



دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی
گروه آمار

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
آمار، گرایش آمار ریاضی

عنوان

ویژگی‌ها و برآورد توزیع متا-تی مبتنی بر تابع مفصل

اساتید راهنما

دکتر احمد نزاکتی رضازاده - دکتر محسن محمدزاده

دانشجو

مریم فحیحی

شهریور ۱۳۹۳

به نام آن که جان را فکرت آموخت

پروردگارا...!

نه می توانم مویشان را که در راه عزت من سفید شد، سیاه کنم و نه برای دست های
پینه بسته شان که شمره تلاش برای افتخار من است، مرهمی دارم. پس توفیقم ده که
هر سخطه سگر گزارشان باشم و ثانیه های عمرم را در عصای دست بودنشان بگذارم.

اگر تنها ترین تنها شوم، باز خدا هست

او جان شین همه نداشتن هست...!

تقدیم بہ، مہتمم عمر نیرم

سپاس‌گزاری

سپاس خدای را که سخنوران، در ستودن او بمانند و شمارندگان، شمردن نعمت‌های او ندانند و کوشندگان، حق او را گزاردن نتوانند، و سلام و دورود بر محمد و خاندان پاک او، طاهران معصوم، هم‌آنان که وجودمان وامدار وجودشان است. به نشانه سپاس از الطافش، دستان مهربان‌ترین بندگان، پدر و مادر عزیزم را بوسه می‌زنم.

اینک که این مرحله را پشت سر می‌گذارم، از تلاش‌ها، زحمات و راهنمایی‌های ظریف و ارزشمند اساتید فرزانه و گرانمایه‌ام، جنابان دکتر محسن محمدزاده و دکتر احمد نزاکتی رضازاده کمال تشکر را دارم. باشد که این خردترین، بخشی از زحمات آنان را سپاس گوید.

مریم فحیحی
شهریور ۱۳۹۳

تعمدنامه

اینجانب مریم فتحی دانشجوی کارشناسی ارشد رشته آمار دانشکده علوم ریاضی دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان ویژگی‌ها و برآورد توزیع متا-تی مبتنی بر تابع مفصل، تحت راهنمایی دکتر احمد نراکتی رضازاده و دکتر محسن محمدزاده متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه شاهرود “ یا “ Shahrood University “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

مریم فتحی
شهریور ۱۳۹۳

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در بسیاری از مسایل کاربردی تحلیل جداگانه عوامل نمی‌تواند میزان ارتباط و تاثیراتی که چندین عامل در پدیده مورد نظر دارند را نمایان سازد، لذا لازم است توزیع توام عوامل مختلف تعیین گردد. چون در بسیاری از پدیده‌ها همبستگی بین عوامل وجود دارد و پذیره استقلال آن‌ها معنی‌دار نیست، نمی‌توان توزیع توام آن‌ها را به سادگی از طریق ضرب توزیع‌های کناری آن‌ها به دست آوریم. برای این منظور لازم است از بین خانواده‌های مفصل خانواده‌هایی که شرایط مدل‌بندی ساختار وابستگی پدیده را داشته باشند، انتخاب شوند. بنابراین، برای ساخت توزیع چندمتغیره از توزیع‌های کناری مشخص با ساختار وابستگی داده‌شده پیشنهاد می‌شود. توزیع‌های متا-بیضی‌گون به همین روش ساخته شده‌اند که توزیع متا-تی جزء این رده است و ساختار وابستگی این توزیع را می‌توان با تابع مفصل تی مدل‌بندی کرد. مفصل تی چوله اجازه می‌دهد تا بتوانیم مشاهدات وابسته‌ای که ناهمگونی بیشتری دارند را مدل‌سازی کنیم. ساختار وابستگی این توزیع را می‌توان با تابع مفصل تی چوله مدل‌بندی کرد.

کلمات کلیدی: توزیع چندمتغیره، توزیع بیضی‌گون، توزیع متا-بیضی‌گون، توزیع متا-تی، مفصل تی، توزیع تی چوله چندمتغیره، مفصل تی چوله، ساختار وابستگی

پیش‌گفتار

اغلب در تحلیل‌های چندمتغیره برای ساخت توزیع‌های چندمتغیره از توزیع‌های کناری مشخص با ساختار وابستگی داده‌شده پیشنهاد می‌شود. بر اساس قضیه اسکلا^۱ (۱۹۵۹) مفصل‌ها^۲ به عنوان ساختار وابستگی توزیع‌های چندمتغیره که تحت تبدیلات یکنوا ناورد^۳ هستند، تعریف می‌شوند. جانسون و کاتز^۴ (۱۹۷۲) از این ویژگی توابع مفصل برای ساختن توزیع‌های چندمتغیره عمومی و انعطاف‌پذیر استفاده کردند. در سال‌های اخیر بسیاری از آماردانان بر روی توزیع‌های چندمتغیره با ساختار مشخص مطالعه کرده‌اند. کلی^۵ (۱۹۹۶) با استفاده از روش نشانیدنی^۶، توزیع‌های متا-گوسی^۷ را ساخت. فنگ^۸ (۲۰۰۲) از توابع مفصل استفاده کرد و از توزیع‌های چندمتغیره بیضی‌گون (ECD)^۹ رده خاصی از توزیع‌های متا-بیضی‌گون^{۱۰} را تولید کرد که توزیع متا-تی در این رده است. این توزیع از یک مفصل تی^{۱۱} چندمتغیره و توزیع‌های کناری با درجه آزادی دلخواه تشکیل می‌شود. ماشال و زیوی^{۱۲} (۲۰۰۲) و بریمن^{۱۳} (۲۰۰۳) نشان دادند که برازش تجربی مفصل تی عموماً بالاتر از مفصل گوسی که ساختار وابستگی توزیع متا-گوسی است قرار دارد یکی از دلایل آن توانایی مفصل تی بهتر در نظر گرفتن وابستگی مقادیر کرانگین^{۱۴} که اغلب در داده‌های مالی مشاهده می‌شود، است. امبرجت و همکاران^{۱۵} (۲۰۰۲)، لندزمن و والدز^{۱۶} (۲۰۰۳) و کینر و همکاران^{۱۷} (۲۰۰۷) از توزیع‌های متا-بیضی‌گون در بخش‌های مختلف کاربردهای آماری و به‌طور عمده در شاخه‌های مختلف ریاضیات مالی مانند مدیریت ریسک بسیار استفاده کرده‌اند. این توزیع‌ها تعمیم توزیع‌های متا-تی، متا-گوسی و یک خانواده به اندازه کافی گسترده که می‌توانند بسیاری از مسائل واقعی را مدل‌بندی کنند، هستند. مفصل تی دارای وابستگی دنباله‌ای بالایی و وابستگی دنباله‌ای پایینی یکسان و مخالف صفر است اما در واقعیت مجموعه داده‌های تجربی که دارای چنین ویژگی باشند، زیاد نیستند. مفصل تی چوله این مشکل را حل کرده است؛ زیرا در

^۱ Sklar

^۲ Copula

^۳ Invariant

^۴ Johnson and Kotz

^۵ Kelly

^۶ Embedding method

^۷ Meta-Gaussian distributions

^۸ Fang

^۹ Multivariate elliptically contoured distributions

^{۱۰} Meta-elliptical contoured distributions

^{۱۱} T-copula

^{۱۲} Mashal and Zeevi

^{۱۳} Breyman

^{۱۴} Extreme value

^{۱۵} Embrechts, McNeil and Straumann

^{۱۶} Landsman and Valdez

^{۱۷} Kaynar, Birbil and Frenk

دنباله‌ها وابستگی متفاوت دارد. مفصل تی چوله توسط یک توزیع تی چوله چندمتغیره و توزیع‌های کناری آن تعریف می‌شود. کاتز و ناداراجا^۱ (۲۰۰۴)، نشان دادند انواع مختلفی از توزیع تی چوله چندمتغیره پیشنهاد شده است و به تبع آن، انواع مختلفی از مفصل تی چوله وجود دارند.

در این پایان‌نامه، توزیع‌های متا-بیضی‌گون و توزیع متا-تی که حالت خاص این توزیع‌های متا-بیضی‌گون است مورد مطالعه قرار می‌گیرد. به دلیل انعطاف بیشتر مفصل تی چوله نسبت به مفصل تی، تعاریف و مفاهیم اولیه توزیع تی چوله و مفصل تی چوله نیز آورده شده‌اند. به علاوه این توزیع‌ها به پارامترهای مجهولی بستگی دارد که لازم است برآورد شوند. در این پایان‌نامه ضمن بررسی ویژگی‌های این توزیع‌ها، روش‌های مختلف برآورد و محاسبه برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترهای آن‌ها مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

- در فصل اول، تعاریف و مفاهیم مربوط به تابع مفصل و ویژگی‌ها و مدل‌بندی وابستگی و نقش تابع مفصل در به دست آوردن ضرایب همبستگی مورد بررسی قرار می‌گیرد.
- در فصل دوم، به تعاریف و مفاهیم مربوط به توزیع‌های متا-بیضی‌گون و بررسی ویژگی‌های آن‌ها می‌پردازیم.
- در فصل سوم، توزیع متا-تی، مفصل تی، توزیع تی چوله چندمتغیره و مفصل تی چوله تعریف می‌شوند و همچنین روش‌های مختلف برآورد پارامترهای مجهول آن‌ها مورد مطالعه قرار می‌گیرد.
- در فصل چهارم، برآورد ماکسیمم درست‌نمایی را روی داده‌های شبیه‌سازی شده از توزیع متا-تی و توزیع تی چوله انجام خواهیم داد.

فهرست مطالب

ر	فهرست تصاویر
۱	آشنایی با مفاهیم مقدماتی تابع مفصل ۱
۱	۱.۱ مقدمه
۱	۲.۱ تعاریف و مفاهیم پایه
۲	۳.۱ تابع مفصل
۴	۱.۳.۱ تابع مفصل چگالی توأم
۵	۴.۱ توابع مفصل و مدل بندی وابستگی
۵	۱.۴.۱ توابع مفصل و ضریب همبستگی پیرسون
۶	۲.۴.۱ توابع مفصل و هماهنگی
۸	۳.۴.۱ توابع مفصل و اندازه های هماهنگی
۱۱	۵.۱ توابع مفصل و ویژگی های وابستگی
۱۱	۱.۵.۱ وابستگی کامل
۱۱	۲.۵.۱ وابستگی درجه دوم
۱۲	۳.۵.۱ وابستگی دنباله ای
۱۳	۶.۱ خانواده های توابع مفصل
۱۸	۲ آشنایی با توزیع های متا-بیضی گون
۱۹	۱.۲ توزیع بیضی گون
۲۰	۱.۱.۲ معیار پیوند
۲۱	۲.۱.۲ مفصل توزیع های بیضی گون دو متغیره
۲۴	۲.۲ توزیع متا-بیضی گون
۲۵	۱.۲.۲ ضریب همبستگی کندال
۲۶	۲.۲.۲ توزیع شرطی
۲۶	۳.۲.۲ حالت چندمتغیره

۳۱	آشنایی با توزیع متا-تی و مفصل تی	۳
۳۱	توزیع تی چندمتغیره و مفصل آن	۱.۳
۳۱	مفصل تی	۱.۱.۳
۳۳	توزیع متا-تی	۲.۱.۳
۳۳	ویژگی‌های مفصل تی	۲.۳
۳۳	ضریب وابستگی دنباله‌ای	۱.۲.۳
۳۴	برآورد مفصل تی	۳.۳
۳۵	برآورد ماکسیم درست‌نمایی	۱.۳.۳
۳۷	روش‌های برآورد ماکسیم درست‌نمایی	۲.۳.۳
۴۴	مفصل تی چوله	۴.۳
۴۴	انواع مفصل تی چوله	۱.۴.۳
۴۷	ساختار مفصل تی چوله	۲.۴.۳
۴۸	برآورد ماکسیم درست‌نمایی مفصل تی چوله	۳.۴.۳
۴۹	وابستگی دنباله‌ای مفصل تی چوله	۴.۴.۳
۵۱	شبیه‌سازی	۴
۵۱	برآورد ماکسیم درست‌نمایی توزیع متا-تی مبتنی بر مفصل تی	۱.۴
۵۴	برآورد ماکسیم درست‌نمایی توزیع تی چوله چندمتغیره مبتنی بر مفصل تی چوله	۲.۴
۵۶	پیشنهادات لازم برای آینده تحقیق	۳.۴
۵۷	کدهای مربوط به فصل چهارم	آ
۵۷	کدهای برآورد ماکسیم درست‌نمایی توزیع متا-تی مبتنی بر مفصل تی	۱.آ
۶۰	کدهای برآورد ماکسیم درست‌نمایی توزیع تی چوله چندمتغیره مبتنی بر مفصل تی چوله	۲.آ
۷۱	مراجع	
۷۶	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی	
۷۸	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی	

فهرست تصاویر

۲۴	توزیع بیضی‌گون	۱.۲
۲۸	توزیع تی متقارن چندمتغیره	۲.۲
۲۹	نمودار توزیع چندمدی	۳.۲
۳۷	نمودار تراز تابع چگالی توزیع متا-تی دومتغیره	۱.۳
۴۸	نمودار تراز مفصل تی چوله	۲.۳

فصل ۱

آشنایی با مفاهیم مقدماتی تابع مفصل

۱.۱ مقدمه

توابع مفصل برای اولین بار توسط اسکالر (۱۹۵۹) در قضیه مربوط به توابعی که توزیع‌های یک‌متغیره را به توزیع‌های چندمتغیره آن‌ها پیوند می‌دهد، مطرح شده است. تعیین ساختار وابستگی بین متغیرها یکی از موضوعاتی است که به‌طور گسترده در نظریه احتمال و آمار مورد استفاده قرار می‌گیرد تا جایی که بدون در نظر گرفتن نوع وابستگی متغیرها، مدل‌بندی مقدور نمی‌باشد. یکی از پذیره‌هایی که اغلب در مسائل و مدل‌های آماری مورد استفاده قرار می‌گیرد، پذیره استقلال است که بیشتر برای راحتی محاسبات نظری در نظر گرفته می‌شود، اما علوم جدید و تکنولوژی روز در برخورد با مسائل طبیعی به این نتیجه رسیده‌اند که نمی‌توان در تفسیر هر پدیده‌ای بر اساس پذیره‌های موجود عمل نمود، بلکه برای تحلیل یک پدیده مرتبط با عامل‌های وابسته بایستی ابزارهایی برای اندازه‌گیری وابستگی آن‌ها نیز در نظر گرفته شود. توابع مفصل می‌توانند ساختار وابستگی بین متغیرها را به صورت یک مدل نشان دهند و ابزاری فراهم نمایند که بر اساس آن‌ها بتوان رابطه بین متغیرها را مدل‌بندی نمود.

۲.۱ تعاریف و مفاهیم پایه

تعریف ۰.۱.۲.۱ (امیدی، ۱۳۸۶) فرض کنید S_1 و S_2 دو زیرمجموعه ناتهی از مجموعه اعداد حقیقی توسیع یافته $\bar{R} = R \cup \{-\infty, \infty\}$ ، $H(\cdot, \cdot)$ تابعی حقیقی مقدار با دامنه $S_1 \times S_2$ و $B = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$

مستطیلی در دامنه H باشد. در این صورت H -حجم^۱ مستطیل B به صورت

$$V_H(B) = H(x_2, y_2) - H(x_2, y_1) - H(x_1, y_2) + H(x_1, y_1)$$

تعریف می‌شود.

تعریف ۲.۲.۱. (امیدی، ۱۳۸۶) تابع حقیقی $H(\cdot, \cdot)$ دوسعودی^۲ نامیده می‌شود، هرگاه برای هر مستطیلی که رئوس آن در دامنه H قرار دارد، $V_H(B) \geq 0$.

تعریف ۳.۲.۱. (امیدی، ۱۳۸۶) فرض کنید a_1 کوچکترین عضو S_1 و a_2 کوچکترین عضو S_2 باشد. گوئیم تابع H از $S_1 \times S_2$ به R جهت‌دار^۳ است، اگر برای هر $(x, y) \in S_1 \times S_2$ رابطه

$$H(a_1, y) = H(x, a_2) = 0$$

برقرار باشد.

۳.۱ تابع مفصل

توابع مفصل به دو دلیل مورد علاقه محققان رشته آمار قرار دارد: ۱- به عنوان راهی برای مطالعه وابستگی بین متغیرها به صورت ناپارامتری. ۲- به عنوان نقطه شروع ساخت توزیع‌های چندمتغیره. مدتی طولانی آماردانان علاقمند بودند تا ارتباط بین توابع توزیع توأم چندبعدی با توابع توزیع با بعد پایین‌تر را به دست آورند. اسکالر (۱۹۵۹) رده جدیدی از توابع را با عنوان توابع مفصل معرفی نمود. این توابع در واقع توزیع چندمتغیره با کناری‌های توزیع یکنواخت بر $[0, 1]$ هستند.

تعریف ۱.۳.۱. (امیدی، ۱۳۸۶) تابع $C^*(\cdot, \cdot)$ یک زیرمفصل نامیده می‌شود هرگاه دارای خصوصیات

الف) دامنه C^* مجموعه $S_1 \times S_2$ است، که در آن S_1 و S_2 زیرمجموعه‌هایی از $[0, 1]$ هستند.

ب) C^* تابع جهت‌دار و دوسعودی است.

ج) برای هر $x \in S_1$ و $y \in S_2$ ، $C^*(u, 1) = u$ و $C^*(1, v) = v$.

^۱H-Volume

^۲Tow increasing

^۳Grounded

باشد.

تعریف ۲.۳.۱. (امیدی، ۱۳۸۶) یک زیرمفصل با دامنه I^2 ، تابع مفصل دوبعدی نامیده می‌شود.

تعریف معادل دیگری برای تابع مفصل دوبعدی به صورت زیر ارائه می‌شود:

تعریف ۳.۳.۱. (امیدی، ۱۳۸۶) تابع $C: I^2 \rightarrow I$ را تابع مفصل دوبعدی گوئیم هرگاه:

الف) (شرط کرانداری): برای هر $u \in I$

$$C(u, 1) = C(1, u) = u,$$

$$C(u, 0) = C(0, u) = 0.$$

ب) (شرط یکنوایی): برای هر u_1, u_2, v_1, v_2 در I ، اگر $u_1 \leq u_2$ و $v_1 \leq v_2$ آن‌گاه

$$C(u_2, v_2) - C(u_1, v_2) - C(u_2, v_1) + C(u_1, v_1) \geq 0.$$

در این قسمت دو تعریف دیگر از توابع مفصل که استفاده بیشتری نسبت به تعاریف بالا دارند ارائه می‌شوند.

تعریف ۴.۳.۱. (امیدی، ۱۳۸۶) دو متغیر تصادفی X و Y به ترتیب با توابع توزیع $F_X(x) = P(X \leq x)$

و $F_Y(y) = P(Y \leq y)$ و تابع توزیع توأم $H(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$ را در نظر بگیرید. برای هر

جفت عدد حقیقی (x, y) می‌توان سه‌تایی $(F_X(x), F_Y(y), H(x, y))$ را به گونه‌ای در نظر گرفت که هر

کدام به یک نقطه $(F_X(x), F_Y(y))$ در مربع واحد $[0, 1] \times [0, 1]$ و این زوج با مقدار $H(x, y)$ در بازه

$[0, 1]$ مطابقت داشته باشد. این رابطه که یک مقدار مربوط به تابع توزیع توأم را به توابع‌های یک‌بعدی

اختصاص می‌دهد، تابع مفصل نامیده می‌شود.

تعریف ۵.۳.۱. (امیدی، ۱۳۸۶) تابع مفصل تابعی چندمتغیره با توابع کناری یکنواخت بر بازه $[0, 1]$

است که توابع توزیع چندمتغیره را به توابع‌های کناری آن‌ها پیوند می‌دهد.

قضیه ۶.۳.۱. (امیدی، ۱۳۸۶) اگر $C(\cdot, \cdot)$ یک تابع مفصل باشد، آن‌گاه برای هر (u, v) در دامنه C

داریم

$$\max(u + v - 1, 0) \leq C(u, v) \leq \min(u, v) \quad (1.1)$$

برهان. برای هر نقطه اختیاری (u, v) در I^2 داریم $C(u, v) \leq C(u, 1) = u$ و $C(u, v) \leq C(1, v) = v$ بنابراین $C(u, v) \leq \min(u, v)$. از طرفی با توجه به نامساوی $V_C([u, 1] \times [v, 1]) \geq 0$ که نامساوی $C(u, v) \geq \max(u+v-1, 0)$ را نتیجه می‌دهد و مثبت بودن تابع مفصل نامساوی $C(u, v) \geq \max(u+v-1, 0)$ همواره برقرار است. \square

معمولاً کران‌های بالا و پایین نامساوی (۱.۱) را به ترتیب با M و W نشان می‌دهند و به کران‌های بالا و پایین فرچت-هافدینگ^۱ معروف هستند (امیدی، ۱۳۸۶).

یکی از قضایای اصلی در مبحث توابع مفصل قضیه اسکالر است که اساس بسیاری از کاربردهای این توابع در آمار را تشکیل می‌دهد. این قضیه نقش اصلی تابع مفصل را در ارتباط بین تابع توزیع توأم چندمتغیره و توابع کناری مشخص می‌سازد.

قضیه ۱.۳.۱. (اسکلار، ۱۹۵۹) فرض کنید $H(\cdot, \cdot)$ تابع توزیع توأم با توابع توزیع کناری $F_X(\cdot)$ و $G_Y(\cdot)$ باشد. در این صورت تابع مفصلی مانند $C(\cdot, \cdot)$ وجود دارد به طوری که برای هر x و y در \bar{R}

$$H(x, y) = C(F_X(x), G_Y(y))$$

برقرار است.

این قضیه بیانگر این است که برای هر تابع توزیع $F_X(\cdot)$ و $G_Y(\cdot)$ و تابع مفصل C می‌توان تابع توزیع توأم $H(\cdot, \cdot)$ را با توابع توزیع کناری $F_X(\cdot)$ و $G_Y(\cdot)$ ساخت. اسکالر (۱۹۵۹) نشان داد اگر $F_X(\cdot)$ و $G_Y(\cdot)$ مطلقاً پیوسته باشند، آنگاه تابع مفصل یکتاست، در غیر این صورت $C(\cdot, \cdot)$ به صورت یک تابع غیر یکتا بر روی $R_F \times R_G$ تعریف می‌شود، که R_G و R_F به ترتیب برد تابع $F_X(\cdot)$ و $G_Y(\cdot)$ هستند.

۱.۳.۱ تابع مفصل چگالی توأم

اگر $f_X(x)$ و $f_Y(y)$ توابع چگالی دو متغیر تصادفی پیوسته X و Y باشند، آنگاه تابع چگالی توأم برای دو متغیر به صورت

$$f_{X,Y}(x, y) = c(F_X(x), F_Y(y))f_X(x)f_Y(y)$$

^۱Frechet-Hoeffding

است. تابع c تابع مفصل چگالی است و از رابطه

$$c(u, v) = \frac{\partial^2 C(u, v)}{\partial u \partial v}$$

به دست می‌آید.

۴.۱ توابع مفصل و مدل‌بندی وابستگی

۱.۴.۱ توابع مفصل و ضریب همبستگی پیرسون

ضریب همبستگی خطی پیرسون یکی از مهمترین معیارهای اندازه‌گیری میزان ارتباط خطی بین متغیرهاست و برای دو متغیر تصادفی غیر صفر با واریانس متناهی X و Y به صورت

$$\rho = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X).Var(Y)}}$$

تعریف می‌شود. در حالتی که تقریباً همه جا^۱ (a.e) بین متغیرها ارتباط خطی برقرار باشد، مقدار ضریب همبستگی برابر ۱ یا -۱ و در غیر این صورت در بازه $(-1, 1)$ قرار می‌گیرد.

از ویژگی‌های ضریب همبستگی خطی پیرسون، پایا (ناوردا) بودن تحت تبدیلات یکنوای خطی از متغیرهاست. اما این ویژگی به علت وابسته بودن ضریب همبستگی به توزیع کناری برای تبدیلات غیرخطی متغیرها برقرار نیست.

لهمن^۲ (۱۹۶۶) نشان داد ضریب همبستگی پیرسون را می‌توان بر اساس تابع توزیع توأم و توابع توزیع کناری به صورت

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{Var(X).Var(Y)}} \iint_{R^2} [H(x, y) - F_X(x)G_Y(y)] dx dy$$

به دست آورد. با قرار دادن $u = F_X(x)$ و $v = G_Y(y)$ می‌توان آن را بر حسب تابع مفصل و توابع توزیع کناری با تغییر متغیر به صورت

^۱Almost every where

^۲Lehmann

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{\text{Var}(X) \cdot \text{Var}(Y)}} \iint_{\Gamma} [C(u, v) - uv] dF_X^{-1}(u) dG_Y^{-1}(v) \quad (2.1)$$

نوشت. بنابراین ضریب همبستگی پیرسون علاوه بر تابع مفصل به توابع توزیع کناری متغیرها نیز وابسته است.

۲.۴.۱ توابع مفصل و هماهنگی

دو متغیر تصادفی هماهنگ^۱ نامیده می‌شوند، هرگاه مقادیر کوچک و بزرگ یک متغیر با مقادیر کوچک و بزرگ متغیر دیگر همراه باشند. (x_1, y_1) و (x_2, y_2) هماهنگ هستند هرگاه

$$(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) \geq 0$$

و چنانچه

$$(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) \leq 0$$

ناهماهنگ هستند.

برای دو متغیر تصادفی پیوسته تابع هماهنگی برابر با تفاضل بین احتمال‌های هماهنگ بودن و ناهماهنگ بودن دو متغیر به صورت

$$Q = P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0] \quad (3.1)$$

تعریف می‌شود.

قضیه ۱.۴.۱. (جو، ۱۹۹۷) فرض کنید (X_1, Y_1) و (X_2, Y_2) دو بردار تصادفی پیوسته به ترتیب با توابع توزیع توأم $H_1(\cdot, \cdot)$ و $H_2(\cdot, \cdot)$ و تابع کناری $F_X(\cdot)$ (برای X_1 و X_2) و $G_Y(\cdot)$ (برای Y_1 و Y_2) باشند. اگر $C_1(\cdot, \cdot)$ و $C_2(\cdot, \cdot)$ دو تابع مفصل برای (X_1, Y_1) و (X_2, Y_2) باشند به گونه‌ای که $H_1(x, y) = C_1(F(x), G(y))$ و $H_2(x, y) = C_2(F(x), G(y))$ ، آنگاه توابع مفصل $C_1(\cdot, \cdot)$ و $C_2(\cdot, \cdot)$ از طریق رابطه

^۱Concordant

$$Q = Q(C_1, C_2) = \int \int_{I^2} C_2(u, v) dC_1(u, v) - 1 \quad (4.1)$$

با تابع هماهنگی Q در ارتباط هستند.

برهان. با توجه به رابطه

$$P((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0) = 1 - P((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0)$$

می‌توان رابطه (۳.۱) را به صورت

$$Q = 2P((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0) - 1 \quad (5.1)$$

نوشت. اما

$$P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] = P(X_1 > X_2, Y_1 > Y_2) + P(X_1 < X_2, Y_1 < Y_2).$$

چون

$$\begin{aligned} P(X_2 < X_1, Y_2 < Y_1) &= \iint_{R^2} P(X_2 < x, Y_2 < y) dC_1(F(x), G(y)) \\ &= \iint_{R^2} H_2(x, y) dC_1(F(x), G(y)) \\ &= \iint_{R^2} C_2(F(x), G(y)) dC_1(F(x), G(y)) \\ &= \iint_{I^2} C_2(u, v) dC_1(u, v) \end{aligned}$$

و از آن جایی که

$$E(U) = E(V) = \frac{1}{2}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} P(X_2 \geq X_1, Y_2 \geq Y_1) &= \iint_{R^2} p(X_2 \geq x, Y_2 \geq y) dC_1(F(x), G(y)) \\ &= \iint_{R^2} [1 - F(x) - G(y) + C_2(F(x), G(y))] dC_1(F(x), G(y)) \\ &= \iint_{I^2} C_2(u, v) dC_1(u, v) \quad (6.1) \end{aligned}$$

□

بنابر روابط (۵.۱) و (۶.۱) اثبات رابطه (۴.۱) کامل می‌شود.

۳.۴.۱ توابع مفصل و اندازه‌های هماهنگی

در این بخش برخی از اندازه‌های هماهنگی بررسی و ارتباط تابع مفصل در به دست آوردن آن‌ها شرح داده می‌شود.

(۱) معیار τ کندال

فرض کنید $\{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$ مشاهدات نمونه‌ای از بردار تصادفی پیوسته (X, Y) باشند. در این نمونه $\binom{n}{2}$ جفت متمایز وجود دارد که هماهنگ یا ناهماهنگ هستند. اگر c تعداد جفت‌های هماهنگ و d تعداد جفت‌های ناهماهنگ باشد، آنگاه معیار τ کندال به صورت

$$\tau = \frac{c - d}{\binom{n}{2}}$$

تعریف می‌شود، که تفاضل تعداد جفت‌های هماهنگ و ناهماهنگ برای نمونه مشاهده‌شده است (امیدی، ۱۳۸۶). دقت داشته باشید که τ از جنس فراوانی نسبی است و بنابراین می‌تواند تعبیر احتمالی داشته باشد که در زیر به آن اشاره می‌کنیم.

تعریف ۲.۴.۱. (امیدی، ۱۳۸۶) اگر (X_1, Y_1) و (X_2, Y_2) دو بردار تصادفی مستقل با توزیع توأم $H(\cdot, \cdot)$ باشند، معیار τ کندال به صورت

$$\tau = P[(X_2 - X_1)(Y_2 - Y_1) > 0] - P[(X_2 - X_1)(Y_2 - Y_1) < 0] \quad (7.1)$$

تعریف می‌شود.

فرض کنید (X, Y) یک بردار تصادفی با تابع مفصل $C(\cdot, \cdot)$ باشد، از مقایسه رابطه (۷.۱) با روابط (۳.۱) و (۴.۱) ملاحظه می‌شود که معیار τ کندال از طریق

$$\tau = Q(C, C) = 4 \iint_{\mathcal{R}^2} C(u, v) dC(u, v) - 1$$

با تابع مفصل C در ارتباط است، که آن را می‌توان با توجه به تعریف امید ریاضی به صورت

$$\tau = 4E(C(U, V)) - 1$$

نیز نشان داد (امیدی، ۱۳۸۶).

(۲) ضریب همبستگی اسپیرمن

ضریب همبستگی اسپیرمن همانند ضریب همبستگی کندال بر اساس هماهنگ و ناهماهنگ بودن متغیرهای تصادفی به دست می‌آید، با این تفاوت که ضریب همبستگی اسپیرمن برای سه بردار تصادفی مستقل (X_1, Y_1) و (X_2, Y_2) و (X_3, Y_3) به صورت

$$\rho_S = 3P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) < 0]$$

تعریف می‌شود. اگر فرض شود (X, Y) یک بردار پیوسته با تابع مفصل $C(\cdot, \cdot)$ است، آن‌گاه با قرار دادن تابع مفصل حاصل ضرب Π (حاصل ضرب توابع توزیع کناری) به جای C_1 و تابع مفصل C به جای C_2 در قضیه ۱.۴.۱ ملاحظه می‌شود که ضریب همبستگی اسپیرمن (ρ_S) به صورت

$$\begin{aligned} \rho_S &= 3Q(C, \Pi) = 12 \iint_{I^2} C(u, v) dudv - 3 \\ &= 12 \iint_{I^2} uv dC(u, v) - 3 \end{aligned} \quad (۸.۱)$$

با تابع مفصل $C(\cdot, \cdot)$ در ارتباط است. اگر X و Y به ترتیب دارای توزیع $F_X(\cdot)$ و $G_Y(\cdot)$ باشند، با فرض $U = F(X)$ و $V = G(Y)$ داریم:

$$\begin{aligned} \rho_S &= 12 \iint_{I^2} uv dC(u, v) - 3 \\ &= 12E(UV) - 3 \\ &= \frac{E(UV) - \frac{1}{4}}{\frac{1}{12}} \\ &= \frac{Cov(U, V)}{\sqrt{Var(U)} \cdot \sqrt{Var(V)}} \\ &= \rho(F(X), G(Y)). \end{aligned}$$

یعنی ضریب همبستگی اسپیرمن همان ضریب همبستگی خطی بین $F(X)$ و $G(Y)$ است. با توجه به این که تابع توزیع تجمعی برای هر مشاهده را می‌توان بر حسب رتبه هر مشاهده، R_i ، به صورت $\frac{R_i}{n}$ نوشت، بنابراین ضریب همبستگی اسپیرمن یک ضریب همبستگی خطی بین رتبه مربوط به هر مشاهده است.

با توجه به رابطه (۲.۱)، رابطه (۸.۱) را می‌توان به صورت

$$\rho_S = 12 \iint_{I^2} [C(u, v) - uv] dudv$$

نشان داد. این رابطه بیان می‌کند که ضریب همبستگی اسپیرمن میانگین فاصله توزیع توأم (به وسیله تابع مفصل) و حاصل ضرب توابع توزیع کناری (به وسیله تابع مفصل Π) را اندازه می‌گیرد (امیدی، ۱۳۸۶).

(۳) ضریب همبستگی جینی

ضریب همبستگی جینی^۱ توسط جینی (۱۹۱۰) به صورت

$$\gamma_C = \frac{n^{\frac{1}{\nu}}}{\left[\frac{n^{\frac{1}{\nu}}}{\nu}\right]} \left[\sum_{i=1}^n \left| \frac{p_i}{n} + \frac{q_i}{n} - 1 \right| - \sum_{i=1}^n \left| \frac{p_i}{n} - \frac{q_i}{n} \right| \right] \frac{1}{n}$$

تعریف شد، که در آن $[t]$ جزء صحیح عدد t و p_i و q_i به ترتیب رتبه‌های مربوط به مشاهدات دو متغیر تصادفی پیوسته X و Y هستند. اگر در این رابطه قرار داده شود $u = F(X)$ و $v = G(Y)$ و n به سمت بی‌نهایت میل کند، آنگاه ضریب همبستگی جینی به صورت

$$\gamma_C = 2 \iint_{I^{\nu}} |u + v - 1| - |u - v| dC(u, v)$$

با تابع مفصل C در ارتباط است (امیدی، ۱۳۸۶).

قضیه ۳.۴.۱. (نلسن، ۱۹۹۹) اگر X و Y دو متغیر تصادفی پیوسته با تابع مفصل C باشند، آنگاه

ضریب همبستگی جینی به صورت

$$\gamma_C = Q(C, M) + Q(C, W)$$

است، که در آن M و W به ترتیب کران‌های بالا و پایین فرچت-هافدینگ هستند.

برهان. چون تابع مفصل یک تابع توزیع توأم با توابع کناری یکنواخت بر $[0, 1]$ است، داریم

$$\iint_{I^{\nu}} u dC(u, v) = \iint_{I^{\nu}} v dC(u, v) = \frac{1}{\nu}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} Q(C, M) &= 4 \iint_{I^{\nu}} M(u, v) dC(u, v) - 1 \\ &= 2 \iint_{I^{\nu}} u + v |u - v| dC(u, v) \\ &= 1 - 2 \iint_{I^{\nu}} |u - v| dC(u, v). \end{aligned} \quad (9.1)$$

^۱Gini correlation

به طریق مشابه با استفاده از رابطه $W(u, v) = \frac{u+v-1+|u+v-1|}{2}$ برای قسمت دوم می‌توان نشان داد

$$Q(C, W) = 2 \iint_{\mathcal{I}^2} |u + v - 1| dC(u, v) - 1. \quad (10.1)$$

با توجه به روابط (۹.۱) و (۱۰.۱) اثبات قضیه تمام است. □

قضیه ۳.۴.۱ بیانگر آن است که ضریب همبستگی جینی مجموع فاصله تابع مفصل C از توابع M و W است.

۵.۱ توابع مفصل و ویژگی‌های وابستگی

در این بخش برخی از ویژگی‌های وابستگی^۱ مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۱.۵.۱ وابستگی کامل

برای هر تابع مفصل $C(\cdot, \cdot)$ با توجه به قضیه ۶.۳.۱، کران‌های بالا و پایین فرچت-هافدینگ به گونه‌ای وجود دارند که برای حالت دوبعدی این کران‌ها خود تابع مفصل هستند. با توجه به اینکه M و W به ترتیب کمترین و بیشترین ارتباط بین دو متغیر را نشان می‌دهند، بنابراین می‌توان گفت که به ترتیب توزیع بردارهای تصادفی $(U, 1 - U)^T$ و $(U, U)^T$ هستند، که در آن‌ها متغیر تصادفی U دارای توزیع یکنواخت بر بازه $[0, 1]$ است. در این حالت گوییم W دارای وابستگی کامل منفی^۲ و M دارای وابستگی کامل مثبت^۳ است (امیدی، ۱۳۸۶).

۲.۵.۱ وابستگی درجه دوم

مفاهیم مربوط به وابستگی درجه دوم برای اولین بار توسط لهن (۱۹۶۶) ارائه شدند، که در این بخش مفاهیم مربوط به این وابستگی‌ها و ارتباط آن‌ها با توابع مفصل مورد بررسی قرار می‌گیرند.

تعریف ۱.۵.۱. (امیدی، ۱۳۸۶) اگر X و Y دو متغیر تصادفی پیوسته با تابع توزیع توأم $H(\cdot, \cdot)$ باشند،

^۱Dependence properties

^۲Negatively complete dependence

^۳Positively complete dependence

گوییم X و Y دارای وابستگی درجه دوم مثبت هستند^۱ (PQD) اگر و فقط اگر

$$H(x, y) \geq F(x)G(y) \quad \forall (x, y) \in \bar{R}^2$$

در غیر این صورت گوییم X و Y دارای وابستگی درجه دوم منفی^۲ (NQD) هستند.

(امیدی، ۱۳۸۶) تابع مفصل C دارای خاصیت PQD است، هرگاه برای هر u و v در I^2 داشته

باشیم $C(u, v) \geq uv$ و دارای خاصیت NQD است هرگاه رابطه $C(u, v) \leq uv$ برقرار باشد.

۳.۵.۱ وابستگی دنباله‌ای

مفاهیم مربوط به وابستگی دنباله‌ای در توزیع‌های توأم برای مقادیر کرانگین بیان می‌شوند که تحت عنوان وابستگی دنباله‌ای بالایی و پایینی تعریف می‌شوند. در این بخش تعاریف مربوط به این وابستگی به همراه نقش مفصل در تفسیر این وابستگی ارائه می‌شود.

تعریف ۳.۵.۱. (امیدی، ۱۳۸۶) فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی پیوسته با توزیع‌های کناری $F_X(\cdot)$ و $G_Y(\cdot)$ باشند. ضریب وابستگی دنباله‌ای بالایی^۳ به صورت

$$\lambda_U = \lim_{u \rightarrow 1^-} P\{Y > G^{(-1)}(u) | X > F^{(-1)}(u)\} \quad (11.1)$$

تعریف می‌شود.

اگر $\lambda_U \in (0, 1]$ آنگاه X و Y دارای وابستگی دنباله‌ای بالایی هستند و اگر $\lambda = 0$ آنگاه X و Y

در دنباله بالایی به طور مجانبی مستقل هستند.

تعریف ۳.۵.۱. (امیدی، ۱۳۸۶) فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی پیوسته با توزیع‌های کناری $F_X(\cdot)$ و $G_Y(\cdot)$ باشند. ضریب وابستگی دنباله‌ای پایینی^۴ به صورت

$$\lambda_L = \lim_{u \rightarrow 0^+} P\{Y < G^{(-1)}(u) | X < F^{(-1)}(u)\}$$

^۱Positively quadrant dependence

^۲Negatively quadrant dependence

^۳Coefficient of upper tail dependence

^۴Coefficient of lower tail dependence

تعریف می‌شود. اگر $\lambda_L \in (0, 1]$ آنگاه X و Y دارای وابستگی دنباله‌ای پایینی هستند و اگر $\lambda = 0$ آنگاه X و Y در دنباله پایینی به طور مجانبی مستقل هستند.

رابطه (۱۱.۱) به صورت

$$\lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1 - P(X \leq F^{(-1)}(u)) - P(Y \leq G^{(-1)}(u)) + P(X \leq F^{(-1)}(u), Y \leq G^{(-1)}(u))}{1 - P(X \leq F^{(-1)}(u))}$$

قابل بیان است، که می‌توان با استفاده از آن مفاهیم مربوط به تابع مفصل را به کار برد.

تعریف ۴.۵.۱. (امیدی، ۱۳۸۶) فرض کنید $C(\cdot, \cdot, \theta)$ یک خانواده از توابع مفصل باشد، اگر

$$\lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2u + C(u, u; \theta)}{1 - u}$$

موجود باشد، گوئیم C دارای وابستگی دنباله‌ای بالایی است اگر و فقط اگر $\lambda_U \in (0, 1]$ برای $\lambda_U = 0$ گوئیم C در دنباله بالایی به طور مجانبی مستقل است.

تعریف ۵.۵.۱. (امیدی، ۱۳۸۶) فرض کنید $C(\cdot, \cdot, \theta)$ یک خانواده از توابع مفصل باشد، اگر

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{C(u, u; \theta)}{u}$$

موجود باشد، گوئیم C دارای وابستگی دنباله‌ای پایینی است اگر و فقط اگر $\lambda_L \in (0, 1]$ برای $\lambda_L = 0$ گوئیم C در دنباله پایینی به طور مجانبی مستقل است.

با توجه به این که اندازه‌های مختلف همبستگی را می‌توان با استفاده از توابع مفصل بیان نمود، از

این توابع می‌توان برای مدل‌بندی ساختار وابستگی بین متغیرها استفاده کرد.

۶.۱ خانواده‌های توابع مفصل

در این بخش چند خانواده از توابع مفصل دومتغیره به همراه توابع مفصل چگالی آن‌ها معرفی می‌شوند.

(۱) خانواده گاوسی

خانواده تابع مفصل گاوسی^۱ به صورت

$$C^{Ga}(u, v; \rho) = \Phi_\rho(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v)) \quad (۱۲.۱)$$

است، که در آن Φ_ρ تابع توزیع نرمال استاندارد دومتغیره با ضریب همبستگی ρ است. با توجه به رابطه

(۱۲.۱) تابع توزیع توأم به صورت

^۱Gaussian copula

$$\Phi_{\rho}(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v)) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(v)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{\frac{\rho uv - u^2 - v^2}{1-\rho^2}\right\} dudv$$

ساده می‌شود. تابع مفصل چگالی توأم خانواده گاوسی نیز عبارت است از

$$c^{Ga}(u, v; \rho) = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{\frac{u^2 + v^2}{2} + \frac{\rho uv - u^2 - v^2}{1-\rho^2}\right\}.$$

(۲) خانواده t -استیودنت

فرض کنید t_v تابع توزیع t -استیودنت با درجه آزادی v است. تابع توزیع دو متغیره با ضریب همبستگی

ρ به صورت

$$H(x, y; \rho, v) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}} \left(1 + \frac{s^2 + t^2 - 2st\rho}{v(1-\rho^2)}\right)^{-\frac{v+2}{2}} dsdt$$

است. بنابراین تابع مفصل دو متغیره t -استیودنت به صورت

$$\begin{aligned} C(u, v; \rho, v) &= t_{\rho, v}(t^{-1}(u), t^{-1}(v)) \\ &= \int_{-\infty}^{t^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{t^{-1}(v)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}} \left(1 + \frac{s^2 + t^2 - 2st\rho}{v(1-\rho^2)}\right)^{-\frac{v+2}{2}} dsdt \end{aligned}$$

و تابع مفصل چگالی آن به صورت

$$c(u, v; \rho, v) = \rho^{-\frac{1}{v}} \frac{\Gamma(\frac{v+2}{2})\Gamma(\frac{v}{2})}{\Gamma(\frac{v+1}{2})^2} \cdot \left(1 + \frac{x^2 + y^2 - 2\rho xy}{v(1-\rho^2)}\right)^{-\frac{(v+2)}{2}}$$

تعریف می‌شوند.

(۳) خانواده فرجه

فرجه^۱ (۱۹۵۸) برای مقادیر $p, q \in I$ و $p + q \leq 1$ ، خانواده تابع مفصل

$$\begin{aligned} C^F(u, v; p, q) &= p \max(u, v - 1, 0) + (1 - p - q)uv + q \min(u, v) \\ &= pW + (1 - p - q)\Pi + qM \end{aligned}$$

^۱Frechet

را تعریف نمود که در آن Π تابع مفصل حاصل ضرب است. تابع مفصل چگالی برای این خانواده به صورت

$$c^F(u, v; p, q) = 1 - p - q$$

است.

(۴) خانواده گالامبوس

گالامبوس^۱ (۱۹۷۸) برای $\theta \in [0, \infty)$ تابع مفصل

$$C(u, v; \theta) = uv \exp\{[(-\ln u)^{-\theta} + (-\ln v)^{-\theta}]^{\frac{1}{\theta}}\}$$

را معرفی نمود، که تابع مفصل چگالی آن به صورت

$$c(u, v; \theta) = \frac{C(u, v)}{uv} \{1 - [(-\ln u)^{-\theta} + (-\ln v)^{-\theta}]^{\frac{1}{\theta}-1}\} [(-\ln u)^{-\theta-1} + (-\ln v)^{-\theta-1}] + [(-\ln u)^{-\theta} + (-\ln v)^{-\theta}]^{\frac{1}{\theta}-2} [(-\ln u)(-\ln v)]^{-\theta-1} \times [1 + \theta + [(-\ln u)^{-\theta} + (-\ln v)^{-\theta}]^{\frac{1}{\theta}}]$$

به دست می‌آید.

(۵) خانواده مارشال الکین

خانواده مارشال الکین اولین بار توسط مارشال و الکین^۲ (۱۹۶۷a, ۱۹۶۷b) به صورت

$$C(u, v; m, n) = \min\{u^{1-m}v, uv^{1-n}\} = \begin{cases} (1-m)u^{(1-2m)}v & u^m \geq v^n \\ (1-n)v^{(1-2n)}u & u^m < v^n \end{cases}$$

معرفی شد. تابع چگالی برای این خانواده از مفصل‌ها به صورت

^۱Galambos

^۲Marshall and Olkin

$$c(u, v; m, n) = \begin{cases} (1-m)u^m & u^m \geq v^n \\ (1-n)v^n & u^m < v^n \end{cases}$$

تعریف می‌شود.

(۶) خانواده فارلی-گامبل-مورگسترن

خانواده توابع مفصل فارلی-گامبل-مورگسترن توسط مورگسترن^۱ (۱۹۵۶) برای $1 - \theta \leq \theta \leq 1$ به صورت

$$C(u, v; \theta) = uv[1 - \theta(1-u)(1-v)]$$

معرفی شد، که تابع مفصل چگالی آن به صورت

$$c(u, v; \theta) = 1 - \theta(1-2u)(1-2v)$$

تعریف می‌شود.

(۷) خانواده علی-میخائیل-حق

یکی از توابع مفصل که از روش تجربی به دست آمده است، تابع مفصل علی-میخائیل-حق است که برای $\theta \in [0, 1]$ به صورت

$$C(u, v; \theta) = \frac{uv}{1 - \theta(1-u)(1-v)}$$

تعریف می‌شود. تابع مفصل چگالی این خانواده نیز به صورت

$$c(u, v; \theta) = \frac{[1 - \theta(1-u)(1-v)(1-\theta)] + 2v}{[1 - \theta(1-u)(1-v)(1-\theta)]^2}$$

به دست می‌آید نلسن (۲۰۰۵).

(۸) خانواده پلاکت

خانواده تابع مفصل پلاکت به صورت

^۱Morgenstern

$$C(u, v; \theta) = \frac{[1 + (\theta - 1)(u + v)] - \sqrt{1 + (\theta - 1)(u + v)^2 - 4uv\theta(\theta - 1)}}{2(\theta - 1)}$$

است و تابع مفصل چگالی آن به صورت

$$c(u, v; \theta) = [(1 + (\theta - 1)(u + v))^2 - 4\theta(\theta - 1)uv]^{-\frac{1}{2}} \theta [1 + (\theta - 1)(u + v - 2uv)].$$

تعریف می‌شود نلسن (۲۰۰۵).

در فصل بعدی توزیع‌های بیضی‌گون و متا-بیضی‌گون تعریف و ویژگی‌های آن‌ها بیان خواهند شد.

پس از آن توابع مفصل توزیع‌های بیضی‌گون و متا-بیضی‌گون نیز معرفی می‌شوند.

فصل ۲

آشنایی با توزیع های متا-بیضی گون

توزیع های چندمتغیره با توزیع های کناری داده شده تنها با نظریه های آماری به دست نمی آیند، بلکه اغلب از مسائل کاربردی به خصوص در مفاهیم مربوط به مخاطره و تحلیل تصمیم در سیستم های پیچیده چندمتغیره تولید می شوند. جووینی و کلمن^۱ (۱۹۹۶) به مطالعه و بررسی نظرات کارشناسان در مورد این نوع مدل ها پرداختند و فریس و همکاران^۲ (۱۹۹۶) یک مدل آماری برای کاربردهای بیمه مطرح کردند. در سال های اخیر بسیاری از آماردانان بر روی توزیع های چندمتغیره با ساختار مشخص مطالعه کرده اند. کلی (۱۹۹۶) با استفاده از روش نشانیدنی توزیع های متا-گوسی را ساخت. ساختار توزیع های متا-گوسی بر اساس تکنیک مفصل است که در فصل اول به تفصیل بررسی شده اند. فنگ (۲۰۰۲) از توابع مفصل استفاده کرد و از توزیع های چندمتغیره بیضی گون رده خاصی از توزیع های متا-بیضی گون را تولید کرد. با استفاده از مفصل ها، کاتز و سیگر^۳ (۱۹۹۱) مشاهده کردند که تابع چگالی توزیع چندمتغیره می تواند به بخش های تابع چگالی وزن دار و ضرب چگالی های کناری تجزیه گردد. در این بخش به بررسی رده ای از توزیع های پیوسته با توزیع های کناری مشخص خواهیم پرداخت.

^۱ Jouini and Clemen

^۲ Frees, Carriere and Valdes

^۳ Kotz and Seeger

۱.۲ توزیع بیضی‌گون

تعریف ۱.۱.۲. (فنگ و همکاران، ۲۰۰۲) بردار $Z = (Z_1, \dots, Z_n)$ دارای توزیع بیضی‌گون است، اگر نمایش تصادفی $Z = \mu + rAU$ را بپذیرد که در آن $\mu \in R^p$ ، r و U متغیرهای تصافی مستقل، r نامنفی و U دارای توزیع یکنواخت روی کره واحد در R^p هستند و A یک ماتریس ثابت ناکمین $p \times p$ به صورت $AA^T = \Sigma$ است. زمانی که $\mu = 0$ و r مطلقاً پیوسته باشد، چگالی Z به صورت

$$h(z) = |\Sigma|^{-\frac{1}{r}} g(z^T \Sigma^{-1} z), \quad z \in R^n$$

خواهد بود که در آن $g(\cdot)$ یک تابع مقیاس منحصر به فرد است که توسط توزیع r تعیین می‌گردد و این توزیع با نماد $Z \sim EC_n(\mu, \Sigma, g)$ نمایش داده می‌شود. σ_i^2 درایه (i, i) ماتریس Σ است که اگر Z_i بر آن تقسیم شود متغیرهای تصادفی $\frac{Z_i}{\sigma_i}$ دقیقاً دارای چگالی به صورت

$$q_g(z) = \frac{\pi^{\frac{(n-1)}{r}}}{\Gamma\{\frac{(n-1)}{r}\}} \int_{z^r}^{\infty} (t - z^r)^{\frac{(n-1)}{r} - 1} g(t) dt, \quad z \in R$$

و تابع توزیع تجمعی به صورت

$$Q_g(z) = \frac{1}{r} + \frac{\pi^{\frac{(n-1)}{r}}}{\Gamma\{\frac{(n-1)}{r}\}} \int_0^z \int_{s^r}^{\infty} (t - s^r)^{\frac{(n-1)}{r} - 1} g(t) dt ds, \quad z \in R$$

خواهد بود.

در حالت خاص اگر $g(t) \propto e^{-at}$ با $a \in R_+$ ، آنگاه Z دارای توزیع گاوسی چندمتغیره خواهد بود. فرض کنید $X = (X_1, \dots, X_n)$ بردار تصادفی با مؤلفه‌های X_i باشد که هر کدام دارای تابع چگالی پیوسته $f_i(x_i)$ و توزیع تجمعی $F_i(x_i)$ هستند. بردار تصادفی $Z = (Z_1, \dots, Z_n)^T \sim EC_n(0, R, g)$ را در نظر بگیرید. با تعریف

$$Z_i = Q_g^{-1}(F_i(X_i)), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

ژاکوبی تبدیل به صورت

$$J\{(z_1, \dots, z_n)^T \rightarrow (x_1, \dots, x_n)^T\} = \prod_{i=1}^n \frac{dz_i}{dx_i} = \prod_{i=1}^n \frac{f_i(x_i)}{q_g(Q_g^{-1}(F_i(x_i)))}$$

محاسبه می شود و تابع چگالی x به صورت

$$h(x_1, \dots, x_n) = \phi(Q_g^{-1}(F_1(x_1)), \dots, Q_g^{-1}(F_n(x_n))) \prod_{i=1}^n f_i(x_i) \quad (1.2)$$

بیان می شود، که در آن ϕ همان تابع چگالی وزن دار n -بعدی است که به صورت

$$\phi(z_1, \dots, z_n) = |R|^{-\frac{1}{2}} g(z' \Sigma^{-1} z) / \prod_{i=1}^n q_g(z_i).$$

تعریف می شود (فنگ و همکاران، ۲۰۰۲).

تعریف ۲.۱.۲. (عبدوس و همکاران، ۲۰۰۵) بردار تصادفی n بعدی X دارای توزیع متا-بیضی گون است

اگر تابع چگالی آن به صورت رابطه (۱.۲) باشد که آن را با نماد $X \sim ME_n(\circ, R, g; F_1, \dots, F_n)$

نشان می دهیم. تابع $\phi(Q_g^{-1}(F_1(x_1)), \dots, Q_g^{-1}(F_n(x_n)))$ نیز به تابع چگالی وزن دار اشاره می کند. به

عبارت دیگر ساختار وابستگی بردارهای تصادفی X و Z توسط مفصل یکسان بیان می گردد.

رده توزیع های متا-بیضی گون شامل توزیع های فراوانی از جمله توزیع های بیضی گون، توزیع های متا-

گوسی و توزیع های مختلف متقارن است. توزیع های کناری $F_i(\circ)$ می توانند به دلخواه انتخاب شوند. رده

جدیدی از توزیع ها که به توزیع t چندمتغیره متقارن معروف است می تواند توسط مجموعه ای از توابع

کناری از نوع توزیع t چندمتغیره و توزیع های t تک متغیره با درجه آزادی دلخواه تشکیل شود (عبدوس

و همکاران، ۲۰۰۵).

۱.۱.۲ معیار پیوند

دو مورد از معیارهای ناپارامتری معمول وابستگی، ρ اسپیرمن و τ کندال هستند. در بعد $p = 2$ مقادیر

آنها به صورت

$$\rho_S = 12E\{K_1(X_1)K_2(X_2)\} - 3$$

و

$$\tau = 4E\{K(X_1, X_2)\} - 1$$

است و تعمیم این مقادیر از زوج (X_1, X_2) با توزیع توأم $K(\circ, \circ)$ و کناری های $K_1(\circ)$ و $K_2(\circ)$ برای

متغیرهای $Z_i = F^{-1}\{K_i(X_i)\}$ به صورت

$$\rho_S = 12E\{F(Z_1)F(Z_2)\} - 3$$

و

$$\tau = 4E\{H(Z_1, Z_2)\} - 1$$

است، که در این جا $H(\cdot, \cdot)$ تابع توزیع توأم تجمعی و $F(\cdot)$ کناری مشترک است. فنگ و همکاران (۲۰۰۲) نشان دادند که

$$\tau = \frac{2}{\pi} \arcsin(\rho)$$

از $g(\cdot)$ مستقل است.

۲.۱.۲ مفصل توزیع‌های بیضی‌گون دو متغیره

در این بخش مفصل توزیع‌های بیضی‌گون را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. برای سادگی فقط برای حالت دوبعدی روابط را عنوان می‌کنیم. فرض کنید $Z = (Z_1, Z_2)^T \sim EC_2(\cdot, R, g)$ و

$$R = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}, \quad -1 < \rho < 1.$$

در این صورت تابع چگالی Z به صورت

$$fg(z_1, z_2; \rho) = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} g\left(\frac{z_1^2 + z_2^2 - 2\rho z_1 z_2}{1-\rho^2}\right) \quad (2.2)$$

است و تابع چگالی کناری و تابع توزیع تجمعی کناری به ترتیب به صورت

$$q_g(z) = \int_{z^2}^{\infty} (y - z^2)^{-\frac{1}{2}} g(y) dy$$

و

$$Q_g(z) = \frac{1}{2} + \int_{z^2}^{\infty} \arcsin\left(\frac{z}{\sqrt{y}}\right) g(y) dy$$

هستند، که در آن $\rho = \text{corr}(Z_1, Z_2)$ زمانی موجود است که $\int_0^{\infty} yg(y)dy < \infty$.

قضیه ۳.۱.۲. (فنگ و همکاران، ۲۰۰۲) فرض کنید بردار $Z = (Z_1, Z_2)$ دارای توزیع بیضی‌گون با

تابع چگالی (۲.۲) باشد. بنابراین مفصل Z_1 و Z_2 توسط رابطه

$$C_z(u, v; \rho) = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{Q^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{Q^{-1}(v)} g\left(\frac{x^2 + y^2 - 2\rho xy}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) dx dy$$

با چگالی مفصل

$$c_z(u, v; \rho) = \phi(Q^{-1}(u), Q^{-1}(v); \rho) \quad (۳.۲)$$

که در آن

$$\phi(x, y; \rho) = f(x, y; \rho) / [q_g(x)q_g(y)] \quad (۴.۲)$$

است، بیان می شود.

□ برهان. اثبات مستقیماً از تعاریف نتیجه می شود.

برای ارزیابی همبستگی بین دو متغیر تصادفی، ضریب همبستگی اسپیرمن ρ_s ، معیار خوبی از میانگین مربع وابستگی مثبت (و منفی) تشخیص داده می شود (فنگ و همکاران، ۲۰۰۲).

قضیه ۴.۱.۲. (فنگ و همکاران، ۲۰۰۲) فرض کنید $Z = (Z_1, Z_2) \sim EC_2(0, R, g)$ با تابع چگالی

(۲.۲). آن گاه ρ_s بین Z_1 و Z_2 توسط رابطه

$$\rho_s = 12 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Q_g(x)Q_g(y)f(x, y)dxdy - 3 \quad (۵.۲)$$

به دست می آید.

برهان. طبق تعریف داریم

$$\rho_s = 12 \iint_{[0,1]^2} [C(u, v) - uv]dudv$$

و می دانیم

$$\rho_s = \iint_{[0,1]^2} C(u, v)dudv = \iint_{[0,1]^2} uv dC(u, v),$$

□ با اندکی محاسبه، رابطه (۵.۲) از رابطه (۳.۲) به دست می آید.

بنابراین، ρ_s در رابطه (۵.۲) فقط به ρ بستگی ندارد بلکه به تابع توزیع تجمعی کناری های Z نیز بستگی دارد. از آنجایی که توابع توزیع کناری بسیاری از توزیع های بیضی گون نمی توانند به شکل بسته بیان شوند، ρ_s با استفاده از محاسبات عددی به دست می آید. از این رو، کروسکال^۱ (۱۹۵۸) برای متغیر دوبعدی نرمال Z ، یک حالت ساده از ضریب همبستگی اسپیرمن به صورت

$$\rho_s = (6/\pi) \arcsin(\rho/2)$$

^۱Kruskal

به دست آورد. مثال‌های زیر، مفصل‌هایی را از بعضی زیررده‌های توزیع‌های بیضی‌گون ارائه می‌دهند. شکل ۱۰۲ شکل‌های مختلف تابع مفصل چگالی را برای این دسته از زیررده‌ها نشان می‌دهد.

مثال ۵.۱۰۲. توزیع‌های متقارن نوع کاتز^۱. فرض کنید Z طبق توزیع متقارن نوع کاتز دومتغیره با چگالی

$$g_1(x_1, x_2) = \frac{sr^{N/s}(x_1^2 + x_2^2 - 2\rho x_1 x_2)^{N-1}}{\pi\Gamma(N/s)(1 - \rho^2)^{N-1/2}} \exp\left\{-r\left(\frac{x_1^2 + x_2^2 - 2\rho x_1 x_2}{1 - \rho^2}\right)^s\right\}$$

توزیع شده باشد، که $r > 0$ ، $s > 0$ و $N > 0$ پارامترهای آن هستند و تابع چگالی کناری به صورت

$$q_1(x) = \frac{2sr^{N/s}}{\pi\Gamma(N/s)} \int_0^\infty (t^2 + x^2)^{N-1} \exp\{-r(t^2 + x^2)^s\} dt$$

است. بنابراین تابع مفصل چگالی به صورت

$$c_1(u, v) = \frac{g_1(Q^{-1}(u), Q^{-1}(v))}{q_1(Q^{-1}(u))q_1(Q^{-1}(v))}$$

است، که در آن $Q^{-1}(x)$ همان تابع توزیع تجمعی کناری است.

مثال ۶.۱۰۲. توزیع‌های پیرسون نوع هفت متقارن^۲. اگر Z توزیع پیرسون نوع هفت متقارن داشته باشد، چگالی آن به صورت

$$g_2(x, y) = \frac{N-1}{\pi m \sqrt{1-\rho^2}} \left\{ 1 + \frac{1}{m(1-\rho^2)}(x^2 + y^2 - 2\rho xy) \right\}^{-N}$$

است، که در آن $N > 0$ و $m > 0$ پارامترهای توزیع هستند. اگر $N = m/2 + 1$ آن‌گاه، $Z \sim Mt_2(m, 0, R)$ ، توزیع تی دومتغیره با درجه آزادی m خواهد بود. تابع چگالی کناری Z به

صورت

$$Q_2(x) = \frac{\Gamma(N-1)}{\sqrt{\pi m} \Gamma(N-1)} \int_{-\infty}^x (1 + y^2/m)^{-(N-1/2)} dy$$

است. چگالی مفصل نیز برابر $c_2(u, v) = b_2(Q_2^{-1}(u), Q_2^{-1}(v))$ خواهد بود که در آن

^۱Symmetric kotz type distribution

^۲Symmetric bivariate pearson type VII distributions

$$b_{\rho}(x, y) = \frac{\Gamma(N-1)\Gamma(N)}{[\Gamma(N-1/2)]^2} \frac{(1+x^2/m)^{(N-1/2)}(1+y^2/m)^{(N-1/2)}}{\sqrt{1-\rho^2}\{1+1/(m(1-\rho^2))(x^2+y^2-2\rho xy)\}^N}$$

مثال ۷.۱.۲. توزیع های پیرسون نوع دو متقارن. اگر Z توزیع پیرسون نوع دو متقارن داشته باشد، چگالی آن برابر است با

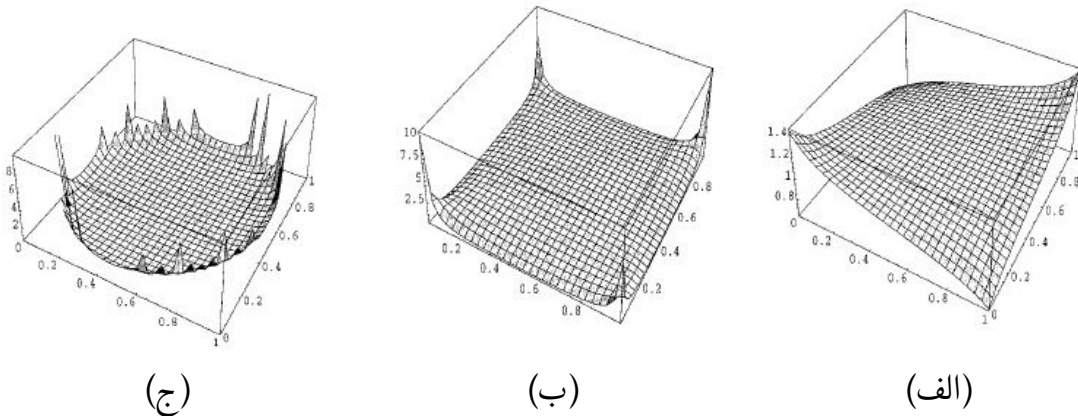
$$g_{\rho}(x, y) = \begin{cases} \frac{(m+1)}{\pi\sqrt{1-\rho^2}} \left[1 - \frac{x^2+y^2-2\rho xy}{(1-\rho^2)}\right]^m & (x, y)R^{-1}(x, y)^T \leq 1 \\ 0 & (x, y)R^{-1}(x, y)^T > 1 \end{cases}$$

$m \geq -1$ و تابع چگالی کناری Z به صورت

$$\frac{\Gamma(m+2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(m+3/2)} \int_{-1}^x (1-y^2)^{(m+1/2)} dy, \quad \forall |x| \leq 1.$$

است. چگالی مفصل نیز برابر $c_{\rho}(u, v) = b_{\rho}(Q_{\rho}^{-1}(u), Q_{\rho}^{-1}(v))$ خواهد بود که در آن

$$b_{\rho}(x, y) = \frac{(m+1)[\Gamma(m+3/2)]^2 [1 - (1/(1-\rho^2))(x^2+y^2-2\rho xy)]^m}{[\Gamma(m+2)]^2 \sqrt{1-\rho^2}(1-x^2)^{m+1/2}(1-y^2)^{m+1/2}}$$



شکل ۱.۲: تابع مفصل چگالی برای توزیع های بیضی گون دوبعدی به ازای $\rho = 0.1$. (الف) توزیع نرمال (ب) توزیع t -استیودنت با $m = 2$ (ج) توزیع پیرسون نوع دو با $m = \frac{1}{2}$

۲.۲ توزیع متا-بیضی گون

توزیع های متا-بیضی گون در بخش ۱.۲ تعریف شدند. در این بخش به بررسی برخی از ویژگی های این توزیع پرداخته می شود. در ابتدا برای توزیع های متا-بیضی گون دومتغیره ویژگی ها را مطالعه

می‌کنیم سپس آن‌ها را برای حالت‌های چندمتغیره تعمیم می‌دهیم. فرض کنید $\mathbf{X} = (X_1, X_2) \sim ME_2(\circ, R, g; F_1, F_2)$ دارای چگالی به صورت

$$h(x_1, x_2; \rho) = \phi(Q_g^{-1}(F_1(x_1)), Q_g^{-1}(F_2(x_2)); \rho) f_1(x_1) f_2(x_2), \quad (۶.۲)$$

است، که در آن ϕ در رابطه (۴.۲) تعریف شده است.

۱.۲.۲ ضریب همبستگی کندال

از آنجایی که بیان ضریب همبستگی اسپیرمن ρ_s برای توزیع‌های بیضی‌گون تا حدی پیچیده است، بهتر است از ضریب همبستگی τ کندال استفاده کنیم. در واقع τ کندال یک معیار از میانگین کل مثبت بودن و تفاضل بین احتمال‌های جفت‌های هماهنگ و ناهماهنگ متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع است (فنگ و همکاران، ۲۰۰۲).

فرض کنید $X_j = (X_{1j}, X_{2j})^T$ و $X_i = (X_{1i}, X_{2i})^T$ دو جفت از بردارهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع باشند. τ کندال X_1 و X_2 به صورت

$$\begin{aligned} \tau = & P[(X_{1i} < X_{1j}, X_{2i} < X_{2j})(X_{1i} > X_{1j}, X_{2i} > X_{2j})] \\ & - P[(X_{1i} < X_{1j}, X_{2i} > X_{2j})(X_{1i} > X_{1j}, X_{2i} < X_{2j})] \end{aligned} \quad (۷.۲)$$

نوشته می‌شود.

قضیه ۱.۲.۲. (فنگ و همکاران، ۲۰۰۲) فرض کنید $X = (X_1, X_2)$ دارای توزیع متا-بیضی‌گون با

چگالی (۶.۲) باشد. آن‌گاه τ کندال X_1 و X_2 به صورت

$$\tau = \frac{2}{\pi} \arcsin(\rho)$$

تعریف می‌شود که فقط به ρ بستگی دارد و در رده توزیع‌های متا-بیضی‌گون $ME_2(\circ, R, g; F_1, F_2)$ ناورد است.

برهان. $\tau(x)$ را مانند طرف راست رابطه (۷.۲) تعریف کنید. پس به ازای تمام $\alpha > 0$ داریم $\tau(\alpha x) =$

$\tau(x)$ از آنجایی که $\tau(x)$ توسط مفصل X تعیین می‌شود، فرض $\mathbf{x} \in EC_2(R)$ ادعای کروسکال (۱۹۵۸)

را در پی دارد. \square

اگر به ترتیب داشته باشیم $\rho \rightarrow +1$ و $\rho \rightarrow -1$ آن گاه برای تمام توزیع های کناری $F_1(x_1)$ و $F_2(x_2)$ ، وابستگی کامل مثبت و وابستگی کامل منفی را خواهیم داشت. وقتی که $\rho \rightarrow +1$ تمام جرم احتمال تحت ϕ روی قطر اصلی خط $z_1 = z_2$ متمرکز می شود. بنابراین توزیع توأم $H(x_1, x_2)$ مقدار کران بالای فرچت را می گیرد $H^*(x_1, x_2) = \min\{F_1(x_1), F_2(x_2)\}$. زمانی که $\rho \rightarrow -1$ تمام جرم احتمال تحت ϕ روی قطر اصلی خط $z_1 = -z_2$ متمرکز می شود. بنابراین $H(x_1, x_2)$ مقدار کران پایین فرچت را می گیرد $H_*(x_1, x_2) = \max\{0, F_1(x_1) + F_2(x_2) - 1\}$ (فنگ و همکاران، ۲۰۰۲).

۲.۲.۲ توزیع شرطی

چگالی شرطی X_1 به شرط $X_2 = x_2$ بر اساس رابطه (؟؟) به صورت

$$k(x_1|x_2) = \phi(Q_g^{-1}(F_1(x_1)), Q_g^{-1}(F_2(x_2)); \rho) f_1(x_1)$$

است. بنابراین توزیع شرطی متناظر با آن نیز به صورت

$$K(x_1|x_2) = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} + \xi \left(Q_g^{-1}(F_2(x_2)), \frac{Q_g^{-1}(F_1(x_1)) - \rho Q_g^{-1}(F_2(x_2))}{\sqrt{1-\rho^2}} \right)$$

است، که در آن

$$\xi(a, b) = \frac{\int_0^b g(y^2 + a^2) dy}{\int_0^\infty g(y^2 + a^2) dy}$$

(فنگ و همکاران، ۲۰۰۲).

۳.۲.۲ حالت چندمتغیره

فرض کنید $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$ دارای توزیع متا-بیضی گون با چگالی (۱.۲) باشد. طبق قضیه ۱.۲.۲،

ضریب همبستگی τ کندال بین X_i و X_j به صورت

$$\tau_{ij} = \frac{2}{\pi} \arcsin(\rho_{ij}), \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

است. بنابراین برای مقادیر ثابت همه متغیرهای X_i و X_j ، به جز $i \neq j$ متغیرهای (X_i, X_j) وابسته مثبت^۱ هستند اگر $\rho_{ij} \geq 0$ و وابسته منفی^۲ هستند اگر $\rho_{ij} \leq 0$.

فرض کنید $k_i(x_i|x_1, \dots, x_{i-1})$ نشان‌دهنده چگالی شرطی X_i به شرط X_1, \dots, X_{i-1} و $k_1(x_1|x_0) =$ نشان‌دهنده چگالی کناری X_1 باشد. بنابراین چگالی توأم \mathbf{X} به صورت

$$h(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n k_i(x_i|x_1, \dots, x_{i-1})$$

نوشته می‌شود. همچنین فرض کنید $Z \sim EC_n(\circ, R, g)$ و چگالی کناری i -بعدی آن برابر با $g_i(z_1, \dots, z_i)$ باشد. قرار می‌دهیم

$$\phi_i(z_1, \dots, z_i) = g_i(z_1, \dots, z_i) / \prod_{j=1}^i q_g(z_j).$$

بنابراین داریم

$$k_i(x_i|x_1, \dots, x_{i-1}) = \phi_i(Q_g^{-1}(F_1(x_1)), \dots, Q_g^{-1}(F_i(x_i))) f_i(x_i).$$

از آن جا که کناری‌های i -بعدی دارای توزیع بیضی‌گون هستند، پس $\phi_i(Q_g^{-1}(F_1(x_1)), \dots, Q_g^{-1}(F_i(x_i)))$ تابع چگالی وزن‌دار برای توزیع‌های متا-بیضی‌گون i -بعدی در نظر گرفته می‌شود (فنگ و همکاران، ۲۰۰۲).

مثال ۲.۲.۲. توزیع تی متقارن چندمتغیره. فرض کنید $q_m(x)$ و $Q_m(x)$ تابع چگالی و توزیع t -استیودنت با درجه آزادی m باشند و $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ بردار تصادفی n -بعدی باشد. اگر دارای تابع چگالی توأم

$$f(x_1, \dots, x_n) = \phi(Q_{-1}(Q_{m_1}(x_1)), \dots, Q_{-1}(Q_{m_n}(x_n)); R) \cdot \prod_{i=1}^n q_{m_i}(x_i)$$

باشد، که در آن

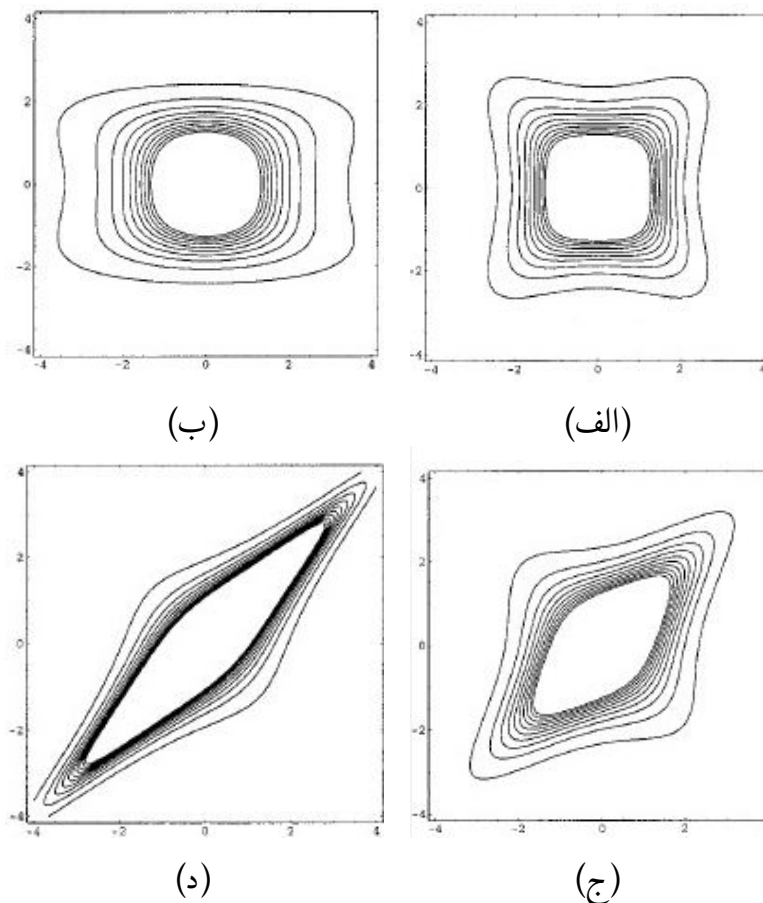
^۱Positively dependent

^۲Negatively dependent

$$\phi(y_1, \dots, y_n) = \frac{\Gamma((m+n)/2) [\Gamma(m/2)]^{n-1}}{[\Gamma((m+1)/2)]^n} |R|^{-1/2} \left(1 + \frac{\mathbf{y}' \mathbf{R}^{-1} \mathbf{y}}{m} \right)^{-\frac{m+n}{2} \prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{y_i^2}{m} \right)^{\frac{m+1}{2}}}$$

آن‌گاه گویم \mathbf{X} دارای توزیع t -استیودنت n -بعدی مقارن با درجه‌های آزادی $(m; m_1, \dots, m_n)$ است و به صورت $\mathbf{x} \sim AMt_n(m; m_1, \dots, m_n; \circ, \mathbf{R})$ نشان داده می‌شود.

نکته جالب این است که $AMt_n(m; m_1, \dots, m_n; \circ, \mathbf{R})$ و $Mt_n(m; \circ, \mathbf{R})$ دارای مفصل‌های یکسان هستند. کناری‌های \mathbf{X} دارای توزیع تی با درجه‌های آزادی متفاوت هستند. اگر $m_i = m$ آن‌گاه \mathbf{X} دارای توزیع t -استیودنت n -بعدی با درجه آزادی m خواهد بود. شکل ۲.۲ چگالی‌های مختلف توزیع تی n -بعدی مقارن را به ازای درجه‌های آزادی و ضرایب همبستگی مختلف نشان می‌دهد.



شکل ۲.۲: نمودار تراز تابع چگالی توزیع تی دومتغیره مقارن (الف) $AMt(2; 10, 10; \circ)$ (ب) $AMt(2; 10, 2; \circ)$ (ج) $AMt(2; 10, 10; \circ/5)$ (د) $AMt(2; 10, 10; \circ/9)$

مثال ۳.۲.۲. توزیع چندمدی: برخی توزیع‌های متا-بیضی‌گون چندمدی می‌توانند با استفاده از روش مفصل ساخته شوند. به عنوان مثال، توزیع متا-بیضی‌گون (X, Y) با مفصل چگالی داده شده در مثال ۶.۱.۲ را برای $N = m = ۲$ در نظر بگیرید.

(i) اگر X طبق توزیع وایبول آمیخته با تابع چگالی

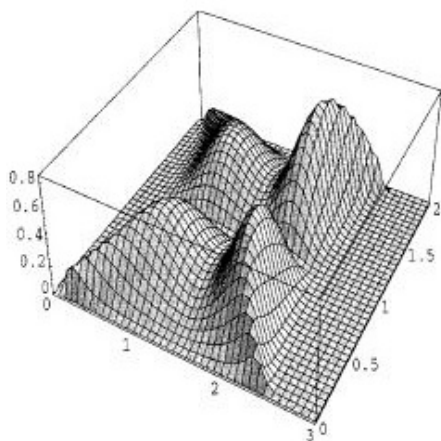
$$f(x) = \frac{3}{4}x^2 \exp\{-x^3\}I_{\{x>0\}} + \frac{5}{4}\{x-1\}^4 \exp\{-(x-1)^5\}I_{\{x>1\}}$$

و Y دارای توزیع متقارن بتا $Beta(2, 2)$ باشد آن‌گاه (X, Y) دارای توزیع متا-بیضی‌گون دومدی خواهد بود (شکل ۳.۲ الف).

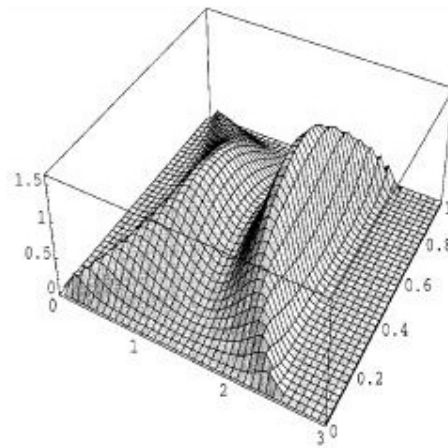
(ii) اگر X دارای توزیع وایبول آمیخته و Y دارای توزیع بتا آمیخته با تابع چگالی

$$g(y) = 3y(1-y)I_{\{0<y<1\}} + 3(y-1)(2-y)I_{\{1<y<2\}}$$

باشد، آن‌گاه (X, Y) دارای توزیع متا-بیضی‌گون چهارمدی خواهد بود (شکل ۳.۲ ب).



(ب)



(الف)

شکل ۳.۲: چگالی متا-بیضی‌گون دومتغیره (X, Y) با چگالی کناری مشخص. چارچوب برای توزیع تی دوبعدی با درجه آزادی دو و $\rho = 0.1$. الف- $X \sim \frac{1}{4}W(3, 0, 1) + \frac{1}{4}W(5, 1, 1)$, $Y \sim Beta(2, 2)$. ب- $X \sim \frac{1}{4}W(3, 0, 1) + \frac{1}{4}W(5, 1, 1)$, $Y \sim \frac{1}{4}Beta(2, 2; 0) + \frac{1}{4}Beta(2, 2; 1)$.

در فصل بعدی به تعریف توزیع متا-تی و ساختار وابستگی این توزیع خواهیم پرداخت. برآورد پارامترهای این توزیع مبتنی بر تابع مفصل تی به روش ماکسیمم درست‌نمایی بیان خواهد شد. در

پایان فصل بعدی توزیع تی چوله چندمتغیره، مفصل تی چوله و همین‌طور برآورد ماکسیم درست‌نمایی پارامترهای توزیع با استفاده از مفصل تی چوله آورده شده‌اند.

فصل ۳

آشنایی با توزیع متا-تی و مفصل تی

مفصل‌ها به عنوان ساختار وابستگی توزیع‌های چندمتغیره که تحت تبدیلات یکنوا، ناورد هستند تعریف شده‌اند. بنابراین از این ویژگی توابع مفصل برای ساخت توزیع‌های چندمتغیره عمومی و انعطاف‌پذیر استفاده شده است.

۱.۳ توزیع تی چندمتغیره و مفصل آن

بردار تصادفی d -بعدی $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$ دارای توزیع تی چندمتغیره با درجه آزادی ν ، بردار میانگین μ و ماتریس Σ است اگر دارای تابع چگالی

$$f(\mathbf{x}) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+d}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2}) \sqrt{(\pi\nu)^d |\Sigma|}} \left(1 + \frac{(\mathbf{x} - \mu)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \mu)}{\nu} \right)^{-\frac{\nu+d}{2}}$$

باشد و به صورت $\mathbf{X} \sim t_d(\nu, \mu, \Sigma)$ نمایش داده می‌شود.

۱.۱.۳ مفصل تی

مفصل d -بعدی C یک تابع توزیع d -بعدی روی $[0, 1]^d$ با توزیع‌های کناری یکنواخت است. طبق قضیه اسکالر برای هر تابع توزیع F و کناری‌های F_1, \dots, F_d می‌توان نوشت

$$F(x_1, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)). \quad (1.3)$$

تابع مفصل C روی $[0, 1]^d$ منحصر به فرد خواهد بود اگر توابع کناری مربوطه مطلقاً پیوسته باشند و به عکس هر مفصل C می‌تواند هر مجموعه‌ای از کناری‌های تک متغیره F_1, \dots, F_d را پیوند دهد و تابع توزیع چندمتغیره F را بسازد.

در این پایان‌نامه بردار تصادفی $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$ را با توابع کناری پیوسته و اکیداً صعودی در نظر می‌گیریم. پس می‌توان رابطه (۱.۳) را به صورت

$$C(\mathbf{u}) = C(u_1, \dots, u_d) = F(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_d^{-1}(u_d)) \quad (2.3)$$

نوشت. تابع مفصل ناوردا بودن خود را طی استانداردسازی توزیع‌های کناری حفظ می‌کند. در حقیقت تحت هر تبدیل اکیداً صعودی مؤلفه‌های بردار تصادفی \mathbf{X} ناوردا بودن خود را حفظ می‌کنند. این به این معنی است که مفصل $t_d(v, \mu, \Sigma)$ با مفصل $t_d(v, \circ, R)$ یکسان است که در آن R ماتریس همبستگی ضمنی^۱ است که توسط ماتریس پراکنندگی^۲ Σ تعیین می‌شود. مفصل منحصر به فرد به صورت

$$C_{v,R}^t(\mathbf{u}) = \int_{-\infty}^{t_v^{-1}(u_1)} \dots \int_{-\infty}^{t_v^{-1}(u_d)} \frac{\Gamma(\frac{v+d}{\nu})}{\Gamma(\frac{v}{\nu}) \sqrt{(\pi\nu)^d |R|}} \left(1 + \frac{(\mathbf{x})^T R^{-1}(\mathbf{x})}{\nu} \right)^{-\frac{v+d}{\nu}} d\mathbf{x}$$

داده می‌شود. در حالت دوبعدی برای سادگی به صورت $C_{v,\rho}^t$ نمایش داده می‌شود که در آن ρ اعضای خارج از قطر ماتریس R است. مفصلی که از تابع توزیع نرمال چندمتغیره استخراج شده است، مفصل گاوسی نام دارد و با C_R^{Ga} نشان داده می‌شود. C_R^{Ga} را می‌توان به عنوان حد مفصل تی وقتی که $\nu \rightarrow \infty$ ، در نظر گرفت. برای انجام برآورد، چگالی مفصل تی می‌تواند مفید واقع شود که به سادگی از رابطه (۲.۳) به صورت

$$C_{v,R}^t(\mathbf{u}) = \frac{f_{v,R}(t_v^{-1}(u_1), \dots, t_v^{-1}(u_d))}{\prod_{i=1}^d f_v(t_v^{-1}(u_i))}, \quad \mathbf{u} \in (0, 1)^d$$

به دست می‌آید، که در آن $f_{v,R}$ چگالی توأم و $f_v(\cdot)$ چگالی توزیع تی استاندارد تک‌متغیره با درجه آزادی ν هستند.

^۱Correlation matrix implied

^۲Dispersion matrix

۲.۱.۳ توزیع متا-تی

توزیع متا-تی تعمیم انعطاف‌پذیری از توزیع تی چندمتغیره است. در ساده‌ترین حالت، این توزیع دارای توابع کناری تی تک‌متغیره با درجه آزادی ν است و ساختار وابستگی آن توسط مفصل‌تی تعریف می‌شود. اگر بردار تصادفی X دارای مفصل‌تی $C_{\nu, \rho}^t$ و کناری‌های تک‌متغیره تی با درجه‌های آزادی یکسان ν باشد، آنگاه دارای توزیع تی چندمتغیره با درجه آزادی ν خواهد بود. با این حال اگر ما از رابطه (۱.۳) برای ترکیب هر مجموعه دیگر از توابع توزیع تک‌متغیره در مفصل‌تی استفاده کنیم، تابع توزیع چندمتغیره F را به دست خواهیم آورد که همان تابع توزیع متا-تی نامیده شده است.

۲.۳ ویژگی‌های مفصل‌تی

در این بخش به بررسی بردار تصادفی دوبعدی (X_1, X_2) با توابع کناری پیوسته و اکیداً صعودی و مفصل‌یکتا می‌پردازیم.

۱.۲.۳ ضریب وابستگی دنباله‌ای

ضرایب وابستگی دنباله‌ای، معیارهای مجانبی سنجش وابستگی را در دنباله‌های توزیع‌های دومتغیره (X_1, X_2) بهبود بخشیده‌اند. همان‌طور که در فصل اول هم آمده ضریب وابستگی دنباله‌ای بالایی X_1 و X_2 به صورت

$$\lambda_u = \lim_{q \rightarrow 1} P(X_2 > F_2^{(-1)}(q) | X_1 > F_1^{(-1)}(q))$$

است و ضریب وابستگی دنباله‌ای پایینی به صورت

$$\lambda_l = \lim_{q \rightarrow 0} P(X_2 \leq F_2^{(-1)}(q) | X_1 \leq F_1^{(-1)}(q)).$$

این ضرایب بر پایه تابع مفصل، توسط روابط

$$\lambda_u = \lim_{q \rightarrow 1^-} \frac{\bar{C}(q, q)}{1 - q} \quad \lambda_l = \lim_{q \rightarrow 0^+} \frac{C(q, q)}{q}$$

نشان داده می‌شوند، که در آن $\bar{C}(q, q) = 1 - 2q + C(q, q)$ است. در توزیع بیضی‌گون متقارن این دو ضریب بر هم منطبقند و فقط با λ نشان داده می‌شوند (دی‌مارتا و مک‌نیل، ۲۰۰۴). برای مفصل گاوسی این ضریب برابر با صفر است و برای مفصل تی دارای مقداری مثبت است (دی‌مارتا و مک‌نیل، ۲۰۰۴).

محاسبه ضریب وابستگی دنباله‌ای برای مفصل تی به صورت

$$\lambda = 2t_{v+1}(-\sqrt{v+1}\sqrt{1-\rho}/\sqrt{1+\rho})$$

است که محاسبه آن بسیار ساده و ρ اعضای خارج از قطر ماتریس R است.

ضرایب وابستگی دنباله‌ای برای مفصل تی در جدول ۱.۲.۳ آمده است (دی‌مارتا و مک‌نیل، ۲۰۰۴). می‌بینیم که حتی برای مقادیر منفی و صفر ضرایب، مفصل تی دارای وابستگی جانبی در دنباله‌هاست.

جدول ۱.۳: ضریب وابستگی دنباله‌ای مفصل تی به ازای مقادیر مختلف v و ρ .

	۱	۰/۹	۰/۵	۰	-۰/۵	ρ/v
۱	۱	۰/۷۲	۰/۳۹	۰/۱۸	۰/۰۶	۲
۱	۱	۰/۶۳	۰/۲۵	۰/۰۸	۰/۰۱	۴
۱	۱	۰/۴۶	۰/۰۸	۰/۰۱	۰/۰	۱۰
۱	۱	۰	۰	۰	۰	∞

۳.۳ برآورد مفصل تی

وقتی برآورد پارامترهای مفصل هدف اصلی ما باشد، توزیع‌های کناری نامعلوم داده‌ها تولید پارامترهای مزاحم^۱ می‌کنند که در این صورت باید در ابتدا پارامترهای توزیع‌های کناری برآورد شوند. توجه شود که بردارهای داده X_1, \dots, X_n هستند و j -امین داده از بردار i -ام به صورت $X_{i,j}$ نوشته می‌شود. در بخش ۱.۳.۳ فرض می‌کنیم که داده‌ها از توزیع متا-تی هستند و می‌خواهیم پارامترهای مفصل را برآورد کنیم. به طور کلی مدل‌سازی کناری را می‌توان با سه روش انجام داد: برازش توزیع‌های کناری مناسب به داده‌ها و برآورد پارامترهای آن‌ها؛ مدل‌سازی ناپارامتری توزیع‌های کناری‌ها با استفاده از توابع توزیع

^۱Nuisance parameter

تجربی؛ با استفاده از پیوند روش‌های پارامتری و ناپارامتری.

۱.۳.۳ برآورد ماکسیم درست‌نمایی^۱

فرض کنید توابع توزیع کناری توسط یکی از روش‌های بالا برآورد شده‌اند. می‌توان از روش ماکسیم درست‌نمایی برای برآورد پارامترهای v و R مفصل تی استفاده کرد. از رابطه (۱.۳) می‌توان چگالی مفصل تی را به صورت

$$\begin{aligned} c(u_1, \dots, u_d) &= \frac{\partial^d C(u_1, \dots, u_d)}{\partial u_1 \dots \partial u_d} \\ &= \frac{\partial F(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_d^{-1}(u_d))}{\partial u_1 \dots \partial u_d} = \frac{f(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_d^{-1}(u_d))}{f_1(F_1^{-1}(u_1)) \dots f_d(F_d^{-1}(u_d))} \end{aligned} \quad (۳.۳)$$

به دست آورد. حال رده پارامتری مفصل $C(\cdot, \dots, \cdot; \theta_2)$ و توابع توزیع کناری $F_j(\cdot)$ را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم θ_j پارامتر $F_j(\cdot)$ و θ_2 پارامتر مفصل باشد. بنابراین بردار تمام پارامترهای نامعلوم توسط بردار $\theta = (\theta_1^T, \theta_2^T)^T$ که در آن $\theta_1 = (\theta_1, \dots, \theta_d)^T$ بردار پارامترهای کناری است، نشان داده می‌شود.

با استفاده از رابطه (۳.۳) می‌توان چگالی را به صورت

$$f(x_1, \dots, x_d; \theta) = c(F_1(x_1; \theta_1), \dots, F_d(x_d; \theta_d); \theta_2) \prod_{j=1}^d f_j(x_j; \theta_j). \quad (۴.۳)$$

نوشت. تابع لگاریتم درست‌نمایی حاصل از نمونه $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)^T \in \mathbb{R}^{n \times d}$ عبارت است از

$$\ell(\theta; \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \ln [c(F_1(x_{i1}; \theta_1), \dots, F_d(x_{id}; \theta_d); \theta_2)] + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^d \ln f_j(x_{ij}; \theta_j)$$

که برای هر $j = 1, \dots, d$ داریم $\mathbf{x}_j = (x_{1j}, \dots, x_{nj})$

پیرو رابطه (۴.۳) می‌توان توزیع متا- d متغیره را با پیوند یک مفصل تی و d تابع توزیع کناری تک‌متغیره دلخواه تولید کرد. فرض کنید $t_v(\cdot)$ توزیع تی تک‌متغیره با درجه آزادی $v > 1$ و $t_{v,R}$ توزیع تی d -متغیره مرکزی با درجه آزادی $v > 1$ و ماتریس پراکنش مقارن $d \times d$ و همیشه مثبت $R = (\rho_{ij})_{1 \leq i, j \leq d}$ با درایه‌های قطری واحد و بقیه درایه‌ها $-1 < \rho_{ij} < 1$ باشند. توابع چگالی احتمال به صورت

$$f(x; v) = \frac{\Gamma(\frac{v+1}{2})}{\sqrt{v\pi} \Gamma(\frac{v}{2})} \left(1 + \frac{x^2}{v}\right)^{-\frac{v+1}{2}}$$

^۱ مطالب این بخش از مقاله مین و همکاران (۲۰۱۱) اقتباس شده است.

$$f(x; \nu, R) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+d}{\nu})}{(\nu\pi)^{\frac{d}{2}} \Gamma(\frac{\nu}{\nu})} |R|^{-\frac{1}{\nu}} \left(1 + \frac{1}{\nu} \mathbf{x}^T R^{-1} \mathbf{x}\right)^{-\frac{\nu+d}{\nu}}$$

خواهند بود. از رابطه (۳.۳) داریم

$$c(\mathbf{u}; \nu, R) = \frac{f(F_1^{-1}(u_1; \nu), \dots, F_d^{-1}(u_d; \nu))}{\prod_{j=1}^d f(F_j^{-1}(u_j; \nu))} = \frac{\Gamma(\frac{\nu+d}{\nu}) \Gamma(\frac{\nu}{\nu})^{d-1} \left(1 + \frac{1}{\nu} \mathbf{z}^T R^{-1} \mathbf{z}\right)^{-\frac{\nu+d}{\nu}}}{\Gamma(\frac{\nu+1}{\nu})^d |R|^{-\frac{1}{\nu}} \prod_{j=1}^d \left(1 + \frac{z_j^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{\nu}}}$$

در این جا $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_d)^T$, $z_j = F_j^{-1}(u_j; \nu)$ و $F^{-1}(\cdot; \nu)$ تابع چندک توزیع تی تک متغیره با درجه آزادی ν است. باید توجه داشت که اگر $\mathbf{X} \sim t_{\nu, R}$ و $C_d(\mathbf{u}; \nu, R)$ مفصل توزیع $t_{\nu, R}$ باشد، آنگاه $\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_d) \sim C_d(\mathbf{u}; \nu, R)$ با $U_j = F(X_j; \nu_j)$ به ازای هر $j = 1, \dots, d$ (مین و همکاران، ۲۰۱۱).

تابع توزیع یک توزیع متا-تی d -بعدی با کناری های $t_{\nu_1}, \dots, t_{\nu_d}$ توسط مفصل تی $C_d(\mathbf{u}; \nu, R)$ در $\mathbf{u} = (F(x_1; \nu_1), \dots, F(x_d; \nu_d))^T$ به دست می آید و با $MT_d(\boldsymbol{\theta})$ نمایش داده می شود، که در آن $\boldsymbol{\theta} = (\nu_1, \dots, \nu_d, \nu, \boldsymbol{\rho}^T)^T \in \mathbb{R}^{\frac{d+1}{\nu}+1}$ اعضای $\boldsymbol{\rho}$ درایه های مثلث پایینی ماتریس R هستند. با استفاده از رابطه (۴.۳) می توان تابع چگالی $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d) \sim MT_d(\boldsymbol{\theta})$ را به صورت

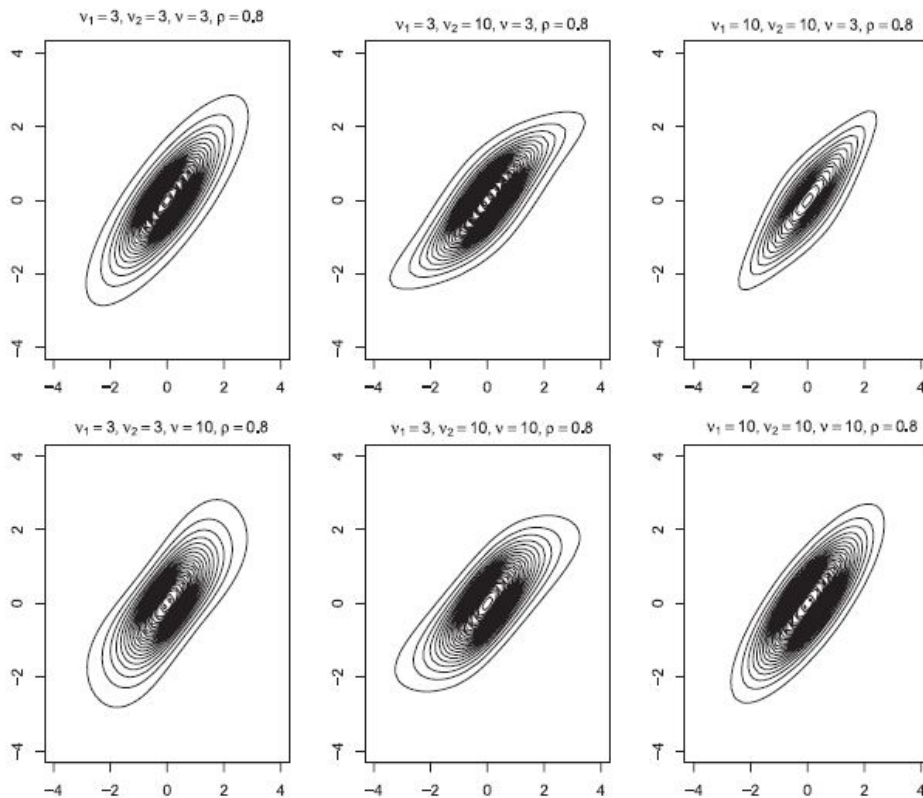
$$h(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}) = c(F(x_1; \nu_1), \dots, F(x_d; \nu_d); \nu, R) \prod_{j=1}^d f(x_j; \nu_j) \\ = \frac{\Gamma(\frac{\nu+d}{\nu}) \Gamma(\frac{\nu}{\nu})^{d-1} \left(1 + \frac{1}{\nu} \mathbf{z}^T R^{-1} \mathbf{z}\right)^{-\frac{\nu+d}{\nu}}}{\Gamma(\frac{\nu+1}{\nu})^d |R|^{-\frac{1}{\nu}} \prod_{j=1}^d \left(1 + \frac{z_j^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{\nu}}} \prod_{j=1}^d \frac{\Gamma(\frac{\nu_j+1}{\nu_j})}{\sqrt{\nu_j \pi} \Gamma(\frac{\nu_j}{\nu_j})} \left(1 + \frac{x_j^2}{\nu_j}\right)^{-\frac{\nu_j+1}{\nu_j}}$$

بیان کرد، که در آن $\mathbf{Z} = (F^{-1}(F(x_1; \nu_1)), \dots, F^{-1}(F(x_d; \nu_d); \nu))^T$

برای n مشاهده مستقل و هم توزیع $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)^T \in \mathbb{R}^{n \times d}$ و به ازای هر $i = 1, \dots, n$ داریم

$\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \dots, x_{id})^T \sim MT_d(\boldsymbol{\theta})$ تابع لگاریتم درست نمایی عبارت است از

$$\begin{aligned}
 \ell(\theta; \mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^n \ln c(F_1(x_{i1}; \nu_1), \dots, F_d(x_{id}; \nu_d); \nu, R) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^d \ln f_j(x_{ij}; \nu_j) \\
 &= n \ln \Gamma\left(\frac{\nu+d}{\nu}\right) + n(d-1) \ln \Gamma\left(\frac{\nu}{\nu}\right) - nd \ln \Gamma\left(\frac{\nu+1}{\nu}\right) - \frac{n}{\nu} \ln(|R|) \\
 &\quad - \frac{\nu+d}{\nu} \sum_{i=1}^n \ln\left(1 + \frac{\mathbf{z}_i^T R^{-1} \mathbf{z}_i}{\nu}\right) + \frac{\nu+1}{\nu} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^d \ln\left(1 + \frac{\mathbf{z}_i^T \mathbf{j}^{\nu_j}}{\nu}\right) \\
 &\quad + \sum_{j=1}^d \left(n \ln \Gamma\left(\frac{\nu_j+1}{\nu}\right) - \frac{n}{\nu} \ln(\nu_j \pi) - n \ln \Gamma\left(\frac{\nu_j}{\nu}\right) - \left(\frac{\nu_j+1}{\nu}\right) \ln\left(1 + \frac{\mathbf{x}_i^T \mathbf{j}^{\nu_j}}{\nu_j}\right) \right).
 \end{aligned}
 \tag{۵.۳}$$



شکل ۱۰.۳: نمودار تراز تابع چگالی توزیع متا-تی دومتغیره به ازای $\rho = 0.8$ و درجه‌های آزادی متفاوت

۲.۳.۳ روش‌های برآورد ماکسیمم درست‌نمایی

در برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترهای توزیع چندمتغیره مبتنی بر مفصل اغلب در اجرا انجام محاسبات سخت می‌شود. برای غلبه بر این مشکل بهینه‌سازی، می‌توان از الگوریتم‌های عددی مانند

الگوریتم نیوتن-رافسون^۱ و الگوریتم ماکسیمسازی امیدریاضی^۲ استفاده کرد. سانگ و همکاران^۳ (۲۰۰۵) یک الگوریتم نقطه ثابت برای پیدا کردن برآورد ماکسیم درستنمایی ساختند. این روش را ماکسیمسازی با استفاده از بخش بندی^۴ نامیدند که تابع لگاریتم درستنمایی را به دو بخش تجزیه می‌کند. بخش اول مدل کار^۵ نام دارد و به راحتی بهینه می‌شود و بخش دوم که با خطای مدل کار برابر است، مدل خطا^۶ نام دارد. در مدل‌های مبتنی بر مفصل، لگاریتم درستنمایی به طور طبیعی به دو بخش تجزیه می‌شود. بنابراین روش ماکسیمسازی با استفاده از بخش بندی برای این مدل‌ها بسیار مناسب است. مدل کار شامل پارامترهای کناری و مدل خطا شامل پارامترهای کناری و پارامترهای مفصل است. از زمانی که سانگ و همکاران (۲۰۰۵) روش ماکسیمسازی با استفاده از بخش بندی را ارائه دادند محققان کاربردهای متعدد این روش را بررسی کردند. لیو و لاگر^۷ (۲۰۰۹) از این روش برای مدل‌های مفصل-گارچ^۸ مبتنی بر مفصل گاوسی استفاده کردند. آن‌ها اجرای الگوریتم خود را که استنباط مبتنی بر توزیع‌های کناری^۹ نامیدند با الگوریتم‌های دیگر مقایسه کردند و نشان دادند که راهبرد استنباط مبتنی بر توزیع‌های کناری برای برآورد کردن مفصل-گارچ زمانی که از الگوریتم ماکسیمسازی با استفاده از بخش بندی می‌تواند بهبود یابد. علاوه بر این سانگ و همکاران (۲۰۰۷) الگوریتم ماکسیمسازی با استفاده از بخش بندی را در مدل‌های با اثرهای آمیخته^{۱۰} را با توزیع خطای تی چندمتغیره بررسی کردند. آن‌ها الگوریتم ماکسیمسازی با استفاده از بخش بندی را برای برآورد پارامترهای مدل‌های با اثرهای آمیخته چه در بعد پایین و چه در بعد بالا پیشنهاد دادند. در این بخش به معرفی روش‌های مختلف برآورد ماکسیم درستنمایی پارامترهای توزیع متا-تی می‌پردازیم.

(۱) روش ماکسیمسازی مستقیم (DIR)^{۱۱}

^۱Newton-Raphson

^۲Expectation maximization

^۳ Song, Fan and Kalbfleisch

^۴Maximization by parts

^۵ Working model

^۶Error model

^۷ Liu and Luger

^۸Copula-GARCH

^۹Inference for margins

^{۱۰}Mixed-effects models

^{۱۱}Direct maximization

فرض کنید بردار پارامترها $\theta \in \mathbb{R}^p$ و داده‌های $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{(n \times d)}$ و لگاریتم درستنمایی $\ell(\theta; \mathbf{x})$ داده شده در رابطه (۵.۳) باشند. یک روش استاندارد برای برآورد ماکسیم درستنمایی روش ماکسیم‌سازی مستقیم است. در این روش یک ماکسیم‌سازی p -بعدی از تابع درستنمایی نسبت به θ انجام می‌دهیم که $p = \frac{d^2+d}{2} + 1$ در واقع

$$\hat{\theta} = \arg \max \ell(\theta; \mathbf{x}).$$

لو و همکاران^۱ (۱۹۹۴) از روش‌های عددی مانند تقریب زدن ماتریس هسیان برای حل مسائل بهینه‌سازی استفاده کردند. این الگوریتم‌ها اغلب پایدار نیستند و در بعدهای بالا محاسبات به سختی انجام می‌شود.

(۲) روش استنباط مبتنی بر توزیع‌های کناری (IFM)

روش استنباط مبتنی بر توزیع‌های کناری از افراز تابع درستنمایی رابطه (۵.۳) به دو بخش کناری و مفصل به دست می‌آید که ماکسیم‌سازی در دو مرحله انجام می‌شود. در مرحله اول مدل کناری نسبت به پارامترهای کناری ماکسیم می‌شود و در مرحله دوم مدل مفصل با توجه به پارامترهای کناری برآورد شده در مرحله اول، نسبت به پارامترهای مفصل ماکسیم می‌شود. به طور دقیق‌تر، فرض کنید $\theta = (\theta_1^T, \theta_2^T)^T$ بردار پارامترها باشد که در آن $\theta_1 = (v_1, \dots, v_d)^T \in \mathbb{R}^d$ پارامترهای d توزیع کناری و $\theta_2 = (v, \rho^T)^T \in \mathbb{R}^{(d^2-d)/2+1}$ پارامترهای مفصل هستند. افراز رابطه (۵.۳) به صورت

$$\ell(\theta; \mathbf{x}) = \ell_m(\theta_1; \mathbf{x}) + \ell_c(\theta_1, \theta_2; \mathbf{x})$$

است، که در آن

$$\ell_m(\theta_1; \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^d \ln f(x_{ij}; v_j) \quad (۶.۳)$$

$$\ell_c(\theta_1, \theta_2; \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \ln c(F_1(x_{i1}; v_1), \dots, F_d(x_{id}; v_d); v, R) \quad (۷.۳)$$

مراحل روش استنباط مبتنی بر توزیع‌های کناری به طور خلاصه به شکل زیر است

مرحله اول: مقدار $\hat{\theta}_1$ را از رابطه زیر بیابید

$$\hat{\theta}_1 = \arg \max \ell_m(\theta_1; \mathbf{x})$$

^۱ Lu, Nocedal, Zhu and Byrd

مرحله دوم: مقدار $\hat{\theta}_2$ را از رابطه زیر بیابید

$$\hat{\theta}_2 = \arg \max \ell_c(\hat{\theta}_1, \theta_2; \mathbf{X})$$

است. جو^۱ (۲۰۰۵) روش استنباط مبتنی بر توزیع‌های کناری را با گذاشتن برخی شرط‌ها بهبود داد و نشان داد که برآوردگرهای روش استنباط مبتنی بر توزیع‌های کناری سازگار و به طور مجانبی نرمال هستند. با این حال بزرگ‌ترین ضعف این روش که باعث می‌شود کارایی آن کاهش یابد این است که در برآورد مرحله یک وابستگی بین توزیع‌های کناری در نظر گرفته نمی‌شود.

۳) روش ماکسیم‌سازی با استفاده از بخش‌بندی (MBP)

الگوریتم چند مرحله‌ای نقطه ثابت ماکسیم‌سازی با استفاده از بخش‌بندی توسط سانگ و همکاران (۲۰۰۵) پیشنهاد داده شد. این روش، برآوردگرهای استنباط مبتنی بر توزیع‌های کناری را با استفاده از تکرار بهبود می‌دهد، مشکلات مربوط به بعدهای بالا در ماکسیم‌سازی مستقیم را کاهش می‌دهد و در نهایت یک روش جایگزین امیدوارکننده برای تعیین برآورد ماکسیم درستیابی فراهم می‌کند.

روش ماکسیم‌سازی با استفاده از بخش‌بندی نیز مانند روش استنباط مبتنی بر توزیع‌های کناری به تجزیه تابع درستیابی به دو بخش مدل کار و مدل خطا نیاز دارد. مدل خطا شامل تمام پارامترهای موجود در لگاریتم تابع درستیابی است در حالی که مدل کار تنها شامل بخشی از پارامترهاست. برای توزیع متا-تی، تجزیه به طور طبیعی در رابطه (۵.۳) آورده شده است و روابط (۶.۳) و (۷.۳) به ترتیب نشان‌دهنده مدل کار و مدل خطا هستند. هدف اصلی در رهیافت ماکسیم‌سازی با استفاده از بخش‌بندی برقراری شرط تسلط اطلاعات^۲ است. سانگ و همکاران (۲۰۰۵) نشان دادند که همگرایی روش ماکسیم‌سازی با استفاده از بخش‌بندی به شدت به انتخاب مدل کار و مدل خطا بستگی دارد. یک انتخاب مستقل مدل کار مانند رابطه (۶.۳) که فقط شامل توزیع‌های کناری تک‌متغیره است ممکن است به شکست الگوریتم ماکسیم‌سازی با استفاده از بخش‌بندی منجر شود زیرا که اطلاعاتی درباره وابستگی نمی‌دهد. به منظور دستیابی به همگرایی نیاز داریم تا یک سری اطلاعات به مدل کار مستقل اضافه کنیم که برخی از درجه‌های وابستگی بین توزیع‌های کناری را نیز به حساب آورد. بنابراین تابع درستیابی رابطه (۵.۳)

^۱Joe

^۲Information dominance

که برای توزیع متا-تی است را به صورت

$$\ell(\theta; \mathbf{x}) = \ell_w(\theta_1; \theta_{2,\circ}; \mathbf{x}) + \ell_e(\theta_1, \theta_2; \theta_{2,\circ}; \mathbf{x}) \quad (۸.۳)$$

تجزیه می‌کنیم، که در آن

$$\ell_w(\theta_1; \theta_{2,\circ}; \mathbf{x}) = \ell_m(\theta_1; \mathbf{x}) + \ell_c(\theta_1, \theta_{2,\circ}; \mathbf{x})$$

$$\ell_e(\theta_1; \theta_2; \theta_{2,\circ}; \mathbf{x}) = \ell_c(\theta_1, \theta_2; \mathbf{x}) - \ell_c(\theta_1; \theta_{2,\circ}; \mathbf{x})$$

برای پارامترهای معلوم مفصل $(v_\circ, R_\circ) = \theta_{2,\circ}$ هستند. معادله‌ها طبق تجزیه لگاریتم درست‌نمایی در

رابطه (۸.۳) به صورت

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ell(\theta; \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta_1} \ell_w(\theta_1; \theta_{2,\circ}; \mathbf{x}) + \frac{\partial}{\partial \theta_1} \ell_e(\theta_1, \theta_2; \theta_{2,\circ}; \mathbf{x}) \\ \frac{\partial}{\partial \theta_2} \ell_e(\theta_1, \theta_2; \theta_{2,\circ}; \mathbf{x}) \end{pmatrix} = 0$$

هستند. الگوریتم اصلی ماکسیم‌سازی با استفاده از بخش‌بندی، (MBP - SFK) از سانگ و همکاران

(۲۰۰۵) را می‌توان برای MBP-SFK به شکل

$$\hat{\theta}_1^\circ \rightarrow \frac{\partial}{\partial \theta_1} \ell_w(\theta_1; \theta_{2,\circ}; \mathbf{x}) = 0.$$

$$\hat{\theta}_2^\circ \rightarrow \frac{\partial}{\partial \theta_2} \ell_e(\hat{\theta}_1^\circ, \theta_2; \theta_{2,\circ}; \mathbf{x}) = 0$$

و برای $k = 1, 2, \dots$ MBP-SFK به صورت

$$\hat{\theta}_1^k \rightarrow \frac{\partial}{\partial \theta_1} \ell_w(\theta_1; \theta_{2,\circ}; \mathbf{x}) = -\frac{\partial}{\partial \theta_2} \ell_e(\hat{\theta}_1^{k-1}, \hat{\theta}_2^{k-1}; \theta_{2,\circ}; \mathbf{x})$$

$$\hat{\theta}_2^k \rightarrow \ell_e(\hat{\theta}_1^{k-1}, \theta_2; \theta_{2,\circ}; \mathbf{x}) = 0$$

فرمول‌بندی کرد. برای هر $k = 1, 2, \dots$ MBP - SFK با الگوریتم ماکسیم‌سازی با استفاده از

بخش‌بندی برای برآورد مدل کار و مدل خطا مرحله جاری از برآوردهای مرحله قبلی استفاده می‌کند.

طبق پذیره‌های نظم از قضیه ۱ سانگ و همکاران (۲۰۰۵) سازگاری برآوردهای $(\hat{\theta}_1^1, \hat{\theta}_2^1) = \hat{\theta}^1$ در

مرحله یک از سازگاری $(\hat{\theta}_1^\circ, \hat{\theta}_2^\circ) = \hat{\theta}^\circ$ پیروی می‌کند. علاوه بر این اگر $(\hat{\theta}_1^1, \hat{\theta}_2^1) = \hat{\theta}^1$ سازگار باشد،

آنگاه $(\hat{\theta}_1^k, \hat{\theta}_2^k) = \hat{\theta}^k$ نیز به ازای $k = 2, 3, \dots$ سازگار است. در الگوریتم ماکسیم‌سازی با استفاده

از بخش‌بندی به هدف اصلی دست خواهیم یافت اگر شرط غلبه اطلاعات برقرار باشد یعنی برای پارامتر

واقعی θ رابطه $\|\epsilon_w^{-1}\epsilon_e\| < 1$ که در آن $\epsilon_w = -\frac{1}{n}E[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ell_w]$ و $\epsilon_e = -\frac{1}{n}E[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ell_e]$ هستند برقرار باشد. این شرط تضمین می‌کند که اطلاعات مدل کار بر اطلاعات مدل خطا غالب است. نرمال بودن مجانبی $\hat{\theta}^k$ برای هر k ثابت از قضیه ۳ سانگ و همکاران (۲۰۰۵) پیروی می‌کند. به علاوه اگر شرط غلبه اطلاعات برقرار باشد ماتریس کوواریانس مجانبی $\hat{\theta}^k$ زمانی که $k \rightarrow \infty$ به ماتریس کوواریانس مجانبی $\hat{\theta}$ MLE همگرا خواهد بود.

حل کردن معادله‌ها در الگوریتم ماکسیم‌سازی با استفاده از بخش‌بندی اصلی سانگ و همکاران (۲۰۰۵) شامل تعیین مرتبه اول مشتق جزئی تابع لگاریتم درست‌نمایی نسبت به پارامترهای نامعلوم است. بنابراین برای حل عددی معادله‌ها زمان زیادی لازم است. در زیر روش‌های ماکسیم‌سازی مستقیم و استنباط مبتنی بر توزیع‌های کناری را با استفاده از یک روش مینیم‌سازی مستقیم با هم ترکیب کردیم که باید در هر تکرار روش ماکسیم‌سازی با استفاده از بخش‌بندی حل کرد. علاوه بر این پارامترهای معلوم مفصل $(\nu_0, R_0) = \theta_{2,0}$ را برای دو راه سازوار^۱ و ناسازوار^۲ انتخاب می‌کنیم. روش ناسازوار $\theta_{2,0}$ را برای تمام تکرارها ثابت نگه می‌دارد، در حالی که روش سازوار در هر تکرار $\theta_{2,0}$ را تغییر می‌دهد. ساختار دو روش الگوریتم ماکسیم‌سازی با استفاده از بخش‌بندی در زیر آمده است:

در مرحله اول مقادیر اولیه با استفاده از روش استنباط مبتنی بر توزیع‌های کناری تولید می‌شوند و

$$\hat{\theta}_1^0 = \arg \max \ell_m(\theta_1; \mathbf{x})$$

$$\hat{\theta}_2^0 = \arg \max \ell_c(\hat{\theta}_1^0, \theta_2; \mathbf{x})$$

و برای هر مرحله $k = 1, 2, \dots$ داریم

$$\hat{\theta}_1^k = \arg \max \ell_m(\theta_1; \theta_{2,0}; \mathbf{x})$$

$$\hat{\theta}_2^k = \arg \max \ell_c(\hat{\theta}_1^k, \theta_2; \mathbf{x})$$

که در روش ناسازوار $\hat{\theta}_2^k = \theta_{2,0}$ و در روش سازوار $\hat{\theta}_2^k = \hat{\theta}_2^{k-1}$.

توجه کنید که به جای حل کردن معادله‌ها در $MBP - SFK$ روش اصلی ماکسیم‌سازی با استفاده از

^۱ Adaptive

^۲ Non-adaptive

بخش‌بندی، از روش استنباط مبتنی بر توزیع‌های کناری برای تولید مقادیر اولیه در مرحله صفر از مراحل ماکسیم‌سازی با استفاده از بخش‌بندی استفاده کردیم. برآوردهای روش استنباط مبتنی بر توزیع‌های کناری سازگار هستند و مقادیر آغازگر مناسبی برای الگوریتم ماکسیم‌سازی با استفاده از بخش‌بندی فراهم می‌کنند. طبق پذیره‌های نظم داده شده در قضیه ۳ سانگ و همکاران (۲۰۰۵) راه حل $\hat{\theta}^k$ به روش سازوار در مرحله k از حل معادله‌ها از $MBP - SFK$ را به دست می‌آید. به طور کلی

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta_1} \ell_w(\theta_1; \theta_{2,0}; \mathbf{x}) &= -\frac{\partial}{\partial \theta_1} \ell_e(\hat{\theta}_1^{k-1}; \hat{\theta}_2^{k-1}; \theta_{2,0}; \mathbf{x}) \\ &= -\left(\frac{\partial}{\partial \theta_1} \ell_c(\hat{\theta}_1^{k-1}; \hat{\theta}_2^{k-1}; \mathbf{x}) - \frac{\partial}{\partial \theta_1} \ell_c(\hat{\theta}_1^{k-1}; \hat{\theta}_2^{k-1}; \mathbf{x}) \right) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \theta_2} \ell_e(\hat{\theta}_1^{k-1}; \theta_2; \theta_{2,0}; \mathbf{x}) &= \frac{\partial}{\partial \theta_2} \ell_c(\hat{\theta}_1^k; \theta_2; \mathbf{x}) = 0 \end{aligned}$$

بنابراین راه حل $\hat{\theta}^k$ در روش سازوار سازگار است. در روش ناسازوار راه حل $\hat{\theta}^1$ با راه حل معادله‌های زیر یکسان است

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta_1} \ell_m(\theta_1; \mathbf{x}) + \frac{\partial}{\partial \theta_1} \ell_c(\theta_1; \theta_2; \theta_1; \mathbf{x}) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \theta_2} \ell_c(\hat{\theta}_1^1; \theta_2; \mathbf{x}) &= 0 \end{aligned}$$

بنابراین طبق قضیه ۱ سانگ و همکاران (۲۰۰۵) یک برآوردگر سازگار است. از آنجایی که در روش ناسازوار $\theta_{2,0}$ ثابت و برابر برآوردگر $\hat{\theta}_2^0$ در روش استنباط مبتنی بر توزیع‌های کناری است می‌توانیم فقط تغییرات مرحله اول را اعمال کنیم. این عمل کارایی راه حل استنباط مبتنی بر توزیع‌های کناری را افزایش می‌دهد، با این حال مانند روش سازوار نمی‌تواند یک راه حل برآورد ماکسیم درستمایی کامل را ارائه دهد. این روش توسط لیو و لاگر (۲۰۰۹) برای مدل‌های دومتغیره مفصل-گارچ مبتنی بر مفصل گاوسی پیشنهاد شده است. آن‌ها این روش را استنباط مبتنی بر توزیع‌های کناری اصلاح شده^۱ نامیدند. بزرگترین تفاوت میان روش آن‌ها و روش‌های ماکسیم‌سازی با استفاده از بخش‌بندی ارائه شده در این بخش در پیدا کردن برآورد ماکسیم درستمایی است. مانند روش ماکسیم‌سازی مستقیم مسائل بهینه‌سازی غیرخطی را با محدود کردن به روش‌های عددی حل می‌کنیم.

^۱Modified IFM method

۴.۳ مفصل تی چوله

می‌دانیم که مفصل تی دارای وابستگی دنباله‌ای بالایی و وابستگی دنباله‌ای پایینی یکسان و مخالف صفر است، اما در واقعیت مجموعه داده‌های تجربی که دارای چنین ویژگی باشند زیاد نیستند. مفصل تی چوله^۱ این مشکل را حل کرده است زیرا که در دنباله‌ها وابستگی متفاوت دارد. مفصل تی چوله توسط یک توزیع تی چوله چندمتغیره و توزیع‌های کناری آن تعریف می‌شود. کاتز و ناداراجا (۲۰۰۴)، نشان دادند انواع مختلفی از توزیع تی چوله چندمتغیره وجود دارند و به تبع آن، انواع مختلفی از مفصل تی چوله می‌توان تعریف کرد.

۱.۴.۳ انواع مفصل تی چوله

در این بخش سه نوع مختلف از مفصل تی چوله آورده شده است که بیشتر به بیان جزئیات نوع سوم پرداخته شده است. اولین نوع توسط دی‌مارتا و مک‌نیل^۲ (۲۰۰۵) مبتنی بر نسخه چندمتغیره از توزیع تی چوله هذلولی‌گون تعمیم‌یافته^۳ پیشنهادی بارندورف-نیلسن^۴ (۱۹۹۷) تعریف شده است. دومین نوع، توسط اسمیت و همکاران^۵ (۲۰۱۲) از روی توزیع تی چوله چندمتغیره پیشنهادی ساهو و همکاران^۶ (۲۰۰۳) ساخته شد. نوع سوم از مفصل تی چوله توسط جو^۷ (۲۰۰۶) مبتنی بر توزیع تی چوله چندمتغیره آزالینی و کاپیتانیو^۷ (۲۰۰۳) پیشنهاد شده است. کولو و پیتر^۸ (۲۰۱۰) نیز برای ساختن نوع سوم تلاش کردند اما ناموفق بودند.

در این جا با تمرکز روی بردار تصادفی X که دارای توزیع تی چوله است به تعریف مختصر انواع مفصل تی چوله می‌پردازیم. بردار مکان را $(\xi_1, \dots, \xi_d) = (\xi^T)$ و بردار مقیاس را $\sigma^T = (\sigma_1, \dots, \sigma_d) = (1, \dots, 1)$ در نظر می‌گیریم.

^۱Skewed t copula

^۲Demarta and McNeil

^۳Generalized hyperbolic skew t-distribution

^۴Barndorff-Nielsen

^۵Smith, Gan and Kohn

^۶Sahu, Dey and Branco

^۷Azzalini and Capitanio

^۸Kollo and Pettere

(۱) مفصل تی چوله GH

نوع اول مفصل تی چوله توسط دی‌مارتا و مک‌نیل (۲۰۰۵) تعریف شده است. متغیر تصادفی برای این مفصل به صورت

$$\mathbf{X} = \gamma h V^{-1} + V^{-1/2} \mathbf{Z},$$

نمایش داده می‌شود، دی‌مارتا و مک‌نیل به مورد خاص

$$\mathbf{X} = \gamma V^{-1} + V^{-1/2} \mathbf{Z}$$

پرداختند، که در آن V دارای توزیع گاما، $V \sim G(\nu/2, \nu/2)$ و \mathbf{Z} دارای توزیع نرمال d -بعدی است، $\mathbf{Z} \sim N_d(\mathbf{0}, \Sigma)$. در این جا γ بردار d -بعدی پارامترهای چولگی است. اگر $\gamma = \mathbf{0}$ آن‌گاه مفصل تی چوله به مفصل تی استودنت تبدیل می‌شود. این مفصل مبتنی بر نسخه چندمتغیره از توزیع تی چوله هذلولی‌گون تعمیم‌یافته پیشنهادی بارندورف-نیلسن (۱۹۹۷) ساخته شده است. بنابراین این نوع را مفصل تی چوله GH می‌نامیم. کوواریانس توزیع تی چوله چندمتغیره با $\gamma \neq \mathbf{0}$ متناهی است اگر درجه آزادی ν بزرگ‌تر از ۴ باشد در حالی که کوواریانس توزیع تی استودنت چندمتغیره با $\gamma = \mathbf{0}$ متناهی است اگر درجه آزادی ν بزرگ‌تر از ۲ باشد.

(۲) مفصل تی چوله نوع دوم

مفصل تی چوله نوع دوم توسط اسمیت و همکاران (۲۰۱۲) ساخته شده است. متغیر تصادفی برای این مفصل به صورت

$$\mathbf{X} = V^{-1/2}(\Gamma|\mathbf{W}| + \mathbf{Z}),$$

نمایش داده می‌شود، که در آن $V \sim G(\nu/2, \nu/2)$ ، $\mathbf{Z} \sim N_d(\mathbf{0}, \Sigma)$ و $\mathbf{W} \sim N_d(\mathbf{0}, I)$. در این جا $\Gamma = \text{diag}(\gamma_1, \dots, \gamma_d)$ یک ماتریس قطری $d \times d$ است که نشان‌دهنده پارامترهای چولگی است. این مفصل از روی توزیع تی چوله چندمتغیره پیشنهادی ساهو و همکاران (۲۰۰۳) ساخته شد. اگر $\Gamma = \mathbf{0}$ آن‌گاه مفصل تی چوله به مفصل تی استودنت تبدیل می‌شود. کوواریانس توزیع تی چوله چندمتغیره با $\Gamma \neq \mathbf{0}$ متناهی است اگر درجه آزادی ν بزرگ‌تر از ۲ باشد.

(۳) مفصل تی چوله نوع سوم

مفصل تی چوله نوع سوم از توزیع تی چوله چندمتغیره آزالینی و کاپیتانیو (۲۰۰۳) گرفته شده است. متغیر تصادفی برای این توزیع به صورت

$$\mathbf{X} = V^{-1/2} \mathbf{Y}$$

نمایش داده می‌شود، که در آن $V \sim G(v/2, v/2)$. در این جا \mathbf{Y} یک بردار تصادفی است که دارای توزیع

نرمال چوله d -بعدی با بردار چولگی $\zeta^T = (\zeta_1, \dots, \zeta_d)$ است و به صورت

$$Y_j = \delta_j |Z_0| + \sqrt{1 - \delta_j^2} Z_j$$

نمایش داده می‌شود، که در آن $Z_0 \sim N(0, 1)$ و $\mathbf{Z} \sim N_d(0, \Psi)$. در اینجا Ψ ماتریس همبستگی $d \times d$

است و توزیع \mathbf{Y} به صورت $\mathbf{Y} \sim SN_d(\zeta, \Psi)$ نوشته می‌شود. با استفاده از چگالی نرمال d -متغیره با

کناری‌های استاندارد شده، ماتریس همبستگی Ω و تابع توزیع نرمال استاندارد تک‌متغیره Φ ، چگالی \mathbf{Y}

به صورت

$$f(\mathbf{y}) = \frac{1}{2} \phi_d(\mathbf{y}; \Omega) \Phi(\alpha^T \mathbf{y}),$$

داده می‌شود، که در آن

$$\zeta^T = (\zeta_1, \dots, \zeta_d) = \left(\frac{\delta_1}{\sqrt{1 - \delta_1^2}}, \dots, \frac{\delta_d}{\sqrt{1 - \delta_d^2}} \right), \quad (9.3)$$

$$\Delta = \text{diag} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \zeta_1^2}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta_d^2}} \right),$$

$$\Omega = \Delta(\Psi + \zeta \zeta^T) \Delta,$$

$$\alpha^T = \frac{\zeta^T \Psi^{-1} \Delta^{-1}}{\sqrt{1 + \zeta^T \Psi^{-1} \zeta}}.$$

بردار تصادفی \mathbf{X} به صورت $\mathbf{X}_d(0, \Omega, \alpha, v)$ نوشته می‌شود. مانند توزیع تی چوله چندمتغیره ساهو و

همکاران (۲۰۰۳)، کوواریانس توزیع تی چوله چندمتغیره آزالینی و کاپیتانیو (۲۰۰۳) متناهی است اگر

درجه آزادی بزرگ‌تر از ۲ باشد.

ماتریس همبستگی R به صورت

$$R = \begin{pmatrix} 1 & \delta^T \\ \delta & \Omega \end{pmatrix}$$

تعریف می شود و بردار پارامتر چولگی $\delta^T = (\delta_1, \dots, \delta_d)$ توسط

$$\delta_j = \frac{\zeta_j}{\sqrt{1 + \zeta_j^2}}$$

با استفاده از پارامترهای چولگی کناری $\zeta^T = (\zeta_1, \dots, \zeta_d)$ رابطه (۹.۳) به دست می آید.

۲.۴.۳ ساختار مفصل تی چوله

توزیع تی چوله چندمتغیره آزالینی و کاپیتانیو $(2 \circ 3)$ ، $St_d(\circ, \Omega, \alpha, \nu)$ دارای چگالی به صورت

$$g(\mathbf{x}) = \nu t_{d,\nu}(\mathbf{x}; \Omega) T_{\nu+d} \left(\alpha^T \mathbf{x} \sqrt{\frac{\nu+d}{\mathbf{x}^T \Omega^{-1} \mathbf{x}}} \right) \quad (10.3)$$

است، که در آن $t_{d,\nu}(\mathbf{x}; \Omega)$ تابع چگالی از توزیع تی استودنت چندمتغیره با ماتریس همبستگی Ω و درجه

آزادی ν است. این تابع به صورت

$$t_{d,\nu}(\mathbf{x}; \Omega) = \frac{\Gamma((\nu+d)/2)}{(\pi\nu)^{d/2} \Gamma(\nu/2) |\Omega|^{1/2}} \left[1 + \frac{\mathbf{x}^T \Omega^{-1} \mathbf{x}}{\nu} \right]^{-(\nu+d)/2}$$

مشخص می شود. $T_{\nu+d}(\circ)$ تابع توزیع تی استودنت تک متغیره با درجه آزادی $\nu+d$ است. جو (۲۰۰۶)

نشان داد که توزیع کناری j -ام دارای چگالی به صورت

$$g_j(x) = \nu t_{1,\nu}(x) T_{\nu+1} \left(\zeta_j x \sqrt{\frac{\nu+1}{x^2 + \nu}} \right) \quad (11.3)$$

است. کولو و پیتر (۲۰۱۰) نشان دادند توزیع کناری j -ام از توزیع تی چوله d -متغیره $St_d(\circ, \Omega, \alpha, \nu)$

دارای توزیع تی چوله تک متغیره $St_1(\circ, 1, \alpha_j, \nu)$ است. در حقیقت بهتر است توزیع کناری j -ام را با

$St_1(\circ, 1, \zeta_j, \nu)$ نشان دهیم. ساختار مفصل تی چوله بر اساس آزالینی و کاپیتانیو (۲۰۰۳) به صورت

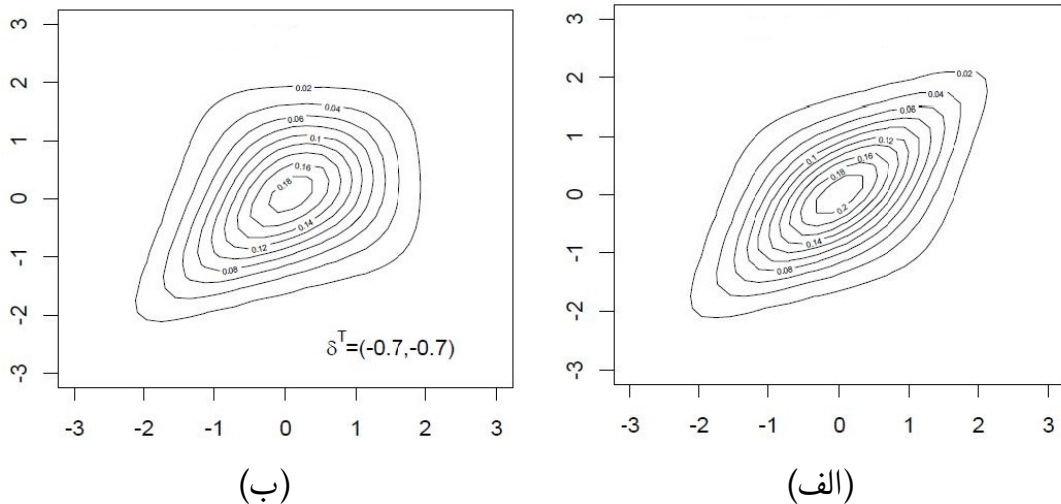
$$C_{st}(u_1, \dots, u_d; \Omega, \delta, \nu)$$

$$= St_d(St_1^{-1}(u_1; \circ, 1, \zeta_1, \nu), \dots, St_d^{-1}(u_d; \circ, 1, \zeta_d, \nu); \circ, \Omega, \alpha, \nu)$$

است، که در آن ζ_1, \dots, ζ_d در رابطه (۹.۳) تعریف شده اند و

$$\alpha = \frac{\Omega^{-1} \delta}{\sqrt{1 - \delta^T \Omega^{-1} \delta}}$$

از این پس عضو (i, j) -ام ماتریس همبستگی Ω را با ρ_{ij} نشان می‌دهیم. اگر $\delta < 0$ آن‌گاه وابستگی دنباله‌ای در دنباله پایینی بیشتر از دنباله بالایی است. نمودار تراز چگالی توام مفصل تی استیوندت و مفصل تی چوله در شکل ۲.۳ این ادعا را تایید می‌کند.



شکل ۲.۳: نمودار تراز توزیع دوبعدی با کناری‌های نرمال استاندارد به ازای $\rho = 0.5$ و $\nu = 3$ با استفاده از (الف) مفصل تی استیوندت (ب) مفصل تی چوله.

۳.۴.۳ برآورد ماکسیمم درست‌نمایی مفصل تی چوله

فرض می‌کنیم که تمام توزیع‌های کناری برآورد شده‌اند و N مشاهده مستقل \mathbf{u}_i که دارای توزیع یکنواخت روی $[0, 1]^d$ هستند توسط توابع توزیع کناری داده شده‌اند. مجموعه مشاهدات $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_N\}$ شبه نمونه^۱ نامیده می‌شود و می‌تواند با استفاده از برآورد تابع توزیع کناری مشاهدات اصلی به دست آید.

تابع لگاریتم درست‌نمایی $l(\theta)$ برای $\theta = (\Omega, \delta, \nu)$ به صورت

$$l(\theta) = \sum_{i=1}^N \ln \left(\frac{\partial C_{st}(\mathbf{u}_i; \Omega, \delta, \nu)}{\partial \mathbf{u}_i} \right) \quad (12.3)$$

تعریف می‌شود که مشتق جزئی در رابطه (۱۲.۳) به صورت

$$\frac{\partial C_{st}(\mathbf{u}; \Omega, \delta, \nu)}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial C_{st}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d; \Omega, \delta, \nu)}{\partial \mathbf{u}_1, \dots, \partial \mathbf{u}_d} = \frac{g(\mathbf{x})}{\prod_{j=1}^d g_j(x_j)}$$

با استفاده از روابط (۱۰.۳) و (۱۱.۳) به دست می‌آید، که در آن $\mathbf{x}^T = (x_1, \dots, x_d)$ توسط

^۱Pseudo sample

$\mathbf{x}_i = St^{-1}(\mathbf{u}_i; \circ, \lambda, \zeta_j, \nu)$ بنا براین $l(\theta)$ به صورت

$$l(\theta) = \sum_{i=1}^N l_i(\theta)$$

و

$$l_i(\theta) = \ln \left(\frac{\Gamma((\nu + d)/2)}{(\pi\nu)^{d/2} \Gamma(\nu/2)} \right) - \frac{1}{2} \ln |\Omega| - \frac{\nu + d}{2} \ln \left(1 + \frac{\mathbf{x}_i^T \Omega^{-1} \mathbf{x}_i}{\nu} \right) \\ + \ln \left[T_{\nu, \nu+d} \left(\mathbf{a}^T \mathbf{x}_i \sqrt{\frac{\nu + d}{\mathbf{x}_i^T \Omega^{-1} \mathbf{x}_i + \nu}} \right) \right] - \sum_{j=1}^d \ln g_j(x_{ij}; \zeta_j, \nu)$$

به دست می‌آید، که در آن $\mathbf{x}_i^T = (x_{i1}, \dots, x_{id})$ ، $\mathbf{u}_i^T = (u_{i1}, \dots, u_{id})$ و $x_{ij} = St^{-1}(u_{ij}; \circ, \lambda, \zeta_j, \nu)$ هستند (یوشیبا، ۲۰۱۴).

۴.۴.۳ وابستگی دنباله‌ای مفصل تی چوله

در این بخش ضرایب وابستگی دنباله‌ای مفصل تی چوله دومتغیره آورده شده است. فرض کنید η_l ، η_u و η_t به ترتیب ضرایب وابستگی دنباله‌ای پایینی مفصل تی چوله، ضریب وابستگی دنباله‌ای بالایی مفصل تی چوله و ضریب وابستگی مفصل تی باشند، با توجه به این که می‌دانیم ضرایب وابستگی دنباله‌ای بالایی و پایینی در مفصل تی بر هم منطبق و دارای مقداری مثبت است برتوت^۱ (۲۰۱۰) روابط بین ضرایب وابستگی دنباله‌ای مفصل تی چوله و مفصل تی را به دست آورد

$$\eta_l = \frac{1 - T_{\nu, \nu+2}(\alpha \sqrt{(v+2)(1+\rho)/2})}{1 - T_{\nu, \nu+1}(\lambda \sqrt{v+1})} \eta_t$$

$$\eta_u = \frac{T_{\nu, \nu+2}(\alpha \sqrt{(v+2)(1+\rho)/2})}{T_{\nu, \nu+1}(\lambda \sqrt{v+1})} \eta_t$$

$$\alpha = \frac{\lambda}{\sqrt{|\lambda^2(1+\rho)^2 - \lambda^2(1-\rho)^2|}} \text{ که اگر } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \text{ آن گاه}$$

در رابطه زیر به خوبی نشان داده می‌شود که وابستگی بالایی و پایینی به ضریب چولگی λ بستگی دارند

$$\lambda > (<) \Leftrightarrow \frac{T_{\nu, \nu+2}(\alpha \sqrt{(v+2)(1+\rho)/2})}{T_{\nu, \nu+1}(\lambda \sqrt{v+1})} > (<) 1$$

^۱Bortot

که در این صورت اگر $\lambda < 0$ آن‌گاه $\eta_u > \eta_t > \eta_l$ و اگر $\lambda > 0$ آن‌گاه $\eta_l < \eta_t < \eta_u$.
در فصل بعد روی داده‌های شبیه‌سازی شده مطالعاتی از جمله برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترهای
توزیع متا-تی مثبتی بر مفصل تی و برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترهای توزیع تی چوله مثبتی بر
مفصل تی چوله خواهیم پرداخت.

فصل ۴

شبه‌سازی

۱.۴ برآورد ماکسیمم درست‌نمایی توزیع متا-تی مبتنی بر مفصل تی

در این بخش به برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترهای توزیع متا-تی دو متغیره مبتنی بر مفصل تی می‌پردازیم. در ابتدا مجموعه داده‌هایی از توزیع متا-تی شبه‌سازی می‌کنیم. داده‌ها را با دو ماتریس همبستگی متفاوت

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0.8 \\ 0.8 & 1 \end{pmatrix}$$

و

$$R_2 = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0.9 \\ 0.9 & 1 \end{pmatrix}$$

به ازای درجه‌های آزادی متعدد برای مفصل و توزیع‌های کناری شبه‌سازی می‌کنیم. در مجموع ۳۶ مدل متا-تی می‌سازیم. بر روی دو اندازه نمونه کوچک و بزرگ یکی $n = 100$ (اندازه کوچک) و دیگری $n = 1000$ (اندازه بزرگ) بررسی‌ها را انجام می‌دهیم. در نمونه کوچک $r = 10$ نمونه مستقل برای هر مدل متا-تی بیرون می‌کشیم و در نمونه بزرگ $r = 100$ نمونه مستقل بیرون می‌کشیم و در نهایت برآورد ماکسیمم درست‌نمایی را برای هر نمونه‌ای که بیرون می‌کشیم تعیین می‌کنیم. در جدول ۱.۴ و ۲.۴ نتایج مربوط به مقادیر برآورد شده پارامترهای مفصل و پارامترهای توزیع‌های کناری، میانگین توان دوم خطاهای پارامترها به ترتیب برای نمونه کوچک و نمونه بزرگ گنجانده شده است.

جدول ۱.۴: برآورد ماکسیمم درست‌نمایی توزیع متا-تی برای نمونه کوچک

$MSE(\hat{\rho})$	$MSE(\hat{\nu})$	$MSE(\hat{\nu}_1)$	$MSE(\hat{\nu}_2)$	$MSE(\hat{\nu}_1)$	$\hat{\rho}$	$\hat{\nu}$	$\hat{\nu}_1$	$\hat{\nu}_2$	$\hat{\nu}_1$	$r = 10, n = 100$
۰.۰۰۰۱۶۹۵۰۲۷	۰.۰۰۲۱۹۶۸۵۵	۰.۰۰۰۲۸۷۸۱۰۱	۰.۰۰۰۷۷۸۸۹۰۵	۰.۰۰۰۷۷۸۸۹۰۵	۰.۷۹۰۳۶۶۶	۱.۹۸۷۹۳۲	۱.۰۰۲۷۲۵	۰.۹۷۶۸۷۰۷	۱.۰۰۲۷۲۵	$R = R_1, \nu = \nu, \nu_m = (1, 1)$
۰.۰۰۰۰۶۲۵۶۴۸۴	۰.۰۰۰۳۷۰۸۶۳۸	۰.۰۰۰۳۵۳۳۶۳۹	۰.۰۰۲۲۱۰۸۴	۰.۰۰۲۲۱۰۸۴	۰.۷۷۳۲۴۷۹	۲.۰۴۴۹۹۱	۲.۰۹۱۶۶۹	۱.۰۶۳۱۹۴	۲.۰۹۱۶۶۹	$R = R_1, \nu = \nu, \nu_m = (2, 1)$
۰.۰۰۰۱۳۹۳۸۰۲	۰.۰۰۸۵۳۸۰۰۱	۰.۰۱۴۷۰۳۷۳	۰.۰۱۰۲۲۷۸۶	۰.۰۱۰۲۲۷۸۶	۰.۸۰۸۳۵۴۵	۱.۸۴۴۷۰۴	۲.۰۴۱۷۷۶	۲.۰۴۱۷۷۶	۲.۰۴۱۷۷۶	$R = R_1, \nu = \nu, \nu_m = (2, 2)$
۰.۰۰۰۱۶۱۷۱۷۱	۰.۰۰۸۶۵۱۷۸۳	۰.۰۱۰۷۰۴۳۴	۰.۰۴۳۹۴۳	۰.۰۴۳۹۴۳	۰.۷۸۹۰۴۵۷	۱.۷۹۱۲۵	۲.۰۸۹۹۴۵	۲.۰۸۹۹۴۵	۲.۰۴۵۶۶۶۹	$R = R_1, \nu = \nu, \nu_m = (3, 2)$
۰.۰۰۰۱۲۵۶۱۲۴	۰.۰۰۷۸۴۹۱۰۹	۰.۰۳۳۹۷۷۰۸	۰.۰۶۵۳۳۰۹	۰.۰۶۵۳۳۰۹	۰.۷۹۱۶۸۶۷	۱.۸۷۵۴۸۴	۳.۱۱۱۴۲۹	۳.۱۱۱۴۲۹	۳.۵۸۴۴۰۴	$R = R_1, \nu = \nu, \nu_m = (3, 3)$
۰.۰۰۰۱۷۷۸۴۲۷	۰.۰۲۲۰۱۶۴۸	۰.۰۰۰۸۸۰۸۱۹۳	۰.۰۰۱۳۲۰۶۰۴	۰.۰۰۱۳۲۰۶۰۴	۰.۷۸۹۱۸۵۵	۲.۴۹۱۹۴۵	۱.۰۰۵۳۱۸	۱.۰۰۵۳۱۸	۱.۰۰۱۷۲۴۴	$R = R_1, \nu = \nu, \nu_m = (1, 1)$
۰.۰۰۰۱۶۶۲۸۴۷	۰.۰۱۹۵۶۳۱۵	۰.۰۱۹۸۲۲۳۱	۰.۰۰۲۰۵۵۲۴۱	۰.۰۰۲۰۵۵۲۴۱	۰.۷۷۳۱۵۲۳	۲.۴۷۶۵۸۷	۲.۱۹۴۷۴۸	۲.۱۹۴۷۴۸	۱.۰۰۲۹۰۵	$R = R_1, \nu = \nu, \nu_m = (1, 2)$
۰.۰۰۰۱۱۸۶۵۶۴	۰.۰۴۹۲۵۳۵	۰.۰۰۷۱۵۷۸۶۸	۰.۰۰۵۱۷۱۳۳۶	۰.۰۰۵۱۷۱۳۳۶	۰.۷۹۲۹۵۴۶	۲.۳۸۶۷۰۴	۱.۹۲۱۰۵۲	۱.۹۲۱۰۵۲	۱.۹۲۰۸۱۳	$R = R_1, \nu = \nu, \nu_m = (2, 2)$
۰.۰۰۰۰۹۸۸۹۹۹۶	۰.۰۱۸۲۳۸۸	۰.۰۲۶۲۶۷۱۹	۰.۰۶۶۶۵۰۳۶	۰.۰۶۶۶۵۰۳۶	۰.۷۹۰۱۰۶۷	۲.۳۹۶۵۱۳	۳.۲۲۷۹۸	۳.۲۲۷۹۸	۲.۰۴۳۷۵۵	$R = R_1, \nu = \nu, \nu_m = (2, 3)$
۰.۰۰۰۰۸۳۶۲۵۶۵	۰.۰۳۰۵۶۴۷۲	۰.۰۰۱۸۸۴۷۳۵	۰.۰۰۱۸۲۹۳۵	۰.۰۰۱۸۲۹۳۵	۰.۸۹۰۹۲۵۷	۱.۹۲۰۶۴۲	۱.۰۰۰۹۹۰۸	۱.۰۰۰۹۹۰۸	۱.۰۰۰۰۵۳۹	$R = R_2, \nu = \nu, \nu_m = (1, 1)$
۰.۰۰۰۰۵۰۷۱۵۸۴	۰.۰۲۵۵۰۳۲۲	۰.۰۰۱۶۶۳۶۳۸	۰.۰۱۳۲۵۸۸۴	۰.۰۱۳۲۵۸۸۴	۰.۸۹۳۹۳۶۸	۱.۸۳۴۳۵۵	۱.۰۰۱۲۵۵۴	۱.۰۰۱۲۵۵۴	۲.۰۴۳۴۷۷	$R = R_2, \nu = \nu, \nu_m = (2, 1)$
۰.۰۰۰۰۵۰۵۷۸۱۶۴	۰.۰۲۸۴۵۸۸۷	۰.۰۱۹۴۱۳۳	۰.۰۲۲۵۹۴۱	۰.۰۲۲۵۹۴۱	۰.۸۹۳۵۰۹۴	۲.۰۲۷۶۴۸	۲.۱۶۸۶۳	۲.۱۶۸۶۳	۲.۱۶۷۲۳۱	$R = R_2, \nu = \nu, \nu_m = (2, 2)$
۰.۰۰۰۰۵۷۲۸۱۶۱	۰.۰۳۰۶۹۸۵۹	۰.۰۱۲۵۹۴۸۲	۰.۰۴۲۹۹۴۰۷	۰.۰۴۲۹۹۴۰۷	۰.۸۹۲۷۷۴	۱.۸۵۷۶۲۲	۲.۰۳۳۵۴۵	۲.۰۳۳۵۴۵	۲.۰۴۰۳۶۸	$R = R_2, \nu = \nu, \nu_m = (3, 2)$
۰.۰۰۰۰۸۷۰۱۷۰۶	۰.۰۲۵۴۲۸۳۵	۰.۰۲۹۹۹۰۴۱	۰.۰۳۳۳۵۴۳۶	۰.۰۳۳۳۵۴۳۶	۰.۸۹۵۷۱۱۸	۱.۸۷۰۱۸۱	۳.۰۷۹۵۷۸	۳.۰۷۹۵۷۸	۳.۰۹۱۹۵۱	$R = R_2, \nu = \nu, \nu_m = (3, 3)$
۰.۰۰۰۰۱۲۴۷۷۰۷	۰.۰۱۲۷۷۰۵۷	۰.۰۰۰۴۱۴۱۹۶۱	۰.۰۰۰۳۳۹۴۵۰۸	۰.۰۰۰۳۳۹۴۵۰۸	۰.۸۹۴۵۰۳۲	۲.۳۲۵۱۳۲	۱.۰۰۱۱۲۴۷	۱.۰۰۱۱۲۴۷	۰.۹۷۰۱۷۴۴	$R = R_2, \nu = \nu, \nu_m = (1, 1)$
۰.۰۰۰۰۳۶۹۵۶۵۶	۰.۰۲۶۵۶۲۷۲	۰.۰۰۶۰۰۹۴۳۲	۰.۰۰۰۷۹۶۶۹۸۴	۰.۰۰۰۷۹۶۶۹۸۴	۰.۸۹۵۷۵۲۱	۲.۴۸۴۳۸۹	۱.۸۸۱۹۹۹	۱.۸۸۱۹۹۹	۰.۹۵۹۰۳۲۲	$R = R_2, \nu = \nu, \nu_m = (1, 2)$
۰.۰۰۰۰۵۳۸۸۰۸۸	۰.۰۱۲۹۰۷۹۱	۰.۰۰۱۳۱۱۱۳	۰.۰۰۰۷۲۸۷۳۶۵	۰.۰۰۰۷۲۸۷۳۶۵	۰.۸۸۳۸۸۵۶	۲.۱۶۵۶۳	۲.۲۴۶۳۰۶	۲.۲۴۶۳۰۶	۲.۱۷۸۱۰۴	$R = R_2, \nu = \nu, \nu_m = (2, 2)$
۰.۰۰۰۰۲۶۱۱۸۴۴	۰.۰۲۵۱۸۲۰۱	۰.۰۶۸۸۱۲۴۱	۰.۰۲۲۰۴۴۳	۰.۰۲۲۰۴۴۳	۰.۸۹۰۰۶۴۸	۲.۴۹۴۷۱۶	۳.۲۴۳۷۶۴	۳.۲۴۳۷۶۴	۲.۱۲۳۵۱۹	$R = R_2, \nu = \nu, \nu_m = (2, 3)$

جدول ۲.۴: برآورد ماکسیمم درستمایی توزیع متا-تی برای نمونه بزرگ

$MSE(\hat{\rho})$	$MSE(\hat{\phi})$	$MSE(\hat{\phi}_1)$	$MSE(\hat{\phi}_2)$	$MSE(\hat{\phi}_3)$	$\hat{\rho}$	$\hat{\phi}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\phi}_2$	$r = 100, n = 1000$
۰.۰۰۰۷۰۶۳۳۱۶	۰.۰۶۴۹۴۴۴۴۳	۰.۰۰۱۲۲۵۹۱	۰.۰۰۷۹۸۷۷۷۲	۰.۰۸۱۰۹۷۴۵	۰.۸۱۰۹۷۴۵	۱.۶۸۸۳۳۹	۰.۹۴۹۱۷۵	۰.۹۴۹۱۷۵	$R = R_1, v = 2, v_m = (1, 1)$
۰.۰۰۱۳۳۷۴۱۷	۰.۱۱۳۳۸۹۴	۰.۰۰۹۷۶۲۵۵۷	۰.۰۰۸۵۴۴۵۱۳	۰.۷۸۸۲۷۵۲	۰.۷۸۸۲۷۵۲	۱.۷۴۱۲۸۴	۱.۰۲۳۵۷۹	۲.۰۴۴۵۴۴	$R = R_1, v = 2, v_m = (2, 1)$
۰.۰۰۱۶۴۸۱۴۱	۰.۱۰۳۳۵۶۴	۰.۰۱۰۶۶۶۱۳	۰.۰۷۰۹۹۲۲۷	۰.۷۸۰۷۱۷۶	۰.۷۸۰۷۱۷۶	۱.۶۹۳۴۴۸	۲.۰۱۴۸۵۵	۱.۹۵۱۷۱۲	$R = R_1, v = 2, v_m = (2, 2)$
۰.۰۰۱۳۶۰۸۹۱	۰.۰۶۳۳۴۱۰۱	۰.۰۰۸۹۵۷۳۴۱	۰.۰۳۶۴۹۲۰۷	۰.۷۷۴۹۵۷۶	۰.۷۷۴۹۵۷۶	۱.۸۰۴۶۹۵	۲.۱۵۵۰۷۵	۳.۲۸۴۱۷۴	$R = R_1, v = 2, v_m = (3, 2)$
۰.۰۰۱۴۳۱۶۶۳	۰.۱۰۵۱۹۹۵	۰.۰۳۲۲۸۲۸۵	۰.۰۶۳۲۹۵۳۳	۰.۷۷۸۹۸۷۶	۰.۷۷۸۹۸۷۶	۱.۷۹۱۷۷	۲.۹۹۴۴۶۶	۳.۱۹۱۳۰۶	$R = R_1, v = 2, v_m = (3, 3)$
۰.۰۰۰۷۰۸۸۴۳۴	۰.۱۲۷۲۳۷۸	۰.۰۰۵۷۲۳۴۰۸	۰.۰۰۷۱۴۹۷۷۳	۰.۷۹۸۱۷۰۵	۰.۷۹۸۱۷۰۵	۲.۳۲۱۰۱۱	۰.۹۵۷۰۸۲۵	۰.۹۶۰۱۱۴	$R = R_1, v = 3, v_m = (1, 1)$
۰.۰۰۰۷۸۶۰۹۰۳	۰.۲۰۳۵۵۸۵	۰.۰۱۲۵۳۰۷۴	۰.۰۰۱۳۸۳۹	۰.۷۹۱۴۳۸۲	۰.۷۹۱۴۳۸۲	۲.۵۴۴۴۸۶	۲.۰۹۹۱۴۶	۱.۰۲۵۱۱۴	$R = R_1, v = 3, v_m = (1, 2)$
۰.۰۰۱۹۲۰۵۲۴	۰.۲۰۱۷۳۰۸	۰.۰۰۹۸۶۳۹۵۷	۰.۰۱۱۱۲۹۰۵	۰.۷۶۵۹۵۷۱	۰.۷۶۵۹۵۷۱	۲.۲۴۲۶۰۷	۱.۹۸۹۰۸۳	۲.۰۴۵۵۴۸	$R = R_1, v = 3, v_m = (2, 2)$
۰.۰۰۱۰۶۶۵۷۵	۰.۱۷۹۱۱۱۳	۰.۰۵۰۶۱۵۳۱	۰.۰۰۸۴۷۷۳۸۸	۰.۷۹۷۱۷۸۷	۰.۷۹۷۱۷۸۷	۲.۳۳۵۷۷۱	۲.۹۷۰۳۹۷	۱.۹۱۶۰۱۷	$R = R_1, v = 3, v_m = (2, 3)$
۰.۰۰۰۳۸۸۵۹۲۸	۰.۱۱۶۶۱۶	۰.۰۱۰۴۸۶۹۶	۰.۰۰۱۱۵۶۰۶۴	۰.۸۹۰۳۸۸	۰.۸۹۰۳۸۸	۱.۷۶۵۲۳۷	۱.۰۲۱۴۹	۱.۰۲۳۳۶۱	$R = R_2, v = 2, v_m = (1, 1)$
۰.۰۰۰۳۴۸۹۰۰۳	۰.۰۸۶۹۴۸۲۲	۰.۰۰۱۱۷۳۸۰۳	۰.۰۰۹۶۴۵۵۹۴	۰.۸۹۶۷۱۸۵	۰.۸۹۶۷۱۸۵	۱.۸۷۵۷۸۲	۱.۰۰۸۴۳۹	۲.۰۵۰۲۹	$R = R_2, v = 2, v_m = (2, 1)$
۰.۰۰۰۴۳۸۲۴۶	۰.۱۳۳۳۲۹۵	۰.۰۱۳۸۰۶۶۲	۰.۰۱۸۴۰۴۸۹	۰.۸۸۹۸۱۳۴	۰.۸۸۹۸۱۳۴	۱.۸۱۳۴۲۶	۲.۱۹۵۲۵۲	۲.۲۰۴۱۱۷	$R = R_2, v = 2, v_m = (2, 2)$
۰.۰۰۰۵۰۴۵۲۱۴	۰.۰۹۰۵۳۱۴۳	۰.۰۰۷۷۸۱۵۰۹	۰.۰۳۶۹۶۷۳۷	۰.۸۹۵۲۳۸۱	۰.۸۹۵۲۳۸۱	۱.۸۹۸۹۳۳	۱.۹۷۶۵۵۸	۳.۰۰۰۹۰۷	$R = R_2, v = 2, v_m = (3, 2)$
۰.۰۰۰۶۸۴۵۴۱۵	۰.۱۲۴۱۶۵۲	۰.۰۵۵۸۵۹۳	۰.۰۶۰۹۳۱۳۶	۰.۸۹۲۲۸۵۴	۰.۸۹۲۲۸۵۴	۱.۷۳۱۳۳۸	۳.۳۲۹۴۶۷	۳.۳۵۰۷۹۸	$R = R_2, v = 2, v_m = (3, 3)$
۰.۰۰۰۴۵۹۰۸۰۵	۰.۲۵۱۱۷۰۱	۰.۰۰۱۷۲۸۸۱۲	۰.۰۰۱۹۵۱۷۶۲	۰.۸۹۰۸۹۴۱	۰.۸۹۰۸۹۴۱	۲.۴۲۸۶۹	۱.۰۱۴۶۹۲	۱.۰۲۰۹۷۸	$R = R_2, v = 3, v_m = (1, 1)$
۰.۰۰۰۲۳۴۴۱۷۲	۰.۱۹۶۵۶۰۴	۰.۰۰۳۴۱۸۵۳۶	۰.۰۰۴۷۵۵۸۴	۰.۸۹۰۶۹۹۵	۰.۸۹۰۶۹۹۵	۲.۴۵۷۵۲۲	۱.۹۵۹۸۷۴	۰.۹۸۵۲۵۴۷	$R = R_2, v = 3, v_m = (1, 2)$
۰.۰۰۰۳۹۸۷۶۷۹	۰.۲۲۳۸۷۱۶	۰.۰۲۰۱۵۳۰۲	۰.۰۱۵۵۳۰۱۴	۰.۸۹۱۴۳۵	۰.۸۹۱۴۳۵	۲.۳۵۴۷۸۳	۲.۰۸۲۵۵۱	۲.۰۳۱۱۷۱	$R = R_2, v = 3, v_m = (2, 2)$
۰.۰۰۰۳۵۱۳۳۳۷	۰.۲۱۵۰۲۸۶	۰.۰۲۵۲۳۲۸۷	۰.۰۰۶۱۷۳۶۰۴	۰.۸۹۲۳۶۰۳	۰.۸۹۲۳۶۰۳	۲.۵۱۷۴۲	۳.۰۹۸۳۶۲	۲.۰۳۳۷۶۹	$R = R_2, v = 3, v_m = (2, 3)$

در برآورد ماکسیمم درست‌نمایی هر مدل متا-تی از تابع $maxLik$ بسته $maxLik$ نرم‌افزار R استفاده شده است. در جدول ۱۰۴، v_m بردار پارامترهای توزیع‌های کناری، v درجه آزادی مفصل و ρ عنصر قطر اصلی ماتریس همبستگی R هستند. مقادیری که برای پارامترها برآورد شده‌اند میانگین مقادیری است که در هر تکرار برآورد شده‌اند و میانگین توان دوم خطای ذکر شده در جدول میانگین مقادیر میانگین توان دوم تمام تکرارهاست.

۲.۴ برآورد ماکسیمم درست‌نمایی توزیع تی چوله چندمتغیره مبتنی بر مفصل تی چوله

در بسیاری از کاربردهای مالی ضرایب دنباله‌ای بالایی و پایینی نقش بسیار مهمی را زمانی که وابستگی پیشامدهای کرانگینی مورد بررسی قرار می‌گیرند، ایفا می‌کنند. برای مفصل‌های متقارن ضرایب دنباله‌ای بالایی و پایینی یکسان هستند. مفصل تی تعمیمی از مفصل گاوسی است با این تفاوت که وابستگی دنباله‌ای غیر صفر دارد. ضریب وابستگی دنباله‌ای مفصل تی دوبردی با پارامترهای ρ و v توسط رابطه

$$\lambda(v, \rho) = \frac{2t_{v+1}(-\sqrt{v+1}\sqrt{1-\rho}/\sqrt{1+\rho})}{v+1}$$

محاسبه می‌شود.

اما در بسیاری از مسایل کاربردی داده‌ها دارای رفتار یکسانی در دنباله‌ها نیستند. در چنین مواردی استفاده از مفصل تی چوله بسیار مفید است زیرا دارای ضرایب وابستگی دنباله‌ای متفاوت در دنباله‌های بالایی و پایینی است. بنابراین در این بخش به برآورد پارامترهای توزیع تی چوله چندمتغیره با استفاده از مفصل تی چوله می‌پردازیم.

در این بخش ۱۵ نمونه مختلف به حجم 2500 از توزیع تی چوله چندمتغیره تولید کرده‌ایم. فرض می‌کنیم پارامترهای مکان $\xi = 0$ و پارامترهای مقیاس $\sigma = 1$ باشند. برآورد را به ازای $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ ، v و ρ های متفاوت انجام داده‌ایم که نتایج به صورت خلاصه در جدول ۳.۴ آورده شده است. برآورد پارامترهای مفصل تی چوله توسط تابع $mst.mle$ در بسته sn اجرا شده است که در پیوست الف ارائه شده‌اند.

جدول ۳.۴: برآورد ماکسیمم درستنمایی توزیع تی چوله چندمتغیره

$loglik$	$\hat{\rho}$	$\hat{\nu}$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_1$	$n = 2500$
-۷۷۳۰.۰۲	۳.۱۸۷۹	۰.۷۰۴۳۹	۰.۳۲۸۱۳	۰.۳۲۹۲۰	$\alpha = (0, 36, 0, 33)$ $\rho = 0, 7, \nu = 3$
-۷۷۶۶.۶۷	۳.۰۱۴۳	۰.۷۰۴۱۱	-۰.۳۵۹۲۹	-۰.۳۶۵۲۴	$\alpha = (-0, 36, -0, 33)$ $\rho = 0, 7, \nu = 3$
-۷۵۲۴.۲۸	۳.۱۱۷۲۱	۰.۶۹۱۸۵	-۰.۵۵۷۹۶	-۰.۶۹۵۰۰	$\alpha = (-0, 7, -0, 6)$ $\rho = 0, 7, \nu = 3$
-۷۶۹۴.۸۲	۳.۱۹۵۲	۰.۶۹۸۳۴	۰.۴۹۸۳۱	۰.۵۲۱۶۳	$\alpha = (0, 5, 0, 5)$ $\rho = 0, 7, \nu = 3$
-۷۲۳۳.۶۷	۴.۳۵۸۵	۰.۶۹۸۳۴	۰.۵۰۹۶۹	۰.۴۸۹۷۹	$\alpha = (0, 5, 0, 5)$ $\rho = 0, 7, \nu = 4$
-۷۰۰۹.۴۹	۲.۹۱۶۷۰	۰.۶۹۷۴۲	-۰.۴۹۹۱۸	-۰.۸۹۹۸۹	$\alpha = (-0, 9, -0, 5)$ $\rho = 0, 7, \nu = 3$
-۷۴۰۸.۰۷	۲.۹۸۱۳	۰.۵۱۲۳۱	۰.۸۹۶۱۵	۰.۳۲۵۰۸	$\delta = (0, 3, 0, 9)$ $\rho = 0, 5, \nu = 3$
-۷۹۵۵.۷۲	۲.۹۰۵۸	۰.۶۰۶۸۸	-۰.۲۴۲۶۲	-۰.۶۱۱۳۱	$\alpha = (-0, 6, -0, 2)$ $\rho = 0, 8, \nu = 3$
-۷۳۳۹.۵۴	۳.۱۵۵۶	۰.۴۹۰۴۵	۰.۷۹۳۲۴	۰.۸۰۳۴۵	$\alpha = (0, 8, 0, 8)$ $\rho = 0, 5, \nu = 3$
-۷۴۱۵.۲۴	۲.۸۹۶۲	۰.۴۹۰۴۵	-۰.۸۰۸۰۴	-۰.۷۹۴۶۹	$\alpha = (-0, 8, -0, 8)$ $\rho = 0, 5, \nu = 3$
-۷۳۱۶.۳۷	۳.۰۱۱۸	۰.۵۹۴۲	-۰.۷۹۲۵۱	-۰.۸۰۴۷۷	$\delta = (-0, 8, -0, 8)$ $\rho = 0, 6, \nu = 3$
-۸۰۷۰.۵	۲.۸۶۲۰۷	۰.۶۰۷۵۶	-۰.۴۸۶۳۱	-۰.۳۷۰۷۹	$\alpha = (-0, 4, -0, 5)$ $\rho = 0, 6, \nu = 3$
-۷۴۹۵.۵	۳.۰۱۰۷	۰.۷۲۳۷۳	-۰.۶۰۴۶۳	-۰.۳۰۰۵۶	$\alpha = (-0, 3, -0, 6)$ $\rho = 0, 7, \nu = 3$
-۷۷۳۷.۰۱	۳.۰۷۱۱	۰.۶۹۲۱۸	۰.۴۵۰۴۱	۰.۴۴۵۱۴	$\alpha = (0, 45, 0, 45)$ $\rho = 0, 7, \nu = 3$
-۸۰۸۷.۸۸	۳.۰۱۷۵	۰.۵۹۸۴۱	۰.۵۶۳۸۱	۰.۳۹۹۳۹	$\alpha = (0, 39, 0, 55)$ $\rho = 0, 6, \nu = 3$

۳.۴. پیشنهادات لازم برای آینده تحقیق

- با توجه به مطالب بیان‌شده و مطالعه شبیه‌سازی، می‌توان به موارد زیر به عنوان آینده تحقیق اشاره کرد:
- (۱) در این پایان‌نامه پارامترها به روش ماکسیمم درستنمایی برآورد شده‌اند، می‌توان از روش‌های دیگر برآورد از جمله روش بیزی نیز در برآورد پارامترها استفاده کرد.
 - (۲) در فصل شبیه‌سازی، پارامترهای توزیع‌های دوبعدی برآورد شده‌اند. با اندکی محاسبات بیشتر برآوردها را برای توزیع‌های با بعد بیشتر از دو نیز می‌توان انجام داد.
 - (۳) مفصل تی چوله و مفصل تی گروه‌بندی شده در مقایسه با مفصل تی برای مدل‌بندی وابستگی داده‌های دارای وابستگی ناهمگون مناسب‌تر هستند. در این مطالعه مفصل تی چوله مورد بررسی قرار گرفته است در مطالعات آینده می‌توان به بررسی دقیق مفصل تی گروه‌بندی شده پرداخت.
 - (۴) در این پایان‌نامه از داده‌های شبیه‌سازی شده برای مطالعه استفاده شده است، اما کاربرد مفصل تی و مفصل تی چوله در مسایل مالی از جمله مدیریت ریسک و ریاضیات مالی بسیار دیده شده است. بنابراین می‌توان از این توابع برای مطالعه داده‌های واقعی نیز استفاده کرد.

پیوست آ

کدهای مربوط به فصل چهارم

۱.آ کدهای برآورد ماکسیم درستنمایی توزیع متا-تی مبتنی بر مفصل تی

```
library(mvtnorm)
```

```
library(scatterplot3d)
```

```
library(mnormt)
```

```
library(sn)
```

```
library(stats4)
```

```
library(numDeriv)
```

```
library(pspline)
```

```
library(copula)
```

```
library(miscTools)
```

```
library(maxLik)
```

```
#####
```

```
M=function(x.samp,v1,v2,v,rho){
```

```
R=matrix(c(1,rho,rho,1),2)
```

```

z=matrix(0,n,d)

W=matrix(0,n,d)

Q=numeric(n)

z[,1]=qt(pt(x.samp[,1],df=v1),df=v)

z[,2]=qt(pt(x.samp[,2],df=v2),df=v)

  for (i in 1:n){

    Q[i]=(log(1+(t(z[i,])**solve(R)**z[i,])/v))

      for (j in 1:d){

        W[i,j]=log(1+((z[i,j])^2)/v)

      }

    }

b=list(Q,W)

return(b)

}

#####

f=function(V,x.samp){

v1=abs(V[1])

v2=abs(V[2])

v=abs(V[3])

rho=abs(V[4])

d=2

R=matrix(c(1,rho,rho,1),2)

g1=n*log(gamma((v+d)/2))+n*(d-1)*log(gamma(v/2))

-n*d*log(gamma((v+1)/2))-(n/2)*log(det(R))

```

```

g2=-((v+d)/2)*sum(M(x.samp,v1,v2,v,rho)[[1]])
+((v+1)/2)*sum(apply(M(x.samp,v1,v2,v,rho)[[2]],2,sum))
g3=+(n*log(gamma((v1+1)/2))-(n/2)*log(v1*pi)
-n*log(gamma(v1/2))-((v1+1)/2)*sum(log(1+(((x.samp[,1])^2)/v1))))
g4=+(n*log(gamma((v2+1)/2))-(n/2)*log(v2*pi)
-n*log(gamma(v2/2))-((v2+1)/2)*sum(log(1+(((x.samp[,2])^2)/v2))))
gg=g1+g2+g3+g4
gg
}

#####

## n is the sample size
## k is the number of iterations

Result=function(n,k){
m=matrix(0,k,4)
ma=numeric(k)
for (i in 1:k){
x.samp1 <- rmvdc(mvdc(tCopula(rho,df=v),
c("t", "t"),list(list(df=v1), list(df = v2))),n)
v<-c(v1,v2,v,rho)
f(v,x.samp1)
mm<-maxLik(f,start=c(v1,v2,v,rho),x.samp=x.samp1,method="BFGS")
ma[i]=mm$maximum
}
}

```

```

    m[i,]=t(abs(coef(mm)))
  }

meann=apply(m,2,mean)

s=(m-matrix(meann,k,4,byrow=TRUE))^2

sd=(apply(s,2,sum))/k

re=list(meann,sd,ma)

return(re)
}

#####

results=Result(n,k)

meann=t(as.matrix(results[[1]]))

colnames(meann)=c("v1","v2","v","rho")

meann

sd=t(as.matrix(results[[2]]))

results[[3]]

mean(results[[3]])

colnames(sd)=c("v1","v2","v","rho")

sd

```

۲.آ کدهای برآورد ماکسیمم درستنمایی توزیع تی چوله چندمتغیره
مبتنی بر مفصل تی چوله

```

library(mnormt)

library(sn)

library(MASS)

```



```

library(signal)

library(numDeriv)

#####
##### multivariate skew t-copula #####
#####
## redefine qst on "sn" ver.1.0-0

qst <- function (p, xi = 0, omega = 1, alpha = 0, nu=Inf,
tol = 1e-08, maxit = 30, ...)
{
  if (length(alpha) > 1)
    stop("'alpha' must be a single value")

  if (length(nu) > 1)
    stop("'nu' must be a single value")

  if (nu <= 0)
    stop("nu must be non-negative")

  if (nu == Inf)
    return(qsn(p, xi, omega, alpha))

  if (nu == 1)
    return(qsc(p, xi, omega, alpha))

  if (alpha == Inf)
    return(xi + omega * sqrt(qf(p, 1, nu)))

  if (alpha == -Inf)
    return(xi - omega * sqrt(qf(1 - p, 1, nu)))

  na <- is.na(p) | (p < 0) | (p > 1)

```

```
abs.alpha <- abs(alpha)

if (alpha < 0)
  p <- (1 - p)

zero <- (p == 0)

one <- (p == 1)

x <- xa <- xb <- xc <- fa <- fb <- fc <- rep(NA, length(p))

nc <- rep(TRUE, length(p))

nc[(na | zero | one)] <- FALSE

fc[!nc] <- 0

xa[nc] <- qt(p[nc], nu)

xb[nc] <- sqrt(qf(p[nc], 1, nu))

fa[nc] <- pst(xa[nc], 0, 1, abs.alpha, nu, ...) - p[nc]

fb[nc] <- pst(xb[nc], 0, 1, abs.alpha, nu, ...) - p[nc]

regula.falsi <- FALSE

it <- 0

while ((sum(nc) > 0) && (it < maxit)) {

  xc[nc] <- if (regula.falsi)

    xb[nc] - fb[nc] * (xb[nc] - xa[nc]) / (fb[nc] - fa[nc])

  else (xb[nc] + xa[nc]) / 2

  fc[nc] <- pst(xc[nc], 0, 1, abs.alpha, nu, ...) - p[nc]

  pos <- (fc[nc] > 0)

  xa[nc][!pos] <- xc[nc][!pos]

  fa[nc][!pos] <- fc[nc][!pos]

  xb[nc][pos] <- xc[nc][pos]
```

```

fb[nc][pos] <- fc[nc][pos]

x[nc] <- xc[nc]

nc[(abs(fc) < tol)] <- FALSE

regula.falsi <- !regula.falsi

it <- it + 1

}

## if(it > 20){ cat("it=",it); }

x <- replace(x, zero, -Inf)

x <- replace(x, one, Inf)

## q <- as.numeric(xi + omega * sign(alpha) * x)

Sign <- function(x) sign(x)+ as.numeric(x==0)

q <- as.numeric(xi + omega * Sign(alpha)* x)

names(q) <- names(p)

return(q)

}

##### random number generator of skew t-copula #####

rstcop <- function(n,rho,delta,nu){

dim <- length(delta);

zeta <- delta/sqrt(1-delta*delta);

Omega <- diag(1/2,dim);

Omega[lower.tri(Omega)] <- rho;

Omega <- Omega + t(Omega);

iOmega <- solve(Omega);

alpha <- iOmega %*% delta /sqrt(1-(t(delta) %*% iOmega %*% delta)[1,1]);

```

```

x <- rmst(n=n,Omega=Omega,alpha=alpha,nu=nu);

u <- matrix(0,nrow=n,ncol=dim);

for(j in 1:dim){ u[,j] <- pst(x[,j], alpha=zeta[j], nu=nu); }

list(x=x,u=u);

}

##### transforming original parameters to internal parameters #####

stIntPara <- function(rho,delta,nu){

  Omega <- diag(1/2,length(delta));

  Omega[lower.tri(Omega)] <- rho;

  Omega <- Omega + t(Omega);

  ndim <- length(delta)+1;

  R <- diag(ndim);

  R[-1,1] <- R[1,-1] <- delta;

  R[-1,-1] <- Omega;

  LTR <- t(chol(R));

  theta <- acos(LTR[2:ndim,1]);

  cumsin <- sin(theta)[-1];

  for(j in 2:(ndim-1)){

    thj <- acos(LTR[(j+1):ndim,j]/cumsin);

    theta <- c(theta,thj);

    cumsin <- (cumsin*sin(thj))[-1];

  }

  c(theta,log(nu-2.0));

}

```

```
##### transforming internal parameters to original parameters #####
stOrgPara <- function(para){
  ntheta <- length(para)-1;
  theta <- para[1:ntheta];
  ndim <- (1+sqrt(1+8*ntheta))/2;
  LTR <- diag(ndim);
  LTR[-1,1] <- cos(theta[1:(ndim-1)]);
  cumsin <- sin(theta[1:(ndim-1)]);
  for(j in 2:(ndim-1)){
    LTR[j,j] <- cumsin[1];
    k <- (j-1)*(ndim-j/2)+1;
    thj <- theta[k:(k+ndim-j-1)];
    cumsin <- cumsin[-1];
    LTR[((j+1):ndim),j] <- cumsin*cos(thj);
    cumsin <- cumsin*sin(thj);
  }
  LTR[ndim,ndim] <- cumsin[1];
  R <- LTR %*% t(LTR);
  Omega <- R[-1,-1];
  delta <- R[1,-1];
  nu <- exp(para[ntheta+1])+2.0;
  list(rho = Omega[lower.tri(Omega)], delta = delta, nu = nu);
}
##### interpolating quantiles #####
```

```

ipqst <- function(udat,zeta,nu,mpoints=150,rel.tol=1e-6){
  dim <- ncol(udat);
  ix <- matrix(0,nrow=nrow(udat),ncol=dim);
  for(j in 1:dim){
    minx <- qst(min(udat[,j]), alpha=zeta[j], nu=nu, rel.tol=rel.tol);
    maxx <- qst(max(udat[,j]), alpha=zeta[j], nu=nu, rel.tol=rel.tol);
    xx <- seq(minx,maxx,length.out=mpoints);
    px <- sort(pst(xx, alpha=zeta[j], nu=nu, rel.tol=rel.tol));
#   cat("j=",j," zetaj=",zeta[j]," nu=",nu,"\n");
    ix[,j] <- pchip(px, xx, udat[,j]);
  }
  ix
}

#####
## negative log-likelihood for multivariate skew t-copula
#####

stcopnll <- function(para, udat=NULL, rel.tol=1e-6, mpoints=150){
  dim <- ncol(udat);
  dp <- stOrgPara(para);
  delta <- dp$delta;
  zeta <- delta/sqrt(1-delta*delta);
  Omega <- diag(1/2,dim);
  Omega[lower.tri(Omega)] <- dp$rho;
  Omega <- Omega + t(Omega);

```

```

iOmega <- solve(Omega);

alpha <- iOmega %*% delta /sqrt(1-as.numeric(t(delta)
  %*% iOmega %*% delta));

nu <- dp$nu;

ix <- ipqst(udat,zeta,nu,mpoints=mpoints,rel.tol=rel.tol);

## Activate the following line instead of monotone
  interpolating quantile

## function ipqst() to use accurate quantile function aqst()

## ix <- aqst(udat,zeta,nu,rel.tol=rel.tol);

lm <- matrix(0,nrow=nrow(udat),ncol=dim);

for(j in 1:dim){ lm[,j] <- dst(ix[,j], alpha=zeta[j], nu=nu,
  log=TRUE); }

lc <- dmst(ix,Omega=Omega,alpha=alpha,nu=nu,log=TRUE);

-sum(lc)+sum(lm)

}

##### MLE for skew t-copula using optim #####

stcop.mle <- function (udat = NULL, start = NULL, method = "Nelder-Mead",
  rel.tol=1e-6, mpoints=150, ...)
{
  iniPar <- stIntPara(start$rho,start$delta,start$nu);

  fit <- optim(iniPar, stcopnll, method=method, hessian=FALSE, udat=udat,
    rel.tol=rel.tol, mpoints=mpoints, ...);

  list(call = match.call(), dp = stOrgPara(fit$par), logL = -fit$value,
    details=fit, nobs = nrow(udat), method = method);
}

```

```

}

##### show estimated parameters and the log-likelihood #####

showResult <- function(fit){

  dp <- fit$dp;

  list(rho=dp$rho,delta=dp$delta,nu=dp$nu,logL=fit$logL);

}

#####

##### multivariate skew t-distribution #####

#####

#negative log-likelihood for multivariate skew t-distribution

(xi=0,omega=1)

#####

stdistnll <- function(para, xdat=NULL){

dp <- stOrgPara(para);

delta <- dp$delta;

Omega <- diag(1/2,ncol(xdat));

Omega[lower.tri(Omega)] <- dp$rho;

Omega <- Omega + t(Omega);

iOmega <- solve(Omega);

alpha <- iOmega %% delta /sqrt(1-(t(delta) %%

  iOmega %% delta)[1,1]);

-sum(dmst(xdat,Omega=Omega,alpha=alpha,nu=dp$nu,log=TRUE));

```



```

}

### MLE for skew t-distribution with xi=0 and omega=1 using optim ####
stdist.mle <- function (xdat = NULL, start = NULL,
method = "Nelder-Mead", ...)
{
iniPar <- stIntPara(start$rho,start$delta,start$nu);
fit <- optim(iniPar, stdistnll, method=method, hessian=FALSE,
xdat=xdat, ...);
list(call = match.call(), dp = stOrgPara(fit$par), logL = -fit$value,
details=fit, nobs = nrow(xdat), method = method);
}

## setting ##
smN <- 2500;
smrho <- c(0.6);#could be a vector like c(0.46,0.39,0.55)
smdelta <- c(-0.39,-0.55);
smnu <- 3;

## simulation ##
#set.seed(1);
dat <- rstcop(smN,smrho,smdelta,smnu);
dim <- ncol(dat$u);
start <- list(rho=numeric(dim*(dim-1)/2),delta=numeric(dim),nu=6);

##### MLE for skew t-copula
## It would be better to add "trace=TRUE" option in control list

```

```
#system.time(stcopmle<-stcop.mle(dat$u, start=start,  
control=list(reltol=1e-4,trace=TRUE)))  
stcopmle<-stcop.mle(dat$u, start=start,  
control=list(reltol=1e-4,trace=TRUE))  
showResult(stcopmle);
```

```
##### MLE for skew t-distribution
```

```
#system.time(stdistmle<-stdist.mle(dat$x, start=start,  
control=list(reltol=1e-4)));  
stdistmle<-stdist.mle(dat$x, start=start,  
control=list(reltol=1e-4))  
showResult(stdistmle);
```

مراجع

- [۱] امید، م، (۱۳۸۶)، ” مفصل‌ها و کاربرد آن‌ها برای تعیین مدل خشکسالی در ایران “، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه تربیت مدرس، ایران.
- [2] Abdous, B., Genest, C., Remillard, B., (2005), *Dependence Properties of Meta-Elliptical Distributions*, chapter 1, Canada.
- [3] Azzalini, A. and A. Capitanio (2003), Distributions generated by perturbation of symmetry with emphasis on a multivariate skew t-distribution, *Journal of the Royal Statistical Society Series B*, **65**(2), 367–389.
- [4] Barndorff-Nielsen, O. E. (1997), Exponentially decreasing distributions for the logarithm of particle size, *Proceedings of the Royal Society of London Series A*, **353**(1674), 401–419.
- [5] Bortot, P. (2010), Tail dependence in bivariate skew-normal and skew-t distributions, Working paper.
- [6] Breyman, W., Dias, A. Embrechts, P. (2003), Dependence structures for multivariate high-frequency data in finance, *Quantitative Finance*, **3**, 1–14.
- [7] Demarta, S. and A. J. McNeil (2005), The t copula and related copulas, *International Statistical Review*, **73**(1), 111–129.

-
- [8] Embrechts, P., McNeil, A. Straumann, D., (2001), *Correlation and Dependency in Risk Management: properties and pitfalls*. In *Risk Management: Value at Risk and Beyond*, Dempster, M. Moffatt, H. eds, Cambridge University Press, pp, 176–223.
- [9] Embrechts, P., Lindskog, F. and McNeil, A., (2003), Handbook of Heavy Tailed Distribution in Finance, *Elsevier*, 329-384.
- [10] Fang, H.-B., Fang, K.-T., Kotz, S., (2002), The meta-elliptical distributions with given marginals, *Journal of Multivariate Analysis*, **82**, 1–16.
- [11] Frees, E. W., Carriere, J. and Valdes, E., (1996), Annuity valuation with dependence mortality, *Journal of Risk Insurance*, **63**, 229-261.
- [12] Gini, C., (1910), Indici di Concentrazione di Dipendenza, *Atti della III Riunione della Societa Italiana per il Progresso delle Scienze*, Italy.
- [13] Joe, H. (1997), *Multivariate Models and Dependence Concepts*, Chapman and Hall, London.
- [14] Joe, H., (2005), Asymptotic efficiency of the two-stage estimation method for copula-based models, *Journal of Multivariate Analysis*, **94**, 401-409.
- [15] Joe, H., (2006), Discussion of ‘Copulas: tales and facts,’ by Thomas Mikosch, *Extremes*, **9**(1), 37–41.
- [16] Johnson, N and Kotz, K., (1972), *Distributions in Statistics, Continuous Multivariate Distributions*, John Wiley, New York.
- [17] Jouini, M. N. and Clemen, R. T., (1996), Copula models for aggregating expert opinions, *Journal of the Operational Research Society*, **44**, 444-457.

-
- [18] Kaynar, B., Birbil, S. and Frenk, J., (2007), Application of a general risk management model to portfolio optimization problems with elliptical distributed returns for risk neutral and risk averse decision makers.
- [19] Kollo, T. and G. Pettere (2010), Parameter estimation and application of the multivariate skew t-copula in P. Jaworski, F. Durante, W. K. Hardle, and T. Rychlik eds. *Copula Theory and Its Applications*, Chap.15, Springer, 289–298.
- [20] Kotz, S. and Nadarajah, S., (2004), *Multivariate t Distributions and Their Applications*, Cambridge University Press.
- [21] Kotz, S. and Seeger, J. P., (1991), *A new approach to dependence in multivariate distributions*, Kluwer Academic, Dordrecht.
- [22] Kruskal, W. H., (1958), Ordinal measures of association, *Journal of the American Statistical Association*, **53**, 814-861.
- [23] Krzysztofowicz, R. and Kelly, K. S., (1996), *A Meta-Gaussian Distribution with Specified Marginals*, Technical Report, University of Virginia.
- [24] Landsman, Z. M. and Valdez, E. A., (2003), Tail conditional expectations for elliptical distributions, *North American Actuarial Journal*, **7**(4), 55-71.
- [25] Lehmann, E., (1966), Some concepts of dependence, *Annals of Mathematical Statistics*, **37**, 1137-1153.
- [26] Lindskog, F., (2000), *Modelling dependence with copulas*, RiskLab Report, ETH Zurich.

- [27] Liu, Y., Luger, R., (2009), Efficient estimation of copula-GARCH models, *Computational Statistics and Data Analysis*, **53**, 2284-2297.
- [28] Lu, P., Nocedal, J., Zhu, C., Richard Byrd, H., Byrd, R.H., (1994), A limited-memory algorithm for bound constrained optimization, *SIAM Journal on Scientific Computing*, **16**, 1190–1208.
- [29] Mashal, R. and Zeevi, A., (2002), Beyond correlation: *extreme co-movements between financial assets*, Unpublished, Columbia University.
- [30] Nelsen, R. B., (1999), *An Introduction to Copulas*, Lecture Notes in Statistics, New York, Springer-Verlag.
- [31] Sahu, S. K., Dey, D. K. and Branco, M. D., (2003), A new class of multivariate skew distributions with applications to Bayesian regression models, *The Canadian Journal of Statistics*, **31**(2), 129–150.
- [32] Sklar, A., (1959), Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges, *Publication Institute Statistics University Paris*, **8**, 229-231.
- [33] Smith, M. S., Gan, Q. and Kohn, R. J., (2012), Modelling dependence using skew t copulas: Bayesian inference and applications, *Journal of Applied Econometrics*, **27**(3), 500–522.
- [34] Song, P.X.-K., Fan, Y., Kalbfleisch, J.D., (2005), Maximization by parts in likelihood inference, *Journal of American Statistical Association*, **100** (472), 1145–1167.
- [35] Yoshida, T., (2014), Maximum likelihood estimation of skew t-copula, Bank of Japan, The Institute of Statistical Mathematics.

-
- [36] Zhang, R., Czado, C., Min, A., (2011), Efficient maximum likelihood estimation of copula based meta t-distributions, *Computational Statistics and Data Analysis*, **55**, 1196–1214.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Inference for margins	استنباط مبتنی بر توزیع‌های کناری
Nuisance parameter	پارامتر مزاحم
Information dominance	تسلط اطلاعات
Almost every where	تقریباً همه جا
Multivariate elliptically contoured distribution	توزیع بیضی‌گون چندمتغیره
Generalized hyperbolic skew t-distribution	توزیع تی چوله هذلولی‌گون تعمیم‌یافته
Meta-elliptical contoured distributions	توزیع متا-بیضی‌گون
Meta-Gaussian distribution	توزیع متا-گاوسی
Symmetric pearson distribution	توزیع متقارن پیرسون
Symmetric kottz type distribution	توزیع متقارن نوع کاتز
Multivariate normal variance mixture	توزیع نرمال چندمتغیره واریانس آمیخته
Grounded	جهت‌دار
Tow increasing	دو صعودی
Embedding method	روش نشانیدنی
Modified IFM method	روش استنباط مبتنی بر توزیع‌های کناری اصلاح شده
Adaptive	سازوار
Pseudo sample	شبه نمونه
Coefficient of lower tail dependence	ضریب وابستگی دنباله‌ای پایینی
Coefficient of upper tail dependence	ضریب وابستگی دنباله‌ای بالایی
Frechet-Hoeffding	فرچت-هافدینگ
Dispersion matrix	ماتریس پراکندگی
Expectation maximization	ماکسیم‌سازی امیدریاضی
Direct maximization	ماکسیم‌سازی مستقیم
Maximization by parts	ماکسیم‌سازی با استفاده از بخش‌بندی
Working model	مدل کار

Error model	مدل خطا
Mixed-effects models	مدل‌های با اثرهای آمیخته
Copula	مفصل
T-copula	مفصل تی
Skewed t Copula	مفصل تی چوله
Copula-GARCH	مفصل-گارچ
Gaussian copula	مفصل گاوسی
Extreme value	مقدار کرانگین
Non-adaptive	ناسازوار
Invariant	ناوردا
Newton-Raphson	نیوتون-رافسون
Positively quadrant dependence	وابستگی درجه دوم مثبت
Negatively quadrant dependence	وابستگی درجه دوم منفی
Positively complete dependence	وابستگی کامل مثبت
Negatively complete dependence	وابستگی کامل منفی
Positively dependent	وابسته مثبت
Negatively dependent	وابسته منفی
Dependence properties	ویژگی‌های وابستگی
Concordan	هماهنگ
Gini correlation	همبستگی جینی
H-volume	H-حجم

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

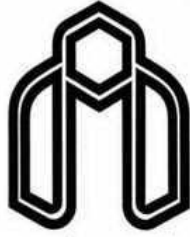
Adaptive	سازوار
Almost every where	تقریباً همه جا
Coefficient of upper tail dependence	ضریب وابستگی دنباله‌ای بالایی
Coefficient of lower tail dependence	ضریب وابستگی دنباله‌ای پایینی
Concordance	هماهنگ
Copula	مفصل
Copula-GARCH	مفصل-گارچ
Dependence properties	ویژگی‌های وابستگی
Direct maximization	ماکسیم‌سازی مستقیم
Dispersion matrix	ماتریس پراکندگی
Embedding method	روش نشانیدنی
Error model	مدل خطا
Expectation maximization	ماکسیم‌سازی امید ریاضی
Extreme value	مقدار کرانگین
Frechet-Hoeffding	فرچت-هافدینگ
Gaussian copula	مفصل گاوسی
Generalized hyperbolic skew t-distribution	توزیع تی چوله هذلولی گون تعمیم یافته
Gini correlation	همبستگی جینی
Grounded	جهت دار
H-volume	H-حجم
Inference for margins	استنباط مبتنی بر توزیع‌های کناری
Information dominance	تسلط اطلاعات
Invariant	ناوردا
Maximization by parts	ماکسیم‌سازی با استفاده از بخش بندی
Meta-elliptical contoured distributions	توزیع متا-بیضی گون

Meta-Gaussian distribution.....	توزیع متا-گوسی
Mixed-effects models	مدل‌های با اثرهای آمیخته
Modified IFM method.....	روش استنباط مبتنی بر توزیع‌های کناری اصلاح شده
Multivariate elliptically contoured distribution.....	توزیع بیضی‌گون چندمتغیره
Multivariate normal variance mixture	توزیع نرمال چندمتغیره واریانس آمیخته
Negatively complete dependence.....	وابستگی کامل منفی
Negatively dependent	وابسته منفی
Negatively quadrant dependence.....	وابستگی درجه دوم منفی
Newton-Raphson	نیوتون-رافسون
Non-adaptive.....	ناسازوار
Nuisance parameter	پارامتر مزاحم
Pseudo sample.....	شبه نمونه
Positively complete dependence	وابستگی کامل مثبت
Positively dependent.....	وابسته مثبت
Positively quadrant dependence.....	وابستگی درجه دوم مثبت
Skewed t Copula.....	مفصل تی چوله
Symmetric pearson distribution.....	توزیع متقارن پیرسون
Symmetric kotz type distribution.....	توزیع متقارن نوع کاتز
T-copula.....	مفصل تی
Tow increasing	دو صعودی
Working model	مدل کار

Aabstract

In many practical problems, a separate analysis of the factors could not indicate the relevance and impact several factors in the phenomena of interest, it must be joint distribution of measured. Since there are correlations between factors of the phenomena and the assumption of independence are not significant, can not easily obtain their Joint distribution with their marginal distributions. For this purpose it is necessary the best copula families are selected through different copula functions for drought modeling. It is often required in multivariate analysis to construct a multivariate distribution from specified marginal distributions with a given dependence structure. The meta-elliptically contoured distributions are constructed this way that the meta t-distribution belongs to this class. The t copula can be thought of as representing the dependence structure implicit in a multivariate t distribution. the skewed t copula, which allow more heterogeneity in the modelling of dependent observations. The skew t copula is representing the dependence structure of multivariate skew t distribution.

keywords: multivariate distribution, elliptically contoured distribution, meta-elliptically contoured distribution, meta-t distribution, t-copula, multivariate skew t distribution, skew t-copula, dependence structure



Shahrood University Of Technology

Shahrood University of Technology
Faculty Of Mathematical Sciences

Dissertation Submitted in Partial
Fulfillment of The Requirements For The
Degree of Master of Science in
Statistics

Properties and Estimation for Meta-T Distribution Based on Copula Function

Supervisors

Dr.A. Nezakati and Dr.M. Mohammadzadeh

by

Maryam Fathi

2014