دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی کاربردی، گرایش گراف و ترکیبیات

عنوان

مجموع رنگی گراف‌ها

استادان راهنما

دکتر صادق رحیمی شعرباف

دکتر میثم علیشاهی

پژوهشگر

محمود تردستی

بهمن‌ماه ۱۳۹۲

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم که صبورانه فرصت بالندگی

را برایم فراهم نمودند و با هر ضربان قلبشان

چگونه زیستن را به من آموختند.

خدایا...

هنگامی که دستانم را به سوی تو بلند می کنم، تمام ذرّه ذرّه ی وجودم اجابت را از تو تمنّا می کنند. می دانم که نافرمانی هایم دلت را به درد آورده و سیاهکاری هایم دلی را که جایگاه تو بود، ویران کرده، اما عظمت تو افزون تر از آن است که مرا از درگاهت برانی و در دنیای جهل و نادانی خویش تنهایم بگذاری، پس مرا دریاب و گل بوته های باغ امید را در جانم زنده نگه دار و بی قراری و شیدایی دل مرا همراهی باش و مگذار پیمانی را که در طوفان سختی ها با تو بستم، در آرامش فراموش کنم.

سپاس گزاری...

سپاس خداوند حکیم را که با لطف بی کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در ابتدا وظیفه خود می دانم که از زحمات بی دریغ و بی شائبه ی اساتید راهنمای خود، دکتر صادق رحیمی شعرباف و به ویژه دکتر میثم علیشاهی که زحمت اصلی هدایت بنده را در این پایان نامه بر عهده داشتند، صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم، چرا که به طور یقین اگر نمی بود راهنمایی های ارزنده ی این بزرگواران، این مجموعه به پایان نمی رسید.

از دوستان خوب و ارجمندم، آقایان خلیل عرفانی حیدرنیا و محمد مهدی نعمت الهی و همچنین عزیزانی که نام و یاد آنها همواره در قلب و روحم، به یادگار بر جای خواهد ماند و هیچ گاه الطاف آنها را مخصوصاً در زمان تهیه و تنظیم پایان نامه، فراموش نخواهم کرد، کمال امتنان را دارم و از خداوند منّان، سلامتی و سربلندی این عزیزان را خواستارم.

در پایان بوسه می زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا ستایش می کنم وجود مقدّس شان را، و تشکر می کنم از برادر و خواهران عزیزم، به پاس عاطفه ی سرشار و گرمای امید بخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبانان من بودند.

محمود تردستی
بهمن ماه ۱۳۹۲

دانشگاه صنعتی شاهرود

مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (6)

باسمه تعالی

شماره:

تاریخ:

ویرایش:

فرم صورت جلسه دفاع از پایان نامه تحصیلی دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) نتیجه ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد آقای **محمود تردستی** رشته **ریاضی کاربردی** گرایش **گراف و ترکیبیات** تحت عنوان **مجموع رنگی گراف‌ها** که در تاریخ ۹۲/۱۱/۲۷ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

قبول (با درجه : بسیار خوب امتیاز ۱۸/۷۵) ☑ دفاع مجدد ☐ مردود ☐

1ـ عالی (20 ـ 19) 2ـ بسیار خوب (18/99 ـ 18)

3ـ خوب (16ـ 17/99) 4ـ قابل قبول (15/99 ـ 14)

5- نمره کمتر از 14 غیر قابل قبول

عضو هیأت داوران	نام ونام خانوادگی	مرتبهٔ علمی	امضاء
1ـ استادراهنما	دکتر صادق رحیمی شعرباف	استادیار	
2ـ استادراهنما	دکتر میثم علیشاهی	استادیار	
3ـ نماینده شورای تحصیلات تکمیلی	دکتر حسین باغیشنی	استادیار	
4ـ استاد ممتحن	دکتر نادر جعفری راد	دانشیار	
5 ـ استاد ممتحن	دکتر جعفر قتحعلی	دانشیار	

رئیس دانشکده: دکتر احمد زیره امضاء

ریاضی

تعهدنامه

اینجانب **محمود تردستی** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی کاربردی** **دانشکده علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **مجموع رنگی گراف‌ها** ، تحت راهنمایی **دکتر صادق رحیمی شعرباف** و **دکتر میثم علیشاهی** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام " دانشگاه شاهرود " یا " Shahrood University " به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

محمود تردستی
بهمن ماه ۱۳۹۲

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

برای گراف G، تابع $c : V(G) \longrightarrow \aleph$ را یک رنگ‌آمیزی مجاز گوییم هرگاه برای هر $uv \in E(G)$ داشته باشیم $c(u) \neq c(v)$.

مجموع رنگی متناظر با رنگ‌آمیزی c را برابر با $\Sigma_{u\in V(G)}c(u)$ تعریف می‌کنیم و مجموع رنگی G، $\Sigma(G)$، را کمترین مقدار ممکن برای مجموع رنگی، در میان همه‌ی رنگ‌آمیزی‌های مجاز G قرار می‌دهیم. همچنین کمترین تعداد رنگی که برای آن، می‌توان یک رنگ‌آمیزی، با مجموع رنگ یکسان با مجموع رنگی گراف G پیدا کرد را قدرت رأسی G، $s(G)$، می‌نامیم.

در این پایان‌نامه، در فصل اوّل با مرور بر تحقیقات گذشته، با روند ایجاد مسأله‌ی مجموع رنگی و بسط و گسترش این مفهوم آشنا خواهیم شد و گستره‌ی آن را در علومی نظیر مهندسی و الکترونیک، با بیان کاربردی از مسأله‌ی «مجموع رنگی» که به مسأله‌ی «طراحی $VLSI$» معروف است، نشان خواهیم داد.

همچنین در فصل دوم مروری بر تعاریف اساسی و قضایای کلی مورد استفاده در فصل‌های آینده خواهیم داشت.

مفاهیم رنگ‌آمیزی مینیمال، مجموع رنگی و قدرت رأسی گراف را در فصل سوم بیان، و به بررسی کران‌هایی برای این مفاهیم خواهیم پرداخت.

و در نهایت در فصل چهارم با استفاده از مفهوم همریختی گراف‌ها، به ذکر کران‌هایی برای مجموع رنگی می‌پردازیم و فصل را با بیان دو الگوریتم، جهت محاسبه‌ی تقریبی از مقادیر مجموع رنگی و قدرت رأسی، به پایان خواهیم رساند.

کلمات کلیدی : مجموع رنگی، رنگ‌آمیزی مینیمال، قدرت رأسی

فهرست مطالب

لیست تصاویر

لیست جداول

فصل ۱

مقدمه

۱.۱ پیش گفتار

بدون تردید مبحث رنگ‌آمیزی گراف‌ها، یکی از مهمترین بخش‌های ریاضیات گسسته است.
این مبحث علاوه‌براینکه از لحاظ نظری، نقش مرکزی در ریاضیات گسسته و علوم کامپیوتری دارد، به‌دلیل کاربردهای فراوانش در مسائل علمی، اهمّیتی روزافزون یافته است.
از یک سو کلّیت مسأله‌ای که در این مبحث مورد بررسی قرار می‌گیرد، و از سوی دیگر انعطاف‌پذیری آن برای مدل‌سازی مسائل خاص، باعث شده است که مفهوم «رنگ‌آمیزی[۱]»، به یکی از مفاهیم محوری ریاضیات گسسته تبدیل شود. مسأله‌ی مورد بررسی در این مبحث را در حالت کلی می‌توان به‌صورت زیر توصیف کرد.

مسأله :

«مجموعه‌ای همراه با یک رابطه‌ی تعریف شده روی آن مفروض است. افرازی از اعضای این مجموعه ارائه دهید که اعضای متعلّق به هر بخش افراز، باهم رابطه نداشته باشند.»
این مسأله همراه با شرایط اضافی روی افراز، مانند شرط مینیمم بودن تعداد بخش های افراز، مسائل متنوعی را پدید می‌آورند که در مبحث رنگ‌آمیزی مورد بررسی قرار می‌گیرند.
سعی شده است در این پایان‌نامه، به بررسی یکی از انواع مختلف رنگ‌آمیزی روی گراف، با عنوان «رنگ‌آمیزی مینیمال[۲]» پرداخته شود و با استفاده از آن، مفاهیمی نظیر «مجموع رنگی[۳]» و «قدرت[۴]» گراف شرح داده شود.
از آنجایی‌که رنگ‌آمیزی گراف‌ها علاوه‌بر رأس‌ها روی مجموعه‌ی یال‌ها نیز مطرح می‌شود، لذا لازم به ذکر است که در طول این پایان‌نامه، تمرکز ما فقط بر روی مجموع رنگی رأسی[۵] و قدرت رأسی[۶] گراف‌ها خواهد بود.

---

[۱] Coloring

[۲] Minimal Coloring

[۳] Chromatic Sum

[۴] Strength

[۵] Vertex Chromatic Sum

[۶] Vertex Strength

۲.۱ تاریخچه

نظریه‌ی گراف، شاخه‌ای از ریاضیات است که درباره‌ی گراف‌ها بحث می‌کند. این مبحث در واقع شاخه‌ای از توپولوژی است که با جبر و نظریه‌ی ماتریس‌ها، پیوند مستحکم و تنگاتنگی دارد. نظریه‌ی گراف، برخلاف شاخه‌های دیگر ریاضیات، نقطه‌ی آغاز مشخّصی دارد و آن انتشار مقاله‌ای از «لئونارد اویلر[۷]» ریاضیدان سوئیسی، برای حلّ مسأله‌ی پل‌های کونیگسبرگ، در سال ۱۷۳۶ میلادی است.
پیشرفت‌های اخیر در ریاضیات، به‌ویژه کاربردهای آن، موجب گسترش چشم‌گیر نظریه‌ی گراف شده است به‌گونه‌ای که هم‌اکنون نظریه‌ی گراف، ابزار بسیار مناسبی برای تحقیق در زمینه‌های گوناگون مانند «نظریه‌ی کدگذاری»، «تحقیق در عملیات»، «طراحی مدارهای الکتریکی»، «علوم مهندسی» و ... گردیده است.
یک مبحث وسیع و غنی از نظریه‌ی گراف که در چند دهه‌ی اخیر بسیار مورد توجّه واقع شده است، مبحث رنگ‌آمیزی گراف است. انواع مختلفی از رنگ‌آمیزی گراف وجود دارد که در این پایان‌نامه، به روشی از رنگ‌آمیزی گراف، که به **رنگ‌آمیزی مینیمال و مسأله‌ی مجموع رنگی** مشهور است، پرداخته می‌شود.
مفهوم مجموع رنگی، برای اوّلین‌بار در رساله‌ی دکتری «کوبیکا[۸]» در سال ۱۹۸۷ میلادی معرفی شد. نتایج مهم ارائه شده در آن رساله، در سال ۱۹۸۹ در مقاله‌ی مشترک «کوبیکا» و «شوئنک[۹]»، تحت عنوان «مقدمه‌ای بر مجموع رنگی»[۱۳] آورده شده است. در این مقاله ثابت شده است که مسأله‌ی محاسبه‌ی مجموع رنگی برای یک گراف دلخواه، NP-سخت[۱۰] است. همچنین آنها در این مقاله نشان دادند که برای هر عدد طبیعی $s \geq ۲$، یک درخت با قدرت رأسی s و تعداد رئوس t_s وجود دارد جایی‌که:

$$t_s = \frac{۱}{\sqrt{۲}}\left((۲+\sqrt{۲})^{s-۱} - (۲-\sqrt{۲})^{s-۱}\right)$$

در سال ۱۹۹۰، «پل اردوس[۱۱]» و «کوبیکا» در مقاله‌ای مشترک [۵] نشان دادند که برای هر عدد صحیح $k \geq ۲$ و هر عدد صحیح و مثبت $t \geq ۱$، یک گراف با عدد رنگی[۱۲] k و «قدرت رأسی» حداقل $k+t$ وجود دارد و به‌این‌صورت نشان دادند که «قدرت رأسی» می‌تواند بسیار بزرگتر از «عدد رنگی» باشد. در همین مقاله، «اردوس» به‌همراه «کوبیکا»، الگوریتمی خطی را برای ساختن درختی با «قدرت رأسی» k ارائه نمودند که ماکسیمم درجه‌ی آن درخت، تقریباً $\frac{k^۲}{۲}$ است.
همچنین در سال ۱۹۹۹، «تائو جیانگ[۱۳]» و «داگلاس بی وست[۱۴]»، در مقاله‌ای مشترک [۱۲] تحت عنوان «رنگ‌آمیزی درخت‌ها با مینیم مجموع رنگ‌ها»، دستورالعمل ساخت درخت T_k، با «قدرت رأسی» k و $k \geq ۲$ را ارائه دادند که در آن، درخت T_k، ماکسیمم درجه‌ی $۲k - ۲$ دارد.

[۷] Leonard Euler
[۸] Kubicka
[۹] Schwenk
[۱۰] Non-deterministic Polynomial-time Hard
[۱۱] Paul Erdos
[۱۲] Chromatic Number
[۱۳] Tao Jiang
[۱۴] Douglas B West

«اردوس» و همکارانش در [۵] نشان دادند که $p(۲,۱) = p(۳,۱) = ۸$ و برای هر عدد صحیح $k \geq ۴$،

$$p(k,۱) = k + ۱ + \left\lfloor \frac{۱ + \sqrt{۸k + ۱}}{۲} \right\rfloor \tag{۱.۱}$$

و از آن نتیجه گرفتند که $\pi(۱) = ۸$، جایی‌که برای هر عدد صحیح $k \geq ۲$ و $t \geq ۱$، $p(k,t)$ کمترین تعداد رأس یک گراف، از بین همه‌ی گراف‌های با عدد رنگی k و قدرت رأسی حداقل $k+t$ می‌باشد و $\pi(t) = \min_k p(k,t)$.

همچنین آنها در همان مقاله نشان دادند که برای هر زوج عدد صیحیح $k \geq ۲$ و $t \geq ۱$:

$$p(k,t) \leq \left(k(k-۱)+۱\right)^{\lfloor \frac{t}{k-۱} - ۱ \rfloor} (kt_{mod(k-۱)} + ۱)k^{۳} \tag{۲.۱}$$

و نتیجه گرفتند که برای هر عدد صحیح و مثبت t :

$$p(۲,t) \leq ۸.۳^{t-۱} \tag{۳.۱}$$

و

$$\pi(t) \leq (t+۱)^{۳} \tag{۴.۱}$$

در سال ۱۹۹۸، «حاجی ابوالحسن[۱۵]»، «مهرآبادی»[۱۶] و «توسرکانی[۱۷]»، در مقاله‌ای مشترک [۱۰] تحت عنوان «گراف‌های جدولی و مجموع رنگی»، به بیان کران‌هایی برای $p(k,t)$ پرداختند و توانستند با استفاده از مفهوم گراف‌های جدولی[۱۸]، مقدار دقیق $p(k,t)$ را به‌دست‌آورند که در زیر به برخی از کران‌های به‌دست‌آمده برای $p(k,t)$ و مقدار دقیق $p(k,t)$ اشاره شده است.

برای هر زوج عدد صحیح $k \geq ۴$ و $t \geq ۱$:

$$p(k,t) \leq \frac{k(k+۳)}{۲} (\frac{k+۱}{k-۱})^{t-۱} - \binom{k}{۲} \tag{۵.۱}$$

و همچنین برای هر عدد صحیح $t \geq ۴$:

$$\pi(t) \leq \frac{e^{۲} - ۱}{۲} t^{۲} + \frac{۳e^{۲} + ۱}{۲} t \tag{۶.۱}$$

جایی‌که e، همان عدد «نپر[۱۹]» می‌باشد. با فرض $k \geq ۲$ و $t \geq ۱$، «حاجی ابوالحسن» و همکارانش در [۱۰] نشان دادند که :

$$p(k,t) \geq (\frac{k}{k-۱})^{t-۱} p(k,۱) \tag{۷.۱}$$

و

$$p(k,t) \geq k + t + t \lfloor \frac{۱ + \sqrt{۸k+۱}}{۲} \rfloor \tag{۸.۱}$$

[۱۵] Hajiabolhassan
[۱۶] Mehrabadi
[۱۷] Tusserkani
[۱۸] Table Graph
[۱۹] Napier

و مقدار دقیق $p(k,t)$ را با استفاده از مفهوم گراف‌های جدولی به‌این‌گونه نشان دادند که برای هر عدد صحیح $t \geq ۱$، موجود است یک عدد K به‌طوری‌که برای هر $k \geq K$:

$$p(k,t) = k + t + t\left\lfloor \frac{۱+\sqrt{۸k+۱}}{۲} \right\rfloor \tag{۹.۱}$$

در سال ۱۹۸۹، «توماسن[۲۰]»، «یوسف علوی[۲۱]» و همکارانشان در مقاله ای مشترک[۲۲]، چندین کران را برای مجموع رنگی، در هر گراف دلخواه ارائه دادند و نخستین کرانی که به بیان و اثبات آن پرداختند، این بود که برای هر گراف دلخواه مانند G با تعداد یال e و تعداد رئوس n :

$$\Sigma(G) \leq n + e \tag{۱۰.۱}$$

جایی‌که مجموع رنگی را با $\Sigma(G)$ نمایش می‌دهند.
همچنین آنها نشان دادند که برای هر گراف همبند نظیر G با e یال :

$$\lceil\sqrt{۸e}\rceil \leq \Sigma(G) \leq \lfloor\frac{۳}{۲}(e+۱)\rfloor \tag{۱۱.۱}$$

همچنین در سال ۱۹۹۷، «میچم[۲۲]» و «موریس[۲۳]»، در مقاله‌ای [۱۶] ثابت نمودند که با فرض نمایش قدرت رأسی یک گراف را با نماد $s(G)$، همواره برای هر گراف دلخواه مانند G داریم :

$$s(G) \leq \Delta(G) + ۱ \tag{۱۲.۱}$$

در سال ۲۰۰۰، «حاجی ابوالحسن» و همکارانش در مقاله‌ای مشترک [۹]، با توجه به اینکه قدرت رأسی همواره از عدد رنگی بزرگتر است، قضیه‌ی «بروکس[۲۴]» را بهبود بخشیدند و نشان دادند که :
برای هر گراف همبند G، $s(G) = \Delta(G) + ۱$ اگروفقط‌اگر G یک گراف کامل و یا یک دور فرد باشد.
در همین مقاله، «حاجی ابوالحسن» و همکارانش، با استفاده از مفهوم عدد رنگ‌آمیزی[۲۵] ($col(G)$)، توانست قضیه‌ی فوق را بهبود ببخشد و به‌این‌صورت بیان نماید که برای هر گراف دلخواه G :

$$s(G) \leq \lceil\frac{\Delta(G) + col(G)}{۲}\rceil \tag{۱۳.۱}$$

و اینجا بود که با بیان و اثبات (۱۳.۱) و اینکه برای هر درخت T، عدد رنگ‌آمیزی آن برابر با ۲ می‌باشد، «حاجی ابوالحسن» و همکارانش به یک کران بالا برای قدرت رأسی درخت‌ها با استفاده از مفهوم «عدد رنگ‌آمیزی» دست پیدا کردند به‌طوری‌که :

$$s(G) \leq \lceil\frac{\Delta(G) + col(G)}{۲}\rceil = \lceil\frac{\Delta(T)}{۲}\rceil + ۱ \tag{۱۴.۱}$$

همچنین در سال ۲۰۰۴، در [۱۷] «نیکولوسو[۲۶]» نشان داد که برای هر گراف بازه‌ای[۲۷] دلخواه مانند G داریم:

$$s(G) \leq ۲\chi(G) - ۱ \tag{۱۵.۱}$$

---

[۲۰] Thomassen
[۲۱] Yousef Alavi
[۲۲] Mitchem
[۲۳] Morriss
[۲۴] Brooks
[۲۵] Coloring Number
[۲۶] Nicoloso
[۲۷] Interval Graph

الگوریتم‌هایی جهت تعیین قدرت رأسی گراف‌ها و درنتیجه محاسبه‌ی مجموع رنگی آنها، روی برخی گراف‌های خاص ارائه شده‌اند، امّا هیچ‌گاه الگوریتمی جهت تعیین قدرت رأسی و محاسبه‌ی مجموع رنگی، در زمان معقول، که برای هر گراف دلخواه در حالت کلی جواب‌گو باشد، بیان نشده است و یا حداقل نمی‌توان بیان نمود، چرا که «مسأله‌ی مجموع رنگی»، یک مسأله NP-کامل [۲۸] است.

با پیشرفت علم و درگیر شدن هرچه بیشتر علوم مختلف باهم، مفهوم مجموع رنگی نیز در بسیاری از رشته‌ها وارد عرصه شده است و توانسته است در این عرصه نقش مهمی را ایفا کند.

یکی از کاربردهای مفهوم مجموع رنگی که در این پایان‌نامه نیز به آن اشاره شده است و در سال ۱۹۹۹ در [۱۸، ۲۱] مطرح شد، مسأله‌ای موسوم به «طراحی $VLSI$[۲۹]» می‌باشد که به‌عنوان مثال، با مدل‌سازی یک مدار الکتریکی به‌صورت یک گراف و استفاده از مفهوم «مجموع رنگی»، مینیمم‌مقدار طول سیم مورد نیاز در آن مدار را به‌دست‌می‌آورد.

همچنین در سال‌های ۱۹۹۸ و ۲۰۰۳، مجموع رنگی در مقوله‌ای موسوم به «زمان‌بندی[۳۰]»[۲، ۳، ۱۱]، باز پا به عرصه نهاد و بر کاربردها و اهمّیت این مفهوم افزوده شد.

در سال‌های اخیر نیز کارهای زیادی روی مفهوم مجموع رنگی انجام شده است که از بین آنها می‌توان به اثبات «عدم وجود همریختی» با استفاده از مفهوم مجموع رنگی اشاره نمود که در سال ۲۰۰۹ توسط «علیشاهی[۳۱]» و «طاهرخانی[۳۲]» در مقاله ای مشترک [۱] بیان شد.

آنها نشان دادند درصورتی که G یک گراف دلخواه و H یک گراف ترایارأس[۳۳]، اگر f یک همریختی از G به H باشد آنگاه :

$$\frac{\Sigma(G)}{|G|} \leq \frac{\Sigma(H)}{|H|} \tag{۱۶.۱}$$

همچنین آنها در همان مقاله ثابت کردند که برای هر گراف دلخواه G،

$$\Sigma(G) < \chi_f(G)|G| \tag{۱۷.۱}$$

جایی‌که $\chi_f(G)$، عدد رنگی کسری [۳۴] گراف G می‌باشد.

حال در اینجا، بعد از مطرح نمودن تاریخچه‌ی هرچند کوتاهی که بیان شد، به یکی از کاربردهای مهم موضوع پایان‌نامه یعنی «مجموع رنگی»، اشاره خواهیم نمود.

---

[۲۸] Non-deterministic Polynomial-time Complete
[۲۹] Very Large Scale Integeration Design
[۳۰] Scheduling
[۳۱] Alishahi
[۳۲] Taherkhani
[۳۳] Vertex Transitive Graph
[۳۴] Fractional Coloring Number

۳.۱ کاربرد

کاربرد رنگ‌آمیزی جمعی رأسی[۳۵] درسال ۱۹۹۹ «توسط نیکولوسو»، «صرّاف‌زاده[۳۶]» و «سونگ[۳۷]» در [۱۸] مطرح شد و با کاربرد آن در مسأله‌ی «زمان‌بندی» و «طراحی $VLSI$» پیشرفت نمود.
در اینجا یکی از کاربردهای مهم مسأله‌ی رنگ‌آمیزی جمعی رأسی گراف را بیان می‌کنیم، امّا قبل از آن تعریفی را جهت فهم بیشتر اصطلاحی که در کاربرد رنگ‌آمیزی جمعی رأسی خواهیم دید، بیان می‌کنیم.

۱.۳.۱ VLSI یا یکپارچه‌سازی مقیاس خیلی بزرگ

شاخه‌ای از دانش است که به بررسی یکپارچه‌سازی مدارهای خیلی پیچیده در یک مجموعه ی تراشه می‌پردازد. این شاخه از دانش به دو بخش کلی طراحی و پیاده‌سازی تقسیم شده است.
در شاخه پیاده‌سازی، مباحث علمی مربوط به پیاده‌سازی مدارهای یکپارچه در مقیاس بزرگ عنوان می‌شود و در شاخه‌ی طراحی، مباحث مربوط به طراحی، با توجه به روش‌های پیاده‌سازی عنوان می‌شوند. در یک جمله، $VLSI$، علم طراحی و پیاده‌سازی یک مدار پیچیده بر اساس اصول و نکات علمی و تخصصی، در مقیاس کوچکتر می‌باشد.
برای مثال زمانی‌که بخواهیم طول سیم بکاررفته در مدارهای الکتریکی را در مقیاس‌های خیلی بزرگ محاسبه کنیم، کافی است با استفاده از دانش $VLSI$، آن را در مقیاس کوچکتر طراحی و پیاده سازی کنیم، آنگاه در مقیاس کوچکتر محاسبه‌ی طول سیم کار آسان‌تری است.
حال به بیان یکی از کاربردهای مسآله‌ی رنگ‌آمیزی جمعی رأسی می‌پردازیم و آن مسأله‌ی طراحی $VLSI$ می‌باشد.

۲.۳.۱ طراحی VLSI

از کاربردهای مهم مسأله‌ی رنگ‌آمیزی جمعی رأسی، مینیمم نمودن طول سیم به‌کاررفته در مدارهای الکتریکی می‌باشد.
فرض کنیم مجموعه‌ای از پایانه‌هایی که بصورت الکتریکی به‌هم متصل هستند، داده شده باشند. هر دو پایانه‌ی متصل به‌هم، یک شبکه را تشکیل می‌دهند. در مدار، یک خط افقی، به‌عنوان خط پایه وجود دارد که پایانه‌ها روی این خط قرار می‌گیرند. توجه شود که موقعیت هر پایانه روی خط پایه داده می‌شود. همچنین $n \geq ۱$ خط موازی با خط پایه نیز وجود دارد که هر خط مشخص کننده‌ی یک لایه است و این خطوط را خطوط لایه‌ای می‌نامیم. فاصله‌ی هر دو خط لایه‌ای از یکدیگر و فاصله‌ی اوّلین خط موازی از خط پایه، برابر با یک واحد می‌باشد.
برای اتصال دو پایانه به یکدیگر از سیم استفاده می‌کنیم. سیم‌ها را فقط می‌توان به صورت عمودی و افقی استفاده

[۳۵] Vertex Sum Coloring
[۳۶] Sarrafzadeh
[۳۷] Song

نمود به این‌صورت که هر زوج پایانه‌ای که باید به‌هم متصل شوند به‌وسیله‌ی یک سیم افقی و دو سیم عمودی در دو انتهای سیم افقی، به همدیگر متصل می‌شوند به‌طوری‌که هیچ دو زوج پایانه‌ای که از یک خط لایه‌ای استفاده می‌کنند نباید سیم‌های افقی آنها با همدیگر همپوشی داشته باشند.
حال به لایه‌ها، متناسب با فاصله‌ی آنها از خط پایه‌ای، رنگ‌های $۱, ۲, ..., n$ داده می‌شود به این‌صورت که به اوّلین و دومین لایه از خط پایه ای، به‌ترتیب رنگ‌های $۱, ۲$ و ... و به همین ترتیب به آخرین لایه رنگ n را اختصاص می‌دهیم. در واقع با این رنگ‌آمیزی، شبکه‌ای که سیم افقی آن در لایه‌ی i، $۱ \leq i \leq n$ واقع شده است با رنگ i رنگ‌آمیزی می‌شود.
در این مسأله، هدف، مینیمم نمودن طول کل سیم مورد نیاز برای متّصل کردن پایانه‌ها به همدیگر می‌باشد.
از آنجایی‌که موقعیت پایانه‌ها روی خط پایه‌ای مشخص و ثابت است، لذا طول سیم‌های به‌کاررفته در اتّصالات مشخص بوده و برابر با مجموع کل فاصله‌های هر زوج پایانه‌ی متّصل به‌هم می‌باشد. بنابراین باید مجموع طول سیم‌های عمودی مورد نیاز در اتّصلات را مینیمم کرد.
آنچه که گفته شد در واقع یک طراحی $VLSI$ در مقیاس کوچکتری از مقیاس اصلی یک مدار بود.

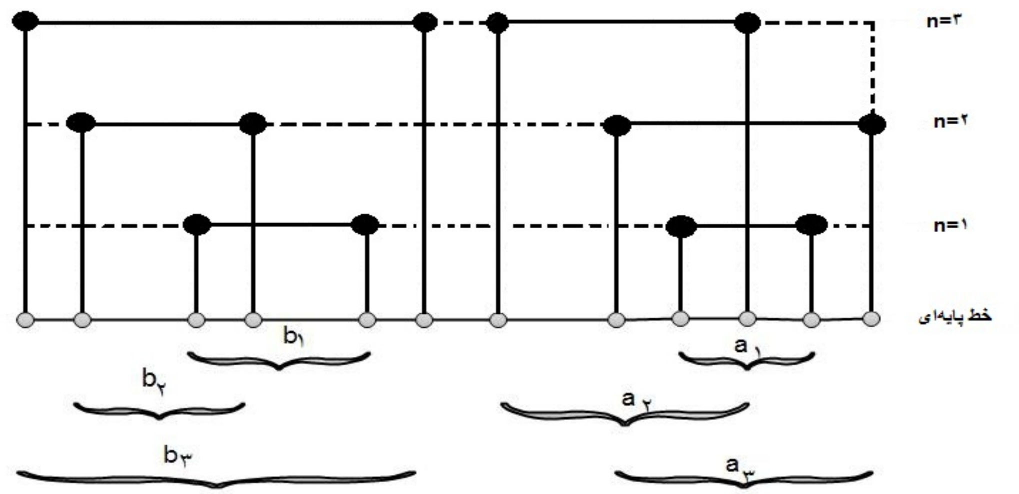
۳.۳.۱ مدل‌سازی طراحی VLSI از یک مدار الکتریکی، توسط یک گراف

طراحی $VLSI$ از یک مدار الکتریکی را با یک گراف مانند G، به صورت زیر مدل‌سازی می‌کنیم:
به‌ازای هر شبکه در مدار، یک رأس در گراف قرار می‌دهیم. دو رأس گراف، مجاور هستند اگر سیم‌های شبکه‌های متناظر آن دو رأس، متقاطع باشند و یا به‌طور کامل، شبکه‌ای در شبکه‌ی دیگری واقع شده باشد. از آنجایی‌که به هر لایه یک رنگ اختصاص داده می‌شود، لذا با اختصاص دادن رنگ‌های بزرگتر به لایه‌ها، طول سیم‌های عمودی مورد نیاز افزایش می‌یابد.
بنابراین طبق تعریف رنگ‌آمیزی جمعی رأسی گراف، می‌توان گراف G را به‌گونه‌ای رنگ‌آمیزی نمود که مجموع رنگ‌های اختصاص داده شده به رأس‌ها، کمترین مقدار ممکن را داشته باشد. بنابراین می‌توان به شبک‌ها کمترین مقدار رنگ را اختصاص داد به‌طوری‌که مجموع طول سیم‌های عمودی به‌کاررفته در اتّصالات هر شبکه، کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.
از آنجایی‌که هر شبکه روی خط پایه، یک فاصله[۳۸] (بازه) است و برخی از این فاصله‌ها با یکدیگر اشتراک دارند، لذا مسأله‌ی طراحی $VLSI$، مسأله‌ی رنگ‌آمیزی جمعی رأسی در گراف بازه ای می‌باشد.

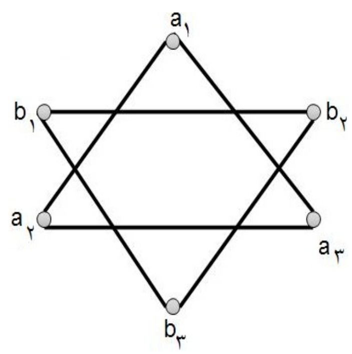
شکل زیر نمونه‌ای از یک مدار، در طراحی $VLSI$ می‌باشد.

شکل (۱.۱) را به‌صورت گراف G مانند شکل (۲.۱) مدل‌سازی می‌کنیم.
حال می‌توان رنگ‌آمیزی جمعی رأسی را برای گراف (۲.۱) تعیین نمود که در واقع با این کار، مجموع طول

[۳۸] Distanc



شکل ۱.۱: یک مدار در طراحی $VLSI$



شکل ۲.۱: گراف مدل G

سیم‌های عمودی به‌کاررفته در اتّصالات هر شبکه را مینیمم نموده ایم. حال کافی است $\Sigma(G)$ به‌دست آمده را دو برابر کنیم (هر شبکه دو سیم عمودی هم‌اندازه دارد) و با مجموع طول فاصله‌ی هر زوج پایانه جمع کنیم تا مینیمم مجموع طول سیم به‌کاررفته در مدار نمونه‌ی بالا را به‌دست آوریم.

فصل ۲

تعاریف و قضایای مقدماتی

در این فصل، تعاریفی که در این پایان‌نامه به‌کار رفته‌اند، بیان شده است. همچنین قضایای معروفی که در اثبات قضایای فصول آینده، به آنها استناد می‌شود، بدون اثبات بیان می‌گردد و در مقابل هر یک مرجع مناسب، برای مراجعه به اثبات قضیه داده شده است.
در سراسر این پایان‌نامه G، گرافی بدون جهت و بدون طوقه **(**گراف ساده**)** می‌باشد. مجموعه‌ی رئوس گراف G را با $V(G)$ و مجموعه‌ی یال‌های آن را با $E(G)$ نمایش می‌دهیم. آن‌چه از تعاریف، بدون ذکر منبع آورده شده است از [۴] اتخاذ شده است.

۱.۲ تعاریف و قضایا

یک سه‌تایی مرتب $(V(G), E(G), \psi_G)$ را **گراف** گوییم، هرگاه:
i) $V(G)$ مجموعه‌ای ناتهی باشد که اعضای آن‌را رأس‌های گراف گوییم.
ii) $E(G)$ مجموعه‌ای مجزا از $V(G)$ باشد و عناصر آن‌را یال‌های گراف در نظر می‌گیریم.
iii) ψ_G یک تابع وقوع از $E(G)$ به $V(G)$ باشد، به‌طوری که به هر یال از $E(G)$ دو رأس از $V(G)$ که الزاماً متمایز نیستند، اختصاص می‌دهد.

اگر تابع ψ_G به یال e دو رأس u و v را اختصاص دهد(یعنی $\psi_G(e) = uv$)، آنگاه می‌گوییم یال e، دو رأس u و v را به یک‌دیگر متصل کرده است و رأس‌های u و v را دو انتهای (دو سر) یال e می‌نامیم و می‌گوییم، رأس‌های u و v بر یال e واقع هستند و برعکس، یال e بر روی رأس‌های u و v واقع است.
سه‌تایی مرتب $(V(G), E(G), \psi_G)$ را می‌توانیم به صورت گرافیکی نمایش دهیم. برای سادگی، نمادهای $V(G)$ و $E(G)$ را گاهی به‌ترتیب، به‌صورت V و E می‌نویسیم و گراف G را به‌صورت $G(V, E)$ نشان می‌دهیم.
گرافی که مجموعه‌ی رأس‌ها و مجموعه‌ی یال‌های آن متناهی باشد را **گراف متناهی**[۱] گوییم.

[۱]Finite graph

در یک گراف، دو رأس که بر روی یک یال مشترک واقع باشند را دو رأس **مجاور**[۲] و دو یال که بر روی یک رأس مشترک واقع باشند را دو یال مجاور گوییم. همچنین، رأس های غیرواقع بر یک یال مشترک و یال‌های غیرواقع بر یک رأس مشترک، به‌ترتیب رأس‌های غیرمجاور و یال‌های غیرمجاور هستند.
یک یال با دو انتهای یکسان را **طوقه**[۳] و یک یال با دو انتهای متمایز را **یال پیوندی**[۴] گوییم.
اگر بین دو رأس مشخص از یک گراف، بیش از یک یال وجود داشته باشد، آن یال‌ها را **موازی**[۵] گوییم.
گرافی که فاقد طوقه و یال‌های موازی باشد را گراف **ساده**[۶] گوییم. در این پایان‌نامه، منظور از گراف، گراف متناهی و ساده است.
در گراف G، **همسایگی**[۷] هر رأس $v \in V(G)$ را با $N(v)$ نشان می‌دهیم و عبارت است از

$$N(v) = \{u \in V(G) \colon uv \in E(G)\}$$

تعداد یال‌های واقع بر یک رأس $v \in V(G)$ را درجه‌ی[۸] آن رأس گوییم و با نماد $\deg_G(v)$ یا $\deg(v)$ نمایش می‌دهیم. گرافی که درجه‌ی تمام رئوس آن باهم برابر است را منتظم گوییم. حال اگر درجه‌ی هر رأس گراف، k باشد، آن گراف را $k-$منتظم نامیم.
ماکسیمم و مینیمم درجه‌ی گراف G را به‌ترتیب با $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ (به‌اختصار Δ و δ) نشان می‌دهیم.

قضیه ۰.۱.۱.۲ ([۴]) در هر گراف G داریم $\sum_{v\in V(G)} \deg(v) = ۲|E|$.

گراف H را **زیرگراف**[۹] G می‌گوییم، هرگاه $V(H) \subseteq V(G)$، $E(H) \subseteq E(G)$ و ψ_H از محدود کردن ψ_G به $E(H)$ حاصل شده باشد. با فرض آن‌که H زیرگرافی از G است، H را زیرگراف **سره**[۱۰]ی G گوییم هرگاه $V(H) \neq V(G)$ باشد.
گراف $G = (V, E)$ را در نظر می‌گیریم. اگر $V' \subseteq V$ و $V' \neq \emptyset$، آنگاه زیرگرافی از G که مجموعه‌ی رأس‌های آن V' و مجموعه‌ی یال‌هایش برابر مجموعه‌ی یال‌هایی از G باشد که هر دو سر آنها در V' واقع است، زیرگراف القاء شده توسط V' نامیده شده و با $G[V']$ نمایش داده می‌شود. همچنین می‌گوییم $G[V']$ یک **زیرگراف القایی**[۱۱] G می‌باشد.
زیرگراف القایی $G[V \backslash V']$ را با $G - V'$ نیز نمایش می‌دهیم و آن زیرگرافی از G است که با حذف رأس‌های V' و یال‌های واقع برآنها، به‌دست می‌آید.

[۲] Adjacent
[۳] Loop
[۴] Link
[۵] Parallel
[۶] Simple Graph
[۷] Neighborhood
[۸] Degree
[۹] subgraph
[۱۰] Proper
[۱۱] Induced Subgraph

فرض کنیم افرازی از مجموعه رئوس V به زیرمجموعه‌های ناتهی V_1 و V_2 و ... و V_w وجود دارد که در آن دو رأس u و v همبندند اگروتنهااگر u و v هر دو متعلق به مجموعه‌ی V_i یکسانی باشند. در این‌صورت زیرگراف‌های $G[V_1]$، $G[V_2]$، ... و $G[V_w]$، **مؤلفه**[12]های G نامیده می‌شوند.

گراف $G = (V, E)$ را در نظر می‌گیریم. اگر $E' \subseteq E$ و $E' \neq \emptyset$، آنگاه زیرگرافی از G با مجموعه‌ی رأس‌های دو سر یال‌های E' و مجموعه یال‌های E' را زیرگراف القا شده به‌وسیله‌ی E' می‌نامیم و با $G[E']$ نمایش می‌دهیم. همچنین می‌گوییم $G[E']$ یک **زیرگراف القایی یالی**[13] G می‌باشد.

رأس v از گراف G، **رأس برشی**[14] است اگر E بتواند به زیرمجموعه‌ی ناتهی E_1 و E_2 افراز شود به‌طوری‌که $G[E_1]$ و $G[E_2]$ تنها در رأس v مشترک هستند.

یک **مجموعه‌ی مستقل**[15] در یک گراف، مجموعه‌ای از رئوس دو به دو غیرمجاور می‌باشد.

عدد استقلال[16] یک گراف، برابر با اندازه‌ی بزرگترین مجموعه‌ی مستقل از رئوس گراف است، که آن را با $\alpha(G)$ نشان می‌دهیم.

گراف دو بخشی[17] گرافی است که بتوان مجموعه‌ی رئوس آن را به دو زیر مجموعه‌ی مستقل X و Y چنان افراز نمود که در صورت وجود یال، یک سر آن در X و سر دیگر آن در Y باشد.

گشت[18] در G، دنباله‌ی ناتهی $w = v_\circ e_1 v_1 e_2 v_2 ... e_k v_k$ است که جمله‌های آن متناوباً رأس‌ها ویال‌ها هستند، به‌قسمی‌که برای $1 \leq i \leq k$، دو انتهای e_i، v_{i-1} و v_i هستند.

اگر در گشت w، رئوس تکراری نباشند، آنگاه w را **مسیر**[19] گوییم.

قطر[20] G عبارت است از بیشترین فاصله‌ی بین دو رأس از گراف G. منظور از بیشترین فاصله، بیشترین تعداد یال، در پیمودن یک مسیر، بین دو رأس دلخواه از گراف می‌باشد.

[12] Component

[13] Edge induced subgraph

[14] Cut Vertex

[15] Independent

[16] Independent

[17] Bipartite Graph

[18] Walk

[19] Path

[20] Diameter

هر مسیر بسته‌ای (نقاط ابتدا و انتهای آن برهم منطبق باشند) تشکیل یک **دور**[۲۱] می‌دهد.

گراف همبند[۲۲] گرافی است که در بین هر دو رأس دلخواه آن یک مسیر وجود داشته باشد، به‌عبارت دیگر هر رأس دلخواه، از رأس دلخواه دیگر، قابل دسترسی باشد.

درخت[۲۳]، گرافی است همبند که در آن هیچ دوری موجود نباشد و هر دو رأس به‌وسیله‌ی مسیری یکتا به‌هم متصل باشند.
گراف بی‌دور و ناهمبند G یک **جنگل**[۲۴] است.

گراف کامل، گرافی است که بین هر دو رأس دلخواه آن یک یال موجود باشد. گراف کامل n رأسی را با k_n نشان می‌دهیم.
هر زیر گراف کامل یک گراف را، یک **خوشه**[۲۵] برای آن گراف تعریف می‌کنیم.

گراف بازه‌ای یا فاصله، گرافی است که در آن به‌ازای هر فاصله‌ی حقیقی (بازه‌ی حقیقی) داده شده، یک رأس اختصاص می‌دهیم. دو رأس در این گراف مجاور هستند اگروفقط اگر فواصل متناظر آنها با هم اشتراک داشته باشند.

با فرض اینکه G و H دو گراف باشند، یک **همریختی**[۲۶] مانند g از گراف G به H، یک تابع مانند $g: V(G) \longrightarrow V(H)$ می‌باشد به‌طوری‌که $uv \in E(G)$ را به $g(u)g(v) \in E(H)$ نگاشت می‌کند. در این‌صورت گوییم دو گراف G و H **همریخت‌اند**. مجموعه‌ی همه‌ی همریختی‌های از G به H را با $Hom(G, H)$ نشان می‌دهیم.

دو گراف G و H **یکریخت**[۲۷]اند هرگاه تابع یک‌به‌یک و پوشای $f: V(G) \longrightarrow V(H)$ بین مجموعه‌ی رئوس دو گراف G و H وجود داشته باشد، به‌طوری‌که $uv \in E(G)$ اگروفقط‌اگر $f(u)f(v) \in E(H)$. در این‌صورت f را یک **یکریختی**[۲۸] از G به H گوییم.

یک یکریختی $f: V(G) \longrightarrow V(G)$ را یک **خودریختی**[۲۹] روی G نامیم. مجموعه‌ی همه‌ی خودریختی‌های

[۲۱] Cycle
[۲۲] Connected Graph
[۲۳] Tree
[۲۴] Forest
[۲۵] Clique
[۲۶] Homomorphism
[۲۷] Isomorphic
[۲۸] Isomorphism
[۲۹] Automorphism

روی G، ناتهی و البته متناهی می‌باشد زیرا تعداد رئوس، متناهی است.
هر تابع یک‌به‌یک و پوشا مانند $f : V(G) \longrightarrow V(G)$ را یک **جایگشت**[۳۰] می‌نامیم.
گروه خودریختی[۳۱][۸] روی یک گراف، یک گروه از جایگشت‌های روی رئوس آن گراف می‌باشد که حافظ مجاورت است.
همچنین مجموعه‌ی همه‌ی خودریختی‌های روی $V(G)$ را با $Aut(G)$ نشان می‌دهیم و آن را گروه خودریختی، با عمل دوتایی ترکیب توابع، می‌نامیم.

گراف G **ترایارأس**[۸] است هرگاه به‌ازای هر $u, v \in V(G)$ یک تابع مانند $f \in Aut(G)$ موجود باشد به‌طوری‌که $u = f(v)$.
گراف ترایارأسی لزوماً **منتظم** است. گراف کامل k_n و گراف کنسر $KG(m,n)$ که در زیر تعریف شده است، نمونه‌هایی از گراف ترایارأسی هستند.

گراف کنسر[۳۲][۸]، که آن را با $KG(m,n)$ نشان می‌دهیم و $m \geq ۲n$، گرافی است که مجموعه‌ی رئوس آن را زیرمجموعه‌های n عضوی از مجموعه‌ی ثابت $\{۱, ۲, ..., m\}$ تشکیل می‌دهند، یعنی تعداد رئوس آن $\binom{m}{n}$ می‌باشد، و دو رأس آن با هم مجاورند، اگر مجموعه‌های nعضوی متناظر آنها هیچ اشتراکی با هم نداشته باشند.
همچنین تعداد یال‌های گراف $KG(m,n)$ که یک گراف $\binom{m-n}{n}$-منتظم می‌باشد، برابر است با

$$|E(KG(m,n))| = \frac{\binom{m}{n}.\binom{m-n}{n}}{۲}$$

گراف کامل k_m را می‌توان به‌صورت گراف کنسر $KG(m,۱)$ نشان داد.

برای گراف G، تابع $c : V(G) \longrightarrow \aleph$ را یک **رنگ‌آمیزی رأسی مجاز**[۳۳] گوییم هرگاه برای هر $uv \in E(G)$ داشته باشیم $c(u) \neq c(v)$. به‌عبارت دیگر یک رنگ‌آمیزی رأسی مجاز، عبارت است از نسبت دادن رنگ‌ها (اعداد طبیعی) به رأس‌های یک گراف، به‌طوری‌که رئوس مجاور، همرنگ نباشند.

به گراف G، k-**رنگ‌پذیر**[۳۴] گفته می‌شود هرگاه یک رنگ‌آمیزی رأسی مجاز از G با استفاده از حداکثر k رنگ موجود باشد.

عدد رنگی رأسی[۳۵] یک گراف، کوچکترین عدد k است به‌طوری‌که G، k-رنگ‌پذیر باشد. عدد رنگی رأسی را با $\chi(G)$ نمایش می‌دهیم.

[۳۰] Permutation
[۳۱] Automorphism Group
[۳۲] Kneser Graph
[۳۳] Proper Vertex Coloring
[۳۴] K-colorable
[۳۵] Vertex Chromatic Number

عدد رنگی درختان و گراف‌های دوبخشی ۲ می‌باشد و در [۱۵] ثابت شده است که :

$$\chi(KG(m,n)) = m - 2n + 2$$

گراف G **بحرانی**[۳۶] است اگر برای هر زیر گراف سره‌ی H از G، $\chi(H) < \chi(G)$. همچنین برای هر گراف بحرانی داریم :

$$\delta(G) \geq \chi(G) - 1$$

قضیه ۲.۱.۲. ([۴]) فرض کنیم G یک گراف باشد، $\chi(G) = n$ اگروتنهااگر n کوچکترین عددی باشد که یک همریختی مانند $f : G \longrightarrow k_n$ موجود باشد، به‌عبارت دیگر $\chi(G) = n$ اگروتنهااگر

$$\chi(G) = n = \min\{r \in N | \exists f : G \longrightarrow k_n \quad \text{یک همریختی } f\}$$

عدد رنگی کسری[۳۷][۸] گراف G که با $\chi_f(G)$ نشان می‌دهیم برابر است با:

$$\chi_f(G) = \inf\left\{\frac{m}{n} | \exists f : G \longrightarrow KG(m,n) \quad \text{یک همریختی } f\right\}$$

مدتی بعد از ارائه‌ی این تعریف، ثابت شد که اینفیمم در این تعریف می‌تواند به‌دست آید و بنابراین

$$\chi_f(G) = \min\left\{\frac{m}{n} | \exists f : G \longrightarrow KG(m,n) \quad \text{یک همریختی } f\right\}$$

می‌توان با توجه به قضیه‌ی (۲.۱.۲) و تعریف عدد رنگی کسری، این نکته را دریافت که همان نقشی که گراف کامل برای عدد رنگی رأسی ایفا می‌کند، گراف کنسر برای عدد رنگی کسری ایفا خواهد کرد.
به وضوح می‌توان مشاهده نمود که $\chi_f(G) \leq \chi(G)$، زیرا با توجه به تعاریف هر دو، اگر از G به $KG(m,n)$ یک همریختی موجود باشد به‌طوری‌که $\frac{m'}{n}$ کوچکترین عدد باشد و $\frac{m'}{n}$ نیز از $\frac{m}{1}$ بزرگتر باشد، بنابراین طبق تعریف $\chi(G)$ و از آن‌جایی‌که از G به k_m یک همریختی وجود دارد، $\frac{m}{1}$ را به‌عنوان $\chi_f(G)$ در نظر می‌گیریم، بنابراین همواره $\chi_f(G) \leq \chi(G)$.
البته در [۲۰] نشان داده می‌شود که $\frac{\chi(G)}{\chi_f(G)}$ می‌تواند به‌اندازه‌ی دلخواه بزرگ باشد و این یعنی اینکه $\chi_f(G)$ می‌تواند خیلی کوچکتر از $\chi(G)$ باشد.

در اینجا مفهومی را به‌عنوان «عدد رنگ‌آمیزی[۳۸]» گراف G بیان و با استفاده از آن در فصل‌های آینده، قضیه‌ی (۷.۳.۳) را اثبات می‌کنیم که بهبود یافته‌ی قضیه‌ی (۶.۳.۳) می‌باشد.
«عدد رنگ‌آمیزی»، اولین‌بار توسط «اردوس[۳۹]» و «هاجنال[۴۰]» در سال ۱۹۶۶ در [۶] معرفی و مطالعه شده است. علاوه‌بر اهمّیت نظری، از آنجاکه الگوریتم‌های مناسبی برای محاسبه‌ی $col(G)$ در دست است، این پارامتر در نظریه‌ی الگوریتمی گراف‌ها کاربردهای فراوانی دارد.

[۳۶] Critical
[۳۷] Fractional Chromatic Number
[۳۸] Coloring number
[۳۹] Erdos
[۴۰] Hajnal

فرض کنید G یک گراف باشد و $V(G)=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$، **«عدد رنگ‌آمیزی»** G که با نماد $col(G)$ نمایش داده می‌شود، به‌صورت زیر تعریف می‌گردد :

$$col(G)=\min_{\pi}\max_{i}\{d_{G_{\pi(i)}}(v_{\pi(i)})\}$$

در رابطه‌ی فوق، مینیمم روی همه‌ی جایگشت‌های π که روی $\{1,2,\dots,n\}$ عمل می‌کنند، گرفته شده است. $G_{\pi(i)}$، زیرگراف القایی از G است که توسط رأس‌های $v_{\pi(1)},v_{\pi(2)},\dots,v_{\pi(i)}$ القا می‌شود و منظور از $\deg_{G_{\pi(i)}}(v_{\pi(i)})$، درجه‌ی رأس $v_{\pi(i)}$ در گراف $G_{\pi(i)}$ است.

به عبارت ساده‌تر می‌توان گفت که **عدد رنگ‌آمیزی** گراف G برابر است با کوچکترین عدد طبیعی مانند d، به‌طوری‌که برای هر رابطه‌ی ترتیب خطی از مجموعه رئوس گراف G، درجه‌ی برگشتی هر رأس u از گراف G، یعنی $|\{v\ :\ v<u\,,uv\in E(G)\}|$، اکیداً کمتر از d باشد. منظور از درجه‌ی برگشتی رأس u، تعداد رئوس مجاور با آن که در رابطه‌ی ترتیب خطی صدق می‌کنند، می‌باشد.

پارامتر دیگری که به‌طور غیرمنتظره‌ای با $col(G)$ ارتباط دارد عدد «زکرس-ویلف[41]» است که در سال ۱۹۶۸ معرفی شده است. این پارامتر مساوی $1+\max_{H\subseteq G}\delta(H)$ است که ماکسیمم روی همه‌ی زیر گراف‌های القایی H از G گرفته می‌شود.

در سال ۱۹۷۰، «لیک[42]» و «وایت[43]» در [14] اثبات کردند که برای هر گراف دلخواه G داریم :

$$col(G)=1+\max_{H\subseteq G}\delta(H) \tag{1.2}$$

که در آن H زیرگراف القایی از G می‌باشد.

با توجه به (۱.۲) کاملاً واضح است که $col(G)\leq\Delta(G)+1$ و همچنین داریم $\chi(G)\leq col(G)$، زیرا با این ایده که می‌توان رأس‌های گراف را به‌ترتیبی که به‌ازای آن، عبارت $col(G)$ مینیمم می‌شود، رنگ‌آمیزی کرد. این ایده‌ی رنگ‌آمیزی در واقع همان ایده‌ی رنگ‌آمیزی برای یافتن کران بالای مناسب برای $\chi(G)$ می‌باشد که در آنجا این‌گونه بیان می‌کنیم که اگر رأس‌های گراف را به‌ترتیبی دلخواه رنگ‌آمیزی کنیم، با توجه به اینکه هر رأس گراف مانند $v.$، حداکثر با $\Delta(G)$ رأس مجاور است، پس هنگام رنگ‌آمیزی $v.$، حداقل یک رنگ در اختیار خواهیم داشت که در همسایگی رأس $v.$ ظاهر نشده است و بنابراین می‌توان با $\Delta(G)+1$ رنگ، یک رنگ‌آمیزی مجاز برای گراف G ارائه نمود. پس نامساوی $\chi(G)\leq col(G)$، بهبودیافته‌ی رابطه‌ی $\chi(G)\leq\Delta(G)+1$ است.

در بسیاری از موارد پارامترهای $\chi(G)$ و $col(G)$ با هم برابر می‌باشند.

به‌عنوان مثال، اگر T یک درخت باشد داریم $\chi(T)=col(T)=2$. امّا در حالت کلی، به‌دست‌آوردن شرایط لازم و کافی برای تساوی این دو پارامتر، بیان نشده است.

قضیه‌ی زیر که یکی از معروفترین نتایج کلاسیک مبحث رنگ‌آمیزی است، توسط «بروکس[44]» در سال ۱۹۴۱ بیان و اثبات شده است.

[41] Szekeres-Wilf

[42] Lick

[43] White

[44] Brooks

قضیه ۳.۱.۲. قضیه بروکس :([۴]) فرض کنید G یک گراف همبند باشد. اگر G یک گراف کامل یا یک دور فرد نباشد، آنگاه :

$$\chi(G) \leq \Delta(G)$$

فصل ۳

رنگ‌آمیزی جمعی رأسی گراف‌ها

۱.۳ مقدمه

همان‌طور که بیان نمودیم، مفهوم «مجموع رنگی»، برای اوّلین‌بار در رساله‌ی دکترای «کوبیکا» در سال ۱۹۸۷ میلادی معرفی شد. کوبیکا نشان داد مسأله‌ی مجموع رنگی، یک مسأله‌ی NP-کامل است و اینکه می‌توان آن را به یک مسأله‌ی NP-سخت (سخت امّا قابل حل)، کاهش داد.

مسأله‌ی NP-کامل[۱۹]، به مسائلی گفته می‌شود که راه‌حل سریع و قابل انجام در زمان معقول، برای به‌نتیجه رسیدن آنها وجود ندارد. منظور از «راه‌حل سریع» آن است که زمان اجرای آن، با اندازه‌ی ورودی مسأله، به‌صورت چندجمله‌ای[۱]، رابطه داشته باشد.

امّا مسأله‌ی NP-سخت، به مسأله‌ای گفته می‌شود که به سختی مسأله‌ی NP-کامل نیست، یعنی سخت است امّا قابل حل می‌باشد. به‌عبارت دیگر مسأله‌ی A، NP-سخت است اگروفقط‌اگر مسأله‌ی L، از نوع NP-کامل موجود باشد به‌طوری‌که زمان حل آن برحسب چندجمله‌ای، قابل کاهش به A باشد. در واقع مسأله‌ی A می‌تواند برای حل مسأله‌ی L استفاده شود. لذا باید گفت که می‌توان مسأله‌ی L را در زمان زیاد، توسط مسأله‌ی A، حل نمود.

روش‌های مختلفی[۱۹] برای حل سریع، ولی نزدیک به بهینه، برای یک مسأله‌ی NP-سخت وجود دارد که در زیر به آنها اشاره خواهیم نمود :

یکی، راه‌حل تقریبی قابل اثبات(الگوریتم تقریبی)، که در آن یک الگوریتم سریع برای حل مسأله ارائه می‌شود، ولی اثبات می‌شود که اندازه‌ی خروجی، ضریبی از اندازه خروجی بهینه‌ی مسأله است.

راه‌حل دیگر، استفاده از الگوریتم‌های مکاشفه‌ای[۲] است و با اینکه الگوریتم‌هایی سریع هستند و به‌صورت تقریبی، جواب را به‌دست می‌آورند، امّا در مورد ضریب تقریب یا میزان خوبی الگوریتم، اثباتی وجود ندارد. بسیاری از این الگوریتم‌ها به‌صورت تجربی آزمایش می‌شوند. برخی از این الگوریتم‌ها از «روش حریصانه[۳]» برای حل

---

[۱] Polynomial

[۲] Heuristic

[۳] Greedy Algorithm

استفاده می‌کنند.
همچنین راه‌حل دیگر موجود برای حل مسائل NP-سخت، پیداکردن زیرمسأله‌هایی از مسأله می‌باشد، یعنی تقسیم مسأله به مسأله‌هایی کوچکتر، تا بشود الگوریتم‌های مکاشفه‌ای بهتر و دقیق‌تر را ارائه نمود.
در این پایان‌نامه نیز، در انتهای فصل بعد، دو الگوریتم از نوع مکاشفه‌ای آورده و روی برخی گراف‌های نمونه، از جمله گراف پترسن پیاده‌سازی شده است.
امّا مسأله‌ی «مجموع رنگی» گراف، به‌طور جداگانه هم روی رئوس گراف و هم روی یال‌های آن تعریف می‌شوند.
مسأله‌ی «مجموع رنگی رأسی» به‌صورت زیر بیان می‌شود.
مسأله : برای یک گراف داده شده مانند G، یافتن یک رنگ‌آمیزی مجاز رنگی، با استفاده از اعداد طبیعی، به‌طوری‌که مجموع رنگ‌های رئوس گراف G، در میان همه‌ی رنگ‌آمیزی‌های مجاز G، کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.
این ایده را می‌توان به «مجموع رنگی یالی» نیز تعمیم داد.
در بررسی «مسأله‌ی مجموع رنگی»، دو نکته‌ی مهم به‌چشم می‌خورد. یکی مینیمم مقدار مجموع رنگ‌های رئوس گراف G و دیگری مینیمم تعداد رنگ لازم، برای یافتن مقدار بهینه‌ی مجموع رنگ‌های رئوس، که ما در این پایان‌نامه آن را «قدرت رأسی» گراف G می‌خوانیم.
یک نکته‌ی جالب توجّه در این مسأله که در [۱۳] بیان شده است، این موضوع است که برای هر k ثابت، درختی با قدرت رأسی حداقل k موجود می‌باشد که این خود نشان‌دهنده‌ی این مطلب است که «قدرت رأسی» یک گراف می‌تواند بسیار بزرگتر از «عدد رنگی» رأسی آن گراف باشد و به‌عنوان یک پیامد، حاصل مجموع رنگ‌های به‌دست‌آمده از این رنگ‌آمیزی، می‌تواند بسیار متفاوت از مجموع رنگ‌های به‌دست‌آمده توسط هر $\chi(G)$-رنگ‌آمیزی رأسی باشد.
حال در بخش‌های بعدی به شرح و تفسیر مفاهیم رنگ‌آمیزی جمعی، مجموع رنگی، رنگ‌آمیزی مینیمال و قدرت رأسی یک گراف دلخواه مانند G می‌پردازیم.

۲.۳ رنگ‌آمیزی مینیمال

آنچه در این بخش بیان می‌شود، از [۱۰] اتخاذ شده است.
فرض کنید G یک گراف باشد، برای هر رنگ‌آمیزی c، **مجموع رنگ‌های** به‌کاررفته در G را با $\Sigma(G,c)$ نمایش می‌دهیم. به‌عبارت دیگر

$$\Sigma(G,c) = \Sigma_{v\in V(G)} c(v) = \Sigma_{i\in\aleph} i|C_i|$$

که در آن $c(v)$ یعنی **مقدار رنگ رأس** v، و منظور از C_i، مجموعه‌ی رئوسی از گراف G می‌باشد که در رنگ‌آمیزی c، رنگ i به آنها اختصاص داده شده است. همچنین **کمترین مقدار ممکن** $\Sigma(G,c)$ به‌ازای همه‌ی k-رنگ‌آمیزی‌های مجاز، با $\Sigma_k(G)$ نمایش می‌دهیم.
حال می‌توانیم مفهوم مجموع رنگی را در هر گراف معرفی کنیم.
مجموع رنگی گراف G که با نماد $\Sigma(G)$ نمایش داده می‌شود، برابر با $\min_c \Sigma(G,c)$ می‌باشد. در اینجا

مینیمم، روی همه‌ی رنگ‌آمیزی‌های مجاز G گرفته می‌شود.

پارامتر «قدرت» گراف که در زیر تعریف شده است، در مبحث مجموع رنگی جانشین عدد رنگی می‌شود.

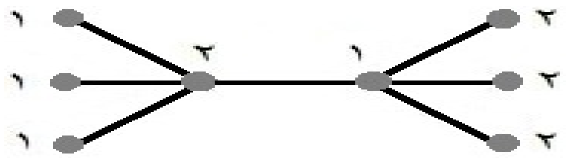
قدرت رأسی گراف G که با نماد $s(G)$ (یا به‌اختصار با s) نمایش داده می‌شود، کوچکترین عدد s می‌باشد که به‌ازای آن داریم:

$$\Sigma_s(G) = \Sigma(G)$$

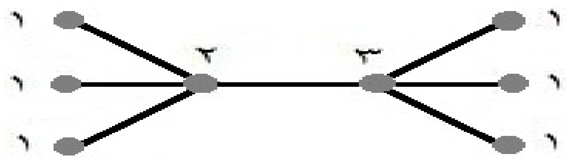
با توجّه به اینکه در محاسبه‌ی $\Sigma_k(G)$ همواره از رنگ‌آمیزی‌های مجاز استفاده می‌کنیم و از آنجاکه عدد رنگی یک گراف، کوچکترین عدد طبیعی ممکن است که با آن تعداد، می‌توان یک گراف را رنگ‌آمیزی مجاز نمود، لذا واضح است که همواره

$$s(G) \geq \chi(G)$$

در اینجا یک نمونه را برای مثال می‌آوریم تا نشان دهیم که قدرت رأسی یک گراف از عدد رنگی آن بیشتر است و به‌وضوح می‌توان دید که $\Sigma_{\chi(T)} = ۱۲$ و $\Sigma_{s(T)} = ۱۱$. یادآوری می‌کنیم که عدد رنگی هر درخت برابر با ۲ می‌باشد.



شکل ۱.۳: درخت T با $\chi(T) = ۲$



شکل ۲.۳: درخت T با $s(T) = ۳$

حال می‌توان به معرفی مفهوم رنگ‌آمیزی مینمال پرداخت.

رنگ‌آمیزی مجاز c را یک **رنگ‌آمیزی مینیمال** می‌نامیم، هرگاه $\Sigma(G, c) = \Sigma(G)$ و به‌علاوه به‌ازای هر رأس $v \in V(G)$ داشته‌باشیم $c(v) \leq s(G)$.

حال در بخش بعد با توجه به مفهوم مجموع رنگی، به بیان قضایایی در این خصوص و بررسی کران‌هایی برای آن می‌پردازیم.

۳.۳ مجموع رنگی

در این بخش در گام نخست، گزاره‌ای را بیان می‌کنیم که در واقع همان نتایج حاصل از تعریف مجموع رنگی، قدرت رأسی و رنگ‌آمیزی مینیمال است و ما آنها را یک‌جا در قالب یک گزاره، بررسی و اثبات خواهیم نمود.

گزاره ۱.۳.۳. [۱۶، ۱۰، ۹] فرض کنیم G یک گراف، c یک رنگ‌آمیزی مینیمال روی G، n تعداد رئوس و s قدرت رأسی باشد، در این‌صورت

$S_۱$) $|C_۱| \geq |C_۲| \geq ... \geq |C_s|$.

برهان.
فرض کنیم $i < j$ و $|C_i| < |C_j|$، رنگ‌آمیزی c' را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\forall\ v \in V(G) \qquad c'(v) = \begin{cases} i & v \in C_j \\ j & v \in C_i \\ c(v) & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

واضح است که c' یک رنگ‌آمیزی مجاز است و داریم:

$$\begin{aligned} \Sigma(G, c') &= \Sigma(G, c) - (j - i)|C_j| + (j - i)|C_i| \\ &= \Sigma(G, c) - (j - i)(|C_j| - |C_i|) \end{aligned}$$

$$\implies \Sigma(G, c') < \Sigma(G, c)$$

این در تناقض با تعریف رنگ‌آمیزی مینیمال است و بنابراین نتیجه‌ی مورد نظر به دست می‌آید. □

$S_۲$) برای هر راس $v \in C_i$ و برای هر $j < i$ داریم $N(v) \cap C_j \neq \emptyset$.

برهان.
فرض کنید $v_۰ \in C_i$ و $j < i$ و $N(v_۰) \cap C_j = \emptyset$. رنگ‌آمیزی c' را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$c'(v) = \begin{cases} j & v = v_۰ \\ c(v) & v \neq v_۰ \end{cases}$$

چون طبق فرض در رنگ‌آمیزی c، رنگ j در همسایگی $v_۰$ ظاهر نشده است، بنابراین c' یک رنگ‌آمیزی مجاز است و داریم

$$\Sigma(G, c') = \Sigma(G, c) - (i - j) < \Sigma(G, c)$$

این با مینیمال بودن رنگ‌آمیزی c در تناقض است و لذا حکم مورد نظر نتیجه می‌شود. □

$S_۳$) $s(G) \leq \Delta + ۱$.

برهان.
با توجه به اینکه c رنگ‌آمیزی مینیمال است، راسی مانند $v.$ وجود دارد که $c(v.) = s(G)$. باتوجه به $S_۲$، به ازای هر $j < s(G)$ داریم $N(v.) \cap C_j \neq \emptyset$ و درنتیجه $|N(v.) \cap C_j| \neq ۰$ بنابراین

$$\begin{aligned}\Delta \geq |N(v.)| &= |N(v.) \cap \bigcup_{j=۱}^{s-۱} C_j| \\ &= |(N(v.) \cap C_۱) \cup (N(v. \cap C_۲) \cup ... \cup (N(v.) \cap C_{s-۱})|\end{aligned}$$

از آنجایی‌که مجموعه‌های $N(v.) \cap C_j$ و $۱ \leq j \leq s-۱$، همگی از هم مستقل هستند، بنابراین داریم

$$\Delta \geq \Sigma_{j=۱}^{s-۱} |N(v.) \cap C_j|$$

که چون $N(v.) \cap C_j \neq \emptyset$ برای $۱ \leq j \leq s-۱$، پس هر مجموعه‌ی $N(v.) \cap C_j$، حداقل یک عضو دارد و بنابراین

$$\Delta(G) \geq s(G) - ۱ \implies s(G) \leq \Delta(G) - ۱$$

□

$S_۴$) $\Sigma(G - C_۱) = \Sigma(G) - |V(G)|$.

برهان.
فرض کنیم C، یک رنگ‌آمیزی مینیمال برای G با قدرت راسی s باشد و بنابه $S_۱$ داریم :

$$|C_۱| \geq |C_۲| \geq ... \geq |C_s|$$

حال برای گراف $G - C_۱$ رنگ‌آمیزی C' را به‌صورتی در نظر می‌گیریم که همه‌ی راس‌های واقع در کلاس C_i برای $۲ \leq i \leq s$ در رنگ‌آمیزی C، رنگ $i-۱$ را در رنگ‌آمیزی C' بپذیرند. در این‌صورت

$$\Sigma(G - C_۱, C') = ۱|C_۲| + ۲|C_۳| + ... + (s-۱)|C_s|$$

حال با اضافه و کم کردن $|V(G)|$ به $\Sigma(G - C_۱, C')$ داریم

$$\begin{aligned}\Sigma(G - C_۱, C') &= ۱|C_۱| + ۲|C_۲| + ... + s|C_s| - (|C_۱| + |C_۲| + ... + |C_s|) \\ &= \Sigma(G) - |V(G)|\end{aligned}$$

لذا

$$\Sigma(G - C_۱) \leq \Sigma(G - C_۱, C') = \Sigma(G) - |V(G)|$$

$$\implies \Sigma(G - C_۱) \leq \Sigma(G) - |V(G)| \qquad (۱.۳)$$

حال فرض کنید f یک رنگ‌آمیزی مینیمال برای $G - C_۱$ با قدرت راسی t است و کلاس‌های رنگی در این رنگ‌آمیزی $C'_۱, C'_۲, ..., C'_t$ هستند. رنگ‌آمیزی f' را برای G به‌صورتی در نظر می‌گیریم که

راس‌های واقع در $C_۱$، رنگ ۱ را دارند و برای هر راس x از $G-C_۱$ داشته باشیم $f'(x) = f(x)+۱$.
واضح است که کلاس‌های رنگی برای G به‌صورت $C_۱, C'_۱, C'_۲, ..., C'_t$ خواهد بود. حال داریم:

$$\begin{aligned}\Sigma(G, f') &= ۱|C_۱| + ۲|C'_۱| + ... + (t+۱)|C'_t| \\ &= |C_۱| + |C'_۱| + ... + |C'_t| + (|C'_۱| + ۲|C'_۲| + ... + t|C'_t|)\end{aligned}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\Sigma(G) \leq \Sigma(G, f') = |V(G)| + \Sigma(G - C_۱)$$

$$\Longrightarrow \Sigma(G - C_۱) \geq \Sigma(G) - |V(G)| \tag{۲.۳}$$

بنابه (۱.۳) و (۲.۳) حکم ثابت می‌شود. □

این نکته ضروری است که بگوییم با نظر داشتن روند اثبات (۲.۳)، برای هر مجموعه‌ی مستقل از G مانند S، خواهیم داشت

$$\Sigma(G) \leq |V(G)| + \Sigma(G - S) \tag{۳.۳}$$

$S_۵$) $s(G - C_۱) = s(G) - ۱$.

برهان.
بنابه $S_۴$ همواره برای هر G با رنگ‌آمیزی مینیمال c و قدرت راسی $s(G)$ خواهیم داشت:

$$s(G - C_۱) \leq s(G) - ۱ \tag{۴.۳}$$

حال می‌خواهیم نشان دهیم که $s(G - C_۱) \geq s(G) - ۱$.
برای این منظور، فرض می‌کنیم $t = s(G - C_۱) < s(G) - ۱$. از آنجایی‌که $s(G - C_۱) = t$، لذا رنگ‌آمیزی f با t رنگ، برای $G - C_۱$ چنان وجود دارد که

$$\Sigma(G - C_۱, f) = \Sigma(G - C_۱)$$

حال فرض کنیم $C'_۱, C'_۲, ..., C'_t$، کلاس‌های رنگی متناظر با f باشند. در این‌صورت رنگ‌آمیزی f' را برای G به‌صورتی در نظر بگیرید که همه‌ی رأس های واقع در $C_۱$، دارای رنگ ۱ باشند و برای هر رأس $x \in G - C_۱$ داشته باشیم $f'(x) = f(x) + ۱$.
لذا کلاس‌های رنگی برای f' به‌صورت $C_۱, C_۲, ..., C_{t+۱}$ هستند که در آن $C_i = C'_{i-۱}$ برای $۲ \leq i \leq t+۱$، حال داریم:

$$\begin{aligned}\Sigma(G, f') &= ۱|C_۱| + ۲|C_۲| + ... + (t+۱)|C_{t+۱}| \\ &= |C_۱| + ۲|C'_۱| + ... + (t+۱)|C'_t| \\ &= |C_۱| + |C'_۱| + |C'_۲| + ... + |C'_t| + |C'_۱| + ۲|C'_۲| + ... + t|C'_t|\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \Sigma(G, f') = |V(G)| + \Sigma(G - C_۱)$$

و با توجه به $S_۴$ خواهیم داشت $\Sigma(G, f') = \Sigma(G)$ و این یعنی f' یک رنگ‌آمیزی مینیمال برای G می‌باشد و $s(G) \leq t + ۱$. این تناقض است با اینکه $s(G) - ۱ > t$ و بنابراین

$$s(G - C_۱) \geq s(G) - ۱ \tag{۵.۳}$$

بنابه (۴.۳) و (۵.۳) حکم ثابت می‌شود.

□

$S_۶$) C_i یک مجموعه‌ی مستقل ماکسیمال در $G - \bigcup_{j<i} C_j$ است.

برهان.

فرض کنید $v.$ رأسی در $\bigcup_{k>i} C_k$ باشد. با توجه به $S_۲$، $v.$ همسایه‌هایی در C_i دارد، پس $C_i \cup \{v.\}$ مستقل نیست و این همان مفهوم ماکسیمال بودن C_i است. به عبارت دیگر C_i در $G - \bigcup_{j<i} C_j$، یک مجموعه‌ی مستقل ماکسیمال می‌باشد.

توضیح بیشتر :

فرض کنیم $C_i = C_۱$، در این‌صورت بایستی نشان دهیم که $C_۱$ روی G، مجموعه‌ی مستقل ماکسیمال خواهد بود.

برای این‌منظور فرض کنید S یک مجموعه‌ی مستقل، بطوری‌که $C_۱$ زیرمجموعه‌ی محض S باشد، یعنی $C_۱ \subset S$. در این‌صورت حداقل یک رأس از $S - C_۱$ وجود دارد که می‌توان آن را با رنگ ۱ رنگ‌آمیزی و به $C_۱$ اضافه کرد.

(تمام رئوس S از هم مجزا هستند و می‌توان به همه‌ی آنها رنگ مشابهی داد.)

از طرفی رنگ آن رأسی که می‌تواند اضافه شود به $C_۱$، حداقل ۲ می‌باشد. همان‌طور که می‌بینیم رنگ‌آمیزی هنوز مجاز می‌باشد اما مجموع رنگی G، حداقل یک واحد کاهش یافته است و این تناقض با مینیمال بودن رنگ‌آمیزی c می‌باشد. پس $C_۱$، یک مجموعه‌ی مستقل ماکسیمال روی G خواهد بود.

حال فرض کنیم C_i روی $G - \bigcup_{j<i} C_j$، مجموعه‌ی مستقل ماکسیمال نباشد و فرض کنیم $C_i \subset S$. در این‌صورت نیز مانند آنچه که روی $C_۱$ پیاده کردیم و با دانستن اینکه همه‌ی رئوس S با هم غیر مجاورند، حداقل یک رأس با رنگ حداقل $i + ۱$ وجود دارد که می‌توان آن را با رنگ i رنگ‌آمیزی و به C_i اضافه نمود چنان‌که رنگ‌آمیزی هنوز مجاز باشد. اما همان‌طور که می‌بینیم $\Sigma(G)$ حداقل یک واحد کاهش خواهد یافت و این با مینیمال بودن رنگ‌آمیزی c در تناقض است و لذا حکم ثابت می‌شود. □

$S_۷$) $\Delta(G - C_۱) \leq \Delta(G) - ۱$.

برهان.

فرض کنید $v.$ راسی در $G - C_۱$ باشد. بنابه $S_۲$ می‌دانیم که $v.$ همسایه‌ای در $C_۱$ دارد، بنابراین

$$\deg_{(G-C_۱)} v. \leq \deg_{(G)} v. - ۱$$

پس خواهیم داشت $\Delta(G - C_۱) \leq \Delta(G) - ۱$ و حکم ثابت می‌شود. □

$S_۸$) $|V(G)|.\lfloor\frac{\chi(G)+۱}{۲}\rfloor \geq \Sigma_{\chi(G)}(G) \geq \frac{s(s+۱)}{۲}$.

برهان.
فرض کنیم c یک رنگ‌آمیزی مینیمال روی G و s قدرت رأسی آن باشد، بنابراین :

$$\Sigma(G) = \Sigma i|C_i| = ۱|c_۱| + ۲|C_۲| + ... + s|C_s|$$

همان‌طور که می‌دانیم از هر رنگ i، $۱ \leq i \leq s$ حداقل یک رأس وجود دارد، لذا :

$$۱|C_۱| + ۲|C_۲| + ... + s|C_s| \geq ۱ + ۲ + ... + s = \frac{s(s+۱)}{۲}$$

حال فرض کنیم $\chi(G) = k$ و $|V(G)| = n$ و حکم برای $G - C_k$ برقرار باشد.
به عبارت دیگر یک $(k-۱)$-رنگ‌آمیزی روی $G - C_k$ وجود دارد به‌طوری‌که :

$$\Sigma_{k-۱}(G - C_k) \leq \lfloor \frac{k-۱+۱}{۲}.n \rfloor$$

در این‌صورت داریم:

$$\Sigma_{k-۱}(G - C_k) = |C_۱| + ۲|C_۲| + ... + (k-۱)|C_{k-۱}| \leq \lfloor \frac{k}{۲}.n \rfloor$$

حال با اضافه و کم کردن $A = \frac{k+۱}{۲}|C_k|$ و $B = \frac{۱}{۲}(|C_۱| + |C_۲| + ... + |C_{k-۱}|)$ به طرف راست و اضافه نمودن $k|C_k|$ به طرفین نامعادله‌ی فوق خواهیم داشت:

$$\Sigma_{k-۱}(G - C_k) + k|C_k| \leq \frac{k+۱}{۲}(|C_۱| + ... + |C_k|) + (\underbrace{k|C_k| - A - B}_{I})$$

حال کافی است بگوییم که عبارت I کمتر یا مساوی با صفر است.
برای این‌منظور با توجه به $S_۱$ خواهیم داشت $k|C_k| \leq |V(G)|$ و بنابراین :

$$I = \frac{۱}{۲}(k|C_k| - (\underbrace{|C_۱| + |C_۲| + ... + |C_k|}_{|V(G)|}))$$

در این‌صورت $I \leq ۰$ و با قرار دادن $k = \chi(G)$ خواهیم داشت :

$$\Sigma_{\chi(G)}(G) \leq \frac{k+۱}{۲}.n + I \leq \frac{k+۱}{۲}.n$$

$$\Longrightarrow \Sigma_{\chi(G)}(G) \leq \lfloor \frac{k+۱}{۲}.n \rfloor$$

و حکم ثابت می‌شود. □

$S_۹$) $s(G) \leq \lfloor \sqrt{n(\chi(G)+۱)} \rfloor$.

برهان.
همان‌طورکه گفتیم برای هر گراف دلخواه مانند G داریم $\Sigma(G) \leq \lfloor \frac{\chi(G)+۱}{۲} n \rfloor$ حال اگر قدرت رأسی گراف را s در نظر بگیریم خواهیم داشت :

$$۱ + ۲ + ... + s \leq |C_۱| + |C_۲| + ... + |C_s| \Rightarrow \frac{s^۲}{۲} \leq \frac{s(s+۱)}{۲} \leq \frac{\chi(G)+۱}{۲} n$$

$$\Longrightarrow \frac{s^۲}{۲} \leq \frac{\chi(G)+۱}{۲} n$$

بنابراین $s(G) \leq \sqrt{n(\chi(G)+۱)}$ و از آنجایی‌که s عددی طبیعی است، حکم ثابت می‌شود. □

حال در اینجا به بیان یک لم و قضیه‌ای بسیار مهم می‌پردازیم که کران‌هایی تأثیرگذار و کلیدی را برای مجموع رنگی، در اختیار ما قرار می‌دهند و ما را در یافتن تقریب خوبی از جواب بهینه، یاری می‌رسانند.

لم ۲.۳.۳. [۲۲] برای هر گراف دلخواه G با n رأس و m یال داریم :

$$n \leq \Sigma(G) \leq m+n$$

برهان.
فرض کنیم c یک رنگ‌آمیزی مینیمال باشد، لذا طبق $S_۲$ برای هر $v. \in C_j$، $i \leq j$ حداقل $j-۱$ رأس وجود دارند که با $v.$ مجاور هستند. در این‌صورت بین C_j و $\bigcup_{i<j} C_i$، حداقل $|C_j|(j-۱)$ یال وجود دارد، به‌عبارت دیگر بین C_s و $\bigcup_{i<s} C_i$، حداقل $|C_s|(s-۱)$ یال و بین $C_{s-۱}$ و $\bigcup_{i<s-۱} C_i$ نیز حداقل $|C_{s-۱}|(s-۲)$ یال و همینطور با ادامه‌ی این روند، بین $C_۲$ و $C_۱$، حداقل $|C_۲|$ یال موجود است. لذا با فرض اینکه c یک رنگ‌آمیزی مینیمال روی G و s قدرت رأسی آن باشد خواهیم داشت :

$$\begin{aligned}\Sigma(G) &= \Sigma i|C_i| = ۱|C_۱| + ۲|C_۲| + ... + s|C_s| \\ &= \underbrace{|C_۱| + ... + |C_s|}_{n} + \underbrace{|C_۲| + ۲|C_۳| + ... + (s-۱)|C_s|}_{\text{حداقل تعداد یال}} \\ &\leq m+n\end{aligned}$$

اما از طرفی

$$\Sigma(G) = \underbrace{|C_۱| + |C_۲| + ... + |C_s|}_{n} + |C_۲| + ۲|C_۳| + ... + (s-۱)|C_s| \geq n$$

و در نتیجه حکم ثابت می‌شود. □

امّا قبل از بیان قضیه‌ی مورد نظر، لم زیر را که در اثبات قضیه‌ای که عنوان خواهیم کرد، بسیار تأثیرگذار است، بیان و از نتیجه‌ی آن در اثبات قضیه استفاده می‌کنیم.

لم ۳.۳.۳. [۲۲] برای هر گراف همبند G با m یال، یک رنگ‌آمیزی مجاز C وجود دارد به‌طوری‌که :

$$\Sigma C + \Sigma C_{۱۲} \leq ۳(m+۱)$$

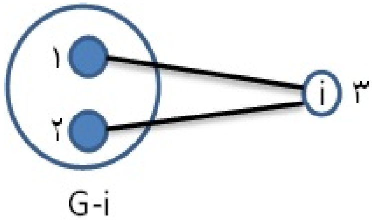
لازم به ذکر است که برای هر رنگ‌آمیزی مجاز $C = \{C_۱, C_۲, ..., C_t\}$، رنگ‌آمیزی اصلاح‌شده‌ی C_{ij}، با جابه‌جایی رنگ‌های i و j به‌دست می‌آید، همچنین منظور از ΣC در این لم، همان مجموع رنگ‌های رئوس حاضر در G، با رنگ‌هایی در C می‌باشد.

برهان.
با استقرا، لم را اثبات می‌کنیم. اگر G یک گراف بدون یال باشد، چیزی برای اثبات نداریم. فرض می‌کنیم که G یک گراف همبند دلخواه با n رأس باشد و رأسی مثل i را با درجه‌ی d_i، به‌گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که i رأس برشی نباشد.
حال با فرض درستی حکم برای گراف‌هایی با کمتر از n رأس، لذا برای گراف همبند $G-i$، یک رنگ‌آمیزی مجاز C^* وجود دارد به‌طوری‌که :

$$\Sigma C^* + \Sigma C^*_{۱۲} \leq ۳(m - d_i + ۱)$$

اینکه گفتیم i رأس برشی نباشد به‌خاطر این است که بتوان راه را برای فرض استقرا هموار کرد چرا که اگر i رأسی برشی باشد آنگاه گراف $G-i$، دیگر همبند نیست و نمی‌توان از فرض لم استفاده کرد. ضمناً تعداد یال‌های گراف $G-i$، $(m-d-i)$ می‌باشد.

برای $d_i \geq ۲$، یک رنگ‌آمیزی مطلوب C از G، با اختصاص دادن کوچکترین رنگ ممکن به رأس i که در C^* و $C^*_{۱۲}$ مشترک باشد، به‌دست می‌آید.



شکل ۳.۳: گراف G

با این کار $\Sigma C^* + \Sigma C^*_{۱۲}$، حداکثر به‌اندازه‌ی $۲(d_i + ۱)$ افزایش پیدا می‌کند و برای G و با فرض اینکه رنگ رأس i را با b_i نشان دهیم، خواهیم داشت :

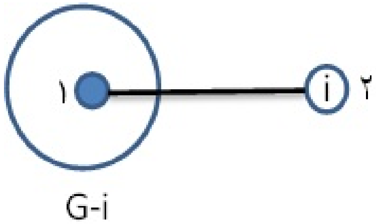
$$\Sigma C + \Sigma C_{۱۲} = \Sigma C^* + \Sigma C^*_{۱۲} + ۲(b_i) \leq ۳(m - d_i + ۱) + ۲(d_i + ۱)$$

(b_i را در ۲ ضرب کردیم، چون یک‌بار در ΣC و یک‌بار هم در $\Sigma C_{۱۲}$ محاسبه خواهد شد. همچنین $۲(b_i) \leq ۲(d_i + ۱)$ می‌باشد.)

بنابراین با توجه به اینکه $d_i \geq ۲$، داریم :

$$\Sigma C + \Sigma C_{۱۲} \leq ۳(m - d_i + ۱) + ۲(d_i + ۱) \leq ۳(m + ۱) - d_i + ۲ \leq ۳(m + ۱)$$

حال با فرض $d_i = ۱$، می‌توانیم رأس i را در بدترین حالت، با رنگ ۱ یا ۲ رنگ کنیم. چرا که درجه‌ی آن ۱ است و تنها با یک رأس مجاور است. با این کار، مقدار $\Sigma C^* + \Sigma C^*_{۱۲}$ به‌اندازه‌ی ۳ واحد، برای $\Sigma C_{۱۲} + \Sigma C$ در گراف G افزایش خواهد داشت.



شکل ۴.۳: گراف G

(اگر در C^*، رأسی که می‌خواهد با i در G مجاور شود با رنگی غیر از ۱ رنگ‌آمیزی شده باشد، آنگاه i در C رنگ ۱، و در $C_{۱۲}$ رنگ ۲ را خواهد پذیرفت. همچنین این مهم برای زمانی‌که رأس مجاور با i در G، رنگی

غیر از ۲ داشته باشد نیز برقرار است. بنابراین i، دو مقدار ۱ و ۲ و در مجموع ۳ را خواهد پذیرفت.)
حال داریم :

$$\Sigma C + \Sigma C_{12} = \Sigma C^* + \Sigma C^*_{12} + 1 + 2 \leq 3(m-1+1) + 3 = 3(m+1)$$

و بنابراین لم برقرار است. □

نتیجه‌ای که بلافاصله از لم فوق به‌دست می‌آید را در نتیجه‌ی (۴.۳.۳) بیان می‌کنیم.

نتیجه ۴.۳.۳. [۲۲] برای هر گراف همبند دلخواه G با m یال و رنگ‌آمیزی مجاز C داریم:

$$\Sigma C + \Sigma C_{12} \leq 3(m+1) \Rightarrow \min\{\Sigma C, \Sigma C_{12}\} \leq \frac{3}{2}(m+1)$$

$$\Longrightarrow \Sigma(G) \leq \left\lfloor \frac{3}{2}(m+1) \right\rfloor$$

برهان.
در واقع از تعریف میانگین دو عدد چنین برمی‌آید که میانگین هر دو عدد طبیعی یا صحیح و مثبت، بزرگتر یا مساوی با مینیمم آن دو عدد است و با توجه به اینکه $\Sigma(G)$ یک مقدار صحیح و مثبت است، مقدار کف را برای $\frac{3}{2}(m+1)$ در نظر می‌گیریم و لذا خواهیم داشت :

$$\Sigma(G) \leq \min\{\Sigma C, \Sigma C_{12}\} \leq \left\lfloor \frac{3}{2}(m+1) \right\rfloor$$

و همان‌طور که می‌دانیم $\Sigma(G) \leq \Sigma(G, C)$، لذا :

$$\Sigma(G) \leq \min\{\Sigma C, \Sigma C_{12}\} \leq \frac{3}{2}(m+1)$$

و چون $\Sigma(G)$ یک مقدار صحیح و مثبت است، بنابراین :

$$\Sigma(G) \leq \left\lfloor \frac{3}{2}(m+1) \right\rfloor$$

□

بنابر آنچه در لم (۳.۳.۳) ثابت شد و با توجه به نتیجه‌ی (۴.۳.۳)، به بیان و اثبات قضیه‌ی بسیار مهم زیر می‌پردازیم.

قضیه ۵.۳.۳. [۲۲] برای هر گراف همبند G با n رأس و m یال داریم:

$$\left\lceil \sqrt{8m} \right\rceil \leq \Sigma(G) \leq \left\lfloor \frac{3}{2}(m+1) \right\rfloor$$

و به‌علاوه برای هر m، گراف‌هایی موجودند که این کران‌ها را نتیجه می‌دهند.

برهان.
ابتدا نشان می‌دهیم که کران پایین در گراف‌های دوبخشی، که با استفاده از دو رنگ، رنگ‌آمیزی می‌شوند، به‌دست می‌آید.
در بین همه‌ی گراف‌های با m یال و مجموع رنگی مینیمال، گراف G با n رأس و رنگ‌آمیزی مینیمال c که در آن بیشترین تعداد رئوس، با رنگ ۱ رنگ‌آمیزی شده‌اند را انتخاب می‌کنیم. برای هر i، a_i را به‌عنوان تعداد رئوس

با رنگ i، در رنگ‌آمیزی c در نظر می‌گیریم.
حال نشان می‌دهیم که G باید یک گراف دوبخشی باشد.
فرض کنیم در رنگ‌آمیزی مینیمال c، ۳ رنگ به‌کار رفته باشد و j رأسی با رنگ ۳ باشد. حال رأس j را حذف کرده و دو رأس جدید را یکی با رنگ ۱ و دیگری با رنگ ۲، به رئوس G اضافه می‌کنیم.
دو رأس جدید را به همه‌ی رئوس با رنگ متفاوت از خود در G وصل می‌کنیم تا گراف همبند جدید G' به‌دست آید. با حذف رأس با رنگ ۳، باز کمبود مقدار ۳ با حضور دو رأس جدید با رنگ‌های ۱ و ۲ جبران می‌شود.
بنابراین رنگ‌آمیزی گراف G' به‌گونه‌ای است که مجموع رنگ‌های آن، همچنان برابر با $\Sigma(G)$ می‌باشد.
حال با توجه به اینکه j رأسی با رنگ ۳ بوده است، پس حداکثر به $n-1$ رأس دیگر، با $n-1$ یال، متصل است. البته باید این نکته را در نظر داشت که ممکن است علاوه بر رأس j، رئوس دیگری نیز با رنگ ۳ وجود داشته باشند که بین آنها و رأس j، هیچ یالی موجود نیست. بنابراین اگر a_3 تعداد کل رئوس با رنگ ۳ باشد، می‌بایست که $a_3 - 1$ یال از حداکثر یال گفته شده، کم کنیم تا حداکثر تعداد یال‌هایی که روی j واقع می‌باشند، به‌دست آید. لذا با حذف رأس j، حداکثر $n - a_3 = (n-1) - (a_3 - 1)$ یال حذف کرده‌ایم.
با توجه به اینکه رأس جدید با رنگ ۱ را به تمام رئوس دیگر با رنگی غیر از ۱ متّصل می‌کنیم، بنابراین با دانستن اینکه تعداد رئوس گراف G'، $n+1$ رأس است، پس به اندازه‌ی $n - a_2$ یال (توسط رسم یال از رأس جدید با رنگ ۱ به رئوس دیگر اما غیرهمرنگ با خود) و $n - a_1 - 1$ یال (توسط رسم یال از رأس جدید با رنگ ۲ به رئوس دیگر امّا غیرهمرنگ با خود که البته یک یال در مرحله‌ی قبل توسط رسم یال بین دو رأس جدید شمرده شده است و آن را در نظر نمی‌گیریم) به مجموعه‌ی یال‌هایمان در گراف جدید G' نسبت به G افزوده‌ایم.
حال اگر تفاضل حداکثر تعداد یال‌های حذفی، و تعداد یال‌های اضافه شده را در نظر بگیریم، می‌بینیم که حداقل به‌اندازه‌ی

$$(n - a_1 - 1) + (n - a_2) - (n - a_3) = (n - 1 - a_2 - a_1) + a_3$$

در گراف G' نسبت به گراف G، یال اضافه‌تر داریم. علّت اینکه چرا سخنی از حداقل اندازه به میان آوردیم این است که ما حداکثر تعداد یال را بین رأس j و رئوس دیگر در نظر گرفتیم و این یعنی یک مقدار زیاد را از یال‌هایی که اضافه کردیم، می‌بایست کم کرد.
امّا چرا گفتیم $n - 1 - a_1 - a_2 + a_3$ یک مقدار مثبت است تا به این برسیم که تعداد یال‌ها در گراف G' نسبت به G بیشتر شده است؟
در پاسخ با توجّه به اینکه a_i تعداد رئوس از رنگ i می‌باشد، داریم

$$n = \Sigma a_i = a_1 + a_2 + a_3 \geq a_1 + a_2 + 1$$

حداقل یک رأس j با رنگ ۳ وجود دارد و

$$n \geq a_1 + a_2 + 1 \Longrightarrow n - 1 - a_1 - a_2 \geq 0$$

این یعنی اینکه $n-1-a_1-a_2$ یک مقدار مثبت و بنابراین مقدار عبارت $n-1-a_1-a_2$ مثبت است و در نتیجه با حذف رأس j و جایگزین کردن دو رأس جدید با رنگ‌های ۱ و ۲، حداقل به‌اندازه‌ی $n - 1 - a_1 - a_2 + a_3$ یال اضافه کرده‌ایم. اگر $n - 1 - a_1 - a_2$ را صفر در نظر بگیریم، G' حداقل a_3 یال بیشتر از G دارد.
حال می‌خواهیم ببینیم که آیا می‌توان از G' تعدادی یال حذف کرد و به یک گراف همبند G'' با دقیقاً m یال برسیم؟

در پاسخ باید گفت که جواب مثبت است. در حالتی که در گراف G حداکثر تعداد یال بین رأس j و $n-a_۳$ رأس دیگر موجود بوده باشد، کافی است که در G'، یال بین دو رأس جدید با رنگ‌های ۱ و ۲ و همچنین یال‌هایی که از دو رأس جدید به رئوسی غیر از رنگ ۱ و ۲ رفته باشند را حذف کنیم. در این‌صورت گراف همبند G'' با دقیقاً m یال به‌دست می‌آید. حتّی اگر بین رأس j و چند رأس از $n-a_۳$ رأس دیگر در G، یال موجود نبوده باشد باز هم با حذف یال‌هایی از G'، می‌توان G'' را با دقیقاً m یال تولید کرد.
گراف G'' به‌گونه‌ای رنگ‌آمیزی شده است که مجموع رنگی آن همان $\Sigma(G)$ بوده است و m یال دارد. در نتیجه مجموع رنگی G'' با مقدار $\Sigma(G)$ کراندار شده است. از آنجایی که گراف G در بین همه‌ی گراف‌های با m یال، مینیمم مقدار $\Sigma(G)$ را دارا بود، لذا باید داشته باشیم $\Sigma(G)=\Sigma(G'')$.
امّا با این روش رنگ‌آمیزی، گراف G'' یک رأس با رنگ ۱، بیشتر از گراف G دارد و این با انتخاب G در تناقض است. بنابراین فرض اینکه G باید رأسی با رنگ ۳ داشته باشد، فرض درستی نیست.
از این رو گراف G با دو رنگ، رنگ‌آمیزی مجاز می‌شود و بنابراین یک گراف دوبخشی است.
همین‌جا باید متذکّر شویم که برخی گراف‌های غیر دوبخشی نیز همین مجموع رنگی را می‌دهند، در واقع ممکن است گراف‌های همبندی با m یال موجود باشند که همین مجموع رنگی را نتیجه بدهند امّا دوبخشی نباشند.
تا به حال در روند اثبات به اینجا رسیدیم که گراف همبند مفروض G با m یال، یک گراف دوبخشی است و با استفاده از دو رنگ، رنگ‌آمیزی می‌شود. حال بایستی نشان دهیم که کران پایین در گراف‌های دوبخشی به‌دست می‌آید.
در بین همه‌ی گراف‌های دو بخشی با m یال، و با به‌کار بردن $a=a_۱$ رأس از رنگ ۱ و $a_۲=n-a_۱$ رأس از رنگ ۲ در رنگ‌آمیزی مینیمال، اگر یال‌هایی را به گراف بیافزاییم و یک گراف دوبخشی کامل $k_{a,b}$ را به‌دست بیاوریم، واضح است که مجموع رنگی همچنان تغییری نمی‌کند، زیرا که در تبدیل گراف دوبخشی به دوبخشی کامل، تنها افزایش یال را داریم، آن‌هم از یک بخش به بخش دیگر، و درنتیجه واضح است که تغییری در مقدار رنگ رئوس هر بخش صورت نمی‌گیرد.
تعداد یال‌های گراف دوبخشی کامل $k_{a,n-a}$، $m=a(n-a)$ می‌باشد و در بحث مجموع رنگی، تعداد رئوس با رنگ ۱ باید بیشتر یا مساوی با تعداد رئوس با رنگ ۲ باشد و این یعنی تعداد رئوس با رنگ ۱ بیشتر یا مساوی با نصف n خواهد بود. از این رو برای $m\leq a(n-a)$ و $a\geq\frac{n}{۲}$، $\Sigma(B)$ (B گراف‌های دو بخشی با m یال می‌باشد) حداکثر برابر با

$$\Sigma(k_{a,n-a})=۱|C_۱|+۲|C_۲|=a+۲(n-a)=۲n-a$$

خواهد بود و این یعنی $\Sigma(B)\leq\Sigma(K_{a,n-a})$.
برای یک مقدار انتخابی از a، مینیمم مقدار برای $n-a=\lceil\frac{m}{a}\rceil$ اتفاق می‌افتد. (یعنی در واقع هر چقدر مقدار a انتخابی ما بیشتر باشد، تعداد رئوس با رنگ ۱ بیشتر، و از تعداد رئوس با رنگ ۲ کاسته می‌شود. لازم است که بگوییم تعداد m یال، ثابت است و با انتخاب تعداد رئوس با رنگ ۱ و رنگ ۲، می‌توان مقدار مجموع رنگی را بهینه نمود.) بنابراین

$$\Sigma(B)=\min_{\frac{n}{۲}\leq a\leq n}\left\{a+۲\lceil\frac{m}{a}\rceil\right\}$$

حال بدون در نظر گرفتن تابع سقف، تابع زیر به‌دست می‌آید

$$f(a)=a+\frac{m}{a}$$

و اگر از آن مشتق بگیریم و مینیمم مقدار را به‌ازای aی به‌دست آمده حساب کنیم، برابر با $\sqrt{8m}$ خواهد شد و داریم

$$f^{'}(a) = 1 + 2(\frac{-m}{a^2}) \Longrightarrow f^{'}(a) = 0 \Longrightarrow a = +\sqrt{2m}, -\sqrt{2m}$$

و از آنجایی که a تعداد را می‌رساند، پس مثبت و بنابراین به‌ازای $a = \sqrt{2m}$، مینیمم مقدار $\sqrt{8m}$ به‌دست می‌آید. در نتیجه کران پایین $\lceil\sqrt{8m}\rceil \leq \Sigma(B)$ حاصل خواهد شد. جزء صحیح سقف را برای $\sqrt{8m}$ در نظر می‌گیریم چون $\Sigma(B)$ یک عدد صحیح است.

کران بالا نیز با توجه به لم (۳.۳.۳) و نتیجه‌ی (۴.۳.۳) به‌وضوح قابل مشاهده هست و داریم

$$\Sigma(G) \leq \lfloor\frac{3}{2}(m+1)\rfloor$$

.

حال نشان می‌دهیم که کران‌های به‌دست آمده، برای هر m صادق است.

کران بالا در قضیه، برای همه‌ی مسیرهای p_n، دورهای فرد C_{2k+1}، همچنین گراف‌هایی با $3k+1$ رأس که از k کپی از k_3 و وصل کردن یک رأس در هر کپی به یک رأس جدید و تشکیل گرافی با $m = 4k$ یال و $\Sigma(G) = 6k+1$ به‌دست می‌آید.

حال صدق گفته‌های ذکر شده را بررسی می‌کنیم.

در رابطه با مسیرهای p_n، اگر n زوج باشد آنگاه نصف رئوس، رنگ ۱ و نصف دیگر رنگ ۲ را می‌پذیرند، بنابراین

$$\Sigma(p_n) = 1\frac{n}{2} + 2\frac{n}{2} = \frac{3}{2}n$$

و از طرفی $m(p_n) = n-1$، در نتیجه

$$\frac{3}{2} = \Sigma(p_n) \leq \frac{3}{2}(n-1+1) \Longrightarrow \Sigma(p_n) = \frac{3}{2}\Big(m(p_n)+1\Big)$$

اگر n فرد باشد آنگاه تعداد رئوس با رنگ ۱، یکی بیشتر از تعداد رئوس با رنگ ۲ خواهد بود، بنابراین اگر a تعداد رئوس با رنگ ۱ در p_n باشد، در این‌صورت $a-1$ رأس از رنگ ۲ خواهیم داشت و داریم

$$m(p_n) = n-1 = 2a-2 \Longrightarrow \Sigma(p_n) = a+2(a-1) \Longrightarrow \Sigma(p_n) \leq \frac{3}{2}\Big(m(p_n)+1\Big)$$

همچنین کران پایین نیز برای $\Sigma(p_n$ صدق می‌کند.

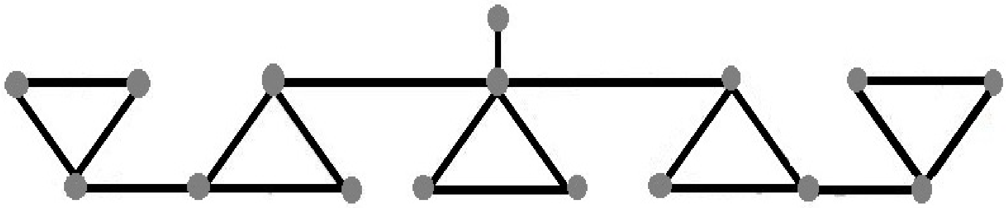
در مورد دورهای زوج، مانند مسیرهای p_n با n زوج، عمل می‌شود. در صورتی‌که دور فرد باشد، مانند C_{2k+1}، آنگاه اگر a تعداد رئوس با رنگ ۱ باشد، تعداد رئوس با رنگ ۲ برابر خواهد بود با $2k+1-(a+1) = 2k-a$ و همچنین یک رأس با رنگ ۳ نیز خواهیم داشت.

در این‌صورت $\Sigma(C_{2k+1}) = 4k-a+3$ و از طرفی $m(C_{2k+1}) = 2k+1$، بنابراین

$$\Sigma(C_{2k+1}) \leq \frac{3}{2}\Big(m(C_{2k+1})+1\Big)$$

به‌وضوح کران پایین نیز برقرار خواهد بود.

در مورد گراف‌های با $3k+1$ رأس که از k کپی از k_3 و وصل کردن یک رأس در هر کپی به یک رأس، و تشکیل گراف با $m = 4k$ و $\Sigma(G) = 6k+1$، به‌وجود می‌آید، مانند شکل زیر نیز می‌توان صدق کران بالا و پایین قضیه را در این خصوص مشاهده نمود. یک گراف دوبخشی B با m یال، مانند k_{ab}، از مقدار دهی b با عددی



شکل ۵.۳: گراف G با $3k+1$ رأس و $m = 20$ یال و $\Sigma(G) = 31$

صحیح و نزدیک به مقدار $\sqrt{\frac{m}{2}}$، کران پایین را به‌دست می‌دهد. با فرض $b = \sqrt{\frac{m}{2}} + \epsilon$ که $-0.5 \le \epsilon + 0.5$، یک مقدار صحیح برای b به‌دست می‌آید. a را عددی صحیح و برابر با $2b - \lfloor 4\epsilon \rfloor$ قرار می‌دهیم. گراف k_{ab}، با فرض $a > b$، مجموع رنگی برابر با مقدار زیر را دارد

$$\Sigma(k_{ab}) = \Sigma i|C_i| = 1a + 2b = 2b - \lfloor 4\epsilon \rfloor + 2\sqrt{\frac{m}{2}} + 2\epsilon = \sqrt{8m} + 4\epsilon + \lfloor 4\epsilon \rfloor$$

از آنجایی‌که تفاوت این مقدار از $\sqrt{8m}$ کمتر از ۱ است و مجموع رنگی عددی صحیح است، لذا آن را برابر $\lceil \sqrt{8m} \rceil$ در نظر می‌گیریم.

امّا این گراف چند یال دارد؟ با بررسی مقادیر ϵ در هر کدام از چهار بازه‌ی

$$(-0.5, -0.25)\,,\ [-0.25, 0)\,,\ [0, 0.25)\,,\ (0.25, 0.5)$$

به سادگی قابل مشاهده است که هر گراف k_{ab}، $ab > m - 1$ یال دارد.

برای مثال اگر $\epsilon = 0.25$، $b = \sqrt{\frac{m}{2}}$ و $a = 2\sqrt{\frac{m}{2}} - \frac{1}{2}$، درنتیجه $ab = m - \frac{1}{8} > m - 1$.

از آنجایی‌که ab یک عدد صحیح است می‌توان نتیجه گرفت $ab \ge m$ و می‌دانیم که مقدار ab ماکسیمم تعداد یال‌هاست.

لذا B را هر زیرگراف از k_{ab} با دقیقاً m یال در نظر می‌گیریم و در واقع اینکه برای هر m دلخواه گراف‌هایی موجودند که در کران قضیه هستند را نتیجه می‌گیریم و قضیه اثبات می‌شود.

□

همان‌طور که قبلاً بیان شد، برای هر گراف G، نامعادله‌ی $s(G) \le \Delta(G) + 1$ برقرار است. قضیه‌ی زیر نشان می‌دهد که در این نامعادله، تساوی برقرار است اگر و تنها اگر G یک گراف کامل یا یک دور فرد باشد. در برهان این قضیه، به‌طور اساسی از ویژگی‌های $s(G)$ استفاده می‌شود و چون $\chi(G) \le s(G)$، پس می‌توان آن‌را برهان جدیدی برای قضیه‌ی «بروکس» دانست.

قضیه ۶.۳.۳. [۹] فرض کنید G یک گراف همبند باشد، آنگاه $s(G) = \Delta(G) + 1$ اگروتنهااگر G یک گراف کامل یا یک دور فرد باشد.

برهان.

اگر G یک گراف کامل n رأسی باشد، در این‌صورت چون همه‌ی رئوس آن باهم مجاور هستند و با توجه به اینکه $\Delta(G) = n - 1$، لذا

$$s(G) = \chi(G) = \Delta(G) + 1$$

همچنین اگر G یک دور فرد باشد، از آنجایی‌که $\Delta(G) = ۲$ و تعداد رئوس G، فرد می‌باشد، لذا اگر یک رأس از آن جدا کنیم، می‌توان با دو رنگ، مسیر به‌وجودآمده را رنگ‌آمیزی مینیمال نمود. حال رأس حذفی را به محل خود بازگشت می‌دهیم و چون حتماً بین دو رأس با رنگ‌های ۱ و ۲ قرار می‌گیرد، پس می‌بایست که به آن رنگ ۳ را داد تا هم رنگ‌آمیزی مجاز بماند و هم اینکه رنگ‌آمیزی، مینیمال باشد. بنابراین در این حالت نیز $s(G) = \Delta(G) + ۱$.

حال فرض کنیم که برای گراف همبند G، $s(G) = \Delta + ۱$. می‌خواهیم ثابت کنیم که گراف همبند G، کامل یا دور فرد می‌باشد.

فرض کنیم $\Delta(G) = ۱$، در این‌صورت گراف همبند G، یک مسیر به‌طول یک می‌باشد و می‌دانیم که در یک مسیر، $\chi(G) = s(G) = ۲$ و $s(G) = \Delta(G) + ۱$.

درحالتی‌که $\Delta(G) = ۲$، در این‌صورت نیز گراف همبند G، ممکن است یک مسیر و یا یک دور باشد. اگر مسیر باشد که $s(G) = ۲ \leq \Delta(G) + ۱ = ۳$، و اگر هم دور زوج باشد، باز $s(G) = ۲ \leq \Delta(G) + ۱$.

درحالتی‌که $\Delta(G) = ۲$ و G یک دور فرد باشد $s(G) = \Delta(G) + ۱ = ۳$.

در حالت $\Delta(G) = ۳$، برهان زیر عیناً برقرار است و تنها کافی است به‌جای بحث در مورد مؤلفه‌ی k_Δ، در مورد مؤلفه‌ی $C_{۲n+۱}$ بحث کنیم.

حال برهان زیر را برای حالتی‌که $\Delta(G) \geq ۴$ می‌باشد، بیان می‌کنیم.

فرض کنیم G کوچکترین مثال نقضی باشد که در آن $s(G) = \Delta + ۱$ و G گراف کامل یا دور فرد نیست، درضمن ماکسیمم درجه‌ی G را برابر با Δ در نظر می‌گیریم.

نخست ادّعا می‌کنیم که یک رنگ‌آمیزی مینیمال مانند c، روی G وجود دارد به‌طوری‌که $|C_{\Delta+۱}| = ۱$.

اثبات ادّعا از خودم :

برای اثبات ادّعا، فرض کنیم c یک رنگ‌آمیزی مینیمال روی G باشد و دو رأس u و v موجود باشند به‌طوری‌که $c(u) = c(v) = \Delta + ۱$.

از آنجایی‌که c یک رنگ‌آمیزی مینیمال و ماکسیمم درجه‌ی G، Δ می‌باشد و همچنین با توجه به $S_۲$، پس رأس u با دقیقاً Δ رأس از G، با رنگ‌های $۱, ۲, \ldots, \Delta$ مجاور است.

این Δ رأس مجاور با u، یا همگی باهم مجاور، و یا اینکه همه یا تعدادی از آنها باهم غیرمجاور هستند.

اگر همه یا تعدادی از آنها باهم غیرمجاور باشند، در این‌صورت هر کدام از آنها، بسته به مقدار رنگ خود، با تعداد یک واحد کمتر از مقدار رنگ خود، از رئوس G، مجاور خواهند بود. امّا در این حالت می‌توان رنگ برخی از Δ رأس مجاور با u را با رنگ برخی رئوسی که با هر یک از این Δ رأس (به غیر از u) مجاور هستند، مبادله نمود بدون آنکه به $\Sigma(G)$ مقداری افزوده شود، از طرفی رنگ‌آمیزی هنوز مینیمال است. (این تبادل رنگ روی رأسی از Δ رأس مجاور با u اتفاق می‌افتد که حداقل با یکی از Δ رأس مجاور نباشد.)

اگر دقت کنیم با این تبادل رنگی که انجام دادیم، رنگ حداقل یکی از Δ رأس مجاور با u کاهش می‌یابد که درنتیجه با این اتفاق، می‌توان رنگ رأس u را به مقداری کمتر کاهش داد و این تناقض با فرضی است که گفتیم دو رأس با رنگ $\Delta + ۱$ در رنگ‌آمیزی مینیمال c وجود دارد، لذا فرض اینکه همه یا تعدادی از Δ رأس مجاور با u، باهم غیر مجاور باشند رد می‌شود.

بنابراین، Δ رأس مجاور با u، همه باهم همسایه هستند.

حال همین روند را نیز می‌توان برای رأس v بیان نمود که Δ رأس مجاور با آن همگی باهم مجاورند.
با توجه به اینکه فرض کردیم رأس v، رأسی با رنگ $\Delta + ۱$ است، لذا رأس v نمی‌تواند در همسایگی u قرار داشته باشد، چرا که اگر این مجاورت اتفاق افتد، با توجه به اینکه رأس v با Δ رأس مجاور است، آنگاه هم مقدار رنگ v در رنگ‌آمیزی مینیمال و هم ماکسیمم درجه بودن Δ برای G، نقض می‌شود. بنابراین v نمی‌تواند نه با u و نه با Δ رأس مجاور با u، همسایه باشد. همچنین بایستی گفت که هیچ‌کدام از مجاورهای u و v نیز نمی‌توانند باهم مجاور باشند، زیرا دوباره تناقض با ماکسیمم درجه بودن Δ برای G، ایجاد می‌شود.
بنابر آنچه گفتیم، u و v، نه می‌توانند در مجاورت هم قرار بگیرند و نه همسایه‌های آنها باهم مجاور هستند. ضمناً لازم است بگوییم که هیچ رأس دیگری از G نیز نمی‌تواند با u و v و Δ رأس‌های مجاور با آنها، به‌علت نقض ماکسیمم درجه بودن Δ برای G، همسایه باشد که این تناقض با همبند بودن G است. لذا یک رنگ‌آمیزی مینیمال c روی G وجود دارد که در آن $|C_{\Delta+۱}| = ۱$.

اثبات ادّعا در [۹] :

فرض کنیم c یک رنگ‌آمیزی مینیمال برای G، و u رأسی در G به‌طوری‌که $c(u) = \Delta + ۱$.
حال اگر $G - u$ دارای مؤلفه‌های $G_۱, G_۲, ..., G_t$ باشد، آنگاه برای هر $۱ \leq i \leq t$ داریم $s(G_i) \leq \Delta(G)$، چون با توجّه به اینکه همواره $s(G) \leq \Delta + ۱$، لذا اگر $s(G - u) = \Delta(G) + ۱$ و $G - u$ کامل نباشد، این تناقض با کوچکترین مثال نقض بودن G می‌باشد و اگر هم $G - u$ کامل باشد، آنگاه با افزوده شدن u به G، چون u حداقل به یکی از رئوس $G - u$ باید متصل شود، ماکسیمم درجه‌ی G برابر با $\Delta + ۱$ می‌شود و این تناقض با ماکسیمم درجه بودن Δ برای G می‌باشد.
همچنین اگر $s(G - u) = \Delta(G) + ۱$ و $G - u$ دور فرد نباشد، اینجا نیز تناقض با کوچکترین مثال نقض بودن G، ایجاد می‌شود و اگر هم $G - u$ دور فرد باشد، به‌وضوح می‌توان مشاهده نمود که یا رنگ‌آمیزی c که در آن $(c(u) = \Delta + ۱)$ برای G، مینیمال نمی‌باشد و یا اینکه $s(G) < \Delta(G) + ۱$، که این یک تناقض با فرض اولّیه‌ی قضیه است.
بنابراین برای هر $۱ \leq i \leq t$ داریم $s(G_i) \leq \Delta(G)$. لذا c' را می‌توان یک رنگ‌آمیزی برای $G - u$ با Δ و به‌طور مینیمال در نظر گرفت. حال رنگ رأس u را $\Delta + ۱$ قرار می‌دهیم تا c' را به یک رنگ‌آمیزی برای G گسترش دهیم.

حال می‌خواهیم ببینیم که آیا c' می‌تواند یک رنگ‌آمیزی مینیمال برای G باشد یا خیر؟
برای این منظور داریم :

$$\forall i \quad \Sigma(G_i, c') \leq \Sigma(G_i, c)$$

لذا

$$\Sigma(G - u, c') \leq \Sigma(G - u, c)$$

پس

$$\Sigma(G, c') = \Delta + ۱ + \Sigma(G - u, c') \leq \Delta + ۱ + \Sigma(G - u, c) = \Sigma(G, c)$$

بنابراین c' نیز برای G مینیمال است و توجّه کنیم که در رنگ‌آمیزی c'، $C'_{\Delta+۱} = \{u\}$.

با توجّه به آنچه بیان نمودیم، گراف $G - C_۱$ را در نظر می‌گیریم که G را به t مؤلفه تقسیم نموده است.

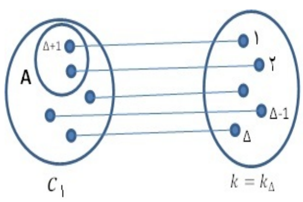
فرض کنیم هیچ‌کدام از مؤلفه‌های $G - C_1$، k_Δ نباشند. به‌وضوح قابل مشاهده است که ماکسیمم درجه در هر مؤلفه از $G - C_1$، بنابه S_7 کمتر از Δ است. از طرفی $s(G - C_1) = max\{s_1, s_2, ..., s_t\}$ که در آن s_iها، قدرت‌های رأسی هر مؤلفه از $G - C_1$ می‌باشند. بنابراین با توجه به فرض k_Δ نبودن هیچ‌کدام از مؤلفه‌ها و همچنین با توجه به $\Delta(G - C_1) \leq \Delta(G) - 1$، داریم

$$s(G - C_1) < \Delta(G) \Longrightarrow s(G - C_1) \leq \Delta(G) - 1$$

لذا بنابه S_5 داریم

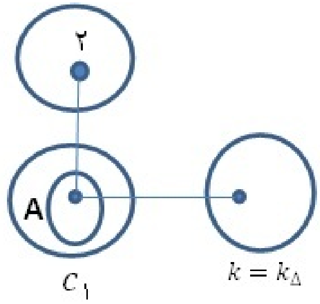
$$s(G) - 1 \leq \Delta(G) - 1 \Longrightarrow s(G) \leq \Delta(G)$$

که این تناقض با فرض قضیه یعنی $s(G) = \Delta(G) + 1$ می‌باشد.
لذا حداقل یک مؤلفه از مؤلفه‌های $G - C_1$، گراف کامل k_Δ می‌باشد که آنرا با k نشان می‌دهیم. لازم است همینجا این را بگوییم که نمی‌توانستیم سخن از مؤلفه‌ی $k_{\Delta+1}$ برای $G - C_1$ به‌میان بیاوریم، چرا که در آن‌صورت ماکسیمم درجه بودن Δ برای G، نقض می‌شد.
امّا از آنجاکه در رنگ‌آمیزی مینیمال c روی G، فقط یک رأس از رنگ $\Delta + 1$ داریم، پس دقیقاً یک مؤلفه از مؤلفه‌های $G - C_1$، با گراف کامل $K_{n=\Delta}$، یکریخت خواهد بود.
با توجه به اینکه c یک رنگ‌آمیزی مینیمال روی G می‌باشد، پس رنگ‌های موجود در k، $2, 3, ..., \Delta + 1$ می‌باشند. بنابراین هر رأس موجود در k، بنابه S_2، حداقل یک همسایه در C_1 داشته است. امّا از آنجاکه اگر هر کدام از رئوس k به دو رأس از C_1 وصل باشند آنگاه درجه‌ی آن رأس‌ها در G بیشتر از Δ می‌شود و تناقض با ماکسیمم درجه بودن Δ برای G به‌وجود می‌آید، پس هر رأس موجود در مؤلفه‌ی k، یک همسایه‌ی یکتا در C_1 دارد.
حال مجموعه‌ی A را به‌صورت $A = C_1 \cap N(v(k))$ در نظر می‌گیریم. با این کار، A شامل رئوس با رنگ ۱ می‌شود، البته با این ویژگی که با رئوس k، همسایه هستند. آنگاه می‌توانیم به هر رأس $v \in A$، رنگ $\Delta + 1$ را بدهیم و k را با رنگ‌های $1, 2, ..., \Delta$ دوباره رنگ‌آمیزی کنیم، به‌گونه‌ای که رنگ‌آمیزی هنوز مجاز و مجموع رنگی همچنان بدون تغییر بماند.



شکل ۶.۳: (الف)

حال با ایده‌ی مشابهی، یعنی حذف رئوس با رنگ ۱، می‌توان دید که هر رأس در A، همراه همسایه‌هایش که در k نیستند، یک گراف کامل Δ رأسی، تشکیل می‌دهند. این ایجاب می‌کند که هر رأس A، دقیقاً یک همسایه در k و یک همسایه در $C_2 - V(k)$ دارد.

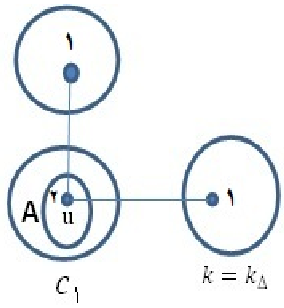


شکل ۷.۳: (ب)

حال فرض کنیم رأس $u \in A$، آن رأسی از A باشد که رأس همسایه‌اش در k، رنگ ۲ دارد، از طرفی رأس u با یک رأس دیگر، از رنگ ۲، که در k نیست، مجاور است. حال به رنگ‌آمیزی اولیّه‌ی گراف برمی‌گردیم.
گراف $G_{۱۲}$که شامل همه‌ی زیرگراف‌های القایی از G که روی رئوس با رنگ ۱ و ۲ ساخته می‌شوند، می‌باشد را در نظر می‌گیریم و آن مؤلفه‌ای از $G_{۱۲}$ را که شامل u است، H می‌نامیم. حال دو حالت را بررسی می‌کنیم.

حالت اول :

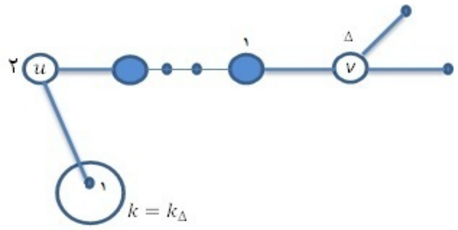
اگر Hمسیر باشد آنگاه با معاوضه‌ی رنگ‌های ۱ و ۲ با هم در H و بدون اینکه مجاز بودن رنگ‌آمیزی، نقض شود، چون رأس مجاور u، در k نیز رنگ ۲ داشت، با این کار، رنگ رأس مجاور با u در k، به ۱ کاهش می‌یابد و بنابراین می‌توان ۱ واحد از همه‌ی رنگ‌های موجود در k را کاست و لذا G با Δ رنگ و مجموع رنگ کمتر از $\Sigma(G)$، به‌طور مجاز، رنگ‌آمیزی می‌شود و این تناقض با فرض $s(G) = \Delta + ۱$ می‌باشد.



شکل ۸.۳: (پ)

حالت دوم :

اگر H مسیر نباشد آنگاه فرض کنیم v، نزدیکترین رأس از H به u باشد که $\deg(v) \geq ۳$. **(**فرض اینکه $\deg(v) \geq ۳$، به‌خاطر فرض مسیر نبودن H است، چراکه حداکثر درجه‌ی هر رأس در مسیر، ۲ می‌باشد**)** از آنجا که $\deg(v)$ حداکثر Δ است، به‌وضوح می‌توان دید که رنگی غیر از $\Delta + ۱$ وجود دارد که در همسایگی v ظاهر نشده است.
آن رنگ غیر از $\Delta + ۱$ را به v داده و رنگ‌های ۱ و ۲ را با هم در مسیر از u به v و مسیر از u به رأس با رنگ ۲ در k، معاوضه می‌کنیم.



شکل ۹.۳: (ت)

رنگ‌آمیزی جدید، همچنان مجاز، و مجموع رنگ‌های رئوس G حداکثر برابر $\Sigma(G)+\Delta-۲+۱$ می‌شود. همان‌طور که می‌دانیم با این تغییر رنگ، رنگ رأسی از k که برابر با ۲ بود، به رنگ ۱ تغییر می‌یابد و مانند حالت اول، می‌توان k را با رنگ‌های $\Delta ,\dots ,۲ ,۱$، به‌طور مجاز، رنگ‌آمیزی نمود که در این‌صورت رنگ $\Delta+۱$، حذف، و مجموع رنگ‌های رئوس G با رنگ‌آمیزی جدید روی G، برابر با $\Sigma(G)+\Delta-۱-\Delta=\Sigma(G)-۱$ می‌شود. لذا توانستیم با کمتر از $s(G)=\Delta+۱$ رنگ، گراف G را با مجموع رنگ کمتر از $\Sigma(G)$، رنگ‌آمیزی مجاز نماییم و این با فرض قضیه در تناقض است.

با این دو تناقضی که در حالت اول و دوم حاصل شد، نتیجه می‌گیریم که حکم برقرار است.

□

همان‌طورکه قبلاً ذکر شد، برای هر گراف G داریم $\chi(G)\leq col(G)$. امّا نامساوی $s(G)\leq col(G)$ همواره برقرار نیست. به‌عنوان مثال، تقریباً اغلب درخت‌ها قدرتی بیشتر از ۲ دارند، درحالی‌که «عدد رنگ‌آمیزی» آنها همواره ۲ است.

قضیه‌ی زیر بهبودی از قضیه‌ی (۶.۳.۳) است.

قضیه ۷.۳.۳. [۹] برای هر گراف دلخواه مانند G داریم :

$$s(G)\leq\left\lceil\frac{col(G)+\Delta(G)}{۲}\right\rceil$$

برهان.

فرض کنیم G کوچکترین مثال نقضی باشد که :

$$s(G)>\left\lceil\frac{col(G)+\Delta(G)}{۲}\right\rceil$$

حال ادّعا می‌کنیم که یک رنگ‌آمیزی مینیمال c با s رنگ، روی G وجود دارد به‌طوری‌که $|C_s|=۱$.

برای اثبات ادّعا، فرض کنید v یکی از رئوس با رنگ s در G باشد. حال گراف $G-v$ را در نظر بگیرید و چون G کوچکترین مثال نقض بود، لذا برای $G-v$ داریم :

$$s(G-v)\leq\left\lceil\frac{col(G-v)+\Delta(G-v)}{۲}\right\rceil\leq\left\lceil\frac{col(G)+\Delta(G)}{۲}\right\rceil<s(G)$$
$$\Longrightarrow s(G-v)<s(G)$$

حال فرض کنید $G-v$ را با $s(G-v)\leq s-۱$ رنگ، به‌طور مینیمال رنگ‌آمیزی کرده‌ایم. بنابراین کافی است رنگ s را به v داده و v را به $G-v$ اضافه نمود. لذا توانستیم یک رنگ‌آمیزی مینیمال c برای G به‌دست

بیاوریم که در آن $C_s = \{v\}$.

مجموعه‌ی S را مجموعه‌ی همه‌ی رأس‌هایی چون v در نظر بگیرید که یک رنگ‌آمیزی مینیمال از G با s رنگ وجود دارد به‌طوری‌که $C_s = \{v\}$. به‌عبارت ساده‌تر، S را مجموعه‌ی آن رأس‌هایی در نظر بگیرید که در رنگ‌آمیزی‌های مینیمال متفاوت روی G، که فقط یک رأس از G دارای رنگ s است، رنگ s را می‌پذیرند.

حال با توجّه به مثال نقض بودن G و اینکه $s(G)$ یک مقدار صحیح و مثبت است داریم :

$$s(G) > \left\lceil \frac{col(G)+\Delta(G)}{۲} \right\rceil \Longrightarrow s(G) - ۱ \geq \left\lceil \frac{col(G)+\Delta(G)}{۲} \right\rceil$$

در نتیجه:

$$s(G) - ۱ \geq \frac{col(G)+\Delta(G)}{۲}$$

$$۲s(G) - ۲ - col(G) \geq \Delta(G) \qquad (۶.۳)$$

حال فرض کنید t، تعداد رنگ‌هایی باشد که در همسایگی C_s، تنها یک‌بار ظاهر شده‌اند.

بنابراین تعداد رنگ‌هایی که در همسایگی C_s، بیش از یک‌بار ظاهر شده‌اند، برابر با $s - ۱ - t$ می‌باشد و خواهیم داشت :

$$t + ۲(s - ۱ - t) \leq \deg(v) \leq \Delta(G)$$

و با توجه به (۶.۳)، داریم :

$$col(G) \leq ۲(s(G) - ۱) - \Delta(G) \leq t$$

و بنابراین حداقل $col(G)$ رنگ متفاوت از هم و غیر همرنگ با s، دقیقاً یک‌بار در همسایگی مجموعه‌ی C_s ظاهر می‌شوند که می‌توان رنگ s را با آن حداقل $col(G)$ رنگ، در همسایگی مجموعه‌ی C_s معاوضه کرد. لذا درجه‌ی هر رأس S، حداقل $col(G)$ می‌باشد و این یعنی $\delta(G[S]) \geq col(G)$. امّا همان‌طورکه می‌دانید $col(G) = ۱ + max\, \delta_{H \subseteq G}(H)$ و این یعنی $col(G) > \delta(H)$. بنابراین به وضوح تناقض را مشاهده می‌نماییم و درنتیجه حکم ثابت می‌شود. □

«جیانگ» و «وست» در [۱۲] نشان دادند که در (۷.۳.۳)، کران بالا برای $s(G)$، از این کمتر نمی‌شود، و به‌اصطلاح، کران بالای آورده شده در (۷.۳.۳) برای $s(G)$، حتماً اتفاق می‌افتد.

با استفاده از قضیه‌ی (۷.۳.۳) نتیجه می‌گیریم که $\lceil \frac{\Delta(T)}{۲} \rceil + ۱$ یک کران بالا برای درختان می‌باشد.

گزاره‌ی زیر، بهبودی از قضیه‌ی (۷.۳.۳) برای درختان می‌باشد.

گزاره ۸.۳.۳. ([۹]) برای هر درخت T با قطر $d(T)$ داریم :

$$s(T) \leq \lceil \frac{\min\left(d(T), \Delta(T)\right)}{۲} \rceil + ۱$$

برهان.

فرض کنید $\Delta(T) \leq d(T)$، در این‌صورت مطابق قضیه‌ی (۷.۳.۳) داریم :

$$s(T) \leq \lceil \frac{\Delta(T)}{۲} \rceil + ۱$$

و لذا چیزی برای اثبات وجود ندارد.

در غیر این‌صورت، یعنی $d(T) < \Delta(T)$، بایستی نشان داد که $s(T) \leq \lceil \frac{d(T)}{۲} \rceil + ۱$.

برای این منظور، فرض کنید T کوچکترین مثال نقض باشد به‌طوری‌که $s(T) > \lceil \frac{d(T)}{۲} \rceil + ۱$.
حال ادّعا می‌کنیم که در یک رنگ‌آمیزی مینیمال از T، همه‌ی رئوس از درجه‌ی یک، باید با رنگ ۱، رنگ‌آمیزی شوند. برای اثبات ادّعا، فرض کنید v یک رأس از درجه‌ی یک، با رنگی بیشتر از ۱ باشد. در این‌صورت با توجه به اینکه $s(T) > \lceil \frac{d(T)}{۲} \rceil + ۱$، داریم :

$$s(T-v) = s(T)$$

از طرفی

$$d(T-v) \leq d(T)$$

حال داریم :

$$s(T) = s(T-v) > \lceil \frac{d(T)}{۲} \rceil + ۱ \geq \lceil \frac{d(T-v)}{۲} \rceil + ۱$$

درنتیجه

$$s(T-v) > \lceil \frac{d(T-v)}{۲} \rceil + ۱$$

که این تناقض با کوچکترین مثال نقض بودن T می‌باشد. لذا یک رنگ‌آمیزی مینیمال برای T وجود دارد که در آن همه‌ی برگ‌ها، رنگ ۱ دارند.
حال $T - C_۱$ را در نظر بگیرید. به‌وضوح می‌توان مشاهده نمود که $T - C_۱$، یک جنگل است، چرا که اعضای مجموعه‌ی $C_۱$، شامل تمام رئوس با درجه‌ی یک و تعدادی رئوس با درجه‌ی بیشتر از یک می‌باشد (بنابه کوچکترین مثال نقض بودن T) و به‌راحتی می‌توان دید که اگر $C_۱$ فقط رئوس با درجه‌ی یک را داشته باشد آنگاه تنها یک مؤلفه‌ی همبند $T - C_۱$ وجود دارد و اگر علاوه بر رئوس با درجه‌ی یک، رئوس با درجات بالاتر نیز در $C_۱$ موجود باشند، آنگاه چون هر رأس درخت T، یک رأس برشی است، لذا $T - C_۱$ حتماً یک جنگل خواهد بود.
بنابر آنچه گفته شد در می‌یابیم که قطر هر مؤلفه‌ی $T - C_۱$، حداکثر $d(T) - ۲$ می‌باشد و با توجه به کوچکترین مثال نقض بودن T و در نظر داشتن $S_۵$، برای $T - C_۱$ نامعادله‌ی زیر را خواهیم داشت که :

$$s(T - C_۱) = s(T) - ۱ \leq \lceil \frac{d(T - C_۱)}{۲} \rceil + ۱ \leq \lceil \frac{d(T) - ۲}{۲} \rceil + ۱$$

$$\Longrightarrow s(T) - ۱ \leq \lceil \frac{d(T) - ۲}{۲} \rceil + ۱$$

$$\Longrightarrow s(T) \leq \lceil \frac{d(T)}{۲} \rceil + ۱$$

که این یک تناقض با فرض مینیمال بودن T به‌طوری‌که $s(T) > \lceil \frac{d(T)}{۲} \rceil + ۱$ می‌باشد. در نتیجه حکم ثابت می‌شود و

$$s(T) \leq \lceil \frac{d(T)}{۲} \rceil + ۱$$

□

حال دو کران را برای مجموع رنگی درختان، با استفاده از تعداد رئوس آنها بیان می‌کنیم.

قضیه ۹.۳.۳. [۷] فرض کنید T درختی با $n \geq ۲$ رأس باشد، آنگاه
$$n + ۱ \leq \Sigma(T) \leq \lfloor ۱٫۵n \rfloor$$

برهان.
در رنگ‌آمیزی درختان برای محاسبه‌ی $\Sigma(T)$ حداقل دو رنگ برای رنگ‌آمیزی استفاده می‌شود، و این یعنی $s(T) \geq \chi(T) = ۲$. بنابراین اگر T دارای $n \geq ۲$ رأس باشد، حداقل یک رأس از رنگ ۲ می‌بایست که موجود باشد. لذا در این رنگ‌آمیزی، حداکثر $n - ۱$ رأس از رنگ ۱ و حداقل یک رأس از رنگ ۲ موجود می‌باشد و این منجر می‌شود به اینکه
$$\Sigma(T) \geq (n - ۱)(۱) + ۱(۲) = n + ۱$$

به‌عنوان مثال برای درخت ستاره‌ی $k_{۱,n-۱}$، کران پایین قضیه به‌دست می‌آید.
یک درخت، گرافی است دوبخشی، و لذا می‌توان درخت را با رنگ‌های $\{۱, ۲\}$ به‌طور مجاز، رنگ‌آمیزی نمود. حال رئوس حاضر در بخش بزرگتر از نظر تعداد رأس را با رنگ ۱ و مابقی رئوس در بخش دیگر را با رنگ ۲ رنگ‌آمیزی می‌کنیم.
بنابراین اگر $\chi(T)$ عدد رنگی، و $s(T)$ قدرت رأسی درخت باشند داریم
$$\Sigma_{s(T)}(T) \leq \Sigma_{\chi(T)}(T) \leq ۱\lceil \frac{n}{۲} \rceil + ۲\lfloor \frac{n}{۲} \rfloor = \lfloor ۱٫۵n \rfloor$$
لذا برای هر درخت $n \geq ۲$ خواهیم داشت
$$n + ۱ \leq \Sigma(T) \leq \lfloor ۱٫۵n \rfloor$$

□

قضیه ۱۰.۳.۳. [۱۳] فرض کنید G یک گراف و c یک رنگ‌آمیزی از G با استفاده از n رنگ باشد. اگر $V(G)$ را بتوان به زیرمجموعه‌های $V_۱, V_۲, ..., V_t$ افراز نمود به‌طوری‌که V_i، $t \geq i \geq ۱$ یک گراف کامل m_i رأسی را القا کند، آنگاه مینیمم مجموع رنگ‌آمیزی رأسی گراف G با استفاده از رنگ‌های مجموعه‌ی c، حداقل برابر با $\Sigma_{i=۱}^{t}\Sigma_{j=۱}^{|V_i|}C_j$ خواهد بود.

برهان.
با توجه به فرض مسأله، مجموعه‌ی رئوس V_i، $t \geq i \geq ۱$ یک گراف کامل m_i رأسی را القا می‌کند و لذا به اندازه‌ی $|V_i|$ رنگ، برای رنگ‌آمیزی مجاز نیاز دارد. بنابراین مجموع رنگ‌آمیزی در هر خوشه با تخصیص رنگ‌های $\{۱, ۲, ..., |V_i|\}$ به رئوس زیرگراف القایی توسط V_i و در نتیجه مجموع رنگی مینیمال $|V_i| + ... + ۲ + ۱$ به‌دست می‌آید.
لذا مینیمم مجموع رنگی در حالتی که بین خوشه‌ها یالی موجود نباشد، دقیقا برابر $\Sigma_{i=۱}^{t}\Sigma_{j=۱}^{|V_i|}C_j$ خواهد بود.
در حالتی که بین خوشه‌ها یالی موجود نباشد می‌توان بسته به تعداد رئوس هر افراز، تمام یا برخی از رنگ‌های هر خوشه را به دیگری داد.
امّا وقتی بین خوشه‌ها یال موجود باشد، نمی‌توان به هر خوشه، همه‌ی رنگ‌هایی را که در دیگری استفاده شده است تخصیص داد، بنابراین خودبه‌خود با رنگ‌آمیزی هر خوشه، خوشه‌ی بعد به‌علّت مجاورت بعضی از رئوس متصل به‌هم بین خوشه‌ها، با مقدار بالاتری رنگ‌آمیزی خواهد شد، لذا مجموع رنگی در کل، افزایش می‌یابد و حکم ثابت می‌شود. □

عدد استقلال یک گراف در مبحث مجموع رنگی، جایگاه ویژه‌ای دارد و می‌تواند در مقدار بهینه‌ی مجموع رنگی تأثیرگذار باشد. حال با استفاده از مفهوم عدد استقلال یک گراف، یک کران بالا را برای مجموع رنگی معرفی و اثبات می‌نماییم.

قضیه ۱۱.۳.۳. [۱۳] برای هر گراف G با n رأس و m یال داریم :

$$\Sigma(G) \geq \left(\lfloor\frac{n}{\alpha(G)}\rfloor + ۱\right).\left(n - \lfloor\frac{n}{\alpha(G)}\rfloor\frac{\alpha(G)}{۲}\right)$$

برهان.
فرض کنیم c یک رنگ‌آمیزی مینیمال روی گراف G باشد و قرار دهیم $P = \lfloor\frac{n}{\alpha(G)}\rfloor$، که $\alpha(G)$ عدد استقلال گراف G می‌باشد. حال داریم :

$$\alpha(G) \geq |C_۱|,\, \alpha(G) \geq |C_۲|,\, \dots, \alpha(G) \geq |C_{\chi(G)}|$$

$$\Longrightarrow \chi(G)\,\alpha(G) \geq |C_۱| + |C_۲| + \dots + |C_{\chi(G)}| = n$$

از طرفی اگر رنگ s را با c_{max} نشان دهیم، با توجه به $\chi(G)\,\alpha(G) \geq n$ به‌دست می‌آوریم که :

$$\frac{n}{\alpha(G)} \leq \chi(G) \leq c_{max}$$

درنتیجه $P \leq c_{max}$. حال برای هر $۲ \leq i \leq P + ۱$ داریم :

$$|C_۱| + |C_۲| + \dots + |C_{i-۱}| \leq (i-۱)\alpha(G)$$

بنابراین

$$n - |C_۱| - |C_۲| - \dots - |C_{i-۱}| \geq n - \Big((i-۱)\alpha(G)\Big) \tag{۷.۳}$$

و با توجه به اینکه c رنگ‌آمیزی مینیمال است به‌دست می‌آوریم که :

$$\Sigma(G,c) = ۱|C_۱| + ۲|C_۲| + \dots + s|C_{max}| = \underbrace{n + |C_۲| + ۲|C_۳| + \dots + (s-۱)|C_{max}|}_{I}$$

$$I \geq \underbrace{(|C_۱| + |C_۲| + \dots + |C_{max}|) + \Sigma_{i=۲}^{P+۱}(n - |C_۱| - |C_۲| - \dots - |C_{i-۱}|)}_{W}$$

$$W = n + \Sigma_{i=۲}^{P+۱}(n - |C_۱| - |C_۲| - \dots - |C_{i-۱}|)$$

با توجه (۷.۳) داریم :

$$\Sigma(G,c) = \Sigma(G) \geq n + \Sigma_{i=۱}^{P}\Big(n - (i\,\alpha(G))\Big) = \Sigma_{i=۰}^{P}\Big(n - (i\,\alpha(G))\Big)$$

و بنابراین

$$\Sigma_{i=۰}^{P}\Big(n - (i\,\alpha(G))\Big) = n + (n - \alpha(G)) + (n - ۲\alpha(G)) + \dots + (n - P.\,\alpha(G))$$
$$= (P+۱)n - \frac{P(P+۱)}{۲}\alpha(G) = (P+۱)(n - P.\,\frac{\alpha(G)}{۲})$$

حال با جایگذاری $P = \lfloor\frac{n}{\alpha(G)}\rfloor$، خواهیم داشت :

$$\Sigma(G) \geq \left(\lfloor\frac{n}{\alpha(G)}\rfloor + ۱\right).\left(n - \lfloor\frac{n}{\alpha(G)}\rfloor\frac{\alpha(G)}{۲}\right)$$

و بنابراین حکم ثابت خواهد شد. □

در گراف‌های کامل k_n، $\alpha(G)=۱$ و قضیه‌ی فوق برقرار است.

لم ۱۲.۳.۳. [۱۰] فرض کنیم G یک گراف و c، یک t-رنگ‌آمیزی روی G باشد به‌طوری که $|C_۱|\geq|C_۲|\geq...\geq|C_t|$ و $|V(G)|=q|C_۱|+r$ و $۰\leq r<|C_۱|$.
می‌خواهیم نشان دهیم که : $\Sigma(G,c)\geq\frac{۱}{۲}q(q+۱)|C_۱|+r(q+۱)$.

برهان.
چون c یک t-رنگ‌آمیزی روی G می‌باشد، بنابراین

$$\Sigma(G,c)=\Sigma i|C_i|=۱|C_۱|+۲|C_۲|+...+t|C_t|$$

حال با توجه به اینکه $|C_۱|\geq|C_۲|\geq...\geq|C_t|$، اگر به‌اندازه‌ی $|C_۱|$ رأس از رئوس $G-C_۱$ را با رنگ ۲ و همین‌طور از مابقی رئوس، تعداد $|C_۱|$ رأس را جدا نموده و رنگ ۳ و همین‌طور با ادامه دادن این روند، در نهایت با توجه به اینکه $|V(G)|=q|C_۱|+r$، از رئوس باقی‌مانده در $G-C_۱$، تعداد $|C_۱|$ رأس را جدا نموده و رنگ q و r رأس باقی‌مانده را رنگ $q+۱$ بدهیم و حال مجموع رنگ‌های رئوس G را محاسبه کنیم، حاصل‌جمع کمتر از $\Sigma(G,c)$ خواهد شد. در واقع به‌طور کلی برای $۲\leq i\leq q$، تعداد $||C_۱|-|C_i||$ رأس از رئوس با رنگ $i+۱$ را از $G-C_۱$ جدا و با رنگ i رنگ‌آمیزی، و مابقی رئوس باقی‌مانده را که تعداد آنها از $|C_۱|$ کمتر است، با رنگ $q+۱$ رنگ نموده و حالا مجموع رنگ‌های رئوس G را حساب می‌کنیم.
واضح است که مقدار به‌دست آمده، از $\Sigma(G,c)$ کمتر خواهد بود و بنابراین داریم

$$\Sigma(G,c)=|C_۱|+۲|C_۲|+...+t|C_t|\geq|C_۱|+۲|C_۱|+...+q|C_۱|+r(q+۱)$$
$$\Longrightarrow\Sigma(G,c)\geq\frac{۱}{۲}q(q+۱)|C_۱|+r(q+۱)$$

□

اما در اینجا دو قضیه و چند نتیجه مهم به‌دست آمده از آنها که در [۵] آمده را بدون اثبات بیان می‌کنیم.

قضیه ۱۳.۳.۳. داریم $p(۲,۱)=p(۳,۱)=۸$، و برای هر عدد صحیح $k\geq ۲$ خواهیم داشت :

$$p(k,۱)=k+۱+\left\lfloor\frac{۱+\sqrt{۸k+۱}}{۲}\right\rfloor$$

با استفاده از قضیه‌ی فوق داریم $\pi(۱)=۸$.

نتیجه ۱۴.۳.۳. فرض کنیم $G\in G_k^۱$ و c، یک رنگ‌آمیزی مینیمال از G باشد، آنگاه داریم:

$$|C_۱|\geq ۱+\left\lfloor\frac{۱+\sqrt{۸k+۱}}{۲}\right\rfloor$$

قضیه ۱۵.۳.۳. برای هر زوج عدد صحیح $k\geq ۲$ و $t\geq ۱$ داریم:

$$p(k,t)\leq(k(k-۱)+۱)^{\lfloor\frac{t}{k-۱}-۱\rfloor}(kt_{mod(k-۱)}+۱)k^۳$$

نتیجه ۱۶.۳.۳. برای هر عدد صحیح و مثبت t داریم:
$p(۲,t) \leq ۸.۳^{t-۱}$

نتیجه ۱۷.۳.۳. برای هر عدد صحیح و مثبت t داریم:
$\pi(t) \leq (t+۱)^۳$

۴.۳ گراف‌های جدولی و مجموع رنگی

از آنجایی‌که گراف‌های جدول، در قسمت‌های مختلف نظریه‌ی گراف مخصوصاً مسأله‌ی رنگ‌آمیزی، بسیار مفید هستند، لذا در این بخش، با استفاده از [۱۰]، به معرفی و مطالعه‌ی یک کلاس جدید از گراف‌ها که به گراف‌های جدول مشهور هستند، می‌پردازیم.

یک **گراف جدولی**[۴] $T[V_{ij}]$، گرافی است که از یک جدول با mn خانه $(۱ \leq j \leq n, ۱ \leq i \leq m)$ تشکیل شده است و درون هر خانه، درایه‌ی V_{ij} که نشانگر تعداد متناهی رأس می‌باشد، وجود دارد. $\bigcup_{i,j} V_{ij}$ برای $(۱ \leq j \leq n\,,\, ۱ \leq i \leq m)$، مجموعه‌ی همه‌ی رئوس گراف جدولی $T[V_{ij}]$ را تشکیل می‌دهند و دو رأس $u \in V_{ij}$ و $v \in V_{kl}$ باهم مجاورند اگر و تنها اگر $i \neq k$ و $j \neq l$.

یک گراف مانند G را **گراف جدول** [۵] گوییم هرگاه با یک گراف جدولی یکریخت باشد، یعنی بتوان آن را به‌صورت یک جدول با توجه به تعریف گراف جدولی، نشان داد.
$\bigcup_j V_{ij}$ را یک **ردیف**[۶] و $\bigcup_i V_{ij}$ را یک **ستون**[۷] از $T[V_{ij}]$ نامیم.

هر سطر یا هر ستون را یک **خط**[۸] گوییم و دو رأس را **هم‌ارز**[۹] نامیم هرگاه متعلق به یک خانه باشند، همچنین حداقل دو رأس در یک خط را **هم‌راستا**[۱۰] می‌گوییم.

نتایج زیر، مستقیماً از تعریف گراف‌های جدولی و گراف‌های جدول به‌دست می‌آید:

$T_۱$) **هر زیرگراف یک گراف جدول، خود یک گراف جدول است.**
کاملاً واضح است که هر دو رأس انتخابی در زیرگراف یک گراف جدول، یا هم‌راستا هستند که بین آنها هیچ یالی موجود نیست و یا در دو سطر و دو ستون مختلف هستند که در این‌صورت بین آنها یال می‌باشد.

[۴] Table Graph
[۵] Tbular Graph
[۶] Row
[۷] Column
[۸] Line
[۹] Equivalent
[۱۰] Colinear

$T_۲$) **در یک گراف جدول، دو رأس مستقل هستند اگر و تنها اگر هم‌راستا باشند.**
از آنجایی‌که در گراف‌های جدول، تنها رئوسی که در دو سطر و دو ستون متفاوتند، به‌هم متصل هستند، در نتیجه تمام رئوسی که هم‌راستا هستند، همگی مستقلند. از طرفی وقتی دو رأس مستقلند بین آنها یال موجود نیست و در گراف‌های جدولی، تنها وقتی رئوس هم‌راستا هستند، بین آنها یال موجود نیست.

$T_۳$) **در یک گراف جدولی، مجموعه‌ی رئوسی که هیچ دو رأس مجزای آن هم‌راستا نیستند، تشکیل یک خوشه می‌دهند.**
با توجه به اینکه در گراف‌های جدولی، فقط رئوسی که در سطرها و ستون‌های متفاوتند یا به‌عبارتی هم‌راستا نیستند، به‌هم متصل می‌باشند، کاملاً واضح است اگر مجموعه رئوسی که هردو تای آنها در یک سطر و یک ستون نباشند(هم‌راستا نباشند) را در نظر بگیریم، تشکیل یک خوشه می‌دهند.

$T_۴$) **یک مجموعه‌ی مستقل ماکسیمال از رئوس، در یک گراف جدولی، همواره خط است و بر عکس یک خط با حداقل دو رأس غیر هم‌ارز، یک مجموعه‌ی مستقل ماکسیمال می‌باشد.**
با استفاده از $T_۲$ در می‌یابیم که یک مجموعه‌ی مستقل ماکسیمال همواره یک خط است. اما برای اینکه بخواهیم بگوییم یک خط با حداقل دو رأس غیر هم‌ارز، یک مجموعه‌ی مستقل ماکسیمال است، کافی است بگوییم که در یک گراف جدولی هیچ وقت نمی‌توان به یک خط با حداقل دو رأس غیر هم‌ارز، رأس یا رئوسی بیافزاییم که این نیز با توجه به تعریف گراف جدولی واضح است، چرا که وقتی یک خط با دو رأس غیر هم‌ارز را در نظر می‌گیریم، موقعیت رئوس دیگر گراف جدولی نسبت به این دو رأس غیر هم‌ارز به‌گونه‌ای است که یا با یکی از آن دو هم‌راستا می‌شوند، که در این‌صورت با رآس غیر هم‌ارز دیگر مجاور می‌شوند و در نتیجه نمی‌توانند به مجموعه‌ی رئوس خط مورد نظر اضافه شوند، یا اینکه رئوس دیگر گراف با هیچ‌کدام از دو رأس غیر هم‌ارز مورد نظرمان هم‌راستا نیستند، که در این‌صورت نیز با هردوی آنها مجاور خواهند شد و باز نمی‌توان آنها را به مجموعه‌ی رئوس خط مورد نظر اضافه نمود.
لازم به ذکر است که یک خط با فقط یک خانه‌ی غیر صفر، لزوماً یک مجموعه‌ی مستقل ماکسیمال نیست.

حال به بیان یک لم پرکاربرد در مباحث ریاضی می‌پردازیم و از آن در فهم هر چه بیشتر خواص گراف‌های جدولی، کمک می‌گیریم.

لم ۱.۴.۳. لم کونیگ[۱۱]
فرض کنیم A یک ماتریس mn با درایه‌های ۰ و ۱ باشد. در این‌صورت ماکسیمم تعداد ۱هایی که به‌جز خودشان، هیچ درایه‌ی غیر صفر دیگری در سطر و ستونی که حاضر هستند، موجود نباشد، برابر است با مینیمم تعداد سطرها و ستون‌هایی که همه‌ی ۱های حاضر در A را می‌پوشانند.

با توجه به لم کونیگ، گزاره زیر را داریم.

گزاره ۲.۴.۳. [۱۰] هر گراف جدول، یک گراف تام می‌باشد.

برهان.
برای اینکه نشان دهیم یک گراف مانند G تام است، کافی است که بگوییم برای هر زیرگراف القایی H از G،

[۱۱] Konig

$\chi(H)=w(H)$ که $w(H)$ همان تعداد زیرگراف‌های کامل(خوشه) H می‌باشد.
برای این‌منظور، فرض کنیم که H یک زیرگراف از گراف جدول G باشد که طبق $T_۱$، خود نیز یک گراف جدول است.
همانطور که در $T_۴$ بیان نمودیم، یک مجموعه‌ی مستقل ماکسیمال از رئوس، در یک گراف جدول، همواره یک خط است. حال اگر هر خط را نشانگر یک رنگ در نظر بگیریم، بنابراین مینیمم تعداد خط‌هایی که همه‌ی اعداد غیر صفر جدول را می‌پوشاند، همان عدد رنگی گراف جدول محسوب می‌شود.
از طرفی بنابه لم کونیگ، مینیمم تعداد خط‌هایی که همه‌ی اعداد غیر صفر جدول را می‌پوشانند، همان ماکسیمم تعداد اعداد غیر صفر گراف جدولی‌ای می‌باشند که در سطر و ستونی که حاضرند، هیچ عدد غیر صفر دیگری موجود نیست.
حال بنابه $T_۳$ در یک گراف جدولی، مجموعه‌ی رئوسی که هر دو رأس مجزای آن هم راستا نیستند، تشکیل یک خوشه می‌دهند.
بنابراین از آنچه بیان نمودیم برمی‌آید که ماکسیمم اعداد غیر صفری که در لم کونیگ بحث می‌شود، همان تعداد زیرگراف‌های القایی کامل یا همان تعداد خوشه‌ها می‌باشند.
بنابراین $\chi(H)=w(H)$ و در نتیجه گراف جدول G، تام است. $\square$

برای هر عدد صحیح $k\geq ۲$ و عدد صحیح و مثبت t، فرض کنیم G_k^t، خانواده‌ی همه‌ی گراف‌های G با $\chi(G)=k$ و $s(G)\geq k+t$ باشد. حال پارامتر $\mathbf{p(k،t)}$ را تعریف می‌کنیم که مینیمم تعداد رئوس یک گراف در G_k^t می‌باشد.
در ادامه نشان می‌دهیم که انگیزه‌ی استفاده از گراف‌های جدولی در روند مطالعه‌ی رنگ‌آمیزی مینیمال و مجموع رنگی چیست.

گزاره ۳.۴.۳. [۱۰] هر گراف $G\in G_k^t$ که دارای مینیمم تعداد رئوس و ماکسیمم تعداد یال می‌باشد، یک گراف جدول است.

برهان.
فرض کنیم c یک رنگ‌آمیزی مینیمال با $p\geq k+t$ رنگ، و d یک k-رنگ‌آمیزی از G باشند. حال گراف جدولی با مجموعه‌ی $V_{ij}=C_i\cap D_j$ و $(۱\leq i\leq p\ ,\ ۱\leq j\leq k)$ را در نظر می‌گیریم و نشان می‌دهیم که G را می‌توان به‌صورت یک گراف جدولی نشان داد.
برای این‌منظور، وقتی $x\in V_{ij}$ و $y\in V_{i'j'}$، اگر $i=i'$ و $j=j'$، در این‌صورت x همان y است و چیزی برای گفتن نداریم. حال با توجه به ماکسیمم تعداد بودن یال‌ها در G، اگر $i=i'$ و $j\neq j'$، بنابراین بین x و y در G هیچ یالی موجود نبوده است، همچنین به وضوح قابل مشاهده است که در گراف جدولی‌ای که با درایه‌های $V_{ij}=C_i\cap D_j$ ساخته‌ایم نیز بین x و y، چون در یک سطر واقع می‌شوند، هیچ یالی موجود نیست.
حال اگر $i\neq i'$ و $j=j'$، که در این‌صورت هیچ‌وقت این‌چنین رنگ‌آمیزی‌ای وجود ندارد که روی یک گراف در رنگ‌آمیزی مینیمال، دو رأس، رنگ متفاوت بگیرند(دو رأس مجاور باشند) اما در یک k-رنگ‌آمیزی مجاز، همان دو رأس، یک رنگ یکتا را بگیرند.
اما در آخر، تنها حالت باقی‌مانده که $i\neq i'$ و $j\neq j'$ می‌باشد را در نظر می‌گیریم. در این‌صورت با توجه به

ماکسیمم تعداد بودن یال‌ها در G، حتماً بین x و y در G یک یال موجود بوده است و این نیز به وضوح در گراف جدولی‌ای که ساخته‌ایم قابل مشاهده است که بین $x \in V_{ij}$ و $y \in V_{i'j'}$، یال موجود خواهد بود.
بنابراین توانستیم G را به‌صورت یک گراف جدولی نشان دهیم، در نتیجه G یک گراف جدول است. □

گزاره‌ی فوق نشان می‌دهد که چرا کاربرد گراف‌های جدول در محاسبه‌ی $p(k,t)$ مفید است.
لم بعد نشان می‌دهد که یک رنگ‌آمیزی مینیمال از یک گراف جدولی پیچیده نیست و در آینده خواهیم دید که برای بسیاری از گراف‌های جدولی، مجموعه‌ی کلاس‌های رنگی از یک رنگ‌آمیزی مینیمال، مجموعه‌ای از سطرها و یا ستون‌ها می‌باشد.

لم ۴.۴.۳. [۱۰] فرض کنیم $G = T[V_{ij}]$ یک گراف جدولی و c، یک رنگ‌آمیزی مینیمال روی G باشد. آنگاه خواهیم داشت:

۱) اگر C_i دارای دو رأس غیر هم‌ارز از یک خط مانند L باشد، آنگاه $C_i = L - \bigcup_{j<i} C_j$.
همچنین در هر رنگ‌آمیزی مینیمال، رئوس هم‌ارز، در یک کلاس رنگی مشابه قرار می‌گیرند.

برهان.
با توجه به $S_۴$، برای هر رنگ‌آمیزی c روی گراف دلخواه G، همواره C_i یک مجموعه‌ی مستقل ماکسیمال روی $G - \bigcup_{j<i} C_j$ می‌باشد. همچنین بنابه $T_۴$، در گراف‌های جدولی، یک خط با حداقل دو رأس غیر هم‌ارز، یک مجموعه‌ی مستقل ماکسیمال است و هر مجموعه‌ی مستقل ماکسیمال در گراف‌های جدولی، همواره یک خط می‌باشد.
لذا بنابه آنچه گفته شد بدیهی است که $C_i = L - \bigcup_{j<i} C_j$.
امّا می‌دانیم هر خط شامل تعدادی خانه است که یک تعداد رأس در آنها وجود دارد که همگی در مقوله‌ی مجاورت با سایر خانه‌های گراف جدولی، دارای یک شرط یکتا هستند و آن این است که فقط با رئوسی مجاور می‌شوند که در سطر و ستون دیگری از جدول قرار داشته باشند. از طرفی چون رئوس روی یک خط همگی با هم مستقل هستند و همچنین هر خانه روی یک خط قرار دارد، پس رئوس یک خانه از هم مستقل هستند و می‌دانیم که رئوس مستقل، در یک رنگ‌آمیزی مینیمال، دارای یک کلاس رنگی مشابه می‌باشند.

□

۲) اگر R_k و R_l دو سطر باشند بطوری‌که $|V_{kj}| \leq |V_{lj}|$ برای همه‌ی jها، و همچنین برای بعضی jها $|V_{kj.}| < |V_{lj.}|$، آنگاه داریم: $C_۱ \neq R_k$.

برهان.
فرض کنیم که $C_۱ = R_k$ و رنگ‌آمیزی جدید c' به این‌صورت تعریف می‌کنیم که
$$c'(R_l) = \{۱\} \quad , \quad \forall j \quad c'(V_{kj}) = c(V_{lj})$$
همان‌طور که می‌بینیم رنگ‌آمیزی c' مجاز است، چرا که درواقع در رنگ‌آمیزی c' فقط تغییر رنگ را در سطرهای k و l داریم و سایر رنگ‌های رئوس در سطرهای دیگر، همان رنگ‌آمیزی قبلی c را دارند.

باید گفت این تغییر رنگ به‌گونه‌ای است که رنگ مجموعه‌ی رئوس یک خانه‌ی موجود در سطر lام را به مجموعه‌ی رئوس خانه‌ای از سطر kام که در همان ستون قراردارند،می‌دهیم، و از آنجایی‌که رئوس هم‌راستا همگی از هم مستقل هستند، این تغییر رنگ، مجاز بودن رنگ‌آمیزی را برهم نمی‌زند و لذا c'، یک رنگ‌آمیزی مجاز خواهد بود.

امّا از آنجایی‌که برای برخی j.ها $|V_{kj.}| < |V_{lj.}|$، در نتیجه

$$\Sigma(G, c') < \Sigma(G, c) = \Sigma(G)$$

این با مینیمال بودن رنگ‌آمیزی c در تناقض است و بنابراین حکم ثابت می‌شود.

□

برای یک گراف جدولی $G = T[V_{ij}]$، **رنگ‌آمیزی سطری** را به‌صورت یک رنگ‌آمیزی c که در آن $C_i = \bigcup_j V_{ij}$ و **رنگ‌آمیزی ستونی** را نیز به‌صورت یک رنگ‌آمیزی مانند c' که در آن $C'_i = \bigcup_j V_{ji}$ تعریف می‌کنیم و به ترتیب آنها را با $\Re$ و $\wp$ نشان می‌دهیم.[۱۰]

با توجه به لم (۱۲.۳.۳)، گزاره‌ی زیر برقرار است.

گزاره ۵.۴.۳. [۱۰] فرض کنید G یک گراف جدولی باشد به‌طوری‌که همه‌ی ستون‌های آن دارای تعداد رأس یکسانی هستند. اگر در یک رنگ‌آمیزی مینیمال c از G، مجموعه‌ی کلاس رنگی $C_۱$، یکی از ستون‌ها باشد، آنگاه

$$\Sigma(G) = \Sigma(G, \wp)$$

برهان.

فرض کنیم G دارای n ستون باشد، در این‌صورت $|V(G)| = n|C_۱|$. حال اگر $\wp$ رنگ‌آمیزی ستونی روی G باشد، آنگاه بنابه لم (۱۲.۳.۳)

$$\Sigma(G, c) \geq \frac{۱}{۲} n(n + ۱)|C_۱| = \Sigma(G, \wp)$$

از طرفی چون c یک رنگ‌آمیزی مینیمال است، لذا $\Sigma(G, c) \leq \Sigma(G, \wp)$.

بنابراین خواهیم داشت:

$$\Sigma(G) = \Sigma(G, \wp)$$

□

در انتهای این بخش، به تعیین چند کران پایین و بالا برای $p(k, t)$ خواهیم پرداخت، امّا قبل از آن به بیان و اثبات لم زیر می‌پردازیم.

لم ۶.۴.۳. [۱۰] فرض کنید که $V = \Sigma_{i=۱}^{n} p_i = \Sigma_{j=۱}^{m} q_j$، $n \geq m$ و $\Sigma_{i=۱}^{n} i\, p_i < \Sigma_{j=۱}^{m} j\, q_j$، همچنین $p_۱ > p_۲ > \ldots > p_n$ و $q_۱ > q_۲ > \ldots > q_m$ اعداد گویای نامنفی باشند.

آنگاه نشان می‌دهیم که :

$$p_۱ > \frac{V}{m}$$

برهان.
برای هر $1 \leq j \leq \lceil \frac{m}{2} \rceil$ داریم :
$$j\,q_j + (m-j+1)\,q_{m-j+1} \leq \frac{m-j+1+j}{2}(q_j + q_{m-j+1})$$
بنابراین :
$$\Sigma_{j=1}^{m} j\,q_j \leq \frac{(m+1)}{2}.V$$
حال اگر $V \geq m\,p_1 \implies p_1 \leq \frac{V}{m}$، آنگاه مینیمم مقدار $V = \Sigma_{i=1}^{n} i\,p_i$ که همان $m\,p_1$ می‌باشد، زمانی به‌دست می‌آید که $p_1 = p_2 = ... = p_m = \frac{V}{m}$ و $p_{m+1} = p_{m+2} = ... = p_n = 0$.
و لذا نتیجه می‌شود که :
$$\Sigma_{i=1}^{n} i\,p_i \geq \Sigma_{i=1}^{m} i\,p_i = \Sigma_{i=1}^{m} i\,\frac{V}{m} = \frac{(m+1)\,V}{2} \geq \Sigma_{j=1}^{m} j\,q_j$$
و این تناقض با فرض اولیّه‌ی لم می‌باشد. در فرض $p_1 \leq \frac{V}{m}$، برای مقادیر بزرگتر از $m\,p_1$ نیز به اندازه‌ی m'ای که در p_1 ضرب می شود، می‌توان p_iها $(i = m')$، را مساوی هم و مساوی با $\frac{V}{m}$ قرار داد و مابقی p_iها را صفر در نظر گرفت، که در این‌صورت نیز تناقض به‌وضوح قابل مشاهده است. بنابراین حکم ثابت می‌شود. □

حال به بررسی و اثبات دو گزاره می‌پردازیم که ما را در اثبات قضیه‌ای که در ادامه، جهت تعیین کران پایین برای $p(k,t)$ بیان خواهیم نمود، یاری می‌رساند.

گزاره ۷.۴.۳. [۱۰] فرض کنید $k \geq 2$ و $t \geq 1$ دو عدد صحیح و مثبت باشند. نشان خواهیم داد که :
$$p(k+1,t) \leq p(k,t+1)$$

برهان.
فرض کنیم $G \in G_k^{t+1}$ و $|V(G)| = p(k,t+1)$ و c یک رنگ‌آمیزی مینیمال روی G باشد. با اضافه کردن تعداد یال کافی، بین کلاس‌های رنگی c در G می‌توان گراف G^* را به‌گونه‌ای ساخت که $\chi(G^*) = k+1$.
بنابراین $s(G^*) \geq k+t+1$ و $G^* \in G_{k+1}^{t}$.
حال بنابه تعریف $p(k,t)$ داریم :
$$p(k+1,t) \leq |V(G^*)| = |V(G)| = p(k,t+1)$$
$$\implies p(k+1,t) \leq p(k,t+1)$$
□

گزاره ۸.۴.۳. [۱۰] فرض کنید G یک گراف با $s(G) > \chi(G)$ و c یک رنگ‌آمیزی مینیمال روی G باشد، آنگاه داریم :

i) $|C_1| > \frac{|V(G)|}{\chi(G)}$.

برهان.
فرض کنیم که c' یک $\chi(G)$-رنگ‌آمیزی از G باشد و در نظر می‌گیریم $p_i = |C_i|$، $1 \leq i \leq s(G)$ و $q_j = |C'_j|$، $1 \leq j \leq \chi(G)$.
در این‌صورت داریم : $|V(G)| = \Sigma_{i=1}^{s(G)}|C_i| = \Sigma_{j=1}^{\chi(G)}|C'_j|$. حال بنابه تعریف مجموع رنگی و فرض $s(G) > \chi(G)$ خواهیم داشت :

$$\Sigma_{i=1}^{s(G)} i\,|C_i| = \Sigma_{i=1}^{s(G)} i\,p_i < \Sigma_{j=1}^{\chi(G)} j\,|C'_j| = \Sigma_{j=1}^{\chi(G)} j\,q_j$$

و همان‌طور که می‌دانیم در $\chi(G)$-رنگ‌آمیزی از یک گراف، همواره داریم :

$$|C'_1| \geq |C'_2| \geq \ldots \geq |C'_{\chi(G)}|$$

لذا شرایط لم (۶.۴.۳) در اینجا قابل مشاهده است و در نتیجه $|C_1| > \dfrac{|V(G)|}{\chi(G)}$ و حکم ثابت می‌شود.

□

ii) $|C_1| \geq 1 + \left\lfloor \frac{1+\sqrt{8(s(G)-1)+1}}{2} \right\rfloor$.

برهان.
با افزودن مقدار کافی یال، بین کلاس‌های رنگی c در G، می‌توان G^* را طوری ساخت که $\chi(G^*) = s(G) - 1$. از طرفی چون یال‌ها فقط بین کلاس‌های رنگی اضافه شده اند، پس $s(G^*) = s(G)$.
بنابراین $G^* \in G^1_{s(G)-1}$ و با توجه به نتیجه‌ی (۱۴.۳.۳) داریم که

$$|C_1| \geq 1 + \left\lfloor \frac{1 + \sqrt{8(s(G) - 1) + 1}}{2} \right\rfloor$$

و لذا حکم ثابت می‌شود.

□

حال در اینجا، حسن ختام بخش و این فصل را، بیان و اثبات یک کران پایین برای $p(k,t)$ قرار می‌دهیم.

قضیه ۹.۴.۳. [۱۰] برای هر زوج عدد صحیح $k \geq 2$ و $t \geq 1$، نامعادله‌ی زیر برقرار خواهد بود :

$$p(k,t) \geq (\frac{k}{k-1})^{t-1}\,p(k,1)$$

برهان.
فرض کنیم $G \in G^t_k$ و c یک رنگ‌آمیزی مینیمال روی G و $H = G - C_1$ باشد. اگر $\chi(H) = k$، آنگاه با توجه به S_5، خواهیم داشت که $H \in G^{t-1}_k$ و $|V(H)| \geq p(k,t-1)$. در غیر این‌صورت اگر $\chi(H) < k$، آنگاه $|V(H)| \geq p(k-1,t)$، چرا که $s(G) \geq k+t$ و $s(H) \geq k+t-1$.
اما با توجه به گزاره‌ی (۷.۴.۳) داریم که $p(k-1,t) \geq p(k,t-1)$ و درنتیجه برای $H = G - C_1$ و $\chi(H) \leq k$ همواره خواهیم داشت :

$$|V(H)| \geq p(k,t-1) \tag{۸.۳}$$

از طرفی بنابه قسمت اول گزاره‌ی (۸.۴.۳) داریم $|C_1| > \frac{|V(G)|}{k}$ و چون $|V(G)| = |V(H)| + |C_1|$، لذا خواهیم داشت :

$$|C_1| > \frac{|V(H)| + |C_1|}{k} \implies |C_1| \geq \frac{|V(H)|}{k-1}$$

اما از آنجایی که همواره $|C_1| \geq 1$، بنابراین :

$$\frac{|V(G)|}{k} \geq \frac{|V(H)|}{k-1} \implies |V(G)| \geq \frac{k}{k-1}|V(H)|$$

حال چون G دلخواه بود، لذا با توجه به (۸.۳)داریم :

$$p(k,t) \geq \frac{k}{k-1}p(k,t-1) \geq \left(\frac{k}{k-1}\right)^2 p(k,t-2)$$

و در نتیجه

$$p(k,t) \geq \left(\frac{k}{k-1}\right)^{t-1} p(k,1)$$

و حکم ثابت می‌شود. □

فصل ۴

همریختی و مجموع رنگی

همریختی گراف‌ها یک مفهوم اساسی و پایه، در نظریه‌ی گراف محسوب می‌شود، به‌طوری‌که مسائل و مفاهیم خیلی مهمّی را در این عرصه بازگو می‌کند. این یک مطلب مشهور است که در حالت کلی، تصمیم‌گیری برای وجود همریختی بین گرافی مانند G و یک گراف دیگر مانند H و یا برعکس، یک مسأله‌ی سخت و دشوار است. بنابراین بدست‌آوردن شرایط لازم برای وجود همچنین نگاشت‌هایی بسیار جالب و مورد توجه است.
به‌عنوان نمونه، با استفاده از مفهوم عدد رنگی، یک قضیه داریم[۴] که اگر $f : G \longrightarrow H$ یک نگاشت باشد آنگاه f یک همریختی از G به H است اگروفقط‌اگر $\chi(G) \leq \chi(H)$.
حال در این فصل با استفاده از مفهوم مجموع رنگی، یک شرط لازم را برای وجود همریختی بین دو گراف بیان خواهیم نمود. همچنین در انتهای فصل به بیان یک الگوریتم مکاشفه‌ای، که تقریب خوبی برای محاسبه‌ی مجموع رنگی، قدرت رأسی و رسیدن به یک رنگ‌آمیزی مینیمال است، خواهیم پرداخت.

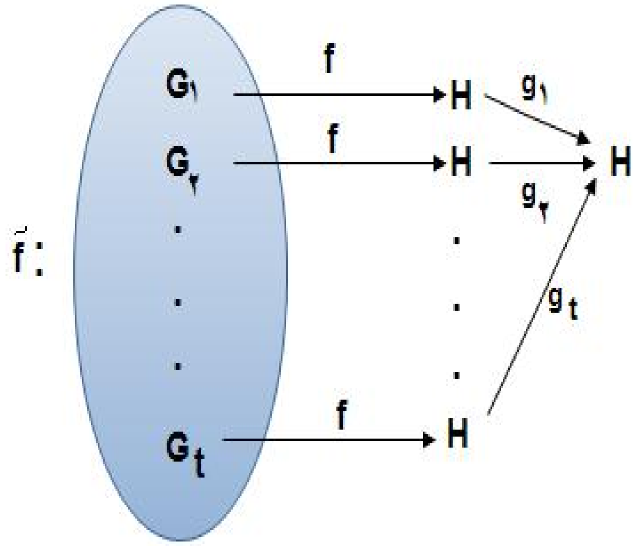
۱.۴ عدم وجود همریختی

قضیه ۱.۱.۴. [۱] فرض کنیم G و H دو گراف باشند به‌طوری‌که H یک گراف ترایارأس باشد. اگر $f : G \longrightarrow H$ یک همریختی بین G و H باشد، آنگاه :

$$\frac{\Sigma(G)}{|G|} \leq \frac{\Sigma(H)}{|H|}$$

برهان.
با توجّه به ترایارأس بودن گراف H، فرض می‌کنیم که $Aut(H) = \{g_1, g_2, ..., g_t\}$.
عناصر $Aut(H)$ را جایگشت‌ها تشکیل می‌دهند و جایگشت‌ها نیز روی مجموعه‌ی رئوس گراف‌ها تعریف می‌شوند و از آنجایی‌که تعداد رئوس یک گراف مانند H متناهی است، پس تعداد جایگشت‌ها و درنتیجه $Aut(H)$ متناهی است.
همچنین گراف $\tilde{G} = \bigcup_{i=1}^{t} G_i$ که در آن G_iها، $1 \leq i \leq t$ کپی‌هایی یکریخت از گراف G و مستقل از هم می‌باشند را در نظر می‌گیریم. (ایده‌ی فرض $\tilde{G} = \bigcup_{i=1}^{t} G_i$ همان فرض وجود $Aut(H) = \{g_1, g_2, ..., g_t\}$

به‌واسطه‌ی ترایارأس بودن H می‌باشد.) حال نگاشت $\tilde{f}: \tilde{G} \longrightarrow H$ را تعریف می‌کنیم، به‌طوری‌که اثر $\tilde{f}$ روی G_iها، $g_i o f$، $1 \leq i \leq t$ می‌باشد.
برای فهم بیشتر تعریف به شکل (۱.۴) توجّه کنید.



شکل ۱.۴: یک همریختی از $\tilde{G}$ به H

چون طبق فرض، از G به H یک همریختی وجود دارد و g_iها نیز خودریختی می‌باشند، لذا ترکیب f با هر کدام از g_iها، باز همریختی را نتیجه می‌دهد و بنابر آنچه گفته شد، $\tilde{f}$ یک همریختی از $\tilde{G}$ به H می‌باشد.
حال با توجه به ترایارأس بودن H به‌وضوح داریم که

$$\forall\, v \in V(H) \quad |\tilde{f}^{-1}(v)| = t\frac{|G|}{|H|}$$

در نگاشت $\tilde{f}^{-1}$ برای تمامی رئوس گراف H، $t|G|$ رأس در $\tilde{G}$ وجود دارد که به‌واسطه‌ی اینکه H از کدام‌یک از g_iها برای نگاشت شدن به $\tilde{G}$ استفاده کند، مشخّص می‌شود که رئوس H به کدام رئوس در $\tilde{G}$ نگاشت خواهند شد. حال با توجه به اینکه برای هر رأس u و v از H، $|\tilde{f}^{-1}(u)| = |\tilde{f}^{-1}(v)|$، اگر برای یک رأس از رئوس گراف H مانند v، بخواهیم تعداد رئوسی که این رأس با استفاده‌ی از $\tilde{f}^{-1}$ به آنها نگاشت خواهد شد را به‌دست بیاوریم، کافی است که $t|G|$ را به $|H|$ تقسیم کنیم تا به این مهم، دست پیدا کنیم. بنابراین

$$|\tilde{f}^{-1}(v)| = t\frac{|G|}{|H|}$$

(اینکه در اینجا از $|G|$ استفاده کردیم، به این خاطر است که G_iها کپی‌هایی یکریخت از G می‌باشند، بنابراین $|G_i| = |G|$.)
ذکر این نکته در اینجا ضروری است که در نگاشت $\tilde{f}^{-1}$، مجموعه‌ی رئوسی که از نگاشت رأس $v \in H$ به آنها به‌دست می‌آید، یک مجموعه‌ی مستقل می‌باشد، یعنی هیچ‌کدام از رئوس آن، با هم مجاور نیستند، چرا که رأس مفروض $v \in H$، بسته به اینکه از کدام g_i، $1 \leq i \leq t$ برای نگاشت شدن به $\tilde{G}$ استفاده کند، به درون G_iهای مختلفی نگاشت خواهد شد و مهم اینجا است که ما فرض کرده‌ایم G_iها مجموعه‌هایی مستقل از هم باشند.
حال فرض کنیم که c یک رنگ‌آمیزی مجاز روی گراف H باشد به‌طوری‌که مجموع رنگی را به ما می‌دهد، در

واقع c یک رنگ‌آمیزی مینیمال است. با توّجه به اینکه رئوس گراف $\tilde{G}$ توسط $\tilde{f}$ به رئوس گراف H نگاشت می‌شوند، می‌توان رنگ هر رأس در $\tilde{G}$ را به رأسی از H تخصیص داد که توسط $\tilde{f}$ به‌هم متناظر شده‌اند، بنابراین تعریف می‌کنیم که :

$$\forall\, v \in V(\tilde{G}) \quad \tilde{c}(v) = c(\tilde{f}(v)) \tag{۱.۴}$$

حال می‌خواهیم ببینیم که آیا $\tilde{c}$ یک رنگ‌آمیزی مجاز است یا خیر؟

از آنجایی‌که $\tilde{f}$، یک همریختی از گراف $\tilde{G}$ و H می‌باشد، پس هر دو رأس مجاور در $\tilde{G}$ به دو رأس مجاور نظیر در H نگاشت می‌شوند و چون می‌دانیم که دو رأس مجاور، یک رنگ یکتا را نمی‌پذیرند و با توجّه به اینکه $\tilde{c}(v) = c(\tilde{f}(v))$، لذا $\tilde{c}$ یک رنگ‌آمیزی مجاز می‌باشد.

حال با این رنگ‌آمیزی اخیری که روی $\tilde{G}$ و H انجام دادیم و با توجّه به اینکه گفتیم رئوسی که به‌هم متناظر می‌شوند را با یک رنگ، رنگ‌آمیزی کنیم و نیز با توجّه به (۱.۴)، همچنین با دقت نظر داشتن نسبت به اینکه برای هر رأس گراف H با استفاده از $\tilde{f}^{-1}$، $t\frac{|G|}{|H|}$ رأس در $\tilde{G}$ وجود دارد که به آنها نگاشت صورت گیرد، درمی‌یابیم که اگر H، n رأس داشته باشد، رنگ رأس v_1 از H به $t\frac{|G|}{|H|}$ رأس از $\tilde{G}$، همچنین رنگ رأس $v_2 \in H$ به $t\frac{|G|}{|H|}$ رأس از $\tilde{G}$ اختصاص می‌یابد و همین‌طور اگر این روند را ادامه بدهیم، رنگ رأس $v_n \in H$ نیز به $t\frac{|G|}{|H|}$ رأس از $\tilde{G}$ اختصاص می‌یابد، بنابراین داریم :

$$\begin{aligned}\Sigma\, \tilde{c}(\tilde{G}) &= t\frac{|G|}{|H|}c(v_1) + t\frac{|G|}{|H|}c(v_2) + \ldots + t\frac{|G|}{|H|}c(v_n)\\ &= t\frac{|G|}{|H|}\Big(c(v_1) + c(v_2) + \ldots + c(v_n)\Big)\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \Sigma\, \tilde{c}(\tilde{G}) = t\frac{|G|}{|H|}\Sigma(H)$$

همان‌طورکه می‌دانیم چون G_iها از هم مستقل هستند، بنابراین مجموع رنگ‌های رئوس $\tilde{G}$ با استفاده از رنگ‌آمیزی مجاز $\tilde{c}$ برابر است با حاصل‌جمع رنگ رئوس G_iها به‌طور جداگانه، و جمع همه‌ی آنها باهم و به‌دست‌آوردن $\Sigma_{\tilde{c}}(\tilde{G})$.

حال با توجّه به این قاعده که اگر چند عدد صحیح مثبت را با هم جمع کنیم و از آنها میانگین بگیریم، حداقل یک عدد از بین آنها وجود دارد که کمتر یا مساوی با میانگین آنها می‌باشد، ما از $\Sigma_{\tilde{c}}(\tilde{G})$ روی تعداد G_iها میانگین می‌گیریم و بنابراین حتماً یک i وجود دارد به‌طوری‌که

$$\Sigma_{\tilde{c}|G_i}(G_i) \leq \frac{\Sigma_{\tilde{c}(\tilde{G})}}{t}$$

و درنتیجه

$$\Sigma_{\tilde{c}|G_i}(G_i) \leq \frac{|G|}{|H|}\Sigma(H)$$

حال چون G_iها کپی‌هایی یکریخت از G بودند، بنابراین خواهیم داشت :

$$\Sigma(G) \leq \Sigma_{\tilde{c}}(G) \leq \frac{|G|}{|H|}\Sigma(H) \Longrightarrow \Sigma(G) \leq \frac{|G|}{|H|}\Sigma(H)$$

و درنتیجه حکم ثابت می‌شود.

□

همان‌طورکه مشاهده نمودیم قضیه‌ی قبل، یک شرط لازم برای وجود همریختی بین دو گراف را بیان می‌کند که این شرط می‌تواند کمک خیلی زیادی به ما در اثبات وجود یا عدم وجود همریختی بین دو گراف کند.
همان‌طورکه قبلاً بیان شد $\Sigma(G) \leq (\frac{\chi(G)+1}{2})|G|$، و می‌دانیم که $\Sigma(k_n) = \frac{n(n+1)}{2}$.
حال اگر $H = k_{\chi(G)}$، از آنجایی‌که با توجّه به تعریف عدد رنگی، بین G و $k_{\chi(G)}$ همریختی وجود دارد و همچنین با توجّه به اینکه $k_{\chi(G)}$ یک گراف ترایارأسی است، بنابراین با استفاده از قضیه‌ی (۱.۱.۴) داریم :

$$\frac{\Sigma(G)}{|G|} \leq \frac{\Sigma(k_{\chi(G)})}{\chi(G)} \Longrightarrow \Sigma(G) \leq (\frac{\chi(G)+1}{2})|G|$$

این یعنی اینکه قضیه‌ی (۱.۱.۴)روی گراف‌های کامل، حکم $\Sigma(G) \leq (\frac{\chi(G)+1}{2})|G|$ را نیز که یک کران بالای مهم برای رنگ‌آمیزی جمعی رأسی است و قبلاً در S_8 بیان و اثبات شد، نتیجه می‌دهد که این خود بر اهمّیت قضیه‌ی (۱.۱.۴) می‌افزاید.
حال می‌خواهیم یک کران بالا برای رنگ‌آمیزی جمعی رأسی، با استفاده از مفهوم عدد رنگی کسری بیان کنیم، امّا قبل از آن یک‌بار دیگر نامعادله‌ی (۳.۳) را بیان و از آن در اثبات قضیه‌ی بعد استفاده می‌کنیم، و امّا آن نامعادله به این‌صورت است که برای هر مجموعه‌ی دلخواه و مستقل مانند S از رئوس گراف G داریم :

$$\Sigma(G) \leq |G| + \Sigma(G - S)$$

قضیه ۲.۱.۴. [۱] برای هر گراف دلخواه مانند G داریم:

$$\Sigma(G) < \chi_f(G)|G|$$

برهان.
با توجّه به تعریف $\chi_f(G)$، فرض کنیم که

$$Hom(G, KG(m,n)) \neq \emptyset \ , \ \chi_f(G) = \frac{m}{n}$$

(یعنی بین G و $KG(m,n)$، حداقل یک همریختی وجود دارد که به‌ازای آن، کسر $\frac{m}{n}$ مینیمم، و $\chi_f(G) = \frac{m}{n}$)
حال با توجّه به تعریف گراف کنسر و دانستن اینکه رئوسی از آن با هم مجاورهستند که هیچ وجه مشترکی در مجموعه‌های nعضوی متناظر آنها وجود ندارد و همچنین با توجّه به نامعادله‌ی (۳.۳) و فرض قراردادن اینکه مجموعه‌ی مستقلمان در نامعادله‌ی (۳.۳)، مجموعه رئوسی باشند که در مجموعه‌های nعضوی متناظر با آن رئوس، m وجود دارد، داریم:

$$\Sigma(KG(m,n)) \leq \binom{m}{n} + \Sigma(KG(m-1,n))$$

از طرفی در گراف کنسر $m \geq 2n$، بنابراین اگر نامعادله‌ی (۳.۳) را برای گراف $KG(m,n)$ و $m = \{2n+1, 2n+2, ..., m-1\}$ پیاده‌سازی کنیم، آنگاه داریم :

$$\Sigma(KG(m,n)) \leq \binom{m}{n} + \Sigma(KG(m-1,n)) \leq \binom{m}{n} + \binom{m-1}{n} + \Sigma(KG(m-2,n))$$

$$\Rightarrow \binom{m}{n} + \binom{m-1}{n} + \Sigma(KG(m-2,n)) \leq ... \leq \binom{m}{n} + \binom{m-1}{n} + ... + \binom{2n+1}{n} + \Sigma(KG(2n,n))$$

درنتیجه خواهیم داشت :

$$\Sigma(KG(m,n)) \leq \Sigma_{i=0}^{m-2n-1}\binom{m-i}{n} + \Sigma(KG(2n,n))$$

حال با توجّه به اینکه گراف کنسر، یک گراف $\binom{m-n}{n}$-منتظم می‌باشد، بنابراین گراف $KG(2n,n)$ یک گراف ۱-منتظم خواهد بود و بین هر دو رأس آن یک یال موجود خواهد بود. لذا در رنگ‌آمیزی مجاز مینیمال روی گراف $KG(2n,n)$، نصف رئوس رنگ ۱ و نصف دیگر، رنگ ۲ را خواهند پذیرفت و داریم :

$$\Sigma(KG(2n,n)) = 1\frac{\binom{2n}{n}}{2} + 2\frac{\binom{2n}{n}}{2} = \frac{3}{2}\binom{2n}{n}$$

از طرفی

$$\Sigma_{i=0}^{m-2n-1}\binom{m-i}{n} = \binom{m+1}{n+1} - \binom{2n+1}{n+1}$$

بنابراین خواهیم داشت :

$$\begin{aligned}\Sigma(KG(m,n)) &\leq \binom{m+1}{n+1} - \binom{2n+1}{n+1} + \frac{3}{2}\binom{2n}{n}\\ &\leq \binom{m+1}{n+1} - \left(\frac{n-1}{2n+2}\right)\binom{2n}{n}\end{aligned}$$

حال چون $Hom(G,KG(m,n)) \neq \emptyset$، پس با توجّه به قضیه‌ی (۱.۱.۴) و ترایارأس بودن گراف کنسر، داریم :

$$\frac{\Sigma(G)}{|G|} \leq \frac{\Sigma(KG(m,n))}{\binom{m}{n}} \leq \frac{\binom{m+1}{n+1} - (\frac{n-1}{2n+2})\binom{2n}{n}}{\binom{m}{n}}$$

$$\Longrightarrow \Sigma(G) \leq \left(\frac{m+1}{n+1} - (\frac{n-1}{2n+2})\frac{\binom{2n}{n}}{\binom{m}{n}}\right)|G|$$

از طرفی

$$\frac{m+1}{n+1} - (\frac{n-1}{2n+2})\frac{\binom{2n}{n}}{\binom{m}{n}} \leq \frac{m+1}{n+1} \leq \frac{m}{n} = \chi_f(G)$$

بنابراین خواهیم داشت :

$$\Sigma(G) < \chi_f(G)|G|$$

و درنتیجه حکم ثابت می‌شود. □

فرض کنیم G یک گراف ترایارأسی باشد، در این‌صورت

$$\chi_f(G) = \frac{|G|}{\alpha(G)}$$

که $\alpha(G)$ همان عدد استقلال می‌باشد. لذا با توجّه به قضیه‌ی (۲.۱.۴) داریم

$$\Sigma(G) < \frac{|G|^2}{\alpha(G)}$$

همچنین از آنجایی‌که گراف‌های ترایارأسی، منتظم هستند لذا با فرض اینکه $e(G)$ یا به اختصارe، برابر با تعداد یال‌های گراف G باشد داریم

$$\Sigma\deg(V(G)) = 2e(G) \Longrightarrow e(G) = \frac{|G|\Delta(G)}{2}$$

حال اگر فرض کنیم $\chi_f(G) \leq \frac{۳}{۴}\Delta(G)$، آنگاه با ضرب طرفین این نامعادله در $|G|$ خواهیم داشت :

$$\chi_f(G)|G| \leq \frac{۳}{۴}\Delta(G)|G| = \frac{۳}{۴}(۲e(G)) < \frac{۳}{۲}(e+۱)$$

بنابراین کران بالای قضیه‌ی (۲.۱.۴)، برای گراف‌های ترایارأسی، نسبت به $\frac{۳}{۲}(e+۱)$ بهینه‌تر خواهد بود.

اگر $\omega(G)$ اندازه‌ی بزرگترین خوشه از گراف ترایارأس G باشد، با توجّه به کامل بودن خوشه‌ی H از G، بنابراین حداقل یک همریختی از H به G وجود دارد که با توجّه به قضیه‌ی (۱.۱.۴) داریم :

$$Hom(H,G) \neq \emptyset : \quad \frac{\Sigma(H)}{\omega(G)} \leq \frac{\Sigma(G)}{|G|} \Longrightarrow \Sigma(G) \geq \frac{\omega(G)+۱}{۲}|G|$$

بنابراین برای گراف‌های ترایارأسی نظیر G، همواره می‌توان کران‌هایی را به‌صورت زیر برای مجموع رنگی یا رنگ‌آمیزی جمعی رأسی آنها، در نظر گرفت:

$$\frac{\omega(G)+۱}{۲} \leq \Sigma(G) < \chi_f(G)|G|$$

همان‌طورکه قبلاً گفتیم، همواره $\chi_f(G) \leq \chi(G)$ و همچنین کسر $\frac{\chi(G)}{\chi_f(G)}$ می‌تواند به‌اندازه‌ی دلخواه، بسته به گراف G و همریختی آن با گراف‌های کنسر، بزرگ باشد. حال فرض کنیم $\tilde{G} = \{G_i\}_{i\in\aleph}$ به‌طوری‌که $\frac{\chi(G)}{\chi_f(G)} \longrightarrow \infty$. فرض کنیم G_nها گراف‌های بحرانی باشند و می‌دانیم که اگر گراف G بحرانی باشد، آنگاه $\delta(G) \geq \chi(G)-۱$. علاوه‌بر آن به‌طور کلی روی همه‌ی گراف‌ها، نامعادله‌ی

$$\delta(G) \leq \frac{۲e(G)}{|G|} \leq \Delta(G)$$

که در آن e تعداد یال‌های G می‌باشد، وجود دارد [۴]. حال داریم :

$$\chi(G_n)-۱ \leq \delta(G_n) \leq \frac{۲e(G_n)}{|G_n|} \Rightarrow e(G_n) \geq \frac{|G_n|(\chi(G_n)-۱)}{۲}$$

از طرفی با توجه به $\frac{\chi(G_n)}{\chi_f(G_n)} \longrightarrow \infty$، داریم :

$$\frac{\frac{۳}{۲}(e(G_n)+۱)}{\chi_f(G_n)|G_n|} > \frac{\chi(G_n)|G_n|}{\chi_f(G_n)|G_n|} \longrightarrow \infty$$

و این یعنی $\chi_f(G_n)|G_n|$ خیلی کوچکتر از $\frac{۳}{۲}(e(G_n)+۱)$ می‌باشد، درنتیجه دوباره، کران بالای $\chi_f(G_n)|G_n|$ بهتر از $\frac{۳}{۲}(e(G_n)+۱)$، اما این‌بار برای گراف‌های عضو خانواده‌ی $\tilde{G}$ به‌دست آمد.

۲.۴ الگوریتم مکاشفه‌ای پیشنهادی

این فصل را با بیان دو الگوریتم از نوع مکاشفه‌ای که در ابتدای فصل قبل از آن صحبت به‌میان آمد، برای محاسبه‌ی تقریبی از مجموع رنگی و قدرت رأسی، که در بسیاری از موارد جواب بهینه را نتیجه می‌دهد و برای سایر گراف‌ها می‌تواند تقریب خوبی از مقدار مجموع رنگی و قدرت رأسی آنها باشد، به پایان می‌بریم به این‌گونه که مقادیر «مجموع رنگی» و «قدرت رأسی» را از هر دو الگوریتم محاسبه می‌کنیم و مینیمم مقداری که از هر دو الگوریتم

به‌دست می‌آید را به‌عنوان تقریبی از مجموع رنگی و قدرت رأسی واقعی هر گراف مفروض داده شده، در نظر می‌گیریم. در ضمن بایستی گفت که با دریافت ماتریس‌های مختلف یکریخت برای هر گراف، ممکن است مقدار حاصل تغییر کند، که در این‌صورت نیز ما مینیمم مقدار آنها را تقریبی از مقدار بهینه در نظر می‌گیریم.
شاید بتوان مزیت‌های این دو الگوریتم را اینگونه برشمرد که در روند پیمایش هر دو الگوریتم، به رئوس با درجه‌ی کمتر، در حالت کلی همواره مقادیر طبیعی کمتری داده می‌شود، که این خود یک حسن برای الگوریتم‌هایمان می‌باشد، چرا که اگر رئوس با درجه‌ی بزرگتر، مقادیر بزرگتری بگیرند، آنگاه این امر باعث می‌شود که رئوس بیشتری از گراف، با مقادیر طبیعی کمتری، رنگ‌آمیزی شوند و درنتیجه مجموع رنگ‌های گراف، در نهایت، مینیمم مقدار یا نزدیک به مینیمم شود و لذا این‌گونه به مقدار واقعی مجموع رنگی نزدیک می‌شویم.
همچنین الگوریتم در هر مرحله، مجاز بودن رنگ‌آمیزی را بررسی می‌کند و بنابراین، رنگ‌آمیزی گراف با استفاده از این الگوریتم، همواره مجاز است.
امّا بهرحال می‌بایست گفت که این الگوریتم تنها به‌عنوان یک پیشنهاد مطرح می‌شود و در یافتن این الگوریتم، فقط تجربه و آزمایش دخیل بوده است.
می‌توان مرتبه‌ی هر دو الگوریتم را در هر بار اجرای آن، بدون در نظر گرفتن جایگشت‌های ماتریس مجاورت گراف مفروض، $o(n)$ در نظر گرفت، چرا که در روند اجرای الگوریتم‌ها، در هر بار اجرا، همه‌ی رئوس گراف را پیمایش می‌شود. ذکر این نکته ضروری است که هر دو الگوریتم، مکمل یکدیگر هستند و یافتن مقدار تقریبی یا بهینه‌ی مجموع رنگی، حتماً با مقایسه‌ی جواب هر دو الگوریتم، امکان‌پذیر است.
همان‌طورکه می‌دانیم، هر گراف ناهمبند، به‌صورت اجتماعی از مؤلفه‌های همبندی است و بدیهی است که رنگ‌آمیزی هر مؤلفه‌ی همبندی از یک گراف ناهمبند، مستقل از رنگ‌آمیزی مؤلفه‌های دیگر است. لذا بدون از دست دادن کلیّت، الگوریتم خود را روی گراف‌های همبند، بیان می‌کنیم. لازم به ذکر است که در الگوریتم اول، رنگ‌آمیزی به صورت موقت و بعد به‌صورت تثبیت شده و دائم خواهد بود.
حال با توجه به دو قاعده‌ی زیر، الگوریتم‌ها را بیان می‌کنیم.

i) **قاعده رنگ‌آمیزی مجاز :**
هیچ دو رأس مجاور، نبایستی با یک رنگ مشابه رنگ‌آمیزی شوند.

ii) **قانون گزینش :**
رأس مجاور با یک رأس، در بین رئوس مجاور دیگر با آن، اولاً از درجه‌ی کمتری برخوردار باشد، و ثانیاً در سطر بالاتری از ماتریس مجاورت، نسبت به رئوس مجاور دیگر، قرار داشته باشد.

۱.۲.۴ الگوریتم A

$A_۱$) ماتریس مجاورت را دریافت کنید.

$A_۲$) درجه‌ی هر رأس را با استفاده از ماتریس مجاورت، تعیین کنید.

$A_۳$) رئوس گراف را بر حسب درجه، به‌صورت نزولی مرتب کنید.

$A_۴$) رأس با ماکسیمم درجه را انتخاب و رئوس مجاور با آن را با کمترین عدد طبیعی ممکن، با توجه به رنگ‌آمیزی مجاز کنید.

$A_۵$) رأس انتخابی در مرحله‌ی $A_۴$ را با کمترین عدد طبیعی ممکن، رنگ‌آمیزی مجاز کنید.

$A_۶$) مراحل $A_۴$ و $A_۵$ را تا رنگ‌آمیزی تمام رئوس گراف، ادامه دهید.

$A_۷$) مقدار رنگ همه‌ی رئوس را با هم جمع کنید و حاصل‌جمع را به‌عنوان «مجموع رنگی» گراف، و تعداد رنگ‌های استفاده شده در این رنگ‌آمیزی را به‌عنوان «قدرت رأسی» آن نمایش دهید.

۲.۲.۴ الگوریتم B

$B_۱$) ماتریس مجاورت را دریافت کنید.

$B_۲$) درجه‌ی هر رأس را با استفاده از ماتریس مجاورت، تعیین کنید.

$B_۳$) رئوس گراف را بر حسب درجه، به‌صورت صعودی مرتب کنید.

$B_۴$) رئوس با مینیمم درجه را رنگ موقت ۱ بدهید.

$B_۵$) رأس با رنگ موقت ۱ را انتخاب کنید. اگر چند رأس با رنگ موقت ۱ وجود داشت، آن رأسی را انتخاب کنید که در سطر بالاتر ماتریس مجاورت قرار دارد.

$B_۶$) رنگ رأس انتخابی را تثبیت کنید.

$B_۷$) با توجه به «قانون گزینش»، از رأس انتخابی به رأس مجاوری از آن بروید که یا رنگ آن موقت، و یا رنگ نشده باشد، و آن را رنگ ۲ بدهید.

$B_۸$) رنگ رأس مجاور را تثبیت کنید و با توجّه به «قانون گزینش»، به رئوس مجاور آن که رنگ نشده است، بروید، و با توجّه به «قاعده‌ی رنگ‌آمیزی مجاز»، آنها را با کمترین عدد طبیعی ممکن، رنگ کنید.

$B_۹$) رنگ رئوس انتخابی که از آنها به رئوس مجاور می‌روید و همچنین رنگ رئوس مجاوری که به آنها وارد و رنگی به آنها تعلّق می‌دهید، را تثبیت کنید.

$B_{۱۰}$) بازگردید به اولین رأس انتخابی، اگر رئوس مجاور دیگری دارد، با توجه به «قانون گزینش» و «قاعده‌ی رنگ‌آمیزی مجاز»، رئوس مجاور با آن را با کمترین مقدار عدد طبیعی ممکن، رنگ کنید.

$B_{۱۱}$) مراحل $B_۸$ و $B_۹$ را تکرار کنید.

$B_{۱۲}$) اگر رئوس با رنگ موقت ۱ باقی‌مانده باشد، با توجه به «قانون گزینش»، به رئوس مجاوری از آنها بروید که یا رنگ آنها موقت باشد و یا رنگ نشده باشند، و آنها را با توجه به «قاعده‌ی رنگ‌آمیزی مجاز»، با کمترین عدد طبیعی ممکن رنگ کنید و بازگردید به مرحله‌ی $B_{۱۱}$.

$B_{۱۳}$) اگر همه‌ی رأس‌ها رنگ شده‌اند و رنگ آنها تثبیت شده است، مقدار رنگ همه‌ی رئوس را با هم جمع کنید و حاصل‌جمع را به‌عنوان «مجموع رنگی» گراف، و تعداد رنگ‌های استفاده شده در این رنگ‌آمیزی را به‌عنوان «قدرت رأسی» آن نمایش دهید.

$B_{۱۴}$) اگر همه‌ی رأس‌ها رنگ نشده باشند و رأسی با رنگ ۱ که رنگ آن تثبیت نشده وجود نداشته باشد، با انتخاب رأس جدید با رنگ تثبیت شده و با مقدار رنگ بیشتر یا مساوی با ۱، با اولویت انتخاب اینکه مقدار رنگ آن نزدیک‌تر به ۱ و رأس مجاور با آن رنگ نشده باشد، به‌عنوان رأسی آغازین، برای شروع مراحل رنگ‌آمیزی رئوس باقی‌مانده، استفاده کنید. اگر باز رئوسی باقی ماند که رنگی به آنها تعلق نگرفته باشد، و از طریق الگوریتم به آنها دسترسی وجود نداشت، به آن رأس‌ها بروید و با حفظ «قاعده‌ی رنگ‌آمیزی مجاز»، آنها را با کمترین عدد طبیعی ممکن، رنگ نمایید.

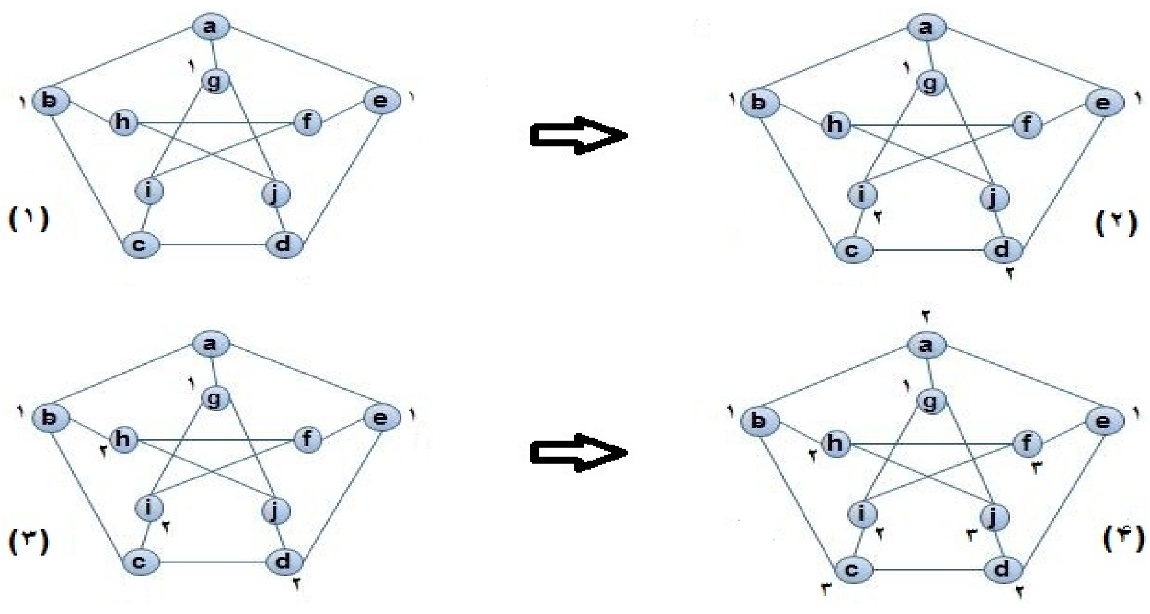
$B_{۱۵}$) بازگردید به مرحله‌ی $B_{۱۳}$.

در ادامه نتایجی را در خصوص مجموع رنگی چند گراف، با پیاده‌سازی دو الگوریتم فوق روی آنها بیان می‌کنیم که نتایج حاصل، همگی در جدول زیر آورده شده است و به دنبال آن شکل گراف‌های مورد نظر، به همراه رنگ‌آمیزی استفاده شده از هر الگوریتم را می‌توانید ببینید.
در ضمن کد شبیه‌سازی الگوریتم اول و دوم را در قسمت پیوست، با زبان پایتون[۱] بیان نمودیم و کد هر الگوریتم را اجرا و نتایج حاصل را روی چند گراف بررسی می‌کنیم.

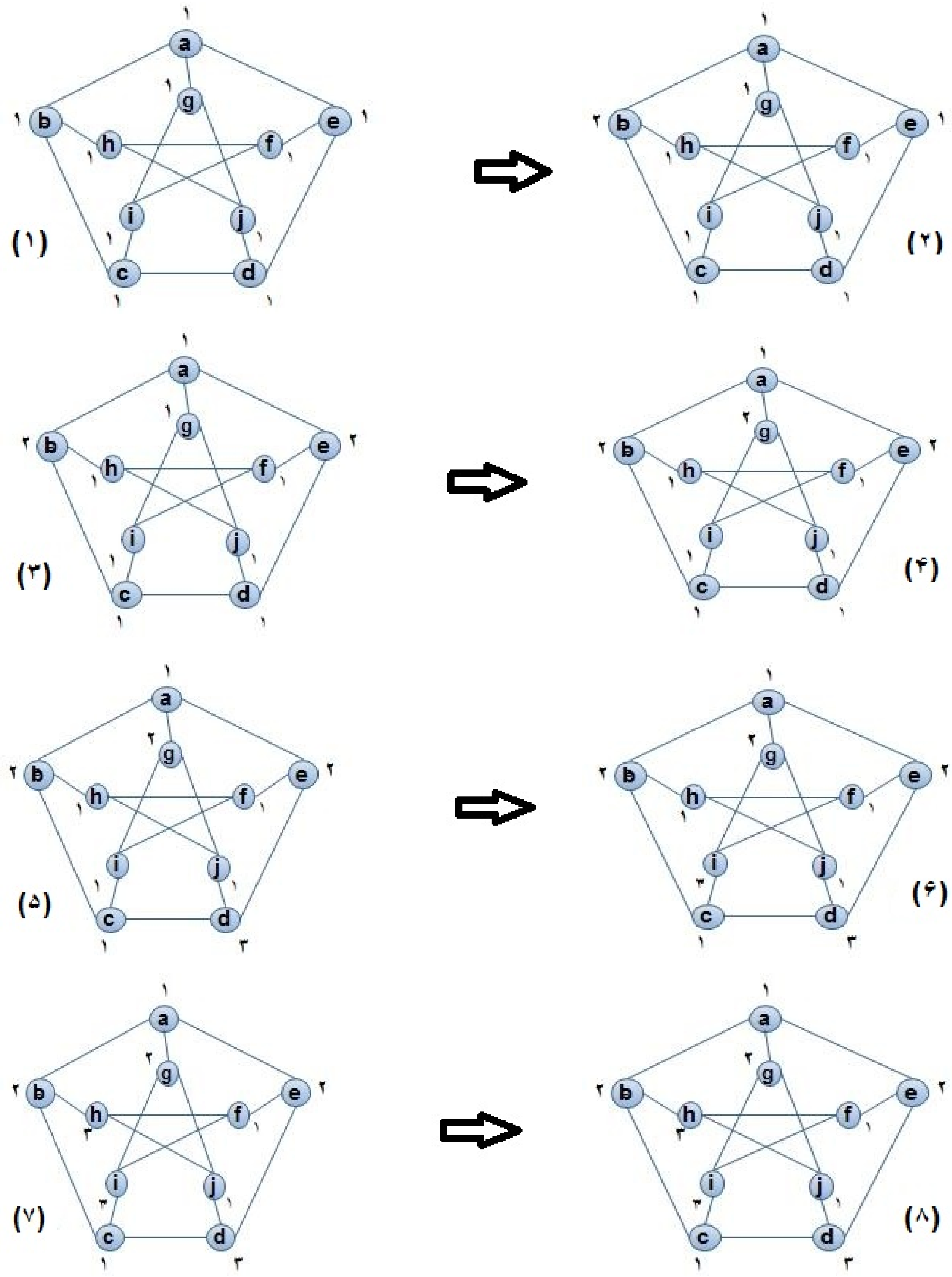
جدول ۱.۴: جدول مقایسه‌ی مقادیر به‌دست آمده از الگوریتم‌ها و مقادیر واقعی

گراف	Σ_A	s_A	Σ_B	s_B	$\Sigma(G_i)$	$s(G_i)$
$G_۱$	۲۰	۳	۱۹	۳	۱۹	۳
$G_۲$	۱۴	۲	۱۶	۲	۱۴	۲
$G_۳$	۱۲	۲	۱۱	۳	۱۱	۳
$G_۴$	۹	۲	۹	۳	۹	۲
$G_۵$	۲۱	۲	۱۹	۳	۱۹	۳

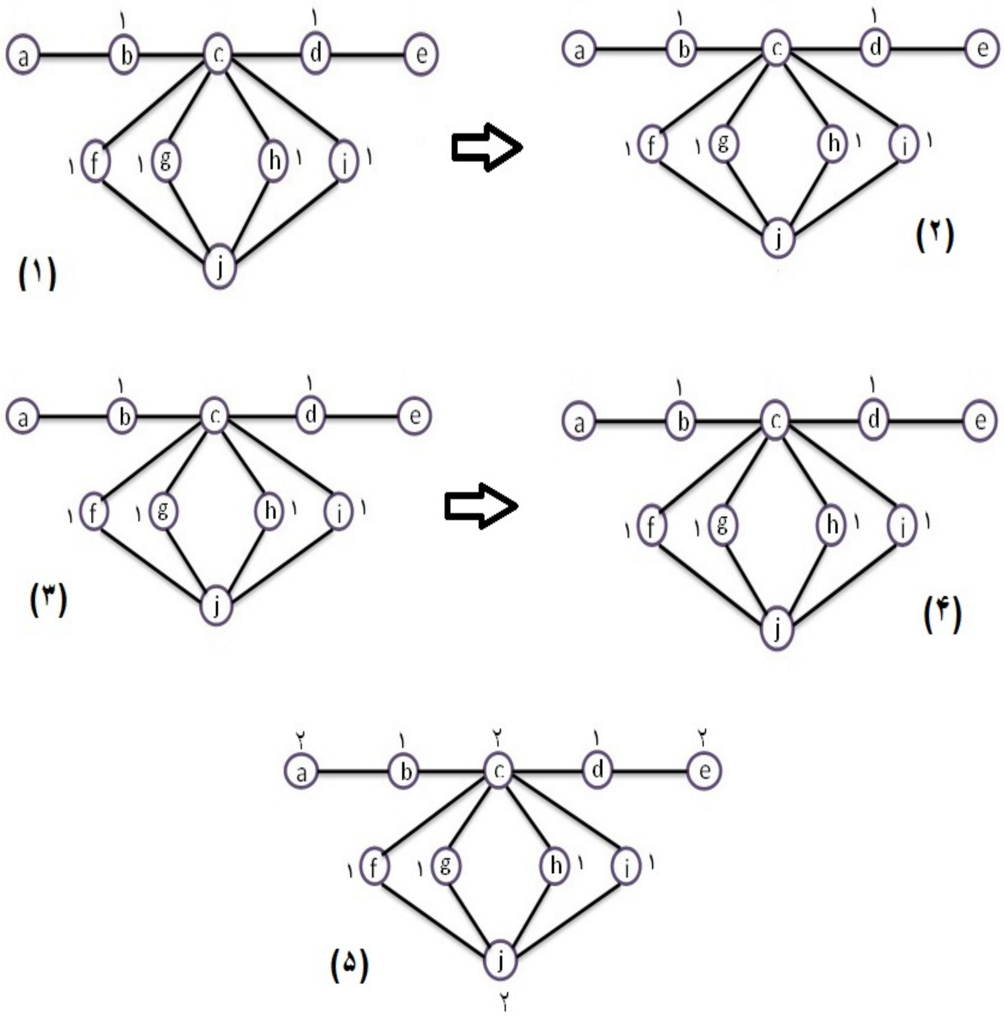
[۱] Python



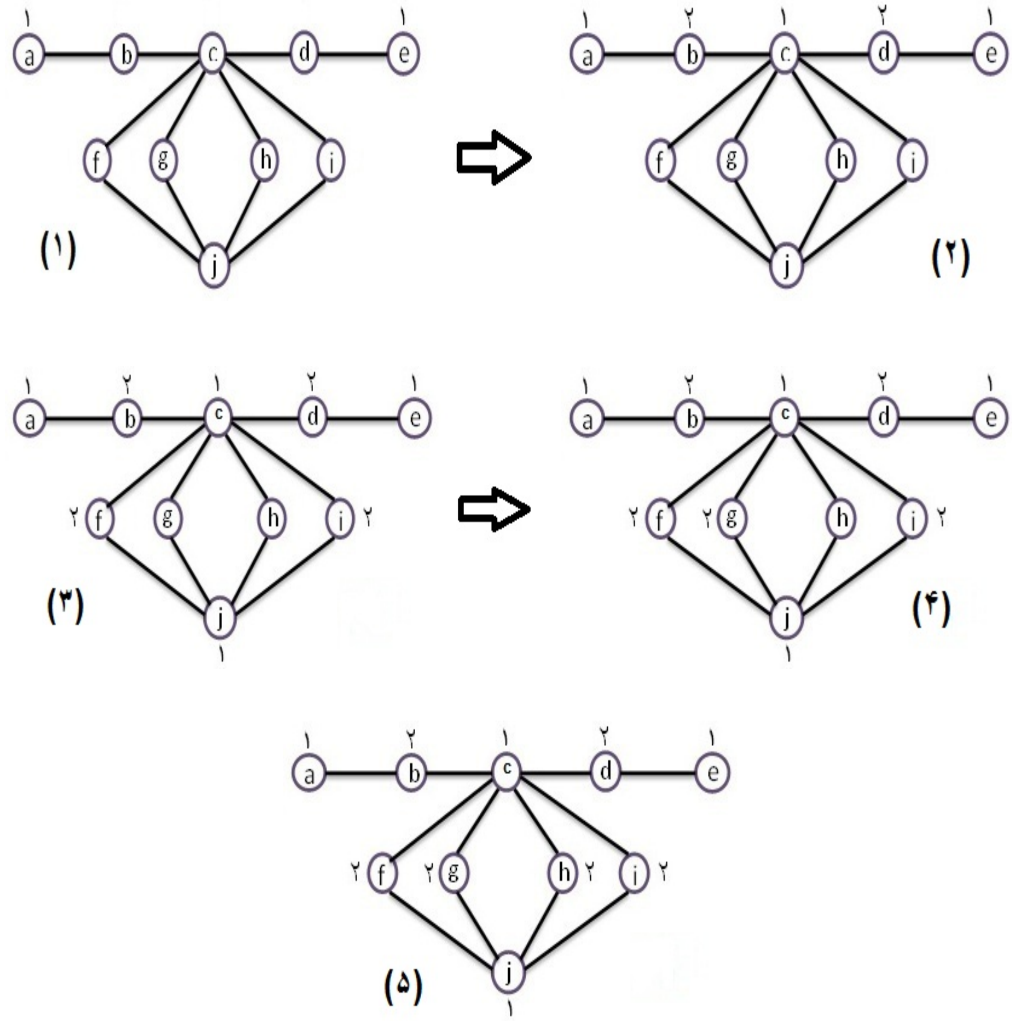
شکل ۲.۴: رنگ‌آمیزی گراف G_1 با استفاده از الگوریتم A



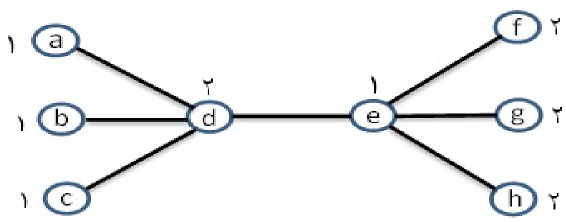
شکل ۳.۴: رنگ‌آمیزی مینیمال گراف G_1 با استفاده از الگوریتم B



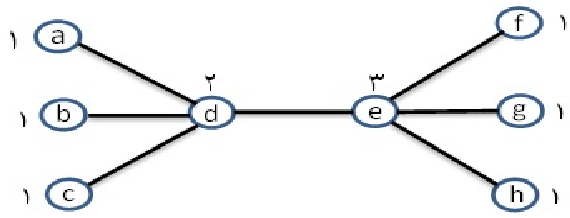
شکل ۴.۴: رنگ‌آمیزی مینیمال گراف G_2 با استفاده از الگوریتم A



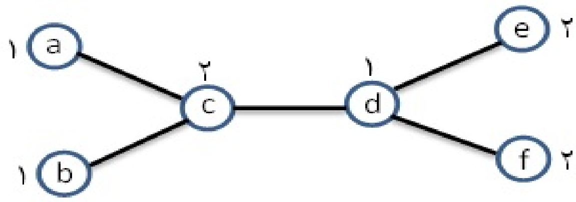
شکل ۵.۴: رنگ‌آمیزی مینیمال گراف $G_۲$ با استفاده از الگوریتم B



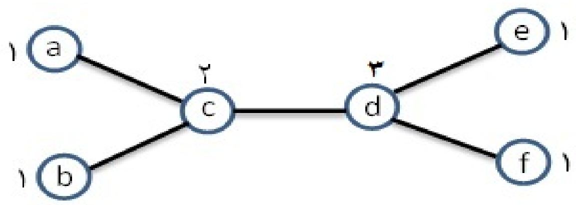
شکل ۶.۴: رنگ‌آمیزی مینیمال گراف $G_۳$ با استفاده از الگوریتم A



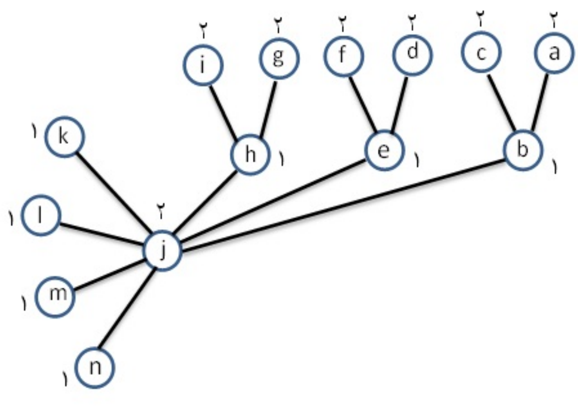
شکل ۷.۴: رنگ‌آمیزی مینیمال گراف $G_۳$ با استفاده از الگوریتم B



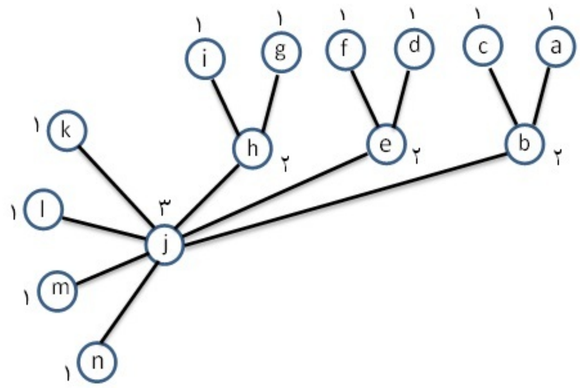
شکل ۸.۴: رنگ‌آمیزی مینیمال گراف $G_۴$ با استفاده از الگوریتم A



شکل ۹.۴: رنگ‌آمیزی مینیمال گراف $G_۴$ با استفاده از الگوریتم B



شکل ۱۰.۴: رنگ‌آمیزی مینیمال گراف $G_۵$ با استفاده از الگوریتم A

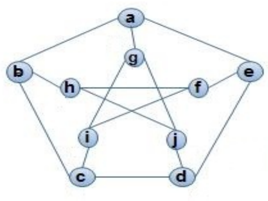


شکل ۴.۱۱: رنگ‌آمیزی مینیمال گراف $G_۵$ با استفاده از الگوریتم B

پیوست آ

کدهای الگوریتم‌های اول و دوم مکاشفه‌ای پیشنهادی

در اینجا کد الگوریتم A را به ترتیب روی گراف‌های (آ.۱) و (آ.۲) اجرا می‌کنیم و نتایج حاصل را در انتهای الگوریتم نشان و بعد از آن، آنچه گفته شد را با الگوریتم B انجام، و نتیجه‌ی حاصل از هر دو الگوریتم را مقایسه و مینیمم آنها را به‌عنوان مجموع رنگی و قدرت رأسی قرار می‌دهیم.



شکل آ.۱: گراف پترسن

آ.۱ الگوریتم A

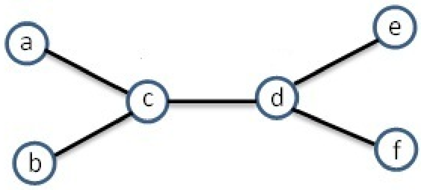
کد الگوریتم A برای گراف (آ.۱) :

```
from itertools import permutations

mainG=[
[0,1,0,0,1,0,1,0,0,0],
```

```
[1,0,1,0,0,0,0,1,0,0],
[0,1,0,1,0,0,0,0,1,0],
[0,0,1,0,1,0,0,0,0,1],
[1,0,0,1,0,1,0,0,0,0],
[0,0,0,0,1,0,0,1,1,0],
[1,0,0,0,0,0,0,0,1,1],
[0,1,0,0,0,1,0,0,0,1],
[0,0,1,0,0,1,1,0,0,0],
[0,0,0,1,0,0,1,1,0,0]
]

colors = [-1]*len(mainG)

def allPermutation():
return permutations(range(len(mainG)))

def newAdjacentMatrix(pattern):
newMatrix= [[0]*len(mainG) for i in range(len(mainG))]
for i in range(len(mainG)):
for j in range(len(mainG)):
newMatrix[pattern[i]][pattern[j]] = mainG[i][j]
return newMatrix

def degree(i):
return sum(g[i])

def allDegree():
all=[]
for i in range(len(g)):
all.append((i,degree(i)))
return all
def adjacent(i):
k=0
adj=[]
```

```
for j in g[i]:
if j==1:
adj.append(k)
k+=1
return adj

def properColor(i):
if colors[i]!=-1:
return
cols=[]
for j in adjacent(i):
if colors[j]!=-1:
cols.append(colors[j])
minNum=1
while cols.count(minNum)>0:
minNum+=1
colors[i]=minNum

def method1():
global colors
colors = [-1]*len(mainG)
sortDegree = sorted(allDegree(),key=lambda x:x[1] ,reverse = True)

maxDegreeIndex =0
while maxDegreeIndex<len(g):
maxDegree = sortDegree[maxDegreeIndex]
for i in adjacent(maxDegree[0]):
properColor(i)
properColor(maxDegree[0])

maxDegreeIndex+=1
while maxDegreeIndex<len(g) and colors[sortDegree[maxDegreeIndex][0]]!=-1 :
maxDegreeIndex+=1
```

```
return (colors,sum(colors))

min=10000
minc=[]
maxc=10000
k=0
for pat in allPermutation():
if k%100000==0:
print k
k+=1
g= newAdjacentMatrix(pat)
(c,m)= method1()
if m==min and max(c)<maxc:
minc=c
maxc=max(c)
continue
if m<min:
min=m
minc=c
maxc=max(c)

print minc,min
***********************************************************
color final=[2, 1, 3, 2, 1, 3, 1, 2, 2, 3] , sum final=20
```



شکل آ.۲: گراف G

نتیجه‌ی کد الگوریتم A برای گراف (آ.۲) :

```
from itertools import permutations

mainG=[[0,0,1,0,0,0],
[0,0,1,0,0,0],
[1,1,0,1,0,0],
[0,0,1,0,1,1],
[0,0,0,1,0,0],
[0,0,0,1,0,0]
]

***************************************************************
color final=[1, 1, 2, 1, 2, 2] , sum final=9
```

۲.آ الگوریتم B

کد الگوریتم B برای گراف (آ.۱) :

```
mainG=[
[0,1,0,0,1,0,1,0,0,0],
[1,0,1,0,0,0,0,1,0,0],
[0,1,0,1,0,0,0,0,1,0],
[0,0,1,0,1,0,0,0,0,1],
[1,0,0,1,0,1,0,0,0,0],
[0,0,0,0,1,0,0,1,1,0],
```

```
[1,0,0,0,0,0,0,0,1,1],
[0,1,0,0,0,1,0,0,0,1],
[0,0,1,0,0,1,1,0,0,0],
[0,0,0,1,0,0,1,1,0,0]
]

g=mainG
def degree(i):
return sum(g[i])

def allDegree():
all=[]
for i in range(len(g)):
all.append((i,degree(i)))
return all
def adjacent(i):
k=0
adj=[]
for j in g[i]:
if j==1:
adj.append(k)
k+=1
return adj

def select(i):
adj = adjacent(i)
adjDegree = [(j,degree(j)) for j in adj]
sortDegree = sorted(adjDegree,key=lambda x:x[1])
return sortDegree[0]

def select2(i):
adj = adjacent(i)
adjDegree = [(j,degree(j)) for j in adj]
sortDegree = sorted(adjDegree,key=lambda x:x[1])
```

```
indx=0
while(indx<len(g) and (finalColors[sortDegree[0][0]]>0 or tmpColors[sortDegree[0][
indx+=1
if(indx==len(g)):
return -1
return sortDegree[indx]

def properColor(i):
if finalColors[i]!=-1:
return
cols=[]
for j in adjacent(i):
if finalColors[j]!=-1:
cols.append(finalColors[j])
else:
if tmpColors[j]!=-1:
cols.append(tmpColors[j])
minNum=1
while cols.count(minNum)>0:
minNum+=1
finalColors[i]=minNum

finalColors = [-1]*len(g)
tmpColors = [-1]*len(g)
sortDegree = sorted(allDegree(),key=lambda x:x[1])
print sortDegree
indx=0
while(indx<len(g) and sortDegree[indx][1]==0):
finalColors[sortDegree[indx][0]]=1
indx+=1
if indx==len(g):
return

minDegree =[]
```

```
minDegreeValue = sortDegree[indx][1]

d=indx
while(d<len(g) and sortDegree[d][1]==minDegreeValue):
tmpColors[sortDegree[d][0]]=1
d+=1

finalColors[sortDegree[indx][0]]=1
zarf= adjacent(indx)
(v,d) = select(sortDegree[indx][0])
finalColors[v]=2
zarf.remove(v)
ret = select2(v)
if ret==-1:
pass
else:
(v,d)=ret
properColor(v)

while maxDegreeIndex<len(g) and colors[sortDegree[maxDegreeIndex][0]]!=-1 :
maxDegreeIndex+=1

return (colors,sum(colors))

colfinal=[]
somfinal=[]
min=10000
minc=[]
maxc=10000
k=0
for pat in allPermutation():
if k%100000==0:
print k
k+=1
```

```
g= newAdjacentMatrix(pat)
(c,m)= method1()
if m==min and max(c)<maxc:
minc=c
maxc=max(c)
continue
if m<min:
min=m
minc=c
maxc=max(c)

print minc,min
***************************************************************
color final=[1, 2, 1, 3, 2, 1, 2, 3, 3, 1] , sum final=19
```

نتیجه‌ی کد الگوریتم B برای گراف (آ.۲) :

```
mainG=[[0,0,1,0,0,0],
[0,0,1,0,0,0],
[1,1,0,1,0,0],
[0,0,1,0,1,1],
[0,0,0,1,0,0],
[0,0,0,1,0,0]
]

***************************************************************
color final=[1, 1, 2, 3, 1, 1] , sum final=9
```

مراجع

[1] M. Alishahi and A. Taherkhani, *A Note on Chromatic Sum*, To appear, Ars Combinatoria.

[2] A. Bar-Noy, M. Bellare, M. M. Halld´orsson, H. Shachnai, and T. Tamir, *On chromatic sums and distributed resource allocation. Information and Computation*, 1998, 140(2):183–202.

[3] A. Bar-Noy and G. Kortsarz, *Minimum color sum of bipartite graphs. J. Algorithms*, 1998, 28(2):339–365.

[4] J. A. Bondy and U. S. R. Murty, *Graph theory with applications*, Fifth printing. Elsevier, New York, 1982.

[5] P. Erdös, E. Kubicka, and A. J. Schwenk, *Graphs that require many colors to achieve their chromatic sum*, Congr. Numer. 71, 1990, 17–28.

[6] P. Erdös, A. Hajnal, *On chromatic number of graphs and set-systems*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 17, 1966, 61-99.

[7] K. Giaro, M. Kubale, *Edge-chromatic sum of trees and bounded cyclicity graphs*, Information Processing Letters 75 (1–2), 2000, 65–69.

[8] Ch. Godsil, G. Royle, *Algebraic Graph Theory*, Springer, New York, 2001.

[9] H. Hajiabolhassan, M. L. Mehrabadi, and R. Tusserkani, *Minimal coloring and strength of graphs*, Discrete Math. 215, 2000, 265–270.

[10] H. Hajiabolhassan, M. L. Mehrabadi, and R. Tusserkani, *Tabular graphs and chromatic sum*, Discrete Math. 304, 2005, 11 – 22.

[11] M. M. Halld´orsson, G. Kortsarz, and H. Shachnai. *Sum coloring interval and k-claw free graphs with application to scheduling dependent jobs. Algorithmica*, 2003, 37(3):187–209.

[12] T. Jiang and D. B. West, *Coloring of trees with minimum sum of colors*, J. Graph Theory, 32, 1999, No. 4, 354–358.

[13] E. Kubicka and A. J. Schwenk, *An introduction to chromatic sums*, Proc. ACM Computer Science Conference (Louisville), ACM Press, New York, 1989, 39–45.

[14] D.R. Lick, A.T. White, *k-Degenerate graphs*, Canad. J. Math. 22, 1970, 1082-1096.

[15] L. Lov´asz. Kneser's conjecture, *chromatic number, and homotopy. J. Combin. Theory Ser.*, A, 1978, 25(3):319–324.

[16] J. Mitchem and P. Morriss, *On the cost-chromatic number of graphs*, Discrete Math. 171, 1997, No. 1–3, 201–211.

[17] S. Nicoloso, *Sum coloring and interval graphs: a tight upper bound for the minimum number of colors*, Discrete Math. 280, 2004, No. 1–3, 251–257.

[18] S. Nicoloso, M. Sarrafzadeh, and X. Song, *On the sum coloring problem on interval graphs*, Algorithmica 23, 1999, No. 2, 109–126.

[19] Edwin D. Reilly, *Concise encylopedia of computer science*, John Wiley , Sons Ltd, 2004.

[20] Edward R. Scheinerman and Daniel H. Ullman, *Fractional graph theory*, Wiley Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization. John Wiley , Sons Inc, New York, 1997. A rational approach to the theory of graphs, With a foreword by Claude Berge, A Wiley-Interscience Publication.

[21] T. Szkaliczki, *Routing with minimum wire length in the doglegfree manhattan model is NP-complete*, SIAM J. Comput, 1999, 29(1):274–287.

[22] C. Thomassen, P. Erdös, Y. Alavi, P. J. Malde, and A. J. Schwenk, *Tight bounds on the chromatic sum of a connected graph*, J. Graph Theory 13, 1989, No. 3, 353–357.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

جایگشت	Permutation
رنگ‌آمیزی جمعی رأسی	Vertex Sum Coloring
رنگ‌آمیزی ستونی	Column Coloring
رنگ‌آمیزی سطری	Row Coloring
رنگ‌آمیزی مینیمال	Minimal Coloring
عدد رنگ‌آمیزی	Coloring Number
عدر رنگی کسری	Fractional Coloring Number
قدرت رأسی	Vertex Strength
گراف ترایارأس	Vertex Transitive Graph
گراف جدول	Tabular Graph
گراف جدولی	Table Graph
گراف کنسر	Kneser Graph
مجموع رنگی	Chromatic Sum
مکاشفه‌ای	Heuristic
یکپارچه‌سازی مقیاس خیلی بزرگ	Very Large Scale Integeration
NP-دشوار	Non-deterministic Polynomial-time Hard
NP-کامل	Non-deterministic Polynomial-time Complete

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Chromatic Sum	مجموع رنگی
Coloring Number	عدد رنگ‌آمیزی
Column Coloring	رنگ‌آمیزی ستونی
Fractional Coloring Number	عدر رنگی کسری
Heuristic	مکاشفه‌ای
Kneser Graph	گراف کنسر
Minimal Coloring	رنگ‌آمیزی مینیمال
Non-deterministic Polynomial-time Complete	NP-کامل
Non-deterministic Polynomial-time Hard	NP-دشوار
Permutation	جایگشت
Row Coloring	رنگ‌آمیزی سطری
Table Graph	گراف جدولی
Tabular Graph	گراف جدول
Vertex Transitive Graph	گراف ترایارأس
Vertex Strength	قدرت رأسی
Vertex Sum Coloring	رنگ‌آمیزی جمعی رأسی
Very Large Scale Integeration	یکپارچه‌سازی مقیاس خیلی بزرگ

Aabstract

For graph G, a function $c : V(G) \longrightarrow \aleph$ is called a proper coloring, if for every $uv \in E(G)$ we have $c(u) \neq c(v)$. Chromatic sum corresponding with c coloring is defined as equal to $\Sigma_{u\in V(G)}c(u)$, and chromatic sum $\Sigma(G)$ of G, is the minimum possible value for chromatic sum, among all proper colorings of G. Also, the minimum number of colors for which a coloring with chromatic sum of graph G can be found, is called vertex strength $s(G)$ of G.

In this thesis, in the first chapter, we review the previous literature and become familiar with the topic of chromatic sum and its concept, then we show its applications in the engineering and electronics known as ”VLSI design”. In the second chapter, we review the basic definitions and general theorems used in the next chapters. Concepts of minimal coloring, chromatic sum and vertex strength of a graph are expressed in chapter three; we also investigate some bounds for these concepts.

Finally, in chapter four, with the use of the concept of homomorphism of graphs, we mention some bounds for chromatic sum. Chapter four will be ended by expressing two algorithms for approximate calculation of chromatic sum values and vertex strength.

Keywords: Chromatic Sum, Vertex Strength, Minimal Coloring

Technology University of Shahrood
Faculty Of Mathematical Sciences

Dissertation Submitted in Partial Fulfillment of The Requirements For The Degree of Master of Science in Applied Mathematics

Chromatic Sum Of Graphs

Supervisors

Dr.Sadegh Rahimi Sherbaf

Dr.Meysam Alishahi

by

Mahmoud Tardasty

February 2014