

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی کاربردی

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی کاربردی، گرایش گراف و ترکیبیات

عنوان

مدل سازی فازی گرافها

استاد راهنما

دکتر صادق رحیمی شعرباف

دانشجو

سمیه امانتی فیض آبادی

آذر ۱۳۹۳

تقدیم بہ ہمران، ہمیشگی ام،

ہمسر عزیزم و پدر و مادر مہربانم

خدا را سپاسگزارم
که هنوز راه‌هایی برای پی‌سمودن
و پله‌هایی برای صعود کردن برایم باقی است...

بر خود لازم می‌دانم تا مراتب سپاس را از بزرگوارانی به جا آورم که اگر دست یاری‌گرشان نبود، هرگز این پایان‌نامه به انجام نمی‌رسید. ابتدا از استاد گرانقدرم جناب آقای دکتر صادق رحیمی شهرباف که زحمت راهنمایی این پایان‌نامه را بر عهده داشتند و قطعاً بدون راهنمایی‌های ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید، کمال سپاس را دارم.

همچنین لازم می‌دانم از اساتید فرهیخته جناب آقای دکتر جعفری‌راد و آقای دکتر علیشاهی که داوری این پایان‌نامه را به عهده گرفتند، با تمام وجود تشکر و قدردانی نمایم.

سپاس آخر را به مهربانترین همراهان زندگیم، به پدر، مادر و همسر عزیزم تقدیم می‌کنم که حضورشان در فضای زندگیم مصداق بی‌ریای سخاوت بوده است.

سمیه امانتی فیض‌آبادی
آذر ۱۳۹۳

تعمدنامه

اینجانب سمیه امانتی فیض‌آبادی دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی دانشکده علوم ریاضی دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان مدل‌سازی فازی گراف‌ها، تحت راهنمایی دکتر صادق رحیمی شعرباف متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه شاهرود “ یا “ Shahrood University “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

سمیه امانتی فیض‌آبادی
آذر ۱۳۹۳

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

منظور از مدل‌سازی گراف‌ها، استفاده از مفاهیم، روابط و ساختار گراف‌ها، در مساله‌ی مدل‌سازی است. در این پایان‌نامه، مدل‌سازی فازی گراف‌ها، مبتنی بر نوع گراف فازی شامل درخت‌های فازی، گراف‌های اویلری و همیلتونی فازی، گراف‌های مسطح فازی، گراف‌های دوبخشی فازی، شبکه‌های فازی و مسایلی مانند رنگ‌آمیزی فازی، پوشش راسی فازی و مجموعه‌های مستقل فازی مورد بحث و بررسی قرار گرفته است. همچنین در مورد هر مدل گراف، نمونه‌هایی بیان می‌شود و در ادامه روش حل و کاربردهایی از آن مدل گرافی ارائه می‌گردد.

کلمات کلیدی:

مدل‌سازی، ساختار گراف، مدل‌سازی فازی گراف، درخت فازی، گراف اویلری فازی، گراف همیلتونی فازی، گراف مسطح فازی، گراف دوبخشی فازی، شبکه‌های فازی، رنگ‌آمیزی فازی، پوشش راسی فازی، مجموعه‌ی مستقل فازی.

فهرست مطالب

خ	لیست تصاویر
ذ	لیست جداول
۱	۱ تعاریف و مقدمات
۱	۱.۱ مقدمه
۳	۱.۱.۱ ضرورت طرح مدل‌های گراف
۴	۲.۱.۱ ضرورت طرح مساله به صورت فازی
۶	۲.۱ تعاریف گراف
۸	۳.۱ تعاریف مباحث فازی
۱۵	۲ مدل فازی درخت‌ها
۱۵	۱.۲ توصیف مدل
۱۷	۱.۱.۲ بعضی از مدل درخت‌ها
۱۷	۲.۱.۲ بررسی مدل‌ها
۱۸	۳.۱.۲ روش حل مدل‌ها
۳۱	۳ مدل فازی گراف‌های اویلری و همیلتونی
۳۱	۱.۳ توصیف مدل
۳۲	۱.۱.۳ بعضی از مدل گراف‌های اویلری و همیلتونی
۳۲	۲.۱.۳ بررسی مدل‌ها
۳۴	۳.۱.۳ روش حل مدل‌ها
۴۳	۴ مدل فازی گراف‌ها در رنگ‌آمیزی راسی
۴۳	۱.۴ تعاریف و مقدمات
۵۲	۲.۴ کاربردهایی از رنگ‌آمیزی راسی
۵۲	۱.۲.۴ مساله‌ی ضیافت
۵۴	۲.۲.۴ مساله‌ی انبارداری

۵۵	مساله‌ی تداخل فرکانس‌ها	۳.۲.۴
۵۹		مدل فازی گراف‌های مسطح	۵
۵۹	توصیف مدل و ذکر ویژگی‌ها و خواص آن	۱.۵
۷۳		مدل فازی شبکه‌ها	۶
۷۳	توصیف مدل و ذکر ویژگی‌ها و خواص آن	۱.۶
۷۳	بعضی از مدل شبکه‌ها	۱.۱.۶
۷۴	بررسی مدل‌ها	۲.۱.۶
۷۴	روش حل مدل‌ها	۳.۱.۶
۸۳		مدل فازی گراف‌های دوبخشی	۷
۸۳	توصیف مدل	۱.۷
۸۵	مدل جورسازی	۲.۷
۸۵	بررسی مدل	۱.۲.۷
۸۷	روش حل مدل جورسازی	۳.۷
۹۵	روش برنامه‌ریزی خطی فازی مدل جورسازی	۱.۳.۷
۱۰۱	مساله‌ی تخصیص	۴.۷
۱۰۳	قضیه‌های اساسی از مساله‌ی تخصیص فازی	۱.۴.۷
۱۱۱		مدل فازی گراف‌ها در مجموعه‌های پوشش راسی و مجموعه‌های مستقل	۸
۱۱۱	تعاریف و مقدمات	۱.۸
۱۱۲	مساله‌ی پوشش راسی	۲.۸
۱۱۶	کاربردهای مساله‌ی پوشش راسی	۱.۲.۸
۱۱۶	مجموعه‌ی مستقل راسی	۳.۸
۱۱۸	مجموعه‌ی مستقل راسی در گراف فازی	۱.۳.۸
۱۲۱	کاربردی از مجموعه‌ی مستقل راسی	۲.۳.۸
۱۲۲	نتیجه‌گیری	۴.۸
۱۲۳		مراجع	
۱۲۸		واژه‌نامه فارسی به انگلیسی	
۱۳۱		واژه‌نامه انگلیسی به فارسی	
۱۳۴		نمایه	

لیست تصاویر

۱۶	نمونه‌ای از درخت‌ها	۱.۲
۱۶	درخت فازی \tilde{T}	۲.۲
۱۷	زیرگراف فراگیر \tilde{F}	۳.۲
۲۱	گراف ساده‌ای از مراکز گازرسانی	۴.۲
۲۲	T	۵.۲
۲۵	مدل گرافی ساده از جاده	۶.۲
۲۶	مدل گراف گام (۱) تکرار اول	۷.۲
۲۷	مدل گراف گام (۲) تکرار اول	۸.۲
۲۷	مدل گراف گام (۲) تکرار دوم	۹.۲
۲۸	مدل گراف گام (۲) تکرار سوم	۱۰.۲
۲۸	مدل گراف گام (۲) تکرار چهارم	۱۱.۲
۳۶	گراف مثال ۱۳.۱.۳	۱.۳
۳۷	گراف شکل ۱.۳ پس از دوگانه‌سازی یال	۲.۳
۴۶	G	۱.۴
۴۷	$G_{0.8}$	۲.۴
۴۷	$G_{0.7}$	۳.۴
۴۷	$G_{0.5}$	۴.۴
۴۸	$G_{0.4}$	۵.۴
۴۸	$G_{0.3}$	۶.۴
۴۹	$G_{0.2}$	۷.۴
۴۹	$G_{0.1}$	۸.۴
۵۰	\tilde{G}	۹.۴
۵۳	مدل گراف فازی متناظر مساله‌ی ضیافت	۱۰.۴
۵۴	تخصیص رنگ‌ها به مدل گراف فازی ۱۰.۴	۱۱.۴
۶۰	(الف) گراف مسطح G ؛ (ب) نشانیدن مسطح G	۱.۵

۶۲	برخورد دو یال در گراف فازی	۲.۵
۶۳	گراف مسطح فازی	۳.۵
۶۴	گراف مسطح و دوگان آن	۴.۵
۶۹	گراف $k_{3,2}$	۵.۵
۶۹	گراف یکریخت با ۵.۵	۶.۵
۷۰	گراف یکریخت با ۶.۵	۷.۵
۷۰	گراف یکریخت با ۷.۵	۸.۵
۷۱	محدوده‌ی یک وجه	۹.۵
۷۴	مدل گرافی شبکه‌ی حمل و نقل	۱.۶
۷۹	یک مدل شبکه با جریان	۲.۶
۸۴	گراف دوبخشی فازی	۱.۷
۸۴	زیرگراف فراگیر فازی	۲.۷
۸۹	گراف دوبخشی G	۳.۷
۸۹	درخت گام ۲ تکرار اول	۴.۷
۸۹	درخت گام ۳ تکرار اول	۵.۷
۹۰	درخت گام ۲ تکرار دوم	۶.۷
۹۰	درخت گام ۳ تکرار دوم	۷.۷
۹۱	درخت گام ۲ تکرار سوم	۸.۷
۹۱	درخت گام ۲ تکرار چهارم	۹.۷
۹۲	درخت گام ۳ تکرار چهارم	۱۰.۷
۹۲	درخت گام ۲ تکرار پنجم	۱۱.۷
۹۳	درخت گام ۳ تکرار پنجم	۱۲.۷
۹۴	گراف G_l	۱۳.۷
۹۵	زیرگراف برابری G_l	۱۴.۷
۱۱۲	یک پوشش	۱.۸
۱۱۳	یک پوشش مینیم	۲.۸
۱۱۵	به دست آوردن پوشش راسی وزن دار مینیم در گراف داده شده طبق الگوریتم	۳.۸
۱۱۷	یک مجموعه‌ی مستقل	۴.۸
۱۱۷	یک مجموعه‌ی مستقل ماکسیم	۵.۸
۱۱۸	گراف فازی	۶.۸
۱۲۰	گراف G	۷.۸

لیست جداول

۲۵	وزن روی یال‌های گراف ۶.۲	۱.۲
۳۶	جدول مربوط به مقادیر فازی گراف ۱.۳	۱.۳
۳۶	مقادیر قطعی جدول ۱.۳	۲.۳
۷۶	جدول هزینه‌های فازی شبکه‌ی حمل و نقل	۱.۶
۷۷	جدول نتیجه شده بعد از اجرای روش الگوریتمی	۲.۶
۱۰۵	ماتریس هزینه‌های فازی اولیه	۱.۷
۱۰۵	ماتریس هزینه‌های قطعی اولیه‌ی جدول ۱.۷	۲.۷
۱۰۶	ماتریس هزینه‌ی فازی اصلاح شده‌ی اول	۳.۷
۱۰۶	ماتریس هزینه‌ی قطعی جدول ۳.۷	۴.۷
۱۰۶	ماتریس هزینه‌ی فازی اصلاح شده‌ی دوم	۵.۷
۱۰۷	ماتریس هزینه‌ی قطعی جدول ۵.۷	۶.۷
۱۰۷	ماتریس نتیجه شده‌ی اول	۷.۷
۱۰۷	ماتریس هزینه‌ی فازی اصلاح شده‌ی سوم	۸.۷
۱۰۸	ماتریس هزینه‌ی قطعی جدول ۸.۷	۹.۷
۱۰۸	ماتریس نتیجه شده‌ی دوم	۱۰.۷
۱۰۸	ماتریس نمایش تخصیص بهینه	۱۱.۷
۱۰۹	ماتریس هزینه‌های فازی مربوط به تخصیص بهینه‌ی به دست آمده	۱۲.۷
۱۰۹	ماتریس سودهای فازی مربوط به تخصیص بهینه‌ی به دست آمده	۱۳.۷
۱۰۹	ماتریس هزینه‌های فازی اولیه با اعمال محدودیت	۱۴.۷
۱۱۰	ماتریس هزینه‌های فازی مربوط به تخصیص بهینه با اعمال محدودیت در مساله	۱۵.۷
۱۱۸	ماتریس گراف فازی شکل ۶.۸	۱.۸
۱۲۱	پیاده‌سازی مراحل الگوریتم	۲.۸

فصل ۱

تعاریف و مقدمات

۱.۱ مقدمه

مدل‌سازی^۱ از کلمه لاتین *modellus* گرفته شده است. این اصطلاح مقارن با فرهنگ یونان باستان مطرح شد. اولین مدل‌های قابل تشخیص، اعداد بودند که این موضوع به ۳۰۰۰۰ سال قبل از میلاد برمی‌گردد. ستاره‌شناسی و معماری موارد بعدی بود که مدل‌ها در آن نقش ایفا می‌کردند و این به ۴۰۰۰ سال قبل از میلاد برمی‌گردد. ۲۰۰۰ سال قبل از میلاد حداقل سه فرهنگ بابل، مصر، هند در مورد ریاضیات دانش و اطلاعاتی داشتند و در پیشرفت زندگیشان از مدل‌سازی ریاضی استفاده می‌کردند. توسعه فلسفه در عصر یونان و ارتباط آن با ریاضیات، باعث شد اولین نظریه‌های ریاضی بیان شود. تالس^۲ در ۶۰۰ سال قبل از میلاد، هندسه را به ابزاری مفید در تجزیه و تحلیل واقعیت بیان کرد. پس از او فیثاغورس^۳ به عنوان ریاضیدان محض شناخته شد و هندسه و ریاضیات توسعه پیدا کرد و اوج آن در زمان اقلیدس^۴ در ۳۰۰ سال قبل از میلاد بود. گام مهم دیگر در توسعه‌ی مدل‌ها در زمان دیوفان^۵ از اسکندریه، در حدود ۲۵۰ سال بعد از میلاد به وقوع پیوست و پایه‌های جبری و استفاده از متغیرها شروع شد. در نجوم، بطلمیوس^۶ با الهام از ایده‌ی فیثاغورس، مکانیک آسمانی را با استفاده از دایره‌ها توصیف کرد و مدلی ریاضی برای حرکت خورشید، ماه و سیاره‌ها پیش‌بینی کرد. مدل‌سازی برای مسایل دنیای واقعی، به خصوص مدل‌سازی ریاضی، برای پیشرفت انسان مهم است که روش‌های مشابهی از مدل‌سازی در چین، هند و کشورهای اسلامی مانند ایران توسعه یافت. مهم است که توجه داشته باشیم با وجود دستاوردهای دیوفانت^۷ و خوارزمی^۸، استفاده‌ی نظام‌مند متغیرها توسط ایتا^۹ ابداع

^۱ modeling

^۲ Thales

^۳ Pythagoras

^۴ Euclid

^۵ Diophantus

^۶ Ptolemy

^۷ Diophant

^۸ Al-Hwarizmi

شد (۱۶۰۳ - ۱۵۴۰). با این وجود ۳۰۰ سال دیگر به طول انجامید تا کانتور^{۱۰} و راسل^{۱۱} به طور کامل، قواعد درستی از متغیرها را در فرمول‌های ریاضی دریابند. فیزیک و شرح اصول طبیعت، نیروی محرکه‌ی مهمی در مدل‌سازی و رشد ریاضیات شد. بعدها اقتصاد نیز به مدل‌سازی پیوست و هم اکنون تعداد زیادی از کاربردها، با توجه به مدل‌سازی آن‌ها به کار برده می‌شوند.

مدل‌سازی چیست؟

مدل‌سازی به منظور توصیف و درک بهتر وقایع و پدیده‌های جهان واقعی به وجود آمد. در واقع مدل، توصیفی است که از آن برای شبیه‌سازی واقعیات استفاده می‌شود. مدل‌سازی (ساختن مدل) فرآیند انتقال از جهان واقعی به جهان مجرد و سپس به‌کارگیری ابزار (یا نظریه) برای پیش‌بینی درباره‌ی حقیقت، تعریف می‌شود. مدل‌سازی یکی از تکنیک‌های ذهنی بشر است که نه تنها برای اهداف علمی، بلکه برای انجام امور روزمره‌ی بشر به دفعات مورد استفاده قرار می‌گیرد. در مدل‌سازی مسایل به صورت ساده توصیف می‌شوند.

بخش عمده‌ای از مدل‌ها، مدل‌های ریاضی می‌باشند که در آن، اشیاء و جهان واقعی، توسط اشیاء ریاضی و در قالب فرمولی ریاضی نمایش داده می‌شوند. مدل‌های ریاضی به خوبی با اشکال، الگوریتم‌ها و قضایای ریاضی قابل تجزیه و تحلیل هستند. در آغاز قرن بیستم، انسان‌ها به عنوان محاسبه‌گرها، به کار گرفته می‌شدند. آن زمان اندازه مسایل خیلی محدود بود. مدل‌سازی ریاضی برای حل مسایل با اندازه‌های نامشخص به وجود آمد. پیشرفت در تکنولوژی کامپیوتر باعث شد مدل‌سازی ریاضی در کارهای نظامی، صنعت، مسایل بهینه‌سازی و دسته‌ی خاصی از مسایل، به امری مهم تبدیل شود. موفقیت در مسایل دنیای واقعی، باعث بیشتر شدن تقاضای استفاده از مدل‌سازی ریاضی شد و مدل‌های پیچیده‌تری به وجود آمد [۴۹]. فرآیند مدل‌سازی و دسته‌بندی مدل‌های ریاضی به طور گسترده‌ای در منبع [۲] آورده شده است.

بعضی از مدل‌های ریاضی، به صورت مدل‌های گراف، قابل بیان هستند. در این نوع مدل‌های ریاضی از ساختار گراف‌ها استفاده می‌شود. برای بیان نحوه‌ی مدل‌سازی گراف، یک پدیده از جهان واقعی را معادل یک سیستم در نظر می‌گیریم که این سیستم از تعداد متناهی عنصر تشکیل شده است و ارتباط بین عناصر آن از اهمیت خاصی برخوردار است، بنابراین نحوه‌ی مدل‌سازی گراف به صورت زیر است

۱. مدل راسی (مدل - VOER^{۱۲}): در این مدل، راس‌ها به عنوان عناصر اصلی و اجزای کمی سیستم و یال‌ها به عنوان ارتباط بین آن‌ها هستند.

۲. مدل یالی (مدل - EOVR^{۱۳}): در این مدل، یال‌ها به عنوان عناصر اصلی و اجزای کمی سیستم هستند و رئوس برای تعیین وضعیت یا اتصال یال‌ها در نظر گرفته می‌شوند.

^۹Vieta

^{۱۰}Cantor

^{۱۱}Russell

^{۱۲}vertex is object quantity and edge is relation

^{۱۳}edge is object quantity and vertex is relation

۳. مدل راسی یالی (مدل-VEO^{۱۴}): در این مدل هم راس‌ها و هم یال‌ها، عناصر و اجزای اصلی و کمی سیستم هستند [۳].

دسته‌ی خاصی از مدل‌های ریاضی به صورت مدل‌های برنامه‌ریزی ریاضی می‌باشد. این مدل‌ها به مدل‌هایی ریاضی گفته می‌شود که مسایل را به کمک معادلات و نامعادلات ریاضی، توصیف می‌کند. فرم کلی مدل برنامه‌ریزی ریاضی به صورت رابطه‌ی (۱.۱) است.

$$\begin{aligned} f(x, r) &\rightarrow \max \\ \text{s.t. } x &\in C = \{x \in X \mid g_i(x, s) \leq 0, i = 1, 2, \dots, m\} \end{aligned} \quad (1.1)$$

در این پایان‌نامه مدل‌های برنامه‌ریزی خطی^{۱۵} نیز مطرح شده است، که این مدل‌ها به عنوان روش حلی برای مسایل مدل‌سازی گراف‌ها، استفاده می‌شوند.

۱.۱.۱ ضرورت طرح مدل‌های گراف

مدل‌های گراف به طور موثر می‌توانند وضعیت‌هایی از زندگی واقعی را مدل کنند، در این رابطه می‌توان از مباحث نظریه‌ی گراف برای حل مناسب و یافتن پاسخ سوالات زیادی استفاده نمود. اگر مساله یا یک پدیده از جهان واقعی به عنوان یک سیستم در نظر گرفته شود، سیستم به صورت ساختار یک گراف طراحی می‌شود. در حالت کلی برای مدل‌سازی گراف می‌توان دو هدف اساسی زیر را مطرح نمود:

(الف) طراحی مدل بهینه برای سیستم‌هایی که وجود ندارند، بدین صورت که می‌توان بهترین ساختار گراف را برای سیستم‌هایی که وجود ندارند، طراحی نمود.

(ب) تحلیل رفتار سیستم با توجه به ساختار گرافی آن، که به منظور بهبود عملکرد برای سیستم‌هایی می‌باشد که وجود دارند و باید چرخه‌ی کارها در آن سیستم اصلاح شود [۲].

مدل‌های ریاضی گراف به دلیل داشتن پنج ویژگی زیر، ابزار مناسبی برای تشریح و تحلیل سیستم‌های پیچیده می‌باشند

- (۱) مدل‌های گراف نسبتاً ساده و قابل درک هستند.
- (۲) مدل‌های گراف، از مدل‌های ترسیمی می‌باشند و به صورت هندسی قابل نمایش می‌باشند.
- (۳) مدل‌های گراف شرایط مناسب برای طراحی یک سیستم را فراهم می‌آورند.
- (۴) مدل‌های گراف شرایط مناسب برای مدیریت و نظارت بر عملکرد یک سیستم را فراهم می‌آورند.
- (۵) مدل‌های گراف شرایط مناسب‌تر را برای اصلاح و بهینه‌سازی یک سیستم فراهم می‌آورند [۳].

^{۱۴}vertex and edge are objects quantity

^{۱۵}معادلات و نامعادلات ریاضی در این مدل‌ها، به صورت خطی هستند.

مدل‌های گراف را می‌توان به صورت زیر دسته‌بندی نمود:
مدل گراف‌های ساده، مدل درخت‌ها^{۱۶}، مدل گراف‌های اویلری، مدل گراف‌های همیلتونی، مدل گراف‌های مسطح، مدلی از گراف‌های جهت‌دار به نام شبکه‌ها، مدل گراف‌های دوبخشی.

موضوع مدل‌سازی گراف‌ها گاهی به صورت پراکنده و به شکل ارائه‌ی مثال‌هایی در بعضی از کتاب‌ها یا مقالات از جمله [۱۰، ۱۸، ۲۸، ۴۵] آورده شده است.

۲.۱.۱ ضرورت طرح مساله به صورت فازی

تکنیک‌های بهینه‌سازی سنتی و روش‌های آن برای سال‌ها در حل مسایل به کار گرفته می‌شد و گاهی اوقات مسایل به عنوان سیستم‌های سخت شناخته می‌شدند. این چنین مسایل بهینه‌سازی معمولاً به‌خوبی توسط تابع هدف‌های ویژه‌ی قطعی و مجموعه‌ی معینی از محدودیت‌ها، فرمول‌بندی می‌شد و توسط ریاضیات دقیق حل می‌شد. متأسفانه شرایط جهان واقعی، قطعی^{۱۷} نیست و انواع مختلفی از عدم قطعیت‌ها در سیستم‌های اجتماعی، صنعتی و اقتصادی، مانند اتفاقی در وقوع حوادث، عدم دقت و ابهام در داده‌های سیستم، ابهام‌های زبانی و ... وجود دارد. این ابهام‌ها از طرق مختلفی به وجود می‌آید، از جمله خطاهای اندازه‌گیری، کمبود در تاریخ و داده‌های آماری، بیان دانش ناقص، ذهنیت و اولویت‌های قضاوت انسانی و همانگونه که زیمرمن^{۱۸} بیان می‌کند، انواع مختلف عدم قطعیت را می‌توان، به عنوان عدم قطعیت‌های تصادفی و فازی دسته‌بندی کرد. عدم قطعیت تصادفی مربوط به عدم اطمینان از وقوع پدیده یا رویداد است. مشخصه‌های آن بدین صورت است که توصیف اطلاعات آن قطعی است و به راحتی قابل بیان می‌باشد. سیستم‌هایی با این نوع عدم قطعیت، سیستم‌های تصادفی نامیده می‌شوند که این سیستم‌ها با استفاده از تکنیک‌های تصادفی در نظریه‌ی احتمال حل می‌شوند. در مقابل این سیستم‌ها، سیستم‌های فازی به بی‌دقتی و مفاهیم نادقیقی که در زبان طبیعی به کار می‌روند مرتبط است و مانند سیستم‌های تصادفی، همیشه با یک رویداد همراه نیست. در واقع نظریه‌ی فازی، عدم قطعیت غیر تصادفی را پشتیبانی می‌کند. این نوع از ابهام معمولاً با درجه‌ی عضویتی نمایش داده می‌شود که نشان دهنده‌ی ذهنیت تصمیم‌گیرنده و اولویت است که به اشیاء می‌دهد.

نظریه‌ی مجموعه‌ی فازی در سال ۱۹۶۰ توسط پروفیسور زاده^{۱۹} توسعه داده شد و تکنیک‌های بهینه‌سازی فازی، ابزاری مفید و کارآمد برای مدل‌سازی و بهینه‌سازی سیستم فراهم کرد. مدل‌سازی و بهینه‌سازی در محیط فازی را، مدل‌سازی فازی و بهینه‌سازی فازی می‌نامند.

مفهوم مدل تصمیم‌گیری فازی در سال ۱۹۷۰ توسط بلمن^{۲۰} و زاده مطرح شد. مدل‌ها و روش‌های متفاوتی از برنامه‌ریزی ریاضی فازی برای برنامه‌ریزی خطی فازی، برنامه‌ریزی چند هدفه فازی، برنامه‌ریزی عدد صحیح فازی، برنامه‌ریزی پویا فازی، برنامه‌ریزی احتمالی فازی و برنامه‌ریزی غیرخطی فازی، طی

^{۱۶}درخت‌ها نوعی گراف هستند.

^{۱۷}deterministic

^{۱۸}Zimmermann

^{۱۹}Zadeh

^{۲۰}Bellman

سال‌ها توسط پژوهشگران زیادی توسعه داده شد. بررسی‌های اخیر در پیشرفتی از بهینه‌سازی فازی توسط دلگادو و همکارانش^{۲۱} یافت شده است، به خصوص بررسی منظم روی برنامه‌ریزی خطی فازی توسط رامل فنگر^{۲۲} ساخته شده است. بررسی‌ها روی موضوعات دیگر بهینه‌سازی فازی، مانند بهینه‌سازی فازی گسسته و رتبه‌بندی فازی به ترتیب توسط چاناس^{۲۳} و بورتلن^{۲۴} انجام شد. دسته‌بندی عدم قطعیت‌ها و برنامه‌ریزی آن توسط لویی^{۲۵} ساخته شد و بررسی‌های اخیر روی برنامه‌ریزی خطی فازی توسط اینوگچی^{۲۶} و رامیک^{۲۷} از دیدگاه عملی ارائه شده است.

در سال ۱۹۷۵، روسن فلد^{۲۸} مفهومی از گراف‌های فازی و مقایسه‌های فازی از مفاهیم نظریه‌ی گراف مانند مسیر، دور، همبندی و ... را معرفی کرد. در سال ۱۹۸۷، بتچ اریا^{۲۹} و بوتانی^{۳۰} مفاهیمی از خودریختی^{۳۱} گراف‌های فازی به صورت مقدماتی معرفی کردند. در سال ۱۹۹۳، مردسن^{۳۲} مفهومی از گراف‌های خطی فازی بیان کرد و خواص پایه‌ای آن را توسعه داد. مفهوم گراف فازی کامل، توسط سونیتا^{۳۳} و ویجایاکومار^{۳۴} در سال ۲۰۰۲ به صورت مقدماتی بیان شد. در سال ۲۰۰۹ پورنیم^{۳۵} و ریمس وامی^{۳۶} مفهوم گراف فازی حاصل‌ضربی را معرفی کردند. در سال ۲۰۱۲، ماهیاب شوبته^{۳۷} به معرفی مفهوم عدد غلبه^{۳۸} در گراف‌های فازی حاصل‌ضربی پرداخت. همچنین زیمرمن در مورد خواص گراف فازی به بررسی پرداخته است و کتاب مردسن و نیر^{۳۹} به نام گراف‌های فازی و ابرگراف‌های فازی^{۴۰} منبع بسیار خوبی برای تحقیق در مورد گراف‌ها و ابرگراف‌های فازی می‌باشد [۵۰].

مفهوم فازی در مدل‌های برنامه‌ریزی ریاضی به صورت زیر می‌تواند ظاهر شود

(۱) هدف فازی: ماکسیم یا مینیمم بودن تابع هدف با ابهام همراه است و همواره با یک سطح انتظاری بیان می‌شود.

^{۲۱}Delgado et al

^{۲۲}Rommelfanger

^{۲۳}Chanas

^{۲۴}Bortolan

^{۲۵}Liu

^{۲۶}Inuiguchi

^{۲۷}Ramic

^{۲۸}Rosenfeld

^{۲۹}Bhattacharya

^{۳۰}Bhutani

^{۳۱}automorphism

^{۳۲}Mordeson

^{۳۳}Sunitha

^{۳۴}Vijayakumar

^{۳۵}Poornima

^{۳۶}Ramaswamy

^{۳۷}Mahioub Shubatah

^{۳۸}domination number

^{۳۹}Nair

^{۴۰}Fuzzy graphs and Fuzzy hypergraphs

(۲) محدودیت‌های فازی: محدودیت‌ها، توسط روابط فازی در معادلات یا نامعادلات بیان می‌شود.

(۳) تابع هدف با ضرایب فازی \tilde{c}_i .

(۴) محدودیت‌ها با ضرایب فازی \tilde{A}_{ij} یا \tilde{b}_i [۲۹].

مفهوم فازی در مدل‌های گراف به صورت زیر می‌تواند ظاهر شود

(۱) راس‌ها و یال‌ها فازی باشند. $(\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E}, W))$

(۲) یال‌ها فازی باشند. $(\tilde{G} = (V, \tilde{E}, W))$

(۳) راس‌ها فازی باشند. $(\tilde{G} = (\tilde{V}, E, W))$

(۴) وزن‌ها فازی باشند. $(\tilde{G} = (V, E, \tilde{W}))$

(۵) راس‌ها، یال‌ها و وزن‌ها فازی باشند. $(\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E}, \tilde{W}))$

(۶) راس‌ها و وزن‌ها فازی باشند. $(\tilde{G} = (\tilde{V}, E, \tilde{W}))$

(۷) یال‌ها و وزن‌ها فازی باشند. $(\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E}, W))$

ملاحظه ۱.۱.۱. در این پایان‌نامه به جای نماد $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$ از نماد $\tilde{G} = (\delta, \mu)$ استفاده می‌کنیم.

۲.۱ تعاریف گراف

تعاریف این قسمت از منبع [۱۰] گرفته شده است.

تعریف ۱.۲.۱. گراف:

گراف G سه‌تایی مرتب $(V(G), E(G), \psi_G)$ ، متشکل از مجموعه‌ی ناتهی $V(G)$ راس‌ها، مجموعه‌ی $E(G)$ یال‌ها مجزا از $V(G)$ ، و تابع وقوع ψ_G است که با هر یال G ، یک جفت نامرتب (نه لزوماً مجزا) از راس‌های G را همراه می‌کند. اگر e یک یال و u و v راس‌هایی باشند، به قسمی که $\psi_G(e) = uv$ ، آن‌گاه می‌گویند e ، را به v وصل می‌کند، راس‌های u و v را دو انتهای e می‌نامند.

تعریف ۲.۲.۱. گراف جهت‌دار:

اگر یال‌های گراف G به صورت $E = \{(u, v) | u, v \in V(G)\}$ باشند که در آن یال (u, v) دوتایی مرتب است، گراف G جهت‌دار نامیده می‌شود.

تعریف ۳.۲.۱. طوقه: یک یال با دو سر یکسان، طوقه نامیده می‌شود.

تعریف ۴.۲.۱. یال پیوندی: یک یال با دو سر متمایز، یال پیوندی نامیده می‌شود.

تعریف ۵.۲.۱. گراف H زیرگراف G است اگر $V(H) \subseteq V(G)$ و $E(H) \subseteq E(G)$ باشد و به صورت $H \subseteq G$ نمایش داده می‌شود.

تعریف ۶.۲.۱. زیرگراف فراگیر ^{۴۱} : اگر $H \subseteq G$ و $V(H) = V(G)$ باشد، H زیرگراف فراگیر G نامیده می‌شود.

تعریف ۷.۲.۱. زیرگراف القایی ^{۴۲} : فرض کنید که V' زیرمجموعه‌ی ناتهی V باشد. زیرگراف G که مجموعه‌ی راس‌های آن V' می‌باشد و مجموعه‌ی یال‌هایش مجموعه‌ای از یال‌های G قرار دارد که هر دو انتهای یال در V' است، زیرگراف G القا شده به وسیله‌ی V' می‌نامند و به وسیله‌ی $G[V']$ نمایش داده می‌شود.

تعریف ۸.۲.۱. زیرگراف یال-القایی : فرض کنید E' زیرمجموعه‌ی ناتهی E است. زیرگراف G را که مجموعه‌ی راس‌هایش مجموعه‌ای از دو انتهای یال‌ها در E' و مجموعه‌ی یال‌هایش E' است، زیرگراف G ی القایی به وسیله‌ی E' می‌نامند و آن را با $G[E']$ نمایش می‌دهند. $G[E']$ زیرگراف یال-القایی G است.

تعریف ۹.۲.۱. زیرگراف القایی $G[V \setminus V']$ زیرگرافی است که از G با حذف راس‌های V' همراه با یال‌هایی که راس‌های V' بر آن‌ها واقع‌اند، به دست می‌آید، این زیرگراف را به صورت $G - V'$ نمایش می‌دهند.

تعریف ۱۰.۲.۱. زیرگراف فراگیر $G - E'$ ، زیرگراف فراگیر G با مجموعه‌ی یالی $E \setminus E'$ است که به وسیله‌ی حذف یال‌های E' به دست می‌آید.

تعریف ۱۱.۲.۱. گراف زمینه ^{۴۳} : با حذف همه‌ی طوقه‌ها از گراف G ، و برای هر جفت راس مجاور، با حذف همه‌ی یال‌های پیوندی به جز یک یال پیوندی که آن‌ها را به هم متصل می‌کند، زیرگراف فراگیر ساده‌ی G به دست می‌آید، که آن را گراف ساده‌ی زمینه‌ی G می‌نامند.

تعریف ۱۲.۲.۱. دو گراف H و G یکریخت‌اند، اگر و فقط اگر تابعی یک‌به‌یک و پوشا به صورت $f: V(G) \rightarrow V(H)$ بین مجموعه‌ی رئوس دو گراف وجود داشته باشد به طوری که $uv \in E(G)$ اگر و فقط اگر $f(u)f(v) \in E(H)$. در واقع دو گراف یکریخت، تعداد یکسانی راس دارند و این راس‌ها به صورت مشابهی به یکدیگر متصل شده‌اند.

تعریف ۱۳.۲.۱. گشت ^{۴۴} : در گراف G ، دنباله‌ی ناتهی $W = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots e_k v_k$ که جمله‌های آن متناوباً راس‌ها و یال‌ها هستند، به قسمی که برای $1 \leq i \leq k$ ، دو انتهای e_i ، v_i ، v_{i-1} باشد را گشتی از v_0 به v_k گویند.

^{۴۱}spanning subgraph

^{۴۲}induced subgraph

^{۴۳}underlying graph

^{۴۴}walk

تعریف ۱۴.۲.۱. گشت بسته: گشت بسته است اگر طول آن مثبت بوده، ابتدا و انتهای آن یکسان باشند.

تعریف ۱۵.۲.۱. گذر^{۴۵}: اگر یال‌های e_1, e_2, \dots, e_k در گشت W متفاوت باشند، W را گذر می‌نامند.

تعریف ۱۶.۲.۱. مسیر^{۴۶}: اگر راس‌های گشت W متفاوت باشند، W را مسیر می‌نامند.

تعریف ۱۷.۲.۱. طول مسیر: به تعداد یال‌های مسیر، طول مسیر گفته می‌شود.

تعریف ۱۸.۲.۱. دور^{۴۷}: مسیر بسته‌ای که ابتدا و راس‌های داخلی آن متمایز باشند، دور نامیده می‌شود.

تعریف ۱۹.۲.۱. مدار^{۴۸}: گشت بسته‌ای که از هر یال یک‌بار عبور کند، مدار نامیده می‌شود.

تعریف ۲۰.۲.۱.

تعریف ۲۱.۲.۱. مولفه‌ی گراف G : افرازی از مجموعه‌ی رئوس V به زیرمجموعه‌های ناتهی $V_1, V_2, \dots, V_\omega$ وجود دارد به طوری که دو راس u و v همبندند اگر و تنها اگر u و v هر دو متعلق به یک مجموعه V_i باشند. زیرگراف‌های $G[V_1], G[V_2], \dots, G[V_\omega]$ مولفه‌های گراف G نامیده می‌شوند. تعداد مولفه‌های G را با $\omega(G)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲۲.۲.۱. یال برشی (پل)^{۴۹}: یک یال برشی G ، یال e است به طوری که $\omega(G - e) > \omega(G)$.

تعریف ۲۳.۲.۱. گراف همبند: گراف همبند به گرافی گفته می‌شود که به ازای تمام $a, b \in V(G)$ مسیری بین آن‌ها وجود داشته باشد.

۳.۱ تعاریف مباحث فازی

تعاریف این قسمت از منبع [۸، ۳۷، ۴۴] گرفته شده است.

تعریف ۱.۳.۱. تابع عضویت^{۵۰}: تابع عضویت μ_A در یک مجموعه‌ی قطعی $A \subseteq X$ ، نگاشتی از مجموعه‌ی مرجع X به مجموعه‌ی $\{0, 1\}$ است که به صورت $\mu_A(x) : X \rightarrow \{0, 1\}$ نمایش داده می‌شود و به عبارتی داریم:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } x \in A \text{ و فقط اگر} \\ 0 & \text{اگر } x \notin A \text{ و فقط اگر} \end{cases} \quad (2.1)$$

در مجموعه‌های فازی، هر عضو با تابع عضویت μ_A به $[0, 1]$ نگاشته می‌شود یعنی (۳.۱) را داریم.

$$\mu_A : X \rightarrow [0, 1] \quad (3.1)$$

^{۴۵} trail

^{۴۶} path

^{۴۷} cycle

^{۴۸} circuit

^{۴۹} cut edge (bridge)

^{۵۰} membership function

تعریف ۲.۳.۱. مجموعه‌ی فازی: فرض کنید X یک مجموعه‌ی ناتهی باشد. مجموعه‌ی فازی A در X را با \tilde{A} نمایش داده و با تابع عضویت (۴.۱) مشخص می‌شود.

$$\mu_{\tilde{A}}(x) : X \rightarrow [0, 1] \quad (4.1)$$

و اعضای مجموعه‌ی \tilde{A} به صورت $\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) | x \in X\}$ یا $\tilde{A} = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_{\tilde{A}}(x_i)}{x_i}$ مشخص می‌شوند. در حالتی که عناصر پیوسته باشند، اعضای مجموعه‌ی فازی می‌تواند به صورت رابطه‌ی (۵.۱) نمایش داده شوند.

$$\tilde{A} = \int \frac{\mu_{\tilde{A}}(x)}{x} \quad (5.1)$$

تعریف ۳.۳.۱. مجموعه‌ی سطح^{۵۱}: مجموعه‌ی سطح \tilde{A} به صورت رابطه‌ی (۶.۱) تعریف می‌شود.

$$\Lambda_{\tilde{A}} = \{\alpha | \mu_{\tilde{A}}(x) = \alpha, \alpha \geq 0, x \in X\} \quad (6.1)$$

تعریف ۴.۳.۱. مجموعه‌ی α -برش^{۵۲}: به ازای $\alpha \in [0, 1]$ دلخواه، مجموعه‌ی \tilde{A}_α را که تابع عضویت اعضای آن کمتر از α نباشد، مجموعه‌ی α -برش می‌نامند، به عبارتی رابطه‌ی (۷.۱) را خواهیم داشت.

$$\tilde{A}_\alpha = \{x \in X | \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\} \quad (7.1)$$

تعریف ۵.۳.۱. مجموعه‌ی فازی \tilde{A} محدب است اگر به ازای همگی $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ و $\lambda \in [0, 1]$ رابطه‌ی (۸.۱) برقرار باشد.

$$\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \min(\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)) \quad (8.1)$$

تعریف ۶.۳.۱. نرمال بودن: بیشترین مقداری که تابع عضویت مجموعه‌ی فازی می‌گیرد ارتفاع نامیده می‌شود. اگر این ارتفاع برابر یک باشد، مجموعه‌ی فازی نرمال نامیده می‌شود.

تعریف ۷.۳.۱. عدد فازی^{۵۳}: عدد فازی \tilde{A} یک مجموعه‌ی فازی از اعداد حقیقی است که شرایط نرمال بودن، محدب (فازی) بودن و تابع عضویت تکه‌ای پیوسته روی \mathbb{R} را داشته باشد.

تعریف ۸.۳.۱. عدد فازی \tilde{A} عدد فازی ذوزنقه‌ای^{۵۴} است که به صورت (a_1, a_2, a_3, a_4) نمایش داده می‌شود و تابع عضویت آن به صورت (۹.۱) است.

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a_1 \\ \frac{x-a_1}{a_2-a_1} & a_1 \leq x \leq a_2 \\ 1 & a_2 \leq x \leq a_3 \\ \frac{a_4-x}{a_4-a_3} & a_3 \leq x \leq a_4 \\ 0 & x \geq a_4 \end{cases} \quad (9.1)$$

^{۵۱} level set

^{۵۲} α -cut set

^{۵۳} fuzzy number

^{۵۴} trapezoidal fuzzy number

تعریف ۹.۳.۱. عدد فازی \tilde{B} ، عدد فازی دوزنقه‌ای تعمیم یافته است و به صورت $\tilde{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4; w)$ نمایش داده می‌شود و تابع عضویت آن به صورت (۱۰.۱) است.

$$\mu_{\tilde{B}}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq b_1 \\ \frac{w(x-b_1)}{(b_2-b_1)} & b_1 \leq x \leq b_2 \\ w & b_2 \leq x \leq b_3 \\ \frac{w(x-b_4)}{(b_3-b_4)} & b_3 \leq x \leq b_4 \\ 0 & x \geq b_4 \end{cases} \quad (10.1)$$

تعریف ۱۰.۳.۱. عدد فازی \tilde{C} ، عدد فازی مثلثی^{۵۵} است که به صورت $\tilde{C} = (c_1, c_2, c_3)$ نمایش داده می‌شود و تابع عضویت آن به صورت (۱۱.۱) است.

$$\mu_{\tilde{C}}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq c_1 \\ \frac{x-c_1}{c_2-c_1} & c_1 \leq x \leq c_2 \\ \frac{c_3-x}{c_3-c_2} & c_2 \leq x \leq c_3 \\ 0 & x \geq c_3 \end{cases} \quad (11.1)$$

تعریف ۱۱.۳.۱. فرض کنید $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4; w_1)$ ، $\tilde{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4; w_2)$ اعداد فازی دوزنقه‌ای تعمیم یافته و λ مقداری اسکالر باشد. آنگاه اعمال جمع، تفریق، ضرب و ضرب اسکالر اعداد فازی را روی این اعداد فازی دوزنقه‌ای تعمیم یافته بیان می‌کنیم و این اعمال در مورد اعداد فازی مثلثی و اعداد فازی دوزنقه‌ای نیز به همین صورت تعریف خواهند شد.

$$\tilde{A} \oplus \tilde{B} = (a_1, a_2, a_3, a_4; w_1) \oplus (b_1, b_2, b_3, b_4; w_2) = (a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3, a_4+b_4; \min(w_1, w_2)) \quad (12.1)$$

$$\tilde{A} \ominus \tilde{B} = (a_1, a_2, a_3, a_4; w_1) \ominus (b_1, b_2, b_3, b_4; w_2) = (a_1-b_4, a_2-b_3, a_3-b_2, a_4-b_1; \min(w_1, w_2)) \quad (13.1)$$

$$\tilde{A} \otimes \tilde{B} = (a_1, a_2, a_3, a_4; w_1) \otimes (b_1, b_2, b_3, b_4; w_2) \cong (a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3, a_4b_4; \min(w_1, w_2)) \quad (14.1)$$

و در نهایت ضرب اسکالر به صورت (۱۵.۱) و (۱۶.۱) می‌باشد.

$$\lambda \cdot \tilde{A} = \lambda \cdot (a_1, a_2, a_3, a_4; w_1) = (\lambda \cdot a_1, \lambda \cdot a_2, \lambda \cdot a_3, \lambda \cdot a_4; w_1); \lambda > 0 \quad (15.1)$$

$$\lambda \cdot \tilde{A} = \lambda \cdot (a_1, a_2, a_3, a_4; w_1) = (\lambda \cdot a_4, \lambda \cdot a_3, \lambda \cdot a_2, \lambda \cdot a_1; w_1); \lambda < 0 \quad (16.1)$$

ملاحظه ۱۲.۳.۱. در جمع اعداد فازی رابطه‌ی (۱۷.۱) را خواهیم داشت.

^{۵۵}triangular fuzzy number

$$\sum_{j=1}^n \tilde{x}_{ij} = \tilde{x}_{i1} \oplus \tilde{x}_{i2} \oplus \dots \oplus \tilde{x}_{in} \quad (۱۷.۱)$$

تعریف ۱۳.۳.۱. گراف فازی^{۵۶}: گراف $\tilde{G} = (V, \delta, \mu)$ با مجموعه‌ی غیرتهی V همراه با جفت تابع $\mu: V \times V \rightarrow [0, 1]$ و $\delta: V \rightarrow [0, 1]$ گرافی فازی است به طوری که رابطه‌ی (۱۸.۱) را داشته باشیم.

$$\forall x, y \in V, \mu(x, y) \leq \min(\delta(x), \delta(y)) \quad (۱۸.۱)$$

تعریف ۱۴.۳.۱. [۴۱] قدرت همبندی بین دو راس u و v در مسیر $uu_1u_2 \dots u_{k-1}v$ به صورت رابطه‌ی (۱۹.۱) تعریف می‌شود.

$$\mu^\infty(u, v) = \sup\{\mu^k(u, v) | k = 1, 2, \dots\} \quad (۱۹.۱)$$

که $\mu^k(u, v)$ در آن به صورت رابطه‌ی (۲۰.۱) تعریف می‌شود.

$$\mu^k(u, v) = \sup\{\min\{\mu(uu_1), \mu(u_1u_2), \dots, \mu(u_{k-1}v)\} | u_1, u_2, \dots, u_{k-1} \in V\} \quad (۲۰.۱)$$

تعریف ۱۵.۳.۱. یال قوی^{۵۷}: [۴۲] در گراف فازی یک یال قوی نامیده می‌شود اگر رابطه‌ی (۲۱.۱) را داشته باشیم.

$$\mu(u, v) \geq \mu^\infty(u, v) \quad (۲۱.۱)$$

تعریف ۱۶.۳.۱. یال ضعیف^{۵۸}: در گراف فازی یک یال ضعیف نامیده می‌شود اگر رابطه‌ی (۲۲.۱) را داشته باشیم.

$$\mu(u, v) < \mu^\infty(u, v) \quad (۲۲.۱)$$

ملاحظه ۱۷.۳.۱. از بین تمام یال‌های (u_i, v_j) ، یالی که مقدار عضویتش^{۵۹} از همه‌ی یال‌های دیگر بیشتر باشد، قوی‌ترین یال و یالی که مقدار عضویتش از تمام یال‌های دیگر کمتر باشد، ضعیف‌ترین یال نامیده می‌شود.

تعریف ۱۸.۳.۱. مسیر با یال فازی: فرض کنید V مجموعه‌ای قطعی از رئوس و R رابطه‌ی تعریف شده روی مجموعه‌ی V باشد. مسیری از راس x_{i_1} به راس x_{i_r} با P_i به صورت (۲۳.۱) نمایش داده می‌شود.

$$P_i = (x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_r}), \quad x_{i_k} \in V, k = 1, 2, \dots, r \quad (۲۳.۱)$$

که

$$\forall (x_{i_k}, x_{i_{k+1}}), k = 1, 2, \dots, r-1, \quad \mu_R(x_{i_k}, x_{i_{k+1}}) > 0$$

^{۵۶}fuzzy graph

^{۵۷}strong edge

^{۵۸}weak edge

^{۵۹} $\mu(u_i, v_j)$

ملاحظه ۱۹.۳.۱. قدرت مسیر P_i به صورت رابطه‌ی (۲۴.۱) بیان می‌شود.

$$s(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_r}) = \min(\mu_R(x_{i_1}, x_{i_2}), \mu_R(x_{i_2}, x_{i_3}), \dots, \mu_R(x_{i_{r-1}}, x_{i_r})) \quad (24.1)$$

به عبارتی قدرت مسیر، مقدار عضویت ضعیف‌ترین یال مسیر خواهد بود. اگر چندین مسیر از x_{i_1} به x_{i_r} وجود داشته باشد، آنگاه مجموعه‌ای از مسیرها به صورت (۲۵.۱) است.

$$P^*(x_i, x_j) = \{P(x_i, x_j) | P(x_i, x_j) = (x_{i_1} = x_i, x_{i_2}, \dots, x_{i_r} = x_j)\} \quad (25.1)$$

و قدرت مسیر به صورت (۲۶.۱) است.

$$s^*(x_i, x_j) = \max_{P(x_i, x_j)} s(x_{i_1} = x_i, x_{i_2}, \dots, x_{i_r} = x_j) \quad (26.1)$$

تعریف ۲۰.۳.۱. مسیر با راس و یال فازی: فرض کنید مجموعه‌ی فازی V از رئوس و R رابطه‌ای روی رئوس باشد. آنگاه مسیر P_i از x_{i_1} به x_{i_r} به صورت (۲۷.۱) می‌باشد.

$$P_i = (x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_r}), \quad x_{i_k} \in V, k = 1, 2, \dots, r \quad (27.1)$$

می‌باشد که (۲۸.۱) را خواهیم داشت.

$$\mu_R(x_{i_k}, x_{i_{k+1}}) > 0, \quad \forall (x_{i_k}, x_{i_{k+1}}), k = 1, 2, \dots, r-1 \quad \text{و} \quad \delta_V(x_{i_k}) > 0, \quad \forall x_{i_k}, k = 1, 2, \dots, r \quad (28.1)$$

ملاحظه ۲۱.۳.۱. قدرت مسیر، وقتی که راس‌ها و یال‌ها فازی باشند به صورت رابطه‌ی (۲۹.۱) است.

$$s(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_r}) =$$

$$\min(\mu_R(x_{i_1}, x_{i_2}), \mu_R(x_{i_2}, x_{i_3}), \dots, \mu_R(x_{i_{r-1}}, x_{i_r}), \delta_V(x_{i_1}), \delta_V(x_{i_2}), \dots, \delta_V(x_{i_r})) \quad (29.1)$$

اگر بیش از یک مسیر از x_{i_1} به x_{i_r} وجود داشته باشد، آنگاه مانند قبل، بین تمام مقادیر قدرت مسیرها، ماکسیم آن‌ها در نظر گرفته می‌شود.

تعریف ۲۲.۳.۱. طول مسیر فازی: تعداد یال‌های مسیر فازی نامیده می‌شود.

تعریف ۲۳.۳.۱. تابع رتبه‌بندی^۶: [۳۵] در حالت کلی، اعداد فازی مرتب نیستند و بنابراین برخی اعداد فازی قابل مقایسه نخواهند بود، بنابراین روشی برای ساخت ترتیبی بر اعداد فازی نیاز داریم. تابع‌های گوناگونی برای مرتب کردن اعداد فازی بیان می‌شود که به این تابع‌ها، تابع رتبه‌بندی می‌گویند. یک تابع رتبه‌بندی $R: F(R) \rightarrow R$ هر عدد فازی را به عدد حقیقی می‌نگارد. برای دو عدد فازی روابط (۳۰.۱) و (۳۱.۱) و (۳۲.۱) را خواهیم داشت.

^۶ ranking function

$$\tilde{A} \leq \tilde{B} \Leftrightarrow R(\tilde{A}) \leq R(\tilde{B}) \quad (۳۰.۱)$$

$$\tilde{A} \geq \tilde{B} \Leftrightarrow R(\tilde{A}) \geq R(\tilde{B}) \quad (۳۱.۱)$$

$$\tilde{A} = \tilde{B} \Leftrightarrow R(\tilde{A}) = R(\tilde{B}) \quad (۳۲.۱)$$

در این پایان نامه از تابع های رتبه بندی مختلفی استفاده خواهد شد که در فصل های بعد آنها را معرفی خواهیم کرد.

فصل ۲

مدل فازی درخت‌ها

۱.۲ توصیف مدل

تعریف ۱.۱.۲. درخت:

گراف همبندی که هیچ دوری نداشته باشد، درخت نامیده می‌شود.

مدل درخت:

در مساله‌ی مدل‌سازی گراف‌ها، هر گاه از ساختار درخت‌ها و ویژگی‌ها و خواص آن استفاده شود، مدل مورد نظر، مدل درخت نامیده می‌شود.

قضیه ۲.۱.۲. اگر T یک درخت باشد، آنگاه $e(T) = v(T) - 1$ که $e(T)$ تعداد یال‌های درخت T و $v(T)$ تعداد راس‌های این درخت را نمایش می‌دهند.

قضیه ۳.۱.۲. فرض کنید G گرافی با $n - 1$ یال باشد، سه حکم زیر هم‌ارزند:

(الف) G همبند است.

(ب) G بی‌دور است.

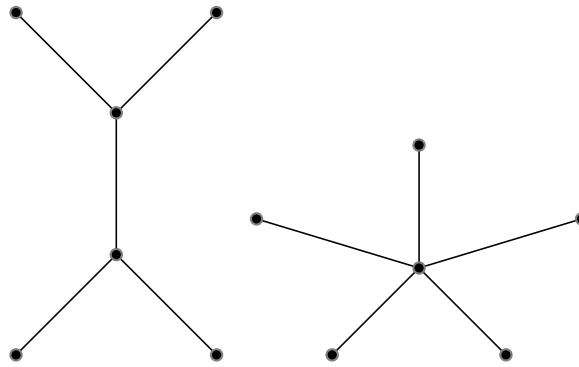
(د) G درخت است.

در شکل ۱.۲ مثال‌هایی از درخت‌ها آورده شده است

تعریف ۴.۱.۲. درخت فازی: [۴۱]

یک گراف فازی همبند $\tilde{T}(\delta, \mu)$ ، درخت فازی نامیده می‌شود، اگر یک زیرگراف فراگیر فازی $\tilde{F} = \tilde{T}(\delta, \mu)$ داشته باشد که اولاً درخت باشد، دوماً برای همه‌ی یال‌های (u, v) که در \tilde{F} نیستند، رابطه‌ی (۱.۲) را داشته باشیم.

$$\mu(u, v) < \nu^\infty(u, v) \quad (۱.۲)$$



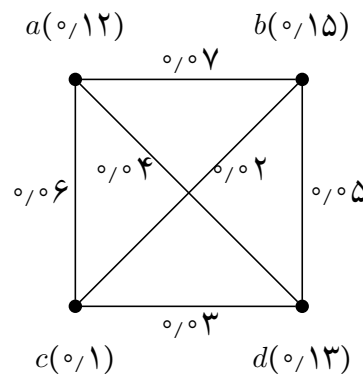
شکل ۱.۲: نمونه‌ای از درخت‌ها

با توجه به تعریف ۴.۱.۲، یک مدل کمی^۱ در درخت‌های فازی به صورت رابطه‌ی (۲.۲) وجود دارد.

$$m \geq n - 1 \quad (2.2)$$

زیرا طبق تعریف ۴.۱.۲، درخت فازی شامل زیرگراف فراگیر است که درخت است، بنابراین قطعاً شامل $n - 1$ یال خواهد بود.

مثال ۵.۱.۲. گراف فازی شکل ۲.۲ را در نظر بگیرید.



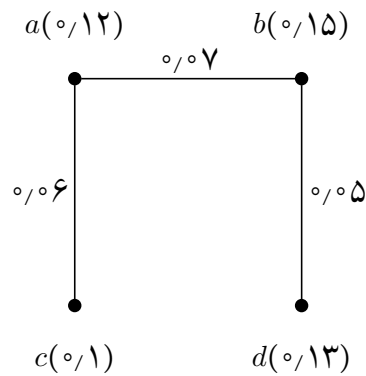
شکل ۲.۲: درخت فازی \tilde{T}

این گراف فازی همبند شامل زیرگراف فراگیر فازی همبندی مطابق شکل ۳.۲ می‌باشد. یال‌های (a, d) و (b, c) و (c, d) که در این زیرگراف فراگیر نیستند، به ازای تمام آن‌ها، رابطه‌ی (۱.۲) برقرار است. به عنوان مثال برای یال (c, d) طبق تعریف ۱۴.۳.۱ داریم:

$$\nu^1(c, d) = \sup\{\mu(cd)\} = 0/03$$

$$\nu^2(c, d) = \sup\{\min\{\mu(cu_1), \mu(u_1d)\}\} =$$

^۱مدلی است که بین اجزای آن، رابطه‌ای کمی وجود دارد.



شکل ۳.۲: زیرگراف فراگیر \tilde{F}

$$\sup\{\min\{\mu(c, a), \mu(a, d)\}, \min\{\mu(c, b), \mu(b, d)\}\} = \sup\{0.04, 0.02\} = 0.04$$

$$\nu^{\sphericalangle}(c, d) = \sup\{\min\{\mu(cu_1), \mu(u_1u_2), \mu(u_2d)\}\} =$$

$$\sup\{\min\{\mu(c, a), \mu(a, b), \mu(b, d)\}\} = \sup\{0.06, 0.07, 0.05\} = 0.05$$

در نتیجه رابطه‌ی (۳.۲) را داریم.

$$\nu^{\infty}(c, d) = \sup\{0.03, 0.04, 0.05\} = 0.05 \Rightarrow \mu(c, d) < \nu^{\infty}(c, d) \quad (3.2)$$

برای یال (a, d) و (b, c) نیز به همین صورت برقرار است.

ملاحظه ۶.۱.۲. در بررسی مسایل این فصل، مدل درخت به صورت $\tilde{T} = (V, E, \tilde{W})$ مورد بررسی قرار می‌گیرد یعنی درخت قطعی است اما وزن یال‌های درخت، مقادیر فازی خواهند داشت که این مقادیر فازی به صورت اعداد فازی می‌باشند.

۱.۱.۲ بعضی از مدل درخت‌ها

در این فصل، دو مدل از درخت‌ها به شرح زیر مورد بررسی قرار می‌گیرد:

۱- مدل درخت‌های فراگیر مینیمال^۲

۲- مدل کوتاهترین مسیر^۳

۲.۱.۲ بررسی مدل‌ها

مطالب این قسمت از منبع [۱۰] استخراج شده است.

^۲minimum spanning tree

^۳shortest path

مدل درخت فراگیر مینیمال

درخت‌های فراگیر در یک گراف وزن‌دار را در نظر بگیرید، از بین تمام درخت‌های فراگیر، درختی با مینیمم وزن را درخت فراگیر مینیمال می‌نامند. با در نظر گرفتن هر دو راس v_i و v_j در گراف وزن‌دار G ، مدل‌سازی گراف به صورت مدل راسی می‌باشد، سپس وزن یال بین دو راس را با $w(v_i, v_j) = c_{ij}$ نمایش می‌دهیم. در این درخت فراگیر به دنبال این هستیم که $\sum_{i,j} c_{ij}$ را مینیمم نماییم. با در نظر گرفتن وزن یال‌ها با اعداد فازی، مدل درخت فراگیر مینیمال، در محیط فازی بررسی می‌شود. فرمول بازگشتی ساده‌ای به نام فرمول کیلی برای به دست آوردن تعداد درخت‌های فراگیر در گراف وجود دارد که در قضیه‌ی ۸.۱.۲ بیان شده است. این فرمول مستلزم انقباض یک یال است که اکنون معرفی خواهد شد.

تعریف ۷.۱.۲. یال e از گراف G ، منقبض شده است، اگر آن یال حذف شده، دو سر آن روی هم قرار گیرند. گراف به دست آمده، با $G.e$ نمایش داده می‌شود.

واضح است که اگر e یال G باشد، آن‌گاه

$$E(G.e) = E(G) - 1 \quad V(G.e) = V(G) - 1$$

بنابراین، اگر T درخت باشد، $T.e$ هم درخت است.

تعداد درخت‌های فراگیر G با $\tau(G)$ نمایش داده می‌شوند.

قضیه ۸.۱.۲. اگر e یک یال پیوندی G باشد، آنگاه $\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G.e)$.

مدل کوتاهترین مسیر

یافتن کوتاهترین مسیر در گراف، در واقع یافتن مسیری بین دو راس است به گونه‌ای که مجموع وزن یال‌های تشکیل دهنده‌ی آن مسیر کمینه شود. مدل گرافی که متناظر با این مساله می‌توان در نظر گرفت مدل راسی بوده و به صورت می‌باشد:

مدل گراف همبند وزن‌دار $G = (V, E)$ را در نظر بگیرید که V مجموعه‌ی رئوس این گراف و E مجموعه‌ی یال‌های آن می‌باشد. قرار است کوتاهترین مسیر بین دو راس دلخواه گراف همبند را به دست آوریم. هر مسیر، درخت است. در این مدل گراف، وزن روی یال‌ها مثبت‌اند، که این محدودیتی جدی نیست، زیرا اگر وزن یال صفر باشد، آن‌گاه دو انتهای یال مشخص است. در واقع از هر راس به خودش وزن صفر را داراست. همچنین این قرارداد را خواهیم پذیرفت که اگر $uv \notin E$ (یعنی اگر بین دو راس u و v یالی وجود نداشته باشد)، $w(uv) = \infty$. توجه داشته باشید که وزن روی یال‌ها معرف فاصله‌هایی هستند که هر دو راس مدل گراف را مستقیماً به هم وصل می‌کند. اگر وزن یال‌ها با اعداد فازی در نظر گرفته شوند، مدل درخت در محیط فازی بررسی می‌شود.

۳.۱.۲ روش حل مدل‌ها

سعی داریم مدل‌های درخت فراگیر مینیمال و کوتاهترین مسیر را که بیان شد، با دو روش برنامه‌ریزی خطی و روش الگوریتمی حل نماییم. ابتدا به شرح روش‌ها در مدل درخت فراگیر مینیمال و سپس در مدل کوتاهترین مسیر می‌پردازیم.

(۱) روش برنامه‌ریزی خطی قطعی، مربوط به مدل درخت فراگیر مینیمال

در این قسمت روش برنامه‌ریزی خطی مدل در حالت قطعی بیان خواهد شد که در آن از بین تمام درخت‌های فراگیر، لازم است درخت فراگیر مینیمال به دست آید [۲۴].

$$\begin{cases} \min & Z = \sum_{e \in E(G)} w_e x_e \\ \text{s.t.} & \\ & \sum_{e \in E(S)} x_e \leq |S| - 1 \quad \forall S \subset V \\ & \sum_{e \in E(G)} x_e = n - 1 \quad S = V \\ & x_e \in \{0, 1\} \quad \forall e \in E \end{cases}$$

محدودیت اول ضمانت می‌کند که تعداد یال‌های درخت برابر $n - 1$ است. محدودیت دوم، بی‌دور بودن زیر درخت‌ها را ضمانت می‌کند. محدودیت سوم نیز به x_e مقدار یک نسبت می‌دهد اگر یال e در درخت باشد و مقدار صفر به یال نسبت می‌دهد اگر یال e در درخت نباشد. بنابر قضیه‌ی ۳.۱.۲، فهمیده می‌شود که وقتی دو شرط از شروط درخت برقرار باشد، شرط سوم نیز برقرار است، پس بنابراین با قرار بودن محدودیت اول و دوم، خود به خود شرط همبند بودن مدل درخت نیز برقرار می‌شود و لازم نیست در محدودیت‌ها لحاظ شود.

روش برنامه‌ریزی خطی فازی مربوط به مدل درخت فراگیر مینیمال

در روش برنامه‌ریزی خطی فازی زیر پارامتر w_e فازی در نظر گرفته می‌شود و به صورت \tilde{w}_e نمایش داده می‌شود.

$$\begin{cases} \min & \tilde{Z} = \sum_{e \in E} \tilde{w}_e \cdot x_e \\ \text{s.t.} & \\ & \sum_{e \in E} x_e \leq |S| - 1 \quad \forall S \subset V \\ & \sum_{e \in E} x_e = n - 1 \quad S = V \\ & x_e \in \{0, 1\} \quad \forall e \in E \end{cases}$$

(۲) روش الگوریتمی مربوط به مدل درخت فراگیر مینیمال

سه روش الگوریتمی معروف برای پیدا کردن مدل درخت فراگیر مینیمال عبارتند از: الگوریتم کروسکال^۴، الگوریتم پریم^۵، الگوریتم سولین^۶.

در اینجا الگوریتم کروسکال^۷ بیان خواهد شد [۱۰].

الگوریتم کروسکال:

^۴Kruskal algorithm

^۵Prim algorithm

^۶Solin algorithm

^۷Kruskal

۱. یال پیوندی e_1 را طوری انتخاب کنید که $w(e_1)$ به اندازه‌ی ممکن کوچک باشد.
۲. اگر یال‌های e_1, e_2, \dots, e_i را انتخاب کرده‌اید، آنگاه یک یال e_{i+1} از $E \setminus \{e_1, e_2, \dots, e_i\}$ را به طریقی انتخاب کنید که
- (الف) $G[\{e_1, e_2, \dots, e_{i+1}\}]$ بی‌دور باشد.
- (ب) $w(e_{i+1})$ با در نظر گرفتن (الف) به اندازه‌ی ممکن کوچک باشد.
۳. وقتی که مرحله‌ی ۲ را نتوان بیشتر اجرا کرد، توقف کنید.
- قضیه ۹.۱۰.۲. هر درخت فراگیر $T^* = G[\{e_1, e_2, \dots, e_{v-1}\}]$ که به وسیله‌ی الگوریتم کروسکال ساخته شود، یک درخت فراگیر مینیمال است.
- در این قسمت به بیان مثالی می‌پردازیم، قبل از آن تابعی رتبه‌بندی، به نام تابع رتبه‌بندی یاگر^۸ معرفی خواهد شد که در قسمت‌های بعدی به کار برده می‌شود.
- تعریف ۱۰.۱۰.۲. تابع رتبه‌بندی یاگر: [۹] فرض کنید عدد فازی \tilde{c} داده شده باشد، تابع رتبه‌بندی یاگر بر روی عدد فازی \tilde{c} به صورت رابطه‌ی (۴.۲) عمل می‌کند.

$$Y(\tilde{c}) = \int_0^1 \circ/5 (c_\alpha^L + c_\alpha^U) d\alpha \quad (4.2)$$

که (c_α^L, c_α^U) بازه‌ی α -برش عدد فازی \tilde{c} است.

با آوردن یک مثال، عملکرد تابع رتبه‌بندی یاگر به روشنی بیان می‌شود.

مثال ۱۱.۱۰.۲. فرض کنید عدد فازی ذوزنقه‌ای $\tilde{f} = (1/2, 1/35, 1/4, 1/45)$ داده شده باشد، بنابراین:

$$\mu_{\tilde{f}} = \begin{cases} 0 & x \leq 1/2 \\ \frac{x-1/2}{1/35-1/2} & 1/2 \leq x \leq 1/35 \\ 1 & 1/35 \leq x \leq 1/4 \\ \frac{1/45-x}{1/45-1/4} & 1/4 \leq x \leq 1/45 \\ 0 & x \geq 1/45 \end{cases}$$

حال با توجه به تابع عضویت عدد فازی \tilde{f} می‌توان نوشت:

$$\frac{x-1/2}{1/35-1/2} = \alpha \Rightarrow \frac{x-1/2}{\circ/15} = \alpha \Rightarrow x-1/2 = \circ/15\alpha \Rightarrow x = \circ/15\alpha + 1/2 = \tilde{f}_\alpha^L$$

و همچنین:

$$\frac{1/45-x}{1/45-1/4} = \alpha \Rightarrow \frac{1/45-x}{\circ/5} = \alpha \Rightarrow 1/45-x = \circ/5\alpha \Rightarrow x = 1/45 - \circ/5\alpha = \tilde{f}_\alpha^U$$

^۸Yager's ranking function

بنابراین برای عدد فازی $(1/2, 1/35, 1/4, 1/45)$ ، بازه α -برش آن، به صورت رابطه‌ی (۵.۲) است.

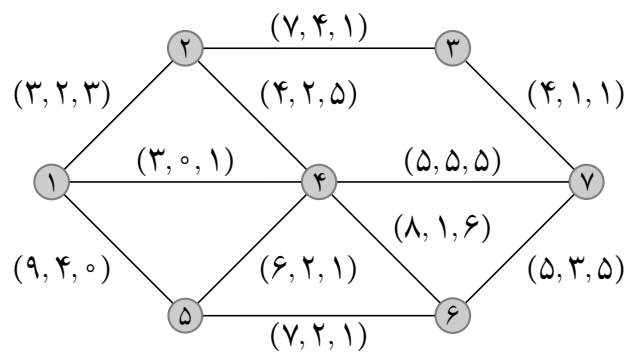
$$(\tilde{f}_\alpha^L, \tilde{f}_\alpha^U) = (0/15\alpha + 1/2, 1/45 - 0/5\alpha) \quad (5.2)$$

حال بازه‌ی α به دست آمده در رابطه‌ی (۵.۲) را در فرمول (۴.۲) جایگزین می‌کنیم. بنابراین رابطه‌ی (۶.۲) را خواهیم داشت.

$$\begin{aligned} Y(\tilde{f}) &= \int_0^1 0/5(0/15\alpha + 1/2 + 1/45 - 0/5\alpha) d\alpha = \int_0^1 0/5(0/1\alpha + 2/65) d\alpha \\ &= \int_0^1 (0/5\alpha + 1/325) d\alpha = 0/5 \left[\frac{\alpha^2}{2} \right]_0^1 + 1/325\alpha \Big|_0^1 = 1/35 \end{aligned} \quad (6.2)$$

با توجه به تابع یاگر رابطه‌ی (۷.۲) را خواهیم داشت.
 اگر $\tilde{a} < \tilde{b}$ آنگاه $Y(\tilde{a}) < Y(\tilde{b})$ (۷.۲)

مثال ۱۲.۱.۲. فرض کنید ۷ مرکز گاز رسانی وجود دارد و هزینه‌ی احداث مسیر بین هر دو مرکز با اعداد فازی مثلثی نشان داده شده است. گراف شکل ۴.۲ متناظر با این مثال است [۲۸].



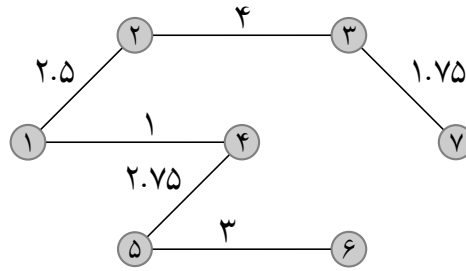
شکل ۴.۲: گراف ساده‌ای از مراکز گازرسانی

حال با توجه به تابع رتبه‌بندی یاگر که در (۴.۲) بیان شد، مقدار قطعی هزینه‌ها را به دست آورده تا بتوان به مقایسه‌ی اعداد پرداخت.

$$Y((3, 2, 3)) = 2/5, \quad Y((3, 0, 1)) = 1, \quad Y((9, 4, 0)) = 4/25, \quad Y((6, 2, 1)) = 2/75$$

$$Y((7, 4, 1)) = 4, \quad Y((7, 2, 1)) = 3, \quad Y((8, 1, 6)) = 4, \quad Y((5, 5, 5)) = 5$$

$$Y((4, 1, 1)) = 1/75, \quad Y((4, 2, 5)) = 3/25, \quad Y((5, 3, 5)) = 4$$



شکل ۵.۲: T

با پیاده‌سازی الگوریتم کروسکال روی گراف G داده شده در شکل ۴.۲، مدل درخت فراگیر مینیمال در شکل ۵.۲ را خواهیم داشت.

بنابراین بین ۷ مرکز، مسیری با مینیمم هزینه احداث شد به طوری که هزینه‌ی احداث برابر

$$1 + 2.5 + 2.75 + 3 + 4 + 1.75 = 15$$

است.

حال به حل مدل کوتاهترین مسیر می‌پردازیم.

(۱) روش برنامه‌ریزی خطی قطعی مربوط به مدل کوتاهترین مسیر

در این قسمت روش برنامه‌ریزی خطی مساله در حالت قطعی بیان خواهد شد [۱۱].

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad Z = \sum_{(uv) \in E} l_{uv} x_{uv} \\ \text{s.t.} \\ \sum_u x_{su} - \sum_v x_{vs} = 1 \\ \sum_v x_{vt} - \sum_u x_{tu} = 1 \\ \sum_q x_{pq} - \sum_r x_{rp} = 0 \quad \forall p \in V \setminus \{s, t\} \\ x_{uv} \in \{0, 1\} \\ l_{uv} \geq 0 \end{array} \right.$$

متغیر l_{uv} فاصله‌ی بین دو راس u و v را نشان می‌دهد. هدف این مساله این است که از بین مسیرهای مختلفی که بین دو راس وجود دارد، مسیر با مینیمم فاصله به دست آید. محدودیت اول بیان می‌کند به ازای راس مبدأ (s)، اختلاف بین تعداد یال‌هایی که در مسیر قرار دارند و از s خارج شده و به s وارد می‌شوند برابر یک است. محدودیت دوم بیان می‌کند به ازای راس مقصد، اختلاف بین یال‌هایی که در مسیر قرار دارند و وارد آن راس شده و از آن خارج می‌شوند برابر یک است.

محدودیت سوم بیان می‌کند برای تمام راس‌های دیگر، تعداد یال‌هایی از مسیر، که از آن راس‌ها خارج شده با تعداد یال‌هایی از مسیر که به آن راس‌ها وارد می‌شود برابر است. محدودیت چهارم نیز بیان می‌کند متغیر x_{uv} اگر در مسیر باشد مقدار یک وگرنه مقدار صفر می‌گیرد، محدودیت پنجم بیان می‌کند متغیر l_{uv} که فاصله‌ی بین دو راس است نامنفی است.

پس از بیان مدل در محیط قطعی، به بررسی مدل در محیط فازی خواهیم پرداخت. در مورد مدل کوتاهترین مسیر، اگر وزن یال‌های گراف را با اعداد فازی در نظر بگیریم، روش برنامه‌ریزی خطی فازی مدل به صورت زیر خواهد بود:

روش برنامه‌ریزی خطی فازی در مدل کوتاهترین مسیر

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad \tilde{Z} = \sum_{(uv) \in E} \tilde{l}_{uv} \cdot x_{uv} \\ s.t. \\ \sum_u x_{su} - \sum_v x_{vs} = 1 \\ \sum_v x_{vt} - \sum_u x_{tu} = 1 \\ \sum_q x_{pq} - \sum_r x_{rp} = 0 \quad \forall p \in V \setminus \{s, t\} \\ x_{uv} \in \{0, 1\} \\ \tilde{l}_{uv} \geq 0 \end{array} \right.$$

(۲) روش الگوریتمی مربوط به مدل کوتاهترین مسیر

الگوریتمی که برای حل کردن مدل ارائه شده است، دیکسترا^۹ می‌باشد. تفاوت این الگوریتم در محیط فازی با محیط قطعی در دو مورد می‌باشد:

۱. چگونگی جمع کردن دو عدد فازی
 ۲. چگونگی مقایسه‌ی فاصله‌ی بین دو مسیر مختلف که طول یال‌هایش اعداد فازی می‌باشد.
- حال در زیر تعاریفی ارائه می‌شود که برای حل مدل در محیط فازی مورد استفاده قرار می‌گیرد و به کمک این تعاریف می‌توان جمع و مقایسه‌ی اعداد فازی را انجام داد.

تعریف ۱۳.۱.۲. نمایش مجموع میانگین درجات^{۱۰} از عدد فازی مثلثی $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3)$ به صورت رابطه‌ی (۸.۲) تعریف می‌شود [۲۲].

$$p(\tilde{A}) = \frac{1}{6}(a_1 + 4a_2 + a_3) \quad (۸.۲)$$

^۹Dijkstra

^{۱۰}grade mean integration

تعریف ۱۴.۱.۲. نمایش مجموع میانگین درجات از عدد فازی دوزنقه‌ای $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ به صورت رابطه‌ی (۹.۲) تعریف می‌شود [۲۲].

$$p(\tilde{A}) = \frac{1}{6}(a_1 + 2a_2 + 2a_3 + a_4) \quad (9.2)$$

در واقع در تعریف ۱۳.۱.۲ و ۱۴.۱.۲ نوعی تابع رتبه‌بندی بیان شد که به کمک آن اعداد فازی به اعداد قطعی تبدیل شده و با این تبدیل به راحتی اعداد فازی قابل مقایسه هستند.

تعریف ۱۵.۱.۲. عملگر جمع روی اعداد فازی $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3)$ و $\tilde{B} = (b_1, b_2, b_3)$ با توجه به تابع رتبه‌بندی (۸.۲) به صورت رابطه‌ی (۱۰.۲) می‌باشد.

$$p(\tilde{A} \oplus \tilde{B}) = p(\tilde{A}) + p(\tilde{B}) = \frac{1}{6}(a_1 + 4a_2 + a_3) + \frac{1}{6}(b_1 + 4b_2 + b_3) \quad (10.2)$$

تعریف ۱۶.۱.۲. عملگر جمع روی اعداد فازی $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ و $\tilde{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ با توجه به تابع رتبه‌بندی (۹.۲) به صورت رابطه‌ی (۱۱.۲) می‌باشد.

$$p(\tilde{A} \oplus \tilde{B}) = p(\tilde{A}) + p(\tilde{B}) = \frac{1}{6}(a_1 + 2a_2 + 2a_3 + a_4) + \frac{1}{6}(b_1 + 2b_2 + 2b_3 + b_4) \quad (11.2)$$

الگوریتم دیکسترا در محیط فازی [۱۵]

(۱) برای $u_0 \neq v$ و $S_0 = \{u_0\}$ و $i = 0$ قرار دهید $l(u_0) = 0, l(v) = \infty$.

(۲) برای هر $v \in \bar{S}_i$ به جای $l(v)$ مقدار $\min(l(v), l(u_i) \oplus w(u_i, v))$ را قرار دهید.

$\min_{v \in \bar{S}_i} l(v)$ را محاسبه کنید و راسی را که برای آن به این مینیمم می‌رسید با u_{i+1} نشان دهید. قرار دهید $S_{i+1} = S_i \cup \{u_{i+1}\}$.

(۳) اگر $i = v - 1$ توقف کنید. اگر $i < v - 1$ ، به جای i مقدار $i + 1$ را قرار دهید و به مرحله‌ی (۲) بروید.

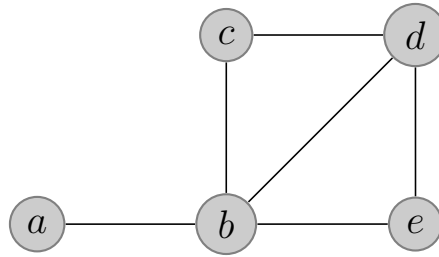
ملاحظه ۱۷.۱.۲. در الگوریتم دیکسترای فازی، در مینیمم‌گیری و جمع اعداد فازی که در داخل الگوریتم وجود دارد، از تعاریف ۱۳.۱.۲ و ۱۴.۱.۲ و ۱۵.۱.۲ و ۱۶.۱.۲ استفاده می‌شود.

ملاحظه ۱۸.۱.۲. الگوریتم دیکسترا فاصله‌ی از راس u_0 به راس v را به وسیله‌ی مقدار نهایی $l(v)$ نشان می‌دهد. اگر قرار باشد مسافتی تا راس خاص v_0 به دست آید، به محض اینکه u_j یی برابر v_0 شد، متوقف شوید. همچنین باید توجه داشته باشید که الگوریتم دیکسترا، تنها کوتاهترین فاصله را از راس u_0 به راس‌های دلخواه دیگر می‌دهد و اگر بخواهید مسیر را شناسایی کنید به آسانی، به وسیله‌ی ردیابی ماقبل‌های راس‌ها، می‌توان این مسیر را به دست آورد.

حال مثالی از به دست آوردن کوتاهترین مسیر در محیط فازی ارائه می‌کنیم [۲۲].

مثال ۱۹.۱.۲. مدل گرافی شکل ۶.۲ را در نظر بگیرید.

وزن روی هر یال تحت تأثیر عوامل مختلفی از جمله: ترافیک جاده، وضعیت جاده و استراحتی که بین مسیر ممکن است انجام شود می‌باشد. تعیین کردن مقدار هر کدام از عوامل بالا، به صورت دقیق



شکل ۶.۲: مدل گرافی ساده از جاده

جدول ۱.۲: وزن روی یال‌های گراف ۶.۲

یال	ترافیک جاده	کیفیت جاده	استراحت بین جاده
(a, b)	$(0, 0, 1, 2)$	$(2, 3, 4, 5)$	$(1, 2, 3, 4)$
(b, c)	$(1, 2, 3, 4)$	$(3, 4, 5, 5)$	$(2, 3, 4, 5)$
(b, d)	$(0, 0, 1, 2)$	$(0, 0, 1, 2)$	$(3, 4, 5, 5)$
(b, e)	$(2, 3, 4, 5)$	$(3, 4, 5, 5)$	$(3, 4, 5, 5)$
(c, d)	$(1, 2, 3, 4)$	$(2, 3, 4, 5)$	$(1, 2, 3, 4)$
(d, e)	$(3, 4, 5, 5)$	$(3, 4, 5, 5)$	$(0, 0, 1, 2)$

امکان‌پذیر نخواهد بود، بنابراین برای بیان هر یک، عددی فازی در نظر بگیرید. جدول ۱.۲ وزن روی هر یال را در این مثال داده است.

کوتاهترین مسیر از راس a به راس e را مشخص کنید.
طبق رابطه ی (۱۲.۱) خواهیم داشت:

$$(a, b) = (0, 0, 1, 2) + (2, 3, 4, 5) + (1, 2, 3, 4) = (3, 5, 8, 11)$$

$$(b, c) = (1, 2, 3, 4) + (3, 4, 5, 5) + (2, 3, 4, 5) = (6, 9, 12, 14)$$

$$(b, d) = (0, 0, 1, 2) + (0, 0, 1, 2) + (3, 4, 5, 5) = (3, 4, 7, 9)$$

$$(b, e) = (2, 3, 4, 5) + (3, 4, 5, 5) + (3, 4, 5, 5) = (8, 11, 14, 15)$$

$$(c, d) = (1, 2, 3, 4) + (2, 3, 4, 5) + (1, 2, 3, 4) = (4, 7, 10, 13)$$

$$(d, e) = (3, 4, 5, 5) + (3, 4, 5, 5) + (0, 0, 1, 2) = (6, 8, 11, 12)$$

حال مقدار قطعی هر یال را با استفاده از تعریف ۱۴.۱.۲ به دست آورید.

$$\text{یال } (a, b) = (3, 5, 8, 11) \rightarrow \text{مقدار قطعی یال } (a, b) = \frac{1}{6}(3 + 10 + 16 + 11) = \frac{40}{6}$$

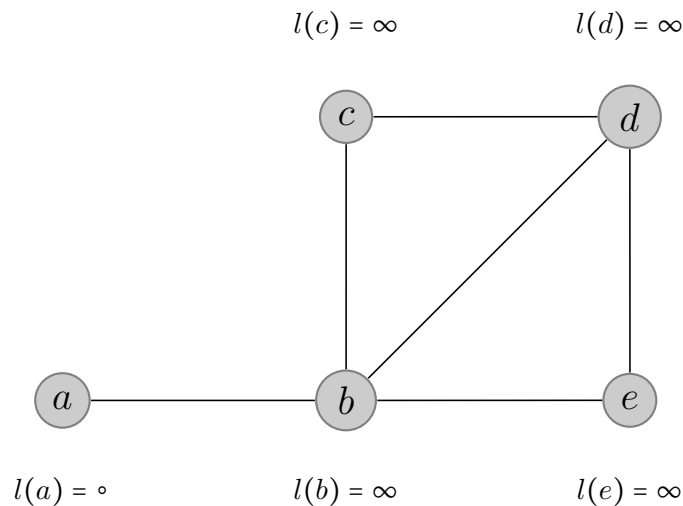
$$\text{یال } (b, c) = (6, 9, 12, 14) \rightarrow \text{مقدار قطعی یال } (b, c) = \frac{1}{6}(6 + 18 + 24 + 14) = \frac{62}{6}$$

$$\begin{aligned} \text{یال } (b, d) = (3, 4, 7, 9) &\rightarrow \text{مقدار قطعی یال } (b, d) = \frac{1}{6}(3+8+14+9) = \frac{34}{6} \\ \text{یال } (b, e) = (8, 11, 14, 15) &\rightarrow \text{مقدار قطعی یال } (b, e) = \frac{1}{6}(8+22+28+15) = \frac{73}{6} \\ \text{یال } (c, d) = (4, 7, 10, 13) &\rightarrow \text{مقدار قطعی یال } (c, d) = \frac{1}{6}(4+14+20+13) = \frac{51}{6} \\ \text{یال } (d, e) = (6, 8, 11, 12) &\rightarrow \text{مقدار قطعی یال } (d, e) = \frac{1}{6}(6+16+22+12) = \frac{56}{6} \end{aligned}$$

حال مراحل الگوریتم را اجرا کنید.

[تکرار اول]

گام (۱) $i = 0, S_0 = \{a\}, u_0 = a$



شکل ۷.۲: مدل گراف گام (۱) تکرار اول

گام (۲)

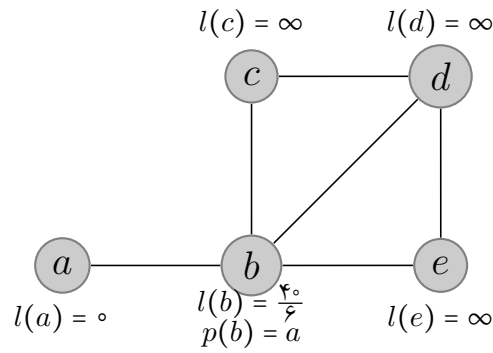
بنابراین طبق شکل ۸.۲ خواهیم داشت: $S_1 = \{a, b\}, u_1 = b$

گام (۳) $i \leftarrow 1$

[تکرار دوم]

گام (۲)

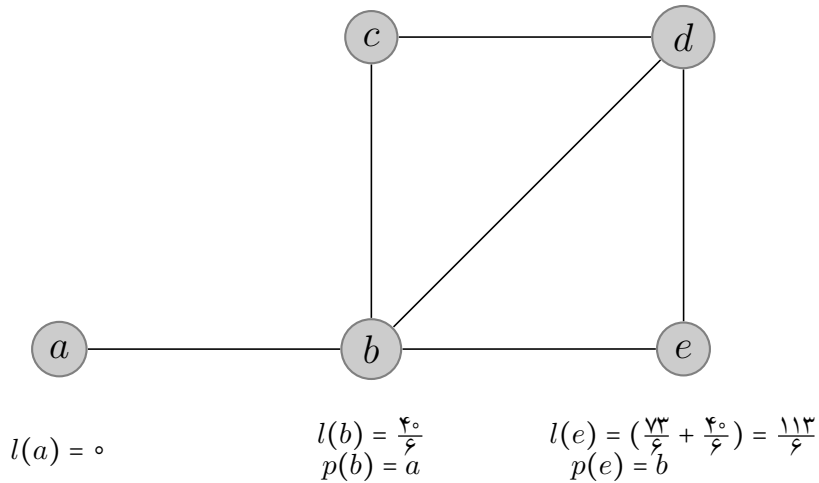
بنابراین طبق شکل ۹.۲ خواهیم داشت: $S_2 = \{a, b, d\}, u_2 = d$



شکل ۸.۲: مدل گراف گام (۲) تکرار اول

$$p(c) = b \qquad p(d) = b$$

$$l(c) = \left(\frac{6}{6} + \frac{4}{6}\right) = \frac{10}{6} \qquad l(d) = \left(\frac{3}{6} + \frac{4}{6}\right) = \frac{7}{6}$$



شکل ۹.۲: مدل گراف گام (۲) تکرار دوم

گام (۳) $i \leftarrow 2$

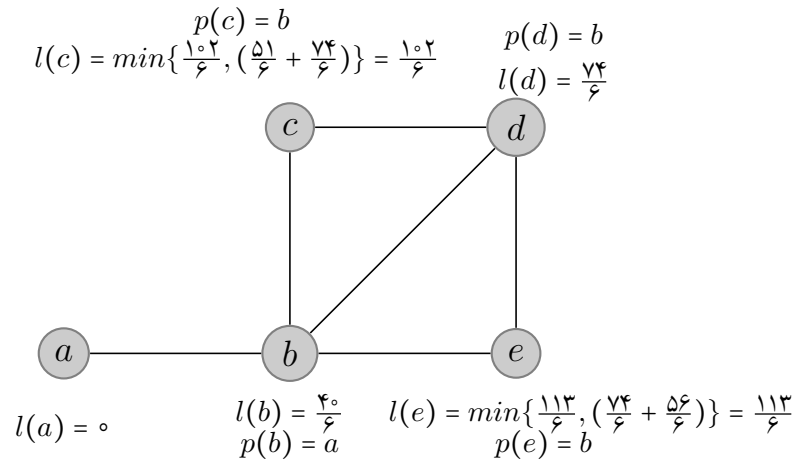
[تکرار سوم]

گام (۲)

بنابراین طبق شکل ۱۰.۲ خواهیم داشت: $S_3 = \{a, b, d, c\}$, $u_3 = c$.

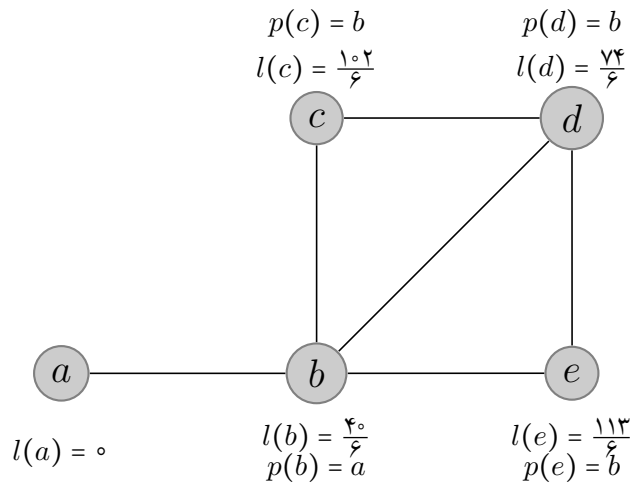
گام (۳) $i \leftarrow 3$

[تکرار چهارم]



شکل ۱۰.۲: مدل گراف گام (۲) تکرار سوم

گام (۲)



شکل ۱۱.۲: مدل گراف گام (۲) تکرار چهارم

بنابراین طبق شکل ۱۱.۲ خواهیم داشت: $S_4 = \{a, b, d, c, e\}, u_4 = e$.

گام (۳) $i < 4$. چون $i = v - 1$ است، پس شرط توقف برقرار شده و متوقف شوید. در نتیجه کوتاهترین مسیر از a به e به صورت زیر است:

$$\text{مسیر} = \{a \rightarrow b \rightarrow e\}$$

$$\text{و طول مسیر برابر } \frac{40}{6} + \frac{113}{6} = \frac{153}{6} \text{ است.}$$

کاربردهای مدل درخت فراگیر مینیمال

از جمله کاربردهای مدل درخت فراگیر مینیمال می‌توان به مساله‌ی ارتباط اشاره کرد [۱۰]، این مساله در موارد مختلفی از جمله احداث شبکه‌ی راه‌آهنی، احداث شبکه‌ی گازسانی، شبکه‌ی توزیع برق و از این دست به کار گرفته می‌شود. در این مسایل با داشتن هزینه‌ی c_{ij} بین دو مرکز v_i و v_j ، مدل درخت فراگیر به گونه‌ای طراحی می‌شود که مجموع هزینه‌ها مینیمم گردد. در بسیاری از این مسایل، برای احداث مسیری بین دو مرکز، هزینه‌های متفاوتی وجود دارد که تمامی آن‌ها را نمی‌توان به طور دقیق اندازه‌گیری کرد. بنابراین برای اینکه این عدم دقت در مسایل در نظر گرفته شود و جواب مساله دقیق‌تر به دست آید، باید پارامترهای مدل قطعی برنامه‌ریزی خطی، فازی در نظر گرفته شوند.

کاربردهای مدل کوتاهترین مسیر

۱- نقشه‌ای جغرافیایی در نظر بگیرید، برای پیدا کردن کوتاهترین مسافت از شهری به شهر دیگر روی نقشه می‌توان از مدل کوتاهترین مسیر استفاده کرد.

۲- فرض کنید برنامه‌ای زمانی از پروازهای خطوط هوایی و زمان‌های پرواز آن‌ها داده شده باشد. می‌خواهیم سریع‌ترین راهی که از کشوری به کشور دیگر می‌توان رفت را به دست آوریم. در این مورد باید کشورها را به عنوان رئوس گراف و خطوط هوایی را به عنوان یال‌های مرتبط‌کننده‌ی کشورها در نظر گرفته و مدت زمان مسافت بین کشورها را وزن یال‌ها در نظر می‌گیریم [۱۰].

۳- در بازی‌های کامپیوتری برای پیدا کردن کوتاهترین مسیر بین دو نقطه از نقشه، از این مدل استفاده می‌شود.

۴- شبکه‌های اجتماعی، به مجموعه‌ای از افراد و کاربران که به صورت گروهی با یکدیگر ارتباط داشته و مواردی مانند اطلاعات، نیازمندی‌ها، فعالیت‌ها و افکار خود را به اشتراک می‌گذارند گفته می‌شود. در این شبکه‌ها کاربران را به عنوان رئوس گراف در نظر می‌گیریم، وابستگی‌های بین این افراد مانند دوستی، خویشاوندی، تجارت، علایق مشترک و از این قبیل به عنوان یال‌های بین‌گروه‌ها می‌باشند. مسافتی که بین افراد در شبکه‌های اجتماعی وجود دارد را وزن یال‌ها در نظر می‌گیریم. در شبکه‌های اجتماعی برای پیدا کردن فاصله‌ی میان دو فرد نظریه‌ای به نام نظریه‌ی شش درجه‌ی جدایی وجود دارد. شش درجه‌ی جدایی به این ایده اشاره دارد که اگر فاصله‌ی هر فرد را از تمام افرادی که مستقیماً می‌شناسد یک گام در نظر بگیریم و این فاصله را برای تمام افرادی که با یک نفر واسط با آن آشنایی دارد دو گام در نظر بگیریم، آنگاه میانگین فاصله‌ی هر دو نفر در کره‌ی زمین شش گام خواهد بود. بنابراین با این اطلاعات می‌توانیم کوتاهترین مسیر بین کاربران را پیدا کنیم.

در سایر مسایل ارتباطات و جابجایی و بسیاری مسایل دیگر، کاربرد این مدل به چشم می‌خورد.

فصل ۳

مدل فازی گراف‌های اویلری و همیلتونی

۱.۳ توصیف مدل

مدل گراف اویلری و همیلتونی

در مساله‌ی مدل‌سازی گراف‌ها، هر گاه از ساختار گراف‌های اویلری^۱ و یا گراف‌های همیلتونی^۲ استفاده کنیم مدل مورد نظر، مدل گراف‌های اویلری و یا مدل گراف‌های همیلتونی نامیده می‌شود. مطالب این قسمت از منبع [۱۰] استخراج شده است.

تعریف ۱.۱.۳. مسیر همیلتونی: مسیری است که تمام رئوس گراف G را شامل شود.

تعریف ۲.۱.۳. دور همیلتونی: دوری است که تمام رئوس گراف G را در برداشته باشد.

تعریف ۳.۱.۳. مدار اویلری: مداری است که تمام یال‌های گراف G را در خود دارد.

تعریف ۴.۱.۳. گراف اویلری:

یک گراف اویلری است اگر شامل مداری اویلری باشد.

قضیه ۵.۱.۳. مدل گراف همبند G یک مدل گراف اویلری است اگر و تنها اگر تمام رئوس آن از درجه‌ی زوج باشد.

مطالب این قسمت از مرجع [۴۴] استخراج شده است.

تعریف ۶.۱.۳. در گراف فازی $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E}, W)$ ، یک مسیر فازی P که همه‌ی راس‌های گراف را بپیماید، مسیر فازی همیلتونی^۳ نامیده می‌شود.

تعریف ۷.۱.۳. دور C فازی نامیده می‌شود اگر شامل بیش‌تر از یک یال ضعیف باشد.

^۱Euler graphs

^۲Hamiltonian graphs

^۳Hamiltonian fuzzy path

تعریف ۸.۱.۳. در گراف فازی $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E}, W)$ ، یک دور فازی C که تمام رئوس گراف را شامل شود، دور فازی همیلتونی^۴ می‌نامند.

تعریف ۹.۱.۳. در گراف فازی \tilde{G} ، یک مدار فازی که تمام یال‌های گراف G را در خود داشته باشد، مدار فازی اویلری می‌نامند.

تعریف ۱۰.۱.۳. گراف فازی همیلتونی: گرافی فازی که در آن دور فازی همیلتونی وجود داشته باشد، گراف فازی همیلتونی نامیده می‌شود.

تعریف ۱۱.۱.۳. گراف فازی اویلری: گرافی فازی که در آن مدار فازی اویلری وجود داشته باشد، گراف فازی اویلری نامیده می‌شود.

ملاحظه ۱۲.۱.۳. در بررسی مسایل این فصل، مدل گراف اویلری و همیلتونی به صورت $\tilde{G} = (V, E, \tilde{W})$ ، مورد بررسی قرار می‌گیرد یعنی ساختار گراف اویلری و همیلتونی قطعی است اما برای وزن یال‌ها، اعداد فازی نسبت داده می‌شود.

مطالب این قسمت از مرجع [۱۰] استخراج شده است.

۱.۱.۳ بعضی از مدل گراف‌های اویلری و همیلتونی

در این فصل، مدلی از گراف‌های اویلری به نام مدل پستچی چینی^۵ و مدلی از گراف‌های همیلتونی به نام مدل فروشنده‌ی دوره‌گرد^۶ به شرح زیر مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۲.۱.۳ بررسی مدل‌ها

مدل پستچی چینی

مدل پستچی چینی نخستین بار از سوی ریاضیدانان چینی مطرح شد. شرح این مدل به صورت زیر می‌باشد:

یک پستچی می‌خواهد تمامی نامه‌ها را به مقصد آن‌ها برساند. در حالی که مسافت طی شده کمینه باشد و بعد از پایان کار به نقطه آغاز برگردد. در این کار، باید هر خیابان را حداقل یک‌بار طی کند و اگر مجبور شود که از مسیری دوبار عبور کند، باید مسیری با کوتاهترین مسافت را انتخاب کند.

مدل گرافی پستچی چینی به صورت زیر قابل بیان می‌باشد:

گراف وزن‌داری را در نظر بگیرید. در این گراف، راس‌ها متناظر با مقاصد نامه‌ها و یال‌ها، متناظر با مسیرهای بین این مقاصد است و وزن هر یال نیز متناظر با فاصله بین مقاصد است.

در یک مدل گراف وزن‌دار، وزن گشت $v_0 e_1 v_1 \dots e_n v_n$ به صورت $\sum_{(v_i, v_j) \in E} w(v_i, v_j)$ تعریف می‌شود. به وضوح، مدل پستچی چینی دقیقاً یافتن گشتی با مینیمم وزن یال‌ها، در گراف همبند وزن‌دار با وزن‌های

^۴Hamiltonian fuzzy cycle

^۵Chinese postman

^۶Travelling salesman problem(TSP)

نامنفی است که به چنین گشتی به عنوان یک گشت اپتیمال^۷ اشاره خواهد شد^۸، بنابراین مدل پستیچی چینی از جمله مدل‌هایی می‌باشد که به صورت یالی مدل‌سازی شده و با مدل گراف‌های اویلری توصیف خواهد شد. با در نظر گرفتن وزن یال‌ها با اعداد فازی، مدل در محیط فازی بررسی می‌شود.

اگر مدل گراف G ، مدل اویلری باشد، آنگاه هر مدار اویلری گراف G ، گشت اپتیمال مورد نظر است زیرا یک مدار اویلری، مداری است که تمام یال‌های گراف G را در خود دارد. مساله‌ی پستیچی چینی به راحتی در این حالت حل می‌شود، زیرا الگوریتم خوبی به نام فلوری برای تعیین مدار اویلری در یک مدل گراف اویلری وجود دارد.

اگر مدل گراف G اویلری نباشد، آنگاه هر گشت در گراف G ، بخصوص یک گشت اپتیمال در G ، بعضی از یال‌ها را بیش از یک بار طی می‌کند. در این مرحله برای آن یال‌هایی که بیش از یک بار پیموده شده‌اند عمل دوگانه‌سازی یال‌ها^۹ انجام می‌گیرد. با این کار گشت G که در آن یال e ، x_e بار بیشتر پیموده شده است متناظر با مداری اویلری در مدل گراف حاصل از G می‌باشد که به وسیله‌ی دوگانه‌سازی e ، به تعداد x_e بار، به وجود آمده است. بنابراین دوباره مدل گراف حاصل، اویلری است و شرایط قبلی را خواهیم داشت.

مدل فروشنده‌ی دوره‌گرد

مدل فروشنده‌ی دوره‌گرد مدلی مشهور است که شرح آن به صورت زیر می‌باشد:

تعدادی شهر وجود دارد و فروشنده‌ی دوره‌گردی می‌خواهد از تمامی این شهرها دیدن کند و سپس به نقطه‌ی شروعش برگردد. در صورتی که زمان‌های مسافت بین شهرها داده شده باشد، چطور او مسیرش را طراحی کند که از هر شهر دقیقاً یک بار عبور کند و کوتاهترین زمان ممکن را برای کل مسافت صرف کند؟

تعداد کل راه‌حل‌ها برابر $(n-1)!$ برای $n > 2$ می‌باشد که n تعداد شهرها است. در واقع این عدد برابر تعداد دوره‌های همیلتونی در گرافی کامل با n راس است.

مدل گرافی فروشنده‌ی دوره‌گرد به این صورت است که فرض کنید گراف G داده شده باشد و به یال‌های آن توسط تابع $w: E(G) \rightarrow \mathbb{R}$ وزن نسبت داده شده باشد. هدف پیدا کردن دوری همیلتونی در این مدل گراف است که مجموع یال‌های آن، مینیمم وزن را داشته باشند. بنابراین مدل فروشنده‌ی دوره‌گرد از جمله مدل‌های گرافی است که به صورت راسی مدل‌سازی شده و با مدل گراف‌های همیلتونی توصیف خواهد شد. با در نظر گرفتن وزن یال‌ها با اعداد فازی، به بررسی مدل در محیط فازی خواهیم پرداخت.

^۷optimal

^۸اپتیمال بودن در اینجا به معنای مینیمم‌سازی است.
^۹ دوگانه‌سازی یال: یک یال e را دوگانه می‌نامند وقتی که دو انتهایش به وسیله‌ی یال جدیدی به وزن $w(e)$ به هم متصل شوند.

۳.۱.۳ روش حل مدل‌ها

حال مدل پستچی چینی و فروشنده‌ی دوره‌گرد را که بیان شد، با دو روش برنامه‌ریزی خطی و روش الگوریتمی حل می‌نماییم. ابتدا به شرح روش‌ها در مدل پستچی چینی و سپس در مدل فروشنده‌ی دوره‌گرد می‌پردازیم.

(۱) روش برنامه‌ریزی خطی قطعی مربوط به مدل پستچی چینی

در این قسمت سعی می‌شود روش برنامه‌ریزی خطی قطعی مدل پستچی چینی بیان شود. یادآوری می‌شود که اگر مدل گراف G اویلری نباشد، گراف G^* جدیدی که در آن یال چندگانه وجود دارد را از روی مدل گراف G که در آن یال e ، x_e بار بیشتر پیموده می‌شود می‌سازیم.

در این مدل فرض می‌کنیم طول هر یال را با $w_e(w_{(i,j)})$ نمایش داده و همچنین فرض می‌کنیم $1+x_e$ تعداد دفعاتی باشد که یال e در گراف G^* وجود دارد، در این مدل باید مشخص شود که در طول چه یال‌هایی و چند بار حرکت شود تا مجموع وزن مسیر پیموده شده مینیمم گردد، بنابراین روش برنامه‌ریزی خطی مدل در حالت قطعی به صورت رابطه‌ی (۱.۳) خواهد بود [۵۳، ۱۸].

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad Z = \sum_{(i,j) \in E} w_{(i,j)} x_{(i,j)} \\ s.t. \\ \sum_{(i,j) \in E} x_{(i,j)} = \sum_{(j,i) \in E} x_{(j,i)} \quad \forall i \in V(G) \\ x_{(i,j)} \geq 1 \quad \forall (i,j) \in E \end{array} \right. \quad (1.3)$$

محدودیت اول ضمانت می‌کند که در مدار اویلری، تعداد یال‌هایی که در هر راس پیموده می‌شوند، زوج است و محدودیت دوم ضمانت می‌کند که یال بین هر دو راس از گراف، حداقل یک بار پیموده می‌شود. زمانی که x_e بیشتر از یک باشد، بین آن دو راس یال چندگانه وجود دارد.

در این مدل، پستچی مایل است که کمترین مسیر را بییماید اما شرایطی مانند وضعیت کیفی جاده، آب و هوا، ترافیک جاده، از جمله‌ی عواملی هستند که بر حرکت او تاثیر می‌گذارند که مقدار دقیق مسافت به این دلایل، به صورت دقیق مشخص نخواهد بود، بنابراین استفاده از روش برنامه‌ریزی خطی قطعی در اینجا مناسب نخواهد بود و بهتر است از روش برنامه‌ریزی خطی در محیط فازی استفاده کنیم. برنامه‌ریزی خطی فازی مدل به صورت رابطه‌ی (۲.۳) است.

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad \tilde{Z} = \sum_{(i,j) \in E} \tilde{w}_{(i,j)} x_{(i,j)} \\ s.t. \\ \sum_{(i,j) \in E} x_{(i,j)} = \sum_{(j,i) \in E} x_{(j,i)} \quad \forall i \in V(G) \\ x_{(i,j)} \geq 1 \quad \forall (i,j) \in E \end{array} \right. \quad (2.3)$$

(۲) روش الگوریتمی مربوط به مدل پستچی چینی

- در گام اول باید اویلری بودن مدل گراف بررسی شود.
 - در گام دوم اگر مدل گراف اویلری باشد از الگوریتم فلوری که در مطالب بعدی بیان شده است استفاده می‌شود، اگر مدل گراف اویلری نباشد و دارای راس فرد باشد به صورت زیر عمل خواهد شد:
- می‌دانیم تعداد رئوس فرد در هر گراف دوری، زوج است، یک افزاز دوتایی به صورت زیر انتخاب می‌شود:

$$T_j = \{(V_{j1}, V_{j2}), (V_{j1}, V_{j3}), (V_{j1}, V_{j4}), \dots, (V_{j1}, V_{j2})\}$$

$$M_{\pi\alpha} = \sum_{j=1}^k d(V_{j1}, V_{j2})$$

که $d(V_{j1}, V_{j2})$ فاصله‌ی بین راس V_{j1}, V_{j2} را بیان می‌کند. حال افزازی مانند π را پیدا کنید که در آن $M_{\pi} = \min M_{\pi\alpha}$ باشد، آنگاه تمام یال‌های کوتاهترین مسیر (کوتاهترین مسیر را با استفاده از الگوریتم دیکسترا^{۱۰} که در ۳.۱.۲ آورده شد، به دست آورید) را دوگان‌سازی کنید، سپس در گراف چندگانه‌ی نتیجه شده با استفاده از الگوریتم فلوری، مدار اویلری را به دست آورید.

الگوریتم فلوری:

(۱) از راس دلخواه v_0 شروع کنید و مجموع یال‌های مدار اویلری را در $w = \emptyset$ در نظر بگیرید و قرار دهید $k = 0$.

(۲) از گراف $G_k = G - w$ یال متصل به v_k مانند e_k را به صورت زیر انتخاب کنید:

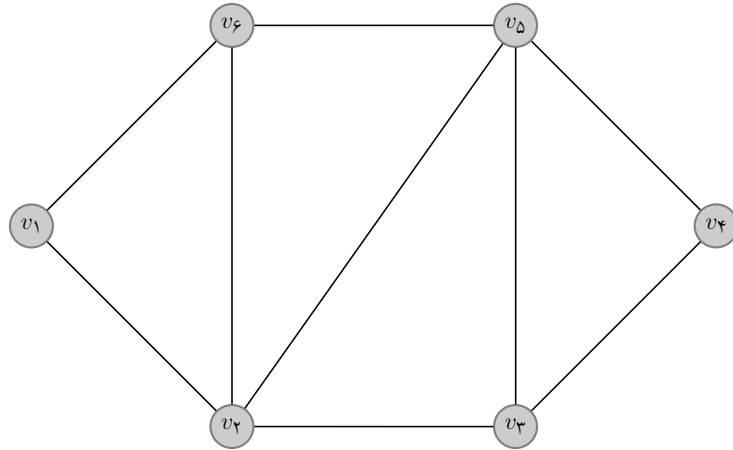
- این یال از v_k بگذرد.
- در صورت امکان این یال، یال برشی از G_k نباشد. (اگر تمام یال‌های متصل به v_k در G_k برشی باشد یکی را به دلخواه انتخاب کنید.)

(۳) w را به صورت زیر به روز رسانی کنید: $w = \{e_0, e_1, \dots, e_{k-1}\} \cup \{e_k\}$

(۴) اگر درجه‌ی راس انتهای e_k به جز v_k در $G - w$ صفر بود متوقف شوید، در غیر این صورت $k \leftarrow k + 1$ و به مرحله‌ی ۲ بروید.

در این قسمت مثالی از مدل پستیچی چینی در حالت فازی، بیان شده است و پس از آن با استفاده از الگوریتم دیکسترا و الگوریتم فلوری، مسیر بهینه مشخص گردیده است.

مثال ۱۳.۱.۳. فرض کنید گراف شکل ۱.۳ داده شده باشد [۵۵].



شکل ۱.۳: گراف مثال ۱۳.۱.۳

جدول ۱.۳: جدول مربوط به مقادیر فازی گراف ۱.۳

\tilde{c}_{ij}	(a, b, c)	\tilde{c}_{ij}	(a, b, c)
$\tilde{c}_{۱۲}$	$(۱, ۲, ۳)$	$\tilde{c}_{۳۴}$	$(۲, ۳, ۴)$
$\tilde{c}_{۱۶}$	$(۰, ۱, ۲)$	$\tilde{c}_{۳۵}$	$(۱/۵, ۲/۵, ۳/۵)$
$\tilde{c}_{۲۳}$	$(۱, ۲/۵, ۴)$	$\tilde{c}_{۴۵}$	$(۱, ۲, ۳)$
$\tilde{c}_{۲۵}$	$(۱, ۲, ۳)$	$\tilde{c}_{۵۶}$	$(۲, ۳, ۴)$
$\tilde{c}_{۲۶}$	$(۱, ۳, ۵)$	-	-

و مقادیر فازی یال‌ها نیز در جدول ۱.۳ آمده است.

گام‌های زیر را برای به دست آوردن مسیر بهینه می‌پیماییم:

گام ۱: ابتدا با استفاده از تابع رتبه‌بندی، مقدار قطعی یال‌ها را به دست می‌آوریم.

گام ۲: با استفاده از الگوریتم دیکسترا، الگوریتم فلوری و همچنین توضیحاتی که در ۳.۱.۳ داده شد، مسیر بهینه را به دست می‌آوریم.

حال در مورد مثال بالا با استفاده از تابع رتبه‌بندی یاگر که در (۴.۲) گفته شد، مقادیر قطعی یال‌ها مطابق جدول ۲.۳ به دست می‌آید.

جدول ۲.۳: مقادیر قطعی جدول ۱.۳

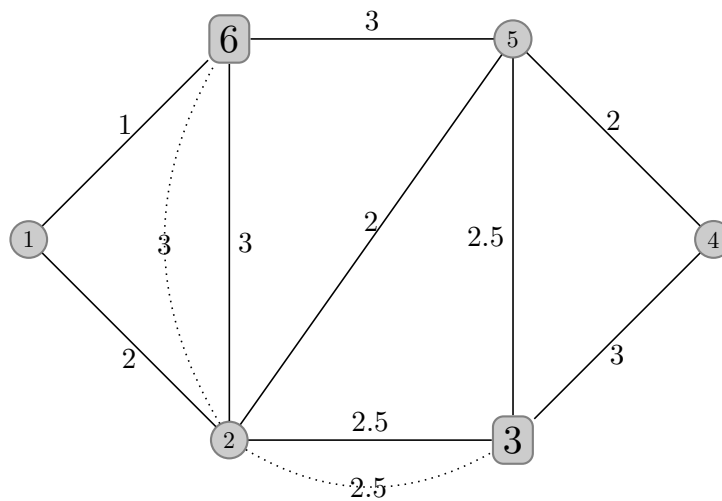
c_{ij}	$Y(\tilde{c}_{ij})$	c_{ij}	$Y(\tilde{c}_{ij})$	c_{ij}	$Y(\tilde{c}_{ij})$	c_{ij}	$Y(\tilde{c}_{ij})$	c_{ij}	$Y(\tilde{c}_{ij})$
$c_{۲۶}$	۳	$c_{۱۶}$	۱	$c_{۳۵}$	۲.۵	$c_{۱۲}$	۲	$c_{۳۴}$	۳
-	-	$c_{۲۵}$	۲	$c_{۵۶}$	۳	$c_{۲۳}$	۲.۵	$c_{۴۵}$	۲

در گراف شکل ۱.۳ دو رأس ۳ و ۶ از درجه‌ی فرد هستند، ابتدا کوتاهترین مسیر بین دو رأس ۳ و ۶ را به کمک الگوریتم دیکسترا پیدا کرده و سپس مطابق شکل ۲.۳، به دوگانه‌سازی یال کوتاهترین مسیر بین این دو رأس می‌پردازیم. پس از این، چون مدل گراف حاصل شده اویلری است، به راحتی به کمک الگوریتم فلوری، مدار اویلری

$$v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_6 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3 \rightarrow v_2 \rightarrow v_5 \rightarrow v_3 \rightarrow v_4 \rightarrow v_5 \rightarrow v_6 \rightarrow v_1$$

که همان مسیر بهینه است به دست می‌آید، طول این مسیر برابر است با:

$$2 + (2 * 3) + (2 * 2.5) + 2 + 2.5 + 3 + 2 + 3 + 1 = 26.5$$



شکل ۲.۳: گراف شکل ۱.۳ پس از دوگانه‌سازی یال

حال به حل مدل فروشنده‌ی دوره‌گرد می‌پردازیم [۴۵].

(۱) روش برنامه‌ریزی خطی قطعی مدل فروشنده‌ی دوره‌گرد

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min & Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w(i,j)x(i,j) \\ \text{s.t.} & \\ & \sum_{i=1}^n x(i,j) = 1 \quad ; j = 1, 2, \dots, n \\ & \sum_{j=1}^n x(i,j) = 1 \quad ; i = 1, 2, \dots, n \\ & \sum_{i,j \in S} x(i,j) \leq |S| - 1 \quad ; \forall S \subset \{1, 2, \dots, n\} \\ & x(i,j) \in \{0, 1\} \end{array} \right.$$

در مدل‌سازی بالا، محدودیت اول ضمانت می‌کند تعداد یال‌هایی که به رأس j می‌آیند دقیقاً یک یال است و محدودیت دوم ضمانت می‌کند، از هر رأس i تنها یک یال باید خارج شود، دو

محدودیت اول ضمانت می‌کنند که برای هر راس، دو یال مجاور وجود دارد. این دو محدودیت اول از وجود دورهای غیرهمیلتونی (دورهایی که تمام رئوس را شامل نمی‌شود) جلوگیری نمی‌کنند و لازم است که محدودیت دیگری نیز به محدودیت‌ها اضافه شود که از وجود دورهای غیرهمیلتونی جلوگیری کند، با اضافه کردن محدودیت سوم، به ازای هر دور غیرهمیلتونی S ، از وجود دورهای غیرهمیلتونی جلوگیری می‌شود، محدودیت چهارم نیز بیان می‌کند که اگر یال (i, j) در دور وجود داشته باشد، مقدار یک و اگر وجود نداشته باشد، مقدار صفر به یال نسبت داده می‌شود.

در این قسمت روش برنامه‌ریزی خطی مدل فروشنده‌ی دوره‌گرد در محیط فازی بیان خواهد شد. در موقعیت‌های زندگی واقعی، ممکن است شرایط آب و هوایی، ترافیک جاده‌ها، هزینه‌هایی که در مسیر حرکت وجود دارد و عواملی از این قبیل، بر زمان مسافرت فروشنده تاثیر بگذارد، این شرایط مدام در حال تغییر است و مقدار دقیق و قطعی برای آن‌ها قابل بیان نیست، پس بهتر است که زمان مسافرت بین شهرها به صورت عددی فازی بیان شود.

روش برنامه‌ریزی خطی فازی مربوط به مدل فروشنده‌ی دوره‌گرد

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad \tilde{Z} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \tilde{w}(i, j) \cdot x(i, j) \\ s.t. \\ \sum_{i=1}^n x(i, j) = 1 \quad ; j = 1, 2, \dots, n \\ \sum_{j=1}^n x(i, j) = 1 \quad ; i = 1, 2, \dots, n \\ \sum_{i, j \in S} x(i, j) \leq |S| - 1 \quad ; \forall S \subset \{1, 2, \dots, n\} \\ x(i, j) \in \{0, 1\} \end{array} \right.$$

در این قسمت روشی الگوریتمی به نام الگوریتم مجارستانی^{۱۱} بیان می‌شود که مدل فروشنده‌ی دوره‌گرد را با استفاده از آن حل کرده و جواب بهینه‌ای برای آن به دست می‌آورد [۱۶]. زمان‌هایی که برای جابجایی بین n شهر وجود دارد را در ماتریسی $n \times n$ نمایش داده، بنابراین روش الگوریتمی به صورت زیر بیان می‌شود.

(۲) روش الگوریتمی مربوط به مدل فروشنده‌ی دوره‌گرد

گام ۱: مینیمم هر سطر از ماتریس را از عناصر فازی مربوط به آن سطر کم کنید.

گام ۲: ماتریس نتیجه شده را به صورت زیر اصلاح کنید، مینیمم هر ستون را از عناصر فازی آن ستون کم کنید.

گام ۳: کمترین تعداد خطوط افقی و عمودی ای را رسم کنید که عنصرهای صفر فازی در ماتریس نتیجه شده را بپوشاند، در اینجا دو حالت اتفاق می‌افتد:

^{۱۱}Hungarian algorithm

۱. اگر تعداد خطوط رسم شده برابر تعداد سطرها (تعداد سطرها و ستون‌ها برابر است) باشد، آنگاه می‌توانید یک تخصیص بهینه داشته باشید و به گام ۶ بروید.

۲. اگر تعداد خطوط رسم شده، کمتر از تعداد سطرها باشد، به گام ۴ بروید.

گام ۴: کوچکترین عنصر فازی در ماتریس که توسط خطوط پوشیده نشده است را تعیین کنید، سپس آن را از همه‌ی عناصری که توسط خطوط پوشیده نشده کم کنید و به تمام عناصری که در تقاطع خطوط افقی و عمودی هستند اضافه نمایید، بنابراین ماتریس اصلاح شده‌ی دیگری به دست می‌آید.

گام ۵: گام ۳ و گام ۴ را تا زمانی که مینیمم تعداد خطوط برابر تعداد سطرها شود تکرار کنید.

گام ۶: در سطرها پی در پی حرکت کنید تا عنصر صفر فازی را پیدا کنید، آن را برای تخصیص علامت‌گذاری کنید، سپس تمام صفرهای فازی دیگری را که در ستون مربوط هستند بپوشانید تا در تخصیص بعدی بررسی نشوند، در واقع باید به‌گونه‌ای انتخاب شود که در هر سطر یا ستون فقط یک عنصر صفر فازی انتخاب شده باشد.

گام ۷: گام ۶ را پی در پی برای تمام سطرها انجام دهید تا زمانی که هیچ صفر فازی علامت‌گذاری نشده‌ای باقی نماند. توجه کنید در هر سطر یا ستون اگر بیش از یک عنصر صفر فازی وجود داشته باشد به دلخواه یکی را انتخاب کنید اما باید توجه داشته باشید که همچنان در هر سطر یا ستون، فقط یک عنصر فازی وجود داشته باشد.

گام ۸: دقیقاً یک عنصر فازی علامت‌گذاری شده در هر سطر و هر ستون از ماتریس هزینه‌های فازی به دست می‌آید. تخصیصی که نظیر صفرهای فازی علامت‌گذاری شده است، تخصیص بهینه را می‌دهد.

پس از اجرای الگوریتم و به دست آوردن تخصیص بهینه باید بررسی شود که آیا حل به دست آمده، شرایط دور همیلتونی را ضمانت می‌کند یا نه. اگر اینگونه نبود تخصیص را اصلاح کنید و تخصیص با مینیمم افزایش هزینه را انتخاب کنید.

در اینجا با ذکر یک مثال، الگوریتم مجارستانی، برای به دست آوردن جواب بهینه‌ی مدل فروشنده‌ی دوره‌گرد شرح داده می‌شود.

مثال ۱۴.۱.۳. فرض کنید ۴ شهر وجود دارد و زمان جابجایی بین هر دو شهر مطابق ماتریس زیر آمده است، در ماتریس زیر زمان جابجایی بین دو شهر با اعداد فازی مثلی نمایش داده شده است.

$$\tilde{t}_{ij} = \begin{pmatrix} \infty & (20, 5, 4) & (15, 5, 5) & (11, 3, 2) \\ (20, 5, 4) & \infty & (30, 5, 3) & (10, 3, 3) \\ (15, 5, 5) & (30, 5, 3) & \infty & (20, 10, 8) \\ (11, 3, 2) & (11, 3, 2) & (20, 10, 2) & \infty \end{pmatrix}$$

حال مطابق الگوریتم مجارستانی به حل مثال پرداخته می‌شود. در همه‌ی مراحل جایی که نیاز است به مقایسه‌ی اعداد پرداخته شود، از (۷.۲) استفاده می‌شود.

حل:

پس از انجام دادن گام ۱ ماتریس زیر به دست می‌آید:

$$\tilde{t}_{ij} = \begin{pmatrix} \infty & (9, 2, 2) & (4, 2, 3) & (0, 0, 0) \\ (10, 2, 1) & \infty & (20, 2, 0) & (0, 0, 0) \\ (0, 0, 0) & (15, 0, -2) & \infty & (5, 5, -3) \\ (0, 0, 0) & (0, 0, 0) & (9, 7, 0) & \infty \end{pmatrix}$$

با پیمودن گام ۲ ماتریس زیر را خواهیم داشت:

$$\tilde{t}_{ij} = \begin{pmatrix} \infty & (9, 2, 2) & (0, 0, 0) & (0, 0, 0) \\ (10, 2, 1) & \infty & (16, 0, -3) & (0, 0, 0) \\ (0, 0, 0) & (15, 0, -2) & \infty & (5, 5, -3) \\ (0, 0, 0) & (0, 0, 0) & (5, 5, -3) & \infty \end{pmatrix}$$

با انجام دادن گام ۳ خواهیم دید که مینیمم تعداد خطوط برابر برابر تعداد سطرها است، بنابراین به گام ۶ رفته و صفرهای فازی را علامت‌گذاری کرده و با توجه به گام ۶ و گام ۷ تخصیص نسبت داده می‌شود. بنابراین تخصیص به صورت زیر است:

$$\tilde{t}_{ij} = \begin{pmatrix} \infty & (9, 2, 2) & \underline{(0, 0, 0)} & (0, 0, 0) \\ (10, 2, 1) & \infty & (16, 0, -3) & \underline{(0, 0, 0)} \\ \underline{(0, 0, 0)} & (15, 0, -2) & \infty & (5, 5, -3) \\ (0, 0, 0) & \underline{(0, 0, 0)} & (5, 5, -3) & \infty \end{pmatrix}$$

حال پس از اتمام الگوریتم باید بررسی شود آیا تخصیص بالا، دوری همیلتونی به ازای تمام رئوس گراف می‌دهد یا نه. با نوشتن تخصیص‌ها به صورت پی در پی داریم: $A \rightarrow C \rightarrow A$ و $B \rightarrow D \rightarrow B$. بنابراین دوری همیلتونی با این تخصیص وجود ندارد پس تخصیص بهینه‌ی دیگری باید صورت بگیرد. تخصیص بهینه‌ی دیگری با مینیمم افزایش در مقادیر هزینه را انتخاب کنید و توجه داشته باشید که همچنان در هر سطر یا ستون، فقط به یک عنصر تخصیص تعلق گیرد، بنابراین تخصیص زیر را خواهیم داشت:

$$\tilde{t}_{ij} = \begin{pmatrix} \infty & (9, 2, 2) & \underline{(0, 0, 0)} & (0, 0, 0) \\ (10, 2, 1) & \infty & (16, 0, -3) & \underline{(0, 0, 0)} \\ (0, 0, 0) & \underline{(15, 0, -2)} & \infty & (5, 5, -3) \\ \underline{(0, 0, 0)} & (0, 0, 0) & (5, 5, -3) & \infty \end{pmatrix}$$

با نوشتن تخصیص‌ها به صورت پی در پی داریم: $A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow A$ که مشاهده می‌شود این تخصیص، دوری همیلتونی می‌دهد. بنابراین مقدار تابع هدف به ازای این تخصیص برابر است با:

$$(15, 5, 5) + (10, 3, 3) + (30, 5, 3) + (11, 3, 2) = (66, 16, 13)$$

بهترین تخصیص بعدی به صورت زیر است:

$$\tilde{t}_{ij} = \begin{pmatrix} \infty & (9, 2, 2) & (0, 0, 0) & (0, 0, 0) \\ (10, 2, 1) & \infty & (16, 0, -3) & (0, 0, 0) \\ (0, 0, 0) & (15, 0, -2) & \infty & (5, 5, -3) \\ (0, 0, 0) & (0, 0, 0) & (5, 5, -3) & \infty \end{pmatrix}$$

با نوشتن پی در پی تخصیص‌ها داریم: $A \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$ این تخصیص نیز دوری همیلتونی می‌دهد، بنابراین مقدار تابع هدف به ازای این تخصیص برابر است با:

$$(15, 5, 5) \oplus (10, 3, 3) \oplus (15, 5, 5) \oplus (11, 3, 2) = (51, 16, 15).$$

با استفاده از رابطه‌ی (۷.۲)، مقدار تابع هدف در تخصیص دومی کمتر از مقدار تابع هدف در تخصیص اولی است بنابراین مسیر دوم، مسیر بهینه را می‌دهد.

مطالب این قسمت از مرجع [۵۱، ۳] استخراج شده است.

کاربردهای مدل پستی چینی

۱. تعیین مسیر حرکت ربات‌ها و روندهای خودکار
۲. تعیین مسیر خطکشی خیابان‌ها و شستشوی جدول‌های خیابان با ماشین
۳. تعیین مسیر ماشین‌های برف پاک کن
۴. تعیین مسیر حمل مصالح ساختمانی و سرویس‌های ایاب و ذهاب

کاربردهای مدل فروشنده‌ی دوره‌گرد

۱. طرح توزیع مواد غذایی مانند شیر، آرد، شکر، توزیع روزنامه، دارو، حمل مصالح ساختمانی و ...
۲. طرح جمع‌آوری زباله‌ها، نامه‌های پستی از صندوق‌های پست، صندوق‌های کمیته‌ی امام

فصل ۴

مدل فازی گراف‌ها در رنگ‌آمیزی راسی

۱.۴ تعاریف و مقدمات

مبحث رنگ‌آمیزی راسی بر روی تمام ساختار گراف‌ها قابل بررسی می‌باشد. در این فصل می‌توان از هر مدل گرافی استفاده کرد و به بررسی رنگ‌آمیزی راسی روی آن پرداخت. مطالب این قسمت از منبع [۱۰] استخراج شده است.

تعریف ۱.۱.۴. k -رنگ‌آمیزی راسی C : k -رنگ‌آمیزی راسی در گراف $G = (V, E)$ یک نگاشت $C: V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ است که در واقع این k -رنگ‌آمیزی راسی، تخصیص k رنگ به رئوس گراف G است.

تعریف ۲.۱.۴. رنگ‌آمیزی سره^۱: یک C رنگ‌آمیزی سره است اگر هیچ دو راس مجاور متمایز یک‌رنگ نباشند، به عبارتی برای هر $(x, y) \in E$ خواهیم داشت: $C(x) \neq C(y)$.

تعریف ۳.۱.۴. مجموعه‌ی مستقل^۲: زیرمجموعه‌ی S از V را یک مجموعه‌ی مستقل از G می‌نامند اگر هیچ دو راسی از S در G مجاور نباشند.

تعریف ۴.۱.۴. k -رنگ‌آمیزی راسی سره: k -رنگ‌آمیزی راسی بدون طوقه‌ی G ، افراز (V_1, V_2, \dots, V_k) از V به k مجموعه‌ی مستقل است.

تعریف ۵.۱.۴. k -رنگ‌پذیر راسی: گراف G ، k -رنگ‌پذیر راسی است اگر G دارای k -رنگ‌آمیزی راسی سره باشد.

ملاحظه ۶.۱.۴. از این به بعد، ((رنگ‌آمیزی راسی سره))، را به صورت ساده، رنگ‌آمیزی و (k) -رنگ‌آمیزی راسی سره)) را k -رنگ‌آمیزی و k -رنگ‌پذیر راسی را k -رنگ‌پذیر می‌نامیم.

^۱proper

^۲independent set

ملاحظه ۷.۱.۴. گراف k رنگ‌پذیر است اگر و تنها اگر گراف ساده‌ی زمینه‌ی آن k رنگ‌پذیر باشد.

تعریف ۸.۱.۴. دسته‌ی رنگی: هر k -رنگ‌آمیزی به صورت افراز $\{V_1, \dots, V_k\}$ از V می‌باشد که V_i مجموعه‌ی رئوسی است که رنگ i به آن تخصیص یافته است. مجموعه‌های V_i دسته‌های رنگی^۳ رنگ‌آمیزی نامیده می‌شوند.

ملاحظه ۹.۱.۴. هر دسته‌ی رنگی یک مجموعه‌ی مستقل را تشکیل می‌دهد.

تعریف ۱۰.۱.۴. عدد رنگی: مینیمم مقدار k ای که برای آن G ، k -رنگ‌پذیر باشد عدد رنگی گراف نامیده شده و با $\chi(G)$ نمایش داده می‌شود.

تعریف ۱۱.۱.۴. گراف k -رنگی: گراف G گرافی k -رنگی است اگر $\chi(G) = k$ باشد.

قضیه ۱۲.۱.۴. برای هر گراف G ،

$$\chi(G) \leq \Delta + 1.$$

ملاحظه ۱۳.۱.۴. مدل گراف‌های مورد بررسی در رنگ‌آمیزی راسی، به صورت مدل راسی که در فصل ۱ بیان شد، مدل‌سازی شده است.

ملاحظه ۱۴.۱.۴. در بررسی مسایل این فصل، مدل گراف به صورت $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E}, W)$ ، مورد بررسی قرار می‌گیرد، یعنی ساختار گراف مورد بررسی، فازی است.

مطالب این قسمت از منبع [۳۲] استخراج شده است.

تعریف ۱۵.۱.۴. گراف زمینه‌ی گراف فازی: گراف قطعی زمینه‌ی \tilde{G} ، به صورت $G^* = (\delta^*, \mu^*)$ تعریف می‌شود که

$$\delta^* = \{u \in V : \delta(u) > 0\}$$

و

$$\mu^* = \{(u, v) \in V \times V : \mu(u, v) > 0\}$$

تعریف ۱۶.۱.۴. مجموعه‌ی سطح δ : مجموعه‌ی سطح از مجموعه‌ی فازی δ به صورت

$$L_\delta = \{\alpha | \delta(u) = \alpha \quad ; u \in \delta^*\}$$

بیان می‌شود.

تعریف ۱۷.۱.۴. مجموعه‌ی سطح μ : مجموعه‌ی سطح از مجموعه‌ی فازی μ به صورت

$$L_\mu = \{\alpha | \mu(u, v) = \alpha \quad ; (u, v) \in \mu^*\}$$

بیان می‌شود.

قرارداد ۱۸.۱.۴. با توجه به تعریف ۱۶.۱.۴ و ۱۷.۱.۴، $L = L_\delta \cup L_\mu$ در نظر گرفته می‌شود.

^۳colour classes

تعریف ۱۹.۱.۴. گراف G_α : به ازای هر $\alpha \in L$ ، گراف قطعی G_α به صورت $G_\alpha = (\delta_\alpha, \mu_\alpha)$ تعریف می‌شود که

$$\delta_\alpha = \{u \in V \mid \delta(u) \geq \alpha\} \quad \text{و} \quad \mu_\alpha = \{(u, v) \in V \times V \mid \mu(u, v) \geq \alpha\}.$$

قرارداد ۲۰.۱.۴. عدد رنگی G_α به صورت $\chi(G_\alpha)$ نمایش داده می‌شود و به صورت اختصار می‌نویسیم $\cdot \chi_\alpha$

تعریف ۲۱.۱.۴. رنگ‌آمیزی فازی: رنگ‌آمیزی فازی گراف‌های فازی به صورت زیر خواهد بود که خانواده‌ی $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k\}$ از مجموعه‌های فازی روی مجموعه‌ی V ، یک k -رنگ‌آمیزی فازی از گراف $\tilde{G} = (V, \delta, \mu)$ نامیده می‌شود اگر شرایط زیر برقرار باشد:

$$\forall \gamma_i = \delta \quad (\text{الف})$$

$$\gamma_i \wedge \gamma_j = \circ \quad (\text{ب})$$

(ج) برای هر یال (x, y) در گراف فازی داشته باشیم: $\min\{\gamma_i(x), \gamma_i(y)\} = \circ$ که $1 \leq i \leq k$ می‌باشد

و $\gamma_j(u_i)$ به صورت رابطه‌ی (۱.۴) تعریف می‌شود.

$$\gamma_j(u_i) = \{(u_j, \delta(u_j))\} \cup \{(u_i, \delta(u_i)) \mid \mu(u_i, u_j) = \circ, i \neq j\} \quad (۱.۴)$$

ملاحظه ۲۲.۱.۴. هر یک از مجموعه‌های فازی $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$ از این به بعد یک دسته‌ی رنگی در نظر گرفته می‌شوند.

تعریف ۲۳.۱.۴. عدد رنگی فازی^۴: مینیمم تعداد k ای که یک k رنگ‌آمیزی فازی وجود داشته باشد، عدد رنگی فازی گراف \tilde{G} نامیده می‌شود و آن را با $\chi^f(\tilde{G})$ نمایش می‌دهند.

ملاحظه ۲۴.۱.۴. در آنچه که در تعریف ۲۱.۱.۴ آمد، قسمت (الف) بیان می‌کند، اجتماع رئوسی که در مجموعه‌های فازی $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k\}$ هستند، برابر کل رئوس مدل گراف فازی می‌شود، قسمت (ب) بیان می‌کند مینیمم هر دو مجموعه‌ی γ_i, γ_j برابر صفر است و قسمت (ج) بیان می‌کند، هیچ دو راس مجاوری، در یک مجموعه‌ی فازی γ_i قرار نمی‌گیرد.

تعریف ۲۵.۱.۴. عدد رنگی گراف فازی: عدد رنگی گراف فازی $\tilde{G} = (V, \delta, \mu)$ به صورت

$$\chi(\tilde{G}) = \max\{\chi_\alpha \mid \alpha \in L\}$$

تعریف می‌شود که طبق قرارداد ۲۰.۱.۴ داریم: $\chi_\alpha = \chi(G_\alpha)$.

ملاحظه ۲۶.۱.۴. اگر $\alpha_i < \alpha_j$ باشد، آنگاه $\chi_{\alpha_i} \geq \chi_{\alpha_j}$.

ملاحظه ۲۷.۱.۴. $\chi(G^*) = \chi(G_t)$ است به طوری که $t = \min\{\alpha \mid \alpha \in L\}$.

^۴fuzzy chromatic number

ملاحظه ۲۸.۱.۴. مجموعه‌ی δ_j^* مجموعه‌ای است که رئوس مجموعه‌ی فازی γ_j را در بردارد.

قضیه ۲۹.۱.۴. برای گراف فازی $\tilde{G} = (V, \delta, \mu)$ داریم: $\chi^f(\tilde{G}) = \chi(\tilde{G})$.

برهان. فرض کنید $\tilde{G} = (V, \delta, \mu)$ گراف فازی روی مجموعه‌ی رئوس $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ باشد و فرض کنید $\chi^f(\tilde{G}) = k$ باشد، بنا به تعریف ۲۱.۱.۴ و ۲۳.۱.۴ این معادل است با اینکه خانواده‌ی $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k\}$ که یک رنگ‌آمیزی فازی است وجود دارد، فرض کنید C_j رنگی است که به رئوس مجموعه‌ی

$$\gamma_j^* \quad , j = 1, 2, \dots, k$$

تخصیص یافته است، خانواده‌ی $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k\}$ خانواده‌ای از مجموعه‌های فازی است که مطابق تعریف ۲۱.۱.۴ رابطه‌ی (۲.۴) را داریم.

$$\gamma_j(u_i) = \{(u_j, \delta(u_j))\} \cup \{(u_i, \delta(u_i)) | \mu(u_i, u_j) = 0, i \neq j\} \quad (2.4)$$

مطابق قسمت (الف) تعریف ۲۱.۱.۴ رابطه‌ی (۳.۴) را داریم.

$$\bigcup_{j=1}^k \gamma_j^* = V \quad (3.4)$$

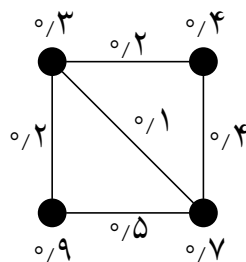
و بنا به قسمت (ب) تعریف ۲۱.۱.۴ رابطه‌ی (۴.۴) را داریم.

$$\gamma_i^* \cap \gamma_j^* = \emptyset \quad (4.4)$$

از این دو قسمت نتیجه می‌شود که γ_j^* به ازای هر $j = 1, 2, \dots, k$ مجموعه‌ای مستقل از رئوس است، در نتیجه k تا مجموعه‌ی مستقل از رئوس وجود دارد که k رنگ به آن‌ها تخصیص می‌یابد، حال می‌توان نتیجه گرفت که عدد رنگی گراف زمینه‌ی G^* برابر k است، یعنی $\chi(G^*) = k$ ، از طرفی طبق ملاحظه ۲۷.۱.۴ داریم: $\chi(G_t) = \max\{\chi_\alpha | \alpha \in L\}$ درمی‌یابیم که: $\chi(G_t) = \chi(G^*) = k$ و طبق ملاحظه ۲۶.۱.۴ این طبق تعریف ۲۵.۱.۴ برابر $\chi(\tilde{G})$ است، بنابراین $\chi^f(\tilde{G}) = \chi(\tilde{G})$ است. \square

حال در اینجا مثالی بیان می‌شود که در آن عدد رنگی گرافی فازی به دست می‌آید.

مثال ۳۰.۱.۴. گراف فازی شکل ۱.۴ را در نظر بگیرید. عدد رنگی گراف فازی \tilde{G} را به دست آورید.



شکل ۱.۴: G

با توجه به قرارداد ۱۸.۱.۴ مجموعه‌ی $L = \{0/1, 0/2, 0/3, 0/4, 0/5, 0/7, 0/9\}$ می‌باشد، حال به ازای α ‌های مختلف، G_α ‌ها را به دست آورده و رئوس این گراف‌ها را با رنگ‌هایی که با اعداد مختلف نشان داده شده است، رنگ‌آمیزی کنید.

(۱)

شکل ۲.۴: $G_{\circ 8}$

(۱) (۱)

شکل ۳.۴: $G_{\circ 7}$

(۱) (۲)

شکل ۴.۴: $G_{\circ 5}$

با توجه به G_α های مختلف داریم:

$$\chi_{\circ 8} = \chi_{\circ 7} = 1 \quad \text{و} \quad \chi_{\circ 5} = \chi_{\circ 4} = \chi_{\circ 3} = \chi(G_{\circ 2}) = 2 \quad \text{و} \quad \chi_{\circ 1} = 3$$

از این رو :

$$\chi(G^*) = 3 = \max\{\chi_\alpha | \alpha \in L\} = \chi(\tilde{G})$$

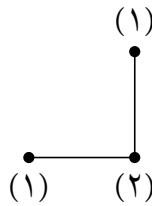
از طرفی باید خانواده‌ای از دسته‌های رنگی که مستقل از هم هستند و مجموعه‌ی رئوس را می‌پوشانند، به دست آید. پس با توجه به تعریف ۲۱.۱.۴ روابط (۵.۴) و (۶.۴) و (۸.۴) را داریم.

$$\gamma_1(u_i) = \begin{cases} \circ/3 & i = 1 \\ \circ & ow \end{cases} \quad (5.4)$$

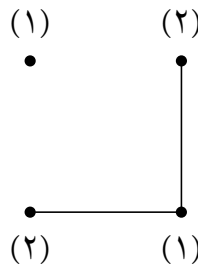
$$\gamma_2(u_i) = \begin{cases} \circ/9 & i = 2 \\ \circ/4 & i = 4 \\ \circ & ow \end{cases} \quad (6.4)$$

$$\gamma_3(u_i) = \begin{cases} \circ/7 & i = 3 \\ \circ & ow \end{cases} \quad (7.4)$$

که این دسته‌های رنگی تمام شرایط تعریف ۲۱.۱.۴ را برقرار می‌سازد، پس خانواده‌ای از دسته‌های رنگی به صورت $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ به دست آمد، بنابراین $\chi^f(\tilde{G}) = 3$.



شکل ۵.۴: $G_{۰.۴}$



شکل ۶.۴: $G_{۰.۳}$

حل مسایل بسیاری که از نظر عمل مورد توجه‌اند (از جمله انبارداری) مستلزم یافتن عدد رنگی گراف است. متأسفانه، روش الگوریتمی خوبی برای تعیین عدد رنگی شناخته نشده است. در این بخش روشی الگوریتمی شرح داده می‌شود که اساساً طبیعت شمارشی دارد. این روش برای مدل گراف‌های بزرگ، خیلی کارا نیست.

(۱) روش الگوریتمی برای تعیین عدد رنگی مدل گراف قطعی

فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف قطعی باشد و مجموعه‌ی رئوس G به صورت $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ و E مجموعه‌ی یال‌ها باشد، در این صورت مراحل الگوریتم در گام‌های ۱ تا ۸ بیان می‌شود.

(گام ۱) فرض کنید $k' = 0$.

(گام ۲) اگر $|V| = 0$ آنگاه $\chi(G) = 0$.

(گام ۳) خانواده‌ای از دسته‌های رنگی انتخاب کنید، یعنی $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}$ که

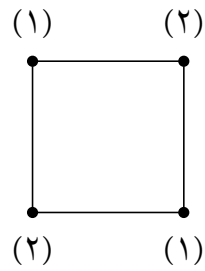
$$\gamma_j(u_i) = \{u_j\} \cup \{u_i | (u_i, u_j) \notin E, i \neq j\}$$

به طوری که $(u_i, u_m) \notin E, u_i, u_m \in \gamma_j, i \neq m$.

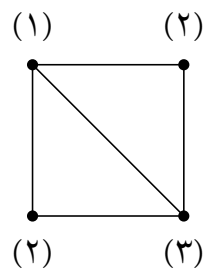
(گام ۴) اگر زیرخانواده‌ای مانند $\Gamma' = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k\}$ وجود داشته باشد به طوری که

$$\gamma_i \cap \gamma_j = \emptyset, i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, k$$

و $\sum_{j=1}^k |\gamma_j|$ ماکسیمم باشد، آنگاه $S = V - \cup_{j=1}^k \gamma_j$ در نظر بگیرید.



شکل ۷.۴: $G_{\circ, 2}$



شکل ۸.۴: $G_{\circ, 1}$

(گام ۵) اگر $|S| = \circ$ ، آنگاه اگر $k = 1$ باشد، داریم $\chi(G) = 1$ و رنگ C_j را به γ_j نسبت بدهید و به گام (۷) بروید و گرنه اگر $1 < k \leq n$ باشد، رنگ C_j را به γ_j تخصیص دهید و آنگاه $\chi(G) = k$ و به گام (۷) بروید.

(گام ۶) در صورتی که $|S| \neq \circ$ باشد، رنگ C_j را به $\gamma_j, j = 1, 2, \dots, k$ تخصیص دهید و آنگاه $\chi(G) = k$.

فرض کنید $k' = \chi(G) + k'$ ، قرار دهید $G = \langle S \rangle$ و به گام (۳) بروید.

(گام ۷) $\chi(G) = k + k'$.

(گام ۸) پایان.

تعمیم روش الگوریتمی قطعی برای گراف فازی

فرض کنید $\tilde{G} = (V, \delta, \mu)$ گرافی فازی باشد و مجموعه‌ی رئوس \tilde{G} به صورت $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ باشد، در این صورت مراحل الگوریتم در گام‌های (۱') تا گام (۸') آورده شده است.

(گام ۱') فرض کنید $k' = \circ$.

(گام ۲') اگر $|V| = \circ$ آنگاه $\chi(G) = \circ$.

(گام ۳') خانواده‌ای از دسته‌های رنگی انتخاب کنید، یعنی $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}$

که $\gamma_j(u_i) = \{(u_j, \delta(u_j))\} \cup \{(u_i, \delta(u_i)) \mid \mu(u_i, u_j) = \circ, i \neq j\}$

به طوری که $\mu(u_i, u_m) = \circ, u_i, u_m \in \gamma_j^*, i \neq m$.

(گام ۴) اگر زیرخانواده‌ای مانند $\Gamma' = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k\}$ وجود داشته باشد به طوری که

$$\gamma_i \wedge \gamma_j = \emptyset, i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, k$$

و $\sum_{j=1}^k |\gamma_j^*|$ ماکسیمم باشد، آنگاه $S = V - \cup_{j=1}^k \gamma_j^*$ در نظر بگیرید.

(گام ۵) اگر $|S| = \emptyset$ ، آنگاه اگر $k = 1$ باشد، داریم $\chi(\tilde{G}) = 1$ و رنگ C_j را به γ_j^* نسبت بدهید و به گام (۷) بروید و گرنه اگر $1 < k \leq n$ باشد، رنگ C_j را به γ_j^* تخصیص دهید و آنگاه $\chi(\tilde{G}) = k$ و به گام (۷) بروید.

(گام ۶) در صورتی که $|S| \neq \emptyset$ باشد، رنگ C_j را به $\gamma_j^*, j = 1, 2, \dots, k$ تخصیص دهید و آنگاه $\chi(\tilde{G}) = k$.

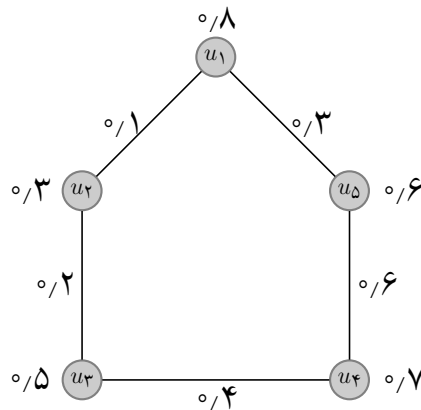
فرض کنید $k' = \chi(\tilde{G}) + k'$ ، قرار دهید $\tilde{G} = \langle S \rangle$ و به گام (۳) بروید.

$$\chi(\tilde{G}) = k + k' \quad (\text{گام } ۷)$$

(گام ۸) پایان.

در اینجا مثالی بیان می‌کنیم که با استفاده از الگوریتم بیان شده برای گراف فازی، عدد رنگی مربوط به آن به دست می‌آید.

مثال ۳۱.۱.۴. گراف فازی شکل ۹.۴ را در نظر بگیرید. عدد رنگی این گراف را به دست آورید.



شکل ۹.۴: \tilde{G}

مطابق الگوریتم پیش بروید، بنابراین: $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5\}$ را در نظر بگیرید، بنابراین می‌توان دسته‌های رنگی Γ را به صورت روابط (۸.۴) تا (۱۲.۴) نوشت.

$$\gamma_1(u_i) = \{(u_1, 0.8)\} \cup \{(u_4, 0.7)\} = \{(u_1, 0.8), (u_4, 0.7)\} \quad \text{و} \quad \gamma_1^* = \{u_1, u_4\} \quad (۸.۴)$$

$$\gamma_2(u_i) = \{(u_2, \circ/3)\} \cup \{(u_5, \circ/6)\} = \{(u_2, \circ/3), (u_5, \circ/6)\} \quad \text{و} \quad \gamma_2^* = \{u_2, u_5\} \quad (9.4)$$

$$\gamma_3(u_i) = \{(u_3, \circ/5)\} \cup \{(u_5, \circ/6)\} = \{(u_3, \circ/5), (u_5, \circ/6)\} \quad \text{و} \quad \gamma_3^* = \{u_3, u_5\} \quad (10.4)$$

$$\gamma_4(u_i) = \{(u_4, \circ/7)\} \cup \{(u_1, \circ/8)\} = \{(u_4, \circ/7), (u_1, \circ/8)\} \quad \text{و} \quad \gamma_4^* = \{u_4, u_1\} \quad (11.4)$$

$$\gamma_5(u_i) = \{(u_5, \circ/6)\} \cup \{(u_2, \circ/3)\} = \{(u_5, \circ/6), (u_2, \circ/3)\} \quad \text{و} \quad \gamma_5^* = \{u_5, u_2\} \quad (12.4)$$

زیرخانواده‌ای از Γ که $\gamma_i \wedge \gamma_j = \circ$ و $\sum_{j=1}^k \gamma_j^*$ ماکسیمم شود به صورت زیر می‌باشد:

رنگ C_1 و C_2 را به ترتیب به γ_1 و γ_2 تخصیص دهید، $\Gamma' = \{\gamma_1, \gamma_2\}$ بنابراین $S = \{u_3\}$. حال $\tilde{G} = \langle S \rangle = \langle u_3 \rangle$ قرار دهید، اما چون $|S| = 1$ بنابراین $\chi(\tilde{G}) = 2$ و بنابراین $k' = 2$. از این رو $\Gamma' = \{\gamma\}$ که $\gamma = \{(u_3, \circ/5)\}$ است، فقط یک تخصیص رنگ به $\tilde{G} = \langle S \rangle$ نیاز است، از این رو $\Gamma' = \{\gamma\}$ که $\gamma = \{(u_3, \circ/5)\}$ است، $\gamma^* = \{u_3\}$ و بنابراین رنگ C_3 را به γ^* تخصیص دهید و $\chi(\tilde{G}) = 1$ ، از این رو $k' = 2 + 1 = 3$ و عدد رنگی G به صورت $\chi(G) = 3$ می‌باشد.

در این قسمت، روش برنامه ریزی خطی برای حل مساله‌ی رنگ‌آمیزی راسی آورده شده است [۱۷، ۴۰]. در این روش، مینیمم تعداد رنگ‌هایی که رئوس گراف را رنگ‌آمیزی می‌کند تا راس‌های مجاور هم‌رنگ نباشند، به دست می‌آید.

(۲) روش برنامه‌ریزی خطی قطعی در حل مساله‌ی رنگ‌آمیزی راسی

فرض کنید مجموعه‌ی رنگ‌ها با C نمایش داده شود و رنگی که برای رئوس گراف استفاده می‌شود را با رنگ j نمایش می‌دهیم که $j \in C$.

در برنامه‌ریزی خطی مساله، متغیرها به صورت زیر تعریف می‌شوند:

- x_{ij} : اختصاص دادن رنگ j به راس i
- w_j : اگر رنگ j حداقل برای یک راس در رنگ‌آمیزی گراف تخصیص داده شود w_j مقدار یک وگرنه مقدار صفر می‌گیرد.

$$\begin{cases} \min & Z = \sum_{j \in C} w_j \\ \text{s.t.} & \\ & \sum_{j \in C} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in V(\tilde{G}) \\ & x_{uj} + x_{vj} \leq w_j \quad \forall (u, v) \in E(\tilde{G}), j \in C \\ & x_{ij} \in \{0, 1\} \\ & w_j \in \{0, 1\} \end{cases}$$

محدودیت اول ضمانت می‌کند که به هر راس، تنها یک رنگ اختصاص داده می‌شود. محدودیت دوم ضمانت می‌کند هر دو راس مجاور، هم‌رنگ نیستند. محدودیت سوم بیان می‌کند که اگر به راس i رنگ j نسبت داده شود x_{ij} مقدار یک وگرنه مقدار صفر می‌گیرد. محدودیت چهارم نیز بیان می‌کند اگر به راسی در گراف رنگ j تخصیص داده شود، w_j مقدار یک می‌گیرد و اگر در رنگ‌آمیزی راسی گراف، هیچ راسی با رنگ j رنگ‌آمیزی نشود، w_j مقدار صفر می‌گیرد.

۲.۴ کاربردهایی از رنگ‌آمیزی راسی

در این قسمت کاربردهایی از ساختار گراف‌ها را که با رنگ‌آمیزی راسی قابل توصیف هستند، خواهیم آورد. از جمله‌ی این کاربردها می‌توان مسایل زیر را نام برد:
مساله‌ی ضیافت^۵، مساله‌ی انبارداری^۶ و مساله‌ی تداخل فرکانس‌ها^۷.

۱.۲.۴ مساله‌ی ضیافت

منوی غذایی برای یک ضیافت شامل غذاهای پخته شده است که باید به موقع آماده شوند. هر غذای d باید در $m(d)$ دقیقه و در سطحی از دما (سطح دمایی ممکن است بالا، متوسط یا کم باشد) پخته شود. اگر تنها یک اجاق وجود داشته باشد، باید برنامه‌ی پخت غذاها بهینه شود به طوری که تعداد دفعات پخت غذا مینیمم گردد [۳۲].

ملاحظه ۱.۲.۴. تعداد غذاهای با سطح دمایی متفاوت معادل با تعداد دفعات استفاده از اجاق است.

مدل گرافی که برای این مساله در محیط قطعی در نظر می‌گیریم گراف قطعی ساده‌ای است که در آن رئوس گراف متناظر غذاها در نظر گرفته می‌شوند و آن دو راسی با هم مجاورند که سطح دمایی مشترکی نداشته باشند (و از این رو نمی‌توانند در زمان یکسانی روی اجاق باشند).

حال مدل گرافی مساله را در محیط فازی بیان می‌کنیم. مطابق مدل قطعی که بررسی کردیم، رئوس گراف را متناظر با غذاها در نظر گرفته و غذاهایی را با هم مجاور می‌کنیم که سطح دمایی مشترکی نداشته باشند، اما در بررسی مدل در محیط فازی برای مساله فرض خواهیم کرد که $\forall u_i \in V \quad \delta(u_i) = 1$ و $\mu(u_i, u_j)$ تخصیص درجه‌ی عضویتی به یال‌ها مطابق زیر باشد:

(۱) اگر راس u_i درجه‌ی دمایی بالایی داشته باشد و راس u_j درجه‌ی دمایی کمی داشته باشد، به $\mu(u_i, u_j)$ درجه‌ی عضویت بالایی نسبت داده می‌شود که این درجه‌ی عضویت، درجه‌ی ناسازگاری بین سطح دماهای رئوس را نشان می‌دهد.

(۲) اگر راس u_i درجه‌ی دمایی متوسطی داشته باشد و راس u_j درجه‌ی دمایی کمی داشته باشد، به $\mu(u_i, u_j)$ درجه‌ی عضویت متوسطی نسبت داده می‌شود.

^۵banquet problem

^۶storage problem

^۷frequency interference problem

(۳) اگر راس u_i درجه‌ی دمایی بالایی داشته باشد و راس u_j درجه‌ی دمایی متوسطی داشته باشد، به $\mu(u_i, u_j)$ مقداری کمتر از هر دو مورد قبل نسبت داده می‌شود.

بنابراین $\mu(u_i, u_j)$ درجه‌ی ناسازگاری بین غذاهای u_i و u_j را نمایش می‌دهد که در زمان یکسانی پخته نمی‌شوند. قرار است مینیمم تعداد دفعاتی که لازم است اجاق کار کند تا غذاها آماده شوند را به دست آوریم و این معادل به دست آوردن عدد رنگی گراف فازی G می‌باشد. در اینجا مثالی از مساله‌ی ضیافت را مورد بررسی قرار داده‌ایم.

مثال ۲.۲.۴. فرض کنید ۶ غذای پخته شده داریم که مجموعه‌ی این غذاها را با مجموعه‌ی رئوس

$$\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$$

نمایش می‌دهیم. سطح دمای غذاها مطابق زیر داده شده است:

$$u_1, u_4 \rightarrow \text{دمای بالا}$$

$$u_2, u_5 \rightarrow \text{دمای متوسط}$$

$$u_3, u_6 \rightarrow \text{دمای پایین}$$

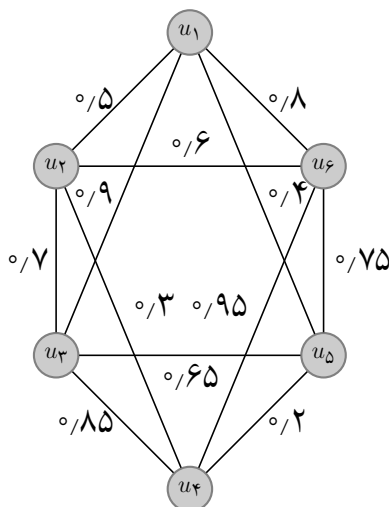
فرض کنید درجه‌ی عضویت یال‌ها مطابق رابطه‌ی (۱۳.۴) باشد.

$$\mu(u_1, u_2) = 0.5, \mu(u_1, u_5) = 0.4, \mu(u_2, u_4) = 0.3, \mu(u_1, u_6) = 0.8, \mu(u_4, u_5) = 0.2$$

$$\mu(u_1, u_3) = 0.9, \mu(u_3, u_5) = 0.65, \mu(u_4, u_3) = 0.85, \mu(u_4, u_6) = 0.95, \mu(u_2, u_3) = 0.7$$

$$\mu(u_2, u_6) = 0.6, \mu(u_6, u_5) = 0.75 \quad (13.4)$$

و مدل گراف فازی معادل آن به صورت شکل ۱۰.۴ است.



شکل ۱۰.۴: مدل گراف فازی متناظر مساله‌ی ضیافت

با توجه به مثال ۳۰.۱.۴ و روش الگوریتمی که اجرا شد، داریم:

$$\chi_{0,2} = \chi_{0,3} = \chi_{0,4} = \chi_{0,5} = 3$$

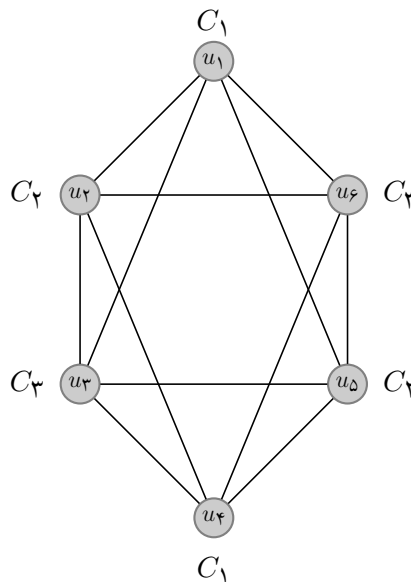
و

$$\chi_{0,6} = \chi_{0,65} = \chi_{0,8} = \chi_{0,9} = \chi_{0,85} = \chi_{0,75} = \chi_{0,85} = \chi_{0,7} = 2$$

از این رو $\chi(G) = 3$ و در واقع تعداد دفعات بهینه‌ای که اجاق برای پختن همه‌ی غذاها باید کار کند برابر ۳ به دست آمد. سه دسته رنگی متمایز به صورت زیر هستند:

$$\gamma_1 = \{u_1, u_4\}, \quad \gamma_2 = \{u_2, u_5\}, \quad \gamma_3 = \{u_3, u_6\}$$

و تخصیص رنگ‌ها می‌تواند به صورت شکل ۱۱.۴ باشد.



شکل ۱۱.۴: تخصیص رنگ‌ها به مدل گراف فازی ۱۰.۴

مساله‌ی زیر از منبع [۱۰] استخراج شده است.

۲.۲.۴ مساله‌ی انبارداری

یک شرکت، n ماده‌ی شیمیایی c_1, c_2, \dots, c_n را می‌سازد. جفت‌های معینی از این مواد شیمیایی ناسازگارند و اگر در تماس با هم باشند می‌توانند موجب انفجار شوند. شرکت به خاطر پیش‌گیری‌های ایمنی، مایل است انبارش را به بخش‌هایی تقسیم کند، و مواد شیمیایی ناسازگار را در بخش‌های مختلف قرار دهد. حداقل تعداد بخش‌هایی که باید در داخل انبار ایجاد کرد، چقدر است؟

مدل گراف قطعی مساله به صورت زیر بیان می‌شود که گراف G با مجموعه‌ی راسی $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ را در نظر بگیرید. مواد شیمیایی متناظر با رئوس گراف خواهند بود و یال‌های گراف با وصل کردن دو راس v_i و v_j به دست می‌آیند، اگر و تنها اگر مواد شیمیایی c_i و c_j ناسازگار باشند. به وضوح حداقل بخش‌هایی که باید داخل انبار را به آن تعداد تقسیم کرد، برابر عدد رنگی G است.

مدل گراف فازی مساله، مطابق مدل گراف قطعی آن بدین صورت بیان می‌شود که گراف $\tilde{G} = (V, \delta, \mu)$ با مجموعه‌ی راسی $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ را در نظر بگیرید. رئوس گراف را متناظر با مواد شیمیایی در نظر بگیرید و رئوسی را به هم وصل کنید که مواد شیمیایی متناظر آن دو ناسازگار باشند. وصل شدن دو راس به هم با درجه‌ی عضویت‌های مختلفی روی هر یال نشان داده شده است. در واقع با توجه به میزان ناسازگاری که رئوس با هم دارند، مقدار درجه‌ی عضویت کم، متوسط و زیاد خواهد بود. حال در این مدل گراف فازی باید مینیمم تعداد بخش‌هایی که لازم است در داخل انبار ایجاد شود (به وضوح این معادل با عدد رنگی گراف فازی \tilde{G} است) به دست آید. مانند مساله‌ی ضیافت به راحتی به دست آوردن عدد رنگی گراف فازی \tilde{G} میسر می‌باشد.

مطالب زیر از مراجع [۳۴، ۲۳، ۵، ۱۹] استخراج شده است.

۳.۲.۴ مساله‌ی تداخل فرکانس‌ها

در این قسمت مساله‌ی تداخل فرکانس بیان خواهد شد. این مساله، همچنین مساله‌ی تداخل کانال نامیده می‌شود. در سال‌های اخیر به دلیل اجرای سریع شبکه‌های تلفن وایرلس (مانند شبکه‌ی GSM) و پروژه‌های ارتباطاتی ماهواره‌ای، این مساله اهمیت زیادی پیدا کرده است. در این مساله فرکانس‌ها طوری به آنتن‌ها نسبت داده می‌شوند که تداخل فرکانس‌ها مینیمم شود. در مساله‌ی تداخل فرکانس مفاهیم زیر را داریم:

- مجموعه‌ای از فرکانس‌ها در مجموعه‌ای به نام F نمایش داده می‌شوند.
- فرکانس‌ها توسط فرستنده‌های آنتن فرستاده می‌شوند و بنابراین هر آنتن v شامل فرکانس‌هایی خواهد بود که مجموعه‌ی فرکانس‌های آن را با $F(v)$ نمایش می‌دهیم که $F_v \subseteq F$ ، در واقع هر آنتن بنا به قوانین و مقرراتی ممکن است تمام فرکانس‌های F را نداشته باشد بنابراین برای هر آنتن v زیرمجموعه‌ای از فرکانس‌ها به صورت F_v در نظر گرفته می‌شود.
- باید فرکانس‌ها طوری به آنتن‌ها نسبت داده شود که میزان تداخل فرکانس‌ها به حداقل برسد. برای سطح تداخل جریمه‌ای در نظر می‌گیریم، در واقع اگر فرکانس‌های $f \in F(v)$ و $g \in F(w)$ باشد، جریمه‌ای که برای تداخل این فرکانس‌ها در نظر خواهیم گرفت را به صورت $P_{vw}(f, g)$ یا $P_{vwf, g}$ نمایش می‌دهیم.
- متغیری برای مقدار آستانه‌ای که به جریمه تعلق می‌گیرد، در نظر گرفته می‌شود و آن را با P_{max} نمایش می‌دهیم.
- زیرمجموعه‌ای از فرکانس‌ها که به آنتن v نسبت داده می‌شود را با $m(v)$ نمایش می‌دهیم.

• تداخلی که اتفاق می‌افتد ممکن است به دو حالت زیر باشد:

(الف) تداخل هم‌فرکانس^۸: این تداخل زمانی اتفاق می‌افتد که دو فرستنده، روی فرکانس یکسانی قرار داشته باشند.

(ب) تداخل فرکانس مجاور^۹: این تداخل زمانی اتفاق می‌افتد که دو فرستنده روی فرکانس‌هایی که مجاور هستند (به عبارتی دو فرستنده روی فرکانس i و $i + 1$ یا $i - 1$ باشند). قرار گرفته باشند.

مدل گرافی که برای مساله بیان می‌شود بدین صورت زیر است که:

آنتن‌ها که به عنوان فرستنده‌های فرکانس هستند را رئوس گراف فرض کرده و آن رئوسی را به هم وصل کنید که فرکانس‌های آن‌ها ایجاد تداخل می‌کنند. قرار است به رئوس گراف که همان آنتن‌ها هستند، مینیم تعداد فرکانس‌هایی نسبت داده شود که میزان تداخل فرکانس‌ها به حداقل برسد. مینیم تعداد فرکانس‌ها، با معادل گرفتن فرکانس و رنگ در گراف، برابر همان عدد رنگی گراف است.

مدل گراف فازی مساله مطابق مدل گراف قطعی آن است با این تفاوت که در اینجا برای رئوسی که به هم وصل شده‌اند، با توجه به میزان تداخلی که فرکانس‌های رئوس بر روی هم می‌گذارند، مقدار درجه‌ی عضویت کم، متوسط و زیاد به یال‌ها نسبت داده شده است.

برای هر یال $vw \in E$ ، دو مقدار تداخل به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

که مقدار تداخل هم‌فرکانس بودن را نمایش می‌دهد و $c^{ad}(vw)$ مقدار تداخل مجاور بودن فرکانس‌ها را نشان می‌دهد و به طور کلی $c^{co}(vw) \geq c^{ad}(vw)$.

روش برنامه‌ریزی خطی مساله‌ی تداخل

در این قسمت روش برنامه‌ریزی خطی برای مساله‌ی تداخل فرکانس بیان می‌شود.

۱- متغیر x_{vf} به صورت مقابل در نظر گرفته می‌شود:

$$x_{vf} = \begin{cases} 1 & \text{اگر فرکانس } f \in F(v) \text{ به راس } v \in V \text{ نسبت داده شود} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

۲- همچنین متغیر جریمه $P_{vw}(f, g)$ ، اگر فرکانس‌ها تداخل داشته باشند مقادیر رابطه‌ی (۱۴.۴) را می‌گیرد.

$$P_{vw}(f, g) = \begin{cases} c^{co}(vw) & \text{اگر } f = g \\ c^{ad}(vw) & \text{اگر } |f - g| = 1 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (14.4)$$

^۸co-channel interference

^۹adjacent channel interference

۳- $c^{co}(vw)$ متغیری است که تداخل را در اثر هم‌فرکانس بودن نمایش می‌دهد.

۴- $c^{ad}(vw)$ متغیری است که مقدار تداخل را در اثر مجاور بودن فرکانس‌ها نمایش می‌دهد.

۵- P_{max} متغیری است که مقدار آستانه‌ای برای جریمه نشان می‌دهد و در واقع میزان جریمه نباید از آن تجاوز کند.

تابع هدف به صورت رابطه‌ی (۱۵.۴) خواهد بود.

$$\min \sum_{\{v,w\} \in E} \sum_{f \in F(v), g \in F(w)} P_{vw}(f, g) x_{vf} x_{wg} \quad (15.4)$$

قرار است میزان جریمه یا به عبارتی میزان تداخل مینیمم شود. رابطه‌ی (۱۵.۴) طبق تعریف متغیر $P_{vw}(f, g)$ در (۱۴.۴) معادل رابطه‌ی (۱۶.۴) است.

$$\min \sum_{vw \in E^{co}} c^{co}(v, w) x_{vf} x_{wg} + \sum_{vw \in E^{ad}} c^{ad}(v, w) x_{vf} x_{wg} \quad (16.4)$$

حال چون در تابع هدف عبارتی از درجه‌ی دو وجود دارد، برای خطی کردن این عبارت متغیر $z_{vw}(f, g) = x_{vf} x_{wg}$ تعریف می‌شود به طوری که:

$$z_{vw}(f, g) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } x_{vf} = x_{wg} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

بنابراین تابع هدف رابطه‌ی (۱۶.۴) به صورت رابطه‌ی (۱۷.۴) نوشته می‌شود.

$$\min \sum_{vw \in E^{co}} c^{co}(v, w) z_{vw}^{co} + \sum_{vw \in E^{ad}} c^{ad}(v, w) z_{vw}^{ad} \quad (17.4)$$

پس روش برنامه ریزی خطی مساله به صورت زیر بیان خواهد شد:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \min \quad \sum_{vw \in E^{co}} c^{co}(v, w) z_{vw}^{co} + \sum_{vw \in E^{ad}} c^{ad}(v, w) z_{vw}^{ad} \\
 s.t. \\
 \sum_{f \in F(v)} x_{vf} = m(v) \quad \forall v \in V \\
 x_{vf} + x_{wg} \leq \lambda \quad \forall (v, w) \in E, f \in F(v), g \in F(w), P_{vw}(f, g) > P_{max} \\
 x_{vf} + x_{wg} \leq \lambda + z_{vw}^{co} \quad \forall vw \in E^{co}, f \in F(v), g \in F(w) \\
 x_{vf} + x_{wg} \leq \lambda + z_{vw}^{ad} \quad \forall vw \in E^{ad}, |f - g| = \lambda \\
 x_{vf}, x_{wg}, z_{vw}^{co}, z_{vw}^{ad} \in \{0, \lambda\}
 \end{array} \right.$$

در روش بالا، محدودیت اول بیان می‌کند که مجموع فرکانس‌هایی که به هر راس تعلق می‌گیرد برابر $m(v)$ است. محدودیت دوم بیان می‌کند که میزان جریمه نمی‌تواند از میزان جریمه‌ی آستانه بیشتر باشد وگرنه طبق محدودیت نوشته شده یا هیچ فرکانسی به هیچ کدام از دو راس v و w تعلق نمی‌گیرد یا فقط به یکی از راس‌ها تعلق می‌گیرد، که در آن صورت تداخلی صورت نخواهد گرفت. محدودیت سوم و چهارم برای تضمین این است که متغیر $z_{vw}(f, g)$ که به جای $x_{vf}x_{wg}$ در نظر گرفتیم مقدار درستی را فراهم کند.

فصل ۵

مدل فازی گراف‌های مسطح

۱.۵ توصیف مدل و ذکر ویژگی‌ها و خواص آن

مدل گراف مسطح^۱:

در مساله‌ی مدل‌سازی گراف‌ها، هر گاه از ساختار گراف‌های مسطح استفاده شود مدل مورد نظر، مدل گراف‌های مسطح نامیده می‌شود. مطالب این قسمت از منبع [۱۰] استخراج شده است.

تعریف ۱.۱.۵. گراف مسطح:

گراف مسطح به صورت سه‌تایی $G = (V, E, F)$ تعریف می‌شود که V در آن مجموعه‌ی رئوس، E مجموعه‌ی یال‌ها و F مجموعه‌ی وجه‌های گراف می‌باشد. در این گراف‌ها، باید بتوان ساختار آن را به گونه‌ای در صفحه رسم کرد که یال‌های گراف تنها در دو انتهایشان یکدیگر را قطع کنند، که چنین ترسیمی از ساختار گراف، نشان دادن آن در صفحه نامیده می‌شود.

ملاحظه ۲.۱.۵. نشان دادن گراف مسطح در صفحه باعث ایجاد وجه‌های درونی^۲ و یک وجه بیرونی^۳ می‌شود.

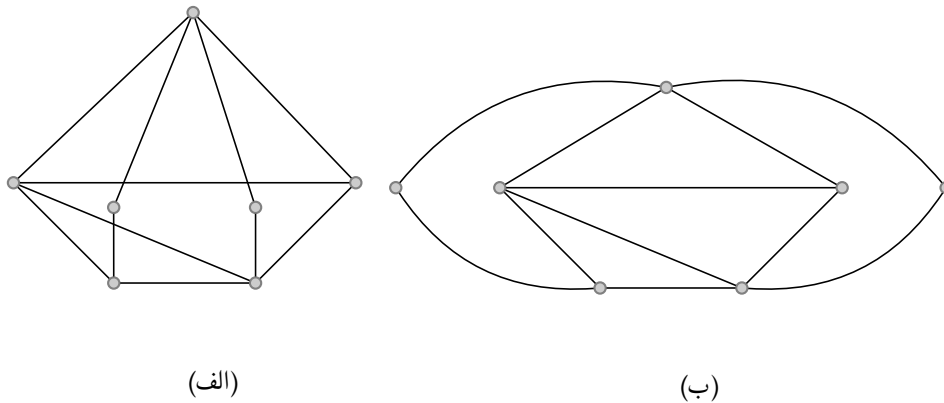
در شکل ۱.۵ مثالی از مدل گراف مسطح آورده شده است

ملاحظه ۳.۱.۵. مدل گراف‌های مسطح، به صورت مدل یالی که در فصل ۱ بیان شد، مدل‌سازی شده است.

ملاحظه ۴.۱.۵. هر گرافی را می‌توان در فضای ۳-بعدی \mathcal{R}^3 نشان داد.

^۱planar graph

^۲ناحیه‌ی درون حلقه‌ی بسته‌ای از یال‌ها، وجه درونی گراف نامیده می‌شود.
^۳ناحیه‌ای نامتناهی است که به آن وجه بیرونی گراف می‌گویند.



شکل ۱.۵: (الف) گراف مسطح G ؛ (ب) نشانیدن مسطح G

فرمول ساده‌ای وجود دارد که تعداد راس‌ها، یال‌ها و وجه‌ها را در مدل گرافی که مسطح شده‌ی همبند است، به یکدیگر ربط می‌دهد. این فرمول مشهور به فرمول اویلر است. در قضیه‌ی ۵.۱.۵، این فرمول معرفی می‌شود.

قضیه ۵.۱.۵. اگر G گراف مسطح شده‌ی همبند باشد، آنگاه رابطه‌ی (۱.۵) را داریم.

$$v - \varepsilon + f = 2 \quad (1.5)$$

که در فرمول اویلر، v تعداد رئوس، ε اندازه‌ی یال‌ها و f تعداد وجه‌ها را نشان می‌دهد.

قضیه ۶.۱.۵. اگر G گراف مسطح ساده با $v \geq 3$ باشد، آنگاه مدلی کمی که رابطه‌ی بین تعداد یال و راس را در گراف مسطح بیان می‌کند، برابر $\varepsilon \leq 3v - 6$ می‌باشد.

قضیه ۷.۱.۵. اگر G گراف مسطح ساده با $v \geq 3$ باشد، آنگاه مدلی کمی که رابطه‌ی بین تعداد وجه و راس را در گراف مسطح بیان می‌کند، به صورت $f \leq 2v - 4$ می‌باشد.

تعریف ۸.۱.۵. گراف مسطح فازی: [۲۷]

فرض کنید $G = (V, E, F)$ گراف مسطحی باشد که V مجموعه‌ی رئوس، E مجموعه‌ی یال‌ها و F مجموعه‌ای از وجه‌ها باشد. زیرمجموعه‌ی فازی از مجموعه‌ی F به ازای هر $f \in F$ ، به صورت $\lambda: F \rightarrow [0, 1]$ می‌باشد که $\lambda(F)$ مقدار عضویت f در گراف فازی \tilde{G} است. همچنین به ازای هر $v \in V$ ، نگاشت $\delta: V \rightarrow [0, 1]$ را در نظر بگیرید که $\delta(v)$ مقدار عضویت v در گراف فازی \tilde{G} است و یک زیرمجموعه‌ی فازی از مجموعه‌ی $V \times V$ را در نظر بگیرید که نگاشتی به صورت $\mu: V \times V \rightarrow [0, 1]$ به ازای هر $(u, v) \in E$ می‌باشد. بنابراین گراف مسطح فازی^۴ به صورت سه‌تایی $\tilde{G} = (\delta, \mu, \lambda)$ تعریف می‌شود که δ زیرمجموعه‌ای فازی از V و μ رابطه‌ی فازی متقارن روی δ و λ یک زیرمجموعه‌ی فازی از F می‌باشد.

^۴fuzzy planar graph

ملاحظه ۹.۱.۵. گراف قطعی $G = (V, E, F)$ ، مورد خاصی از گراف فازی با هر عضویت برابر یک است.

مطالب این قسمت از منبع [۴۸] استخراج شده است.

برای بررسی جزئی‌تر گراف مسطح فازی، در اینجا به بیان تعریفی از قدرت یال فازی می‌پردازیم. در تعریف ۱۵.۳.۱ به معرفی یال قوی در گراف فازی پرداختیم. حال در اینجا فرمولی برای به دست آوردن میزان قدرت یال فازی بیان می‌کنیم.

قدرت یال فازی (u, v) توسط رابطه‌ی (۲.۵) اندازه‌گیری می‌شود.

$$I_{(u,v)} = \frac{\mu(u, v)}{\min(\delta(u), \delta(v))} \quad (2.5)$$

حال اگر $I_{(u,v)} \geq 0.5$ باشد، آنگاه یال فازی قوی است، در غیر این صورت یال فازی ضعیف خواهد بود.

ملاحظه ۱۰.۱.۵. در رابطه‌ی (۲.۵) معیار دیگری برای بررسی قوی یا ضعیف بودن یال معرفی گردید.

در گراف فازی هنگامی که دو یال در یک نقطه برخورد می‌کنند، مقداری به نقطه‌ی برخورد نسبت داده می‌شود. فرض کنید دو یال (a, b) و (c, d) در نقطه‌ای به هم برخورد کرده‌اند. مقدار مشترک در نقطه‌ی برخورد P به صورت رابطه‌ی (۳.۵) حاصل می‌شود.

$$I_P = \frac{I_{(a,b)} + I_{(c,d)}}{2} \quad (3.5)$$

اگر مقدار اشتراک در نقطه افزایش یابد، مسطح بودن^۵ کاهش می‌یابد. برپایه‌ی این مفهوم، اصطلاح جدیدی را برای گراف مسطح فازی تعریف خواهیم کرد.

تعریف ۱۱.۱.۵. فرض کنید \tilde{G} گرافی فازی باشد که نقاط P_1, P_2, \dots, P_z ، نقاط تقاطع بین یال‌ها هستند. گراف فازی \tilde{G} ، گراف مسطح فازی با سطح فازی α نامیده می‌شود به طوری که رابطه‌ی (۴.۵) را داریم.

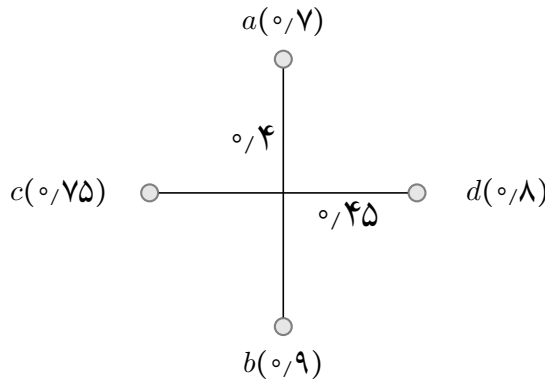
$$\alpha = \frac{1}{1 + \{I_{P_1} + I_{P_2} + \dots + I_{P_z}\}} \quad (4.5)$$

واضح است که $0 < \alpha \leq 1$. اگر هیچ نقطه‌ی برخوردی برای یال‌ها نباشد، گراف مسطح فازی با سطح فازی ۱ داریم. اگر α کاهش یابد، تعداد نقاط برخورد بین یال‌ها افزایش می‌یابد و به طور بدیهی خصلت مسطح بودن کاهش می‌یابد. با توجه به این مطالب می‌توان گفت هر گراف فازی، یک گراف مسطح فازی با سطح فازی مشخصی است.

مثال ۱۲.۱.۵. گراف فازی شکل ۲.۵ داده شده است. این گراف فازی، گراف مسطح فازی با چه سطحی است؟

ابتدا قدرت هر یال را محاسبه می‌کنیم.

^۵planarity



شکل ۲.۵: برخورد دو یال در گراف فازی

$$\mathcal{I}_{(a,b)} = \frac{\mu(a,b)}{\min(\delta(a), \delta(b))} = \frac{0,4}{\min(0,7, 0,9)} = \frac{0,4}{0,7} = 0,57$$

$$\mathcal{I}_{(c,d)} = \frac{\mu(c,d)}{\min(\delta(c), \delta(d))} = \frac{0,45}{\min(0,75, 0,8)} = \frac{0,45}{0,75} = 0,6$$

بنابراین مقدار مشترک در نقطه‌ی برخورد برابر است با:

$$\mathcal{I}_P = \frac{\mathcal{I}_{(a,b)} + \mathcal{I}_{(c,d)}}{2} = \frac{0,57 + 0,6}{2} = 0,585$$

$$\alpha = \frac{1}{1+0,585} = 0,63$$

بنابراین داریم: پس گراف فازی داده شده، گراف مسطح فازی با سطح فازی ۰,۶۳ است.

تعریف ۱۳.۱.۵. یک گراف مسطح فازی \tilde{G} ، گراف مسطح فازی قوی نامیده می‌شود اگر مقدار سطح فازی گراف بیشتر از ۰,۵ باشد.

بنابراین وابسته به مقدار سطح فازی، گراف مسطح فازی به دو دسته‌ی گراف مسطح فازی قوی و گراف مسطح فازی ضعیف تقسیم می‌شود.

قضیه ۱۴.۱.۵. فرض کنید \tilde{G} گراف مسطح فازی قوی باشد. تعداد نقاط برخورد بین یال‌های قوی \tilde{G} حداکثر یکی است.

برهان. فرض کنید \tilde{G} گراف مسطح فازی قوی باشد. همچنین در نظر بگیرید که حداقل دو نقطه‌ی برخورد P_1 و P_2 بین دو یال قوی در \tilde{G} وجود داشته باشد. برای هر یال قوی (a,b) داریم: $\mathcal{I}(a,b) \geq 0,5$ بنابراین برای دو یال قوی متقاطع (a,b) و (c,d) داریم: $\frac{\mathcal{I}(a,b) + \mathcal{I}(c,d)}{2} \geq 0,5$ و این یعنی $\mathcal{I}_{P_1} \geq 0,5$. به طور مشابه $\mathcal{I}_{P_2} \geq 0,5$ بنابراین $1 + \mathcal{I}_{P_1} + \mathcal{I}_{P_2} \geq 2$ و در نتیجه $\frac{1}{1 + \mathcal{I}_{P_1} + \mathcal{I}_{P_2}} \leq \frac{1}{2} = 0,5$ اما این مقدار بنا به تعریف ۱۳.۱.۵ متناقض با این واقعیت است که گراف فازی، گراف مسطح فازی قوی است. \square

تعریف ۱۵.۱.۵. فرض کنید \tilde{G} گراف مسطح فازی باشد و

$$E = \{((u, v), \mu_j(u, v)), \quad j = 1, 2, \dots, P | (u, v) \in V \times V, \quad P = \max\{j | \mu_j(u, v) \neq 0\}\} \quad (5.5)$$

یک وجه فازی از گراف \tilde{G} ، ناحیه‌ای است که توسط مجموعه‌ای از یال‌های فازی $E' \subseteq E$ محدود شده است. مقدار عضویت هر وجه فازی از رابطه‌ی (۶.۵) حاصل می‌شود.

$$\min \left\{ \frac{\mu_j(u, v)}{\min(\delta(u), \delta(v))}, \quad j = 1, 2, \dots, P | (u, v) \in E' \right\} \quad (6.5)$$

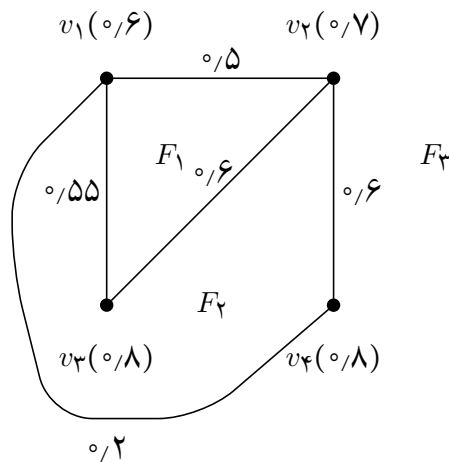
تعریف ۱۶.۱.۵. یک وجه فازی، وجه فازی قوی نامیده می‌شود اگر مقدار عضویت آن بیشتر از ۰/۵ باشد و گرنه وجه ضعیف خواهد بود.

مثال ۱۷.۱.۵. در شکل ۳.۵، مثالی از گراف مسطح فازی آورده شده است. F_1, F_2, F_3 وجه‌های گراف می‌باشند که به ترتیب دارای مقدار عضویت‌های ۰/۳۳، ۰/۲، ۰/۳۳ می‌باشند. F_2 و F_1 وجه‌های درونی گراف و F_3 وجه بیرونی گراف است. مطابق تعریف ۱۶.۱.۵، F_1 یک وجه قوی و F_2 و F_3 وجه‌های ضعیف این گراف فازی هستند. هر وجه فازی قوی، مقدار عضویتی بیشتر از ۰/۵ دارد، بنابراین هر یال از وجه فازی قوی، یک یال فازی قوی است.

برای درک بهتر نحوه‌ی به دست آوردن مقدار عضویت وجه‌ها، در اینجا مقدار عضویت وجه F_1 را به دست می‌آوریم.

وجه F_1 توسط مجموعه‌ی یال‌های $\{(v_1, v_2), 0/5\}, \{(v_2, v_3), 0/6\}, \{(v_1, v_3), 0/55\}$ محدود شده است. P طبق رابطه‌ی (۵.۵) برابر ۳ است. بنابراین طبق رابطه‌ی (۶.۵)، مقدار عضویت وجه F_1 برابر است با:

$$\min \left\{ \frac{0/5}{\min(0/6, 0/7)}, \frac{0/6}{\min(0/7, 0/8)}, \frac{0/55}{\min(0/6, 0/8)} \right\} = \min \left\{ \frac{0/5}{0/6}, \frac{0/6}{0/7}, \frac{0/55}{0/6} \right\} = 0/33$$



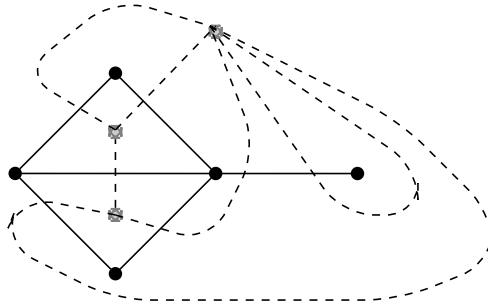
شکل ۳.۵: گراف مسطح فازی

مطالب این قسمت از منبع [۲۷] استخراج شده است.

تعریف ۱۸.۱.۵. گراف دوگان مسطح^۶:

فرض کنید G ، یک گراف مسطح باشد. گراف دوگان G^* از G ، گرافی مسطح است به طوری که یک راس برای هر وجه در G داشته باشد. همچنین یال‌های گراف دوگان G^* متناظر یال‌های گراف G بدین صورت ساخته می‌شوند که اگر e یالی از گراف G باشد که وجه F_i را در یک سمت و وجه F_j را در سمت دیگرش داشته باشد، آن‌گاه یال دوگان متناظر $e \in E(G^*)$ یالی است که دو راس x و y از گراف G^* را که متناظر وجه F_i و F_j از G می‌باشند به هم وصل می‌کند.

مثال ۱۹.۱.۵. در شکل ۴.۵ مثالی از گراف مسطح و دوگان آن آورده شده است. یال‌های گراف دوگان را با خط چین مشخص کرده‌ایم و رئوس آن با نقاطی کم‌رنگ نشان داده شده است.



شکل ۴.۵: گراف مسطح و دوگان آن

ملاحظه ۲۰.۱.۵. [۱۰] با توجه به تعریف ۲۹.۱.۵ و تعریف ۳۰.۱.۵ و دوگان یک گراف مسطح که در تعریف ۱۸.۱.۵ آمد، رابطه‌ی (۷.۵) را داریم.

$$\chi^*(G) = \chi(G^*) \quad (۷.۵)$$

لم ۲۱.۱.۵. فرض کنید G گراف همبند مسطح باشد که شامل v راس، ε یال و f وجه باشد و فرض کنید گراف دوگان G^* شامل v^* راس، ε^* یال و f^* وجه باشد، آن‌گاه

$$v^* = f, \varepsilon^* = \varepsilon, f^* = v.$$

قضیه ۲۲.۱.۵. فرض کنید G گراف همبند مسطح باشد. آن‌گاه G^{**} یک ریخت با G است.

تعریف ۲۳.۱.۵. گراف دوگان مسطح فازی:

فرض کنید \tilde{G} یک گراف مسطح فازی باشد، گراف فازی دیگری به نام گراف دوگان مسطح فازی \tilde{G}^* در گام‌های ۱ تا گام ۳ ساخته می‌شود.

^۶planar dual graph

۱- درون هر وجه \tilde{F}_i از \tilde{G} ، یک نقطه‌ی v_i^* انتخاب می‌کنیم که این نقاط، راس‌های \tilde{G}^* با مقدار عضویت $\delta(v_i^*) = \lambda(f_i)$ می‌باشند.

۲- متناظر با هر یال \tilde{e} از گراف فازی \tilde{G} ، خط \tilde{e}^* را بکشیم به طوری که \tilde{e} را قطع کند و راس‌های \tilde{v}_i^* ای (همان \tilde{f}_i ها) را به هم وصل کند که مجاور یال \tilde{e} بوده‌اند. این خطوط، یال‌های \tilde{G}^* با درجه‌ی عضویت $\mu(e_i^*) = \mu(e_i)$ می‌باشند و برای μ همواره شرط $\mu(e_i^*) \leq \min(\delta(v_i^*), \delta(v_{i+1}^*))$ که v_i^*, v_{i+1}^* دو انتهای e_i^* هستند، برقرار می‌باشد.

۳- هر وجه از \tilde{G}^* مقدار عضویتی به صورت $\lambda(f_i^*) = \delta(v_i)$ دارد.

گزاره ۲۴.۱.۵. دوگانی از دوگان گراف فازی، خود گراف فازی است یعنی:

$$\tilde{G}^{**} = \tilde{G}$$

برهان. با استفاده از تعریف گراف دوگان فازی، دوگان گراف فازی \tilde{G} مقدار عضویت‌هایی مطابق رابطه‌ی (۸.۵) دارد.

$$\delta(v_i^*) = \lambda(f_i), \mu(e^*) = \mu(e), \lambda(f^*) = \delta(v) \quad (۸.۵)$$

و دوگانی از دوگان گراف فازی، مقدار عضویت‌هایی به صورت روابط (۹.۵) و (۱۰.۵) و (۱۱.۵) دارد.

$$\delta(v^{**}) = \lambda(f^*) = \delta(v) \Rightarrow \delta(v^{**}) = \delta(v) \quad (۹.۵)$$

$$\mu(e^{**}) = \mu(e^*) = \mu(e) \Rightarrow \mu(e^{**}) = \mu(e) \quad (۱۰.۵)$$

$$\lambda(f^{**}) = \delta(v^*) = \lambda(f) \Rightarrow \lambda(f^{**}) = \lambda(f) \quad (۱۱.۵)$$

یعنی، مقدار عضویت دوگانی از دوگان گراف فازی، برابر مقدار عضویت خود گراف فازی است بنابراین $\tilde{G}^{**} = \tilde{G}$. \square

تعریف ۲۵.۱.۵. گراف مسطح ماکسیمال وزن دار:

گراف مسطح وزن دار با بیشترین تعداد یال را گراف مسطح ماکسیمال وزن دار نامند به طوری که با اضافه کردن هر یال دیگر، گراف غیر مسطح شود، همچنین مجموع وزن یال‌ها در این گراف، باید بیشترین باشد.

مطالب زیر از منبع [۴۶] استخراج شده است.

فرض کنید $G = (V, E, W)$ گرافی کامل باشد که $V = \{1, \dots, v\}$ مجموعه‌ای از v راس است، $E = \{1, \dots, e\}$ مجموعه‌ای از یال‌های غیر جهت دار است و $w = \{w_k | w_k \geq 0, \forall k \in E\}$ مجموعه‌ای از یال‌های وزن دار می‌باشد. $G_p = (V, E_p, W)$ را در نظر بگیرید که زیرگراف مسطح ماکسیمال وزن داری از G باشد، که به وسیله‌ی یال‌های $E_p = \{e_1, \dots, e_p\}$ و مجموعه‌ای از وجه‌های مثلثی $F_p = \{f_1, \dots, f_t\}$ تعریف شده است، آن‌گاه ویژگی‌های (الف) تا (ت) برای $v > 3$ در گراف مسطح ماکسیمال برقرار است.

(الف) برای هر گراف مسطح، بنا به قضیه‌ی ۶.۱.۵ داریم: $\varepsilon \leq 3v - 6$ ، هنگامی که گراف مسطح ماکسیمال باشد، $\varepsilon = 3v - 6$ است.

(ب) برای هر گراف مسطح، بنا به قضیه ۷.۱.۵ داریم: $f \leq 2v - 4$ ، هنگامی که گراف مسطح ماکسیمال باشد، $f = 2v - 4$ است.

(پ) G_p یک گراف ۳-همبند راسی است، به عبارتی تعداد یال‌های مجاور هر راس i (درجه‌ی هر راس i) باید بزرگتر یا مساوی ۳ باشد.

(ت) هر یال گراف G_p فقط متعلق به دو وجه مثلثی است.

در گراف مسطح ماکسیمال باید یک مجموعه‌ی E_p از $3v - 6$ یال را از بین یال‌های $\{e = \frac{v(v-1)}{3}\}$ و مجموعه‌ی F_p با $2v - 4$ عضو از وجه‌های مثلثی را از بین $\{f = \frac{v(v-1)(v-2)}{6}\}$ وجه بیابیم تا هم مسطح بودن و هم ماکسیمال بودن برقرار باشد.

حالت بهینه‌ای که در مدل گراف مسطح قابل بیان می‌باشد، گراف مسطح ماکسیمال وزن‌دار است. بدین منظور با توجه به تعریف ۲۵.۱.۵ که بیان شد، باید گراف مسطح وزن‌دار، بیشترین تعداد یال را داشته باشد و همچنین مجموع وزن یال‌ها، بیشترین باشد.

(۱) مدل گراف مسطح ماکسیمال به روش برنامه‌ریزی خطی قطعی

متغیرهای مدل به صورت زیر معرفی می‌شوند:

$$x_k = \begin{cases} 1 & \text{اگر یال } k \text{ در حل باشد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}, k = 1, \dots, e.$$

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{اگر وجه مثلثی } j \text{ انتخاب شود} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}, j = 1, \dots, f.$$

$$\alpha_{kj} = \begin{cases} 1 & \text{اگر یال } k \text{ در وجه مثلثی } j \text{ باشد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

حال به بیان مدل می‌پردازیم.

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \quad Z = \sum_{k=1}^a w_k x_k \\ \text{s.t.} \\ \sum_{j=1}^f \alpha_{kj} y_j = 2x_k \quad ; k = 1, \dots, e \\ \sum_{k=1}^e x_k = 3v - 6 \\ \sum_{k \in I} x_k \geq 3 \quad ; \forall i \in N, \text{ and } \bar{i} = N \setminus \{i\}, I = \{(i, l), l \in \bar{i}\} \\ x_k \in \{0, 1\}, y_j \in \{0, 1\}, \alpha_{kj} \in \{0, 1\} \quad ; \forall k \in E, \forall j \in F \end{array} \right.$$

در این مدل، در تابع هدف قرار است مجموع وزن یال‌های انتخاب شده، ماکسیمم شود.

محدودیت اول بیان می‌کند که هر یال فقط متعلق به دو وجه مثلثی است. محدودیت دوم بیان می‌کند که در گراف مسطح ماکسیمال، تعداد یال‌ها برابر $3v - 6$ است. محدودیت سوم ضمانت می‌کند که حل گراف مسطح ماکسیمم وزن‌دار، یک گراف همبند سه راسی داریم.

مدل برنامه‌ریزی خطی فازی در به دست آوردن گراف مسطح ماکسیمال، با در نظر گرفتن وزن یال‌ها با اعداد فازی به دست خواهد آمد.

مدل گراف مسطح ماکسیمال به روش برنامه‌ریزی خطی فازی

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \quad \tilde{Z} = \sum_{k=1}^a \tilde{w}_k \cdot x_k \\ \text{s.t.} \\ \sum_{j=1}^f \alpha_{kj} y_j = 2x_k \quad ; k = 1, \dots, e \\ \sum_{k=1}^e x_k = 3v - 6 \\ \sum_{k \in I} x_k \geq 3 \quad ; \forall i \in N, \text{ and } \bar{i} = N \setminus \{i\}, I = \{(i, l), l \in \bar{i}\} \\ x_k \in \{0, 1\}, y_j \in \{0, 1\}, \alpha_{kj} \in \{0, 1\} \quad ; \forall k \in E, \forall j \in F \end{array} \right.$$

(۲) روش الگوریتمی برای بررسی مسطح بودن گراف

در اینجا الگوریتمی برای بررسی مسطح بودن گراف معرفی می‌کنیم که منسوب به دموکرون^۷، ملگرنج^۸ و پرتویست^۹ است [۱۰].

قبل از بیان الگوریتم لازم است مطالبی بیان شود.

^۷Demoucron

^۸Malgrange

^۹Pertuiset

فرض کنید H زیرگراف مسطح گراف G بوده و H' حاصل نشانیدن H در صفحه باشد. می‌گوییم که H' ، G -پذیرفتنی است اگر G مسطح بوده و نشانیدن مسطح G' از G موجود باشد به طوری که $H' \subseteq G'$.

اگر B پلی از H (در G) باشد، آن‌گاه B را در وجه f از H' ، ترسیم‌پذیر نامند هرگاه راس‌های اتصال B به H در مرز f قرار گیرند. نماد $F(B, H')$ برای نشان دادن مجموعه وجه‌های H' به کار می‌رود که در آن B ترسیم‌پذیر است. قضیه‌ی زیر شرط لازمی را برای اینکه G مسطح باشد فراهم کند.

قضیه ۲۶.۱.۵. اگر H' ، G -پذیرفتنی باشد آن‌گاه، برای پل B از H ، $F(B, H') \neq \emptyset$.

الگوریتم مسطح بودن گراف

۱. فرض کنید G_1 یک دور در G باشد. نشانیدن مسطح G'_1 از G را بیابید. قرار دهید $i = 1$.

۲. اگر $E(G) \setminus E(G_i) = \emptyset$ توقف کنید. در غیر این صورت، همه‌ی پل‌های G_i در G را بیابید. برای هر پل B ، مجموعه‌ی $F(B, G'_i)$ را بیابید.

۳. اگر پل B موجود باشد به طوری که $F(B, G'_i) = \emptyset$ ، توقف کنید؛ بنابر قضیه‌ی ۲۶.۱.۵، G نامسطح است. اگر پل B موجود باشد به طوری که $|F(B, G'_i)| = 1$ ، قرار دهید $F(B, G'_i) = f$ ، در غیر این صورت، فرض کنید، B پلی و f وجهی باشد به طوری که $f \in F(B, G'_i)$.

۴. مسیر $P_i \subseteq B$ که دو راس اتصال B را به G_i وصل می‌کند، انتخاب کنید. قرار دهید $G_{i+1} = G_i \cup P_i$ و نشانیدن مسطح G'_{i+1} از G_{i+1} را با ترسیم P_i در وجه f از G'_i به دست آورید. $i + 1$ را به جای i بگذارید و به مرحله‌ی (۲) بروید.

تعریف ۲۷.۱.۵. k -رنگ‌آمیزی وجهی:

k -رنگ‌آمیزی وجهی یک گراف مسطح شده‌ی G ، تخصیص k رنگ $1, 2, \dots, k$ به وجه‌های G است.

تعریف ۲۸.۱.۵. رنگ‌آمیزی وجهی سره:

رنگ‌آمیزی وجهی سره است، اگر دو وجهی که به وسیله‌ی یک یال جدا شده‌اند دارای یک رنگ نباشند.

تعریف ۲۹.۱.۵. k -رنگ‌پذیر وجهی:

گراف G ، k -رنگ‌پذیر وجهی است اگر دارای k -رنگ‌پذیر وجهی سره باشد.

تعریف ۳۰.۱.۵. عدد رنگی وجه G :

مینیم k ی که برای آن گراف G ، k -رنگ‌پذیر وجهی است عدد رنگی وجه G نامیده می‌شود، که به وسیله‌ی $\chi^*(G)$ نمایش داده می‌شود.

قضیه ۳۱.۱.۵. هرگراف مسطح ۴-رنگ‌پذیر راسی است.

قضیه ۳۲.۱.۵. هر گراف مسطح شده، ۴-رنگ پذیر وجهی است.

کاربردهایی از مدل گراف مسطح

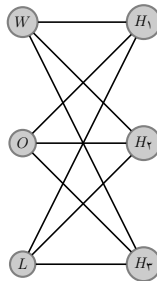
۱- مساله‌ی سه همسایه و سه چاه^{۱۰}: [۲۵]

در این مساله سه خانه و سه چاه وجود دارد. هر کدام از خانه‌ها از تمام سه چاه آب استفاده می‌کنند. پس از دعوی که بین صاحبان خانه‌ها با هم اتفاق افتاد، آن‌ها تصمیم گرفتند که مسیر خانه‌هایشان به چاه‌ها با هم تداخلی نداشته باشد و مسیرهایشان از هم جدا باشد. می‌خواهیم ببینیم آیا این امر ممکن خواهد بود؟

در این قسمت مدل گراف مربوط به این مساله بیان خواهد شد.

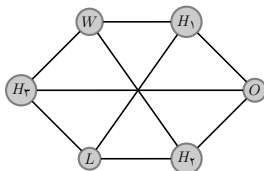
با در نظر گرفتن سه خانه و سه چاه به عنوان رئوس گراف، می‌توان این مساله را نظیر مدل گرافی کرد به طوری که هر راس خانه باید به سه راس دیگر که چاه‌ها هستند وصل شود. در این حالت گراف به دست آمده، گراف $k_{3,3}$ خواهد بود، اما لازم است که راس‌ها طوری به یکدیگر وصل شوند که یال‌های وصل کننده‌ی رئوس یکدیگر را قطع نکنند. بنابراین مساله بدین صورت تبدیل می‌شود که باید مدل گراف $k_{3,3}$ مسطح شود.

در شکل ۵.۵، مدل گراف مربوط به این مساله آورده شده است



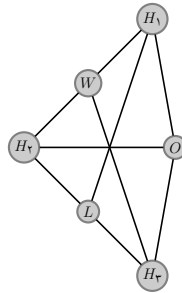
شکل ۵.۵: گراف $k_{3,3}$

گراف یک‌ریخت متناظر شکل ۵.۵ به صورت شکل ۶.۵ است

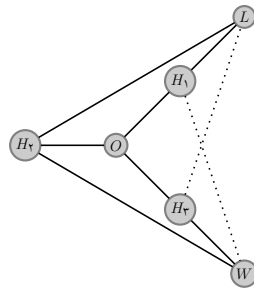


شکل ۶.۵: گراف یک‌ریخت با ۵.۵

گراف یک‌ریخت متناظر شکل ۶.۵ به صورت شکل ۷.۵ است



شکل ۷.۵: گراف یک‌ریخت با ۶.۵



شکل ۸.۵: گراف یک‌ریخت با ۷.۵

گراف یک‌ریخت متناظر شکل ۷.۵ به صورت شکل ۸.۵ است

در این قسمت سعی شد با تغییر شکل دادن مدل گراف اصلی، بررسی شود آیا مدل گراف مساله مسطح می‌شود یا نه. با توجه به مدل گراف ۸.۵، حداقل دو یال اشتراک دارند، بنابراین باید گفت حل مساله‌ی سه همسایه و سه چاه ممکن نخواهد بود. روش دیگر برای بیان اینکه این مساله قابل حل نیست، با استفاده از قضیه‌ی ۵.۱.۵ امکان می‌پذیرد. توضیح آن بدین صورت می‌باشد:

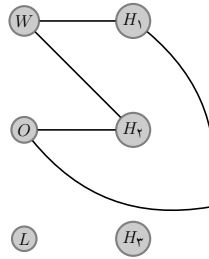
خانه‌ها و چاه‌ها را رئوس مدل گرافی در نظر بگیرید، با وصل کردن سه راس خانه به سه راس چاه، تعداد $3 \times 3 = 9$ یال به دست خواهد آمد. حال به برهان خلف فرض کنید این گراف مسطح است. می‌دانید که هر وجه توسط حلقه‌ی بسته‌ای از یال‌ها محدود شده است، پس هر وجه تعداد یال‌هایش حداقل ۳ می‌باشد و همچنین می‌دانید که هر یال از یک خانه به یک چاه وصل می‌شود، بنابراین محدوده‌ی هر یال حداقل توسط ۴ یال بسته شده است. در شکل ۹.۵ این مطلب نشان داده شده است.

حال با توجه به فرمول اویلر که در رابطه‌ی (۱.۵) آمده است، تعداد وجه‌ها برابر است با:

$$v - \varepsilon + f = 2 \Rightarrow f = 2 - v + \varepsilon = 2 - 6 + 9 = 5$$

از طرفی هر وجه حداقل ۴ یال دارد، بنابراین تعداد یال‌ها در همه‌ی وجه‌ها حداقل $5 \times 4 = 20$ یال است اما در اینجا هر یال دوبار شمرده شده است زیرا هر یال محدود کننده‌ی دو وجه است،

^۱ three houses and three wells problem



شکل ۹.۵: محدوده‌ی یک وجه

بنابراین کمترین تعداد یال برابر $\frac{2}{3} = 10$ است. از قبل می‌دانیم تعداد یال‌های این گراف ۹ تا است و این یک تناقض است زیرا هم زمان نمی‌توانیم تعداد یال متفاوتی در یک گراف داشته باشیم، بنابراین مدل گراف این مساله مسطح نخواهد بود.

۲- یکی از کاربردهای مدل گراف‌های مسطح، در رنگ‌آمیزی نقشه‌ها می‌باشد [۱۰]. مساله به این صورت مطرح می‌شود که آیا می‌توان کشورهای موجود در هر نقشه را با چهار رنگ، طوری رنگ‌آمیزی کرد که هر دو کشور با مرز مشترک، رنگ یکسانی نداشته باشند؟ در پاسخ به این مساله می‌توان مجموعه نواحی یک نقشه را به یک گراف نظیر کرد که هر راس، یک ناحیه و هر یال، دو راس‌های دو ناحیه که مجاور هستند را به هم متصل می‌کند، گراف حاصل مسطح است یعنی می‌توان این گراف را در صفحه‌ی نقشه قرار داد بدون اینکه هیچ دو یالی همدیگر را قطع کنند. از طرفی می‌دانیم هر گراف مسطح ۴-راس رنگ‌پذیر است، بنابراین نقشه با در نظر گرفتن کشورها به عنوان راس‌ها، ۴-راس رنگ‌پذیر است اما برای قابل درک بودن بهتر این مساله می‌توان بدین صورت عمل کرد که: دوگان این گراف مسطح را به دست می‌آوریم، طبق تعریف ۱۸.۱.۵، آن نیز مسطح است. کشورهای نقشه را نظیر وجه‌های گراف دوگان در نظر می‌گیریم، بنا به قضیه‌ی ۳۲.۱.۵، گراف دوگان مسطح شده که در آن کشورها به عنوان وجه‌ها در نظر گرفته می‌شوند، ۴-رنگ‌پذیر وجهی است. بنابراین توانستیم نقشه را که نمونه‌ای از مدل گراف مسطح بود با ۴ رنگ، رنگ‌آمیزی کنیم.

فصل ۶

مدل فازی شبکه‌ها

۱.۶ توصیف مدل و ذکر ویژگی‌ها و خواص آن

در مساله‌ی مدل‌سازی گراف‌ها، هر گاه از ساختار گراف‌های جهت‌دار با ویژگی‌ها و خواص ویژه‌ای از آن‌ها استفاده شود، مدل مورد نظر مدل شبکه‌ها نامیده می‌شود.

تعریف ۱.۱.۶. شبکه^۱: مدل گراف جهت‌دار همبندی را در نظر می‌گیریم که دو زیرمجموعه‌ی متمایز از راس‌های X و Y دارد. همچنین تابع صحیح c با مقادیر نامنفی، در نظر می‌گیریم که c روی مجموعه‌ی یال‌های گراف تعریف شده است. مجموعه‌های X و Y را مجزا و ناتهی فرض کنید. راس‌های مجموعه‌ی X منبع‌های گراف N و راس‌های مجموعه‌ی Y مقصدهای N هستند. راس‌هایی که منبع‌ها یا مقصدها نیستند را راس‌های میانی نامیده و آن‌ها را با مجموعه‌ی I نمایش می‌دهیم. تابع c ای که معرفی شد تابع ظرفیت N است و برای هر یال ظرفیت $c(a)$ را در نظر می‌گیریم، گرافی با این ویژگی‌ها شبکه نامیده می‌شود.

ملاحظه ۲.۱.۶. بررسی مدل شبکه‌ها در محیط فازی با در نظر گرفتن مقادیر مربوط به شبکه با اعداد فازی، صورت می‌گیرد.

۱.۱.۶ بعضی از مدل شبکه‌ها

در این فصل، دو نمونه از مدل شبکه‌ها به شرح زیر مورد بررسی قرار می‌گیرد:

۱- مدل حمل و نقل^۲

۲- مدل ماکسیمم جریان شبکه^۳

^۱network

^۲transportation

^۳maximum network flow

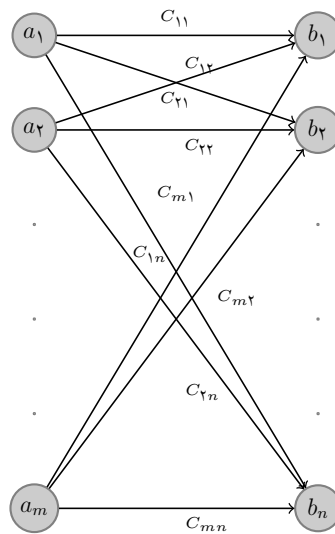
۲.۱.۶ بررسی مدل‌ها

مدل حمل و نقل

از جمله مدل‌های شبکه، شبکه‌های حمل و نقل را می‌توان نام برد که به صورت زیر قابل بیان است: قرار است مقداری از کالا یا خدمات را از مراکز به نام مبدا (مرکز عرضه)^۴، به مراکز به نام مقصد (محل تقاضا)^۵ ارسال شود. ظرفیت‌های موجود در هر مبدا حداکثر a_i و میزان تقاضا در هر مقصد، حداقل b_j می‌باشند. همچنین هزینه حمل هر کالا از منبع i به مقصد j برابر با $c_{(i,j)}$ می‌باشد. هدف اصلی در چنین مدل‌هایی از شبکه، تخصیص بهینه مقادیر عرضه به مراکز تقاضاست، با این شرط که میزان کالای ارسالی از مبدا، بیشتر از ظرفیت عرضه نباشد و از سوی دیگر، میزان کالای دریافتی توسط هر مقصد، کمتر از نیاز آن مقصد نباشد. در شبکه‌ی حمل و نقل باید بین عرضه و تقاضا تعادل برقرار باشد و هدف شبکه، حداقل کردن کل هزینه حمل کالا از مبدا به مقصد می‌باشد.

ملاحظه ۳.۱.۶. شبکه‌ی حمل و نقل به صورت مدل راسی که در فصل ۱ بیان شد، مدل‌سازی شده است.

مدل گرافی این شبکه در شکل ۱.۶ نشان داده شده است.



شکل ۱.۶: مدل گرافی شبکه‌ی حمل و نقل

۳.۱.۶ روش حل مدل‌ها

سعی داریم مدل ماکسیم جریان شبکه و مدل حمل و نقل را با دو روش برنامه‌ریزی خطی و روش الگوریتمی حل نماییم. ابتدا به شرح روش‌ها در مدل حمل و نقل و سپس در مدل ماکسیم جریان شبکه می‌پردازیم.

^۴source

^۵sink

(۱) روش برنامه‌ریزی خطی قطعی مربوط به شبکه‌ی حمل و نقل

در این شبکه، متغیر تصمیم $x_{(i,j)}$ میزان کالای انتقالی از مبدا i به مقصد j تعریف می‌شود.

$$\begin{cases} \min Z = \sum_j \sum_i c_{(i,j)} x_{(i,j)} \\ s.t \\ \sum_{j=1}^n x_{(i,j)} \leq a_i \quad i = 1, 2, \dots, m \quad \text{برای} \\ \sum_{i=1}^m x_{(i,j)} \geq b_j \quad j = 1, 2, \dots, n \quad \text{برای} \\ x_{(i,j)} \geq 0 \quad \text{برای} \quad i = 1, 2, \dots, m \text{ و } j = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

در عمل، ممکن است مقادیر شبکه‌ی حمل و نقل به خوبی برآورد نشود و مقادیری مانند هزینه‌های حمل و نقل، میزان عرضه و تقاضا، به ندرت ثابت و قابل پیش‌بینی باشند، بنابراین توانایی تعریف و تعیین کردن حل بهینه‌ی شبکه‌ی حمل و نقل با مقادیر فازی بسیار مهم است.

روش برنامه‌ریزی خطی فازی مربوط به شبکه‌ی حمل و نقل [۲۶]

$$\begin{cases} \min \tilde{Z} = \sum_j \sum_i \widetilde{c_{(i,j)}} \otimes \widetilde{x_{(i,j)}} \\ s.t \\ \sum_{j=1}^n \widetilde{x_{(i,j)}} \leq \widetilde{a_i} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad \text{برای} \\ \sum_{i=1}^m \widetilde{x_{(i,j)}} \geq \widetilde{b_j} \quad j = 1, 2, \dots, n \quad \text{برای} \\ \widetilde{x_{(i,j)}} \geq 0 \quad \text{برای} \quad i = 1, 2, \dots, m \text{ و } j = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

که $\widetilde{a_i} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ و $\widetilde{b_j} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ و $\widetilde{c_{(i,j)}} = (c'_{(i,j)}, c''_{(i,j)}, c'''_{(i,j)}, c''''_{(i,j)})$ ضرایب فازی را نمایش می‌دهند.

در اینجا، اعداد فازی، دوزنقه‌ای در نظر گرفته شده‌اند و می‌توان شبکه را برای انواع دیگر اعداد فازی نیز در نظر گرفت.

(۲) روش الگوریتمی مربوط به شبکه‌ی حمل و نقل

شبکه‌ی حمل و نقل در حالت فازی، توسط الگوریتم راسل فازی^۶ قابل حل است [۳۱، ۴۳]. مراحل این الگوریتم در زیر بیان شده است، در این الگوریتم برای مقایسه‌ی اعداد فازی از تابع رتبه‌بندی یا گر استفاده شده است.

^۶fuzzy Russell's method

گام ۱: مقدار $\tilde{u}_i, \tilde{v}_j, \Delta_{(i,j)}$ را به صورت رابطه‌ی (۱.۶) به دست آورید.

$$\begin{cases} \tilde{u}_i = \max_{1 \leq j \leq n} \{\tilde{c}_{(i,j)}\} & \text{برای } i = 1, 2, \dots, m \\ \tilde{v}_j = \max_{1 \leq i \leq m} \{\tilde{c}_{(i,j)}\} & \text{برای } j = 1, 2, \dots, n \\ \Delta_{(i,j)} = \tilde{c}_{(i,j)} \ominus \tilde{u}_i \ominus \tilde{v}_j & \text{برای هر } i, j \end{cases} \quad (1.6)$$

گام ۲: متغیر $\tilde{x}_{(i,j)}(x_{(i,j)}^{(1)}, x_{(i,j)}^{(2)}, x_{(i,j)}^{(3)}, x_{(i,j)}^{(4)})$ ای که بیشترین مقدار منفی $\Delta_{(i,j)}$ را دارد، انتخاب کنید. اگر مقادیر مساوی از $\Delta_{(i,j)}$ وجود داشته باشد، $\tilde{x}_{(i,j)}(x_{(i,j)}^{(1)}, x_{(i,j)}^{(2)}, x_{(i,j)}^{(3)}, x_{(i,j)}^{(4)})$ ای را انتخاب کنید که کمترین هزینه‌ی $\tilde{c}_{(i,j)}(c_{(i,j)}^{(1)}, c_{(i,j)}^{(2)}, c_{(i,j)}^{(3)}, c_{(i,j)}^{(4)})$ را داشته باشد، باز اگر دوباره مقادیر $\tilde{c}_{(i,j)}(c_{(i,j)}^{(1)}, c_{(i,j)}^{(2)}, c_{(i,j)}^{(3)}, c_{(i,j)}^{(4)})$ یکسانی وجود داشته باشد، $\tilde{x}_{(i,j)}(x_{(i,j)}^{(1)}, x_{(i,j)}^{(2)}, x_{(i,j)}^{(3)}, x_{(i,j)}^{(4)})$ ای با بیشترین مقدار از عرضه‌ی مبدا یا تقاضای مقصد باقی‌مانده را انتخاب کنید.

گام ۳: مقدار $\tilde{x}_{(i,j)}(x_{(i,j)}^{(1)}, x_{(i,j)}^{(2)}, x_{(i,j)}^{(3)}, x_{(i,j)}^{(4)})$ را مساوی کمترین مقدار بین عرضه‌ی مبدا \tilde{a}_i و تقاضای مقصد \tilde{b}_j قرار دهید.

گام ۴: $\tilde{x}_{(i,j)}(x_{(i,j)}^{(1)}, x_{(i,j)}^{(2)}, x_{(i,j)}^{(3)}, x_{(i,j)}^{(4)})$ را از \tilde{a}_i و \tilde{b}_j ای که در گام ۳ انتخاب شد، کم کنید. سپس از جدول حمل و نقل، سطر یا ستون عرضه یا تقاضایی که پس از تفریق، مقدار آن صفر شده است را حذف کنید. اگر همه‌ی $i = (1, 2, \dots, m)$ و $j = (1, 2, \dots, n)$ صفر شده باشد متوقف شوید و گر نه به گام ۱ بروید.

در این قسمت، مثالی عددی از شبکه‌ی حمل و نقل فازی آورده شده است [۲۶].
شرکتی دارای ۴ مبدا S_1, S_2, S_3, S_4 و ۴ مقصد D_1, D_2, D_3, D_4 است. هزینه‌های حمل و نقل فازی از منبع i ام به مقصد j ام در ماتریس (۲.۶) داده شده است.

$$\begin{pmatrix} (1, 4, 9, 16) & (4, 9, 16, 25) & (9, 16, 25, 36) & (16, 25, 36, 49) \\ (4, 9, 16, 25) & (9, 16, 25, 36) & (16, 25, 36, 49) & (25, 36, 49, 64) \\ (9, 16, 25, 36) & (16, 25, 36, 49) & (25, 36, 49, 64) & (36, 49, 64, 81) \\ (16, 25, 36, 49) & (25, 36, 49, 64) & (36, 49, 64, 81) & (25, 36, 49, 81) \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

مقادیر عرضه به ترتیب برابر $(16, 25, 36, 49), (25, 36, 49, 64), (36, 49, 64, 81), (4, 16, 25, 36)$ و مقادیر تقاضا به ترتیب برابر $(16, 25, 36, 49), (4, 16, 25, 36), (25, 36, 49, 64), (36, 49, 64, 81)$ خواهد بود. بنابراین هزینه‌های حمل و نقل فازی به صورت جدول ۱.۶ است.

جدول ۱.۶: جدول هزینه‌های فازی شبکه‌ی حمل و نقل

مبدا	D1	D2	D3	D4	عرضه
S1	(1, 4, 9, 16)	(4, 9, 16, 25)	(9, 16, 25, 36)	(16, 25, 36, 49)	(16, 25, 36, 49)
S2	(4, 9, 16, 25)	(9, 16, 25, 36)	(16, 25, 36, 49)	(25, 36, 49, 64)	(36, 49, 64, 81)
S3	(9, 16, 25, 36)	(16, 25, 36, 49)	(25, 36, 49, 64)	(36, 49, 64, 81)	(25, 36, 49, 64)
S4	(16, 25, 36, 49)	(25, 36, 49, 64)	(36, 49, 64, 81)	(25, 36, 49, 81)	(4, 16, 25, 36)
تقاضا	(36, 49, 64, 81)	(25, 36, 49, 64)	(4, 16, 25, 36)	(16, 25, 36, 49)	

با اجرای الگوریتم راسل فازی، پس از چند تکرار به جدول نهایی ۲.۶ خواهید رسید.

جدول ۲.۶: جدول نتیجه شده بعد از اجرای روش الگوریتمی

مبدا	D1	D2	D3	D4	عرضه
S1	(1, 4, 9, 16) (16, 25, 36, 49)	(4, 9, 16, 25)	(9, 16, 25, 36)	(16, 25, 36, 49)	(16, 25, 36, 49)
S2	(4, 9, 16, 25) (-13, 13, 39, 65)	(9, 16, 25, 36) (-11, 11, 33, 60)	(16, 25, 36, 49) (-89, 23, 40, 105)	(25, 36, 49, 64)	(36, 49, 64, 81)
S3	(9, 16, 25, 36)	(16, 25, 36, 49)	(25, 36, 49, 64) (-24, 0, 24, 48)	(36, 49, 64, 81) (16, 25, 36, 49)	(25, 36, 49, 64)
S4	(16, 25, 36, 49)	(25, 36, 49, 64) (4, 16, 25, 36)	(36, 49, 64, 81)	(25, 36, 49, 81)	(4, 16, 25, 36)
تقاضا	(36, 49, 64, 81)	(25, 36, 49, 64)	(4, 16, 25, 36)	(16, 25, 36, 49)	

بنابراین جواب پایه‌ای امکان‌پذیر اولیه بدست می‌آید و با قرار دادن این جواب در تابع هدف، مقدار بهینه‌ی تابع هدف حاصل خواهد شد، به عبارتی:

$$\begin{aligned}
 \min \quad \tilde{Z} &= (Z^{(1)}, Z^{(2)}, Z^{(3)}, Z^{(4)}) \\
 &= (c_{11} \otimes x_{11}) \oplus (c_{21} \otimes x_{21}) \oplus (c_{22} \otimes x_{22}) \oplus \\
 &\quad (c_{23} \otimes x_{23}) \oplus (c_{33} \otimes x_{33}) \oplus (c_{34} \otimes x_{34}) \oplus (c_{42} \otimes x_{42}) \\
 &= ((1, 4, 9, 16) \otimes (16, 25, 36, 49)) \oplus ((4, 9, 16, 25) \otimes (-13, 13, 39, 65)) \oplus \\
 &\quad ((9, 16, 25, 36) \otimes (-11, 11, 33, 60)) \oplus ((16, 25, 36, 49) \otimes (-89, 23, 40, 105)) \oplus \\
 &\quad ((25, 36, 49, 64) \otimes (-24, 0, 24, 48)) \oplus ((36, 49, 64, 81) \otimes (16, 25, 36, 49)) \oplus \\
 &\quad ((25, 36, 49, 64) \otimes (4, 16, 25, 36)) \\
 &= (2505/5, 3748/25, 5229/25, 6973/25)
 \end{aligned}$$

مقدار قطعی این جواب برابر ۴۶۱۴ است، که مجدداً از تابع رتبه‌بندی یاگر برای به دست آوردن این مقدار قطعی استفاده شده است.

در بخش بعدی از تابع رتبه‌بندی دیگری استفاده خواهد شد که در اینجا، به بیان آن می‌پردازیم. فرض کنید $\tilde{A} = (a, b, c, d)$ یک عدد فازی دوزنقه‌ای باشد، آنگاه رابطه‌ی (۳.۶) را داریم.

$$R(\tilde{A}) = \frac{a+b+c+d}{4} \quad (3.6)$$

و اگر $\tilde{A} = (a, b, c)$ یک عدد فازی مثلثی باشد، آنگاه رابطه‌ی (۴.۶) را داریم.

$$R(\tilde{A}) = \frac{a+2b+c}{4} \quad (4.6)$$

ماکسیمم جریان شبکه

در مبحث به دست آوردن ماکسیمم جریان شبکه، شبکه‌ی دلخواهی که در ابتدای فصل توضیح داده شد را مجدداً به صورت تعریف ۴.۱.۶ بیان می‌کنیم [۱۰].

تعریف ۴.۱.۶. فرض کنید $N = (V, E)$ یک گراف جهت‌دار ساده‌ی همبند باشد که V مجموعه‌ی رئوس و E مجموعه‌ی یال‌ها باشد، در این صورت N را شبکه می‌نامند اگر دارای شرایط زیر باشد:

(الف) راس یکتای s از شبکه‌ی N یک منبع (مبدأ) نامیده می‌شود، اگر درجه‌ی ورودی صفر داشته باشد.

(ب) راس t از N مقصد نامیده می‌شود اگر درجه‌ی خروجی صفر داشته باشد. هر راس دیگر از N رئوس میانی نامیده می‌شود.

(ج) گراف N وزن‌دار است، لذا تابعی از E به مجموعه‌ی اعداد حقیقی نامنفی وجود دارد که برای هر یال $a \in E$ از N ، یک عدد صحیح نامنفی $c(a)$ اختصاص داده می‌شود که ظرفیت a نامیده می‌شود.

تعریف ۵.۱.۶. جریان در شبکه‌ی N از منبع s به مقصد t ، تابع $f(a)$ (تابع جریان) است که برای هر یال a یک عدد صحیح نامنفی اختصاص می‌دهد، به طوری که:

$$(i) \quad \text{برای هر یال } a \text{ داریم: } 0 \leq f(a) \leq c(a)$$

(ii) مجموع جریان وارد شده به مقصد t برابر با مجموع جریان خارج شده از منبع s است.

(iii) برای هر راس داخلی x ، مجموع جریان وارد شده به x برابر با مجموع جریان خارج شده از x است.

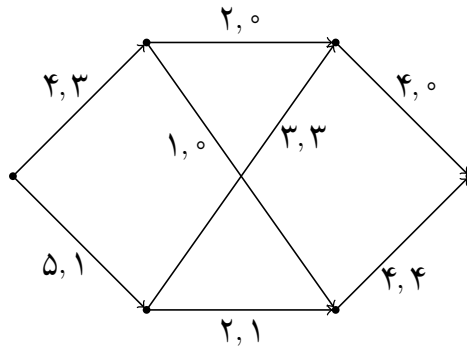
یک مساله‌ی مهم در مدل شبکه این است که میزان جریانی که از منبع s به مقصد t وارد می‌شود ماکسیمم گردد.

در اینجا، مدل جریان ماکسیمم شبکه شرح داده خواهد شد.

شبکه‌ی جریان با یک منبع و یک مقصد، با یک گراف جهت‌دار $N = (V, E)$ نمایش داده می‌شود. در مسایلی از جریان ماکسیمم شبکه، گراف جهت‌دار $N = (V, E)$ با ظرفیت‌های u_{ij} در نظر بگیرید و برای هر یال (i, j) مقدار $x_{(i,j)}$ برای جریان (همان وزن یال می‌باشد) متناظر در یال (i, j) را نسبت دهید، و مقدار f که نمایانگر مقدار جریان ماکسیمم در این شبکه از راس مبدأ s به راس مقصد t است را در نظر بگیرید.

ملاحظه ۶.۱.۶. مدل ماکسیمم جریان شبکه به صورت مدل یالی که در فصل ۱ بیان شد، مدل‌سازی شده است.

در شکل ۲.۶ نمونه‌ای از مدل شبکه بیان شد که در آن اولین عدد روی هر یال a ، ظرفیت $c(a)$ است و دومین عدد جریان عبوری روی یال a را نشان می‌دهد. مطالب این قسمت از منبع [۳۶، ۳۵] استخراج شده است.



شکل ۲.۶: یک مدل شبکه با جریان

(۱) روش برنامه‌ریزی خطی قطعی مربوط به مدل ماکسیمم جریان شبکه

$$\begin{cases} \text{Max } f \\ \text{s.t.} \\ \sum_j x_{(i,j)} = \sum_k x_{ki} + f & ; i = s \\ \sum_j x_{(i,j)} = \sum_k x_{ki} & ; \forall i \neq s, t \\ \sum_j x_{(i,j)} + f = \sum_k x_{ki} & ; \forall i = t \\ 0 \leq x_{(i,j)} \leq u_{ij} & ; \forall (i,j) \in E \end{cases} \quad (۵.۶)$$

حال با توجه به (۵.۶)، روش برنامه‌ریزی خطی فازی مدل جریان ماکسیمم شبکه بیان خواهد شد.

(۲) روش برنامه‌ریزی خطی فازی مربوط به مدل ماکسیمم جریان شبکه

فرض کنید گراف جهت‌دار $N = (V, \tilde{E})$ با ظرفیت‌های فازی \tilde{u}_{ij} باشد و برای هر کمان (i, j) ، مقدار $\tilde{x}_{(i,j)}$ برای جریان فازی متناظر در کمان (i, j) نسبت داده شده باشد. همچنین فرض کنید \tilde{f} نمایانگر مقدار جریان ماکسیمم فازی در این شبکه، از راس مبدأ s به راس مقصد t باشد.

$$\begin{cases} \text{Max } \tilde{f} \\ \text{s.t.} \\ \sum_j \tilde{x}_{(i,j)} = \sum_k \tilde{x}_{ki} \oplus \tilde{f} & ; i = s \\ \sum_j \tilde{x}_{(i,j)} = \sum_k \tilde{x}_{ki} & ; \forall i \neq s, t \\ \sum_j \tilde{x}_{(i,j)} \oplus \tilde{f} = \sum_k \tilde{x}_{ki} & ; \forall i = t \\ 0 \leq \tilde{x}_{(i,j)} \leq \tilde{u}_{ij} & ; \forall (i,j) \in E \end{cases} \quad (۶.۶)$$

در این قسمت به حل مدل جریان ماکسیمم شبکه در حالت فازی، می‌پردازیم.

مراحل حل مدل جریان ماکسیمم فازی و پیدا کردن جواب بهینه‌ی فازی با کمک روش برنامه‌ریزی خطی را می‌توان به صورت روابط (۷.۶) بیان کرد.

گام ۱: فرمول‌بندی مدل

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Max } \tilde{f} \\ \text{s.t.} \\ \sum_j \tilde{x}_{(i,j)} = \sum_k \tilde{x}_{ki} \oplus \tilde{f} \quad ; i = s \\ \sum_j \tilde{x}_{(i,j)} = \sum_k \tilde{x}_{ki} \quad ; \forall i \neq s, t \\ \sum_j \tilde{x}_{(i,j)} \oplus \tilde{f} = \sum_k \tilde{x}_{ki} \quad ; \forall i = t \\ 0 \leq \tilde{x}_{(i,j)} \leq \tilde{u}_{ij} \quad ; \forall (i, j) \in E \end{array} \right. \quad (7.6)$$

$\tilde{x}_{(i,j)}$ یک عدد فازی نامنفی می‌باشد.

گام ۲: فرض کنید همه‌ی پارامترهای $\tilde{u}_{ij}, \tilde{f}, \tilde{x}_{(i,j)}$ به ترتیب با اعداد فازی مثلثی نامنفی $(a_{ij}, b_{ij}, c_{(i,j)})$ و (f_1, f_2, f_3) و (u_{ij}, v_{ij}, w_{ij}) نمایش داده شوند، آنگاه فرمول‌بندی برنامه‌ریزی خطی فازی مدل، که از گام ۱ به دست آمده، به صورت روابط (۸.۶) می‌باشد.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{max } (f_1, f_2, f_3) \\ \text{s.t.} \\ \sum_j (a_{ij}, b_{ij}, c_{(i,j)}) = \sum_k (a_{ki}, b_{ki}, c_{ki}) \oplus (f_1, f_2, f_3) \quad ; i = s \\ \sum_j (a_{ij}, b_{ij}, c_{(i,j)}) = \sum_k (a_{ki}, b_{ki}, c_{ki}) \quad ; \forall i \neq s, t \\ \sum_j (a_{ij}, b_{ij}, c_{(i,j)}) \oplus (f_1, f_2, f_3) \approx \sum_k (a_{ki}, b_{ki}, c_{ki}) \quad ; i = t \\ (a_{ij}, b_{ij}, c_{(i,j)}) \leq (u_{ij}, v_{ij}, w_{ij}) \quad ; \forall (i, j) \in E \end{array} \right. \quad (8.6)$$

گام ۳: تبدیل قیدهای نامساوی به قیدهای تساوی، با معرفی متغیر نامنفی

$$\tilde{s}_{ij} = (s'_{ij}, s''_{ij}, s'''_{ij}), \forall (i, j) \in E$$

، بنابراین روابط برنامه‌ریزی خطی که در گام ۲ به دست آمده، به صورت روابط (۹.۶) می‌باشد.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{max } (f_1, f_2, f_3) \\ \text{s.t.} \\ \sum_j (a_{ij}, b_{ij}, c_{(i,j)}) = \sum_k (a_{ki}, b_{ki}, c_{ki}) \oplus (f_1, f_2, f_3) \quad ; i = s \\ \sum_j (a_{ij}, b_{ij}, c_{(i,j)}) = \sum_k (a_{ki}, b_{ki}, c_{ki}) \quad ; \forall i \neq s, t \\ \sum_j (a_{ij}, b_{ij}, c_{(i,j)}) \oplus (f_1, f_2, f_3) \approx \sum_k (a_{ki}, b_{ki}, c_{ki}) \quad ; i = t \\ (a_{ij}, b_{ij}, c_{(i,j)}) \oplus (s'_{ij}, s''_{ij}, s'''_{ij}) \approx (u_{ij}, v_{ij}, w_{ij}) \quad ; \forall (i, j) \in E \end{array} \right. \quad (9.6)$$

گام ۴ : با استفاده از تابع رتبه‌بندی تعریف شده در (۴.۶) و عملیات ریاضی روی اعداد فازی، مدل برنامه‌ریزی خطی فازی که در گام ۳ به دست آمده، به مدل برنامه‌ریزی خطی قطعی (۱۰.۶) تبدیل می‌شود.

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \quad \frac{f_1 + 2f_2 + f_3}{4} \\ s.t. \\ \sum_j a_{ij} = \sum_k a_{ki} + f_1 \quad ; i = s \\ \sum_j a_{ij} = \sum_k a_{ki} \quad ; \forall i \neq s, t \\ \sum_j a_{ij} + f_1 = \sum_k a_{ki} \quad ; i = t \\ \sum_j b_{ij} = \sum_k b_{ki} + f_2 \quad ; i = s \\ \sum_j b_{ij} = \sum_k b_{ki} \quad ; \forall i \neq s, t \\ \sum_j b_{ij} + f_2 = \sum_k b_{ki} \quad ; i = t \\ \sum_j c_{(i,j)} = \sum_k c_{ki} + f_3 \quad ; i = s \\ \sum_j c_{(i,j)} = \sum_k c_{ki} \quad ; \forall i \neq s, t \\ \sum_j c_{(i,j)} + f_3 = \sum_k c_{ki} \quad ; i = t \\ a_{ij} + s'_{ij} = u_{ij}, \quad b_{ij} + s''_{ij} = v_{ij}, \quad c_{(i,j)} + s'''_{ij} = w_{ij} \\ b_{ij} - a_{ij} \geq 0, \quad c_{(i,j)} - b_{ij} \geq 0, \quad a_{ij} \geq 0, \quad b_{ij} \geq 0, \quad c_{(i,j)} \geq 0 \\ s''_{ij} - s'_{ij} \geq 0, \quad s'''_{ij} - s''_{ij} \geq 0, \quad s'_{ij} \geq 0, \quad s''_{ij} \geq 0, \quad s'''_{ij} \geq 0 \\ f_2 - f_1 \geq 0, \quad f_3 - f_2 \geq 0, \quad f_1 \geq 0, \quad f_2 \geq 0, \quad f_3 \geq 0 \\ \forall (i, j) \in E \end{array} \right. \quad (10.6)$$

گام ۵ : با حل مدل برنامه‌ریزی خطی قطعی، جریان بهینه‌ی f_1, f_2, f_3 به دست می‌آید.
گام ۶ : مقدار جریان ماکسیم فازی با قرار دادن مقادیر f_1, f_2, f_3 در رابطه‌ی $\tilde{f} = (f_1, f_2, f_3)$ به دست می‌آید.

مطالب زیر از منبع [۱] استخراج شده است.

کاربردهایی از مدل حمل و نقل

از جمله‌ی شبکه‌های حمل و نقل، می‌توان به فرودگاه‌ها، ایستگاه‌های راه آهن، خطوط زمینی اشاره نمود. با استفاده از تمام این شبکه‌ها روزانه می‌توان جابجایی‌های فراوانی انجام داد که از جمله‌ی آن‌ها می‌توان به موارد زیر اشاره کرد.

۱. جابجایی مسافران از طریق خطوط هوایی و زمینی

۲. حمل و نقل مواد غذایی، مواد سوختی، کالای تولیدی صنعتی و ...

کاربردهایی از مدل ماکسیمم جریان شبکه

۱. تعیین بیشترین ظرفیت (بر حسب تن) شبکه‌ی خط محلول زغال سنگ از معدن زغال سنگ در وایومینگ^۸ به نیروگاه برق هاوستون^۹ (با تلمبه کردن آب در خطوط لوله‌ی آبی، زغال سنگ انتقال می‌یابد).

۲. شبکه‌ی انتقال جریان آب و برق

۳. ماکسیمم‌سازی جریان نفت از طریق سیستم خطوط لوله

^۸Wyoming

^۹Houston

فصل ۷

مدل فازی گراف‌های دوبخشی

۱.۷ توصیف مدل

مدل گراف دوبخشی

در مساله‌ی مدل‌سازی گراف‌ها، هرگاه از ساختار گراف‌های دوبخشی و ویژگی‌ها و خواص آن استفاده شود، مدل مورد نظر، مدل گراف‌های دوبخشی نامیده می‌شود.

تعریف ۱.۱.۷. گراف دوبخشی:

در گراف‌های دوبخشی ساختار گراف به صورت $G = (V, E)$ بیان می‌شود که در آن $V = V_1 \cup V_2$ است، به عبارتی باید بتوان مجموعه‌ی راس‌های گراف را به دو زیرمجموعه‌ی V_1 و V_2 افزایش داد به طوری که هر یال یک انتها در V_1 و یک انتها در V_2 داشته باشد.

ملاحظه ۲.۱.۷. مدل گراف‌های دوبخشی به صورت مدل راسی-یالی که در فصل ۱ بیان شد، مدل‌سازی می‌شود.

گراف دوبخشی فازی [۴۲]

گراف فازی $\tilde{G} = (\delta, \mu)$ ، گراف دوبخشی فازی نامیده می‌شود اگر یک زیرگراف فراگیر فازی H داشته باشد که دوبخشی باشد و به ازای تمام یال‌های (u, v) که در زیرگراف H نیستند، داشته باشیم: $\mu(u, v) < \mu^\infty(u, v)$ ، به عبارتی آن یال‌ها ضعیف باشند.

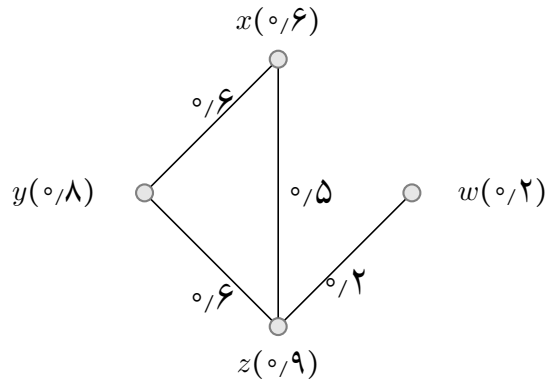
مثال ۳.۱.۷. گراف شکل ۱.۷ را در نظر بگیرید. این گراف فازی، یک گراف دوبخشی فازی با دو افزایش از مجموعه‌ی رئوس $V_1 = \{x, z\}$ و $V_2 = \{y, w\}$ می‌باشد.

زیرا دارای زیرگراف فازی فراگیری مانند شکل ۲.۷ می‌باشد که اولاً دوبخشی است، دوماً به ازای یال (x, z) که در آن نیست داریم: $\mu(x, z) < \mu^\infty(x, z)$ زیرا:

مطابق تعریف ۱۴.۳.۱ ابتدا قدرت همبندی بین دو راس x و z را به دست می‌آوریم.

$$\mu^1(xz) = \sup\{\mu(x, z)\} = 0.5$$

$$\mu^2(xz) = \sup\{\min\{\mu(xu_1), \mu(u_1z)\}\} = \sup\{0.6, 0.6\} = 0.6$$



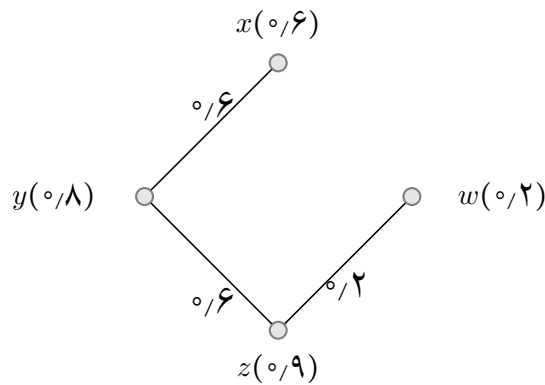
شکل ۱.۷: گراف دوبخشی فازی

در نتیجه:

$$\mu^\infty(x, z) = \sup\{\mu^1(xz), \mu^2(xz)\} = \sup\{0.5, 0.6\} = 0.6$$

بنابراین به ازای یال (x, z) که در زیرگراف فراگیر شکل ۲.۷ وجود ندارد رابطه‌ی (۱.۷) را داریم.

$$\mu(x, z) < \mu^\infty(x, z) \quad (1.7)$$



شکل ۲.۷: زیرگراف فراگیر فازی

ملاحظه ۴.۱.۷. در بررسی مسایل این فصل، مدل گراف دوبخشی به صورت $\tilde{G} = (V, E, \tilde{W})$ مورد بررسی قرار می‌گیرد، یعنی ساختار گراف را قطعی در نظر گرفته و وزن یال‌ها، مقادیر فازی خواهند داشت.

مطالب این قسمت از منبع [۱۰] استخراج شده است.

۲.۷ مدل جورسازی

در این فصل، مدلی از گراف‌های دوبخشی به نام مدل جورسازی^۱، مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۱.۲.۷ بررسی مدل

مدل جورسازی روی تمام ساختار گراف‌ها قابل بررسی می‌باشد، اما روی مدل گراف‌های دوبخشی به طور خاصی بررسی شده است. در این بخش نیز تمام بررسی‌هایی که در مورد مدل جورسازی انجام می‌شود، روی مدل گراف‌های دوبخشی خواهد بود. در زیر تعاریف و مقدماتی مرتبط با این مدل بیان می‌شود.

تعریف ۱.۲.۷. جورسازی: زیرمجموعه‌ی M از E را یک جورسازی در گراف G می‌نامند اگر هیچ دو یالی در G مجاور نباشند.

تعریف ۲.۲.۷. جورسازی وزن‌دار: جورسازی M را که به عناصرش وزن‌هایی نسبت داده شده، جورسازی وزن‌دار می‌گویند.

تعریف ۳.۲.۷. دو انتهای یک یال در جورسازی M را، جورشده تحت M می‌گویند.

تعریف ۴.۲.۷. v را M -اشباع شده گویند اگر یالی از جورسازی M از راس v بگذرد، در غیر این صورت راس v ، M -اشباع نشده است.

تعریف ۵.۲.۷. جورسازی تام^۲: اگر هر راس گراف G ، M -اشباع شده باشد، جورسازی M تام است.

تعریف ۶.۲.۷. جورسازی ماکسیم^۳: M جورسازی ماکسیم است اگر G دارای جورسازی M' با $|M'| > |M|$ نباشد.

ملاحظه ۷.۲.۷. هر جورسازی تام، یک جورسازی ماکسیم است.

تعریف ۸.۲.۷. جورسازی ماکسیم وزن‌دار: جورسازی وزن‌دار ماکسیم، پیدا کردن جورسازی وزن‌داری است به طوری که مجموع وزن یال‌ها ماکسیم باشد.

تعریف ۹.۲.۷. مسیر M -متناوب^۴: یک مسیر M -متناوب در G مسیری است که یال‌هایش متناوباً در $E \setminus M$ و M هستند.

تعریف ۱۰.۲.۷. مسیر M -افزوده^۵: مسیر M -متناوبی است که مبدأ و انتهایش M -اشباع نشده هستند.

^۱matching

^۲perfect matching

^۳maximun matching

^۴M- alternating path

^۵M- augmenting path

تعریف ۱۱.۲.۷. جورسازی القایی^۶: جورسازی M برای G یک جورسازی القایی است اگر و فقط اگر هیچ دو یال آن با یالی از G به یکدیگر متصل نباشند.

تعریف ۱۲.۲.۷. تفاضل متقارن دو جورسازی: تفاضل متقارن دو جورسازی M و M' را به صورت $M \Delta M'$ نمایش می‌دهند و حاصل آن تمام اعضای M و M' به جز اشتراکشان است.

تعریف ۱۳.۲.۷. نشاندار کردن مناسب راس‌ها: نشاندار کردن مناسب راس‌ها به صورت تابع حقیقی مقدار l روی مجموعه‌ی راس‌های $X \cup Y$ تعریف می‌شود به طوری که رابطه‌ی (۲.۷) را داریم.

$$(2.7) \quad \text{برای همه‌ی } y \in Y, x \in X \quad l(x) + l(y) \geq w(xy)$$

(عدد حقیقی $l(v)$ را نشان راس v می‌خوانند).

ملاحظه ۱۴.۲.۷. نشاندار کردن مناسب راس‌ها، بدون توجه به اینکه وزن یال‌ها چه مقدارند امکان دارد، یک چنین نشاندارکننده مناسب راس‌ها تابع l است که به وسیله‌ی رابطه‌ی (۳.۷) داده می‌شود.

$$(3.7) \quad \begin{cases} l(x) = \max_{y \in Y} w(xy) & , x \in X \text{ اگر} \\ l(y) = 0 & , y \in Y \text{ اگر} \end{cases}$$

ملاحظه ۱۵.۲.۷. اگر l نشاندارکننده‌ی مناسب راس‌ها باشد، مجموعه‌ی همه‌ی آن یال‌هایی را که $l(x) + l(y) = w(xy)$ با E_l نمایش می‌دهیم یعنی رابطه‌ی (۴.۷) را داریم.

$$(4.7) \quad E_l = \{xy \in E \mid l(x) + l(y) = w(xy)\}$$

تعریف ۱۶.۲.۷. زیرگراف برابری^۷: زیرگراف فراگیر G با مجموعه‌ی یالی E_l را که متناظر با l ، نشاندارکننده‌ی مناسب راس‌ها است، زیرگراف برابری می‌نامند و آن را با G_l نمایش می‌دهند.

تعریف ۱۷.۲.۷. برای هر مجموعه‌ی S از راس‌ها در G ، مجموعه‌ی همسایگی S در G را مجموعه‌ی همه‌ی راس‌های مجاور به راس‌ها در S تعریف می‌کنیم و آن را با $N_G(S)$ نمایش می‌دهیم.

ملاحظه ۱۸.۲.۷. برای راحتی کار، از $N(S)$ به جای $N_G(S)$ استفاده می‌کنیم.

در اینجا به بیان قضیه‌ی هال^۸ می‌پردازیم.

قضیه ۱۹.۲.۷. فرض کنید G گراف دوبخشی با بخش‌های (X, Y) باشد. در این صورت G شامل یک جورسازی است که هر راس X را اشباع می‌کند اگر و فقط اگر رابطه‌ی (۵.۷) را داشته باشیم.

$$(5.7) \quad \text{برای همه‌ی } S \subseteq X \quad |N(S)| \geq |S|$$

قضیه ۲۰.۲.۷. (برگ^۹) جورسازی M در G یک جورسازی ماکسیمم است اگر و فقط اگر G شامل هیچ مسیر M -افزوده نباشد.

^۶induced matching

^۷equality subgraph

^۸Hall

^۹Berge

در این فصل هر جا که لازم است از تابع رتبه‌بندی ۷.۷ استفاده خواهد شد. رتبه‌بندی اعداد فازی تعمیم یافته با استفاده از مرکز ثقل اعداد فازی ذوزنقه‌ای تعمیم یافته‌ی $\tilde{A} = (a, b, c, d; w)$ به صورت رابطه‌ی (۶.۷) و (۷.۷) تعریف شده است [۵۲].

$$I_{\tilde{A}}(\bar{x}_0, \bar{y}_0) = \left[\frac{\alpha(\frac{a+2b}{3}) + \beta(\frac{b+c}{3}) + \gamma(\frac{2c+d}{3})}{\alpha + \beta + \gamma}, \frac{\alpha(\frac{w}{3}) + \beta(\frac{w}{3}) + \gamma(\frac{w}{3})}{\alpha + \beta + \gamma} \right] \quad (۶.۷)$$

که

$$\alpha = \frac{\sqrt{(c-3b+2d)^2 + w^2}}{6}, \beta = \frac{\sqrt{(2c+d-a-2b)^2}}{3}$$

$$\gamma = \frac{\sqrt{(3c-2a-b)^2 + w^2}}{6}$$

بنابراین تابع رتبه‌بندی اعداد فازی ذوزنقه‌ای تعمیم یافته با توجه به رابطه‌ی (۶.۷) که از مرکز ثقل استفاده کرده است، به صورت رابطه‌ی (۷.۷) می‌باشد.

$$R(\tilde{A}) = (\bar{x}_0 \times \bar{y}_0) = \left[\left[\frac{\alpha(\frac{a+2b}{3}) + \beta(\frac{b+c}{3}) + \gamma(\frac{2c+d}{3})}{\alpha + \beta + \gamma} \right] \times \left[\frac{\alpha(\frac{w}{3}) + \beta(\frac{w}{3}) + \gamma(\frac{w}{3})}{\alpha + \beta + \gamma} \right] \right] \quad (۷.۷)$$

۳.۷ روش حل مدل جورسازی

سعی داریم مدل جورسازی را با دو روش برنامه‌ریزی خطی و روش الگوریتمی حل نماییم. ابتدا به شرح روش برنامه‌ریزی خطی در حالت قطعی می‌پردازیم، سپس روش‌های الگوریتمی برای مدل جورسازی بیان می‌شود و در انتها روش برنامه‌ریزی خطی مربوط به مدل را در حالت فازی بیان می‌کنیم.

(۱) روش برنامه‌ریزی خطی مربوط به مدل جورسازی

حالت بهینه‌ی مدل جورسازی بدین صورت قابل بیان است، که می‌خواهیم از بین تمام جورسازی‌های ممکن، ماکسیمم جورسازی را به دست آوریم.

دو حالت برای بیان روش برنامه‌ریزی خطی در مدل جورسازی وجود دارد.

(i) مدل جورسازی روی گراف بدون وزن بررسی شود.

(ii) مدل جورسازی روی گرافی که یال‌های آن وزن دار هستند، بررسی شود.

برای بیان روش ابتدا متغیر $x_{(i,j)}$ ای در نظر می‌گیریم که مقدار یک می‌گیرد اگر یال (i, j) در جورسازی باشد، و در غیر این صورت مقدار صفر خواهد گرفت. همچنین متغیر w_{ij} ای در نظر می‌گیریم که معرف وزنی است که به هر یال نسبت داده می‌شود.

روش برنامه‌ریزی خطی مدل در گراف بدون وزن به صورت (۸.۷) بیان می‌شود [۲۴].

$$\begin{cases} \max & Z = \sum_{(i,j) \in E} x_{(i,j)} \\ \text{s.t.} & \\ & \sum_{j \in V} x_{(i,j)} \leq 1 \quad \forall i \in V, (i,j) \in E \\ & x_{(i,j)} \in \{0, 1\} \quad \forall (i,j) \in E \end{cases} \quad (8.7)$$

محدودیت اول بیان می‌کند که به ازای تمام یال‌هایی که با هم مجاور هستند، تنها یکی از آن‌ها مقدار یک می‌گیرد و در جورسازی خواهد بود. محدودیت دوم نیز به متغیر $x_{(i,j)}$ مقادیر صفر و یک نسبت می‌دهد.

روش برنامه‌ریزی خطی مدل در گراف وزن‌دار به صورت (۹.۷) بیان می‌شود.

$$\begin{cases} \max & Z = \sum_{(i,j) \in E} w_{ij} x_{(i,j)} \\ \text{s.t.} & \\ & \sum_{j \in V} x_{(i,j)} \leq 1 \quad \forall i \in V, (i,j) \in E \\ & x_{(i,j)} \in \{0, 1\} \quad \forall (i,j) \in E \\ & w_{ij} > 0 \end{cases} \quad (9.7)$$

روش برنامه‌ریزی خطی فازی مدل جورسازی را در ادامه‌ی فصل خواهیم آورد.

مطالب این قسمت از منبع [۱۰] استخراج شده است.

حال به بیان الگوریتمی می‌پردازیم که بتوان به وسیله‌ی آن در گراف دوبخشی با بخش‌های (X, Y) یک جورسازی یافت به طوری که هر راس X را بپوشاند.

(۲) روش الگوریتمی جستجوی مسیر ^{۱۰} مربوط به مدل جورسازی گراف بدون وزن:

با یک جورسازی دلخواه شروع کنید.

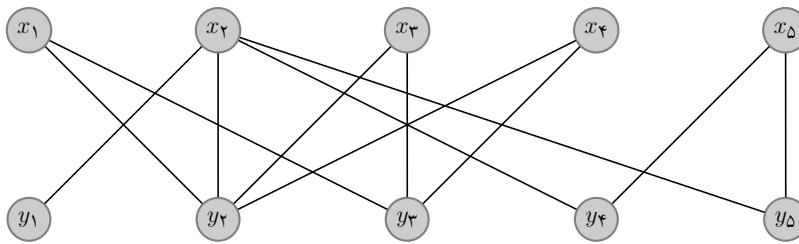
(۱) اگر M هر راس X را اشباع کند، توقف کنید. در غیر این صورت فرض کنید u یک راس M -اشباع نشده در X باشد. قرار دهید: $S = \{u\}$ و $T = \emptyset$.

(۲) اگر $N(S) = T$ آنگاه $|N(S)| < |S|$ ، (زیرا $|T| = |S| - 1$). توقف کنید، زیرا بنابر قضیه‌ی ۱۹.۲.۷ جورسازی وجود ندارد که هر راس X را اشباع کند. در غیر این صورت، قرار دهید $y \in N(S) \setminus T$.

(۳) اگر y, M -اشباع شده باشد، فرض کنید $yz \in M$. $S \cup \{z\}$ را به جای S و $T \cup \{y\}$ را به جای T قرار دهید و به مرحله‌ی ۲ بروید، در غیر این صورت، فرض کنید P یک مسیر (u, y) M -افزوده باشد. $\hat{M} = M \Delta E(P)$ را به جای M قرار دهید و به مرحله‌ی ۱ بروید.

^{۱۰}algorithm path search

مثال ۱.۳.۷. بررسی کنید آیا در گراف دوبخشی شکل ۳.۷، جورسازی وجود دارد که تمام رئوس X را اشباع کند.



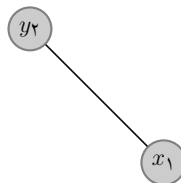
شکل ۳.۷: گراف دوبخشی G

جورسازی دلخواه $M = \{x_2y_2, x_3y_3, x_5y_5\}$ را در نظر بگیرید.

(تکرار اول)

(۱) $T = \emptyset$ و $S = \{x_1\}$ قرار می‌دهیم.

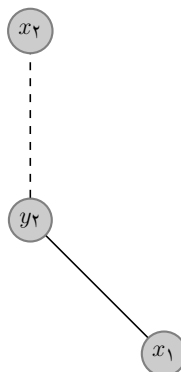
(۲) $N(S) = \{y_2, y_3\}$ است. حال $y_2 \in N(S) \setminus T$ در نظر بگیرید.



شکل ۴.۷: درخت گام ۲ تکرار اول

(۳) y_2 توسط M اشباع شده است، بنابراین $y_2x_2 \in M$. قرار می‌دهیم $T = \{y_2\}$ و

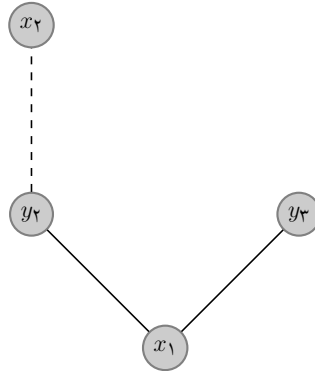
$S = \{x_1, x_2\}$. دوباره به گام ۲ می‌رویم



شکل ۵.۷: درخت گام ۳ تکرار اول

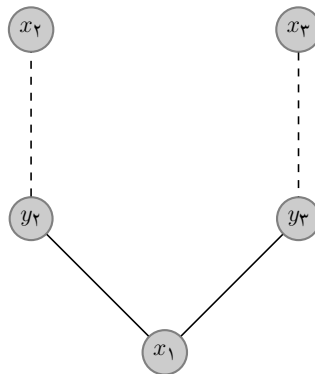
(تکرار دوم)

(۲) $N(S) = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$ است و $y_3 \in N(S) \setminus T$ را انتخاب می‌کنیم.



شکل ۶.۷: درخت گام ۲ تکرار دوم

(۳) y_3 توسط M اشباع شده است، بنابراین $y_3x_3 \in M$ داریم: $T = \{y_2, y_3\}$ و $S = \{x_1, x_2, x_3\}$ دوباره به گام ۲ می‌رویم.



شکل ۷.۷: درخت گام ۳ تکرار دوم

(تکرار سوم)

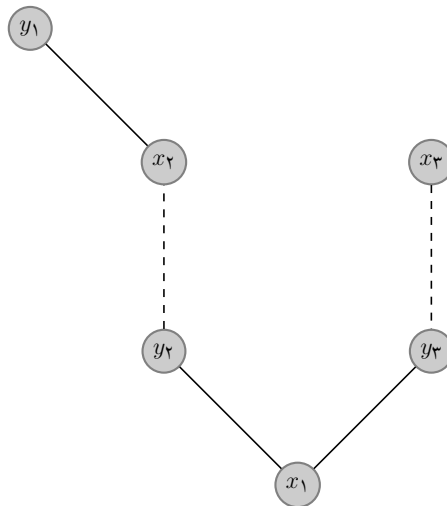
(۲) $N(S) = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$ است و $y_1 \in N(S) \setminus T$ در نظر می‌گیریم.

(۳) y_1 توسط M اشباع نشده است بنابراین مسیر P ، M افزوده‌ی $x_1y_2x_2y_1$ وجود دارد،

پس

$$\hat{M} = \{x_1y_2, x_2y_1, x_3y_3, x_5y_5\}$$

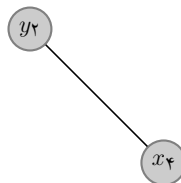
نتیجه می‌شود. حال $M \leftarrow \hat{M}$.



شکل ۸.۷: درخت گام ۲ تکرار سوم

(تکرار چهارم)

- (۱) هر راس X را اشباع نمی‌کند بنابراین خواهیم داشت:
 x_4 ، M اشباع نشده است، حال $S = \{x_4\}$ و $T = \emptyset$ قرار دهید.
 (۲) $N(S) = \{y_2, y_3\}$ است و $T = \emptyset$ در نظر می‌گیریم.



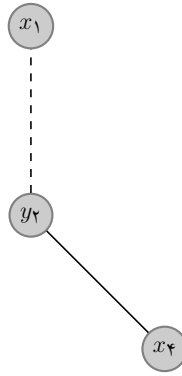
شکل ۹.۷: درخت گام ۲ تکرار چهارم

- (۳) y_2 ، M اشباع شده است، بنابراین $y_2 x_1 \in M$ در نظر بگیرید و قرار می‌دهیم:
 $S = \{x_4, x_1\}$ و $T = \{y_2\}$

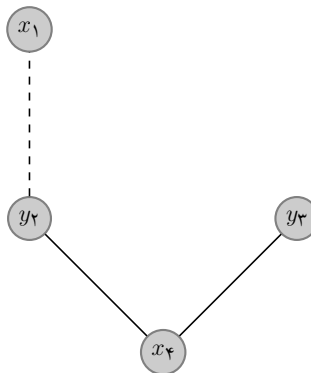
(تکرار پنجم)

- (۲) $N(S) = \{y_2, y_3\}$ است و $T = \{y_2\}$ قرار دهید.
 (۳) y_3 توسط M اشباع شده است، بنابراین $y_3 x_3 \in M$ در نظر می‌گیریم و قرار می‌دهیم:
 $S = \{x_1, x_3, x_4\}$ و $T = \{y_2, y_3\}$

(تکرار ششم)



شکل ۱۰.۷: درخت گام ۳ تکرار چهارم



شکل ۱۱.۷: درخت گام ۲ تکرار پنجم

(۲) $N(S) = \{y_2, y_3\}$ است، حال چون $N(S) = T$ توقف می‌کنیم و طبق قضیه‌ی هال جورسازی پیدا نشد که بتواند تمام راس‌های X را اشباع کند.

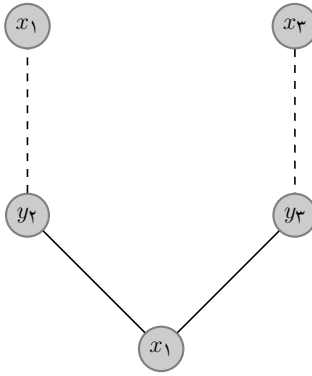
قضیه ۲.۳.۷. فرض کنید l ، نشان‌دارکننده‌ی مناسب راس‌های G باشد، اگر G_l شامل جورسازی تام M^* باشد، آنگاه M^* یک جورسازی ماکسیمم G است.

حال به بیان الگوریتمی برای به دست آوردن جورسازی ماکسیمم در گراف وزن‌دار می‌پردازیم، این الگوریتم برای گراف‌های دوبخشی کامل کاربرد دارد. حال اگر گراف دوبخشی کامل نباشد، یال‌هایی را که برای دوبخشی کامل شدن گراف لازم است، با وزن صفر به گراف اضافه می‌کنیم و سپس الگوریتم را به کار می‌بریم.

(۳) روش الگوریتمی کوهن-مانکرز^{۱۱} مربوط به مدل جورسازی در گراف وزن‌دار

با l نشان‌دارکننده‌ی مناسب راس‌ها شروع کنید، G_l را تعیین کرده و یک جورسازی دلخواه M در G_l انتخاب نمایید، سپس مطابق گام‌های زیر عمل نمایید:

^{۱۱}Kuhn-Munkres Algorithm



شکل ۱۲.۷: درخت گام ۳ تکرار پنجم

(۱) اگر X ، M -اشباع شده باشد، آنگاه M جورسازی تام بوده (چون $|X| = |Y|$) و لذا بنابر قضیه ۲.۳.۷، یک جورسازی ماکسیمم است؛ در این حالت توقف کنید. در غیر این صورت، فرض کنید u یک راس M -اشباع نشده باشد. قرار دهید: $S = \{u\}, T = \emptyset$.

(۲) اگر $N_{G_l}(S) \supset T$ آنگاه به مرحله ۳ بروید، در غیر این صورت $N_{G_l}(S) = T$. مقدار α_l را از رابطه (۱۰.۷) محاسبه کنید.

$$\alpha_l = \min_{x \in S, y \notin T} \{l(x) + l(y) - w(xy)\} \quad (10.7)$$

همچنین نشاندار کننده \hat{l} را که به وسیله رابطه (۱۱.۷) داده می‌شود محاسبه کنید (توجه کنید که $\alpha(l) > 0, N_{G_l}(S) \supset T$). \hat{l} را به جای l و G_l را به جای G_l قرار دهید.

$$\hat{l}(v) = \begin{cases} l(v) - \alpha & , v \in S \text{ اگر} \\ l(v) + \alpha & , v \in T \text{ اگر} \\ l(v) & , \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (11.7)$$

(۳) راس y را در $N_{G_l} \setminus T$ انتخاب کنید. همچون مراحل الگوریتم جستجوی مسیر که قبلاً توضیح داده شد، بررسی کنید که آیا y ، M -اشباع شده است یا نه. اگر y ، M -اشباع شده باشد، با $yz \in M$ ، $S \cup \{z\}$ را به جای S و $T \cup \{y\}$ را به جای T قرار دهید و به مرحله ۲ بروید. در غیر این صورت، فرض کنید P یک مسیر (u, y) ی M -افزوده در G_l است، $\hat{M} = M \Delta E(P)$ را به جای M بگذارید و به مرحله ۱ بروید.

برای نمایش الگوریتم کوهن-مانکرز، مناسب است که گراف کامل وزن دار G را با ماتریس $W = [w_{ij}]$ معرفی کنیم که در آن وزن یال $x_i y_j$ در G است.

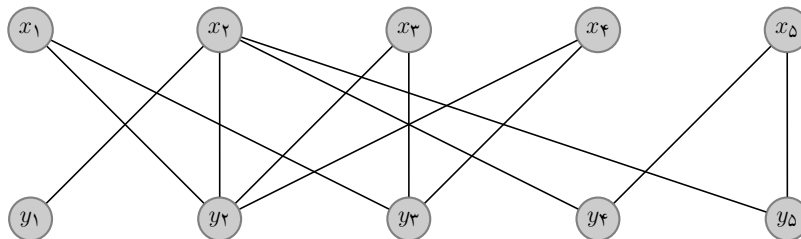
مثال ۳.۳.۷. ماتریس (۱۲.۷) داده شده است. الگوریتم کوهن-مانکرز را روی آن اجرا کنید.

$$(12.7) \quad \begin{bmatrix} 3 & 5 & 5 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

نشانداری مناسبی مناسب راس‌ها را که در رابطه‌ی (۱۰.۷) بیان شد در ماتریس (۱۳.۷) نشان داده‌ایم. (با قرار دادن x_i در طرف راست سطر i ام ماتریس و نشان y_j زیر ستون j ام)

$$(13.7) \quad \begin{bmatrix} 3 & 5 & 5 & 4 & 1 & \boxed{5} \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & \boxed{2} \\ 2 & 4 & 4 & 1 & 0 & \boxed{4} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 3 & \boxed{3} \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \end{bmatrix}$$

گراف G_l متناسب آن مطابق شکل ۱۳.۷ است.



شکل ۱۳.۷: گراف G_l

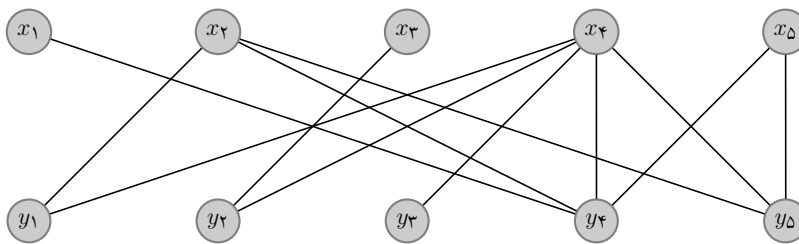
گراف G_l به دست آمده، برابر همان گرافی است که در مثال ۱.۳.۷ داشتیم؛ در مثال ۱.۳.۷ نشان دادیم که این گراف جورسازی تام ندارد و مجموعه‌ی $S = \{x_1, x_3, x_4\}$ و $T = \{y_2, y_3\}$ به دست آمد. بنابراین $N_{G_l}(S) = \{y_2, y_3\} = T$ پس مقدار α_l طبق رابطه‌ی (۱۰.۷) برابر یک به دست آمد. بنابراین (۱۴.۷) را داریم.

$$(14.7) \quad \hat{l}(v) = \begin{cases} l(v) - 1 & , v \in S \text{ اگر} \\ l(v) + 1 & , v \in T \text{ اگر} \\ l(v) & , \text{در غیر این صورت،} \end{cases}$$

پس نشانداری مناسبی مناسب راس‌های اولیه را به صورت (۱۵.۷) تغییر می‌دهیم.

$$\begin{bmatrix}
 3 & 5 & 5 & 4 & 1 & \boxed{4} \\
 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & \boxed{2} \\
 2 & 4 & 4 & 1 & 0 & \boxed{3} \\
 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \boxed{0} \\
 1 & 2 & 1 & 3 & 3 & \boxed{3} \\
 \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{0} &
 \end{bmatrix} \tag{15.7}$$

زیرگراف برابری $G_{\hat{I}}$ ی متناظر \hat{I} در شکل ۱۴.۷ رسم شده است



شکل ۱۴.۷: زیرگراف برابری $G_{\hat{I}}$

مطابق شکل ۱۴.۷ داریم: $N_{G_{\hat{I}}}(S) = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$

راس y_1 را در $N_{G_{\hat{I}}}(S) \setminus T$ انتخاب می‌کنیم. با به کار بردن الگوریتم جستجوی مسیر، زیرگراف برابری دارای جورسازی تام $\{x_1y_4, x_2y_1, x_3y_3, x_4y_2, x_5y_5\}$ است، بنابر قضیه ۲.۳.۷ جورسازی به دست آمده ماکسیم G است.

اگر وزن روی یال‌ها را نتوانیم به طور دقیق مشخص کنیم، به یال‌ها وزن‌هایی با اعداد فازی نسبت می‌دهیم و به راحتی مانند حالت قطعی، با استفاده از الگوریتم کوهن-مانکرز و با استفاده از تابع رتبه‌بندی (۷.۷)، جورسازی ماکسیم وزن‌دار فازی را به دست می‌آوریم.

۱.۳.۷ روش برنامه‌ریزی خطی فازی مدل جورسازی

حال می‌خواهیم مدل جورسازی را به طور دقیق‌تر در محیط فازی بررسی کنیم. ابتدا تعاریفی را بیان می‌کنیم که در ادامه‌ی فصل به‌کارگرفته می‌شوند.

تعریف ۴.۳.۷. رخداد فازی^{۱۲}: [۵۴]

رخداد فازی مجموعه‌ی فازی A می‌باشد، زمانی که اتفاق می‌افتد کران‌هایش به طور دقیق مشخص نیست و با تابع عضویت $(\mu_A: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1])$ اندازه‌گیری می‌شود.

^{۱۲}fuzzy event

فرض کنید ξ متغیری فازی باشد که تابع عضویت $\mu(x)$ را دارد و عدد حقیقی r را در نظر بگیرید. درجه‌ی امکان^{۱۳} و درجه‌ی لزوم^{۱۴} رخداد فازی $\{\xi \leq r\}$ به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌شود:

تعریف ۵.۳.۷. [۳۷]

درجه‌ی امکان رخداد فازی $\{\xi \leq r\}$ با $Pos\{\xi \leq r\}$ نشان داده می‌شود و مقداری به صورت $Pos\{\xi \leq r\} = \sup_{x \leq r} \{\mu(x)\}$ می‌گیرد.

مطالب این قسمت از مراجع [۳۸، ۱۲، ۳۰، ۳۳] استخراج شده است.

تعریف ۶.۳.۷. درجه‌ی لزوم رخداد فازی $\{\xi \leq r\}$ با $Nec\{\xi \leq r\}$ نشان داده می‌شود و مقداری به صورت $Nec\{\xi \leq r\} = 1 - Pos\{\xi > r\} = 1 - \sup_{x > r} \{\mu(x)\}$ می‌گیرد.

تعریف ۷.۳.۷. درجه‌ی اعتبار رخداد فازی $\{\xi \leq r\}$ با $Cr\{\xi \leq r\}$ نشان داده می‌شود و مقداری به صورت رابطه‌ی (۴۴.۷) می‌گیرد.

$$Cr\{\xi \leq r\} = \frac{1}{2} (Pos\{\xi \leq r\} + Nec\{\xi \leq r\}) \quad \forall r \in R \quad (16.7)$$

ملاحظه ۸.۳.۷. برای هر رخداد فازی $\{\xi \leq r\}$ رابطه‌ی (۱۷.۷) را داریم.

$$Cr\{\xi \leq r\} + Cr\{\xi \geq r\} = 1 \quad (17.7)$$

فرض کنید $G = (V, E, \xi)$ گرافی فازی باشد و $M \subseteq E$ یک جورسازی از این گراف باشد، همچنین فرض کنید:

$$x_{(i,j)} = \begin{cases} 1 & , (i,j) \in M \text{ اگر} \\ 0 & , \text{ در غیر این صورت،} \end{cases}$$

و فرض کنید ξ بردار وزن مربوط به یال‌ها باشد، در این صورت جورسازی M را با بردار x نمایش می‌دهیم و تابع هزینه‌ی جورسازی x به صورت (۱۸.۷) خواهد بود.

$$f(x, \xi) = \sum_{(i,j) \in E} \xi_{(i,j)} x_{(i,j)} \quad (18.7)$$

که بردار x و ξ به ترتیب شامل $x_{(i,j)}$ و $\xi_{(i,j)}$ می‌باشد.

تعریف ۹.۳.۷. α -هزینه‌ی تابع $f(x, \xi)$ با \bar{f} نمایش داده می‌شود به طوری که رابطه‌ی (۱۹.۷) را داریم.

$$Cr\{f(x, \xi) \geq \bar{f}\} \geq \alpha \quad (19.7)$$

که α مقداری بین صفر و یک است.

مبحث زیر از منبع [۳۸] استخراج شده است.

با توجه به موقعیت‌های مختلف، تصمیم‌گیرنده، تعاریف متفاوتی را برای پیدا کردن جورسازی ماکسیم وزن‌دار به کار می‌گیرد که در ادامه به بیان این تعاریف می‌پردازیم.

اگر تصمیم‌گیرنده بخواهد جورسازی ماکسیم وزن‌داری با ماکسیم مقدار مورد انتظار از تابع هزینه‌ی $f(x, \xi)$ پیدا کند، تعریف ۱۰.۳.۷ را خواهیم داشت.

^{۱۳}possibility measure

^{۱۴}necessity measure

تعریف ۱۰.۳.۷. یک جورسازی ماکسیم x^* ، جورسازی ماکسیم وزن دار فازی مورد انتظار، نامیده می‌شود اگر برای هر جورسازی ماکسیم x رابطه‌ی (۲۰.۷) را داشته باشیم.

$$E[f(x^*, \xi)] \geq E[f(x, \xi)] \quad (20.7)$$

ملاحظه ۱۱.۳.۷. مقدار مورد انتظار یک عدد فازی طبق درجه‌ی اعتبار رخداد فازی، به صورت (۲۱.۷) است.

$$E(\xi) = \int_0^\infty Cr\{\xi \geq r\}d(r) - \int_{-\infty}^0 Cr\{\xi \leq r\}d(r) \quad (21.7)$$

در موقعیتی دیگر، تصمیم گیرنده ممکن است خواسته باشد مقدار α -هزینه‌ی $f(x, \xi)$ با \bar{f} مطابق ۱۲.۳.۷ پیشنهاد می‌شود.

تعریف ۱۲.۳.۷. ماکسیم جورسازی x^* ، α -جورسازی ماکسیم وزن دار فازی نامیده می‌شود اگر برای هر جورسازی ماکسیم x که α نیز بین صفر و یک است، رابطه‌ی (۲۲.۷) را داشته باشیم.

$$\max\{\bar{f} | Cr\{f(x^*, \xi) \geq \bar{f}\} \geq \alpha\} \geq \max\{\bar{f} | Cr\{f(x, \xi) \geq \bar{f}\} \geq \alpha\} \quad (22.7)$$

تعریف ۱۳.۳.۷. جورسازی ماکسیم x^* ، با اهمیت‌ترین جورسازی ماکسیم وزن دار فازی نامیده می‌شود اگر برای هر جورسازی ماکسیم x ، رابطه‌ی (۲۳.۷) را داشته باشیم.

$$Cr\{f(x^*, \xi) \geq \bar{f}\} \geq Cr\{f(x, \xi) \geq \bar{f}\} \quad (23.7)$$

که \bar{f} ، α -هزینه‌ی از پیش تعیین شده است.

بر طبق تعاریف بالا، روش برنامه‌ریزی خطی در مدل جورسازی را، در حالت فازی بیان می‌کنیم. طبق تعریف ۱۰.۳.۷ مدل (۲۴.۷) را خواهیم داشت.

$$\begin{cases} \max & \sum_{(i,j) \in E} x_{(i,j)} \\ \max & E[\sum_{(i,j) \in E} \xi_{(i,j)} x_{(i,j)}] \\ s.t. & \\ & \sum_{(i,j) \in E} x_{(i,j)} \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, |V| \\ & x_{(i,j)} \in \{0, 1\} \end{cases} \quad (24.7)$$

طبق تعریف ۱۲.۳.۷ مدل برنامه‌ریزی خطی به صورت (۲۵.۷) خواهد بود.

$$\begin{cases} \max & \sum_{(i,j) \in E} x_{(i,j)} \\ \max & \bar{f} \\ s.t. & \\ & Cr\{\sum_{(i,j) \in E} \xi_{(i,j)} x_{(i,j)} \geq \bar{f}\} \geq \alpha \\ & \sum_{(i,j) \in E} x_{(i,j)} \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, |V| \\ & x_{(i,j)} \in \{0, 1\} \end{cases} \quad (25.7)$$

و طبق تعریف ۱۳.۳.۷ مدل برنامه‌ریزی خطی به صورت (۲۶.۷) خواهد بود.

$$\begin{cases} \max & \sum_{(i,j) \in E} x_{(i,j)} \\ \max & Cr \{ \sum_{(i,j) \in E} \xi_{(i,j)} x_{(i,j)} \geq \bar{f} \} \\ s.t. & \\ & \sum_{(i,j) \in E} x_{(i,j)} \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, |V| \\ & x_{(i,j)} \in \{0, 1\} \end{cases} \quad (26.7)$$

در این قسمت مدل‌های برنامه‌ریزی خطی فازی بالا را به مدل برنامه‌ریزی خطی قطعی معادلشان تبدیل می‌کنیم.

اگر وزن یال‌ها با اعداد فازی مثلثی یا اعداد فازی دوزنقه‌ای مشخص شوند، معادلات (۲۴.۷) و (۲۵.۷) و (۲۶.۷) را به معادل قطعیشان تبدیل می‌کنیم. در اینجا برای تشریح کار، فرض می‌کنیم وزن یال‌ها با اعداد فازی دوزنقه‌ای مشخص شده باشند. فرض کنید $\xi = (r_1, r_2, r_3, r_4)$ عدد فازی دوزنقه‌ای با تابع عضویت $\mu(x)$ باشد که $r_1 < r_2 < r_3 < r_4$. حال درجه‌ی اعتبار رخداد فازی $\{\xi \leq r\}$ را به دست می‌آوریم. تابع عضویت عدد فازی دوزنقه‌ای ξ مطابق رابطه‌ی (۹.۱) به صورت (۲۷.۷) است.

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & x \leq r_1 \\ \frac{x-r_1}{r_2-r_1} & r_1 \leq x \leq r_2 \\ 1 & r_2 \leq x \leq r_3 \\ \frac{x-r_4}{r_4-r_3} & r_3 \leq x \leq r_4 \\ 0 & x \geq r_4 \end{cases} \quad (27.7)$$

همچنین طبق تعریف ۵.۳.۷ مقدار درجه‌ی امکان رخداد فازی $\{\xi \leq r\}$ به صورت (۲۸.۷) است.

$$Pos\{\xi \leq r\} = \sup_{x \leq r} \{\mu(x)\} = \begin{cases} 0 & r \leq r_1 \\ \frac{r-r_1}{r_2-r_1} & r_1 \leq r \leq r_2 \\ 1 & r_2 \leq r \leq r_3 \\ 1 & r_3 \leq r \leq r_4 \\ 1 & r \geq r_4 \end{cases} \quad (28.7)$$

و مقدار درجه‌ی ضرورت رخداد فازی $\{\xi \leq r\}$ مطابق تعریف ۶.۳.۷ به صورت (۲۹.۷) خواهد بود.

$$Nec\{\xi \leq r\} = 1 - \sup_{x > r} \{\mu(x)\} = 1 - \begin{cases} 0 & r \geq r_4 \\ \frac{r_4 - r}{r_4 - r_3} & r_3 \leq r \leq r_4 \\ 1 & r_2 \leq r \leq r_3 \\ 1 & r_1 \leq r \leq r_2 \\ 1 & r \leq r_1 \end{cases} = \begin{cases} 1 & r \geq r_4 \\ \frac{r - r_3}{r_4 - r_3} & r_3 \leq r \leq r_4 \\ 0 & r_2 \leq r \leq r_3 \\ 0 & r_1 \leq r \leq r_2 \\ 0 & r \leq r_1 \end{cases} \quad (29.7)$$

بنابراین درجه‌ی اعتبار رخداد فازی $\{\xi \leq r\}$ مطابق تعریف ۷.۳.۷ مطابق (۳۰.۷) خواهد بود.

$$Cr\{\xi \leq r\} = \frac{1}{4} (Pos\{\xi \leq r\} + Nec\{\xi \leq r\}) = \begin{cases} 0 & r \leq r_1 \\ \frac{1}{4} \left(\frac{r - r_1}{r_2 - r_1} \right) & r_1 \leq r \leq r_2 \\ \frac{1}{4} & r_2 \leq r \leq r_3 \\ \frac{r_4 + r - 2r_3}{2(r_4 - r_3)} & r_3 \leq r \leq r_4 \\ 1 & r \geq r_4 \end{cases} \quad (30.7)$$

لم ۱۴.۳.۷. فرض کنید η و ξ دو متغیر فازی مستقل و a و b دو عدد حقیقی باشند، در این صورت $E[a\xi + b\eta] = aE[\xi] + bE[\eta]$ که حداقل یکی از $E[\xi]$ و $E[\eta]$ باید متناهی باشند.

حال طبق لم ۱۴.۳.۷ مدل قطعی معادل مدل (۲۴.۷) را به صورت (۳۱.۷) می‌نویسیم.

$$\begin{cases} \max & \sum_{(i,j) \in E} x_{(i,j)} \\ \max & \sum_{(i,j) \in E} E[\xi_{(i,j)}] x_{(i,j)} \\ \text{s.t.} & \\ & \sum_{(i,j) \in E} x_{(i,j)} \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, |V| \\ & x_{(i,j)} \in \{0, 1\} \end{cases} \quad (31.7)$$

طبق رابطه‌ی ۲۱.۷ می‌توان مقدار $E[\xi_{(i,j)}]$ را به صورت قطعی به دست آورد.

ملاحظه ۱۵.۳.۷. برای متغیر فازی ذوزنقه‌ای $\xi = (r_1, r_2, r_3, r_4)$ با توجه به رابطه‌ی (۲۱.۷)، (۳۲.۷) را داریم.

$$E(\xi) = \frac{1}{4}(r_1 + r_2 + r_3 + r_4) \quad (32.7)$$

حال مدل قطعی معادل با ضابطه‌ی (۲۵.۷) را بیان می‌کنیم.

فرض کنید همه‌ی $\xi_{(i,j)}$ ها متغیرهای فازی ذوزنقه‌ای مستقل باشند که به صورت $(r_{(i,j)}^1, r_{(i,j)}^2, r_{(i,j)}^3, r_{(i,j)}^4)$ نمایش داده می‌شوند. اگر $\alpha > 0.5$ در نظر گرفته شود، معادل ضابطه‌ی ۲۵.۷ به صورت مدل قطعی (۳۳.۷) بیان می‌شود.

$$\begin{cases} \max & \sum_{(i,j) \in E} x_{(i,j)} \\ \max & \sum_{(i,j) \in E} \left((\alpha - 1)r_{(i,j)}^1 + 2(1 - \alpha)r_{(i,j)}^2 \right) x_{(i,j)} \\ \text{s.t.} & \\ & \sum_{(i,j) \in E} x_{(i,j)} \leq 1 \quad , i = 1, 2, \dots, |V| \\ & x_{(i,j)} \in \{0, 1\} \end{cases} \quad (33.7)$$

به خاطر ویژگی مستقل بودن $\xi_{(i,j)}$ ها و اینکه $\xi_{(i,j)} \geq 0$ ، (۳۴.۷) را خواهیم داشت.

$$\sum_{(i,j) \in E} \xi_{(i,j)} x_{(i,j)} = \left(\sum_{(i,j) \in E} r_{(i,j)}^1 x_{(i,j)}, \sum_{(i,j) \in E} r_{(i,j)}^2 x_{(i,j)}, \sum_{(i,j) \in E} r_{(i,j)}^3 x_{(i,j)}, \sum_{(i,j) \in E} r_{(i,j)}^4 x_{(i,j)} \right) = (c_1(x), c_2(x)), \quad (34.7)$$

بنابراین $Cr \left\{ \sum_{(i,j) \in E} \xi_{(i,j)} x_{(i,j)} \geq \bar{f} \right\}$ به صورت (۳۵.۷) خواهد بود.

$$Cr \left\{ \sum_{(i,j) \in E} \xi_{(i,j)} x_{(i,j)} \geq \bar{f} \right\} = \begin{cases} 1 & \bar{f} \leq c_1(x) \\ \frac{2c_2(x) - c_1(x) - \bar{f}}{2(c_2(x) - c_1(x))} & c_1(x) \leq \bar{f} \leq c_2(x) \\ \frac{1}{2} & c_2(x) \leq \bar{f} \leq c_3(x) \\ \frac{c_4(x) - \bar{f}}{2(c_4(x) - c_3(x))} & c_3(x) \leq \bar{f} \leq c_4(x) \\ 0 & \bar{f} \geq c_4(x) \end{cases} \quad (35.7)$$

از این رو به ازای $\alpha > 0.5$ ، \bar{f} به صورت رابطه‌ی (۳۶.۷) به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} \frac{2c_2(x) - c_1(x) - \bar{f}}{2(c_2(x) - c_1(x))} = \alpha &\Rightarrow 2c_2(x) - c_1(x) - \bar{f} \\ &= 2\alpha c_2(x) - 2\alpha c_1(x) \Rightarrow \bar{f} \\ &= 2c_2(x) - 2\alpha c_2(x) - c_1(x) + 2\alpha c_1(x) \quad (36.7) \\ &= (2\alpha - 1)c_1(x) + 2(1 - \alpha)c_2(x) \\ &= \sum_{(i,j) \in E} \left((2\alpha - 1)r_{(i,j)}^1 + 2(1 - \alpha)r_{(i,j)}^2 \right) x_{(i,j)} \end{aligned}$$

بنابراین ضابطه‌ی (۳۳.۷) که برای مدل قطعی نوشته شد، اثبات گردید.

حال مدل قطعی ضابطه‌ی (۲۶.۷) را بیان می‌کنیم.

ضابطه‌ی (۲۶.۷) را می‌توان به صورت (۳۷.۷) نوشت.

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \sum_{(i,j) \in E} x_{(i,j)} \\ \max g(x) \\ \text{s.t.} \\ \sum_{(i,j) \in E} x_{(i,j)} \leq 1 \quad , i = 1, 2, \dots, |V| \\ x_{(i,j)} \in \{0, 1\} \end{array} \right. \quad (37.7)$$

که (38.7) را داریم.

$$g(x) = Cr \left\{ \sum_{(i,j) \in E} \xi_{(i,j)} x_{(i,j)} \geq \bar{f} \right\} = \begin{cases} 1 & \bar{f} \leq c_1(x) \\ \frac{2c_2(x) - c_1(x) - \bar{f}}{2(c_2(x) - c_1(x))} & c_1(x) \leq \bar{f} \leq c_2(x) \\ \frac{1}{2} & c_2(x) \leq \bar{f} \leq c_3(x) \\ \frac{c_4(x) - \bar{f}}{2(c_4(x) - c_3(x))} & c_3(x) \leq \bar{f} \leq c_4(x) \\ 0 & \bar{f} \geq c_4(x) \end{cases} \quad (38.7)$$

به طوری که

$$c_1(x) = \sum_{(i,j) \in E} r_{(i,j)}^1 x_{(i,j)} \quad , c_2(x) = \sum_{(i,j) \in E} r_{(i,j)}^2 x_{(i,j)}$$

$$c_3(x) = \sum_{(i,j) \in E} r_{(i,j)}^3 x_{(i,j)} \quad , c_4(x) = \sum_{(i,j) \in E} r_{(i,j)}^4 x_{(i,j)}$$

۴.۷ مساله‌ی تخصیص

نمونه‌ای از کاربردهای مدل جورسازی، مساله‌ی تخصیص است. در این مساله قرار است تعدادی شغل به تعدادی از افراد تخصیص داده شوند به طوری که هیچ فردی، بیش از یک کار انجام ندهد و هیچ کاری نیز به بیش از یک نفر اختصاص نیابد.

ساختار گراف‌ی مساله

مجموعه‌ی شغل‌ها را در مجموعه‌ی X و مجموعه‌ی افراد را در مجموعه‌ی Y در نظر بگیرید، تا اینجا دو مجموعه‌ی رئوس X و Y وجود دارد. در این مساله باید هر شغل به فردی نسبت داده شود، بنابراین ارتباط بین شغل‌ها با افراد را با یال‌هایی نمایش می‌دهیم به طوری که یک انتهای یال در مجموعه‌ی X و انتهای دیگر یال در مجموعه‌ی Y باشد. در حالتی که هزینه‌ی تخصیص شغل‌ها به افراد به طور دقیق معلوم باشد و در واقع هزینه‌ها قطعی باشند به هر یال وزنی قطعی نسبت داده و در حالتی که هزینه‌ها به طور دقیق مشخص نباشند، به هر یال وزنی فازی نسبت می‌دهیم. در این قسمت به حل مساله‌ی تخصیص می‌پردازیم که از پرکاربردترین مسایل مرتبط با مدل جورسازی است.

(۱) روش برنامه‌ریزی خطی قطعی مربوط به مساله‌ی تخصیص [۶]

در این روش، c_{ij} متغیری است که میزان هزینه‌ی تخصیص کار i به فرد j را نمایش می‌دهد.

$$\begin{cases} \min & Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{(i,j)} \\ \text{s.t.} & \\ & \sum_{j=1}^n x_{(i,j)} = 1 \quad i = 1, 2, \dots, m \quad \text{برای} \\ & \sum_{i=1}^m x_{(i,j)} = 1 \quad j = 1, 2, \dots, n \quad \text{برای} \\ & x_{(i,j)} \in \{0, 1\} \end{cases}$$

در روش بالا، با فرض اینکه تعداد کارها را $i = 1, 2, \dots, m$ و تعداد افراد را $j = 1, 2, \dots, n$ در نظر بگیریم، در تابع هدف به دنبال بهترین تخصیص هستیم به طوری که هزینه کل مینیمم شود، همچنین محدودیت اول بیان می‌کند که به هیچ فردی بیش از یک کار تخصیص نخواهد یافت، محدودیت دوم ضمانت می‌کند هیچ کاری به بیشتر از یک نفر تخصیص نمی‌یابد و محدودیت سوم نیز به متغیر $x_{(i,j)}$ مقدار یک نسبت می‌دهد اگر کار i به فرد j تخصیص یابد وگرنه مقدار صفر به آن نسبت می‌دهد.

روش برنامه‌ریزی خطی فازی مربوط به مساله‌ی تخصیص [۵۲]

روش برنامه‌ریزی خطی مساله‌ی تخصیص در محیط فازی، با در نظر گرفتن هزینه‌ها با اعداد فازی، به صورت (۳۹.۷) نوشته می‌شود.

$$\begin{cases} \min & \tilde{Z} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \tilde{c}_{ij} x_{(i,j)} \\ \text{s.t.} & \\ & \sum_{j=1}^n x_{(i,j)} = 1 \quad i = 1, 2, \dots, m \quad \text{برای} \\ & \sum_{i=1}^m x_{(i,j)} = 1 \quad j = 1, 2, \dots, n \quad \text{برای} \\ & x_{(i,j)} \in \{0, 1\} \end{cases} \quad (39.7)$$

(۲) روش الگوریتمی مربوط به مساله‌ی تخصیص

در مساله‌ی تخصیص باید توجه داشته باشیم که قبل از حل، لازم است مدل متعادل باشد یعنی باید تعداد $m = n$ باشد. در صورتی که این شرایط برقرار نباشد، بسته به اینکه تعداد افراد یا تعداد کارها کمتر است، بدون از دست دادن کلیت مدل، تعدادی کار یا فرد مجازی اضافه کنید، در واقع حالات زیر وجود دارد [۶]:

$$n = m \quad (1)$$

(۲) $m < n$ در این صورت به تعداد $n - m$ کار مجازی اضافه کنید و هزینه‌ی مربوطه را بی‌نهایت در نظر بگیرید.

(۳) $n < m$ در این صورت به تعداد $m - n$ فرد مجازی اضافه کنید و هزینه‌ی مربوطه را بی‌نهایت در نظر بگیرید.

در این بخش برای به دست آوردن تخصیص بهینه، از روش الگوریتمی مجارستانی که در ۳.۱.۳ در فصل ۵ بیان شد استفاده می‌شود.

مساله‌ی تخصیص فازی بهینه را به صورت زیر دسته‌بندی می‌کنیم:

(مورد ۱) در مساله‌ی تخصیص، هدف به دست آوردن تخصیص بهینه‌ای است که هزینه‌ی آن مینیمم گردد، در این صورت مطابق زیر عمل کنید:

الگوریتم ۱:

(گام ۱) ابتدا بررسی کنید که آیا ماتریس هزینه‌ی داده شده در مساله‌ی تخصیص متعادل است یا نه، اگر متعادل بود به گام ۳ بروید و اگر متعادل نبود به گام ۲ بروید.

(گام ۲) سطرها یا ستون‌های مجازی با هزینه‌های بی‌نهایت معرفی کنید تا تعادل برقرار گردد.

(گام ۳) الگوریتم مجارستانی را که در ۳.۱.۳ در فصل ۵ بیان شد به کار ببرید.

(مورد ۲) گاهی اوقات در مساله‌ی تخصیص، تابع هدف ماکسیم‌سازی سود است، در این صورت مطابق زیر عمل کنید:

الگوریتم ۲:

(۱) ابتدا مقدار قطعی تمام هزینه‌های فازی در ماتریس داده شده را به دست آورده و ماکسیم آن‌ها را تعیین کنید.

(۲) ماتریس هزینه‌ی فازی داده شده را به مساله‌ی مینیم‌سازی تبدیل می‌کنیم بدین صورت که بیشترین عنصر فازی را از تمام عناصر فازی داده شده در ماتریس کم کنید.

(۳) حال دوباره الگوریتم ۱ را به کار ببرید.

(مورد ۳) گاهی اوقات در تخصیص فازی قرار است مینیمم هزینه به دست آید، با این شرایط که یک سری محدودیت روی مدل وجود دارد، در واقع محدودیت‌های اختصاصی، قانونی و از این دست وجود دارد که اجازه نمی‌دهد به افراد خاصی، شغل‌هایی اختصاص داده شود. در چنین مواردی مطابق زیر عمل کنید:

الگوریتم ۳:

(۱) هزینه‌ی فازی خیلی زیادی را (مثلاً مقدار بی‌نهایت) به آن سلول‌های ماتریس نسبت دهید که اجازه‌ی تخصیص ندارند به طوری که آن مورد به طور خودکار از حل بهینه حذف شود (چون مساله‌ی تخصیص، مینیم‌سازی است و این هزینه خیلی زیاد است با اجرای الگوریتم، از این هزینه استفاده نخواهد شد).

(۲) حال مجدداً از الگوریتم ۱ استفاده کنید.

۱.۴.۷ قضیه‌های اساسی از مساله‌ی تخصیص فازی

مبحث این قسمت از منبع [۳۸] استخراج شده است.

حل مساله‌ی تخصیص فازی، اساساً بر پایه‌ی دو قضیه‌ی ۱.۴.۷ و ۲.۴.۷ است.

قضیه ۱.۴.۷. اگر در مساله‌ی تخصیص که هدف مینیم‌سازی تابع هدف \tilde{Z} باشد، عدد فازی ثابتی به هر عنصر فازی از یک سطر (یا ستون) اضافه یا از آن کم شود، باز هم تابع هدف مینیم خواهد ماند. برهان. رابطه‌ی (۴۰.۷) را در مساله‌ی تخصیص داریم به طوری که برای همه‌ی $x_{(i,j)} \in \{0, 1\}$ رابطه‌ی (۴۱.۷) برقرار است.

$$\tilde{Z} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \tilde{c}_{ij} x_{(i,j)} \quad (40.7)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{(i,j)} = \sum_{j=1}^n x_{(i,j)} = 1 \quad (41.7)$$

برای تمام $i, j = 1, 2, \dots, n$ که \tilde{u}_i و \tilde{v}_j ثابت‌های فازی هستند، \tilde{u}_i و \tilde{v}_j را به ترتیب از i امین سطر و j امین ستون ماتریس هزینه‌ی \tilde{c}_{ij} کم کنید یعنی

$$\tilde{Z}' = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\tilde{c}_{ij} \ominus \tilde{u}_i \ominus \tilde{v}_j) x_{(i,j)} \quad (42.7)$$

از رابطه‌ی (۴۲.۷) داریم:

$$\tilde{Z}' = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \tilde{c}_{ij} x_{(i,j)} \right) \ominus \left(\sum_{i=1}^n \tilde{u}_i \sum_{j=1}^n x_{(i,j)} \right) \ominus \left(\sum_{j=1}^n \tilde{v}_j \sum_{i=1}^n x_{(i,j)} \right) \quad (43.7)$$

حال طبق رابطه‌ی (۴۰.۷) و (۴۱.۷) داریم:

$$\tilde{Z}' = \tilde{Z} \ominus \sum_{i=1}^n \tilde{u}_i \ominus \sum_{j=1}^n \tilde{v}_j$$

مقداری که از \tilde{Z} کم می‌شود مستقل از $x_{(i,j)}$ است، بنابراین تابع هدف \tilde{Z}' از \tilde{Z} پیروی می‌کند به طوری که هر گاه \tilde{Z} مینیم باشد، \tilde{Z}' نیز مینیم خواهد شد. □

قضیه ۲.۴.۷. اگر $x_{(i,j)}$ به ازای $i, j = 1, 2, \dots, n$ یک حل بهینه برای مدلی تخصیص با هزینه‌ی \tilde{c}_{ij}' باشد، آنگاه همچنین حلی بهینه برای مدلی با هزینه‌ی \tilde{c}_{ij}' است هنگامی که

$$\begin{aligned} (\tilde{c}_{ij}') &= (\tilde{c}_{ij}) & i, j &= 1, 2, \dots, n; j \neq k \text{ برای} \\ (\tilde{c}_{ij}') &= (\tilde{c}_{ik}) - \tilde{A} & \text{هنگامی که } A \text{ ثابتی فازی است} \end{aligned}$$

برهان. با توجه به مساله‌ی تخصیص و به کارگیری رابطه‌ی (۴۰.۷) و (۴۱.۷) داریم:

$$\begin{aligned} \tilde{Z}' &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \tilde{c}_{ij}' x_{(i,j)} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j \neq k} \tilde{c}_{ij}' + \tilde{c}_{ik}' \right) x_{(i,j)} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j \neq k} \tilde{c}_{ij}' + \tilde{c}_{ik} - \tilde{A} \right) x_{(i,j)} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \tilde{c}_{ij} x_{(i,j)} - \tilde{A} \sum_{i=1}^n x_{(i,j)} = \tilde{Z} - \tilde{A} \end{aligned}$$

بنابراین اگر $x_{(i,j)}$ ، \tilde{Z} را مینیم کند، \tilde{Z}' نیز مینیم خواهد شد. □

جدول ۱.۷: ماتریس هزینه‌های فازی اولیه

	M_1	M_2	M_3	M_4
J_1	(۴, ۶, ۸, ۱۰; ۰/۱)	(۲۰, ۲۴, ۲۶, ۲۸, ۰/۲)	(۱۴, ۱۶, ۱۷, ۱۹; ۰/۳)	(۶, ۸, ۱۱, ۱۳; ۰/۱)
J_2	(۸, ۱۱, ۱۳, ۱۵; ۰/۲)	(۲۴, ۲۶, ۲۸, ۳۰; ۰/۳)	(۰, ۲, ۴, ۶; ۰/۱)	(۲۳, ۲۵, ۲۶, ۲۸; ۰/۲)
J_3	(۳۰, ۳۴, ۳۸, ۴۰; ۰/۱)	(۱۵, ۱۷, ۱۹, ۲۰; ۰/۲)	(۱۴, ۱۶, ۱۸, ۲۰; ۰/۴)	(۱۲, ۱۴, ۱۵, ۱۸; ۰/۳)
J_4	(۱۴, ۱۶, ۱۹, ۲۰; ۰/۲)	(۲۲, ۲۴, ۲۶, ۲۸; ۰/۶)	(۲۰, ۲۲, ۲۴, ۲۶; ۰/۴)	(۶, ۸, ۱۰, ۱۲; ۰/۲)

جدول ۲.۷: ماتریس هزینه‌های قطعی اولیه‌ی جدول ۱.۷

	M_1	M_2	M_3	M_4
J_1	۰/۲۹	۱/۰۴	۲/۰۶	۰/۳۹
J_2	۰/۹۹	۳/۳۷	۰/۱۲	۲/۱۲
J_3	۱/۴۹	۱/۵۰	۲/۸۳	۱/۸۱
J_4	۱/۴۵	۶/۲۴	۳/۸۳	۰/۷۴

ملاحظه ۳.۴.۷. بنابراین باتوجه به قضیه‌ی ۱.۴.۷ کم کردن مینیم هر سطر (ستون) از تمام عناصر آن سطر (ستون) در مینیم شدن جواب تأثیری نمی‌گذارد.

ملاحظه ۴.۴.۷. توجه داشته باشید که تخصیص شغل i به فرد j ام را به صورت $J_i - M_j$ نمایش دهید.

مثال ۵.۴.۷. فرض کنید در شرکتی ۴ شغل وجود دارد که باید به ۴ نفر که جویای کار هستند اختصاص یابد. ماتریس هزینه‌های تخصیص شغل به افراد در جدول ۱.۷ داده شده است:

(مورد ۱) مینیم هزینه‌ی فازی را در حالتی که محدودیتی روی مدل وجود ندارد، به دست آورید.

(مرحله‌ی ۱) مدل در این مثال متعادل است.

(مرحله‌ی ۲) مقدار قطعی هر عدد در ماتریس جدول ۲.۷ داده شده است.

مینیم عنصر در سطر اول ۰/۲۹ است و عنصر فازی متناظر آن (۴, ۶, ۸, ۱۰; ۰/۱) است.

مینیم عنصر در سطر دوم ۰/۱۲ است و عنصر فازی متناظر آن (۰, ۲, ۴, ۶; ۰/۱) است.

مینیم عنصر در سطر سوم ۱/۴۹ است و عنصر فازی متناظر آن (۱۵, ۱۷, ۱۹, ۲۰; ۰/۲) است.

(مرحله‌ی ۳) مینیم عنصر فازی در هر سطر که در مرحله‌ی ۲ به دست آمده را از هر عنصر فازی در همان

سطر که در جدول ۱.۷ است کم کنید. آنگاه ماتریس هزینه‌ی فازی به صورت جدول ۳.۷

خواهد بود.

(مرحله‌ی ۴) مقدار قطعی هر عدد فازی جدول ۳.۷ در جدول ۴.۷ به دست آمده است. طبق آن خواهیم

داشت:

مینیم عنصر ستون اول، صفر است که عنصر فازی متناظر آن (۰, ۲, ۴, ۶; ۰/۱) است.

جدول ۳.۷: ماتریس هزینه‌ی فازی اصلاح شده‌ی اول

	M_1	M_2	M_3	M_4
J_1	(-۶, -۲, ۲, ۶; ۰/۱)	(۱۰, ۱۶, ۲۰, ۲۴; ۰/۱)	(۴, ۸, ۱۱, ۱۵; ۰/۱)	(-۴, ۰, ۵, ۹; ۰/۱)
J_2	(۲, ۷, ۱۱, ۱۵; ۰/۱)	(۱۸, ۲۲, ۲۶, ۳۰; ۰/۱)	(-۶, -۲, ۲, ۶; ۰/۱)	(۱۷, ۲۱, ۲۴, ۲۸; ۰/۱)
J_3	(۱۰, ۱۵, ۲۱, ۲۵; ۰/۱)	(-۵, -۲, ۲, ۵; ۰/۲)	(-۶, -۳, ۱, ۵; ۰/۲)	(-۸, -۵, -۲, ۳; ۰/۲)
J_4	(۲, ۶, ۱۱, ۱۴; ۰/۲)	(۱۰, ۱۴, ۱۸, ۲۲; ۰/۲)	(۸, ۱۲, ۱۶, ۲۰; ۰/۲)	(-۶, -۲, ۲, ۶; ۰/۲)

جدول ۴.۷: ماتریس هزینه‌ی قطعی جدول ۳.۷

	M_1	M_2	M_3	M_4
J_1	۰	۰/۷۴	۰/۳۹	۰/۱
J_2	۰/۳۷	۰/۹۹	۰	۰/۹۳
J_3	۰/۷۴	۰	-۰/۰۸	-۰/۲۹
J_4	۰/۷	۱/۳۳	۱/۱۶	۰

مینیم عنصر ستون دوم، صفر است که عنصر فازی متناظر آن (۰/۲, ۲, ۵, -۲, -۵) است. مینیم عنصر ستون سوم، -۰/۰۸ است که عنصر فازی متناظر آن (۰/۲, ۱, ۵, -۳, -۶) است.

مینیم عنصر ستون چهارم، -۰/۲۹ است که عنصر فازی متناظر آن (۰/۲, ۳, -۲, -۵, -۸) است.

(مرحله‌ی ۵) مینیم عنصر فازی به دست آمده در مرحله‌ی ۴ در هر ستون را، از هر عنصر فازی آن ستون، در جدول ۳.۷ کم کنید. ماتریس به دست آمده در جدول ۵.۷ به دست می‌آید.

(مرحله‌ی ۶) دوباره مقدار قطعی هر عدد فازی جدول ۵.۷ را به دست آورید، بنابراین جدول ۶.۷ را داریم.

(مرحله‌ی ۷) با توجه به الگوریتم مجارستانی، حالتی اتفاق می‌افتد که تعداد خطوط کمتر از تعداد سطرها است که نتیجه در ماتریس جدول ۷.۷ نشان داده شده است.

مینیم عنصری که توسط خطوط پوشیده نشده است ۰/۱ است که عنصر فازی متناظر آن (۰/۲, ۱۴, ۷, ۰, -۹) است.

جدول ۵.۷: ماتریس هزینه‌ی فازی اصلاح شده‌ی دوم

	M_1	M_2	M_3	M_4
J_1	(-۱۲, -۴, ۴, ۱۲; ۰/۱)	(۱۵, ۱۴, ۲۲, ۲۹; ۰/۱)	(-۱, ۷, ۱۴, ۲۱; ۰/۱)	(-۷, ۲, ۱۰, ۱۷; ۰/۱)
J_2	(-۴, ۵, ۱۳, ۲۱; ۰/۱)	(۱۳, ۲۰, ۲۸, ۳۵; ۰/۱)	(-۱۱, -۳, ۵, ۱۲; ۰/۱)	(۱۴, ۲۳, ۲۹, ۳۶; ۰/۱)
J_3	(۴, ۱۳, ۲۳, ۳; ۰/۱)	(-۱۰, -۴, ۴, ۱۰; ۰/۲)	(-۱۱, -۴, ۴, ۱۱; ۰/۲)	(-۱۱, -۳, ۳, ۱۱; ۰/۲)
J_4	(-۴, ۴, ۱۳, ۲۰; ۰/۱)	(-۵, ۱۲, ۲۰, ۲۷; ۰/۲)	(۳, ۱۱, ۱۹, ۲۶; ۰/۲)	(-۹, ۰, ۷, ۱۴; ۰/۲)

جدول ۶.۷: ماتریس هزینه‌ی قطعی جدول ۵.۷

	M_1	M_2	M_3	$M_4 \dots$
J_1	۰	۰/۷	۰/۳۹	۰/۲
J_2	۰/۳۷	۰/۹۵	۰	۱/۲۵
J_3	۰/۷۹	۰	۰	۰
J_4	۰/۳۵	۰/۶۲	۰/۵۸	۰/۱

جدول ۷.۷: ماتریس نتیجه شده‌ی اول

	M_1	M_2	M_3	M_4
J_1	۰	۰/۷	۰/۳۹	۰/۲
J_2	۰/۳۷	۰/۹۵	۰	۱/۲۵
J_3	۰/۷۹	۰	۰	۰
J_4	۰/۳۵	۰/۶۲	۰/۵۸	۰/۱

(مرحله‌ی ۸) مینیمم عنصر فازی به دست آمده در مرحله‌ی ۷ را از همه‌ی عناصر پوشش داده نشده کم کنید و به تمام عناصر فازی که در تقاطع خطوط افقی و عمودی هستند اضافه کنید، بنابراین ماتریس جدول ۸.۷ را خواهیم داشت.

(مرحله‌ی ۹) مقدار قطعی هر عنصر فازی جدول ۸.۷ را به دست آورید، بنابراین ماتریس جدول ۹.۷ را داریم.

(مرحله‌ی ۱۰) در این مرحله، تعداد خطوط رسم شده برابر تعداد سطرها می‌شود و ماتریس نمایش آن در جدول ۱۰.۷ آمده است.

(مرحله‌ی ۱۱) با اجرای الگوریتم، تخصیص بهینه‌ی نمایش داده شده در ماتریس جدول ۱۱.۷ را خواهیم داشت.

(مرحله‌ی ۱۲) تخصیص بهینه‌ی حاصل شده به صورت (۴۴.۷) خواهد بود.

$$J_1 - M_1, J_2 - M_3, J_3 - M_2, J_4 - M_4 \quad (44.7)$$

(مرحله‌ی ۱۳) مطابق جدول هزینه‌های فازی اولیه که در ۱.۷ آمده است، هزینه‌های فازی این تخصیص‌ها

جدول ۸.۷: ماتریس هزینه‌ی فازی اصلاح شده‌ی سوم

	M_1	M_2	M_3	M_4
J_1	(-۱۲, -۴, ۴, ۱۲; ۰/۱)	(-۹, ۷, ۲۲, ۳۸; ۰/۱)	(-۱, ۷, ۱۴, ۲۱; ۰/۱)	(-۲۱, -۵, ۱۰, ۲۶; ۰/۱)
J_2	(-۴, ۵, ۱۳, ۲۱; ۰/۱)	(-۱, ۱۳, ۲۸, ۴۴; ۰/۱)	(-۱۱, -۳, ۵, ۱۲; ۰/۱)	(۰, ۱۶, ۲۹, ۴۵; ۰/۱)
J_3	(-۵, ۱۳, ۳۰, ۴۵; ۰/۱)	(-۱۰, -۴, ۴, ۱۰; ۰/۲)	(-۲۰, -۴, ۱۱, ۲۵; ۰/۲)	(-۱۱, -۳, ۳, ۱۱; ۰/۲)
J_4	(-۴, ۴, ۱۳, ۲۰; ۰/۱)	(-۱۹, ۵, ۲۰, ۳۶; ۰/۲)	(۳, ۱۱, ۱۹, ۲۶; ۰/۲)	(-۲۳, -۷, ۷, ۲۳; ۰/۲)

جدول ۹.۷: ماتریس هزینه‌ی قطعی جدول ۸.۷

	M_1	M_2	M_3	M_4
J_1	۰	۰/۶	۰/۳۹	۰/۱
J_2	۰/۳۷	۰/۸۵	۰	۰/۸۳
J_3	۰/۸۹	۰	۰/۲۹	۰
J_4	۱/۳۵	۱/۰۴	۰/۵۸	۰

جدول ۱۰.۷: ماتریس نتیجه شده‌ی دوم

	M_1	M_2	M_3	M_4
J_1	۰	۰/۶	۰/۳۹	۰/۱
J_2	۰/۳۷	۰/۸۵	۰	۰/۸۳
J_3	۰/۸۹	۰	۰/۲۹	۰
J_4	۱/۳۵	۱/۰۴	۰/۵۸	۰

به صورت جدول ۱۲.۷ است.

(مرحله‌ی ۱۴) بنابراین مینیمم هزینه‌ی فازی این تخصیص به صورت (۴۵.۷) خواهد بود.

$$(۴, ۶, ۸, ۱۰; ۰/۱) \oplus (۰, ۲, ۴, ۶; ۰/۱) \oplus (۱۵, ۱۷, ۱۹, ۲۰; ۰/۲) \oplus (۶, ۸, ۱۰, ۱۲; ۰/۲) = (۲۵, ۳۳, ۴۱, ۴۸; ۰/۱) \quad (۴۵.۷)$$

(مورد ۲) در حالتی که تابع هدف ماکسیمم باشد، تخصیص بهینه را به دست آورید.

(مرحله‌ی ۱) مطابق آنچه در الگوریتم ۲ آمده، ابتدا مقدار قطعی تمام عناصر فازی جدول ۱.۷ را به دست آورده، سپس ماکسیمم عنصر جدول ۲.۷ و عنصر فازی متناظر آن را به دست آورید.

ماکسیمم عنصر ۶/۲۴ می‌باشد و عنصر فازی متناظر آن (۲۲, ۲۴, ۲۶, ۲۸; ۰/۶) می‌باشد.

(مرحله‌ی ۲) حال ماکسیمم عنصر فازی‌ای که به دست آمد، را از تمام عناصر فازی جدول ۱.۷ کم کنید.

جدول ۱۱.۷: ماتریس نمایش تخصیص بهینه

	M_1	M_2	M_3	M_4
J_1	□	۰/۶	۰/۳۹	۰/۱
J_2	۰/۳۷	۰/۸۵	□	۰/۸۳
J_3	۰/۸۹	□	۰/۲۹	۰
J_4	۱/۳۵	۱/۰۴	۰/۵۸	□

جدول ۱۲.۷: ماتریس هزینه‌های فازی مربوط به تخصیص بهینه‌ی به دست آمده

تخصیص بهینه	$J_1 - M_1$	$J_2 - M_3$	$J_3 - M_2$	$J_4 - M_4$
هزینه‌ی فازی	(۴, ۶, ۸, ۱۰; ۰/۱)	(۰, ۲, ۴, ۶; ۰/۱)	(۱۵, ۱۷, ۱۹, ۲۰; ۰/۲)	(۶, ۸, ۱۰, ۱۲; ۰/۲)

جدول ۱۳.۷: ماتریس سودهای فازی مربوط به تخصیص بهینه‌ی به دست آمده

تخصیص بهینه	$J_1 - M_2$	$J_2 - M_4$	$J_3 - M_1$	$J_4 - M_3$
سود فازی	(۲۰, ۲۴, ۲۶, ۲۸; ۰/۲)	(۲۳, ۲۵, ۲۶, ۲۸; ۰/۲)	(۳۰, ۳۴, ۳۸, ۴۰; ۰/۱)	(۲۰, ۲۲, ۲۴, ۲۶; ۰/۴)

(مرحله‌ی ۳) با به‌کارگیری الگوریتم مجارستانی روی ماتریس نتیجه شده در مرحله‌ی قبل، تخصیص بهینه‌ی جدول ۱۳.۷ را خواهیم داشت.

(مرحله‌ی ۴) بنابراین ماکسیم سود فازی با این تخصیص برابر (۹۳, ۱۰۵, ۱۱۴, ۱۱۸; ۰/۱) است.

(مورد ۳) در حالتی که تابع هدف مینیم‌سازی باشد و محدودیت‌هایی روی مدل اعمال شده باشد، تخصیص بهینه را به دست آورید.

محدودیت اعمال شده در ماتریس جدول ۱۴.۷ نمایش داده شده است، در واقع عناصری که مشخص شده‌اند در تخصیص شرکت ندارند.

(مرحله‌ی ۱) مطابق آنچه که در الگوریتم ۳ گفته شد، مقدار خیلی بزرگی برای هزینه به آن خانه‌هایی از ماتریس نسبت دهید که اجازه‌ی تخصیص ندارند (بی‌نهایت به آن‌ها نسبت بدهید).

(مرحله‌ی ۲) با به‌کارگیری الگوریتم مجارستانی، ماتریس تخصیص فازی بهینه‌ی جدول ۱۵.۷ را خواهیم داشت.

(مرحله‌ی ۳) بنابراین مینیم هزینه‌ی فازی برابر (۳۵, ۴۳, ۵۳, ۵۹; ۰/۱) است.

کاربردهایی از مساله‌ی تخصیص

کاربردهای فراوانی برای مساله‌ی تخصیص وجود دارد. در اینجا به بیان تعدادی از آن‌ها می‌پردازیم [۲۷].

۱. مساله‌ی سیم‌کشی روی صفحه‌ی مدار کامپیوتر را در نظر بگیرید. قرار است ۲۴۲ قطعه‌ی کامپیوتری با ۲۶۲۵ اتصال، روی صفحه‌ی مداری با ۲۶ مکان باز قرار داده شوند، به‌طوری‌که

جدول ۱۴.۷: ماتریس هزینه‌های فازی اولیه با اعمال محدودیت

	M_1	M_2	M_3	M_4
J_1	(۴, ۶, ۸, ۱۰; ۰/۱)	(۲۰, ۲۴, ۲۶, ۲۸, ۰/۲)	(۱۴, ۱۶, ۱۷, ۱۹; ۰/۳)	(۶, ۸, ۱۱, ۱۳; ۰/۱)
J_2	(۸, ۱۱, ۱۳, ۱۵; ۰/۲)	(۲۴, ۲۶, ۲۸, ۳۰; ۰/۳)	(۰, ۲, ۴, ۶; ۰/۱)	(۲۳, ۲۵, ۲۶, ۲۸; ۰/۲)
J_3	(۳۰, ۳۴, ۳۸, ۴۰; ۰/۱)	(۱۵, ۱۷, ۱۹, ۲۰; ۰/۲)	(۱۴, ۱۶, ۱۸, ۲۰; ۰/۴)	(۱۲, ۱۴, ۱۵, ۱۸; ۰/۳)
J_4	(۱۴, ۱۶, ۱۹, ۲۰; ۰/۲)	(۲۲, ۲۴, ۲۶, ۲۸; ۰/۶)	(۲۰, ۲۲, ۲۴, ۲۶; ۰/۴)	(۶, ۸, ۱۰, ۱۲; ۰/۲)

جدول ۱۵.۷: ماتریس هزینه‌های فازی مربوط به تخصیص بهینه با اعمال محدودیت در مساله

تخصیص بهینه	$J_1 - M_4$	$J_2 - M_3$	$J_3 - M_2$	$J_4 - M_1$
هزینه‌ی فازی	(۶, ۸, ۱۱, ۱۳; ۰/۱)	(۰, ۲, ۴, ۶; ۰/۱)	(۱۵, ۱۷, ۱۹, ۲۰; ۰/۲)	(۱۴, ۱۶, ۱۹, ۲۰; ۰/۲)

مجموع طول سیم‌کشی روی صفحه‌ی مدار که برای کل اتصالات لازم باشد مینیمم شود. این نمونه‌ای از کاربردهای مساله‌ی تخصیص است، که لازم است بررسی شود کدام قطعه به کدام مکان اختصاص داده شود تا مجموع طول سیم‌کشی اتصالات مینیمم گردد.

۲. مساله‌ی تخصیص حروف الفبایی به صفحه‌ی کلید ماشین تحریر را در نظر بگیرید، به طوری که می‌خواهیم زمان مورد انتظاری که برای نوشتن یک متن لازم است، مینیمم شود. در این نمونه از کاربردهای مساله‌ی تخصیص، می‌توان با بررسی اینکه معمولا هر جفت از حروف، چگونه در کلمات آن زبان ظاهر می‌شوند و همچنین با بررسی زمان سپری شده برای فشردن پایپی هر جفت از حروف الفبایی، به بهترین نحو به هر کلید از صفحه کلید، حرفی از حروف الفبایی تخصیص داد به طوری که زمان نوشتن متن مینیمم گردد.

۳. مساله‌ی تخصیص لوکوموتیو^{۱۵} به قطارها را در راه‌آهن در نظر بگیرید. در این کاربرد از مساله‌ی تخصیص لازم است بررسی شود، به هر قطار چه لوکوموتیوی تخصیص داده شود به طوری که زمان لازم برای کشیدن قطارها از ایستگاه شروع تا ایستگاه پایانی مینیمم شود.

۴. مساله‌ی تخصیص فرکانس به آنتن‌ها، از جمله‌ی دیگر کاربردهای مساله‌ی تخصیص می‌باشد. در این مساله لازم است بررسی شود که چه فرکانس‌هایی به چه آنتن‌هایی تخصیص داده شود، تا میزان تداخلی که در اثر هم‌فرکانس بودن یا مجاور بودن فرکانس‌ها پیش می‌آید مینیمم گردد.

^{۱۵} ماشینی کشنده است که سایر ابزار و یا واگن‌ها به آن متصل می‌شوند.

فصل ۸

مدل فازی گراف‌ها در مجموعه‌های پوشش راسی و مجموعه‌های مستقل

۱.۸ تعاریف و مقدمات

مبحث مجموعه‌های پوشش راسی و مجموعه‌های مستقل بر روی تمام ساختار گراف‌ها قابل بررسی می‌باشد. در این فصل می‌توان از هر مدل گرافی استفاده کرد و به بررسی مجموعه‌های پوشش راسی و مجموعه‌های مستقل روی آن پرداخت. مطالب این قسمت از منبع [۱۰] استخراج شده است.

تعریف ۱.۱.۸. پوشش راسی^۱: مجموعه‌ی K از مجموعه رئوس V یک پوشش راسی گراف گفته می‌شود هرگاه حداقل یک سر هر یال G در K باشد.

تعریف ۲.۱.۸. پوشش راسی وزن‌دار: به پوششی راسی که رئوس آن وزن‌دار باشد، پوشش راسی وزن‌دار گفته می‌شود.

تعریف ۳.۱.۸. پوشش راسی مینیمم: پوشش k ، پوشش راسی مینیمم است اگر G دارای پوشش k' با $|k'| < |k|$ نباشد.

تعریف ۴.۱.۸. پوشش راسی مینیمم وزن‌دار: در این پوشش راسی لازم است کوچکترین زیرمجموعه از رئوس با کمترین وزن ممکن به دست آید.

ملاحظه ۵.۱.۸. در به دست آوردن پوشش راسی مینیمم زمانی که رئوس گراف دارای وزن هستند، ممکن است تعداد اعضای مجموعه‌ی پوشش راسی مینیمم، کوچکترین نباشد اما هدف اصلی این است که اعضای مجموعه‌ی پوشش راسی مینیمم، کمترین وزن را داشته باشند.

^۱vertex cover

تعریف ۶.۱.۸. مجموعه‌ی مستقل^۲: زیرمجموعه‌ی S از مجموعه‌ی رئوس V یک مجموعه‌ی مستقل نامیده می‌شود اگر هیچ دو راسی از S در G مجاور نباشند.

تعریف ۷.۱.۸. مجموعه‌ی مستقل ماکسیمم: مجموعه‌ی S مجموعه‌ی مستقل ماکسیمم نامیده می‌شود اگر G دارای مجموعه‌ی مستقل S' با شرط $|S'| > |S|$ نباشد.

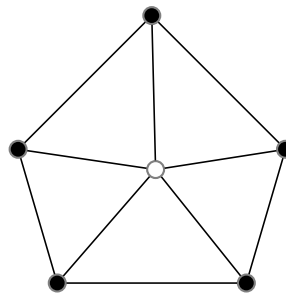
ملاحظه ۸.۱.۸. مدل گراف‌های مورد بررسی در مجموعه‌های پوشش راسی و مجموعه‌های مستقل، به صورت مدل راسی که در فصل ۱ بیان شد، مدل‌سازی شده است.

۲.۸ مساله‌ی پوشش راسی

یکی از مسایل مهم بهینه‌سازی ترکیبیاتی، مساله‌ی پوشش راسی است که در رده‌ی مسایل ان-پی سخت^۳ قرار دارد.

ساختار گرافی این مساله به صورت زیر می‌باشد:

در محیط قطعی، فرض کنید گرافی مانند $G = (V, E)$ داده شده باشد. در این گراف مجموعه‌ای مانند $K \subseteq V$ را یک پوشش راسی گراف می‌گوییم، هرگاه برای هر $(u, v) \in E$ حداقل یکی از رئوس u یا v متعلق به K باشد. (شکل ۱.۸ را ببینید) رئوسی که توپیر هستند مجموعه‌ی پوشش راسی را تشکیل داده‌اند.

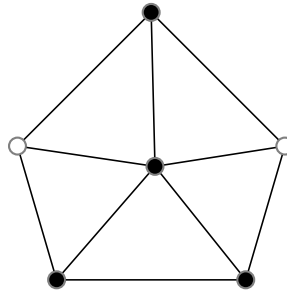


شکل ۱.۸: یک پوشش

مدل بهینه‌ی مساله‌ی پوشش راسی به این صورت خواهد بود که از بین تمام پوشش‌های راسی، پوشش راسی با اندازه‌ی مینیمم به دست آید. در شکل ۲.۸ پوشش راسی مینیمم گراف شکل ۱.۸ داده شده است، رئوسی که توپیر هستند مجموعه‌ی پوشش راسی مینیمم را تشکیل داده‌اند. توجه داشته باشید، در حالتی که رئوس گراف وزن دار باشند برای هر راس گراف، وزنی نسبت داده شده است.

^۲independent set (IS)

^۳NP-hard



شکل ۲.۸: یک پوشش مینیمم

سعی داریم دو مساله‌ی پوشش راسی و مجموعه‌ی مستقل راسی را با دو برنامه‌ریزی خطی و روش الگوریتمی حل نماییم. ابتدا به شرح روش‌ها در مساله‌ی پوشش راسی و سپس در مساله‌ی مجموعه‌ی مستقل راسی می‌پردازیم.

(۱) روش برنامه‌ریزی خطی قطعی مربوط به مساله‌ی پوشش راسی وزن‌دار [۷]

متغیر $x(v)$ را در نظر بگیرید به‌طوری‌که:

$$\begin{cases} ۱ & \text{اگر راس } v \text{ در مجموعه‌ی پوشش } K \text{ قرار داشته باشد} \\ ۰ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

و همچنین به ازای هر راس v متغیر $w(v)$ را معرف وزن هر راس در نظر بگیرید. بنابراین مدل برنامه‌ریزی خطی مساله به صورت (۱.۸) خواهد بود.

$$\begin{cases} \min & Z = \sum_{v \in V} w(v)x_v \\ \text{s.t.} & \\ & x_u + x_v \geq 1 \quad \forall (u, v) \in E \\ & x_v \in \{0, 1\} \quad \forall v \in V \end{cases} \quad (۱.۸)$$

محدودیت اول ضمانت می‌کند که هر یال، حداقل یک سرش در مجموعه‌ی پوشش راسی قرار دارد. محدودیت دوم نیز مقادیری را که متغیر x_v می‌گیرد بیان می‌کند. واضح است که اگر رئوس گراف وزن‌دار نباشند، در مدل برنامه‌ریزی خطی (۱.۸)، $w(v)$ ظاهر نخواهد شد.

روش برنامه‌ریزی خطی فازی مربوط به پوشش راسی در گراف وزن‌دار

$$\begin{cases} \min & \tilde{Z} = \sum_{v \in V} \tilde{w}(v)x_v \\ \text{s.t.} & \\ & x_u + x_v \geq 1 \quad \forall (u, v) \in E \\ & x_v \in \{0, 1\} \quad \forall v \in V \end{cases} \quad (۲.۸)$$

(۲) روش الگوریتمی مربوط به پوشش راسی

در این قسمت الگوریتمی برای به دست آوردن پوشش راسی مینیمم و همچنین الگوریتمی برای پوشش راسی وزن‌دار مینیمم ارائه می‌شود.

الگوریتمی برای پوشش راسی مینیمم در حالت قطعی
الگوریتم حریصانه^۴:

$$i \leftarrow 0, K \leftarrow \emptyset \quad (۱)$$

(۲) راس v با بیشترین درجه را در گراف پیدا کنید.

(۳) $K \leftarrow K \cup \{v\}$ و تمام یال‌هایی که در راس v واقع شده‌اند را حذف کنید.

(۴) تا زمانیکه یالی باقی‌مانده، ادامه دهید.

پس از پیاده‌سازی الگوریتم، مجموعه‌ی K ای که به دست می‌آید، مجموعه‌ی پوشش راسی مینیمم خواهد بود.

الگوریتمی برای پوشش راسی وزن‌دار مینیمم در حالت قطعی و فازی
الگوریتم:

مجموعه‌ی راس‌های منفرد گراف را در مجموعه‌ی $D(V)$ و مجموعه‌ی راس‌هایی که نسبت وزن به درجه‌ی آن‌ها کمینه است را در $W(V)$ قرار دهید. سپس مطابق گام‌های زیر پیش بروید:

(۱) $G_0 = (V_0, E_0) \leftarrow G = (V, E), K \leftarrow \emptyset, i \leftarrow 0$ ، تا زمانیکه $E_i \neq \emptyset$ است، گام‌های زیر را انجام دهید

$$D_i \leftarrow D(V_i) \quad (۲)$$

$$K \leftarrow K \cup W_i, W_i \leftarrow W(V_i) - D_i \quad (۳)$$

$$V_{i+1} = V_i - (D_i \cup W_i) \quad (۴)$$

$$E_{i+1} = \{(u, v) \in E_i | u, v \subseteq V_{i+1}\} \quad (۵)$$

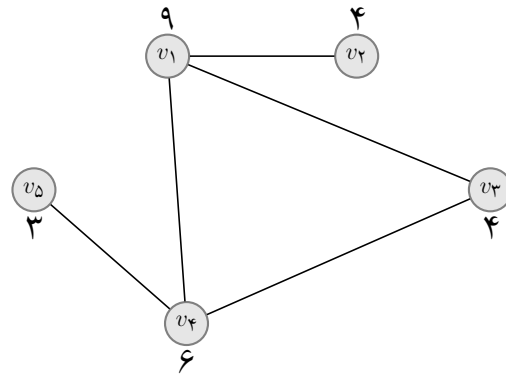
$$G_{i+1} = (V_{i+1}, E_{i+1}) \quad (۶)$$

(۷) $i \leftarrow i + 1$ و به گام ۲ بروید.

پس از اتمام الگوریتم، مجموعه‌ی K پوشش راسی وزن‌دار مینیمم را می‌دهد.

مثال ۱.۲.۸. گراف شکل ۳.۸ را در نظر بگیرید. مجموعه‌ی پوشش راسی وزن‌دار مینیمم را به دست آورید.

^۴ الگوریتمی است که مبنای آن بر انتخاب عنصر یا مسیری است که در هر مرحله بهترین به نظر می‌رسد، بدون اینکه به انتخاب‌های قبل یا بعد توجهی شود.



شکل ۳.۸: به دست آوردن پوشش راسی وزن دار مینیمم در گراف داده شده طبق الگوریتم

[تکرار اول]

گام (۱) $i \leftarrow 0, K \leftarrow \emptyset, E_0 \leftarrow E, V_0 \leftarrow V$

گام (۲) $D_0 = \emptyset$

گام (۳)

$$W(v_1) = \frac{9}{3} = 3, W(v_2) = \frac{4}{1} = 4, W(v_3) = \frac{4}{2} = 2, W(v_4) = \frac{6}{3} = 2, W(v_5) = \frac{3}{1} = 3$$

بنابراین داریم: $W(V_0) = \{v_3, v_4\}$ و در نتیجه $K = \{v_3, v_4\}$

گام (۴) $V_1 = \{v_1, v_2, v_5\}$

گام (۵) $E_1 = \{(v_1, v_2)\}$

گام (۶) $G_1 = (V_1, E_1)$

گام (۷) $i \leftarrow 1$

[تکرار دوم]

گام (۲) $D_1 = D(V_1) = \{v_5\}$

گام (۳)

$$W(v_1) = \frac{9}{1} = 9, W(v_2) = \frac{4}{1} = 4, W(v_5) = \frac{3}{0} = \infty$$

بنابراین داریم: $W(V_1) = \{v_2\}$ و در نتیجه $K = \{v_3, v_4, v_2\}$

گام (۴) $V_2 = \{v_1\}$

گام (۵) $E_2 = \emptyset$ بنابراین متوقف می‌شویم.

در نتیجه $K = \{v_2, v_3, v_4\}$ پوشش راسی وزن دار مینیمم شکل ۳.۸ است و هزینه‌ی آن برابر $w(v_2) + w(v_3) + w(v_4) = ۱۴$ می‌باشد.

در حالتی که وزن رئوس فازی است، به راحتی با به دست آوردن مقدار قطعی اعداد فازی با تابع‌های رتبه‌بندی، دوباره مساله به حالت قطعی تبدیل می‌شود و مشابه قبل حل خواهد شد.

۱.۲.۸ کاربردهای مساله‌ی پوشش راسی

مساله‌ی پوشش راسی از جمله مسایلی است که کاربردهای بسیاری در زندگی روزمره دارد. یکی از معروف‌ترین این کاربردها دیده‌بانی^۵ (عملی برای مشاهده‌ی وضعیت یک سیستم) می‌باشد. به عنوان مثال فرض کنید که قرار است راهروهای دانشکده‌ای دیده‌بانی شوند. سؤال این است که دوربین‌ها چگونه نصب شوند که با کمترین تعداد دوربین تمامی دانشکده زیر نظر گرفته شود. همچنین فرض کنید قرار است در یک منطقه ایستگاه آتش‌نشانی زده شود. سؤال این است که آتش‌نشانی‌ها کجا تاسیس شوند تا با کمترین تعداد ایستگاه آتش‌نشانی تمام منطقه پوشش داده شود؟ دیده‌بانی برای بیمارستان‌ها و فروشگاه‌ها هم مطرح می‌باشد. این دسته از مسایل و مسایلی از این قبیل می‌توانند کاربردهایی برای مساله‌ی پوشش راسی باشند. حتی امروزه پوشش راسی در علوم مختلفی مثل طراحی مدار، ارتباطات راه دور، زیست، اقتصاد و هواشناسی کاربرد دارد.

ملاحظه ۲.۲.۸. وزن دار بودن رئوس در این کاربردها بدین صورت قابل توضیح است که به عنوان مثال در دیده‌بانی دانشکده، نصب هر دوربین که به عنوان رئوس گراف هستند، هزینه‌ای در بر دارد که این هزینه‌ها همان وزن رئوس گراف در نظر گرفته می‌شوند. حال اگر اطلاعات دقیقی در مورد میزان هزینه‌ی نصب دوربین‌ها وجود نداشته باشد، لازم می‌شود که هزینه‌ی نصب دوربین‌ها با اعداد فازی نمایش داده شوند.

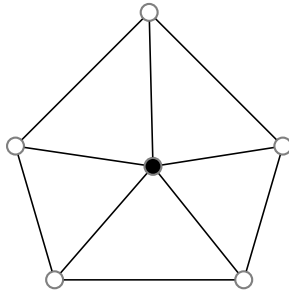
۳.۸ مجموعه‌ی مستقل راسی

ساختار گرافی مساله

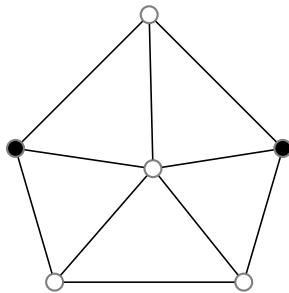
در محیط قطعی، فرض کنید گرافی مانند $G = (V, E)$ داده شده باشد. در این گراف مجموعه‌ای مانند S از V یک مجموعه‌ی مستقل نامیده می‌شود اگر هیچ دو راسی از S در G مجاور نباشند [۱۰]. (شکل ۴.۸ را ببینید.)

مدل بهینه‌ی این مساله بدین صورت است که از میان مجموعه‌های مستقل، مجموعه‌ی مستقل ماکسیمم به دست آید. (شکل ۵.۸ را ببینید) توجه داشته باشید در حالتی که رئوس گراف وزن دار باشند برای هر راس گراف، وزنی نسبت داده شده است.

^۵monitoring



شکل ۴.۸: یک مجموعه‌ی مستقل



شکل ۵.۸: یک مجموعه‌ی مستقل ماکسیمم

(۱) روش برنامه‌ریزی خطی مربوط به مجموعه‌ی مستقل راسی وزن‌دار

متغیر $x(v)$ را در نظر بگیرید به طوری که:

$$\begin{cases} ۱ & \text{اگر راس } v \text{ در مجموعه‌ی مستقل } S \text{ قرار داشته باشد} \\ ۰ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

و همچنین به ازای هر راس v متغیر $w(v)$ را معرف وزن هر راس در نظر بگیرید. بنابراین برنامه‌ریزی خطی مساله به صورت (۳.۸) خواهد بود [۲۰].

$$\begin{cases} \max & Z = \sum_{v \in V} w(v)x(v) \\ s.t. & \\ & x(u) + x(v) \leq 1 \quad \forall (u, v) \in E \\ & x(v) \in \{0, 1\} \quad \forall v \in V \end{cases} \quad (۳.۸)$$

در مدل بالا محدودیت اول بیان می‌کند که برای هر یال (u, v) حداکثر یکی از رئوس u یا v می‌تواند انتخاب شود تا مجموعه‌ی مستقل به وجود آید. محدودیت دوم نیز مقادیری که متغیر $x(v)$ می‌گیرد را بیان می‌کند. واضح است که اگر رئوس گراف وزن‌دار نباشند، در مدل برنامه‌ریزی خطی ۳.۸، $w(v)$ ظاهر نخواهد شد.

(۲) روش برنامه‌ریزی خطی فازی مربوط به مجموعه‌ی مستقل راسی با وزن‌های فازی

$$\begin{cases} \max & \tilde{Z} = \sum_{v \in V} \tilde{w}(v)x(v) \\ \text{s.t.} & \\ & x(u) + x(v) \leq 1 \quad \forall (u, v) \in E \\ & x(v) \in \{0, 1\} \quad \forall v \in V \end{cases}$$

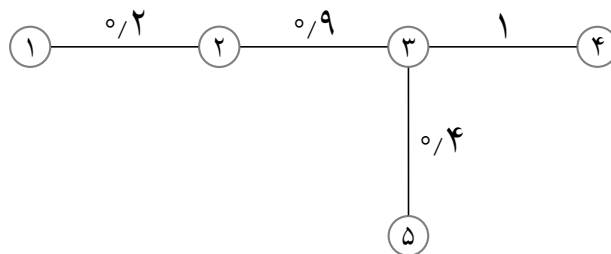
۱.۳.۸ مجموعه‌ی مستقل راسی در گراف فازی

مطالب این قسمت از منبع [۷، ۱۳] گرفته شده است. برای هر گراف فازی می‌توان یک ماتریس فازی متناسب آن، به صورت زیر تعریف کرد:

$$M = (m_{ij}), i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m$$

$$m_{ij} = \begin{cases} \mu_{ij} & (v_i, v_j) \in E(G), \mu_{ij} \in (0, 1] \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad \text{به طوری که داریم:}$$

به عنوان مثال گراف فازی شکل ۶.۸ را در نظر بگیرید.



شکل ۶.۸: گراف فازی

ماتریس فازی متناظر با آن به صورت جدول ۱.۸ می‌باشد.

جدول ۱.۸: ماتریس گراف فازی شکل ۶.۸

	۱	۲	۳	۴	۵
۱	۰	۰/۲	۰	۰	۰
۲	۰/۲	۰	۰/۹	۰	۰
۳	۰	۰/۹	۰	۱	۰/۴
۴	۰	۰	۱	۰	۰
۵	۰	۰	۰/۴	۰	۰

تعریف ۱.۳.۸. فرض کنید $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$ گرافی فازی باشد. $S^\delta \subseteq V$ داده شده است و بین صفر و یک قرار دارد. مجموعه‌ی مستقل راسی فازی نامیده می‌شود اگر و فقط اگر رابطه‌ی (۴.۸) را داشته باشیم.

$$\forall (v_i, v_j) \in E, v_i, v_j \in S^\delta \quad 0 \leq m_{ij} \leq \delta \quad (4.8)$$

به عنوان مثال برای گراف فازی شکل ۶.۸ حالت‌های ۱ تا ۳ را داریم.

(۱) برای $\delta = ۱$ خانواده‌ی مجموعه‌های مستقل راسی فازی برابر $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ است. زیرا m_{ij} تمام رئوس کمتر از δ است.

(۲) برای $\delta = ۰/۵$ خانواده‌ی مجموعه‌های مستقل راسی فازی برابر $\{\{۱, ۲, ۴, ۵\}, \{۱, ۳, ۵\}\}$ است.

(۳) برای $\delta = ۰$ خانواده‌ی مجموعه‌های مستقل راسی فازی برابر $\{\{۱, ۳\}, \{۱, ۴, ۵\}, \{۲, ۴, ۵\}\}$ است، که در این حالت خانواده‌ی مجموعه‌های مستقل راسی فازی برابر خانواده‌ی مجموعه‌های مستقل راسی است.

روش الگوریتمی برای به دست آوردن مجموعه‌ی مستقل در گراف فازی

ابتدا روابط مالگرنج^۶ که در بیان الگوریتم برای مجموعه‌های مستقل کاربرد دارد، بیان می‌شود. مالگرنج روابط \cup, \cap را به صورت (۵.۸) بیان کرد.

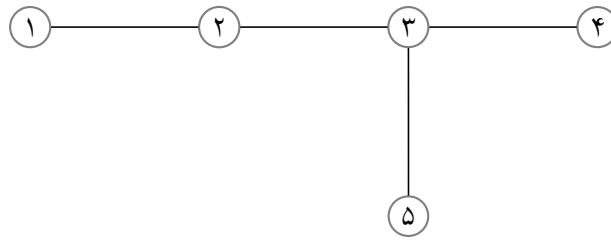
ماتریس مجاورت M متناظر با گراف G را در نظر بگیرید، ماتریس متمم M را به دست آورده و آن را با \bar{M} نمایش دهید. فرض کنید m_1, m_2 زیرماتریس‌هایی از \bar{M} باشند که $m_1 = (A_1, B_1)$ و $m_2 = (A_2, B_2)$ می‌باشد. A_1, A_2 شامل شماره‌ی سطرها است، فرض کنید i یکی از آن‌ها باشد و B_1, B_2 شامل شماره‌ی ستون‌ها است، فرض کنید j یکی از آن‌ها باشد، آنگاه $M(i, j) = ۱$. در این صورت رابطه‌ی (۵.۸) را خواهیم داشت.

$$m_1 \cup m_2 = (A_1 \cup A_2, B_1 \cap B_2), m_1 \cap m_2 = (A_1 \cap A_2, B_1 \cup B_2) \quad (5.8)$$

مثال ۲.۳.۸. گراف غیر جهت‌دار G را مطابق شکل ۷.۸ در نظر بگیرید. ماتریس مجاورت آن به صورت (۶.۸) می‌باشد.

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

^۶Malgrange's relations

شکل ۷.۸: گراف G

و ماتریس متمم آن به صورت (۷.۸) می‌باشد.

$$\bar{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.8)$$

یک پوشش سطری \bar{M} به صورت رابطه‌ی (۸.۸) می‌باشد.

$$RC = \{(1, 1345); (2, 245); (3, 13); (4, 1245); (5, 1245)\} \quad (8.8)$$

همچنین، یک پوشش ستونی \bar{M} به صورت (۹.۸) می‌باشد.

$$CC = \{(1345, 1); (245, 2); (13, 3); (1245, 4); (1245, 5)\} \quad (9.8)$$

به عنوان مثال در نظر بگیرید: $m_1 = (1, 1345)$, $m_2 = (2, 245)$ روابط مالگرنج برای m_1, m_2 می‌داده شده به صورت (۱۰.۸) می‌باشند.

$$m_1 \cup m_2 = (12, 45), m_1 \cap m_2 = (\emptyset, 12345) \quad (10.8)$$

ملاحظه ۳.۳.۸. برای گراف فازی G ، یک پوشش سطری از ماتریس فازی وابسته به δ (داده می‌شود) است و به صورت (۱۱.۸) تعریف می‌شود.

$$RC = (i, j_1, j_2, \dots, j_p) \quad (11.8)$$

به طوری که (۱۲.۸) را داریم.

$$0 \leq m_{i,j_1}, m_{i,j_2}, \dots, m_{i,j_p} \leq \delta \quad (12.8)$$

قرارداد ۴.۳.۸. خانواده‌ی مجموعه‌های مستقل راسی با $\forall FIS$ و خانواده‌ی مجموعه‌های مستقل راسی فازی با $\wedge FFIS$ نمایش داده می‌شوند.

^Yfuzzy independent set

[^]family fuzzy independent set

حال به بیان الگوریتم می‌پردازیم که هم در مورد گراف قطعی و هم در مورد گراف فازی کاربرد دارد.
الگوریتم:

(گام ۱) پوششی سطری در ماتریس \bar{M} پیدا کنید و آن را با C نمایش دهید (در گراف فازی پوشش سطری وابسته به δ را از ماتریس $M = [m_{ij}]$ پیدا کنید) و قرار دهید: $FIS = \emptyset$ (در گراف فازی به جای FIS داریم $FFIS$) و $k = 1$.

(گام ۲)

(الف) C_k ای پیدا کنید به این صورت که:

به ازای هر $m_1, m_2 \in C_{k-1}$ ، اگر $A_1 \cup A_2 \subseteq B_1 \cap B_2$ ، $A_1 \cup A_2 \neq \emptyset$ باشد، آنگاه $m_1 \cup m_2 \in C_k$.

(ب) اگر $m = (I, I)$ ، $m \in C_k$ ، آنگاه $FIS = FIS \cup I$ و $C_k = C_k \setminus m$.

(گام ۳) گام ۲ را برای $k = 2, 3, \dots, k$ تکرار کنید تا زمانی که $C_k = \emptyset$.

در نهایت FIS حاصل می‌شود.

مثال ۵.۳.۸. گراف شکل ۷.۸ را در نظر بگیرید. مجموعه‌ی FIS را بیابید. مراحل الگوریتم در جدول ۲.۸ خلاصه شده است.

جدول ۲.۸: پیاده‌سازی مراحل الگوریتم

k	C_k	FIS
۰	$C_0 = \{(1, 1345); (2, 245); (3, 13); (4, 1245); (5, 1245)\}$	\emptyset
۱	$C_1 = \{(13, 13); (14, 145); (15, 145); (24, 245); (25, 245); (45, 1245)\}$	$\{(13)\}$
۲	$C_2 = \{(145, 145); (245, 245)\}$	$\{(13); (145); (245)\}$
۳	$C_3 = \emptyset$	

در نتیجه FIS برای گراف G شکل ۷.۸ برابر $\{(13); (145); (245)\}$ خواهد بود.

۲.۳.۸ کاربرد ی از مجموعه‌ی مستقل راسی

کاربرد ی از مدل مجموعه‌ی مستقل ماکسیمم، برنامه‌ریزی برای نمایش پوسترهای دانش‌آموزان می‌باشد. فرض کنید دانش‌آموزان یک مدرسه قصد دارند پوسترهایی از کارهایشان را به نمایش بگذارند، که هر پوستر می‌تواند بیشتر از یک نویسنده و هر دانش‌آموز می‌تواند بیشتر از یک پوستر داشته باشد. هدف این است تا جایی که ممکن است پوسترهای زیادی در زمان یکسان به نمایش گذاشته شوند با این شرط که هر دانش‌آموز، حداکثر می‌تواند یک پوسترش را در یک بازه‌ی زمانی مشخص به نمایش بگذارد و

برای نمایش پوستره‌های دیگرش باید در بازه‌های زمانی دیگر اقدام کند. در اینجا یک ابرگراف خواهیم داشت که راس‌های آن را به عنوان پوسترها و یال‌های آن را به عنوان دانش‌آموزان در نظر می‌گیریم. در این صورت مجموعه‌ی مستقل ماکسیمم، ماکسیمم تعداد پوستره‌هایی که در یک زمان می‌توانند نمایش داده شوند را مشخص می‌کند [۳۹].

۴.۸ نتیجه‌گیری

مدل‌سازی و بیان مدل به منظور توصیف و درک بهتر وقایع و پدیده‌های جهان واقعی به وجود آمد. از جمله‌ی مدل‌ها می‌توان به مدل‌های گراف اشاره نمود. این مدل‌ها به طور موثر می‌توانند وضعیت‌هایی از زندگی واقعی را مدل کنند. در واقع اگر مساله یا پدیده‌ای از جهان واقعی به عنوان یک سیستم در نظر گرفته شود به راحتی می‌توانیم سیستم را به صورت ساختار یک گراف طراحی کنیم. بنابراین آشنایی با مدل‌های گراف می‌تواند کمک زیادی در تشریح و حل بهتر مسایل داشته باشد. از طرفی در شرایط واقعی زندگی همیشه عدم قطعیت‌هایی در سیستم‌های مختلف وجود دارد، که این عدم قطعیت و ابهامات از طرق مختلفی پدیدار می‌شود. وجود اینگونه شرایط سیستم‌های فازی را پدید آورد که این سیستم‌ها به بی‌دقتی‌ها و مفاهیم نادقیقی که وجود دارد مرتبط است. از این رو مفهوم فازی ابزاری مفید و کارآمد خواهد بود که به راحتی به مدل‌سازی سیستم‌ها در شرایط عدم قطعیت می‌پردازد. در این پایان‌نامه مدل‌هایی از گراف در شرایط فازی مورد مطالعه قرار گرفت. برای این منظور سعی شد مدل‌های گرافی معرفی شده به دو روش برنامه‌ریزی خطی و روش الگوریتمی حل شود، که مفهوم فازی در روش برنامه‌ریزی خطی بدین صورت ظاهر شد که ضرایب موجود در مدل اعداد فازی در نظر گرفته شوند. همچنین در گراف‌ها، گاه وزن یال‌ها با اعداد فازی مشخص می‌شد و گاه خود گراف فازی بود. در روش‌های الگوریتمی بیان شده نیز مفهوم فازی به حالات مختلفی ظاهر شد.

مراجع

- [۱] کسلخه، آیلر. بررسی جریان ماکسیمم در شبکه‌های فازی، پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد، دانشگاه شاهرود، (بهمن ۱۳۹۲)، ۹۶ صفحه.
- [۲] رحیمی شعرباف. صادق، الگوریتمی در معرفت و بصیرت ریاضی، فصل‌نامه‌ی علمی- پژوهشی معرفت فلسفی، سال دهم، شماره‌ی دوم، (زمستان ۱۳۹۱)، صفحه‌ی ۱۲۱-۱۳۵.
- [۳] رحیمی شعرباف. صادق، تعیین کاربردهای تئوری گراف در مدل‌سازی ریاضی روش‌های پیشگیری از اتلاف منابع ملی، کنفرانس روش‌های علمی پیشگیری از اتلاف منابع ملی، فرهنگستان علوم جمهوری اسلامی ایران، (خرداد ۱۳۸۴).
- [۴] رحیمی شعرباف، صادق. گامی در شناخت ریاضیات، دانشگاه شاهرود، (سال ۱۳۹۳)، صفحه‌ی ۱۱۴.
- [5] K. I. Aardal, S. P.M. Van hoesel, A. M.C.A. Koster, C. Mannino, and A. Sassano, Models and solution techniques for frequency assignment problems, ZIB-Report, (28 December 2001), pp: 1-40.
- [6] F. F.K. Al-abdul hameed, A linear programming formulation of assignment problems, Journal of Basrah Researches ((Sciences)), Vol. 37 (No. 2), (15 April 2011), pp: 21-26.
- [7] S. Balaji, V. Swaminathan, and K. Kannan, An effective algorithm for minimum weighted vertex cover problem, World Academy of Science, Engineering and Technology, Vol. 4, (2010-07-25), pp: 226-230.
- [8] S. Banerjee, and T.K. Roy, Arithmetic operations on generalized trapezoidal fuzzy number and its applications, Turkish Journal of Fuzzy Systems, Vol. 3 (No. 1), (2012), pp: 16-44.
- [9] P. Biswas, and S. Pramanik, Application of fuzzy ranking method to determine the replacement time for fuzzy replacement problem, International Journal of Computer Applications (0975 – 8887), Vol. 25 (No. 11), (July 2011), pp: 41-47.
- [10] J.A. Bondy, and U.S.R. Murty, Graph theory with applications, Springer, (2008), 655 pages .
- [11] A. Bose, Primal-dual algorithm for shortest path problem, Computer Science and Engineering, (Fall 2006).

- [12] R. Chutia, S. Mahanta, and D. Datta, Arithmetic of triangular fuzzy variable from credibility theory, *International Journal of Energy, Information and Communications*, Vol. 2 (No. 3), (August 2011).
- [13] V. Cioban, On independent sets of vertices in graphs, Vol. 7 (No. 1), (2007), pp: 97-100.
- [14] V. Cioban, and V. Prejmerean, Algorithms for compute independent sets of vertices in graphs and fuzzy graphs, Faculty of Mathematics and Computer Science, International Conference on Automation, Quality and Testing, Robotics, (2010), pp: 1-5.
- [15] Y. Denga, Y. Chenb, Y. Zhanga, and S. Mahadevan, Fuzzy dijkstra algorithm for shortest path problem under uncertain environment, *Applied Soft Computing*, Vol. 12 (2012), pp: 1231–1237.
- [16] S. Dhanasekar, S. Hariharan, and P. Sekar, Classical travelling salesman problem (TSP) based approach to solve fuzzy TSP using Yager’s ranking, *International Journal of Computer Applications (0975 – 8887)*, Vol. 74 (No. 13), (July 2013).
- [17] M. Diaby, Linear programming formulation of the vertex colouring problem, *International journal Mathematics in Operational Research*, Vol. 2 (No. 3), (2010), pp: 259-289.
- [18] J. Edmonds, and E. L. Johnson, Matching, euler tours and the chinese postman, *Mathematical Programming*, North-Holland Publishing Company, Vol. 5, (1973), pp: 88-124.
- [19] A. Eisenblatter, M. Gratschel, and A. M.C.A. Koster, Frequency planning and ramifications of coloring, *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, Vol. 22, (2002), pp: 51-88.
- [20] T. Erlebach, and K. Jansen, Conversion of coloring algorithms into maximum weight independent set algorithms, *Discrete Applied Mathematics*, Vol. 148 (No. 1), (2005), pp: 107-125.
- [21] T. Etzion and P. R. J. Ostergard, Greedy and heuristic algorithms for codes and colorings, *IEEE transactions on information theory*, Vol. 44- No. 1, (January 1998), pp: 382-388.
- [22] M. Geetha, and G.M. K. Nawaz, User-based intelligent decision support system in route selection on road network, *Oriental Journal of Computer Science and technology*, Vol. 6 (No. 2), (June 2013) , pp: 67-74.

- [23] M. Groetschel, A. Eisenblatter, and A. M.C.A. Koster, Frequency planning and ramification of coloring, *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, Vol. 22 (2002), pp:51-88.
- [24] D. S. Hochbaum, *Integer programming and combinatorial optimization*, IEOR 269, (Spring 2010).
- [25] R.A. Hudson, *Planar graphs: A historical perspective*, Master's thesis, B.A., University of Southern Indiana, (20 July 2004), 101 pages.
- [26] R. J. Hussain, and P. Jayaraman, Fuzzy transportation problem using improved fuzzy Russells method, *International Journal of Mathematics Trends and Technology*, Vol. 5, (January 2014), pp: 50-59.
- [27] N. A. jabbar, J. H. Naoom, and E. H. Ouda, Fuzzy dual graph, *Journal of Al-Nahrain University*, Vol. 12 (No. 4), (December 2009), pp: 168-171.
- [28] A. Janiak, and A. Kasperski, The minimum spanning tree problem with fuzzy costs, *Fuzzy Optim Decis Making*, Vol. 7 (2008), pp: 105-118.
- [29] T. Jiafu, W. Dingwei, R. Y K Fung, and K.L. Yung, Understanding of fuzzy optimization: theories and methods, *Journal of Systems Science and Complexity*, Vol. 17 (No. 1), (Jan 2004), pp: 117-136.
- [30] Q. Jiang, and J. Peng, Ranking trapezoidal fuzzy variables by second-order fuzzy dominance based on credibility distribution, *International Conference on Robotics and Biomimetics*, (December 2007), pp: 15-18.
- [31] W. S. Khalaf, Solving fuzzy transportation problems using a new algorithm, *Journal of Applied Sciences*, Vol. 14 (No. 3), (2014), pp: 252-258.
- [32] A. Kishore, and M.S. Sunitha, Chromatic number of fuzzy graphs, *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, Vol. 7 (No. 4), (April 2014), pp: 543-551.
- [33] M.C. Koissi, and A. F. Shapiro, Credibility theory in a fuzzy environment, Presented at the 47th Actuarial Research Conference, University of Manitoba, Canada, (August 2012), pp: 1-4.
- [34] A. M.C.A. Koster, *Frequency assignment, models and algorithm*, (1999), 175 pages.
- [35] A. Kumar and M. Kaur, An algorithm for solving fuzzy maximal flow problems using generalized trapezoidal fuzzy numbers, *International Journal of Applied Science and Engineering*, Vol. 8 (No. 2), (2010), pp: 109-118.

- [36] A. Kumar and M. Kaur, Solution of fuzzy maximal flow problems using fuzzy linear programming, *World Academy of Science, Engineering and Technology*, Vol. 54, (2011-06-23), pp: 15-19.
- [37] K. H. Lee, *First course on fuzzy theory and applications*, (2005), 340 pages.
- [38] L. Liu, Y. Li, and L. Yang, The maximum fuzzy weighted matching models and hybrid genetic algorithm, *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 181, (2006), pp: 662–674.
- [39] E. Losievskaja, *Approximation algorithms for independent set problems on hypergraphs*, Ph.D. Dissertation, School of Computer Science at Reykjavik University, (December 2009), 100 pages.
- [40] A. Mehrotra, and M. A. Trick, A branch-and-price approach for graph multi-coloring, *Advances in Computing, Optimization, and Decision Technologies*, (04-2007), pp: 15-29.
- [41] A. Nagoorgani, and D. R. Subahashini, Fuzzy labling tree, *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, Vol. 90 (No. 2), (2014), pp: 131-141.
- [42] A. Nagoor Gani, and P. Vijayalakshmi, Insensitive Arc in Domination of Fuzzy Graph, *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, Vol. 6 (No. 26), (2011), pp: 1303 - 1309.
- [43] S. Narayanamoorthy, S. Saranya, and S. Maheswari, A method for solving fuzzy transportation problem (FTP) using fuzzy Russell's method, *Published Online in MECS*, Vol. 5 (No. 2), (January 2013), pp: 71-75.
- [44] G. Nirmala, and M. Vijaya, Hamiltonian fuzzy cycles on K_{2n+1} fuzzy graph, *International Journal of Scientific and Research Publications*, Vol. 2 (No. 11), (November 2012), pp: 103-108.
- [45] A.J. Orman, and H.P. Williams, A survey of different integer programming formulations of the travelling salesman problem, *Advances in computational management science*, Vol. 9 (No. 9), (July 2005), pp: 93-108.
- [46] I. H. Osman, M. Hasan, and A. Abdullah, Linear programming based meta-heuristics for the weighted maximal planar graph, *Journal of Operational Research Society*, Vol. 53, (22 March 2002), pp: 1142-1149.
- [47] J. Povh, Assignment problems in logistics, *The journal of Logistics and Sustainable Transport*, Vol. 1 (No. 3), (2008).
- [48] S. Samanta, A. Pal, and M. Pal, New concepts of fuzzy planar graphs, *International Journal of Advanced Research in Artificial Intelligence*, Vol. 3 (No. 1), (2014), pp: 52-59.

-
- [49] H. Schichl, Modeling languages in mathematical optimization applied optimization, Institutfor Mathematik der Universitiit Wien Strudlhofgasse 4, A-1090 Wien, Austria, Vol. 88, (2004), pp: 25-36.
- [50] A. K. Sharma, B. V.Padamwar, and C.L. Dewangan, Trends in fuzzy graphs, International Journal of Innovative Research in Science, Engineering and Technology, Vol. 2 (No. 9), (September 2013), pp: 4636-4640.
- [51] H. Thimbleby, The directed chinese postman problem, Software: Practice and Experience, Vol. 33 (No. 11), (September 2003), pp: 1081–1096.
- [52] Y. L. P. Thorani and N. R. Shankar, Fuzzy assignment problem with generalized fuzzy numbers, Applied Mathematical Sciences, Vol. 7 (No. 71), (2013), pp: 3511-3537.
- [53] H. F. Wang, and Y. P. Wen, Time-constrained chinese postman problems, Computers and Mathematics with Applications, Vol. 44 (No. 3-4), (2002), pp: 375-387.
- [54] L. A. Zadeh, Probability measures of fuzzy events, Journal of mathematical analysis and applications, Vol. 23 (No. 2), (August 1968), pp: 421-427.
- [55] B. Zhang, and J. Peng, Uncertain programming model for chinese postman problem with uncertain weights, Industrial Engineering and Management Systems, Vol. 11 (No. 1), (Mar 2012), pp: 18-25.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

k-vertex coloring	k -رنگ آمیزی راسی
k-colorable	k -رنگ پذیر
الف	
saturated	اشباع شده
hungarian algorithm	الگوریتم مجارستانی
ب	
linear programming	برنامه‌ریزی خطی
fuzzy linear programming	برنامه‌ریزی خطی فازی
پ	
bridge	پل
vertex cover	پوشش راسی
ت	
ranking function	تابع رتبه‌بندی
membership function	تابع عضویت
assignment	تخصیص
ج	
flow	جریان
matching	جورسازی
induced matching	جورسازی القایی
perfect matching	جورسازی تام
maximum matching	جورسازی ماکسیمم
ح	
transportation	حمل و نقل
د	
possibility measure	درجه‌ی امکان
necessity measure	درجه‌ی لزوم
tree	درخت
minimum spanning tree	درخت فراگیر مینیمال
hamilton cycle	دور همیلتونی
ذ	

- generalized trapezoidal دوزنقه‌ای تعمیم یافته
- ر
- vertex راس
- fuzzy event رخداد فازی
- proper coloring رنگ‌آمیزی سره
- ز
- subgraph زیرگراف
- induced subgraph زیرگراف القایی
- equality subgraph زیرگراف برابری
- spanning subgraph زیرگراف فراگیر
- ش
- network شبکه
- ع
- chromatic number عدد رنگی
- fuzzy number عدد فازی
- trapezoidal fuzzy number عدد فازی دوزنقه‌ای
- triangular fuzzy number عدد فازی مثلثی
- ف
- fuzzy فازی
- ق
- crisp قطعی
- ک
- shortest path کوتاهترین مسیر
- گ
- trail گذر
- bipartite graph گراف دوبخشی
- underlying graph گراف زمینه
- simple graph گراف ساده
- fuzzy graph گراف فازی
- weighted graph گراف وزن‌دار
- planar graph گراف مسطح
- walk گشت
- م
- α - cut set مجموعه‌ی α - برش
- grade mean integration مجموع میانگین درجات
- level set مجموعه‌ی سطح
- fuzzy set مجموعه‌ی فازی
- independent set مجموعه‌ی مستقل
- circuit مدار

modeling.....	مدل‌سازی.....
connector problem.....	مسئله‌ی ارتباط.....
storage problem.....	مسئله‌ی انبارداری.....
frequency interference problem.....	مسئله‌ی تداخل فرکانس.....
banquet problem.....	مسئله‌ی ضیافت.....
path.....	مسیر.....
augmenting path.....	مسیر افزوده.....
alternating path.....	مسیر متناوب.....
hamilton path.....	مسیر همیلتونی.....
sink.....	مقصد.....
source.....	منبع.....
component.....	مولفه.....
	و
face.....	وجه.....
	ه
co-channel.....	هم فرکانس.....
	ی
cut edge.....	یال برشی.....
weak edge.....	یال ضعیف.....
strong edge.....	یال قوی.....

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

A

achromatic coloring رنگ ناپذیری
 α - cut set مجموعه‌ی α - برش
alternating path مسیر متناوب
assignment تخصیص
augmenting path مسیر افزوده

B

banquet problem مساله‌ی ضیافت
bipartite graph گراف دوبخشی
bridge پل

C

chromatic number عدد رنگی
circuit مدار
co-channel هم فرکانس
component مولفه
connector problem مساله‌ی ارتباط
crisp قطعی
cut edge یال برشی

E

equality subgraph زیرگراف برابری

F

face وجه
flow جریان
frequency interference problem مساله‌ی تداخل فرکانس
fuzzy فازی
fuzzy event رخداد فازی
fuzzy graph گراف فازی
fuzzy linear programming برنامه‌ریزی خطی فازی
fuzzy number عدد فازی
fuzzy set مجموعه‌ی فازی

G

generalized trapezoidal دوزنقه‌ای تعمیم یافته
 grade mean integration مجموع میانگین درجات

H

hamilton cycle دور همیلتونی
 hamilton path مسیر همیلتونی
 hungarian algorithm الگوریتم مجارستانی

I

independent set مجموعه‌ی مستقل
 induced matching جورسازی القایی
 induced subgraph زیرگراف القایی

L

level set مجموعه‌ی سطح
 linear programming برنامه‌ریزی خطی

M

matching جورسازی
 maximum matching جورسازی ماکسیمم
 membership function تابع عضویت
 minimum spanning tree درخت فراگیر مینیمال
 modeling مدل‌سازی

N

necessity measure درجه‌ی لزوم
 network شبکه

P

path مسیر
 perfect matching جورسازی تام
 planar graph گراف مسطح
 possibility measure درجه‌ی امکان
 proper coloring رنگ‌آمیزی سره

R

ranking function تابع رتبه‌بندی

S

saturated اشباع شده
 shortest path کوتاهترین مسیر
 simple graph گراف ساده
 sink مقصد
 source منبع
 spanning subgraph زیرگراف فراگیر
 storage problem مساله‌ی انبارداری

strong edge.....	یال قوی.....
subgraph.....	زیرگراف.....
T	
trail.....	گذر.....
transportation.....	حمل و نقل.....
trapezoidal fuzzy number.....	عدد فازی دوزنقه‌ای.....
tree.....	درخت.....
triangular fuzzy number.....	عدد فازی مثلثی.....
tour.....	سیر.....
U	
underlying graph.....	گراف زمینه.....
V	
vertex.....	راس.....
vertex cover.....	پوشش راسی.....
W	
walk.....	گشت.....
weak edge.....	یال ضعیف.....
weighted graph.....	گراف وزن‌دار.....

نمایه

- مجموعه‌ی α -برش، ۹
مجموعه‌ی سطح، ۹
مجموعه‌ی فازی، ۹
مجموعه‌ی مستقل، ۴۰
مدار، ۸
مدار اوپلری، ۲۹
مدل راسی، ۲
مدل راسی یالی، ۳
مدل یالی، ۲
مسیر، ۸
مسیر M -افزوده، ۸۱
مسیر M -متناوب، ۸۱
مسیر همیلتونی، ۲۹
مولفه، ۸
نرمال بودن، ۹
پوشش راسی، ۱۰۷
- گذر، ۸
گراف، ۶
گراف k -رنگی، ۴۱
گراف G_α ، ۴۲
گراف جهت‌دار، ۶
گراف دوگان مسطح، ۶۱
گراف فازی، ۱۱
گراف مسطح فازی، ۵۷
گراف مسطح ماکسیمال وزن‌دار، ۶۲
گراف همبند، ۸
گشت، ۷
- یال برشی، ۸
یال ضعیف، ۱۱
یال قوی، ۱۱
- k -رنگ‌پذیر راسی، ۴۰
 k -رنگ‌آمیزی راسی، ۴۰
 k -رنگ‌آمیزی راسی سره، ۴۰
 k -رنگ‌آمیزی وجهی، ۶۵
 k -رنگ‌پذیر وجهی، ۶۵
- الگوریتم دیکسترا در محیط فازی، ۲۳
الگوریتم فلوری، ۳۳
الگوریتم مجارستانی، ۳۶
الگوریتم کروسکال، ۱۸
الگوریتم کوهن-مانکرز، ۸۸
تابع رتبه‌بندی، ۱۲
تابع رتبه‌بندی یاگر، ۱۹
تابع عضویت، ۸
جورسازی، ۸۱
دسته‌ی رنگی، ۴۱
دور، ۸
دور همیلتونی، ۲۹
رنگ‌آمیزی سره، ۴۰
رنگ‌آمیزی وجهی سره، ۶۵
زیرگراف القایی، ۷
زیرگراف فراگیر، ۷
زیرگراف یال-القایی، ۷
شبکه، ۷۴
طول مسیر، ۸
عدد رنگی، ۴۱
عدد رنگی وجه G ، ۶۵
عدد فازی، ۹
عدد فازی ذوزنقه‌ای، ۹
عدد فازی ذوزنقه‌ای تعمیم یافته، ۱۰
عدد فازی مثلثی، ۱۰
- قضیه‌ی هال، ۸۲

Aabstract

The graphs modeling is the use of concepts, relationships, and graphs structure on the problems of modeling. In this thesis, the fuzzy modeling of graphs, based on the fuzzy graph types, including the fuzzy trees, fuzzy Euler and Hamiltonian graphs, fuzzy planar graphs, fuzzy bipartite graphs, fuzzy networks and the problems such as the fuzzy coloring, fuzzy vertex cover, and the fuzzy independent sets are discussed. Also for each the graph model, the examples are expressed, Then solutions and applications of the graph model are presented.

Keywords:

modeling; graph structure; fuzzy modeling of graph; fuzzy tree; fuzzy Euler graph; fuzzy Hamiltonian graph; fuzzy planar graph; fuzzy bipartite graph; fuzzy networks; fuzzy coloring; fuzzy vertex cover; fuzzy independent set.



Shahrood University
Faculty Of Mathematical Sciences

Dissertation Submitted in Partial
Fulfillment of The Requirements For The
Degree of Master of Science in
Applied Mathematics

Fuzzy modeling of graphs

Supervisor

Dr. Sadegh Rahimi Shearhaf

by

Somayyeh Amanaty Feizabadi

December 2014