دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی محض

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی محض، گرایش جبر

عنوان

نتایجی درباره گراف ناجابه‌جایی یک گروه متناهی

استاد راهنما

سید حیدر جعفری

استاد مشاور

سیدرضا موسوی

دانشجو

زهره شمس آبادی

۹۲/۱۱/۱۶

تقدیم به پدر و مادر عزیزم

اولین و بهترین معلم های زندگی ام

و همسرم

سپاس گزاری...

سپاس خدای یکتا را که هرچه هست از اوست؛
سپاس او را که بی یاد و نامش نمی‌توان آغاز کرد و نمی‌توان به پایان برد؛
سپاس و حمد بیکران یگانه عالم را که توفیق کسب دانش و معرفت را به ما عطا فرمود.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر سید حیدر جعفری، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید. در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکر می‌کنم از همسرم ، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

زهره شمس آبادی
۹۲/۱۱/۱۶

تعهدنامه

اینجانب **زهره شمس آبادی** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی محض** **دانشکده علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **نتایجی درباره گراف ناجابه‌جایی یک گروه متناهی** ، تحت راهنمایی **سید حیدر جعفری** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تاکنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه شاهرود “ یا “ University of Shahrood “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

زهره شمس آبادی

۹۲/۱۱/۱۶

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

فرض کنیم G یک گروه ناآبلی متناهی باشد. گراف Γ_G را که گراف ناجابه‌جایی G نامیده می‌شود، با مجموعه‌ی رئوس $G - Z(G)$ تعریف می‌کنیم؛ به طوری‌که دو راس xو y در آن مجاورند اگر و تنها اگر $xy \neq yx$.

در این پایان‌نامه در فصل اول به بیان مقدماتی از نظریه گروه‌ها و نظریه گراف می‌پردازیم. فصل دوم به انواع تزویجی گروه‌ها و زیرگروه‌های اساسی اختصاص دارد که برگرفته از [۱۰] است. در فصل سوم نیز درمورد تعداد یال‌های Γ_G و عدد رنگی نتایجی به‌دست می‌آوریم. هم‌چنین برای تعدادی از گروه‌های خاص مانند G، نشان خواهیم داد اگر H یک گروه باشد به طوری‌که $\Gamma_G \cong \Gamma_H$، آن‌گاه $|G| = |H|$ و در بعضی حالت‌ها $G \cong H$ که این فصل برگرفته از [۵] می‌باشد.

فهرست مطالب

فصل ۱

مقدمات و پیش نیازها

در این فصل قصد داریم تعاریف و نتایج مقدماتی که در فصل های بعدی مورد نیاز می باشد را بیان کنیم. در بخش اول چند مفهوم مقدماتی در مورد گروه‌ها و بعضی از خواص آنها و در بخش دوم مختصری از مفاهیم مربوط به نظریه گراف و مفاهیم مربوط به نظریه گروه‌های متناهی را ارایه خواهیم کرد.

۱.۱ تعاریف و نتایج مقدماتی

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنیم G یک گروه و X مجموعه ای غیر تهی باشد و به ازای هر g از G و هر x از X، عضو یکتایی از X که آن را با علامت $x * g$ نشان می دهیم وجود داشته باشد به طوری که
(الف) به ازای هر x از X، $x * 1 = x$
(ب) به ازای هر g_1و g_2 از G و هر x از X، $x * (g_1 * g_2) = (x * g_1) * g_2$.
در این صورت گوییم G بر X عمل می کند و $*$ را عمل G بر X می‌نامیم. برای سهولت در نوشتن، به جای $x * g$ معمولا خواهیم نوشت xg یا x^g. عمل G بر X را با نماد $(G|X)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۲.۱.۱. فرض کنیم G گروهی دلخواه باشد. در این صورت برای هر $x \in G$، $x^G = \{x^g | g \in G\}$ را رده تزویج x در G گوییم. تعداد رده‌های تزویج متمایز G را با نماد $k(G)$ نمایش می دهیم. اندازه رده تزویج x^G عبارت است از
$$|x^G| = [G : C_G(x)] = \frac{|G|}{|C_G(x)|}$$
لذا $|x^G|$ مرتبه گروه G را عاد می‌کند.

برهان. به قضیه ۱۲-۸ از [۱۸] مراجعه شود. □

قضیه ۳.۱.۱. اگر G یک گروه متناهی و $\{x_i\}_{1 \leq i \leq n}$ نماینده‌های رده‌های تزویج متمایز گروه G باشند، آن‌گاه $|{x_i}^G| = [G : C_G(x_i)]$ و
$$|G| = |Z(G)| + \sum_{x_i \notin Z(G)} \frac{|G|}{|C_G(x_i)|}$$
که معادله فوق را معادله رده‌ای گروه G می‌نامیم.

برهان. به نتیجه ۱۲-۱۰ از [۱۸] مراجعه شود. □

قضیه ۴.۱.۱. فرض کنیم $(G|\Omega)$. به ازای هر $g \in G$، فرض کنیم $X(g)$ تعداد اعضایی از Ω است که به وسیله‌ی g ثابت نگه داشته می‌شوند. در این صورت تعداد مدارهای G از فرمول زیر به دست می‌آید
$$k = \frac{1}{|G|} \Sigma_{g \in G} X(g)$$

برهان. به قضیه ۸-۱۱ از [۱۶] مراجعه شود. □

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنیم G یک گروه و H زیرگروهی از آن باشد. در این صورت مرکزساز H در G را با نماد $C_G(H)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می کنیم
$$C_G(H) = \{g \in G | gx = xg, \forall x \in H\}.$$

لم ۶.۱.۱. فرض کنیم G گروه متناهی باشد. در این صورت G با اجتماع زیرگروه‌های مزدوجش برابر نیست.

برهان. فرض کنیم $H \leq G$ و $x \in G$، در این صورت H^x زیرگروه مزدوج H می‌باشد. برای $i = ۱, ۲, \cdots, n$ و $g \in G$، داریم $H^x = H^{(hg_i)} = (H^h)^{g_i} = H^{g_i}$. همچنین $۱ \in H^{(g_i)} \cap H^{(g_j)} \neq \emptyset$ که $j = ۱, ۲, \cdots, n$. حال فرض کنیم $G = \bigcup H^x$، در این صورت داریم $|G| = |\bigcup H^x| = |\bigcup_{i=۱}^n H^{g_i}| < \sum_{i=۱}^n |H^{g_i}| = n|H| = |G|$ که یک تناقض است. □

تعریف ۷.۱.۱. گروه G را پوچ توان گوییم، هرگاه دارای یک سری به صورت زیر باشد

$$۱ = G_۰ \leq G_۱ \leq \ldots \leq G_n = G$$

که در آن به ازای هر $۰ \leq i \leq n$، $G_i \trianglelefteq G$ و $\frac{G_{i+۱}}{G_i} \subseteq Z(\frac{G}{G_i})$ یک چنین سری را سری مرکزی گوییم و طول کوتاه‌ترین سری مرکزی G را رده پوچ توانی G می‌نامیم.

تعریف ۸.۱.۱. فرض کنیم G گروهی دلخواه باشد. قرار می‌دهیم $\gamma_۱(G) = G$ و به ازای هر $i \geq ۱$، $\gamma_{i+۱}(G) = [\gamma_i(G), G]$. سری

$$G = \gamma_۱(G) \supseteq \gamma_۲(G) \supseteq \ldots \supseteq \gamma_i(G) \supseteq \ldots$$

را سری مرکزی پایینی گروه G می‌نامیم.

همچنین برای گروه G قرار می‌دهیم $Z_۰(G) = ۱$ و $Z_۱(G) = Z(G)$ و به ازای هر $i \geq ۱$،

$$\frac{Z_{i+۱}(G)}{Z_i(G)} = Z\big(\frac{G}{Z_i(G)}\big).$$

و سری

$$۱ = Z_۰(G) \subseteq Z_۱(G) \subseteq \ldots \subseteq Z_i(G) \subseteq \ldots$$

را سری مرکزی بالایی گروه G می‌نامیم.

قضیه ۹.۱.۱. فرض کنیم G یک گروه غیربدیهی متناهی باشد. در این صورت گزاره‌های زیر دوبه‌دو معادل‌اند:

(i) G پوچ‌توان است؛

(ii) هر زیرگروه ماکسیمال G نرمال است؛

(iii) هر p-زیرگروه سیلو G نرمال است؛

(iv) هر دو عضو G که مرتبه‌ی آن‌ها نسبت به هم اول باشند، جابه‌جا می‌شوند؛

(v) G حاصل‌ضرب مستقیم زیرگروه‌های سیلوی خود است.

برهان. به قضیه ۱۰-۱-۸ از [۱۷] مراجعه شود. □

لم ۱.۱.۱۰. فرض کنیم G یک گروه پوچ‌توان باشد. در این صورت به ازای هر دو عدد طبیعی i و j داریم:

(i) $[\gamma_i, \gamma_j] \leq \gamma_{i+j}$،

(ii) اگر $i \geq j$، $[\gamma_i, Z_j] \leq Z_{i-j}$.

برهان. به قضیه ۱۰-۲-۱۲ از [۱۷] مراجعه شود. $\square$

قضیه ۱.۱.۱۱. فرض کنیم گروه متناهی G اجتماعی از زیرگروه‌های نرمال و آبلی باشد. در این صورت G پوچ‌توان است.

برهان. فرض کنیم x و y عضوهای دلخواهی از G و به ترتیب از مرتبه‌ی p^n و p^m باشند. بنابراین زیرگروه‌های H_1 و H_2 از G وجود دارند به‌طوری که $x \in H_1$ و $y \in H_2$. فرض کنیم P_1 یک p-زیرگروه سیلوی H_1 و Q یک q-زیرگروه سیلوی H_2 باشد. چون H_1 و H_2 آبلی هستند، پس $PchH_1$ و $H_1 \trianglelefteq G$ در نتیجه $P \trianglelefteq G$ و به همین صورت $Q \trianglelefteq G$. حال چون $P \cap Q = 1$ و P و Q هر دو در G نرمال هستند، پس $[x, y] = 1$ و بنا به قضیه ۱.۱.۹، G پوچ‌توان است. $\square$

تعریف ۱.۱.۱۲. فرض کنیم p عددی اول باشد. در این صورت گروه G را یک p-گروه می‌نامیم، اگر مرتبه هر عنصر G توانی از p باشد. زیرگروه H از گروه دلخواه G را یک p-زیرگروه می‌نامیم، هرگاه H یک p-گروه باشد.

تعریف ۱.۱.۱۳. گروه آبلی G را یک p-گروه آبلی مقدماتی می‌نامیم هرگاه مرتبه هر عنصر G، ۱ یا p باشد. هم‌چنین گروه متناهی G را یک p-گروه فوق ویژه می‌نامیم هرگاه $G' = Z(G) \cong Z_p$ و $\dfrac{G}{Z(G)}$ یک p-گروه آبلی مقدماتی باشد.

فرض کنیم G یک گروه باشد. چندین روش برای مربوط ساختن یک گراف به گروه G وجود دارد. این گراف را که با Γ_G نمایش می‌دهیم، گراف ناجابه‌جایی گروه G می‌نامیم. مجموعه‌ی رئوس Γ_G، $V(\Gamma_G) = G - Z(G)$ است، که $Z(G)$ مرکز G بوده و دو راس x و y در Γ_G مجاورند، اگر و تنها اگر $xy \neq yx$.

با توجه به این‌که گراف‌های ساده را مورد بررسی قرار می‌دهیم، پس یال‌های (x, y) و (y, x) یکسان هستند و هیچ یالی به شکل (x, x) در $E(\Gamma_G)$ وجود ندارد.

به وضوح اگر G آبلی باشد، آنگاه Γ_G گراف تهی است، لذا در ادامه فرض می‌کنیم G گروه ناآبلی است.

گراف ناجابه‌جایی گروه متناهی G، برای اولین بار توسط پاول اردوش[۱] با سوال زیر معرفی شد. فرض کنیم G یک گروه باشد که گراف ناجابه‌جایی‌اش (Γ_G) زیرگراف‌های کامل نامتناهی نداشته باشد، آیا یک کران متناهی برای مرتبه‌ی زیرگراف‌های کامل Γ_G وجود دارد؟

[۱] Paul Erdos

با استفاده از مرجع[۱۲]، پاسخ این سوال مثبت است.این سوال منبع سوالات و تحقیقات علمی مشابه زیادی بوده است.
در مرجع[۱]، رابطه‌ی بین تعدادی از خواص گرافی گراف Γ_G و خواص گروهی گروه G بررسی شده است. به ویژه دو حدس زیر مطرح شده‌اند:

حدس(۱) : فرض کنیم G یک گروه ناآبلی متناهی باشد، اگر گروهی مانند H وجود داشته باشد؛ به‌طوری‌که $\Gamma_G \cong \Gamma_H$، آن‌گاه $|G| = |H|$.

حدس(۲) : فرض کنیم S یک گروه ساده‌ی ناآبلی متناهی باشد. اگر G یک گروه باشد؛ به‌طوری‌که $\Gamma_G \cong \Gamma_S$ ، آن‌گاه $G \cong S$.

در این‌جا هدف ما تحقیق و بررسی حدس‌های بالا برای تعدادی از کلاس‌های گروه‌های متناهی است. هم‌چنین به نتایجی درباره‌ی تعداد یال‌های گراف Γ_G خواهیم رسید، نمادگذاری مورد استفاده برای گراف‌ها استاندارد و معمولا از مرجع [۲] می‌باشد که یک مرجع کلی و عمومی است.

۲.۱ مفاهیم مربوط به نظریه گراف و گروه‌های متناهی

تعریف ۱.۲.۱. گراف G، یک زوج مرتب (V,E) است که در آن V یک مجموعه و E زیرمجموعه‌ای از $V \times V$ می‌باشد، V را مجموعه رئوس و E را مجموعه یال‌های گراف G گوییم. دو رأس x و y را در G مجاور نامیم، هرگاه بین x و y یالی موجود باشد. گرافی که هر دو رأس متمایز آن مجاور باشند را گراف کامل می‌نامیم.

تعریف ۲.۲.۱. گراف G را r -بخشی گوییم، هرگاه بتوان رأس‌های G را به r مجموعه افرازکرد به‌طوری که بین رأس‌های هیچ‌یک از این مجموعه‌ها یالی نباشد.

تعریف ۳.۲.۱. درجه‌ی راس v در گراف Γ را برابر با تعداد یال‌های مجاور به v تعریف می‌کنیم و با $d(v)$ نشان می‌دهیم.

تذکر ۴.۲.۱. درجه‌ی راس g در گراف Γ_G مساوی است با $d(g) = |G| - |C_G(g)|$.

لم ۵.۲.۱. فرض کنیم G گروه $D_{2n} = \langle r, s \mid r^n = s^2 = (rs)^2 = 1 \rangle$ باشد، در این‌صورت

الف) اگر n فرد باشد، آن‌گاه D_{2n}، $\frac{1}{2}(n+3)$ رده تزویج به صورت زیر دارد
$$\{1\}, \{r^{\pm 1}\}, \cdots, \{r^{\pm \frac{(n-1)}{2}}\},\ \{s, rs, \cdots, r^{n-1}s\}.$$

ب) اگر n زوج باشد، $(n = 2m)$ آن‌گاه D_{2n}،$m+3$ رده تزویج به صورت زیر دارد
$$\{1\}, \{r^m\}, \{r^{\pm 1}\}, \cdots, \{r^{\pm(m-1)}\}, \{r^{2j}s;\ 0 \le j \le m-1\}, \{r^{2j+1}s;\ 0 \le j \le m-1\}.$$

برهان. الف) عناصر D_{2n} به صورت r^i یا r^is می‌باشند، که $1 \leq i \leq n-1$. ابتدا r^i را در نظر می‌گیریم. چون $C_G(r^i)$ شامل $\langle r\rangle$ است، پس $[G:C_G(r^i)] \leq [G:\langle r\rangle] = 2$. همچنین $s^{-1}r^is = r^{-i}$ و لذا $(r^i)^G \supseteq \{r^i, r^{-i}\}$. چون n فرد است پس $r^i \neq r^{-i}$ و در نتیجه $|(r^i)^G| \geq 2$. با استفاده از قضیه ۲.۱.۱ داریم $2 \geq [G:C_G(r^i)] = |(r^i)^G| \geq 2$ از این‌رو تساوی برقرار است و $(r^i)^G = \{r^i, r^{-i}\}, \ C_G(r^i) = \langle r\rangle$. حال s را در نظر می‌گیریم، $C_G(s)$ شامل $\{1, s\}$ است و چون $s^{-1}r^is = r^{-i}$ پس ضرب عناصر r^i و r^is (که $1 \leq i \leq n-1$) در s، جابه‌جا نمی‌شود. لذا $C_G(s) = \{1, s\}$. بنابراین بنا به قضیه ۲.۱.۱ داریم $|s^G| = n$.
چون تمام عناصربه فرم r^i قبلا در نظر گرفته شده‌اند، پس s^G باید متشکل از n عنصر دیگر G باشد، یعنی $s^G = \{s, rs, \cdots, r^{n-1}s\}$ به این ترتیب گروه دووجهی D_{2n} (n فرد) دقیقا دارای $\frac{1}{2}(n+3)$ رده تزویج می‌باشد.

ب) داریم $n = 2m$. چون $s^{-1}r^ms = r^{-m} = r^m$، پس مرکزساز r^m در G شامل هر دو عنصر r و s است و لذا $C_G(r^m) = G$. بنابراین رده‌ی تزویج r^m در G دقیقا $\{r^m\}$ است. مانند حالت قبل، به‌ازای $1 \leq i \leq m-1$، $(r^i)^G = \{r^i, r^{-i}\}$. چون $(rs)^2 = 1$، پس $rs = s^{-1}r^{-1}$. به ازای هر عدد صحیح j که $0 \leq j \leq m-1$، داریم $r^jsr^{-j} = s^{-1}r^{-2j} = r^{2j}s$ و $r^j(rs)r^{-j} = r(r^jsr^{-j}) = r(r^{2j}s) = r^{2j+1}s$. بنابراین

$$s^G = \{r^{2j}s : 0 \leq j \leq m-1\}, \ (rs)^G = \{r^{2j+1}s : 0 \leq j \leq m-1\}$$

از این‌رو گروه دووجهی D_{2n} (n زوج) دقیقا دارای $m+3$ رده تزویج است.

□

لم ۶.۲.۱. فرض کنیم G گروه کواترنیون ها $Q_{4n} = \langle x, y | x^{2n} = 1, x^n = y^2, y^{-1}xy = x^{-1}\rangle$ باشد، در این‌صورت G، $n+3$ رده تزویج به صورت زیر دارد

$$\{1\}, \{x^n\}, \{x^{\pm r}\} \ 0 \leq r \leq n-1, \{x^{2i}y; \ 0 \leq i \leq n-1\}, \ \{x^{2i+1}y; \ 0 \leq i \leq n-1\}.$$

برهان. عناصر Q_{4n} به فرم x^i یا x^iy^j می‌باشند که $1 \leq j \leq 3$ و $0 \leq i \leq n-1$. رده تزویج عناصر به فرم x^j که $0 \leq j \leq n-1$، به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$(x^i)x^j(x^{-i}) = x^j$$

$$(x^iy^j)x^j(x^iy^j)^{-1} = x^{-j}$$

پس برای $0 \leq j \leq n-1$، تنها مزدوج‌های x^j، x^jو x^{-j} هستند. همچنین داریم $y^{-1}x^ny = x^{-n} = x^n$ بنابراین $C_G(x^n) = G$، لذا رده تزویج x^n در Q_{4n} دقیقا $\{x^n\}$ است.
برای بقیه عناصر که به فرم x^iy^j هستند داریم

$$x^iy^j = \begin{cases} x^iy & j=1 \\ x^{n+i} & j=2 \\ x^{n+i}y & j=3 \end{cases}$$

چون $xy = yx^{-1}$، پس به ازای هر عدد صحیح i، $0 \leq i \leq n-1$ داریم

$$x^i y x^{-i} = x^i(x^i y) = x^{2i}y, \;\; x^i(xy)x^{-i} = x(x^i y x^{-i}) = x(x^{2i}y) = x^{2i+1}y$$

بنابراین

$$y^G = \{x^{2i}y;\ 0 \leq i \leq n-1\},\ (xy)^G = \{x^{2i+1}y;\ 0 \leq i \leq n-1\}.$$

□

قضیه ۷.۲.۱. اعضای $\pi, \varphi \in S_n$ مزدوج اند اگر و تنها اگر دارای ساختار دوری یکسانی باشند.

برهان. به قضیه ۱-۲-۳ از [۱۷] مراجعه شود. □

تعریف ۸.۲.۱. یک افراز عدد n عبارت است از دنباله‌ی متناهی $(n_1, n_2, \cdots, n_k)$ به‌طوری‌که $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ و $0 \leq n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_k$.

مثال ۹.۲.۱. تعداد افرازهای عدد ۴ مساوی ۵ است. زیرا

$$4 = 1 + 1 + 1 + 1$$

$$4 = 1 + 1 + 2$$

$$4 = 1 + 3$$

$$4 = 2 + 2$$

$$4 = 4$$

نتیجه ۱۰.۲.۱. هر گروه جایگشتی S_n، به تعداد افرازهای عدد n، رده تزویج دارد.

نتیجه ۱۱.۲.۱. گروه ناآبلی S_3، ۳ رده تزویج دارد.

برهان. افرازهای عدد ۳ را می‌نویسیم

ضرب سه دور به طول ۱ $\quad 3 = 1 + 1 + 1$

ضرب یک دور به طول ۱ و یک دور به طول ۲ $\quad 3 = 1 + 2$

یک دور به طول ۳ $\quad 3 = 3$

در نتیجه رده‌های تزویج آن عبارتند از

$$\{1\}, \{(12), (13), (23)\}, \{(123), (132)\}.$$

□

قضیه ۱۲.۲.۱. فرض کنیم $n > 1$ و $\alpha \in A_n$. در این صورت

(i) اگر α با جایگشت فردی در S_n جابه‌جا شود، آن‌گاه $cl_{A_n}(\alpha) = cl_{S_n}(\alpha)$.

(ii) اگر α با هیچ جایگشت فردی در S_n جابه‌جا نشود، آن‌گاه $cl_{S_n}(\alpha)$ به دو رده‌ی تزویج هم‌مرتبه در A_n تجزیه می‌شود. نماینده‌ی یکی از این رده‌ها α و دیگری α^σ است که در آن $\sigma = (12)$.

برهان. (i) فرض کنیم α با جایگشت فردی در S_n مانند β جابه‌جا شود و $\gamma \in cl_{S_n}(\alpha)$. بنابراین عضوی در S_n مانند π هست که $\gamma = \alpha^\pi$. اگر π زوج باشد، آن‌گاه $\gamma \in cl_{A_n}(\alpha)$ و اگر π فرد باشد، آن‌گاه $\beta\pi \in A_n$ و داریم $\alpha^{\beta\pi} = (\alpha^\beta)\pi = \alpha^\pi = \gamma$. بنابراین $\gamma \in cl_{A_n}(\alpha)$، پس $cl_{S_n}(\alpha) \subseteq cl_{A_n}(\alpha)$. در نتیجه $cl_{A_n}(\alpha) = cl_{S_n}(\alpha)$.

(ii) فرض کنیم α با هیچ جایگشت فردی در S_n جابه‌جا نشود. بنابراین $C_{S_n}(\alpha) = C_{A_n}(\alpha)$ و در نتیجه

$$|cl_{A_n}(\alpha)| = [A_n : C_{A_n}(\alpha)] = \frac{۱}{۲}[S_n : C_{A_n}(\alpha)]$$
$$= \frac{۱}{۲}[S_n : C_{S_n}(\alpha)] = \frac{۱}{۲}|cl_{S_n}(\alpha)|$$

اینک فرض می‌کنیم $\sigma = (۱۲)$. چون هر جایگشت فرد را می‌توان به صورت حاصل‌ضرب σ با یک جایگشت زوج نوشت، خواهیم داشت $cl_{A_n}(\alpha^\sigma) = \{\alpha^{\sigma\tau} | \tau \in A_n\} = \{\alpha^\beta | \beta \in S_n - A_n\}$. از آنجا $cl_{S_n}(\alpha) = \{\alpha^\tau | \tau \in A_n\} \cup \{\alpha^\tau | \tau \in S_n - A_n\} = cl_{A_n}(\alpha) \cup cl_{A_n}(\alpha^\tau)$ ولی چون $|cl_{A_n}(\alpha)| = \frac{۱}{۲}|cl_{S_n}(\alpha)|$، رده‌های تزویج $cl_{A_n}(\alpha)$ و $cl_{A_n}(\alpha^\sigma)$ باید از هم جدا و هم مرتبه باشند.

□

لم ۱.۲.۱۳. گروه $A_۵$، ۵ رده تزویج دارد.

برهان. ابتدا ساختار دوری جایگشت‌های زوج $S_۵$ را در نظر می‌گیریم:

ضرب پنج دور به طول ۱ $\quad ۱^۵ = ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱$

ضرب دو دور به طول ۱ و یک دور به طول ۳ $\quad ۱^۲۳^۱ = ۱ + ۱ + ۳$

ضرب یک دور به طول ۱ و دو دور به طول ۲ $\quad ۱^۱۲^۲ = ۱ + ۲ + ۲$

یک دور به طول ۵ $\quad ۵^۱ = ۵$

جایگشت (۱۲۳۴۵) با هیچ جایگشت فردی در $S_۵$ جابه‌جا نمی‌شود، زیرا در غیر این صورت جایگشت فردی در $S_۵$ مانند π هست که $(۱۲۳۴۵)^\pi = (۱۲۳۴۵)$. از آنجا، $(۱\pi۲\pi۳\pi۴\pi۵\pi) = (۱۲۳۴۵)$، بنابراین π تنها می‌تواند یکی از جایگشت‌های $(۱۲۳۴۵)^k$ باشد که در آن $۱ \leq k \leq ۵$. ولی همه‌ی این جایگشت‌ها زوج‌اند که یک تناقض است. بنابراین رده تزویج (۱۲۳۴۵) به دو رده‌ی تزویج هم مرتبه در $A_۵$ تجزیه می‌شود که نماینده‌ی یکی از این رده‌های تزویج (۱۲۳۴۵) و دیگری $(۱۲۳۴۵)^{۱۲} = (۱۳۴۵۲)$ می‌باشد. جایگشت‌های (۱۲۳)و (۴۵)(۲۳) با جایگشت فرد (۴۵) جابه‌جا می‌شوند. در نتیجه نماینده‌های رده های تزویج $A_۵$ عبارتند از:

$$(۱), (۱۲۳), (۱۲)(۳۴), (۱۲۳۴۵), (۱۳۴۵۲).$$

در جدول زیر طول رده‌های تزویج و نیز مرتبه‌ی مرکزسازها ذکر شده‌اند.

نماینده رده	(۱)	(۱۲۳)	(۱۲)(۳۴)	(۱۲۳۴۵)	(۱۳۴۵۲)
طول رده	۱	۲۰	۱۵	۱۲	۱۲
مرتبه مرکزساز	۶۰	۳	۴	۵	۵

□

لم ۱۴.۲.۱. گروه A_6، ۷ رده تزویج دارد.

برهان. ابتدا ساختار دوری جایگشت‌های زوج S_6 را در نظر می‌گیریم:

ضرب شش دور به طول ۱ $\quad 1^6 = 1+1+1+1+1+1$

ضرب سه دور به طول ۱ و یک دور به طول ۳ $\quad 1^3 3^1 = 1+1+1+3$

ضرب دو دور به طول ۱ و دو دور به طول ۲ $\quad 1^2 2^2 = 1+1+2+2$

ضرب یک دور به طول ۱ و یک دور به طول ۵ $\quad 1^1 5^1 = 1+5$

ضرب یک دور به طول ۱ و یک دور به طول ۴ $\quad 2^1 4^1 = 2+4$

ضرب دو دور به طول ۳ $\quad 3^2 = 3+3$

جایگشت (۱۲۳۴۵) با هیچ جایگشت فردی در S_6 جابه‌جا نمی‌شود، زیرا در غیر این صورت جایگشت فردی در S_6 مانند π هست که $(12345)^\pi = (12345)$. از آنجا $(1\pi 2\pi 3\pi 4\pi 5\pi) = (12345)$، بنابراین

$$1\pi = i,\ 2\pi = i+1,\ 3\pi = i+2,\ 4\pi = i+3,\ 5\pi = i+4,\ 6\pi = 6.$$

پس π تنها می‌تواند یکی از جایگشت‌های $(12345)^k$ باشد که در آن $1 \leq k \leq 5$ ولی همه‌ی این جایگشت‌ها زوج‌اند که یک تناقض است. بنابراین رده تزویج (۱۲۳۴۵) به دو رده‌ی تزویج هم مرتبه در A_6 تجزیه می‌شود که نماینده‌ی یکی از این رده‌های تزویج (۱۲۳۴۵) و دیگری $(13452) = (12345)^{12}$ می‌باشد.

جایگشت $\sigma = (12)(34)$ با جایگشت فرد (۵۶) جابه‌جا می‌شود، لذا $cl_{S_6}(\sigma) = cl_{A_6}(\sigma)$.

جایگشت $\beta = (123)$ با جایگشت فرد (۴۵) جابه‌جا می‌شود، پس $cl_{S_6}(\alpha) = cl_{A_6}(\alpha)$.

هم‌چنین $\alpha = (12)(3456)$ با جایگشت فرد (۱۲) جابه‌جا می‌شود، لذا $cl_{S_6}(\alpha) = cl_{A_6}(\alpha)$.

در نهایت جایگشت $\gamma = (123)(456)$ با جایگشت فرد (۱۴)(۲۵)(۳۶) جابه‌جا می‌شود، پس $cl_{S_6}(\gamma) = cl_{A_6}(\gamma)$. در نتیجه نماینده‌های رده های تزویج آن عبارتند از:

$$(1),\ (123),\ (12)(3456),\ (12345),\ (13452)\ (12)(34),\ (123)(456).$$

در جدول زیر طول رده‌های تزویج و نیز مرتبه‌ی مرکزسازها ذکر می‌شوند.

نماینده رده	(۱)	(۱۲۳)	(۱۲)(۳۴۵۶)	(۱۲۳۴۵)	(۱۳۴۵۲)	(۱۲)(۳۴)	(۱۲۳)(۴۵۶)
طول رده	۱	۴۰	۹۰	۷۲	۷۲	۴۵	۴۰
مرتبه مرکزساز	۳۶۰	۹	۴	۵	۵	۸	۹

□

تعریف ۱۵.۲.۱. فرض کنیم V فضای برداری روی میدان F باشد. در این‌صورت مجموعه‌ی کلیه تبدیلات خطی وارون‌پذیر را با $GL(V,F)$ نمایش می‌دهیم. $GL(V,F)$ با قانون ترکیب توابع دارای ساختار گروه است، پس آن را گروه خطی عام می‌نامیم. در حالتی که $dimV = n$، قرار می‌دهیم $GL(V,F) = GL_n(F)$. در این حالت یک تناظر یک به یک بین عناصر $GL_n(F)$ و ماتریس‌های

وارون‌پذیر $n\times n$ روی F وجود دارد و بنابراین گاهی از نمایش ماتریسی تبدیلات خطی استفاده می‌کنیم. در حالتی که F میدان q عضوی باشد، یعنی $|F|=q$ گروه خطی عام را به صورت $GL_n(q)$ می‌نویسیم. مجموعه‌ی کلیه تبدیلات خطی $GL_n(F)$ با دترمینان ۱ را گروه خطی خاص نامیده و با $SL_n(F)$ نمایش می‌دهیم و در حالتی که $|F|=q$، گروه خطی خاص را با $SL_n(q)$ نمایش می‌دهیم. گروه $PGL_n(F)=\dfrac{GL_n(F)}{Z(GL_n(F))}$ را گروه خطی عام تصویری و گروه $PSL_n(F)=\dfrac{SL_n(F)}{Z(SL_n(F))}$ را گروه خطی خاص تصویری تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱۶.۲.۱. فرض کنیم τ یک خودریختی از میدان F و V فضای برداری روی میدان F باشد. یک فرم شبه دوخطی روی V نسبت به τ عبارت است از نگاشت $f:V\times V\longrightarrow F$ با خواص زیر

الف) $f(au+bv,w)=af(u,w)+bf(v,w)$

ب) $f(u,v+w)=f(u+v)+f(u,w)$

ج) $f(u,v)=f(v,u)^\tau$

برای هر $u,v,w\in V$ و هر $a,b\in F$.

میدان ثابت F را $F_\circ$ می‌نامیم، یعنی قرار می‌دهیم $F_\circ=\{\lambda\in F|\lambda^\tau=\lambda\}$. در این‌صورت از شرط (ج) داریم $f(v,v)\in F_\circ$.

τ را یک خودریختی مرتبه ۲ از میدان F در نظر می‌گیریم، یعنی داریم $\tau^۲=id$. در حالتی که $\tau=id$، f را فرم دوخطی متقارن و (V,f) را فضای متعامد می‌نامیم. درحالتی که $\tau^۲=id$ و $\tau\neq id$، f را فرم دوخطی هرمیتی می‌نامیم.

تعریف ۱۷.۲.۱. فرض کنیم (V,f) فضای متعامد یا هرمیتی و U زیرفضای V باشد. فضای عمود بر U را به صورت $U^\perp=\{v\in V|\,f(v,u)=\circ\,,\forall u\in U\}$ تعریف می‌کنیم. قرار می‌دهیم $V^\perp=R(V)$ و آن را رادیکال V می‌نامیم. $R(U)=U\cap U^\perp$ را رادیکال زیرفضای U می‌نامیم. فضای (V,f) را ناتبهگون می‌گوییم هرگاه $R(V)=\circ$ و در این حالت فرم f را نیز ناتبهگون می‌نامیم. فضاهای متعامد (هرمیتی نسبت به یک خودریختی میدان F) (V,f) و (W,g) را ایزومتر می‌نامیم هرگاه تبدیل خطی $T:V\longrightarrow W$ با شرط زیر وجود داشته باشد

$$g(T(u),T(v))=f(u,v)\,,\,\forall u,v\in V$$

در این حالت T را یک ایزومتری از V به W می‌نامیم.

تعریف ۱۸.۲.۱. فرض کنیم (V,f) فضای متعامد (هرمیتی) ناتبهگون باشد و $dimV=n$.

مجموعه ایزومتری‌های فضای هرمیتی (V,f) تشکیل یک گروه می‌دهند که این گروه را با $GU(V,f)$ نمایش داده و گروه یکانی عام V نسبت به f می‌نامیم.

اگر A ماتریسی در $GU(V,f)$ باشد و B ماتریس f باشد، آنگاه داریم $GU(V,f)=\{A\in GL_n(F)\,|A^tBA^t=B\}$. همچنین گروه $SU(V,f)=\{A\in GU(V,f)|detA=۱\}$ را گروه یکانی خاص V نسبت به f می‌نامیم.

گروه تصویری یکانی خاص عبارت است از

$$PSU(V,f)=\frac{SU(V,f)}{Z(SU(V,f))}.$$

فصل ۲

انواع تزویج گروه‌های متناهی

در این فصل به بررسی انواع تزویج گروه‌های متناهی می‌پردازیم. این فصل برگرفته از [۱۰] می‌باشد.

۱.۲ معرفی و مقدمات

فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد و $n_۱$، $n_۲$، $\cdots$ و n_r که $n_۱ > n_۲ > \cdots > n_r = ۱$، عناصری در G باشند که اندیس مرکزسازهای بعضی عناصر G باشند. بردار $(n_۱, n_۲, \cdots, n_r)$ را بردار نوع تزویج G می‌نامیم. یک گروه با بردار نوع تزویج $(n_۱, n_۲, \cdots, n_r)$ را گروه از نوع $(n_۱, n_۲, \cdots, n_r)$ می‌نامیم. در اینجا ساختار گروه‌هایی از نوع ساده‌تر مانند $(n_۱, ۱)$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم. به وضوح گروه‌های از نوع (۱) آبلی هستند.

تعریف ۱.۱.۲. زیرگروهی که مرکزساز بعضی از عناصر G باشد، زیرگروه اساسی نامیده می‌شود.

در این‌جا زیرگروه اساسی را مجزا و متمایز از G در نظر می‌گیریم. بنابراین اگر F یک زیرگروه اساسی از گروه G باشد، آن‌گاه داریم $F \neq G$.

تعریف ۲.۱.۲. اگر زیرگروه اساسی F شامل هیچ زیرگروه اساسی از G نباشد، زیرگروه اساسی F را مینیمال می‌گوییم. اگر زیرگروه اساسی F مشمول در هیچ زیرگروه اساسی از G نباشد، زیرگروه اساسی F را ماکسیمال می‌گوییم. به‌علاوه F را آزاد می‌نامیم اگر در بین زیرگروه‌های اساسی G هم مینیمال و هم ماکسیمال باشد.

یک زیرگروه اساسی آبلی به وضوح مینیمال است. گروه G را از نوع (F) می‌نامیم هرگاه هر زیرگروه اساسی G آزاد باشد. هم‌چنین G را از نوع (A) می‌نامیم هرگاه هر زیرگروه اساسی G، آبلی باشد. هر زیرگروه از نوع (A) به وضوح از نوع (F) نیز می‌باشد. نرمال‌ساز زیرگروه X از یک گروه را با $N(X)$ و مرکزساز آن را با $C(X)$ نمایش می‌دهیم. حال فرض کنیم F زیرگروهی اساسی و x عنصری از F باشد. اگر $C(x) \supseteq F$، x را یک عنصر مرکزی F می‌نامیم و به ویژه اگر $C(x) = F$، x را یک عنصر مولد مرکزی F می‌نامیم.

گزاره ۳.۱.۲. فرض کنیم F یک زیرگروه اساسی آزاد از گروه G باشد، در این‌صورت F پوچ‌توان است. به‌علاوه اگر F شامل حداقل دو عنصر مولد مرکزی باشد که یکی از آن‌ها از مرتبه‌ی توانی از عدد اول p و دیگری از مرتبه‌ی توانی از عدد اول q $(p \neq q)$ باشد، آن‌گاه F آبلی است.

برهان. فرض کنیم F یک زیرگروه اساسی باشد، پس $g \in G$ وجود دارد که $C(g) = F$. از طرفی چون G متناهی است، لذا مرتبه‌ی g نیز متناهی است. فرض کنیم $o(g) = n$، پس g را می‌توانیم به این‌صورت بنویسیم $g = x_۱ \cdots x_k$ که $o(x_۱) = {p_۱}^{\alpha_۱}, o(x_۲) = {p_۲}^{\alpha_۲}, \cdots, o(x_k) = {p_k}^{\alpha_k}$. پس F شامل عنصری از مرتبه‌ی توانی از عدد اول مانند p می‌باشد. برای هر i که $i = ۱, \cdots, k$، عدد طبیعی $\frac{{p_۱}^{\alpha_۱} \cdots {p_k}^{\alpha_k}}{{p_i}^{\alpha_i}}$ وجود دارد که $x_i = g^{m_i}$، بنابراین داریم $C(g) \subseteq C(x_i)$. حال فرض کنیم iای وجود نداشته باشد که $C(g) = C(x_i)$، یعنی برای هر i، $C(g) \subsetneqq C(x_i)$. به دلیل ماکسیمال بودن F، رابطه بالا فقط در صورتی برقرار است که $C(x_i) = G$ و در نتیجه $x_i \in Z(G)$. بنابراین $g \in Z(G)$

که در این‌صورت $C(g)=G$ و این یک تناقض است، زیرا $C(g)=F\gneqq G$. لذا $x_i\in F$ای وجود دارد به‌طوری‌که $C(x_i)=F$ و بنابراین x_i عنصر مولد مرکزی F است. حال فرض کنیم x مولد مرکزی F از مرتبه توانی از عدد اول p و $y\in F$ عنصری دلخواه از مرتبه توانی از عدد اول q متمایز با p باشد، در این صورت عنصری از F مانند a وجود دارد به‌طوری‌که $xy=yx=a$، بنابراین $o(a)=o(x)$. در نتیجه i وجود دارد که $a^i=x$، لذا $C(a)\subseteq C(x)=F$.

به دلیل مینیمال بودن F داریم $C(a)=F$. از طرفی j وجود دارد که $y=a^j$، بنابراین $C(y)\supseteq C(a)=F$، درنتیجه $C_F(y)=F$، پس $y\in Z(F)$. بنابراین هر q−زیرگروه سیلوی G $(q\neq p)$ در مرکز F قرار دارد و لذا هر q−زیرگروه سیلو نرمال است و هم‌چنین چون هر q−زیرگروه سیلو مرکزی است، بنابراین p−زیرگروه سیلوی F نیز نرمال است و بنا به قضیه ۹.۱.۱ F پوچ‌توان است. پس F را می‌توانیم به صورت حاصل‌ضرب مستقیم زیرگروه سیلوهایش بنویسیم $F=P_۱\times P_۲\times\cdots\times P_k$.

طبق مطالب گفته شده در بالا می‌توانیم فرض کنیم x که مولد مرکزی F بود در $P_۱$ باشد. حال اگر $y\in P_i$ که $i\neq ۱$، آن‌گاه بنا به مطالب بالا، y عنصر مرکزی F است، پس $P_۲\times\cdots\times P_n\subseteq Z(F)$. اگر F شامل عنصر مولد مرکزی دیگری مانند w باشد که $w\in P_j$ و $j=۲,\cdots,n$، آن‌گاه w نیز عنصر مرکزی F می‌باشد، بنابراین $F\subseteq Z(F)$ و در نتیجه F آبلی است. □

تعریف ۴.۱.۲. گوییم G افرازی آبلی با هسته K دارد، هرگاه G اجتماعی از تعدادی زیرگروه آبلی باشد که هر جفت از آن‌ها تنها در K اشتراک داشته باشند. به علاوه هر یک از زیرگروه‌های آبلی را یک جزء از افراز می‌نامیم.

گزاره ۵.۱.۲. هر گروه G از نوع (A) یک افراز آبلی با هسته $Z(G)$دارد و اجزای آن افراز، زیرگروه‌های اساسی G هستند.

برهان. چون G از نوع (A) است، پس همه زیرگروه‌های اساسی G آبلی هستند. لذا برای هر i و هر j که $i\neq j$ و F_i و F_j زیرگروه اساسی می‌باشند، داریم $F_i\cap F_j=Z(G)$. حال اگر $x\in F_i\cap F_j-Z(G)$، آن‌گاه $F_i\cup F_j\subseteq C(x)$ که با فرض (A) تناقض دارد. بنابراین G دارای افراز آبلی با هسته $Z(G)$ است.

□

گزاره ۶.۱.۲. فرض کنیم G، p−گروهی از نمای بزرگتر از p باشد و G دارای یک افراز آبلی با هسته $E=۱$ است. در این‌صورت اگر جزء A شامل حداقل یک عنصر از مرتبه بزرگتر از p باشد، آن‌گاه A شامل همه‌ی عناصر از مرتبه بزرگتر از p است.

به ویژه $\frac{G}{A}$ از نمای p بوده و هر جزء دیگری غیر از A، در G نرمال نیست.

برهان. طبق تعریف افراز آبلی می‌دانیم $A_۱$، $A_۲$، $\cdots$ و A_k زیرگروه‌های آبلی از G هستند که دو به دو فقط در عضو همانی اشتراک دارند و $G=A_۱\cup A_۲\cup\cdots\cup A_k$.

فرض کنیم $A_۱$ شامل حداقل یک عضو مانند x از مرتبه بزرگتر از p باشد، یعنی $o(x)>p$. فرض کنیم $y\in Z(G)$ و $o(y)=p$، بنابراین $(xy)^p=x^p\neq ۱$.

حال فرض کنیم $xy \in A_2 \neq A_1$، بنابراین هرتوانی از xy در A_2 می‌باشد، پس داریم $(xy)^p = x^p \in A_2$. لذا $x^p \in A_1 \cap A_2$ و این یک تناقض است. بنابراین A_1 شامل xy می‌باشد و در نتیجه A_1 شامل y هم هست.

فرض کنیم $x' \in G$ و $o(x') > p$. در این صورت $(x'y)^p = x'^p \neq 1$. حال جزئی که شامل x' باشد، شامل y نیز خواهد بود. اما چون اجزای افراز فقط در عضو همانی اشترک دارند، لذا این جزء فقط می‌تواند A_1 باشد. حال نشان می‌دهیم که A_1 تنها زیرگروه نرمال G است. سه حالت زیر پیش می‌آید

حالت اول: فرض کنیم مرتبه x و مرتبه g بزرگتر از p باشند. چون هر عضوی با مرتبه بزرگتر از p در A_1 است، لذا g متعلق به A_1 است و داریم $gxg^{-1} \in A_1$.

حالت دوم: فرض کنیم $o(x) > p$ و $o(g) = p$. داریم $o(x) = o(gxg^{-1})$، لذا $gxg^{-1} \in A_1$.

حالت سوم: فرض کنیم مرتبه x و مرتبه g هردو p باشد. در این صورت اگر عضو دیگری از A_1 مانند a را در نظر بگیریم به‌طوری‌که $o(a) = p^2$، آنگاه $o(xa) = p^2$، پس $g(xa)g^{-1}$ و gag^{-1} بنا به حالت دوم، متعلق به A_1 می‌باشند. از طرفی داریم $g(xa)g^{-1} = gxg^{-1}gag^{-1} \in A_1$، در نتیجه $gxg^{-1} \in A_1$ و لذا $A_1 \trianglelefteq G$.

حال فرض کنیم A_2 نیز در G نرمال باشد، در این‌صورت با توجه به فرض مسئله داریم $A_1A_2 = A_1 \times A_2$. فرض کنیم $a_1 \in A_1$ و $a_2 \in A_2$ باشند، اگر مرتبه‌ی a_1 بزرگتر از p باشد، آنگاه مرتبه‌ی a_1a_2 نیز بزرگتر از p می‌باشد و چون هر عضوی با مرتبه‌ی بزرگتر از p متعلق به A_1 می‌باشد، لذا $a_1a_2 \in A_1$. پس در این حالت $a_2 \in A_1$، که این یک تناقض است. برای هر $x \in \frac{G}{A_1}$، عضو $g \in G$ وجود دارد که $x = gA_1$. بنابراین گروه خارج قسمتی $\frac{G}{A_1}$ از نمای p می‌باشد.

□

گزاره ۷.۱.۲. فرض کنیم G گروهی باشد که $G = H \times K$ و K آبلی باشد. در این‌صورت G و H بردار نوع تزویج یکسان دارند.

برهان. کافیست برای هر $g \in G$ و هر $h \in H$، نشان دهیم $C_G(g) = C_H(h).K$. به ازای هر $g_i \in C_G(g)$ که $i = 1, \cdots, n$، $h_i \in C_H(h)$ و $k_i \in K$ وجود دارند به‌طوری‌که $g_i = h_ik_i$. زیرا داریم

$$gg_1 = g_1g \longrightarrow (hk)(h_1k_1) = (h_1k_1)(hk) \xrightarrow{K\text{ آبلی}} h_1h = hh_1 \Longrightarrow h_1 \in C_H(h)$$

□

قرارداد ۸.۱.۲. از این به بعد فرض می‌کنیم که هر گروه G مورد بررسی، شامل هیچ عامل مستقیم آبلی نباشد.

۲.۲ گروه‌های از نوع $(n_{۱}, ۱)$

لم ۱.۲.۲. هر گروه پوچ‌توان G از نوع $(n_{۱}, ۱)$، p–گروه است.

برهان. چون G پوچ‌توان است، پس می‌توان G را به صورت حاصل‌ضرب مستقیم سیلوهایش نوشت. فرض کنیم $G = P_{۱} \times P_{۲} \times \cdots \times P_n$ که $P_{۱}$، $P_{۲}$، $\cdots$ و P_n سیلوهای متمایز G هستند. برای هر x متعلق به P_i که $x \neq ۱$، داریم $||[x]|| = \frac{|G|}{|C_G(x)|}$، که $||[x]||$ توانی از p_i است و از طرفی چون G از نوع تزویج $(n_{۱}, ۱)$ است و عامل مستقیم آبلی ندارد، پس باید این توان‌های p_i ها با هم برابر باشند که یک تناقض است و لذا G یک p–گروه است. □

لم ۲.۲.۲. هر گروه G از نوع $(n_{۱}, ۱)$، از نوع (F) است.

برهان. فرض کنیم F یک زیرگروه اساسی از G باشد. چون گروه G از نوع $(n_{۱}, ۱)$ است، پس $[G : F] = n_{۱}$ یا $[G : F] = ۱$. اگر $[G : F] = ۱$ به تناقض می‌رسیم، پس $[G : F] = n_{۱}$، لذا همه‌ی زیرگروه‌های اساسی G از یک مرتبه هستند. بنابراین زیرگروه‌های اساسی هم مینیمال و هم ماکسیمال و در نتیجه آزاد هستند.

□

در ادامه فرض می‌کنیم گروه G غیر پوچ‌توان از نوع $(n_{۱}, ۱)$ وجود داشته باشد. می‌خواهیم نشان دهیم این فرض به تناقض می‌رسد.

گزاره ۳.۲.۲. هر زیرگروه اساسی F از G آبلی است. به عبارت دیگر G از نوع (A) است.

برهان. فرض کنیم F یک p–گروه باشد. چون G، p–گروه نیست، پس شامل یک q–زیرگروه سیلو $S_q(G) \neq E$ می‌باشد که $q \neq p$. مرکز G شامل $S_q(G)$ است. (چون در غیر این‌صورت اگر $S_q(G) \nsubseteq Z(G)$، آنگاه $x \in S_q(G) - Z(G)$ وجود دارد که مرتبه‌ی x توانی از q می‌باشد. لذا $F = |C(x)||q$ که این با p–گروه بودن F در تناقض است.)

بنابراین $S_q(G) \subseteq Z(G)$ و چون $Z(G) \subseteq F$، لذا F شامل $S_q(G)$ می‌باشد و این یک تناقض است. پس F برای هر عدد اول مانند p، p–گروه نیست.

حال فرض کنیم همه‌ی عناصر مولد مرکزی از مرتبه‌ی توانی از عدد اول ثابتی مانند p باشند. در این‌صورت هر q–زیرگروه سیلو غیربدیهی از F مانند $S_q(F)$ مشمول در $Z(G)$ است. چون F، p–گروه نیست، پس شامل یک q–زیرگروه سیلو مانند $S_q(F)$ می‌باشد. اگر $S_q(F) \nsubseteq Z(G)$، آنگاه چون G از نوع $(n_{۱}, ۱)$ است، بنا به لم ۲.۲.۲همه‌ی زیرگروه‌های اساسی G آزادند و در نتیجه پوچ‌توان هستند. حال فرض کنیم $x \in S_q(F) - Z(G)$ وجود داشته باشد، دراین صورت به ازای هر $y \in S_{p_i}(G)$ داریم $xy = yx$، پس $x \in Z(G)$ که تناقض است.

حال چون زیرگروه‌های اساسی حاصل‌ضرب مستقیم از زیرگروه‌های سیلویشان هستند، می‌توانیم فرض کنیم $P_{۱}$ و P سیلوزیرگروه‌هایی از F باشند و $x \in P$ عنصر مولد مرکزی F و $y \in P_{۱}$ غیر مرکزی باشد، بنابراین $C(x) = F$ و x از مرتبه‌ی توانی از p می‌باشد. لذا $\exists a \in F;\ a^t = x,\ a^s = y$.

حال $G \neq C(x) \supseteq C(a) \neq 1$ و چون زیرگروه‌های اساسی آزادند، پس $C(x) = C(a)$. از طرفی داریم $F = C(x) = C(a) \subseteq C(y) \neq G$، بنابراین $F \subseteq C(y)$، که این یک تناقض است.

عنصر غیرمرکزی مانند z از G وجود دارد که از مرتبه‌ی توانی از عدد اول q است. قرار می‌دهیم $F' = C(z)$، چون هر q-زیرگروه سیلوی F مشمول در مرکز G است، لذا داریم $S_q(F) \subseteq Z(G) \subseteq F' = C(z)$، حال اگر $S_q(F) = S_q(F')$، آنگاه باید به ازای هر q، $q^t = q^s$ و چون $|F| = |F'|$، لذا $F = F'$ که این یک تناقض است، در نتیجه $S_q(F) \subset S_q(F')$ و این هم یک تناقض است.

بنابراین F شامل حداقل دو عنصر مولد است که یکی از آن‌ها از مرتبه‌ی توانی از عدد اول p و دیگری از مرتبه‌ی توانی از عدد اول q $(q \neq p)$ می‌باشد. در نتیجه بنا به گزاره ۳.۱.۲ F آبلی است. $\square$

گزاره ۴.۲.۲. رده‌ی پوچ‌توانی p-زیرگروه سیلوی $S_p(G)$ از G برای هر مقسوم علیه اول p از $|G|$، برابر با ۲ است.

برهان. فرض کنیم $S_p(G)$ آبلی باشد. در این‌صورت برای هر x و y غیرمرکزی متعلق به $S_p(G)$ داریم $xy = yx$، بنابراین $G \neq C(x) \ni y$. در نتیجه $S_p(G)$ مشمول در بعضی از زیرگروه‌های اساسی G می‌باشد. فرض کنیم F و F_1 زیرگروه‌های اساسی باشند، اگر سیلوی P را مشمول در زیرگروه اساسی F در نظر بگیریم، آنگاه چون G از نوع $(n_1, 1)$ است و دارای عامل مستقیم آبلی نمی‌باشد، پس $|F| = |F_1|$. بنابراین P مزدوجی مانند P^a، $(a \in G)$ دارد که مشمول در F_1 است. حال داریم: $P^a \subset F_1$ در نتیجه $P \subseteq F_1^{a^{-1}}$. به علاوه برای هر $b \in P - Z(G)$ داریم $C(b) = F$ و در نتیجه $C(b) = F_1^{a^{-1}}$. پس $F_1 = F^a$. بنابراین زیرگروه‌های اساسی G با یکدیگر مزدوج هستند و اجتماع این زیرگروه‌های اساسی، شامل همه‌ی عناصر G است، که با توجه به لم ۶.۱.۱، یک تناقض است پس $S_P(G)$ ناآبلی است. از طرف دیگر چون هر زیرگروه اساسی F از G آبلی است، پس F شامل $S_p(G)$ نیست. به‌علاوه مرکز $S_p(G)$ مشمول در مرکز G می‌باشد، زیرا به ازای هر x متعلق به $Z_1(S_p(G))$، داریم $C(x) \supseteq S_p(G)$، از طرفی می‌دانیم $S_p(G)$ مشمول در هیچ زیرگروه اساسی نمی‌باشد، لذا $C(x) = G$ و این یعنی x متعلق به $Z_1(G)$ می‌باشد، در نتیجه $Z_1(S_p(G)) \subseteq Z_1(G)$.

بنا به قضیه‌ی ۱۰.۱.۱، داریم $E = [\gamma_2(S_p(G)), Z_2(S_p(G))]$، که $\gamma_2(S_p(G))$ و $Z_2(S_p(G))$ به ترتیب جمله‌های دوم سری‌های مرکزی پایینی و بالایی $S_p(G)$ می‌باشند. حال فرض کنیم $y \in Z_2(S_p(G)) - Z_1(S_p(G))$، در این‌صورت y یک عنصر غیر مرکزی از G می‌باشد. قرار می‌دهیم $F = C(y)$، بنابراین داریم $F \supseteq H_2(S_p(G))$. از آن‌جایی که F آبلی است، رده‌ی پوچ‌توانی $S_p(G)$ مساوی ۲ می‌باشد.

حال فرض کنیم که رده‌ی پوچ‌توانی $S_p(G)$ بزرگ‌تر از ۲ باشد، چون $\dfrac{S_p(G)}{Z_1(S_p(G))} \cong \dfrac{S_p(G).Z_1(G)}{Z_1(G)}$ و هم‌چنین چون گروه خارج قسمتی $\dfrac{S_p(G).Z_1(G)}{Z_1(G)}$ دارای افراز آبلی با هسته‌ی $E = Z_1(G)$ می‌باشد، لذا گروه $\dfrac{S_p(G)}{Z_1(S_p(G))}$ نیز دارای افراز آبلی با هسته‌ی $E = Z_1(S_p(G))$ می‌باشد. از این‌رو p-زیرگروه سیلو $S_p(F)$ از F را می‌توانیم یکی از اجزای این افراز در نظر بگیریم. چون $\gamma_2(S_p(G))$ یک p-گروه است، بنابراین مشمول در p-زیرگروه سیلو $S_p(F)$ است، بنابراین $S_p(F)$ در p-زیرگروه سیلو $S_p(G)$

نرمال است. به علاوه $\frac{S_p(G)}{Z_1(S_p(G))}$ آبلی نیست، زیرا رده‌ی $S_p(G)$ را بزرگتر از ۲ در نظر گرفته‌ایم. حال $\frac{S_p(G)}{S_p(F)}$ یک گروه آبلی است و بنا به گزاره ۶.۱.۲ این گروه خارج قسمتی از نوع $(p, p, \cdots, p)$ است. به عبارت دیگر $N(F)$ شامل $S_p(G)$ است.

زیرگروه $S_p(G)C_p(F)$ را در نظر می‌گیریم، که $C_p(F)$، p-زیرگروه سیلومکمل از F می‌باشد. پس می‌توانیم $\frac{S_p(G)}{S_p(F)}$ را به عنوان گروهی از خودریختی‌های $\frac{C_p(F)}{C_p(F) \cap Z_1(G)}$ در نظر بگیریم. در حقیقت $C_p(F)$ و $C_p(F) \cap Z_1(G)$ در $S_p(G)C_p(F)$ نرمال هستند. فرض می‌کنیم p عنصری از $S_p(G)$ باشد که در $S_p(F)$ نیست. در این‌صورت $C(p) \neq F$، لذا p با هر عنصر مولد مرکزی از F کهدر $C_p(F)$ باشد، جابه‌جا نمی‌شود. فرض کنیم p با کلاس مانده $q(C_p(F) \cap Z_1(G))$ از $C_p(F) \cap Z_1(G)$ در $C_p(F)$ جابه‌جا شود، که $q(C_p(F) \cap Z_1(G)) \neq C_p(F) \cap Z_1(G)$ و q عنصری از $C_p(F)$ است. در این‌صورت q عنصر مولد مرکزی F می‌باشد. جابه‌جاگر $[p, q]$ متعلق به $C_p(F) \cap Z_1(G)$ می‌باشد که $C_p(F) \cap Z_1(G) \subseteq Z_1(G)$. برای هر عدد صحیح مانند n، چون $[p, q] = E$، پس داریم $[p, q]^n = [p^n, q] = [p, q^n]$ که یک تناقض است. بنابراین هر عنصری از $S_p(G)$ که با تعدادی کلاس مانده به جز $C_p(F) \cap Z_1(G)$ از $C_p(F) \cap Z_1(G)$ در $C_p(F)$ جابه‌جا شود، متعلق به $S_p(F)$ می‌باشد. از این‌رو با توجه به قضیه‌ای از برنساید[1] داریم $\frac{S_p(G)}{S_p(F)}$ یا دوری است یا یک گروه کواترنیون تعمیم یافته است. چون این گروه خارج قسمتی، آبلی بود، لذا کواترنیون نیست، بنابراین یک گروه از مرتبه‌ی p است. از آنجایی که برای هر زیرگروه اساسی F^* یک p-زیرگروه سیلو $S_p^*(G)$ از G وجود دارد که شامل p-زیرگروه سیلو $S_p(F^*)$ از F^* است. لذا می‌توانیم فرض کنیم همه‌ی زیرگروه‌های اساسی در G با یکدیگر مزدوج‌اند. به عبارت دیگر p-زیرگروه سیلو $S_p(G)$ از G شامل p-زیرگروه سیلو $S_p(F)$ و $S_p(F^*)$ از دو زیرگروه اساسی متمایز F و F^* می‌باشد. حال $S_p(F)$ و $S_p(F^*)$ آبلی، متمایز و در $S_p(G)$ از اندیس p می‌باشند، بنابراین رده‌ی پوچتوانی $S_p(G)$ مساوی ۲ خواهد بود که یک تناقض است. لذا همه‌ی زیرگروه‌های اساسی با یکدیگر مزدوج‌اند. از طرف دیگر اجتماع آن‌ها باید شامل همه‌ی عناصر G باشد، اما این غیرممکن است. □

گزاره ۵.۲.۲. هر زیرگروه اساسی F از G، در G نرمال است.

برهان. فرض کنیم $S_p(F)$، p-زیرگروه سیلوی از F باشد. چون F آبلی است، بنابراین $F \subseteq N(S_p(F))$. همچنین داریم $S_p(F)\, ch\, F \trianglelefteq N(F)$، لذا $S_p(F) \trianglelefteq N(F)$، در نتیجه $N(F) \subseteq N(S_p(F))$. حال با توجه به گزاره ۳.۱.۲،) شامل یک عنصر مولد مرکزی از F می‌باشد. فرض کنیم $N(S_p(F))$ به طور واقعی شامل $N(F)$ باشد، یعنی y متعلق به $N(S_p(F)) - N(F)$ وجود داشته باشد. برای هر x متعلق به $S_p(F)$ داریم $C(x) = F$ و $x^y \in S_p(F)$. بنابراین $C(x)^y = F^y$ و لذا $C(x^y) = F^y$. در نتیجه $C(x^y) = F$، پس $F = F^y$ که یک تناقض است. بنابراین $N(F) = N(S_p(F))$.

از طرف دیگر چون رده‌ی پوچتوانی هر p-زیرگروه سیلو از G، ۲ می‌باشد و $S_p(F)$ شامل مرکز

[1] W. Burnside

p-زیرگروه سیلوی از G است، پس $N(S_p(F))$ شامل p-زیرگروه سیلو $S_p(G)$ از G می‌باشد. بنابراین $N(F)$ نیز برای هر عدد اول p شامل $S_p(G)$ می‌باشد و در نتیجه F در G نرمال است. $\square$

با توجه به گزاره‌های ۳.۲.۲، ۴.۲.۲ و ۵.۲.۲، G اجتماعی از زیرگروه‌های نرمال آبلی است که بنا به قضیه ۱۱.۱.۱ G باید پوچ‌توان باشد اما این نتیجه با فرض اولیه در تناقض است زیرا G را غیر پوچ‌توان در نظر گرفتیم. بنابراین نتیجه‌ی زیر را داریم.

نتیجه ۶.۲.۲. هر گروه از نوع $(n_1, 1)$ پوچ‌توان است.

فصل ۳

خواصی از گراف ناجابه‌جایی گروه‌های متناهی

مطالب این فصل برگرفته از [۵] است.

۱.۳ نتایجی درباره‌ی تعداد یال‌ها

فرض کنیم G یک گروه ناآبلی متناهی باشد. تعداد رده‌های تزویج G با $k(G)$ نمایش داده می‌شود.

لم ۱.۱.۳. فرض کنیم G یک گروه متناهی و تعداد رده‌های تزویج آن k باشد. در این‌صورت

$$2|E(\Gamma_G)| = |G|^2 - k|G|$$

برهان. چون G روی مجموعه‌ی $X = G - Z(G)$ با عمل تزویج عمل می‌کند، طبق قضیه ۴.۱.۱ داریم $k|G| = \Sigma_{g\in G}|X_g|$ که $k = k(G) - |Z(G)|$ و $|X_g| = |C_G(g)| - |Z(G)|$.

در نتیجه

$$k|G| = \Sigma_{g\in G}|X_g| = \Sigma_{g\in G}|C_G(g)|-|Z(G)| = (|G|-|Z(G)|)|Z(G)| + \Sigma_{x\in X}|C_G(x)|-|Z(G)|$$

و هم‌چنین می‌دانیم

$$[G : C_G(x)] = |[x]| = \Sigma_{x\in X}\frac{|G|}{|C_G(x)|}$$

از قضیه ۴.۱.۱ داریم

$$\Sigma_{g\in G}|X(g)| = \Sigma_{x\in X}|C_G(x)| = k|G|$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\Sigma_{x\in X}d(x) =&\Sigma_{x\in X}(|G| - |C_G(x)|)\\ &= \Sigma_{x\in X}(|G| - |Z(G)|) - \Sigma_{x\in X}(|C_G(x)| - |Z(G)|)\\ &= (|G| - |Z(G)|)^2 + (|G| - |Z(G)|)|Z(G)| - k|G|\\ &= |G|(|G| - k(G))\end{aligned}$$

□

تعریف ۲.۱.۳. فرض کنیم G گروهی متناهی باشد. احتمال جابه‌جایی دو عنصر انتخابی از این گروه را با $Pr(G)$ نمایش می‌دهیم.

لم ۳.۱.۳. فرض کنیم G گروهی از مرتبه‌ی n باشد. در این صورت $Pr(G) = \dfrac{k(G)}{|G|}$.

برهان. مجموعه‌ی C را به صورت مقابل در نظر می‌گیریم $C = \{(x, y)| xy = yx\}$. حال برای محاسبه‌ی عناصر این مجموعه مشاهده می کنیم که به ازای هر $x \in G$ تعداد عناصر C که به فرم (x, y) هستند؛ مساوی تعداد عناصر مرکز ساز x می باشد. لذا می‌توانیم بنویسیم $|C| = \sum |C_G(x)|$.
هم‌چنین می‌دانیم اگر x و y در G مزدوج باشند، آنگاه $C_G(x)$ و $C_G(y)$ زیرگروه‌های مزدوج در G

هستند. به‌علاوه تعداد عناصر رده‌ی تزویج x مساوی $[G : C_G(x)]$ است، بنابراین اگر x_1، x_2، $\cdots$ و x_k نماینده‌های رده‌های تزویج در G باشند، داریم

$$|C| = \sum_{i=1}^{k}[G : C_G(x_i)].|C_G(x_i)| = k.n$$

بنابراین احتمال جابه‌جایی دو عنصر دلخواه برابر است با

$$Pr(G) = \frac{|C|}{n^2} = \frac{k.n}{n^2} = \frac{k}{n}.$$

□

لم ۴.۱.۳. اگر گروه G ناآبلی باشد، آن‌گاه $Pr(G) \leqslant \frac{5}{8}$.

برهان. فرض کنیم Z مرکز G و K_1، K_2، $\cdots$ و K_t رده‌های تزویج غیربدیهی G باشند، در این‌صورت از معادله‌ی رده‌ای داریم

$$|G| = |Z| + |K_1| + \cdots + |K_t|$$

برای هر i، $i = 1, 2, \cdots, t$، $|K_i| \geqslant 2$. بنابراین $|G| - |Z| \geqslant 2t$.
پس $k = t + |Z| \leqslant \frac{(|G| + |Z|)}{2}$ و چون G ناآبلی است، پس $\frac{G}{Z}$ دوری نیست.
از این‌رو $|Z| \leqslant \frac{|G|}{4}$، بنابراین $k \leqslant \frac{5}{8}|G|$، لذا $Pr(G) \leqslant \frac{5}{8}$. □

گزاره ۵.۱.۳. فرض کنیم G یک گروه ناآبلی متناهی باشد، در این‌صورت

$$|E(\Gamma_G)| \geqslant \frac{3}{10}k(G)|G|$$

به‌علاوه تساوی برقرار است، اگر و تنها اگر G ضرب مستقیم یک گروه آبلی و یک ۲-گروه غیرقابل تجزیه مانند H باشد، به‌طوری‌که $|H| \geqslant 8$ و $Pr(H) = \frac{5}{8}$.

برهان. فرض کنیم $|E(\Gamma_G)| < \frac{3}{10}k(G)|G|$. با استفاده از رابطه‌ی $|E(\Gamma_G)| = \frac{1}{2}|G|(|G| - k(G))$، داریم $|G| < \frac{8}{5}k(G)$. بنابراین $\frac{k(G)}{|G|} > \frac{5}{8}$ و لذا G آبلی است که یک تناقض است. پس داریم

$$|E(\Gamma_G)| \geqslant \frac{3}{10}k(G)|G|$$

و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $\frac{k(G)}{|G|} = \frac{5}{8}$ که با توجه به[6]، نتیجه حاصل است. □

گزاره ۶.۱.۳. برای هر گروه ناآبلی متناهی G، داریم $|E(\Gamma_G)| \neq 2|G|$.

برهان. فرض کنیم $|E(\Gamma_G)| = 2|G|$، در این‌صورت $|G| = k(G) + 4$. اما با استفاده از گزاره قبل داریم $|E(\Gamma_G)| \geqslant \frac{3}{10}k(G)|G|$، بنابراین $k(G) \leqslant \frac{20}{3} < 7$، از این‌رو $k(G) = 1, 2, \ldots, 6$. حال از $|G| = k(G) + 4$ داریم

$$(k(G), |G|) = (1, 5), (2, 6), (3, 7), (4, 8), (5, 9), (6, 10)$$

چون گروه G را ناآبلی فرض کردیم، لذا احتمال‌های $(۱,۵)$، $(۳,۷)$ و $(۵,۹)$ حذف می‌شوند. گروه ناآبلی از مرتبه ۶، گروه جایگشتی $S_۳$ می‌باشد، که بنا به نتیجه ۱۱.۲.۱، ۳ رده تزویج دارد، لذا احتمال $(۲,۶)$ نیز حذف می‌شود. گروه‌های ناآبلی از مرتبه ۸، گروه دووجهی $D_۸$ و گروه کواترنیون $Q_۸$ می‌باشند که بنا به لم‌های ۵.۲.۱ و ۶.۲.۱، هر دو گروه دارای ۵ رده تزویج می‌باشند، بنابراین احتمال $(۴,۸)$ نیز حذف می‌شود. گروه ناآبلی از مرتبه ۱۰ گروه دووجهی $(D_{۱۰})$ می‌باشد که بنا به لم ۵.۲.۱، ۴ رده تزویج دارد که در نتیجه احتمال $(۶,۱۰)$ نیز حذف می‌شود. بنابراین همه‌ی احتمال‌ها حذف می‌شوند.

□

لم ۷.۱.۳. اگر n یک عدد طبیعی باشد و $|G| > \frac{۱۶}{۳}n$، آن‌گاه $|E(\Gamma_G)| > n|G|$.

برهان. بنا به گزاره‌ی ۵.۱.۳، داریم $|E(\Gamma_G)| \geqslant \frac{۳}{۱۰}k(G)|G|$. اگر $|E(\Gamma_G)| \leqslant n|G|$، آن‌گاه $k(G) \leqslant \frac{۱۰}{۳}n$. اما داریم $|E(\Gamma_G)| = \dfrac{|G|(|G|-k(G))}{۲} \leqslant n|G|$، در نتیجه $|G| \leqslant ۲n + k(G) \leqslant ۲n + \dfrac{۱۰}{۳}n = \dfrac{۱۶}{۳}n$ که یک تناقض است.

□

نتیجه ۸.۱.۳. فرض کنیم G گروه ناآبلی ساده و متناهی باشد. اگر $|E(\Gamma_G)| \leqslant ۳۱|G|$، آن‌گاه $G \cong A_۵$.

برهان. اگر $|E(\Gamma_G)| \leqslant ۳۱|G|$، آن‌گاه بنا به لم ۷.۱.۳، داریم $|G| \leqslant ۱۶۶$. چون G ساده فرض شده بود پس $G \cong A_۵$. □

قضیه ۹.۱.۳. فرض کنیم G گروه ناآبلی متناهی باشد. در این صورت $|E(\Gamma_G)| \geqslant \dfrac{۳}{۲}|G|$. به‌علاوه تساوی برقرار است، اگر و تنها اگر G با یکی از گروه‌های $S_۳$، $D_۸$ یا $Q_۸$ یکریخت باشد.

برهان. فرض کنیم $|E(\Gamma_G)| < \dfrac{۳}{۲}|G|$. با جایگذاری مقدار $E(\Gamma_G)$ به $|G| - k(G) < ۳$ می‌رسیم. اما $|G| - k(G) \geqslant ۱$ و چون G ناآبلی بود، لذا $|G| - k(G)$ برابر ۱ یا ۲ است. از لم ۴.۱.۳ داریم $Pr(G) \leqslant \dfrac{۵}{۸}$. بنابراین داریم $|G| \leqslant ۲$ یا $|G| \leqslant ۵$ و در این دو حالت G آبلی خواهد بود که تناقض است.

اگر $|E(\Gamma_G)| = \dfrac{۳}{۲}|G|$، آن‌گاه $|G| - k(G) = ۳$. با استفاده از رابطه‌ی $Pr(G) = \dfrac{k(G)}{|G|} \leqslant \dfrac{۵}{۸}$، داریم $|G| \leqslant ۸$. حال با در نظر گرفتن گروه‌های ناآبلی با مرتبه‌ی کمتر یا مساوی ۸ به این نتیجه می‌رسیم که G با یکی از گروه‌های $S_۳$، $D_۸$ یا $Q_۸$ یکریخت است. □

۲.۳ افراز گراف ناجابه‌جایی

در ادامه همه جا، گروه G را متناهی و ناآبلی در نظر می‌گیریم.

گزاره ۱.۲.۳. هرگاه G یک گروه باشد، آن‌گاه Γ_G دوبخشی نیست.

برهان. فرض کنیم Γ_G گراف دوبخشی باشد و $V_۱$و $V_۲$ کلاس‌های این افراز باشند. راس‌های $x_۱ \in V_۱$ و $x_۲ \in V_۲$ به‌گونه‌ای موجودندکه $x_۱x_۲ \neq x_۲x_۱$. چون $G \neq C_G(x_۱) \cup C_G(x_۲)$، $y \in G - Z(G)$ وجود دارد به‌طوری‌که $y \notin C_G(x_۱) \cup C_G(x_۲)$. پس y با هر دو راس $x_۱$ و $x_۲$ مجاور است. لذا $y \notin V_۱ \cup V_۲ = V(\Gamma_G)$، پس $y \in Z(G)$ و این یک تناقض است. پس G دو بخشی نیست. □

گزاره ۲.۲.۳. فرض کنیم G یک گروه باشد. در این صورت Γ_G گراف کامل نیست.

برهان. فرض کنیم Γ_G یک گراف کامل باشد. در این حالت نشان می‌دهیم مرتبه‌ی هر عنصر غیرمرکزی G، ۲ است. اگر $x \in G - Z(G)$، آنگاه $dx = |G| - |C_G(x)|$. با توجه به کامل بودن گراف داریم $|G| - |C_G(x)| = |G| - |Z(G)| - ۱$. بنابراین $d(x) = |G| - |Z(G)| - ۱$ و در نتیجه $|C_G(x)| = |Z(G)| + ۱$.

اما می‌دانیم $|Z(G)|\,\big|\,|C_G(x)|$، از این‌رو $|Z(G)|\,\big|\,|Z(G)| + ۱$ و در نتیجه $|Z(G)| = ۱$.

بنابراین $|C_G(x)| = ۲$ و مرتبه‌ی x نیز ۲ است. چون مرتبه‌ی هر عضو ۱ یا ۲ است، پس G یک ۲-گروه آبلی مقدماتی است، که یک تناقض است.

□

۳.۳ خواص گراف ناجابه‌جایی گروه های خاص

برای بعضی از گروه‌های متناهی ناآبلی G نشان می‌دهیم که اگر H گروهی باشد که $\Gamma_G \cong \Gamma_H$، آنگاه $|G| = |H|$ و در حالتی که G یک گروه ناآبلی ساده باشد $G \cong H$. توجه کنید که $\Gamma_G \cong \Gamma_H$ و تناظر یک به یک $\varphi : G - Z(G) \longrightarrow H - Z(H)$ موجود است، به‌طوری‌که یال‌ها را حفظ می‌کند یعنی اگر $xy \neq yx$، آنگاه $\varphi(x)\varphi(y) \neq \varphi(y)\varphi(x)$.

از $\Gamma_G \cong \Gamma_H$ داریم $|G - Z(G)| = |H - Z(H)|$. چون G ناآبلی فرض شده است، پس $|H - Z(H)| = |G - Z(G)| \neq ۰$ و در نتیجه H ناآبلی است. هم‌چنین داریم $|Z(H)| \leqslant |H - Z(H)|$ پس $Z(H)$ یک گروه متناهی است. لذا H یک گروه متناهی ناآبلی می‌باشد.

گزاره ۱.۳.۳. فرض کنیم G یک گروه ناآبلی متناهی باشد و $g \in G - Z(G)$ وجود داشته باشد که $d(g) = p^n$ که p عددی اول است. در این صورت اگر H یک گروه و $\Gamma_G \cong \Gamma_H$، آنگاه $|G| = |H|$.

برهان. می‌دانیم

$$d(g) = |G| - |C_G(g)| = |C_G(g)|([G : C_G(g)] - ۱) = p^n$$

بنابراین برای mهایی که $۱ \leqslant m \leqslant n$، $|C_G(g)| = p^m$. از این‌رو داریم $|G| = p^n + p^m$. فرض کنیم $g' \in H - Z(H)$ راس متناظر g در Γ_H تحت یکریختی $\Gamma_G \cong \Gamma_H$ باشد، بنابراین $d(g') = p^n$ و به‌طور مشابه به‌دست خواهیم آورد $|C_H(g)| = p^{m'}$ که $۱ \leqslant m' \leqslant n$ و بالاخره $|H| = p^n + p^{m'}$. با توجه به اینکه $Z(G) \lneqq C_G(g)$ می‌توانیم بنویسیم $|Z(G)| = p^l$ که $۱ \leqslant l < m$. به طور مشابه داریم

$|Z(H)| = p^{l'}$ که $۱ \leqslant l' \leqslant m'$. چون $|G| - |Z(G)| = |H| - |Z(H)|$، لذا $p^m - p^l = p^{m'} - p^{l'}$، بنابراین $p^l(p^{m-l} - ۱) = p^{l'}(p^{m'-l'} - ۱)$. چون $p^{m-l} - ۱$ و $p^{m'-l'} - ۱$ ناصفر و نسبت به p اولند، پس $m = m'$ و $l = l'$. در نتیجه $|G| = |H|$. $\square$

گزاره ۲.۳.۳. فرض کنیم G یک گروه ناآبلی متناهی و $g \in G - Z(G)$ وجود داشته باشد که $d(g) = pq$ و p و q اعداد اول متمایز باشند. اگر H یک گروه و $\Gamma_G \cong \Gamma_H$، آن‌گاه $|G| = |H|$.

برهان. از رابطه‌ی $pq = |C_G(g)|([G : C_G(g)] - ۱)$ نتیجه می‌گیریم که pq یا $|C_G(g)| = p, q$. از این رو $۲pq$ یا $|G| = pq + p\,, pq + q$. چون عنصر متناظر g' از درجه‌ی pq می‌باشد که $g' \in H - Z(H)$، بنابراین داریم $۲pq$ یا $|H| = pq + p, pq + q$. پس برای نشان دادن تساوی $|G| = |H|$، کافیست نشان دهیم که برای مثال $|G| = pq + p$ و $|H| = ۲pq$ غیر ممکن است.

فرض کنیم $|G| = pq + p$، لذا داریم $|C_G(g)| = p$. از این‌رو $|Z(G)| = ۱$. بنابراین با استفاده از تساوی $|G| - |Z(G)| = |H| - |Z(H)|$، خواهیم داشت $|Z(H)| = pq - p + ۱$.

حال باید $|Z(H)| = pq - p + ۱ \big| |H| = ۲pq$، که غیرممکن است. $\square$

لم ۳.۳.۳. فرض کنیم G یک گروه ناآبلی متناهی باشد، اگر H گروهی باشد که $\Gamma_G \cong \Gamma_H$، آن‌گاه H گروهی ناآبلی متناهی است که $|Z(H)|$ عدد زیر را می‌شمارد.

$$gcd_{x \in G - Z(G)}(|G| - |Z(G)|,\ |G| - |C_G(x)|,\ |C_G(x)| - |Z(G)|)$$

برهان. چون $\Gamma_G \cong \Gamma_H$، بنابراین $|H - Z(H)| = |G - Z(G)| \neq ۰$، پس H ناآبلی است. چون $|Z(H)| \leqslant |H - Z(H)|$، بنابراین $Z(H)$ متناهی است و H نیز یک گروه متناهی است، زیرا $|H| = |H - Z(H)| + |Z(H)|$.

از آنجایی که $\Gamma_H \cong \Gamma_G$، $\{d(v) | v \in V(\Gamma_G)\} = \{d(v) | v \in V(\Gamma_H)\}$.

اما برای هر $v \in V(\Gamma_G)$، $d(v) = |G| - |C_G(v)|$ و به ازای هر $v \in V(\Gamma_H)$ ، $|Z(H)|$، $d(v)$ را می‌شمارد و چون $|G| - |Z(G)| = |H| - |Z(H)|$، لذا $|Z(H)|$، $|G| - |Z(G)|$ را می‌شمارد.

از طرفی برای هر $x \in H - Z(H)$، داریم $|C_H(x)| - |Z(H)| = |C_G(\Phi(x))| - |Z(G)|$ در جایی که

$\Phi : \Gamma_H \longrightarrow \Gamma_G$ یک یکریختی گرافی است. پس به ازای هر $x \in G - Z(G)$، $|Z(H)|$، $|C_G(x)| - |Z(G)|$ را می‌شمارد. در نتیجه $|Z(H)|$ برای xهای متعلق به $G - Z(G)$، بزرگترین مقسوم علیه مشترک $|G| - |Z(G)|$، $|G| - |C_G(x)|$ و $|C_G(x)| - |Z(G)|$ را می‌شمارد. $\square$

گزاره ۴.۳.۳. فرض کنیم Gیک گروه ناآبلی متناهی و Γ_G گراف ناجابه‌جایی G باشد و $g \in G - Z(G)$ عنصری باشد که $d(g) = pqr$، به طوری که p، q و r اعداد اول متمایزند و $p < q < r$ و $p \nmid r - ۱$ و $q \nmid r - ۱$.

اگر H یک گروه باشد و $\Gamma_H \cong \Gamma_G$، آن‌گاه $|G| = |H|$.

برهان. از $d(g) = |G| - |C_G(g)|$، داریم $pqr = d(g) = |C_G(g)|(|\frac{G}{C_G(g)}| - ۱)$. پس

pqr یا $|C_G(g)| = p\,, q,\, r,\, pq\,, pr\,, qr$. بنابراین با استفاده از رابطه‌ی $|G| = d(g) + |C_G(g)|$ داریم $pqr + pqr$ یا $|G| = pqr + p,\ pqr + q,\ pqr + r,\ pqr + pq\,, pqr + pr\,, pqr + qr$. چون $\Gamma_G \cong \Gamma_H$، بنابراین اگر $h \in H - Z(H)$ عنصر متناظر با g باشد، آنگاه همه‌ی حالت‌های بالا برای $|H|$ و $|C_H(h)|$ نیز اتفاق می‌افتند. این حالت ها را بررسی می‌کنیم.

حالت ۱: $|G| = pqr + p$ و $|H| = pqr + r$.

در این حالت $|C_G(g)| = p$ و $|C_H(h)| = r$ و در نتیجه $|Z(G)| = ۱ = |Z(H)|$.

حال با استفاده از رابطه‌ی $|G| - |Z(G)| = |H| - |Z(H)|$ داریم $|G| = |H|$. پس در همه‌ی حالت‌هایی که $|C_G(g)|$ و $|C_H(h)|$ عددی اول هستند، $|G| = |H|$.

حالت ۲: $|G| = pqr + p$ و $|H| = pqr + pq$.

در این حالت $|C_G(g)| = p$ و $|C_H(h)| = pq$ و بنابراین $|Z(G)| = ۱$

و ۱ یا $|Z(H)| = p, q$. حال بنا به رابطه‌ی $|G| - |Z(G)| = |H| - |Z(H)|$ داریم

$pqr + p - ۱ = pqr + pq - |Z(H)|$، از این‌رو $|Z(H)| = pq - p + ۱ = p(q - ۱) + ۱$.

اگر $|Z(H)| = p$، آنگاه $p = p(q - ۱) + ۱$ که یک تناقض است. اگر $|Z(H)| = q$، آنگاه داریم $q = p(q - ۱) + ۱$. بنابراین $p(q - ۱) = q - ۱$ در نتیجه $p = ۱$ که یک تناقض است. بنابراین $|Z(H)| = ۱$ و لذا $|Z(G)| = ۱ = |Z(H)|$، در نتیجه $|G| = |H|$.

حالت ۳: $|G| = pqr + p$ و $|H| = pqr + qr$.

در این حالت $|C_G(g)| = p$ و $|C_H(h)| = qr$ و همچنین $|Z(G)| = ۱$، حال با استفاده از رابطه‌ی $|G| - |Z(G)| = |H| - |Z(H)|$ داریم $p - ۱ = qr - |Z(H)|$، در نتیجه ۱ یا $|Z(H)| = p, q$.

اگر $|Z(H)| = q$، آنگاه $p - ۱ = qr - q = q(r - ۱)$ که با فرض $p < q$ تناقض دارد. اگر $|Z(H)| = r$، آنگاه $p = r(q - ۱) + ۱$ که با فرض $p < r$ تناقض دارد. بنابراین $|Z(H)| = ۱$ و $|G| = |H|$.

حالت ۴: $|G| = pqr + q$ و $|H| = pqr + pr$.

در این حالت $|C_G(g)| = q$ و $|C_H(h)| = pr$ و همچنین $|Z(G)| = ۱$. در نتیجه

۱ یا $|Z(H)| = p, r$. اگر $|Z(H)| = p$، آنگاه $q - ۱ = pr - p = p(r - ۱)$ که با فرض $q < r$ تناقض دارد. اگر $|Z(H)| = r$، آنگاه $q - ۱ = pr - r = r(p - ۱)$ که با فرض $q < r$ تناقض دارد. بنابراین $|Z(H)| = ۱$ و $|G| = |H|$.

حالت ۵: $|G| = pqr + r$ و $|H| = pqr + pq$.

در این حالت $|C_G(g)| = r$ و $|C_H(h)| = pq$ و همچنین $|Z(G)| = ۱$.

در نتیجه ۱ یا $|Z(H)| = p, q$. اگر $|Z(H)| = p$، آن‌گاه $r - ۱ = pq - p = p(q - ۱)$، در نتیجه $p|r - ۱$ که این یک تناقض است. اگر $|Z(H)| = q$، آن‌گاه $r - ۱ = pq - q = q(p - ۱)$، لذا $q|r - ۱$ که این یک تناقض است. بنابراین $|Z(H)| = ۱$ و در نتیجه $|G| = |H|$.

حالت ۶: $|G| = pqr + p$ و $|H| = pqr + pqr$.

در این حالت $|C_G(g)| = p$، $|C_H(h)| = pqr$ و $|Z(G)| = ۱$. با استفاده از رابطه‌ی $|G| - |Z(G)| = |H| - |Z(H)|$، داریم $|Z(H)| = pqr - (p - ۱)$. بنا به لم ۳.۳.۳ می‌دانیم $|Z(H)|||C_G(g) - |Z(G)|$، از این‌رو $pqr - (p - ۱)|p - ۱$ و این یک تناقض است زیرا $pqr - (p - ۱) > p - ۱$.

حالت‌های $|G| = pqr + q$، $|H| = pqr + pqr$ و $|G| = pqr + r$، $|H| = pqr + pqr$ مشابه حالت۶ هستند.

حالت ۷: $|G| = pqr + pq$ و $|H| = pqr + pqr$. در این حالت $|C_G(g)| = pq$ و $|C_H(h)| = pqr$. در نتیجه ۱ یا $|Z(G)| = p, q$. اگر $|Z(G)| = p$، آن‌گاه از رابطه‌ی $|G| - |Z(G)| = |H| - |Z(H)|$ ، داریم $|Z(H)| = pqr - pq + p$. از طرفی می‌دانیم $|Z(H)|||C_G(g) - |Z(G)|$، لذا $|Z(H)||p - ۱$، بنابراین $p(qr - q + ۱)|p - ۱$ و این یک تناقض است. اگر $|Z(G)| = q$ با استدلالی مشابه به تناقض می‌رسیم. بنابراین $|Z(G)| = ۱$ و $|Z(H)| = pqr - pq + ۱ =$ $pq(r - ۱) + ۱$. اما از رابطه‌ی $|Z(H)|||C_G(g)| - |Z(G)|$، داریم $pq(r - ۱) + ۱|pq - ۱$، که با نامساوی $pq(r - ۱) + ۱ > pq - ۱$ تناقض دارد. پس این حالت غیرممکن است.

بنابراین در همه‌ی حالت‌ها داریم $|G| = |H|$ و برهان کامل می‌شود.

□

گزاره ۵.۳.۳. فرض کنیم G یک گروه ناآبلی متناهی باشد و $g \in G - Z(G)$ در گراف ناجابه‌جایی G با درجه‌ی $p^n q$ وجود داشته باشد که p و q اعداد اول متمایزند و $p > q$. اگر H یک گروه باشد که $\Gamma_G \cong \Gamma_H$، آن‌گاه $|G| = |H|$.

برهان. داریم $d(g) = p^n q = |G| - |C_G(g)| = |C_G(g)|(|\frac{G}{C_G(g)}| - ۱)$. بنابراین $p^{n'} q$ یا $|C_G(g)| = p^{n''}, q$، که n' و n'' اعداد صحیح نامنفی هستند و $n' \leqslant n$ و $n'' \leqslant n$. از این‌رو $p^n q + p^{n'} q$ یا $|G| = p^n q + p^{n''}, p^n q + q$. اگر $h \in H - Z(H)$ عنصر متناظر با g در Γ_H تحت یکریختی $\Gamma_G \cong \Gamma_H$ باشد، آن‌گاه h نیز از درجه‌ی $p^n q$ می‌باشد و نتیجه می‌گیریم که $p^n q + p^{m'} q$ یا $|H| = p^n q + p^{m''}, p^n q + q$ که m' و m'' اعدادصحیح نامنفی هستند و $m' \leqslant m$ و $m'' \leqslant m$. حالت‌های مختلف زیر را در نظر می‌گیریم

حالت ۱: $n'' \leqslant n$ ، $|G| = p^n q + p^{n''}$ و $|H| = p^n q + q$

در این حالت داریم $|C_H(h)| = q$ و $|C_G(g)| = p^{n''}$. بنابراین $|Z(G)| = p^{n_۱}$ که $n_۱ \leqslant n''$ و $|Z(H)| = ۱$. از رابطه‌ی $|G| - |Z(G)| = |H| - |Z(H)|$ داریم $= p^n q + p^{n''} - p^{n_۱}$

p^nq+q-1 بنابراین $p^{n''}-p^{n_1}=q-1$ و $p^{n_1}(p^{n''-n_1}-1)=q-1$، اما $p<q$ و لذا $n_1=0$ باشد. پس $p^{n''}-1=q-1$ در نتیجه $p^{n''}=q$ که یک تناقض است، پس این حالت غیرممکن است.

حالت ۲: $n''\leqslant n$، $m''\leqslant n$، $|G|=p^nq+p^{n''}$ و $|H|=p^nq+p^{m''}$

در این حالت داریم $|C_H(h)|=p^{m''}$ و $|C_G(g)|=p^{n''}$ حال از $|Z(G)|\big||C_G(g)|$ به‌دست می‌آوریم $|Z(G)|=p^{n_1}$ که $n_1\leqslant n''$ و از رابطه‌ی $|G|-|Z(G)|=|H|-|Z(H)|$ داریم

$p^nq+p^{n''}-p^{n_1}=p^nq+p^{m''}-|Z(H)|$، بنابراین $|Z(H)|=p^{m''}+p^{n_1}-p^{n''}$ که $p^{m''}>p^{n_1}$ (اگر $p^{m''}<p^{n_1}$، آن‌گاه $p^{m''}+p^{n_1}<2p^{n_1}$ و بنابراین

$0\leqslant |Z(H)|=p^{m''}+p^{n_1}-p^{n''}\leqslant 2p^{n_1}-p^{n''}$ که یک تناقض است.) پس

$|Z(H)|=p^{n_1}(p^{m''-n_1}-p^{n''-n_1}+1)$ و $n''-n_1\neq 0$ و $m''-n_1\neq 0$. از طرفی می‌دانیم $Z(H)\leqslant C_H(h)$، بنابراین $|Z(H)|=p^{m_2}$ که $m_2\leqslant m''$. لذا

$p^{m_2}=p^{n_1}(p^{m''-n_1}-p^{n''-n_1}+1)$، از این‌رو $p^{m''-n_1}-p^{n''-n_1}+1=pk+1$ که k یک عدد صحیح نامنفی است. اما $gcd(pk+1,p)=1$ و از رابطه‌ی $p^{m_2}=p^{n_1}(p^{m''-n_1}-p^{n''-n_1}+1)$ داریم $pk=p^{m''-n_1}-p^{n''-n_1}=0$، پس $m''=n''$ و $|G|=|H|$.

حالت ۳: $m'\leqslant n$، $|G|=p^nq+q$ و $|H|=p^nq+p^{m'}q$

در این حالت داریم $|C_H(h)|=p^{m'}q$ و $|C_G(g)|=q$. بنابراین $|Z(G)|=1$، حال با استفاده از لم۳.۳.۳ داریم $|Z(H)|\big|q-1$. بنابراین $gcd(|Z(H)|,q)=1$ و از $|C_H(h)|=p^{m'}q$ داریم $|Z(H)|=p^{m_1}$ که $m_1\leqslant m'$. از رابطه‌ی $|G|-|Z(G)|=|H|-|Z(H)|$، داریم

$q-1=p^{m'}q-p^{m_1}$. بنابراین $p^{m_1}(p^{m'-m_1}q-1)=q-1$. از این تساوی داریم $m_1=0$ و $m'-m_1=0$. بنابراین $|Z(H)|=1$ و لذا $|Z(G)|=|Z(H)|=1$ پس $|G|=|H|$.

حالت ۴: $m'\leqslant n$، $n''\leqslant n$، $|G|=p^nq+p^{n''}$ و $|H|=p^nq+p^{m'}q$

در این حالت داریم $|C_H(h)|=p^{m'}q$ و $|C_G(g)|=p^{n''}$. بنابراین $|Z(G)|=p^{n_1}$ که $n_1<n''$. با استفاده از رابطه‌ی $|G|-|Z(G)|=|H|-|Z(H)|$ داریم $p^{n''}-p^{n_1}=p^{m'}q-|Z(H)|$. از این‌رو $|Z(H)|=p^{m'}q+p^{n_1}-p^{n''}$. حال با استفاده از لم۳.۳.۳ داریم $|Z(H)|\big|p^{n''}-p^{n_1}$ و بنابراین $|Z(H)|\big|p^{n_1}(p^{n''_1}-1)$. اما $|Z(H)|\big||C_H(h)|$ و بنابراین p^s یا $|Z(H)|=p^{s'}q$ که $s'<m'$ و $s\leqslant m'$. حال با استفاده از $|Z(G)|\big||C_H(h)|-|Z(H)|$ داریم

$p^{n_1}\big|p^s(p^{m'-s}q-1)$ یا $p^{n_1}\big|p^{s'}q(p^{m'-s'}-1)$. بنابراین از $gcd(p^{m'-s'}q-1,p)=1$ و $p>q$ داریم $p^{n_1}\big|p^{s'}$ یا $p^{n_1}\big|p^s$. بنابراین $n_1\leqslant s$ یا $n_1\leqslant s'$. از رابطه‌ی $|Z(H)|\big||C_G(g)|-|Z(G)|$ داریم $p^s\big|p^{n_1}(p^{n''-n_1}-1)$ یا $p^{s'}\big|p^{n'-n_1}-1$. بنابراین $s\leqslant n_1$ یا $s'\leqslant n_1$ از این‌رو $n_1=s$ یا $n_1=s'$ و لذا p^{n_1} یا $|Z(H)|=p^{n_1}q$. اگر $|Z(H)|=p^{n_1}$ آن‌گاه

$p^{m'}q+p^{n_1}-p^{n''}=p^{n_1}$ و بنابراین $p^{m'}q=p^{n''}$ که یک تناقض است. اگر $|Z(H)|=p^{n_1}q$ آن‌گاه $p^{m'}q+p^{n_1}-p^{n''}=p^{n_1}q$ و بنابراین $p^{n_1}(p^{m'-n_1}q-q)=p^{n_1}(p^{n''-n_1}-1)$ که نتیجه می‌دهد $p^{m'-n_1}q-q=p^{n''-n_1}-1$ و از این‌رو $q=\dfrac{p^{n''-n_1}-1}{p^{m'-n_1}-1}$. حال با استفاده از $\dfrac{p^{n''-n_1}-1}{p^{m'-n_1}-1}\leqslant p$ و $1<q=\dfrac{p^{n''-n_1}-1}{p^{m'-n_1}-1}$ بدست خواهیم آورد $p\leqslant q$ که غیرممکن است. پس این حالت نیز غیرممکن است.

حالت ۵: $n'\leqslant n$، $m'\leqslant n$، $|G|=p^nq+p^{n'}q$ و $|H|=p^nq+p^{m'}q$

در این حالت داریم $|C_H(h)|=p^{m'}q$ و $|C_G(g)|=p^{n'}q$. بنابراین p^{n_2} یا $|Z(G)|=p^{n_1}q$ که $n_1\leqslant n'$ و $n_2\leqslant n'$. اگر $|Z(G)|=p^{n_1}q$، آن‌گاه

$|Z(H)|=p^{m'}q+p^{n_1}q-p^{n'}q=qp^{n_1}(p^{m'-n_1}-p^{n'-n_1}+1)$. اگر $m'\leqslant n_1$، آن‌گاه $|Z(H)|=(p^{m_1}+p^{n_1}-p^{n'})q<(2p^{n_1}-p^{n'})q\leqslant 0$ که یک تناقض است، پس $m'>n_1$. بنابراین $|Z(H)|=qp^{n_1}(p^{m'-n_1}-p^{n'-n_1}+1)$ که $n'-n_1>0\,,m'-n_1>0$. حال $p^{m'-n_1}-p^{n'-n_1}+1=pk+1$ که k یک عدد صحیح نامنفی است. اگر $k=0$ آن‌گاه $p^{m'-n_1}-p^{n'-n_1}=0$ و درنتیجه $m'=n'$ و $|G|=|H|$.

اگر $k>0$، آن‌گاه از $|Z(H)|||C_H(h)|$ داریم $qp^{n_1}(pk+1)|qp^{m'}$ و بنابراین

$pk+1|p^{m'-n_1}$ که این با $gcd(p,pk+1)=1$ در تناقض است. اگر $|Z(G)|=p^{n_2}$ که $n_2\leqslant n$، آن‌گاه $|Z(H)|=p^{m'}q+p^{n_2}-p^{n'}q$ که با توجه به استدلال بالا داریم $m_1<m'$ و $m_2\leqslant m'$. حال q ، $|Z(H)|$ را نمی‌شمارد و بنابراین $|Z(H)|=p^{m_2}$ که $m_2\leqslant m'$. از حالت‌های مختلف برای مرتبه‌ی $Z(H)$ داریم

$$p^{m_2}=p^{m'}q+p^{n_2}-p^{n'}q=p^{n_2}(p^{m'-n_2}q-p^{n'-n_2}q+1)=p^{n_2}(qpk+1)$$

که k یک عدد صحیح نامنفی است. اگر $k=0$، آن‌گاه $m'-n_2=n'-n_2$ و بنابراین $m'=n'$ که در نتیجه داریم $|G|=|H|$. اگر $k>0$، آن‌گاه $p^{m_2}=p^{n_2}(qpk+1)$ که با $gcd(qpk+1,p)=1$ در تناقض است و این حالت نمی‌تواند اتفاق بیفتد.

□

لم ۶.۳.۳. مرتبه‌های مرکزسازهای عناصر $PSL_3(q)$ و $PSU_3(q^2)$ یکی از عددهای زیر می‌باشد $q^3r'rst, q^2r', q^2, qr'rs, qr', r^2, r'r, r's, t'$ به‌طوری‌که $r=q-\delta$، $s=q+\delta$، $t=q^2+\delta q+1$، $r'=\frac{r}{d}$، $t'=\frac{t}{d}$ و $d=(3,r)$ که برای $PSL_3(q)$، $\delta=1$ و برای $PSU_3(q^2)$، $\delta=-1$ می‌باشد.

برهان. به بخش ۷ از [۱۴] مراجعه شود. □

گزاره ۷.۳.۳. فرض کنیم $G=PSL_3(q)$. اگر H یک گروه باشد که $\Gamma_G\cong\Gamma_H$، آن‌گاه $|G|=|H|$.

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم $3|q-1$، آن‌گاه با استفاده از لم ۶.۳.۳ عناصر $x,y,z\in G$ وجود دارند به‌طوری‌که $|C_G(y)|=\frac{1}{3}(q^2+q+1)$ و $|C_G(x)|=(q-1)^2$ و $|C_G(z)|=q^2$. چون G یک گروه

ساده است، داریم $Z(G)=1$. فرض کنیم $\phi:\Gamma_H \longrightarrow \Gamma_G$ ایزومورفیسم داده شده از گراف‌ها باشد.
برای هر $h\in H-Z(H)$، $|C_H(h)|$ بر $|Z(H)|$ بخش‌پذیر است و داریم

$$|C_H(h)|-|Z(H)|=|C_H(\phi(h))|-|Z(G)|$$

بنابراین برای هر $\alpha\in G-Z(G)$، داریم $|Z(H)|\big||C_G(\alpha)|-|Z(G)|=|C_G(\alpha)|-1$.
با توجه به روابط بالا $|C_G(x)|-1=q^2-2q$، $\frac{1}{3}(q^2+q-2)$ = $|C_G(y)|-1$ و
$|C_G(z)|-1=q^2-1$ بر $|Z(H)|$ بخش‌پذیرند. بنابراین $|Z(H)|=1$ و در نتیجه $|G|=|H|$
.

حال فرض کنیم $3\nmid q-1$، در این حالت با استفاده از لم ۶.۳.۳ عناصر $x,y\in G$ وجود دارند که $|C_G(x)|=q^2$ و $|C_G(y)|=q^2-1$ و چون $|Z(H)|$ باید $|C_G(x)|-1$ و $|C_G(y)|-1$ را بشمارد، لذا نتیجه می‌گیریم $|Z(H)|=1$ و از اینرو $|G|=|H|$.

$\square$

گزاره ۸.۳.۳. فرض کنیم $G=PSU_3(q^2)$. اگر H یک گروه باشد که $\Gamma_G\cong\Gamma_H$ ، آنگاه $|G|=|H|$
.

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم $3|q+1$. با استفاده از ۶.۳.۳ عناصر $x,y,z,t\in G$ وجود دارند به‌طوری‌که $|C_G(y)|=\frac{1}{3}(q^2+q)$، $|C_G(x)|=\frac{1}{3}(q^2+q+1)$ و $|C_G(z)|=q^2$ و $|C_G(t)|=(q+1)^2$.
چون برای هر $\alpha\in G-1$، $|Z(H)|\big||C_G(\alpha)|-1$ بنابراین داریم
$|Z(H)|\big|gcd(q^2-q-2,\ q^2+q-\ q^2-1,\ q^2-2q)$. لذا $|Z(H)|=1$ و در نتیجه $|G|=|H|$.
حال فرض کنیم $3\nmid q+1$، در این حالت با استفاده از لم ۶.۳.۳ عناصر $x,y\in G$ وجود دارند که $|C_G(x)|=q^2-1$ و $|C_G(y)|-1=q^2$.
در این حالت $|Z(H)|\big|gcd(q^2-2,\ q^2-1)=1$ که در نتیجه $|Z(H)|=1$ و از اینرو $|G|=|H|$. $\square$

لم ۹.۳.۳. فرض کنیم G و H گروه‌های متناهی و با مرکز بدیهی باشند. اگر $\Gamma_G\cong\Gamma_H$، آنگاه $k(G)=k(H)$.

برهان. طبق فرض داریم $|Z(H)|=|Z(G)|=1$ پس $|G|=|H|$.
از $|E(\Gamma_G)|=\frac{1}{2}|G|(|G|-k(G))=|E(\Gamma_H)|=\frac{1}{2}|G|(|H|-k(H))$ نتیجه می‌گیریم که $k(G)=k(H)$. $\square$

قضیه ۱۰.۳.۳. اگر G یک گروه و n عددی صحیح بزرگتر از ۲ باشد، آنگاه

(۱) اگر $\Gamma_G\cong\Gamma_{S_n}$، آنگاه $|G|=|S_n|$.

(۲) اگر $n>3$ و $\Gamma_G\cong\Gamma_{A_n}$، آنگاه $|G|=|A_n|$.

برهان. (۱) فرض کنیم a و b به ترتیب دورهای $(n \cdots ۲ ۱)$ و $(n-۱ \cdots ۲ ۱)$ باشند. در این صورت $C_{S_n}(a) = \langle a \rangle$ و $C_{S_n}(b) = \langle b \rangle$. حال بنا به لم ۳.۳.۳، G گروهی متناهی است و $|Z(G)|$، $n-(n-۱) = ۱$ را می‌شمارد. لذا $|Z(G)| = ۱$ و بنابراین $|G| = |S_n|$.

(۲) ابتدا فرض می‌کنیم n فرد باشد. در این صورت $a \in A_n$ و $C_{A_n}(a) \cong \langle a \rangle$. بنا به لم ۳.۳.۳، G گروهی متناهی است و $|Z(G)|$، $gcd(n-۱, \frac{n!}{۲}-۱) = ۱$ را می‌شمارد. از این رو $Z(G) = ۱$، پس در این حالت $|G| = |A_n|$.

حال فرض می‌کنیم n زوج باشد. در این صورت $b \in A_n$ و $C_{A_n}(b) \cong \langle b \rangle$ بنابر لم ۶.۳.۳، $|Z(G)|$، $gcd(n-۱, \dfrac{n!}{۲}-۱) = ۱$ را می‌شمارد. بنابراین $|Z(G)| = ۱$ و $|G| = |A_n|$.

□

لم ۱۱.۳.۳. فرض کنیم G یک گروه باشد و $H \leqslant G$. در این صورت $H \trianglelefteq G$ اگر و تنها اگر H اجتماعی از رده‌های تزویج G باشد.

برهان. فرض کنیم H اجتماعی از رده‌های تزویج G باشد، $h \in H$ و $g \in G$. داریم $g^{-۱}hg \in H$ پس $H \trianglelefteq G$. برعکس اگر $H \trianglelefteq G$ ، آنگاه به ازای هر h از H و هر g از G داریم $g^{-۱}hg \in H$ بنابراین $cl_G(h) \subseteq H$. در نتیجه $H = \bigcup_{h\in H} cl_G(h)$ و این یعنی H اجتماعی از رده‌های تزویج G است. □

گزاره ۱۲.۳.۳. اگر G گروهی متناهی باشد به‌طوری‌که $\Gamma_{A_۵} \cong \Gamma_G$، آنگاه $G \cong A_۵$.

برهان. فرض کنیم G گروهی متناهی باشد به‌طوری‌که $\Gamma_{A_۵} \cong \Gamma_G$، بنا به لم ۱۰.۳.۳، $|G| = |A_۵|$ و بنابراین $Z(G) = ۱$. بنا به لم ۹.۳.۳ داریم $k(G) = k(A_۵)$.

می‌دانیم $A_۵$، ۵ رده تزویج دارد که نماینده‌ی آن‌ها به صورت $x_۱ = ۱$، $x_۲$، $x_۳$، $x_۴$ و $x_۵$ به ترتیب با مرتبه‌های مرکز سازهای ۶۰، ۴، ۳، ۵ و ۵ هستند.

چون $\Gamma_G \cong \Gamma_{A_۵}$، از این رو برای هر $x_i \neq ۱$، $g_i \in G$ وجود دارد به‌طوری‌که $d(x_i) = d(g_i)$. اما $d(x_i) = |A_۵| - |C_{A_۵}(x_i)| = d(g_i) = |G| - |C_G(g_i)|$ که نتیجه می‌دهد $|C_G(g_i)| = |C_{A_۵}(x_i)|$.

بنابراین عناصر $g_۲$، $g_۳$ و $g_۴$ متعلق به G را به دست می‌آوریم به‌طوری‌که $|C_G(g_۲)| = ۴$، $|C_G(g_۳)| = ۳$ و $|C_G(g_۴)| = ۵$. فرض کنیم $g_۱$ عنصر همانی G باشد. با مقایسه‌ی مرتبه‌های مرکزساز نتیجه می‌گیریم هیچ زوجی از عناصر $g_۱$، $g_۲$، $g_۳$ و $g_۴$ در G مزدوج نیستند. از آنجا که $k(G) = k(A_۵) = ۵$ بنابراین دقیقا نماینده‌ی یک رده‌ی تزویج دیگر از وجود دارد که آن را با $g_۵$ نمایش می‌دهیم و $|C_G(g_۵)| = ۵$.

بنابراین G دارای نماینده‌های رده‌های تزویج $g_۱$، $\cdots$ و $g_۵$ با اندازه‌های ۱، ۱۵، ۲۰، ۱۲ و۱۲ می‌باشد.

حال اگر N زیرگروه نرمالی از G باشد، آنگاه N باید یک مجموع از اعداد بالا شامل ۱ به عنوان جمعوند باشد. اما هر محاسبه‌ی ساده نشان می‌دهد که ۶۰ یا $|N| = ۱$. از این‌رو G یک گروه ساده است. اما گروه ساده از مرتبه‌ی ۶۰ باید با $A_۵$ یکریخت باشد، بنابراین $G \cong A_۵$.

□

گزاره ۱۳.۳.۳. اگر $\Gamma_G \cong \Gamma_{A_۶}$، آنگاه $G \cong A_۶$.

برهان. مشابه گزاره ۱۲.۳.۳، به دست می‌آوریم $|A_6| = |G|$ و بنا به لم ۹.۳.۳ داریم $k(G) = k(A_6)$، می‌دانیم A_6، ۷ رده تزویج دارد لذا $k(G) = 7$ می‌باشد. نماینده‌ی رده‌های تزویج A_6 به صورت $x_1 = 1$، x_2، x_3، x_4، x_5، x_6 و x_7 به ترتیب با مرتبه‌های مرکزسازهای ۳۶۰، ۸، ۹، ۹، ۴، ۵ و ۵ هستند. با در نظر گرفتن درجه‌ی رئوس متناظر با x_iها در G، عناصر $g_1 = 1$، g_2، $\cdots$ و g_7 را در G با مرتبه‌های مرکزسازهای ۳۶۰، ۸، ۹، ۹، ۴، ۵ و ۵ داریم. قطعا عناصر g_1، g_2، g_3، g_5 و g_6 در G مزدوج نیستند زیرا مرتبه‌های مرکزسازهای متفاوت دارند. فرض کنیم g و h دو نماینده‌ی دیگر رده‌های تزویج G با مرتبه‌های مرکزساز α و β باشند. از معادله‌ی رده‌ای داریم

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{i=1}^{k}[G : C_G(x_i)] \ : x_i \notin Z(G)$$

$$360 = 1 + 360(\frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta})$$

$$360 = 1 + 247 + 360(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}) \implies 112 = 360(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta})$$

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{14}{45} \implies \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} = \frac{14}{45}$$

با در نظر گرفتن درجه‌های g و h به‌عنوان رئوس گراف Γ_G خواهیم دید که α و β باید یکی از مرتبه‌های مرکزساز در A_6 باشند. بنابراین $\alpha = 9$ و $\beta = 5$. پس G رده‌های تزویجی دارد که اندازه‌هایشان همان اندازه‌های رده‌های تزویج در A_6 هستند. حال با همان استدلال پایانی برهان گزاره‌ی ۱۲.۳.۳ می‌توانیم نشان دهیم G یک گروه ساده است. اما هر گروه ساده از مرتبه‌ی ۳۶۰ با A_6 یکریخت است، بنابراین $G \cong A_6$. □

گزاره ۱۴.۳.۳. فرض کنیم A یک گروه آبلی متناهی و G یک p-گروه متناهی باشد به طوری‌که $\frac{|G|}{|Z(G)|} = p^2$. اگر $\Gamma_{A\times G} \cong \Gamma_H$ برای برخی از گروه‌ها مانند H، آن‌گاه $|A \times G| = |H|$ و $H = Q \times B$ که B یک گروه آبلی و Q یک p-گروه ناآبلی می‌باشد.

برهان. بنا بر لم ۳.۳.۳، H یک گروه متناهی است. اگر $|G| = p^n$، آن‌گاه $|Z(G)| = p^{n-2}$ و مرکز $A \times G$ از مرتبه‌ی $p^{n-2}|A|$ و مرکزساز هر عنصر غیر مرکزی $A \times G$، از مرتبه‌ی $p^{n-1}|A|$ است. در نتیجه $\Gamma_{A\times G}$ یک گراف منتظم است. بنابراین Γ_H گرافی منتظم است و چون برای هر راس دلخواه x، $d(x) = |H| - |C_H(x)|$، پس برای عنصرهای غیرمرکزی $x, y \in H$، داریم $|C_H(x)| = |C_H(y)|$.

در نتیجه رده‌های تزویج H تنها ۲ اندازه دارند. حال با توجه به نتیجه‌ی ۶.۲.۲، داریم H پوچ توان است و با حاصل‌ضرب مستقیم q-زیرگروه ناآبلی Q در گروه آبلی B یکریخت است.

فرض کنیم $|Q| = q^s$، $|Z(Q)| = q^t$، $|B| = b$ و $|A| = a$. برای عنصرهای غیر مرکزی x_1 و x_2 متعلق به Q، داریم $|C_Q(x_1)| = |C_Q(x_2)| = q^r$ و $s > r > t > 0$.

حال با استفاده از فرض $\Gamma_{A\times G} \cong \Gamma_H$، برای عناصر $x \in \Gamma_H$ و $g \in \Gamma_{A\times G}$ داریم

$$|C_{A\times G}(g)| - |Z(A \times G)| = |C_H(x)| - |Z(H)|$$

$$p^{n-1}a - p^{n-2}a = q^r b - q^t b \tag{1.3}$$

و هم‌چنین از $\Gamma_{A\times G} \cong \Gamma_H$ داریم

$$|A\times G| - Z(A\times G)| = |H| - |Z(H)|$$

$$p^n a - p^{n-2} a = q^s b - q^t b = (p^{n-1}a - p^{n-2}a)(p+1)$$

و بنابراین $(q^r b - q^t b)(p+1) = (p+1)(q^r b - q^t b) = q^s b - q^t b$ که نتیجه می‌دهد

$$p(q^r - q^t) = q^s - q^r \qquad (۲.۳)$$

و هم‌چنین $p(q^{r-t}-1) = q^{s-t} - q^{r-t} = q^{r-t}(q^{s-r}-1)$. بنابراین $q^{r-t}|p(q^{r-t}-1)$ و $gcd(q^{r-t}, q^{r-t}-1) = 1$ و هم‌چنین $q^{r-t}|p$، از این‌رو $q = p$ و $r - t = 1$. از تساوی ۲.۳ داریم $p(p^{t+1} - p^t) = p^s - p^{t+1}$، لذا $p^{t+2} = p^s$، پس $s = t+2$. تساوی ۱.۳ نتیجه می‌دهد $p^{n-1}a - p^{n-2}a = p^{t+1}b - p^t b$، بنابراین $p^{n-2}a = p^t b$. حال سه حالت در نظر می‌گیریم.

حالت ۱ . اگر $t = n-2$، آن‌گاه $a = b$ و $|H| = bp^s = ap^{t+2} = ap^n = |A\times G|$.

حالت ۲ . اگر $t < n-2$، آن‌گاه $b = ap^{n-2-t}$ و $|H| = bp^s = bp^{t+2} = ap^{n-2-t}p^{t+2} = ap^n = |A\times G|$.

حالت ۳ . اگر $t > n-2$، آن‌گاه $a = bp^{t-n+2}$ و $|A\times G| = ap^n = bp^{t-n+2}p^n = bp^{t+2} = bp^s = |H|$.

بنابراین همواره $|H| = |A\times G|$ و $q = p$ و هم‌چنین Q یک p-گروه ناآبلی است و این برهان را کامل می‌کند. □

۴.۳ عدد رنگی گراف ناجابه‌جایی

فرض کنیم $\Gamma = (V, E)$ یک گراف ساده باشد. زیر مجموعه‌ی X از V مجموعه‌ی مستقل نامیده می‌شود، هرگاه زیر گراف شامل X، گراف تهی باشد. فرض کنیم k عدد طبیعی باشد، در اینصورت یک رنگ آمیزی k-راسی از Γ، یک تخصیص k-رنگ به رئوس Γ است؛ به طوری‌که هیچ دو راس مجاوری هم رنگ نباشند.

عدد رنگی گراف Γ، کوچکترین عدد طبیعی k است که Γ یک رنگ آمیزی k-راسی داشته باشد. این عدد را با $\chi(\Gamma)$ نمایش می‌دهیم.

لم ۱.۴.۳. فرض کنیم G یک گروه ناآبلی متناهی باشد و $N \trianglelefteq G$، در این‌صورت $\chi(\Gamma_{\frac{G}{N}}) \leqslant \chi(\Gamma_G)$.

برهان. بنا به [۱]، $\chi(\Gamma)$ با کمترین تعداد زیرگروه‌های آبلی G که G را می‌پوشانند، مساوی است. بنابراین اگر $\chi(\Gamma_G) = n$، آن‌گاه $G = \cup_{i=1}^{n} H_i$ که H_i زیرگروه آبلی G است و G نمی‌تواند با کمتر از n زیرگروه آبلی G پوشانده شود.

چون N یک زیرگروه نرمال G است، از این رو $\frac{G}{N} = \cup_{i=1}^{n} \frac{NH_i}{N}$. اما $\frac{NH_i}{N} \cong \frac{H_i}{N\cap H_i}$ آبلی است لذا $\chi(\Gamma_{\frac{G}{N}}) \leqslant n = \chi(\Gamma_G)$.

□

گزاره ۲.۴.۳. فرض کنیم G گروه متناهی ناآبلی و Γ_G یک گراف منتظم باشد. آن‌گاه G پوچ‌توان از رده حداکثر ۳ می‌باشد و $G = P \times A$ که A یک گروه آبلی و P یک p-گروه است و به‌علاوه Γ_p یک گراف منتظم است.

برهان. چون برای هر راس مانند x داریم $d(x) = |G| - |C_G(x)|$ و برای هر دو عنصر غیرمرکزی x و y داریم $|C_G(x)| = |C_G(y)|$، لذا رده‌های تزویج در G تنها دو اندازه دارند. بنا به ۶.۲.۲، G پوچ‌توان است و حاصل‌ضرب مستقیم یک p-زیرگروه ناآبلی P در یک زیرگروه آبلی A می‌باشد، که p عدد اول است و Γ_p منتظم است. حال از [۷]، داریم رده‌ی پوچ‌توانی G حداکثر ۳ است. $\square$

مراجع

[1] Abdollahi,A., Akbari,S., and Maimani,H.R. , Non-commuting graph of a group, J. Algebra, 298 (2006), 468-492.

[2] Bondy, J.A. and Murty, J.S.R., Graph Theory with applications, American Elsevier Publishing Co., Inc., 1977.

[3] Burnside,W., Theory of groupds, Cambridge (1911).

[4] Conway, J.H., Curtis, R.T., Norton, S.P., Parker, R.A. and Wil- son, R.A., Atlas of finite groups, Clarendon Press, Oxford, 1985.

[5] Darafsheh,M.R., Bigdely, H. , Bahrami,A., Some results on non-commuting graph of a finite group, italian journal of pure and applied mathematics -N, 27-2010 (107-118).

[6] Gustafson, W.H., What is the probability that two group elements commute?, Amer. Math. Monthly, 80 (1973), 1031-1034.

[7] Hall,P., Contribution to the theory of groups of prime-power order, Proc. London Math. Soc., II. s. 36. 29-95 (1933).

[8] Huppert, B., Endliche Gruppen I, Springer-Verlag, Berlin, 1967.

[9] Ishikawa,K. , On finite p-groups which have only two conjugacy lengths, Israel J . Math. 129 (2002) 119-123.

[10] Ito, N., On finite groups with given conjugacy types, I, Nagoya Math. J., 6 (1953) 17-28.

[11] Ito, N., On finite groups with given conjugacy types, II, Nagoya Math., J, 7 (1970) 231-251.

[12] Neuman, B.H., A problem of Paul Erdös on groups, J. Austral. Math. Soc., Ser. A 21(1976), 467-472.

[13] Rose, J.S., A course on group theory, Dover Publications, Inc., New York, 1978.

[14] Simpson, W.A. and Frame, J.S., The character tables for SL(3; q); SU(3; q2), PSL(3; q); PSU(3; q2), Canad. J. Math., vol. XXV, no.3, 1973, 486-494.

[15] Scott,W. , Group Theory, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. 1964.

[۱۶] درفشه، محمدرضا،مقدمه‌ای بر نظریه‌ی گروه‌ها، انتشارات دانشگاه تهران،۱۳۸۸.

[۱۷] جمالی، علی‌رضا،مباحثی در نظریه‌ی گروه‌ها، انتشارات مبتکران،۱۳۸۰.

[۱۸] گوردن جیمز ، مارتین لیبک، ترجمه محمدرضا درفشه،نمایش و سرشت گروه، مرکز نشر دانشگاهی،۱۳۸۱.

Aabstract

Let G be a finite non-abelian group. We define a graph Γ_G, called the non-commuting graph of G, with vertex set $G - Z(G)$ such that two vertices x and y are adjacent if and only if $xy \neq yx$. In this disseration ,in the first chapter we express preliminary of group theory and graph theory. The second chapter is retrieved from [10], that is dedicated to conjugate types of groups and fundemental subgroups. The third chapter is about some results on the number of edges of Γ_G and also its chromatic number are obtained in general. For some special group G we will prove that if H is a group such that $\Gamma_G \cong \Gamma_H$, then$|G| = |H|$ and in some cases $G \cong H$ that this chapter is retrieved from [5].

University of Shahrood
Faculty Of Mathematical Sciences

Dissertation Submitted in Partial
Fulfillment of The Requirements For The
Degree of Master of Science in
Pure Mathematics

SOME RESULTS ON NON-COMMUTING GRAPH OF A FINITE GROUP

Supervisor
Sayyed Heidar Jafari
Advisor
Sayyed Reza Mousavi

by
Zohre Shamsabadi

2014/2/5