



دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی کاربردی

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی کاربردی، گرایش گراف و ترکیبیات

عنوان

گراف فازی و برخی از کاربردهای آن

استاد راهنما

دکتر صادق رحیمی شعرباف

دانشجو

زهرة فدائی

بهمن ۹۲

به امید درک رازهای پنهانی قصیده‌ی آسمانی عشق
این پایان نامه را که ذره‌ای از تلاش آدمی
برای ورود به گوشه‌ای از منظومه‌ی پررنگ و راز، هستی است را
به پیشگاه پاک اسطوره‌های صبر و وفاداری
که در عرصه‌ی زندگی ناملایمات، تلخی‌ها و سختی‌ها را بارها و بارها،
برای پیشرفت‌های بیشترین حقیر،
به جان خریدند،

پدر و مادر مهربانم

تقدیم می‌کنم.

سپاس‌گزاری

سپاس مخصوص خداوندی است که بر من مقدر کرد آن چه را که شاید برای دیگری مقدر نکرده، مرا انتخاب کرد تا در این جایگاه، افتخار علم اندوزی داشته باشم که آن خود سعادت می‌خواهد. بارالها، خاشعانه بر درگاهت کرنش می‌کنم که بر من رقم زدی آن میزان توانایی را تا بتوانم در دیای بیکران معرفت غور کنم. باشد که به تو نزدیک تر شوم. تکریم و تعزز فراوان محضر استاد برجندم جناب آقای دکتر صادق رحیمی شهرباف، سپاس اندیشه‌ی تابناکتان که مرا سیم کردید در شناخت آن چه خود از نشانه‌های الویت و عظمت خداوند مهربان درک کرده‌اید و این مباحثی است که نصیب هر کس نمی‌شود. پدران قدم برداشتن در دیای ریاضیات را بر من آموختید. زبانم قاصر است و کلامم الکن تا سپاسی در خور تقدیرتان دارم. خدا را برایتان آرزو دارم.

در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس شان را که مشوقم بودند از کودکی تا بیا بهم تقرب به خداوند را با علم آموزی. امیدوارم با تقریر این مکتوب موجبات خوشنودی شان را مهیا کرده باشم. خاک پای تمامی کسانی که در این موفقیت همراه و یاری گرم بوده اند را طوطیای چشمانم می‌کنم. باشد که موبهستان را هیچ‌گاه از یاد نبرم.

تعمدنامه

اینجانب زهره فدائی دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی دانشکده علوم ریاضی دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان گراف فازی و برخی از کاربردهای آن، تحت راهنمایی دکتر صادق رحیمی شعرباف متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تاکنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه شاهرود “ یا “ Shahrood University “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

زهره فدائی
بهمن ۹۲

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در این پایان نامه موضوع گراف‌های فازی و برخی از کاربردهای آن مورد مطالعه قرار گرفته است. در این رابطه مباحث مربوط به گراف‌های قطعی به گراف‌های فازی تعمیم داده شده است. فصل اول، مربوط به تاریخچه‌ی موضوع و بیان تعاریف اساسی گراف‌های فازی می‌باشد. در فصل دوم، اعمال روی گراف‌های فازی شامل: اجتماع، اتصال، حاصل ضرب دکارتی، ترکیب، حاصل ضرب نرمال و حاصل ضرب ترانسفوری آورده شده است. فصل سوم موضوع یکرختی مورد بررسی قرار گرفته است. گراف‌های فازی منتظم و گراف‌های فازی کلاً منتظم موضوع فصل چهارم این پایان نامه می‌باشد. در فصل پنجم موضوع گراف‌های مسطح فازی مطرح و فرمول اویلر در گراف‌های فازی تعمیم داده شده است. فصل ششم کاربردهایی از گراف فازی شامل موضوعات، مقادیر ویژه و انرژی در گراف فازی، رنگ آمیزی گراف‌های فازی و مفهوم احاطه‌گری در گراف‌های فازی می‌باشد.

کلمات کلیدی: گراف فازی، اعمال روی گراف‌های فازی، یکرختی، گراف فازی منتظم، گراف مسطح فازی.

فهرست مطالب

ح	لیست تصاویر
۳	۱ تاریخچه و تعاریف
۳	۱.۱ مجموعه‌ی فازی
۸	۲.۱ گراف فازی
۱۷	۲ اعمال روی گراف‌های فازی
۱۷	۱.۲ اجتماع دو گراف فازی
۱۸	۱.۱.۲ درجه‌ی یک راس در اجتماع دو گراف فازی
۲۰	۲.۲ اتصال دو گراف فازی
۲۱	۱.۲.۲ درجه‌ی یک راس در اتصال دو گراف فازی
۲۴	۳.۲ حاصل ضرب دکارتی دو گراف فازی
۲۵	۱.۳.۲ درجه‌ی یک راس در حاصل ضرب دکارتی دو گراف فازی
۲۸	۴.۲ ترکیب دو گراف فازی
۲۹	۱.۴.۲ درجه‌ی یک راس در ترکیب دو گراف فازی
۳۲	۵.۲ حاصل ضرب نرمال دو گراف فازی
۳۳	۱.۵.۲ درجه‌ی یک راس در حاصل ضرب نرمال دو گراف فازی
۳۴	۶.۲ حاصل ضرب ترانسفوری دو گراف فازی
۳۵	۱.۶.۲ درجه‌ی یک راس در حاصل ضرب ترانسفوری دو گراف فازی
۳۷	۳ یکریختی روی گراف‌های فازی
۳۷	۱.۳ ویژگی‌های اساسی یکریختی
۴۶	۲.۳ گراف‌های یکریخت و متمم‌های آن‌ها
۵۲	۳.۳ گراف‌های فازی خود متمم
۵۳	۴.۳ گراف‌های فازی خود متمم ضعیف

۵۷	۴	گراف‌های فازی منتظم
۵۷	۱.۴	مقدمه
۵۷	۲.۴	گراف‌های فازی منتظم و کلاً منتظم
۶۲	۳.۴	یک ویژگی از گراف‌های فازی منتظم روی یک دور
۶۴	۴.۴	ویژگی‌هایی از گراف‌های فازی منتظم
۶۹	۵	گراف‌های سطح فازی
۶۹	۱.۵	مقدمه
۷۰	۲.۵	تعاریف
۷۳	۱.۲.۵	گراف دوگان فازی
۷۴	۳.۵	قضایای مربوط به فرمول اویلر
۷۹	۶	کاربردهای گراف فازی
۷۹	۱.۶	مقادیر ویژه و انرژی در گراف فازی
۸۱	۲.۶	رنگ آمیزی گراف‌های فازی
۸۱	۱.۲.۶	رنگ آمیزی گراف قطعی
۸۲	۲.۲.۶	رنگ آمیزی گراف فازی
۸۳	۳.۶	مفهوم احاطه‌گری در گراف‌های فازی
۸۶		مراجع
۸۸		واژه‌نامه فارسی به انگلیسی
۹۱		واژه‌نامه انگلیسی به فارسی
۹۴		نمایه

لیست تصاویر

۹		گراف فازی $(\sigma, \mu) : \tilde{G}$ و گراف زمینه‌ی آن $G^* : (V, E)$	۱.۱
۱۱		زیرگراف فازی جزئی از گراف فازی $(\sigma, \mu) : \tilde{G}$	۲.۱
۱۱		گراف $(\sigma^t, \mu^t) : G^t$ که $t = ۰, ۵$ می باشد	۳.۱
۱۲		زیرگراف فازی القا شده توسط P	۴.۱
۱۲		زیرگراف فازی جزئی القا شده توسط τ	۵.۱
۱۳		زیرگراف فراگیر فازی جزئی از گراف فازی $(\sigma, \mu) : \tilde{G}$	۶.۱
۱۴		زیرگراف فراگیر فازی از گراف فازی $(\sigma, \mu) : \tilde{G}$	۷.۱
۱۵		گراف فازی قوی $\tilde{G}$ و گراف فازی کامل $\tilde{G}'$	۸.۱
۲۰		اجتماع $\tilde{G}_1$ و $\tilde{G}_2$ $(\tilde{G}_1 \cup \tilde{G}_2)$	۱.۲
۲۳		اتصال $\tilde{G}_1$ و $\tilde{G}_2$ $(\tilde{G}_1 + \tilde{G}_2)$	۲.۲
۲۶		حاصل ضرب دکارتی $\tilde{G}_1$ و $\tilde{G}_2$ $(\tilde{G}_1 \times \tilde{G}_2)$	۳.۲
۲۸		حاصل ضرب دکارتی $\tilde{G}_1$ و $\tilde{G}_2$ $(\tilde{G}_1 \times \tilde{G}_2)$	۴.۲
۳۰		ترکیب $\tilde{G}_1$ و $\tilde{G}_2$ $(\tilde{G}_1[\tilde{G}_2])$	۵.۲
۳۲		ترکیب $\tilde{G}_1$ و $\tilde{G}_2$ $(\tilde{G}_1[\tilde{G}_2])$	۶.۲
۳۴		حاصل ضرب نرمال از $\tilde{G}_1$ و $\tilde{G}_2$ $(\tilde{G}_1 \circ \tilde{G}_2)$	۷.۲
۳۶		حاصل ضرب ترانسفوری $\tilde{G}_1$ و $\tilde{G}_2$ $(\tilde{G}_1 \otimes \tilde{G}_2)$	۸.۲
۳۸		یکریختی ضعیف	۱.۳
۳۹		یکریختی هم-ضعیف	۲.۳
۴۱		گراف‌هایی با مرتبه و اندازه‌ی یکسان اما غیر یکریخت	۳.۳
۴۱		گراف‌هایی با مرتبه‌ی یکسان، اما یکریخت ضعیف نیستند	۴.۳
۴۲		گراف‌های فازی با اندازه‌ی یکسان اما یکریخت هم-ضعیف نیستند	۵.۳
۴۳		گراف‌های فازی نگهدارنده‌ی درجه‌ی رئوس	۶.۳
۴۹		گراف‌های فازی $\tilde{G}$ و متمم آن $\bar{\tilde{G}}$	۷.۳
۴۹		گراف‌های فازی $\tilde{G}'$ و متمم آن $\bar{\tilde{G}'}$	۸.۳

۵۲		۹.۳	گراف فازی $\tilde{G}$ و گراف خطی فازی آن $L(\tilde{G})$
۵۲		۱۰.۳	گراف فازی خودمتمم
۵۳		۱۱.۳	گراف فازی که خودمتمم فازی نیست
۵۳		۱۲.۳	گراف فازی خودمتمم ضعیف
۷۰		۱.۵	گراف مسطح
۷۱		۲.۵	گراف دوگان G^*
۷۲		۳.۵	گراف مسطح فازی
۷۲		۴.۵	گراف فازی $\tilde{G}_0/4$
۷۵		۵.۵	گراف فازی $\tilde{G}$ و گراف دوگان فازی آن $\tilde{G}^*$
۷۵		۶.۵	گراف مسطح همبند
۸۱		۱.۶	گراف فازی $\tilde{G}$
۸۴		۲.۶	گراف فازی $\tilde{G}$

فصل ۱

تاریخچه و تعاریف

اولین تعریف از گراف فازی توسط کافمن^۱ [۹] در سال ۱۹۷۷ پیشنهاد شد، که مبتنی بر روابط فازی بیان شده توسط لطفی زاده^۲ (۱۹۷۵) بود [۱۴]، هم‌چنین رزنفلد^۳ [۱۳] (۱۹۷۶) تعاریف‌هایی شامل رئوس فازی و یال‌های فازی را بیان کرده بود. از آن پس در بسیاری از کتاب‌ها و مقالات در مورد گراف‌های فازی بحث شد و بدین گونه گراف‌ها به عنوان یکی از پرکاربردترین ابزار حل مسایل بهبود یافت و بسیاری از مسایل بهینه‌سازی توسط گراف‌های فازی مورد مطالعه قرار گرفت. چون در تعریف گراف فازی، از مفهوم مجموعه‌ها و روابط فازی استفاده می‌شود، در این فصل ابتدا مفاهیم مجموعه‌های فازی و خواص آن‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۱.۱ مجموعه‌ی فازی

هر مجموعه، یک صفت مشخص‌کننده به خود را دارد. معیار عضویت عناصر در مجموعه، صفت مشخص‌کننده مجموعه است و هر عنصر اگر دارای آن صفت باشد، عضو مجموعه و در غیر این صورت خارج از مجموعه است. این معیار عضویت را تابع عضویت^۴ می‌نامیم و اگر مجموعه مورد نظر را با A نمایش دهیم، آنگاه تابع عضویت مجموعه‌ی A را با $\mu_A(x)$ نشان می‌دهیم، که در صورت تعلق x به مجموعه‌ی A این مقدار ۱ و در غیر این صورت ۰ است. در منطق قطعی ارزش هر گزاره می‌تواند درست یا نادرست باشد که رایانه آن را با یک و صفر نمایش می‌دهد.

مجموعه‌ی فازی A روی مجموعه‌ی X ، مجموعه‌ای از زوج مرتب به صورت $\{(x, \mu_A(x)) \mid x \in X\}$ است، که X مجموعه‌ی مرجع و ناتهی است و $\mu_A : X \rightarrow [0, 1]$ تابع عضویت است، که درجه‌ی تعلق x به مجموعه‌ی فازی A می‌باشد.

^۱Kaufman

^۲Lotfi Zade

^۳Rosenfeld

^۴membership function

در تئوری فازی به طور کلاسیک مجموعه‌ی سطح شدت I به صورت بازه‌ی $[0, 1]$ تعریف می‌شود، به طوری که $\mu_A(x) = 0$ نشان دهنده‌ی عدم تعلق x به A است و $\mu_A(x) = 1$ نشان دهنده‌ی تعلق اکید x به A است و هر مقدار میانه با یک درجه‌ی عضویت به A متعلق است، به هر حال مجموعه‌ی I می‌تواند یک مجموعه‌ی گسسته به صورت $I = \{0, 1, \dots, k\}$ متشکل از k صفت بیانی باشد. عبارت $\mu_A(x) < \mu_A(x')$ نشان می‌دهد درجه‌ی عضویت x به A از درجه‌ی عضویت x' به A کمتر است. به طور کلی مجموعه‌ی I می‌تواند هر مجموعه‌ی مرتب نه لزوماً عددی باشد. برای مثال I می‌تواند به صورت $\{\text{پوچ، ضعیف، متوسط، قوی، کلی}\}$ یا به طور معادل $I = \{t, h, m, l, n\}$ باشد [۱۵].

مطالب زیر از مرجع [۱۰] آورده شده است.

تعریف ۱.۱.۱. مجموعه‌ی فازی A که روی مجموعه‌ی مرجع X تعریف شده است، خانواده‌ی α -برش^۵ آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A_\alpha = \{x \in X \mid \mu_A(x) \geq \alpha\}.$$

تعریف ۲.۱.۱. یک زیرمجموعه‌ی فازی^۶ از یک مجموعه‌ی V ، یک نگاشت $\sigma : V \rightarrow [0, 1]$ است، که تابع عضویت نامیده می‌شود.

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنید σ یک زیرمجموعه‌ی فازی از مجموعه‌ی V باشد. آنگاه مجموعه‌ی

$$\sigma^t = \{x \in V : \sigma(x) \geq t\} \quad \forall t \in [0, 1]$$

مجموعه‌ی t -سطح^۷ نامیده می‌شود و مجموعه‌ی

$$\sigma^* = \{x \in V : \sigma(x) > 0\}$$

محمل از σ ^۸ نامیده می‌شود. مجموعه‌های σ^t و σ^* مجموعه‌های قطعی هستند.

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنید σ و τ دو زیرمجموعه‌ی فازی از مجموعه‌ی V باشند. آنگاه:

۱. اگر $\sigma \subseteq \tau$ ، اگر به ازای هر $x \in V$ رابطه‌ی $\sigma(x) \leq \tau(x)$ برقرار باشد.

۲. اگر به ازای هر $x \in V$ رابطه‌ی $\sigma(x) \leq \tau(x)$ برقرار باشد و حداقل یک $x \in V$ وجود داشته باشد، به طوری که $\sigma(x) < \tau(x)$ باشد.

۳. اگر به ازای هر $x \in V$ رابطه‌ی $\sigma(x) = \tau(x)$ برقرار باشد.

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنید σ و τ دو زیرمجموعه‌ی فازی از V باشند. آنگاه $\sigma \cup \tau$ زیرمجموعه‌ی فازی از V می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(\sigma \cup \tau)(x) = \sigma(x) \vee \tau(x) \quad \forall x \in V$$

^۵ α -cut

^۶fuzzy subset

^۷t-level

^۸support of σ

و $\sigma \cap \tau$ زیرمجموعه‌ی فازی از V می‌باشد، که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(\sigma \cap \tau)(x) = \sigma(x) \wedge \tau(x) \quad \forall x \in V.$$

$\vee$ عملگر ماکزیمم و $\wedge$ عملگر مینیمم است.

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنید σ یک زیرمجموعه‌ی فازی از V باشد. آنگاه σ^c زیرمجموعه‌ی فازی از V می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sigma^c(x) = 1 - \sigma(x) \quad \forall x \in V.$$

تعریف ۷.۱.۱. فرض کنید A یک زیرمجموعه‌ی فازی از V باشد. تابع مشخصه از زیرمجموعه‌ی فازی A در V که توسط تابع $\chi_A : V \rightarrow [0, 1]$ نشان داده می‌شود، را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } x \in A \\ 0 & \text{اگر } x \in V \setminus A \end{cases}$$

حال

$$\chi_\emptyset(x) = 0, \quad \chi_V(x) = 1 \quad \forall x \in V.$$

فرض کنید σ, τ و ξ زیرمجموعه‌های فازی از V باشند. آنگاه ویژگی‌های زیر برقرارند:

$$\sigma \cup \tau = \tau \cup \sigma, \quad \sigma \cap \tau = \tau \cap \sigma, \quad \sigma \cup \chi_\emptyset = \sigma, \quad \sigma \cap \chi_\emptyset = \chi_\emptyset,$$

$$\sigma \cup \chi_V = \chi_V, \quad \sigma \cap \chi_V = \sigma, \quad \sigma \cup \sigma = \sigma, \quad \sigma \cap \sigma = \sigma,$$

$$\sigma \cup (\tau \cup \xi) = (\sigma \cup \tau) \cup \xi, \quad \sigma \cap (\tau \cap \xi) = (\sigma \cap \tau) \cap \xi,$$

$$\sigma \cap (\tau \cup \xi) = (\sigma \cap \tau) \cup (\sigma \cap \xi), \quad \sigma \cup (\tau \cap \xi) = (\sigma \cup \tau) \cap (\sigma \cup \xi),$$

$$(\sigma \cup \tau)^c = \sigma^c \cap \tau^c, \quad (\sigma \cap \tau)^c = \sigma^c \cup \tau^c, \quad (\sigma^c)^c = \sigma.$$

تعریف ۸.۱.۱. فرض کنید S و V دو مجموعه و σ و τ به ترتیب زیرمجموعه‌های فازی از V و S باشند، آنگاه یک رابطه‌ی فازی μ^9 از زیرمجموعه‌ی فازی σ به زیرمجموعه‌ی فازی τ ، یک زیرمجموعه‌ی فازی μ از $V \times S$ می‌باشد، به طوری که:

$$\mu(x, y) \leq \sigma(x) \wedge \tau(y) \quad \forall x \in V, y \in S.$$

شرط

$$\mu(x, y) \leq \sigma(x) \wedge \tau(y), \quad \forall x \in V \text{ و } y \in S$$

این امکان را می‌دهد که به ازای هر $t \in [0, 1]$ یک رابطه از σ^t به τ^t و μ^* یک رابطه از σ^* به τ^* باشند.

⁹fuzzy relation

تعریف ۹.۱.۱. فرض کنید $\mu : V \times S \rightarrow [0, 1]$ یک رابطه‌ی فازی از یک زیرمجموعه‌ی فازی σ از V به یک زیرمجموعه‌ی فازی τ از S و $\nu : S \times T \rightarrow [0, 1]$ یک رابطه‌ی فازی از یک زیرمجموعه‌ی فازی τ از S به یک زیرمجموعه‌ی فازی ξ از T باشد. آنگاه $\mu \circ \nu : V \times T \rightarrow [0, 1]$ تعریف شده توسط:

$$\mu \circ \nu(x, z) = \vee \{ \mu(x, y) \wedge \nu(y, z) : y \in S \} \quad \forall x \in V, z \in T,$$

ترکیب μ با ν نامیده می‌شود.

نکته ۱۰.۱.۱. با توجه به μ, σ, τ, ν و ξ تعریف شده در تعریف (۹.۱.۱)، آنگاه $\mu \circ \nu$ یک رابطه‌ی فازی از σ به ξ می‌باشد.

در ادامه‌ی مبحث μ و ν را روابط فازی روی یک زیرمجموعه‌ی فازی σ از V در نظر می‌گیریم. این مساله برای نمایش یک رابطه‌ی فازی به شکل یک ماتریس، امری کاملاً طبیعی است. عمل ترکیب مشخص می‌سازد که $\mu \circ \nu$ همانند ضرب ماتریس می‌تواند محاسبه شود، که عمل جمع توسط $\vee$ و عمل ضرب توسط $\wedge$ جایگزین می‌شوند. و از آنجایی که عمل ترکیب شرکت‌پذیر است، می‌توان μ^2 را با $\mu \circ \mu$ و μ^k را با $\mu^{k-1} \circ \mu$ ، $k > 1$ نسبت داد.

تعریف ۱۱.۱.۱.

$$\mu^\infty(x, y) = \vee \{ \mu^k(x, y) : k = 1, 2, 3, \dots \}, \quad \forall x, y \in V.$$

حال با توجه به تعریف، $\mu^\circ(x, y)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mu^\circ(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{اگر } x \neq y \\ \sigma(x) & \forall x, y \in V. \end{cases}$$

تعریف ۱۲.۱.۱. فرض کنید μ یک رابطه‌ی فازی روی σ باشد. آنگاه μ یک رابطه‌ی انعکاسی^{۱۰} نامیده می‌شود، اگر

$$\mu(x, x) = \sigma(x) \quad \forall x \in V.$$

اگر μ یک رابطه‌ی انعکاسی باشد، آنگاه عبارات زیر نتیجه می‌شود:

$$\mu(x, y) \leq \mu(x, x) \text{ و } \mu(y, x) \leq \mu(x, x) \quad \forall x, y \in V.$$

قضیه ۱۳.۱.۱. فرض کنید μ و ν روابط فازی روی یک زیرمجموعه‌ی فازی σ از V باشند. آنگاه ویژگی‌های زیر برقرارند.

۱. اگر μ یک رابطه‌ی انعکاسی باشد، آنگاه

$$\nu \subseteq \nu \circ \mu \quad \text{و} \quad \nu \subseteq \mu \circ \nu.$$

^{۱۰} reflexive relation

۲. اگر μ یک رابطه‌ی انعکاسی باشد، آنگاه $\mu \subseteq \mu^2$.

۳. اگر μ یک رابطه‌ی انعکاسی باشد، آنگاه
 $\mu^\circ \subseteq \mu \subseteq \mu^2 \subseteq \mu^3 \subseteq \dots \subseteq \mu^\infty$.

۴. اگر μ یک رابطه‌ی انعکاسی باشد، آنگاه
 $\mu^\circ(x, x) = \mu(x, x) = \mu^2(x, x) = \dots = \mu^\infty(x, x) = \sigma(x) \quad \forall x \in V$.

۵. اگر μ و ν روابط انعکاسی باشند، بنابراین $\mu \circ \nu$ و $\nu \circ \mu$ نیز روابط انعکاسی هستند.

۶. اگر μ یک رابطه‌ی انعکاسی باشد، آنگاه μ^t نیز به ازای هر $t \in [0, 1]$ ، یک رابطه‌ی انعکاسی روی σ^t می‌باشد.

تعریف ۱۴.۱.۱. فرض کنید μ یک رابطه‌ی فازی روی σ باشد. آنگاه μ یک رابطه‌ی متقارن^{۱۱} نامیده می‌شود، اگر:

$$\mu(x, y) = \mu(y, x) \quad \forall x, y \in V.$$

قضیه ۱۵.۱.۱. فرض کنید μ و ν روابط فازی روی یک زیرمجموعه‌ی فازی σ از V باشند. آنگاه ویژگی‌های زیر برقرارند.

۱. اگر μ و ν روابط متقارن باشند، آنگاه $\mu \circ \nu$ یک رابطه‌ی متقارن است، اگر و فقط اگر:
 $\mu \circ \nu = \nu \circ \mu$.

۲. اگر μ یک رابطه‌ی متقارن باشد، آنگاه هر توانی از μ نیز یک رابطه‌ی متقارن است.

۳. اگر μ یک رابطه‌ی متقارن باشد، آنگاه μ^t نیز به ازای هر $t \in [0, 1]$ ، یک رابطه‌ی متقارن روی σ^t می‌باشد.

تعریف ۱۶.۱.۱. فرض کنید μ یک رابطه‌ی فازی روی σ باشد. آنگاه μ یک رابطه‌ی متعدی^{۱۲} نامیده می‌شود، اگر $\mu \subseteq \mu^2$ باشد.

از تعریف (۱۶.۱.۱)، نتیجه می‌شود که μ^∞ به ازای هر رابطه‌ی فازی μ ، یک رابطه‌ی متعدی است. عبارات زیر برخی از ویژگی‌های یک رابطه‌ی فازی متعدی است.

قضیه ۱۷.۱.۱. فرض کنید μ ، ν و π روابط فازی روی یک زیرمجموعه‌ی فازی σ از V باشند. آنگاه ویژگی‌های زیر برقرارند.

۱. اگر μ یک رابطه‌ی متعدی باشد، و $\mu \subseteq \pi$ و $\nu \subseteq \mu$ ، آنگاه $\pi \circ \nu \subseteq \mu$.

^{۱۱}symmetric relation

^{۱۲}transitive relation

۲. اگر μ یک رابطه‌ی متعدی باشد، آنگاه هر توانی از μ نیز یک رابطه‌ی متعدی است.
۳. اگر μ یک رابطه‌ی متعدی، ν یک رابطه‌ی انعکاسی و $\nu \subseteq \mu$ ، آنگاه $\mu \circ \nu = \nu \circ \mu = \mu$.
۴. اگر μ یک رابطه‌ی انعکاسی و متعدی باشد، آنگاه $\mu^2 = \mu$.
۵. اگر μ یک رابطه‌ی انعکاسی و متعدی باشد، آنگاه $\mu^\circ \subseteq \mu = \mu^2 = \mu^3 = \dots = \mu^\infty$.
۶. اگر μ و ν روابط متعدی باشند و $\mu \circ \nu = \nu \circ \mu$ ، آنگاه $\mu \circ \nu$ متعدی است.
۷. اگر μ یک رابطه‌ی متقارن و متعدی باشد، آنگاه $\mu(x, y) \leq \mu(x, x)$ و $\mu(y, x) \leq \mu(x, x) \quad \forall x, y \in V$.
۸. اگر μ یک رابطه‌ی متعدی باشد، آنگاه μ^t یک رابطه‌ی متعدی روی σ^t ، به ازای هر $t \in [0, 1]$ می‌باشد.
- تعریف ۱۸.۱.۱. یک رابطه‌ی فازی روی V ، که یک رابطه‌ی انعکاسی، متقارن و متعدی باشد، را یک رابطه‌ی هم ارزی^{۱۳} روی V می‌نامیم.
- تعریف ۱۹.۱.۱. فرض کنید μ یک رابطه‌ی فازی روی σ باشد. آنگاه μ یک رابطه‌ی پادتقارنی^{۱۴} نامیده می‌شود، اگر:
- $$\mu(x, y) \neq \mu(y, x) \quad \forall x, y \in V.$$
- تعریف ۲۰.۱.۱. یک رابطه‌ی فازی روی V ، که یک رابطه‌ی انعکاسی، پادتقارنی و متعدی باشد، را یک رابطه‌ی جزئاً مرتب^{۱۵} روی V می‌نامیم.

۲.۱ گراف فازی

گراف‌ها مدل‌های ساده‌ای از روابط هستند. یک گراف یک روش مناسب از نمایندگی اطلاعات مربوط به رابطه‌ی بین اشیا می‌باشد. اشیا توسط رئوس و روابط بین آن‌ها، توسط یال‌ها نمایش داده می‌شود. هنگامی که در شرح اشیا یا روابط بین آن‌ها یا در هر دو مورد، عدم قطعیت و ابهام وجود داشته باشد، نیاز به طراحی مدل گراف فازی می‌باشد.

^{۱۳}equivalence relation

^{۱۴}antisymmetric relation

^{۱۵}partial order relation)

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید V یک مجموعه‌ی غیرتهی باشد. یک گراف فازی^{۱۶} یک جفت از توابع $\tilde{G}(\sigma, \mu)$ می‌باشد، که σ یک زیرمجموعه‌ی فازی از V و μ یک رابطه‌ی فازی متقارن روی σ می‌باشد. به عبارت دیگر،

$$\sigma : V \rightarrow [0, 1] \quad \text{و} \quad \mu : V \times V \rightarrow [0, 1]$$

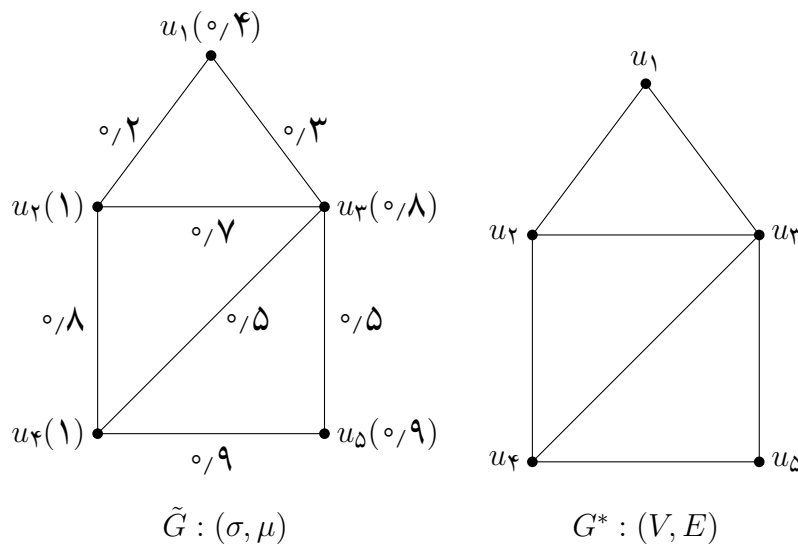
به طوری که

$$\mu(u, v) \leq \sigma(u) \wedge \sigma(v) \quad \forall u, v \in V.$$

گراف (قطعی) زمینه‌ی گراف فازی $\tilde{G} : (\sigma, \mu)$ را با $G^* : (V, E)$ نمایش می‌دهیم، که σ^* به مجموعه‌ی (غیرتهی) V از رئوس اشاره می‌کند و $\mu^* = E \subseteq V \times V$ می‌باشد. توجه کنید که گراف قطعی (V, E) یک نوع خاص از گراف فازی با هر راس و هر یال از (V, E) می‌باشد، به طوری که درجه‌ی عضویت هر راس و هر یال از گراف، یک می‌باشد. همچنین نیازی نیست حلقه‌ها را در گراف در نظر بگیریم، و فرض می‌کنیم که μ یک رابطه‌ی انعکاسی است و مجموعه‌ی زمینه‌ی V متناهی در نظر گرفته می‌شود.

در این پایان نامه به ازای هر جفت از رئوس u و v از گراف فازی، یال فازی (u, v) را به صورت (uv) نمایش می‌دهیم.

مثال ۲.۲.۱. گراف فازی $\tilde{G} : (\sigma, \mu)$ و گراف زمینه‌ی آن $G^* : (V, E)$ در شکل (۱.۱) آورده شده است.



شکل ۱.۱: گراف فازی $\tilde{G} : (\sigma, \mu)$ و گراف زمینه‌ی آن $G^* : (V, E)$

انواع گراف فازی به صورت زیر است:

^{۱۶}fuzzy graph

- یک نوع از گراف فازی به این صورت است که مجموعه رئوس آن قطعی و مجموعه یال‌های آن فازی باشد. نمایش این گراف به صورت $\tilde{G} = (V, \tilde{E})$ است، به طوری که V مجموعه رئوس قطعی و $\tilde{E}$ مجموعه یال‌های فازی است که به وسیله ماتریس $\mu = (\mu_{ij})_{i,j \in V}$ مشخص می‌شود:

$$\mu_{ij} = \mu_{\tilde{E}}(ij) \quad \forall i, j \in V \quad i \neq j$$

$\mu_{\tilde{E}} : V \times V \rightarrow I$ یک تابع عضویت یال‌های فازی گراف است، هر عضو $\mu_{ij} \in I$ سطح شدت یال $\{i, j\}$ به ازای هر $i, j \in V$ را نشان می‌دهند. در این گراف‌ها شدت رئوس قطعی، صفر یا یک است و ارزش همه‌ی رئوس یکسان است و سطح شدت تعلق یال‌ها به رئوس از داخل مجموعه سطح شدت I است.

- نوع دیگری از گراف فازی که در آن مجموعه رئوس و مجموعه یال‌ها هر دو فازی هستند، به صورت $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$ نمایش می‌دهیم، به طوری که $\tilde{V}$ مجموعه رئوس فازی و $\tilde{E}$ مجموعه یال‌های فازی است، که ماتریس آن بیان شد، مجموعه رئوس فازی $\tilde{V}$ به وسیله ماتریس $\sigma_i = (\sigma_i)_{i \in V}$ مشخص می‌شود:

$$\sigma_i = \sigma_{\tilde{V}}(i) \quad \forall i \in V$$

$\sigma_{\tilde{V}} : V \rightarrow I$ تابع عضویت رئوس فازی گراف است. هر عضو σ_i نشان دهنده‌ی سطح شدت راس $i \in V$ است، این نوع گراف فازی را به صورت $\tilde{G} = (\sigma, \mu)$ هم نشان می‌دهند. که در تمامی فصل‌ها گراف فازی را به صورت $\tilde{G} : (\sigma, \mu)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۳.۲.۱. گراف فازی $\tilde{H}(\tau, \nu)$ یک زیرگراف فازی جزئی^{۱۷} از $\tilde{G} : (\sigma, \mu)$ نامیده می‌شود، اگر $\tau \subseteq \sigma$ و $\nu \subseteq \mu$ باشد.

مثال ۴.۲.۱. زیرگراف فازی جزئی از گراف فازی $\tilde{G} : (\sigma, \mu)$ در مثال (۲.۲.۱)، در شکل (۲.۱) آورده شده است.

تعریف ۵.۲.۱. گراف فازی $\tilde{H}(\tau, \nu)$ یک زیرگراف فازی^{۱۸} از $\tilde{G} : (\sigma, \mu)$ نامیده می‌شود، اگر

$$\tau(u) = \sigma(u) \quad \forall u \in \tau^* \quad \text{و} \quad \nu(uv) = \mu(uv) \quad \forall (uv) \in \nu^*.$$

با توجه به این‌که

$$\sigma^t = \{u \in V : \sigma(u) \geq t\} \quad \text{و} \quad \mu^t = \{(uv) \in V \times V : \mu(uv) \geq t\} \quad \forall t \in [0, 1].$$

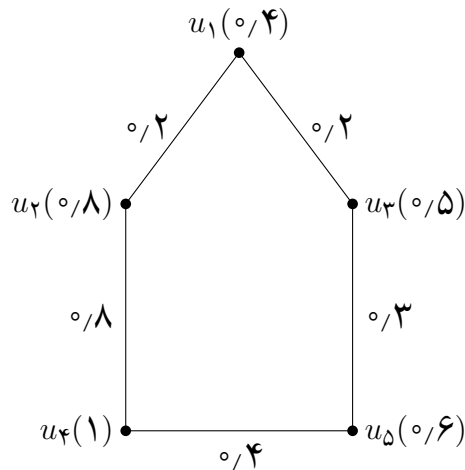
و از آنجایی که

$$\mu(uv) \leq \sigma(u) \wedge \sigma(v) \quad \forall u, v \in V,$$

بنابراین (σ^t, μ^t) به ازای هر $t \in [0, 1]$ یک گراف با مجموعه رئوس σ^t و مجموعه یال‌های μ^t می‌باشد.

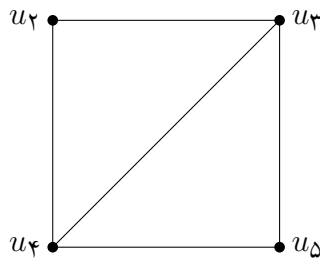
^{۱۷}partial fuzzy subgraph

^{۱۸}fuzzy subgraph



شکل ۲.۱: زیرگراف فازی جزئی از گراف فازی $\tilde{G} : (\sigma, \mu)$

مثال ۶.۲.۱. گراف $G^t : (\sigma^t, \mu^t)$ از گراف فازی $\tilde{G} : (\sigma, \mu)$ در مثال (۲.۲.۱)، به ازای $t = 0/5$ در شکل (۳.۱) آورده شده است.



شکل ۳.۱: گراف $G^t : (\sigma^t, \mu^t)$ که $t = 0/5$ می باشد

نکته ۷.۲.۱. فرض کنید $\tilde{G} : (\sigma, \mu)$ یک گراف فازی باشد. اگر $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1$ باشد، آنگاه $(\sigma^{t_2}, \mu^{t_2})$ یک زیرگراف از $(\sigma^{t_1}, \mu^{t_1})$ می باشد.

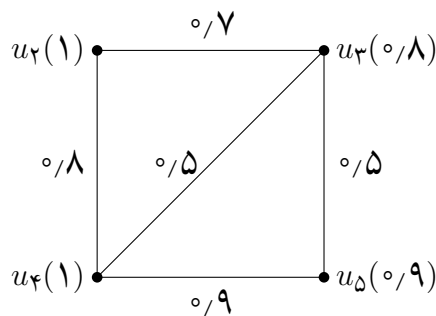
نکته ۸.۲.۱. اگر $\tilde{H}(\tau, \nu)$ یک زیرگراف فازی جزئی از گراف فازی $\tilde{G} : (\sigma, \mu)$ باشد. به ازای هر $0 \leq t \leq 1$ یک زیرگراف از (σ^t, μ^t) می باشد.

تعریف ۹.۲.۱. گراف فازی $\tilde{H}(\tau, \nu)$ را یک زیرگراف فازی القا شده توسط P ^{۱۹} از $\tilde{G} : (\sigma, \mu)$ گوئیم، اگر

$$P \subseteq V, \quad \tau(u) = \sigma(u) \quad \forall u \in P \quad \text{و} \quad \nu(uv) = \mu(uv) \quad \forall u, v \in P.$$

مثال ۱۰.۲.۱. زیرگراف فازی القا شده توسط $P = \{u_2, u_3, u_4, u_5\}$ از گراف فازی مثال (۲.۲.۱)، در شکل (۴.۱) آورده شده است.

^{۱۹}fuzzy subgraph induced by P



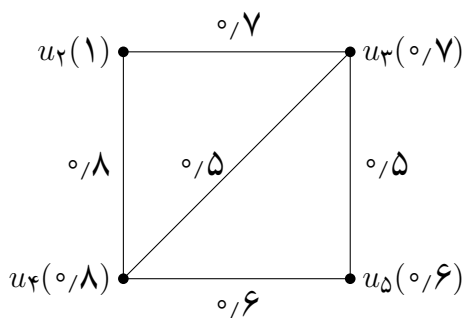
شکل ۴.۱: زیرگراف فازی القا شده توسط P

تعریف ۱۱.۲.۱. به ازای هر زیرمجموعه‌ی فازی τ از V ، به‌طوری که $\tau \subseteq \sigma$ باشد، زیرگراف فازی جزئی القا شده توسط τ از (σ, μ) را **زیرگراف فازی جزئی ماکسیمال^{۲۰}** از (σ, μ) می‌نامیم، که دارای مجموعه رئوس فازی τ می‌باشد. این زیرگراف فازی جزئی ماکسیمال را به‌صورت (τ, ν) نمایش می‌دهیم، به‌طوری که

$$\nu(uv) = \tau(u) \wedge \tau(v) \wedge \mu(uv) \quad \forall u, v \in V.$$

مثال ۱۲.۲.۱. زیرگراف فازی جزئی القا شده توسط τ از گراف فازی (σ, μ) در مثال (۲.۲.۱)، در شکل (۵.۱) آورده شده است. که τ به‌صورت زیر است:

$$\tau(u_2) = 1, \tau(u_3) = 0/7, \tau(u_4) = 0/8, \tau(u_5) = 0/6.$$



شکل ۵.۱: زیرگراف فازی جزئی القا شده توسط τ

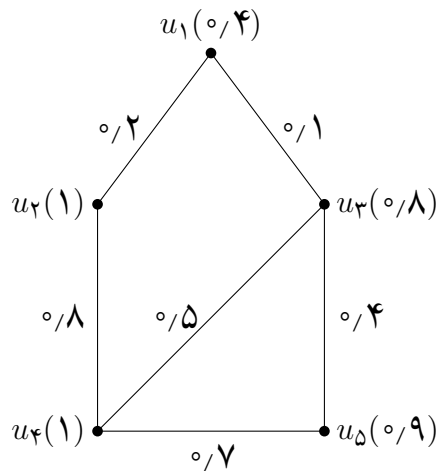
تعریف ۱۳.۲.۱. یک زیرگراف فازی جزئی (τ, ν) را **دهانه‌ی گراف فازی^{۲۱}** (σ, μ) گوئیم، اگر $\sigma = \tau$. در این مورد (τ, ν) را یک **زیرگراف فراگیر فازی جزئی^{۲۲}** از (σ, μ) می‌نامیم.

^{۲۰}maximal partial fuzzy subgraph

^{۲۱}spans fuzzy graph

^{۲۲}partial fuzzy spanning subgraph

مثال ۱۴.۲.۱. زیرگراف فراگیر فازی جزیی از گراف فازی $(\sigma, \mu) : \tilde{G}$ در مثال (۲.۲.۱)، در شکل (۶.۱) آورده شده است.



شکل ۶.۱: زیرگراف فراگیر فازی جزیی از گراف فازی $(\sigma, \mu) : \tilde{G}$

تعریف ۱۵.۲.۱. یک زیرگراف فازی (τ, ν) را دهانه‌ی گراف فازی (σ, μ) گوئیم، اگر $\sigma = \tau$ و

$$\nu(uv) = \begin{cases} \mu(uv) & \text{اگر } (uv) \in \nu^* \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

در این مورد، (τ, ν) را یک زیرگراف فراگیر فازی^{۲۳} از گراف فازی $(\sigma, \mu) : \tilde{G}$ می‌نامیم.

مثال ۱۶.۲.۱. زیرگراف فراگیر فازی از گراف فازی $(\sigma, \mu) : \tilde{G}$ در مثال (۲.۲.۱)، در شکل (۷.۱) آورده شده است.

تعریف ۱۷.۲.۱. فرض کنید $(\sigma, \mu) : \tilde{G}$ یک گراف فازی باشد. درجه‌ی یک راس^{۲۴} v به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$d(v) = \sum_{v \neq u} \mu(uv).$$

تعریف ۱۸.۲.۱. فرض کنید $(\sigma, \mu) : \tilde{G}$ یک گراف فازی باشد. مینیمم درجه^{۲۵} از گراف فازی $(\sigma, \mu) : \tilde{G}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\delta(\tilde{G}) = \min_{v \in V} \{d(v)\}.$$

و هم‌چنین ماکزیمم درجه^{۲۶} از گراف فازی $(\sigma, \mu) : \tilde{G}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

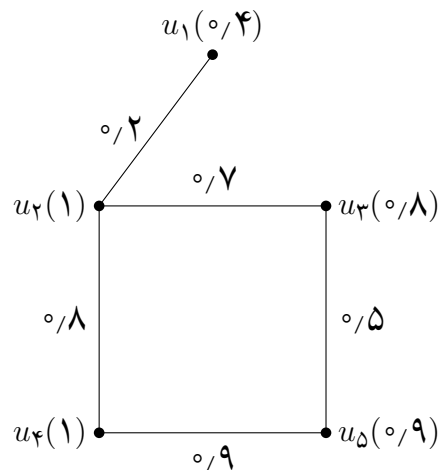
$$\Delta(\tilde{G}) = \max_{v \in V} \{d(v)\}.$$

^{۲۳}fuzzy spanning subgraph

^{۲۴}degree of vertex

^{۲۵}minimum degree

^{۲۶}maximum degree



شکل ۷.۱: زیرگراف فراگیر فازی از گراف فازی $\tilde{G} : (\sigma, \mu)$

تعریف ۱۹.۲.۱. فرض کنید $\tilde{G} : (\sigma, \mu)$ یک گراف فازی باشد. مرتبه‌ی گراف فازی $\tilde{G}$ ، که با $O(\tilde{G})$ نمایش داده می‌شود، به صورت زیر است:

$$O(\tilde{G}) = \sum_{u \in V} \sigma(u).$$

تعریف ۲۰.۲.۱. فرض کنید $\tilde{G} : (\sigma, \mu)$ یک گراف فازی باشد. اندازه‌ی گراف فازی $\tilde{G}$ ، که با $S(\tilde{G})$ نمایش داده می‌شود، به صورت زیر است:

$$S(\tilde{G}) = \sum_{uv \in V} \mu(uv).$$

قضیه ۲۱.۲.۱. اگر $\tilde{G} : (\sigma, \mu)$ یک گراف فازی باشد، داریم:

$$\sum_{v \in V} \deg v = 2 \sum_{v \neq u} \mu(uv).$$

تعریف ۲۲.۲.۱. یک گراف فازی $\tilde{G} : (\sigma, \mu)$ را **گراف فازی قوی^{۲۷}** گوئیم، اگر

$$\mu(uv) = \sigma(u) \wedge \sigma(v) \quad \forall (uv) \in \mu^*,$$

و گراف فازی $\tilde{G} : (\sigma, \mu)$ را **گراف فازی کامل^{۲۸}** گوئیم، اگر

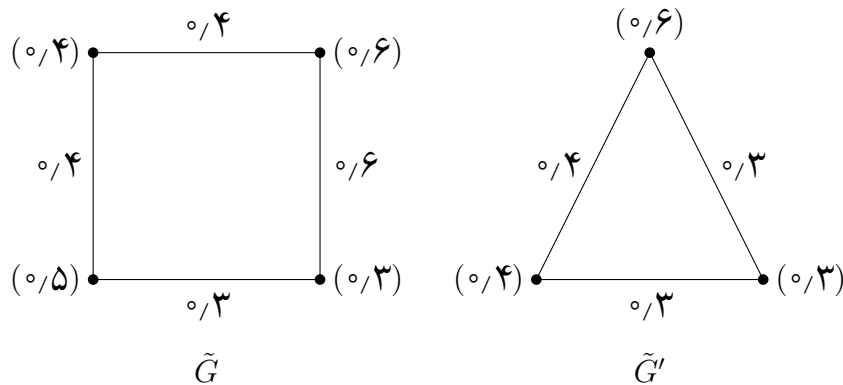
$$\mu(uv) = \sigma(u) \wedge \sigma(v) \quad \forall u, v \in \sigma^*.$$

مثال ۲۳.۲.۱. گراف فازی قوی $\tilde{G}$ و گراف فازی کامل $\tilde{G}'$ در شکل (۸.۱) آورده شده است.

نکته ۲۴.۲.۱. هر گراف فازی کامل یک گراف فازی قوی است، اما عکس آن برقرار نیست. همچنین اگر $\tilde{G} : (\sigma, \mu)$ یک گراف کامل باشد، آنگاه $G^* : (\sigma^*, \mu^*)$ نیز یک گراف کامل است.

^{۲۷}strong fuzzy graph

^{۲۸}complete fuzzy graph



شکل ۸.۱: گراف فازی قوی $\tilde{G}$ و گراف فازی کامل $\tilde{G}'$

تعریف ۲۵.۲.۱. یک مسیر P^{29} در یک گراف فازی $(\sigma, \mu): \tilde{G}$ به صورت یک دنباله از رئوس متمایز $u_0, u_1, \dots, u_n$ می باشد، به طوری که به ازای هر $1 \leq i \leq n$ ، $\mu(u_{i-1}u_i) > 0$ است.

• $n \geq 1$ را طول مسیر P^{30} می نامیم.

• یک راس مجزای u ممکن است یک مسیر در نظر گرفته شود، در این مورد مسیر به طول صفر می باشد.

• جفت های متوالی $(u_{i-1}u_i)$ را کمان 31 هایی از مسیر گوئیم.

• مسیر P را یک دور 32 گوئیم، اگر به ازای هر $n \geq 3$ ، $u_0 = u_n$ باشد.

تعریف ۲۶.۲.۱. شدت یک مسیر P^{33} به صورت $\bigwedge_{i=1}^n \mu(u_{i-1}u_i)$ تعریف می شود.

• به عبارت دیگر، شدت یک مسیر، درجه ی عضویت ضعیف ترین کمان از مسیر تعریف می شود.

• اگر مسیر به طول صفر باشد، شدت یک مسیر را به صورت $\sigma(u_0)$ تعریف می شود.

تعریف ۲۷.۲.۱. یک قوی ترین مسیر 34 متصل کننده ی هر دو راس u و v ، مسیری است که شامل شدت $\mu^\infty(uv)$ باشد.

• $\mu^\infty(uv)$: شدت همبندی 35 بین دو راس u و v می باشد.

²⁹path

³⁰length of path

³¹arc

³²cycle

³³strength of a path

³⁴strongest path

³⁵strength of connectedness

مثال ۲۸.۲.۱. در مثال (۲.۲.۱) در گراف فازی (σ, μ) $\tilde{G}$ ، یک قوی‌ترین مسیر متصل کننده‌ی دو

راس u_2 و u_5 ، یک مسیر $P : u_2, u_4, u_5$ با $\mu^\infty(u_2 u_5) = \circ/8$ می‌باشد. همچنین

$$\mu^\infty(u_1 u_2) = \mu^\infty(u_1 u_3) = \mu^\infty(u_1 u_4) = \mu^\infty(u_1 u_5) = \circ/3,$$

$$\mu^\infty(u_2 u_3) = \mu^\infty(u_3 u_4) = \mu^\infty(u_3 u_5) = \circ/7, \mu^\infty(u_2 u_4) = \circ/8, \mu^\infty(u_4 u_5) = \circ/9.$$

تعریف ۲۹.۲.۱. یک گراف فازی (σ, μ) $\tilde{G}$ را همبند^{۳۶} گوئیم، هرگاه هر دو راس از گراف فازی توسط یک مسیر با یکدیگر متصل باشند.

تعریف ۳۰.۲.۱. زیرگراف‌های فازی جزئی همبند ماکسیمال از یک گراف فازی را مولفه^{۳۷} گوئیم.

نکته ۳۱.۲.۱. یک گراف فازی (σ, μ) $\tilde{G}$ همبند می‌باشد اگر و فقط اگر،

$$\mu^\infty(uv) > \circ \quad \forall u, v \in V.$$

نکته ۳۲.۲.۱. در یک گراف قطعی هر مسیر، یک قوی‌ترین مسیر با شدت یک می‌باشد.

تعریف ۳۳.۲.۱. یک کمان (uv) یک پل فازی^{۳۸} از گراف فازی (σ, μ) $\tilde{G}$ است، اگر با حذف (uv) ، از شدت همبندی بین برخی از جفت رئوس کاهش یابد.

تعریف ۳۴.۲.۱. یک راس از یک گراف فازی (σ, μ) $\tilde{G}$ ، یک راس برشی فازی^{۳۹} است، اگر با حذف آن از شدت همبندی بین برخی دیگر از جفت رئوس کاهش یابد.

تعریف ۳۵.۲.۱. یک درخت فراگیر ماکزیمم^{۴۰} از یک گراف فازی همبند (σ, μ) $\tilde{G}$ ، یک زیرگراف فراگیر فازی $\tilde{T}(\sigma, \nu)$ می‌باشد، به‌طوری که T^* یک درخت است، و در مورد آن $\sum_{u \neq v} \nu(uv)$ ماکزیمم است.

تعریف ۳۶.۲.۱. یک گراف فازی همبند (σ, μ) $\tilde{G}$ یک درخت فازی^{۴۱} است، اگر دارای یک زیرگراف فراگیر $\tilde{F}(\sigma, \nu)$ باشد، که $\tilde{F}$ یک درخت است، و به ازای همه‌ی کمان‌هایی که در $\tilde{F}$ نیستند، رابطه‌ی زیر برقرار باشد:

$$\mu(uv) < \nu^\infty(uv).$$

^{۳۶}connected

^{۳۷}component

^{۳۸}fuzzy bridge

^{۳۹}fuzzy cutnode

^{۴۰}maximum spanning tree

^{۴۱}fuzzy tree

فصل ۲

اعمال روی گراف‌های فازی

یک گراف فازی می‌تواند از دو گراف فازی با استفاده از اجتماع، اتصال، ترکیب، حاصل ضرب دکارتی، حاصل ضرب نرمال و حاصل ضرب ترانسفوری به‌دست آورده شود. در این فصل تعاریف مربوط به عمل‌های فوق و درجه‌ی یک راس در گراف فازی حاصل از این عملیات بر روی دو گراف فازی آورده شده است.

$\tilde{G}_1 : (\sigma_1, \mu_1)$ و $\tilde{G}_2 : (\sigma_2, \mu_2)$ دو گراف فازی با گراف‌های قطعی زمینه‌ی $G_1^* : (V_1, E_1)$ و $G_2^* : (V_2, E_2)$ با $|V_i| = p_i, \quad i = 1, 2$ می‌باشند. و $d_{G_i}^*(u_i)$ درجه‌ی راس u_i در G_i^* نسبت داده می‌شود.

۱.۲ اجتماع دو گراف فازی

اجتماع^۱ دو گراف فازی $\tilde{G}_1$ و $\tilde{G}_2$ به‌صورت یک گراف فازی:

$$\tilde{G} = \tilde{G}_1 \cup \tilde{G}_2 : (\sigma_1 \cup \sigma_2, \mu_1 \cup \mu_2)$$

روی $G^* : (V, E)$ که $V = V_1 \cup V_2$ و $E = E_1 \cup E_2$ با

$$(\sigma_1 \cup \sigma_2)(u) = \begin{cases} \sigma_1(u), & \text{اگر } u \in V_1 - V_2 \\ \sigma_2(u), & \text{اگر } u \in V_2 - V_1 \\ \sigma_1(u) \vee \sigma_2(u), & \text{اگر } u \in V_1 \cap V_2 \end{cases}$$

و

$$(\mu_1 \cup \mu_2)(uv) = \begin{cases} \mu_1(uv), & \text{اگر } uv \in E_1 - E_2 \\ \mu_2(uv), & \text{اگر } uv \in E_2 - E_1 \\ \mu_1(uv) \vee \mu_2(uv), & \text{اگر } uv \in E_1 \cap E_2 \end{cases}$$

تعریف می‌شود [۱۱].

^۱union

۱.۱.۲ درجه‌ی یک راس در اجتماع دو گراف فازی

به ازای هر $u \in V_1 \cup V_2$ ، سه حالت زیر را در نظر می‌گیریم:
حالت اول: $u \in V_1$ یا $u \in V_2$ ، اما هر دو به‌طور هم‌زمان رخ داده نمی‌شوند.
 آنگاه هیچ یال متلاقی با راس u در $E_1 \cap E_2$ قرار نمی‌گیرد.
 بنابراین

$$(\mu_1 \cup \mu_2)(uv) = \begin{cases} \mu_1(uv), & \text{اگر } u \in V_1 \text{ (به عبارت دیگر)} \\ \mu_2(uv), & \text{اگر } u \in V_2 \text{ (به عبارت دیگر)} \end{cases}$$

بنابراین اگر $u \in V_1$ باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} d_{\tilde{G}_1 \cup \tilde{G}_2}(u) &= \sum_{uv \in E} (\mu_1 \cup \mu_2)(uv) \\ &= \sum_{uv \in E_1} \mu_1(uv) = d_{\tilde{G}_1}(u). \end{aligned}$$

اگر $u \in V_2$ باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} d_{\tilde{G}_1 \cup \tilde{G}_2}(u) &= \sum_{uv \in E} (\mu_1 \cup \mu_2)(uv) \\ &= \sum_{uv \in E_2} \mu_2(uv) = d_{\tilde{G}_2}(u). \end{aligned}$$

حالت دوم: $u \in V_1 \cap V_2$ اما هیچ یال متلاقی با راس u در $E_1 \cap E_2$ قرار نمی‌گیرد.
 بنابراین هر یال متلاقی با راس u در E_1 یا در E_2 قرار می‌گیرد، اما به‌طور هم‌زمان در هر دو قرار نمی‌گیرد. هم‌چنین تمامی این یال‌ها در $\tilde{G}_1 \cup \tilde{G}_2$ واقع می‌شوند.
 بنابراین

$$\begin{aligned} d_{\tilde{G}_1 \cup \tilde{G}_2}(u) &= \sum_{uv \in E} (\mu_1 \cup \mu_2)(uv) \\ &= \sum_{uv \in E_1} \mu_1(uv) + \sum_{uv \in E_2} \mu_2(uv) \\ &= d_{\tilde{G}_1}(u) + d_{\tilde{G}_2}(u). \end{aligned}$$

حالت سوم: $u \in V_1 \cap V_2$ و برخی یال‌های متلاقی با راس u در $E_1 \cap E_2$ قرار دارند.
 هر یال uv که در $E_1 \cap E_2$ قرار دارد، فقط یک بار در $\tilde{G}_1 \cup \tilde{G}_2$ ظاهر می‌شود.
 به ازای یال uv داریم:

$$(\mu_1 \cup \mu_2)(uv) = \mu_1(uv) \vee \mu_2(uv).$$

با استفاده از تعریف،

$$\begin{aligned}
 d_{\tilde{G}_1 \cup \tilde{G}_2}(u) &= \sum_{uv \in E} (\mu_1 \cup \mu_2)(uv) \\
 &= \sum_{uv \in E_1 - E_2} \mu_1(uv) + \sum_{uv \in E_2 - E_1} \mu_2(uv) + \sum_{uv \in E_1 \cap E_2} \mu_1(uv) \vee \mu_2(uv) \\
 &= \left[\sum_{uv \in E_1 - E_2} \mu_1(uv) + \sum_{uv \in E_2 - E_1} \mu_2(uv) + \sum_{uv \in E_1 \cap E_2} \mu_1(uv) \vee \mu_2(uv) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{uv \in E_1 \cap E_2} \mu_1(uv) \wedge \mu_2(uv) \right] - \sum_{uv \in E_1 \cap E_2} \mu_1(uv) \wedge \mu_2(uv) \\
 &= \sum_{uv \in E_1} \mu_1(uv) + \sum_{uv \in E_2} \mu_2(uv) - \sum_{uv \in E_1 \cap E_2} \mu_1(uv) \wedge \mu_2(uv) \\
 &= d_{\tilde{G}_1}(u) + d_{\tilde{G}_2}(u) - \sum_{uv \in E_1 \cap E_2} \mu_1(uv) \wedge \mu_2(uv).
 \end{aligned}$$

مثال ۱.۱.۲. گرافهای فازی $\tilde{G}_1 : (\sigma_1, \mu_1)$ و $\tilde{G}_2 : (\sigma_2, \mu_2)$ را در شکل (۱.۲)، در نظر بگیرید.

x را در نظر بگیرید: در شکل $x \in V_1$ می‌باشد، و چون در V_2 واقع نشده است. بنابراین با استفاده از حالت اول داریم:

$$\begin{aligned}
 d_{\tilde{G}_1 \cup \tilde{G}_2}(x) &= d_{\tilde{G}_1}(x) \\
 &= \mu_1(xw) + \mu_1(xv) \\
 &= ۰/۵ + ۰/۶ = ۱/۱.
 \end{aligned}$$

v را در نظر بگیرید: در شکل (۱.۲)، $v \in V_1 \cap V_2$ می‌باشد، اما هیچ یال متلاقی با راس v در $E_1 \cap E_2$ واقع نمی‌شود. یعنی هر یال متلاقی با راس u در E_1 یا در E_2 قرار می‌گیرد، اما به‌طور همزمان در هر دو قرار نمی‌گیرد.

بنابراین با استفاده از حالت دوم داریم:

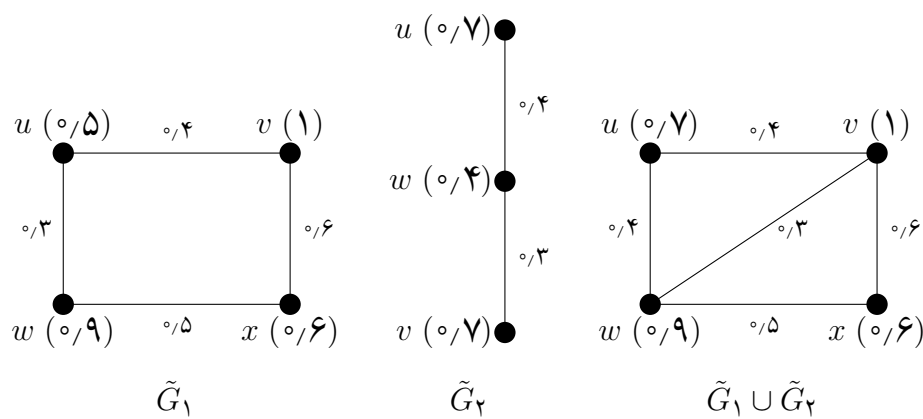
$$\begin{aligned}
 d_{\tilde{G}_1 \cup \tilde{G}_2}(v) &= d_{\tilde{G}_1}(v) + d_{\tilde{G}_2}(v) \\
 &= (\mu_1(uv) + \mu_1(xv)) + \mu_2(wv) \\
 &= (۰/۴ + ۰/۶) + ۰/۳ = ۱/۳.
 \end{aligned}$$

u را در نظر بگیرید: در شکل (۱.۲)، $u \in V_1 \cap V_2$ و همچنین $uw \in E_1 \cap E_2$ برقرار می‌باشد، یعنی یال متلاقی با راس v در $E_1 \cap E_2$ واقع شده است.

بنابراین با استفاده از حالت سوم داریم:

$$\begin{aligned}
 d_{\tilde{G}_1 \cup \tilde{G}_2}(u) &= d_{\tilde{G}_1}(u) + d_{\tilde{G}_2}(u) - \sum_{uv \in E_1 \cap E_2} \mu_1(uv) \wedge \mu_2(uv) \\
 &= d_{\tilde{G}_1}(u) + d_{\tilde{G}_2}(u) - \mu_1(uw) \wedge \mu_2(uw) \\
 &= (\circ/3 + \circ/4) + \circ/4 - (\circ/3 \wedge \circ/4) \\
 &= \circ/7 + \circ/4 - \circ/3 = \circ/8.
 \end{aligned}$$

تمامی این درجات در شکل $\tilde{G}_1 \cup \tilde{G}_2$ در شکل (۱.۲) بررسی می‌شود.



شکل ۱.۲: اجتماع $\tilde{G}_1$ و $\tilde{G}_2$ ($\tilde{G}_1 \cup \tilde{G}_2$)

۲.۲ اتصال دو گراف فازی

فرض کنید که $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. اتصال^۲ (مجموع) دو گراف فازی $\tilde{G}_1$ و $\tilde{G}_2$ به صورت یک گراف فازی:

$$\tilde{G} = \tilde{G}_1 + \tilde{G}_2 : (\sigma_1 + \sigma_2, \mu_1 + \mu_2)$$

روی $(V, E) : G^*$ که $V = V_1 \cup V_2$ و $E = E_1 \cup E_2 \cup E'$ ، که E' مجموعه یال‌های متصل بین رئوس V_1 با رئوس V_2 می‌باشد، با

$$(\sigma_1 + \sigma_2)(u) = (\sigma_1 \cup \sigma_2)(u) \quad \forall u \in V_1 \cup V_2$$

و

$$(\mu_1 + \mu_2)(uv) = \begin{cases} (\mu_1 \cup \mu_2)(uv), & \text{اگر } uv \in E_1 \cup E_2 \\ \sigma_1(u) \wedge \sigma_2(v), & \text{اگر } uv \in E'. \end{cases}$$

تعریف می‌شود [۱۱].

^۲join

۱.۲.۲ درجه‌ی یک راس در اتصال دو گراف فازی

در اینجا $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ در نتیجه $E_1 \cap E_2 = \emptyset$.

بنابراین

$$(\mu_1 \cup \mu_2)(uv) = \begin{cases} \mu_1(uv), & \text{اگر } uv \in E_1 \\ \mu_2(uv), & \text{اگر } uv \in E_2 \end{cases}$$

با استفاده از تعریف درجه و با توجه به رابطه‌ی

$$(\mu_1 + \mu_2)(uv) = \begin{cases} (\mu_1 \cup \mu_2)(uv), & \text{اگر } uv \in E_1 \cup E_2 \\ \sigma_1(u) \wedge \sigma_2(v), & \text{اگر } uv \in E' \end{cases}$$

داریم:

$$\begin{aligned} d_{\tilde{G}_1 + \tilde{G}_2}(u) &= \sum_{uv \in E} (\mu_1 + \mu_2)(uv) \\ &= \sum_{uv \in E_1 \cup E_2} (\mu_1 \cup \mu_2)(uv) + \sum_{uv \in E'} \sigma_1(u) \wedge \sigma_2(v) \end{aligned}$$

که به ازای هر $u \in V_1$ داریم:

$$\begin{aligned} d_{\tilde{G}_1 + \tilde{G}_2}(u) &= \sum_{uv \in E_1} \mu_1(uv) + \sum_{uv \in E'} \sigma_1(u) \wedge \sigma_2(v) \\ &= d_{\tilde{G}_1}(u) + \sum_{v \in V_2} \sigma_1(u) \wedge \sigma_2(v). \end{aligned} \quad (1.2)$$

به‌طور مشابه، به ازای هر $u \in V_2$ داریم:

$$\begin{aligned} d_{\tilde{G}_1 + \tilde{G}_2}(u) &= \sum_{uv \in E_2} \mu_2(uv) + \sum_{uv \in E'} \sigma_1(u) \wedge \sigma_2(v) \\ &= d_{\tilde{G}_2}(u) + \sum_{v \in V_1} \sigma_1(u) \wedge \sigma_2(v). \end{aligned} \quad (2.2)$$

تعریف ۱.۲.۲. رابطه $\sigma_1 \geq \sigma_2$ به‌صورت:

$$\sigma_1(u) \geq \sigma_2(v), \quad \forall u \in V_1 \text{ و } \forall v \in V_2,$$

که σ_i یک زیرمجموعه فازی از V_i به ازای $i = 1, 2$ می‌باشد، معنی می‌شود.

قضیه ۲.۲.۲. فرض کنید $\tilde{G}_1 : (\sigma_1, \mu_1)$ و $\tilde{G}_2 : (\sigma_2, \mu_2)$ دو گراف فازی باشند.

۱. اگر $\sigma_1 \geq \sigma_2$ باشد، آنگاه

$$d_{\tilde{G}_1 + \tilde{G}_2}(u) = \begin{cases} d_{\tilde{G}_1}(u) + O(\tilde{G}_2), & \text{اگر } u \in V_1 \\ d_{\tilde{G}_2}(u) + p_1 \sigma_2(v), & \text{اگر } u \in V_2 \end{cases}$$

۲. اگر $\sigma_2 \geq \sigma_1$ باشد، آنگاه

$$d_{\tilde{G}_1 + \tilde{G}_2}(u) = \begin{cases} d_{\tilde{G}_1}(u) + p_2 \sigma_1(u), & \text{اگر } u \in V_1 \\ d_{\tilde{G}_2}(u) + O(\tilde{G}_1), & \text{اگر } u \in V_2 \end{cases}$$

برهان. ۱. با توجه به صورت قضیه داریم: $\sigma_1 \geq \sigma_2$.

با استفاده از (۱.۲)، به ازای هر $u \in V_1$ داریم:

$$d_{\tilde{G}_1 + \tilde{G}_2}(u) = d_{\tilde{G}_1}(u) + \sum_{v \in V_2} \sigma_1(u) \wedge \sigma_2(v).$$

با توجه به این که $\sigma_1 \geq \sigma_2$ ، در نتیجه:

$$\sigma_1(u) \wedge \sigma_2(v) = \sigma_2(v),$$

بنابراین نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} d_{\tilde{G}_1 + \tilde{G}_2}(u) &= d_{\tilde{G}_1}(u) + \sum_{v \in V_2} \sigma_2(v) \\ &= d_{\tilde{G}_1}(u) + O(\tilde{G}_2). \end{aligned}$$

با استفاده از (۲.۲)، به ازای هر $u \in V_2$ داریم:

$$\begin{aligned} d_{\tilde{G}_1 + \tilde{G}_2}(u) &= d_{\tilde{G}_2}(u) + \sum_{v \in V_1} \sigma_1(u) \wedge \sigma_2(v) \\ &= d_{\tilde{G}_2}(u) + \sum_{v \in V_1} \sigma_2(v) \\ &= d_{\tilde{G}_2}(u) + p_1 \sigma_2(v). \quad (|V_1| = p_1 \text{ زیرا}) \end{aligned}$$

۲. به طور مشابه، با توجه به صورت قضیه داریم: $\sigma_2 \geq \sigma_1$.

با استفاده از (۱.۲)، به ازای هر $u \in V_1$ داریم:

$$d_{\tilde{G}_1 + \tilde{G}_2}(u) = d_{\tilde{G}_1}(u) + \sum_{v \in V_2} \sigma_1(u) \wedge \sigma_2(v),$$

با توجه به این که $\sigma_2 \geq \sigma_1$ ، در نتیجه،

$$\sigma_1(u) \wedge \sigma_2(v) = \sigma_1(u),$$

بنابراین نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} d_{\tilde{G}_1 + \tilde{G}_2}(u) &= d_{\tilde{G}_1}(u) + \sum_{v \in V_2} \sigma_1(u) \\ &= d_{\tilde{G}_1}(u) + p_2 \sigma_1(u), \end{aligned}$$

با استفاده از (۲.۲)، به ازای هر $u \in V_2$ داریم:

$$\begin{aligned} d_{\tilde{G}_1 + \tilde{G}_2}(u) &= d_{\tilde{G}_2}(u) + \sum_{v \in V_1} \sigma_1(u) \wedge \sigma_2(v) \\ &= d_{\tilde{G}_2}(u) + \sum_{v \in V_1} \sigma_1(u) \\ &= d_{\tilde{G}_2}(u) + O(\tilde{G}_1). \end{aligned}$$

□

مثال ۳.۲.۲. دو گراف فازی $\tilde{G}_1$ و $\tilde{G}_2$ را در شکل (۲.۲)، در نظر بگیرید. با توجه به شکل (۲.۲) داریم: $\sigma_2 \geq \sigma_1$ ، یعنی

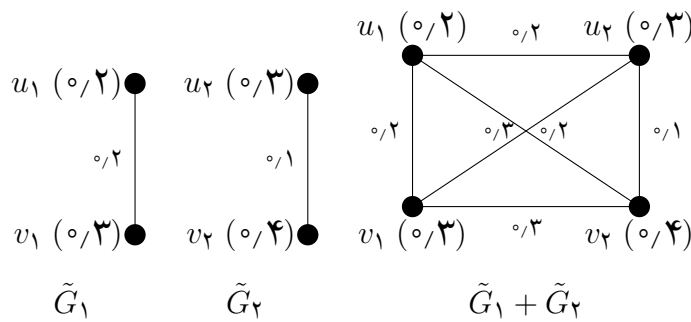
$$\sigma_2(u) \geq \sigma_1(v), \quad \forall u \in V_1 \text{ و } \forall v \in V_2.$$

بنابراین با استفاده از حالت دوم از قضیه (۲.۲.۲) داریم:

$$\begin{aligned} d_{\tilde{G}_1 + \tilde{G}_2}(u_1) &= d_{\tilde{G}_1}(u_1) + p_2 \sigma_1(u_1) \\ &= \circ/2 + 2 \times \circ/2 \\ &= \circ/2 + \circ/4 = \circ/6. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{\tilde{G}_1 + \tilde{G}_2}(u_2) &= d_{\tilde{G}_2}(u_2) + O(\tilde{G}_1) \\ &= \circ/1 + (\circ/2 + \circ/3) \\ &= \circ/1 + \circ/5 = \circ/6. \end{aligned}$$

این درجات در شکل $\tilde{G}_1 + \tilde{G}_2$ داده شده در شکل (۲.۲)، می‌توانند بررسی شوند.



شکل ۲.۲: اتصال $\tilde{G}_1$ و $\tilde{G}_2$ ($\tilde{G}_1 + \tilde{G}_2$)

قضیه ۴.۲.۲. فرض کنید $\tilde{G}_1 : (\sigma_1, \mu_1)$ و $\tilde{G}_2 : (\sigma_2, \mu_2)$ دو گراف فازی باشند، به طوری که $\sigma_1 \wedge \sigma_2$ یک تابع ثابت باشد. آنگاه

$$d_{\tilde{G}_1 + \tilde{G}_2}(u) = \begin{cases} d_{\tilde{G}_1}(u) + c p_2, & \text{اگر } u \in V_1 \\ d_{\tilde{G}_2}(u) + c p_1, & \text{اگر } u \in V_2 \end{cases}$$

که

$$\sigma_1(u) \wedge \sigma_2(v) = c, \quad \forall u \in V_1, v \in V_2,$$

که c یک تابع ثابت می‌باشد.

برهان. فرض کنید:

$$\sigma_1(u) \wedge \sigma_2(v) = c, \quad \forall u \in V_1, v \in V_2,$$

که c یک ثابت می‌باشد.

با استفاده از (۱.۲)، به ازای هر $u \in V_1$ داریم:

$$d_{\tilde{G}_1 + \tilde{G}_2}(u) = \sum_{uv \in E_1} \mu_1(uv) + \sum_{v \in V_2} \sigma_1(u) \wedge \sigma_2(v)$$

با توجه به فرض

$$\sigma_1(u) \wedge \sigma_2(v) = c, \quad \forall u \in V_1, v \in V_2,$$

بنابراین

$$\sum_{v \in V_2} \sigma_1(u) \wedge \sigma_2(v) = \sum_{v \in V_2} c.$$

در نتیجه:

$$\begin{aligned} d_{\tilde{G}_1 + \tilde{G}_2}(u) &= \sum_{uv \in E_1} \mu_1(uv) + \sum_{v \in V_2} c \\ &= d_{\tilde{G}_1}(u) + \sum_{v \in V_2} c \\ &= d_{\tilde{G}_1}(u) + cp_2. \end{aligned}$$

با استفاده از (۲.۲)، به ازای هر $u \in V_2$ داریم:

$$\begin{aligned} d_{\tilde{G}_1 + \tilde{G}_2}(u) &= \sum_{uv \in E_2} \mu_2(uv) + \sum_{v \in V_1} \sigma_1(u) \wedge \sigma_2(v) \\ &= \sum_{uv \in E_2} \mu_2(uv) + \sum_{v \in V_1} c \\ &= d_{\tilde{G}_2}(u) + \sum_{v \in V_1} c \\ &= d_{\tilde{G}_2}(u) + cp_1. \end{aligned}$$

□

۳.۲ حاصل ضرب دکارتی دو گراف فازی

حاصل ضرب دکارتی^۳ دو گراف فازی $\tilde{G}_1$ و $\tilde{G}_2$ به صورت یک گراف فازی:

$$\tilde{G} = \tilde{G}_1 \times \tilde{G}_2 : (\sigma_1 \times \sigma_2, \mu_1 \times \mu_2)$$

^۳cartesian product

روی $G^* : (V, E)$ که $V = V_1 \times V_2$ و

$$E = \{((u_1, u_2)(v_1, v_2)) \mid u_1 = v_1, u_2 v_2 \in E_2 \text{ یا } u_2 = v_2, u_1 v_1 \in E_1\}$$

با

$$(\sigma_1 \times \sigma_2)(u_1, u_2) = \sigma_1(u_1) \wedge \sigma_2(u_2), \quad \forall (u_1, u_2) \in V_1 \times V_2$$

و

$$(\mu_1 \times \mu_2)((u_1, u_2)(v_1, v_2)) = \begin{cases} \sigma_1(u_1) \wedge \mu_2(u_2 v_2), & \text{اگر } u_1 = v_1, u_2 v_2 \in E_2 \\ \sigma_2(u_2) \wedge \mu_1(u_1 v_1), & \text{اگر } u_2 = v_2, u_1 v_1 \in E_1 \end{cases}$$

تعریف می‌شود [۱۱].

۱.۳.۲ درجه‌ی یک راس در حاصل ضرب دکارتی دو گراف فازی

با استفاده از تعریف حاصل ضرب دکارتی دو گراف فازی، به ازای هر $(u_1, u_2) \in V_1 \times V_2$ داریم:

$$\begin{aligned} d_{\tilde{G}_1 \times \tilde{G}_2}(u_1, u_2) &= \sum_{(u_1, u_2)(v_1, v_2) \in E} (\mu_1 \times \mu_2)((u_1, u_2)(v_1, v_2)) \\ &= \sum_{u_1=v_1, u_2 v_2 \in E_2} \sigma_1(u_1) \wedge \mu_2(u_2 v_2) + \sum_{u_2=v_2, u_1 v_1 \in E_1} \sigma_2(u_2) \wedge \mu_1(u_1 v_1). \end{aligned} \quad (۳.۲)$$

در قضایای (۱.۳.۲) و (۴.۳.۲)، درجه‌ی (u_1, u_2) در گراف فازی $\tilde{G}_1 \times \tilde{G}_2$ را در برخی موارد خاص می‌یابیم.

قضیه ۱.۳.۲. فرض کنید $\tilde{G}_1 : (\sigma_1, \mu_1)$ و $\tilde{G}_2 : (\sigma_2, \mu_2)$ دو گراف فازی باشند. اگر $\sigma_1 \geq \mu_2$ و $\sigma_2 \geq \mu_1$ آنگاه

$$d_{\tilde{G}_1 \times \tilde{G}_2}(u_1, u_2) = d_{\tilde{G}_1}(u_1) + d_{\tilde{G}_2}(u_2).$$

برهان. با استفاده از (۳.۲) داریم:

$$d_{\tilde{G}_1 \times \tilde{G}_2}(u_1, u_2) = \sum_{u_1=v_1, u_2 v_2 \in E_2} \sigma_1(u_1) \wedge \mu_2(u_2 v_2) + \sum_{u_2=v_2, u_1 v_1 \in E_1} \sigma_2(u_2) \wedge \mu_1(u_1 v_1).$$

چون $\sigma_1 \geq \mu_2$ و $\sigma_2 \geq \mu_1$ ، در نتیجه،

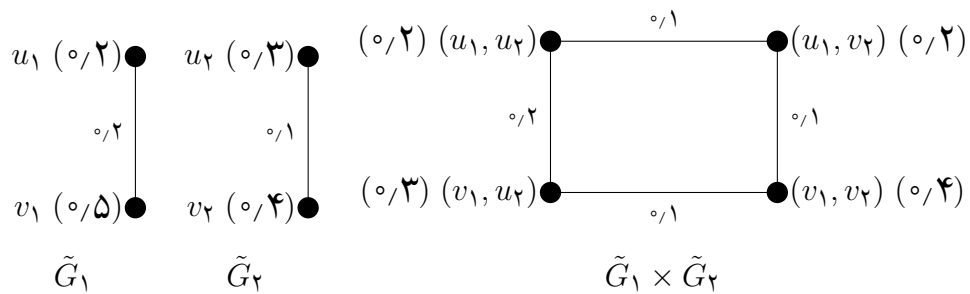
$$\begin{aligned} d_{\tilde{G}_1 \times \tilde{G}_2}(u_1, u_2) &= \sum_{u_1=v_1, u_2 v_2 \in E_2} \sigma_1(u_1) \wedge \mu_2(u_2 v_2) + \sum_{u_2=v_2, u_1 v_1 \in E_1} \sigma_2(u_2) \wedge \mu_1(u_1 v_1) \\ &= \sum_{u_2 v_2 \in E_2} \mu_2(u_2 v_2) + \sum_{u_1 v_1 \in E_1} \mu_1(u_1 v_1) \\ &= d_{\tilde{G}_2}(u_2) + d_{\tilde{G}_1}(u_1). \end{aligned}$$

□

مثال ۲.۳.۲. گراف‌های فازی $\tilde{G}_1 : (\sigma_1, \mu_1)$ و $\tilde{G}_2 : (\sigma_2, \mu_2)$ را در شکل ۳.۲، در نظر بگیرید. در شکل (۳.۲)، $\sigma_2 \geq \mu_1$ و $\sigma_1 \geq \mu_2$ می‌باشد. بنابراین با استفاده از قضیه (۱.۳.۲) داریم:

$$\begin{aligned} d_{\tilde{G}_1 \times \tilde{G}_2}(u_1, u_2) &= d_{\tilde{G}_1}(u_1) + d_{\tilde{G}_2}(u_2) \\ &= 0/2 + 0/1 = 0/3. \end{aligned}$$

این درجه‌ی حاصل ضرب دکارتی در شکل $\tilde{G}_1 \times \tilde{G}_2$ ، در شکل (۳.۲) می‌تواند بررسی شود.



شکل ۳.۲: حاصل ضرب دکارتی $\tilde{G}_1$ و $\tilde{G}_2$ در $(\tilde{G}_1 \times \tilde{G}_2)$

قضیه ۳.۳.۲. اگر $\tilde{G}_1 : (\sigma_1, \mu_1)$ و $\tilde{G}_2 : (\sigma_2, \mu_2)$ دو گراف فازی باشند، به‌طوری که $\sigma_1 \leq \mu_2$ ، آنگاه $\sigma_2 \geq \mu_1$

و همچنین، اگر $\sigma_2 \leq \mu_1$ ، آنگاه $\sigma_1 \geq \mu_2$.

برهان. با استفاده از تعریف گراف فازی داریم:

$$\mu_i(uv) \leq \sigma_i(u) \wedge \sigma_i(v) \quad \forall uv \in E_i, \quad i = 1, 2.$$

بنابراین

$$\mu_i \leq \max \sigma_i \quad \text{و} \quad \min \mu_i \leq \sigma_i, \quad i = 1, 2. \quad (4.2)$$

همچنین با توجه به صورت قضیه $\sigma_1 \leq \mu_2$ ، نتیجه می‌شود:

$$\max \sigma_1 \leq \min \mu_2. \quad (5.2)$$

در نتیجه با استفاده از (۴.۲) و (۵.۲) نتیجه می‌شود:

$$\mu_1 \leq \max \sigma_1 \leq \min \mu_2 \leq \sigma_2.$$

□

که $\sigma_2 \geq \mu_1$ را نتیجه می‌شود و اثبات تمام است.

قضیه ۴.۳.۲. فرض کنید $\tilde{G}_1 : (\sigma_1, \mu_1)$ و $\tilde{G}_2 : (\sigma_2, \mu_2)$ دو گراف فازی باشند.

۱. اگر $\sigma_1 \leq \mu_2$ یک تابع ثابت با

$$\sigma_1(u) = c_1 \quad \forall u \in V_1,$$

باشد، آنگاه

$$d_{\tilde{G}_1 \times \tilde{G}_2}(u_1, u_2) = d_{\tilde{G}_1}(u_1) + c_1 d_{G_2^*}(u_2).$$

۲. اگر $\sigma_2 \leq \mu_1$ و σ_2 یک تابع ثابت با

$$\sigma_2(u) = c_2 \quad \forall u \in V_2,$$

باشد، آنگاه

$$d_{\tilde{G}_1 \times \tilde{G}_2}(u_1, u_2) = d_{\tilde{G}_2}(u_2) + c_2 d_{G_1^*}(u_1).$$

برهان. ۱. با توجه به صورت قضیه، $\sigma_1 \leq \mu_2$ می باشد. بنابراین با استفاده از قضیه (۳.۳.۲)، $\sigma_2 \geq \mu_1$ نتیجه می شود.

با استفاده از فرمول (۳.۲) داریم:

$$d_{\tilde{G}_1 \times \tilde{G}_2}(u_1, u_2) = \sum_{u_1=v_1, u_2 v_2 \in E_2} \sigma_1(u_1) \wedge \mu_2(u_2 v_2) + \sum_{u_2=v_2, u_1 v_1 \in E_1} \sigma_2(u_2) \wedge \mu_1(u_1 v_1).$$

چون $\sigma_2 \geq \mu_1$ و $\sigma_1 \leq \mu_2$ می باشد، بنابراین نتیجه می شود:

$$\begin{aligned} d_{\tilde{G}_1 \times \tilde{G}_2}(u_1, u_2) &= \sum_{u_1=v_1, u_2 v_2 \in E_2} \sigma_1(u_1) \wedge \mu_2(u_2 v_2) + \sum_{u_2=v_2, u_1 v_1 \in E_1} \sigma_2(u_2) \wedge \mu_1(u_1 v_1) \\ &= \sum_{u_2 v_2 \in E_2} \sigma_1(u_1) + \sum_{u_1 v_1 \in E_1} \mu_1(u_1 v_1) \\ &= \sum_{u_2 v_2 \in E_2} c_1 + \sum_{u_1 v_1 \in E_1} \mu_1(u_1 v_1) \\ &= c_1 d_{G_2^*}(u_2) + d_{\tilde{G}_1}(u_1). \end{aligned}$$

۲. به طور مشابه، با توجه به صورت قضیه، $\sigma_2 \leq \mu_1$ می باشد. بنابراین با استفاده از قضیه (۳.۳.۲)، $\sigma_1 \geq \mu_2$ نتیجه می شود.

با استفاده از فرمول (۳.۲) داریم:

$$d_{\tilde{G}_1 \times \tilde{G}_2}(u_1, u_2) = \sum_{u_1=v_1, u_2 v_2 \in E_2} \sigma_1(u_1) \wedge \mu_2(u_2 v_2) + \sum_{u_2=v_2, u_1 v_1 \in E_1} \sigma_2(u_2) \wedge \mu_1(u_1 v_1).$$

و چون $\sigma_1 \geq \mu_2$ و $\sigma_2 \leq \mu_1$ می باشد، بنابراین نتیجه می شود:

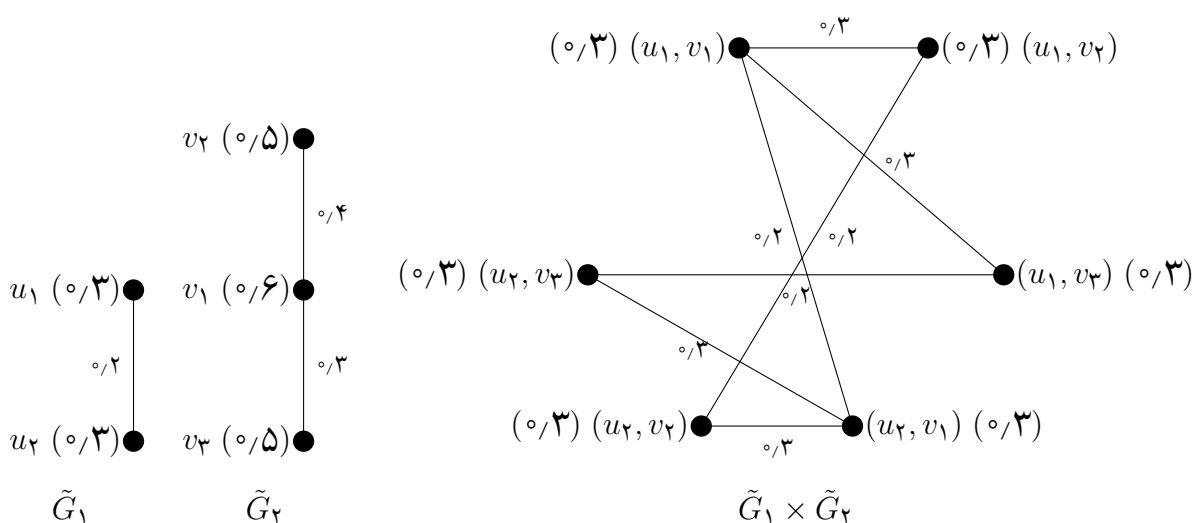
$$\begin{aligned} d_{\tilde{G}_1 \times \tilde{G}_2}(u_1, u_2) &= \sum_{u_1=v_1, u_2 v_2 \in E_2} \sigma_1(u_1) \wedge \mu_2(u_2 v_2) + \sum_{u_2=v_2, u_1 v_1 \in E_1} \sigma_2(u_2) \wedge \mu_1(u_1 v_1) \\ &= \sum_{u_2 v_2 \in E_2} \mu_2(u_2 v_2) + \sum_{u_1 v_1 \in E_1} \sigma_2(u_2) \\ &= \sum_{u_2 v_2 \in E_2} \mu_2(u_2 v_2) + \sum_{u_1 v_1 \in E_1} c_2 \\ &= d_{\tilde{G}_2}(u_2) + c_2 d_{G_1^*}(u_1). \end{aligned}$$

□

مثال ۵.۳.۲. گراف‌های فازی $\tilde{G}_1 : (\sigma_1, \mu_1)$ و $\tilde{G}_2 : (\sigma_2, \mu_2)$ را در شکل (۴.۲) در نظر بگیرید. در اینجا σ_1 یک ثابت با $\sigma_1 \leq \mu_2$ می‌باشد. بنابراین با استفاده از قضیه (۴.۳.۲)، داریم:

$$\begin{aligned} d_{\tilde{G}_1 \times \tilde{G}_2}(u_1, v_1) &= d_{\tilde{G}_1}(u_1) + c_1 d_{\tilde{G}_2^*}(v_1) \\ &= \circ/2 + \circ/3 \times 2 \\ &= \circ/2 + \circ/6 = \circ/8. \end{aligned}$$

این درجه‌ی حاصل ضرب دکارتی را در شکل $\tilde{G}_1 \times \tilde{G}_2$ در شکل (۴.۲)، می‌توان بررسی کرد.



شکل ۴.۲: حاصل ضرب دکارتی $\tilde{G}_1$ و $\tilde{G}_2$ ($\tilde{G}_1 \times \tilde{G}_2$)

۴.۲ ترکیب دو گراف فازی

ترکیب^{*} دو گراف فازی $\tilde{G}_1$ و $\tilde{G}_2$ به صورت یک گراف فازی

$$\tilde{G} = \tilde{G}_1[\tilde{G}_2] : (\sigma_1 \circ \sigma_2, \mu_1 \circ \mu_2)$$

روی $G^* : (V, E)$ که $V = V_1 \times V_2$ و

$$E = \{((u_1, u_2)(v_1, v_2)) \mid u_1 = v_1, u_2 v_2 \in E_2 \text{ یا } u_2 = v_2, u_1 v_1 \in E_1 \text{ یا } u_2 \neq v_2, u_1 v_1 \in E_1\}.$$

با

$$(\sigma_1 \circ \sigma_2)(u_1, u_2) = \sigma_1(u_1) \wedge \sigma_2(u_2), \quad \forall (u_1, u_2) \in V_1 \times V_2.$$

^{*}composition

و

$$(\mu_1 \circ \mu_2)((u_1, u_2), (v_1, v_2)) = \begin{cases} \sigma_1(u_1) \wedge \mu_2(u_2 v_2), & \text{اگر } u_1 = v_1, u_2 v_2 \in E_2 \\ \sigma_2(u_2) \wedge \mu_1(u_1 v_1), & \text{اگر } u_2 = v_2, u_1 v_1 \in E_1 \\ \sigma_2(u_2) \wedge \sigma_2(v_2) \wedge \mu_1(u_1 v_1), & \text{اگر } u_2 \neq v_2, u_1 v_1 \in E_1 \end{cases}$$

تعریف می‌شود [۱۱].

۱.۴.۲ درجه‌ی یک راس در ترکیب دو گراف فازی

با استفاده از تعریف ترکیب دو گراف فازی، به ازای هر $(u_1, u_2) \in V_1 \times V_2$ داریم:

$$\begin{aligned} d_{\tilde{G}_1[\tilde{G}_2]}(u_1, u_2) &= \sum_{(u_1, u_2)(v_1, v_2) \in E} (\mu_1 \circ \mu_2)((u_1, u_2)(v_1, v_2)) \\ &= \sum_{u_1=v_1, u_2 v_2 \in E_2} \sigma_1(u_1) \wedge \mu_2(u_2 v_2) + \sum_{u_2=v_2, u_1 v_1 \in E_1} \sigma_2(u_2) \wedge \mu_1(u_1 v_1) \\ &+ \sum_{u_2 \neq v_2, u_1 v_1 \in E_1} \sigma_2(u_2) \wedge \sigma_2(v_2) \wedge \mu_1(u_1 v_1). \end{aligned} \quad (۶.۲)$$

قضیه ۱.۴.۲. فرض کنید $\tilde{G}_1 : (\sigma_1, \mu_1)$ و $\tilde{G}_2 : (\sigma_2, \mu_2)$ دو گراف فازی باشند.

اگر $\sigma_1 \geq \mu_2$ و $\sigma_2 \geq \mu_1$ باشد، آنگاه

$$d_{\tilde{G}_1[\tilde{G}_2]}(u_1, u_2) = p_2 d_{\tilde{G}_1}(u_1) + d_{\tilde{G}_2}(u_2).$$

برهان. با استفاده از (۶.۲)،

$$\begin{aligned} d_{\tilde{G}_1[\tilde{G}_2]}(u_1, u_2) &= \sum_{u_1=v_1, u_2 v_2 \in E_2} \sigma_1(u_1) \wedge \mu_2(u_2 v_2) + \sum_{u_2=v_2, u_1 v_1 \in E_1} \sigma_2(u_2) \wedge \mu_1(u_1 v_1) \\ &+ \sum_{u_2 \neq v_2, u_1 v_1 \in E_1} \sigma_2(u_2) \wedge \sigma_2(v_2) \wedge \mu_1(u_1 v_1) \end{aligned}$$

با توجه به $\sigma_1 \geq \mu_2$ از صورت قضیه، نتیجه می‌شود:

$$\sum_{u_1=v_1, u_2 v_2 \in E_2} \sigma_1(u_1) \wedge \mu_2(u_2 v_2) = \sum_{u_1=v_1, u_2 v_2 \in E_2} \mu_2(u_2 v_2), \quad (۷.۲)$$

از طرفی با توجه به $\sigma_2 \geq \mu_1$ از صورت قضیه، نتیجه می‌شود:

$$\sum_{u_2=v_2, u_1 v_1 \in E_1} \sigma_2(u_2) \wedge \mu_1(u_1 v_1) = \sum_{u_2=v_2, u_1 v_1 \in E_1} \mu_1(u_1 v_1), \quad (۸.۲)$$

و

$$\sum_{u_2 \neq v_2, u_1 v_1 \in E_1} \sigma_2(u_2) \wedge \sigma_2(v_2) \wedge \mu_1(u_1 v_1) = \sum_{u_2 \neq v_2, u_1 v_1 \in E_1} \mu_1(u_1 v_1). \quad (۹.۲)$$

بنابراین از (۷.۲)، (۸.۲)، (۹.۲) داریم:

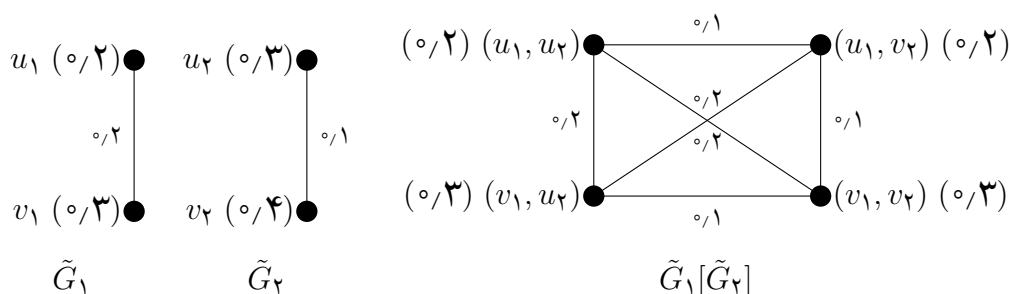
$$\begin{aligned}
 d_{\tilde{G}_1[\tilde{G}_2]}(u_1, u_2) &= \sum_{u_1=v_1, u_2 v_2 \in E_2} \sigma_1(u_1) \wedge \mu_2(u_2 v_2) + \sum_{u_2=v_2, u_1 v_1 \in E_1} \sigma_2(u_2) \wedge \mu_1(u_1 v_1) \\
 &+ \sum_{u_2 \neq v_2, u_1 v_1 \in E_1} \sigma_2(u_2) \wedge \sigma_2(v_2) \wedge \mu_1(u_1 v_1) \\
 &= \sum_{u_1=v_1, u_2 v_2 \in E_2} \mu_2(u_2 v_2) + \sum_{u_2=v_2, u_1 v_1 \in E_1} \mu_1(u_1 v_1) + \sum_{u_2 \neq v_2, u_1 v_1 \in E_1} \mu_1(u_1 v_1) \\
 &= d_{\tilde{G}_2}(u_2) + |V_2| \sum_{u_1 v_1 \in E_1} \mu_1(u_1 v_1) \\
 &= d_{\tilde{G}_2}(u_2) + p_2 d_{\tilde{G}_1}(u_1).
 \end{aligned}$$

□

مثال ۲.۴.۲. دو گراف فازی $\tilde{G}_2$ و $\tilde{G}_1$ را در شکل (۵.۲) در نظر بگیرید. در شکل (۵.۲)، $\sigma_1 \geq \mu_2$ و $\sigma_2 \geq \mu_1$ می‌باشد. بنابراین با استفاده از قضیه (۱.۴.۲) داریم:

$$\begin{aligned}
 d_{\tilde{G}_1[\tilde{G}_2]}(u_1, u_2) &= p_2 d_{\tilde{G}_1}(u_1) + d_{\tilde{G}_2}(u_2) \\
 &= 2 \times 0.2 + 0.1 \\
 &= 0.4 + 0.1 = 0.5.
 \end{aligned}$$

این درجه‌ی ترکیب در شکل $\tilde{G}_1[\tilde{G}_2]$ داده شده در شکل (۵.۲)، می‌تواند بررسی شود.



شکل ۵.۲: ترکیب $\tilde{G}_1$ و $\tilde{G}_2$ ($\tilde{G}_1[\tilde{G}_2]$)

قضیه ۳.۴.۲. فرض کنید $\tilde{G}_1 : (\sigma_1, \mu_1)$ و $\tilde{G}_2 : (\sigma_2, \mu_2)$ دو گراف فازی باشند.

۱. اگر $\sigma_1 \leq \mu_2$ و σ_1 به ازای هر $u \in V_1$ یک تابع ثابت به صورت: $\sigma_1(u_1) = c_1$ باشد. آنگاه

$$d_{\tilde{G}_1[\tilde{G}_2]}(u_1, u_2) = p_2 d_{\tilde{G}_1}(u_1) + c_1 d_{G_2^*}(u_2).$$

۲. اگر $\sigma_2 \leq \mu_1$ و σ_2 به ازای هر $u \in V_2$ یک تابع ثابت به صورت: $\sigma_2(u_2) = c_2$ باشد. آنگاه

$$d_{\tilde{G}_1[\tilde{G}_2]}(u_1, u_2) = d_{\tilde{G}_2}(u_2) + p_2 c_2 d_{G_1^*}(u_1).$$

برهان. ۱. با توجه به صورت قضیه داریم: $\sigma_1 \leq \mu_2$. بنابراین با استفاده از قضیه (۳.۳.۲)،
 $\sigma_2 \geq \mu_1$

با استفاده از (۶.۲) داریم:

$$\begin{aligned} d_{\tilde{G}_1[\tilde{G}_2]}(u_1, u_2) &= \sum_{u_1=v_1, u_2v_2 \in E_2} \sigma_1(u_1) \wedge \mu_2(u_2v_2) + \sum_{u_2=v_2, u_1v_1 \in E_1} \sigma_2(u_2) \wedge \mu_1(u_1v_1) \\ &+ \sum_{u_2 \neq v_2, u_1v_1 \in E_1} \sigma_2(u_2) \wedge \sigma_2(v_2) \wedge \mu_1(u_1v_1). \end{aligned}$$

از آنجایی که $\sigma_2 \geq \mu_1$ و $\sigma_1 \leq \mu_2$ می‌باشد، بنابراین نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} d_{\tilde{G}_1[\tilde{G}_2]}(u_1, u_2) &= \sum_{u_1=v_1, u_2v_2 \in E_2} \sigma_1(u_1) + \sum_{u_2=v_2, u_1v_1 \in E_1} \mu_1(u_1v_1) + \sum_{u_2 \neq v_2, u_1v_1 \in E_1} \mu_1(u_1v_1) \\ &= \sum_{u_2v_2 \in E_2} c_1 + |V_2| \sum_{u_1v_1 \in E_1} \mu_1(u_1v_1) \\ &= c_1 d_{G_2^*}(u_2) + p_2 d_{\tilde{G}_1}(u_1). \end{aligned}$$

۲. با توجه به صورت قضیه، $\sigma_2 \leq \mu_1$ می‌باشد. بنابراین با استفاده از قضیه (۳.۳.۲)، $\sigma_1 \geq \mu_2$.

با استفاده از (۶.۲) داریم:

$$\begin{aligned} d_{\tilde{G}_1[\tilde{G}_2]}(u_1, u_2) &= \sum_{u_1=v_1, u_2v_2 \in E_2} \sigma_1(u_1) \wedge \mu_2(u_2v_2) + \sum_{u_2=v_2, u_1v_1 \in E_1} \sigma_2(u_2) \wedge \mu_1(u_1v_1) \\ &+ \sum_{u_2 \neq v_2, u_1v_1 \in E_1} \sigma_2(u_2) \wedge \mu_1(u_1v_1). \end{aligned}$$

از آنجایی که $\sigma_2 \geq \mu_1$ و $\sigma_1 \leq \mu_2$ می‌باشد، بنابراین نتیجه می‌شود:

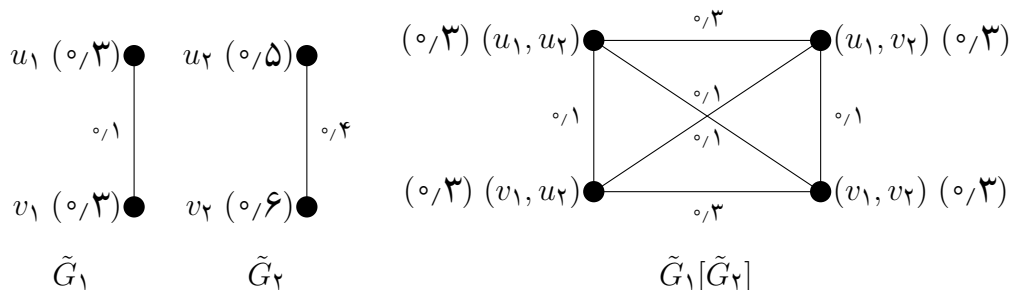
$$\begin{aligned} d_{\tilde{G}_1[\tilde{G}_2]}(u_1, u_2) &= \sum_{u_1=v_1, u_2v_2 \in E_2} \mu_2(u_2v_2) + \sum_{u_2=v_2, u_1v_1 \in E_1} \sigma_2(u_2) + \sum_{u_2 \neq v_2, u_1v_1 \in E_1} \sigma_2(u_2) \\ &= \sum_{u_2v_2 \in E_2} \mu_2(u_2v_2) + |V_2| \sum_{u_1v_1 \in E_1} \sigma_2(u_2) \\ &= d_{\tilde{G}_2}(u_2) + |V_2| \sum_{u_1v_1 \in E_1} c_2 \\ &= d_{\tilde{G}_2}(u_2) + p_2 c_2 d_{G_1^*}(u_1). \end{aligned}$$

□

مثال ۴.۴.۲. گراف‌های فازی $\tilde{G}_1$ و $\tilde{G}_2$ را در شکل (۶.۲) در نظر بگیرید. در شکل (۶.۲)، σ_1 یک تابع ثابت با $\sigma_1 \leq \mu_2$ می‌باشد. بنابراین با استفاده از قضیه (۳.۴.۲) داریم:

$$\begin{aligned} d_{\tilde{G}_1[\tilde{G}_2]}(u_1, u_2) &= p_2 d_{\tilde{G}_1}(u_1) + c_1 d_{G_2^*}(u_2) \\ &= 2 \times 0/1 + 0/3 \times 1 \\ &= 0/2 + 0/3 = 0/5. \end{aligned}$$

این درجه‌ی حاصل از ترکیب دو گراف فازی $\tilde{G}_1$ و $\tilde{G}_2$ را در شکل $\tilde{G}_1[\tilde{G}_2]$ در شکل (۶.۲)، می‌توان بررسی کرد.



شکل ۶.۲: ترکیب $\tilde{G}_1$ و $\tilde{G}_2$ در $(\tilde{G}_1[\tilde{G}_2])$

۵.۲ حاصل ضرب نرمال دو گراف فازی

حاصل ضرب نرمال^۵ از دو گراف فازی $\tilde{G}_1$ و $\tilde{G}_2$ به صورت یک گراف فازی:

$$\tilde{G} = \tilde{G}_1 \circ \tilde{G}_2 : (\sigma_1 \circ \sigma_2, \mu_1 \circ \mu_2)$$

روی $G^* : (V, E)$ که $V = V_1 \times V_2$ و

$$E = \{((u_1, u_2)(v_1, v_2)) \mid u_1 = v_1, u_2 v_2 \in E_2 \text{ یا } u_2 = v_2, u_1 v_1 \in E_1 \text{ یا } u_1 v_1 \in E_1, u_2 v_2 \in E_2\}.$$

با

$$(\sigma_1 \times \sigma_2)(u_1, u_2) = \sigma_1(u_1) \wedge \sigma_2(u_2), \quad \forall (u_1, u_2) \in V_1 \times V_2.$$

و

$$(\mu_1 \circ \mu_2)((u_1, u_2)(v_1, v_2)) = \begin{cases} \sigma_1(u_1) \wedge \mu_2(u_2 v_2), & \text{اگر } u_1 = v_1, u_2 v_2 \in E_2 \\ \sigma_2(u_2) \wedge \mu_1(u_1 v_1), & \text{اگر } u_2 = v_2, u_1 v_1 \in E_1 \\ \mu_1(u_1 v_1) \wedge \mu_2(u_2 v_2), & \text{اگر } u_1 v_1 \in E_1, u_2 v_2 \in E_2 \end{cases}$$

تعریف می‌شود [۱۲].

^۵normal product

۱.۵.۲ درجه‌ی یک راس در حاصل ضرب نرمال دو گراف فازی

با استفاده از تعریف حاصل ضرب نرمال از دو گراف فازی $\tilde{G}_1$ و $\tilde{G}_2$ ، به ازای هر $(u_1, u_2) \in V_1 \times V_2$ داریم:

$$\begin{aligned} d_{\tilde{G}_1 \circ \tilde{G}_2}(u_1, u_2) &= \sum_{((u_1, u_2)(v_1, v_2)) \in E} (\mu_1 \circ \mu_2)((u_1, u_2)(v_1, v_2)) \\ &= \sum_{u_1=v_1, u_2 v_2 \in E_2} \sigma_1(u_1) \wedge \mu_2(u_2 v_2) + \sum_{u_2=v_2, u_1 v_1 \in E_1} \sigma_2(u_2) \wedge \mu_1(u_1 v_1) \\ &\quad + \sum_{u_2 v_2 \in E_2, u_1 v_1 \in E_1} \mu_2(u_2 v_2) \wedge \mu_1(u_1 v_1). \end{aligned} \quad (۱۰.۲)$$

قضیه ۱.۵.۲. فرض کنید $\tilde{G}_1 : (\sigma_1, \mu_1)$ و $\tilde{G}_2 : (\sigma_2, \mu_2)$ دو گراف فازی باشند.

اگر $\mu_1 \leq \mu_2$ و $\sigma_2 \geq \mu_1$ ، $\sigma_1 \geq \mu_2$ باشند، آنگاه

$$d_{\tilde{G}_1 \circ \tilde{G}_2}(u_1, u_2) = p_2 d_{\tilde{G}_1}(u_1) + d_{\tilde{G}_2}(u_2).$$

برهان. با استفاده از (۱۰.۲) داریم:

$$\begin{aligned} d_{\tilde{G}_1 \circ \tilde{G}_2}(u_1, u_2) &= \sum_{u_1=v_1, u_2 v_2 \in E_2} \sigma_1(u_1) \wedge \mu_2(u_2 v_2) + \sum_{u_2=v_2, u_1 v_1 \in E_1} \sigma_2(u_2) \wedge \mu_1(u_1 v_1) \\ &\quad + \sum_{u_2 v_2 \in E_2, u_1 v_1 \in E_1} \mu_2(u_2 v_2) \wedge \mu_1(u_1 v_1). \end{aligned}$$

با توجه به صورت قضیه چون $\mu_1 \leq \mu_2$ و $\sigma_2 \geq \mu_1$ ، $\sigma_1 \geq \mu_2$ می‌باشند. بنابراین نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} d_{\tilde{G}_1 \circ \tilde{G}_2}(u_1, u_2) &= \sum_{u_2 v_2 \in E_2} \mu_2(u_2 v_2) + \sum_{u_2=v_2, u_1 v_1 \in E_1} \mu_1(u_1 v_1) + \sum_{u_1 v_1 \in E_1} \mu_1(u_1 v_1) \\ &= d_{\tilde{G}_2}(u_2) + |V_2| d_{\tilde{G}_1}(u_1) \\ &= d_{\tilde{G}_2}(u_2) + p_2 d_{\tilde{G}_1}(u_1). \end{aligned}$$

□

مثال ۲.۵.۲. گراف‌های فازی $\tilde{G}_1$ و $\tilde{G}_2$ را در شکل (۷.۲) در نظر بگیرید. در شکل (۷.۲) چون

$$\sigma_1 \geq \mu_2, \sigma_2 \geq \mu_1, \mu_1 \leq \mu_2.$$

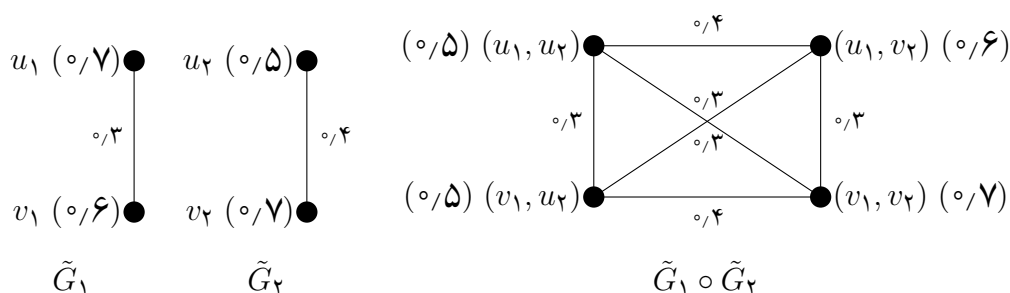
با استفاده از قضیه (۱.۵.۲) داریم:

$$\begin{aligned} d_{\tilde{G}_1 \circ \tilde{G}_2}(u_1, u_2) &= d_{\tilde{G}_2}(u_2) + p_2 d_{\tilde{G}_1}(u_1) \\ &= \circ/4 + 2 \times \circ/3 = 1, \end{aligned}$$

و همچنین

$$\begin{aligned} d_{\tilde{G}_1 \circ \tilde{G}_2}(v_1, v_2) &= d_{\tilde{G}_2}(v_2) + p_2 d_{\tilde{G}_1}(v_1) \\ &= 0/4 + 2 \times 0/3 = 1. \end{aligned}$$

به‌طور مشابه، درجات همه‌ی رئوس در $\tilde{G}_1 \circ \tilde{G}_2$ را می‌توانیم بیابیم. که این درجات را می‌توان در $\tilde{G}_1 \circ \tilde{G}_2$ ، در شکل (۷.۲) می‌توان بررسی نمود.



شکل ۷.۲: حاصل ضرب نرمال از $\tilde{G}_1$ و $\tilde{G}_2$ ($\tilde{G}_1 \circ \tilde{G}_2$)

۶.۲ حاصل ضرب ترانسفوری دو گراف فازی

حاصل ضرب ترانسفوری^۶ از دو گراف فازی $\tilde{G}_1$ و $\tilde{G}_2$ به‌صورت یک گراف فازی:

$$\tilde{G} : (\tilde{G}_1 \otimes \tilde{G}_2) = (\sigma_1 \otimes \sigma_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$$

روی (V, E) که $G^* : (V, E)$ و $V = V_1 \times V_2$

$$E = \{((u_1, u_2)(v_1, v_2)) \mid u_1 v_1 \in E_1, u_2 v_2 \in E_2\}.$$

با

$$(\sigma_1 \otimes \sigma_2)(u_1, u_2) = \sigma_1(u_1) \wedge \sigma_2(u_2), \quad \forall (u_1, u_2) \in V_1 \times V_2.$$

و

$$(\mu_1 \otimes \mu_2)((u_1, u_2), (v_1, v_2)) = \mu_1(u_1 v_1) \wedge \mu_2(u_2 v_2), \quad u_1 v_1 \in E_1, u_2 v_2 \in E_2 \quad \text{اگر}$$

تعریف می‌شود [۱۲].

^۶tensfor produact

۱.۶.۲ درجه‌ی یک راس در حاصل ضرب ترانسفوری دو گراف فازی

با استفاده از تعریف حاصل ضرب ترانسفوری دو گراف فازی $\tilde{G}_1$ و $\tilde{G}_2$ ، به ازای هر $(u_1, u_2) \in V_1 \times V_2$ داریم:

$$\begin{aligned} d_{\tilde{G}_1 \otimes \tilde{G}_2}(u_1, u_2) &= \sum (\mu_1 \otimes \mu_2)((u_1, u_2)(v_1, v_2)) \\ &= \sum_{u_1 v_1 \in E_1, u_2 v_2 \in E_2} \mu_1(u_1 v_1) \wedge \mu_2(u_2 v_2). \end{aligned} \quad (11.2)$$

قضیه ۱.۶.۲. فرض کنید $\tilde{G}_1 : (\sigma_1, \mu_1)$ و $\tilde{G}_2 : (\sigma_2, \mu_2)$ دو گراف فازی باشند. اگر $\mu_2 \geq \mu_1$ باشد، آنگاه

$$d_{\tilde{G}_1 \otimes \tilde{G}_2}(u_1, u_2) = d_{\tilde{G}_1}(u_1).$$

اگر $\mu_1 \geq \mu_2$ باشد، آنگاه

$$d_{\tilde{G}_1 \otimes \tilde{G}_2}(u_1, u_2) = d_{\tilde{G}_2}(u_2).$$

برهان. با استفاده از (۱۱.۲) داریم:

$$d_{\tilde{G}_1 \otimes \tilde{G}_2}(u_1, u_2) = \sum_{u_1 v_1 \in E_1, u_2 v_2 \in E_2} \mu_1(u_1 v_1) \wedge \mu_2(u_2 v_2),$$

از طرفی با توجه به صورت قضیه، اگر $\mu_2 \geq \mu_1$ باشد آنگاه نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} d_{\tilde{G}_1 \otimes \tilde{G}_2}(u_1, u_2) &= \sum_{u_1 v_1 \in E_1, u_2 v_2 \in E_2} \mu_1(u_1 v_1) \wedge \mu_2(u_2 v_2) \\ &= \sum_{u_1 v_1 \in E_1} \mu_1(u_1 v_1) \\ &= d_{\tilde{G}_1}(u_1). \end{aligned}$$

به‌طور مشابه، برای اثبات دوم قضیه، اگر $\mu_1 \geq \mu_2$ باشد آنگاه نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} d_{\tilde{G}_1 \otimes \tilde{G}_2}(u_1, u_2) &= \sum_{u_1 v_1 \in E_1, u_2 v_2 \in E_2} \mu_1(u_1 v_1) \wedge \mu_2(u_2 v_2) \\ &= \sum_{u_2 v_2 \in E_2} \mu_2(u_2 v_2) \\ &= d_{\tilde{G}_2}(u_2). \end{aligned}$$

□

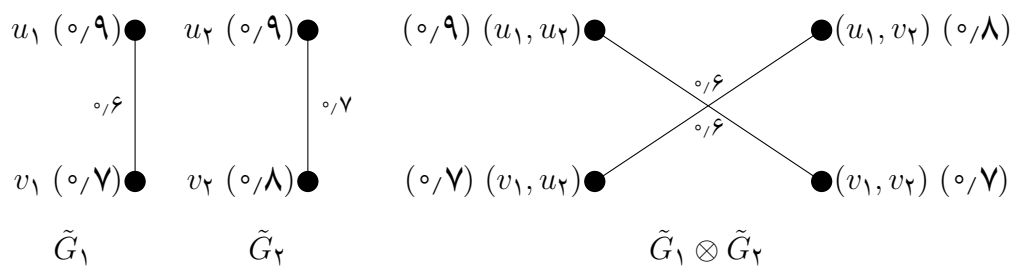
مثال ۲.۶.۲. گراف‌های فازی $\tilde{G}_1$ و $\tilde{G}_2$ را در شکل (۸.۲) در نظر بگیرید. در شکل (۸.۲)، $\mu_2 \geq \mu_1$ می‌باشد، در نتیجه با استفاده از قضیه (۱.۶.۲) داریم:

$$\begin{aligned} d_{\tilde{G}_1 \otimes \tilde{G}_2}(u_1, u_2) &= d_{\tilde{G}_1}(u_1) \\ &= ۰/۶ \end{aligned}$$

و همچنین،

$$\begin{aligned} d_{\tilde{G}_1 \otimes \tilde{G}_2}(v_1, v_2) &= d_{\tilde{G}_1}(v_1) \\ &= 0/6 \end{aligned}$$

این حاصل ضرب ترانسفوری از دو گراف فازی $\tilde{G}_1$ و $\tilde{G}_2$ در $\tilde{G}_1 \otimes \tilde{G}_2$ را در شکل (۸.۲) می‌توان بررسی کرد.



شکل ۸.۲: حاصل ضرب ترانسفوری $\tilde{G}_1$ و $\tilde{G}_2$ در $(\tilde{G}_1 \otimes \tilde{G}_2)$

فصل ۳

یکریختی روی گراف های فازی

در این فصل یکریختی بین گراف های فازی با یک رابطه ی هم ارزی اثبات می شود. و هم چنین برخی از ویژگی های خود متمم و خود متمم ضعیف گراف های فازی را بررسی می کنیم. مطالب این فصل از مرجع [۷] آورده شده است.

۱.۳ ویژگی های اساسی یکریختی

برای تعاریف زیر فرض می کنیم $\tilde{G}(\sigma, \mu)$ و $\tilde{G}'(\sigma', \mu')$ دو گراف فازی با مجموعه های زمینه ی V و V' باشند.

تعریف ۱.۱.۳. یک همریختی^۱ از گراف های فازی $\tilde{G} \rightarrow \tilde{G}'$ ، نگاشت $h : V \rightarrow V'$ می باشد، که شرایط زیر برقرار می باشد:

$$\sigma(x) \leq \sigma'(h(x)) \quad \forall x \in V$$

و

$$\mu(xy) \leq \mu'(h(x)h(y)) \quad \forall x, y \in V.$$

تعریف ۲.۱.۳. یک یکریختی ضعیف^۲ $\tilde{G} \rightarrow \tilde{G}'$ ، نگاشت $h : V \rightarrow V'$ می باشد که یک همریختی دوسویی است و شرط زیر برقرار می باشد.

$$\sigma(x) = \sigma'(h(x)) \quad \forall x \in V$$

مثال ۳.۱.۳. فرض کنید $\tilde{G} : (\sigma, \mu)$ و $\tilde{G}' : (\sigma', \mu')$ گراف های فازی شامل مجموعه های زمینه ی $V = \{a, b, c\}$ و $V' = \{a', b', c'\}$ باشند.

$$\sigma : V \rightarrow [0, 1] \quad \mu : V \times V \rightarrow [0, 1]$$

^۱homomorphism

^۲weak isomorphism

$$\sigma' : V' \rightarrow [0, 1] \quad \mu' : V' \times V' \rightarrow [0, 1]$$

به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\sigma(a) = \frac{1}{4}, \sigma(b) = \frac{1}{4}, \sigma(c) = \frac{1}{3};$$

$$\mu(ab) = \frac{1}{5}, \mu(bc) = \frac{1}{5}, \mu(ac) = \frac{1}{4};$$

$$\sigma'(a') = \frac{1}{4}, \sigma'(b') = \frac{1}{4}, \sigma'(c') = \frac{1}{3};$$

$$\mu'(a'b') = \frac{1}{4}, \mu'(b'c') = \frac{1}{4}, \mu'(a'c') = \frac{1}{3};$$

با تعریف $h : V \rightarrow V'$ به صورت:

$$h(a) = a', h(b) = b', h(c) = c';$$

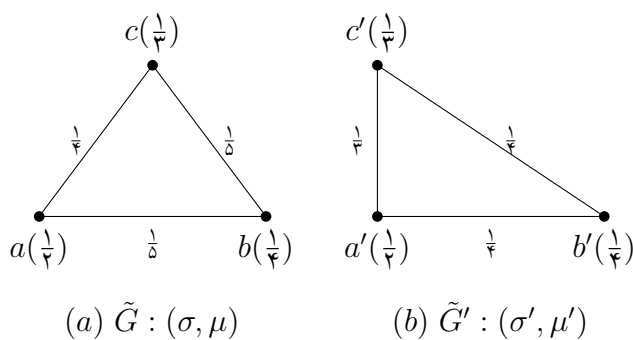
که h نگاشت دوسویی با شرایط زیر می باشد:

$$\sigma(x) = \sigma'(h(x)) \quad \forall x \in V$$

و

$$\mu(xy) \leq \mu'(h(x)h(y)) \quad \forall x, y \in V.$$

در شکل (۱.۳) (a) با شکل (۱.۳) (b)، یکرخت ضعیف می باشد.



شکل ۱.۳: یکرختی ضعیف

تعریف ۴.۱.۳. یک یکرختی هم-ضعیف^۳ $h : \tilde{G} \rightarrow \tilde{G}'$ ، یک نگاشت $h : V \rightarrow V'$ می باشد که یک همریختی دوسویی است و رابطه ی زیر برقرار می باشد.

$$\mu(xy) = \mu'(h(x)h(y)) \quad \forall x, y \in V$$

^۳co-weak isomorphism

مثال ۵.۱.۳. فرض کنید $\tilde{G} : (\sigma, \mu)$ و $\tilde{G}' : (\sigma', \mu')$ گراف‌های فازی شامل مجموعه‌های زمینه‌ی $V = \{a, b, c\}$ و $V' = \{a', b', c'\}$ باشند که

$$\sigma : V \rightarrow [0, 1] \quad \mu : V \times V \rightarrow [0, 1]$$

$$\sigma' : V' \rightarrow [0, 1] \quad \mu' : V' \times V' \rightarrow [0, 1]$$

به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} \sigma(a) &= \frac{1}{3}, \sigma(b) = \frac{1}{2}, \sigma(c) = \frac{1}{4}; \\ \mu(ab) &= \frac{1}{3}, \mu(bc) = \frac{1}{5}, \mu(ac) = \frac{1}{4}; \\ \sigma'(a') &= \frac{1}{2}, \sigma'(b') = 1, \sigma'(c') = \frac{1}{4}; \\ \mu'(a'b') &= \frac{1}{3}, \mu'(b'c') = \frac{1}{5}, \mu'(a'c') = \frac{1}{4}; \end{aligned}$$

با تعریف $h : V \rightarrow V'$ به صورت:

$$h(a) = a', h(b) = b', h(c) = c';$$

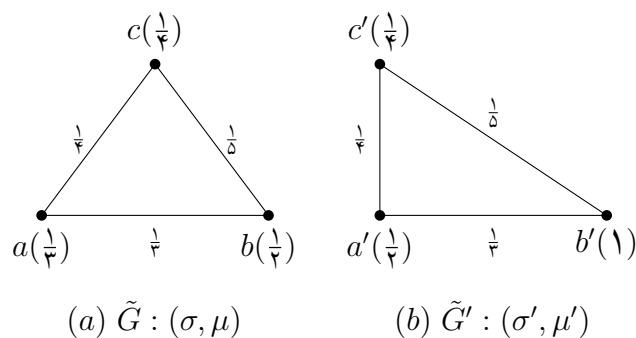
که h نگاشت دوسویی شامل

$$\sigma(x) \leq \sigma'(h(x)) \quad \forall x \in V$$

و

$$\mu(xy) = \mu'(h(x)h(y)) \quad \forall x, y \in V$$

می‌باشد. بنابراین در شکل (۲.۳)، شکل (۲.۳) با شکل (۲.۳) یکرخت هم-ضعیف می‌باشد.



شکل ۲.۳: یکرختی هم-ضعیف

تعریف ۶.۱.۳. یک یکرختی^۴ $\tilde{G} \rightarrow \tilde{G}'$ یک نگاشت دوسویی $h : V \rightarrow V'$ است، که شرط زیربرقرار می‌باشد.

$$\sigma(x) = \sigma'(h(x)) \quad \forall x \in V$$

^۴isomorphism

$$\mu(xy) = \mu'(h(x)h(y)) \quad \forall x, y \in V$$

و با $\tilde{G} \cong \tilde{G}'$ نمایش می‌دهیم.

فرض کنید $\tilde{G} : (\sigma, \mu)$ و $\tilde{G}' : (\sigma', \mu')$ دو گراف فازی باشند. با توجه به تعاریف فوق خواص زیر همواره برقرار است.

۱. یک یکرختی ضعیف وزن‌های رئوس و نه لزوماً وزن‌های یالی را حفظ می‌کند.
۲. یک یکرختی هم-ضعیف وزن‌های یالی و نه لزوماً وزن‌های رئوس را حفظ می‌کند.
۳. یک یکرختی هم وزن‌های یالی و هم وزن‌های راسی را حفظ می‌کند.
۴. وقتی دو گراف فازی $\tilde{G}$ و $\tilde{G}'$ یکسان باشند، یکرختی ضعیف بین آنها یک یکرختی می‌شود و به‌طور مشابه، یکرختی هم-ضعیف بین آنها یک یکرختی می‌شود.
- تعریف ۷.۱.۳. یک درون ریختی^۵ از یک گراف فازی $\tilde{G} : (\sigma, \mu)$ یک همریختی از $\tilde{G}$ به خودش است.
- تعریف ۸.۱.۳. یک خودریختی^۶ از یک گراف فازی $\tilde{G} : (\sigma, \mu)$ یک یکرختی از $\tilde{G}$ به خودش است.
- در گراف قطعی هنگامی که دو گراف یکرخت باشند، دارای اندازه و مرتبه یکسانی هستند.
- قضیه ۹.۱.۳. برای هر دو گراف فازی یکرخت، مرتبه و اندازه آنها یکسان می‌باشد.

برهان. اگر $h : \tilde{G} \rightarrow \tilde{G}'$ یک یکرختی بین گراف‌های فازی $\tilde{G}$ و $\tilde{G}'$ با مجموعه‌های زمینه‌ی V و V' باشد، آنگاه

$$\sigma(x) = \sigma'(h(x)) \quad \forall x \in V \quad (1.3)$$

$$\mu(xy) = \mu'(h(x)h(y)) \quad \forall x, y \in V \quad (2.3)$$

با توجه به (۱.۳) و با استفاده از تعریف مرتبه در گراف فازی داریم:

$$O(\tilde{G}) = \sum_{x \in V} \sigma(x) = \sum_{x \in V} \sigma'(h(x)) = O(\tilde{G}')$$

با توجه به (۲.۳) و با استفاده از تعریف اندازه در گراف فازی داریم:

$$S(\tilde{G}) = \sum_{x, y \in V} \mu(xy) = \sum_{x, y \in V} \mu'(h(x)h(y)) = S(\tilde{G}').$$

□

نتیجه ۱۰.۱.۳. عکس قضیه (۹.۱.۳) لزوماً برقرار نمی‌باشد.

^۵endomorphism

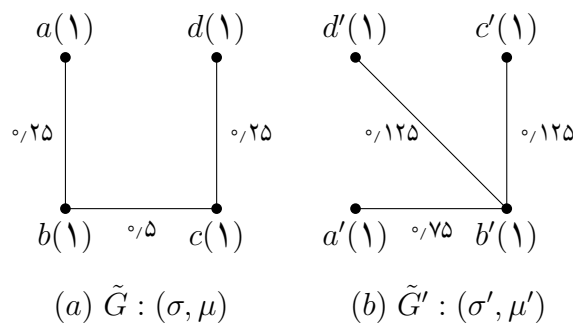
^۶automorphism

مثال ۱۱.۱.۳. فرض کنید $\tilde{G} : (\sigma, \mu)$ و $\tilde{G}' : (\sigma', \mu')$ گراف‌های فازی با مجموعه‌های زمینه‌ی $V = \{a, b, c, d\}$ و $V' = \{a', b', c', d'\}$ باشند.

$$\sigma(x) = 1 \quad \forall x \in V \quad \text{و} \quad \mu(ab) = 0.25, \mu(bc) = 0.5, \mu(cd) = 0.25;$$

$$\sigma'(x) = 1 \quad \forall x \in V' \quad \text{و} \quad \mu'(a'b') = 0.75, \mu'(b'c') = 0.125, \mu'(b'd') = 0.125;$$

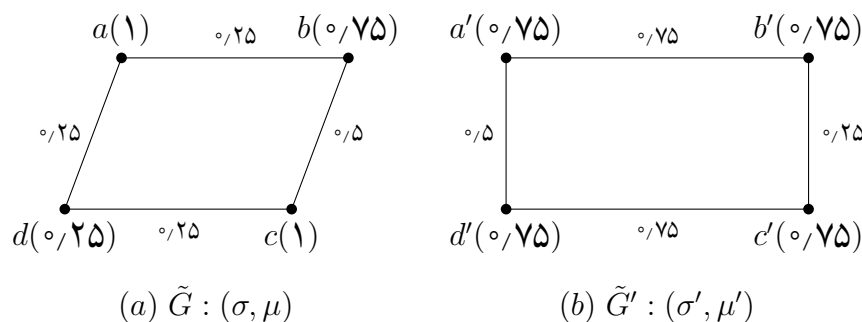
در دو گراف فازی $\tilde{G}$ و $\tilde{G}'$ در شکل (۳.۳)، $O(\tilde{G}) = O(\tilde{G}') = 4$ و $S(\tilde{G}) = S(\tilde{G}') = 1$ می‌باشد، اما دو گراف یکرخت نیستند. بنابراین نتیجه‌ی (۱۰.۱.۳) برقرار می‌باشد.



شکل ۳.۳: گراف‌هایی با مرتبه و اندازه‌ی یکسان اما غیر یکرخت

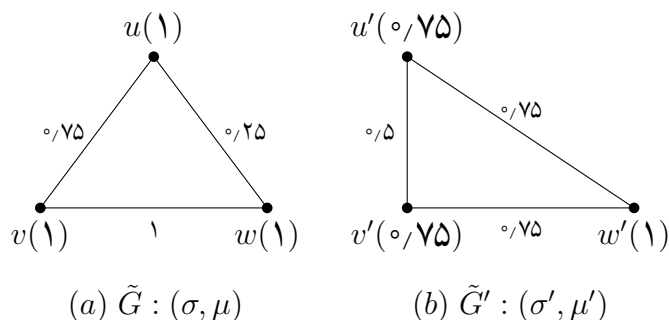
ملاحظه ۱۲.۱.۳. اگر دو گراف فازی یکرخت ضعیف باشند، آنگاه مرتبه‌های آن‌ها یکسان است. اما گراف‌های با مرتبه‌ی یکسان لزومی ندارد یکرخت ضعیف باشند.

مثال ۱۳.۱.۳. در شکل (۴.۳)، هر دو گراف فازی دارای مرتبه‌ی ۳ می‌باشند اما یکرخت ضعیف نیستند.



شکل ۴.۳: گراف‌هایی با مرتبه‌ی یکسان، اما یکرخت ضعیف نیستند

ملاحظه ۱۴.۱.۳. اگر دو گراف فازی یکرخت هم-ضعیف باشند، آنگاه اندازه‌های آن‌ها یکسان می‌باشد. اما گراف‌های فازی با اندازه‌ی یکسان لزومی ندارد یکرخت هم-ضعیف باشند.



شکل ۵.۳: گراف های فازی با اندازه ی یکسان اما یکرخت هم-ضعیف نیستند

مثال ۱۵.۱.۳. دو گراف فازی $\tilde{G} : (\sigma, \mu)$ و $\tilde{G}' : (\sigma', \mu')$ در شکل (۵.۳) دارای اندازه ی ۲ می باشند، اما یکرخت هم-ضعیف نیستند.

قضیه ۱۶.۱.۳. اگر $\tilde{G}$ و $\tilde{G}'$ گراف های فازی یکرخت باشند، آنگاه درجات رئوس آنها حفظ می شود. برهان. فرض کنید $h : \tilde{G} \rightarrow \tilde{G}'$ یک یکرختی از $\tilde{G}$ بر روی $\tilde{G}'$ باشد. با استفاده از تعریف یکرختی داریم:

$$\mu(xy) = \mu'(h(x)h(y)) \quad \forall x, y \in V, \quad (3.3)$$

هم چنین، با استفاده از (۳.۳) و با توجه به تعریف درجه ی یک راس در یک گراف فازی داریم:

$$d(u) = \sum_{\substack{v \neq u \\ v \in V}} \mu(uv) = \sum_{\substack{v \neq u \\ v \in V}} \mu'(h(u)h(v)) = d(h(u)).$$

□

نتیجه ۱۷.۱.۳. عکس قضیه ی (۱۶.۱.۳) لزوماً برقرار نمی باشد.

مثال ۱۸.۱.۳. گراف $\tilde{G} : (\sigma, \mu)$ با مجموعه ی زمینه ی $V = \{a, b\}$ که

$$\sigma(a) = \frac{1}{4}, \sigma(b) = \frac{1}{4}, \quad \mu(ab) = \frac{1}{4};$$

و گراف $\tilde{G}' : (\sigma', \mu')$ با مجموعه ی زمینه ی $V' = \{a', b'\}$ که

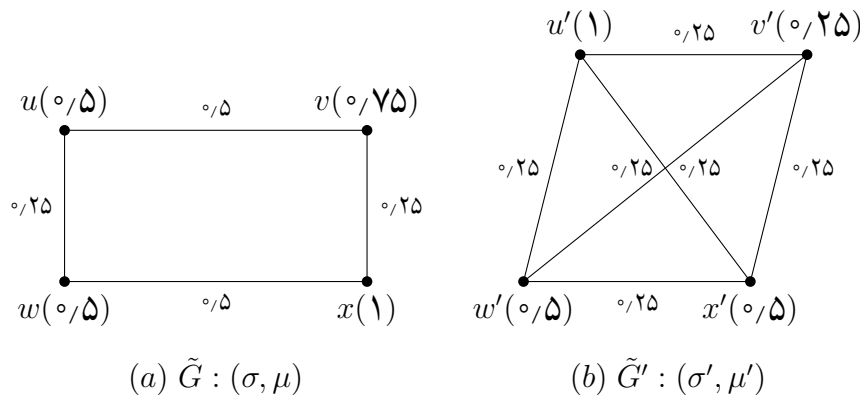
$$\sigma'(a') = \frac{1}{4}, \sigma'(b') = \frac{3}{4}, \quad \mu'(a'b') = \frac{1}{4};$$

را در نظر بگیرید. در اینجا

$$d(a) = d(b) = d(a') = d(b') = \frac{1}{4}$$

اما $\tilde{G} : (\sigma, \mu)$ و $\tilde{G}' : (\sigma', \mu')$ یکرخت نیستند فقط یکرخت هم-ضعیف هستند.

ملاحظه ۱۹.۱.۳. اگر دو گراف فازی یکرخت هم-ضعیف باشند، آنگاه درجات رئوس آنها حفظ می شود. اما دو گراف فازی که درجه ی رئوس را حفظ می کنند، لزومی ندارد یکرخت هم-ضعیف باشند.



شکل ۶.۳: گراف‌های فازی نگهدارنده‌ی درجه‌ی رئوس

مثال ۲۰.۱.۳. در دو گراف فازی $\tilde{G}$ و $\tilde{G}'$ در شکل (۶.۳)، درجه‌ی هر راس ۰/۷۵ می‌باشد اما دو گراف نه یکرخت ضعیف و نه یکرخت هم-ضعیف هستند.

قضیه ۲۱.۱.۳. یکرختی بین گراف‌های فازی یک رابطه‌ی هم‌ارزی است.

برهان. فرض کنید $\tilde{G} : (\sigma, \mu)$ و $\tilde{G}' : (\sigma', \mu')$ و $\tilde{G}'' : (\sigma'', \mu'')$ گراف‌های فازی، به‌ترتیب با مجموعه‌های زمینه‌ی V و V' و V'' باشند.

۱. انعکاسی: نگاشت همانی $h : V \rightarrow V$ را در نظر بگیرید که به ازای هر $x \in V$ ، $h(x) = x$ می‌باشد. که h یک نگاشت دوسویی است و روابط

$$\sigma(x) = \sigma(h(x)) \quad \forall x \in V$$

$$\mu(xy) = \mu(h(x)h(y)) \quad \forall x, y \in V$$

برقرار می‌باشد. از این‌رو h یک یکرختی از گراف فازی به خودش می‌باشد. بنابراین گراف فازی G با خودش یکرخت است (یعنی $\tilde{G} \cong \tilde{G}$). در نتیجه رابطه‌ی انعکاسی برقرار است.

۲. تقارنی: فرض کنید $h : V \rightarrow V'$ یک یکرختی از $\tilde{G}$ بر روی $\tilde{G}'$ باشد، آنگاه h یک نگاشت دوسویی

$$h(x) = x', x \in V \quad (۴.۳)$$

است، که

$$\sigma(x) = \sigma'(h(x)) \quad \forall x \in V \quad (۵.۳)$$

$$\mu(xy) = \mu'(h(x)h(y)) \quad \forall x, y \in V$$

برقرار می‌باشد. چون h دوسویی است با استفاده از (۴.۳) داریم:

$$h^{-1}(x') = x \quad \forall x' \in V'; \quad (۶.۳)$$

و با استفاده از (۴.۳) و (۶.۳) در (۵.۳) داریم:

$$\sigma(h^{-1}(x')) = \sigma'(x') \quad \forall x' \in V'$$

$$\mu(h^{-1}(x')h^{-1}(y')) = \mu'(x'y') \quad \forall x', y' \in V' \quad (7.3)$$

بنابراین یک نگاشت یک به یک و پوشا $h^{-1} : V' \rightarrow V$ را به دست می آوریم، که یک یکرختی از $\tilde{G}'$ بر روی $\tilde{G}$ می باشد. به عبارت دیگر،

$$\tilde{G} \cong \tilde{G}' \implies \tilde{G}' \cong \tilde{G}.$$

در نتیجه رابطه ی تقارنی برقرار است.

۳. تعدی : فرض کنید $h : V \rightarrow V'$ و $g : V' \rightarrow V''$ به ترتیب، یکرختی هایی از G بر روی $\tilde{G}'$ و

$\tilde{G}'$ بر روی G'' باشند. آنگاه $g \circ h$ یک نگاشت یک به یک و پوشا از V به V'' است که

$$(g \circ h)(x) = g(h(x)) \quad \forall x \in V$$

هم چنین $h : V \rightarrow V'$ یک یکرختی است، که به ازای هر $x \in V$ ، $h(x) = x'$ می باشد، که

$$\sigma(x) = \sigma'(h(x)) \quad \forall x \in V$$

$$\mu(xy) = \mu'(h(x)h(y)) \quad \forall x, y \in V$$

برقرار می باشد. به عبارت دیگر،

$$\sigma(x) = \sigma'(x') \quad \forall x \in V \quad (8.3)$$

$$\mu(xy) = \mu'(x'y') \quad \forall x, y \in V \quad (9.3)$$

از آنجایی که g یک یکرختی از V' به V'' است داریم:

$$g(x') = x'', \quad x' \in V'$$

$$\sigma'(x') = \sigma''(g(x')) \quad \forall x' \in V' \quad (10.3)$$

$$\mu'(x'y') = \mu''(g(x')g(y')) \quad \forall x', y' \in V' \quad (11.3)$$

از (۸.۳) و (۱۰.۳) و با استفاده از $h(x) = x'$ ، $x \in V$ داریم:

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= \sigma'(x') \quad \forall x \in V \\ &= \sigma''(g(x')) \quad \forall x' \in V' \\ &= \sigma''(g(h(x))) \quad \forall x \in V \end{aligned}$$

از (۹.۳) و (۱۱.۳) داریم،

$$\begin{aligned} \mu(xy) &= \mu'(x'y') \quad \forall x, y \in V \\ &= \mu''(g(x')g(y')) \quad \forall x', y' \in V' \\ &= \mu''(g(h(x))g(h(y))) \quad \forall x, y \in V. \end{aligned}$$

در نتیجه رابطه‌ی تعدی برقرار است. بنابراین $g \circ h$ یک یکرختی بین $\tilde{G}$ و $\tilde{G}''$ است. در نتیجه یکرختی بین گراف‌های فازی یک رابطه‌ی هم ارزی است.

□

قضیه ۲۲.۱.۳. یک یکرختی ضعیف بین گراف‌های فازی رابطه‌ی جزئاً مرتب را برقرار می‌کند.

برهان. فرض کنید $\tilde{G} : (\sigma, \mu)$ و $\tilde{G}' : (\sigma', \mu')$ و $\tilde{G}'' : (\sigma'', \mu'')$ گراف‌های فازی به‌ترتیب با مجموعه‌های زمینه‌ی V و V' و V'' باشند.

۱. **انعکاسی:** نگاشت همانی $h : V \rightarrow V$ را در نظر بگیرید، که به ازای هر $x \in V$ ، $h(x) = x$ می‌باشد. که h یک نگاشت دوسویی است و روابط

$$\sigma(x) = \sigma(h(x)) \quad \forall x \in V$$

$$\mu(xy) = \mu(h(x)h(y)) \quad \forall x, y \in V$$

برقرار می‌باشد. از این‌رو h یک یکرختی ضعیف از گراف فازی به خودش می‌باشد. بنابراین $\tilde{G}$ با خودش یکرخت ضعیف است. در نتیجه رابطه‌ی انعکاسی برقرار است.

۲. **پادتنقارنی:** فرض کنید h یک یکرختی ضعیف بین $\tilde{G}$ و $\tilde{G}'$ و g یک یکرختی ضعیف بین $\tilde{G}'$ و $\tilde{G}$ باشند. به عبارت دیگر، $h : V \rightarrow V'$ یک نگاشت دوسویی $h(x) = x'$ ، $x \in V$ است که

$$\sigma(x) = \sigma'(h(x)) \quad \forall x \in V$$

$$\mu(xy) \leq \mu'(h(x)h(y)) \quad \forall x, y \in V \quad (۱۲.۳)$$

برقرار می‌باشد و $g : V' \rightarrow V$ یک نگاشت دوسویی است که

$$\sigma'(x') = \sigma(g(x')) \quad \forall x' \in V'$$

$$\mu'(x'y') \leq \mu(g(x')g(y')) \quad \forall x'y' \in V' \quad (۱۳.۳)$$

برقرار می‌باشد، نامعادلات (۱۲.۳) و (۱۳.۳)، بر روی مجموعه‌های متناهی V و V' ، فقط در صورتی که $\tilde{G}$ و $\tilde{G}'$ ، تعداد یال‌های یکسانی داشته باشند و یال‌های متناظر مقادیر عضویت یکسانی داشته باشند، به خوبی برقرار می‌باشند. بنابراین $\tilde{G}$ و $\tilde{G}'$ یکسانند.

۳. **تعدی:** فرض کنید $h : V \rightarrow V'$ و $g : V' \rightarrow V''$ به‌ترتیب، یکرختی‌هایی ضعیف از G بر روی $\tilde{G}'$ و $\tilde{G}''$ باشند. آنگاه $g \circ h$ یک نگاشت یک به یک و پوشا از V به V'' است که

$$(g \circ h)(x) = g(h(x)) \quad \forall x \in V$$

از آنجایی که h یک یکرختی ضعیف است، داریم:

$$h(x) = x', \quad x \in V, \quad \sigma(x) = \sigma'(h(x)) \quad \forall x \in V \quad (۱۴.۳)$$

$$\mu(xy) \leq \mu'(h(x)h(y)) \quad \forall x, y \in V \quad (15.3)$$

و از آنجایی که g یک یکرختی ضعیف از V' به V'' است، داریم:

$$g(x') = x'', \quad x' \in V', \quad \sigma'(x') = \sigma''(g(x')) \quad \forall x' \in V' \quad (16.3)$$

$$\mu'(x'y') \leq \mu''(g(x')g(y')) \quad \forall x', y' \in V' \quad (17.3)$$

از (۱۴.۳) و (۱۶.۳)

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= \sigma'(x') \quad \forall x \in V \\ &= \sigma''(g(x')) \quad \forall x' \in V' \\ &= \sigma''(g(h(x))) \quad \forall x \in V \end{aligned}$$

و در نتیجه از (۱۴.۳) و (۱۵.۳) و (۱۶.۳) و (۱۷.۳) داریم:

$$\begin{aligned} \mu(xy) &\leq \mu'(x'y') \quad \forall x, y \in V \\ &\leq \mu''(g(x')g(y')) \quad \forall x', y' \in V' \\ &= \mu''(g(h(x))g(h(y))) \quad \forall x, y \in V. \end{aligned}$$

بنابراین $g \circ h$ یک یکرختی ضعیف بین $\tilde{G}$ و $\tilde{G}''$ است. به عبارت دیگر رابطه ی تعدی برقرار است. بنابراین یکرختی ضعیف بین گراف های فازی یک رابطه ی به طور جزئی مرتب است.

□

۲.۳ گراف های یکرخت و متمم های آنها

تعریف ۱.۲.۳. فرض کنید $\tilde{G} : (\sigma, \mu)$ یک گراف فازی باشد. متمم $\tilde{G}$ به صورت $(\sigma, \bar{\mu})$: $\tilde{G}$ نمایش داده می شود که

$$\bar{\mu}(xy) = \sigma(x) \wedge \sigma(y) - \mu(xy) \quad \forall x, y \in V.$$

قضیه ۲.۲.۳. دو گراف فازی یکرختند اگر و فقط اگر متمم های آنها یکرخت باشند.

برهان. $\tilde{G} : (\sigma, \mu)$ و $\tilde{G}' : (\sigma', \mu')$ دو گراف فازی داده شده می باشند. فرض می کنیم $\tilde{G} \cong \tilde{G}'$. یک نگاشت دوسویی $h : V \rightarrow V'$ وجود دارد که

$$\sigma(x) = \sigma'(h(x)) \quad \forall x \in V \quad (18.3)$$

$$\mu(xy) = \mu'(h(x)h(y)) \quad \forall x, y \in V$$

برقرار می باشد. با استفاده از تعریف متمم داریم:

$$\bar{\mu}(xy) = \sigma(x) \wedge \sigma(y) - \mu(xy) \quad \forall x, y \in V \quad (19.3)$$

با استفاده از (۱۸.۳) و (۱۹.۳) داریم:

$$\begin{aligned}\bar{\mu}(xy) &= \sigma'(h(x)) \wedge \sigma'(h(y)) - \mu'(h(x)h(y)) \\ &= \bar{\mu}'(h(x)h(y)) \quad \forall x, y \in V\end{aligned}$$

به عبارت دیگر، $\bar{G} \cong \bar{G}'$.

برعکس، فرض می‌کنیم که $\bar{G} \cong \bar{G}'$ ؛ به عبارت دیگر، یک نگاشت دوسویی $g: V \rightarrow V'$ وجود دارد که

$$\begin{aligned}\sigma(x) &= \sigma'(g(x)) \quad \forall x \in V \\ \bar{\mu}(xy) &= \bar{\mu}'(g(x)g(y)) \quad \forall x, y \in V\end{aligned} \quad (20.3)$$

با استفاده از تعریف متمم داریم:

$$\bar{\mu}(xy) = \sigma(x) \wedge \sigma(y) - \mu(xy) \quad \forall x, y \in V \quad (21.3)$$

$$\bar{\mu}'(g(x)g(y)) = \sigma'(g(x)) \wedge \sigma'(g(y)) - \mu'(g(x)g(y)) \quad (22.3)$$

با جایگزین کردن دو معادله‌ی (۲۱.۳) و (۲۲.۳) در (۲۰.۳) داریم:

$$\mu(xy) = \mu'(g(x)g(y)) \quad \forall x, y \in V \quad (23.3)$$

بنابراین با استفاده از (۲۰.۳) و $g: V \rightarrow V'$ ، نگاشت $g: V \rightarrow V'$ یک یکرختی بین $\tilde{G}$ و $\tilde{G}'$ است. به عبارت دیگر $\tilde{G} \cong \tilde{G}'$ می‌باشد. $\square$

قضیه ۳.۲.۳. اگر یک یکرختی ضعیف بین $\tilde{G}$ و $\tilde{G}'$ وجود داشته باشد، آنگاه یک یکرختی ضعیف بین $\bar{G}$ و $\bar{G}'$ وجود دارد.

برهان. اگر h یک یکرختی ضعیف بین $\tilde{G}$ و $\tilde{G}'$ باشد آنگاه $h: V \rightarrow V'$ یک نگاشت دوسویی است که

$$h(x) = x', \quad x \in V, \sigma(x) = \sigma'(h(x)) \quad \forall x \in V \quad (24.3)$$

$$\mu(xy) \leq \mu'(h(x)h(y)) \quad \forall x, y \in V \quad (25.3)$$

از آنجایی که $h^{-1}: V' \rightarrow V$ یک نگاشت دوسویی است، بنابراین به ازای هر $x' \in V'$ ، یک $x \in V$ وجود دارد به طوری که $h^{-1}(x') = x$. با استفاده از این رابطه در (۲۴.۳) داریم:

$$\sigma'(x') = \sigma(h^{-1}(x')) \quad \forall x' \in V' \quad (26.3)$$

هم‌چنین با استفاده از $h^{-1}(x') = x$ و (۲۴.۳) و (۲۵.۳) در رابطه‌ی زیر،

$$\bar{\mu}(xy) = \sigma(x) \wedge \sigma(y) - \mu(xy) \quad \forall x, y \in V$$

داریم:

$$\begin{aligned}\bar{\mu}(h^{-1}(x')h^{-1}(y')) &\geq \sigma'(h(x)) \wedge \sigma'(h(y)) - \mu'(h(x)h(y)) \\ &= \sigma'(x') \wedge \sigma'(y') - \mu'(x'y') \quad \forall x', y' \in V' \\ &= \bar{\mu}'(x'y') \quad \forall x', y' \in V'\end{aligned}$$

به عبارت دیگر،

$$\bar{\mu}'(x'y') \leq \bar{\mu}(h^{-1}(x')h^{-1}(y')) \quad (27.3)$$

بنابراین $h^{-1} : V' \rightarrow V$ یک نگاشت دوسویی است که با استفاده از (26.3) و (27.3) یک یکرختی ضعیف بین $\bar{G}'$ و $\bar{G}$ می باشد. $\square$

قضیه 4.2.3. اگر یک یکرختی هم-ضعیف بین $\bar{G}$ و $\bar{G}'$ وجود داشته باشد، آنگاه یک همریختی بین $\bar{G}$ و $\bar{G}'$ می تواند وجود داشته باشد.

برهان. فرض می کنیم h یکرختی هم-ضعیف بین $\bar{G}$ و $\bar{G}'$ باشد، به عبارت دیگر، $h : V \rightarrow V'$ یک نگاشت دوسویی است که

$$\sigma(x) \leq \sigma'(h(x)) \quad \forall x \in V \quad (28.3)$$

$$\mu(xy) = \mu'(h(x)h(y)) \quad \forall x, y \in V \quad (29.3)$$

برقرار می باشد، در $\bar{G}$ با استفاده از (28.3) و (29.3) داریم:

$$\begin{aligned}\bar{\mu}(xy) &= \sigma(x) \wedge \sigma(y) - \mu(xy) \quad \forall x, y \in V \\ &\leq \sigma'(h(x)) \wedge \sigma'(h(y)) - \mu'(h(x)h(y)) \\ &= \bar{\mu}'(h(x)h(y)) \quad \forall x, y \in V\end{aligned}$$

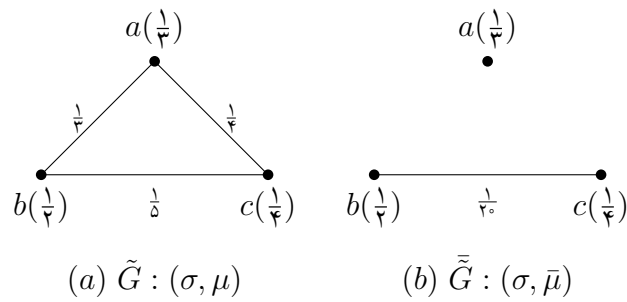
بنابراین

$$\bar{\mu}(xy) \leq \bar{\mu}'(h(x)h(y)) \quad \forall x, y \in V \quad (30.3)$$

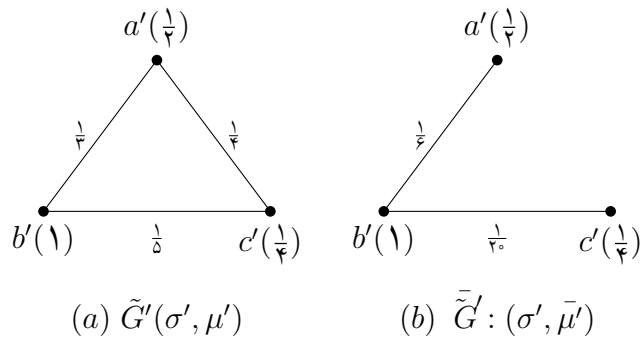
با استفاده (28.3) و (30.3)، h یک همریختی دوسویی بین $\bar{G}$ و $\bar{G}'$ است. $\square$

ملاحظه 5.2.3. اگر $\bar{G}$ با $\bar{G}'$ یکرخت هم-ضعیف باشد، آنگاه لزومی ندارد $\bar{G}$ با $\bar{G}'$ یکرخت هم-ضعیف باشد.

مثال 6.2.3. مثال (5.1.3) را در نظر بگیرید، در مثال ذکر شده یک یکرختی هم-ضعیف بین $\bar{G}$ و $\bar{G}'$ وجود دارد. به عبارت دیگر، شکل (7.3) (a) با شکل (8.3) (a) یکرخت هم-ضعیف است. اما یکرختی هم-ضعیف بین شکل (7.3) (b) و شکل (8.3) (b) وجود ندارد، در حالی که یک همریختی بین $\bar{G}$ و $\bar{G}'$ وجود دارد.



شکل ۷.۳: گراف‌های فازی $\tilde{G}$ و متمم آن $\tilde{\bar{G}}$



شکل ۸.۳: گراف‌های فازی $\tilde{G}'$ و متمم آن $\tilde{\bar{G}}'$

قضیه ۷.۲.۳. فرض کنید (σ_1, μ_1) و (σ_2, μ_2) به ترتیب دو زیرگراف فازی جزئی از گراف‌های فازی $\tilde{G}_1$ و $\tilde{G}_2$ باشند. اگر h یک یکرختی از (σ_1, μ_1) و (σ_2, μ_2) باشد، آنگاه h یک یکرختی از $(supp(\sigma_1), supp(\mu_1))$ بر روی $(supp(\sigma_2), supp(\mu_2))$ می‌باشد.

قضیه ۸.۲.۳. هر گراف فازی ساده $\tilde{G}(\sigma, \mu)$ از مرتبه n با یک زیرگراف فازی جزئی از گراف فازی کامل k_σ از مرتبه n یکرخت است.

برهان. فرض می‌کنیم $\tilde{G}(\sigma, \mu)$ گراف فازی داده شده از مرتبه n باشد. اکنون ساختار یک k_σ از مرتبه n ، به صورت یک گراف فازی (σ, μ') است که

$$\mu'(xy) = \sigma(x) \wedge \sigma(y) \quad \forall x, y \in V$$

که V مجموعه زمینه‌ی $\tilde{G}$ است. هم‌چنین به طور معمول داریم:

$$\mu(xy) = \sigma(x) \wedge \sigma(y) \quad \forall x, y \in V$$

$$\mu(xy) \leq \mu'(xy) \quad \forall x, y \in V$$

بنابراین $\tilde{G}$ یک زیرگراف فراگیر فازی از k_n است، به عبارت دیگر، $\tilde{G}$ با یک زیرگراف فازی جزئی از گراف فازی کامل k_σ از مرتبه n یکرخت است. $\square$

تعریف ۹.۲.۳. فرض کنید $\tilde{G} : (\sigma, \mu)$ یک گراف فازی با گراف زمینه (V, E) باشد. گراف خطی فازی^۷ از $\tilde{G}$ با گراف زمینه (Z, W) ، که Z مجموعه رئوس می باشد، توسط $(\omega, \lambda) : L(\tilde{G})$ نمایش داده می شود.

$$Z = \{S_x = x \cup u_x, v_x \mid x \in E, u_x, v_x \in V, x = (u_x v_x)\}$$

$$W = \{(S_x S_y) \mid (S_x \cap S_y) \neq \emptyset, x, y \in E, x \neq y\}$$

$$\omega(S_x) = \mu(x) \quad \forall S_x \in Z$$

$$\lambda(S_x S_y) = \mu(x) \wedge \mu(y) \quad \forall (S_x S_y) \in W$$

قضیه ۱۰.۲.۳. اگر $\tilde{G}_1 : (\sigma_1, \mu_1)$ و $\tilde{G}_2 : (\sigma_2, \mu_2)$ دو گراف فازی یکرخت باشند، آنگاه گراف های خطی فازی آنها نیز یکرخت هستند.

برهان. فرض کنید $\tilde{G}_2$ و $\tilde{G}_1$ دو گراف فازی یکرخت به ترتیب با مجموعه های زمینه V_2 و V_1 باشند. به عبارت دیگر، یک نگاشت دوسویی $h : V_1 \rightarrow V_2$ وجود دارد که

$$\sigma_1(x) = \sigma_2(h(x)) \quad \forall x \in V_1$$

$$\mu_1(xy) = \mu_2(h(x)h(y)) \quad \forall x, y \in V_1$$

برقرار می باشد. فرض کنید $L(\tilde{G}_1) : (\omega_1, \lambda_1)$ و $L(\tilde{G}_2) : (\omega_2, \lambda_2)$ به ترتیب گراف های خطی فازی از $\tilde{G}_1$ و $\tilde{G}_2$ باشند.

یک $x \in E_1$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $x = (u_x v_x)$ و چون $h : V_1 \rightarrow V_2$ یک به یک و پوشا است، داریم:

$$h(x) = (h(u_x)h(v_x)) \in E_2$$

در نتیجه با تعریف $g : Z_1 \rightarrow Z_2$ داریم: $g(S_x) = S_{h(x)}$ هم چنین h یک به یک و پوشاست، g یک نگاشت یک به یک و پوشا و خوش تعریف است. در نظر می گیریم،

$$\omega_1(S_x) = \mu_1(x) \quad \forall S_x \in Z_1 \quad (\text{با استفاده از تعریف گراف خطی فازی})$$

$$\omega_1(S_x) = \mu_1(u_x v_x) = \mu_2(h(u_x)h(v_x)) = \mu_2(h(x))$$

$$\omega_1(S_x) = \omega_2(S_{h(x)}) = \omega_2(g(S_x)) \quad \forall S_x \in Z_1 \quad (31.3)$$

^۷fuzzy line graph

$$\begin{aligned}
\lambda_1(S_x S_y) &= \mu_1(x) \wedge \mu_1(y) \quad \forall (S_x S_y) \in W_1 \\
&= \mu_1(u_x v_x) \wedge \mu_1(u_y v_y) \\
&= \mu_2(h(u_x)h(v_x)) \wedge \mu_2(h(u_y)h(v_y)) \\
&= \mu_2(h(x)) \wedge \mu_2(h(y)) \\
&= \lambda_2(S_{h(x)} S_{h(y)}) \\
&= \lambda_2(g(S_x)g(S_y)) \quad \forall x, y \in E_1
\end{aligned}$$

$$\lambda_1(S_x S_y) = \lambda_2(g(S_x)g(S_y)) \quad \forall S_x, S_y \in Z_1 \quad (۳۲.۳)$$

از معادلات (۳۱.۳) و (۳۲.۳)، $L(\tilde{G}_1) : (\omega_1, \lambda_1)$ و $L(\tilde{G}_2) : (\omega_2, \lambda_2)$ گراف‌های خطی فازی یکرخت هستند، هنگامی که $\tilde{G}_1$ و $\tilde{G}_2$ دو گراف فازی یکرخت باشند. $\square$

ملاحظه ۱۱.۲.۳. در گراف قطعی C_n ، $L(C_n) \cong C_n$ ، که دوری به طول n را نمایش می‌دهد. اما مطلب ذکر شده در گراف فازی خوش تعریف نیست.

مثال ۱۲.۲.۳. دور فازی $\tilde{G} : (\sigma, \mu)$ با گراف زمینه (V, E) به صورت:

$$V = \{u, v, w\} \quad E = \{(u, v), (v, w), (w, u)\}$$

با شرایط:

$$\sigma(u) = \frac{3}{4}, \sigma(v) = 1, \sigma(w) = 1$$

$$\mu(uv) = \frac{1}{4}, \mu(uw) = \frac{1}{4}, \mu(vw) = 1$$

نمایش داده می‌شود. گراف خطی فازی از دور فازی $\tilde{G} : (\sigma, \mu)$ ، $L(\tilde{G}) : (\omega, \lambda)$ با گراف زمینه (Z, W) می‌باشد، که

$$Z = \{S_1, S_2, S_3\}$$

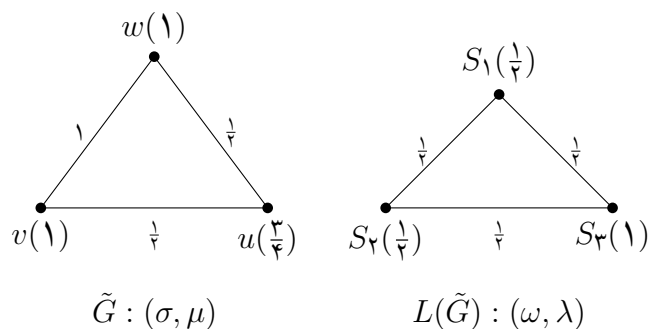
$$S_1 = \{(wu), \{w\}, \{u\}\}, \quad S_2 = \{(uv), \{u\}, \{v\}\}, \quad S_3 = \{(wv), \{w\}, \{v\}\}$$

می‌باشد. در شکل (۹.۳) با

$$W = \{(S_x S_y) \mid (S_x \cap S_y) \neq \emptyset, x, y \in E, x \neq y\}$$

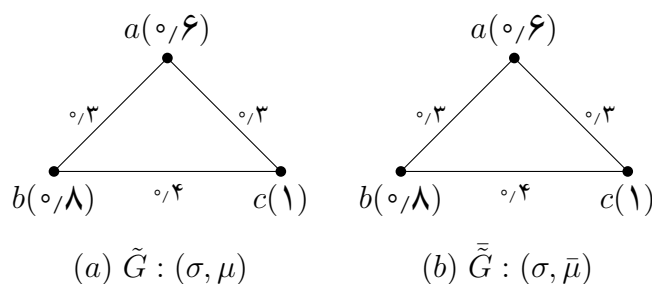
از آنجایی که یک نگاشت از $V \rightarrow Z$ وجود دارد که وزن رئوس را حفظ می‌کند اما وزن یال‌ها را نمی‌تواند حفظ کند، در نتیجه:

$$L(\tilde{G}) \not\cong \tilde{G}.$$

شکل ۹.۳: گراف فازی $\tilde{G}$ و گراف خطی فازی آن $L(\tilde{G})$

۳.۳ گراف های فازی خود متمم

تعریف ۱.۳.۳. یک گراف فازی $\tilde{G} : (\sigma, \mu)$ را خود متمم^۱ گوئیم اگر $\tilde{G} \cong \bar{\tilde{G}}$ باشد. مثال ۲.۳.۳. در شکل (۱۰.۳)، گراف فازی $\tilde{G}$ یک گراف فازی خود متمم است. یعنی $\tilde{G} \cong \bar{\tilde{G}}$.



شکل ۱۰.۳: گراف فازی خود متمم

مثال ۳.۳.۳. در شکل (۱۱.۳)، گراف فازی $\tilde{G}$ ، یک گراف خود متمم فازی نیست. یعنی $\tilde{G} \not\cong \bar{\tilde{G}}$.

قضیه ۴.۳.۳. فرض کنید $\tilde{G} : (\sigma, \mu)$ یک گراف فازی خود متمم باشد. آنگاه

$$\sum_{x \neq y} \mu(xy) = \frac{1}{4} \sum_{x \neq y} (\sigma(x) \wedge \sigma(y)).$$

ملاحظه ۵.۳.۳. یک نتیجه از قضیه (۴.۳.۳): اگر $\tilde{G}$ یک گراف فازی خود متمم باشد، آنگاه

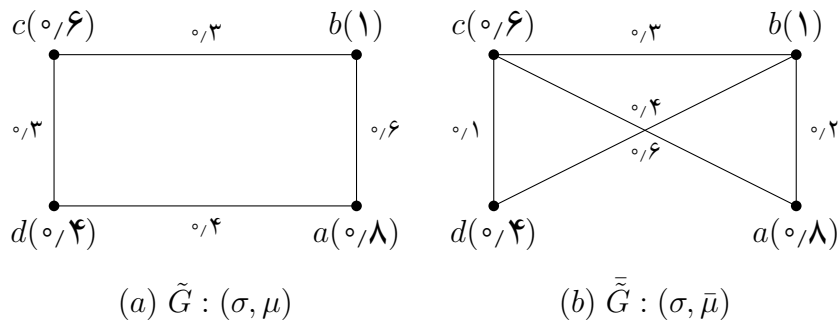
$$S(\tilde{G}) = \frac{1}{4} \sum_{x \neq y} (\sigma(x) \wedge \sigma(y))$$

اما عکس قضیه (۴.۳.۳) درست نیست، زیرا در مثال (۳.۴.۳)،

$$S(\tilde{G}) = 1/6, \quad \frac{1}{4} \sum_{x \neq y} (\sigma(x) \wedge \sigma(y)) = 1/6$$

اما $\tilde{G} \not\cong \bar{\tilde{G}}$

^۱self complementary



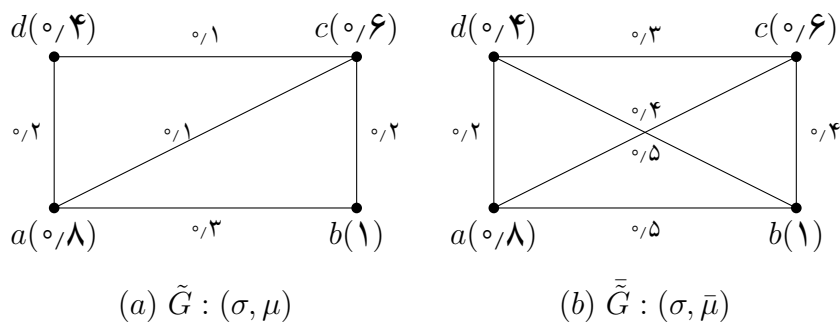
شکل ۱۱.۳: گراف فازی که خود متمم فازی نیست

۴.۳ گراف‌های فازی خود متمم ضعیف

تعریف ۱.۴.۳. گراف فازی $\tilde{G}$ را یک گراف فازی خود متمم ضعیف^۹ گوئیم، اگر $\tilde{G}$ با متمم خود، $\bar{\tilde{G}}$ یکرخت ضعیف باشد.

ملاحظه ۲.۴.۳. گراف فازی $\tilde{G}$ در شکل (۱۲.۳) نشان داده شده در مثال (۳.۴.۳)، یک گراف فازی خود متمم ضعیف نیست.

مثال ۳.۴.۳. در این مثال $\tilde{G}$ با $\bar{\tilde{G}}$ یکرخت ضعیف است، بنابراین $\tilde{G}$ یک گراف فازی خود متمم ضعیف است.



شکل ۱۲.۳: گراف فازی خود متمم ضعیف

قضیه ۴.۴.۳. فرض کنید G یک گراف فازی خود متمم ضعیف باشد، آنگاه

$$\sum_{x \neq y} \mu(xy) \leq \frac{1}{2} \sum_{x \neq y} (\sigma(x) \wedge \sigma(y)).$$

^۹self weak complementary

برهان. $\tilde{G}$ گراف فازی خود متمم ضعیف است. بنابراین $\tilde{G}$ با $\bar{\tilde{G}}$ یکرخت ضعیف است. بنابراین، یک یکرختی ضعیف وجود دارد، $h: V \rightarrow V$ ، یک نگاشت دوسویی است که

$$\sigma(x) = \sigma(h(x)) \quad \forall x \in V$$

و

$$\mu(xy) \leq \bar{\mu}(h(x)h(y)) \quad \forall x, y \in V \quad (33.3)$$

برقرار می‌باشد. با استفاده از تعریف متمم، در نامعادله (33.3) ،

$$\begin{aligned} \mu(xy) &\leq \sigma(h(x)) \wedge \sigma(h(y)) - \mu(h(x)h(y)) \\ &= \sigma(x) \wedge \sigma(y) - \mu(h(x)h(y)) \end{aligned}$$

در نتیجه:

$$\mu(xy) + \mu(h(x)h(y)) \leq \sigma(x) \wedge \sigma(y) \quad (34.3)$$

با مجموع گرفتن از طرفین نامعادله (34.3) داریم:

$$\begin{aligned} \sum_{x \neq y} \mu(xy) + \sum_{x \neq y} \mu(h(x)h(y)) &\leq \sum_{x \neq y} (\sigma(x) \wedge \sigma(y)) \\ 2 \sum_{x \neq y} \mu(xy) &\leq \sum_{x \neq y} (\sigma(x) \wedge \sigma(y)) \quad (\text{زیرا } V \text{ یک مجموعه متناهی است}) \end{aligned}$$

بنابراین

$$\sum_{x \neq y} \mu(xy) \leq \frac{1}{2} \sum_{x \neq y} (\sigma(x) \wedge \sigma(y)).$$

□

در V قرار دارد.

قضیه ۵.۴.۳. فرض کنید $\tilde{G}$ یک گراف فازی باشد. اگر

$$\mu(xy) \leq \frac{1}{2}(\sigma(x) \wedge \sigma(y)) \quad \forall x, y \in V,$$

آنگاه $\tilde{G}$ یک گراف فازی خود متمم ضعیف می‌باشد.

برهان. نگاشت همانی $h: V \rightarrow V$ را در نظر بگیرید:

$$\sigma(x) = \sigma(h(x)) \quad \forall x \in V$$

با استفاده از تعریف متمم داریم:

$$\bar{\mu}(xy) = \sigma(x) \wedge \sigma(y) - \mu(xy) \quad \forall x, y \in V$$

چون با توجه با صورت قضیه، به ازای هر $x, y \in V$ ، $\mu(xy) \leq \frac{1}{2}(\sigma(x) \wedge \sigma(y))$ ، در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned} \bar{\mu}(xy) &\geq \sigma(x) \wedge \sigma(y) - \frac{1}{2}(\sigma(x) \wedge \sigma(y)) \\ &= \frac{1}{2}(\sigma(x) \wedge \sigma(y)) \\ &\geq \mu(xy) \quad \forall x, y \in V \end{aligned}$$

به عبارت دیگر،

$$\mu(xy) \leq \bar{\mu}(h(x)h(y)) \quad \forall x, y \in V$$

بنابراین $\tilde{G}$ با $\bar{\tilde{G}}$ یکرخت ضعیف است. بنابراین $\tilde{G}$ یک گراف فازی خود متمم ضعیف است. $\square$

ملاحظه ۶.۴.۳. الف. وقتی $\tilde{G}$ با $\bar{\tilde{G}}$ یکرخت هم-ضعیف باشد، آنگاه $\tilde{G}$ یک گراف فازی خود متمم است.

ب. اگر $\tilde{G}$ یک گراف فازی خود متمم ضعیف باشد، آنگاه

$$O(\tilde{G}) = O(\bar{\tilde{G}}) \quad S(\tilde{G}) \leq S(\bar{\tilde{G}})$$

اما عکس مورد دوم صحیح نیست.

هم‌چنین در مثال (۳.۴.۳)،

$$O(\tilde{G}) = O(\bar{\tilde{G}}) = ۲/۸ \quad ۰/۹ = S(\tilde{G}) \leq S(\bar{\tilde{G}}) = ۲/۳$$

اما $\tilde{G}$ یک گراف فازی خود متمم ضعیف نیست.

فصل ۴

گراف‌های فازی منتظم

در این فصل گراف‌های فازی منتظم و گراف‌های فازی کلاً منتظم را تعریف و برخی از ویژگی‌های گراف‌های فازی منتظم و گراف‌های فازی کلاً منتظم را مورد بررسی قرار می‌دهیم. ابتدا به ذکر چند لم تحت عنوان مقدمه می‌پردازیم. مطالب این فصل از منبع [۸] آورده شده است.

۱.۴ مقدمه

لم ۱.۱.۴. فرض کنید $(\sigma, \mu) : \tilde{G}$ یک گراف فازی روی یک دور G^* باشد. آنگاه $\tilde{G}$ یک دور فازی است، اگر و فقط اگر $\tilde{G}$ یک درخت فازی نباشد.

لم ۲.۱.۴. فرض کنید $(\sigma, \mu) : \tilde{G}$ یک گراف فازی روی یک دور G^* باشد و فرض کنید $t = \wedge \{ \mu(uv) \mid \mu(uv) > 0 \}$.

آنگاه همه یال‌های uv به‌طوری که $\mu(uv) > t$ ، پل‌های فازی از گراف فازی G هستند.

لم ۳.۱.۴. فرض کنید $(\sigma, \mu) : \tilde{G}$ یک گراف فازی باشد، به‌طوری که G^* یک دور باشد. آنگاه یک راس، یک راس برشی فازی از $\tilde{G}$ است، اگر و فقط اگر یک راس مشترک از دو پل فازی باشد.

۲.۴ گراف‌های فازی منتظم و کلاً منتظم

تعریف ۱.۲.۴. فرض کنید $(\sigma, \mu) : \tilde{G}$ یک گراف فازی روی $(V, E) : G^*$ باشد. اگر به ازای هر $v \in V$ ، $d_{\tilde{G}}(v) = k$ (به عبارت دیگر) اگر هر راس دارای درجه‌ی یکسان k باشد، آنگاه $\tilde{G}$ را یک گراف فازی منتظم^۱ از درجه‌ی k یا یک گراف فازی $-k$ منتظم گوییم. که با تعریف گراف‌های منتظم در نظریه‌ی گراف قطعی مشابه است.

^۱regular fuzzy graph

مثال ۲.۲.۴. یک گراف فازی همبند با دو راس یک گراف فازی منتظم است.

ملاحظه ۳.۲.۴. $\tilde{G}$ یک گراف فازی k -منتظم است، اگر و تنها اگر $\delta = \Delta = k$.

ملاحظه ۴.۲.۴. در نظریه‌ی گراف قطعی هر گراف کامل، منتظم است. اما این نتیجه برای گراف‌های فازی صدق نمی‌کند. در نتیجه یک گراف فازی کامل نمی‌تواند یک گراف فازی منتظم باشد.

مثال (۵.۲.۴)، بیانگر ملاحظه‌ی (۴.۲.۴) می‌باشد.

مثال ۵.۲.۴. گراف $G^* : (V, E)$ با $V = \{u, v, w\}$ و $E = \{uv, vw, wu\}$ را در نظر بگیرید.

گراف فازی $\tilde{G} : (\sigma, \mu)$ را با

$$\sigma(u) = \circ/5, \quad \sigma(v) = \circ/7, \quad \sigma(w) = \circ/6,$$

و

$$\mu(uv) = \circ/5, \quad \mu(vw) = \circ/6, \quad \mu(wu) = \circ/5.$$

تعریف می‌کنیم. آنگاه $\tilde{G}$ یک گراف فازی کامل است. اما گراف فازی منتظم نیست زیرا

$$d(u) = \mu(uv) + \mu(uw) = \circ/5 + \circ/5 = 1,$$

و $d(v) = d(w) = 1/1$ می‌باشند.

تعریف ۶.۲.۴. درجه‌ی کلی^۲ یک راس: فرض کنید $\tilde{G} : (\sigma, \mu)$ یک گراف فازی روی G^* باشد. درجه‌ی کلی از یک راس $u \in V$ به صورت:

$$td_{\tilde{G}}(u) = \sum_{u \neq v} \mu(uv) + \sigma(u) = \sum_{uv \in E} \mu(uv) + \sigma(u) = d_{\tilde{G}}(u) + \sigma(u).$$

تعریف می‌کنیم.

تعریف ۷.۲.۴. گراف فازی کلاً منتظم^۳: گراف فازی $\tilde{G} : (\sigma, \mu)$ را در نظر بگیرید. اگر هر راس از $\tilde{G}$ دارای درجه‌ی کلی یکسان k باشد، یعنی به ازای هر $u \in V$ ، $td_{\tilde{G}}(u) = k$ ، آنگاه $\tilde{G}$ را یک گراف فازی کلاً منتظم از درجه‌ی کلی k یا یک گراف فازی k -کلاً منتظم گوئیم.

مثال ۸.۲.۴. گراف $G^* : (V, E)$ با

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\} \quad \text{و} \quad E = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_1\}.$$

در نظر بگیرید. گراف فازی $\tilde{G} : (\sigma, \mu)$ را با

$$\sigma(v_1) = \circ/5, \quad \sigma(v_2) = \circ/4, \quad \sigma(v_3) = \circ/7, \quad \sigma(v_4) = \circ/5,$$

و

$$\mu(v_1v_2) = \circ/2, \quad \mu(v_2v_3) = \circ/4, \quad \mu(v_3v_4) = \circ/2, \quad \mu(v_4v_1) = \circ/4.$$

^۲total degree

^۳totally regular fuzzy graph

تعریف می‌کنیم. آنگاه

$$d(v_i) = ۰/۶ \quad \forall i = ۱, ۲, ۳, ۴.$$

بنابراین $\tilde{G}$ یک گراف فازی منتظم است. اما

$$\begin{aligned} td(v_1) &= \sum_{u \neq v_1} \mu(uv_1) + \sigma(v_1) \\ &= \sum_{uv_1 \in E} \mu(uv_1) + \sigma(v_1) = d_G(v_1) + \sigma(v_1) \\ &= ۰/۶ + ۰/۵ = ۱/۱. \end{aligned}$$

بنابراین

$$td(v_1) = ۱/۱ \neq ۱ = td(v_2).$$

در نتیجه $\tilde{G}$ یک گراف فازی کلاً منتظم نیست.

مثال ۹.۲.۴. گراف $G^* : (V, E)$ با $V = \{v_1, v_2, v_3\}$ و $E = \{v_1v_2, v_1v_3\}$ در نظر بگیرید. گراف فازی $\tilde{G}(\sigma, \mu)$ را با

$$\sigma(v_1) = ۰/۴, \quad \sigma(v_2) = ۰/۸, \quad \sigma(v_3) = ۰/۷,$$

و

$$\mu(v_1v_2) = ۰/۳, \quad \mu(v_1v_3) = ۰/۴.$$

را تعریف می‌کنیم. آنگاه

$$td(v_i) = d_{\tilde{G}}(v_i) + \sigma(v_i) = ۱/۱ \quad \forall i = ۱, ۲, ۳.$$

بنابراین $\tilde{G}$ یک گراف فازی کلاً منتظم است. اما

$$d(v_1) = ۰/۷ \neq ۰/۳ = d(v_2).$$

در نتیجه $\tilde{G}$ یک گراف فازی منتظم نیست.

مثال ۱۰.۲.۴. گراف $G^* : (V, E)$ با

$$V = \{v_1, v_2, v_3\} \quad \text{و} \quad E = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_1\}$$

در نظر بگیرید. گراف فازی $\tilde{G} : (\sigma, \mu)$ را با

$$\sigma(v_1) = \sigma(v_2) = \sigma(v_3) = ۰/۴,$$

و

$$\mu(v_1v_2) = ۰/۳, \quad \mu(v_2v_3) = \mu(v_3v_1) = ۰/۳.$$

آنگاه

$$d(v_i) = ۰/۶ \quad \forall i = ۱, ۲, ۳.$$

بنابراین $\tilde{G}$ یک گراف فازی منتظم است. همچنین

$$td(v_i) = 1 \quad \forall i = 1, 2, 3.$$

از این رو $\tilde{G}$ یک گراف فازی کلاً منتظم است.

مثال ۱۱.۲.۴. گراف $G^* : (V, E)$ با $V = \{v_1, v_2, v_3\}$ و $E = \{v_1v_2, v_1v_3\}$ در نظر بگیرید. گراف فازی $\tilde{G}(\sigma, \mu)$ را با

$$\sigma(v_1) = \circ/3, \quad \sigma(v_2) = \sigma(v_3) = \circ/4,$$

و

$$\mu(v_1v_2) = \circ/1, \quad \mu(v_1v_3) = \circ/2.$$

آنگاه $d(v_1) = \circ/3 \neq \circ/1 = d(v_2)$ ، بنابراین $\tilde{G}$ یک گراف فازی منتظم نیست. همچنین

$$td(v_1) = \circ/6 \neq \circ/5 = td(v_2).$$

در نتیجه $\tilde{G}$ یک گراف فازی کلاً منتظم نیست.

ملاحظه ۱۲.۲.۴. از مثال‌های فوق این امر واضح است که به‌طور معمول هیچ رابطه‌ای بین گراف‌های فازی منتظم و گراف‌های فازی کلاً منتظم وجود ندارد. هر چند یک شرط لازم و کافی نسبت به این‌که این دو نوع از گراف‌های فازی با یگریگر معادلند، در قضیه‌ی (۱۳.۲.۴) ذکر شده است.

قضیه ۱۳.۲.۴. فرض کنید $\tilde{G} : (\sigma, \mu)$ یک گراف فازی روی $G^* : (V, E)$ باشد. آنگاه σ یک تابع ثابت است اگر و فقط اگر موارد زیر معادل باشند:

۱. $\tilde{G}$ یک گراف فازی منتظم است.

۲. $\tilde{G}$ یک گراف فازی کلاً منتظم است.

برهان. فرض می‌کنیم σ یک تابع ثابت باشد. فرض می‌کنیم:

$$\sigma(u) = c, \quad \forall u \in V$$

یک تابع ثابت است. فرض می‌کنیم که $\tilde{G}$ یک گراف فازی k_1 -منتظم باشد. آنگاه

$$d(u) = k_1, \quad \forall u \in V$$

بنابراین

$$td(u) = d(u) + \sigma(u), \quad \forall u \in V. \quad (۱.۴)$$

در نتیجه

$$td(u) = k_1 + c, \quad \forall u \in V.$$

از این رو $\tilde{G}$ یک گراف فازی کلاً منتظم است. بنابراین $۱ \Rightarrow ۲$ اثبات می‌شود. حال فرض می‌کنیم که $\tilde{G}$ یک گراف فازی $k_۲$ -کلاً منتظم باشد. آنگاه

$$td(u) = k_۲, \quad \forall u \in V.$$

با استفاده از (۱.۴) داریم:

$$\Rightarrow d(u) + \sigma(u) = k_۲, \quad \forall u \in V.$$

با توجه به ثابت بودن σ ,

$$\Rightarrow d(u) + c = k_۲, \quad \forall u \in V.$$

$$\Rightarrow d(u) = k_۲ - c, \quad \forall u \in V.$$

بنابراین $\tilde{G}$ یک گراف فازی منتظم است. بنابراین $۲ \Rightarrow ۱$ اثبات می‌شود. در نتیجه (۱) و (۲) با یکدیگر معادلند.

برعکس، فرض می‌کنیم که (۱) و (۲) با یکدیگر معادلند. به عبارت دیگر، $\tilde{G}$ یک گراف فازی منتظم است، اگر و فقط اگر $\tilde{G}$ یک گراف فازی کلاً منتظم باشد. از برهان خلف استفاده می‌کنیم.

فرض خلف: فرض می‌کنیم، σ یک تابع ثابت نباشد. آنگاه به ازای حداقل یک جفت از رئوس $u, w \in V$ داریم: $\sigma(u) \neq \sigma(w)$.

فرض می‌کنیم $\tilde{G}$ یک گراف فازی k -منتظم باشد. آنگاه $d(u) = d(w) = k$. بنابراین

$$td(u) = d(u) + \sigma(u) = k + \sigma(u) \quad \text{و} \quad td(w) = d(w) + \sigma(w) = k + \sigma(w).$$

از آنجایی که $\sigma(u) \neq \sigma(w)$ ، داریم: $td(u) \neq td(w)$. بنابراین $\tilde{G}$ یک گراف فازی کلاً منتظم نیست، که با فرض ما متناقض است.

حال فرض می‌کنیم که $\tilde{G}$ یک گراف فازی کلاً منتظم باشد. آنگاه

$$td(u) = td(w) \Rightarrow d(u) + \sigma(u) = d(w) + \sigma(w)$$

$$\Rightarrow d(u) - d(w) = \sigma(w) - \sigma(u) \neq 0$$

$$\Rightarrow d(u) \neq d(w).$$

بنابراین $\tilde{G}$ یک گراف فازی منتظم نیست، که با فرض ما متناقض است. بنابراین فرض خلف باطل و حکم ثابت است. در نتیجه σ یک تابع ثابت است. $\square$

قضیه ۱۴.۲.۴. اگر گراف فازی $\tilde{G}$ هم گراف فازی منتظم و هم گراف فازی کلاً منتظم باشد، آنگاه σ یک تابع ثابت است.

برهان. فرض می‌کنیم $\tilde{G}$ یک گراف فازی $k_۱$ -منتظم و یک گراف فازی $k_۲$ -کلاً منتظم باشد. بنابراین

$$d(u) = k_۱, \quad \forall u \in V \quad \text{و} \quad td(u) = k_۲, \quad \forall u \in V.$$

حال با استفاده از فرض قضیه داریم:

$$\begin{aligned} td(u) &= k_2, & \forall u \in V. \\ \Rightarrow d(u) + \sigma(u) &= k_2, & \forall u \in V. \\ \Rightarrow k_1 + \sigma(u) &= k_2, & \forall u \in V. \\ \Rightarrow \sigma(u) &= k_2 - k_1, & \forall u \in V. \end{aligned}$$

□

بنابراین σ یک تابع ثابت است.

ملاحظه ۱۵.۲.۴. عکس قضیه‌ی (۱۴.۲.۴) لزوماً برقرار نمی‌باشد.

مثال ۱۶.۲.۴. گراف $G^* : (V, E)$ با $V = \{v_1, v_2, v_3\}$ و $E = \{v_1v_2, v_1v_3\}$ را در نظر بگیرید. گراف فازی $\tilde{G} : (\sigma, \mu)$ را با $\sigma(v_i) = \circ/5$, $\mu(v_1v_2) = \circ/1$, $\mu(v_1v_3) = \circ/2$ و $i = 1, 2, 3$ تعریف می‌کنیم. آنگاه σ یک تابع ثابت است. اما

$$d(v_2) = \circ/1 \neq \circ/2 = d(v_3). \quad \text{و} \quad td(v_2) = \circ/6 \neq \circ/7 = td(v_3).$$

بنابراین $\tilde{G}$ هیچ یک از دو گراف فازی منتظم و گراف فازی کلاً منتظم نمی‌باشد.

۳.۴ یک ویژگی از گراف‌های فازی منتظم روی یک دور

قضیای (۱.۳.۴) و (۴.۳.۴) یک ویژگی از گراف فازی منتظم $\tilde{G} : (\sigma, \mu)$ ، به‌طوری که $G^* : (V, E)$ یک دور باشد را فراهم آورده‌اند.

قضیه ۱.۳.۴. فرض کنید که $\tilde{G} : (\sigma, \mu)$ یک گراف فازی باشد، به‌طوری که $G^* : (V, E)$ یک دور فرد است. آنگاه $\tilde{G}$ یک گراف فازی منتظم است، اگر و فقط اگر μ یک تابع ثابت باشد.

برهان. اگر μ یک تابع ثابت باشد، می‌گوییم به ازای هر $uv \in E$ داریم، $\mu(uv) = c$ ، آنگاه با توجه به تعریف درجه‌ی راس در گراف فازی، به ازای هر $v \in V$ داریم، $d(v) = 2c$. بنابراین $\tilde{G}$ یک گراف فازی منتظم است.

برعکس، فرض می‌کنیم $\tilde{G}$ یک گراف فازی k -منتظم باشد. فرض می‌کنیم $e_1, e_2, \dots, e_{2n+1}$ به‌ترتیب یال‌هایی از G^* باشند.

فرض می‌کنیم $\mu(e_1) = k_1$. از آنجایی که $\tilde{G}$ یک گراف فازی k -منتظم است، بنابراین:

$$\begin{aligned} \mu(e_2) &= k - k_1, \\ \mu(e_3) &= k - (k - k_1) = k_1, \\ \mu(e_4) &= k - k_1. \end{aligned}$$

و برای سایر یال‌ها به همین ترتیب می‌باشد. بنابراین

$$\mu(e_i) = \begin{cases} k_1, & \text{اگر } i \text{ فرد باشد} \\ k - k_1, & \text{اگر } i \text{ زوج باشد} \end{cases}$$

از این رو

$$\mu(e_1) = \mu(e_{2n+1}) = k_1.$$

بنابراین اگر e_1 و e_{2n+1} در یک راس u با یکدیگر متلاقی باشند، چون $d(u) = k$ است. آنگاه

$$\begin{aligned} \mu(e_1) + \mu(e_{2n+1}) &= k \\ \Rightarrow k_1 + k_1 &= k \\ \Rightarrow 2k_1 &= k \\ \Rightarrow k_1 &= \frac{k}{2} \end{aligned} \quad (2.4)$$

از این رو

$$\begin{aligned} k - k_1 &= k - \frac{k}{2} = \frac{k}{2} \\ \Rightarrow k - k_1 &= \frac{k}{2}. \end{aligned}$$

بنابراین به ازای هر i داریم، $\mu(e_i) = \frac{k}{2}$. در نتیجه μ یک تابع ثابت است. $\square$

ملاحظه ۲.۳.۴. قضیه (۱.۳.۴) برای گراف‌های فازی کلاً منتظم برقرار نمی‌باشد.

مثال ۳.۳.۴. دور $G^* : (V, E)$ با $V = \{v_1, v_2, v_3\}$ و $E = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_1\}$ را در نظر بگیرید. گراف فازی $\tilde{G} : (\sigma, \mu)$ با

$$\sigma(v_1) = \circ/5, \sigma(v_2) = \circ/6, \sigma(v_3) = \circ/4.$$

و

$$\mu(v_1v_2) = \circ/1, \mu(v_2v_3) = \circ/2, \mu(v_3v_1) = \circ/3.$$

را در نظر بگیرید. آنگاه

$$td(v_i) = \circ/9 \quad \forall i = 1, 2, 3.$$

بنابراین $\tilde{G}$ یک گراف فازی کلاً منتظم است. اما μ یک تابع ثابت نیست.

قضیه ۴.۳.۴. فرض کنید $\tilde{G} : (\sigma, \mu)$ یک گراف فازی باشد، به طوری که G^* یک دور زوج باشد. آنگاه $\tilde{G}$ یک گراف فازی منتظم است، اگر و فقط اگر μ یک تابع ثابت باشد، یا یال‌های متناوب دارای مقادیر عضویت یکسان باشند.

برهان. اگر μ یک تابع ثابت باشد، یا یال‌های متناوب دارای مقادیر عضویت یکسان باشند، آنگاه $\tilde{G}$ یک گراف فازی منتظم است.

برعکس، فرض می‌کنیم $\tilde{G}$ یک گراف فازی k -منتظم باشد. فرض می‌کنیم $e_1, e_2, \dots, e_{2n}$ به‌ترتیب یال‌هایی از دور زوج G^* باشند. با استفاده از فرایند صورت گرفته در قضیه (۱.۳.۴) داریم:

$$\mu(e_i) = \begin{cases} k_1, & \text{اگر } i \text{ فرد باشد} \\ k - k_1, & \text{اگر } i \text{ زوج باشد} \end{cases}$$

اگر $k_1 = k - k_1$ باشد، آنگاه $k_1 = \frac{k}{2}$ ، در نتیجه $\mu(e_i) = \frac{k}{2}$. بنابراین μ یک تابع ثابت است.

اگر $k_1 \neq k - k_1$ باشد، آنگاه یال‌های متناوب دارای مقادیر عضویت یکسان هستند. $\square$

ملاحظه ۵.۳.۴. قضیه‌ی بالا برای گراف‌های کلاً منتظم برقرار نمی‌باشد.

مثال ۶.۳.۴. دور $G^* : (V, E)$ با $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ و $E = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_1\}$ را در نظر بگیرید. گراف فازی $\tilde{G} : (\sigma, \mu)$ با

$$\sigma(v_1) = 0.9, \sigma(v_2) = 0.7, \sigma(v_3) = 0.5, \sigma(v_4) = 0.7.$$

و

$$\mu(v_1v_2) = 0.2, \mu(v_2v_3) = 0.5, \mu(v_3v_4) = 0.4, \mu(v_4v_1) = 0.3.$$

را در نظر بگیرید. آنگاه

$$td(v_i) = 1.4 \quad \forall i = 1, 2, 3, 4.$$

بنابراین $\tilde{G}$ یک گراف فازی کلاً منتظم است. اما در گراف فازی $\tilde{G}$ ، نه μ یک تابع ثابت است، نه یال‌های متناوب دارای μ -مقدار یکسان هستند.

۴.۴ ویژگی‌هایی از گراف‌های فازی منتظم

قضیه ۱.۴.۴. اندازه‌ی یک گراف فازی k -منتظم $\tilde{G} : (\sigma, \mu)$ روی گراف $G^* : (V, E)$ که $\frac{pk}{2}$ که $p = |V|$ می‌باشد.

برهان. با توجه به تعریف اندازه‌ی $\tilde{G}$ داریم:

$$S(\tilde{G}) = \sum_{uv \in E} \mu(uv).$$

از آنجایی که $\tilde{G}$ یک گراف فازی k -منتظم است، با استفاده از تعریف گراف فازی k -منتظم داریم:

$$d_{\tilde{G}}(v) = k, \quad \forall v \in V.$$

هم‌چنین با توجه به قضیه‌ی مجموع درجات در گراف فازی داریم:

$$\sum_{v \in V} d_{\tilde{G}}(v) = 2 \sum_{uv \in E} \mu(uv) = 2S(\tilde{G}). \quad (3.4)$$

بنابراین از رابطه‌ی (۳.۴) داریم:

$$\mathfrak{Z}S(\tilde{G}) = \sum_{v \in V} d_{\tilde{G}}(v) = \sum_{v \in V} k = pk.$$

بنابراین $S(\tilde{G}) = \frac{pk}{2}$ می‌باشد. در نتیجه قضیه اثبات می‌شود. $\square$

قضیه ۲.۴.۴. اگر $(\sigma, \mu) : \tilde{G}$ یک گراف فازی r -کلاً منتظم باشد، آنگاه $\mathfrak{Z}S(\tilde{G}) + O(\tilde{G}) = pr$ ، که $p = |V|$ می‌باشد.

برهان. از آنجایی که $\tilde{G}$ یک گراف فازی r -کلاً منتظم می‌باشد، آنگاه با توجه به تعریف گراف فازی r -کلاً منتظم داریم:

$$r = td(v) = d(v) + \sigma(v) \quad \forall v \in V \quad (۴.۴)$$

هم‌چنین با در نظر گرفتن مجموع از طرفین در رابطه‌ی (۴.۴) داریم:

$$\sum_{v \in V} r = \sum_{v \in V} d_{\tilde{G}}(v) + \sum_{v \in V} \sigma(v).$$

با استفاده از (۳.۴) در قضیه‌ی (۱.۴.۴) و تعریف مرتبه در گراف فازی و هم‌چنین با توجه به ثابت بودن r و $p = |V|$ داریم:

$$pr = \mathfrak{Z}S(\tilde{G}) + O(\tilde{G}).$$

$\square$

نتیجه ۳.۴.۴. اگر $\tilde{G}$ یک گراف فازی k -منتظم و یک گراف فازی r -کلاً منتظم باشد، آنگاه:

$$O(\tilde{G}) = p(r - k).$$

برهان. از آنجایی که $\tilde{G}$ یک گراف فازی k -منتظم می‌باشد، از قضیه‌ی (۱.۴.۴) داریم:

$$S(\tilde{G}) = \frac{pk}{2} \quad \text{یا} \quad \mathfrak{Z}S(\tilde{G}) = pk.$$

از طرفی چون $\tilde{G}$ یک گراف فازی r -کلاً منتظم می‌باشد، از قضیه‌ی (۲.۴.۴) داریم:

$$\mathfrak{Z}S(\tilde{G}) + O(\tilde{G}) = pr. \quad (۵.۴)$$

هم‌چنین از رابطه‌ی (۵.۴) نتیجه می‌شود:

$$O(\tilde{G}) = pr - \mathfrak{Z}S(\tilde{G})$$

$$= pr - pk$$

$$= p(r - k).$$

$\square$

قضیه ۴.۴.۴. فرض کنید $(\sigma, \mu) : \tilde{G}$ یک گراف فازی منتظم باشد، به‌طوری که G^* یک دور باشد. آنگاه $\tilde{G}$ یک دور فازی است. هم‌چنین $\tilde{G}$ نمی‌تواند یک درخت فازی باشد.

برهان. فرض می‌کنیم که $(\sigma, \mu) : \tilde{G}$ یک گراف فازی منتظم روی دور G^* باشد. آنگاه با استفاده از قضیه‌ی (۱.۳.۴) و قضیه‌ی (۴.۳.۴)، یا μ یک تابع ثابت است یا یال‌های متناوب دارای مقادیر عضویت یکسان هستند.

بنابراین یک یال واحد xy وجود ندارد، که دارای شرط زیر باشد:

$$\mu(xy) = \wedge \{ \mu(uv) \mid \mu(uv) > 0 \}.$$

بنابراین با استفاده از تعریف یک دور فازی نتیجه می‌شود که $\tilde{G}$ یک دور فازی است. بنابراین با استفاده از لم (۱.۱.۴)، $\tilde{G}$ نمی‌تواند یک درخت فازی باشد. $\square$

ملاحظه ۵.۴.۴. قضیه‌ی (۴.۴.۴) برای گراف‌های فازی کلاً منتظم برقرار نمی‌باشد.

مثال ۶.۴.۴. گراف فازی $(\sigma, \mu) : \tilde{G}$ در نظر گرفته شده در مثال (۶.۳.۴)، گراف فازی کلاً منتظم است. هم‌چنین $\tilde{G}$ شامل یک یال واحد $v_1 v_2$ می‌باشد، به‌طوری‌که

$$\mu(v_1 v_2) = \wedge \{ \mu(xy) \mid xy \in E \}.$$

بنابراین گراف فازی $\tilde{G}$ یک دور فازی نیست. در نتیجه $\tilde{G}$ یک درخت فازی است.

قضیه ۷.۴.۴. یک گراف فازی منتظم روی یک دور فرد نمی‌تواند دارای یک پل فازی باشد. بنابراین نمی‌تواند دارای یک راس برشی فازی باشد.

برهان. فرض می‌کنیم که $(\sigma, \mu) : \tilde{G}$ یک گراف فازی منتظم روی دور فرد G^* باشد. آنگاه μ یک تابع ثابت است. بنابراین با حذف هر یالی، شدت همبندی بین هر جفت از رئوس، نمی‌تواند کاهش یابد. در نتیجه $\tilde{G}$ فاقد پل فازی است. بنابراین با استفاده از لم (۳.۱.۴)، $\tilde{G}$ نمی‌تواند یک راس برشی فازی داشته باشد. $\square$

ملاحظه ۸.۴.۴. قضیه‌ی (۷.۴.۴) برای گراف‌های فازی کلاً منتظم برقرار نمی‌باشد.

مثال ۹.۴.۴. گراف فازی $(\sigma, \mu) : \tilde{G}$ در نظر گرفته شده در مثال (۳.۳.۴) یک گراف فازی کلاً منتظم است. هم‌چنین،

$$\wedge \{ \mu(xy) \mid xy \in E \} = 0.1 \quad \text{و} \quad \mu(v_2 v_3) = 0.2 > 0.1, \mu(v_3 v_1) = 0.3 > 0.1.$$

بنابراین با استفاده از لم (۲.۱.۴)، $v_3 v_1$ و $v_2 v_3$ پل‌های فازی از $\tilde{G}$ هستند. بنابراین با استفاده از لم (۳.۱.۴)، v_3 راس مشترک دو پل فازی $v_2 v_3$ و $v_3 v_1$ می‌باشد، بنابراین v_3 یک راس برشی فازی است.

قضیه ۱۰.۴.۴. فرض کنید $(\sigma, \mu) : \tilde{G}$ یک گراف فازی منتظم روی یک دور زوج $(V, E) : G^*$ باشد. آنگاه یا $\tilde{G}$ فاقد یک پل فازی است، یا $\tilde{G}$ شامل $\frac{q}{p}$ پل فازی، به‌طوری‌که $q = |E|$ ، می‌باشد. هم‌چنین $\tilde{G}$ نمی‌تواند یک راس برشی فازی داشته باشد.

برهان. فرض می‌کنیم $(\sigma, \mu) : \tilde{G}$ یک گراف فازی منتظم روی یک دور زوج G^* باشد. آنگاه با استفاده از قضیه‌ی (۴.۳.۴)، یا μ یک تابع ثابت است، یا یال‌های متناوب دارای مقادیر عضویت یکسان هستند. ادعا ۱: μ یک تابع ثابت است. آنگاه با حذف هر یالی، شدت همبندی بین هر جفت از رئوس کاهش نمی‌یابد. بنابراین $\tilde{G}$ نمی‌تواند شامل پل فازی باشد، در نتیجه $\tilde{G}$ فاقد راس برشی است.

ادعا ۲: یال‌های متناوب دارای مقادیر عضویت یکسان هستند. بنابراین با استفاده از لم (۲.۱.۴)، یال‌های با مقادیر عضویت بزرگتر، پل‌های فازی از گراف فازی $\tilde{G}$ هستند. تعداد چنین یال‌هایی، $\frac{q}{p}$ ، که $q = |E|$ می‌باشد. در نتیجه $\tilde{G}$ دارای $\frac{q}{p}$ پل فازی می‌باشد. اما هیچ راسی که راس مشترک از دو پل فازی باشد وجود ندارد، بنابراین $\tilde{G}$ فاقد راس برشی است. $\square$

ملاحظه ۱۱.۴.۴. قضیه‌ی (۱۰.۴.۴) برای گراف‌های فازی کلاً منتظم برقرار نمی‌باشد.

مثال ۱۲.۴.۴. این مثال بیانگر ملاحظه‌ی (۱۱.۴.۴) می‌باشد.

۱. گراف فازی $(\sigma, \mu) : \tilde{G}$ در مثال (۶.۳.۴) در نظر بگیرید. $\tilde{G}$ یک گراف فازی کلاً منتظم است. یال‌های v_1v_2 و v_3v_4 پل‌های فازی از $\tilde{G}$ هستند. بنابراین v_4 و v_3 رئوس برشی فازی از $\tilde{G}$ هستند. در این مثال $\tilde{G}$ بیشتر از $\frac{q}{p}$ پل فازی دارد.

۲. گراف $G^* : (V, E)$ که

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\} \text{ و } E = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_6, v_6v_1\}.$$

را در نظر بگیرید. و گراف فازی $(\sigma, \mu) : \tilde{G}$ را روی G^* به‌طوری‌که

$$\sigma(v_1) = 0.9, \sigma(v_2) = 0.7, \sigma(v_3) = 0.8, \sigma(v_4) = \sigma(v_5) = \sigma(v_6) = 1$$

و

$$\mu(v_1v_2) = 0.3, \mu(v_2v_3) = 0.4, \mu(v_3v_4) = \mu(v_4v_5) = \mu(v_5v_6) = \mu(v_6v_1) = 0.2.$$

را در نظر بگیرید. آنگاه

$$td(v_i) = 1.4 \quad \forall i = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

بنابراین $\tilde{G}$ یک گراف فازی کلاً منتظم است. و یال‌های v_1v_2 و v_2v_3 پل‌های فازی از $\tilde{G}$ هستند. در نتیجه v_2 راس برشی فازی از $\tilde{G}$ می‌باشد. در این مثال تعداد پل‌های فازی $\tilde{G}$ ، کمتر از $\frac{q}{p}$ (= ۳) می‌باشد.

قضیه ۱۳.۴.۴. یک گراف فازی k -منتظم همبند که $k > 0$ ، با $p \geq 3$ ($|V| = p$)، نمی‌تواند دارای یک راس انتهایی باشد (یک راس از درجه‌ی یک در گراف G^*).

برهان. برای اثبات از برهان خلف استفاده می‌کنیم.

از آنجایی که $k > 0$ ، بنابراین به ازای هر $v \in V$ ، داریم $d_{\tilde{G}}(v) > 0$. بنابراین هر راس حداقل با یک راس مجاور است.

فرض خلف: فرض می‌کنیم u یک راس انتهایی باشد و فرض می‌کنیم $uv \in E$. آنگاه $d(u) = \mu(uv) = k$. از آنجایی که $\tilde{G}$ همبند است و $p \geq 3$ ، در نتیجه v با برخی رئوس دیگر که $w \neq u$ ، مجاور است. آنگاه

$$\begin{aligned} d(v) &\geq \mu(uv) + \mu(vw) \\ &> \mu(uv). \end{aligned}$$

در نتیجه:

$$d(v) > \mu(uv) = k$$

بنابراین $d(v) > k$ می‌باشد، که با k -منتظم بودن گراف فازی متناقض است. بنابراین $\tilde{G}$ نمی‌تواند یک راس انتهایی داشته باشد. در نتیجه فرض خلف باطل است و حکم ثابت است، یعنی یک گراف فازی k -منتظم همبند که $k > 0$ ، با $p \geq 3$ نمی‌تواند دارای یک راس انتهایی باشد. $\square$

ملاحظه ۱۴.۴.۴. قضیه‌ی (۱۳.۴.۴) برای گراف‌های فازی کلاً منتظم برقرار نمی‌باشد.

مثال ۱۵.۴.۴. گراف فازی $(\sigma, \mu) : \tilde{G}$ در مثال (۹.۲.۴)، یک گراف فازی کلاً منتظم است، به طوری که شامل دو راس انتهایی v_2 و v_3 می‌باشد.

ملاحظه ۱۶.۴.۴. با استفاده از قضیه‌ی (۱۳.۲.۴) واضح است که قضایای (۱.۳.۴)، (۴.۳.۴)، (۴.۴.۴)، (۷.۴.۴)، (۱۰.۴.۴) و قضیه‌ی (۱۳.۴.۴) برای گراف‌های فازی کلاً منتظم در صورتی برقرارند، که σ یک تابع ثابت باشد.

فصل ۵

گراف‌های سطح فازی

۱.۵ مقدمه

اولین بار گراف‌های سطح توسط اویلر^۱ ریاضیدان سوییسی ارائه شده است. یک گراف سطح، همبند، ساده، سطح (صفحه) را به یک تعداد از نواحی، که دربردارنده‌ی نواحی تماماً محصور شده و به یک ناحیه‌ی خارجی نامتناهی تقسیم می‌کند.

در این فصل ضمن تعریف گراف سطح فازی، گراف سطح فازی ماکسیمال و گراف α -سطح فازی، گراف دوگان فازی و چگونگی برقراری نتیجه‌ی فرمول اویلر در گراف‌های سطح فازی بررسی می‌شود. و همچنین مفهوم عدد تقاطع در گراف‌های سطح به صورت عدد تقاطع فازی α -سطح در گراف‌های سطح فازی تعمیم داده می‌شود.

در این رابطه با استفاده از تعریف مجموع درجات گراف فازی به صورت:

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2 \sum_{uv \in E} \mu(uv)$$

نشان می‌دهیم که نتیجه‌ی فرمول اویلر به صورت زیر:

$$\sum_{uv \in E} \mu(uv) \leq 3n - 6$$

برقرار می‌باشد [۶].

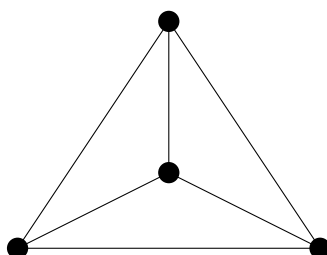
در این فصل گراف دوگان را با G^* و گراف دوگان فازی را با $\tilde{G}^*$ نمایش می‌دهیم.

^۱Euler

۲.۵ تعاریف

تعریف ۱.۲.۵. گراف قطعی G یک گراف مسطح^۲ نامیده می‌شود اگر به گونه ای در صفحه رسم شود، که هیچ دو یالی به جز در رئوس با یکدیگر متلاقی نباشند[۴].

مثال ۲.۲.۵. در این مثال یک گراف مسطح در شکل (۱.۵) ارائه شده است.



شکل ۱.۵: گراف مسطح

تعریف ۳.۲.۵. هر ناحیه بسته در یک گراف مسطح یک وجه^۳ نامیده می‌شود[۴].

تعریف ۴.۲.۵. درجه‌ی یک وجه در یک گراف مسطح: فرض کنید φ یک وجه از گراف مسطح G باشد. تعداد یال‌های واقع شده روی مرز φ ، درجه‌ی φ نامیده می‌شود و با $d(\varphi)$ نمایش داده می‌شود[۴].

نکته ۵.۲.۵. به ازای هر وجه درونی φ از یک گراف مسطح ساده، رابطه‌ی $d(\varphi) \geq 3$ برقرار می‌باشد[۴].

تعریف ۶.۲.۵. فرض کنید G یک گراف مسطح باشد. گراف دوگان^۴ G^* از گراف G ، یک گراف مسطح است، که دارای ویژگی‌های زیر می‌باشد [۴]:

- گراف دوگان G^* به ازای هر وجه از گراف G ، دارای یک راس می‌باشد.
- یال‌های گراف دوگان G^* متناظر با یالی از گراف G به صورت زیر است:
اگر e یالی از گراف G باشد که از یک طرف دارای وجه F_i و از طرف دیگر دارای وجه F_j باشد، آنگاه یال دوگان متناظر $e \in E(G^*)$ ، یک یال متصل کننده‌ی رئوس x و y از G^* که با وجوه F_i و F_j متناظرند، می‌باشد.

برای رسم یک گراف دوگان از گراف مسطح (قطعی) G ، می‌توانیم مراحل زیر را انجام دهیم:

۱. متناظر با هر وجه از گراف G ، یک راس در داخل آن در نظر می‌گیریم.

^۲planar

^۳face

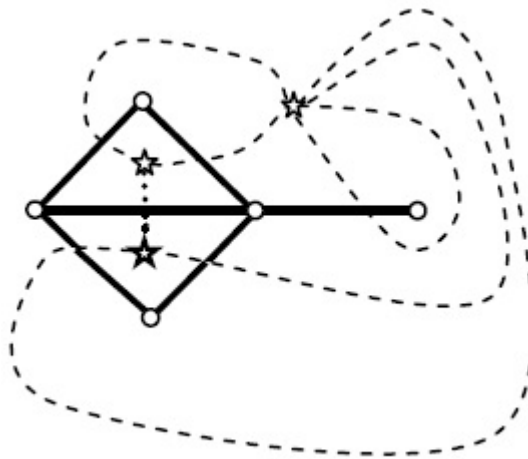
^۴dual graph

۲. راس قرار داده شده در هر وجه را به گونه‌ای با راس قرار داده شده در وجه مجاور متصل می‌کنیم، که مرز(یال) مشترک از وجه مجاور را فقط یک بار و در غیر محل راس، قطع نماید.

۳. برای وجه خارجی نیز، عمل فوق را انجام می‌دهیم.

با انجام عملیات ذکر شده بر روی گراف مسطح G ، گراف حاصل را یک گراف دوگان می‌نامیم، که یک گراف مسطح است.

مثال ۷.۲.۵. شکل (۲.۵) یک گراف دوگان می‌باشد.



شکل ۲.۵: گراف دوگان G^*

تعریف ۸.۲.۵. اگر یک گراف فازی $\tilde{G} : (\sigma, \mu)$ به گونه‌ای در صفحه رسم شود، که یال‌ها فقط در رئوس یکدیگر را قطع کنند، آنگاه گراف فازی $\tilde{G} : (\sigma, \mu)$ را یک گراف مسطح فازی^۵ گوئیم [۴].

تعریف ۹.۲.۵. تعریف دیگری از گراف مسطح فازی: گراف فازی $\tilde{G} : (\sigma, \mu)$ را یک گراف مسطح فازی گوئیم، اگر گراف زمینه‌ی آن یک گراف مسطح باشد [۶].

مثال ۱۰.۲.۵. یک مثال از گراف مسطح فازی در شکل (۳.۵) داده شده است.

تعریف ۱۱.۲.۵. به گراف مسطح فازی با بیشترین تعداد یال، به‌طوری که با افزودن هر یال دیگری به گراف فازی، گراف نامسطح فازی شود را گراف مسطح فازی ماکسیمال^۶ گوئیم [۴].

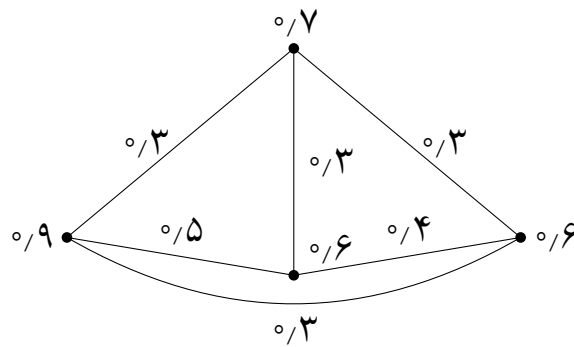
تعریف ۱۲.۲.۵. گراف فازی $\tilde{G} : (\sigma, \mu)$ را α -مسطح^۷ گوئیم، اگر گراف فازی $\tilde{G} : (\sigma, \mu)$ مسطح باشد و

$$\mu(uv) \geq \alpha \quad \forall (uv) \in E.$$

^۵fuzzy dual graph

^۶maximal fuzzy planar graph

^۷ α -planar



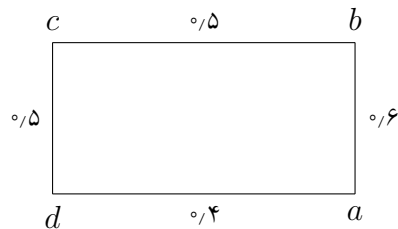
شکل ۳.۵: گراف مسطح فازی

گراف فازی α -مسطح را با $\tilde{G}_\alpha$ نمایش می‌دهیم [۶].

مثال ۱۳.۲.۵. گراف مسطح فازی مثال (۳.۵)، $\alpha=3$ -مسطح می‌باشد.

مثال ۱۴.۲.۵. در شکل یک گراف فازی $\alpha=4$ -مسطح داده شده است، زیرا

$$\mu(uv) \geq \alpha \quad \forall (uv) \in E.$$



شکل ۴.۵: گراف فازی $\tilde{G}_{\alpha=4}$

متناظر با تعریف گراف مسطح فازی، می‌توان گراف نامسطح فازی را به صورت زیر تعریف نمود.

تعریف ۱۵.۲.۵. گراف فازی $(\sigma, \mu) : \tilde{G}$ را نامسطح^۸ گوئیم، اگر گراف زمینه‌ی آن نامسطح باشد [۶].

اگر فرض شود که گراف فازی $(\sigma, \mu) : \tilde{G}$ نامسطح باشد، می‌توان عدد تقاطع فازی α -سطح را به صورت زیر تعریف نمود.

تعریف ۱۶.۲.۵. به تعداد حداقل یال با شرط:

$$\mu(uv) \geq \alpha \quad \forall (uv) \in E,$$

^۸non-planar

به طوری که با حذف آن‌ها گراف فازی، مسطح می‌شود را عدد تقاطع فازی α -سطح^۹ گوئیم [۶].
برای تعیین عدد تقاطع فازی α -سطح، می‌توان یال‌های فازی گراف فازی $(\sigma, \mu) : \tilde{G}$ را به صورت زیر مرتب نمود:

$$\mu(u_1 v_1) \leq \mu(u_2 v_2) \leq \mu(u_3 v_3) \leq \dots \quad \forall u_i, v_i \in V$$

و یال‌ها را بر مبنای مقدار تعلق حذف نمود.

۱.۲.۵ گراف دوگان فازی

فرض کنید $G : (V, E, F)$ یک گراف مسطح با مجموعه رئوس V ، مجموعه یالی E و مجموعه وجوه F باشد. همان‌طور که می‌دانیم در یک گراف فازی $(\sigma, \mu) : \tilde{G}$ ، یک زیرمجموعه‌ی فازی از مجموعه V ، یک نگاشت $\sigma : V \rightarrow [0, 1]$ می‌باشد، که به ازای هر $v \in V$ ، $\sigma(v)$ درجه‌ی عضویت v در گراف فازی $\tilde{G}$ نامیده می‌شود. همچنین، یک زیرمجموعه‌ی فازی از یک مجموعه وجوه F ، یک نگاشت $\lambda : F \rightarrow [0, 1]$ می‌باشد. که به ازای هر $f \in F$ ، $\lambda(f)$ درجه‌ی عضویت f در گراف فازی $\tilde{G}$ نامیده می‌شود. اگر σ و λ بر روی $[0, 1]$ (پوشا) باشند، آنگاه آن‌ها به ترتیب، توابع مشخصه از یک مجموعه‌ی V و F می‌باشند، که مجموعه‌های قطعی هستند [۴].

هم‌چنین همان‌طور که قبلاً گفته شد، یک رابطه‌ی فازی روی مجموعه‌ی V ، یک زیرمجموعه‌ی از $V \times V$ است. یک رابطه‌ی فازی μ روی V ، یک رابطه‌ی فازی روی σ می‌باشد، که

$$\mu(uv) \leq \sigma(u) \wedge \sigma(v) \quad \forall u, v \in V.$$

در این‌جا یک گراف مسطح فازی که توسط توابع سه‌گانه $(\sigma, \mu, \lambda) : \tilde{G}$ ، که σ یک زیرمجموعه‌ی فازی از مجموعه رئوس V ، μ یک رابطه‌ی فازی متقارن روی σ و λ یک زیرمجموعه‌ی فازی از مجموعه وجوه F می‌باشد، را تعریف می‌کنیم.

قابل توجه است که گراف قطعی (V, E, F) یک مورد خاص از یک گراف فازی با توابع عضویت یک می‌باشد.

تعریف ۱۷.۲.۵. به ازای یک گراف مسطح فازی $\tilde{G}$ داده شده، گراف فازی $\tilde{G}^*$ را ایجاد خواهیم کرد، که گراف دوگان فازی^{۱۰} از گراف فازی $\tilde{G}$ نامیده می‌شود [۴].

ساختار در ۳ مرحله به صورت زیر ایجاد می‌شود:

۱. درون هر وجه $\tilde{F}_i$ از گراف فازی $\tilde{G}$ ، یک نقطه از $\tilde{V}_i^*$ را قرار می‌دهیم، که این نقاط، رئوس گراف دوگان فازی $\tilde{G}^*$ با درجه عضویت $\sigma(v_i^*) = \lambda(f_i)$ می‌باشند.

^۹fuzzy α -level intersection number

^{۱۰}fuzzy dual graph

۲. متناظر با هر یال $\tilde{e}$ از گراف فازی $\tilde{G}$ ، یک خط $\tilde{e}^*$ که از یال $\tilde{e}$ می‌گذرد (اما از هیچ یال دیگری از $\tilde{G}$ نمی‌گذرد)، و رئوس $\tilde{v}_i^*$ که در وجوه $\tilde{f}_i$ مجاور با یال $\tilde{e}$ قرار دارند، را به یکدیگر متصل می‌کند. این خطوط، یال‌هایی از $\tilde{G}^*$ با درجه عضویت $\mu(e_i^*) = \mu(e_i)$ و μ در شرط زیر صدق می‌کند:

$$\mu(e_i^*) \leq \min(\sigma(v_i^*), \sigma(v_{i+1}^*))$$

که $\tilde{v}_i^*$ و $\tilde{v}_{i+1}^*$ رئوس انتهایی از یال $\tilde{e}_i^*$ می‌باشند.

۳. هر وجه از گراف دوگان فازی $\tilde{G}^*$ یک عضو λ را داراست، به‌طوری که $\lambda(f_i^*) = \sigma(v_i)$.

مثال ۱۸.۲.۵. در شکل (۵.۵) $\tilde{G}^*$ ، گراف دوگان فازی از گراف مسطح فازی $\tilde{G}$ است. که شرایط زیر برقرار می‌باشد:

$$\sigma(v_1^*) = \lambda(f_1) = \circ/5, \quad \sigma(v_2^*) = \lambda(f_2) = \circ/6, \quad \sigma(v_3^*) = \lambda(f_3) = \circ/7,$$

$$\mu(e_1^*) = \mu(e_1) = \circ/3 \leq \sigma(v_1^*) \wedge \sigma(v_2^*) = \text{Min}\{\circ/5, \circ/7\} = \circ/5$$

$$\mu(e_2^*) = \circ/3 \leq \sigma(v_1^*) \wedge \sigma(v_2^*) = \text{Min}\{\circ/5, \circ/7\} = \circ/5,$$

$$\mu(e_3^*) = \circ/5 \leq \sigma(v_2^*) \wedge \sigma(v_3^*) = \text{Min}\{\circ/6, \circ/7\} = \circ/6,$$

$$\mu(e_4^*) = \circ/4 \leq \sigma(v_2^*) \wedge \sigma(v_3^*) = \text{Min}\{\circ/6, \circ/7\} = \circ/6,$$

$$\mu(e_5^*) = \circ/2 \leq \sigma(v_3^*) \wedge \sigma(v_4^*) = \text{Min}\{\circ/7, \circ/7\} = \circ/7,$$

$$\lambda(f_1^*) = \sigma(v_1) = \circ/9, \quad \lambda(f_2^*) = \sigma(v_2) = \circ/6, \quad \lambda(f_3^*) = \sigma(v_3) = \circ/5,$$

$$\lambda(f_4^*) = \sigma(v_4) = \circ/7, \quad \lambda(f_5^*) = \sigma(v_5) = \circ/6.$$

۳.۵ قضایای مربوط به فرمول اویلر

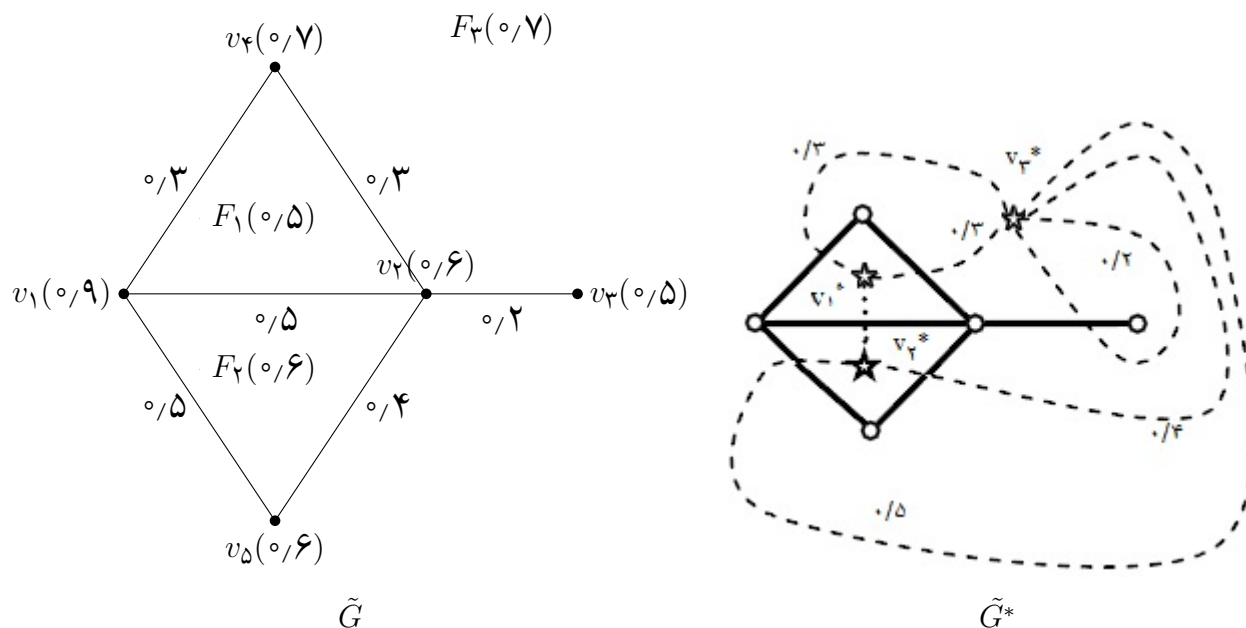
در گراف‌های مسطح قطعی، قضایای مربوط به فرمول اویلر به‌صورت زیر می‌باشد:

قضیه ۱۰.۳.۵. [۵] فرمول اویلر^{۱۱} فرض کنید G یک گراف مسطح همبند باشد، و فرض کنید n ، e و f به ترتیب تعداد رئوس، یال‌ها و وجوه از G باشند. آنگاه:

$$n - e + f = 2.$$

مثال ۲.۳.۵. در این مثال نشان می‌دهیم که فرمول اویلر در گراف زیر برقرار است. در شکل (۶.۵)، وجوه گراف را با اعداد ۱ و ۲ و ۳ نمایش می‌دهیم. که اعداد ۱ و ۲ را برای وجوه بسته (داخلی) و عدد ۳ را برای وجه خارجی (بیرونی) نامتناهی می‌باشد. به‌وضوح می‌بینیم که گراف دارای ۶ راس و ۷

^{۱۱}Eulerian formula



شکل ۵.۵: گراف فاز $\tilde{G}$ و گراف دوگان فاز $\tilde{G}^*$

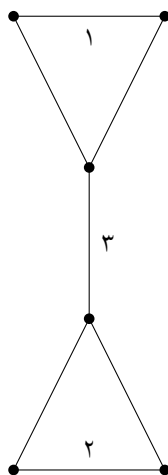
یال می‌باشد، و هم‌چنین گراف G در شکل (۶.۵)، یک گراف مسطح، همبند و ساده می‌باشد. بنابراین فرمول اویلر برقرار خواهد شد. هم‌چنین در این گراف داریم:

$$۶ - ۷ + ۳ = ۲,$$

در نتیجه با توجه به فرمول اویلر داریم:

$$\Rightarrow ۲ = ۲.$$

بنابراین فرمول اویلر برقرار می‌باشد.



شکل ۶.۵: گراف مسطح همبند

قضیه ۳.۳.۵. [۵] فرض کنید G یک گراف مسطح ساده با n راس و e یال باشد، که $n \geq 3$. آنگاه:

$$e \leq 3n - 6.$$

نتیجه ۴.۳.۵. [۵] اگر G یک گراف مسطح ساده باشد، آنگاه G دارای حداقل یک راس با درجه‌ی کمتر از ۶ می‌باشد، به عبارت دیگر، یک راس $v \in V$ با $d(v) \leq 5$ وجود دارد.

همچنین در گراف‌های مسطح، رابطه‌ی هر گراف مسطح و دوگان آن به صورت زیر می‌باشد:

لم ۵.۳.۵. [۵] فرض کنید G یک گراف مسطح همبند با n راس، m یال و f وجه باشد. و فرض کنید گراف دوگان G^* متناظر با گراف G ، شامل n^* راس، m^* یال و f^* وجه باشد. آنگاه

$$n^* = f, \quad m^* = m, \quad f^* = n.$$

قضیه ۶.۳.۵. [۴] فرض کنید G یک گراف مسطح همبند باشد. آنگاه G^{**} با G یکرخت است.

قضایای مربوط به گراف‌های مسطح فازی به صورت زیر می‌باشد:

قضیه ۷.۳.۵. [۶] فرض کنید گراف فازی $(\sigma, \mu) : \tilde{G}$ یک گراف مسطح ساده با n راس و e یال (به طوری که $\sum_{(uv) \in E} \mu(uv) \leq e$) باشد، که $n \geq 3$ ، آنگاه:

$$\sum_{(uv) \in E} \mu(uv) \leq 3n - 6 \quad \forall u, v \in V.$$

برهان. با استفاده از قضیه‌ی (۳.۳.۵) و با استفاده از رابطه‌ی $\sum_{(uv) \in E} \mu(uv) \leq e$ داریم:

$$\sum_{(uv) \in E} \mu(uv) \leq 3n - 6 \quad \forall u, v \in V$$

□

در نتیجه قضیه اثبات شد.

نتیجه ۸.۳.۵. [۶] اگر $(\sigma, \mu) : \tilde{G}$ یک گراف مسطح فازی ساده باشد، آنگاه $(\sigma, \mu) : \tilde{G}$ دارای حداقل یک راس v با درجه‌ی کمتر از ۶ می‌باشد، به عبارت دیگر، یک راس $v \in V$ با $d(v) \leq 5$ وجود دارد.

برهان. با استفاده از برهان خلف قضیه را ثابت می‌کنیم.

اگر $(\sigma, \mu) : \tilde{G}$ فقط شامل یک راس باشد، این راس دارای درجه‌ی صفر می‌باشد. اگر $(\sigma, \mu) : \tilde{G}$ دو راس داشته باشد، آنگاه هر دو راس دارای درجه‌ی حداکثر یک می‌باشند. حال فرض می‌کنیم که $n \geq 3$ ، به عبارت دیگر، $(\sigma, \mu) : \tilde{G}$ دارای حداقل ۳ راس باشد.

فرض خلف: اگر درجه‌ی هر راس از $(\sigma, \mu) : \tilde{G}$ حداقل ۶ باشد، داریم:

$$\sum_{v \in V} d(v) \geq 6n \quad (1.5)$$

و از قضیه‌ی مجموع درجات در گراف فازی داریم:

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2 \sum_{(uv) \in E} \mu(uv) \quad (2.5)$$

با استفاده از (۱.۵) و (۲.۵) داریم:

$$2 \sum_{(uv) \in E} \mu(uv) = \sum_{v \in V} d(v) \geq 6n$$

بنابراین نتیجه می‌شود:

$$\sum_{(uv) \in E} \mu(uv) \geq 3n$$

و این امر غیر ممکن است. زیرا با استفاده از قضیه‌ی (۷.۳.۵) داریم:

$$\sum_{(uv) \in E} \mu(uv) \leq 3n - 6 \quad \forall u, v \in V,$$

بنابراین به تناقض می‌رسیم. فرض خلف باطل است و حکم ثابت می‌شود، به این معنی که گراف مسطح فازی ساده باید یک راس از درجه‌ی کمتر از ۶ را دارا باشد. $\square$

گزاره ۹.۳.۵. [۴] دوگان گراف فازی دوگان، خود گراف فازی است. به عبارت دیگر، $\tilde{G}^{**} = \tilde{G}$.

برهان. با استفاده از تعریف گراف فازی دوگان، دوگان گراف فازی $\tilde{G}$ دارای درجه‌ی عضویت به صورت زیر می‌باشد:

$$\sigma(v_i^*) = \lambda(f_i), \quad \mu(e_i^*) = \mu(e_i), \quad \lambda(f_i^*) = \sigma(v_i),$$

و دوگان گراف فازی دوگان، دارای درجه‌ی عضویت به صورت زیر می‌باشد:

$$\sigma(v^{**}) = \lambda(f^*) = \sigma(v)$$

$$\implies \sigma(v^{**}) = \sigma(v),$$

$$\mu(e^{**}) = \mu(e^*) = \mu(e)$$

$$\implies \mu(e^{**}) = \mu(e),$$

$$\lambda(f^{**}) = \sigma(v^*) = \lambda(f)$$

$$\implies \lambda(f^{**}) = \sigma(v^*).$$

به طوری که درجه‌ی عضویت دوگان گراف فازی دوگان، درجه‌ی عضویت خود گراف فازی می‌باشد، به طوری که $\tilde{G}^{**} = \tilde{G}$. $\square$

فصل ۶

کاربردهای گراف فازی

گراف‌های فازی همانند گراف‌های قطعی در بسیاری از شاخه‌های علوم از جمله در علوم مهندسی، علوم پزشکی و علوم اجتماعی کاربرد دارد. در این فصل به کاربردهای زیر پرداخته می‌شود:

۱. مقادیر ویژه و انرژی در گراف فازی

۲. رنگ آمیزی گراف‌های فازی

۳. احاطه‌گری در گراف‌های فازی

۱.۶ مقادیر ویژه و انرژی در گراف فازی

یکی از کاربردهای گراف فازی، مقادیر ویژه و انرژی در گراف فازی می‌باشد. انرژی گراف قطعی اولین بار توسط ایوان گاتمن^۱ در سال ۱۹۷۸ ارائه شده است [۲].

تعریف ۱.۱.۶. اگر $A(G)$ ماتریسی $n \times n$ باشد، آنگاه بردار ناصفر X را یک بردار ویژه^۲ A نامند، هرگاه $AX = \lambda X$ مضربی از X باشد. به بیان دیگر برای بعضی از مقادیر λ داشته باشیم $AX = \lambda X$. عدد λ را مقدار ویژه^۳ A و X را بردار ویژه A نظیر λ می‌نامند. برای یافتن مقادیر ویژه تساوی $AX = \lambda X$ را می‌توان به فرم $AX = \lambda IX$ نوشت. بنابراین داریم:

$$(\lambda I - A)X = 0$$

این دستگاه زمانی جواب ناصفر دارد که $\det(\lambda I - A) = 0$ باشد. پس λ یک مقدار ویژه ماتریس A است اگر و فقط اگر $\det(A - \lambda I) = 0$ باشد.

^۱Ivan Gutman

^۲eigenvector

^۳eigenvalue

تعریف ۲.۱.۶. فرض کنید $G : (V, E)$ گرافی ساده و بدون جهت و بدون وزن با n راس، $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ باشد. ماتریس مجاورت^۴ $A = [a_{ij}]$ ، ماتریسی $n \times n$ با درایه‌های تعریف شده به صورت زیر است:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i v_j \in E, \\ 0, & v_i v_j \notin E. \end{cases}$$

تعریف ۳.۱.۶. انرژی^۵ گراف ساده $G : (V, E)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E(G) = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|$$

که در آن $\lambda_i : 1 \leq i \leq n$ ، مقادیر ویژه حاصل از ماتریس مجاورت گراف G است.

تعریف ۴.۱.۶. ماتریس مجاورت فازی^۶ از گراف فازی $\tilde{G}(\sigma, \mu)$ ، $\tilde{A} = [\tilde{a}_{ij}]$ در نظر گرفته می‌شود.

$$\tilde{a}_{ij} = \begin{cases} \mu(u_i, u_j), & \text{هرگاه } u_i \text{ و } u_j \text{ مجاورند} \\ 0, & \text{سایر موارد.} \end{cases}$$

تعریف ۵.۱.۶. فرض کنید $\tilde{G} = (\sigma, \mu)$ گراف فازی و $\tilde{A}$ ماتریس مجاورت آن باشد. مجموعه مقادیر ویژه حاصل از ماتریس مجاورت گراف همراه با مرتبه تکرار هر یک از این مقادیر ویژه، طیف گراف فازی^۷ تعریف می‌شود. حال اگر مقادیر ویژه $\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_n$ و مرتبه تکرار هر یک به ترتیب $m(\tilde{\lambda}_1), \dots, m(\tilde{\lambda}_n)$ باشد، آنگاه طیف گراف فازی $\tilde{G} : (\sigma, \mu)$ را به صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$Spec(\tilde{G}) = \begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_1 & \tilde{\lambda}_2 & \dots & \tilde{\lambda}_n \\ m(\tilde{\lambda}_1) & m(\tilde{\lambda}_2) & \dots & m(\tilde{\lambda}_n) \end{pmatrix}$$

تعریف ۶.۱.۶. فرض کنید $\tilde{G} = (\sigma, \mu)$ گراف فازی و $\tilde{A}$ ماتریس مجاورت آن باشد. انرژی فازی^۸ از گراف فازی $\tilde{G} : (\sigma, \mu)$ ، مجموع قدرمطلق مقادیر ویژه از $\tilde{G}$ تعریف می‌شود و به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$E(\tilde{G}) = \sum_{i=1}^n |\tilde{\lambda}_i|$$

مثال ۷.۱.۶. فرض کنید $\tilde{G} : (\sigma, \mu)$ گراف فازی و $\tilde{B}$ ماتریس مجاورت آن باشد.

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0/1 & 0 & 0/1 \\ 0/1 & 0 & 0/2 & 0/1 \\ 0 & 0/2 & 0 & 0/3 \\ 0/1 & 0/1 & 0/3 & 0 \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه به دست آمده از ماتریس مجاورت $\tilde{B}$ ، $\{0/3442, -0/1, 0/066, 0/4376\}$ است. بنابراین طبق تعریف انرژی گراف $E(\tilde{G}) = 0/8884$ خواهد شد.

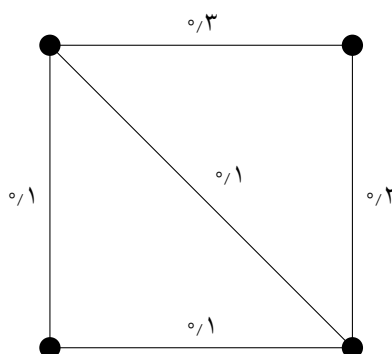
^۴adjacency matrix

^۵energy

^۶fuzzy adjacency matrix

^۷fuzzy spectrum

^۸fuzzy energy

شکل ۱۰۶: گراف فازی $\tilde{G}$

۲۰۶. رنگ آمیزی گراف‌های فازی

یکی دیگر از کاربردهای گراف فازی، رنگ آمیزی گراف‌های فازی است.

رنگ آمیزی گراف‌های فازی اولین بار توسط نویسندگانی چون ^۹اصلاحچی و اونق^{۱۰} در سال ۲۰۰۴ تحت عنوان رنگ آمیزی گراف فازی مطرح گردید و این موضوع در سال ۲۰۰۵ به‌طور خاص‌تر تحت عنوان رنگ آمیزی گراف‌های فازی توسط نویسندگانی چون مونز^{۱۱}، اورتینو^{۱۲}، رامیرز^{۱۳} و یانز^{۱۴} ارایه گردید و تاکنون این رنگ آمیزی از جنبه‌های گوناگون مورد توجه واقع شده است [۳].

۱۰۲۰۶. رنگ آمیزی گراف قطعی

تعریف ۱۰۲۰۶. گراف قطعی $G : (V, E)$ را در نظر بگیرید، یک تابع رنگ آمیزی^{۱۵}، یک نگاشت $C : V \rightarrow N$ است که $C(i)$ رنگ راس i است، به این صورت که دو راس مجاور نمی‌توانند رنگ یکسان بگیرند، یعنی اگر $\{i, j\} \in E$ آنگاه $C(i) \neq C(j)$ ، که رئوس i و j ناسازگار نامیده می‌شود. k -رنگ آمیزی^{۱۶} C^k ، یک تابع رنگ آمیزی با حداکثر k رنگ متمایز به‌صورت زیر است:

$$C^k : V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}.$$

تعریف ۲۰۲۰۶. یک گراف، k -رنگ پذیر^{۱۷} است اگر یک k -رنگ آمیزی را بپذیرد.

^۹Eslahchi

^{۱۰}Onagh

^{۱۱}Munez

^{۱۲}Ortuno

^{۱۳}Ramirez

^{۱۴}Yanez

^{۱۵}coloring function

^{۱۶} k -coloring C^k

^{۱۷} k -colored

تعریف ۳.۲.۶. به مینیمم مقدار k که گراف قطعی G ، k -رنگ پذیر باشد را عدد رنگی^{۱۸} G نامیده می‌شود و با $\chi(G)$ نمایش داده می‌شود.

تعریف ۴.۲.۶. مساله‌ی رنگ آمیزی گراف^{۱۹} شامل یافتن عدد رنگی گراف و تابع رنگ آمیزی مربوطه است.

۲.۲.۶ رنگ آمیزی گراف فازی

با توجه به این‌که گراف‌های فازی بنابر فازی بودن راس یا یال دو نوع می‌باشند، در این بخش به رنگ آمیزی گراف‌های فازی با رئوس قطعی و یال فازی پرداخته می‌شود.

رنگ آمیزی گراف فازی با رئوس قطعی و یال فازی $\tilde{G} : (V, \mu)$

فرض کنید $\tilde{G} : (V, \mu)$ یک گراف فازی با مجموعه رئوس قطعی $V = \{1, 2, \dots, n\}$ و یال‌های فازی با سطح شدت μ باشد، که یک عدد فازی تعریف شده روی یال‌ها می‌باشد.

فرض کنید $A = \{\alpha_1 < \alpha_2 \dots < \alpha_k\}$ یک دنباله از سطوح شدت یال‌های فازی باشد و $I = A \cup \{0\}$ ، به ازای هر $\alpha \in I$ ، گراف قطعی $G_\alpha : (V, E_\alpha)$ دارای مجموعه یال‌هایی به‌صورت:

$$E_\alpha = \{ij \mid 1 \leq i < j \leq n, \mu(ij) \geq \alpha\}$$

است. این رنگ آمیزی بر اساس مفهوم α -برش تعریف شده است، بنابراین هر k -رنگ آمیزی C_α^k می‌تواند روی G_α بیان شود، هر k -رنگ آمیزی از $\tilde{G}$ از بین این دنباله‌ها تعیین می‌شود. عدد رنگی گراف فازی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

تعریف ۵.۲.۶. عدد رنگی گراف فازی $\tilde{G} : (V, \mu)$ ، یک عدد فازی

$$\chi(\tilde{G}) = \{(x, \nu(x)) \mid x \in X\}$$

است، به‌طوری‌که

$$\nu(x) = \sup\{\alpha \in I \mid x \in A_\alpha\} \quad \forall x \in X$$

$$X = \{1, 2, \dots, |V|\} \quad \text{و} \quad A_\alpha = \{1, 2, \dots, \chi_\alpha\} \quad \forall \alpha \in I$$

به ازای هر مقدار α یک گراف قطعی G_α را به‌صورت معمولی رنگ آمیزی می‌کنیم که عدد رنگی به‌دست آمده برای هر یک از این گراف‌ها، به معنی کمترین مقدار دسته‌های ممکن سازگار در سطح α است. به این ترتیب k گراف قطعی $\{G_{\alpha_i} \mid i = 1, \dots, k\}$ داریم که از گراف فازی $\tilde{G} : (V, \mu)$ به‌دست می‌آید. طبق تعریف عدد رنگی، برای هر عضو x برای هر سطح α یک تابع عضویت $\nu(x)$ دارد. عدد

^{۱۸}number coloring

^{۱۹}graph coloring problem

رنگی فازی تعمیمی از عدد رنگی قطعی است، اگر $k = 1$ باشد که فقط یک سطح α مورد بررسی قرار می‌گیرد.

یکی از کاربردهای رنگ آمیزی گراف فازی در مساله‌ی چراغ ترافیک می‌باشد.

۳.۶ مفهوم احاطه‌گری در گراف‌های فازی

یکی دیگر از کاربردهای گراف فازی، مفهوم احاطه‌گری در گراف‌های فازی است.

اولین پیشنهادها در مورد مجموعه‌های احاطه‌گر به منشا مسابقات شطرنج در حدود ۴۰۰ سال پیش برمی‌گردد. در این مسابقات هدف قرار دادن مینیم تعداد مهره‌های شطرنج بوده است، به گونه‌ای که تمامی مربع‌های صفحه را احاطه کنند. نحوه‌ی برخورد جامع و گسترده با مبانی احاطه‌گری در گراف‌ها و هم‌چنین برخی از موضوعات اولیه در این زمینه توسط هاینس^{۲۰} و همکارانش در کتاب اصول احاطه‌گری در گراف مطرح شده است. ای. ساماساندرام^{۲۱} در سال ۱۹۹۸ احاطه‌گری در گراف‌های فازی را تعریف نمود و کران‌هایی برای عدد احاطه‌گری فازی مطرح کرد [۱].

مفهوم احاطه‌گری در گراف‌های فازی، هم از نظر تئوری و هم کاربردی بسیار ارزشمند می‌باشد. در گراف فازی $\tilde{G}$ که دارای مجموعه زمینه‌ی رئوس V می‌باشد، $D \subseteq V$ مجموعه احاطه‌گر فازی نامیده می‌شود هرگاه هر راس $v \in V - D$ ، توسط راسی مانند $u \in D$ احاطه شده باشد. در بیشتر مسائلی که تاکنون در مورد احاطه‌گری در گراف‌ها مطرح شده است، داده‌ها و اطلاعات مربوط به مساله‌ی دقیق و مشخص است و وجود راس‌ها و یال‌های گراف به صورت قطعی می‌باشد. در حالی‌که در دنیای واقعی ما نوعاً با داده‌ها و اطلاعات غیر قطعی مواجه هستیم. احاطه‌گری در گراف‌ها در حل مسائل شاخه‌های مختلف علوم کاربردی مانند مسائل مکانیابی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

یکی از مسائلی که تحت عنوان مساله‌ی احاطه‌گری مطرح می‌شود، مساله‌ی یافتن کم هزینه‌ترین تعداد مراکز یا تاسیساتی است که تمام مناطق موجود در یک محدوده را در کوتاه‌ترین زمان ممکن پوشش دهند. مسائلی نظیر ایجاد دستگاه‌های آتش نشانی و مراکز اورژانس از این نوع می‌باشند. برای مثال ایستگاه‌های آتش نشانی بایستی در مکان‌هایی تاسیس گردند که در صورت آتش سوزی، نزدیک‌ترین ایستگاه آتش نشانی به محل آتش سوزی بتواند در حداقل مدت به آن سرویس داده و حریق را مهار نماید. بدین ترتیب بررسی مفاهیم جدیدی مانند احاطه‌گری در گراف‌های فازی ضرورت پیدا می‌کند. حال به تعاریفی در رابطه با مفهوم احاطه‌گری در گراف فازی می‌پردازیم.

تعریف ۱.۳.۶. فرض کنید $(\sigma, \mu) : \tilde{G}$ یک گراف فازی با مجموعه زمینه‌ی رئوس V باشد. $D \subseteq V$ ، مجموعه احاطه‌گر فازی^{۲۲} در گراف فازی $(\sigma, \mu) : \tilde{G}$ نامیده می‌شود، هرگاه برای هر راس $v \in V - D$ ،

^{۲۰} Haynes

^{۲۱} A.Somasundaram

^{۲۲} fuzzy domination set

راسی مانند $u \in D$ وجود داشته باشد که،

$$\mu(uv) = \sigma(u) \wedge \sigma(v).$$

تعریف ۲.۳.۶. اندازه‌ی فازی^{۲۳} $D \subseteq V$ برابر است با:

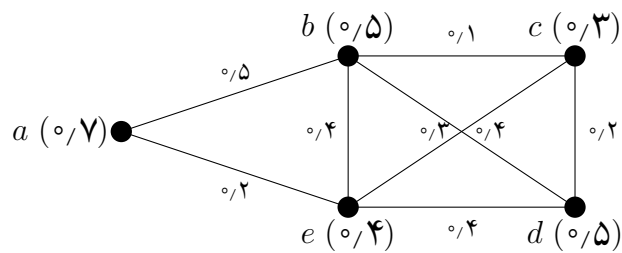
$$|D|_f = \sum_{v \in D} \sigma(v).$$

تعریف ۳.۳.۶. مینیمم اندازه‌ی فازی در میان تمامی مجموعه‌های احاطه‌گر فازی در (σ, μ) ، $\tilde{G}$ ، عدد احاطه‌گر فازی^{۲۴} نامیده می‌شود و با $\gamma_f(\tilde{G})$ یا به اختصار با γ_f نشان داده می‌شود.

• مجموعه احاطه‌گر فازی از اندازه‌ی γ_f را با $\gamma_f - set$ نشان می‌دهیم.

مثال ۴.۳.۶. در گراف فازی $\tilde{G}$ در شکل (۲.۶)، عدد احاطه‌گر فازی را به‌دست آورده‌ایم.

$$\gamma_f = |\{a, e\}|_f = \circ/7 + \circ/4 = 1/1.$$



شکل ۲.۶: گراف فازی $\tilde{G}$

^{۲۳}fuzzy size

^{۲۴}fuzzy domination number

نتیجه‌گیری و پیشنهادات:

در این پایان نامه موضوع گراف‌های فازی و برخی از کاربردهای آن مورد بررسی قرار گرفت، و اعمال روی گراف‌های فازی، یکرختی گراف‌های فازی و گراف‌های فازی منتظم مطالعه شد. همچنین برخی مباحث مربوط به گراف‌های قطعی به حالت فازی تعمیم داده شد. از جمله‌ی این مباحث، می‌توان به گراف‌های سطح فازی و فرمول اویلر در گراف‌های سطح فازی اشاره کرد. در رابطه با کاربردهای گراف فازی مسایل مقادیر ویژه و انرژی در گراف فازی، رنگ آمیزی گراف فازی، مفهوم احاطه‌گری در گراف فازی بررسی شد.

تعمیم سایر موضوعات از گراف‌های قطعی به حالت فازی از جمله جورسازی فازی و همبندی فازی برای کار در آینده می‌باشد.

مراجع

- [۱] سیده معصومه زرگر. مطالعه مفهوم احاطه‌گری در گراف‌های فازی. پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه صنعتی شاهرود، شهریور ۱۳۹۰.
- [۲] فاطمه فیاضی. بررسی مقادیر ویژه فازی در گراف‌های فازی و کاربردهای آن. پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه صنعتی شاهرود، دی ۱۳۹۲.
- [۳] صفرمحمد نوری. مطالعه مساله رنگ آمیزی گراف فازی. پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه صنعتی شاهرود، دی ۱۳۹۰.
- [4] N. Abdul-Jabbar, J.H. Naoom and D.H. Ouda, *Fuzzy dual graph*, Journal of Al-Nahrain University, 12(4):168-171, 2009.
- [5] J. Clark and D.A. Holton, *A first look at graph theory*, World Scientific Co. Pte. Ltd., 1991.
- [6] Z. Fadaei and S. Rahimi, *The proof for result of Euler's formula in fuzzy planar graphs*, 13-th Iranian Conference on Fuzzy Systems (IFSC), Islamic Azad University of Qazvin, 2013.
- [7] A.N. Gani and J. Malarvizhi, *Isomorphism on fuzzy graphs*, International Journal of Computational and Mathematical Sciences, 2(4):pp(200-206), 2008.
- [8] A.N. Gani and K. Radha, *On regular fuzzy graphs*, Journal of Physical Sciences, 12:pp(33-40), 2008.
- [9] A. Kaufman, *Introduction a la théorie des sous-ensembles*, Flous, I, Masson et Cie, 1973.
- [10] J.N. Mordeson and P.S. Nair, *Fuzzy graphs and fuzzy hypergraphs*, Physica- Verlag, Heidelberg 1998; Second Edition 2001.
- [11] A. Nagoorani and K. Radha, *The degree of a vertex in some fuzzy graphs*, International Journal of Algorithms, Computing and Mathematics, 2(3):pp(107-116), 2009.
- [12] G. Nirmala and M. Vijaya, *Fuzzy graphs on composition, tensor and normal products*, International Journal of Scientific and Research Publications, 2(6), 2012.

-
- [13] A. Rosenfeld, *Fuzzy graphs*, In fuzzy sets and their applications to cognitive and decision processes, L.A. Zadeh. , Fu, K.S., M. Shimura(Eds) ; Academic Press, pp(77-95), New York, 1975.
 - [14] L.A. Zadeh, *Similarity relations and fuzzy ordering*, International Journal of Information Sciences, 3:pp(177-200), 1971.
 - [15] L.A. Zadeh, *Fuzzy set*, Information and control, 8:pp(338-353), 1965.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Join	اتصال
Union	اجتماع
Size	اندازه
Fuzzy Size	اندازه‌ی فازی
Fuzzy Energy	انرژی فازی
Eigenvector	بردار ویژه
Fuzzy Bridge	پل فازی
Coloring Function	تابع رنگ آمیزی
Membership Fncion	تابع عضویت
Composition	ترکیب
Tensfor Product	حاصل ضرب ترانسفوری
Cartesian Product	حاصل ضرب دکارتی
Normal Product	حاصل ضرب نرمال
Automorphism	خود ریختی
Self Complementary	خود متمم
Self Weak Complementary	خود متمم ضعیف
Total Degree	درجه‌ی کلی
Degree of Vertex	درجه‌ی یک راس
Fuzzy Tree	درخت فازی
Maximum Spaning Tree	درخت فراگیر ماکزیمم
Endomorphism	درون ریختی
Cycle	دور
Even Cycle	دور زوج
Odd Cycle	دور فرد
Spans Fuzzy Graph	دهانه‌ی گراف فازی

Reflexive Relation	رابطه‌ی انعکاسی
Antisymmetric Relation	رابطه‌ی پادتقارنی
Partial order Relation	رابطه‌ی جزئاً مرتب
Fuzzy Relation	رابطه‌ی فازی
Transitive Relation	رابطه‌ی متعدی
Symmetric Relation	رابطه‌ی متقارن
Equivalence Relation	رابطه‌ی هم ارزی
Fuzzy Cut Vertex	راس برشی فازی
Fuzzy Subgraph	زیرگراف فازی
Fuzzy Subgraph Induced by P	زیرگراف فازی القا شده توسط P
Partial Fuzzy Subgraph	زیرگراف فازی جزیی
Maximal Partial Fuzzy Subgraph	زیرگراف فازی جزیی ماکسیمال
Fuzzy Spaning Subgraph	زیرگراف فراگیر فازی
Partial Fuzzy Spaning Subgraph	زیرگراف فراگیر فازی جزیی
Strenght of Connectednes	شدت همبندی
Strenght of Path	شدت یک مسیر
Lenght of Path	طول مسیر
Fuzzy Spectrum Graph	طیف گراف فازی
Fuzzy Domiation Number	عدد احاطه‌گری فازی
Fuzzy α -level Intersection Number	عدد تقاطع فازی α -سطح
Number Coloring	عدد رنگی
Euler's Formulla	فرمول اویلر
Strogest Path	قوی‌ترین مسیر
Arc	کمان
Fuzzy Line Graph	گراف خطی فازی
Dual Graph	گراف دوگان
Fuzzy Dual Graph	گراف دوگان فازی
Fuzzy Graph	گراف فازی
Strog Fuzzy Graph	گراف فازی قوی
Complete Fuzzy Graph	گراف فازی کامل
Totally Regular Fuzzy Graph	گراف فازی کلاً منتظم
Regular Fuzzy Graph	گراف فازی منتظم

Planar Graph	گراف مسطح
Maximal Fuzzy Planar Graph	گراف مسطح فازی ماکسیمال
Fuzzy Adjancy Matrix	ماتریس مجاورت فازی
Maximum Degree	ماکزیمم درجه
Complement	متمم
Fuzzy Domination Set	مجموعه‌ی احاطه‌گری فازی
Support of σ	محمل از σ
Order	مرتبه
Path	مسیر
Eigenvalue	مقدار ویژه
Component	مولفه
Minimum Degree	مینیمم درجه
Non-Planar	نامسطح
Face	وجه
Connected	همبند
Homomorphism	همریختی
Isomorphism	یکریختی
Weak Isomorphism	یکریختی ضعیف
Co-Weak Isomorphism	یکریختی هم-ضعیف

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

α -Cut	α -برش
α -Planar	α -مسطح
Antisymmetric Relation	رابطه‌ی پادتقارنی
Arc	کمان
Automorphism	خود ریختی
Cartesian Product	حاصل ضرب دکارتی
Coloring Function	تابع رنگ آمیزی
Complement	متمم
Complete Fuzzy Graph	گراف فازی کامل
Component	مولفه
Composition	ترکیب
Connected	همبند
Co-Weak Isomorphism	یکریختی هم-ضعیف
Cycle	دور
Degree of Vertex	درجه‌ی یک راس
Dual Graph	گراف دوگان
Eigenvalue	مقدار ویژه
Eigenvector	بردار ویژه
Endomorphism	درون ریختی
Equivalence Relation	رابطه‌ی هم ارزی
Euler's Formulla	فرمول اویلر
Even Cycle	دور زوج
Face	وجه
Fuzzy α -level Intersection Number	عدد تقاطع فازی α -سطح
Fuzzy Adjancy Matrix	ماتریس مجاورت فازی

Fuzzy Bridge	پل فازی
Fuzzy Cut Vertex	راس برشی فازی
Fuzzy Domination Number	عدد احاطه‌گری فازی
Fuzzy Domination Set	مجموعه‌ی احاطه‌گری فازی
Fuzzy Dual Graph	گراف دوگان فازی
Fuzzy Energy	انرژی فازی
Fuzzy graph	گراف فازی
Fuzzy Line Graph	گراف خطی فازی
Fuzzy Relation	رابطه‌ی فازی
Fuzzy Spaning Subgraph	زیرگراف فراگیر فازی
Fuzzy Spectrum Graph	طیف گراف فازی
Fuzzy Subgraph	زیرگراف فازی
Fuzzy Subgraph Induced by P	زیرگراف فازی القا شده توسط P
Fuzzy Tree	درخت فازی
Homorphism	همریختی
Isomorphism	یکریختی
Join	اتصال
k -colored	k -رنگ پذیر
Lenght of Path	طول مسیر
Maximal Fuzzy Planar Graph	گراف مسطح فازی ماکسیمال
Maximal Partial Fuzzy Subgraph	زیرگراف فازی جزئی ماکسیمال
Maximum Degree	ماکزیمم درجه
Maximum Spaning Tree	درخت فراگیر ماکزیمم
Membership Function	تابع عضویت
Minimum Degree	مینیمم درجه
Non-Planar	نامسطح
Normal Product	حاصل ضرب نرمال
Number Coloring	عدد رنگی
Odd Cycle	دور فرد
Order	مرتبه
Partial Fuzzy Spaning Subgraph	زیرگراف فراگیر فازی جزئی
Partial Fuzzy Subgraph	زیرگراف فازی جزئی

Partial Order Relation	رابطه‌ی جزئاً مرتب
Path	مسیر
Planar Graph	گراف مسطح
Reflexive Relation	رابطه‌ی انعکاسی
Regular Fuzzy Graph	گراف فازی منتظم
Self Complementary	خود متمم
Self Weak Complementary	خود متمم ضعیف
Size	اندازه
Spans Fuzzy Graph	دهانه‌ی گراف فازی
Strenght of a Connectedness	شدت همبندی
Strenght of a Path	شدت یک مسیر
Strong Fuzzy Graph	گراف فازی قوی
Strongest Path	قوی‌ترین مسیر
Support of σ	محمل از σ
Symmetric Relation	رابطه‌ی متقارن
t-level	t-سطح
Tensfor Product	حاصل ضرب ترانسفوری
Total Degree	درجه‌ی کلی
Totally Regular Fuzzy Graph	گراف فازی کلاً منتظم
Transitive Relation	رابطه‌ی متعدی
Union	اجتماع
Weak Isomorphism	یکریختی ضعیف

نمایه

- α -برش، ۴
- α -سطح، ۷۱
- k -رنگ آمیزی C^k ، ۸۱
- k -رنگ پذیر، ۸۱
- t -سطح، ۴
- اتصال، ۲۰
- اجتماع، ۱۷
- اندازه‌ی فازی، ۸۴
- انرژی، ۸۰
- انرژی فازی، ۸۰
- بردار ویژه، ۷۹
- پل فازی، ۱۶
- تابع رنگ آمیزی، ۸۱
- تابع عضویت، ۳
- ترکیب، ۲۸
- حاصل ضرب ترانسفوری، ۳۴
- حاصل ضرب دکارتی، ۲۴
- حاصل ضرب نرمال، ۳۲
- خودریختی، ۴۰
- خود متمم، ۵۱
- خود متمم ضعیف، ۵۳
- درجه‌ی کلی، ۵۸
- درجه‌ی یک راس، ۱۳
- درخت فازی، ۱۶
- درخت فراگیر ماکزیمم، ۱۶
- درون ریختی، ۴۰
- دور، ۱۵
- دهانه‌ی فازی گراف، ۱۲
- رابطه‌ی انعکاسی، ۶
- رابطه‌ی فازی، ۵
- رابطه‌ی متعدی، ۷
- رابطه‌ی متقارن، ۷
- رابطه‌ی هم ارزی، ۸
- راس برشی فازی، ۱۶
- زیرمجموعه‌ی فازی، ۴
- زیرگراف فازی، ۱۰
- زیرگراف فازی القا شده توسط P ، ۱۱
- زیرگراف فازی جزیی، ۱۰
- زیرگراف فازی جزیی ماکسیمال، ۱۱
- زیرگراف فراگیر فازی، ۱۲
- زیرگراف فراگیر فازی جزیی، ۱۲
- شدت همبندی، ۱۵
- شدت یک مسیر، ۱۵
- ضعیف‌ترین کمان، ۱۵
- طول مسیر، ۱۴
- طیف گراف فازی، ۸۰
- عدد احاطه‌گر فازی، ۸۴
- عدد تقاطع فازی α -سطح، ۷۲
- عدد رنگی، ۸۲
- فرمول اوایلر، ۷۴
- قوی‌ترین مسیر، ۱۵
- کمان، ۱۵
- گراف خطی فازی، ۴۹
- گراف دوگان، ۷۰

- گراف دوگان فازی، ۷۳
- گراف فازی، ۸
- گراف فازی قوی، ۱۴
- گراف فازی کامل، ۱۴
- گراف فازی کلاً منتظم، ۵۸
- گراف فازی منتظم، ۵۷
- گراف مسطح فازی، ۷۱
- گراف مسطح فازی ماکسیمال، ۷۱
- ماتریس مجاورت، ۸۰
- ماتریس مجاورت فازی، ۸۰
- ماکزیمم درجه، ۱۴
- مجموعه احاطه‌گر فازی، ۸۳
- محمل از σ ، ۴
- مساله‌ی رنگ آمیزی گراف، ۸۲
- مسطح، ۶۹
- مسیر، ۱۴
- مقدار ویژه، ۷۹
- مولفه، ۱۶
- مینیمم درجه، ۱۳
- نامسطح، ۷۲
- وجه، ۷۰
- همبند، ۱۶
- همریختی، ۳۷
- یکریختی، ۳۹
- یکریختی ضعیف، ۳۷
- یکریختی هم-ضعیف، ۳۸

Abstract

In this thesis we study fuzzy graphs and some of its applications, and extend some properties of crisp graphs to fuzzy graphs. In the first chapter we state some basic definitions and properties of fuzzy graphs. In chapter 2, we study some operations on fuzzy graphs such as union, join, cartesian product, composition, normal product and tensor product. In chapter 3 we study isomorphism on fuzzy graphs, and in chapter 4 we study regular and totally regular fuzzy graphs. In chapter 5 we consider planar fuzzy graphs and investigate Euler's formula for fuzzy graphs. Finally in chapter 6, we state some applications of fuzzy graph such as eigenvalues and energy in fuzzy graph, coloring fuzzy graphs and domination in fuzzy graph.

keywords:Fuzzy graph; Operations on fuzzy graph; Isomorphism; Regular fuzzy graph; Fuzzy planar graph.



Shahrood University Of Technology

Shahrood University
Faculty Of Mathematical Sciences

Dissertation Submitted in Partial
Fulfillment of The Requirements For The
Degree of Master of Science in
Applied Mathematics

Fuzzy Graph and some of the it's Applications

Supervisor
Dr. Sadegh Rahimi

by
Zohreh Fadaei

2013