (۳.۴) واضح است که  $f(x^k) \leq y^k$ . از اینرو گزاره قبل را بکار برده و در نتیجه  $y^k \in \mathcal{P}_{WN}^L(x^k)$ .

(توجه کنید که در حالت  $f(x^k) = y^k$ ، گزاره ۲.۶.۴ کافی خواهد بود) از گزاره ۲.۳.۴، می‌دانیم که ابرصفحه حمایتی  $\mathcal{P}^L(x^k)$ ، در نقطه  $y^k$  است. چون  $y^k \in \mathcal{P}$  و  $\mathcal{P}^L(x^k) \supseteq \mathcal{P}$ ، نتیجه می‌شود که  $H$  نیز ابرصفحه حمایتی  $\mathcal{P}$  در  $y^k$  است و از اینرو  $s^k$  را از  $\mathcal{P}$  جدا می‌سازد.  $\square$

## ۷.۴ ارائه چند مثال

در این بخش به بیان مثال‌هایی از مسائل بهینه‌سازی چندهدفه غیرخطی محدب پرداخته و مجموعه نقاط  $\varepsilon$ -غیرتسلطی آنها را به کمک الگوریتم ۴ مشخص می‌کنیم.

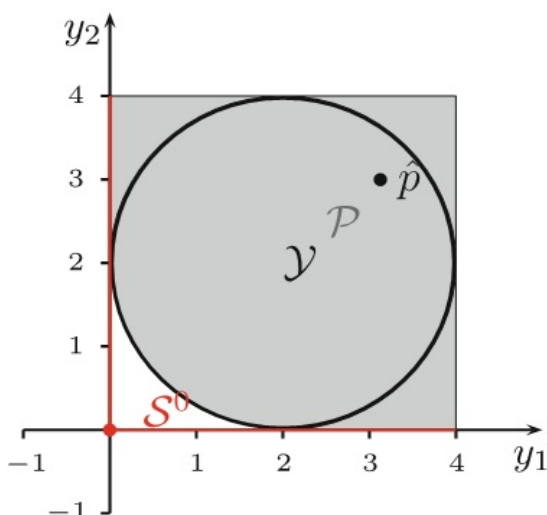
مثال ۱.۷.۴. مساله  $MONP$  زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} \min (f_1(x), f_2(x)) &= (x_1, x_2) \\ \text{s.t. } (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 &\leq 4 \\ &0 \leq x_1 \\ &0 \leq x_2 \end{aligned}$$

در اینجا  $\mathcal{P} = \{y \in \mathbb{R}^2 : f(x) \leq y, g(x) \leq 0\}$  و  $y^I = (0, 0)$  است. شکل ۲.۴، مجموعه‌های  $\mathcal{O}$ ،  $\mathcal{P}$ ،  $\mathcal{S}^\circ$  و نقطه  $\hat{p} = (3, 3)$  را نشان می‌دهد. خطای تقریب را  $\epsilon = 0.1$  قرار می‌دهیم. برای یک تکرار کامل، مراحل الگوریتم را اجرا می‌کنیم.

$\text{vert } \mathcal{S}^\circ = \{(0, 0)\}$  را در نظر گرفته و چون  $(0, 0) \in \text{vert } \mathcal{S}^\circ \setminus (\mathcal{P} \cup \mathcal{O})$ ، با انتخاب  $s^\circ = (0, 0)$  وارد گام ۲ می‌شویم. در این گام با حل مساله غیرخطی زیر به یافتن  $\rho_0$ ، جهت معرفی نقطه مرزی  $\mathcal{P}$  که





شکل ۲.۴:  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{S}^0$  و  $\hat{p}$

روی پاره‌خط  $s^0$  واصل  $\hat{p}$  است، می‌پردازیم.

$$\begin{aligned} \rho_0 &= \max \rho \\ \text{s.t. } & (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 - 4 \leq 0 \\ & -x_1 \leq 0 \\ & -x_2 \leq 0 \\ & 3 - 3\rho \geq x_1 \\ & 3 - 3\rho \geq x_2 \\ & 0 < \rho < 1 \end{aligned}$$

$\rho_0 = 0.8047$  و  $x^0 = (0.5858, 0.5858)$  جواب‌های بهینه مساله فوق است و از آنجا نقطه مرزی  $y^0$  به صورت زیر به دست می‌آید.

$$y^0 = \rho_0 s^0 + (1 - \rho_0) \hat{p} = (0.5858, 0.5858) \quad y^0 = f(x^0) = x^0$$

در گام ۳ فاصله  $s^0$  و  $y^0$  را تعیین می‌کنیم.

$$d(s^0, y^0) = \sqrt{0.5858^2 + 0.5858^2} = 0.8284 > 0.1$$

چون  $d(s^0, y^0) > \epsilon$ ، به ساخت ابرصفحه جداساز  $s^0$  از  $\mathcal{P}$  می‌پردازیم. از آنجایی که توابع هدف و محدودیت‌ها به طور پیوسته مشتق‌پذیرند، پس برای حل  $LD(x^0, y^0)$ ، به محاسبه گرادیان‌های زیر نیاز داریم.

$$\nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\nabla g(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \frac{\partial g_3}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(x_1 - 2) & -1 & 0 \\ 2(x_2 - 2) & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\nabla g(x^\circ) = \begin{pmatrix} -2/8284 & -1 & 0 \\ -2/8284 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

با تشکیل  $LD(x^\circ, y^\circ)$  و حل آن، ابرصفحه حمایتی  $\mathcal{P}$  در  $y^\circ$  را بدست می‌آوریم.

$$LD(x^\circ, y^\circ) = \max\{b_{x^\circ}^T u - (y^\circ - f_{x^\circ})^T \lambda; A_{x^\circ}^T u - C_{x^\circ}^T \lambda = 0, e^T \lambda = 1, u, \lambda \geq 0\}$$

$$\begin{aligned} \max \quad & 3/3136u_1 - 0/5858\lambda_1 - 0/5858\lambda_2 \\ \text{s.t.} \quad & 2/8284u_1 + u_2 - \lambda_1 = 0 \\ & 2/8284u_1 + u_3 - \lambda_2 = 0 \\ & \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ & u_1, u_2, u_3 \geq 0 \\ & \lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \end{aligned}$$

جواب بهینه مساله برنامه‌ریزی خطی فوق،  $\lambda_1^* = \lambda_2^* = 0/5$  و  $u_1^* = 0/17678, u_2^* = u_3^* = 0$  می‌باشد. ابرصفحه مطلوب عبارت است از

$$H = \{y \in \mathbb{R}^2 : (y - f_{x^\circ})^T \lambda^* = b_{x^\circ}^T u^*\} = \{(y_1, y_2) : y_1 + y_2 = 1/1716\}.$$

با تشکیل  $\mathcal{S}^1 = \{(0, 1/1716), (1/1716, 0)\}, \mathcal{S}^1 = \mathcal{S}^\circ \cap H$  vert مشخص شده و به تکرار بعدی می‌رویم.

نتایج حاصل از سه تکرار مراحل الگوریتم در جدول ۱.۴ خلاصه شده است.

تکرار	$s^k$	$y^k$	$d(s^k, y^k)$	برش
$k = 0$	$(0, 0)$	$(0/5858, 0/5858)$	$0/8284$	$y_1 + y_2 = 1/1716$
$k = 1$	$(0, 1/1716)$	$(0/1426, 1/2585)$	$0/1669$	$0/7147y_1 + 0/2853y_2 = 0/4609$
$k = 2$	$(1/1716, 0)$	$(1/2585, 0/1426)$	$0/1669$	$0/2853y_1 + 0/7147y_2 = 0/4609$

جدول ۱.۴:  $s^k$  و  $y^k$  و  $d(s^k, y^k)$  و صفحات برش در سه تکرار الگوریتم

در نهایت پس از سه برش، چهار نقطه خارج از  $\mathcal{P}$  باقی می‌ماند که عبارتند از:

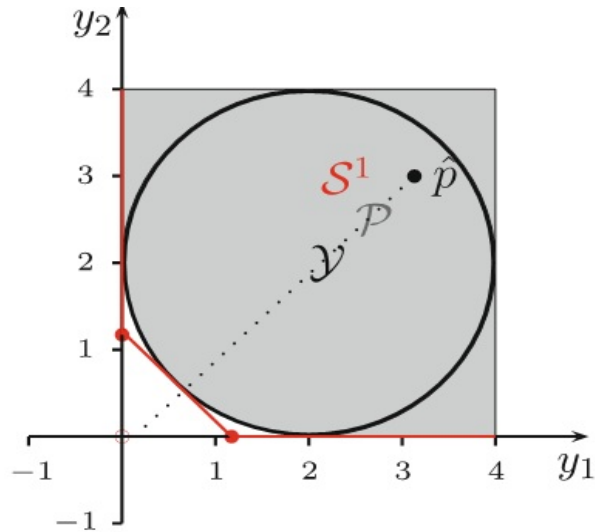
$$(0, 1/6155), (0/2950, 0/8766), (1/6155, 0), (0/8766, 0/2950).$$

نقاط مرزی متناظر چهار نقطه مذکور در زیر آمده است.

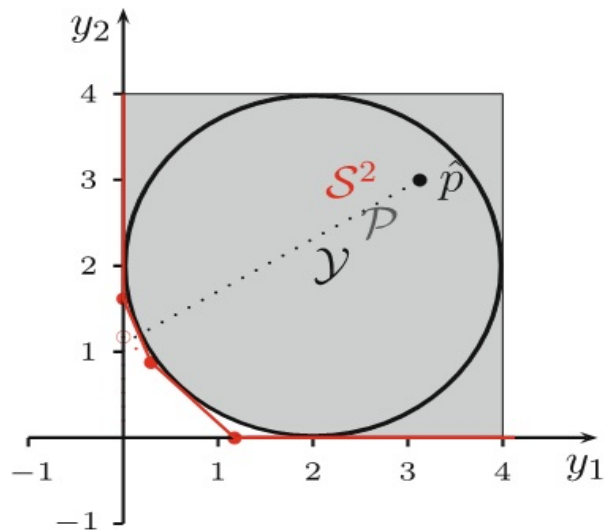
$$(0/0343, 1/6313), (0/3280, 0/9025), (1/6313, 0/0343), (0/9025, 0/3280).$$

فاصله بین این چهار نقطه نشدنی و نقاط مرزی نظیرشان، کمتر از خطای تقریب  $0/1$  است.

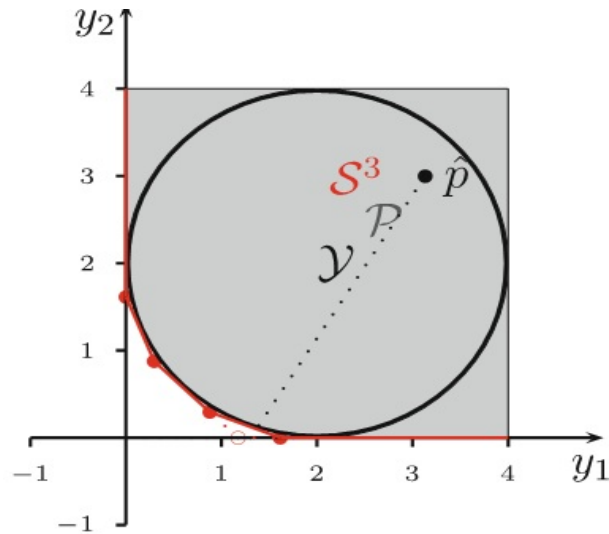
لذا، این چهار نقطه نشدنی را برای تقریب بیرونی می‌پذیریم و الگوریتم پایان می‌یابد. نمودارهای ۳.۴، ۴.۴ و ۵.۴ برش‌های اول، دوم و سوم را نشان می‌دهد.



شکل ۳.۴: برش اول



شکل ۴.۴: برش دوم



شکل ۵.۴: برش سوم

در این صورت مجموعه نقاط راسی تقریب‌های بیرونی و درونی  $\mathcal{P}$  به شکل زیر درمی‌آید.

$$V_o(\mathcal{S}^k) = \{(0, 1/6155), (0/2950, 0/8766), (1/6155, 0), (0/8766, 0/2950)\},$$

$$V_i(\mathcal{S}^k) = \{(0/343, 1/6313), (0/3280, 0/9025), (1/6313, 0/343), (0/9025, 0/3280)\}.$$

مجموعه  $\mathcal{P}^i$ ، تقریب درونی  $\mathcal{P}$ ، به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^i &= \text{conv } V_i(\mathcal{S}^k) + \mathbb{R}_{\geq}^p \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^4 \lambda_i y_i : y_i \in V_i(\mathcal{S}^k), \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^4 \lambda_i = 1 \right\} + \mathbb{R}_{\geq}^p \end{aligned}$$

بنا به قضیه ۲.۵.۴،  $\mathcal{P}_N^i$  مجموعه‌ای از نقاط  $\varepsilon$ -غیرتسلطی ضعیف از  $\mathcal{P}$  است. در ادامه نتایج به دست آمده از الگوریتم تقریبی بنسون را با مجموعه‌ای متناهی نقاط غیرتسلطی حاصل از روش‌های مجموع وزن‌دار و روش محدودیت انعطاف‌پذیر، مقایسه می‌کنیم. از آنجایی که در مثال ۱.۷.۴، تقریب درونی الگوریتم بنسون با چهار نقطه غیرتسلطی ساخته می‌شود، با دو روش دیگر می‌خواهیم چهار نقطه غیرتسلطی را بیابیم.

مساله مجموع وزن‌دار به شکل زیر است.

$$\min\{\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 : (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 \leq 4; x_1 \geq 0; x_2 \geq 0\}$$

و برای حل آن  $\lambda = 1$ ،  $\lambda = \frac{2}{3}$ ،  $\lambda = \frac{1}{3}$  و  $\lambda = 0$  را استفاده می‌کنیم.

مساله روش محدودیت انعطاف‌پذیر به صورت زیر است.

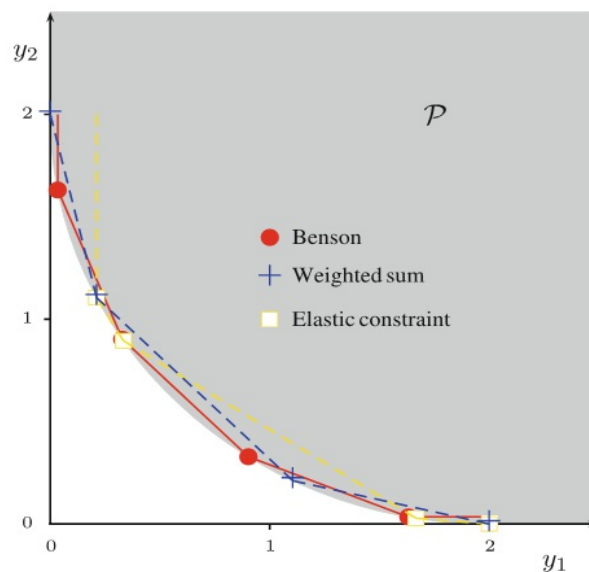
$$\min\{x_2 + 2s_1 : x_1 - s_1 \leq \mu; (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 \leq 4; x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; s_1 \geq 0\}$$

که در آن  $\mu = 0$ ,  $\mu = \frac{1}{3}$ ,  $\mu = \frac{5}{6}$  و  $\mu = 2$  را استفاده می‌کنیم.

جدول ۲.۴ نتایج نقاط غیرتسلطی را برای سه روش نشان می‌دهد. شکل ۶.۴ که نمایانگر نتایج تقریب‌های درونی با این سه روش است، نشان می‌دهد که از بین این تقریب‌ها تقریب درونی به دست آمده از روش بنسون بهترین تقریب برای نقاط غیرتسلطی می‌باشد.

روش	$y^1$	$y^2$	$y^3$	$y^4$
بنسون	(۰٫۰۳۴۳, ۱٫۶۳۱۳)	(۰٫۳۲۸۰, ۰٫۹۰۲۵)	(۰٫۹۰۲۵, ۰٫۳۲۸۰)	(۱٫۶۳۱۳, ۰٫۰۳۴۳)
مجموع وزن‌دار	(۰, ۲)	(۰٫۲۱۱۱, ۱٫۱۰۶۵)	(۱٫۱۰۵۶, ۰٫۲۱۱۱)	(۲, ۰)
محدودیت انعطاف‌پذیر	(۰٫۲۱۱۱, ۱٫۱۰۵۶)	(۰٫۳۳۳۳, ۰٫۸۹۴۵)	(۱٫۶۶۶۷, ۰٫۰۲۸۰)	(۲, ۰)

جدول ۲.۴: نقاط غیرتسلطی به دست آمده از الگوریتم بنسون، روش مجموع وزن‌دار و روش محدودیت انعطاف‌پذیر



شکل ۶.۴: تقریب‌های درونی ساخته شده از نقاط غیرتسلطی سه روش

از قضیه ۲.۵.۴ کیفیت تقریب به دست آمده با الگوریتم بنسون، تضمین می‌شود، در واقع نقاط به دست آمده  $0.1e$ -غیرتسلطی ضعیف از  $P$  هستند.

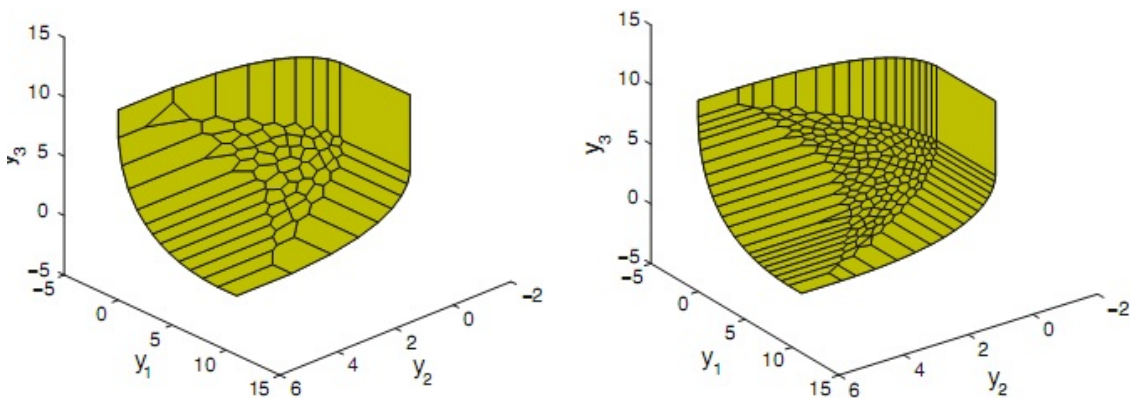
به هر حال، در این مثال، دو روش مجموع وزن‌دار و محدودیت انعطاف‌پذیر تقریب‌های بدتری نسبت به تقریب الگوریتم بنسون ارائه می‌دهند و در حقیقت، تقریب‌ها، مجموعه‌های  $0.1e$ -غیرتسلطی ضعیف از  $P$  نیستند.

این مطلب حاکی از آن است که، مقادیر انتخاب شده  $\lambda$  یا  $\mu$  در دو روش، برای دستیابی به مجموعه‌های  $e^{-0.1}$  غیرتسلطی ضعیف از  $P$  مناسب نیستند. از اینرو، این روش‌ها نیاز به بهبود با مکانیسم‌هایی جهت کنترل پارامترهای  $\lambda$  و  $\mu$  دارند تا در چنین روش‌ها، بتوان کیفیت تقریب را تضمین کرد. در ادامه چند مثال از برنامه‌ریزی غیرخطی چندهدفه آورده می‌شود که میتینن<sup>۶</sup> و همکاران آنها را به روش تعاملی حل کرده‌اند [۳۴]. در اینجا مثال‌ها به روش الگوریتم تقریبی بنسون با تقریب خطاهای مختلف حل شده و نتیجه با شکل نمایش داده شده است.

## مثال ۲.۷.۴.

$$\begin{aligned} \min f_1(x) &= (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \\ f_2(x) &= (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 \\ f_3(x) &= (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 2)^2 \\ \text{s.t. } x_1 + 2x_2 &\leq 10 \\ &\circ \quad \leq x_1 \leq 10 \\ &\circ \quad \leq x_2 \leq 4 \end{aligned}$$

شکل ۷.۴ نتیجه حل مساله را با تقریب خطاهای ۰.۰۵ و ۰.۰۱ نشان می‌دهد.



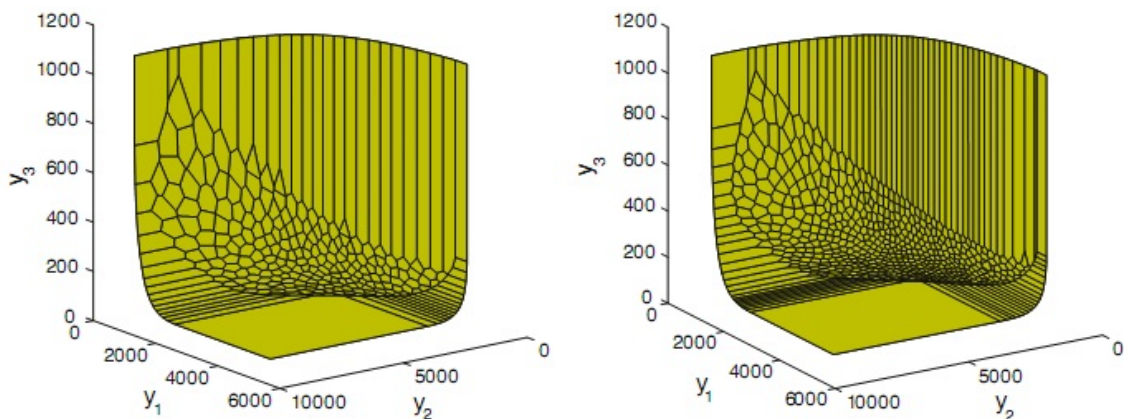
شکل ۷.۴:  $P^\circ$  با خطای تقریب ۰.۰۵ و ۰.۰۱

<sup>۶</sup> Miettinen

مثال ۳.۷.۴.

$$\begin{aligned} \min f_1(x) &= 50x_1^4 + 10x_2^4 \\ f_2(x) &= 30(x_1 - 5)^4 + 100(x_2 - 3)^4 \\ f_3(x) &= 70(x_1 - 2)^4 + 20(x_2 - 4)^4 \\ \text{s.t. } (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 &\leq 1 \\ \circ &\leq x_1 \leq 3 \\ \circ &\leq x_2 \leq 3 \end{aligned}$$

شکل ۸.۴ نتیجه حل مساله را به ترتیب با خطاهای تقریب ۵ و ۲ نشان می‌دهد.



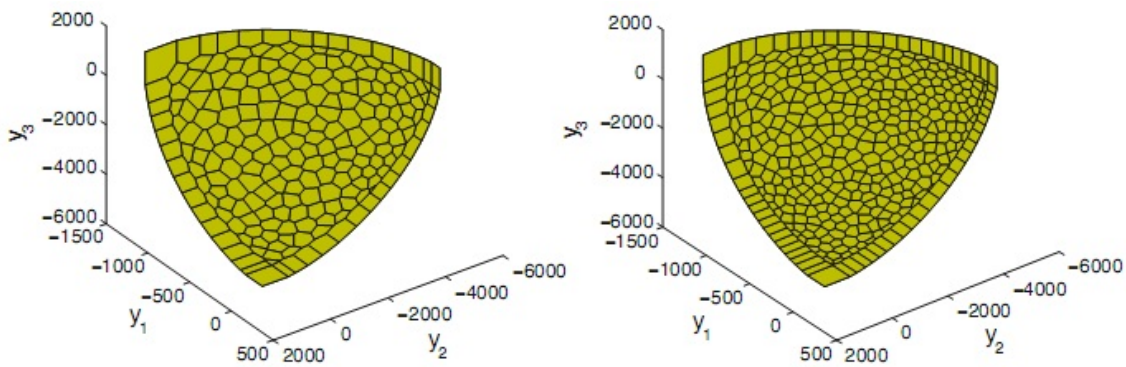
شکل ۸.۴:  $P^\circ$  با خطای تقریب ۵ و ۲

مثال ۴.۷.۴.

$$\begin{aligned} \min f_1(x) &= x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 10x_2 - 120x_3 \\ f_2(x) &= x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 80x_1 - 448x_2 + 80x_3 \\ f_3(x) &= x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 448x_1 + 80x_2 + 80x_3 \\ \text{s.t. } x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &\leq 100 \\ \circ &\leq x_1 \leq 10 \\ \circ &\leq x_2 \leq 10 \\ \circ &\leq x_3 \leq 10 \end{aligned}$$

شکل ۹.۴ نتیجه حاصل از حل مساله را به ترتیب با خطاهای تقریب ۱۰ و ۵ نشان می‌دهد.

خلاصه‌ای از اطلاعات برای مقایسه تعداد رئوس، تعداد صفحات برشی و زمان محاسبات با مقادیر مختلف  $\epsilon$  در جدول ۳.۴ آمده است.



شکل ۹.۴:  $P^\circ$  با خطای تقریب  $10^\circ$  و  $5^\circ$

مثال	$\epsilon$	زمان (ثانیه)	رئوس $P^\circ$	صفحات برش
۲.۷.۴	۰/۰۵	۳/۵۶۲	۱۱۰	۶۹
۳.۷.۴	۵	۴۱/۳۴۴	۴۷۹	۲۶۷
۴.۷.۴	۱۰	۲۵/۸۶۰	۳۹۱	۲۱۸
	۵	۳۷/۶۱۰	۷۴۸	۴۰۷

جدول ۳.۴: زمان اجرا و تعداد رئوس و صفحات برش برای سه مثال با مقادیر مختلف  $\epsilon$

## ۸.۴ ساخت ابرصفحه جداساز در حالت مشتق‌ناپذیری

در مورد حل مسائل بهینه‌سازی چندهدفه محدب، اگر توابع مورد بحث، یعنی توابع هدف یا توابع محدودیت محدب بوده اما مشتق‌پذیر نباشند، می‌توان همان الگوریتم ۴ را بکار برد زیرا همه نتایج آن برای این حالت درست باقی می‌ماند.

مطلب قابل ذکر چگونگی انجام گام  $k_4$  الگوریتم در وضعیت مشتق‌ناپذیری است.

در نگاه اول به این مساله، ممکن است به نظر آید که با جایگزینی هر گرادیان با یک زیر گرادیان  $\gamma$ ، می‌توان ابرصفحه‌ی جداساز بخش قبلی را برای حالت مشتق‌ناپذیری، به دست آورد. اما متأسفانه، این امر ساده نیست.

با آوردن دو مثال در ادامه بحث، به نمایش این مشکل می‌پردازیم.

مثال ۱.۸.۴. مساله بهینه‌سازی چندهدفه زیر را با محدودیت‌های مشتق‌پذیر و توابع هدف مشتق‌ناپذیر

$\gamma$  subgradient



در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} \min f_1(x) &= |x_1| + |x_2| \\ f_2(x) &= |x_1 - 2| + |x_2| \\ \text{s.t. } x_1 + x_2 - 100 &\leq 0 \end{aligned}$$

با حل مساله غیرخطی زیر، که در آن  $s = (0, 0) \notin \mathcal{P}$  و انتخاب نقطه درونی  $\hat{p} = (2, 2)$ ، به جواب بهینه  $\hat{x} = (1, 0)$  با  $f(\hat{x}) = (1, 1)$  دست می‌یابیم.

$$\max\{\rho : x_1 + x_2 - 100 \leq 0; \rho s + (1 - \rho)\hat{p} \geq f(x); 0 \leq \rho \leq 1; x \in \mathbb{R}^2\}.$$

طبق قضیه ۳.۵.۴،  $f(\hat{x}) = (1, 1)$  یک نقطه غیرتسلطی ضعیف است. مساله چندهدفه غیرخطی را در نقطه کارای  $\hat{x}$ ، به صورت خطی تبدیل می‌کنیم. در ادامه، زیرگرادیان‌های دو تابع هدف به صورت

$$\begin{aligned} \nabla f_1(\hat{x}) &= (1, \alpha)^T \quad ; -1 \leq \alpha \leq 1 \\ \nabla f_2(\hat{x}) &= (-1, \beta)^T \quad ; -1 \leq \beta \leq 1 \end{aligned}$$

است و  $\nabla g(\hat{x}) = (2, 0)$  و  $g(\hat{x}) = -99$  است. نتیجه  $MOLP(\hat{x})$ ، با جایگذاری در فرم

$$\begin{aligned} \min f(\hat{x}) + \nabla f(\hat{x})^T(x - \hat{x}) \\ \text{s.t. } g(\hat{x}) + \nabla g(\hat{x})^T(x - \hat{x}) \leq 0 \end{aligned}$$

به شکل زیر است.

$$\begin{aligned} \min \bar{f}_1(x) &= x_1 + \alpha x_2 \\ \bar{f}_2(x) &= -x_1 + \beta x_2 + 2 \\ \text{s.t. } 2x_1 - 101 &\leq 0 \end{aligned}$$

با در نظر گرفتن مساله برنامه‌ریزی خطی فوق، متوجه می‌شویم که نقطه  $(1, 1)$  با انتخاب  $(x_1, x_2)$  به شکل زیر مغلوب می‌گردد.

$$x_1 = \frac{2\alpha}{\alpha + \beta}, \quad x_2 = \frac{-2}{\alpha + \beta}$$

یعنی، با فرض  $\alpha + \beta \neq 0$  خواهیم داشت  $(1, 1) < \bar{f}(x) = (0, 0)$ ، که این مطلب با غیرتسلطی ضعیف بودن  $(1, 1)$  برای مساله اصلی در تناقض است.

حتی در وضعیت بدتر، این مثال نشان می‌دهد که برش نقطه  $s \notin \mathcal{P}$ ، در بعضی مواقع غیرممکن است.

اگر الگوریتم ۴.۲ را با نقطه درونی  $\hat{p} = (2, 2)$  و  $s(0, 0) \notin \mathcal{P}$  شروع کنیم، نقطه مرزی به دست آمده در گام  $k_2$ ،  $y = f(\hat{x}) = (1, 1)$  می‌گردد. با خطی‌سازی مساله در نقطه  $y = (1, 1)$  مانند آنچه که در بالا آمده است،  $s \in \mathcal{P}^L$  می‌گردد که نمی‌توان آن را جدا کرد.

در مثال دوم،  $MOP$  در نظر گرفته شده با توابع هدف مشتق‌پذیر و محدودیت مشتق‌ناپذیر است. دوباره نشان می‌دهیم که احتمال دارد مدل خطی‌سازی شده  $\mathcal{P}^L(x^k)$ ، شامل نقطه  $s^k$  باشد به طوری که پیدا کردن ابرصفحه جداکننده با کمک  $MOLP(x^k)$  ممکن نباشد.

#### مثال ۲.۸.۴

$$\begin{aligned} \min f_1(x) &= (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 1)^2 \\ f_2(x) &= (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \\ \text{s.t. } |x_1| + 2|x_2| - 2 &\leq 0 \end{aligned}$$

نقطه  $s = (6 - 4\sqrt{2}, 2) \notin \mathcal{P}$  و  $\hat{p} = (1, 2) \in \text{int } \mathcal{P}$  را در نظر می‌گیریم. با انجام گام  $k_2$  الگوریتم، یعنی حل

$$\max\{\rho : |x_1| + 2|x_2| - 2 \leq 0; \rho s + (1 - \rho)\hat{p} \geq f(x); 0 \leq \rho \leq 1; x \in \mathbb{R}^2\}.$$

به نقطه کارای  $\hat{x} = (2, 0)$  رسیده که نقطه منحصر بفرد مرزی  $f(\hat{x}) = y = (2, 2)$  از  $\mathcal{P}$  را که روی پاره‌خط واصل  $s$  و  $\hat{p}$  است، تولید می‌کند. با استفاده از گرادیان‌های توابع هدف و زیرگرادیان برای تابع محدودیت، به خطی‌سازی  $MOP$  در  $\hat{x}$  پرداخته که منجر به تولید  $MOLP(\hat{x})$  به فرم زیر می‌گردد.

$$\begin{aligned} \min \bar{f}_1(x) &= -2x_1 - 2x_2 + 6 \\ \bar{f}_2(x) &= 2x_1 - 2x_2 - 2 \\ \text{s.t. } x_1 + 2\alpha x_2 - 2 &\leq 0 \end{aligned}$$

که  $0 \leq \alpha \leq 1$  است.

نقطه  $\tilde{x} = (\sqrt{2} + 1, \sqrt{2} - 1)$  را در نظر بگیرید که برای  $MOLP(\hat{x})$ ، اگر  $\alpha \leq -\frac{1}{2}$  باشد، نقطه‌ای شدنی است اما

$$\bar{f}(\tilde{x}) = (6 - 4\sqrt{2}, 2) = s$$

از اینرو  $s \in \mathcal{P}^L(\hat{x})$  است. در نتیجه نمی‌تواند ابرصفحه جداساز  $\mathcal{P}^L(\hat{x})$  از  $s$  موجود باشد. این مطلب بدان معناست که، هرگاه  $\alpha \leq -\frac{1}{2}$ ، خطی‌ساز  $MOLP(\hat{x})$  برای انجام گام  $k_4$  الگوریتم بی‌فایده است.

دو مثال فوق نشان می‌دهد که نمی‌توان تضمین کرد که برای هر مساله خطی‌سازی شده، ابرصفحه جداساز بتوان فراهم کرد. با این حال، مشابه جستجوی بخش قبل برای مسائلی که با توابع مشتق‌ناپذیر سر و کار دارند، به شکل ذیل پیش می‌رویم.

فرض کنید  $\nabla g(x)$  و  $\nabla f(x)$  زیرگرادیان‌هایی در نقطه  $x^k \in \mathbb{R}^n$ ، به ترتیب برای  $g$  و  $f$  باشند. با استفاده از این زیرگرادیان‌ها  $MOP$  را در  $x^k$  به صورت خطی درمی‌آوریم و  $MOLP$  زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} MOLP(x^k) \quad \min f(\hat{x}) + \nabla f(\hat{x})^T(x - \hat{x}) \\ \text{s.t. } g(\hat{x}) + \nabla g(\hat{x})^T(x - \hat{x}) &\leq 0. \end{aligned}$$

با استفاده از همان نمادهای بکار رفته در رابطه (۶.۴) برنامه‌ریزی‌های اولیه و دوگان را به صورت زیر در نظر می‌گیریم، با این تفاوت که به جای  $y^k$  نقطه  $s^k$  را که باید برش دهیم، می‌گذاریم.

$$\begin{aligned} LP(x^k, s^k) & \min\{z : A_{x^k}x \geq b_{x^k}, C_{x^k}x - ez \leq s^k - f_{x^k}\}, \\ LD(x^k, s^k) & \max\{b_{x^k}^T u - (s^k - f_{x^k})^T \lambda : A_{x^k}^T u - C_{x^k}^T \lambda = 0\}. \end{aligned}$$

با به کارگیری گزاره ۲.۴.۴ با  $\hat{y} = s^k$  نتیجه زیر حاصل می‌گردد.

نتیجه ۳.۸.۴. فرض که  $(u^*, \lambda^*)$  جوابی بهینه از  $LD(x^k, s^k)$  و  $(x^*, z^*)$  جواب بهینه از  $LP(x^k, s^k)$  باشد. آنگاه:

الف. برای هر  $y \in \mathcal{P}^L(x^k)$  رابطه  $b_{x^k}^T u^* \geq (y - f_{x^k})^T \lambda^* \geq b_{x^k}^T u^*$  برقرار است.

ب.  $(y - f_{x^k})^T \lambda^* = b_{x^k}^T u^*$  برای  $y = Cx' + f_{x^k}$  که  $x'$  جواب بهینه از  $LP(x^k, s^k)$  است.

ج.  $(s^k - f_{x^k})^T \lambda^* \geq b_{x^k}^T u^*$  اگر و تنها اگر  $z^* > 0$  و تنها اگر  $s^k \notin \mathcal{P}^L(x^k)$ .

یعنی ابرصفحه  $\{y \in \mathbb{R}^p : (y - f_{x^k})^T \lambda^* = b_{x^k}^T u^*\}$ ،  $H :=$  ابرصفحه حمایتی از  $\mathcal{P}$  در  $Cx^* + f_{x^k}$  است. این ابرصفحه  $s^k$  را از  $\mathcal{P}^L(x^k)$  جدا می‌سازد اگر و تنها اگر مقدار هدف  $LD(x^k, s^k)$  (یا معادل آن،  $LP(x^k, s^k)$ ) بزرگتر از صفر باشد.

برهان. اثبات دو مورد اول، به طور مستقیم از گزاره ۲.۴.۴ نتیجه می‌شود.

برای قسمت سوم، یادآوری می‌کنیم که مقدار هدف  $LP(x^k, s^k)$  بزرگتر از صفر است اگر و تنها اگر  $s^k \notin \mathcal{P}^L(x^k)$ . □

این روش از یک طرف به ما امکان امتحان موثر جهت جدا شدن و یا نشدن  $s^k$  را می‌دهد، یعنی با چک کردن مقدار هدف  $LD(x^k, s^k)$  که بزرگتر از صفر است و یا کوچکتر از صفر. از طرف دیگر، از آنجایی که تابع هدف  $LD(x^k, s^k)$ ، ماکزیم‌سازی  $b_{x^k}^T u^* - (s^k - f_{x^k})^T \lambda^*$  است، در نهایت اگر مساله خطی شده، ابرصفحه جدا کننده داشته باشد، به یک ابرصفحه جداساز برای مساله  $MOP$  محدب می‌رسیم.

قابل توجه که اگر با حل دوگان  $LD(x^k, s^k)$  ابرصفحه حمایتی یافت شود، آن ابرصفحه، ابرصفحه حمایتی برای  $\mathcal{P}^L(x^k)$  است (به طوری که در بعضی از دیدگاه‌ها، بهترین ابرصفحه مورد انتظار است)، اما نیازی به حمایتی بودن آن برای  $\mathcal{P}$  نیست. به طور خلاصه، گام  $k_4$  را در الگوریتم ۴، برای حالت مشتق‌ناپذیری پیشنهاد می‌کنیم.

• گام  $k_4$  برای توابع مشتق‌ناپذیر:

الف. زیرگرادیان‌های  $\nabla f(x^k)$  و  $\nabla g(x^k)$  را تعیین کنید.

ب.  $LD(x^k, s^k)$  را حل کرده و فرض کنید که  $(u^k, \lambda^k)$  جواب بهینه از آن باشد.

ج. اگر مقدار هدف  $LD(x^k, s^k)$  بزرگتر از صفر باشد آنگاه قرار دهید:

$$S^{k+1} = S^k \cap \{y \in \mathbb{R}^p : y^T \lambda^k \geq b^T u^k\}.$$

د. در غیر این صورت، زیرگرادیان‌های جدید  $\nabla f(x^k)$  و  $\nabla g(x^k)$  را انتخاب کرده و به گام  $k_۴$  قسمت (ب) برگردید یا راس دیگر  $s^k$  را انتخاب کرده و به گام  $k_۲$  برگردید.

از اینرو الگوریتم ۴ را نیز، برای توابع مشتق‌ناپذیر با مشخصات گام  $k_۴$  فوق، می‌توان اجرا کرد. البته باید در هر گام چک کرد که آیا ابرصفحه  $H$  برای برش  $s^k$  یافت می‌شود یا خیر. اگر  $s^k$  جدا شود که مانند حالت مشتق‌پذیری عمل می‌کنیم. در غیر اینصورت، زیرگرادیان‌ها یا راس  $s^k$  را تغییر داده و ادامه می‌دهیم.

به این ترتیب معرفی الگوریتم تقریبی برای حل مسائل غیرخطی چندهدفه محدب با اجرای گام‌های الگوریتم در دو حالت مشتق‌پذیری و مشتق‌ناپذیری مساله، کامل می‌شود. در فصل بعد با ارائه یکی از کاربردهای الگوریتم تقریبی در زمینه پزشکی به اهمیت این الگوریتم‌ها اشاره می‌کنیم.



# فصل ۵

## کاربردی از الگوریتم‌های تقریبی بهینه‌سازی چندهدفه در پرتودرمانی

### ۱.۵ مقدمه

در این فصل، با آوردن کاربردی از الگوریتم‌های تقریبی در طرح درمان پرتودرمانی<sup>۱</sup> به اهمیت این الگوریتم‌ها برای حل مسائلی که یافتن جواب دقیق آنها امکان‌پذیر نیست، اشاره می‌کنیم. قبل از حل مساله بهینه‌سازی چندهدفه‌ی مطلوب، با استفاده از الگوریتم اصلی بنسون و الگوریتم تقریبی و مقایسه نتایج اجرایی آن، با مقدمه‌ای وارد موضوع پرتودرمانی و آشنایی با مسائل موجود در آن می‌شویم.

از آنجا که پرتو درمانی، یکی از روش‌های عمده درمان سرطان است و حدود ۶۰ درصد از افراد مبتلا به سرطان از پرتو درمانی به عنوان تنها شکل درمان یا ترکیب آن با جراحی یا شیمی درمانی استفاده می‌کنند، پرداختن به این موضوع از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. عمده مطالب این فصل از مراجع [۴۴، ۴۵] می‌باشد.

### ۲.۵ آشنایی با پرتو درمانی

پرتو درمانی از ذرات پرانرژی یا امواج (اشعه)، مانند اشعه  $X$  یا اشعه گاما، برای از بین بردن سلول‌های سرطانی و یا توقف رشد آنها استفاده می‌کند. اشعه با آسیب رساندن به مواد ژنتیکی (DNA) و یا اختلال در رشد و تقسیم سلول‌ها، سلول‌های ناحیه تحت درمان (حجم هدف<sup>۲</sup>) را زخمی و یا از بین می‌برد. اگرچه اشعه، هم به سلول‌های سرطانی و هم به سلول‌های نرمال آسیب می‌رساند، اما بیشتر سلول‌های نرمالی که در معرض مقدار متوسطی از تابش قرار می‌گیرند، می‌توانند از اثرات ناشی از اشعه، به طور

<sup>۱</sup> Radiation therapy

<sup>۲</sup> the target volume

کامل بهبود یابند. هدف پرتو درمانی، تا حد امکان صدمه زدن به سلول‌های سرطانی و محدود کردن آسیب به بافت سالم اطراف می‌باشد.

پرتو درمانی به دو شیوه تابش پرتو از داخل یا خارج صورت می‌گیرد. پرتو درمانی داخلی شکلی از درمان است که یک منبع تشعشع در داخل بدن بیمار قرار دارد. زمانی از این روش استفاده می‌شود که نیاز به انتقال دوز بالایی از اشعه، به ناحیه‌ای کوچک باشد. در حالی که پرتو درمانی خارجی از یک شتاب‌دهنده خطی، به منظور تابش انرژی بالا به محل تومور بیمار از جهات مختلف، استفاده می‌کند. متداولترین شکل استفاده از پرتو درمانی، پرتو درمانی خارجی می‌باشد.

در تابش پرتو درمانی خارجی، موضوع اصلی پژوهش چگونه یافتن درجه بالایی از تطابق است، یعنی، محدود کردن ناحیه دوز بالا به حجم تومور می‌باشد.

در ۲۵ سال گذشته، پیشرفت‌های عمده‌ای با توسعه پرتو درمانی منسجم سه بعدی<sup>۳</sup> (۳DCRT) به دست آمده است، به خصوص پرتو درمانی با شدت تعدیل شده<sup>۴</sup> (IMRT) پیشرفت زیادی داشته است.

پرتو درمانی منسجم سه بعدی برای ایجاد تصویر سه بعدی از تومور، از ماشین‌آلات تصویربرداری (مانند CT) و فن‌آوری کامپیوتری استفاده می‌کند به طوری که هر باریکه پرتو (بیم<sup>۵</sup>)، دقیقاً در منحنی منطقه درمان مورد نظر تابیده می‌شود.

تششعات در سراسر میدان شدت یکنواخت دارند یا در صورت لزوم با دستگاه‌های اصلاح شدت، تغییرات لازم اعمال می‌شود.

چون با این روش بسیاری از بافت‌های سالم اطراف تومور در امان می‌مانند، می‌توان دوز بالاتری از اشعه را برای درمان سرطان استفاده کرد.

پرتو درمانی با شدت تعدیل شده (IMRT)، شکل پیشرفته‌ای از ۳DCRT است. در IMRT، انتقال اشعه از طریق باریکه‌های پرتو (بیم‌ها) به بدن بیمار صورت می‌گیرد که شدت غیریکنواخت دارند، که آنها را بیم‌های با شدت تعدیل شده<sup>۶</sup> (IMBs) نامند.

این IMBs اجازه می‌دهند که محدوده بیم‌ها به محدوده‌های کوچکتر به نام بیکسل<sup>۷</sup> تقسیم شوند که به هر کدام از آنها می‌توان شدت انتقال خاصی، اختصاص داد. این روش موجب تنظیم دقیق تشعشع دوزها به بافت در منطقه مورد نظر می‌گردد. در نتیجه می‌توان تشعشع بیشتر به تومور و تشعشع کمتری به بافت نرمال اطرافش انتقال داد.

<sup>۳</sup> three-dimensional conformal radiation therapy

<sup>۴</sup> intensity modulated radiation therapy

<sup>۵</sup> beam

<sup>۶</sup> intensity modulated beams

<sup>۷</sup> bixel

## ۳.۵ فرایند درمان با کمک IMRT

روند درمان یک بیمار با IMRT شامل فرایندهای تصویربرداری، طراحی درمان، تایید طراحی و درمان است. در طی این مراحل یک تیم درمانی شامل یک متخصص سرطان‌شناسی<sup>۸</sup>، فیزیکیان تابش<sup>۹</sup> و رادیوتراپیست<sup>۱۰</sup> (پرتو درمانگر) درگیر خواهند شد.

### • تصویربرداری

IMRT با روند تصویربرداری آغاز می‌شود. ابتدا بیمار بی‌حرکت است و گاهی اوقات ماسک می‌زند. ممکن است نوار یا دستگاه‌های دیگر برای حفظ حالت بیمار استفاده شود. سپس بیمار در وضعیتی که برای درمان بعدی نیز مورد استفاده قرار می‌گیرد، با استفاده از دستگاه CT با سرعت بالای مخصوص اسکن می‌شود.

در صورت نیاز تصویربرداری‌های دیگری مانند MRI (اسکن تشدید مغناطیسی) یا PET (اسکن‌های توموگرافی با انتشار پوزیترون) به همراه تصاویر CT مورد استفاده قرار می‌گیرد. سپس متخصص سرطان‌شناسی، حجم تومور را تعیین کرده و طراحی حجم هدف (PTV) را انجام می‌دهد. حجم هدف، محدوده‌ای از حجم تومور شامل سلول‌های تومور قابل مشاهده در سطح میکروسکوپ و اندام‌های در معرض خطر<sup>۱۱</sup> (OARs) در این تصاویر می‌باشند.

### • طراحی درمان

وقتی محل و حجم تومور مشخص شد، متخصص سرطان‌شناسی و رادیوتراپیست (برنامه‌ریز درمان) با هم برای تولید طراحی که بیمار را به طور دقیق درمان کند، کار می‌کنند. متخصص سرطان، نسخه مورد نیازی که شامل مقدار اشعه مورد انتقال به حجم هدف و میزان اشعه قابل تحمل برای بافت نرمال و اندام‌های در معرض خطر را تعیین می‌کند.

سپس یک طرح درمان به کمک سیستم‌های کامپیوتری طراحی درمان، توسعه می‌یابد. در بخش بعد به دو روش طراحی درمان اشاره می‌شود. در طرح داده شده تعداد، اندازه و شکل بیم‌ها و نیز جهت و منحنی (نمودار) شدت تابش برای هر بیم، تعیین می‌گردد.

طرح به کمک منحنی‌های پرتو برای هر برش به نام منحنی‌های هم‌دوز و نیز به کمک نمودار تجمعی دوز-حجم (DVH) مورد بررسی قرار می‌گیرد. نمودار دوز-حجم، طراحی از دوز و یا درصد دوز (نسبت به دوز تجویزی تومور)، در مقابل درصد حجم است.

هدف یک منحنی تجمعی دوز-حجم ایده‌آل برای حجم طراحی شده، آن است که صد درصد دوز به این حجم برسد که نمایانگر درمان کامل با دوز مورد نظر بدون کم و بیش می‌باشد. در عوض

<sup>۸</sup> radiation oncologist

<sup>۹</sup> radiation physicist

<sup>۱۰</sup> radiation therapist

<sup>۱۱</sup> organs at risk



منحنی برای قسمت‌های بحرانی بدن به گونه‌ایست که فوراً به سمت صفر کاهش می‌یابد، یعنی این ساختارها، تشعشعی دریافت نمی‌کنند.

#### • تایید طرح

متخصص سرطان‌شناسی و فیزیکی‌دان تابش با هم تبادل نظری بر روی برنامه، بررسی دقیق نسبت دوز به تومور و اندام اطراف و حصول اطمینان از این که تمام ضروریات مورد نیاز در نظر گرفته شده باشد، انجام می‌دهند. سپس درمان با استفاده از یک شبیه‌ساز مخصوص درمان، شبیه‌سازی می‌شود. از اهداف این قسمت، تایید پارامترهای فیزیکی و آشنایی بیمار با فرآیند درمان است.

#### • درمان

در ادامه، درمان واقعی توسط یک رادیوتراپیست انجام می‌شود. اشعه به وسیله یک شتاب‌دهنده خطی با یک محدودکننده چندلایه‌ای که در سر دستگاه درمانی قرار گرفته، انتقال می‌یابد. گنتری شتاب‌دهنده خطی، می‌تواند با چرخیدن در اطراف بیمار، باریکه‌های پرتو را از جهات مختلف به بیمار برساند. محدودکننده‌های چندلایه‌ای، که شامل ورقه‌های فلزی متعددی است که در سراسر کانال‌ها قابل حرکتند، به باریکه‌های پرتو (بیمه‌ها) شکل داده و شدت بیمه‌ها را نیز تعدیل می‌کند.



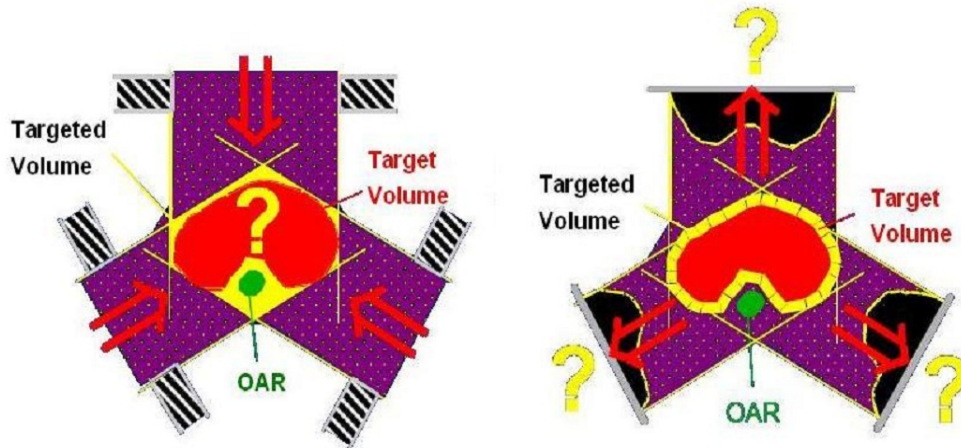
شکل ۱۰۵: شکل راست و چپ به ترتیب: یک نمای بسته از محدودکننده چندلایه‌ای و یک شتاب‌دهنده خطی.

## طراحی درمان

دو روش طراحی درمان برای پرتودرمانی خارجی به نام طراحی به جلو و طراحی معکوس وجود دارد. در IMRT طراحی معکوس استفاده می‌شود. در طراحی به سمت جلو، طراح درمان (برنامه‌ریز) همه پارامترهای مورد نیاز درمان مانند شدت، جهت و تعداد بیمه‌ها را با نرم‌افزار کامپیوتر وارد کرده و یک توزیع دوز محاسبه می‌شود.

اگر دوز غیرقابل قبول باشد، این عمل به روش آزمون و خطا تکرار می‌گردد تا یک توزیع دوز رضایت‌بخش به دست آید. بدیهی است که تضمینی جهت یافتن بهترین جواب وجود ندارد. پس این روش زمانبر است و برای شرایط آناتومی‌کال بحرانی رضایت‌بخش نیست.

طراحی درمان معکوس، ابتدا توسط برآهم<sup>۱۲</sup> در اوایل سال ۱۹۸۰ [۴۸] مورد بحث قرار گرفت. در این روش به جای آن که طراح سعی کند تا با استفاده از شکل‌بندی‌های متفاوت بیم‌ها به ایده مناسب برای توزیع دوز برسد، عمل عکس این روش را برای طراحی معکوس انجام می‌دهد. هسته سیستم طراحی معکوس یک مدل بهینه‌سازی است.



شکل ۲.۵: در طرح به جلو (چپ)، پارامترهای درمان قبل از محاسبه دوز اختصاص داده می‌شوند. در طرح معکوس (راست)، یک توزیع دوز مطلوب تجویز می‌شود و پارامترهای مناسب برای درمان مجموعه بالا پیدا می‌شود.

در حقیقت اولین مدل بهینه‌سازی برای پرتودرمانی توسط برآهم و همکارانش [۱] صورت گرفت. طراحی پرتودرمانی، یک مساله بهینه‌سازی در نظر گرفته می‌شود که هدف‌های درمان به عنوان توابع هدف و یا به عنوان محدودیت‌ها فرمول‌بندی شده و متغیرها همان، پارامترهای طراحی درمان هستند. دوز تجویزی به عنوان یک محرک در مدل بهینه‌سازی برای یافتن جواب، در محدودیت‌ها صدق می‌کند. این روش از اتلاف زمان آزمون و خطا جهت یافتن پارامترهای مناسب بیم، جلوگیری می‌کند. در هر صورت با توجه به بعد بزرگ مساله از لحاظ محاسبات ریاضی، مساله سخت‌تر است و نیاز به الگوریتم‌های پیچیده محاسباتی دارد.

## ۴.۵ مسائل بهینه‌سازی در IMRT

سه مساله بهینه‌سازی اصلی در IMRT را مرور می‌کنیم. در طراحی IMRT نیاز است که مجموعه‌ای از پارامترها مانند تعداد، جهت پرتو و شدت هر بیم و غیره تعیین شود تا دوز مشخصی از اشعه به بیمار انتقال یابد. این عمل توسط طراح درمان به کمک سیستم طراحی معکوس با یک ماشین بهینه‌سازی انجام می‌شود.

<sup>۱۲</sup> Brahme

برخی از پارامترها توسط طراح انتخاب شده و مابقی با طراحی معکوس محاسبه می‌شود. بهینه‌سازی کامپیوتری بالقوه می‌تواند روند طراحی خسته‌کننده را آسانتر کند و منجر به ارائه بهترین طرح ممکن گردد. تعیین پارامترها، اهمیت حیاتی جهت کیفیت طرح تابش دارد. این عمل می‌تواند با حل سه مساله بهینه‌سازی، به طور همزمان صورت گیرد. بهینه‌سازی زاویه باریکه پرتو<sup>۱۳</sup> (BAO)، بهینه‌سازی شدت باریکه پرتو<sup>۱۴</sup> (FMO) و مساله قابلیت اجرا (شکل ۳.۵).

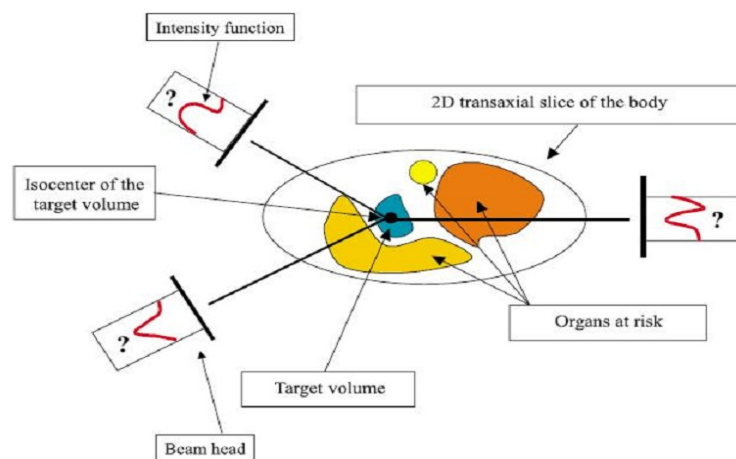
۱. بهینه‌سازی زاویای بیم (باریکه پرتو).

IMRT شامل انتقال پرتوهایی با شدت‌های متفاوت در جهت‌های مختلف است. جهت‌های انتخاب شده برای انتقال پرتو، بر سطوح دوزهای اشعه روی تومور و بر روی بافت‌های سالم اطراف تومور اثر می‌گذارد.

برای انتخاب بهینه جهت‌ها، نیاز به توسعه توابعی برای اندازه‌گیری کیفیت ترکیب معین جهت‌ها می‌باشد. بنابراین برای یافتن ترکیب خوبی از زوایای پرتو، از بهینه‌سازی استفاده می‌شود. این مساله BAO یا مساله هندسی نامیده می‌شود.

۲. بهینه‌سازی شدت بیم.

برای روند طراحی درمان، سطح دوز مطلوبی می‌تواند تعیین گردد. با فرض معلوم بودن تعداد بیم‌ها و جهت هر بیم، هدف مساله FMO (یا بهینه‌سازی شدت پرتو)، دستیابی به شدت‌های مناسب پرتو بر طبق توابع هدف، جهت انتقال بهترین توزیع دوز می‌باشد.



شکل ۳.۵: مشکلات طرح درمانی تابش: کجا گانتری متوقف می‌شود؟ به چه اندازه اشعه باید منتقل شود؟ چگونه اشعه تعدیل می‌شود؟

۳. بهینه‌سازی قابلیت اجرا.

<sup>۱۳</sup> beam angle optimization

<sup>۱۴</sup> fluence map optimization

هنگامی که نقشه‌های شدت مشخص شد، بایستی آنها را به دنباله‌های لایه‌ای MLC تبدیل کند تا به طور تقریبی آنها را به اجرا درآورند. IMBs (نقشه‌های شدت)، اندازه میدان‌هایی با محدودیت‌ساز چند لایه‌ای ساکن ایجاد می‌کنند که به این روش میدان-ساکن-چندگانه گویند. اندازه میدان‌های چندقطعه‌ای برای جهت‌گیری منتخب گانتری، تحت کنترل کامپیوتری طراحی می‌شود.

تابش فقط زمانی روشن است که صفحات MLC در موقعیت مورد نظر متوقف شده باشد. این روش گام-و-شوت نام دارد. در روش دیگر صفحات ممکن است با تابش‌دهی تغییر شکل دهند که به روش محدودساز چندلایه‌ای پویا معروف است.

به طور معمول برای یک موقعیت نصب شده، شکل باز به واسطه یک جفت صفحه مخالف MLC که مقابل هم قرار گرفته‌اند، ایجاد می‌شود. در این صورت شکل و حجم بیم باز، تحت کنترل کامپیوتری با پرتو تابش روشن جهت تولید شدت مورد نظر می‌تواند تغییر کند، که به شیوه پنجره باز‌کشویی معروف است.

زمان بیم-روشن<sup>۱۵</sup> زمانی است که تابش‌دهی صورت می‌گیرد، در حالی که زمان درمان، زمانی است که درمان با اشعه صورت می‌گیرد، یعنی زمان بیم-روشن به انضمام زمان تنظیم MLC برای هر پرتو.

هدف از مساله قابلیت اجرا، یافتن دنباله‌ای از تنظیمات محدودساز چندلایه‌ای برای انتقال پرتو است به طوری که زمان درمان، تا حد امکان به اندازه مدت زمان بیم-روشن کاهش یابد.

سه مساله فوق به یکدیگر مرتبط‌اند، به طوری که وارد شدن به یک مساله با خروج از مساله دیگر همراه است و جواب هر مساله روی جواب مابقی تاثیر می‌گذارد. پس باید همزمان بهینه شوند.

متأسفانه پیچیدگی این روش جامع بیش از حد زیاد است و فقط برخی از تحقیقات در زمینه ترکیب مسائل اول و دوم یا دو مساله آخر با هم انجام شده است.

به طور خلاصه، نمایش کامل بهینه‌سازی در IMRT بسیار گسترده است. در ادامه بحث، روی مساله بهینه‌سازی شدت باریکه پرتو تمرکز می‌کنیم. یعنی با فرض داشتن تعداد بیم‌ها و جهت هر کدام از آنها، شدت هر پرتو را بهینه می‌کنیم.

از آنجایی که سه هدف انتقال دوز یکنواخت به اندازه کافی بالا به تومور و دوز کم به OARs و دوز کم به بافت نرمال، خلاف یکدیگرند، نمی‌توان در یک زمان آنها را برآورده کرد.

این عمل ذاتاً مساله بهینه‌سازی پرتو را چندهدفه می‌سازد، یعنی جواب منحصر بفرد بهین وجود نداشته و در عوض جواب‌های بهینه پارتو زیادی وجود دارند.

از آنجایی که محاسبه دوز و انتقال آن به طور دقیق ممکن نیست (یا ابهام وجود دارد)، حل تقریبی مساله با کسر کوچکی Gy (گری<sup>۱۶</sup>)، واحد اندازه‌گیری دوز است) به عنوان خطای تقریب قابل قبول است.

<sup>۱۵</sup> beam-on

<sup>۱۶</sup> Gray

## ۵.۵ مدل‌های بهینه‌سازی برای مساله بهینه‌سازی شدت پرتو

چند سالی است که مساله بهینه‌سازی شدت پرتو به طور گسترده‌ای مورد مطالعه قرار گرفته است. بررسی این موضوع از دیدگاه ریاضی توسط شپارد<sup>۱۷</sup> و همکارانش [۴۶] انجام شده است. دو عامل موثر در کارایی بهینه‌سازی و نتیجه آن، فرم مدل‌بندی و استراتژی بهینه‌سازی است.

در طراحی درمان معکوس IMRT، اهداف بالینی با کمک روابط ریاضی به فرم یک تابع هدف درمی‌آیند. تابع هدف، کیفیت طرح درمان را اندازه‌گیری می‌کند لذا انتخاب تابع هدف مناسب برای مساله بهینه‌سازی طرح درمان از اهمیت بالایی برخوردار است. برای مساله بهینه‌سازی شدت پرتو در IMRT، تابع هدف تابعی از عملکرد شدت پرتوها است.

طبق تازه‌ترین تحقیقات، تقسیم‌بندی مدل‌های ریاضی بهینه‌سازی شدت پرتو به صورت مدل‌های برنامه‌ریزی خطی، غیرخطی، مخلوط عدد صحیح و چندهدفه است. در ادامه به مدل‌های چندهدفه اشاره خواهد شد.

### محاسبه و تجویز دوز

مقدار اشعه جذب شده توسط بافت‌ها را دوز تابش نامند. دوز با با واحدی به نام گری (Gy) اندازه‌گیری می‌شود که معادل انرژی جذب شده در واحد جرم است، یعنی  $1 \text{ Gy} = 1 \text{ J/kg}$ .

برای ارزیابی توزیع دوز در بدن بیمار، نیاز به شبکه‌بندی کردن بدن بیمار و باریک‌های پرتو داریم. حجم ۳D بدن بیمار به وکسل‌های<sup>۱۸</sup> مکعبی کوچک تقسیم می‌شود (عناصر حجم). هر وکسل با یک دوز-نقطه نشان داده می‌شود که دوز اختصاص یافته<sup>۱۹</sup> به آن وکسل محاسبه می‌گردد و فرض بر آن است حجم دوز در سراسر وکسل، یکنواخت است. همچنین، هر وکسل به یک نمونه بافت اختصاص می‌یابد. T را بیان‌کننده تومور، C را بیانگر بافت‌های بحرانی (K بافت بحرانی یا اندام حیاتی با  $C_1, \dots, C_K$  نشان داده می‌شود) و N را به عنوان بافت نرمال در نظر می‌گیریم. سپس برخی از وکسل‌ها، به عنوان قسمتی از تومور، برخی از آنها به عنوان قسمتی از بافت بحرانی و برخی به عنوان قسمتی از بافت نرمال علامت‌گذاری می‌شوند. تعداد کل وکسل‌ها m است که  $m = m_T + m_C + m_N$  و

$$m_C = m_{C_1} + \dots + m_{C_K}$$

علاوه بر این، هر باریک پرتو در زاویه گانتری مفروضه به پیکسل‌های کوچک (عناصر بیم) تقسیم‌بندی می‌شود. تعداد وکسل‌ها ممکن است ده‌ها یا صدها هزار و تعداد بیکسل‌ها می‌تواند تا حد ۱۰۰۰ در هر بیم باشد. فرض کنید که n تعداد بیکسل‌ها بوده و تعداد و جهت بیم‌ها معلوم باشد. پخش دوز، با یک بردار دوز  $m$ -بعدی توصیف شده که به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$d = Ax$$

<sup>۱۷</sup> Shepard

<sup>۱۸</sup> voxels

<sup>۱۹</sup> deposited dose

که در آن  $d \in \mathbb{R}^m$  بردار دوز و عناصر  $d_i$  متناظر با دوز اختصاص یافته به وکسل  $i$  است. بردار  $x \in \mathbb{R}^n$  شدت بیم (باریکه پرتو) را توصیف می‌کند و  $x_j$  بیانگر شدت در بیکسل  $j$  است.  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  ماتریس تخصیص دوز نام دارد. عناصر  $a_{ij}$  از  $A$  بیانگر دوز اختصاص یافته به وکسل  $i$  با توجه به واحد شدت در بیکسل  $j$  است.

با فرض داشتن ویژگی‌های بدن بیمار و منبع بیم و جهت‌یابی،  $a_{ij}$  با مدل‌های ریاضی از رفتار فیزیکی اشعه هنگام حرکت آن در بدن، محاسبه می‌شود [۳۶]. در ادامه، فرض می‌کنیم که  $A$  داده شده باشد.  $A$  را می‌توان به صورت زیرماتریس‌های  $A_T \in \mathbb{R}^{m_T \times n}$  و  $A_C \in \mathbb{R}^{m_C \times n}$  و  $A_N \in \mathbb{R}^{m_N \times n}$ ، برطبق سطرهای متناظر با وکسل‌های تومور، اندام‌های بحرانی و بافت نرمال مرتب کرد. اگر  $a(i)$ ،  $i$ -امین سطر بردار ماتریس دوز سپرده  $A$  باشد، در این صورت دوز سپرده در وکسل  $i$  به صورت زیر است.

$$d_i = a(i)x.$$

برای طراحی درمان، متخصص سرطان تابش نیاز به تعیین تجویز دوز برای تومور، هر اندام در معرض خطر و بافت نرمال دارد، زیرا بافت‌های مختلف، مقادیر متفاوتی از اشعه را می‌توانند تحمل کنند.

تجویز دوز به طور طبیعی شامل یک درخواست حجم دوز برای تومور ( $G_T \in \mathbb{R}$ ) و حجم دوزی که ما ترجیح می‌دهیم از حد معینی برای هر بافت در معرض خطر تجاوز نکند ( $G_{C_k} \in \mathbb{R}$ ) و برای بافت نرمال ( $G_N \in \mathbb{R}$ ) است.

تجویز دوز برای ساخت  $TG \in \mathbb{R}^{m_T}$  و  $TLB \in \mathbb{R}^{m_T}$  و  $TUB \in \mathbb{R}^{m_T}$  و  $CUB \in \mathbb{R}^{m_C}$  و  $NUB \in \mathbb{R}^{m_N}$  که نشان دهنده دوز هدف به وکسل‌های تومور، کران‌های پایین دوز برای وکسل‌های تومور، کران‌های بالای دوز برای وکسل‌های بحرانی و کران‌های بالای دوز برای وکسل‌های بافت نرمال می‌باشند، به کار می‌رود.  $CUB$  می‌تواند با توجه به وکسل‌های متناظر با بافت‌های مختلف بحرانی به  $C_1UB, \dots, C_KUB$  تقسیم شود.

بیشتر سیستم‌های مدرن طراحی معکوس IMRT اجازه تعیین محدودیت حجم دوز را دارند. به طور نمونه، یک محدودیت دوز-حجم توضیح می‌دهد که فقط کسر معینی از یک ساختار می‌تواند حجم‌های دوز بالاتر از کران بالا و یا پایین‌تر از کران پایین را داشته باشد.

## مساله امکان‌پذیری (شدنی بودن) و الگوریتم‌هایی در IMRT

یک حالت خاص از مساله بهینه‌سازی شدت پرتو آن است که تابع هدف موجود نباشد در این صورت مساله بهینه‌سازی مساله امکان‌پذیر می‌گردد. فرض می‌شود که هر جواب شدنی قابل قبول است و همه‌ی جواب‌های شدنی دارای کیفیت کم و بیش برابرند.

برای دستیابی به کنترل تومور و جلوگیری از عوارض روی بافت نرمال، برخی محدودیت‌های خطی مانند کران‌های بالا و پایین برای حجم هدف و کران‌های بالا برای اندام‌های حیاتی اعمال می‌شود.

فرمول ریاضی این محدودیت به صورت زیر است.

$$TLB \leq A_T x \leq TUB$$

$$A_C x \leq CUB$$

$$0 \leq x.$$

الگوریتم‌های جستجوی شدنی بودن به دنبال مجموعه‌ای از شدت‌های پرتو است که همه‌ی محدودیت‌های دوز بالا که توسط طراح تعیین شده را برآورده می‌کند. الگوریتم‌های تصویر برای حل مسائل شدنی بودن محدب زیاد مورد استفاده قرار می‌گیرند [۴۹].

روش عمل آزادسازی سطر از آگمون<sup>۲۰</sup> و متزکین<sup>۲۱</sup> و اسچوانبرگ<sup>۲۲</sup>، نوعی از روش پرتوافکنی متوالی است که برای حل مساله امکان شدت پرتو توسط سنسور<sup>۲۳</sup> و همکاران [۵] پیشنهاد شده است. آنها الگوریتم تصویر همزمان سیمینو<sup>۲۴</sup> را برای حل مساله امکانپذیر خطی پیشنهاد می‌دهند. ماهیت این روش طرح کردن تکرار به طور همزمان بر روی همه مجموعه‌های درگیر و محاسبه مرکز ثقل سیستم است.

## محدودیت‌های حجم دوز

بسیاری از محققان روی تبدیل محدودیت‌های حجم دوز<sup>۲۵</sup> (DVCs) به مدل‌های ریاضی کار می‌کنند. استفاده از برنامه‌ریزی خطی شامل (DVCs) توسط لانگر<sup>۲۶</sup> انجام شده بود [۲۸]. نویسندگان دنباله‌ای از LP ها را با شمارش همه ترکیب‌های نقاط مقید که محدودیت‌های دوز-حجم را برآورده می‌کند، تولید کرد و پس از حل این LP ها ترکیب وکسلی را انتخاب کرد که بهترین مقدار هدف را بدهد.

اگر بیش از ۲۰ وکسل موجود باشد این روش برای حل مساله مشکل است. برای مثال محدودیت دوز-حجم<sup>۲۷</sup> حداکثر ۴۰ درصد حجم ریه، می‌تواند از ۲۰ گری دوز اشعه تجاوز کند<sup>۲۸</sup> را در نظر بگیرد. اگر ۱۰۰ وکسل در ریه باشد برای برآورده کردن محدودیت حجم دوز، نیاز به حل ترکیب ۴۰ از ۱۰۰ LP وجود دارد. با این وجود، این عمل مبنایی برای بکار بستن برنامه‌ریزی مختلط عدد صحیح برای حل مساله (DVC) است.

موریل و همکاران<sup>۲۷</sup> [۳۵] برای بکار بردن (DVCs)، روش طوق<sup>۲۸</sup> را که ابتدا توسط باهر<sup>۲۹</sup> و همکاران [۱] پیشنهاد شده بود، استفاده کردند. نویسندگان از این مطلب استفاده کرد که، حجم بافت

<sup>۲۰</sup> Agmon

<sup>۲۱</sup> Motzkin

<sup>۲۲</sup> Schoenberg

<sup>۲۳</sup> Censor

<sup>۲۴</sup> cimmino

<sup>۲۵</sup> dose volume constraints

<sup>۲۶</sup> Langer

<sup>۲۷</sup> Morril et al.

<sup>۲۸</sup> collar technique

<sup>۲۹</sup> Bahr



نرمال نزدیکتر به حجم هدف نسبت به حجم بافت نرمال دورتر از حجم هدف، اجازه محدودیت دوز بالاتری خواهند داشت. بنابراین، ساختارهای نرمال را به دوز-بالا و دوز-پایین تقسیم‌بندی کرده و کران‌های بالای مختلف برای حجم‌های دوز-بالا و دوز-پایین قرار دادند.

در این روش (DVC) تبدیل به محدودیت‌های دوز منطقه‌ای می‌شود. به هر حال تضمین بهترین نتیجه‌ی ممکن با استفاده از تجربه جهت تقسیم‌بندی‌های حجم دوز-بالا و دوز-پایین وجود ندارد. مریت<sup>۳۰</sup> و ژانگ<sup>۳۱</sup> [۳۱] از برنامه‌ریزی خطی متوالی برای بهینه‌سازی نقشه شدت پرتو استفاده می‌کنند. هدف به صورت ماکزیمم کردن مینیمم دوز استفاده شده است و کران‌های بالا برای تومور و اندام‌های بحرانی مشخص شده‌اند. به علاوه، کنترل حجم دوز، با کمک آزادسازی کران بالای میزان دوز اندام‌های بحرانی تا ماکزیمم حجم مجاز، انجام می‌گیرد. با این حال هنوز مشکل نشدنی بودن در این مدل وجود دارد. دنباله‌ای از LP ها ساخته می‌شود.  $k$ امین LP به فرم زیر است:

$$\begin{aligned} \max \quad & z \\ \text{s.t.} \quad & ez \leq A_T x \leq TUB \\ & a(i)x \leq M \quad \forall i \in R_k \\ & a(i)x \leq CUB_i \quad \forall i \in C \setminus R_k \\ & 0 \leq x \end{aligned}$$

که در آن  $R_k \subseteq C$  مجموعه‌ای از اندیس‌های متناظر با سمت راست‌هایی که بعد از حل  $k-1$ امین LP آزاد شده‌اند و  $M > CUB_i$  کران بالایی روی آن محدودیت‌هاست.

برای  $k \geq 2$  داریم  $R_k = \{j \in C : y_{j,k-1}^* > \lambda\} \cup R_{k-1}$  و  $R_1 = \emptyset$  که  $y_{j,k-1}^*$ ،  $j$ -امین متغیر دوگان بهینه در  $k-1$ امین LP و  $\lambda > 0$  پارامتر ثابت است.

در واقع در هر گام، محدودیت‌هایی که آزادسازی آنها بیشترین افزایش را در مقدار هدف ایجاد می‌کند، انتخاب می‌شوند. چون جواب بهینه دوگان منحصربفرد نیست، نیاز به دقت در انتخاب داریم. در نهایت، با تکرار آزادسازی محدودیت‌ها یک جواب LP نزدیک به جواب برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط تولید خواهد شد. به هر حال هنوز مشکل نشدنی بودن وجود دارد.

## برنامه‌ریزی چندهدفه و ارائه مدل انتخابی

در پرتو درمانی، همواره توزیع دوز مورد نظر درمان، با توجه به محدودیت‌های فیزیکی و وجود توازن بین اهداف مختلف و متناقض، نمی‌تواند فراهم شود. با این که پرتو درمانی برای چنددهه به کار می‌رود، بهینه‌سازی چندهدفه در برنامه‌ریزی معکوس برای مسائل بهینه‌سازی پرتو درمانی فقط در ۱۰ سال اخیر به رسمیت شناخته شده است.

<sup>۳۰</sup> Merritt

<sup>۳۱</sup> Zhang



روش‌های برنامه‌ریزی چندهدفه در IMRT به دو دسته برنامه‌ریزی غیرخطی و خطی چندهدفه تقسیم می‌شوند. اولین مدل MOP برای IMRT توسط کاتراتز<sup>۳۲</sup> و همکارانش [۸] پیشنهاد شده بود که اهداف مبتنی بر واریانس را استفاده کرده بود.

داریم:

$$F = (f_T, f_{C_1}, \dots, f_{C_K})$$

که در آن

$$f_T = \frac{1}{m_T} \frac{\|A_T x - \bar{d}_T\|_p^q}{\bar{d}_T^q},$$

$$f_{C_K} = \frac{1}{m_{C_K}} \frac{\|(A_{C_K} x - C_k UB)_+\|_p^q}{C_k UB^q}, \quad k = 1, \dots, K.$$

که  $\bar{d}_T$  میانگین دوز در تکرار جاری برای تومور است. شایع‌ترین روش حل برای MOP، روش مجموع وزن‌دار است. که قضایای بیانگر روابط بین جواب‌های بهینه مدل مجموع وزن‌دار و جواب‌های کارا در فصل اول بیان شده است.

مجموعه جواب‌های کارا با استفاده از عامل‌های وزنی مختلف به دست می‌آید. یک الگوریتم گرادیان مزدوج برای حل مساله مجموع وزن‌دار استفاده می‌شود. لاهاناس<sup>۳۳</sup> و همکاران [۲۶] یک مساله چندهدفه، با تغییرات کمی نسبت به مدل کاتراتز [۸] به صورت زیر ارائه دادند:

$$F = (f_T, f_N, f_C)$$

که در آن

$$f_T = \frac{1}{m_T} \|A_T x - TG\|_p^q,$$

$$f_N = \frac{1}{m_N} \|A_N x\|_p^q,$$

$$f_C = \frac{1}{m_C} \|(A_C x - CUB)_+\|_p^q$$

$f_T$  میانگین مربع انحراف از دوز تجویزی تومور،  $f_C$  میانگین مربع مصرف بیش از حد برای بافت‌های بحرانی و  $f_N$  میانگین مربع دوز برای بافت نرمال است. جهت حذف مساله شدت پرتوی منفی، با استفاده از ریشه مربع شدت پرتو به عنوان متغیرهای تصمیم، مساله به یک مساله غیرمقید تبدیل می‌شود.

<sup>۳۲</sup> Cotrutz

<sup>۳۳</sup> Lahanas

یک مدل MOLP ساده از هماچر و کوفر<sup>۳۴</sup> [۲۲] در زیر می‌آید.

$$\begin{aligned} \min \quad & F = (f_T, f_C, f_N) \\ \text{s.t.} \quad & A_T x \geq TLB(\lambda - f_T) \\ & A_C x \leq CUB(\lambda + f_C) \\ & A_N x \leq NUB(\lambda + f_N) \\ & f_T, f_C, f_N \geq 0 \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

که  $f_T$  ماکزیمم انحراف از دوز تجویزی برای تومور،  $f_C$  ماکزیمم انحراف از دوز تجویزی برای بافت بحرانی و  $f_N$  ماکزیمم انحراف از دوز تجویزی برای بافت نرمال است.

در کل MOLP برای حل، با توجه به خطی بودنش از MONP ساده‌تر است. در این‌جا به برخی از روش‌های یافتن جواب که در مدل MOLP استفاده می‌شود، اشاره می‌کنیم.

بیشتر مقالات [۸، ۲۶] روش مجموع وزن‌دار را انتخاب می‌کنند که به دلایل وقت‌گیر بودن فرآیند آزمون و خطا در آن، مفهوم نداشتن عامل‌های وزنی، مشکل بودن انتخاب وزن‌ها برای تولید نقاط غیرتسلطی با توزیع مساوی و غیره، روش کارآمدی نیست.

هماچر و کوفر [۲۲، ۲۵] ایده‌ای برای تولید زیرمجموعه‌ای از مجموعه غیرتسلطی بر اساس جواب‌های مجاور شرح می‌دهند.

کرافت<sup>۳۵</sup> و همکاران [۹] روش محدودیت نرمال ([۳۲]) را برای دستیابی به توازن دو بعدی بین دوز تومور همگن شده و حفظ اندام‌های حیاتی، استفاده می‌کنند. او روشی به نام PGEN را برای تکرار انتخاب وزن‌ها پیشنهاد می‌دهد تا به تدریج مجموعه غیرتسلطی را بسازد.

روش داس<sup>۳۶</sup> و دنیس<sup>۳۷</sup> [۱۲] مجموعه‌ای از نقاط مرجع هم‌فاصله (CHIM) را روی پوشش محدب مینیمم منحصربفرد تولید می‌کند. برای هر نقطه مرجع یک نقطه غیرتسلطی متناظر با حل یک مساله تک‌هدفه ایجاد می‌شود.

محدودیت این روش آن است که اگر نرمال CHIM مولفه‌های مثبت و منفی داشته باشد (برای  $p > 2$ )، ممکن است جواب قسمتی از مجموعه غیرتسلطی نادیده گرفته شود.

روش کرافت<sup>۳۸</sup> و همکارانش [۱۰] از ایده ساندویچ مجموعه غیرتسلطی بین یک کران بالا و پایین تقریب محدب، استفاده می‌کند. CHIM به عنوان اولین کران بالا در نظر گرفته می‌شود.

<sup>۳۴</sup>Kufer and Hamacher

<sup>۳۵</sup> Craft

<sup>۳۶</sup> Das

<sup>۳۷</sup> Dennis

<sup>۳۸</sup> Craft

## ۶.۵ مدل MOLP انتخابی برای مساله بهینه‌سازی شدت پرتو

اکنون یک فرمول‌بندی برای مساله بهینه‌سازی شدت پرتو به فرم مساله برنامه‌ریزی چندهدفه خطی در نظر می‌گیریم. این مدل، یک مساله برنامه‌ریزی سه هدفه است.

اهدافی که باید می‌نیم شوند عبارتند از: ماکزیمم انحراف از کران‌های پایین تومور ( $\alpha$ )، از کران‌های بالای اندام بحرانی ( $\beta$ ) و از کران‌های بافت نرمال ( $\gamma$ ). لذا این مدل به فرم زیر است:

$$\begin{aligned} \min \quad & (\alpha, \beta, \gamma) \\ \text{s.t.} \quad & TLB - \alpha e \leq A_T x \leq TUB \\ & A_C x \leq CUB + \beta e \\ & A_N x \leq NUB + \gamma e \\ & \circ \leq \alpha \leq \alpha_u \\ & -\min CUB \leq \beta \leq \beta_u \\ & \circ \leq \gamma \leq \gamma_u \\ & \circ \leq x \end{aligned} \tag{۱.۵}$$

که  $\alpha_u \in \mathbb{R}$  و  $\beta_u \in \mathbb{R}$  و  $\gamma_u \in \mathbb{R}$  به ترتیب کران‌های بالا برای  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\gamma$  می‌باشند و توسط متخصص سرطان شناس مشخص می‌شود که جستجو را به پیدا کردن مقادیر واقعی محدود می‌کند.

سه هدف  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\gamma$  با کران‌های بالا و پایین محدود می‌شوند. همان اثر می‌تواند با اضافه کردن کران‌های بالا و پایین روی متغیرهای تصمیم، یعنی شدت پرتو  $x$  به دست آید.

علاوه بر این ضروریست که اشاره کنیم، این مساله MOLP همیشه شدنی است تا زمانی که کران‌های بالا و پایین مناسب برای  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\gamma$  قرار داده شود، به خصوص اگر این مقادیر به سمت بی‌نهایت میل کنند [۲۳].

ضرایب  $a_{ij}$  از ماتریس دوز سپرده شده، با مدل‌های ریاضی از رفتار فیزیکی تابش هنگام حرکت آن از طریق بدن، محاسبه می‌شود.

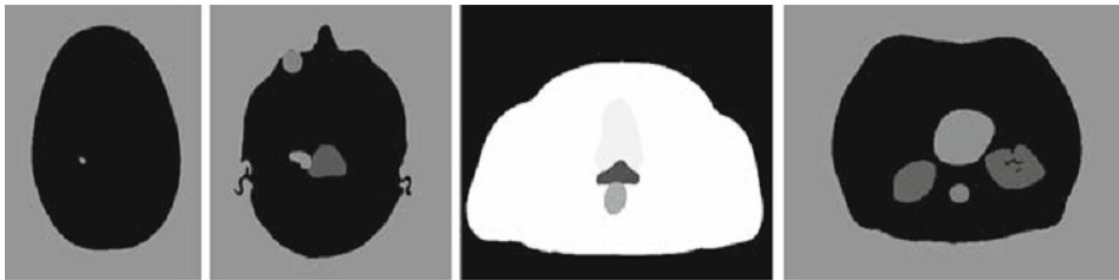
در حالی که روش‌های پیشرفته و پیچیده قابل دسترسند و از آنها در موارد بالینی [۳۶] با شبیه‌ساز مونت کارلو<sup>۳۹</sup> [۴۷] استفاده می‌شود، نتایج به علت غیریکنواختی ترکیبات شیمیایی بدن بیمار، همیشه غیردقیق‌اند. پس حل (۱.۵) به طور دقیق تصویری نابجاست، اما نتیجه بهینه‌سازی نمی‌تواند دقیق‌تر از داده ورودی باشد.

پس برای اهداف بالینی حل تقریبی (۱.۵) با کسر کوچکی از Gy کاملاً قابل قبول است. توجه شود که اهداف (۱.۵) متناسبند و واحد یکسان Gy را دارند و مقدار  $\epsilon$  در الگوریتم تقریبی مطلق است نه نسبی.

<sup>۳۹</sup> Monte carlo

## ۷.۵ حل مساله

حال می‌خواهیم مساله (۱.۵) را با الگوریتم ۱ و الگوریتم ۲ که در فصل ۲ و ۳ به شرح آنها پرداخته‌ایم، حل کنیم. چهار وضعیت بالینی مورد استفاده، یک ناهنجاری عروقی (AVM)، یک تومور عصب شنوایی (AN)، یک پروستات (P) و یک ضایعه پانکراس (PL) می‌باشد. تصاویر CT تهیه شده که طرح کلی از تومور و اندام‌های حیاتی در معرض خطر را نشان می‌دهند، در شکل ۴.۵ آمده است.



شکل ۴.۵: تصاویر از چپ به راست AN، AVM، P و PL

این وضعیت‌ها اندازه وکسلی از ۵mm روی یک برش CT دارند. برای همه مثال‌ها، مجموعی از ۷۲ باریکه پرتو با طول مساوی در زاویه‌های  $5^\circ n$  که  $n = 0, \dots, 71$ ، استفاده شده بود. تعداد وکسل و پیکسل‌های استفاده شده برای بهینه‌سازی هر وضعیت و اطلاعات تجویزی که پارامترهای موجود در (۱.۵) را تعریف می‌کنند، در جدول ۱.۵ آمده است.

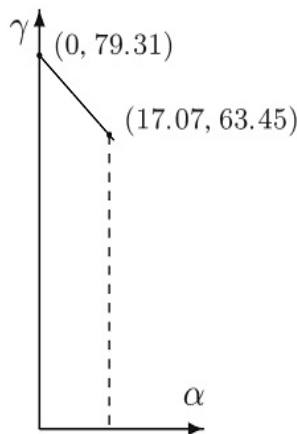
PL	P	AN	AVM	حالت
۶۷	۲۲	۹	۱	وکسل‌های تومور
۹۱		۸۹ ۴۷	۰	وکسل‌های بافت حیاتی
۹۸۶	۱۱۸۲	۹۹۹	۱۲۰۶	وکسل‌های بافت نرمال
۱۱۴۰	۸۲۱	۵۴۹	۳۱۹	پیکسل‌ها
۹۰.۶۴	۹۰.۶۴	۸۷.۵۵	۹۰.۶۴	TUB
۸۵.۳۶	۸۵.۳۶	۸۲.۴۵	۸۵.۳۶	TLB
۶۰/۴۵	۶۰/۴۵	۶۰/۴۵	-	CUB
۰.۰۰	۰.۰۰	۰.۰۰	۰.۰۰	NUB
۱۷.۰۷	۴۲.۶۸	۱۶.۴۹	۱۷.۰۷	$\alpha_u$
۱۲.۰۰	۳۰.۰۰	۱۲.۰۰	-	$\beta_u$
۹۰.۶۴	۱۰۰.۶۴	۸۷.۵۵	۹۰.۶۴	$\gamma_u$

جدول ۱.۵: تعداد وکسل‌ها (کل آنها)، تعداد پیکسل‌ها، کران‌های پایین و بالا برای تومور، اندام‌های حیاتی و بافت نرمال در واحد Gy

در حالت AVM، هر دو الگوریتم نقاط غیرتسلطی  $y^1 = (0, 0, 79/31)$  و  $y^2 = (17/07, 0, 63/45)$  را پیدا می‌کنند. در این مورد  $\beta = 0$  است، زیرا اندام حیاتی در معرض خطر در این حالت وجود ندارد. مجموعه غیرتسلطی، پاره‌خط ایجاد شده از دو نقطه  $(0, 79/31)$  و  $(17/07, 63/45)$  است که در شکل ۵.۵ آمده است.

تفسیر بالینی نقطه  $(0, 79/31)$  آن است که جوابی وجود دارد که یک وکسل در تومور دوزی بیشتر از کران پایین تومور و کوچکتر از کران بالای آن، دریافت خواهد کرد، در حالی که وکسلی در بافت نرمال دوزی به بزرگی  $79/31 Gy$  دریافت خواهد کرد (به احتمال زیاد، آن وکسلی در مجاورت تومور است).

تفسیر بالینی نقطه  $(17/07, 63/45)$  آن است که وکسلی در تومور حداقل دوزی به اندازه  $TLB - 17/07 = 85/36 - 17/07 = 68/29 Gy$  را دریافت خواهد کرد، در صورتی که وکسلی در بافت نرمال دوزی به بزرگی  $63/45 Gy$  دریافت می‌کند. به طور مشابه، همه نقاط غیرتسلطی دیگر که بین این دو نقطه قرار دارند را می‌توان شرح داد. برای وضعیت‌های دیگر، امکان لیست کردن همه نقاط



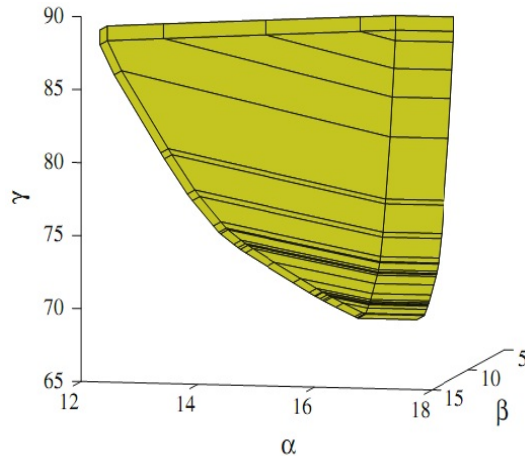
شکل ۵.۵: مجموعه غیرتسلطی برای حالت AVM

راسی غیرتسلطی نیست.  $Y^1$  به دست آمده از الگوریتم بنسون برای تومور عصب شنوایی را در شکل ۶.۵ و برای پروستات را در شکل ۸.۵ نشان داده شده است.

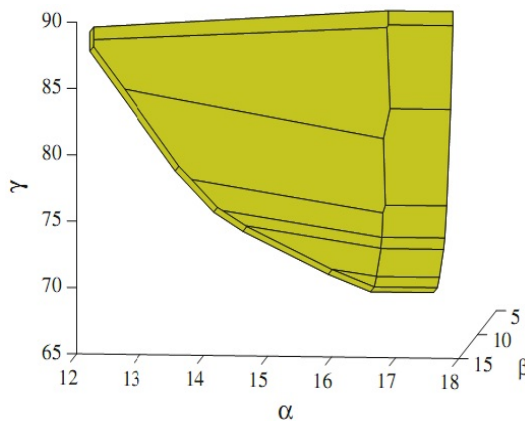
مجموعه  $Y^{10}$ ، تقریب بیرونی به دست آمده از نسخه تقریبی الگوریتم، با  $\epsilon = 0/1$  برای تومور عصب شنوایی و برای پروستات به ترتیب در شکل‌های ۷.۵ و ۹.۵ نشان داده شده است.

حالت ضایعه پانکراس به طور دقیق تا  $10^{\circ}$  ساعت نمی‌تواند حل شود. بنابراین، مجموعه‌های  $Y^{10}$  به دست آمده از الگوریتم تقریبی برای مقادیر مختلف  $\epsilon$  در شکل‌های ۱۰.۵، ۱۱.۵، ۱۲.۵ و ۱۳.۵ به ترتیب به عنوان نتیجه‌ای از  $\epsilon = 0/3$ ،  $\epsilon = 0/1$ ،  $\epsilon = 0/05$  و  $\epsilon = 0/005$  نشان داده شده است.

به طور خلاصه، مقایسه اطلاعاتی مانند تعداد نقاط راسی غیرتسلطی، تعداد صفحات برشی و زمان محاسبه با استفاده از الگوریتم بنسون و نسخه تقریبی الگوریتم بنسون با مقادیر مختلف  $\epsilon$  در جدول ۲.۵ آمده است.



شکل ۶.۵:  $Y'$  برای AN

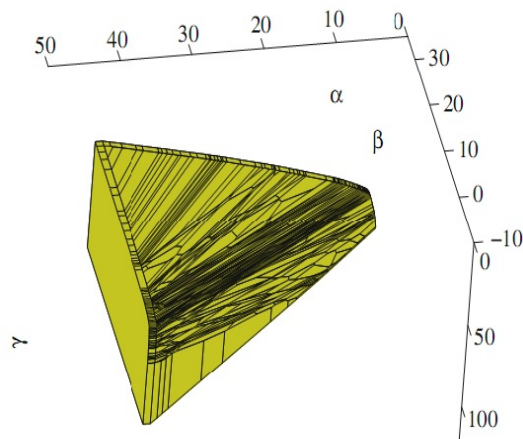


شکل ۷.۵:  $Y'^o$  با  $\epsilon = 0.1$  برای AN

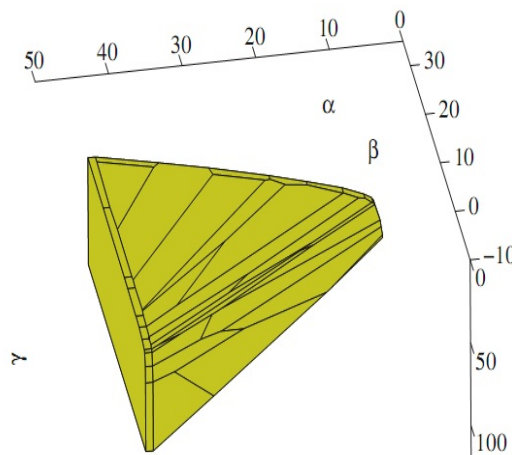
الگوریتم بنسون وضعیت بالینی ناهنجاری عروقی را می‌تواند کمتر از ۲۰ دقیقه حل کند. برای حالت ضایعه پانکراس، الگوریتم بنسون پس از ۱۰ ساعت نمی‌تواند خاتمه یابد. از طرفی، نسخه تقریبی الگوریتم بنسون همه چهار مساله را در ۳ دقیقه با خطای ۰/۱ می‌تواند حل کند.

برای یک مساله با تعداد نقاط راسی غیرتسلطی بسیار و سطح غیرتسلطی منحنی شکل، مانند شکل ۱۳.۵، نسخه تقریبی الگوریتم بنسون نقاط راسی و صفحات برشی کمتر در مقایسه با الگوریتم بنسون تولید می‌کند.

برای مثال پروستات، ۳۱۶۵ نقطه راسی غیرتسلطی با الگوریتم بنسون یافت شده بود در حالی که، نسخه تقریبی الگوریتم بنسون با  $\epsilon = 0.1$ ، تنها ۵۶ نقطه راسی غیرتسلطی تولید می‌کند. جدول ۲.۵ و شکل‌ها به وضوح تاثیر انتخاب  $\epsilon$  را نشان می‌دهند. پارامتر با خطای کوچکتر، صفحات برش بیشتر و نقاط راسی غیرتسلطی بیشتر را تولید می‌کند و زمان محاسبه را طولانی‌تر می‌کند.



شکل ۸.۵:  $Y'$  برای  $P$



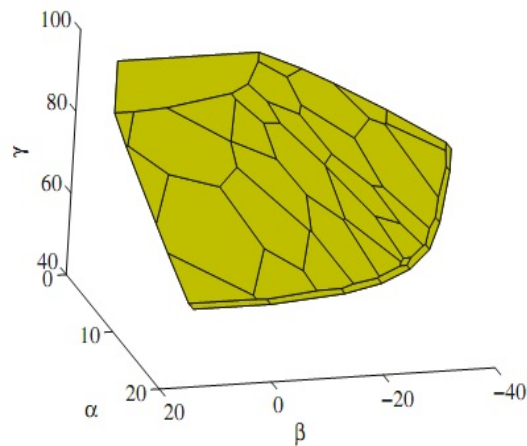
شکل ۹.۵:  $Y^{lo}$  با  $\epsilon = 0.1$  برای  $P$

## ۸.۵ نتیجه‌گیری و پیشنهادات

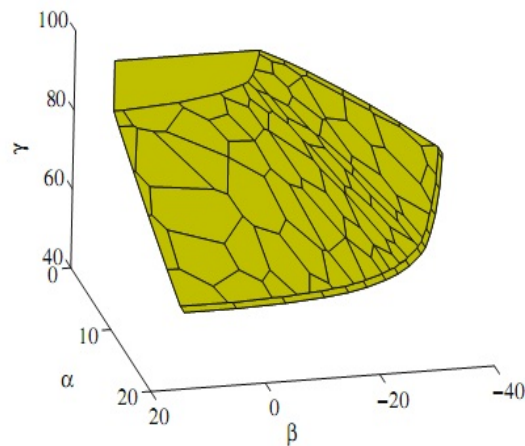
در بسیاری از برنامه‌ریزی‌های چندهدفه، تصمیم‌گیرنده بنا به دلایل متفاوت به جای یافتن جواب‌های دقیق مساله به تولید جواب‌های تقریباً کارا بسنده می‌کند. از اینرو نیاز به معرفی الگوریتم‌های تقریبی برای حل مسائل چندهدفه وجود دارد.

همانطور که در طول پایان‌نامه ملاحظه شد، یکی از ویژگی‌های الگوریتم‌های تقریبی برای رسیدن به نقاط غیرتسلطی کاهش زمان محاسباتی آنها در مقایسه با حل دقیق مساله است و این امر در نظر تصمیم‌گیرندگان حائز اهمیت است.

در برخورد با مسائل چندهدفه مسائلی وجود دارند که حل دقیق آنها در عمل ممکن نیست. در این‌گونه مسائل، حل تقریبی با دقت بالای تقریب می‌تواند نقش به‌سزایی داشته باشد. پس یکی از موضوعات جالب جهت تحقیق می‌تواند پرداختن به موضوع الگوریتم‌های تقریبی برای حل برنامه‌ریزی‌های چندهدفه



شکل ۱۰.۵:  $Y^{lo}$  با  $\epsilon = 0.3$  برای PL



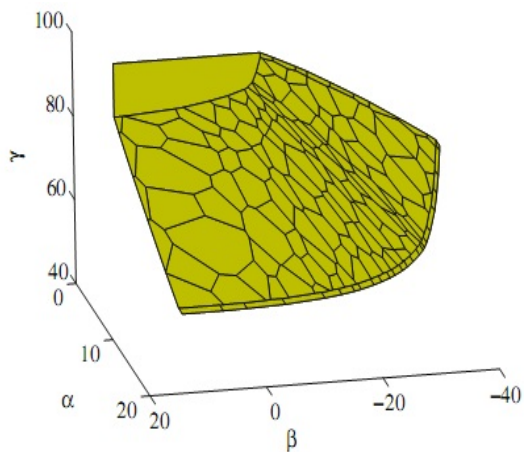
شکل ۱۱.۵:  $Y^{lo}$  با  $\epsilon = 0.1$  برای PL

باشد.

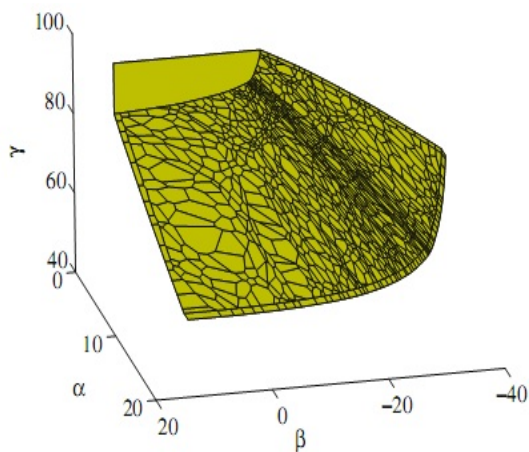
مطالعه در این زمینه بنا به تنوع مسائل بسیار وسیع می‌باشد. از پیشنهادات آتی برای کار در این زمینه می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

- یافتن الگوریتم‌های تقریبی برای مسائل چندهدفه غیرمحدب
- یافتن الگوریتم تقریبی برای حل مسائل چندهدفه خطی محدب، بدون استفاده از تقریب خطی
- یافتن الگوریتم‌های تقریبی دیگر برای مسائل چندهدفه محدب بدون ساخت ابرصفحه‌های جداساز و غیره.





شکل ۱۲.۵:  $Y^{10}$  با  $\epsilon = 0.05$  برای PL



شکل ۱۳.۵:  $Y^{10}$  با  $\epsilon = 0.005$  برای PL

وضعیت	€	زمان (ثانیه)	نقاط راسی غیرتسلطی	صفحات برشی
AVM	۰.۱	۰.۵۱۴	۲	۳
	۰	۰.۵۱۵	۲	۳
AN	۰.۱	۵.۹۳۸	۲۷	۲۱
	۰	۱۳.۹۸۴	۵۵	۸۵
P	۰.۱	۱۴.۷۸۱	۵۶	۴۲
	۰	۹۹۵.۰۵۰	۳۱۶۵	۳۲۸۰
PL	۰.۳	۷۰.۷۹۶	۵۷	۳۷
	۰.۱	۱۶۴.۳۶۰	۱۵۲	۹۰
	۰.۰۵	۳۰۳.۶۳۰	۲۷۸	۱۵۹
	۰.۰۰۵	۲۱۴۷.۵۳۰	۱۹۸۹	۱۰۴۱

جدول ۲۰۵: زمان اجرا و تعداد نقاط راسی غیرتسلطی و صفحات برش برای چهار وضعیت با مقادیر مختلف €

## مراجع

- [1] Bahr, G., Kereiakes, J., Horwitz, H., Finney, R., Galvin, J., and Goode, K.: The method of linear programming applied to radiation treatment planning. *Radiology*. 91, 686–693 (1968).
- [2] Bazaraa, M.S.: *Nonlinear Programming Theory and Algorithms*. John Wiley and Sons Inc, (2006).
- [3] Benson, H.P.: An outer approximation algorithm for generating all efficient extreme points in the outcome set of a multiple objective linear programming problem. *J. Global Optim.* 13, 1–24 (1998).
- [4] Benson, H.P.: Hybrid approach for solving multiple-objective linear programs in outcome space. *J. Optim. Theory Appl.* 98, 17–35 (1998).
- [5] Censor, Y., Altschuler, M., Powlis, W.: A computational solution of the inverse problem in radiation therapy treatment planning. *Appl. Math. Comput.* 25, 57–87 (1988).
- [6] Chen, P.C., Hansen, P.: On-line and off-line vertex enumeration by adjacency lists. *Oper. Res. Lett.* 10, 403–409 (1991).
- [7] Chinchuluun, A., Pardalos, M.: A survey of recent developments in multiobjective optimization. *Ann. Oper. Res.* 154, 29–50 (2007).
- [8] Cotrutz, C., Lahanas, M., Kappas, K., Baltas, D.: A multiobjective gradient-based dose optimization algorithm for external beam conformal radiotherapy. *Phys. Med. Biol.* 46, 2161–2175 (2001).
- [9] Craft, D.L., Halabi, T.F., Bortfeld, T.R.: Exploration of tradeoffs in intensity-modulated radiotherapy. *Phys. Med. Biol.* 50, 5857–68 (2005).
- [10] Craft, D.L., Halabi, T.F., Shih, H.A., Bortfeld, T.R.: Approximating convex Pareto surfaces in multiobjective radiotherapy planning. *Med. Phys.* 33, 3399–3407 (2006).

- [11] Das, I., Dennis, J.E.: A closer look at drawbacks of minimizing weighted sums of objectives for pareto set generation in multicriteria optimization problems. *Struct. Multidiscip. Optim.* 14, 63–69 (1997).
- [12] Das, I., Dennis, J.E.: Normal-boundary intersection: A new method for generating the Pareto surface in nonlinear multicriteria optimization problems. *SIAM. J. Optim.* 8, 631–657 (1998).
- [13] Edgeworth, F.Y.: *Mathematical physics*. University Microfilms Hnternational (Out Of Print Books On Demand), (1987).
- [14] Ehrgott, M.: *Multicriteria Optimization*. Springer, (2005).
- [15] Ehrgott, M., Gandibleux, X.: Bound sets for biobjective combinatorial optimization problems. *Comput. Oper. Res.* 34, 2674–2694 (2007).
- [16] Ehrgott, M., Güler, Ç., Hamacher, H.W., Shao, L.: Mathematical optimization in intensity modulated radiation therapy. *Ann. Oper. Res.* 175, 309–365 (2010).
- [17] Ehrgott, M., Löhne, A., Shao, L.: A dual variant of Benson’s outer approximation algorithm. Report 654, Department of Engineering Science, The University of Auckland, (2007).
- [18] Ehrgott, M., Ruzika, S.: Improved  $\epsilon$ -constraint method for multiobjective programming. *J. Optim. Theory Appl.* 138(3), 375–396 (2008).
- [19] Ehrgott, M., Shao, L. and Schöbel, A.: An approximation algorithm for convex multi-objective programming problems. *J. Global Optim.* 50, 397–416 (2011).
- [20] Ehrgott, M., Wiecek, M.: Multiobjective programming. In: Figueira J, Greco S, Ehrgott M (eds) *Multicriteria decision analysis: state of the art surveys*. Springer Science+BusinessMedia, New York, pp 667–722 (2005).
- [21] Geoffrion, A.: Proper efficiency and the theory of vector maximization. *J. Math. Anal. Appl.* 22, 618–630 (1968).
- [22] Hamacher, H., Küfer, K.H.: Inverse radiation therapy planing—A multiple objective optimization approach. *Discret. Appl. Math.* 118, 145–161 (2002).
- [23] Holder, A.: Designing radiotherapy plans with elastic constraints and interior point methods. *Health Care Manag. Sci.* 6(1), 5–16 (2003).
- [24] Horst, R., Thoai, N.V., Devries, J.: On finding the new vertices and redundant constraints in cutting plane algorithms for global optimization. *Oper. Res. Lett.* 7, 85–90 (1988).

- [25] Küfer, K.H., Scherrer, A., Monz, M., Alonso, F., Trinkaus, H., Bortfeld, T., Thieke, C.: Intensity-modulated radiotherapy—A large scale multi-criteria programming problem. *OR Spectr.* 25, 223–249 (2003).
- [26] Lahanas, M., Schreibmann, E., Baltas, D.: Multiobjective inverse planning for intensity modulated radiotherapy with constraint-free gradient-based optimization algorithms. *Phys. Med. Biol.* 48, 2843–2871 (2003).
- [27] Lahanas, M., Schreibmann, E., Milickovic, N., Baltas, D.: Intensitymodulated beam-radiation therapy dose optimization with multi-objective evolutionary algorithms. In: Fonseca CM, Fleming PJ, Zitzler E, Deb K, Thiele L (eds) *Evolutionary multi-criterion optimization. Lecture Notes in Computer Science.* 2632, 648–661 (2003).
- [28] Langer, M.: Optimization of beam weights under dose-volume restrictions. *J. Radiation Oncology. Biology. Phys.* 13, 1255–1260 (1987).
- [29] Lim, J., Ferris, M.C., Wright, S.J., Shepard, D.M., Earl, M.A.: An optimization framework for conformal radiation treatment planning. *J. Comput.* 19(3), 366–380 (2007).
- [30] Loridan, P.:  $\epsilon$ -solutions in vector minimization problems. *J. Optim. Theory Appl.* 43, 265–276 (1984).
- [31] Merritt, M. and Zhang, Y.: A successive linear programming approach to IMRT optimization problem. Technical report, Department of Computational and Applied Mathematics, Rice University, (2002).
- [32] Messac, A., Ismail-Yahaya, A., Mattson, C.A.: The normalized constraint method for generating the pareto frontier. *Struct Multidiscip Optim.* 25, 86–98 (2003).
- [33] Miettinen, K.M.: *Nonlinear Multiobjective Optimization.* Kluwer Academic Publishers, (1999).
- [34] Miettinen, K.M., Makela, M.M., Kaario, K.: Experiments with classification-based scalarizing functions in interactive multiobjective optimization. *Eur. J. Oper. Res.* 175, 931–947 (2006).
- [35] Morrill, S., Lane, R., Wong, J. and Rosen, I.: Dose-volume considerations with linear programming optimization. *Med. Phys.* 18(6), 1201–10 (1991).
- [36] Nizin, P., Kania, A., Ayyangar, K.: Basic concepts of Corvus dose model. *Med. Dosim.* 26, 65–69 (2001).
- [37] Papadimitriou, C., Yannakakis, M.: On the approximability of trade-offs and optimal access of web sources. In: Blum, A. (ed) *Proceedings of the 41st Annual Symposium on Foundations of Computer Science.* 86–92 (2000).

- [38] Pareto, V.: Course deconomics Politique, Libraire Droze, Geven, (1964)(the first edition in 1986).
- [39] Rockafellar, R.T.: Convex Analysis. Princeton University Press, Princeton, (1970).
- [40] Romeijn, H., Dempsey, J., Li, J.: A unifying framework for multi-criteria fluence map optimization models. Phys. Med. Biol. 49, 1991–2013 (2004).
- [41] Ruzika, S., Wiecek, M.M.: Approximation methods in multiobjective programming. J. Optim. Theory Appl. 126(3), 473–501 (2005).
- [42] Schlegel, W., Mahr, A.: 3D-Conformal radiation therapy: a multimedia introduction to methods and techniques. Springer, Berlin (2002).
- [43] Shao, L.: A survey of beam intensity optimization in IMRT. In: Halliburton T (ed) Proceedings of the 40th Annual Conference of the Operational Society of New Zealand. 255–265 (2005).
- [44] Shao, L.: Multiple Objective Linear Programming in Radiotherapy Treatment Planning. PhD Thesis, The University of Auckland, (2008).
- [45] Shao, L., Ehrgott, M.: Approximately solving multiobjective linear programmes in objective space and an application in radiotherapy treatment planning. Math. Methods Oper. Res. 68, 257–276 (2008).
- [46] Shepard, D., Ferris, M., Olivera, G. and Mackie, T.: Optimizing the delivery of radiation therapy to cancer patients. SIAM Review. 41(4), 721–744 (1999).
- [47] Verhaegen, F.: Monte Carlo modelling of external radiotherapy photon beams. Phys. Med. Biol. 48, 107–164 (2003).
- [48] Webb, S.: The Physics of Conformal Radiotherapy. Institute of Physics, (1997). Publishing.
- [49] Xiao, Y., Censor, Y., Michalski, D. and Galvin, J.: The least-intensity feasible solution for aperture-based inverse planning in radiation therapy. Ann. Oper. Res. 119, 183–203 (2003).

# واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Separating Hyperplane	ابرفصله جداساز
Supporting Hyperplane	ابرفصله حمایتی
Strictly Dominated	اکیدا مسلط
Approximation Algorithm	الگوریتم تقریبی
Multiobjective Linear Programme	برنامه‌ریزی خطی چندهدفه
Pareto Optimal	بهینه پارتو
Radiotherapy	پرتو درمانی
Convex Hull	پوسته محدب
Extension	تعمیم
Inner Approximation	تقریب درونی
Outer Approximation	تقریب بیرونی
Optimal Solution	جواب بهینه
Feasible Solution	جواب شدنی
$\epsilon$ -Efficient Solution	جواب $\epsilon$ -کارا
Weakly Nondominated Solution	جواب غیرتسلطی ضعیف
Weakly Efficient Solution	جواب کارای ضعیف
Approximation Error	خطای تقریب
Linearize	خطی کردن
Prescription Dose	دوز تجویز شده
Dose Deposited	دوز رسوب شده
Weak Duality	دوگانی ضعیف
Strong Duality	دوگانی قوی
Weighted Sum Method	روش مجموع وزن‌دار
Elastic Constraint Method	روش محدودیت انعطاف‌پذیر
Scalarization Techniques	روش‌های اسکالرسازی

Subgradient	زیرگرادیان
Clinical Cancer	سرطان بالینی
Tumour Cells	سلول‌های تومور
P-Dimensional Simplex	سیمپلکس $p$ -بعدی
Beam intensity	شدت پرتو
Necessary Conditions	شرایط لازم
Constraint Qualification	محدودیت شرطی
Euclidean Distance	فاصله اقلیدسی
Compact	فشرده
Decision Space	فضای تصمیم
Objective Space	فضای هدف
Proper Efficiency	کارایی سره
Guaranteed Approximation Quality	کیفیت تضمین شده تقریب
Gradient Of Function	گرادیان تابع
Convex	محدب
Differentiable Constraint	محدودیت مشتق‌پذیر
Approximation Version	نسخه تقریبی
Anti Ideal Point	نقطه ضدایده‌آل
Extreme Point	نقطه راسی
Boundary Point	نقطه مرزی
Nondominated Face	وجه غیرتسلطی
Non-differentiable Objective	هدف مشتق‌ناپذیر



# واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Anti Ideal Point	نقطه ضد ایده‌آل
Approximation Algorithm	الگوریتم تقریبی
Approximation Error	خطای تقریب
Approximation Version	نسخه تقریبی
Beam intensity	شدت پرتو
Boundary Point	نقطه مرزی
Clinical Cancer	سرطان بالینی
Compact	فشرده
Constraint Qualification	محدودیت شرطی
Convex	محدب
Convex Hull	پوسته محدب
Decision Space	فضای تصمیم
Differentiable Constraint	محدودیت مشتق‌پذیر
Dose Deposited	دوز اختصاص یافته
$\varepsilon$ -Efficient Solution	جواب $\varepsilon$ -کارا
Elastic Constraint Method	روش محدودیت انعطاف‌پذیر
Euclidean Distance	فاصله اقلیدسی
Extension Algorithm	تعمیم الگوریتم
Extreme Point	نقطه راسی
Feasible Solution	جواب شدنی
Gradient Of Function	گرادیان تابع
Guaranteed Approximation Quality	کیفیت تضمین شده تقریب
Hyperplane Separating	ابرفلحه جداساز
Inner Approximation	تقریب درونی
Linearize	خطی کردن

Multiobjective Linear Programme	برنامه‌ریزی خطی چندهدفه
Necessary Conditions	شرایط لازم
Non-differentiable Objective	هدف مشتق‌ناپذیر
Nondominated Face	وجه غیرتسلطی
Objective Space	فضای هدف
Pareto Optimal	بهینه پارتو
Optimal Solution	جواب بهینه
Outer Approximation	تقریب بیرونی
P-Dimensional Simplex	سیمپلکس $p$ -بعدی
Prescription Dose	دوز تجویز شده
Proper Efficiency	کارای سره
Radiotherapy	پرتو درمانی
Scalarization Techniques	روش‌های اسکالرسازی
Strictly Dominated	اکیدا مسلط
Strong Duality	دوگانی قوی
Subgradient	زیرگرادیان
Supporting Hyperplane	ابرفحه حمایتی
Tumour Cells	سلول‌های تومور
Weak Duality	دوگانی ضعیف
Weakly Efficient Solution	جواب کارای ضعیف
Weakly Nondominated Solution	جواب غیرتسلطی ضعیف
Weighted Sum Method	روش مجموع وزن‌دار

## **Aabstract**

In this thesis, we first explain Benson's original algorithm for solving multi-objective linear programming problems in objective space. With some small changes to its procedures, we improve the computational speed. Then, applying changes on Benson's algorithm, we obtain approximation version of the algorithm for multiobjective linear problems. This algorithm by creating inner and outer approximations of the nondominated set, provides a set of  $\varepsilon$ -nondominated points. Later, multiobjective convex optimization are discussed. In these problems, it is required to compute an infinite set of nondominated points. Using the Benson's algorithm for MOLP, a method for approximating the nondominated set of convex multiobjective nonlinear programming problems is proposed. We prove that the inner approximation provides a set of weakly  $\varepsilon$ -nondominated points. In the case, the objectives and constraints are differentiable, is presented an efficient way to carry out the main step of the algorithm, i.e. the construction of a hyperplane separating an exterior point from the feasible set in objective space. Finally, the importance of approximation algorithms subject, will be identified with state application in the beam intensity optimization problems of radiotherapy planning, that can be formulated as a multiobjective linear programme with three objectives.

**Keywords:** Multiobjective optimization. Approximation algorithm. Convex optimization. Benson's algorithm.  $\varepsilon$ -nondominated point.  $\varepsilon$ -efficient solution. Radiotherapy.



Shahrood University  
Faculty Of Mathematical Sciences

Dissertation Submitted in Partial  
Fulfillment of The Requirements For The  
Degree of Master of Science in  
Applied Mathematics

# **Approximation algorithms for multicriteria optimization problems and their application**

Supervisors

**Dr. Jafar Fathali and Dr. Mehrdad Ghaznavi**

Advisor

**Dr. Maryam Ghorani**

by

**Zohreh Azizi**

September 2014