



دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی کاربردی، گرایش گراف و ترکیبیات

عنوان

رنگ آمیزی زیرگراف های گراف

استاد راهنما

دکتر میثم علیشاهی

پژوهشگر

سروانه برزادالوار
پ پ

۱۳۹۳/۰۴/۰۷

نام خانوادگی دانشجو: پریزادالوار		نام: پروانه
عنوان: رنگ آمیزی زیرگراف های گراف		
استاد راهنما: دکتر میثم علیشاهی		
مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد	رشته: ریاضی کاربردی	گرایش: گراف و ترکیبیات
دانشگاه: دانشگاه صنعتی شاهرود	دانشکده علوم ریاضی	
تاریخ فارغ التحصیلی: ۱۳۹۳/۰۴/۰۷	تعداد صفحات: ۵۶	
واژگان کلیدی: رنگ آمیزی گراف ها، زیرگراف های گراف، قضیه توران، عدد توران		
چکیده عدد توران $ex(n, H)$ برابر با ماکزیمم تعداد یال ها در یک زیرگراف فراگیر K_n است، که شامل هیچ زیرگراف یکرخت با H نیست. در این پایان نامه تعمیمی از قضیه توران را برای حالتی که H یک زیرگراف فراگیر از K_n یا دوری با اندازه مشخص است، بیان می کنیم. برای یک گراف G و زیرگراف H، یک گراف با مجموعه رئوسی که شامل تمام رئوس زیرگراف های G که با H یکرخت اند، تعریف می کنیم. در این گراف دو راس مجاورند اگر در یال های غیر مجاور قرار داشته باشند. در این جا عدد رنگی این گراف را برای زیرگراف های ثابت H مورد بررسی قرار می دهیم و در حالت خاص H را یک دور یا یک گراف کامل در نظر می گیریم.		

ماحصل آموخته‌هایم را تقدیم می‌کنم به آنان که مهر آسمانی‌شان آرام بخش آلام زمینی‌ام
است.
به استوارترین تکیه‌گاه‌ام، دستان پر مهر پدرم

سبزترین نگاه زندگی‌ام، چشمان مادرم

همسفران مهربان دنیا، برادران عزیزم احسان، میلاد، محمد

سپاس‌گزاری...

سپاس خدای را که سخنوران، در ستودن او بمانند و شمارندگان، شمردن نعمت‌های او ندانند و کوشندگان، حق او را گزاردن نتوانند و سلام و دورد بر محمد و خاندان پاک او، طاهران معصوم، هم آنان که وجودمان وامدار وجودشان است...

بعد از مدتها، پس از پیمودن راه‌های فراوان که با حضور شیرین اساتید عزیزم، با راهنمایی‌ها و دغدغه‌های فراوان‌شان و شیطنت‌های زیبای آن دوران، نگاه‌های پدر مادرم، با چشمهای پر از برق شوق و زیبایی حضور برادرانم در کنارم، که خستگی‌های این راه را به امید و روشنی راه تبدیل کرده، امیدوارم بتوانم در آینده‌ای نزدیک جواب‌گوی این همه محبت آنها باشم...

اکنون واجب می‌دانم از جناب آقای دکتر میثم علیشاهی که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند و به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، تشکر کنم و همچنین از مزاحمت‌های پی‌درپی که در طی آماده‌سازی این رساله برای‌شان به‌وجود آوردم پوزش می‌طلبم و برای‌شان آرزوی توفیق روزافزون دارم.

در پایان لازم است از دیگر اساتید دلسوزم آقایان دکتر نادر جعفری راد و دکتر صادق رحیمی شعرباف که در کلاس درس همچون پدری مهربان از هیچ کوششی دریغ نداشتند قدردانی نمایم.

بروانه برزادالوار
۱۳۹۳/۰۴/۰۷

پیشگفتار

مساله رنگ آمیزی گراف در بسیاری از زمینه‌ها ظاهر می‌شود. در این پایان‌نامه به‌طور کلی رنگ آمیزی زیرگراف‌های یک گراف را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

در فصل اول، به بیان تاریخیچه و کاربردهای رنگ آمیزی گراف پرداخته‌ایم. در فصل دوم تعاریف و قضایای مقدماتی را لحاظ کردیم. در فصل سوم، به بررسی کرانی برای کمر گراف‌ها می‌پردازیم. طول کوتاه‌ترین دور در یک گراف را کمر گراف گوئیم و با نماد $g(G)$ نمایش می‌دهیم. اگر ماکزیمم تعداد یال‌ها در یک گراف n راسی با کمر k $g \geq k$ را با نماد $E_n(k)$ نشان دهیم، در این صورت با استفاده از قضیه توران تساوی $E_n(4) = n^2/4$ را داریم. برای $g \geq 5$ مقدار $E_n(k)$ دقیقاً مشخص نیست.

السنر^۱ [۸] و اس‌چی‌ونک^۲ [۲۱] در این مورد تحقیقات فراوانی دارند. بالاباس [۳، ۴] ثابت کرد، گرافی n راسی با حداقل $2n$ یال، دارای کران بالای $n^{1+2/(g-2)}$ برای $E_n(k)$ است. این کران بعدها برای n های بزرگ اثبات شد. نتایج پیشرفته‌تری برای مقادیر بزرگ n وجود دارد که به‌طور تقریبی می‌توان در مورد آن‌ها اظهار نظر کرد.

در فصل چهارم، ضمن توصیف ساختار گراف‌های بحرانی، به بیان نتایج سیمونوویتز^۳ در مورد تعداد کپی‌های یکرخیخت با یک زیرگراف مشخص در گراف می‌پردازیم [۲۴]. نتایج این فصل را می‌توان در قالب یک مثال بیان کرد. یک ثابت مثبت c را که در رابطه $1 \leq q < cn$ برای n های بزرگ صدق کند، را در نظر بگیرید. در این صورت هر گراف n راسی با $q + \lfloor n^2/4 \rfloor$ یال، شامل حداقل $(\lfloor n/2 \rfloor - 2)(\lfloor n/2 \rfloor - 1)(\lfloor n/2 \rfloor)$ کپی از دورهای به طول پنج می‌باشد.

منتل [۱۷] اثبات کرد، هر گراف n راسی با $1 + \lfloor n^2/4 \rfloor$ یال، شامل یک مثلث است. رادمایکر^۴ این موضوع را به‌گونه‌ای دیگر بیان کرد. او اثبات کرد هر گراف با ویژگی فوق شامل حداقل $\lfloor n/2 \rfloor$ مثلث است. به‌طور مشابه، اردوش^۵ [۹، ۱۳] اثبات کرد که برای بعضی اعداد ثابت c اگر $q < cn$ باشد، در این صورت اگر گراف دارای $q + \lfloor n^2/4 \rfloor$ یال باشد، نتیجه می‌گیریم این گراف حداقل دارای $q \lfloor n/2 \rfloor$ مثلث است.

کمی بعدتر لواژ^۶ و سیمونوویتز [۱۶] اثبات کردند، نتایج اردوش برای $c = 1/2$ برقرار است. آن‌ها هم‌چنین نتایج مشابهی را برای گراف‌های کامل بیان کردند. در این فصل نتایج اردوش، لواژ و سیمونوویتز را برای کلاس‌های رنگی گراف‌های بحرانی بیان می‌کنیم.

^۱Elsner

^۲Schwenk

^۳Simonovits

^۴Rademacher

^۵Erdos

^۶Lovaz

در فصل پنجم، به محاسبه عدد توران برای گراف‌های همیلتنی می‌پردازیم. اور^۷ [۲۰] اثبات کرد که گراف‌های غیرهمیلتنی n راسی حداکثر دارای $1 + \binom{n-1}{2}$ یال می‌باشند. قضیه اور می‌تواند به گراف‌های فراگیر توران تعمیم یابد.

برای یک گراف H ، عدد توران $ex(n, H)$ برابر با ماکزیمم تعداد یال یک گراف n راسی است که شامل زیرگراف یکریخت با H نیست. بنابراین قضیه اور نشان می‌دهد که عدد توران $ex(n, C_n)$ که در آن C_n دوری به طول n است، برابر با $1 + \binom{n-1}{2}$ است. اخیراً قضیه اور به دورهای همیلتنی در ابرگراف‌ها تعمیم داده شده است.

در فصل ششم، مسایل مربوط به دورها و رنگ‌آمیزی گراف‌ها را به‌طور هم‌زمان مطرح کردیم. کاتونا^۸ و توزا^۹ دو نویسنده‌ای بودند که برای نخستین بار دو موضوع رنگ‌آمیزی و دورهای با اندازه مشخص در گراف‌ها را باهم در یک عنوان به‌صورت زیر مطرح کردند. این دو فرد، روشی برای رنگ‌آمیزی دورهای با اندازه مشخص در گراف ارایه دادند، به‌صورتی که دورهای یال مجزا و با اندازه مشخص رنگ‌های متفاوتی می‌گیرند. این نوع رنگ‌آمیزی از دورها، رنگ‌آمیزی سره دورهای یک گراف نامیده می‌شود. مینیمم تعداد رنگ‌های به‌کار رفته در این نوع رنگ‌آمیزی را با نماد $x(n, k)$ نمایش می‌دهیم. این عدد را به‌گونه‌ای دیگر می‌شود، تعریف کرد: به‌عبارت دیگر، افراز دورهای یک گراف به مینیمم تعداد کلاس‌های رنگی به‌گونه‌ای که دورهای یال مجزا رنگ‌های متفاوت بگیرند. در فصل رنگ‌آمیزی دورهای این پایان‌نامه به بررسی موضوع فوق با استفاده از ابرگراف‌ها می‌پردازیم. هدف این فصل محاسبه این تعداد کلاس‌های رنگی است. ما این عدد را برای $k = 3$ به‌دست آوردیم، اما برای k های بزرگتر، فقط حدود این عدد را می‌توان مشخص کرد. این موضوع بسیار مرتبط با نتایج قضیه توران است. قضیه توران ماکزیمم تعداد یال‌های یک گراف n راسی که شامل هیچ K_k نیست، را محاسبه می‌کند و این معادل با موضوع رنگ‌آمیزی دورهای یال مجزا است.

^۷Ore

^۸Katona

^۹Tuza

فهرست مطالب

۲	۱	مقدمه و تاریخچه
۵	۲	تعاریف و قضایا
۱۰	۳	یال‌ها در گراف‌های با کمر بزرگ
۱۰	۱.۳	مقدمه
۱۰	۲.۳	محاسبه حداکثر تعداد یال‌های گراف با کمر g
۱۷	۴	رنگ‌آمیزی گراف‌های بحرانی
۱۷	۱.۴	مقدمه
۱۸	۲.۴	yal‌های گراف بحرانی
۱۹	۳.۴	رنگ‌آمیزی گراف‌های بحرانی
۲۶	۴.۴	کپی‌های گراف بحرانی
۲۷	۵	عدد توران گراف‌های فراگیر تنک
۲۷	۱.۵	مقدمه
۲۷	۲.۵	درجه رئوس و مجموعه‌های مستقل گراف
۳۰	۳.۵	محاسبه عدد توران گراف‌های فراگیر تنک
۳۴	۶	رنگ‌آمیزی دورها در گراف‌ها
۳۴	۱.۶	مقدمه
۳۵	۲.۶	محاسبه کران عدد رنگی دورهای گراف
۳۶	۳.۶	محاسبه تعداد دورهای به طول k در گراف
۳۸	۴.۶	رنگ‌آمیزی دورهای گراف با استفاده از ابرگراف‌ها

۴۳

مراجع

۴۶

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

۴۹

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

فصل ۱

مقدمه و تاریخچه

[۲] در نظریه گراف، رنگ آمیزی گراف یکی از حالت های خاص مساله های برچسب گذاری گراف است. رویکرد کلی آن نظیر کردن رنگ هایی به یال ها یا راس هاست، که این رنگ آمیزی محدودیت خاصی را رعایت کند.

در ساده ترین حالت، رنگ آمیزی مورد نظر است که در آن هیچ دو راس مجاوری هم رنگ نباشند (رنگ آمیزی راس ها). علاوه بر آن رنگ آمیزی یال ها به همین صورت تعریف می شود. رنگ آمیزی گراف کاربردهای زیادی در زمینه های عملی و تئوری گوناگون دارد.

علاوه بر مساله های کلاسیک تعریف شده در این زمینه، با در نظر گرفتن محدودیت های مختلفی روی نوع گراف، روش رنگ آمیزی و حتی تعداد و رنگ عناصر گراف مساله های متنوعی با کاربردهای وسیع در صنعت و علوم تعریف می شود. با وجود اینکه این مساله از نظر علمی هنوز در حال بررسی می باشد، با ظهور جدول سودوکو در بین مردم شناخته شده است.

اولین نتیجه ها در مورد رنگ آمیزی گراف از تلاش های انجام شده بر روی گراف های مسطح برای حل مساله رنگ آمیزی نقشه به دست آمد. در آن زمان فرانسیس گوتری^۱ ادعا کرد که رنگ آمیزی نقشه ایالت های مختلف بریتانیا روی نقشه، به طوری که هیچ دو ایالت مجاوری هم رنگ نشوند، می تواند با ۴ رنگ انجام شود. برادر گوتری این مساله را برای معلم ریاضی خود دو مورگان^۲، در کالج دانشگاهی فرستاد. دو مورگان، این مساله را در سال ۱۸۲۵ میلادی در نامه ای که به همیلتون^۳ نوشت، مطرح کرد. همیلتن توجهی به این مسئله نکرد و تقریباً ۲۵ سال مسکوت ماند. بعداً در ۱۸۷۸ جامعه علمی از طریق اطلاعیه آرثر کیلی در گردهمایی انجمن ریاضی لندن از مسئله آگاه شد.

^۱Gotri

^۲Demorgan

^۳Haminlton

کیلی مسئله را در اولین مجله گزارش انجمن سلطنتی جغرافیا بیان کرد. کمی بعد، سرآلفرد کمپ، ریاضی دان انگلیسی برهانی پیدا کرد که بیش از یک دهه غیر قابل تردید باقی ماند. پرسى جان هیوود ریاضی دان دیگر انگلیسی در کار کمپ خطایی یافت. مسئله تا سال ۱۹۷۶ حل نشده ماند، تا اینکه سرانجام کنت آپل و ولفگانگ هیکن آن را حل کردند. در برهان آنها تحلیل کامپیوتری بسیار پیچیده‌ای به کاررفته است.

در سال ۱۸۷۹ آرتور کیلی این مساله را در انجمن ریاضی شهر لندن مطرح کرد. در همان سال کمپ^۴، نتایج به دست آمده را منتشر کرد و تقریباً یک دهه تصور می شد این مساله حل شده است. تلاش های کمپ در این مورد منجر شد، او به عنوان یکی از اعضای جامعه سلطنتی و بعدها به عنوان رییس انجمن ریاضی لندن انتخاب شود. چند سال بعد فردی به نام هیوود^۵ ادعا کرد که استدلال کمپ اشتباه بوده است و اثبات این مساله را برای ۵ رنگ منتشر کرد. تلاش زیادی برای اثبات روش های رنگ آمیزی نقشه با ۴ رنگ صورت گرفت که سرانجام در سال ۱۹۷۶ به کمک هیوود و کمپ انجام شد. یک برچسب گزاری راس های گراف است به شکلی که هیچ دو راسی که یک یال آنها را متصل می کند هم رنگ نباشند. استفاده از رنگ ها برای این رنگ آمیزی گراف به استفاده آن ها در رنگ آمیزی نقشه بازمی گردد. در نظریه گراف، یک نوع رنگ آمیزی یالی از یک گراف، نسبت دادن رنگ ها به یال های گراف است، به نحوی که هیچ دو یال متصلی رنگ یکسان نداشته باشند. رنگ آمیزی یالی یکی از انواع رنگ آمیزی گراف است. این مسئله بررسی می کند: که آیا می توانیم یال های یک گراف داده شده را با حداکثر k رنگ متفاوت یا با کمترین تعداد رنگ ممکن، رنگ کنیم.

یک کاربرد دیگر از رنگ آمیزی یالی بدین صورت است. برای زمان بندی مسابقات گردشی می توان رنگ آمیزی یالی یک گراف کامل را به کار برد. بدین صورت می توان در کمترین تعداد گردش این مسابقات را زمان بندی کرد به طوری که همه تیم ها در هر گردش بتوانند بازی کنند. در این مسئله تیم ها به صورت رئوس و بازی ها به صورت یال مدل می شوند. بنابراین تعداد گردش ها برابر با تعداد رنگ های مورد استفاده برای رنگ آمیزی یالی است. هم چنین برای زمان بندی تمام مسابقاتی که همه تیم ها با یکدیگر بازی نمی کند نیز می توان از تکنیک های دیگر رنگ آمیزی یالی استفاده کرد. مثلاً در لیگ جهانی فوتبال، دو تیمی که باید در طول یک سال با هم بازی کنند، را می توان بر اساس نتایج بازی های قبل مشخص کرد. زمان بندی بازی ها از اجرای الگوریتم رنگ آمیزی یالی بر روی گرافی به دست می آید که از جفت تیم ها ساخته شده است. زمان بندی فرایندهای تولید را در نظر بگیرید. در این مسئله، یک مجموعه از محصولات باید تولید شوند و هر محصول برای تولید نیازمند اجرای مجموعه ای از وظایف است. هر وظیفه باید روی ماشین های خاصی اجرا شود و زمان بندی باید به صورتی انجام شود که وظایف به یک ماشین به طور همزمان نیاز نداشته باشند. اگر همه وظایف طول

^۴ Camp

^۵ Heawood

یکسانی داشته باشند، در این صورت، مسئله به رنگ‌آمیزی گراف دوبخشی‌ای مدل می‌شود که رئوس در یک بخش گراف نشان‌دهنده محصولات و رئوس بخش دیگر نشان‌دهنده ماشین‌ها هستند و یال‌ها نشان‌دهنده وظایف هستند. بنابراین تعداد رنگ‌ها نشان‌دهنده تعداد گام‌های زمانی برای اجرای وظایف هستند. در این پایان‌نامه نوع دیگری از رنگ‌آمیزی را تحت عنوان رنگ‌آمیزی دوره‌های گراف با طول مشخص شرح می‌دهیم. کاتونا^۶ و توزا^۷ دو نویسنده‌ای بودند که برای نخستین بار دو موضوع رنگ‌آمیزی و دوره‌های با اندازه مشخص در گراف‌ها را باهم در یک عنوان به صورت زیر مطرح کردند. این دو فرد، روشی برای رنگ‌آمیزی دوره‌های با اندازه مشخص در گراف ارائه دادند، به صورتی که دوره‌های یال مجزا و با اندازه مشخص رنگ‌های متفاوتی می‌گیرند. این نوع رنگ‌آمیزی از دوره‌ها، رنگ‌آمیزی سره دوره‌های یک گراف نامیده می‌شود. مینیمم تعداد رنگ‌های به کار رفته در این نوع رنگ‌آمیزی را با نماد $x(n, k)$ نمایش می‌دهیم. این عدد را به گونه‌ای دیگر می‌شود، تعریف کرد: به عبارت دیگر، افراز دوره‌های یک گراف به مینیمم تعداد کلاس‌های رنگی به گونه‌ای که دوره‌های یال مجزا رنگ‌های متفاوت بگیرند. در فصل رنگ‌آمیزی دوره‌های این پایان‌نامه به بررسی موضوع فوق با استفاده از ابرگراف‌ها می‌پردازیم. هدف این فصل محاسبه این تعداد کلاس‌های رنگی است. ما این عدد را برای $k = 3$ به دست آوردیم، اما برای k های بزرگتر، فقط حدود این عدد را می‌توان مشخص کرد. این موضوع بسیار مرتبط با نتایج قضیه توران است. قضیه توران ماکزیمم تعداد یال‌های یک گراف n راسی که شامل هیچ K_k نیست، را محاسبه می‌کند و این معادل با موضوع رنگ‌آمیزی دوره‌های یال مجزا است.

^۶ Katona

^۷ Tuza

فصل ۲

تعاریف و قضایا

گراف ساده G ، یک سه‌تایی مرتب (G, E, φ_G) است که در آن V مجموعه‌ای متناهی و ناتهی از راس‌ها و E زیرمجموعه‌ای از تمام زیرمجموعه‌های دو عضوی V و همچنین φ_G تابع وقوع G است، که به هر یال یک زوج مرتب از راس‌های G را که الزاما متمایز نیستند را نسبت می‌دهد. مجموعه رئوس گراف G را با $V(G)$ یا V نمایش می‌دهند. تعداد رئوس گراف G را مرتبه گراف می‌نامند و آن را با $|V|$ یا n نشان می‌دهند. هرگاه گراف G دارای n راس و m یال باشد، آن را (n, m) -گراف می‌نامیم و آن را به صورت $G = (n, m)$ نشان می‌دهیم.

یک **زیرگراف** از گراف G ، یک گراف H است به طوری که $V(H) \subseteq V(G)$ و $E(H) \subseteq E(G)$ ؛ این را به صورت $H \subset G$ می‌نویسیم و می‌گوییم که G شامل H است. یک **زیرگراف القایی** از G ، زیرگرافی مانند H است به طوری که هر یال G مشمول در $V(H)$ متعلق به $E(H)$ باشد.

گراف‌ها انواع مختلفی دارند، که از جمله آن‌ها می‌توان به گراف‌های کامل اشاره کرد. یک **گراف کامل** یا **خوشه**، یک گراف ساده است که در آن هر جفت از راس‌ها یک یال را تشکیل می‌دهند. یک گراف کامل بسیاری از زیرگراف دارد که خوشه نیستند، اما هر زیرگراف القایی از یک گراف کامل یک خوشه است. مکمل یک گراف کامل هیچ یالی ندارد. در مقابل مفهوم گراف‌های کامل می‌توان به مفهوم مجموعه مستقل اشاره کرد.

یک **مجموعه مستقل** در گراف G ، یک زیر مجموعه راس‌های $V(G)$ است به طوری که زیرگراف القایی $G(S)$ هیچ یالی نداشته باشد.

تعریف ۱.۰.۲. [۲] یک **یکریختی** از گراف G به گراف H یک نگاشت دوسویی $f : V(G) \rightarrow V(H)$ است به طوری که $uv \in E(G)$ اگر و فقط اگر $f(u)f(v) \in E(H)$. آنگاه می‌گوییم G با H **یکریخت** است.

جایگشتی از $V(G)$ که یک یکرختی از G به G باشد را **خودریختی** می‌نامیم.

تعریف ۲.۰.۲. [۲] یک **گشت** به طول k یک دنباله‌ی $v_k, e_k, \dots, v_1, e_1, v_0, e_0$ از راس‌ها و یال‌هاست به‌طوری‌که به‌ازای هر i داریم $e_i = v_{i-1}v_i$. یک **گذر گشتی** است، که هیچ یال تکراری نداشته باشد. یک **مسیر گشتی** است که هیچ راس تکراری نداشته باشد. یک **دور**، گذر بسته‌ای به طول حداقل یک است که در آن نخستین و آخرین راس تنها رئوس تکراری است. هر دور به طول سه را یک **مثلث** می‌نامیم.

تعریف ۳.۰.۲. [۲] **درجه** یک راس v در یک گراف G ، که به‌صورت $d(v)$ می‌نویسیم، عبارت است از تعداد یال‌هایی که شامل راس v است. **ماکزیمم درجه** در یک گراف دلخواه G را با $\Delta(G)$ و **مینیمم درجه** را با $\delta(G)$ نمایش می‌دهیم.

یک گراف G ، **منتظم** است اگر $\Delta(G) = \delta(G)$ باشد، هم‌چنین گراف G ، k **منتظم** است اگر تساوی $\Delta(G) = \delta(G) = k$ را داشته باشیم. اگر G گرافی با درجه‌های $d_1, d_2, \dots, d_n$ باشد، آنگاه $\sum d_i = 2e(G)$ را داریم.

تعریف ۴.۰.۲. [۲] یک گراف **چندبخشی کامل**، گرافی است که بتوان راس‌هایش را به مجموعه‌هایی افراز کرد به‌طوری‌که uv یک یال باشد، اگر و فقط اگر u و v به مجموعه‌های متفاوت متعلق باشند. به‌طور هم‌ارز G یک گراف چند بخشی کامل است، اگر و فقط اگر هر مولفه $\bar{G}$ یک گراف کامل باشد. هنگامی که $k \geq 2$ ، یک گراف k بخشی کامل با مجموعه‌های بخشی به‌اندازه‌های $n_1, n_2, \dots, n_k$ را به‌صورت $K_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ می‌نویسیم.

قضیه ۵.۰.۲. [۱۷] اگر G گرافی n راسی و با بیش از $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$ یال باشد، در این صورت این گراف مثلث دارد.

برهان. فرض خلف کنید $G(V, E)$ یک گراف با مجموعه رئوس V و مجموعه یال‌های E و بدون هیچ مثلثی باشد. زیرمجموعه $A \subseteq V$ را بزرگترین مجموعه مستقل در V در نظر بگیرید. چون گراف G هیچ مثلثی ندارد، بنابراین همسایه‌های هر راس دلخواه $x \in V$ یک مجموعه مستقل تشکیل می‌دهند. در نتیجه داریم:

$$d(x) \leq |A| \quad (۱)$$

حال مجموعه $B = V/A$ را در نظر بگیرید، این مجموعه شامل تعداد رئوس مشترک بین دو یال متقاطع است. در نتیجه داریم:

$$|E| \leq \sum_{x \in B} d(x) \quad (۲)$$

با استفاده از (۱) و (۲) داریم:

$$|E| \leq \sum_{x \in B} d(x) \leq |A| \cdot |B| \leq \left(\frac{|A|+|B|}{2} \right)^2 = \frac{n^2}{4}$$

□ که این تناقض است.

قضیه فوق به قضیه منتل^۱ معروف است.

قضیه منتل بیان می‌کند؛ که اگر یک گراف n راسی هیچ خوشه 3 راسی نداشته باشد، دارای حداکثر $n^2/4$ یال است. اما اگر گراف هیچ خوشه k راسی که $k > 3$ نداشته باشد، چه می‌توان گفت؟
قضیه توران به این سوال پاسخ می‌دهد. در این بخش قضیه معروف به توران^۲ (۱۹۴۱) را اثبات خواهیم کرد. قضیه توران پایه و اساس بخش مهمی از نظریه گراف‌هاست که به‌عنوان نظریه گراف‌های اکسترمال شناخته می‌شود.

تعریف ۶.۰.۲. [۲] گراف توران را که با نماد $T_r(n)$ نمایش می‌دهند، یک گراف کامل r بخشی با n راس است که اندازه هر بخش $\lfloor n/r \rfloor$ یا $\lceil n/r \rceil$ است. تمام یال‌ها در گراف توران دو راس از دو بخش متفاوت را به هم وصل می‌کنند. به عبارت دیگر دو سر هیچ یالی در یک بخش قرار ندارد.
تعداد یال‌های گراف توران را با $|E(T_r(n))|$ نشان می‌دهیم. گراف توران ماکزیمم تعداد یال را در بین گراف‌های r بخشی با n راس را دارد.

قضیه ۷.۰.۲. [۲] گراف n راسی دلخواه G را در نظر بگیرید. راس‌ها را به $r-1$ بخش با اندازه‌های تقریباً مساوی تقسیم می‌کنیم. فرض کنید p بخش با اندازه $t+1$ داریم. بنابراین تعداد بخش‌های با اندازه t برابر با $r-1-p$ است. تعداد یال‌های چنین گرافی که با نماد $M(n, r)$ نشان می‌دهیم، برابر است با:

$$M(n, r) = \frac{r-2}{2(r-1)} n^2 - p \frac{(r-1-p)}{2(r-1)}$$

قضیه زیر به قضیه توران معروف است.

قضیه ۸.۰.۲. [۲۵] فرض کنید G گرافی n راسی باشد؛ که دارای K_{r+1} نیست، در این صورت تعداد یال‌ها حداکثر $M(n, r)$ است.

برهان. قرار می‌دهیم:

$$n = k(r-1) + t$$

حکم را با استقرا روی k ثابت می‌کنیم. اگر $k=0$ ؛ در این صورت $n \leq r-2$ و در نتیجه داریم:

$$\binom{r-2}{2} \leq M(n, r)$$

^۱Mantle

^۲Turan

بنابراین حکم برقرار است.

فرض کنید G گرافی باشد؛ که دارای بیشترین تعداد یال است و زیرگراف K_{r+1} ندارد؛ یعنی با اضافه کردن یک یال گراف G دارای زیرگراف کامل $r+1$ بخشی می شود. به عبارت دیگر گراف G دارای زیرگراف k_r است. در این صورت تعداد یال های گراف G برابر است با:

$$|E(G)| = M(n, n-r-2) + \binom{r-2}{2} + (n-r+2)(r-2) < M(n, r)$$

□

بنابراین حکم برقرار است.

چند نفر می توانند به یک مهمانی دعوت شوند به گونه ای که بین هر سه نفر، دو نفر وجود داشته باشند که یکدیگر را بشناسند و ۲ نفر از بین همان سه نفر با هم غریبه باشند؟
با کمی کنکاش متوجه می شویم حداکثر ۵ نفر می توانند در این مهمانی حضور داشته باشند.
اکنون بازی زیر را در نظر بگیرید. شخصی ۶ نقطه روی یک صفحه می کشد که هیچ سه تایی در یک خط قرار ندارند. دو نفر به عنوان بازیکن با خودکارهای آبی و قرمز باید بین هر دو نقطه که خطی بین آنها نیست خطی بکشند. در انتها شخصی برنده است که بتواند یک مثلث تک رنگ کشیده باشد. اگر شما این بازی را با دوستان انجام دهید سرانجام مشاهده می کنید که یک نفر برنده است.
این موضوع را کمی جلوتر به طور کلی بیان می کنیم.

اگر گراف G خوشه های بزرگ نداشته باشد می توان انتظار داشت که گراف G دارای مجموعه های مستقل بزرگ باشد. درستی مطلب فوق نخستین بار توسط رمزی^۳ (۱۹۳۰) ثابت شد. او نشان داد که برای هر دو عدد صحیح و مثبت t, l یک عدد صحیح و مثبت $R(t, l)$ موجود است به طوری که هر گراف با $R(t, l)$ رأس شامل یک خوشه t رأسی یا یک مجموعه مستقل l رأسی است.

تعریف ۹.۰.۲. [۲] عدد رمزی $R(t, l)$ ، کوچک ترین عدد طبیعی n است که در یک دو رنگ آمیزی یالی با دو رنگ آبی و قرمز گراف K_n یک خوشه t رأسی تک رنگ یا یک مجموعه مستقل l رأسی تک رنگ موجود نباشد.

قضیه ۱۰.۰.۲. [۵] برای هر دو عدد صحیح $t \geq 2, l \geq 2$ داریم:

$$R(t, l) \leq R(t-1, l) + R(t, l-1) \quad (1.2)$$

برهان. فرض کنید، گراف G با $R(t-1, l) + R(t, l-1)$ راس و v رأسی دلخواه در G باشد. دو حالت را در نظر بگیرید:

^۳ Ramsey

۱. v با یک مجموعه S با حداقل $R(t, l-1)$ راس غیر مجاور باشد؛

۲. v با یک مجموعه T با حداقل $R(t-1, l)$ راس مجاور باشد.

توجه داشته باشید یا حالت (۱) یا حالت (۲) اتفاق می‌افتد؛ زیرا مجموعه رئوس مجاور به علاوه رئوس غیر مجاور با v برابر است با:

$$R(t-1, l) + R(t, l-1) - 1 \quad (2.2)$$

در حالت اول $G[S]$ شامل یک خوشه t راسی و یک مجموعه مستقل $l-1$ راسی است. در نتیجه $G[S \cup \{v\}]$ دارای یک خوشه t راسی و یک مجموعه مستقل l راسی است. در حالت دوم نیز $G[T]$ شامل یک خوشه $t-1$ راسی و یک مجموعه مستقل l راسی است.

بنابراین $G[T \cup \{v\}]$ شامل یک خوشه t راسی و یک مجموعه مستقل l راسی است. پس در دو حالت (۱) و (۲) وجود یک خوشه t راسی و یک مجموعه مستقل l راسی الزامی است. در نتیجه رابطه (۱.۲) برقرار است. $\square$

قضیه ۱۱.۰.۲. [۲] $R(t, l)$ کران دار است.

برهان. نشان می‌دهیم $R(t, l) \leq \binom{t+l-2}{t-1}$. حکم را با استقرا ثابت می‌کنیم. ابتدا اگر فرض کنیم؛ $t+l=5$ داریم، $t=2, l=3$ یا برعکس، که در هر دو صورت حکم برقرار است. حال فرض کنید، حکم برای هر عدد طبیعی $t < m, l < n$ برقرار است. حکم را برای $t=m, l=n$ ثابت می‌کنیم. با استفاده از رابطه (۱.۲) داریم:

$$R(m, n) \leq R(m-1, n) + R(m, n-1) \leq \binom{m+n-3}{m-2} + \binom{m+n-3}{m-1} = \binom{m+n-2}{m-1}$$

$\square$

تعریف ۱۲.۰.۲. [۲] گراف دو بخشی P ، را با بخش‌های X و Y در نظر بگیرید. اگر هر راس از X با یک یال به یک راس از Y متصل شود، گوییم یک تطابق از X به Y برقرار است.

قضیه ۱۳.۰.۲. گراف دو بخشی P ، را با بخش‌های X و Y در نظر بگیرید. اگر $A \subset X$ و $\Gamma(Y) \subset Y$ باشد، شرط لازم و کافی برای وجود یک تطابق از X به Y به صورت زیر است:

$$A \subset \Gamma(A)$$

فصل ۳

یال‌ها در گراف‌های با کمر بزرگ

۱.۳ مقدمه

در این فصل، به بررسی کرانی برای کمر گراف‌ها می‌پردازیم. طول کوتاه‌ترین دور در یک گراف را کمر گراف گوئیم و با نماد $g(G)$ نمایش می‌دهیم. اگر ماکزیمم تعداد یال‌ها در یک گراف n راسی با کمر $g \geq k$ را با نماد $E_n(k)$ نشان دهیم، در این صورت با استفاده از قضیه توران تساوی $E_n(4) = n^2/4$ را داریم. برای $g \geq 5$ مقدار $E_n(k)$ دقیقاً مشخص نیست. السنر^۱ [۸] و اس‌چی‌ونک^۲ [۲۱] در این مورد تحقیقات فراوانی دارند. بالاباس [۳، ۴] ثابت کرد، گرافی n راسی با حداقل $2n$ یال، دارای کران بالای $n^{1+2/(g-2)}$ برای $E_n(k)$ است. نتایج پیشرفته‌تری برای مقادیر کوچک n وجود دارد که به‌طور مجانی دقیق است. در این فصل ماکزیمم تعداد یال‌ها در یک گراف با کمر $g \geq k$ با n راس را با نماد $E_n(k)$ نمایش می‌دهیم. زمانی که $n < k$ ، رابطه $E_n(k) = n - 1$ را داریم. همچنین واضح است:

$$E_n(3) = n(n-1)/2$$

و با استفاده از قضیه توران [۲۵] تساوی $E_n(k) = n^2/4$ را داریم. برای $n > 5$ مقادیر $E_n(k)$ به‌طور دقیق در دسترس نیست.

۲.۳ محاسبه حداکثر تعداد یال‌های گراف با کمر g

گراف دلخواه G با n راس و کمر g را در نظر بگیرید. بدون هیچ شرط دیگری در مورد تعداد یال‌های این گراف چه می‌توان گفت؟

^۱Elsner

^۲Schwenk

در این بخش به بررسی ماکزیمم تعداد یال‌ها در یک گراف با n راس و کمر g می‌پردازیم.

قضیه ۱.۲.۳. [۲۲] اگر G گرافی با کمر $g > ۵$ باشد، در این صورت تعداد یال‌های G برابر است با:

$$e \leq \begin{cases} 2n - g - 1 & g < n < 2g \\ (n^2 - ng + 2g)/g & 2g \leq n \end{cases}$$

دو قضیه زیر اهمیت قضیه بالا را بیان می‌کنند.

قضیه ۲.۲.۳. [۶] برای هر گراف G با n راس و کمر g ، تعداد یال‌ها برابر است با:

$$e \leq \begin{cases} n - 1 & \text{گراف } G \text{ درخت باشد} \\ n & g \leq n \leq g + \lfloor (g - 3)/2 \rfloor \\ \frac{n(n-1)}{(3g-5)/2} & \text{سایر حالات} \end{cases}$$

قضیه ۳.۲.۳. [۶] گراف G با n راس و کمر g را در نظر بگیرید.

در این صورت تعداد یال‌های G برابر است با:

$$e \leq n + \frac{k[2n - g(k+1)]}{2[(g-1)/2]} \quad \text{به طوریکه} \quad k = \lfloor (n - \lfloor (g-1)/2 \rfloor)/g \rfloor$$

مجموعه‌ای از راس‌ها که فاصله‌شان از یک راس مشخص در یک گراف با کمر g بیشتر از $\lfloor (g-1)/2 \rfloor$ نیست را در نظر بگیرید. این موضوع منجر به ایجاد زیرگراف‌هایی در یک گراف می‌شود که اجتماع تعدادی از درخت‌ها است. نشان می‌دهیم این مجموعه با استفاده از تابعی از متوسط درجه در گراف، دارای کران پایین است. در این بخش به بررسی موضوعات فوق می‌پردازیم.

لم ۴.۲.۳. [۷] گراف G با n راس و کمر $g \geq ۵$ در نظر بگیرید.

یک راس v در این گراف با $|N_2(v)| \geq \bar{d}^2 - d(v)$ وجود دارد که متوسط درجه در گراف G برابر $\bar{d} = \frac{2e}{n}$ و همچنین $|N_1(v)| = d(v)$ برقرار است.

برهان. فرض خلف کنید برای هر راس v ، رابطه $|N_2(V)| < \bar{d}^2 - d(v)$ را داریم.

تساوی $|N_2(v)| = \sum_{w \in N_1(v)} [d(w) - 1]$ برای زمانی که $g \geq ۵$ ، برقرار است. در نتیجه برای هر راس v داریم:

$$|N_2(v)| = \sum_{w \in N_1(v)} [d(w) - 1] < \bar{d}^2 - d(v)$$

لذا داریم:

$$\sum_v \left(\sum_{w \in N_1(v)} [d(w) - 1] \right) < \sum_v [\bar{d}^2 - d(v)] = n\bar{d}^2 - 2e$$

سمت چپ تساوی را می‌توان به صورت $\sum_v d(v)[d(v) - 1] = \sum_v d^2(v) - 2e$ نوشت. که این منجر به نابرابری $\sum_v d^2(v) < n\bar{d}^2$ می‌شود؛ از طرفی این رابطه با نابرابری زیر در تناقض است.

$$(\sum_v d_i \cdot 1)^2 \leq (\sum_v d_i)^2 (\sum_v 1)^2 \rightarrow (n \sum_v d_i)^2 = n^2 \bar{d}^2 \leq \sum_v d_i^2 \cdot n \rightarrow n\bar{d}^2 \leq \sum_v d(v)^2$$

در نتیجه حکم برقرار است. $\square$

قضیه ۵.۲.۳. [۷] گراف G با n راس و e یال و کمر $g \geq 5$ را در نظر بگیرید. در این صورت داریم:

$$e \leq n\sqrt{n-1}/2$$

برهان. چون $g \geq 5$ ، برای هر راس v ، رابطه $|N_0(v)| + |N_1(v)| + |N_2(v)|$ را در نظر بگیرید. فرض کنید v راسی باشد که در لم ۴.۲.۳ صدق کند. پس داریم:

$$n \geq 1 + d(v) + \bar{d}^2 - d(v) = 1 + \bar{d}^2$$

در نتیجه $\bar{d} \leq \sqrt{n-1}$ یا $e \leq n\sqrt{n-1}/2$ برقرار است. $\square$

لم ۶.۲.۳. [۷] گراف G با n راس و کمر $g \geq 5$ را در نظر بگیرید. یک راس v وجود دارد که در شرط

$$|N_2(v)| \geq \bar{d}^2 - \bar{d}$$

برهان. از لم ۴.۲.۳ برای اثبات استفاده می‌کنیم.

$$\sum_v (\bar{d}^2 - \bar{d}) = n\bar{d}^2 - n\bar{d} = n\bar{d}^2 - 2e = \sum_v [\bar{d}^2 - d(v)] \leq \sum_v |N_2(v)|$$

در نتیجه حکم برقرار است. $\square$

نتیجه‌ای که از لم ۶.۲.۳ می‌توان گرفت، مشابه قضیه ۵.۲.۳ است. راس v در گراف دلخواه G وجود دارد که در رابطه $e \leq n(1/2 + \sqrt{n-d(v)-3/4})/2$ صدق می‌کند. اما چون مقدار دقیقی $d(v)$ در گراف‌های مختلف، متفاوت است، می‌توان رابطه $e \leq n(1/2 + \sqrt{n-\delta-3/4})/2$ را به عنوان بهترین نتیجه از قضیه ۵.۲.۳ برای زمانی که $\delta > \sqrt{n-1}$ در نظر گرفت. به عبارت دیگر از لم ۶.۲.۳ به صورتی دیگر برای به دست آوردن کران بالای بهتری برای تعداد یال‌ها استفاده می‌کنیم.

لم ۷.۲.۳. [۷] برای هر گراف G با کمر g که $t = \lfloor (g-1)/2 \rfloor \geq 2$ یک راس v وجود دارد که برای هر $2 \leq i \leq t$ داریم:

$$|N_i(v)| \geq \bar{d}(\bar{d}-1)(\delta-1)^{i-2}$$

برهان. فرض کنید v راسی دلخواه باشد که در لم ۶.۲.۳ صدق کند. در این صورت حکم برای هر $i = 2$ برقرار است.

اگر $۱ \leq i \leq t-۲$ ، هیچ دو راسی در $N_i(v)$ همسایه مشترک در $N_{i+1}(v)$ ندارند. در غیر این صورت دوری به طول $۲t < g \leq ۲(i+1)$ شکل می‌گیرد. همچنین چون هر راس در $N_i(v)$ حداقل $۱-\delta$ همسایه در $N_{i+1}(v)$ دارد، در نتیجه حکم برقرار است. $\square$

قضیه ۸.۲.۳. [۷] برای هر گراف G که دارای کمر g است و رابطه $۲ \leq \lfloor (g-۱)/۲ \rfloor = t$ برای آن برقرار است، داریم:

$$e \leq n \frac{\left(1/2 + \sqrt{\frac{n-\delta-1}{s} + 1/4}\right)}{2} \quad \text{به‌طوری‌که} \quad s = \begin{cases} t-1 & \delta \leq 2 \\ \frac{(\delta-1)^{t-1}-1}{\delta-2} & \delta \geq 3 \end{cases}$$

برهان. برای هر راس v به‌وضوح $|N_i(v)| \leq \sum_{i=0}^t n$ برقرار است و زمانی که v در لم ۷.۲.۳ صدق کند داریم:

$$n \geq 1 + d(v) + \bar{d}(\bar{d}-1) \sum_{i=0}^{t-2} (\delta-1)$$

حال اگر $\delta = 2$ ، مجموع $\sum_{i=0}^{t-2} (\delta-1)$ را برابر با $t-1$ و اگر $\delta \geq 3$ در نتیجه این مجموع برابر با $[(\delta-1)^{t-1}-1]/(\delta-2)$ است. مجموع را s می‌نامیم. پس برای $\delta \geq 2$ رابطه زیر را داریم:

$$n \geq 1 + d(v) + \bar{d}(\bar{d}-1)s \geq 1 + \delta + \bar{d}(\bar{d}-1)s$$

با ساده کردن عبارت قبل رابطه $\bar{d} \leq 1/2 + \sqrt{\frac{n-\delta-1}{s} + 1/4}$ به‌دست می‌آید. در نتیجه داریم:

$$e \leq \frac{n \left(1/2 + \sqrt{\frac{n-\delta-1}{s} + 1/4}\right)}{2}$$

حال فرض کنید $\delta \leq 1$ ، با حذف متوالی راس‌های از درجه صفر و یک، گراف جدید G' با $\delta' \geq 2$ به‌دست می‌آید، که تعداد یال‌های این گراف را که با e' نشان می‌دهیم، حداکثر برابر با $\frac{n' \left(1/2 + \sqrt{\frac{n'-\delta'-1}{s'} + 1/4}\right)}{2}$ است، که در آن $s' \geq s = t-1$ است. پس چون $n-2 \leq n' - \delta' - 1$ ، در نتیجه داریم:

$$e' \leq \frac{n' \left(1/2 + \sqrt{\frac{n'-\delta'-1}{s'} + 1/4}\right)}{2} = \frac{n \left(1/2 + \sqrt{\frac{n-2}{t-1} + 1/4}\right)}{2} - (n-n') \frac{\left(1/2 + \sqrt{\frac{n-2}{t-1} + 1/4}\right)}{2}$$

حال چون می‌دانیم $1/2 + \sqrt{\frac{n-2}{t-1} + 1/4} > 2$ ، در نتیجه داریم:

$$e' \leq \frac{n \left(1/2 + \sqrt{\frac{n-2}{t-1} + 1/4}\right)}{2} - (n-n')$$

$\square$

لذا با توجه به این که $e' \geq e - (n-n')$ ، در نتیجه حکم برقرار است.

لم ۹.۲.۳. [۷] فرض کنید G گرافی n رأسی با کمر g باشد که $t = \lfloor (g-1)/2 \rfloor \geq 2$ و $k = \lfloor e/p \rfloor$ برقرار است. در این صورت داریم:

$$e \leq \frac{n \left(1/2 + \sqrt{\frac{n-k-1}{R}} + 1/4 \right)}{2} \quad \text{به طوری که} \quad R = \begin{cases} t-1 & k \leq 1 \\ \frac{(k)^{t-1}-1}{k-1} & k \geq 2 \end{cases}$$

برهان. ابتدا فرض کنید $\delta > k = \lfloor e/p \rfloor$ برقرار است. پس قضیه ۸.۲.۳ ایجاب می‌کند:

$$e \leq \frac{n \left(1/2 + \sqrt{\frac{n-\delta-1}{S}} + 1/4 \right)}{2} \leq \frac{n \left(1/2 + \sqrt{\frac{n-k-1}{R}} + 1/4 \right)}{2} \quad \text{به طوری که} \quad S = \begin{cases} t-1 & \delta \leq 2 \\ \frac{(\delta-1)^{t-1}-1}{\delta-2} & \delta \geq 3 \end{cases}$$

چون $S \geq R$ ، $\delta > k$ حکم برقرار است.

حال اگر $S \leq R$ ، $\delta > k$ برقرار باشد، فرض خلف کنید $\delta \leq k$ و G گرافی با کمترین تعداد راس‌ها باشد که دارای $e > \frac{n \left(1/2 + \sqrt{\frac{n-\delta-1}{S}} + 1/4 \right)}{2}$ یال است. باید نشان دهیم چنین گرافی وجود ندارد.

فرض کنید G' گرافی باشد که با حذف یک راس از درجه δ به دست آید. پس G' دارای $n' = n - 1$ راس و $e' = e - \delta$ یال و مینیمم درجه G' برابر با $\delta' \geq \delta$ است. هم‌چنین داریم $e' \geq kn'$ ، در غیر این صورت به رابطه $e - \delta = e' < kn' = kn - k \leq e - k$ می‌رسیم. که با $\delta \leq k$ در تناقض است.

بنابراین $k' = \lfloor e'/n' \rfloor \geq k \geq \delta$ برقرار است. چون نسبت به G که مینیمال بود و دارای رئوس کمتری است، در نتیجه حکم قضیه برای G' برقرار است و در نتیجه رابطه زیر برقرار است:

$$e' \leq \frac{n' \left(1/2 + \sqrt{\frac{n'-k'-1}{R'}} + 1/4 \right)}{2}$$

که در آن داریم:

$$R' = \begin{cases} t-1 & k' \leq 1 \\ \frac{k'^{t-1}-1}{k'-1} & k' \geq 2 \end{cases}$$

چون $k' \geq k$ بنابراین $R' \geq R$ برقرار است، که ایجاب می‌کند:

$$\begin{aligned} & \frac{n \left(1/2 + \sqrt{\frac{n-k-2}{R}} + 1/4 \right)}{2} < e \\ & \leq \delta + \frac{n \left(1/2 + \sqrt{\frac{n-k'-2}{R'}} + 1/4 \right)}{2} - \frac{n \left(1/2 + \sqrt{\frac{n-k'-1}{R'}} + 1/4 \right)}{2} \\ & < \delta + \frac{n \left(1/2 + \sqrt{\frac{n-k-2}{R}} + 1/4 \right)}{2} - \frac{n \left(1/2 + \sqrt{\frac{n-k'-1}{R'}} + 1/4 \right)}{2} \end{aligned}$$

اکنون چون داریم:

$$\left(1/2 + \sqrt{\frac{n'-k'-1}{R'}} + 1/4\right) < 2\delta$$

□ در نتیجه $k \leq \delta < e'/n'$ را داریم، که یک تناقض است.

قضیه ۱۰.۲.۳. [۷] فرض کنید G گرافی n راسی با کمر g باشد، که رابطه $t = \lfloor \frac{g-1}{4} \rfloor \geq 2$ برای G برقرار است. تعریف می‌کنیم:

$$m = \max\{1, (n - 2^{t+1} + 8)/4\}$$

در این صورت داریم:

برهان. اگر $t = 2, m = n/4 > 1$ ، پس $e \leq nm^{1/t} + n - 1 = n\sqrt{n/4} + n - 1$ برقرار است، که نابرابری قبل از قضیه ۵.۲.۳ نتیجه می‌شود. اگر قرار دهیم $k = \lfloor e/n \rfloor < 2$ ، رابطه $e \leq 2n - 1$ را داریم و چون $m \geq 1$ ، بنابراین رابطه $e \leq 2n - 1 \leq nm^{1/t} + n - 1$ برقرار است. حال فرض کنید $t \geq 3$ و $\lfloor e/n \rfloor \geq 2$. پس با استفاده از لِم ۹.۲.۳، رابطه $2k - 1/2 \leq 2e/n - 1/2 \leq \sqrt{\frac{n-k-2}{R}} + 1/4$ ، که رابطه $R = \frac{k^{t-1}-1}{k-1}$ را به دست می‌آوریم. حال طرفین نابرابری را به توان دو می‌رسانیم و به دست می‌آوریم:

$$(4k^2 - 2k) \left(\frac{k^{t-1}-1}{k-1} \right) + k + 2 \leq n$$

طرف چپ را می‌توان به صورت $4k^t + 2k \left(\frac{k^{t-1}-1}{k-1} \right) - 3k + 2$ نوشت، که کران پایینی برای n است. پس $n \geq 4k^t + 2^{t+1} - 8$ یا $k \leq (n - 2^{t+1} + 8)/4^{1/t}$ برقرار است. لذا چون $k = \lfloor e/n \rfloor \geq \frac{e-(n-1)}{n}$ ، در نتیجه حکم قضیه برقرار است. □

اثبات قضیه ۱۰.۲.۳. نشان می‌دهد که اگر $n < 4k^t + 2^{t+1} - 8$ یا $t = 2$ یا $k \leq 1$ برقرار باشد. نابرابری قبل ایجاب می‌کند که $n < 4k^2$ که این معادل با رابطه $e/n \leq k = \lfloor e/n \rfloor \leq \left(\frac{n+1}{4}\right)^{1/2}$ است. بنابراین با استفاده از قضیه ۵.۲.۳، $e \geq n \left(\frac{n+1}{4}\right)^{1/2}$ را داریم. که یک تناقض است و نشان می‌دهد $k \leq 1$ که در نتیجه $e \leq 2n - 1$ است.

نتیجه: [۷] گراف G با n راس و کمر $g \geq 5$ را در نظر بگیرید. قرار دهید $k = \lfloor e/n \rfloor \geq 2$. در این صورت داریم:

$$g \leq 2 + 2 \log_k \left(\frac{n}{4} \right)$$

برهان. با توجه به توضیحات قبل باید قرار دهیم $n \geq 4k^t + 2^{t+1} - 8$. که نابرابری‌های $k = \lfloor e/n \rfloor \geq 2$ و $t \geq 2$ نتیجه می‌شوند، بنابراین $k^t \leq \left(\frac{n-2^{t+1}+8}{4} \right) \leq n/4$ که رابطه $t \leq \log_k(n/4)$ را ایجاب می‌کند. چون $t \geq \frac{g-2}{4}$ در نتیجه حکم برقرار است. $\square$

فصل ۴

رنگ آمیزی گراف های بحرانی

۱.۴ مقدمه

در این فصل، ضمن توصیف ساختار گراف های بحرانی، به بیان نتایج سیمونوویتز^۱ در مورد تعداد کپی های یکریخت با یک زیرگراف با اندازه مشخص در گراف می پردازیم. نتایج این فصل را می توان در قالب یک مثال بیان کرد. یک ثابت مثبت c را که در رابطه $1 \leq q < cn$ برای n های بزرگ صدق کند، را در نظر بگیرید. در این صورت هر گراف n راسی با $q + \lfloor n^2/4 \rfloor$ یال، شامل حداقل $(\lfloor n/2 \rfloor - 2)(\lfloor n/2 \rfloor - 1)$ کپی از دورهای به طول پنج است.

مثال [۱۷] اثبات کرد، هر گراف n راسی با $1 + \lfloor n^2/4 \rfloor$ یال، شامل یک مثلث است. رادمایکر^۲ این موضوع را به گونه ای دیگر بیان کرد. او اثبات کرد هر گراف با ویژگی فوق شامل حداقل $\lfloor n/2 \rfloor$ مثلث است. به طور مشابه، اردوش^۳ [۹، ۱۳] اثبات کرد که برای بعضی اعداد ثابت c اگر $q < cn$ باشد، در این صورت اگر گراف دارای $q + \lfloor n^2/4 \rfloor$ یال باشد، نتیجه می گیریم این گراف حداقل دارای $q \lfloor n/2 \rfloor$ مثلث است. کمی بعدتر لواز و سیمونوویتز [۱۶] اثبات کردند، نتایج اردوش برای $c = 1/2$ برقرار است. آنها همچنین نتایج مشابهی را برای گراف های کامل بیان کردند.

در این فصل نتایج اردوش، لواز و سیمونوویتز را برای کلاس های رنگی گراف های بحرانی بیان می کنیم. برای بیان نتایج خود از لم حذفی کمک می گیریم. نتیجه جدیدی که در این فصل به آن دست می یابیم، شمارش تقریباً دقیق زیرساختارها در گراف ها و ابرگراف ها با استفاده از لم حذفی است.

اغلب گراف ها را با مجموعه یال های شان بیان می کنیم. گراف های F, H را در نظر بگیرید، که F دارای f راس است. یک کپی از F در H یک زیرمجموعه f راسی و $|E|$ یالی از H است، که زیرگرافی یکریخت

^۱ Simonovits

^۲ Rademacher

^۳ Erdos

با F شکل می دهد. به عبارت دیگر، اگر $Aut(F)$ نماد تعداد خودریختی های F باشد، پس تعداد کپی های F در H برابر با تعداد توابع یک به یک حافظ یال از $V(f)$ به $V(H)$ تقسیم بر $Aut(F)$ است. با این دیدگاه فصل رنگ آمیزی گراف های بحرانی را شروع می کنیم.

۲.۴ یال های گراف بحرانی

تعریف ۱.۲.۴ [۱۸] گرافی که شامل یالی است، که حذف آن منجر به کاهش عدد رنگی گراف می شود را **گراف بحرانی** می نامیم. هم چنین گراف F را r بحرانی گوئیم، هرگاه عدد رنگی این گراف $r + 1$ باشد و شامل یالی باشد که حذف آن منجر به کاهش عدد رنگی به r شود.

تعریف ۲.۲.۴ [۱۸] **گراف توران** $T_r(n)$ ، گرافی n راسی با r بخش و ماکزیمم تعداد یال ها است، که اندازه هر بخش $\lfloor \frac{n}{r} \rfloor$ یا $\lceil \frac{n}{r} \rceil$ است. داریم:

$$t_r(n) = |T_r(n)| = \sum_{1 \leq i < j \leq r} \lfloor \frac{n+i-1}{r} \rfloor \lfloor \frac{n+j-1}{r} \rfloor$$

تعریف ۳.۲.۴ [۱۸] عدد ثابت $r > 0$ و گراف r بحرانی F را در نظر بگیرید. $c(n, F)$ را مینیمم تعداد کپی های F در گراف $T_r(n)$ با اضافه کردن یک یال می نامیم.

چون $\chi(T_r(n)) = r$ ، لذا این گراف توران شامل گراف r بحرانی F نیست. در نتیجه $ex(n, F) \geq t_r(n)$ را داریم. سیمونوویتز [۲۴] اثبات کرد که اگر n به اندازه کافی بزرگ باشد، حالت تساوی برقرار است. به عبارت دیگر هر گراف n راسی با $t_r(n) + 1$ یال شامل حداقل یک کپی از F است. ما این نتایج را با استفاده از محاسبه تعداد کپی ها بیان می کنیم. در حقیقت، تعداد کپی ها در گراف توران برابر با تک یال هایی است، که به آن اضافه می کنیم.

قضیه ۴.۲.۴ [۲۴] فرض کنید F گرافی f راسی باشد. هم چنین فرض کنید H یک گراف n راسی است، که حداقل $o(n^f)$ کپی از F دارد. پس مجموعه ای از یال های H با اندازه $o(n^2)$ وجود دارد که با حذف آن ها از گراف H یک گراف بدون هیچ کپی از F تشکیل می شود که $n \rightarrow \infty$.
قضیه بالا به قضیه حذفی معروف است.

لم ۵.۲.۴ [۱۸] عدد ثابت $r \geq 0$ و n به اندازه کافی بزرگ را در نظر بگیرید. فرض کنید $s < n$ و $n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$ برقرارند. اگر

$$\sum_{1 \leq i < j \leq r} n_i n_j \geq t_r(n) - s$$

آنگاه برای تمام i ها داریم:

$$\lfloor \frac{n}{r} \rfloor - s \leq n_i \leq \lceil \frac{n}{r} \rceil + s$$

برهان. حکم برای $s = 0$ طبق تعریف $t_r(n)$ برقرار است. به وضوح $\sum_{1 \leq i < j \leq r} n_i n_j$ زمانی ماکزیمم است، که برای تمام i ها داشته باشیم $|n_i - n_j| < 1$. بنابراین فرض کنیم $s \geq 1$ و عکس نقیض حکم را با استقرا روی s اثبات می کنیم.

فرض کنیم برای بعضی i ها، $n_i > \lceil \frac{n}{r} \rceil + s$ یا $n_i < \lfloor \frac{n}{r} \rfloor - s$ برقرار باشد. حال باید ثابت کنیم:

$$\sum_{1 \leq i < j \leq r} n_i n_j < t_r(n) - s$$

فرض کنیم $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_r$ که $n_1 > \lceil \frac{n}{r} \rceil + s$ (در مورد $n_r < \lfloor \frac{n}{r} \rfloor - s$ مشابه حالت قبل عمل می کنیم) برای $1 < i < r$ تعریف می کنیم $n'_1 = n_1 - 1, n'_r = n_r + 1$ و $n'_i = n_i$ در نتیجه $\sum n'_i = n$ و همچنین برای بعضی i ها نابرابری $(s-1) + \lfloor \frac{n}{r} \rfloor < n'_i$ برقرار است. با استفاده از فرض استقرا داریم:

$$\sum_{1 \leq i < j \leq r} n'_i n'_j < t_r(n) - (s-1)$$

در مرحله حکم استقرا $1 + s + \lceil \frac{n}{r} \rceil \geq n_1$ و $n_r \leq \lfloor \frac{n}{r} \rfloor$ را داریم. در نتیجه:

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i < j \leq r} n_i n_j &= \sum_{1 \leq i < j \leq r} n'_i n'_j + \lfloor \frac{n}{r} \rfloor - \left(\lfloor \frac{n}{r} \rfloor + s \right) \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq r} n'_i n'_j - s \\ &< t_r(n) - (s-1) - s \leq t_r(n) - s \end{aligned}$$

□

لذا اثبات تمام است.

۳.۴ رنگ آمیزی گراف های بحرانی

لم ۱.۳.۴. [۱۸] عدد ثابت $r \geq 2$ و گراف r بحرانی F با f راس را در نظر بگیرید. اعداد ثابت و مثبت β_F, α_F وجود دارند که اگر n به اندازه کافی بزرگ باشد، داریم:

$$|c(n, F) - \alpha_F n^{f-2}| < \beta_F n^{f-3}$$

که در حالت خاص داریم $(\alpha_F) n^{f-2} < c(n, F) < 2 \alpha_F n^{f-2}$.

برهان. فرض کنیم $n|r$ و نتیجه برای این حالت برقرار باشد. حکم را برای حالتی ثابت می کنیم که r بر n تقسیم پذیر نباشد. گراف $T_r(n)$ بخش هایی با اندازه $\lfloor \frac{n}{r} \rfloor$ و $\lceil \frac{n}{r} \rceil$ دارد. بنابراین می توان حداکثر یک راس به $r-1$ بخش اضافه کرد، که همه بخش ها از اندازه $\lceil \frac{n}{r} \rceil$ شوند. هم چنین یک یال از راس های جدید به تمام بخش های مجزا از بخشی که یک راس جدید در آن قرار دارد، اضافه می کنیم.

در نتیجه گراف $T_r'(n)$ با $n < n' < n + r$ راس به وجود می آید، که $r|n'$. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} c(n, F) \leq c(n', F) \leq c(n + r, F) &< \alpha_F(n + r)^{f-2} + \beta_F(n + r)^{f-3} \\ &< \alpha_F n^{f-2} + (fr\alpha_F + 2\beta_F)n^{f-3} \end{aligned}$$

در نتیجه قضیه با $\beta'_F = fr\alpha_F + 2\beta_F, \alpha_F$ برقرار است.

حال برای اثبات کران پایین، به طور مستقیم از تعریف $c(n, F)$ استفاده می کنیم. فرض کنید، گراف H از $T_r(n)$ با اضافه کردن یک یال xy به بخش اول به دست آید. یک یال $uv \in F$ را یک یال خوب نامیم، اگر $\chi(F - uv) = r$ برقرار باشد. فرض کنید، χ_{uv} یک رنگ آمیزی سره از $F - uv$ باشد، که $\chi_{uv}(u) = \chi_{uv}(v) = 1$.

در هر رنگ آمیزی سره از $F - uv$ راس های v, u دارای رنگ های یکسانند، چون $\chi(F) > r$. فرض کنید χ_{uv}^i تعداد راس های F به جز v, u باشد، که i رنگ می گیرند.

یک یال که یک به یکی را از F به H حفظ می کند، با نگاشت یک یال خوب uv از F به xy به دست می آید و باقی رئوس F به H نگاشت می شود، به گونه ای که هیچ دو راس مجاوری در F به همان بخش H نگاشت نشود. که این نگاشت با χ_{uv} رنگ، رنگ آمیزی می شود.

تعداد نگاشت ها با χ_{uv} رنگ، برابر با تعداد راه هایی است، که راس هایی که با i رنگ، رنگ آمیزی می شوند، می توانند به i بخش نگاشت شوند. راس هایی که به بخش اول نگاشت می شوند، نمی توانند به x, y نگاشت شوند، چون u, v به این دو راس نگاشت شده اند و دو راه برای نگاشت u, v به x, y وجود دارد.

در نتیجه داریم: $c(n, F) = \frac{1}{\text{Aut}(F)} \sum_{uv \text{ is good}} \sum_{\chi_{uv}} 2(n/r - 2)_{\chi_{uv}} \prod_{i=2}^r (n/r)_{\chi_{uv}}^i$ با بسط عبارت فوق، یک چند جمله ای از درجه $f - 2$ با ضرایب مثبت به دست می آوریم. در نتیجه $c(n, F)$ یک چند جمله ای از درجه $f - 2$ با تعداد زیادی ضرایب مثبت است.

فرض کنید α_F این ضرایب باشند. چون n به اندازه کافی بزرگ است و ضرایب $c(n, F)$ ثابت و به n وابسته اند، می توان ادامه کران را با $\beta_F n^{f-3}$ برای بعضی β_F های مثبت که فقط به F وابسته اند، نشان داد. $\square$ در نتیجه حکم برقرار است.

تعریف ۲.۳.۴ [۱۸] اعداد صحیح $n_1 + n_2 + \dots + n_r$ را در نظر بگیرید. $c(n_1, n_2, \dots, n_r, F)$ را تعداد کپی های F در گراف r بخشی با بخش هایی با اندازه $n_1, n_2, \dots, n_r$ گوئیم، که با اضافه کردن یک یال به بخشی با اندازه n_1 به دست می آید.

لم ۳.۳.۴ [۱۸] فرض کنید F یک گراف r بحرانی باشد. اگر $n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$ و داشته باشیم:

$$\lfloor \frac{n}{r} \rfloor - s \leq n_i \leq \lceil \frac{n}{r} \rceil + s$$

یک ثابت مثبت γ_F وجود دارد، که رابطه زیر برای n به اندازه کافی بزرگ برقرار است.

$$c(n_1, n_2, \dots, n_r) \geq c(n, F) - \gamma_F s n^{f-3}$$

برهان. اگر $s = 0$ نتیجه براساس تعریف $c(n, F)$ برقرار است. لذا فرض کنید $s \geq 1$. گراف H را گرافی در نظر بگیرید، که از گراف r بخشی کامل با بخش های $n_1, n_2, \dots, n_r$ با اضافه کردن یک یال xy به بخشی با اندازه n_1 به دست می آید. چون رابطه $|n_1 - n_r| \leq 2s + 1$ را داریم، می توانیم حداکثر $2s + 1 \leq 3s$ راس (x, y) از هر بخش H که از اندازه n_r است، حذف کنیم. گراف حاصل را H' می نامیم، که در رابطه $H' - xy \cong T_r(n')$ با $n' \geq n - 3rs$ صدق می کند. چون n به اندازه کافی بزرگ است و $s < n/3r$ برقرار است، لذا داریم:

$$\begin{aligned} (n - 3rs)^{f-2} &\geq n^{f-2} - \sum_{i=0}^{f-3} \binom{f-2}{i} n^i (3rs)^{f-2-i} \\ &= n^{f-2} - \sum_{i=0}^{f-3} \binom{f-2}{i} (3rs)^{f-2-s} s n^i s^{f-3-i} \\ &> n^{f-2} - 3rs n^{f-3} \sum_{i=0}^{f-3} \binom{f-2}{i} \\ &> n^{f-2} - 2^f r s n^{f-3} \end{aligned}$$

قرار می دهیم $\gamma_F = \alpha_F 2^f r + 2\beta_F$. با استفاده از **لم ۱.۳.۴** داریم:

$$\begin{aligned} c(n_1, n_2, \dots, n_r, F) &\geq c(n - 3rs, F) \\ &> \alpha_F (n - 3rs)^{f-2} - \beta_F (n - 3rs)^{f-3} \\ &> \alpha_F n^{f-2} + \beta_F n^{f-3} - \gamma_F s n^{f-3} \\ &> c(n, F) - \gamma_F s n^{f-3} \end{aligned}$$

□

و اثبات کامل است.

قضیه ۴.۳.۴ [۲۴] فرض کنید $r \geq 2$ و F یک گراف r بحرانی باشد. همچنین فرض کنید، H یک گراف با f راس و $t_r(n) - o(n^2)$ یال باشد، که شامل هیچ کپی F نیست. یک افراز از مجموعه رئوس H به r بخش که تعداد یال های در یک بخش حداکثر برابر $o(n^2)$ است، وجود دارد. به عبارت دیگر، گراف H از $T_r(n)$ با اضافه یا حذف کردن یک مجموعه از یال ها با اندازه $o(n^2)$ بدست می آید.

قضیه ۵.۳.۴ [۱۸] فرض کنید $r > 2$ و گراف r بحرانی F را در نظر بگیرید. $\delta = \delta_n > 0$ وجود دارد، که اگر n به اندازه کافی بزرگ باشد و $1 \leq q < \delta_n$ ، در این صورت هر گراف n راسی با $t_r(n) + q$ یال حداقل شامل $qc(n, F)$ کپی از F است.

برهان. اعداد ثابت $\delta_i, \epsilon_i, \epsilon$ را که دارای ترتیب زیر هستند، را در نظر بگیرید.

$$1/n \ll \delta_1 \ll \delta_2 \ll \delta_3 \ll \delta_4 \ll \epsilon_4 \ll \epsilon_3 \ll \epsilon_2 \ll \epsilon_1 \ll \epsilon \ll 1$$

همچنین فرض کنید نابرابری $\epsilon < \frac{\alpha_F}{4(\gamma_F + 2^{f^2})}$ را داریم. که α_F از لم ۱.۳.۴ و γ_F از لم ۳.۳.۴ به دست می آید. هم چنین n را به اندازه کافی بزرگ در نظر بگیرید. توجه کنید ϵ_4 یک ثابت مثبت وابسته به F است. قرار می دهیم $\delta = \epsilon_4/4\alpha_F$ و همچنین فرض کنید $1 \leq q < \delta_n$. حال اگر H گرافی n راسی با $t_r(n) + q$ یال باشد. نماد $*F$ را برای تعداد کپی های F در H به کار می بریم. اگر فرض کنیم $*F \geq n^{f-1/2}$ ، با استفاده از لم ۱.۳.۴ روابط $c(n, F) < 2\alpha_F n^{f-2}$ و $q < (\epsilon_4/4\alpha_F)n$ را به دست می آوریم. در نتیجه داریم:

$$qc(n, F) < (\epsilon_4/4\alpha_F)n(2\alpha_F n^{f-2}) < *F$$

پس در این حالت حکم برقرار است.

حال فرض کنید $*F < n^{f-1/2} = (1/n^{1/2})n^f$ در این صورت چون n به اندازه کافی بزرگ است، با استفاده از لم حذفی می توان یک مجموعه با اندازه حداکثر $\delta_1 n^2$ یال از H حذف کرد. گراف حاصل را H' می نامیم، که هیچ کپی از F ندارد.

بنابراین نابرابری $|H'| > t_r(n) - \delta_1 n^2$ را داریم. با استفاده از قضیه ۴.۳.۴، نتیجه می گیریم که یک افراز از H' به r بخش وجود دارد که تعداد یال ها که کاملاً در یک بخش قرار دارند، حداکثر $\delta_2 n^2$ است. حال یک افراز از H به r بخش $V_1, V_2, \dots, V_r$ وجود دارد که $e(V_1, V_2, \dots, V_r)$ ماکزیمم است، که تعدادی از یال ها در بین دو بخش مشترکند. می دانیم رابطه $e(V_1, V_2, \dots, V_r) \geq t_r(n) - \delta_2 n^2$ و با محاسبه ای ساده مشاهده می کنیم هر V_i اندازه ای برابر با $n/r \pm \delta_3 n$ دارد. فرض کنید B مجموعه یال هایی از H باشد که کاملاً در یک بخش قرار دارند و همچنین G مجموعه یال هایی از H باشد که بین دو بخش مشترک اند. بنابراین داریم $G = H - B$. حال فرض کنید M مجموعه یال های مشترک بین دو بخش که یالی از H نیستند، باشد. پس $G \cup M$ یک افراز به r بخش است که حداکثر $t_r(n)$ یال دارد و داریم:

$$t_r(n) + q - |B| + |M| = |(H - B) \cup M| = |G \cup M| = |G| + |M| \leq t_r(n)$$

در نتیجه $\delta_2 n^2 \leq |B| \leq |M| + q$ و همچنین $|H| = |G| + |B|$ را داریم. لذا می توان برای بعضی $s > 0$ روابط $|G| = t_r(n) - s$ و $|B| = q + s$ را فرض کرد. برای یک یال $e \in B$ ، فرض کنید $F(e)$ تعداد کپی های F در H شامل یال e از B است، باشد. اگر $s = 0$ پس $G \cong T_r(n)$ و برای هر $e \in B$ داریم:

$$F(e) \geq c(n, F)$$

در نتیجه به وضوح رابطه $|B|c(n, F) = qc(n, F) \geq |F|$ برقرار است. بنابراین فرض می کنیم $s \geq 1$. افراز $B = B_1 \cup B_2$ را در نظر بگیرید که در آن تعریف می کنیم:

$$B_1 = \{e \in B : F(e) > (1 - \epsilon)c(n, F)\} \quad (1.4)$$

یک پتانسیل کپی از F یک کپی از F در $G \cup M \cup B = H \cup M$ است که دقیقاً یک یال از B دارد.

ادعا: [۱۸] افراز $B = B_1 \cup B_2$ و رابطه (۱.۴) را در نظر بگیرید. در این صورت داریم:

$$|B_1| \geq (1 - \epsilon)|B|$$

برهان. فرض خلف کنید $|B_2| \geq \epsilon|B|$ و یال $e \in B_2$ را در نظر بگیرید. بدون کاستن از کلیت فرض کنید $e \in V_1$. با استفاده از لم ۳.۳.۴، تعداد پتانسیل کپی های F شامل یال e برابر است با:

$$c(n_1, n_2, \dots, n_r, F) \geq c(n, F) - \gamma_F(\delta_3 n)n^{f-3} \geq c(n, F) - \gamma_F \delta_3 n^{f-2} \geq (1 - \delta_4)c(n, F)$$

حداقل $(\epsilon/2)c(n, F)$ از این پتانسیل کپی های F دارای یک جفت یال از M هستند. در غیر این صورت داریم:

$$F(e) > c(n_1, n_2, \dots, n_r, F) - (\epsilon/2)c(n, F) > (1 - \delta_4 - \epsilon/2)c(n, F) > (1 - \epsilon)c(n, F)$$

که نابرابری بالا متناقض با تعریف B_2 است.

بنابراین فرض کنید حداقل $(\epsilon/4)c(n, F)$ از پتانسیل کپی ها شامل یک جفت یال از M هستند که هیچ اشتراکی با e ندارند. تعداد دفعاتی که یک جفت یال از M شمارش می شود حداکثر برابر با تعداد راه های انتخاب $f - 4$ راس از پتانسیل کپی های F است، پس $|F| < f^2$ از جفت یال ها که با استفاده از رئوس انتخابی شکل می گیرند، یک گراف یکرخت با F تشکیل می دهند، را انتخاب می کنیم. حداکثر $2^{f^2} n^{f-4}$ طریق برای این کار وجود دارد.

بنابراین رابطه $\delta_2 n^2 \leq |M| < \frac{(\epsilon/4)c(n, F)}{2^{f^2} n^{f-4}} < \frac{(\epsilon/8)\alpha_F n^{f-2}}{2^{f^2} n^{f-4}} = \frac{\epsilon \alpha_F}{8 \cdot 2^{f^2}} n^2$ را داریم که یک تناقض است. بنابراین فرض می کنیم حداقل $(\epsilon/4)c(n, F)$ از پتانسیل کپی های F شامل یک جفت یال از M هستند که دارای اشتراک با یال e هستند. هر جفت یال حداکثر $2^{f^2} n^{f-3}$ بار شمرده می شوند. نتیجه می گیریم، راس

$x \in e$ وجود دارد به طوری که رابطه $\epsilon_1 n$ $d_M(x) \geq \frac{(\epsilon/\Lambda)c(n,F)}{2^{f^2}n^{f-2}} > \frac{(\epsilon/\Lambda)(\alpha_F/2)n^{f-2}}{2^{f^2}n^{f-2}} = \frac{\epsilon\alpha_F}{162^{f^2}} > \epsilon_1 n$ برای آن

برقرار است. حال فرض کنید:

$$A = \{v \in V(H) : d_M(v) > \epsilon_1 n\}$$

هر $e \in B_2$ یک راس در A دارد. در نتیجه :

$$2 \sum_{v \in A} d_{B_2}(v) \geq 2|B_2| \geq 2\epsilon|B| > 2\epsilon|M| \geq \epsilon \sum_{v \in A} d_M(v) > \epsilon|A|\epsilon_1 n$$

و همچنین یک راس $u \in A$ وجود دارد که رابطه $\epsilon_2 n$ $d_{B_2}(u) \geq (\epsilon\epsilon_1/2)n > \epsilon_2 n$ برای آن برقرار است. بدون

کاستن از کلیت فرض کنید $u \in V_1$. هم چنین می توان فرض کرد، u حداقل $\epsilon_2 n$ همسایه در V_i دارد، زیرا

در غیر این صورت با انتقال u به V_i یال های $e(V_1, V_2, \dots, V_r)$ افزایش می یابد. برای هر $i = 1, 2, \dots, r$

فرض کنید V'_i مجموعه ای از $\lceil \epsilon_2 n \rceil$ همسایه راس u در V_i باشد. برای $i = 1$ ، مجموعه V'_1 را با اضافه

کردن راس u بزرگ می کنیم. فرض کنید $|V'_i| = n'_i$. راس $v \in V'_1 - \{u\}$ را در نظر بگیرید.

در نتیجه تعداد کپی های F در گراف کامل r بخشی $K(V'_1, V'_2, \dots, V'_r)$ به همراه یال $e = uv$ حداقل برابر

است با:

$$c(r\lceil \epsilon_2 n \rceil, F) > \alpha_F(r\epsilon_2 n)^{f-2} - \beta_F(r\lceil \epsilon_2 n \rceil)^{f-3} > \epsilon_3 n^{f-2}$$

نابرابری بالا را برای تمام $e = uv \in B_2$ با $v \in V'_1$ در نظر می گیریم.

چون $\delta = \epsilon_4/4\alpha_F$ و $c(n, F) < 2\alpha_F n^{f-2}$ را داریم، در نتیجه حداقل

$$(|V'_1| - 1)\epsilon_3 n^{f-2} \geq (\epsilon_2 n)\epsilon_3 n^{f-2} > \epsilon_4 n^{f-1} = 4\delta\alpha_F n^{f-1} > 4q\alpha_F n^{f-2} > 2qc(n, F)$$

از پتانسیل کپی های F شامل u هستند. حداقل نصف این پتانسیل کپی ها باید یک جفت یال از M داشته

باشند، زیرا در غیر این صورت ادعا برقرار است.

این جفت از M نمی تواند شامل راس u باشند، چون u با تمام رئوس $K(V'_1, V'_2, \dots, V'_r)$ مجاور است.

هر جفت یال از M حداکثر $2^{f^2}n^{f-3}$ بار شمرده می شود. بنابراین داریم:

$$\frac{\epsilon_4}{2^{f^2+1}n^2} = \frac{\epsilon_4 n^{f-1}}{2^{f^2+1}n^{f-3}} < |M| < \delta_2 n^2$$

□

که یک تناقض با توجه به تعریف δ_2 است، در نتیجه ادعا برقرار است.

اگر $s \geq 4\epsilon q$ ، پس تعداد کپی های F که دارای یال های B_1 است، با استفاده از (۱.۴) برابر است با:

$$\begin{aligned} *F &\geq \sum_{e \in B_1} F(e) \geq \sum_{e \in B_1} (1 - \epsilon)c(n, F) \\ &\geq |B_1|(1 - \epsilon)c(n, F) \\ &\geq (1 - \epsilon)^2 |B|c(n, F) \\ &> (1 - 2\epsilon)(q + s)c(n, F) \\ &\geq (q + 2\epsilon q - 4\epsilon^2 q)c(n, F) \\ &> qc(n, F) \end{aligned}$$

بنابراین می توان فرض کرد $s < 4\epsilon q < q < n/3r$. قرار می دهیم $n_i = |V_i|$. پس داریم:

$$t_r(n) - s = |G| \leq \sum_{1 \leq i < j \leq r} n_i n_j$$

لم ۵.۲.۴ برای هر i ایجاب می کند:

$$\lfloor n/r \rfloor - s \leq n_i \leq \lceil n/r \rceil + s$$

مشاهده می کنیم $|M| \leq s$ است. در غیر این صورت رابطه $|G \cup M| > t_r(n)$ را داریم، که غیر ممکن

است. یال $e \in B$ را در نظر می گیریم که $e \subset V_1$ است.

تعداد پتانسیل کپی های F که شامل e ، با استفاده از تعریف برابر با $c(n_1, n_2, \dots, n_r, F)$ است. لم ۳.۳.۴

ایجاب می کند، که رابطه $c(n_1, n_2, \dots, n_r, F) \geq c(n, F) - \gamma_F s n^{f-3}$ برقرار باشد.

هیچ کدام از این پتانسیل کپی های F در H نیستند. یک جفت از M در حداکثر $2^{f^2} n^{f-3}$ پتانسیل کپی در

بالا شمرده می شود (اگر هر جفت از M دارای اشتراک باشند، در غیر این صورت حداکثر $2^{f^2} n^{f-4}$ شمرده

می شوند). نتیجه می گیریم؛

$$F(e) \geq c(n_1, n_2, \dots, n_r, F) - 2^{f^2} n^{f-3} |M| \geq c(n, F) - \gamma_F s n^{f-3} - 2^{f^2} s n^{f-3}$$

چون $s < q$ ایجاب می کند؛

$$\begin{aligned} *F &\geq \sum_{e \in B} F(e) \geq (q + s)(c(n, F) - \gamma_F s n^{f-3} - 2^{f^2} s n^{f-3}) \\ &> qc(n, F) + sc(n, F) - 2q(\gamma_F s n^{f-3} + 2^{f^2} s n^{f-3}) \end{aligned}$$

چون روابط $s < q < \delta_n < \epsilon_n$ و $\epsilon < \alpha_F / (4(\gamma_F + 2^{f^2}))$ برقرار است، داریم:

$$2q(\gamma_F + 2^{f^2})sn^{f-3} < 2\epsilon(\gamma_F + 2^{f^2})sn^{f-2} < s(\alpha_F/2)n^{f-2} < sc(n, F)$$

رابطه بالا نشان می دهد $*F > qc(n, F)$. بنابراین اثبات کامل است. $\square$

قضیه (۵.۳.۴) به طور مجانبی دقیق است. یعنی برای هر $q < \delta_n$ ، گرافی با $t_r(n) + q$ یال وجود دارد، که حداکثر شامل $1 + O(\frac{1}{n})qc(n, F)$ کپی از F است. هر یال دقیقاً در $c(n, F)$ کپی از F قرار می گیرد و هر کپی دقیقاً یک یال از یال های جدید را داراست، در نتیجه تعداد کل کپی ها $qc(n, F)$ است. اگر F گرافی f رأسی باشد که شامل حداقل دو یال جدید باشد، تعداد این چنین کپی ها حداکثر $O(q^2 n^{f-4})$ است. به وضوح مشاهده می کنیم که $c(n, F) = \Theta(n^{f-2})$ و چون $q < n$ ، به دست می آوریم: $q^2 n^{f-4} = O(\frac{1}{n})qc(n, F)$.

۴.۴ کپی های گراف بحرانی

دوره های فرد:

برای k ثابت و $k \geq 1$ ، فرض کنید، $F = c_{2k+1}$. می بینیم که:

$$c(n, F) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor (\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1) \dots (\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - k + 1) (\lceil \frac{n}{2} \rceil - 2) \dots (\lceil \frac{n}{2} \rceil - k)$$

که اگر $k = 1$ باشد، این حاصل ضرب برابر صفر است. به علاوه، اگر یک گروه از یال ها که فقط یک راس مشترک دارند، را به یک بخش $T_2(n)$ اضافه کنیم، به وضوح مشاهده می کنیم، که شامل هیچ کپی F که شامل دو یال از یال های اضافه شده باشد، نیست. در نتیجه قضیه (۵.۳.۴) برقرار است.

K_4 بدون یک یال:

فرض کنید گراف F از گراف K_4 با حذف یک یال بدست آید. پس به آسانی می بینیم: $c(n, F) = \lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ برای هر $\epsilon > 0$ و $1 \leq q < n^{1-\epsilon}$ ، اثبات قضیه (۵.۳.۴) منجر به ایجاد راسی می شود که در $qc(n, F)$ کپی از F یا $q(1-\epsilon)$ یال است، که هر یال در $(1-\epsilon)c(n, F)$ کپی قرار دارد. در واقع اگر تعداد کپی های F برابر با $\Omega(n^f)$ باشد، پس به طور متوسط هر راس در $\Omega(n^{f-1})$ کپی است.

فصل ۵

عدد توران گراف‌های فراگیر تنک

۱.۵ مقدمه

در این فصل، به محاسبه عدد توران برای گراف‌های همیلتنی می‌پردازیم. اور^۱ [۲۰] اثبات کرد که گراف‌های غیرهمیلتنی n راسی حداکثر دارای $1 + \binom{n-1}{2}$ یال می‌باشند. قضیه اور می‌تواند به گراف‌های فراگیر توران تعمیم یابد. برای یک گراف H ، عدد توران $ex(n, H)$ برابر با ماکزیمم تعداد یال یک گراف n راسی است که شامل زیرگراف یکریخت با H نیست. بنابراین قضیه اور نشان می‌دهد که عدد توران $ex(n, C_n)$ که در آن C_n دوری به طول n است، برابر با $1 + \binom{n-1}{2}$ است. اخیراً قضیه اور به دورهای همیلتنی در ابرگراف‌ها تعمیم داده شده است.

در این فصل اثبات می‌کنیم برای هر n به اندازه کافی بزرگ، هر گراف با n راس که دارای شرط

$$ex(n, H) = \binom{n-1}{2} + \delta(H) - 1 \quad \text{داریم:} \quad \Delta(H) \leq \sqrt{n}/40$$

۲.۵ درجه رئوس و مجموعه‌های مستقل گراف

تعریف ۱.۲.۵. [۱] دو گراف G و H را هم‌بسته نامیم، هرگاه گراف H زیرگراف فراگیر گراف مکمل G باشد.

لم ۲.۲.۵. [۱] گراف G با n راس و $n - \delta - 1$ یال را در نظر بگیرید. فرض کنید $d(v)$ نماد درجه راس v در گراف G باشد. هم‌چنین فرض کنید $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ مجموعه رئوس این گراف باشد که برای $i = 1, 2, \dots, n$ داریم:

$$d(v_i) \geq d(v_{i+1})$$

حال S_1 را یک مجموعه مستقل از رئوس G در نظر می‌گیریم، که شامل هیچ‌کدام از همسایه‌های راس v_1

^۱Ore

نیست و درجه هر راس در این مجموعه کمتر از $2\sqrt{n}$ است. همچنین برای $i = 2, \dots, n$ هر $u \in S_i$ را در نظر بگیرید، درجه‌اش کمتر از ۵۰ است. بنابراین داریم:

$$۱) \quad d(v_1) \leq n - \delta - 1, d(v_2) \leq n/2, d(v_i) < 2n/i$$

$$۲) \quad |S_1| \geq \delta, |S_i| \geq n/7 \quad i = 2, \dots, n$$

برهان. رابطه $d(v_1) = \Delta(G) \leq |E| = n - \delta - 1$ واضح است. همچنین داریم:

$$d(v_1) + d(v_2) \leq |E| + 1$$

لذا $d(v_2) \leq (|E| + 1)/2 \leq n/2$ را به دست می‌آوریم. چون رابطه $\sum_{i=1}^n d(v_i) = 2n - 2\delta - 2 < 2n$ را داریم، نتیجه می‌گیریم:

$$d(v_i) < 2n/i$$

زیرگرافی از G را در نظر بگیرید که شامل همسایه‌های راس v_1 نیست، این زیرگراف دارای $n - d(v_1) - 1$ راس و حداکثر $n - \delta - 1 - d(v_1)$ یال است. مجموعه مستقل‌ای با اندازه حداقل $(n - d(v_1) - 1)/3$ دارد.

اگر قرار دهیم $n - d(v_1) - 1 \geq 6\delta$ ، حداقل $\delta \geq (n - d(v_1) - 1)/6$ از رئوس دارای درجه حداکثر $2\sqrt{n}$ هستند. بنابراین $|S_1| \geq \delta$ است. در غیر این صورت هر راسی که همسایه راس v_1 نیست، دارای درجه حداکثر $2\sqrt{n} < 6\delta$ است. لذا زیرگراف القایی دارای $n - d(v_1) - 1$ راس و حداکثر $n - d(v_1) - 1 - d(v_1)$ یال است که حداقل δ مؤلفه است. با انتخاب یک راس از هر مؤلفه داریم $|S_1| \geq \delta$. در این حالت هم حکم برقرار است.

با استدلالی مشابه، زیرگرافی از G را در نظر می‌گیریم که شامل هیچ‌یک از رئوس مجاور v_i نیست و تعداد یال‌هایش کمتر از تعداد رئوسش و این زیرگراف دارای یک مجموعه مستقل با اندازه حداقل یک سوم رئوس است. برای $i \geq 2$ داریم:

$$n - d(v_i) - 1 \geq n - d(v_2) - 1 \geq n - n/2 - 1 = n/2 - 1$$

لذا مجموعه مستقل دارای اندازه حداقل $n/6 - 1$ است. به عبارت دیگر درجه حداقل $n/7$ از رئوس این مجموعه مستقل کمتر از ۵۰ هستند، زیرا در غیر این صورت $n/42 - 1$ راس از مجموعه مستقل دارای درجه حداقل ۵۱ می‌باشند، که متناقض با این حقیقت است، که تعداد یال‌های گراف G کمتر از n است. در نتیجه داریم:

$$|S_i| \geq n/7$$

□

لم ۳.۲.۵. [۱] گراف G با n راس را در نظر بگیرید. برای $i = 2, \dots, n$ فرض کنید B_i یک زیر مجموعه تصادفی از S_i ها که در لم ۲.۲.۵ تعریف کردیم، باشد. انتخاب هر راس S_i مستقل از انتخاب هر راس از B_i با احتمال $n^{-1/2}$ است. برای هر $v_i \in V$ فرض کنید $N(v_i)$ مجموعه رئوس مجاور با v_i در گراف G باشد.

در این صورت تعریف می‌کنیم:

$$C_i = \left(\bigcup_{j=2}^{i-1} B_j \right) \cap N(v_i)$$

$$D_i = B_i \setminus \left(\bigcup_{j=2}^{i-1} B_j \right)$$

برای n به اندازه کافی بزرگ داریم:

$$۱. |C_i| \leq ۴\sqrt{n} \quad i = ۲, \dots, n$$

$$۲. |D_i| \geq \sqrt{n}/۲۰ \quad i = ۲, \dots, [\sqrt{n}]$$

برهان. در هر دو مورد اثبات می‌کنیم، با احتمال بیشتر از یک دوم رابطه‌ها برقرارند. برای قسمت اول لم رئوس v_i که $d(v_i) \geq ۴\sqrt{n}$ را در نظر می‌گیریم و حکم را ثابت می‌کنیم. به‌وضوح برای رئوس دیگر حکم برقرار است، چون رابطه $|C_i| \leq |N(v_i)| = d(v_i)$ برقرار است. بنابراین راس v_i را با $d(v_i) \geq ۴\sqrt{n}$ در نظر می‌گیریم. حال ثابت می‌کنیم احتمال $|C_i| > ۴\sqrt{n}$ کمتر از $۱/۲n$ است. با اجتماع روی تمام رئوس انتخابی این احتمال کمتر از $۱/۲$ است، در نتیجه حکم برقرار می‌شود. برای اثبات قسمت اول، هر راس $u \in N(v_i)$ را که در نظر بگیریم، احتمال آن که $u \in B_j$ باشد، حداکثر $n^{-۱/۲}$ است. در نتیجه احتمال عضویت u در مجموعه C_i فقط برابر با احتمال عضویت u در $B_2 \cup \dots \cup B_{i-1}$ است. در نتیجه داریم:

$$Pr(u \in C_i) \leq (i-2)n^{-۱/۲}$$

با استفاده از لم ۲.۲.۵ داریم $i < ۲n/d(v_i)$. بنابراین:

$$Pr(u \in C_i) \leq \frac{۲\sqrt{n}}{d(v_i)}$$

هم‌چنین $|C_i|$ مجموعی از $d(v_i)$ هاست، برای هر راس $u \in N(v_i)$ احتمال این که $u \in C_i$ باشد حداکثر $\frac{۲\sqrt{n}}{d(v_i)}$ است. در نتیجه $|C_i|$ حداکثر برابر با $۲\sqrt{n}$ است و با استفاده از نامساوی چرنف، احتمال آن که $|C_i|$ بزرگ تر از $۴\sqrt{n}$ باشد، یک تابع نمایی کوچک بر حسب $\sqrt{n}$ است که به صفر میل می‌کند. در نتیجه حکم برقرار است.

برای اثبات قسمت دوم، برای هر راس $u \in S_i$ احتمالی که $u \in B_i$ باشد برابر با $n^{-۱/۲}$ است. به عبارت دیگر برای هر $j \geq ۲$ احتمال این که $u \notin B_j$ برقرار باشد، حداقل $۱ - n^{-۱/۲}$ است. حال برای هر $i \leq \sqrt{n}$ داریم:

$$Pr(u \in D_i) \geq n^{-۱/۲} (1 - n^{-۱/۲})^{i-2} \geq \frac{1}{e\sqrt{n}}$$

هم‌چنین می‌دانیم $|D_i|$ برابر با مجموعی از $|S_i|$ است و احتمال این‌که هر راس متعلق به C_i باشد، حداقل برابر با $\frac{1}{e\sqrt{n}}$ است. با استفاده از لم ۲.۲.۵، رابطه $|S_i| \geq n/7$ را داریم. در نتیجه $|D_i|$ حداقل برابر با $\frac{\sqrt{n}}{(7e)} > \frac{n}{1971}$ است. حال با استفاده از نامساوی چرنف احتمال این‌که $|D_i|$ کمتر از $\frac{n}{4}$ باشد، یک تابع نمایی کوچک بر حسب $\sqrt{n}$ است که به صفر میل می‌کند. در نتیجه حکم برقرار است. $\square$

۳.۵ محاسبه عدد توران گراف‌های فراگیر تنک

قضیه ۱.۳.۵. [۱] فرض کنید H یک گراف n راسی بدون هیچ راس تنهایی باشد. اگر $\Delta(H) \leq \sqrt{n}/40$ در نتیجه داریم:

$$ex(n, H) = \binom{n-1}{2} + \delta(H) - 1$$

برهان. فرض کنید $G(V, E)$ و $H(W, F)$ دو گراف هم‌بسته باشند. با استفاده از لم ۲.۲.۵ مجموعه‌های مستقل $B_2, \dots, B_n$ را در نظر بگیرید که در شرایط لم ۲.۲.۵ و تعریف C_i و D_i در همان لم صدق کنند. تابع یک‌به‌یک $f: V \rightarrow W$ را در نظر بگیرید، اثبات را در چهار قدم کامل می‌کنیم. در سراسر اثبات ویژگی بسته بودن را برقرار می‌کنیم: برای هر دو راس منطبق شده $u, v \in V$ با $(u, v) \in E$ ، رئوس متناظر منطبق شده‌شان $f(u)$ و $f(v)$ هستند، که به ازای آن‌ها داریم $(f(u), f(v)) \notin F$.

قدم اول: راس v_1 را که ماکزیمم درجه را در گراف G دارد با راس w در گراف H که مینیمم درجه را دارد، با استفاده از تابع f منطبق می‌کنیم. بنابراین داریم $f(v_1) = w$. فرض کنید $N(w)$ مجموعه همسایه‌های راس w در گراف H باشد. در نتیجه داریم $|N(w)| = \delta$. با استفاده از لم ۲.۲.۵ می‌توان δ را نوشت (مجموعه S_i را در لم ۲.۲.۵ تعریف کردیم). حال یک زیرمجموعه $|B_1|$ از δ راس مجموعه S_1 را از گراف G با $N(w)$ منطبق می‌کنیم. بعد از قدم اول دقیقاً $\delta + 1$ راس منطبق شده داریم.

قدم دوم: فرض کنید k بزرگترین اندیس باشد، به‌طوری‌که $d(v_k) \geq 2\sqrt{n}$. با استفاده از لم ۲.۲.۵ مشاهده می‌کنیم $0 \leq k \leq \sqrt{n}$ است. این قدم را برای $i = 2, \dots, k$ تکرار می‌کنیم، که در تکرار i ام راس v_i و رئوس زیرمجموعه B_i را با مجموعه‌ای از رئوس W منطبق می‌کنیم. در این قدم سه اصل زیر همواره برقرار است:

(۱) بعد از تکرار i ام راس v_i با بعضی از رئوس $f(v_i)$ منطبق می‌شود. هم‌چنین می‌توان مطمئن بود، که تمام همسایه‌های راس $f(v_i)$ در گراف H با رئوس مجموعه B_i منطبق شود.

(۲) بعد از تکرار i ام هر راس منطبق شده از مجموعه رئوس V در $\bigcup_{j=1}^i B_j$ قرار دارد.

(۳) تعداد کل رئوس منطبق شده بعد از تکرار i ام برابر با $i(\Delta(H) + 1)$ است.

تکرار i ام از قدم دوم را در نظر بگیرید، که v_i راسی است، که هنوز با راسی از H منطبق نشده است و $d(v_i) \geq 2\sqrt{n}$ را داریم. $N(v_i)$ را به سه بخش $N(v_i) = X \cup Y \cup Z$ که X مجموعه رئوس منطبق شده مجاور با v_j که $j < i$ است. Y دیگر رئوس مجاور منطبق شده و مجموعه Z رئوسی است که هنوز منطبق نشده‌اند. واضح است که:

$$|X| < i \leq k \leq \sqrt{n}$$

با استفاده از اصل دوم داریم $Y \subset \bigcup_{j=1}^{i-1} B_j$. همچنین $Y \subset C_i \cup B_1$ برقرار است. از ویژگی اول لم ۲.۲.۵ داریم $|B_1| = \delta$ ، بنابراین رابطه $\delta + 4\sqrt{n} < 5\sqrt{n} \leq |Y|$ برقرار است. در نتیجه $|X \cup Y| < 6\sqrt{n}$ را داریم. مجموعه T از $|X \cup Y|$ راس منطبق شده در گراف H را در نظر بگیرید. هر راس از T حداکثر $\Delta(H)$ همسایه در گراف H دارد. بنابراین یک مجموعه Q از رئوس H وجود دارد که با هیچ یک از رئوس T مجاور نیستند. به عبارت دیگر ویژگی بسته بودن برقرار است. تعداد این مجموعه رئوس برابر با:

$$|Q| \geq n - |T|\Delta(H) = n - |X \cup Y|\Delta(H) \geq n - 6\sqrt{n} \cdot \sqrt{n}/40 = 17n/20$$

می‌خواهیم راس v_i را با یک راس از Q منطبق کنیم. به عبارت دیگر باید ثابت کنیم Q دارای حداقل یک راس منطبق نشده است. این درست است زیرا با توجه به اصل سوم تعداد کل رئوس منطبق شده حداکثر برابر است با:

$$(i-1)(\Delta(H)+1) < k(\sqrt{n}/40+1) \leq n/40 + \sqrt{n}$$

بنابراین تعداد کل رئوس منطبق نشده بزرگتر از $n - |Q|$ و دارای اشتراک با Q است، لذا $f(v_i)$ حتما دارای یک راس است. فرض کنید R مجموعه همسایه‌های $f(v_i)$ در H باشند که هنوز منطبق نشده‌اند.

$$|R| \leq \Delta(H) \leq \sqrt{n}/40 \quad \text{واضح است که:}$$

به عبارت دیگر اصل اول برقرار است. حال باید بعضی رئوس منطبق نشده از مجموعه مستقل که همسایه راس v_i نیستند با R منطبق کنیم. $|R|$ راس از $B_i \setminus (\bigcup_{j=1}^{i-1} B_j)$ را انتخاب می‌کنیم و نشان می‌دهیم اصل دوم برقرار است. با استفاده از لم ۳.۲.۵ داریم:

$$|D_i \setminus B_1| \geq \sqrt{n}/20 - \delta \geq \sqrt{n}/20 - \Delta(H) \geq \sqrt{n}/20 - \sqrt{n}/40 = \sqrt{n}/40 \geq |R|$$

اکنون مشاهده می‌کنیم در تکرار i ام تعداد کل رئوس منطبق شده $|R| + 1 \leq \Delta(H) + 1$ است که ایجاب می‌کند اصل سوم نیز برقرار باشد.

قدم سوم: این گام بیان می‌کند رئوس منطبق نشده در گراف G دارای درجه کمتر از $2\sqrt{n}$ است. با استفاده از اصل سوم در قدم دوم تعداد کل رئوس منطبق شده در تکرار آخر حداقل برابر است با:

$$n - \sqrt{n}(\Delta(H) + 1) \geq 39n/40 - \sqrt{n} > 19n/20.$$

رئوس منطبق نشده از گراف G یک زیرگراف با حداقل $19n/20$ راس و کمتر از n یال می‌سازند و این زیرگراف یک مجموعه مستقل با اندازه حداقل $n/4$ دارد. فرض کنید J بزرگترین مجموعه مستقل از رئوس G و K باقی رئوس هم منطبق نشده‌اند. داریم $|J| \geq n/4$.

در قدم سوم رئوس K را یک‌به‌یک منطبق می‌کنیم. راس $v \in K$ را با $d(v) \leq 2\sqrt{n}$ در نظر بگیرید که آن هنوز منطبق نشده است. مجموعه X از همسایه‌های راس v که هنوز منطبق نشده‌اند و در $|X| \leq 2\sqrt{n}$ صدق می‌کند و همچنین مجموعه T با اندازه $|X|$ در گراف H را در نظر بگیرید. هر راس از T حداکثر $\Delta(H)$ همسایه در گراف H دارد.

بنابراین مجموعه Q با اندازه حداقل $n - |X|\Delta(H) \geq n - n/20 = 19n/20$ وجود دارد که با تمام رئوس T مجاور نیستند. به عبارت دیگر ویژگی بسته بودن برقرار است. ثابت کردیم که مجموعه Q حداقل دارای یک راس است که آن هنوز منطبق نشده است. این نتیجه درست است، زیرا تعداد کل رئوس منطبق شده در این قدم حداکثر $3n/4$ است. بنابراین هنوز راس منطبق نشده‌ای در Q موجود است.

قدم چهارم: در این قدم رئوس باقی مانده از J را که هنوز منطبق نشده‌اند را منطبق می‌کنیم (این رئوس را با نماد Q نشان می‌دهیم).

گراف دوبخشی P را با بخش‌های J و Q در نظر بگیرید که $|J| = |Q| \geq n/4$ برقرار است. اکنون اگر راس v را با q منطبق کنیم یال (v, q) ایجاد می‌شود. برای هر راس $v \in J$ حداقل $19n/20$ راس از گراف H وجود دارد که مجاور با تمام رئوس منطبق شده با همسایه v نیستند. بنابراین درجه راس v در P حداقل $|J|/2 - (n - |J|) > 19n/20 - (n - |J|)$ است. به عبارت دیگر بعضی $q \in Q$ را در نظر بگیرید. حال فرض کنید T نماد مجموعه همسایه‌های منطبق شده q در H باشد و مجموعه X در G با آنها منطبق می‌شوند. راس $x \in X$ را در نظر بگیرید. واضح است که اگر $d(x) \geq 2\sqrt{n}$ پس تمام همسایه‌های x در تکرار اول از قدم دوم منطبق می‌شدند. بنابراین فرض کنید $X' \subset X$ رئوسی با درجه کمتر از $2\sqrt{n}$ باشد. بنابراین q نمی‌تواند با حداکثر $2\sqrt{n}|X'|$ از رئوس J منطبق شود. اما چون رابطه $|X'| \leq |X| = |T| \leq \Delta(H)$ را داریم، بنابراین q نمی‌تواند با حداکثر $n/20$ رئوس J منطبق شود که این تعداد کمتر از $|J|/2$ است. پس درجه q در گراف P بزرگتر از $|J|/2$ است. حال زیر مجموعه $s \subset J$ و $|N(s)| \leq |Q|$ را در نظر بگیرید. دو حالت رخ می‌دهد:

(۱) اگر $|s| \leq |J|/2$ ، به وضوح داریم:

$$|N(s)| \geq |s|$$

در نتیجه شرایط قضیه هال برقرار است و گراف P یک تطابق کامل دارد.

(۲) اگر $|J|/2 > |s|$ ، داریم:

$$|J|/2 \leq |N(Q/N(s))| < |J| - |s|$$

که در این حالت به تناقض می‌رسیم و در این حالت هم شرایط قضیه هال برقرار است.

□

فصل ۶

رنگ آمیزی دورها در گراف ها

۱.۶ مقدمه

مسائل مربوط به دورها و رنگ آمیزی گراف ها هر کدام به تنهایی در مقالات زیادی مطرح شده اند اما در این پایان نامه به این دو موضوع به طور هم زمان می پردازیم. کاتونا^۱ و توزا^۲ دو نویسنده ای بودند که برای نخستین بار دو موضوع رنگ آمیزی و دورهای گراف ها را با هم در یک عنوان به صورت زیر مطرح کردند. این دو روشی برای رنگ آمیزی دورهای گراف ارایه دادند، به صورتی که دورهای یال مجزا و با اندازه مشخص رنگ های متفاوتی می گیرند. این نوع رنگ آمیزی از دورها، رنگ آمیزی سره دورهای یک گراف نامیده می شود. مینیم تعداد رنگ های به کار رفته در این نوع رنگ آمیزی را با نماد $x(n, k)$ نمایش می دهیم. این عدد را به گونه ای دیگر می شود، تعریف کرد: به عبارت دیگر، افراز دورهای یک گراف به مینیم تعداد کلاس های رنگی به گونه ای که دورهای یال مجزا رنگ های متفاوت بگیرند.

در این فصل به بررسی موضوع فوق با استفاده از ابرگراف ها می پردازیم. هدف این فصل محاسبه این تعداد کلاس های رنگی است. ما این عدد را برای $k = 3$ به دست آوردیم، اما برای k های بزرگتر، فقط حدود این عدد را می توان مشخص کرد. این موضوع بسیار مرتبط با نتایج قضیه توران است.

قضیه توران ماکزیمم تعداد یال های یک گراف n راسی و k بخشی با بخش های با اندازه تقریباً مساوی که شامل هیچ K_{k+1} نیست، را محاسبه می کند و این بسیار مرتبط با موضوع رنگ آمیزی دورهای یال مجزا که در بالا مطرح شد.

^۱Katona

^۲Tuza

۲.۶ محاسبه کران عدد رنگی دوره‌های گراف

تعریف ۱.۲.۶. [۱۴] کمترین تعداد رنگی که در رنگ‌آمیزی دوره‌های به طول k در یک گراف n راسی به کار می‌رود، را عدد رنگی دور به طول k می‌نامیم و با نماد $\chi(n, k)$ نشان می‌دهیم و عدد رنگی دوره‌های به طول k می‌نامیم.

در ابتدا ساختار $\chi(n, 3)$ را نشان می‌دهیم.

گراف کامل K_n را در نظر بگیرید. تمام دورهای به طول K در این گراف را با نماد $C(n, 3)$ نمایش می‌دهیم. هم‌چنین با توجه به تعریف گراف توران، می‌دانیم گراف توران $T(n, k-1)$ شامل هیچ K_k نیست. حال در گراف k_n گراف توران $T(n, 2)$ را در نظر بگیرید. یال‌هایی که در گراف توران قرار نمی‌گیرند، را به‌عنوان متمم گراف توران $\bar{T}(n, 2)$ قرار می‌دهیم، که به ترتیب دارای متمم اجتماع دو مجموعه مجزا از رئوس با اندازه‌های $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ و $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ است.

با استفاده از قضیه متل مشاهده می‌کنیم تعداد یالها برابر $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$ و هیچ مثلی ندارد. این یال‌ها را با اعداد $1, \dots, n$ نام‌گذاری می‌کنیم. هر مثلث در k_n یک یال از $\bar{T}(n, 2)$ دارد. عدد رنگی که به هر مثلث نسبت می‌دهیم، برابر با مینیمم اندیس یال $\bar{T}(n, 2)$ است که در مثلث وجود دارد. به این ترتیب یک رنگ‌آمیزی سره از $C(n, 3)$ را به‌دست می‌آوریم. در این فصل نشان می‌دهیم که این رنگ‌آمیزی بهترین ساختار از $\chi(n, 3)$ را ارائه می‌دهد.

تعریف ۲.۲.۶. [۱۴] عدد توران $ex(n, H)$ ماکزیمم تعداد یال‌های یک گراف n راسی است، که دارای زیر گراف H نیست.

فرض کنید $G(n, k)$ یک گراف n راسی است، که شامل هیچ C_k نیست. پس در این صورت $\bar{G}(n, k)$ دارای ویژگی مهم زیر است:

اگر $C_k \in C(n, 3)$ پس یک یال مشترک با $\bar{G}(n, k)$ دارد. (رئوس $C(n, 3)$ و $G(n, k)$ یکسان است.) یال‌های $\bar{G}(n, k)$ را با رنگ‌های مجزا رنگ‌آمیزی می‌کنیم. فرض کنید یال e را با رنگ $c(e)$ رنگ کنیم.

اگر e یال مشترک C_k و $\bar{G}(n, k)$ باشد، این دور را با رنگ $c(e)$ رنگ می‌کنیم. در این صورت هر دور به طول k ، حداقل یک رنگ می‌گیرد. اگر بیشتر از یک رنگ بگیرد، یکی را به‌دلخواه انتخاب می‌کنیم. این یک رنگ‌آمیزی سره با استفاده از چند رنگ برای تعداد یال‌های $\bar{G}(n, k)$ است.

گزاره: [۱۴] گراف G با n راس در نظر بگیرید. اگر $\chi(n, k)$ نماد عدد رنگی دوره‌های به طول k در گراف G باشد، در این صورت داریم:

$$\chi(n, k) \leq \binom{n}{2} - ex(n, C_k)$$

$$ex(n, C_k) = \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$$

اگر $k = 3$ با استفاده از قضیه ۵.۰.۲ داریم:

گزاره، منجر به $\lfloor \frac{(n-1)^2}{4} \rfloor$ به عنوان تخمینی از کران بالا $\chi(n, 3)$ می‌شود. در بخش بعد اثبات خواهیم کرد که این تخمین دقیق است. همچنین نشان خواهیم داد که برای مقادیر دیگر k این تخمین به طور مجانبی دقیق است. چون رفتار مجانبی $ex(n, c_k)$ برای مقادیر فرد و زوج k متفاوت است، پس مقدار مجانبی بسیار وابسته به مقدار k است. این موضوع را در قالب دو قضیه زیر بیان می‌کنیم.

قضیه ۳.۲.۶. [۱۰، ۱۲] برای یک گراف n راسی H داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ex(n, H)}{\binom{n}{2}} = 1 - \frac{1}{\chi(H)-1}$$

که $\chi(H)$ عدد رنگی گراف H است. اگر k فرد باشد، پس $\chi(c_k) = 3$ ، قضیه بالا ایجاب می‌کند که:

$$ex(n, c_k) \sim \frac{1}{4}n^2$$

بنابراین گزاره منجر به $\frac{1}{4}n^2$ به عنوان کران پایین می‌شود. برای $H = C_k$ (k فرد) قضیه قوی‌تری از قضیه ۳.۲.۶ داریم.

قضیه ۴.۲.۶. [۲۳] گراف n راسی G را در نظر بگیرید. اگر k فرد باشد، برای $n \geq n_0(k)$ داریم:

$$ex(n, c_k) = \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$$

این قضیه ما را به حدس زیر ترغیب می‌کند.

ادعا: [۱۴] اگر k فرد باشد، برای $n \geq n_1(k)$ داریم:

$$\chi(n, c_k) = \lfloor \frac{(n-1)^2}{4} \rfloor$$

نتیجه برای k زوج بسیار متفاوت است. قضیه ۳.۲.۶ مؤلفه n را در $ex(n, 3)$ محاسبه نمی‌کند، فقط بیان می‌کند که کمتر از ۲ است. پس مؤلفه دوم در مقابل مؤلفه اول ناچیز است، بنابراین مقدار $\chi(n, c_k)$ برابر با مؤلفه اول است.

۳.۶ محاسبه تعداد دورهای به طول k در گراف

قضیه ۱.۳.۶. [۱۹] فرض کنید $G = (V, E)$ گرافی با n راسی و m یالی باشد. در این صورت تعداد

$$\frac{4}{3} \frac{m^2}{n} - \frac{mn}{3}$$

مثلث‌های G برابر است با:

خانواده‌ای از مثلث‌ها را **یال اشتراکی** یا به طور خلاصه **اشتراکی** گوئیم اگر هر دو مثلث یک یال مشترک داشته باشند.

خانواده مثلث‌ها را **اشتراکی بدیهی** یا **کتاب نامیم**، اگر تمام مثلث‌ها شامل فقط یک یال مشترک باشند، این یال مشترک را **اسپین می‌نامیم** (اگر بوک شامل یک مثلث باشد، یکی از یال‌ها را به عنوان اسپین در نظر می‌گیریم). اگر راس‌های خانواده مثلث‌ها شامل یک مجموعه ۴ عضوی باشد، و تعداد مثلث‌ها حداقل ۳ باشد، این خانواده را **چهارگانه می‌نامیم**.

لم ۲.۳.۶. [۱۴] خانواده مثلث‌های اشتراکی یا کتاب هستند یا چهارگانه تشکیل می‌دهند.

برهان. دو مثلث از خانواده اشتراکی را انتخاب می‌کنیم. آن‌ها یک یال مشترک e دارند. مجموعه یال‌ها را $\{a, b, e\}, \{c, d, e\}$ می‌نامیم. اگر این خانواده مثلث‌ها اشتراکی بدیهی نباشند، پس مثلث سوم وجود دارد که شامل یک یال از $\{a, b\}$ و یک یال از $\{c, d\}$ است. فرض کنید $\{a, c, f\}$ مجموعه یال‌های این مثلث باشد. به راحتی می‌بینیم که اگر مثلث چهارمی در این خانواده وجود داشته باشد، فقط می‌تواند شامل یال‌های $\{b, d, f\}$ باشد. چهار راس این شش یال، سه یا چهار مثلث را می‌پوشاند. بنابراین یک چهارگانه داریم.

□

قضیه ۳.۳.۶. [۱۴] گراف G با n راس را در نظر بگیرید. اگر $n \geq 16$ پس داریم: $\chi(n, 3) = \lfloor \frac{(n-1)^2}{4} \rfloor$

برهان. گزاره ایجاب می‌کند نابرابری $\chi(n, 3) \leq \lfloor \frac{(n-1)^2}{4} \rfloor$ برقرار باشد. یک رنگ‌آمیزی سره از $C(n, 3)$ را در نظر بگیرید. با استفاده از لم ۲.۳.۶ کلاس‌های رنگی کتاب یا چهارگانه هستند. عدد رنگی آن‌ها را به ترتیب s و q می‌نامیم. اگر $s \leq \lfloor \frac{(n-1)^2}{4} \rfloor$ حکم برقرار است. بنابراین می‌توان فرض کرد:

$$s \leq \lfloor \frac{(n-1)^2}{4} \rfloor$$

فرض کنید G گرافی n راسی با اسپین‌های بوک به عنوان یال‌ها باشد. در این صورت $\bar{G}$ دارای $s - \binom{n}{2}$ یال است.

با استفاده از قضیه ۱.۳.۶ برای $\bar{G}$ می‌بینیم شامل حداقل $\frac{((\binom{n}{2})-s)n}{3} - \frac{((\binom{n}{2})-s)^2}{4}$ مثلث است. بنابراین G شامل این تعداد مثلث نیست، یعنی این مثلث‌ها متعلق به هیچ کتابی نیستند.

در نتیجه طبق لم ۱ حتماً متعلق به چهارگانه هستند. چون هر چهارگانه شامل حداقل ۴ مثلث است، تعداد چهارگانه‌های موجود یک چهارم مقدار فوق است. در نتیجه کل کلاس‌های رنگی برابر است با:

$$s + \frac{1}{3} \left(\frac{((\binom{n}{2})-s)^2}{n} - \frac{((\binom{n}{2})-s)n}{12} \right)$$

اثبات می‌کنیم مقدار فوق حداقل برابر با $\lfloor \frac{(n-1)^2}{4} \rfloor$ است. قرار می‌دهیم: $A = \binom{n}{2} - s$

تساوی بالا ایجاب می‌کند $A < \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$. حال باید ثابت کنیم: $\lfloor \frac{(n-1)^2}{4} \rfloor \leq \binom{n}{2} - A + \frac{A^2}{3n} - \frac{An}{12}$

که رابطه بالا معادل است با:

$$0 \leq \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor + \frac{A^2}{3n} - \frac{An}{12} - A \quad (1.6)$$

برای یک مقدار n ثابت، مینیمم طرف راست نابرابری بالا در $A = \frac{n^2+12n}{8}$ اتفاق می‌افتد. اگر $n \leq 12$

مشاهده می‌کنیم $A < \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$ ، در نتیجه داریم: $A = \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor \rightarrow A = \frac{n^2+3}{4}$

هم‌چنین با جایگذاری مقدار بالا در معادله (۱.۶) به دست می‌آوریم:

$$\frac{n^2-1}{4} + \frac{\left(\frac{n^2+3}{4}\right)^2}{3n} - \left(\frac{n^2+3}{4}\right) = \frac{3n^2-48n+9}{48n}$$

این مقدار برای $n \geq 16$ مثبت است، پس حکم برقرار می باشد. $\square$

قضیه ۴.۳.۶ [۱۸] فرض کنید $k \geq 3$ و فرد باشد. عدد ثابت $\alpha_k > 0$ را در نظر بگیرید. گراف n راسی با $ex(n, c_k) + t$ یال وجود دارد که $0 < t < \alpha_k n$ و $n > n(k)$ برقرار است. در این صورت داریم:

$$h_k(n, t) \geq tc(n, c_k)$$

که ؛

$$c(n, c_k) = \lfloor \frac{n}{4} \rfloor (\lfloor \frac{n}{4} \rfloor - 1) \dots (\lfloor \frac{n}{4} \rfloor - \lfloor \frac{k}{4} \rfloor + 1) (\lceil \frac{n}{4} \rceil - 2) \dots (\lceil \frac{n}{4} \rceil - \lfloor \frac{k}{4} \rfloor)$$

برای $\epsilon > 0$ عدد حقیقی دیگری مانند $\delta(\epsilon) > 0$ را در نظر می گیریم. حال اگر تعداد کپی های F در H حداکثر $\delta(\epsilon)n^f$ باشد، پس می توان حداکثر ϵn^2 یال از H حذف کرد که تمام کپی های F از بین بروند. با استفاده از این قضیه و لم زیر می توان تعداد تمام کپی های c_k موجود در گراف ها را حدس زد.

۴.۶ رنگ آمیزی دورهای گراف با استفاده از ابرگرافها

تعریف ۱.۴.۶

لم ۲.۴.۶ [۱۴] فرض کنید $k \geq 3$ فرد باشد. $n(k, N)$ وجود دارد که بطوریکه رابطه زیر برای هر $n > n(k, N)$ برقرار است.

$$\frac{h_k(n, t)}{tn^{k-3}} \geq N \quad (1 \leq t \leq \binom{n}{2} - ex(n, c_k))$$

برهان. سه حالت متمایز وجود دارد.

(۱) اگر $t \leq \alpha_k n$ پس قضیه ۸ ایجاب می کند:

$$\frac{h_k(n, t)}{t} \geq c(n, c_k) \geq \beta_k n^{k-2}$$

(برای بعضی اعداد ثابت β_k برقرار است.) بنابراین رابطه $\frac{h_k(n, t)}{tn_{k-3}} \geq \beta_k n$ را داریم. سمت راست نامساوی بالا به ازای $n \geq \frac{N}{\beta_k}$ حداقل N است.

(۲) اگر $\alpha_k n < t \leq \frac{\alpha_k \beta_k}{4N} n^2$ قضیه ۸ ایجاب می کند :

$$\frac{h_k(n, t)}{t} \geq \frac{h_k(n, \lfloor \alpha_k n \rfloor)}{\frac{\alpha_k \beta_k}{4N} n^2} \geq \frac{\lfloor \alpha_k n \rfloor}{\frac{\alpha_k \beta_k}{4N} n^2} \beta_k n^{k-2} \geq N n^{k-3}$$

اگر قرار دهیم $n \geq \frac{2}{\alpha_k}$ نتیجه مورد نظر حاصل می شود.

(۳) اگر $t > \frac{\alpha_k \beta_k}{4N} n^2$ ، گراف H را با n راس و $t_k(n, c_k) + \lfloor \frac{\alpha_k \beta_k}{4N} n^2 \rfloor$ یال $t_k(n, c_k)$ نماد وجود تعدادی دور به طول k می باشد) در نظر می گیریم. ادعا می کنیم که گراف H شامل حداقل $n^k \delta\left(\frac{\alpha_k \beta_k}{4N}\right)$ کپی از c_k است. به عبارت دیگر با استفاده از قضیه حذفی با حذف حداکثر $\frac{\alpha_k \beta_k}{4N} n^2$ یال از H ، گراف H' به دست می آید، که یال هایش از عدد توران $e\chi(n, c_k)$ بیشتر است و هیچ کپی از c_k ندارد، که این تناقض است.

$$n > \frac{N}{\delta\left(\frac{\alpha_k \beta_k}{4N}\right)} \quad \text{حال اگر قرار دهیم:}$$

در نتیجه:

$$\frac{h_k(n, t)}{tn^{k-3}} \geq \frac{h_k(n, \frac{\alpha_k \beta_k}{4N} n^2)}{n^2 n^{k-3}} \geq \frac{\delta\left(\frac{\alpha_k \beta_k}{4N}\right)}{n^{k-1}} \geq N$$

بنابراین حکم برقرار است. تمام انتخاب های ممکن برای $n(k, N)$ برابر است با:

$$\max \left\{ n(k), \frac{N}{\beta_k}, \frac{2}{\alpha_k}, \frac{N}{\delta\left(\frac{\alpha_k \beta_k}{4N}\right)} \right\}$$

□

لم بعدی نشان می دهد مرتبه کلاس های رنگی بوک (n^{k-3}) است. در بخش های بعدی از این لم برای توضیح و اثبات حالت کلی استفاده می کنیم.

فرض کنید $H(V, E)$ گرافی با $|V| = a$ راس و $|E| = b$ یال باشد. خانواده تمام زیرگراف های بکریخت با H را با نماد $\vartheta(n, H)$ نشان می دهیم.

تعریف ۳.۴.۶. [۱۴] خانواده $\vartheta(n, H)$ از گراف ها را اشتراک یالی یا به اختصار اشتراکی می نامیم، اگر هر دو عضو یک یال مشترک در K_n داشته باشند. هم چنین آن را اشتراک غیربدیهی نامیم، اگر اشتراک یال های اعضای تهی باشد.

قضیه ۴.۴.۶. [۱۵] برای هر عدد صحیح مثبت b یک عدد صحیح $\rho(b)$ موجود است که اگر ابرگراف F یک ابرگراف اشتراک غیربدیهی با اندازه حداکثر b باشد، اجتماع تمام اعضای ابرگراف را با نماد $\text{supp}(F)$ نشان می دهیم. در این صورت داریم:

$$|\text{supp} F| \leq \rho(b)$$

لم ۵.۴.۶. [۱۴] اگر $\vartheta(n, H)$ یک اشتراک غیربدیهی باشد، در این صورت رابطه $|\vartheta| \leq \gamma(H) n^{a-3}$ برای یک مقدار ثابت و مثبت $\gamma(H)$ وابسته به n برقرار است.

برهان. فرض کنید R مجموعه تمام یالهای گراف K_n باشد. ابرگراف b -یکنواخت F را روی رؤس مجموعه R در نظر بگیرید، که $f \in F$ اگر و فقط اگر $F \subset R$ مجموعه یال های یک گراف در ϱ باشند. بهوضوح F یک ابرگراف اشتراک غیربدهی است.

اکنون یک عملگر معین را روی ابرگراف F به کار می بریم و بعد از چند قدم به ابرگراف جدیدی می رسیم، که لزوماً یکنواخت نیست. اما اندازه این ابرگراف حداکثر b است. این ابرگراف را F_0 می نامیم. حال $F_0, \dots, F_i$ را تعریف می کنیم. ساختار F_{i+1} به صورت زیر است.

جفت (x, f) را که $x \in f$ و $f \in F_i$ در نظر بگیرید. که تمام ابرگرافهای F_i شامل $f - x$ است. حال عملگر اجتماع زیر را به کار می بریم.

$$F_{i+1} = (F_i - \{f\}) \cup \{f - \{x\}\} \quad (2.6)$$

توجه کنید که اگر $f - x \in F_i$ پس $|F_{i+1}| < F_i$. بهوضوح مشاهده می کنیم که اگر F_i یک اشتراک غیربدهی باشد، F_{i+1} نیز یک اشتراک غیربدهی است. ابرگراف نهایی را F_u می نامیم.

یک ابرگراف را بحرانی اشتراکی نامیم، اگر با هر بار به کار بردن (۲.۶) ابرگرافی غیربدهی بسازد. قضیه ۴.۴.۶ در مورد ابرگرافهای v بحرانی است، که v ماکزیمم تعداد جفت های مجزای ابرگراف است، که در قضیه ۴.۴.۶، v برابر یک است. با استفاده از قضیه مذکور برای F_u داریم: $|supp F_u| \leq \rho(b)$ بهوضوح F_u شامل تهی یا تک عضوی نیست (زیرا در غیر این صورت یک اشتراک غیربدهی است). بنابراین اعضای F_u زیرمجموعه های حداقل دو عضوی از مجموعه یال های $R \subset R$ با اندازه حداکثر $\rho(b)$ هستند. این خانواده دو یکنواخت را با نماد F^* نشان می دهیم. اگر $f \in F$ پس یک $f_u \subset F$ با $f_u \in F_u$ و $f^* \subset f_u$ که $f^* \in F^*$ وجود دارد. $F(f^*)$ را خانواده تمام اعضای F شامل f^* می نامیم. پس داریم $F = \bigcup_{f^* \in F^*} F(f^*)$ ، که ایجاب می کند:

$$|F| \leq \sum_{f^* \in F^*} |F(f^*)| \quad (3.6)$$

مجموع بالا دارای حداکثر $\binom{\rho(b)}{2}$ عضو است. دو عضو از یک f^* دو یال از K_n هستند. فرض کنید دو یال با هم اشتراک دارند و $\{x, y, z\}$ مجموعه رؤس این دو یال باشند.

اگر $f^* \subset f \in F$ پس اعضای f به عنوان یال های K_n یک کپی از گراف H تشکیل می دهند. دو یال مجاور در H برابر با عناصر f^* هستند. بنابراین راس های این کپی H برابر با x, y, z و $a - 3$ راس دیگر است، که

$$|F(f^*)| \leq v(H) \binom{n-3}{a-3} = \Omega(n^{a-3}) \quad \text{بنابراین:}$$

که $v(H)$ تعداد جفت های یال های مجاور در H است. حال اگر دو یال در f^* دارای راس های مجزا باشند، داریم:

$$|F(f^*)| \leq p(H) \binom{n-4}{a-4} = \Omega(n^{a-4}) \quad (4.6)$$

که $p(H)$ تعداد راس های مجزا از یال های در H است. (۶.۴.۶) و (۴.۶) ایجاب می کنند:

$$|F| \leq \binom{\rho(b)}{p} \Omega(n^{a-3})$$

□

چون $|F| = |Q|$ ، در نتیجه حکم برقرار است.

قضیه ۶.۴.۶ [۱۴] گراف n راسی G را در نظر بگیرید. اگر k فرد باشد، داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\chi(n, k)}{\binom{n}{p}} = \frac{1}{p}$$

برهان. کران بالای قضیه از گزاره نتیجه می شود. اگر تعداد یال ها از عدد توران $ex(n, c_k)$ بیشتر باشد، حتما یک کپی از c_k در گراف وجود دارد. یک رنگ آمیزی سره از $C(n, k)$ با مینیمم تعداد رنگ ها در نظر بگیرید. فرض کنید $S(n)$ نماد تعداد کلاس های رنگی باشد که یک بوک تشکیل می دهند و $r(n)$ نماد دیگر کلاس های رنگی باشد. فرض خلف کنید $S(n) \leq \left(\frac{1}{p} - \epsilon\right) \binom{n}{p}$ ، برای $\epsilon > 0$ برقرار باشد. فرض کنید G گرافی n راسی و اسپین ها به عنوان یال ها باشد. در این صورت $\bar{G}$ دارای $\binom{n}{p} - S(n)$ یال است. بنابراین تعداد یال های بیشتر از عدد توران برابر است با:

$$t(n) = \binom{n}{p} - ex(n, c_k) - S(n)$$

قضیه ۳.۲.۶ و نابرابری ۶.۴.۶ ایجاب می کند:

$$t(n) \geq \frac{\epsilon}{p} \binom{n}{p} \quad (5.6)$$

که n از یک مقدار ثابت $n(\epsilon)$ بزرگتر است. با استفاده از لم ۲.۴.۶ و نابرابری (۵.۶)، $\bar{G}$ شامل حداقل $\frac{\epsilon}{p} \binom{n}{p} n^{k-3} N$ کپی از c_k است. به عبارت دیگر G شامل این تعداد کپی c_k نیست. در نتیجه این کپی ها متعلق به هیچ بوکی نیستند، لذا متعلق به دیگر کلاس های رنگی است، با استفاده از لم ۵.۴.۶ اندازه شان حداکثر $\gamma(c_k) n^{k-3}$ است، بنابراین:

$$r(n) \geq \frac{\frac{\epsilon}{p} \binom{n}{p} n^{k-3} N}{\gamma_k n^{k-3}} = \frac{\epsilon}{p} \binom{n}{p} \frac{N}{\gamma_k}$$

با قرار دادن $N > \frac{\gamma_k}{\epsilon}$ داریم $r(n) > \binom{n}{p}$ ، این رابطه نشان می دهد که اگر رابطه ۶.۴.۶ برقرار باشد،

□

تعداد کلاس های رنگی بسیار بزرگ است، که به تناقض رسیدیم.

قضیه ۷.۴.۶ [۱۱] فرض کنید $k \geq 4$ زوج و $\epsilon > 0$ باشد. ثابت λ_k وجود دارد که تعداد کپی های c_k در یک گراف روی n راس و حداقل $\epsilon \binom{n}{p}$ یال، حداقل $\lambda_k \epsilon^k n^k$ برای $n \geq n(k, \epsilon)$ است.

قضیه ۸.۴.۶ [۱۴] گراف G با n راس را در نظر بگیرید. اگر $k \geq 4$ زوج باشد، داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\chi(n, k)}{\binom{n}{p}} = 1$$

برهان. یک رنگ آمیزی سره از $C(n, k)$ با مینیمم تعداد رنگ‌ها در نظر بگیرید. فرض کنید $S(n)$ نماد تعداد کلاس‌های رنگی که بوک تشکیل می‌دهند، باشد و $r(n)$ نماد دیگر کلاس‌های رنگی باشد. اگر رابطه $S(n) > (1 - \epsilon) \binom{n}{2}$ برای هر $\epsilon > 0$ و برای تمام $n > n(\epsilon)$ برقرار باشد، حکم برقرار است. بنابراین فرض می‌کنیم، $\epsilon > 0$ وجود دارد که رابطه $S(n) \leq (1 - \epsilon) \binom{n}{2}$ برای تعداد متناهی n برقرار است. فرض کنید G گرافی n راسی و اسپین‌ها به‌عنوان یال‌ها باشد. $\bar{G}$ دارای $S(n) - \binom{n}{2}$ یال است. قضیه ۷.۴.۶ ایجاب می‌کند $\bar{G}$ شامل حداقل $\lambda_k \epsilon^k n^k$ کپی از c_k برای n های فوق است. به عبارت دیگر G شامل این تعداد کپی c_k نیست. در نتیجه این کپی‌ها متعلق به هیچ بوکی نیستند. لذا متعلق به دیگر کلاس‌های رنگی هستند.

با استفاده از لم ۵.۴.۶ اندازه‌شان حداکثر $\gamma(c_k) n^{k-3} = \gamma_k n^{k-3}$ است. بنابراین داریم:

$$r(n) \geq \frac{\lambda_k \epsilon^k n^k}{\gamma_k n^{k-3}} = \frac{\lambda_k \epsilon^k}{\gamma_k} n^3$$

□ که ایجاب می‌کند $r(n) > \binom{n}{2}$. این با مینیمم رنگ آمیزی در تناقض است و حکم برقرار است.

مراجع

- [1] N. Alon and R. Yuster. *The turán number of sparse spanning graphs*. Combinatorial Theory, Series B 103, pages 337–343, 2013.
- [2] West B. *Introduction To Graph Theory*. 2002.
- [3] B. Bollobás. *Ket fuggelten kort nero tartalmazó grafokrol*. Mat. Lapok 14, pages 311–321, 1963.
- [4] B. Bollobás. *Extremal graph theory*. Academic Press, New York, 1978.
- [5] J.A Bondy and U.S.R. Murty. *Stable Sets and Cliques,Ramsey theorem*. *Graph Theory*, 2007.
- [6] R.D. Dutton and R.C. Brigham. *Department of mathematics technical report m-11, university of central florida, orlando, fl 32816*. American Math. Monthly, 1988.
- [7] R.D. Dutton and R.c. Brigham. *Edages in graphs with large girth*. *Graphs and Combinatorics*, pages 315–321, 1991.
- [8] T.E. Elsner. *Problem 6159*. American Math. Monthly, 1977.
- [9] P. Erdős. *On the number of complete subgraphs contained in certain graphs*. Magyar. Tud. Acad. Mat. Kut. Int. Közl. 7, pages 467–484, 1962.

- [10] P. Erdős and M. Simonovits. *A limit theorem in graph theory*. Studia Sci. Math. Hungar. 1, pages 51–57, 1966.
- [11] P. Erdős and M. Simonovits. Cube supersaturated graphs and related problems. in: J.A. Bondy, U.S.R. Murty (Eds.), *Progress in Graph Theory*, Acad. Press, Frankfurt, 1984.
- [12] P. Erdős and A.H. Stone. *On the structure of linear graphs*. Bull. Amer. Math. Soc.52, pages 1087–1091, 1946.
- [13] P. Erdos. *On a theorem of rademacher–turán*. Illinois J. Math. 6, pages 122–127, 1962.
- [14] G.O.H Katona and Z. Tuza. *Color the cycle*. Discrete Mathematics, pages 1–8, 2013.
- [15] L. Lovász. *On the minimax theorems of combinatorics*. L. Mat. Lapok (N.S.) 26, pages 209–264, 1975.
- [16] L. Lovász and M. Simonovits. *On the number of complete subgraphs of a graph*. II, in: Studies in PureMath., Birkhäuser, Basel, pages 459–495, 1983.
- [17] W. Mantel. *Problem 28,wiskunde opgaven*. pages 60–61, 1907.
- [18] D. Mubayi. *Color critical graphs*. Department of Mathematics, Statistics and Computer Science:2731–2740, 2010.
- [19] E.A. Nordhaus and B.M. Steward. *Triangles in an ordinary graph*. Canad. J. Math. 15, pages 33–41, 1963.

-
- [20] O. Ore. *Arc coverings of graphs*. Ann. Mat. Pura Appl. 55 (1), pages 315–321, 1961.
- [21] A.J. Schwenk. *Solution to problem 6159*. American Math. Monthly, pages 135–136, 1979.
- [22] A.J. Schwenk and M. Simonovits. *Solution to problem 6159*. American Math. Monthly, 135-136, pages 135–136, 1979.
- [23] M. Simonovits. *A method for solving extremal problems in graph theory*. stability problems, in: Theory of Graphs, Proc. Colloq, Tihany, Academic Press, New York, pages 279–319, 1966.
- [24] M. Simonovits. *A method for solving extremal problems in graph theory*. Theory of graphs, Academic Press:279–319, 1968.
- [25] J.H Van Lint and R.H. Wilson. *A course in combinatorics*. 1992.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

الف

<i>hypergraph</i>	ابرگراف
<i>proof</i>	اثبات
<i>possible</i>	احتمال
<i>espine</i>	اسپین
<i>partition</i>	افراز
<i>deviation</i>	انحراف
<i>cardinal</i>	اندازه

ب

<i>undirected</i>	بدون جهت
<i>trivial</i>	بدیهی
<i>mantion</i>	برقرار داشتن

ت

<i>iteration</i>	تکرار
<i>Monochrome</i>	تک‌رنگ
<i>contradict</i>	تناقض

ج

quadruplet..... چهارگانه

ح

at least..... حداقل

at most..... حداکثر

خ

automorphic..... خودریخت

د

odd cycles..... دورهای فرد

ر

vertex..... راس

respect..... رابطه

ز

subgraph..... زیرگراف

ص

satisfy..... صدق کردن

ع

operator..... عملگر

ف

suppose..... فرض کردن

ق

turan theorem..... قضیه توران

ramsey theorem..... قضیه رمزی

mantel theorem..... قضیه منتل

ک

lower bound کران پایین

colour classes کلاس‌های رنگی

girth graph کمرگراف

گ

graph گراف

external graph گراف‌های اکسترمال

critical graph گراف بحرانی

م

infty متناهی

variable متغیر

positive مثبت

triangle مثلث

adjacent مجاور

similar مشابه

ن

result نتیجه

relatively نسبتاً

graph theoretic نظریه گراف

ی

edge-intersection یال اشتراکی

isomorphic یکریخت

uniform یکنواخت

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

A

adjacent.....مجاور

asymptotic.....به‌طورمجانبی

automorphic.....خوددریخت

B

bijection.....پوشا

bipartit graph.....گراف دوبخشی

book.....بوک

C

clique.....خوشه

coloring.....رنگ‌آمیزی

color classes.....کلاس‌های رنگی

Color number.....عدد رنگی

conjecture.....گزاره

copy.....کپی

counter-example.....مثال نقض

critical graph.....گراف بحرانی

cycle.....دور

D

degree.....درجه

dependent.....وابسته

E

edge.....یال

edge-intersection.....یال اشتراکی

edge protector.....حافظ یال

espine.....اسپین

external graph.....گراف‌های اکسترمال

G

girth graph.....کمرگراف

graph theory.....نظریه گراف

H

hypergraph.....ابرگراف

I

independ.....مستقل

index.....اندیس

inequality chernoff.....نامساوی چرنف

infty.....متناهی

isolated.....تنها

isomorphic.....یکریخت

L

<i>link</i>	لینک
<i>lower bound</i>	کران پایین
<i>M</i>	
<i>mantel theorem</i>	قضیه منتل
<i>mapping</i>	نگاشت
<i>match</i>	منطبق شدن
<i>Monochrome</i>	تک‌رنگ
<i>O</i>	
<i>odd cycles</i>	دوره‌های فرد
<i>order pack</i>	هم‌بسته
<i>operator</i>	عملگر
<i>optimal</i>	بهینه
<i>P</i>	
<i>part</i>	بخش
<i>partition</i>	افراز
<i>potential copy</i>	پتانسیل کپی
<i>R</i>	
<i>ramsey theorem</i>	قضیه رمزی
<i>S</i>	
<i>separate</i>	مجزا
<i>spaning</i>	فراگیر
<i>strucrure</i>	ساختار
<i>subgraph</i>	زیرگراف

sufficiently..... به اندازه کافی

T

triangle..... مثلث

trivial..... بدیهی

turan theorem..... قضیه توران

U

undirected..... بدون جهت

uniform..... یکنواخت

unmatch..... منطبق نشده

upper bound..... کران بالا

V

vertex..... راس

vertex disjoint..... راس مجزا

Q

quadruplet..... چهارگانه

نمایه

د	ا
درجه، ۶	اسپین، ۳۶
دور، ۶	اشتراک غیربدیهی، ۳۹
ر	اشتراک یالی، ۳۹
رمزی، ۸	اشتراکی، ۳۶
ز	اشتراکی بدیهی، ۳۶
زیرگراف، ۵	پ
زیرگراف القایی، ۵	پتانسیل کمی، ۲۳
ع	ت
عدد توران، ۳۵	تطابق، ۹
عدد رنگی دوره‌های به‌طول k ، ۳۵	توران، ۷
ک	ج
کتاب، ۳۶	چندبخشی کامل، ۶
کمر، ۱۰	چهارگانه، ۳۶
گ	خ
گذر، ۶	خودریختی، ۶
گراف، ۵	خوشه، ۵

گراف بحرانی، ۱۸

گراف توران $T_r(n)$ ، ۱۸

گراف کامل، ۵

گشت، ۶

م

مثلث، ۶

مستقل، ۵

منتظم، ۶

متیل، ۷

ه

هم‌بسته، ۲۷

ی

یال اشتراکی، ۳۶

یکریختی، ۵

Surname: parizad alvar

Name: Parvaneh

Title: Coloring Subgraphs Of Graph

Supervisor: dr. Meysam Alishahi

Degree: Master of Science

Subject: Applied Mathematics

Field: Graph and Combinatorics

Technology University of Shahrood

Faculty Of Mathematical Sciences

Date: June 2014

Number of pages: 56

Keywords: Coloring of graph, Subgraph of graph, Turan theorem, Turan number

Abstract

A Turan number of a given graph H with n vertices, $ex(n, H)$ is the maximum number of edges in a spanning subgraph of K_n which has no subgraph isomorphic to H .

In this thesis, we study some generalization of Turan's number, in particular, we set H to be some spanning subgraphs of K_n or a cycle with fixed length.

For a graph G , and a subgraph H of it, we define a graph with the vertices set consisting of all subgraphs of G isomorphic to H . Two vertices are adjacent in this graph whenever these two vertices have no edges in common.

We will study the chromatic number of this graph for some fixed subgraph H , in particular, we consider to H be a cycle or a complete graph.



*Technology University of Shahrood
Faculty Of Mathematical Sciences*

*Dissertation Submitted in Partial
Fulfillment of The Requirements For The
Degree of Master of Science in
Applied Mathematics*

Coloring Subgraphs Of Graph

Supervisor

dr. Meysam Alishahi

by

Parvaneh parizad alvar

June 2014