



دانشکده علوم ریاضی
گروه آمار

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
آمار، گرایش ریاضی

عنوان

توزیع بتای تعمیم یافته وایبل

استاد راهنما

دکتر احمد نزاکتی

استاد مشاور

دکتر محمد آرشی

دانشجو

سحر جلالی

بهمن ۱۳۹۲

به نام آن که جان را فکرت آموخت

پروردگار!...

نه می توانم مویشان را که در راه عزّت من سفید شد، سیاه کنم و نه برای دست های
پینه بسته شان که شمره تلاش برای افتخار من است، مرهمی دارم. پس توفیقم ده که
هر خطه سگر گزارشان باشم و ثانیه های عمرم را در عصای دست بودنشان بگذارم.

اگر تنها ترین تنها شوم، باز خدا هست

او جان شین همه نداشتن هست...

تقدیم بہ خانوادہ عزیزم

، محترم مہربانم

و خواہر زادہ عزیزم، صبا کو چلو

سپاس‌گزاری

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.
در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر احمد نزاکتی، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.
از جناب آقای دکتر محمد آرشی که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.
در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکر می‌کنم از برادر و خواهران عزیزم و همین‌طور همسر بزرگوaram به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

سحر جلالی
بهمن ۱۳۹۲



دانشگاه علمی کاربردی

مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره

باسمه تعالی

شماره:

تاریخ:

ویرایش:

فرم صورت جلسه دفاع از پایان نامه تحصیلی دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) نتیجه ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خانم سحر جلالی، رشته آمار گرایش آمار ریاضی تحت عنوان توزیع بتای تعمیم یافته وایبل که در تاریخ ۹۲/۱۱/۳۰ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

☐ مردود☐ دفاع مجدد☒ قبول (با درجه: بسیار امتیاز (۱۸/۵))

۱- عالی (۲۰ - ۱۹) ۲- بسیار خوب (۱۸/۹۹ - ۱۸)

۳- خوب (۱۶ - ۱۷/۹۹) ۴- قابل قبول (۱۴ - ۱۵/۹۹)

۵- نمره کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول

عضو هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	دکتر احمد نزاکتی	دانشیار	
۲- استاد مشاور	دکتر محمد آرشی	دانشیار	
۳- نماینده شورای تحصیلات تکمیلی	دکتر داود شاهسونی	استادیار	
۴- استاد ممتحن	دکتر حسین باغیشنی	استادیار	
۵- استاد ممتحن	دکتر محمد رضا ربیعی	استادیار	

امضاء

رئیس دانشکده: دکتر احمد زیره

تعمدنامه

اینجانب سحر جلالی دانشجوی کارشناسی ارشد رشته آمار دانشکده علوم ریاضی دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان توزیع بتای تعمیم یافته وایبل، تحت راهنمایی دکتر احمد نزاکتی متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های دیگر پژوهش گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه شاهرود “ یا “ Shahrood University “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

سحر جلالی
بهمن ۱۳۹۲

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی باشد.

چکیده

برای مدل‌بندی نرخ شکست‌های سهمی شکل یا سهمی وارونه، برخی از نسخه‌های توزیع وایبل، مانند توزیع تعمیم وایبل تعدیل‌یافته و توزیع بتا وایبل تعمیم‌یافته را معرفی می‌کنیم و با توجه به این دو توزیع، توزیع شش پارامتری جدید بتا وایبل تعدیل‌یافته تعمیم‌یافته را ارائه می‌دهیم. اهمیت این توزیع‌ها، در مدل‌بندی نرخ شکست‌های غیریکنوا، به‌خوبی نرخ شکست‌های یکنوا است که در تحلیل بقا و قابلیت اطمینان بسیار رایج است. این توزیع‌ها هم‌چنین، برخی از توزیع‌های شناخته‌شده را به‌عنوان زیرمدل‌های خود دربر دارند. پس از معرفی توزیع بتا وایبل تعدیل‌یافته تعمیم‌یافته، در ادامه، تابع توزیع و تابع چگالی آن‌را به‌صورت مجموع وزنی توزیع تعمیم وایبل تعدیل‌یافته بیان می‌کنیم. گشتاور مرتبه k ام را به‌صورت مجموع نامتناهی به دو فرم متفاوت محاسبه کرده و معادلات غیرخطی را برای برآورد درستمایی ماکسیمم نتیجه می‌گیریم. درنهایت، با بررسی این توزیع جدید روی یک مجموعه داده واقعی، برتری این توزیع را نسبت به زیرمدل‌هایش نشان می‌دهیم.

کلمات کلیدی: نرخ شکست سهمی شکل، تابع W لامبرت، توزیع تعمیم وایبل تعدیل‌یافته، توزیع بتا وایبل تعمیم‌یافته، توزیع بتا وایبل تعدیل‌یافته تعمیم‌یافته

پیش‌گفتار یکی از اهداف مهم در بررسی‌های آماری، تعیین مدل براساس شکل نرخ شکست داده‌ها می‌باشد. با توجه به این‌که توزیع وایبل دارای نرخ شکست یکنوا است، برای داده‌های با چنین نرخ شکستی، در اکثر موارد از توزیع وایبل استفاده می‌شود. از آنجایی‌که در تحلیل بقا و قابلیت اطمینان، نرخ شکست‌های غیریکنوا متداول هستند، ازجمله، مرگ ومیر نوزادان و سیستم‌های مکانیکی و الکتریکی پیچیده، توزیع وایبل مناسب نمی‌باشد. از این‌رو، به معرفی توزیع‌هایی با نرخ شکست غیریکنوا می‌پردازیم. هدف ما در این پایان‌نامه، معرفی توزیعی به‌نام بتا وایبل تعمیم‌یافته با نرخ شکست غیریکنوا است. در راستای مطالب بیان‌شده، پایان‌نامه را به‌صورت زیر تنظیم نموده‌ایم:

- در فصل اول، تعاریف و قضایای مورد نیاز در این پایان‌نامه را مطرح می‌کنیم.
 - در فصل دوم، توزیع چهار پارامتری تعمیم وایبل تعدیل‌یافته را معرفی کرده و به بیان زیرمدل‌ها و محاسبه گشتاورها و آماره ترتیبی پرداخته‌ایم.
 - در فصل سوم، پس از معرفی توزیع بتا وایبل تعمیم‌یافته و زیرمدل‌هایش، گشتاورهای آن‌را به‌دست آورده و با استفاده از شبیه‌سازی به مطالعه مدل پرداخته‌ایم و در نهایت با دو مثال کاربردی، برتری این توزیع را نسبت به زیرمدل‌هایش نشان می‌دهیم.
 - در فصل چهارم، با توجه به فصل‌های دوم و سوم، توزیع شش پارامتری جدیدی را با نام توزیع بتا وایبل تعدیل‌یافته تعمیم‌یافته معرفی می‌کنیم. در ادامه به بیان زیرمدل‌های آن می‌پردازیم و ویژگی‌های توزیع را بیان می‌کنیم. سپس به مطالعه شبیه‌سازی پرداخته و به مقایسه این توزیع و زیرمدل‌هایش با استفاده از یک مثال کاربردی می‌پردازیم.
 - پیوست این پایان‌نامه نیز شامل ماتریس اطلاع فشر توزیع بتا وایبل تعمیم‌یافته، معرفی الگوریتم ژنتیک و کدهای نوشته‌شده در محیط R است.
- لازم به‌ذکر است که برای سادگی عنوان توزیع بتای تعمیم‌یافته وایبل، به‌صورت بتا وایبل تعمیم‌یافته در طول پایان‌نامه، تغییر یافته است.

فهرست علائم اختصاری

BGMW	بتا وایبل تعدیل یافته تعمیم یافته
GMW	تعمیم وایبل تعدیل یافته
BGW	بتا وایبل تعمیم یافته
MW	وایبل تعدیل یافته
GW	وایبل تعمیم یافته
BGE	بتا نمایی تعمیم یافته
GR	ریلی تعمیم یافته
GE	نمایی تعمیم یافته
IFR	نرخ شکست صعودی
DFR	نرخ شکست نزولی
MBT	شکل سهمی تعدیل یافته
BT	سهمی شکل
UBT	وارونه سهمی شکل
TTT-plot	نمودار زمان کل آزمون

فهرست توزیع‌ها

نام خانواده پارامتری توزیع‌ها	تابع چگالی	فضای پارامتر
تعمیم وایبل تعدیل یافته	$f(t) = \alpha \lambda^\beta t^{\beta-1} (\beta + \gamma t) \exp\{\gamma t - (\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\} \times [1 - \exp\{-(\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\}]^{\alpha-1}, \quad t > 0$	$\lambda > 0, \beta \geq 0, \gamma > 0, \alpha > 0$
وایبل	$f(t) = \beta \lambda^\beta t^{\beta-1} \exp\{-(\lambda t)^\beta\}, \quad t > 0$	$\lambda > 0, \beta \geq 0$
مقادیر فرین	$f(t) = \gamma \exp\{\gamma t - \exp(\gamma t)\}, \quad t > 0$	$\gamma > 0$
وایبل تعمیم یافته	$f(t) = \alpha \beta \lambda^\beta t^{\beta-1} \exp\{-(\lambda t)^\beta\} \times [1 - \exp\{-(\lambda t)^\beta\}]^{\alpha-1}, \quad t > 0$	$\lambda > 0, \beta \geq 0, \alpha > 0$
وایبل تعدیل یافته	$f(t) = \lambda^\beta t^{\beta-1} (\beta + \gamma t) \exp\{\gamma t - (\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\}$	$\lambda > 0, \beta \geq 0, \gamma > 0$
بتا وایبل تعمیم یافته	$f(t) = \frac{\alpha \beta \lambda^\beta t^{\beta-1}}{B(a, b)} (1 - e^{-(\lambda t)^\beta})^{a\alpha-1} \times \left\{1 - (1 - e^{-(\lambda t)^\beta})^\alpha\right\}^{b-1} e^{-(\lambda t)^\beta}, \quad t > 0$	$a > 0, b > 0, \lambda > 0, \beta \geq 0, \alpha > 0$
نمایی	$f(t) = \lambda e^{-(\lambda t)}, \quad t > 0$	$\lambda > 0$
ریلی	$f(t) = \lambda^\alpha t^{\alpha-1} e^{-(\lambda t)^\alpha}, \quad t > 0$	$\lambda > 0$
نمایی تعمیم یافته	$f(t) = \alpha \lambda e^{-(\lambda t)} (1 - e^{-(\lambda t)})^{\alpha-1}, \quad t > 0$	$\lambda > 0, \alpha > 0$
ریلی تعمیم یافته	$f(t) = \lambda^\alpha t^{\alpha-1} e^{-(\lambda t)^\alpha} (1 - e^{-(\lambda t)^\alpha})^{\alpha-1}, \quad t > 0$	$\lambda > 0, \alpha > 0$
بتا نمایی تعمیم یافته	$f(t) = \frac{\alpha \lambda}{B(a, b)} (1 - e^{-(\lambda t)})^{a\alpha-1} \times \left\{1 - (1 - e^{-(\lambda t)})^\alpha\right\}^{b-1} e^{-(\lambda t)}, \quad t > 0$	$a > 0, b > 0, \lambda > 0, \alpha > 0$
بتا وایبل	$f(t) = \frac{\beta \lambda^\beta t^{\beta-1}}{B(a, b)} (1 - e^{-(\lambda t)^\beta})^{a-1} e^{-b(\lambda t)^\beta}, \quad t > 0$	$a > 0, b > 0, \lambda > 0, \beta \geq 0$
بتا نمایی	$f(t) = \frac{\lambda}{B(a, b)} (1 - e^{-(\lambda t)})^{a-1} e^{-b(\lambda t)}, \quad t > 0$	$a > 0, b > 0, \lambda > 0$

فهرست مطالب

ژ	فهرست تصاویر
۱	۱ تعاریف مقدماتی
۱	۱.۱ مقدمه
۳	۲.۱ نرخ شکست و اشکال مختلف آن
۵	۱.۲.۱ تعیین شکل تابع نرخ شکست با استفاده از قضیه گلاسر
۷	۲.۲.۱ تعیین شکل تابع نرخ شکست با استفاده از نمودار زمان کل آزمون
۹	۳.۱ چند تابع و روابط ریاضی خاص
۱۲	۴.۱ برخی تعاریف و مفاهیم آماری
۱۷	۲ توزیع تعمیم وایبل تعدیل یافته
۱۷	۱.۲ مقدمه
۱۷	۲.۲ توزیع تعمیم وایبل تعدیل یافته
۱۹	۳.۲ توزیع های خاص
۲۰	۴.۲ فرمول های کلی برای گشتاورها
۲۷	۵.۲ تابع چگالی آماره های ترتیبی
۳۱	۳ توزیع بتا وایبل تعمیم یافته
۳۱	۱.۳ مقدمه
۳۲	۲.۳ توزیع بتا وایبل تعمیم یافته
۳۶	۳.۳ برخی از نتایج برای تابع توزیع تجمعی و تابع چگالی
۴۰	۴.۳ گشتاورهای توزیع بتا وایبل تعمیم یافته
۴۴	۵.۳ برآورد و استنباط
۴۷	۶.۳ مطالعه شبیه سازی
۴۹	۷.۳ کاربرد مدل در دو مثال واقعی
۴۹	۱.۷.۳ مجموعه داده اول

۵۳		مجموعه داده دوم	۲۰۷۰۳
۵۷		توزیع بتا وایبل تعدیل یافته تعمیم یافته	۴
۵۷		مقدمه	۱۰۴
۵۷		معرفی توزیع بتا وایبل تعدیل یافته تعمیم یافته	۲۰۴
۶۰		صورت های دیگر نمایش تابع توزیع و تابع چگالی	۳۰۴
۶۴		گشتاورهای توزیع بتای تعمیم یافته تعدیل یافته وایبل	۴۰۴
۶۷		برآورد درست نمایی ماکسیمم	۵۰۴
۶۹		مطالعه شبیه سازی	۶۰۴
۷۲		کاربرد مدل در مثال واقعی	۷۰۴
۷۷			آ
۷۷		ماتریس اطلاع فشر توزیع <i>BGW</i>	۱۰۱
۸۰		الگوریتم ژنتیک	۲۰۱
۸۰		ساختار کلی الگوریتم ژنتیک	۱۰۲.آ
۸۲		مراحل اجرای الگوریتم ژنتیک	۲۰۲.آ
۸۳		مزایای الگوریتم ژنتیک	۳۰۲.آ
۸۵		ب کدهای برنامه نویسی	
۹۳		مراجع	
۹۷		واژه نامه فارسی به انگلیسی	
۹۸		واژه نامه انگلیسی به فارسی	

فهرست تصاویر

۹	۱۰۱	نمودار تبدیل زمان کل آزمون مقیاس شده
۳۴	۱۰۳	نمودار تابع چگالی BGW با پارامترهای ثابت الف: $\lambda = 1/5$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$ و ب: $\lambda = 0/5$
۳۵	۲۰۳	نمودار تابع نرخ شکست BGW به ازای برخی مقادیر پارامتری
۳۶	۳۰۳	زیرمدل‌های توزیع BGW
۴۸	۴۰۳	نمودار مقایسه تابع توزیع تجمعی تجربی و دقیق توزیع BGW با $n = 1000$
	۵۰۳	نمودار تابع چگالی BGW برای داده‌های شبیه‌سازی شده به ازای مقادیر پارامتری؛ الف: $\alpha = 1, \lambda = 1/5, b = 0/5, a = 8$
۴۸		ب: $\beta = 1, \alpha = 4/5, \lambda = 1/5, b = 0/5, a = 0/5$
۵۱	۶۰۳	نمودار زمان کل آزمون مربوط به مجموعه داده‌های زمان از کار افتادن موتور شارژ کننده توربین
	۷۰۳	نمودار بافت‌نگار و چگالی برآورد شده توزیع‌های BGW , BGE , BW , GW , BE و GE برای
۵۱		مجموعه داده‌های شارژ کننده توربین
۵۳	۸۰۳	نمودار زمان کل آزمون مربوط به زمان از کار افتادگی اجزا مربوط به داده‌های آرزت
	۹۰۳	نمودار بافت‌نگار و چگالی برآورد شده توزیع‌های BGW , BGE , BW و GW برای مجموعه
۵۴		داده‌های آرزت
	۱۰۴	نمودار تابع چگالی $BGMW$ با ثابت گرفتن الف: $\lambda = 1/5$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$ و $\gamma = 0/5$ ؛ ب:
۵۹		$\lambda = 0/5$
	۲۰۴	نمودار تابع نرخ شکست $BGMW$ با ثابت گرفتن الف: $\lambda = 0/5$, $a = 0/5$, $b = 0/5$ و $\gamma = 0/001$ ؛
۶۰		ب: $\beta = 0/6$ و $\lambda = 0/25$
۷۱	۳۰۴	نمودار مقایسه تابع توزیع تجمعی تجربی و دقیق توزیع $BGMW$ به ازای $n = 1000$
	۴۰۴	نمودار بافت‌نگار و تابع چگالی $BGMW$ برای داده‌های شبیه‌سازی شده با مقادیر پارامتری الف: $a = 1/5, b =$
۷۱		ب: $\alpha = 0/5, \gamma = 0/5, \beta = 1/5, \lambda = 1/5, \gamma = 2, \beta = 0/2, \lambda = 0/5, b = 0/5, a = 3/5$
	۵۰۴	نمودار بافت‌نگار و چگالی برآورد شده به ازای توزیع‌های $BGMW$, BGW , GMW و BGE
۷۴		برای داده‌های آرزت
	۶۰۴	نمودار بافت‌نگار و چگالی برآورد شده به ازای توزیع‌های $BGMW$, GE , GW , MW و BW
۷۵		برای داده‌های آرزت

فصل ۱

تعاریف مقدماتی

۱.۱ مقدمه

در سیستم‌های مکانیکی و الکتریکی پیچیده، نرخ شکست^۱ اغلب به صورت غیر یکنوا (سهمی شکل^۲ یا سهمی واونه^۳، تک مدی^۴) نمایش داده می‌شود. توزیع‌هایی با چنین نرخ شکستی، توجه قابل ملاحظه‌ای در مهندسی قابلیت اطمینان به خود جلب کرده‌اند. برای آگاهی بیشتر لای و خی (۲۰۰۶) را ببینید. توزیع وایبل با زیرمدل‌های نمایی و ریلی، در سال ۱۹۵۱ توسط وایبل^۵، برای مدل‌بندی داده‌های طول عمر و بلایای طبیعی با نرخ شکست یکنوا معرفی شد. به دلیل چولگی مثبت و منفی تابع چگالی این توزیع، آن را به عنوان مدل اصلی مورد بررسی، برای داده‌های با نرخ شکست یکنوا، در این پایان‌نامه، در نظر می‌گیریم. با این وجود، این توزیع برازش مناسبی را برای داده‌های با نرخ شکست غیر یکنوا که در قابلیت اطمینان و تحلیل بقا بسیار متداول است، فراهم نمی‌کند.

نمودار نرخ شکست سهمی شکل دارای سه قسمت است. در قسمت اول، نرخ شکست کاهش می‌یابد، بخش میانی نسبتاً هموار است و چگالی منطبق بر آن دارای یک پاد مد مثبت است و در بخش آخر نرخ شکست افزایش می‌یابد. به عنوان مثالی شهودی از این رفتار می‌توان فرایند مرگ و میر نوزادان را نام برد که در مرحله اول مرگ و میر نوزادان به علت نقص ارثی بالاست که به سرعت کاهش می‌یابد، مرحله میانی که ثابت است و مرگ بر اثر یک ضربه ناگهانی مثل تصادف رخ می‌دهد (مرحله شکست تصادفی)، و مرحله نهایی که مرگ حاصل از انباشتگی اثرات منفی طبیعی است (مرحله فرسودگی) و مجدد افزایش می‌یابد. نقطه مقابل نرخ شکست سهمی شکل، نرخ شکست تک مدی یا سهمی وارونه است که در ابتدا صعودی است، در بخش میانی ثابت می‌ماند و مجدداً کاهش می‌یابد. برای مثال می‌توان

^۱ Failure rate

^۲ Bathtub

^۳ Upside-down bathtub

^۴ Unimodal

^۵ Weibull

مواردی از بیماری را که مرگ و میر پس از یک دوره محدود به اوج خود می‌رسد و سپس به تدریج کاهش می‌یابد را بیان کرد.

به دلیل ناتوانی توزیع وایبل در مدل‌بندی داده‌های با چنین نرخ شکست‌هایی، از برخی از نسخه‌های تعمیم‌یافته توزیع وایبل برای این منظور استفاده شده است. در سال ۱۹۹۵ خی و لای مدل وایبل جمعی^۱ را با افزودن دو تابع بقا (تابع قابلیت اطمینان) وایبل به دست آوردند. آن‌ها نشان دادند که نرخ شکست مدل مورد نظر به صورت مجموع دو نرخ شکست وایبل قابل بیان می‌باشد. این مدل برای تابع نرخ شکست‌های سهمی شکل کاربرد زیادی دارد. خی و همکاران^۲ (۲۰۰۲) تعمیمی از توزیع وایبل، با عنوان توسیع وایبل تعدیل‌یافته^۳، به منظور مدل‌بندی سیستم‌ها با نرخ شکست سهمی شکل را مورد مطالعه قرار دادند. در سال ۲۰۰۳ ژیانگ^۴ و همکارانش ویژگی طول عمر^۵ مدل‌های با نرخ شکست تک مدی را مورد مطالعه قرار دادند. بوکار^۶ و همکاران (۲۰۰۴) ثابت کردند که قابلیت اطمینان یک سیستم دلخواه را به خوبی می‌توان توسط آمیخته‌ای متناهی از توزیع‌های وایبل^۷ با وزن‌های مثبت، تقریب زد. فام و لای^۸ (۲۰۰۷) مقاله‌ای در زمینه وایبل تعدیل‌یافته یا تعمیم‌یافته، ارائه کردند. در همان سال بینگتون^۹ و همکارانش توزیع جدیدی را تحت عنوان توزیع وایبل انعطاف پذیر^{۱۰} که در مدل‌بندی نرخ شکست صعودی^{۱۱} (*IFR*) و متوسط نرخ شکست صعودی^{۱۲} (*IFRA*) و نرخ شکست سهمی تعدیل‌یافته^{۱۳} (*MBT*)، کاملاً انعطاف پذیر است، مطرح کردند. برخی دیگر از مشتقات توزیع وایبل عبارت است از وایبل تعمیم‌یافته یا نمایی شده^{۱۴} (مودهولکار^{۱۵} و همکاران، ۱۹۹۳ و ۱۹۹۶)، توزیع وایبل تعدیل‌یافته^{۱۶} (لای و همکاران، ۲۰۰۳) و تعمیم وایبل تعدیل‌یافته^{۱۷} (کاراسکو^{۱۸} و همکاران، ۲۰۰۸)، که در فصل‌های بعدی به بیان آن‌ها خواهیم پرداخت.

در این فصل، برخی تعاریف و مفاهیم اولیه که در طول این پایان‌نامه مورد استفاده قرار می‌گیرند را بیان

^۱Additive Weibull model

^۲Xie

^۳Modified Weibull extention

^۴Jiang

^۵Ageing

^۶Bucar

^۷Finite Weibull mixture

^۸Pham and Lai

^۹Bebbington

^{۱۰}Flexible Weibull distribution

^{۱۱}Increasing failure rate

^{۱۲}Increasing failure rate average

^{۱۳}Modified bathtub

^{۱۴}Generalized or exponentiated Weibull distribution

^{۱۵}Mudholkar

^{۱۶}Modified Weibull distribution

^{۱۷}Generalized modified Weibull distribution

^{۱۸}Carrasco

کرده و برخی از قضایای مورد نیاز را نیز مطرح خواهیم کرد.

۲۰۱. نرخ شکست و اشکال مختلف آن

تعریف ۱.۲.۱. قابلیت اطمینان^۱

فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع توزیع $F(\cdot)$ است. قابلیت اطمینان X را با $R(\cdot)$ نشان داده و عبارت است از احتمال آن که X بتواند در طول عمر تعیین شده اش، تحت شرایط محیطی از قبل مشخص شده، اهداف تعیین شده از ساخت خود را تامین نماید و در زمان t به صورت زیر محاسبه می شود:

$$R(t) = 1 - F(t).$$

از آنجایی که قطعات مختلف یک کالا، در زمان های مختلف و به صورت ظاهراً تصادفی خراب می شوند، قابلیت اطمینان کمیتی احتمالی است. با پیچیده تر شدن محصولات (سیستم) احتمال خرابی آن ها نیز افزایش می یابد. چگونگی قرار دادن قطعات در محصول بر قابلیت اطمینان کل سیستم تاثیر می گذارد. قطعات را می توان به صورت سری، موازی یا ترکیبی از این دو در سیستم قرار داد. قابلیت اطمینان برای سیستم های مختلف به صورت زیر محاسبه می شوند:

• سیستم سری:

وقتی قطعات به صورت سری چیده می شوند، قابلیت اطمینان کل سیستم به صورت حاصل ضرب قابلیت اطمینان تک تک قطعات است. اگر قابلیت اطمینان سیستم i را، مثلاً برای $i = 1, 2, 3$ ، با R_i نشان داده و قابلیت اطمینان ترکیب آن ها را با R_s ، آنگاه،

$$R_s = (R_1)(R_2)(R_3).$$

در این حالت با اضافه کردن قطعات بیشتر قابلیت اطمینان کل سیستم کاهش می یابد و همیشه کوچکتر از کمترین قابلیت اطمینان قطعات می باشد. قابل ذکر است در حالت سری از کار افتادن یک قطعه باعث از کار افتادن کل سیستم می شود.

• سیستم موازی:

در حالتی که قطعات به صورت موازی چیده می شوند، وقتی قطعه ای خراب شد، سیستم با استفاده از قطعه دیگری که به صورت موازی با قطعه خراب چیده شده، به کار خود ادامه می دهد. در این صورت قابلیت اطمینان سیستم به صورت زیر محاسبه می شود

$$R_s = 1 - (1 - R_1)(1 - R_2).$$

با افزایش تعداد قطعات موازی، قابلیت اطمینان کل سیستم افزایش می یابد. قابلیت اطمینان سیستمی که قطعات آن به صورت موازی چیده شده اند، از ماکسیمم قابلیت اطمینان تک تک

^۱Reliability

قطعات بیشتر است. قطعات در بیشتر سیستم‌های پیچیده به صورت ترکیب سری و موازی قرار می‌گیرند.

تعریف ۲.۲.۱. نرخ شکست

فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع توزیع $F(\cdot)$ است. نرخ شکست متغیر تصادفی X را با $h(\cdot)$ نشان داده و عبارت است از احتمال خرابی محصول X در فاصله زمانی یا یک دوره مشخص، و در زمان t به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)},$$

که $f(t)$ بیانگر تابع چگالی احتمال و $R(t)$ بیانگر تابع قابلیت اطمینان می‌باشد.

تعریف ۳.۲.۱. شکل تابع نرخ شکست

فرض کنید تابع نرخ شکست $h(t)$ ، یک تابع حقیقی مقدار مشتق‌پذیر به صورت $h(t) : R^+ \rightarrow R^+$ با مشتق اول به صورت $h'(t) = \frac{dh(t)}{dt}$ باشد. آنگاه $h(t)$:

۱. اکیدا صعودی است و با IFR نشان داده می‌شود، اگر به ازای تمام t ها، $h'(t) > 0$.
۲. اکیدا نزولی است و با DFR نشان داده می‌شود، اگر به ازای تمام t ها، $h'(t) < 0$.
۳. سهمی شکل است و با BT نشان داده می‌شود، اگر برای $t \in (0, t_0)$ ، $h'(t) < 0$ ، $h'(t_0) = 0$ و برای $t > t_0$ ، $h'(t) > 0$.
۴. به شکل سهمی وارونه است و با UBT نشان داده می‌شود، اگر برای $t \in (0, t_0)$ ، $h'(t) > 0$ ، $h'(t_0) = 0$ و برای $t > t_0$ ، $h'(t) < 0$.
۵. شکل سهمی تعدیل‌یافته است و با MBT نشان داده می‌شود، اگر $h(t)$ ابتدا صعودی و سپس سهمی شکل باشد.

۶. نوسانی غلتکی شکل^۱ است، اگر n نقطه تغییر^۲ متوالی $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < \infty$ داشته باشیم به طوری که در هر بازه $[t_{j-1}, t_j]$ ، برای $1 \leq j \leq n+1$ ، $t_{n+1} = \infty$ ، $t_0 = 0$ ، $h(t)$ اکیدا یکنوا باشد و یکنوایی مخالف در دو بازه مجاور داشته باشد. جهت بررسی بیشتر اساس فیزیکی تابع نرخ شکست غلتکی شکل، به ونگ^۳ (۱۹۸۸، ۱۹۸۹، ۱۹۹۱) مراجعه شود.

نکته ۴.۲.۱. منظور از نقطه تغییر در تعریف ۳.۲.۱، نقطه‌ای است که مشتق تابع نرخ شکست $h(t)$ تغییر علامت می‌دهد.

نکته ۵.۲.۱. برخی از افراد در تعریف تابع نرخ شکست BT و UBT ، تابع نرخ شکست $h(t)$ را در بازه میانی برابر با یک مقدار ثابت بیان می‌کنند.

^۱Roller-coaster shaped

^۲Change point

^۳Wong

۱۰۲.۱ تعیین شکل تابع نرخ شکست با استفاده از قضیه گلاسر

بسیاری از توابع نرخ شکست به دلیل وجود انتگرال در مخرج آن، شکل پیچیده‌ای دارند. در نتیجه تعیین شکل تابع نرخ شکست، به طور مستقیم، امکان پذیر نمی‌باشد. از این رو گلاسر^۱ در سال ۱۹۸۰ روشی برای تعیین شکل تابع نرخ شکست بیان کرد. وی در این روش از تابع چگالی به جای نرخ شکست استفاده کرد که به صورت قضیه‌ای در ادامه بیان می‌شود.

ابتدا، فرض کنید که تابع چگالی زمان شکست روی بازه $(0, \infty)$ مثبت باشد، یعنی، به ازای $t > 0$ ، $f(t) > 0$ و $\int_0^\infty f(t)dt = 1$. همچنین فرض کنید $f(t)$ روی بازه $(0, \infty)$ پیوسته و دو بار مشتق پذیر باشد.

تابع $g(t)$ ، یعنی معکوس نرخ شکست، به صورت زیر است

$$g(t) = \frac{1}{h(t)} = \frac{R(t)}{f(t)}. \quad (1.1)$$

بنابراین $g(t)$ روی بازه $(0, \infty)$ مثبت و دو بار مشتق پذیر است. در حقیقت، داریم

$$g'(t) = g(t)\eta(t) - 1, \quad (2.1)$$

که در آن

$$\eta(t) = -\frac{f'(t)}{f(t)}. \quad (3.1)$$

صورت دیگر نمایش $g'(t)$ در اثبات قضیه مفید خواهد بود. بنابراین با توجه به (۲.۱) و (۳.۱)، داریم

$$\begin{aligned} g'(t) &= \int_t^\infty \frac{f(y)}{f(t)} \eta(t) dy - 1 \\ &= \int_t^\infty \frac{f(y)}{f(t)} [\eta(t) - \eta(y)] dy \\ &\quad + \int_t^\infty \frac{f(y)}{f(t)} \eta(y) dy - 1, \end{aligned}$$

هم چنین

$$\int_t^\infty \frac{f(y)}{f(t)} \eta(y) dy = - \int_t^\infty f'(y) \frac{dy}{f(t)}$$

و

$$\begin{aligned} \int_t^\infty f'(y) dy &= \int_0^\infty f'(w+t) dw = (d/dt) \int_0^\infty f(w+t) dw \\ &= \frac{d}{dt} \int_t^\infty f(y) dy \\ &= -f(t). \end{aligned}$$

در نتیجه،

$$g'(t) = \int_t^\infty \frac{f(y)}{f(t)} [\eta(t) - \eta(y)] dy. \quad (4.1)$$

حال با توجه به موارد اشاره شده در بالا، قضیه ای که پیش تر به آن اشاره شد را بیان می‌داریم.

^۱ Glaser

قضیه ۶.۲.۱. الف) اگر به ازای همه $t > 0$ ، $\eta'(t) > 0$ باشد، آنگاه تابع نرخ شکست صعودی (IFR) است.

ب) اگر به ازای همه $t > 0$ ، $\eta'(t) < 0$ باشد، آنگاه تابع نرخ شکست نزولی (DFR) است.

پ) فرض می‌کنیم $t_0 > 0$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\forall t \in (0, t_0) \quad \eta'(t) < 0, \quad \eta'(t_0) = 0, \quad \forall t > t_0 \quad \eta'(t) > 0. \quad (5.1)$$

۱) اگر $y_0 > 0$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $g'(y_0) = 0$ ، آنگاه BT شکل است.

۲) اگر $y_0 > 0$ وجود نداشته باشد به‌طوری‌که $g'(y_0) = 0$ ، آنگاه IFR است.

ت) فرض می‌کنیم $t_0 > 0$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\forall t \in (0, t_0) \quad \eta'(t) > 0, \quad \eta'(t_0) = 0, \quad \forall t > t_0 \quad \eta'(t) < 0. \quad (6.1)$$

۱) اگر $y_0 > 0$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $g'(y_0) = 0$ ، آنگاه UBT شکل است.

۲) اگر $y_0 > 0$ وجود نداشته باشد به‌طوری‌که $g'(y_0) = 0$ ، آنگاه DFR است.

برهان. الف) با فرض $\eta'(t) > 0$ به ازای $t > 0$ و با توجه به رابطه (۴.۱)، نتیجه می‌شود به ازای تمام $t > 0$ داریم $g'(t) < 0$. پس با توجه به رابطه (۱.۱)، تابع نرخ شکست صعودی (IFR) است.

ب) با فرض‌های موجود و با توجه به رابطه (۴.۱) و (۱.۱) نزولی بودن تابع $h(t)$ نتیجه می‌شود.

پ) فرض می‌کنیم t_0 نقطه تغییر باشد.

۱) چنین ادعا می‌کنیم که $g''(y_0) < 0$. طبق فرض داریم $g'(y_0) = 0$. با توجه به (۲.۱)

$$g''(t) = g'(t)\eta(t) + \eta'(t)g(t).$$

بنابراین $g''(y_0) = g(y_0)\eta'(y_0)$. در نتیجه از آنجا که $g(t)$ روی بازه $(0, \infty)$ مثبت می‌باشد، آنگاه با توجه به فرض قضیه

$$g''(y_0) < 0 \quad \text{اگر و تنها اگر} \quad \eta'(y_0) < 0$$

و

$$\eta'(y_0) < 0 \quad \text{اگر و تنها اگر} \quad y_0 < t_0.$$

فرض می‌کنیم $y_0 \geq t_0$. آنگاه با در نظر گرفتن رابطه (۴.۱) و (۵.۱) واضح است که به ازای همه $t \geq t_0$ ، $g'(t) < 0$. بنابراین با فرض $g'(y_0) = 0$ تناقض دارد. از این رو $y_0 < t_0$ و $g''(y_0) < 0$ با توجه به فرضیات واضح است که روی بازه $(0, \infty)$ ، تنها یک

ریشه برای $g'(y) = 0$ به نام $y = y_0$ داریم که g در این نقطه دارای ماکسیمم می‌باشد. در نتیجه $h(t)$ سهمی شکل در $t_0 = y_0$ می‌باشد.

(۲) در این صورت به ازای همه $t > 0$ ، $g'(t) > 0$ یا $g'(t) < 0$ است. با توجه به رابطه (۴.۱)، به ازای همه $t \geq t_0$ ، $g'(t) < 0$ است. بنابراین به ازای همه $t > 0$ ، $g'(t) < 0$ ، که صعودی بودن تابع نرخ شکست (IFR) را نتیجه می‌دهد.

(ت) فرض می‌کنیم t_0 نقطه تغییر باشد.

(۱) ادعا می‌کنیم $g''(y_0) > 0$ است. بنابه فرض قضیه $g'(y_0) = 0$ و رابطه (۲.۱) نتیجه می‌شود $g''(t) = \eta'(t)g(t)$. با توجه به این که $g(t)$ همواره مثبت می‌باشد، آنگاه

$$g''(y_0) > 0 \quad \text{اگر و تنها اگر} \quad \eta'(y_0) > 0$$

و

$$\eta'(y_0) > 0 \quad \text{اگر و تنها اگر} \quad y_0 < t_0$$

حال فرض می‌کنیم $y_0 \geq t_0$ باشد. در این صورت طبق رابطه (۴.۱) و (۶.۱)، نتیجه می‌شود $g'(y_0) > 0$ که با فرض در تناقض می‌باشد. بنابراین $y_0 < t_0$ و $g''(y_0) > 0$. واضح است که $g'(y)$ دارای یک ریشه روی بازه $(0, \infty)$ مانند $y = y_0$ است که g در این نقطه دارای مینیمم می‌باشد. در نتیجه با توجه به (۱.۱)، تابع نرخ شکست به شکل سهمی وارونه است.

(۲) در این قسمت از آنجا که طبق فرض وجود ندارد y_0 ، به طوری که $g'(y_0) = 0$ ، در این صورت به ازای همه $t > 0$ ، نتیجه می‌شود $g'(t) > 0$ یا $g'(t) < 0$. با توجه به رابطه (۴.۱) و فرض قضیه، به ازای همه $t \geq t_0$ ، $g'(t) > 0$. بنابراین به ازای همه $t > 0$ ، تابع $g'(t) > 0$ می‌باشد. در نتیجه بنابر (۱.۱) نزولی بودن تابع نرخ شکست حاصل می‌شود.

□

۲.۲.۱ تعیین شکل تابع نرخ شکست با استفاده از نمودار زمان کل آزمون

یکی دیگر از روش‌های تشخیص شکل تابع نرخ شکست، روش گرافیکی بر پایه نمودار زمان کل آزمون^۱ یا $TTT - Plot$ است که در سال ۱۹۷۶ توسط بارلو و کامپو^۲ به عنوان ابزاری جهت تحلیل داده‌های شکست معرفی شد.

فرض می‌کنیم یک نمونه ترتیبی کامل به صورت $0 = t_{(0)} \leq t_{(1)} \leq \dots \leq t_{(n)}$ از زمان شکست مستقل

^۱Total time on test plot

^۲Barlow and Campo

و هم توزیع با توزیع $F(t)$ و تابع بقا $R(t) = 1 - F(t)$ داریم. نمودار زمان کل آزمون این مشاهدات به روش بیان شده در زیر حاصل می‌شود.
قرار دهید $S_0 = 0$ ؛ مقدار S_j (زمان کل آزمون) بر اساس فرایند بازگشتی زیر محاسبه می‌شود:

$$S_j = S_{j-1} + (n - j + 1)(t_{(j)} - t_{(j-1)}), \quad j = 1, 2, \dots, n$$

• مقادیر زمان کل آزمون را به صورت $U_j = S_j/S_n$, $j = 0, 1, \dots, n$ ، نرمال می‌کنیم.

• نمودار $(j/n, U_j)$ را به ازای $j = 0, 1, \dots, n$ رسم می‌کنیم.

• نقاط حاصل را به‌طور متوالی به‌وسیله پاره خط متصل می‌کنیم.

بنابراین نمودار زمان کل آزمون، مرکب از پاره خط‌هایی است که از گوشه سمت چپ پایین شروع و در گوشه سمت راست بالای مربع واحد تمام می‌شود. وقتی اندازه نمونه n به سمت بی‌نهایت میل کند، نمودار زمان کل آزمون به تبدیل زمان کل آزمون مقیاس شده^۱ همگرا می‌شود.
تبدیل زمان کل آزمون مقیاس شده به شکل زیر می‌باشد،

$$\varphi(u) = \frac{1}{\mu} \int_0^{F^{-1}(u)} [1 - F(t)] dt, \quad 0 \leq u \leq 1,$$

که در آن $\mu = \int_0^{F^{-1}(1)} [1 - F(t)] dt$ ، میانگین توزیع F است. با توجه به این‌که
 $F^{-1}(1) = \inf\{t : F_T(t) \geq 1\}$,

می‌توان نتیجه گرفت

$$\mu = \int_0^{F^{-1}(1)} [1 - F(t)] dt = \int_0^\infty [1 - F(t)] dt.$$

برخی حالات ممکن نمودار زمان کل آزمون مقیاس شده در شکل (۱.۱) نشان داده شده است. براساس این شکل داریم:

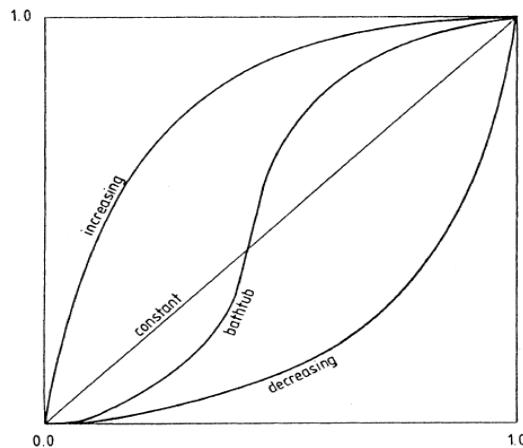
۱. اگر منحنی مقعر باشد، نمودار تابع نرخ شکست صعودی (IFR) است.

۲. اگر منحنی محدب باشد، نمودار تابع نرخ شکست نزولی (DFR) است.

۳. اگر منحنی در ابتدا محدب و سپس مقعر باشد، تابع نرخ شکست سهمی شکل (BT) است.

۴. اگر منحنی در ابتدا مقعر و سپس محدب باشد، تابع نرخ شکست سهمی وارونه شکل (UBT) است.

^۱Scaled TTT transform



شکل ۱.۱: نمودار تبدیل زمان کل آزمون مقیاس شده

۳.۱ چند تابع و روابط ریاضی خاص

تعریف ۱.۳.۱. تابع فوق هندسی

تابع فوق هندسی^۱ به صورت

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_i (\beta)_i}{(\gamma)_i i!} x^i$$

تعریف می شود، که در آن $(\alpha)_i = \alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+i-1)$ ، نماد فاکتوریل صعودی است (گرادشتاین و ریژیک^۲، ۲۰۰۰).

تعریف ۲.۳.۱. تابع گاما

تابع گاما با نماد $\Gamma(\cdot)$ نمایش داده می شود و به ازای تمام مقادیر مختلط به غیر از صحیح منفی و صفر به شکل زیر تعریف می شود

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^z dt.$$

برای مقادیر صحیح مثبت n ، داریم

$$\Gamma(n+1) = n!.$$

با توجه به تابع گاما و با تغییر متغیر $s = pt$ نتیجه زیر حاصل می شود

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} t^z dt = \int_0^{\infty} e^{-s} \left(\frac{s}{p}\right)^z \frac{ds}{p} = \frac{\Gamma(z+1)}{p^{z+1}}.$$

همچنین تابع دی گاما^۳، مشتق تابع لگاریتم گاما است و به صورت زیر تعریف می شود

$$\psi(z+1) = \frac{d}{dz} \log \Gamma(z+1) = \frac{\Gamma'(z+1)}{\Gamma(z+1)}.$$

^۱Hypergeometric function

^۲Gradshteyn and Ryzhik

^۳Digamma

و تابع چندگاما^۱ مشتق مرتبه m تابع لگاریتم گاما است و به صورت زیر تعریف می شود

$$\psi^{(m)}(z+1) = \frac{d^{m+1}}{dz^{m+1}} \log \Gamma(z+1).$$

تعریف ۳.۳.۱. تابع بتا^۲

تابع بتا که انتگرال نوع اول اوایلر^۳ نیز نامیده می شود، برای $a, b > 0$ به صورت زیر محاسبه می شود

$$B(a, b) = \int_0^1 w^{a-1} (1-w)^{b-1} dw = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

تعریف ۴.۳.۱. تابع بتای ناقص^۴

تابع بتای ناقص، تعمیمی از تابع بتاست و به صورت زیر تعریف می شود

$$B_y(a, b) = \int_0^y w^{a-1} (1-w)^{b-1} dw, \quad y \in [0, 1].$$

تعریف ۵.۳.۱. نسبت تابع بتای ناقص^۵

نسبت تابع بتای ناقص به صورت زیر محاسبه می شود

$$I_y(a, b) = \frac{B_y(a, b)}{B(a, b)}.$$

قضیه ۶.۳.۱. فرض کنید $I_y(a, b)$ نشان دهنده نسبت تابع بتای ناقص در نقطه y باشد. در این صورت

$$1 - I_y(a, b) = I_{1-y}(b, a).$$

برهان. بر اساس تعریف ۵.۳.۱ می توان نوشت

$$\begin{aligned} 1 - I_y(a, b) &= 1 - \frac{1}{B(a, b)} \int_0^y w^{a-1} (1-w)^{b-1} dw \\ &= \frac{1}{B(a, b)} \left[\int_0^1 w^{a-1} (1-w)^{b-1} dw - \int_0^y w^{a-1} (1-w)^{b-1} dw \right] \\ &= \frac{1}{B(a, b)} \left[\int_y^1 w^{a-1} (1-w)^{b-1} dw \right]. \end{aligned}$$

با تغییر متغیر $w = 1 - u$ و احتساب $dw = -du$ داریم

$$\begin{aligned} 1 - I_y(a, b) &= \frac{1}{B(a, b)} \left[\int_{1-y}^0 (1-u)^{a-1} u^{b-1} - du \right] \\ &= \frac{1}{B(a, b)} \left[\int_0^{1-y} (1-u)^{a-1} u^{b-1} du \right] \\ &= \frac{B_{1-y}(b, a)}{B(a, b)} = I_{1-y}(b, a). \end{aligned}$$

^۱Polygamma

^۲Beta function

^۳Euler integral of the first kind

^۴Incomplete beta function

^۵Incomplete beta function ratio

□

تعریف ۷.۳.۱. رابطه تابع بتای ناقص و تابع فوق هندسی

رابطه تابع بتای ناقص و تابع فوق هندسی به شکل زیر می‌باشد (گراشتاین و ریژیک، ۲۰۰۰).

$$B_y(a, b) = \int_0^y w^{a-1} (1-w)^{b-1} dw = \frac{y^a}{a} {}_2F_1(a, 1-b; a+1; y).$$

تعریف ۸.۳.۱. تبدیل لاپلاس

تبدیل لاپلاس^۱ عملگری خطی از تابع $f(t)$ با مولفه حقیقی $t(t \geq 0)$ ، به تابع $L(s)$ با آرگومان مختلط s است که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$L(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt,$$

که پارامتر $s = \sigma + i\omega$ عددی مختلط با σ و ω حقیقی است و i یک واحد موهومی با در نظر گرفتن $i^2 = -1$ است.

تبدیل لاپلاس دوطرفه: این تبدیل روی تابع‌هایی که روی کل فضای R تعریف شده‌اند اعمال می‌شود و به صورت زیر است

$$L(s) = \int_{-\infty}^\infty e^{-st} f(t) dt.$$

رابطه تبدیل لاپلاس و گشتاورهای توزیع: با توجه به تعریف تبدیل لاپلاس، گشتاورهای توزیع به شکل زیر محاسبه می‌شوند.

$$\mu_n = E(X^n) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} E[e^{-sX}] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} L(s).$$

تعریف ۹.۳.۱. تابع لامبرت W

در ریاضی، تابع W لامبرت^۲، که تابع امگا^۳ یا حاصل ضرب لگاریتم^۴ نیز نامیده می‌شود، با نماد $W(z)$ نمایش داده می‌شود و مجموعه توابعی است که به عنوان معکوس توابع به شکل $z = we^w$ استفاده می‌شود و که عبارت است از

$$W(z) = \sum_{i \geq 1} \frac{(-1)^{i+1} i^{i-2}}{(i-1)!} z^i.$$

برای اطلاع بیشتر، به کورلس^۵ و همکاران (۱۹۹۶)، مراجعه کنید.

تعریف ۱۰.۳.۱. قضیه دوجمله‌ای

حالت کلی قضیه دوجمله‌ای^۶، سری دوجمله‌ای به شکل زیر می‌باشد

^۱Laplace transform^۲Lambert W function^۳Omega function^۴Product logarithm^۵Corless^۶Binomial theorem

$$(x+a)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(r-k+1)} x^k a^{r-k} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} x^k a^{r-k},$$

که در آن $\binom{r}{k} = \frac{r!}{k!(r-k)!}$ ضریب دوجمله‌ای و r یک عدد حقیقی می‌باشد، که به ازای r صحیح مثبت یا $1 < \left| \frac{x}{a} \right|$ ، سری همگراست.

وقتی r برابر با مقدار صحیح مثبت n باشد، سری در $r = n$ به پایان می‌رسد. در این حالت،

$$(x+a)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k a^{n-k}.$$

۴.۱ برخی تعاریف و مفاهیم آماری

تعریف ۱.۴.۱. تابع چگالی آماره ترتیبی

فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی به حجم n ، از تابع توزیع تجمعی $F(\cdot)$ و تابع چگالی $f(\cdot)$ باشد. در این صورت آماره‌های ترتیبی متناظر با نمونه تصادفی را که به ترتیبی صعودی مرتب شده‌اند، با $X_{(1)}, \dots, X_{(n)}$ نشان داده و تابع چگالی آماره ترتیبی مرتبه i ام را به شکل زیر به دست می‌آوریم

$$f_{X(i)}(x) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} f(x) F_X(x)^{i-1} (1 - F_X(x))^{n-i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

تعریف ۲.۴.۱. چولگی

چولگی، نشان‌دهنده میزان عدم تقارن توزیع احتمالی است و در واقع معیاری از وجود یا عدم وجود تقارن چگالی توزیع است. اگر داده‌ها نسبت به میانگین متقارن باشند، چولگی برابر صفر است. برای یک توزیع نامتقارن با کشیدگی به سمت مقادیر بالاتر، چولگی مثبت و با کشیدگی به سمت مقادیر کوچکتر، چولگی منفی است. چولگی متغیر تصادفی X برابر است با گشتاور استاندارد شده مرتبه سوم، که به شکل زیر تعریف می‌شود

$$\gamma_1 = E\left[\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right)^3\right] = \frac{\mu^3}{\sigma^3},$$

که در آن

$$\mu = E(X), \quad \sigma = \sqrt{Var(X)}.$$

قضیه ۳.۴.۱. توزیع تابعی از متغیر تصادفی با استفاده از روش تبدیل

فرض می‌کنیم X ، متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی f_X و تکیه‌گاه I باشد، به طوری که $I = [a, b]$. هم‌چنین فرض می‌کنیم $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ تابع پیوسته یک‌نوا با تابع معکوس $h: J \rightarrow I$ باشد، به طوری که $J = g(I)$. با فرض $Y = g(X)$ تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی Y را با استفاده از روش تبدیل

مستقیم به شکل زیر داریم

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(h(y)) |h'(y)| & y \in J, \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

تعریف ۴.۴.۱. تابع توزیع تجربی

فرض می‌کنیم $X_1, \dots, X_n$ نمونه تصادفی مستقل و هم‌توزیع با تابع توزیع مشترک $F(\cdot)$ باشد، در این صورت تابع توزیع تجربی به شکل زیر تعریف می‌شود

$$\hat{F}_n(t) = \frac{\text{تعداد عناصر نمونه} \leq t}{\text{حجم نمونه}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I\{x_i \leq t\}.$$

تعریف ۵.۴.۱. بردار امتیاز

فرض می‌کنیم $X_1, \dots, X_n$ نمونه تصادفی مستقل با تابع چگالی مشترک $f(x; \theta)$ باشد، به طوری که θ بردار $(1 \times k)$ بعدی پارامترها است. با در نظر گرفتن تابع درستنمایی به شکل

$$L(\theta|x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta),$$

بردار امتیاز را که عبارت است از مشتق تابع لگاریتم درستنمایی، به شکل زیر تعریف می‌کنیم

$$S(\theta|\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial \log L(\theta|\mathbf{x})}{\partial \theta_1}, \dots, \frac{\partial \log L(\theta|\mathbf{x})}{\partial \theta_k} \right).$$

طبق تعریف برآوردگر درستنمایی ماکسیم، $S(\hat{\theta}_{MLE}|\mathbf{x}) = 0$. در یک نمونه تصادفی، امتیاز نمونه به صورت مجموع امتیازهای همه مشاهدات محاسبه می‌شود، یعنی

$$S(\theta|\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \log f(x_i; \theta)}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^n S(\theta|x_i).$$

تعریف ۶.۴.۱. ماتریس اطلاع فیشر

ماتریس مشتق مرتبه دوم تابع لگاریتم درستنمایی، ماتریس هسیان^۱ نامیده می‌شود و با $H(\theta|\mathbf{x})$ نمایش داده می‌شود. منفی امید ریاضی ماتریس هسیان، ماتریس اطلاع فیشر نامیده می‌شود که بیان‌کننده میزان اطلاعی است که متغیر تصادفی مشاهده شده X با تابع چگالی $f_\theta(x)$ ، درباره پارامتر θ در بر دارد. با فرض این که $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)$ بردار k بعدی پارامترها است، ماتریس اطلاع که یک ماتریس $k \times k$ است به شکل زیر محاسبه می‌شود.

$$I(\theta|\mathbf{x}) = -E(H(\theta|\mathbf{x}))$$

$$= -E \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \log L(\theta|\mathbf{x})}{\partial \theta_1^2} & \frac{\partial^2 \log L(\theta|\mathbf{x})}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial^2 \log L(\theta|\mathbf{x})}{\partial \theta_1 \partial \theta_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 \log L(\theta|\mathbf{x})}{\partial \theta_k \partial \theta_1} & \frac{\partial^2 \log L(\theta|\mathbf{x})}{\partial \theta_k \partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial^2 \log L(\theta|\mathbf{x})}{\partial \theta_k^2} \end{bmatrix}.$$

^۱Hessian matrix

برای یک نمونه تصادفی با حجم n ،

$$H(\theta|\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \log f(x_i; \theta)}{\partial \theta \partial \theta'} = \sum_{i=1}^n H(\theta|x_i),$$

و

$$I(\theta|\mathbf{x}) = - \sum_{i=1}^n E[H(\theta|x_i)] = -nE[H(\theta|x_i)] = nI(\theta|x_i).$$

رابطه آخر دلالت بر این موضوع دارد که ماتریس اطلاع نمونه برابر با n برابر ماتریس اطلاع تک مشاهده است.

تعریف ۷.۴.۱. شرایط نظم

فرض کنید X یک متغیر تصادفی از خانواده توزیع‌های احتمال $\mathcal{F} = \{f_\theta, \theta \in \Theta\}$ است. در این صورت با برقراری شرایط زیر می‌گوییم شرایط نظم برقرار است.

۱. $\theta \subset \mathbb{R}$ یک فاصله باز از اعداد حقیقی باشد و تکیه‌گاه X ، $S_x = \{x; f_\theta(x) > 0\}$ ، به بستگی نداشته باشد.

۲. $\frac{\partial}{\partial \theta} \log f_\theta(x)$ به ازای تمام مقادیر $\theta \in \Theta$ موجود و متناهی باشد.

۳. هرگاه $h(X)$ یک تابع حقیقی از x باشد به طوری که $E_\theta|h(X)| < \infty$ آنگاه رابطه زیر برقرار باشد.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} E|h(X)| &= \frac{\partial}{\partial \theta} \int h(X) f_\theta(x) dx \\ &= \int h(X) \frac{\partial}{\partial \theta} f_\theta(x) dx. \end{aligned}$$

به عبارتی بتوان جای عملگرهای مشتق و انتگرال را تعویض کرد.

۴. برای هر $\theta \in \Theta$ ،

$$E_\theta \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \log f_\theta(x) \right]^2 > \infty.$$

نتایج زیر با توجه به شرایط نظم حاصل می‌شود:

الف) برای هر $\theta \in \Theta$ ،

$$E_\theta \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \log f_\theta(x) \right] = 0.$$

ب) به ازای یک برآوردگر دلخواه $T(X)$ داریم،

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} E_\theta[T(X)] &= E_\theta[T(X) \frac{\partial}{\partial \theta} \log f_\theta(x)] \\ &= \text{cov}_\theta(T(X), \frac{\partial}{\partial \theta} \log f_\theta(x)). \end{aligned}$$

(بیکل و داکسوم^۱، ۲۰۰۱).

^۱Bickel and Doksum

تعریف ۸.۴.۱. خواص مجانبی برآوردگر درستنمایی ماکسیم

فرض $X_1, \dots, X_n$ ، نمونه تصادفی با تابع چگالی احتمال $f(x; \theta)$ باشد، به طوری که $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)$ بردار k بعدی از پارامترها باشد، در این صورت تحت شرایط نظم خواص مجانبی زیر برقرار است:

$$\hat{\theta}_{mle} \xrightarrow{P} \theta,$$

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_{mle} - \theta) \xrightarrow{D} N(0, I(\theta|x_i)^{-1}),$$

یا به عبارت دیگر،

$$\hat{\theta}_{mle} \sim N\left(\theta, \frac{1}{n}I(\theta|x_i)^{-1}\right) \equiv N\left(\theta, I(\theta|\mathbf{x})^{-1}\right).$$

تعریف ۹.۴.۱. آماره نسبت درستنمایی

برای آزمون فرض آماری $H_0: \theta \in \Theta_0$ در مقابل $H_1: \theta \in \Theta_1$ ، آماره آزمون نسبت درستنمایی^۱ به شکل زیر می باشد،

$$D = -2 \log \left(\frac{\text{درستنمایی ماکسیم تحت فرض صفر}}{\text{درستنمایی ماکسیم تحت فرض مقابل}} \right),$$

آماره آزمون نسبت درستنمایی D به طور مجانبی دارای توزیع χ^2 با $df_1 - df_2$ درجه آزادی است، به طوری که df_1 و df_2 به ترتیب تعداد پارامترهای آزاد مدل فرض صفر و فرض مقابل است.

تعریف ۱۰.۴.۱. معیار اطلاع آکایک^۲

معیار اطلاع آکایک (AIC)، اندازه ای از کیفیت نسبی مدل آماری است و ابزاری برای انتخاب مدل فراهم می کند که توسط آکایک در سال ۱۹۷۴ پیشنهاد شده است. این معیار نیکویی برازش را همراه با پیچیدگی مدل به طور توأم در نظر می گیرد. معیار اطلاع آکایک به صورت $AIC = 2k - 2 \log L$ به دست می آید که k تعداد پارامترهای مدل آماری و L درستنمایی ماکسیم شده است. انتخاب مدل در میان مدل های نامزد بر اساس AIC کمتر می باشد. اضافه کردن پارامتر جدید به مدل برازش شده باعث افزایش درستنمایی می شود و این کار موجب بیش برازش می شود، از این رو آکایک نه تنها پاداشی برای نیکویی برازش دارد، بلکه شامل جریمه است که تابعی صعودی به ازای تعداد پارامترهای برآورد شده است.

تعریف ۱۱.۴.۱. معیار اطلاع بیزی^۳

معیار اطلاع بیزی (BIC)، معیاری برای انتخاب مدل از میان مجموعه متناهی مدل ها و بر پایه تابع درستنمایی است. به دلیل سنگین تر بودن جریمه این معیار نسبت به AIC ، مدلی که بر اساس این معیار انتخاب می شود یا همان مدل منتخب بر اساس AIC است یا مدلی با تعداد پارامتر کمتر و به صورت زیر تعریف می شود.

$$BIC = k \log n - 2 \log L.$$

^۱Likelihood ratio test statistic

^۲Akaike information criterion

^۳Bayesian information criterion

تعریف ۱۲.۴.۱. معیار اطلاع آکاییک مرتبه دوم

معیار اطلاع آکاییک مرتبه دوم که با $AICc$ نشان می‌دهیم، همان AIC با یک تصحیح برای اندازه نمونه‌های محدود است به‌طوری‌که n اشاره بر حجم نمونه دارد و در حالت کلی برابر است با

$$AICc = AIC + \frac{2k(k+1)}{n-k-1}.$$

از این‌رو این معیار به ازای پارامترهای اضافی، دارای جریمه سنگین‌تری نسبت به AIC است. بورنهام و اندرسون^۱ (۲۰۰۲)، برای n ‌های کوچک یا k بزرگ استفاده از $AICc$ به جای AIC را توصیه کردند. از این‌رو، این معیار برای n ‌های بزرگ به AIC همگرا می‌باشد.

تعریف ۱۳.۴.۱. انواع پارامتر

۱. پارامتر مقیاس^۲: اگر خانواده توزیع احتمال به‌گونه‌ای باشد، که برای پارامتر θ و s داشته باشیم

$$F(x; s, \theta) = F\left(\frac{x}{s}; 1, \theta\right),$$

یا

$$f_s(x) = \frac{1}{s} f\left(\frac{x}{s}\right).$$

در این صورت s را پارامتر مقیاس می‌نامیم، زیرا مقدار آن مقیاس یا به عبارتی پراکندگی توزیع احتمالی را تعیین می‌کند. اگر s بزرگ باشد، گستردگی توزیع بیشتر و اگر کوچک باشد، بیشتر متمرکز می‌شود.

۲. پارامتر نرخ^۳: در بعضی از خانواده توزیع‌ها از پارامتر نرخ استفاده می‌شود که در حقیقت معکوس پارامتر مقیاس است.

۳. پارامتر مکانی^۴: اگر بتوانیم یک خانواده از توزیع‌های احتمالی را به صورت

$$f_{x_0}(x) = f(x - x_0)$$

نمایش دهیم، در این صورت x_0 را پارامتر مکانی نامیم، که مکان یا جهت توزیع را تغییر می‌دهد.

۴. پارامتر شکل^۵: هر پارامتری از یک توزیع احتمالی است که اغلب روی شکل توزیع اثر می‌گذارد تا روی تغییر جهت (پارامتر مکانی) یا باز و بسته شدن (پارامتر مقیاس) توزیع.

^۱Burnham and Anderson

^۲Scale parameter

^۳Rate parameter

^۴Location parameter

^۵Shape parameter

فصل ۲

توزیع تعمیم وایبل تعدیل یافته

۱.۲ مقدمه

در این فصل توزیع ۴ پارامتری تعمیم وایبل تعدیل یافته (GMW) را معرفی می‌کنیم. مطالب این فصل برگرفته از مطالعه کاراسکو و همکاران (۲۰۰۸) است. این توزیع به علت انعطاف‌پذیری در جای دادن تمام صورت‌های تابع نرخ شکست، در بسیاری از مسایل مدل‌بندی داده‌های طول عمر، مورد استفاده قرار می‌گیرد. یکی دیگر از ویژگی‌های مهم توزیع GMW این است که زیرمدل‌هایش به صورت نسخه‌هایی از این توزیع می‌باشند، که از آن جمله می‌توان توزیع وایبل، توزیع نمایی تعمیم یافته یا نمایی شده^۱ (GE) (گوپتا و کوندو^۲، ۱۹۹۹ و ۲۰۰۱)، وایبل تعمیم یافته (GW)، ریلی تعمیم یافته^۳ (GR) (کوندو و رکب^۴، ۲۰۰۵)، و توزیع وایبل تعدیل یافته (MW) و برخی صورت‌های دیگر را نام برد.

در ادامه این فصل، به معرفی توزیع تعمیم وایبل تعدیل یافته پرداخته و زیرمدل‌هایش را معرفی می‌کنیم. سپس دو فرمول کلی را برای محاسبه گشتاورها بیان کرده و تابع چگالی آماره ترتیبی آن را به دست می‌آوریم.

۲.۲ توزیع تعمیم وایبل تعدیل یافته

برای معرفی توزیع تعمیم وایبل تعدیل یافته (GMW)، ابتدا توزیع وایبل تعدیل یافته (MW) را تعریف می‌کنیم. فرض کنید $F_L(t; \lambda, \beta, \gamma)$ دلالت بر تابع توزیع وایبل تعدیل یافته داشته باشد، با به توان α ($\alpha > 0$) رساندن توزیع وایبل تعدیل یافته، یعنی $F(t) = F_L(t; \lambda, \beta, \gamma)^\alpha$ ، تابع توزیع تعمیم وایبل تعدیل یافته نتیجه می‌شود. برای سادگی $F_L(t; \lambda, \beta, \gamma) = F_L(t)$ در نظر می‌گیریم. در سال ۲۰۰۳ لای

^۱Generalized or Exponentiated Exponential

^۲Gupta and Kundu

^۳Generalized Rayleigh

^۴Kundu and Raqab

و همکارانش تابع توزیع وایبل تعدیل یافته را به شکل

$$F_L(t) = 1 - \exp\{-(\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\}, \quad \lambda > 0, \beta \geq 0, \gamma > 0,$$

بیان کردند. از این رو با توجه به تابع توزیع GMW ، تابع توزیع و مشتق تابع توزیع تعمیم وایبل تعدیل یافته به ترتیب، به شکل زیر حاصل می شوند

$$F(t) = (1 - \exp\{-(\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\})^\alpha \quad (۱.۲)$$

و

$$f(t) = \alpha \lambda^\beta t^{\beta-1} (\beta + \gamma t) \exp\{\gamma t - (\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\} \\ \times [1 - \exp\{-(\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\}]^{\alpha-1}, \quad t > 0. \quad (۲.۲)$$

ابتدا نشان می دهیم (۲.۲) یک تابع چگالی احتمال است، به عبارتی ثابت می کنیم $\int_0^\infty f(t)dt = 1$. برای این منظور داریم

$$\int_0^\infty f(t)dt = \int_0^\infty \alpha \lambda^\beta t^{\beta-1} (\beta + \gamma t) \exp\{\gamma t - (\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\} \\ \times [1 - \exp\{-(\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\}]^{\alpha-1} dt.$$

با تغییر متغیر $u = 1 - \exp\{-(\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\}$ و با توجه به

$$du = [\beta \lambda^\beta t^{\beta-1} \exp(\gamma t) + \gamma (\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)] \exp\{-(\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\} dt \\ = \lambda^\beta t^{\beta-1} (\beta + \gamma t) \exp\{\gamma t - (\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\} dt,$$

می توان نتیجه گرفت

$$\int_0^\infty f(t)dt = \int_0^1 \alpha u^{\alpha-1} du = u^\alpha \Big|_0^1 = 1 - 0 = 1.$$

در این صورت، اگر متغیر تصادفی T دارای توزیع با تابع چگالی (۲.۲) باشد، می نویسیم $T \sim GMW(\lambda, \beta, \gamma, \alpha)$. تابع قابلیت اطمینان و تابع نرخ شکست متناظر با تابع چگالی فوق، به ترتیب عبارتند از:

$$R(t) = 1 - F(t) = 1 - [1 - \exp\{-(\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\}]^\alpha \quad (۳.۲)$$

و

$$h(t) = \frac{\alpha \lambda^\beta t^{\beta-1} (\beta + \gamma t) \exp\{\gamma t - (\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\} [1 - \exp\{-(\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\}]^{\alpha-1}}{1 - [1 - \exp\{-(\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\}]^\alpha}. \quad (۴.۲)$$

برای تولید اعداد تصادفی از توزیع GMW ، با توجه به این که اگر $T \sim GMW(\lambda, \beta, \gamma, \alpha)$ باشد، آن گاه $F(T) \sim U(0, 1)$ ، می توان نوشت

$$u = [1 - \exp\{-(\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\}]^\alpha.$$

در نتیجه داریم

$$\begin{aligned} 1 - u^{1/\alpha} &= \exp\{-(\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\}, \\ \log(1 - u^{1/\alpha}) &= -(\lambda t)^\beta \exp(\gamma t), \\ t^\beta \exp(\gamma t) + \frac{1}{\lambda^\beta} \log(1 - u^{1/\alpha}) &= 0. \end{aligned} \quad (5.2)$$

بنابراین برای تولید تصادفی از توزیع مورد نظر، ابتدا از توزیع $U(0, 1)$ تولید کرده و با در نظر گرفتن λ ، β ، γ و α به حل معادله غیرخطی (۵.۲) می‌پردازیم. در نتیجه t حاصل دارای توزیع GMW خواهد بود.

۳.۲ توزیع‌های خاص

برخی از زیرمدل‌های معروف توزیع GMW ، عبارتند از:

• توزیع وایبل

به ازای $\gamma = 0$ و $\alpha = 1$ ، رابطه (۲.۲) به صورت

$$f(t) = \beta \lambda^\beta t^{\beta-1} \exp\{-(\lambda t)^\beta\}, \quad t > 0,$$

تبدیل می‌شود که همان توزیع وایبل دوپارامتری است. اگر علاوه بر این که $\gamma = 0$ و $\alpha = 1$ داشته باشیم $\beta = 1$ و $\beta = 2$ ، به ترتیب توزیع نمایی و توزیع ریلی حاصل می‌شوند.

• توزیع مقادیر فرین^۱

به ازای $\beta = 0$ و $\alpha = 1$ ، رابطه (۲.۲) به صورت

$$f(t) = \gamma \exp\{\gamma t - \exp(\gamma t)\}, \quad t > 0,$$

قابل بازنویسی است که تابع چگالی احتمال توزیع مقادیر فرین نوع I (یا به عبارت دیگر لگاریتم گاما^۲) است.

• توزیع وایبل تعمیم‌یافته

به ازای $\gamma = 0$ ، توزیع تعمیم وایبل تعدیل‌یافته، به توزیع وایبل تعمیم‌یافته با تابع چگالی زیر تبدیل می‌شود

$$f(t) = \alpha \beta \lambda^\beta t^{\beta-1} \exp\{-(\lambda t)^\beta\} \{1 - \exp(-(\lambda t)^\beta)\}^{\alpha-1}, \quad t > 0.$$

اگر علاوه بر این که $\gamma = 0$ ، $\beta = 1$ و $\beta = 2$ ، آنگاه به ترتیب توزیع نمایی تعمیم‌یافته و توزیع ریلی تعمیم‌یافته به دست می‌آیند.

^۱ Extreme-value distribution

^۲ log-gamma

• توزیع وایبل تعدیل یافته

به ازای $\alpha = 1$ ، توزیع وایبل تعدیل یافته نتیجه می شود

$$f(t) = \lambda^\beta t^{\beta-1} (\beta + \gamma t) \exp\{\gamma t - (\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\}, \quad t > 0.$$

• توزیع بتای تجمیع شده^۱

توزیع بتای تجمیع شده در سال ۱۹۹۸ توسط لای و همکارانش با تابع قابلیت اطمینان به صورت زیر معرفی شد

$$R(t) = \exp\{-(\lambda t)^\beta (1 - dt)^c\}, \quad \lambda, \beta, d > 0, c < 0.$$

با قرار دادن $d = \frac{1}{n}$ و $c = -\gamma n$ و با میل دادن n به بینهایت، داریم

$$(1 - dt)^c = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{-\gamma n} \xrightarrow{D} \exp(\gamma t).$$

بنابراین به طور مجانبی

$$R(t) \approx \exp\{-(\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\},$$

که همان تابع قابلیت اطمینان رابطه (۳.۲) برای توزیع GMW با فرض $\alpha = 1$ است.

۴.۲ فرمول های کلی برای گشتاورها

گشتاورها دارای اهمیت بسیاری در تحلیل های آماری، به خصوص در مسایل کاربردی هستند. برخی از مهم ترین ویژگی ها و مشخصه های توزیع مانند پراکندگی، چولگی و مد، از طریق گشتاورها قابل مطالعه می باشند. در این بخش گشتاور مرتبه k ام، $\mu'_k = E(T^k)$ ، توزیع تعمیم وایبل تعدیل یافته را به صورت یک سری نامتناهی نمایش می دهیم. با استفاده از تعریف داریم

$$\mu'_k = \alpha \lambda^\beta \int_0^\infty t^{k+\beta-1} (\beta + \gamma t) \exp\{\gamma t - (\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\} [1 - \exp\{-(\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\}]^{\alpha-1} dt.$$

با توجه به تعریف ۱۰.۳.۱ و با فرض این که α یک مقدار حقیقی غیر صحیح است، داریم

$$\begin{aligned} \mu'_k &= \alpha \lambda^\beta \int_0^\infty t^{k+\beta-1} (\beta + \gamma t) \exp\{\gamma t - (\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\} \\ &\quad \times \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha)(-1)^j}{\Gamma(\alpha-j)j!} [\exp\{-(\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\}]^j dt \\ &= \alpha \lambda^\beta \Gamma(\alpha) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{\Gamma(\alpha-j)j!} \int_0^\infty t^{k+\beta-1} (\beta + \gamma t) \\ &\quad \times \exp(\gamma t) \exp\{-(j+1)(\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\} dt. \end{aligned} \quad (6.2)$$

^۱Beta integrated distribution

حال با تغییر متغیر $x = t^\beta e^{\gamma t}$ داریم $x^{\frac{1}{\beta}} = t e^{\frac{\gamma}{\beta} t}$. در نتیجه

$$\frac{\gamma}{\beta} x^{\frac{1}{\beta}} = \left(\frac{\gamma}{\beta} t\right) e^{\frac{\gamma}{\beta} t}.$$

با توجه به تعریف تابع W لامبرت، می‌توان نوشت

$$W(z) = F\left(\frac{\gamma}{\beta} x^{\frac{1}{\beta}}\right),$$

به عبارت دیگر

$$\frac{\gamma}{\beta} t = F\left(\frac{\gamma}{\beta} x^{\frac{1}{\beta}}\right).$$

در نتیجه داریم

$$t = \frac{\beta}{\gamma} F\left(\frac{\gamma}{\beta} x^{\frac{1}{\beta}}\right) = \frac{\beta}{\gamma} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1} i^{i-2}}{(i-1)!} \left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^i x^{\frac{i}{\beta}}. \quad (۷.۲)$$

بنابراین توانستیم t را بر حسب x به صورت زیر نمایش دهیم

$$t = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^{\frac{i}{\beta}}, \quad (۸.۲)$$

به طوری که

$$a_i = \frac{(-1)^{i+1} i^{i-2}}{(i-1)!} \left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^{i-1}. \quad (۹.۲)$$

با فرض I به صورت زیر

$$I = \int_0^{\infty} t^{k+\beta-1} (\beta + \gamma t) \exp(\gamma t) \exp\{-(j+1)(\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\} dt,$$

و با جای‌گذاری (۸.۲) در I داریم

$$I = \int_0^{\infty} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^{\frac{i}{\beta}} \right\}^k \exp\{-(j+1)\lambda^\beta x\} dx.$$

حال با توجه به این که

$$\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^{\frac{i}{\beta}} \right\}^k = \sum_{i_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{i_k=1}^{\infty} a_{i_1} \cdots a_{i_k} x^{\left(\frac{i_1+\cdots+i_k}{\beta}\right)} = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^{\infty} A_{i_1, \dots, i_k} x^{\frac{S_k}{\beta}}, \quad (۱۰.۲)$$

که در آن $A_{i_1, \dots, i_k} = a_{i_1} \cdots a_{i_k}$ و $S_k = i_1 + \cdots + i_k$ با جای‌گذاری (۱۰.۲) در I داریم

$$I = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^{\infty} A_{i_1, \dots, i_k} \int_0^{\infty} x^{\frac{S_k}{\beta}} \exp\{-(j+1)\lambda^\beta x\} dx.$$

با تغییر متغیر مجدد $y = (j+1)\lambda^\beta x$ ، نتیجه می‌شود $dy = (j+1)\lambda^\beta dx$

حال با جای گذاری y در I نتیجه می گیریم

$$\begin{aligned} I &= \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^{\infty} A_{i_1, \dots, i_k} \int_0^{\infty} \left[\frac{y}{(j+1)\lambda^\beta} \right]^{\frac{S_k}{\beta}} \frac{e^{-y}}{(j+1)\lambda^\beta} dy \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^{\infty} \frac{A_{i_1, \dots, i_k}}{\{(j+1)\lambda^\beta\}^{\frac{S_k}{\beta}+1}} \int_0^{\infty} y^{\frac{S_k}{\beta}} e^{-y} dy \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^{\infty} \frac{A_{i_1, \dots, i_k}}{\{(j+1)\lambda^\beta\}^{\frac{S_k}{\beta}+1}} \Gamma\left(\frac{S_k}{\beta} + 1\right). \end{aligned}$$

با توجه به رابطه (۶.۲)، نتیجه زیر برای گشتاور توزیع GMW حاصل می شود

$$\mu'_k = \alpha \lambda^\beta \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(1-\alpha)_j}{j!} \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^{\infty} \frac{A_{i_1, \dots, i_k} \Gamma\left(\frac{S_k}{\beta} + 1\right)}{\{(j+1)\lambda^\beta\}^{\frac{S_k}{\beta}+1}}, \quad (11.2)$$

که در آن $(1-\alpha)_j = (-1)^j \Gamma(\alpha)/\Gamma(\alpha-j)$ ، و $A_{i_1, \dots, i_k}$ به سادگی از رابطه (۹.۲) قابل محاسبه می باشد. فرمول (۱۱.۲)، یک رابطه کلی برای گشتاور مرتبه k ام توزیع GMW است و به ازای γ و β مثبت و $\alpha \neq 1$ برقرار است. یک رابطه جایگزین برای μ'_k ، با توجه به (۹.۲) و (۱۱.۲)، تغییر در حدود مجموع (یک واحد کاهش)، در نظر گرفتن $x_i = (-\frac{\gamma}{\beta})\{\lambda^\beta(j+1)\}^{-1/\beta}$ ، و روابط

$$a_i = \frac{(-1)^{i+1} i^{i-2}}{(i-1)!} \left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^{i-1},$$

$$A_{i_1, \dots, i_k} = a_{i_1} \cdots a_{i_k}, \quad S_k = i_1 + \cdots + i_k,$$

$$a_{i+1} = \frac{(-1)^{i+2} (i+1)^{i-1}}{i!} \left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^i = \frac{(i+1)^{i-1}}{i!} \left(-\frac{\gamma}{\beta}\right)^i,$$

به صورت زیر حاصل می شود

$$\begin{aligned} \mu'_k &= \alpha \lambda^\beta \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(1-\alpha)_j}{j!} \sum_{i_1, \dots, i_k=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{(i_1+1)+\dots+(i_k+1)}{\beta} + 1\right)}{\{\lambda^\beta(j+1)\}^{\frac{(i_1+1)+\dots+(i_k+1)}{\beta}+1}} A_{i_1+1, \dots, i_k+1} \\ &= \alpha \lambda^\beta \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(1-\alpha)_j}{j!} \sum_{i_1, \dots, i_k=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{S_k+k}{\beta} + 1\right)}{\{\lambda^\beta(j+1)\}^{\frac{S_k+k}{\beta}+1}} a_{i_1+1} \cdots a_{i_k+1} \\ &= \alpha \lambda^\beta \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(1-\alpha)_j}{j!} \sum_{i_1, \dots, i_k=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{S_k+k}{\beta} + 1\right)}{\{\lambda^\beta(j+1)\}^{\frac{S_k+k}{\beta}+1}} \\ &\quad \times \frac{(i_1+1)^{i_1-1}}{i_1!} \left(-\frac{\gamma}{\beta}\right)^{i_1} \cdots \frac{(i_k+1)^{i_k-1}}{i_k!} \left(-\frac{\gamma}{\beta}\right)^{i_k} \\ &= \alpha \lambda^\beta \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(1-\alpha)_j}{j! \{\lambda^\beta(j+1)\}^{\frac{k}{\beta}+1}} \\ &\quad \times \sum_{i_1, \dots, i_k=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{S_k+k}{\beta} + 1\right)}{(i_1+1)^{1-i_1} \cdots (i_k+1)^{1-i_k}} \frac{x_1^{i_1} \cdots x_k^{i_k}}{i_1! \cdots i_k!}. \end{aligned} \quad (12.2)$$

روابط (۱۱.۲) و (۱۲.۲) نتایج اصلی این بخش می‌باشند. اهمیت این عبارات به دلیل توانایی در تعیین گشتاورها بدون هیچ محدودیت و شرطی روی چهار پارامتر می‌باشد. موارد $\gamma = 0$ و $\alpha = 1$ در زیر بررسی خواهند شد.

نکته ۱.۴.۲. اگر α یک مقدار صحیح باشد، طبق تعریف قضیه دوجمله‌ای در تعریف ۱۰.۳.۱ مجموع روی j تا $\alpha - 1$ است، و روابط (۱۱.۲) و (۱۲.۲) به ترتیب به شکل زیر نشان داده می‌شوند:

$$\mu'_k = \alpha \lambda^\beta \sum_{j=0}^{\alpha-1} \frac{(1-\alpha)_j}{j!} \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^{\infty} \frac{A_{i_1, \dots, i_k} \Gamma(\frac{S_k}{\beta} + 1)}{\{(j+1)\lambda^\beta\}^{\frac{S_k}{\beta}+1}},$$

$$\mu'_k = \alpha \lambda^\beta \sum_{j=0}^{\alpha-1} \frac{(1-\alpha)_j}{j! \{\lambda^\beta(j+1)\}^{\frac{k}{\beta}+1}} \sum_{i_1, \dots, i_k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{S_k+k}{\beta} + 1)}{(i_1+1)^{1-i_1} \dots (i_k+1)^{1-i_k}} \frac{x_1^{i_1} \dots x_k^{i_k}}{i_1! \dots i_k!}.$$

پیچیدگی فرمول‌های (۱۱.۲) و (۱۲.۲)، با افزایش k ، افزایش می‌یابد. با توجه به (۱۱.۲)، گشتاور مرتبه اول به شکل زیر می‌باشد

$$\mu'_1 = \alpha \lambda^\beta \sum_{j=0}^{\alpha-1} \frac{(1-\alpha)_j}{j!} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i \Gamma(\frac{i}{\beta} + 1)}{\{\lambda^\beta(j+1)\}^{\frac{i}{\beta}+1}}.$$

گشتاورهای بعدی، چولگی و کشیدگی با استفاده از روابط (۱۱.۲) و (۱۲.۲) قابل حصول می‌باشند. وقتی $\gamma = 0$ ، چادهوری^۱ (۲۰۰۵)، گشتاور توزیع وایبل تعمیم‌یافته را برای $k > -\beta$ (مقادیر صحیح و حقیقی) با استفاده از تبدیل لاپلاس محاسبه کرد. با توجه به تابع چگالی توزیع وایبل تعمیم‌یافته به صورت

$$f(t) = \alpha \beta \lambda^\beta t^{\beta-1} \exp\{-(\lambda t)^\beta\} [1 - \exp\{-(\lambda t)^\beta\}]^{\alpha-1}, \quad t > 0,$$

تبدیل لاپلاس (بنا به تعریف ۸.۳.۱) عبارت است از

$$L(s) = \int_0^\infty \exp(-ts) \alpha \beta \lambda^\beta t^{\beta-1} \exp\{-(\lambda t)^\beta\} [1 - \exp\{-(\lambda t)^\beta\}]^{\alpha-1} dt.$$

تغییر متغیر $v = \exp\{-(\lambda t)^\beta\}$ را در نظر بگیرید. بنابراین

$$dv = -\beta \lambda^\beta t^{\beta-1} \exp\{-(\lambda t)^\beta\} dt, \quad t = \frac{(-\log v)^{\frac{1}{\beta}}}{\lambda}.$$

^۱Choudhury

با جای گذاری عبارت فوق در $L(s)$ و با استفاده از بسط تیلور e^x و تعریف ۱۰.۳.۱، می توان نوشت

$$\begin{aligned} L(s) &= \int_0^1 \alpha \exp\left\{-s\left(\frac{-\log v}{\lambda}\right)^{\frac{1}{\beta}}\right\} (1-v)^{\alpha-1} dv \\ &= \int_0^1 \alpha \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-s)^r \left(\frac{-\log v}{\lambda}\right)^{\frac{r}{\beta}}}{r!} (1-v)^{\alpha-1} dv \\ &= \int_0^1 \alpha \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-s)^r (-\log v)^{\frac{r}{\beta}}}{\lambda^r r!} \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha)(-1)^i}{\Gamma(\alpha-i)i!} v^i\right) dv \\ &= \alpha \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-s)^r}{\lambda^r r!} (-1)^{\frac{r}{\beta}} \int_0^1 \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i v^i\right) (\log v)^{\frac{r}{\beta}} dv \\ &= \alpha \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-s)^r}{\lambda^r r!} (-1)^{\frac{r}{\beta}} \times I, \end{aligned}$$

که با تغییر متغیر $v = \exp(-y)$ و با توجه به تعریف تابع گاما، نتیجه می شود

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i v^i\right) (\log v)^{\frac{r}{\beta}} dv \\ &= \int_0^{\infty} (-y)^{\frac{r}{\beta}} \exp(-y) dy + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \int_0^{\infty} (-y)^{\frac{r}{\beta}} \exp\{-(i+1)y\} dy \\ &= (-1)^{\frac{r}{\beta}} \left[\Gamma\left(\frac{r}{\beta} + 1\right) + \sum_{i=1}^{\infty} \left(a_i \frac{\Gamma\left(\frac{r}{\beta} + 1\right)}{(i+1)^{\frac{r}{\beta}+1}}\right) \right] \\ &= (-1)^{\frac{r}{\beta}} \Gamma\left(\frac{r}{\beta} + 1\right) \left[1 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i (i+1)^{-\left(\frac{r}{\beta}+1\right)}\right]. \end{aligned}$$

در نهایت با جای گذاری I در $L(s)$ نتیجه زیر حاصل می شود

$$L(s) = \alpha \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-s)^r}{\lambda^r r!} \Gamma\left(\frac{r}{\beta} + 1\right) \left[1 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i (i+1)^{-\left(\frac{r}{\beta}+1\right)}\right].$$

بنابراین گشتاور توزیع وایبل تعمیم یافته با توجه به رابطه تبدیل لاپلاس و گشتاورهای توزیع، در تعریف ۸.۳.۱ به صورت زیر به دست می آید

$$\mu'_k = (-1)^k \frac{d^k L(s)}{ds^k} \Big|_{s=0} = \alpha \lambda^{-k} \Gamma\left(\frac{k}{\beta} + 1\right) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(1-\alpha)_i}{i! (i+1)^{\frac{k}{\beta}+1}}.$$

شکل بسته صورت های دیگر را می توان به عنوان موارد خاص این فرمول به دست آورد. اگر علاوه بر $\gamma = 0$ ، داشته باشیم $\beta = 1$ ، گشتاور مربوط به توزیع نمایی تعمیم یافته با استفاده از تابع مولد گشتاور به صورت زیر قابل محاسبه می باشد (گوپتا و کوندو ۱۹۹۹ و ۲۰۰۱).

با توجه به تابع چگالی توزیع نمایی تعمیم یافته،

$$f(t) = \alpha \lambda \exp(-\lambda t) \{1 - \exp(-\lambda t)\}^{\alpha-1}, \quad t > 0.$$

تابع مولد گشتاور عبارت است از

$$\begin{aligned} M_T(t) &= E(e^{tT}) \\ &= \int_0^\infty \alpha \lambda \exp(tT) \exp(-\lambda t) \{1 - \exp(-\lambda t)\}^{\alpha-1} dt \\ &= \int_0^\infty \alpha \lambda \exp\{t(T - \lambda)\} \{1 - \exp(-\lambda t)\}^{\alpha-1} dt. \end{aligned}$$

با تغییر متغیر $v = \exp(-\lambda t)$ داریم

$$dv = -\lambda \exp(-\lambda t) dt, \quad \exp(tT) = v^{-\frac{T}{\lambda}}.$$

و با توجه به تعریف ۳.۳.۱ داریم

$$\begin{aligned} M_T(t) &= \alpha \int_0^1 v^{-\frac{T}{\lambda}} (1-v)^{\alpha-1} dv \\ &= \alpha \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(1 - \frac{t}{\lambda})}{\Gamma(\alpha - \frac{t}{\lambda} + 1)} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha + 1) \Gamma(1 - \frac{t}{\lambda})}{\Gamma(\alpha - \frac{t}{\lambda} + 1)}, \quad t < \lambda. \end{aligned}$$

با مشتق‌گیری از تابع $\log M_T(t)$ نسبت به t و با قرار دادن $t = 0$ نتایج زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} E(T) &= (\log M_T(t))' \Big|_{t=0} \\ &= \left(-\frac{1}{\lambda}\right) \psi\left(1 - \frac{t}{\lambda}\right) + \left(\frac{1}{\lambda}\right) \psi\left(\alpha - \frac{t}{\lambda} + 1\right) \Big|_{t=0} \\ &= \lambda^{-1} \{\psi(\alpha + 1) - \psi(1)\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(T) &= (\log M_T(t))'' \Big|_{t=0} \\ &= \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 \psi'\left(1 - \frac{t}{\lambda}\right) - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 \psi'\left(\alpha - \frac{t}{\lambda} + 1\right) \Big|_{t=0} \\ &= \lambda^{-2} \{\psi'(1) - \psi'(\alpha + 1)\}. \end{aligned}$$

بنابراین امید ریاضی و واریانس توزیع نمایی تعمیم‌یافته به ترتیب به صورت زیر حاصل می‌شوند:

$$E(T) = \lambda^{-1} \{\psi(\alpha + 1) - \psi(1)\}, \quad Var(T) = \lambda^{-2} \{\psi'(1) - \psi'(\alpha + 1)\}, \quad (13.2)$$

که $\Gamma(\cdot)$ تابع گاما، و $\psi(\cdot)$ تابع دوگاما و $\psi'(\cdot)$ تابع چندگاما می‌باشند.

اگر علاوه بر $\gamma = 0$ ، $\beta = 2$ باشد، کوندو و رکب (۲۰۰۵) گشتاور توزیع ریلی تعمیم‌یافته را با استفاده از رابطه توزیع نمایی تعمیم‌یافته و ریلی تعمیم‌یافته محاسبه کردند که در ادامه می‌آوریم. گشتاور توزیع نمایی تعمیم‌یافته با روش مستقیم (که در بالا با استفاده از تابع مولد گشتاور بیان شد) به صورت زیر قابل

محاسبه است

$$\begin{aligned}
E(T^k) &= \alpha \lambda \int_0^\infty t^k \exp(-\lambda t) \{1 - \exp(-\lambda t)\}^{\alpha-1} dt \\
&= \alpha \lambda \int_0^\infty t^k \exp(-\lambda t) \sum_{j=0}^\infty \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-j)j!} (-1)^j \{\exp(-\lambda t)\}^j dt \\
&= \alpha \lambda \sum_{j=0}^\infty \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-j)j!} (-1)^j \int_0^\infty t^k \exp\{-(j+1)\lambda t\} dt \\
&= \alpha \lambda \sum_{j=0}^\infty \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-j)j!} (-1)^j \frac{\Gamma(k+1)}{\lambda^{k+1}(j+1)^{k+1}} \\
&= \frac{\alpha}{\lambda^k} \Gamma(k+1) \sum_{j=0}^\infty \frac{(-1)^j}{(j+1)^{k+1}} \binom{\alpha-1}{j}.
\end{aligned}$$

از طرفی، با توجه به تابع چگالی توزیع ریلی تعمیم یافته به صورت

$$f(t) = \alpha \lambda^\alpha t \exp\{-(\lambda t)^\alpha\} [1 - \exp\{-(\lambda t)^\alpha\}]^{\alpha-1},$$

می توان نتیجه گرفت

$$\begin{aligned}
E(T^k) &= \alpha \lambda^\alpha \int_0^\infty t^{k+1} \exp\{-(\lambda t)^\alpha\} [1 - \exp\{-(\lambda t)^\alpha\}]^{\alpha-1} dt \\
&= \alpha \lambda^\alpha \int_0^\infty t^{k+1} \exp\{-(\lambda t)^\alpha\} \sum_{j=0}^\infty \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-j)j!} (-1)^j \exp\{-(\lambda t)^\alpha\}^j dt \\
&= \alpha \lambda^\alpha \sum_{j=0}^\infty \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-j)j!} (-1)^j \int_0^\infty t^{k+1} \exp\{-(j+1)(\lambda t)^\alpha\} dt.
\end{aligned}$$

با انجام تغییر متغیر $y = (\lambda t)^\alpha$ ، داریم

$$\begin{aligned}
E(T^k) &= \alpha \lambda^\alpha \sum_{j=0}^\infty \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-j)j!} (-1)^j \int_0^\infty y^{\frac{k}{\alpha}} \exp\{-(j+1)\lambda^\alpha y\} dy \\
&= \alpha \lambda^\alpha \sum_{j=0}^\infty \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-j)j!} (-1)^j \frac{\Gamma(\frac{k}{\alpha}+1)}{((j+1)\lambda^\alpha)^{\frac{k}{\alpha}+1}} \\
&= \frac{\alpha}{\lambda^k} \Gamma(\frac{k}{\alpha}+1) \sum_{j=0}^\infty \frac{(-1)^j}{(j+1)^{\frac{k}{\alpha}+1}} \binom{\alpha-1}{j}.
\end{aligned}$$

بنابراین گشتاورهای زوج توزیع ریلی تعمیم یافته (GR) به صورت زیر خواهند بود

$$\mu'_{\alpha k} = \frac{\alpha}{\lambda^k} \Gamma(k+1) \sum_{j=0}^\infty \frac{(-1)^j}{(j+1)^{k+1}} \binom{\alpha-1}{j}.$$

در نتیجه

$$\mu'_{\alpha k} = \frac{1}{\lambda^k} \mu'_k.$$

با توجه به منحصر به فرد بودن تابع مولد گشتاور، از این رابطه نتیجه می‌شود، اگر $T \sim GR(\alpha, \lambda)$ آن‌گاه $Y = \lambda T^\gamma$ دارای توزیع نمایی تعمیم‌یافته است. بنابراین امید ریاضی و واریانس T^γ را با توجه به امید ریاضی و واریانس توزیع نمایی تعمیم‌یافته بیان شده در (۱۳.۲)، به صورت زیر داریم

$$E(\lambda T^\gamma) = \lambda^{-1} \{ \psi(\alpha + 1) - \psi(1) \}.$$

در نتیجه

$$E(T^\gamma) = \lambda^{-\gamma} \{ \psi(\alpha + 1) - \psi(1) \}.$$

همچنین داریم

$$Var(\lambda T^\gamma) = \lambda^{-\gamma} \{ \psi'(1) - \psi'(\alpha + 1) \}.$$

بنابراین

$$Var(T^\gamma) = \lambda^{-\gamma} \{ \psi'(1) - \psi'(\alpha + 1) \}.$$

در نهایت، گشتاور مرتبه k ام را به ازای $\alpha = 1$ ، برای توزیع وایبل تعدیل یافته بیان می‌کنیم. داریم

$$\begin{aligned} \mu'_k &= \lambda^\beta \int_0^\infty t^{k+\beta-1} (\beta + \gamma t) \exp\{\gamma t - (\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\} dt \\ &= \lambda^\beta \int_0^\infty t^{k+\beta-1} (\beta + \gamma t) \exp(\gamma t) \exp\{-(\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\} dt. \end{aligned}$$

با تغییر متغیر $x = t^\beta e^{\gamma t}$ و با توجه به (۸.۲)،

$$t = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^{\frac{i}{\beta}},$$

که در آن $a_i = \frac{(-1)^{i+1} i^{i-2}}{(i-1)!} \left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^{i-1}$ ، لذا

$$\begin{aligned} \mu'_k &= \lambda^\beta \int_0^\infty \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x^{\frac{i}{\beta}} \right)^k \exp(-\lambda^\beta x) \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^{\infty} A_{i_1, \dots, i_k} \int_0^\infty x^{\frac{s_k}{\beta}} \exp(-\lambda^\beta x) \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^{\infty} \frac{A_{i_1, \dots, i_k} \Gamma\left(\frac{k}{\beta} + 1\right)}{\lambda^{s_k}}, \end{aligned}$$

که نتیجه دیگری برای گشتاور توزیع وایبل تعدیل یافته می‌باشد.

۵.۲ تابع چگالی آماره‌های ترتیبی

در این بخش تابع چگالی آماره ترتیبی مرتبه i ام، $T_{i:n}$ را برای نمونه تصادفی n تایی از توزیع GMW ارائه می‌کنیم. با توجه به تعریف تابع چگالی آماره‌های ترتیبی، تعریف (۱۰.۴.۱)، و روابط (۲.۲) و (۳.۲)،

داریم

$$\begin{aligned}
 f_{i:n}(t) &= \frac{\alpha \lambda^\beta t^{\beta-1} (\beta + \gamma t)}{B(i, n-i+1)} \exp\{\gamma t - (\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\} [1 - \exp\{-(\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\}]^{\alpha-1} \\
 &\quad \times [1 - \exp\{-(\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\}]^{\alpha i - \alpha} [1 - \{1 - \exp\{-(\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\}^\alpha\}]^{n-i} \\
 &= \frac{\alpha \lambda^\beta t^{\beta-1} (\beta + \gamma t) \exp\{\gamma t - (\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\} [1 - \{1 - \exp\{-(\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\}^\alpha\}]^{n-i}}{B(i, n-i+1) [1 - \exp\{-(\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\}]^{1-\alpha i}}.
 \end{aligned}$$

با فرض I به صورت زیر و با استفاده از تعریف ۱۰.۳.۱ و با توجه به این که $n-i$ صحیح است، نتیجه می گیریم

$$\begin{aligned}
 I &= [1 - \{1 - \exp\{-(\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\}^\alpha\}]^{n-i} \\
 &= \sum_{r=0}^{n-i} \binom{n-i}{r} (-1)^r [1 - \exp\{-(\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\}^\alpha]^r.
 \end{aligned}$$

از جای گذاری I در $f_{i:n}$ می توان نوشت

$$\begin{aligned}
 f_{i:n}(t) &= \sum_{r=0}^{n-i} \binom{n-i}{r} (-1)^r \frac{\alpha \lambda^\beta t^{\beta-1} (\beta + \gamma t) \exp\{\gamma t - (\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\}}{B(i, n-i+1) [1 - \exp\{-(\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\}]^{1-\alpha(i+r)}} \\
 &= \sum_{r=0}^{n-i} \frac{n!}{k!(n-r-i)!(i-1)!(i+r)} (-1)^r f_{i+r}(t),
 \end{aligned}$$

که با توجه به (۲.۲)، $f_{i+r}(t)$ دلالت بر تابع چگالی $GMW(\lambda, \beta, \gamma, \alpha(i+r))$ دارد. بنابراین اگر $\binom{n}{i+r} \binom{i+r-1}{r} (-1)^r = w_{i,r}$ ، تابع چگالی آماره ترتیبی مرتبه i ام توزیع GMW به صورت زیر حاصل می شود

$$f_{i:n}(t) = \sum_{r=0}^{n-i} w_{i,r} f_{i+r}(t). \quad (۱۴.۲)$$

با توجه به رابطه (۱۴.۲)، گشتاور مرتبه k ام آماره ترتیبی مرتبه i ام با استفاده از (۱۱.۲) و (۱۲.۲) عبارت است از

$$\begin{aligned}
 E(T^k) &= \int_0^\infty t^k \sum_{r=0}^{n-i} w_{i,r} f_{i+r}(t) dt \\
 &= \sum_{r=0}^{n-i} w_{i,r} \int_0^\infty t^k f_{i+r}(t) dt,
 \end{aligned}$$

که بنابه تعریف گشتاور، $J = \int_0^\infty t^k f_{i+r}(t) dt$ برابر با گشتاور k ام توزیع $GMW(\lambda, \beta, \gamma, \alpha(i+r))$ است. بنابراین با توجه به رابطه (۱۱.۲)، گشتاور مرتبه k ام آماره ترتیبی برابر است با

$$E(T^k) = \lambda^\beta \sum_{r=0}^{n-i} \alpha(i+r) w_{i,r} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\alpha(i+r)-j)_j}{j!} \\ \times \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^{\infty} \frac{A_{i_1, \dots, i_k} \Gamma(\frac{S_k}{\beta} + 1)}{\{(j+1)\lambda^\beta\}^{\frac{S_k}{\beta} + 1}},$$

به‌طوری‌که $\alpha(i+r)_j = (-1)^j \Gamma(\alpha(i+r)) / \Gamma(\alpha(i+r) - j)$

فصل ۳

توزیع بتا وایبل تعمیم یافته

۱.۳ مقدمه

مطالب این فصل که برگرفته از مطالعه سینگلا^۱ و همکاران (۲۰۱۲) است، به معرفی توزیع پنج پارامتری بتا وایبل تعمیم یافته^۲ جهت بررسی تابع نرخ شکست های سهمی شکل یا سهمی وارونه که پیش تر معرفی شد، می پردازد. توزیع بتا وایبل تعمیم یافته بسیاری از توزیع های موجود را به عنوان زیرمدل های خود دربر می گیرد و هم چنین این توزیع به ازای ترکیبات مختلف پارامتری، برای نمایش تابع نرخ شکست های صعودی، نزولی، سهمی شکل و سهمی وارونه، مورد استفاده قرار می گیرد. اگرچه انواع دیگری از توزیع وایبل و بتای تعمیم یافته شامل صورت های مختلف تابع نرخ شکست هستند، با بررسی روی مجموعه داده های واقعی ملاحظه می شود که این توزیع برازش بهتری را نسبت به زیرمدل هایش دارد.

در این فصل به طور خاص، ابتدا به معرفی توزیع بتا وایبل تعمیم یافته پرداخته، سپس صورت های جایگزین دیگری را برای تابع چگالی احتمال و تابع توزیع تجمعی توزیع نام برده، به دست می آوریم. هم چنین تابع چگالی آماره ترتیبی را به دست آورده و به محاسبه گشتاورهای توزیع با استفاده از تعریف و هم چنین تبدیل لاپلاس می پردازیم. به علاوه معادلات غیرخطی برای محاسبه برآوردگر درست نمایی ماکسیمم و عناصر ماتریس اطلاع را به منظور برازش توزیع مورد نظر به داده های واقعی محاسبه می کنیم. در بخش آخر اهمیت توزیع بتا وایبل تعمیم یافته را با برازش بر دو مجموعه داده ی واقعی بررسی می کنیم.

^۱Singla

^۲Beta generalized weibull

۲.۳ توزیع بتا وایبل تعمیم یافته

به منظور معرفی توزیع بتا وایبل تعمیم یافته، در ابتدا به معرفی توزیع بتای تعمیم یافته می پردازیم. توزیع بتای تعمیم یافته در سال ۱۹۸۸ توسط سینگ^۱ و همکاران به عنوان کلاس توانمندی از خانواده توزیع های تعمیم یافته معرفی شد. این کلاس در سال های اخیر توجه قابل ملاحظه ای را به خود جلب کرده است. تابع توزیع متغیر تصادفی بتا با پارامتر $a > 0$ و $b > 0$ ، را به صورت زیر در نظر بگیرید،

$$F(t) = \frac{1}{B(a, b)} \int_0^t w^{a-1} (1-w)^{b-1} dw, 0 < t < 1.$$

با توجه به این که هر تابع توزیع تجمعی دلخواه بین $(0, 1)$ قرار دارد، از این رو با جایگزین کردن تابع توزیع تجمعی دلخواه $G(\cdot)$ به جای t خواهیم داشت:

$$F(t) = \frac{1}{B(a, b)} \int_0^{G(t)} w^{a-1} (1-w)^{b-1} dw, 0 < G(t) < 1.$$

با مشتق گیری نسبت به t از رابطه فوق، داریم

$$f(t) = \frac{1}{B(a, b)} G(t)^{a-1} (1-G(t))^{b-1} g(t), 0 < t < 1.$$

حال نشان می دهیم تابع $f(t)$ خود یک تابع چگالی احتمال است، یعنی

$$\int_0^1 f(t) dt = 1.$$

با تغییر متغیر $u = G(t)$ و با توجه به تعریف ۳.۳.۱، داریم

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(t) dt &= \frac{1}{B(a, b)} \int_0^1 G(t)^{a-1} (1-G(t))^{b-1} g(t) dt \\ &= \frac{1}{B(a, b)} \int_0^1 u^{a-1} (1-u)^{b-1} du \\ &= \frac{B(a, b)}{B(a, b)} = 1. \end{aligned}$$

بنابراین $f(t)$ خود یک تابع چگالی احتمال است. در نتیجه با توجه به عبارات فوق، تابع توزیع و تابع چگالی توزیع بتای تعمیم یافته را به صورت زیر بیان می کنیم

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{1}{B(a, b)} \int_0^{G(t)} w^{a-1} (1-w)^{b-1} dw \\ &= \frac{B_{G(t)}(a, b)}{B(a, b)} = I_{G(t)}(a, b), \quad a, b > 0, \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$f(t) = \frac{1}{B(a, b)} G(t)^{a-1} (1-G(t))^{b-1} g(t), \quad (2.3)$$

^۱Singh

که در آن $G(t)$ یک تابع توزیع تجمعی دلخواه پایه، $B_{G(t)}(a, b)$ تابع بتای ناقص و $I_{G(t)}(a, b)$ ضریب تابع بتای ناقص می باشد. همچنین $g(t) = dG(t)/dt$ تابع چگالی احتمال توزیع دلخواه و پایه است. لذا چنانچه فرض کنیم که $G(t)$ تابع توزیع تجمعی وایبل تعمیم یافته (وایبل نمایی شده) باشد، تابع توزیع بتا وایبل تعمیم یافته حاصل می شود.

توزیع وایبل تعمیم یافته در سال ۱۹۹۳ توسط مودهوکار و همکارانش معرفی شد. خانواده توزیع های وایبل تعمیم یافته به منظور تحلیل داده های با نرخ شکست سهمی شکل، در مواردی مانند داده های نرخ شکست موتور اتوبوس، داده های مربوط به آزمایش بالینی سرطان سر و گردن (مودهوکار و سریواستاوا^۱، ۱۹۹۵) و داده های مربوط به سیل (مودهوکار و هاتسون^۲، ۱۹۹۶) مورد استفاده قرار گرفته است. توزیع وایبل تعمیم یافته با دو پارامتر شکل $\alpha, \beta > 0$ و پارامتر مقیاس $\lambda > 0$ به صورت زیر است

$$G_{GW}(t) = (1 - e^{-(\lambda t)^\beta})^\alpha, t > 0, \alpha > 0, \beta > 0, \lambda > 0. \quad (3.3)$$

و تابع چگالی این توزیع به شکل زیر، داریم

$$g_{GW}(t) = \alpha \beta \lambda^\beta t^{\beta-1} (1 - e^{-(\lambda t)^\beta})^{\alpha-1} e^{-(\lambda t)^\beta}, t > 0, \alpha > 0, \beta > 0, \lambda > 0. \quad (4.3)$$

حال با قرار دادن (۳.۳) و (۴.۳) در (۱.۳) و (۲.۳)، تابع توزیع و تابع چگالی توزیع بتا وایبل تعمیم یافته، به ترتیب، به صورت زیر به دست می آیند:

$$F(t) = \frac{1}{B(a, b)} \int_0^{(1 - e^{-(\lambda t)^\beta})^\alpha} w^{a-1} (1 - w)^{b-1} dw, t > 0, a, b, \alpha, \beta > 0, \lambda > 0, \quad (5.3)$$

$$f(t) = \frac{\alpha \beta \lambda^\beta t^{\beta-1}}{B(a, b)} (1 - e^{-(\lambda t)^\beta})^{\alpha a-1} \left\{ 1 - (1 - e^{-(\lambda t)^\beta})^\alpha \right\}^{b-1} e^{-(\lambda t)^\beta}, t > 0. \quad (6.3)$$

بنابراین، اگر T یک متغیر تصادفی با تابع چگالی به صورت (۶.۳) باشد، می نویسیم $T \sim BGW(a, b, \lambda, \alpha, \beta)$ تابع قابلیت اطمینان توزیع بتا وایبل تعمیم یافته نیز، با توجه به قضیه ۶.۳.۱ به شکل زیر است.

$$\begin{aligned} R(t) &= 1 - F(t) = 1 - \frac{1}{B(a, b)} \int_0^{(1 - e^{-(\lambda t)^\beta})^\alpha} w^{a-1} (1 - w)^{b-1} dw \\ &= \frac{1}{B(a, b)} \int_{(1 - e^{-(\lambda t)^\beta})^\alpha}^1 w^{a-1} (1 - w)^{b-1} dw \\ &= \frac{1}{B(a, b)} \int_0^{1 - (1 - e^{-(\lambda t)^\beta})^\alpha} w^{b-1} (1 - w)^{a-1} dw \\ &= \frac{B_{\{1 - (1 - e^{-(\lambda t)^\beta})^\alpha\}}(b, a)}{B(a, b)} = \frac{B_{\{1 - (1 - e^{-(\lambda t)^\beta})^\alpha\}}(b, a)}{B(b, a)} \\ &= I_{\{1 - (1 - e^{-(\lambda t)^\beta})^\alpha\}}(b, a). \end{aligned} \quad (7.3)$$

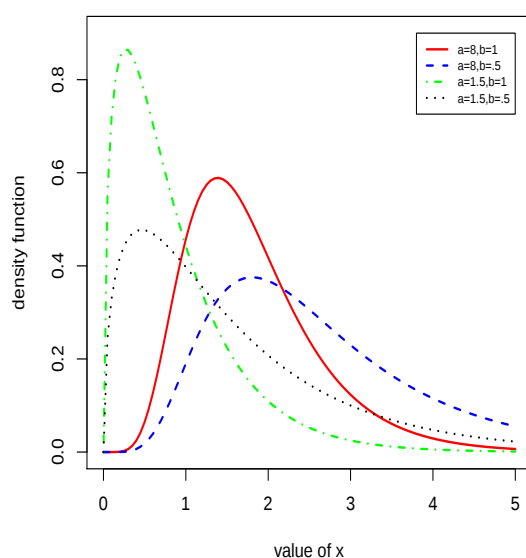
^۱Mudholkar and Srivastava

^۲Mudholkar and Hutson

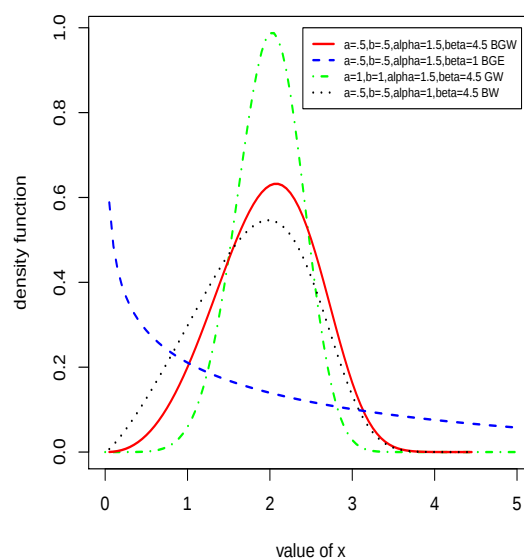
با توجه به تابع قابلیت اطمینان (۷.۳) و تابع چگالی (۶.۳) و تعریف ۲.۲.۱، تابع نرخ شکست این توزیع به صورت زیر حاصل می شود

$$h(t) = \frac{\alpha\beta\lambda^\beta t^{\beta-1} e^{-(\lambda t)^\beta}}{B(a,b)I_{\{1-(1-e^{-(\lambda t)^\beta})^\alpha\}}(b,a)} (1-e^{-(\lambda t)^\beta})^{a\alpha-1} \left\{1-(1-e^{-(\lambda t)^\beta})^\alpha\right\}^{b-1}. \quad (۸.۳)$$

اضافه کردن پارامترهای جدید در کنترل کشیدگی و وزن دم ها به ما کمک می کند. برای درک بهتر، نمودار تابع چگالی و تابع نرخ شکست توزیع بتا وایبل تعمیم یافته به ازای برخی مقادیر پارامتری در شکل های ۱.۳ و ۲.۳ به ترتیب نمایش داده شده اند.



(الف)



(ب)

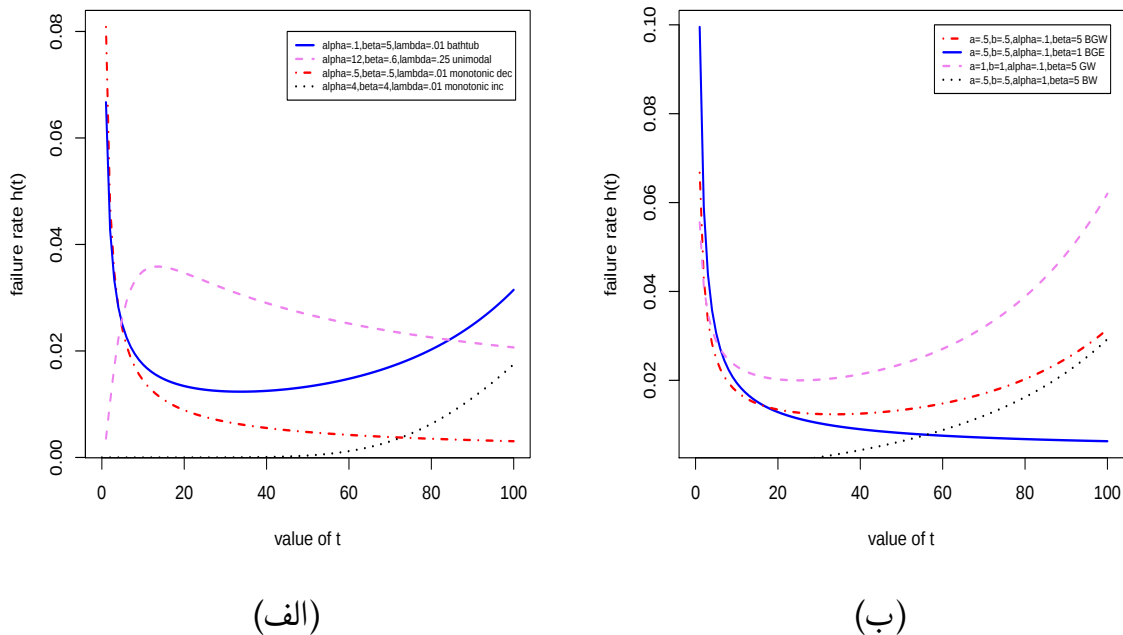
شکل ۱.۳: نمودار تابع چگالی BGW با پارامترهای ثابت الف: $\lambda = 1/5$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$ و ب: $\lambda = 0/5$.

مشاهده می شود که توزیع بتا وایبل تعمیم یافته برای ترکیب های مختلف پارامتری، انواع توابع نرخ شکست سهمی شکل، سهمی وارونه و یکنوا را در بر می گیرد. همان طور که در ابتدای فصل اشاره شد، توزیع بتا وایبل تعمیم یافته، برخی توزیع ها را به عنوان زیرمدل هایش به صورت یکپارچه بیان می کند، که به قرار زیر است:

۱. به ازای $\beta = 1$ ، توزیع بتا نمایی تعمیم یافته^۱ ($BGE(a, b, \lambda, \alpha)$) حاصل می شود، (سوزا^۲ و همکاران، ۲۰۱۰).

^۱Beta generalized exponential

^۲Souza



شکل ۲.۳: نمودار تابع نرخ شکست BGW به ازای برخی مقادیر پارامتری

۲. اگر $a = b = 1$ توزیع وایبل تعمیم یافته (GW) به دست می آید، و علاوه بر این، اگر $\beta = 2$ ، توزیع ریلی تعمیم یافته (GR) نتیجه می شود.

۳. توزیع بتا وایبل^۱ (BW) نیز، حالت خاصی از توزیع بتا وایبل تعمیم یافته با $\alpha = 1$ می باشد که توسط لی^۲ و همکارانش در سال ۲۰۰۷ معرفی گردید.

۴. گوپتا و کوندو توزیع نمایی تعمیم یافته (GE) را معرفی کردند، که با فرض $a = b = \beta = 1$ ، به دست می آید.

۵. با قرار دادن $\alpha = \beta = 1$ در (۶.۳)، توزیع بتای نمایی^۳ (BE) را داریم که توسط ناداراجا و کوتز^۴ (۲۰۰۶) معرفی شد.

۶. برای $a = b = \alpha = 1$ ، توزیع وایبل با پارامتر λ و β به دست می آید و اگر $\beta = 2$ نیز برقرار باشد، توزیع ریلی را داریم.

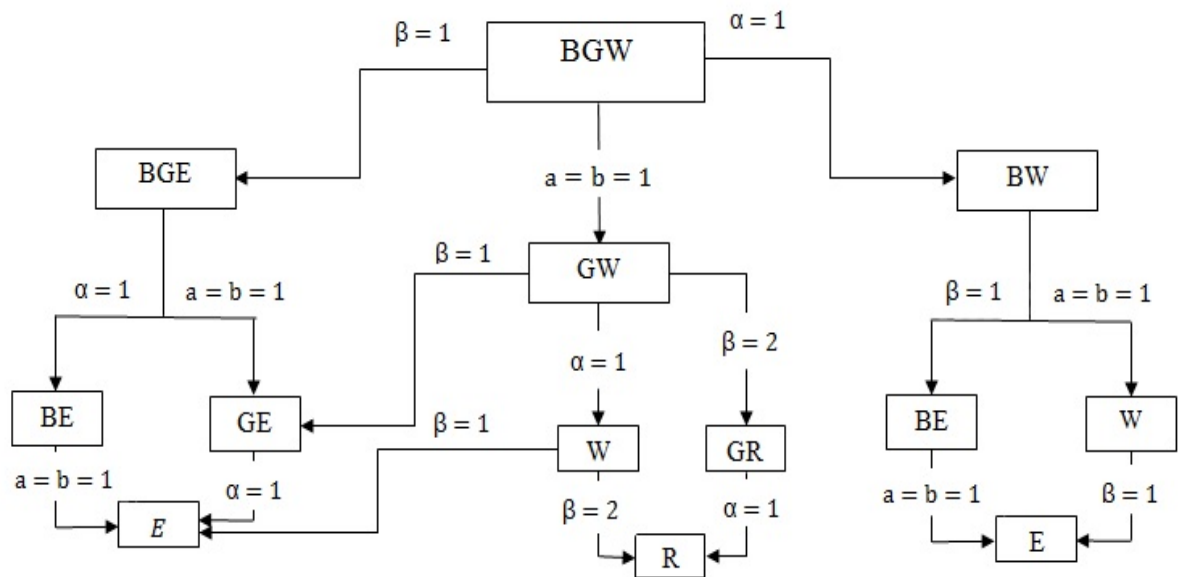
موارد خاص اشاره شده در بالا به صورت یک نمودار درختی در شکل ۳.۳ به تصویر کشیده شده اند.

^۱Beta Weibull

^۲Lee

^۳Beta exponential

^۴Nadarajah and Kotz



شکل ۳.۳: زیرمدل‌های توزیع BGW

۳.۳ برخی از نتایج برای تابع توزیع تجمعی و تابع چگالی

در مسائل کاربردی ممکن است، علاقه‌مند به محاسبه تابع قابلیت اطمینان (تابع احتمال بقا) به‌طور مستقیم یا از طریق تابع توزیع تجمعی باشیم. از این‌رو، نمایش صورت‌های مختلف تابع توزیع تجمعی، تابع قابلیت اطمینان و تابع چگالی در کاربردهای عددی سودمند خواهند بود. در این بخش برخی صورت‌های جایگزین برای تابع توزیع تجمعی و تابع چگالی توزیع بتای تعمیم یافته وایبل را بیان می‌کنیم. صورت‌های خاص قضیه ۱۰.۳.۱ را به‌صورت زیر در نظر بگیرید.

$$(1-z)^{b-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \Gamma(b)}{\Gamma(b-j) \Gamma(j+1)} z^j, \quad (9.3)$$

که در آن b یک مقدار مثبت حقیقی غیر صحیح و $|z| < 1$ است و برای b صحیح،

$$(1-z)^{b-1} = \sum_{j=0}^{b-1} \frac{(-1)^j \Gamma(b)}{\Gamma(b-j) \Gamma(j+1)} z^j.$$

قضیه زیر نشان می‌دهد که تابع توزیع تجمعی (چگالی) بتای تعمیم یافته وایبل را می‌توان به‌صورت مجموع وزنی نامتناهی (متناهی برای b صحیح)، از تابع توزیع تجمعی (تابع چگالی) توزیع وایبل تعمیم یافته، بیان کرد.

قضیه ۱.۳.۳. فرض کنید $G_{\lambda, \beta, \alpha(a+j)}(t)$ و $g_{\lambda, \beta, \alpha(a+j)}(t)$ به ترتیب تابع توزیع و تابع چگالی احتمال وایبل تعمیم یافته بیان شده در رابطه (۳.۳) و (۴.۳) با پارامتر مقیاس λ و پارامتر شکل β و $\alpha(a+j)$ بوده و هم چنین $\omega_j = \frac{(-1)^j \Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b-j)\Gamma(j+1)(a+j)}$ وزن ساده باشد. در این صورت

(الف) برای مقدار حقیقی و غیر صحیح $b > 0$:

(۱)

$$F(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \omega_j G_{\lambda, \beta, \alpha(a+j)}(t),$$

(۲)

$$f(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \omega_j g_{\lambda, \beta, \alpha(a+j)}(t),$$

(۳)

$$f(t) = \frac{\alpha \beta \lambda^\beta t^{\beta-1}}{B(a, b)} e^{-(\lambda t)^\beta} G_{\lambda, \beta, a\alpha-1}(t) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \Gamma(b)}{\Gamma(b-j)j!} G_{\lambda, \beta, \alpha j}(t).$$

(ب) برای a و b در حالت کلی و تابع فوق هندسی ${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_i (\beta)_i}{(\gamma)_i i!} t^i$

(۱) تابع توزیع

$$F(t) = \frac{1}{B(a, b)} \frac{(G(t))^a}{a} {}_2F_1(a, 1-b; a+1; G(t)),$$

(۲) تابع قابلیت اطمینان

$$R(t) = \frac{1}{B(a, b)} \frac{(1-G(t))^b}{b} {}_2F_1(b, 1-a; b+1; 1-G(t)).$$

(پ) برای نمونه تصادفی با اندازه n ، تابع چگالی آماره ترتیبی i ام را به شکل زیر داریم

$$\begin{aligned} f_{i:n}(t) &= \frac{1}{B(i, n-i+1)} \frac{\alpha \beta \lambda^\beta t^{\beta-1}}{(B(a, b))^n} \frac{e^{-(\lambda t)^\beta}}{a^{i-1} b^{n-i}} G_{\lambda, \beta, a\alpha-1}(t) \\ &\times (1 - G_{\lambda, \beta, \alpha}(t))^{b(1+n-i)-1} \cdot G_{\lambda, \beta, \alpha a(i-1)}(t) \\ &\times \{ {}_2F_1(a, 1-b; a+1; G_{\lambda, \beta, \alpha}(t)) \}^{i-1} \\ &\times \{ {}_2F_1(b, 1-a; b+1; 1-G_{\lambda, \beta, \alpha}(t)) \}^{n-i}. \end{aligned}$$

رابطه بیان شده در (الف)، به دلیل نتیجه گرفتن مستقیم برخی خواص توزیع BGW از خواص مربوط به توزیع GW ، اهمیت دارد. قضیه فوق هم چنین نشان می دهد که تابع توزیع تجمعی $F(t)$ ، تابع قابلیت اطمینان $R(t)$ ، و تابع چگالی آماره ترتیبی مرتبه i ام را می توان به صورت عباراتی از تابع فوق هندسی بیان کرد.

برهان. الف) با استفاده از رابطه (۹.۳) در (۵.۳) داریم

(۱)

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{1}{B(a, b)} \int_0^{(1-e^{-(\lambda t)^\beta})^\alpha} w^{a-1} (1-w)^{b-1} dw \\ &= \frac{1}{B(a, b)} \int_0^{(1-e^{-(\lambda t)^\beta})^\alpha} w^{a-1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(b)(-1)^j}{\Gamma(b-j)\Gamma(j+1)} w^j \\ &= \frac{\Gamma(b)}{B(a, b)} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^j}{\Gamma(b-j)\Gamma(j+1)} \int_0^{(1-e^{-(\lambda t)^\beta})^\alpha} w^{a+j-1} dw \right) \\ &= \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{\Gamma(b-j)\Gamma(j+1)} \left(\frac{w^{a+j}}{a+j} \Big|_0^{(1-e^{-(\lambda t)^\beta})^\alpha} \right) \\ &= \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{\Gamma(b-j)\Gamma(j+1)} \frac{(1-e^{-(\lambda t)^\beta})^{\alpha(a+j)}}{(a+j)}. \end{aligned}$$

همان طور که می دانیم با توجه به (۳.۳)، $G_{\lambda, \beta, \alpha(a+j)} = (1 - e^{-(\lambda t)^\beta})^{\alpha(a+j)}$ از این رو تابع توزیع تجمعی بتای تعمیم یافته، به صورت ترکیب خطی موزون توزیع وایبل تعمیم یافته به صورت زیر قابل نمایش است.

$$F(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \omega_j G_{\lambda, \beta, \alpha(a+j)}(t).$$

(۲) با مشتق گیری از رابطه الف قسمت ۱، نتیجه مورد نظر به صورت زیر حاصل می شود

$$f(t) = \frac{\partial F(t)}{\partial t} = \sum_{j=0}^{\infty} \omega_j g_{\lambda, \beta, \alpha(a+j)}(t).$$

(۳) با استفاده از روابط (۹.۳) و (۳.۳) در تابع چگالی بتا وایبل تعمیم یافته، داریم

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{\alpha \beta \lambda^\beta t^{\beta-1}}{B(a, b)} e^{-(\lambda t)^\beta} (1 - e^{-(\lambda t)^\beta})^{a\alpha-1} \left\{ 1 - (1 - e^{-(\lambda t)^\beta})^\alpha \right\}^{b-1} \\ &= \frac{\alpha \beta \lambda^\beta t^{\beta-1}}{B(a, b)} e^{-(\lambda t)^\beta} (1 - e^{-(\lambda t)^\beta})^{a\alpha-1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(b)(-1)^j}{\Gamma(b-j)\Gamma(j+1)} (1 - e^{-(\lambda t)^\beta})^{\alpha j} \\ &= \frac{\alpha \beta \lambda^\beta t^{\beta-1}}{B(a, b)} e^{-(\lambda t)^\beta} G_{\lambda, \beta, a\alpha-1}(t) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(b)(-1)^j}{\Gamma(b-j)\Gamma(j+1)} G_{\lambda, \beta, \alpha j}(t). \end{aligned}$$

ب) برای a و b در حالت کلی و با استفاده از رابطه (۱.۳) نتیجه می شود،

(۱) با توجه به رابطه تابع بتای ناقص و تابع فوق هندسی، داریم

$$\int_0^{G(t)} w^{a-1} (1-w)^{b-1} dw = \frac{(G(t))^a}{a} {}_2F_1(a, 1-b; a+1; G(t)).$$

حال با در نظر گرفتن تابع توزیع بتای تعمیم یافته، داریم

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{1}{B(a, b)} \int_0^{G(t)} w^{a-1} (1-w)^{b-1} dw \\ &= \frac{1}{B(a, b)} \frac{(G(t))^a}{a} {}_2F_1(a, 1-b; a+1; G(t)). \end{aligned}$$

(۲) تابع قابلیت اطمینان را با توجه به (۷.۳) و تعریف ۷.۳.۱ به صورت زیر محاسبه می کنیم.

$$\begin{aligned} R(t) &= 1 - \frac{1}{B(a, b)} \int_0^{G(t)} w^{a-1} (1-w)^{b-1} dw \\ &= \frac{1}{B(a, b)} \int_0^{1-G(t)} w^{b-1} (1-w)^{a-1} dw \\ &= \frac{1}{B(a, b)} \frac{(1-G(t))^b}{b} {}_2F_1(b, 1-a; b+1; 1-G(t)), \end{aligned}$$

به طوری که $G(t)$ تابع توزیع وایبل تعمیم یافته معرفی شده در (۳.۳) است.

(پ) با توجه به تعریف ۱.۴.۱، تابع چگالی آماره ترتیبی مرتبه i ام توزیع بتای وایبل تعمیم یافته، با جایگزین کردن تابع چگالی احتمال (۶.۳) و استفاده از (۴.۳) و قسمت (ب) قضیه فوق، به صورت زیر حاصل می شود.

$$\begin{aligned} f_{i:n}(t) &= \frac{1}{B(i, n-i+1)} f(t) (F(t))^{i-1} (1-F(t))^{n-i} \\ &= \frac{1}{B(i, n-i+1)} \frac{\alpha \beta \lambda^\beta t^{\beta-1}}{B(a, b)} (1 - e^{-(\lambda t)^\beta})^{a\alpha-1} \{1 - (1 - e^{-(\lambda t)^\beta})^\alpha\}^{b-1} e^{-(\lambda t)^\beta} \\ &\quad \times \left\{ \frac{1}{B(a, b)} \frac{(G_{\lambda, \beta, \alpha}(x))^a}{a} {}_2F_1(a, 1-b; a+1; G_{\lambda, \beta, \alpha}(t)) \right\}^{i-1} \\ &\quad \times \left\{ \frac{1}{B(a, b)} \frac{(1 - G_{\lambda, \beta, \alpha}(t))^b}{b} {}_2F_1(b, 1-a; b+1; 1 - G_{\lambda, \beta, \alpha}(t)) \right\}^{n-i} \\ &= \frac{1}{B(i, n-i+1)} \frac{\alpha \beta \lambda^\beta t^{\beta-1}}{(B(a, b))^n a^{i-1} b^{n-i}} e^{-(\lambda t)^\beta} G_{\lambda, \beta, a\alpha-1}(t) (1 - G_{\lambda, \beta, \alpha}(t))^{b-1} \\ &\quad \times \left\{ (G_{\lambda, \beta, \alpha}(t))^a {}_2F_1(a, 1-b; a+1; G_{\lambda, \beta, \alpha}(t)) \right\}^{i-1} \\ &\quad \times \left\{ (1 - G_{\lambda, \beta, \alpha}(t))^b {}_2F_1(b, 1-a; b+1; 1 - G_{\lambda, \beta, \alpha}(t)) \right\}^{n-i} \\ &= \frac{1}{B(i, n-i+1)} \frac{\alpha \beta \lambda^\beta t^{\beta-1}}{(B(a, b))^n a^{i-1} b^{n-i}} e^{-(\lambda t)^\beta} G_{\lambda, \beta, a\alpha-1}(t) (1 - G_{\lambda, \beta, \alpha}(t))^{b(1+n-i)-1} \\ &\quad \times (G_{\lambda, \beta, a\alpha(i-1)}(t)) \left\{ {}_2F_1(a, 1-b; a+1; G_{\lambda, \beta, \alpha}(t)) \right\}^{i-1} \\ &\quad \times \left\{ {}_2F_1(b, 1-a; b+1; 1 - G_{\lambda, \beta, \alpha}(t)) \right\}^{n-i}. \end{aligned}$$

□

نکته ۲.۳.۳. با توجه به (۹.۳)، وقتی b صحیح باشد، مجموع در $b - 1$ به اتمام می‌رسد. یعنی برای بخش اول قضیه ۱.۳.۳، به ازای b صحیح داریم:

(۱)

$$F(t) = \sum_{j=0}^{b-1} \omega_j G_{\lambda, \beta, \alpha(a+j)}(t),$$

(۲)

$$f(t) = \sum_{j=0}^{b-1} \omega_j g_{\lambda, \beta, \alpha(a+j)}(t),$$

(۳)

$$f(t) = \frac{\alpha \beta \lambda^\beta t^{\beta-1}}{B(a, b)} e^{-(\lambda t)^\beta} G_{\lambda, \beta, \alpha a-1}(t) \sum_{j=0}^{b-1} \frac{(-1)^j \Gamma(b)}{\Gamma(b-j) j!} G_{\lambda, \beta, \alpha j}(t).$$

۴.۳ گشتاورهای توزیع بتا وایبل تعمیم یافته

در این بخش، روابطی را برای گشتاور مرتبه k ام ارائه می‌دهیم. گشتاورهای مراتب مختلف، در تعیین زمان بقا مورد انتظار، پراکندگی، چولگی و کشیدگی در مجموعه مشاهدات حاصل از کاربردهای قابلیت اطمینان، مفید خواهند بود. با استفاده از تعریف گشتاور مرتبه k ام داریم

$$E(T^k) = \int_0^\infty t^k f(t) dt = \int_0^\infty t^k \frac{\alpha \beta \lambda^\beta t^{\beta-1}}{B(a, b)} (1 - e^{-(\lambda t)^\beta})^{\alpha a-1} \times \left\{ 1 - (1 - e^{-(\lambda t)^\beta})^\alpha \right\}^{b-1} e^{-(\lambda t)^\beta} dt, \quad k \geq 1.$$

با اعمال تغییر متغیر $y = (\lambda t)^\beta$ و با استفاده از رابطه (۹.۳)، می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} E(T^k) &= \int_0^\infty \frac{\alpha}{B(a, b)} \left(\frac{1}{\lambda} y^{\frac{1}{\beta}} \right)^k (1 - e^{-y})^{\alpha a-1} \left\{ 1 - (1 - e^{-y})^\alpha \right\}^{b-1} e^{-y} dy \\ &= \int_0^\infty \frac{\alpha}{B(a, b)} \left(\frac{1}{\lambda} y^{\frac{1}{\beta}} \right)^k (1 - e^{-y})^{\alpha a-1} e^{-y} \sum_{j=0}^\infty \frac{\Gamma(b)(-1)^j}{\Gamma(j+1)\Gamma(b-j)} (1 - e^{-y})^{\alpha j} dy \\ &= \frac{\alpha \Gamma(b)}{B(a, b)} \left[\sum_{j=0}^\infty \left(\frac{(-1)^j}{\Gamma(b-j)j!} \int_0^\infty \left(\frac{1}{\lambda} y^{\frac{1}{\beta}} \right)^k (1 - e^{-y})^{\alpha(a+j)-1} e^{-y} dy \right) \right] \\ &= \frac{\alpha \Gamma(b)}{B(a, b)} \left[\sum_{j=0}^\infty \left(\frac{(-1)^j}{\Gamma(b-j)j!} \int_0^\infty \left(\frac{1}{\lambda} y^{\frac{1}{\beta}} \right)^k (1 - e^{-y})^\delta e^{-y} dy \right) \right], \end{aligned}$$

که در آن $\delta = \alpha(a+j) - 1$

با توجه به بسط دوجمله‌ای بیان شده در رابطه (۹.۳)

$$(1 - e^{-y})^\delta = \sum_{i=0}^\infty \frac{\Gamma(\delta+1)}{\Gamma(\delta-i+1)i!} (-1)^i e^{-yi},$$

و با تعریف a_i به صورت

$$a_i = \frac{\Gamma(\delta + 1)}{\Gamma(\delta - i + 1)i!}(-1)^i = \frac{\delta(\delta - 1) \cdots (\delta - i + 1)}{i!}(-1)^i, \quad (10.3)$$

نتیجه می گیریم

$$\begin{aligned} E(T^k) &= \frac{\alpha\Gamma(b)}{B(a, b)\lambda^k} \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^j}{\Gamma(b-j)j!} \int_0^{\infty} (y)^{\frac{k}{\beta}} \sum_{i=0}^{\infty} a_i e^{-yi} e^{-y} dy \right] \\ &= \frac{\alpha\Gamma(b)}{B(a, b)\lambda^k} \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^j}{\Gamma(b-j)j!} \int_0^{\infty} (y)^{\frac{k}{\beta}} \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i e^{-yi} \right) e^{-y} dy \right] \\ &= \frac{\alpha\Gamma(b)}{B(a, b)\lambda^k} \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^j}{\Gamma(b-j)j!} \left(\int_0^{\infty} (y)^{\frac{k}{\beta}} e^{-y} dy + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \int_0^{\infty} (y)^{\frac{k}{\beta}} e^{-y(i+1)} dy \right) \right]. \end{aligned}$$

در نهایت با استفاده از تعریف ۲.۳.۱ گشتاور مرتبه k ام به صورت زیر حاصل می شود

$$\begin{aligned} E(T^k) &= \frac{\alpha\Gamma(b)}{B(a, b)\lambda^k} \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^j}{\Gamma(b-j)j!} \left(\Gamma\left(\frac{k}{\beta} + 1\right) + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \frac{\Gamma\left(\frac{k}{\beta} + 1\right)}{(i+1)^{\left(\frac{k}{\beta} + 1\right)}} \right) \right] \\ &= \frac{\alpha\Gamma(b)}{B(a, b)\lambda^k} \Gamma\left(\frac{k}{\beta} + 1\right) \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^j}{\Gamma(b-j)j!} \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i (i+1)^{-\left(\frac{k}{\beta} + 1\right)} \right) \right]. \end{aligned} \quad (11.3)$$

رابطه (۱۱.۳)، حالت کلی برای گشتاور مرتبه k ام توزیع BGW را ارائه می دهد.

موارد خاص

$$\bullet \quad a = b = 1,$$

با توجه به رابطه تابع چگالی به صورت

$$f(t) = \alpha\beta\lambda^{\beta}t^{\beta-1}(1 - e^{-(\lambda t)^{\beta}})^{\alpha-1}e^{-(\lambda t)^{\beta}},$$

گشتاور مرتبه k ام توزیع وایبل تعمیم یافته به صورت زیر حاصل می شود

$$E(T^k) = \int_0^{\infty} t^k \alpha\beta\lambda^{\beta}t^{\beta-1}(1 - e^{-(\lambda t)^{\beta}})^{\alpha-1}e^{-(\lambda t)^{\beta}} dt, \quad k \geq 1.$$

با اعمال تغییر متغیر $y = (\lambda t)^{\beta}$

$$dy = \beta\lambda^{\beta}t^{\beta-1}dt, \quad t = \frac{1}{\lambda}y^{\frac{1}{\beta}},$$

و استفاده از رابطه (۹.۳)، می توان نوشت

$$\begin{aligned} E(T^k) &= \alpha \int_0^1 \left(\frac{1}{\lambda} y^{\frac{1}{\beta}}\right)^k (1 - e^{-y})^{\alpha-1} e^{-y} dy \\ &= \frac{\alpha}{\lambda^k} \int_0^{\infty} y^{\frac{k}{\beta}} e^{-y} \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\alpha-1}{i} (-1)^i e^{-iy} dy \\ &= \frac{\alpha}{\lambda^k} \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\alpha-1}{i} (-1)^i \int_0^{\infty} y^{\frac{k}{\beta}} e^{-y(i+1)} dy. \end{aligned}$$

با استفاده از تعریف ۲.۳.۱، گشتاور توزیع وایبل تعمیم یافته حاصل می شود که در فصل دو نیز با استفاده از تبدیل لاپلاس این نتیجه به دست آمده است. بنابراین

$$E(T^k) = \frac{\alpha}{\lambda^k} \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\alpha-1}{i} (-1)^i \frac{\Gamma(\frac{k}{\beta} + 1)}{(i+1)^{\frac{k}{\beta}+1}}.$$

$$\bullet, a = b = \alpha = 1$$

در این صورت توزیع وایبل حاصل می شود که گشتاور آن به شکل زیر است

$$E(T^k) = \int_0^{\infty} t^k \beta \lambda^{\beta} t^{\beta-1} e^{-(\lambda t)^{\beta}} dt.$$

با تغییر متغیر $y = (\lambda t)^{\beta}$ و با استفاده از تعریف ۲.۳.۱،

$$E(T^k) = \frac{1}{\lambda^k} \int_0^{\infty} y^{\frac{k}{\beta}} e^{-y} dy = \frac{1}{\lambda^k} \Gamma\left(\frac{k}{\beta} + 1\right).$$

$$\bullet, \alpha = 1$$

گشتاور توزیع بتا وایبل را به شکل زیر داریم

$$E(T^k) = \frac{1}{B(a, b)} \int_0^{\infty} t^k \beta \lambda^{\beta} t^{\beta-1} e^{-b(\lambda t)^{\beta}} (1 - e^{-(\lambda t)^{\beta}})^{a-1} dt.$$

با تغییر متغیر $y = (\lambda t)^{\beta}$ و با استفاده از (۹.۳)،

$$\begin{aligned} E(T^k) &= \frac{1}{B(a, b)} \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda} y^{\frac{1}{\beta}}\right)^k e^{-by} (1 - e^{-y})^{a-1} dy \\ &= \frac{1}{B(a, b) \lambda^k} \int_0^{\infty} y^{\frac{k}{\beta}} e^{-by} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a-j) \Gamma(j+1)} (-1)^j e^{-yj} dy \\ &= \frac{\Gamma(a)}{B(a, b) \lambda^k} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{\Gamma(a-j) \Gamma(j+1)} \int_0^{\infty} y^{\frac{k}{\beta}} e^{-(b+j)y} dy \\ &= \frac{\Gamma(a)}{B(a, b) \lambda^k} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{\Gamma(a-j) \Gamma(j+1)} \frac{\Gamma(\frac{k}{\beta} + 1)}{(b+j)^{\frac{k}{\beta}+1}}. \end{aligned}$$

حالت کلی گشتاور مرتبه k ام توزیع بتا وایبل تعمیم یافته را می توان با استفاده از تبدیل لاپلاس نیز محاسبه کرد. با توجه به تعریف ارائه شده در ۸.۳.۱، تبدیل لاپلاس توزیع بتا وایبل تعمیم یافته را به صورت

زیر داریم

$$L(s) = \int_0^\infty e^{-ts} \frac{\alpha \beta \lambda^\beta t^{\beta-1}}{B(a, b)} (1 - e^{-(\lambda t)^\beta})^{a\alpha-1} \left\{ 1 - (1 - e^{-(\lambda t)^\beta})^\alpha \right\}^{b-1} e^{-(\lambda t)^\beta} dt.$$

با توجه به رابطه (۹.۳) و با تغییر متغیر $\nu = e^{-(\lambda t)^\beta}$ ، نتیجه زیر حاصل می شود

$$\begin{aligned} L(s) &= \int_0^1 \frac{\alpha}{B(a, b)} e^{-s\{\frac{1}{\lambda}(-\log \nu)^{\frac{1}{\beta}}\}} (1 - \nu)^{a\alpha-1} \left\{ 1 - (1 - \nu)^\alpha \right\}^{b-1} d\nu \\ &= \int_0^1 \frac{\alpha}{B(a, b)} e^{-s\{\frac{1}{\lambda}(-\log \nu)^{\frac{1}{\beta}}\}} (1 - \nu)^{a\alpha-1} \left[\sum_{j=0}^\infty \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-j)j!} (-1)^j (1 - \nu)^{\alpha j} \right] d\nu \\ &= \frac{\alpha \Gamma(b)}{B(a, b)} \sum_{j=0}^\infty \left(\frac{(-1)^j}{\Gamma(b-j)j!} \int_0^1 e^{-s\{\frac{1}{\lambda}(-\log \nu)^{\frac{1}{\beta}}\}} (1 - \nu)^{\alpha(a+j)-1} d\nu \right). \end{aligned}$$

با جابه جایی انتگرال و مجموع، استفاده از رابطه (۹.۳) و با در نظر گرفتن بسط تیلور e^t ، می توان نوشت

$$\begin{aligned} L(s) &= \frac{\alpha \Gamma(b)}{B(a, b)} \sum_{j=0}^\infty \left[\frac{(-1)^j}{\Gamma(b-j)j!} \sum_{r=0}^\infty \left(\frac{(-s)^r (-1)^{\frac{r}{\beta}}}{\lambda^r r!} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \int_0^1 \left(1 + \sum_{i=1}^\infty a_i \nu^i \right) (\log \nu)^{\frac{r}{\beta}} d\nu \right) \right], \end{aligned}$$

$$.a_i = \frac{\delta(\delta-1)\dots(\delta-i+1)}{i!} (-1)^i \text{ در آن}$$

حال با قرار دادن $I = \int_0^1 (1 + \sum_{i=1}^\infty a_i \nu^i) (\log \nu)^{\frac{r}{\beta}} d\nu$ و با جایگزین کردن $\nu = e^{-y}$ ، نتیجه می گیریم

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 (1 + \sum_{i=1}^\infty a_i \nu^i) (\log \nu)^{\frac{r}{\beta}} d\nu \\ &= \int_0^1 (\log \nu)^{\frac{r}{\beta}} d\nu + \sum_{i=1}^\infty \left(a_i \int_0^1 \nu^i (\log \nu)^{\frac{r}{\beta}} d\nu \right) \\ &= \int_0^\infty (-y)^{\frac{r}{\beta}} e^{-y} dy + \sum_{i=1}^\infty \left(a_i \int_0^\infty (-y)^{\frac{r}{\beta}} e^{-y(i+1)} dy \right) \\ &= (-1)^{\frac{r}{\beta}} \left[\Gamma\left(\frac{r}{\beta} + 1\right) + \sum_{i=1}^\infty \left(a_i \frac{\Gamma\left(\frac{r}{\beta} + 1\right)}{(i+1)^{(\frac{r}{\beta}+1)}} \right) \right] \\ &= (-1)^{\frac{r}{\beta}} \Gamma\left(\frac{r}{\beta} + 1\right) \left[1 + \sum_{i=1}^\infty a_i (i+1)^{-(\frac{r}{\beta}+1)} \right]. \end{aligned}$$

از این رو، با جایگزین کردن I در $L(s)$ داریم

$$\begin{aligned} L(s) &= \frac{\alpha \Gamma(b)}{B(a, b)} \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^j}{\Gamma(b-j)j!} \sum_{r=0}^{\infty} \left[\frac{(-s)^r (-1)^{\frac{r}{\beta}}}{\lambda^r r!} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times (-1)^{\frac{r}{\beta}} \Gamma\left(\frac{r}{\beta} + 1\right) \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i (i+1)^{-\left(\frac{r}{\beta} + 1\right)}\right) \right] \right\} \\ &= \frac{\alpha \Gamma(b)}{B(a, b)} \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^j}{\Gamma(b-j)j!} \sum_{r=0}^{\infty} \left[\frac{(-s)^r}{\lambda^r r!} \Gamma\left(\frac{r}{\beta} + 1\right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i (i+1)^{-\left(\frac{r}{\beta} + 1\right)}\right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

حال با توجه به رابطه تبدیل لاپلاس و گشتاور ارایه شده در تعریف ۸.۳.۱، نتیجه مورد نظر به صورت زیر حاصل می شود

$$\begin{aligned} E(T^k) &= (-1)^k \frac{d^k L(s)}{ds^k} \Big|_{s=0} = \frac{\alpha \Gamma(b)}{B(a, b) \lambda^k} \Gamma\left(\frac{k}{\beta} + 1\right) \\ &\quad \times \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^j}{\Gamma(b-j)j!} \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i (i+1)^{-\left(\frac{k}{\beta} + 1\right)}\right) \right], \end{aligned}$$

که همان رابطه (۱۱.۳) است.

بنابراین گشتاورها به یکی از دو روش ارائه شده در فوق قابل حصول می باشند.

۵.۳ برآورد و استنباط

در این بخش معادلات غیرخطی برای یافتن برآورد درستنمایی ماکسیمم پارامترها را به دست می آوریم. فرض کنید $T \sim BGW(a, b, \lambda, \alpha, \beta)$ و $\theta = (a, b, \lambda, \alpha, \beta)^T$ بردار پارامترها باشد. لگاریتم درستنمایی تک مشاهده t به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} l &= l(a, b, \lambda, \alpha, \beta) \\ &= \log \alpha + \log \beta + \beta \log \lambda + (\beta - 1) \log t - \log B(a, b) + (a\alpha - 1) \\ &\quad \times \log(1 - e^{-(\lambda t)^\beta}) + (b - 1) \log \{1 - (1 - e^{-(\lambda t)^\beta})^\alpha\} - (\lambda t)^\beta, \quad t > 0. \end{aligned}$$

در این صورت مولفه‌های بردار امتیاز $U = ((\partial l / \partial a), (\partial l / \partial b), (\partial l / \partial \lambda), (\partial l / \partial \alpha), (\partial l / \partial \beta))^T$ عبارتند از:

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial a} &= -\frac{1}{B(a, b)} \frac{\partial B(a, b)}{\partial a} + \alpha \log(1 - e^{-(\lambda t)^\beta}) \\ &= -\left(\frac{\frac{\Gamma'(a)\Gamma(b)\Gamma(a+b) - \Gamma'(a+b)\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma^2(a+b)}}{\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}} \right) + \alpha \log(1 - e^{-(\lambda t)^\beta}) \\ &= -\left(\frac{\Gamma'(a)\Gamma(b)\Gamma(a+b) - \Gamma'(a+b)\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(a+b)} \right) + \alpha \log(1 - e^{-(\lambda t)^\beta}) \\ &= \frac{\Gamma'(a+b)}{\Gamma(a+b)} - \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} + \alpha \log(1 - e^{-(\lambda t)^\beta}) \\ &= \psi(a+b) - \psi(a) + \alpha \log(1 - e^{-(\lambda t)^\beta}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial b} &= -\frac{1}{B(a, b)} \frac{\partial B(a, b)}{\partial b} + \log\{1 - (1 - e^{-(\lambda t)^\beta})^\alpha\} \\ &= -\left(\frac{\frac{\Gamma'(b)\Gamma(a)\Gamma(a+b) - \Gamma'(a+b)\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma^2(a+b)}}{\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}} \right) + \log\{1 - (1 - e^{-(\lambda t)^\beta})^\alpha\} \\ &= -\left(\frac{\Gamma'(b)\Gamma(a)\Gamma(a+b) - \Gamma'(a+b)\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(a+b)} \right) + \log\{1 - (1 - e^{-(\lambda t)^\beta})^\alpha\} \\ &= \frac{\Gamma'(a+b)}{\Gamma(a+b)} - \frac{\Gamma'(b)}{\Gamma(b)} + \log\{1 - (1 - e^{-(\lambda t)^\beta})^\alpha\} \\ &= \psi(a+b) - \psi(b) + \log\{1 - (1 - e^{-(\lambda t)^\beta})^\alpha\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial \lambda} &= \frac{\beta}{\lambda} + \frac{(a\alpha - 1)e^{-(\lambda t)^\beta} \beta (\lambda t)^{\beta-1} t}{(1 - e^{-(\lambda t)^\beta})} - \frac{(b-1)\alpha \beta (1 - e^{-(\lambda t)^\beta})^{\alpha-1} e^{-(\lambda t)^\beta} (\lambda t)^{\beta-1} t}{1 - (1 - e^{-(\lambda t)^\beta})^\alpha} \\ &\quad - \beta (\lambda t)^{\beta-1} t, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial l}{\partial \alpha} = \frac{1}{\alpha} + \alpha \log(1 - e^{-(\lambda t)^\beta}) - \frac{(b-1)(1 - e^{-(\lambda t)^\beta})^\alpha \log(1 - e^{-(\lambda t)^\beta})}{1 - (1 - e^{-(\lambda t)^\beta})^\alpha},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial \beta} &= \frac{1}{\beta} + \log \lambda + \log t + \frac{(a\alpha - 1)e^{-(\lambda t)^\beta} (\lambda t)^\beta \log(\lambda t)}{(1 - e^{-(\lambda t)^\beta})} \\ &\quad - \frac{(b-1)\alpha (1 - e^{-(\lambda t)^\beta})^{\alpha-1} e^{-(\lambda t)^\beta} (\lambda t)^\beta \log(\lambda t)}{1 - (1 - e^{-(\lambda t)^\beta})^\alpha} - (\lambda t)^\beta \log(\lambda t). \end{aligned}$$

با توجه به قسمت الف نتایج شرایط نظم، تعریف ۷.۴.۱، معادلات زیر را به ازای امید ریاضی بردار امتیاز، نتیجه می‌گیریم (از این روابط در محاسبه ماتریس اطلاع بیان شده در ۱.۴ استفاده خواهیم کرد):

۱.

$$E\left[\frac{\partial l}{\partial a}\right] = E\left[\psi(a+b) - \psi(a) + \alpha \log(1 - e^{-(\lambda t)^\beta})\right] = 0,$$

$$E\left[\log(1 - e^{-(\lambda t)^\beta})\right] = \frac{\psi(a) - \psi(a+b)}{\alpha}. \quad (**)$$

۲.

$$E\left[\frac{\partial l}{\partial b}\right] = E\left[\psi(a+b) - \psi(b) + \log\{1 - (1 - e^{-(\lambda t)^\beta})^\alpha\}\right] = 0,$$

$$E\left[\log\{1 - (1 - e^{-(\lambda t)^\beta})^\alpha\}\right] = \psi(b) - \psi(a+b).$$

۳.

$$E\left[\frac{\partial l}{\partial \alpha}\right] = E\left[\frac{1}{\alpha} + a \log(1 - e^{-(\lambda t)^\beta}) - \frac{(b-1)(1 - e^{-(\lambda t)^\beta})^\alpha \log(1 - e^{-(\lambda t)^\beta})}{1 - (1 - e^{-(\lambda t)^\beta})^\alpha}\right] = 0,$$

$$\frac{1}{\alpha} + aE\left[\log(1 - e^{-(\lambda t)^\beta})\right] - (b-1)E\left[\frac{(1 - e^{-(\lambda t)^\beta})^\alpha \log(1 - e^{-(\lambda t)^\beta})}{1 - (1 - e^{-(\lambda t)^\beta})^\alpha}\right] = 0,$$

با جای گذاری (** در تساوی ۳،

$$E\left[\frac{(1 - e^{-(\lambda t)^\beta})^\alpha \log(1 - e^{-(\lambda t)^\beta})}{1 - (1 - e^{-(\lambda t)^\beta})^\alpha}\right] = \frac{a(\psi(a) - \psi(a+b)) + 1}{\alpha(b-1)}.$$

قابل ذکر است که با توجه به تعریف ۵.۴.۱، برای یک نمونه تصادفی $x = (x_1, \dots, x_n)$ با اندازه n ، لگاریتم درستنمایی به صورت زیر به دست می آید

$$l_n = l_n(a, b, \lambda, \alpha, \beta) = \sum_{i=1}^n l^{(i)},$$

که $l^{(i)}$ لگاریتم درستنمایی مشاهده i ام برای $i = 1, \dots, n$ است. هم چنین تابع امتیاز یک نمونه تصادفی n تایی به صورت مجموع مولفه های بردار امتیاز به ازای هر مشاهده یعنی $U_n = \sum_{i=1}^n U^{(i)}$ حاصل می شود. برآورد درستنمایی ماکسیم $\hat{\theta}$ از حل عددی معادله غیر خطی $U_n = 0$ به دست می آید. ماتریس اطلاع 5×5 نیز برای آزمون فرضیه و برآورد بازه ای به شکل زیر می باشد،

$$K = K(\theta) = \begin{bmatrix} k_{a,a} & k_{a,b} & k_{a,\lambda} & k_{a,\alpha} & k_{a,\beta} \\ k_{a,b} & k_{b,b} & k_{b,\lambda} & k_{b,\alpha} & k_{b,\beta} \\ k_{a,\lambda} & k_{b,\lambda} & k_{\lambda,\lambda} & k_{\lambda,\alpha} & k_{\lambda,\beta} \\ k_{a,\alpha} & k_{b,\alpha} & k_{\lambda,\alpha} & k_{\alpha,\alpha} & k_{\alpha,\beta} \\ k_{a,\beta} & k_{b,\beta} & k_{\lambda,\beta} & k_{\alpha,\beta} & k_{\beta,\beta} \end{bmatrix},$$

به طوری که عناصر ماتریس در پیوست ۱.۵، نشان داده شده اند و ماتریس اطلاع نمونه تصادفی n تایی برابر $K_n = K_n(\theta) = nK(\theta)$ می باشد. با توجه به ماتریس اطلاع نشان داده شده در پیوست ۱.۵ و تحت شرایط نظم که شامل قرار گرفتن مقادیر واقعی پارامترها درون فضای پارامتری است، توزیع مجانبی برآوردگر درستنمایی ماکسیم θ که اساسی را برای ساختار آزمون فرضیه و نواحی اطمینان فراهم می کند، دارای توزیع نرمال پنج پارامتری به صورت زیر است.

$$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \sim N_5(0, K(\theta)^{-1}).$$

فاصله اطمینان مجانبی با سطح معنی داری γ برای هر پارامتر θ_i عبارت است از

$$\left(\hat{\theta}_i - z_{\frac{\gamma}{2}} \sqrt{k^{\theta_i, \theta_i}}, \hat{\theta}_i + z_{\frac{\gamma}{2}} \sqrt{k^{\theta_i, \theta_i}} \right).$$

که در آن k^{θ_i, θ_i} ، i امین درایه قطری ماتریس $K_n(\theta)^{-1}$ به ازای $i = 1, 2, 3, 4, 5$ است.

۶.۳ مطالعه شبیه سازی

در این بخش به مطالعه ویژگی های توزیع بتا وایبل تعمیم یافته، با استفاده از شبیه سازی می پردازیم. نتیجه ارائه شده در زیر در تولید نمونه از توزیع BGW مورد استفاده قرار می گیرد.

قضیه ۱.۶.۳. فرض کنید V دارای توزیع بتا با پارامتر a و b باشد، در این صورت

$$T = G^{-1}(V) = \frac{\{-\log(1 - V^{\frac{1}{\alpha}})^{\frac{1}{\beta}}\}}{\lambda},$$

دارای توزیع بتا وایبل تعمیم یافته با پارامترهای a, b, λ, α و β است.

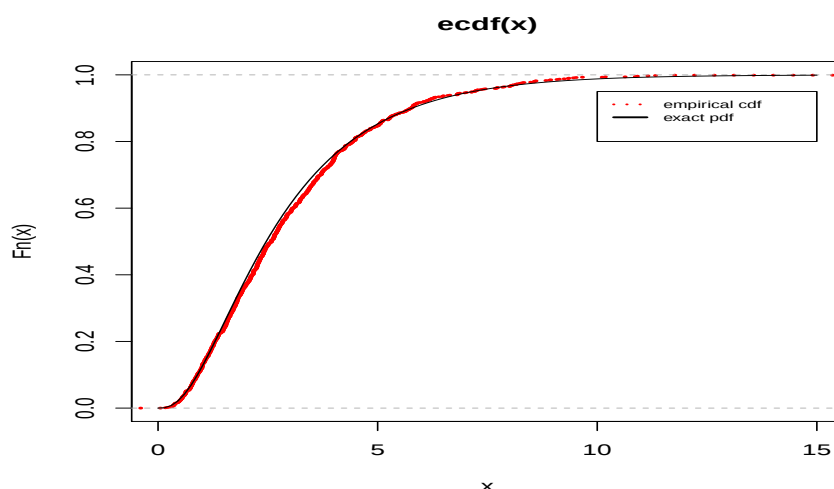
برهان. با استفاده از تعریف ۳.۴.۱، تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی T را به صورت زیر داریم،

$$\begin{aligned} f_T(t) &= f_V(G(t)) \times \left| \frac{d}{dt} G(t) \right| \\ &= \frac{1}{B(a, b)} \{ (1 - e^{-(\lambda t)^\beta})^\alpha \}^{a-1} \{ 1 - (1 - e^{-(\lambda t)^\beta})^\alpha \}^{b-1} \alpha \beta \lambda^\beta t^{\beta-1} e^{-(\lambda t)^\beta} \\ &= \frac{\alpha \beta \lambda^\beta t^{\beta-1}}{B(a, b)} (1 - e^{-(\lambda t)^\beta})^{a\alpha-1} \{ 1 - (1 - e^{-(\lambda t)^\beta})^\alpha \}^{b-1} e^{-(\lambda t)^\beta}. \end{aligned}$$

همان طور که ملاحظه می شود، تابع فوق همان تابع چگالی بیان شده در رابطه (۶.۳) است. $\square$

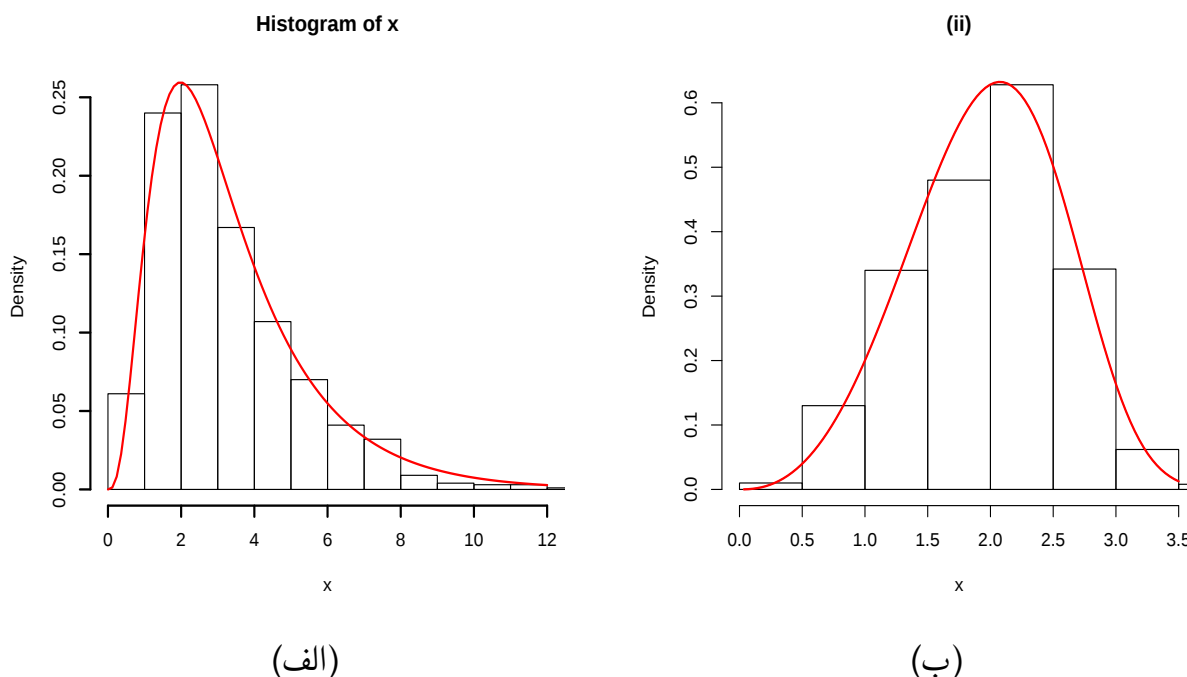
برای بررسی درستی روند شبیه سازی، تابع توزیع تجمعی دقیق و تجربی توزیع بتا وایبل تعمیم یافته، برای نمونه تصادفی شبیه سازی شده با حجم 1000 ، در شکل ۴.۳ رسم شده اند. ملاحظه می شود که نمودار تابع توزیع تجمعی دقیق و تجربی به خوبی بر هم منطبق شده اند و این نتیجه حاصل می شود که شبیه سازی به خوبی صورت گرفته است.

در شکل ۵.۳ نمودار تابع چگالی توزیع بتا وایبل تعمیم یافته و بافت نگار مربوط به دو مجموعه داده شبیه سازی شده با مقادیر پارامتری الف: $a = 8, b = 0.5, \lambda = 1, \alpha = 0.5$ و $\beta = 1$ و ب:



شکل ۴.۳: نمودار مقایسه تابع توزیع تجمعی تجربی و دقیق توزیع BGW با $n = 1000$

مقادیر شبیه سازی شده، به خوبی از توزیع مورد نظر تبعیت می کنند. این نمودارها نشان می دهند $a = 0.5, b = 0.5, \lambda = 0.5, \alpha = 1/5$ و $\beta = 4/5$ رسم شده اند. این نمودارها نشان می دهند



شکل ۵.۳: نمودار تابع چگالی BGW برای داده های شبیه سازی شده به ازای مقادیر پارامتری؛ الف: $a = 8, b = 0.5, \lambda = 1, \alpha = 0.5, \beta = 1$ ؛ ب: $a = 0.5, b = 0.5, \lambda = 0.5, \alpha = 1/5, \beta = 4/5$

جهت بررسی صحت نتایج نظری مربوط به برآورد درستنمایی ماکسیمم که در بخش قبل به آن ها اشاره شد، به شبیه سازی n مشاهده از توزیع بتا وایبل تعمیم یافته با پارامترهای $a = 8, b = 0.5, \lambda = 1$ ، $\alpha = 0.5$ و $\beta = 1/5$ و برای حجم های نمونه $50, 100, 200, 300$ و براساس 10000 مجموعه

داده تولیدشده، می‌پردازیم. برآورد درستنمایی ماکسیمم پارامترها با استفاده از روش عددی شبه‌نیوتن^۱ *BFGS* در نرم‌افزار *R* به‌دست آمده‌اند. برای شبیه‌سازی از توزیع *BGW* همان‌طور که پیش‌تر به آن اشاره شد، ابتدا نمونه تصادفی V را از توزیع بتا با پارامتر a و b تولید کرده و $T = G^{-1}(V) = \frac{\{-\log(1-V^{\frac{1}{\alpha}})\}^{\frac{1}{\beta}}}{\lambda}$ را محاسبه می‌کنیم که در این صورت T دارای توزیع بتا وایبل تعمیم‌یافته است. در جدول ۱.۳ مقادیر حاصل از میانگین برآوردها و ریشه میانگین مربعات خطای برآوردها براساس ۱۰۰۰۰ مجموعه داده شبیه‌سازی‌شده، نشان داده شده‌اند. مشاهده می‌شود که هر چقدر اندازه n بزرگتر می‌شود، برآوردهای ما به مقادیر واقعی پارامترها نزدیک‌تر می‌شوند. برای $n = 300$ این مقادیر به مقادیر واقعی بسیار نزدیک هستند.

در ادامه برای نشان دادن برتری توزیع *BGW* نسبت به زیرمدل‌هایش از دو مجموعه داده واقعی که در متون قابلیت اطمینان مورد استفاده قرار گرفته‌اند، استفاده می‌کنیم.

۷.۳ کاربرد مدل در دو مثال واقعی

این بخش شامل دو مثال کاربردی برای مقایسه توزیع بتا وایبل تعمیم‌یافته با زیرمدل‌هایش است، که با استفاده از معیار *AIC*، *BIC* و *AICc* و همچنین آماره آزمون *LR*، و نمودار بافت نگار داده‌های واقعی و تابع چگالی برآورد شده‌ی توزیع بتا وایبل تعمیم‌یافته و زیرمدل‌هایش، این مقایسه صورت می‌گیرد. به‌منظور بالا بردن دقت برازش، با توجه به معایب موجود در روش‌های عددی، از آن‌جایی که روش *BFGS* وابسته به مقادیر اولیه پارامترها می‌باشد و نسبت به این مقادیر بسیار حساس است، برای برازش توزیع‌های مورد نظر به مجموعه داده‌های واقعی از الگوریتم ژنتیک، پیوست ۲.۳، استفاده می‌کنیم. لازم به‌ذکر است که الگوریتم ژنتیک نسبت به حجم نمونه n حساسیت بالایی ندارد. به‌همین دلیل در بخش قبل برای شبیه‌سازی و بررسی تاثیر حجم نمونه، روی برآوردهای به‌دست آمده، از روش *BFGS* در بسته *stats* استفاده کردیم.

۱.۷.۳ مجموعه داده اول

مجموعه داده اول، که در جدول ۲.۳ نشان داده شده، مربوط به زمان از کار افتادن (10^3 ساعت) موتور شارژکننده توربین یک نوع موتور دیزلی است که توسط ژو^۲ و همکارانش (۲۰۰۳)، مطرح شده است.

^۱Quasi-Newton

^۲Xu

جدول ۱.۳: جدول میانگین برآوردها و ریشه میانگین مربعات خطا بر پایه مطالعه شبیه سازی مونت کارلو

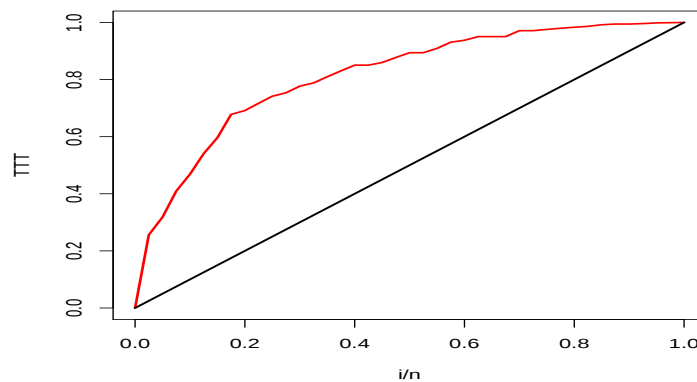
n	پارامتر	مقادیر واقعی	میانگین برآورد	RMSE
n=۵۰	$\hat{a}$	۸	۸/۰۰۶۶	۰/۰۲۲۰
	$\hat{b}$	۰/۵	۰/۴۹۷۳	۰/۱۴۸۷
	$\hat{\lambda}$	۱	۱/۰۲۷۶	۰/۲۶۸۱
	$\hat{\alpha}$	۰/۵	۰/۵۶۰۵	۰/۲۵۳۶
	$\hat{\beta}$	۱/۵	۱/۵۹۸۲	۰/۲۴۸۸
n=۱۰۰	$\hat{a}$	۸	۸/۰۰۳۸	۰/۰۱۵۴
	$\hat{b}$	۰/۵	۰/۴۹۶۶	۰/۱۱۹۹
	$\hat{\lambda}$	۱	۱/۰۱۹۱	۰/۲۱۸۱
	$\hat{\alpha}$	۰/۵	۰/۵۳۵۴	۰/۱۹۲۴
	$\hat{\beta}$	۱/۵	۱/۵۶۰۳	۰/۱۸۱۷
n=۲۰۰	$\hat{a}$	۸	۸/۰۰۱۹	۰/۰۱۰۲
	$\hat{b}$	۰/۵	۰/۴۹۵۴	۰/۰۹۳۸
	$\hat{\lambda}$	۱	۱/۰۱۲۶	۰/۱۷۲۰
	$\hat{\alpha}$	۰/۵	۰/۵۱۸۰	۰/۱۴۰۳
	$\hat{\beta}$	۱/۵	۱/۵۳۶۳	۰/۱۲۹۱
n=۳۰۰	$\hat{a}$	۸	۸/۰۰۱۳	۰/۰۰۸۶
	$\hat{b}$	۰/۵	۰/۴۹۶۶	۰/۰۷۹۲
	$\hat{\lambda}$	۱	۱/۰۱۰۱	۰/۱۴۹۴
	$\hat{\alpha}$	۰/۵	۰/۵۱۳۶	۰/۱۲۱۴
	$\hat{\beta}$	۱/۵	۱/۵۲۵۱	۰/۱۰۳۲

نمودار زمان کل آزمون برای داده های بالا در شکل ۶.۳ رسم شده است. مشاهده می شود که نمودار TTT مقعر شکل است، که با توجه به شکل ۱.۱، این نتیجه حاصل می شود که مجموعه داده ها دارای نرخ شکست صعودی می باشند.

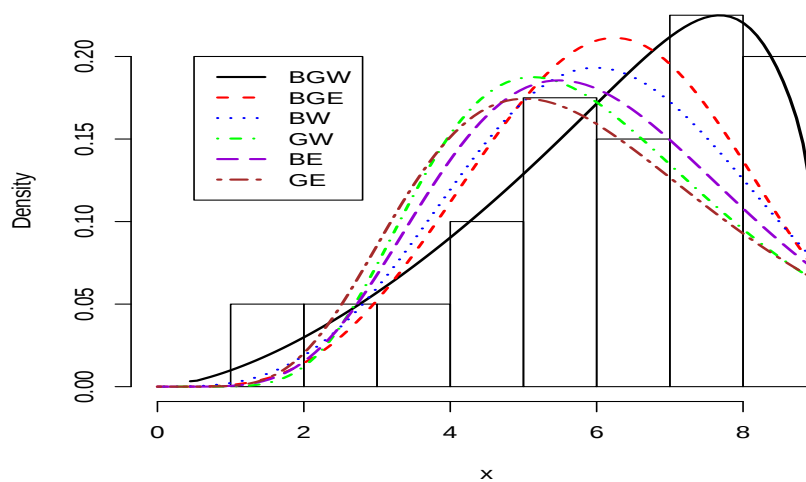
جدول ۳.۳، مقادیر برآورد MLE پارامترها با استفاده از الگوریتم ژنتیک و مقادیر AIC و BIC را برای شش مدل برازش داده شده، نشان می دهد. با توجه به کم تر بودن مقادیر معیارهای انتخاب مدل توزیع بتا وایبل تعمیم یافته، نتیجه می شود که این توزیع برازش بهتری را نسبت به زیرمدل هایش، دارد. در شکل ۷.۳ نیز نمودار بافت نگار و تابع چگالی برآورد شده توزیع بتا وایبل تعمیم یافته و زیرمدل هایش رسم شده است. با توجه به این نمودار، مشخص است که توزیع BGW نسبت به زیرمدل هایش برازش بهتری به داده های واقعی شارژکننده موتور توربین دارد.

جدول ۲.۳: داده‌های مربوط به مثال اول

داده‌های مربوط به زمان از کار افتادن موتور شارژکننده توربین									
۱/۶	۲/۰	۲/۶	۳/۰	۳/۵	۳/۹	۴/۵	۴/۶	۴/۸	۵/۰
۵/۱	۵/۳	۵/۴	۵/۶	۵/۸	۶/۰	۶/۰	۶/۱	۶/۳	۶/۵
۶/۵	۶/۷	۷/۰	۷/۱	۷/۳	۷/۳	۷/۳	۷/۷	۷/۷	۷/۸
۷/۹	۸/۰	۸/۱	۸/۳	۸/۴	۸/۴	۸/۵	۸/۷	۸/۸	۹/۰



شکل ۶.۳: نمودار زمان کل آزمون مربوط به مجموعه داده‌های زمان از کار افتادن موتور شارژکننده توربین

شکل ۷.۳: نمودار بافت‌نگار و چگالی برآورد شده توزیع‌های BGW ، BGE ، BW ، GW ، BE و GE برای مجموعه داده‌های شارژکننده توربین

جدول ۳.۳: برآورد پارامترهای مدل های برازش داده شده به داده های شارژکننده توربین و مقادیر AIC ، BIC و $AICc$

مدل	برآوردهای ML					AIC	BIC	AICc
	a	b	λ	α	β			
BGW	۰/۰۱۰۳	۷۴/۹۸	۰/۱۱۵	۲۰/۴۵	۱۲/۳۲	۱۶۵/۳۱۳	۱۷۳/۷۵۷	۱۶۷/۰۷۷
BGE	۰/۴۷۵	۱۸/۹۹	۰/۱۸۵	۱۱/۸۷	۱	۱۷۴/۷۹۵	۱۸۱/۵۵۱	۱۷۵/۹۳۸
BW	۱/۵۴۲	۰/۶۴۷	۰/۱۸۸	۱	۲/۷۰۷	۱۷۶/۶۳۴	۱۸۳/۳۸۹	۱۷۷/۷۷۰
GW	۱	۱	۰/۴۵۷	۱۱	۱/۰۳۴	۱۸۶/۴۳۱	۱۹۱/۴۹۸	۱۸۷/۰۹۸
BE	۷/۷۴	۱۸	۰/۰۵۸	۱	۱	۱۸۰/۹۴۹	۱۸۶/۰۱۶	۱۸۱/۶۱۶
GE	۱	۱	۰/۴۴۹	۹/۵۱۴	۱	۱۸۴/۲۸۶	۱۸۷/۶۶۴	۱۸۴/۶۱۰

مقادیر آماره LR برای آزمون نیکویی برازش توزیع BGW در مقایسه با زیرمدل های BW ، BGE ، GW ، BE و GE در جدول ۴.۳، برای آزمون فرض H_0 در مقابل H_1 آورده شده اند، برای مثال آزمون فرض توزیع بتا نمایی تعمیم یافته در مقابل بتا وایبل تعمیم یافته به صورت $\beta = 1$ در مقابل $\beta \neq 1$ و برای آزمون فرض توزیع وایبل تعمیم یافته در مقابل بتا وایبل تعمیم یافته به صورت $(a, b) = (1, 1)$ در مقابل $(a, b) \neq (1, 1)$ ، قابل بیان می باشند. با توجه به آماره LR و مقایسه با χ^2 جدول مشاهده می شود که در تمامی موارد فرض H_0 رد خواهد شد، که این نتیجه حاصل می شود که توزیع BGW در مقایسه با زیرمدل هایش دارای برازش بهتری است.

جدول ۴.۳: مقدار آماره LR برای مقایسه مدل مربوط به داده های شارژکننده توربین

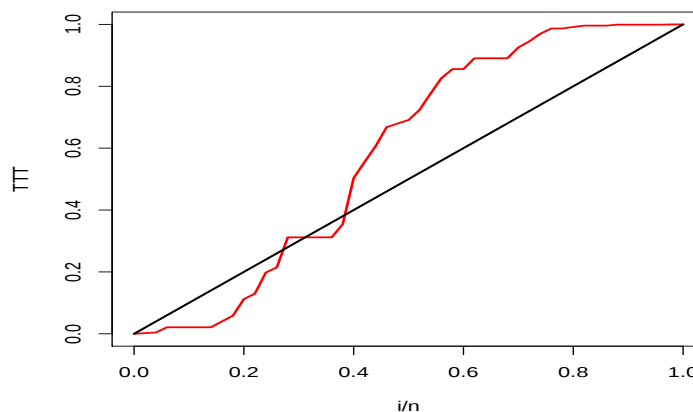
مدل	مقدار آماره LR	$\chi^2_{0.025}$	$\chi^2_{0.975}$	df	رد فرض H_0
BGE vs BGW	۱۱/۴۸۳	۰/۰۰۱	۵/۰۲۳۹	۱	✓
BW vs BGW	۱۳/۳۲۱	۰/۰۰۱	۵/۰۲۳۹	۱	✓
GW vs BGW	۲۵/۱۱۸	۰/۰۵۰۶	۷/۳۷۷۸	۲	✓
BE vs BGW	۱۹/۶۳۶	۰/۰۵۰۶	۷/۳۷۷۸	۲	✓
GE vs BGW	۲۴/۹۷۳	۰/۲۱۵۸	۹/۳۴۸۴	۳	✓

۲.۷.۳ مجموعه داده دوم

مجموعه داده نشان داده شده در جدول ۵.۳، داده‌های مربوط به زمان از کار افتادن ۵۰ وسیله است که از زمان $t = 0$ ، تحت آزمایش قرار گرفته‌اند که توسط آرتز^۱ (۱۹۸۷) گزارش شده‌اند.

جدول ۵.۳: داده‌های مربوط به مثال دوم

داده‌های مربوط به زمان از کار افتادن آرتز										
۰/۱۰	۰/۲۰	۱	۱	۱	۱	۱	۲	۳	۶	
۷	۱۱	۱۲	۱۸	۱۸	۱۸	۱۸	۱۸	۲۱	۳۲	
۳۶	۴۰	۴۵	۴۶	۴۷	۵۰	۵۵	۶۰	۶۳	۶۳	
۶۷	۶۷	۶۷	۶۷	۷۲	۷۵	۷۹	۸۲	۸۲	۸۳	
۸۴	۸۴	۸۴	۸۵	۸۵	۸۵	۸۵	۸۵	۸۶	۸۶	



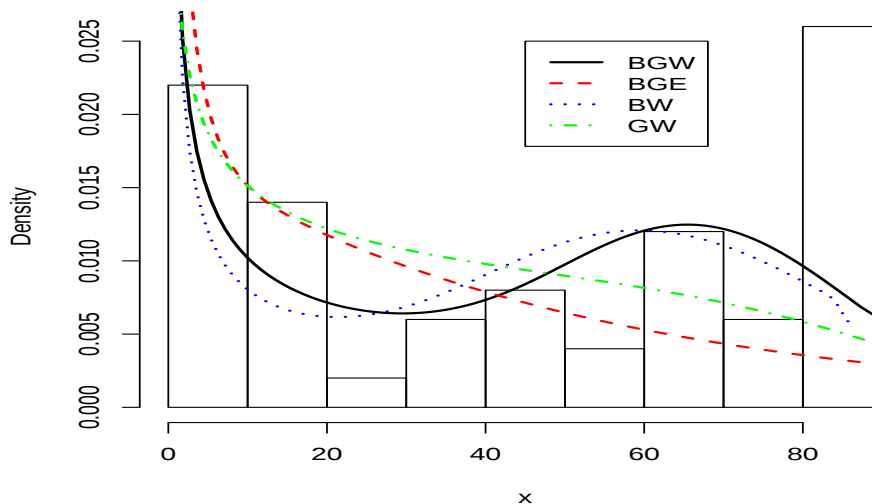
شکل ۸.۳: نمودار زمان کل آزمون مربوط به زمان از کار افتادگی اجزا مربوط به داده‌های آرتز

با توجه به شکل ۸.۳، نمودار زمان کل آزمون در ابتدا محدب شکل و سپس مقعری شکل است، که با توجه به شکل ۱.۱، این موضوع دلالت بر سهمی شکل بودن تابع نرخ شکست دارد. در این مثال نیز با توجه به جدول ۶.۳، که بیانگر مقادیر برآورد درست‌نمایی ماکسیمم پارامترها با استفاده از الگوریتم ژنتیک و مقادیر AIC ، BIC و $AICc$ است، ملاحظه می‌شود که توزیع بتا وایبل تعمیم‌یافته نسبت به تمام زیرمدل‌هایش برازش بهتری به داده‌های واقعی دارد. هم‌چنین با توجه به جدول ۷.۳ نیز، بهتر بودن برازش توسط توزیع بتا وایبل تعمیم‌یافته نسبت به زیرمدل‌هایش برای مثال دوم مشهود است.

^۱Aarset

جدول ۶.۳: برآورد پارامترهای مدل‌های برازش داده شده به داده‌های آرزت و مقادیر AIC ، BIC و $AICc$

مدل	برآورد‌های ML					AIC	BIC	AICc
	a	b	λ	α	β			
BGW	۰/۱۰۹	۰/۰۶۷	۰/۰۲۹	۱/۱۹	۳/۶۸	۴۵۴/۱۰۸	۴۶۳/۶۶۸	۴۵۵/۴۷۱
BGE	۰/۲۶۹	۰/۰۶۷	۰/۲۹۸	۲/۷۹	۱	۴۸۳/۰۴۴	۴۹۰/۶۹۲	۴۸۳/۹۳۳
BW	۰/۱۳۳	۰/۰۵۳	۰/۰۴۰	۱	۲/۹۲	۴۵۷/۳۸۹	۴۶۵/۰۳۷	۴۵۸/۲۷۸
GW	۱	۱	۰/۰۱۱	۰/۱۳۰	۵/۳۴	۴۶۳/۱۴۳	۴۶۹/۱۴۳	۴۶۳/۹۲۸
BE	۰/۴۷۲	۰/۰۴۸	۰/۴۲۸	۱	۱	۴۸۳/۹۹۰	۴۸۷/۸۱۴	۴۸۴/۲۴۶
GE	۱	۱	۰/۰۱۹	۰/۷۸۰	۱	۴۷۷/۸۲۳	۴۸۳/۵۶۰	۴۷۸/۳۴۵



شکل ۹.۳: نمودار بافت‌نگار و چگالی برآوردشده توزیع‌های BGW ، BGE ، BW و GW برای مجموعه داده‌های آرزت

جدول ۷.۳: مقدار آماره LR برای مقایسه مدل داده‌های آرزت

مدل	مقدار آماره LR	$\chi^2_{0.025}$	$\chi^2_{0.975}$	df	رد فرض H_0
BGE vs BGW	۳۰/۹۳۷	۰/۰۰۱	۵/۰۲۳۹	۱	✓
BW vs BGW	۵/۲۸۲	۰/۰۰۱	۵/۰۲۳۹	۱	✓
GW vs BGW	۱۳/۳۰	۰/۰۵۰۶	۷/۳۷۷۸	۲	✓
BE vs BGW	۲۸/۶۱۶	۰/۰۵۰۶	۷/۳۷۷۸	۲	✓
GE vs BGW	۳۵/۸۸	۰/۲۱۵۸	۹/۳۴۸۴	۳	✓

فصل ۴

توزیع بتا وایبل تعدیل یافته تعمیم یافته

۱.۴ مقدمه

در این فصل به معرفی توزیع جدید بتا وایبل تعدیل یافته تعمیم یافته^۱ می پردازیم. این توزیع حالت کلی تر توزیع تعمیم وایبل تعدیل یافته و بتا وایبل تعمیم یافته است که در فصل های دوم و سوم معرفی کردیم. در ابتدا به معرفی توزیع پرداخته و برخی از زیرمدل هایش را ارائه می دهیم. در بخش بعدی صورت های دیگر نمایش تابع چگالی و تابع توزیع آن و همچنین تابع چگالی آماره ترتیبی را به دست می آوریم. سپس به محاسبه گشتاورهای توزیع جدید بتا وایبل تعدیل یافته تعمیم یافته می پردازیم و معادلات غیرخطی را برای برآورد درستنمایی ماکسیمم ارائه می نماییم. در بخش آخر نیز برازش بهتر این توزیع را نسبت به زیرمدل هایش، روی یک مجموعه داده واقعی بررسی می کنیم. مطالب این فصل جدید بوده و توسط نویسنده پایان نامه تدوین و اثبات شده اند.

۲.۴ معرفی توزیع بتا وایبل تعدیل یافته تعمیم یافته

با توجه به تابع توزیع بتای تعمیم یافته که در رابطه (۱.۳) بیان کردیم، اگر به جای تابع توزیع دلخواه $G(\cdot)$ که در این رابطه مطرح کردیم، توزیع تعمیم وایبل تعدیل یافته با تابع توزیع (۱.۲) را قرار دهیم، توزیع بتا وایبل تعدیل یافته تعمیم یافته حاصل می شود.

با توجه به تابع توزیع و چگالی تعمیم وایبل تعدیل یافته به صورت

$$G_{GMW}(t) = [1 - \exp\{-(\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\}]^\alpha,$$

$$g_{GMW}(t) = \alpha \lambda^\beta t^{\beta-1} (\beta + \gamma t) \exp\{\gamma t - (\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\} \\ \times [1 - \exp\{-(\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\}]^{\alpha-1}, \quad t > 0,$$

^۱Beta Generalized Modified Weibull

تابع توزیع بتا وایبل تعدیل یافته تعمیم یافته به صورت زیر به دست می آید.

$$F(x) = \frac{1}{B(a, b)} \int_0^x [1 - \exp\{-(\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\}]^\alpha w^{a-1} (1-w)^{b-1} dw, \quad (1.4)$$

$$t > 0, a, b, \alpha, \lambda > 0, \beta, \gamma \geq 0.$$

همچنین با توجه به (۲.۳)، تابع چگالی متناظر با (۱.۴) عبارت است از:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{\alpha \lambda^\beta t^{\beta-1} (\beta + \gamma t)}{B(a, b)} \exp\{\gamma t - (\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\} \\ &\times [1 - \exp\{-(\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\}]^{a\alpha-1} \\ &\times [1 - (1 - \exp\{-(\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\})^\alpha]^{b-1}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

در این صورت اگر متغیر تصادفی T دارای تابع چگالی (۲.۴) باشد، با نماد $T \sim BGMW(a, b, \lambda, \beta, \gamma, \alpha)$ نشان داده می شود.

قضیه ۱.۲.۴. اگر متغیر تصادفی T دارای تابع چگالی به صورت ۲.۴ باشد، آنگاه تابع نرخ شکست آن به شکل زیر است.

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{\alpha \lambda^\beta t^{\beta-1} (\beta + \gamma t)}{B(a, b) I_{\{1 - (1 - \exp\{-(\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\})^\alpha\}}(b, a)} \exp\{\gamma t - (\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\} \\ &\times [1 - \exp\{-(\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\}]^{a\alpha-1} \\ &\times [1 - (1 - \exp\{-(\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\})^\alpha]^{b-1}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

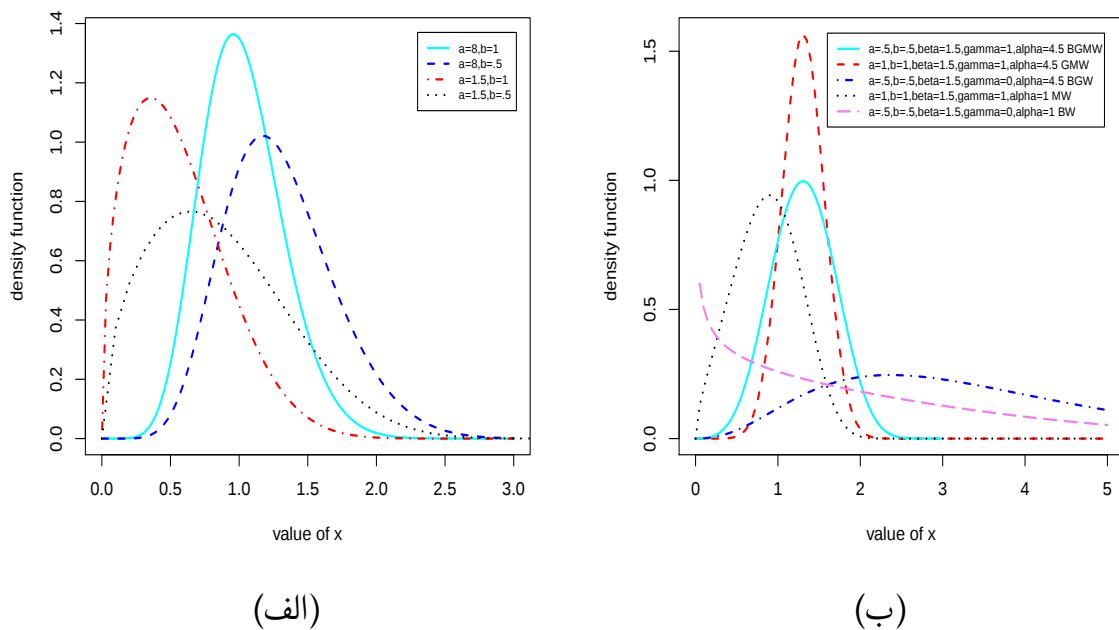
برهان. بنابه تعریف ۲.۲.۱ و قضیه ۶.۳.۱، تابع نرخ شکست توزیع بتا وایبل تعدیل یافته تعمیم یافته را به صورت زیر به دست می آید.

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{\alpha \lambda^\beta t^{\beta-1} (\beta + \gamma t)}{B(a, b)} \exp\{\gamma t - (\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\} \\ &\times [1 - \exp\{-(\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\}]^{a\alpha-1} \\ &\times [1 - (1 - \exp\{-(\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\})^\alpha]^{b-1} \\ &\div \left[1 - \frac{1}{B(a, b)} \int_0^x [1 - \exp\{-(\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\}]^\alpha w^{a-1} (1-w)^{b-1} dw \right] \\ &= \frac{\alpha \lambda^\beta t^{\beta-1} (\beta + \gamma t)}{B(a, b) I_{\{1 - (1 - \exp\{-(\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\})^\alpha\}}(b, a)} \exp\{\gamma t - (\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\} \\ &\times [1 - \exp\{-(\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\}]^{a\alpha-1} \\ &\times [1 - (1 - \exp\{-(\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\})^\alpha]^{b-1}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

□

در شکل های ۱.۴ و ۲.۴ تابع چگالی و تابع نرخ شکست توزیع شش پارامتری $BGMW$ به ازای برخی مقادیر پارامتری به تصویر کشیده شده اند. همان طور که در شکل ۲.۴ قسمت الف مشاهده می شود

این توزیع، قابلیت انعطاف پذیری در مقابل انواع تابع نرخ شکست یکنوا و غیر یکنوا را دارد و در قسمت ب، تابع نرخ شکست توزیع بتا وایبل تعدیل یافته تعمیم یافته و برخی از زیرمدل هایش که در ادامه به بیان آن‌ها می‌پردازیم، به تصویر کشیده شده‌اند.



شکل ۲.۴: نمودار تابع چگالی $BGMW$ با ثابت گرفتن الف: $\lambda = 1/5$, $\beta = 1$, $\gamma = 0/5$ و $\alpha = 1$ ؛ ب: $\lambda = 0/5$

در زیر به بیان زیرمدل‌های این توزیع، که به ازای مقادیر مختلف پارامتری نتیجه می‌شوند، می‌پردازیم.

۱. برای $\gamma = 0$ ، توزیع بتا وایبل تعمیم یافته (BGW) نتیجه می‌شود.

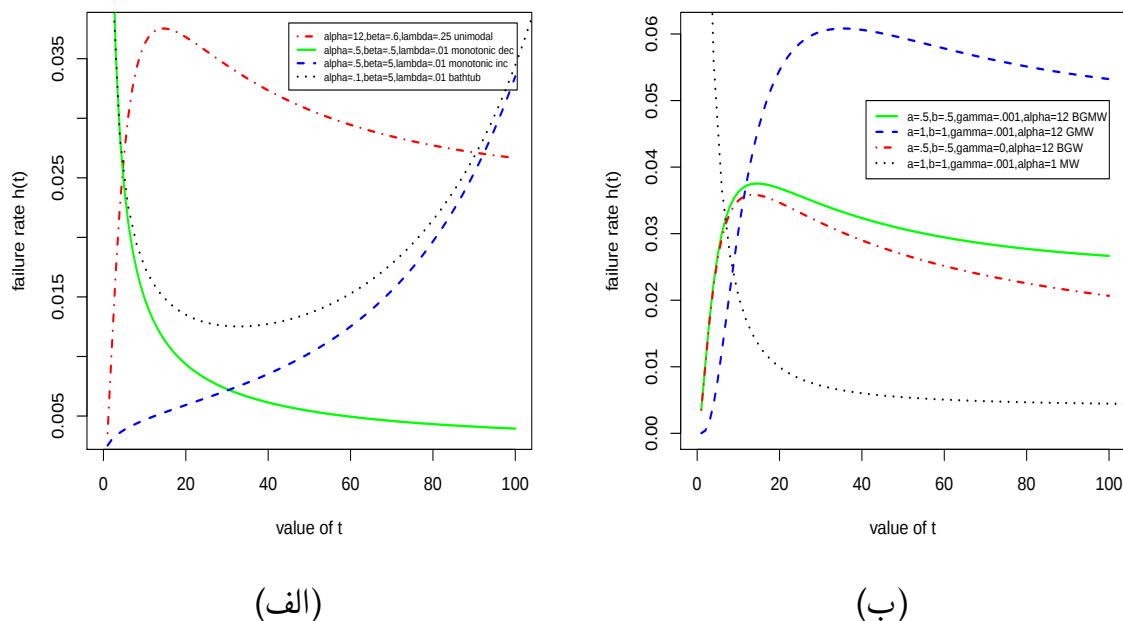
۲. اگر $\gamma = 0$ و $\beta = 1$ توزیع بتا نمایی تعمیم یافته (BGE) (بتای نمایی نمایشی شده) به دست می‌آید.

۳. اگر $\gamma = 0$ و $\alpha = 1$ توزیع بتا وایبل (BW) را داریم.

۴. اگر $\gamma = 0$ و $\alpha = \beta = 1$ آنگاه توزیع بتا نمایی (BE) حاصل می‌شود.

۵. اگر $\gamma = 0$ و $a = b = 1$ توزیع وایبل تعمیم یافته (GW) را داریم و علاوه بر این، اگر $\beta = 1$ و $\beta = 2$ به ترتیب توزیع نمایی تعمیم یافته و توزیع ریلی تعمیم یافته به دست می‌آیند.

۶. اگر $\gamma = 0$ و $a = b = \alpha = 1$ توزیع وایبل با پارامترهای λ و β را داریم و علاوه بر این اگر $\beta = 1$ و $\beta = 2$ به ترتیب توزیع نمایی و توزیع ریلی نتیجه می‌شوند.



شکل ۲.۴: نمودار تابع نرخ شکست $BGMW$ با ثابت گرفتن الف: $a = 0.5$, $b = 0.5$ و $\gamma = 0.001$ ؛ ب: $\lambda = 0.25$ و $\beta = 0.6$

۷. اگر علاوه بر این که $\gamma = 0$ ، داشته باشیم $a = b = \beta = 1$ ، در این صورت توزیع نمایی تعمیم یافته (نمایی شده) به دست می آید.

۸. اگر $a = b = 1$ ، توزیع تعمیم وایبل تعدیل یافته را داریم.

۹. اگر $a = b = \alpha = 1$ توزیع بتا وایبل تعدیل یافته تعمیم یافته به توزیع وایبل تعدیل یافته کاهش می یابد.

۱۰. اگر علاوه بر این که $a = b = \alpha = 1$ ، $\beta = 0$ آنگاه توزیع مقادیر فرین را نتیجه می گیریم.

۳.۴ صورت های دیگر نمایش تابع توزیع و تابع چگالی

با توجه به بخش ۳.۳ و همچنین رابطه (۹.۳)، قضیه ای مشابه با قضیه ۱.۳.۳ را در این فصل برای توزیع جدید بتا وایبل تعدیل یافته تعمیم یافته، بیان می کنیم و نتایج حاصل را به اثبات می رسانیم. این قضیه نشان می دهد که می توان تابع توزیع تجمعی (چگالی) توزیع جدید را به صورت مجموع وزنی نامتناهی (اگر b حقیقی غیر صحیح و مثبت باشد) و مجموع وزنی متناهی (اگر b صحیح مثبت باشد) تابع توزیع (چگالی) تعمیم وایبل تعدیل یافته بیان کرد.

قضیه ۱.۳.۴. فرض می‌کنیم $G_{\lambda, \beta, \gamma, \alpha(a+j)}(t)$ و $g_{\lambda, \beta, \gamma, \alpha(a+j)}(t)$ به ترتیب تابع توزیع و تابع چگالی توزیع تعمیم وایبل تعدیل یافته در (۲.۲) باشد، و همچنین $\omega_j = \frac{(-1)^j \Gamma(b+j)}{\Gamma(b) \Gamma(b-j) \Gamma(j+1) (a+j)}$ در این صورت

(الف) برای مقدار حقیقی و غیر صحیح $b > 0$:

(۱)

$$F(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \omega_j G_{\lambda, \beta, \gamma, \alpha(a+j)}(t),$$

(۲)

$$f(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \omega_j g_{\lambda, \beta, \gamma, \alpha(a+j)}(t),$$

(۳)

$$f(t) = \frac{\alpha \lambda^\beta t^{\beta-1} (\beta + \gamma t)}{B(a, b)} \exp\{\gamma t - (\lambda t)^\beta \exp \gamma t\} \\ \times G_{\lambda, \beta, \gamma, \alpha a-1}(t) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \Gamma(b)}{\Gamma(b-j) j!} G_{\lambda, \beta, \gamma, \alpha j}(t).$$

(ب) برای a و b در حالت کلی، با توجه به تابع فوق هندسی ${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_i (\beta)_i}{(\gamma)_i i!} x^i$ با فاکتوریل صعودی $(\alpha)_i = \alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+i-1)$

(۱) تابع توزیع

$$F(t) = \frac{1}{B(a, b)} \frac{(G(t))^a}{a} {}_2F_1(a, 1-b; a+1; G(t)),$$

(۲) تابع قابلیت اطمینان

$$R(t) = \frac{1}{B(a, b)} \frac{(1-G(t))^b}{b} {}_2F_1(b, 1-a; b+1; 1-G(t)).$$

(پ) برای نمونه تصادفی با اندازه n تابع چگالی آماره ترتیبی $X_{(i)}$ ، عبارتست از

$$f_{i:n}(t) = \frac{1}{B(i, n-i+1)} \frac{\alpha \lambda^\beta t^{\beta-1} (\beta + \gamma t)}{(B(a, b))^n} \frac{e^{-(\lambda t)^\beta}}{a^{i-1} b^{n-i}} G_{\lambda, \beta, \gamma, \alpha a-1}(t) \\ \times (1 - G_{\lambda, \beta, \gamma, \alpha}(t))^{b(1+n-i)-1} \cdot G_{\lambda, \beta, \gamma, \alpha a(i-1)}(t) \\ \times \{ {}_2F_1(a, 1-b; a+1; G_{\lambda, \beta, \gamma, \alpha}(t)) \}^{i-1} \\ \times \{ {}_2F_1(b, 1-a; b+1; 1-G_{\lambda, \beta, \gamma, \alpha}(t)) \}^{n-i}.$$

برهان. (الف) با استفاده رابطه (۹.۳) در تابع توزیع بتا وایبل تعدیل یافته تعمیم یافته (۱.۴) داریم

(۱)

$$\begin{aligned}
 F(t) &= \frac{1}{B(a, b)} \int_0^{[1 - \exp\{-(\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\}]^\alpha} w^{a-1} (1-w)^{b-1} dw \\
 &= \frac{1}{B(a, b)} \int_0^{[1 - \exp\{-(\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\}]^\alpha} w^{a-1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(b)(-1)^j}{\Gamma(b-j)\Gamma(j+1)} w^j dw \\
 &= \frac{\Gamma(b)}{B(a, b)} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^j}{\Gamma(b-j)\Gamma(j+1)} \int_0^{[1 - \exp\{-(\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\}]^\alpha} w^{a+j-1} dw \right) \\
 &= \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{\Gamma(b-j)\Gamma(j+1)} \left(\frac{w^{a+j}}{a+j} \Big|_0^{[1 - \exp\{-(\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\}]^\alpha} \right) \\
 &= \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{\Gamma(b-j)\Gamma(j+1)} \frac{[1 - \exp\{-(\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\}]^{\alpha(a+j)}}{(a+j)}.
 \end{aligned}$$

همان طور که می دانیم $G_{\lambda, \beta, \omega, \alpha(a+j)} = [1 - \exp\{-(\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\}]^{\alpha(a+j)}$ تابع توزیع تعمیم وایبل تعدیل یافته (۲.۲) است. از این رو تابع توزیع تجمعی بتا وایبل تعدیل یافته تعمیم یافته، به صورت ترکیب خطی موزون توزیع تعمیم وایبل تعدیل یافته قابل نمایش است. به عبارتی، داریم

$$F(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \omega_j G_{\lambda, \beta, \gamma, \alpha(a+j)}(t).$$

(۲) با مشتق گیری از طرفین رابطه الف قسمت ۱ نسبت به t ، تابع چگالی توزیع بتا وایبل تعدیل یافته تعمیم یافته به صورت ترکیب خطی از توزیع تعمیم وایبل تعدیل یافته به صورت زیر به دست می آید.

$$f(t) = \frac{\partial F(t)}{\partial t} = \sum_{j=0}^{\infty} \omega_j g_{\lambda, \beta, \gamma, \alpha(a+j)}(t).$$

(۳) با استفاده از رابطه (۹.۳) و تابع چگالی توزیع تعمیم وایبل تعدیل یافته در (۲.۲)، صورت دیگر نمایش تابع چگالی توزیع بتای تعمیم یافته تعدیل یافته وایبل به شکل زیر است.

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \frac{\alpha \lambda^\beta t^{\beta-1} (\beta + \gamma t)}{B(a, b)} \exp\{\gamma t - (\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\} [1 - \exp\{-(\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\}]^{\alpha a - 1} \\
 &\quad \times [1 - (1 - \exp\{-(\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\})^\alpha]^{b-1} \\
 &= \frac{\alpha \lambda^\beta t^{\beta-1} (\beta + \gamma t)}{B(a, b)} \exp\{\gamma t - (\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\} [1 - \exp\{-(\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\}]^{\alpha a - 1} \\
 &\quad \times \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(b)(-1)^j}{\Gamma(b-j)\Gamma(j+1)} (1 - \exp\{-(\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\})^{\alpha j}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{\alpha \lambda^\beta t^{\beta-1} (\beta + \gamma t)}{B(a, b)} \exp\{\gamma t - (\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\} G_{\lambda, \beta, \gamma, a\alpha-1}(t) \\ \times \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(b)(-1)^j}{\Gamma(b-j)\Gamma(j+1)} G_{\lambda, \beta, \gamma, \alpha j}(t).$$

(ب) برای a و b در حالت کلی و با توجه به این که $G(t)$ تابع توزیع تعمیم وایبل تعدیل یافته است، با استفاده از تابع توزیع بتای تعمیم یافته در (۱.۳) و رابطه تابع بتا و تابع فوق هندسی در تعریف ۷.۳.۱ داریم:

(۱)

$$\int_0^{G(t)} w^{a-1} (1-w)^{b-1} dw = \frac{(G(t))^a}{a} {}_2F_1(a, 1-b; a+1; G(t)).$$

در این صورت با توجه به تابع توزیع بتای تعمیم یافته نتیجه زیر حاصل می شود

$$F(t) = \frac{1}{B(a, b)} \int_0^{G(t)} w^{a-1} (1-w)^{b-1} dw = \frac{1}{B(a, b)} \frac{(G(t))^a}{a} {}_2F_1(a, 1-b; a+1; G(t)).$$

(۲) با توجه به قضیه ۶.۳.۱، تابع قابلیت اطمینان توزیع $BGMW$ را بر حسب تابع فوق هندسی به صورت زیر محاسبه می کنیم.

$$R(t) = 1 - F(t) = 1 - \frac{1}{B(a, b)} \int_0^{G(t)} w^{a-1} (1-w)^{b-1} dw \\ = \frac{1}{B(a, b)} [B(a, b) - \int_0^{G(t)} w^{a-1} (1-w)^{b-1} dw] \\ = \frac{1}{B(a, b)} [\int_0^1 w^{a-1} (1-w)^{b-1} dw - \int_0^{G(t)} w^{a-1} (1-w)^{b-1} dw] \\ = \frac{1}{B(a, b)} \int_{G(t)}^1 w^{a-1} (1-w)^{b-1} dw \\ = \frac{1}{B(a, b)} \int_0^{1-G(t)} w^{b-1} (1-w)^{a-1} dw \\ = \frac{1}{B(a, b)} \frac{(1-G(t))^b}{b} {}_2F_1(b, 1-a; b+1; 1-G(t)).$$

(پ) با توجه به تعریف ۱.۴.۱، تابع چگالی آماره ترتیبی مرتبه i ام توزیع بتا وایبل تعدیل یافته تعمیم یافته را با جایگزین کردن تابع چگالی (۲.۴) و تابع توزیع نتیجه شده در قسمت (ب) قضیه فوق،

به صورت زیر به دست می آوریم

$$\begin{aligned}
 f_{i:n}(t) &= \frac{1}{B(i, n-i+1)} \frac{\alpha \lambda^\beta t^{\beta-1} (\beta + \gamma t)}{B(a, b)} \exp\{\gamma t - (\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\} \\
 &\times [1 - \exp\{-(\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\}]^{a-1} [1 - (1 - \exp\{-(\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\})^\alpha]^{b-1} \\
 &\times \left\{ \frac{1}{B(a, b)} \frac{(G_{\lambda, \beta, \gamma, \alpha}(t))^a}{a} {}_2F_1(a, 1-b; a+1; G_{\lambda, \beta, \gamma, \alpha}(t)) \right\}^{i-1} \\
 &\times \left\{ \frac{1}{B(a, b)} \frac{(1 - G_{\lambda, \beta, \gamma, \alpha}(t))^b}{b} {}_2F_1(b, 1-a; b+1; 1 - G_{\lambda, \beta, \gamma, \alpha}(t)) \right\}^{n-i} \\
 &= \frac{1}{B(i, n-i+1)} \frac{\alpha \lambda^\beta t^{\beta-1} (\beta + \gamma t)}{(B(a, b))^n} \frac{1}{a^{i-1} b^{n-i}} \exp\{\gamma t - (\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\} \\
 &\times G_{\lambda, \beta, \gamma, \alpha-1}(t) (1 - G_{\lambda, \beta, \gamma, \alpha}(t))^{b-1} \\
 &\times (G_{\lambda, \beta, \gamma, \alpha}(t))^{a(i-1)} \{ {}_2F_1(a, 1-b; a+1; G_{\lambda, \beta, \gamma, \alpha}(t)) \}^{i-1} \\
 &\times (1 - G_{\lambda, \beta, \gamma, \alpha}(t))^{b(n-i)} \{ {}_2F_1(b, 1-a; b+1; 1 - G_{\lambda, \beta, \gamma, \alpha}(t)) \}^{n-i} \\
 &= \frac{1}{B(i, n-i+1)} \frac{\alpha \lambda^\beta t^{\beta-1} (\beta + \gamma t)}{(B(a, b))^n} \frac{1}{a^{i-1} b^{n-i}} \exp\{\gamma t - (\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\} \\
 &\times G_{\lambda, \beta, \gamma, \alpha-1}(t) (1 - G_{\lambda, \beta, \gamma, \alpha}(t))^{b(n-i+1)-1} G_{\lambda, \beta, \gamma, \alpha(i-1)}(t) \\
 &\times \{ {}_2F_1(a, 1-b; a+1; G_{\lambda, \beta, \gamma, \alpha}(t)) \}^{i-1} \{ {}_2F_1(b, 1-a; b+1; 1 - G_{\lambda, \beta, \gamma, \alpha}(t)) \}^{n-i}.
 \end{aligned}$$

□

نکته ۲.۳.۴. در قضیه ۱.۳.۴، وقتی b صحیح باشد، با توجه به ۱.۳.۱، مجموع روی j در $b-1$ به اتمام می رسد.

۴.۴ گشتاورهای توزیع بتای تعمیم یافته تعدیل یافته وایبل

در این بخش گشتاور مرتبه k ام توزیع جدید بتای تعمیم یافته تعدیل یافته وایبل را به صورت قضیه زیر مطرح می کنیم و به اثبات آن می پردازیم.

قضیه ۱.۴.۴. فرض می کنیم متغیر تصادفی T دارای توزیع $BGMW$ با تابع چگالی ۲.۴ باشد. در این صورت گشتاور مرتبه k آن را به صورت زیر داریم

$$\begin{aligned}
 E(T^k) &= \frac{\alpha \lambda^\beta}{B(a, b)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(1-b)_j}{j!} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(1-\delta)_r}{r!} \\
 &\times \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^{\infty} A_{i_1, \dots, i_k} \frac{\Gamma(\frac{S_k}{\beta} + 1)}{[(r+1)\lambda^\beta]^{\frac{S_k}{\beta} + 1}}.
 \end{aligned} \tag{۵.۴}$$

برهان. با توجه به تعریف گشتاور مرتبه k ام داریم

$$\begin{aligned} E(T^k) &= \frac{1}{B(a, b)} \int_0^\infty t^k \alpha \lambda^\beta t^{\beta-1} (\beta + \gamma t) \exp\{\gamma t - (\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\} \\ &\quad \times [1 - \exp\{-(\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\}]^{a\alpha-1} dt, \\ &\quad \times [1 - (1 - \exp\{-(\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\})^\alpha], \quad k \geq 1. \end{aligned}$$

با اعمال تغییر متغیر $x = \{t^\beta \exp(\gamma t)\}$ ، و با توجه به روابط (۷.۲) و (۹.۲)، t را به صورت زیر بر حسب x می نویسیم،

$$t = \sum_{i=1}^{\infty} a_i t^{\frac{i}{\beta}},$$

که در آن $a_i = \frac{(-1)^{i+1} i^{i-2}}{(i-1)!} \left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^{i-1}$. با در نظر گرفتن رابطه (۱۰.۲) می توان نوشت

$$\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^{\frac{i}{\beta}} \right\}^k = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^{\infty} A_{i_1, \dots, i_k} x^{\frac{S_k}{\beta}},$$

به طوری که $A_{i_1, \dots, i_k} = a_{i_1} \cdots a_{i_k}$ و $S_k = i_1 + \cdots + i_k$. با جای گذاری عبارت فوق در $E(T^k)$ و با دو مرتبه استفاده از (۹.۳)، می توان نتیجه گرفت

$$\begin{aligned} E(T^k) &= \frac{\alpha \lambda^\beta}{B(a, b)} \int_0^\infty \left(\sum_{i_1, \dots, i_k=1}^{\infty} A_{i_1, \dots, i_k} x^{\frac{S_k}{\beta}} \right) \exp(-\lambda^\beta x) \\ &\quad \times \{1 - \exp(-\lambda^\beta x)\}^{a\alpha-1} [1 - \{1 - \exp(-\lambda^\beta x)\}^\alpha]^{b-1} dx \\ &= \frac{\alpha \lambda^\beta}{B(a, b)} \int_0^\infty \left(\sum_{i_1, \dots, i_k=1}^{\infty} A_{i_1, \dots, i_k} x^{\frac{S_k}{\beta}} \right) \exp(-\lambda^\beta x) \\ &\quad \times \{1 - \exp(-\lambda^\beta x)\}^{a\alpha-1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-j)j!} (-1)^j \{1 - \exp(-\lambda^\beta x)\}^{\alpha j} dx \\ &= \frac{\alpha \lambda^\beta}{B(a, b)} \int_0^\infty \left(\sum_{i_1, \dots, i_k=1}^{\infty} A_{i_1, \dots, i_k} x^{\frac{S_k}{\beta}} \right) \exp(-\lambda^\beta x) \\ &\quad \times \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-j)j!} (-1)^j \{1 - \exp(-\lambda^\beta x)\}^{a(\alpha+j)-1} dx. \end{aligned}$$

با در نظر گرفتن $\delta = \alpha(a+j) - 1$ ، داریم

$$\begin{aligned} E(T^k) &= \frac{\alpha \lambda^\beta}{B(a, b)} \int_0^\infty \left(\sum_{i_1, \dots, i_k=1}^{\infty} A_{i_1, \dots, i_k} x^{\frac{S_k}{\beta}} \right) \exp(-\lambda^\beta x) \\ &\quad \times \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-j)j!} (-1)^j \sum_{r=0}^{\infty} \binom{\delta}{r} (-1)^r \exp\{-r \lambda^\beta x\} dx \end{aligned}$$

$$= \frac{\alpha \lambda^\beta}{B(a, b)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-j)j!} (-1)^j \sum_{r=0}^{\infty} \binom{\delta}{r} (-1)^r$$

$$\times \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^{\infty} A_{i_1, \dots, i_k} \int_0^{\infty} x^{S_k/\beta} \exp\{-(r+1)\lambda^\beta x\} dx.$$

و با توجه به تعریف ۲.۳.۱،

$$I = \int_0^{\infty} x^{\frac{S_k}{\beta}} \exp\{-(r+1)\lambda^\beta x\} dx = \frac{\Gamma(\frac{S_k}{\beta} + 1)}{[(r+1)\lambda^\beta]^{\frac{S_k}{\beta} + 1}}.$$

لذا با فرض $(1-b)_j = \frac{(-1)^j \Gamma(b)}{\Gamma(b-j)}$

$$E(T^k) = \frac{\alpha \lambda^\beta}{B(a, b)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(1-b)_j}{j!} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(1-\delta)_r}{r!}$$

$$\times \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^{\infty} A_{i_1, \dots, i_k} \frac{\Gamma(\frac{S_k}{\beta} + 1)}{[(r+1)\lambda^\beta]^{\frac{S_k}{\beta} + 1}}.$$

□

نتیجه ۲.۴.۴. صورت جایگزین دیگری برای گشتاور مرتبه k ام توزیع $BGMW$ به صورت زیر می باشد.

$$E(T^k) = \frac{\alpha \lambda^\beta}{B(a, b)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(1-b)_j}{j!} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(1-\delta)_r}{r!} \sum_{i_1, \dots, i_k=0}^{\infty} \frac{1}{[(r+1)\lambda^\beta]^{\frac{k}{\beta} + 1}}$$

$$\times \frac{\Gamma(\frac{S_k+k}{\beta} + 1)}{(i_1+1)^{1-i_1} \dots (i_k+1)^{1-i_k}} \frac{x_1^{i_1} \dots x_k^{i_k}}{(i_1)! \dots (i_k)!}.$$

برهان. با یک واحد کاهش در حدود مجموع روی i و با در نظر گرفتن (۵.۴) به صورت

$$E(T^k) = \frac{\alpha \lambda^\beta}{B(a, b)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(1-b)_j}{j!} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(1-\delta)_r}{r!} \times J,$$

و روابط

$$a_i = \frac{(-1)^{i+1} i^{i-2}}{(i-1)!} \left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^{i-1},$$

$$A_{i_1, \dots, i_k} = a_{i_1} \dots a_{i_k}, \quad S_k = i_1 + \dots + i_k,$$

$$a_{i+1} = \frac{(-1)^{i+2} (i+1)^{i-1}}{i!} \left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^i = \frac{(i+1)^{i-1}}{i!} \left(\frac{-\gamma}{\beta}\right)^i,$$

نتیجه می شود

$$\begin{aligned}
 J &= \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^{\infty} A_{i_1, \dots, i_k} \frac{\Gamma(\frac{S_k}{\beta} + 1)}{[(r+1)\lambda^\beta]^{\frac{S_k}{\beta}+1}} \\
 &= \sum_{i_1, \dots, i_k=0}^{\infty} A_{i_1+1, \dots, i_k+1} \frac{\Gamma(\frac{(i_1+1)+\dots+(i_k+1)}{\beta} + 1)}{[(r+1)\lambda^\beta]^{\frac{(i_1+1)+\dots+(i_k+1)}{\beta}+1}} \\
 &= \sum_{i_1, \dots, i_k=0}^{\infty} \frac{(i_1+1)^{i_1-1}}{i_1!} \left(\frac{-\gamma}{\beta}\right)^{i_1} \dots \frac{(i_k+1)^{i_k-1}}{i_k!} \left(\frac{-\gamma}{\beta}\right)^{i_k} \\
 &\quad \times \frac{\Gamma(\frac{S_k+k}{\beta} + 1)}{[(r+1)\lambda^\beta]^{\frac{S_k+k}{\beta}+1}}.
 \end{aligned}$$

حال، با در نظر گرفتن $x_i = (\frac{-\gamma}{\beta})\{(r+1)\lambda^\beta\}^{-1/\beta}$

$$\begin{aligned}
 J &= \sum_{i_1, \dots, i_k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{S_k+k}{\beta} + 1)}{[(r+1)\lambda^\beta]^{\frac{k}{\beta}+1}} \frac{(i_1+1)^{i_1-1}}{i_1!} \left(\frac{-\gamma}{\beta}\right)^{i_1} \\
 &\quad \times \{(r+1)\lambda^\beta\}^{-\frac{i_1}{\beta}} \dots \frac{(i_k+1)^{i_k-1}}{i_k!} \left(\frac{-\gamma}{\beta}\right)^{i_k} \{(r+1)\lambda^\beta\}^{-\frac{i_k}{\beta}} \\
 &= \sum_{i_1, \dots, i_k=0}^{\infty} \frac{1}{[(r+1)\lambda^\beta]^{\frac{k}{\beta}+1}} \frac{\Gamma(\frac{S_k+k}{\beta} + 1)}{(i_1+1)^{1-i_1} \dots (i_k+1)^{1-i_k}} \frac{x_1^{i_1} \dots x_k^{i_k}}{(i_1)! \dots (i_k)!}.
 \end{aligned}$$

لذا با توجه به رابطه (۵.۴) و با جای گذاری J در آن، صورت دیگر گشتاور مرتبه k ام را به شکل زیر است

$$\begin{aligned}
 E(T^k) &= \frac{\alpha\lambda^\beta}{B(a,b)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(1-b)_j}{j!} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(1-\delta)_r}{r!} \sum_{i_1, \dots, i_k=0}^{\infty} \frac{1}{[(r+1)\lambda^\beta]^{\frac{k}{\beta}+1}} \\
 &\quad \times \frac{\Gamma(\frac{S_k+k}{\beta} + 1)}{(i_1+1)^{1-i_1} \dots (i_k+1)^{1-i_k}} \frac{x_1^{i_1} \dots x_k^{i_k}}{(i_1)! \dots (i_k)!}.
 \end{aligned}$$

□

۵.۴ برآورد درستنمایی ماکسیم

در این بخش، تابع درستنمایی ماکسیم و تابع امتیاز توزیع بتا وایبل تعدیل یافته تعمیم یافته، با بردار پارامتری $\theta = (a, b, \lambda, \beta, \gamma, \alpha)^T$ را بیان می کنیم.

لگاریتم درستنمایی توزیع $BGMW$ ، برای تک مشاهده t به صورت زیر می باشد.

$$\begin{aligned} l &= l(a, b, \lambda, \beta, \gamma, \alpha) \\ &= \log \alpha + \beta \log \lambda + (\beta - 1) \log t + \log(\beta + \gamma t) - \log B(a, b) \\ &\quad + \{\gamma t - (\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\} + (a\alpha - 1) \log \{1 - \exp\{-(\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\}\} \\ &\quad + (b - 1) \log \{1 - (1 - \exp\{-(\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\})^\alpha\}. \end{aligned}$$

با توجه به تابع لگاریتم درستنمایی و با توجه به مشتق تابع بتا که در بخش (۵.۳) بیان کردیم، مولفه های بردار امتیاز $U = ((\partial l / \partial a), (\partial l / \partial b), (\partial l / \partial \lambda), (\partial l / \partial \beta), (\partial l / \partial \gamma), (\partial l / \partial \alpha))^T$ عبارتند از:

$$\frac{\partial l}{\partial a} = \psi(a + b) - \psi(a) + \alpha \log \{1 - \exp\{-(\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\}\},$$

$$\frac{\partial l}{\partial b} = \psi(a + b) - \psi(b) + \log \{1 - (1 - \exp\{-(\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\})^\alpha\},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial \lambda} &= \frac{\beta}{\lambda} - \beta \lambda^{\beta-1} t^\beta \exp(\gamma t) + \frac{(a\alpha - 1) \beta \lambda^{\beta-1} t^\beta \exp(\gamma t) \exp\{-(\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\}}{1 - \exp\{-(\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\}} \\ &\quad - \frac{(b - 1) \alpha \beta \lambda^{\beta-1} t^\beta \exp(\gamma t) \exp\{-(\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\} (1 - \exp\{-(\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\})^{\alpha-1}}{1 - (1 - \exp\{-(\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\})^\alpha}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial \beta} &= \log \lambda + \log t + \frac{1}{\beta + \gamma t} - (\lambda t)^\beta \log(\lambda t) \exp(\gamma t) \\ &\quad + \frac{(a\alpha - 1) (\lambda t)^\beta \log(\lambda t) \exp(\gamma t) \exp\{-(\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\}}{1 - \exp\{-(\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\}} \\ &\quad - \frac{\alpha (b - 1) \exp(\gamma t) \exp\{-(\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\} (\lambda t)^\beta \log(\lambda t) (1 - \exp\{-(\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\})^{\alpha-1}}{1 - (1 - \exp\{-(\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\})^\alpha}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial \gamma} &= \frac{t}{\beta + \gamma t} + t - t(\lambda t)^\beta \exp(\gamma t) \\ &\quad + \frac{(a\alpha - 1) t (\lambda t)^\beta \exp(\gamma t) \exp\{-(\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\}}{1 - \exp\{-(\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\}} \\ &\quad - \frac{\alpha (b - 1) t (\lambda t)^\beta \exp(\gamma t) \exp\{-(\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\} (1 - \exp\{-(\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\})^{\alpha-1}}{1 - (1 - \exp\{-(\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\})^\alpha}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial \alpha} &= \frac{1}{\alpha} + a \log \{1 - \exp\{-(\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\}\} \\ &\quad - (b - 1) \frac{(1 - \exp\{-(\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\})^\alpha \log \{1 - \exp\{-(\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\}\}}{1 - (1 - \exp\{-(\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\})^\alpha}. \end{aligned}$$

با توجه به قسمت الف رابطه ۷.۴.۱، معادلات زیر را با برابر صفر قرار دادن امید ریاضی بردار امتیاز، نتیجه می گیریم.

۱.

$$E \left[\frac{\partial l}{\partial a} \right] = E \left[\psi(a+b) - \psi(a) + \alpha \log(1 - \exp\{-(\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\}) \right] = 0,$$

$$E \left[\log(1 - \exp\{-(\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\}) \right] = \frac{\psi(a) - \psi(a+b)}{\alpha}. \quad (**)$$

۲.

$$E \left[\frac{\partial l}{\partial b} \right] = E \left[\psi(a+b) - \psi(b) + \log\{1 - (1 - \exp\{-(\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\})^\alpha\} \right] = 0,$$

$$E \left[\log\{1 - (1 - \exp\{-(\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\})^\alpha\} \right] = \psi(b) - \psi(a+b).$$

۳.

$$E \left[\frac{\partial l}{\partial \alpha} \right] = E \left[\frac{1}{\alpha} + a \log(1 - \exp\{-(\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\}) - (b-1) \right. \\ \left. \frac{(1 - \exp\{-(\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\})^\alpha \log(1 - \exp\{-(\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\})}{1 - (1 - \exp\{-(\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\})^\alpha} \right]$$

$$= \frac{1}{\alpha} + a E \left[\log(1 - \exp\{-(\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\}) \right] - (b-1)$$

$$E \left[\frac{(1 - \exp\{-(\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\})^\alpha \log(1 - \exp\{-(\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\})}{1 - (1 - \exp\{-(\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\})^\alpha} \right] = 0,$$

با توجه به (**)،

$$E \left[\frac{(1 - \exp\{-(\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\})^\alpha \log(1 - \exp\{-(\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\})}{1 - (1 - \exp\{-(\lambda t)^\beta \exp(\gamma t)\})^\alpha} \right] =$$

$$\frac{a(\psi(a) - \psi(a+b)) + 1}{\alpha(b-1)}.$$

۶.۴ مطالعه شبیه‌سازی

در این بخش به مطالعه شبیه‌سازی توزیع بتا وایبل تعدیل‌یافته تعمیم‌یافته می‌پردازیم. در ابتدا قضیه‌ای در این زمینه مطرح کرده و به اثبات آن می‌پردازیم.

قضیه ۱.۶.۴. فرض می‌کنیم V دارای توزیع بتا با پارامترهای a و b باشد، در این صورت

$$T = G^{-1}(V) = \frac{\beta}{\gamma} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1} i^{i-2}}{(i-1)!} \left(\frac{\gamma}{\beta \lambda} \right)^i \{-\log(1 - V^{\frac{1}{\alpha}})\}^{\frac{i}{\beta}},$$

دارای توزیع بتا وایبل تعدیل‌یافته تعمیم‌یافته با پارامترهای $a, b, \lambda, \beta, \gamma$ و α است.

برهان. برای نشان دادن این رابطه، با استفاده از تعریف ۹.۳.۱ داریم

$$\begin{aligned}\frac{\gamma}{\beta}t &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1} i^{i-2}}{(i-1)!} \left(\frac{\gamma}{\beta\lambda}\right)^i \{-\log(1 - V^{\frac{1}{\alpha}})\}^{\frac{i}{\beta}} \\ &= F\left(\frac{\gamma}{\beta\lambda} \{-\log(1 - V^{\frac{1}{\alpha}})\}^{\frac{1}{\alpha}}\right),\end{aligned}$$

در نتیجه با توجه به سری لامبرت W

$$\frac{\gamma}{\beta\lambda} \{-\log(1 - V^{\frac{1}{\alpha}})\}^{1/\beta} = \frac{t\gamma}{\beta} \exp\left(\frac{t\gamma}{\beta}\right),$$

پس داریم

$$\begin{aligned}\frac{\{-\log(1 - V^{\frac{1}{\alpha}})\}^{\frac{1}{\beta}}}{\lambda} &= t \exp\left(\frac{t\gamma}{\beta}\right), \\ -\log(1 - V^{\frac{1}{\alpha}}) &= (t\lambda)^{\beta} \exp(t\gamma), \\ 1 - V^{\frac{1}{\alpha}} &= -\exp\{(\lambda t)^{\beta} \exp(\gamma t)\}.\end{aligned}$$

بنابراین

$$V = \left[1 - \exp\{-(\lambda t)^{\beta} \exp(\gamma t)\}\right]^{\alpha}.$$

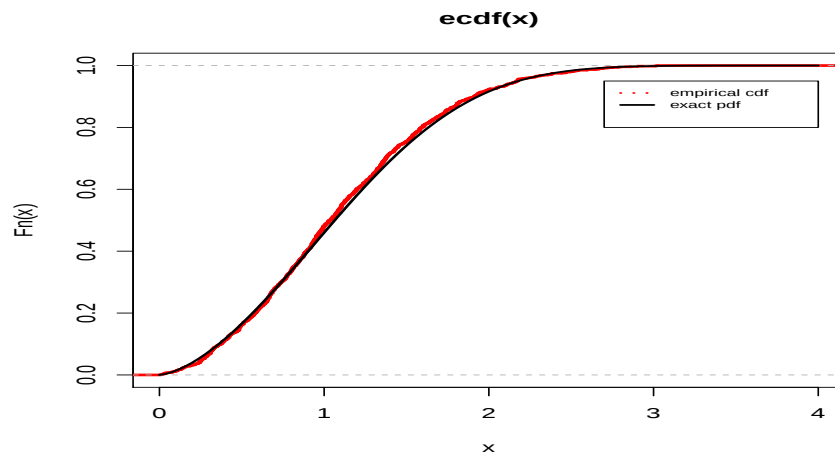
با استفاده از روش تبدیل بیان شده در ۳.۴.۱، توزیع متغیر تصادفی T را به صورت زیر داریم

$$\begin{aligned}f_T(t) &= f_V(G(t)) \times \left|\frac{d}{dt}G(t)\right| \\ &= \frac{\alpha\lambda^{\beta}t^{\beta-1}(\beta + \gamma t)}{B(a, b)} \exp\{\gamma t - (\lambda t)^{\beta} \exp(\gamma t)\} \left[1 - \exp\{-(\lambda t)^{\beta} \exp(\gamma t)\}\right]^{\alpha-1} \\ &\quad \times \left[\left(1 - \exp\{-(\lambda t)^{\beta} \exp(\gamma t)\}\right)^{\alpha}\right]^{a-1} \left[1 - \left(1 - \exp\{-(\lambda t)^{\beta} \exp(\gamma t)\}\right)^{\alpha}\right]^{b-1} \\ &= \frac{\alpha\lambda^{\beta}t^{\beta-1}(\beta + \gamma t)}{B(a, b)} \exp\{\gamma t - (\lambda t)^{\beta} \exp(\gamma t)\} \left[1 - \exp\{-(\lambda t)^{\beta} \exp(\gamma t)\}\right]^{\alpha\alpha-1} \\ &\quad \times \left[1 - \left(1 - \exp\{-(\lambda t)^{\beta} \exp(\gamma t)\}\right)^{\alpha}\right]^{b-1},\end{aligned}$$

که بنابر (۲.۴)، همان تابع چگالی توزیع بتا وایبل تعدیل یافته تعمیم یافته است. $\square$

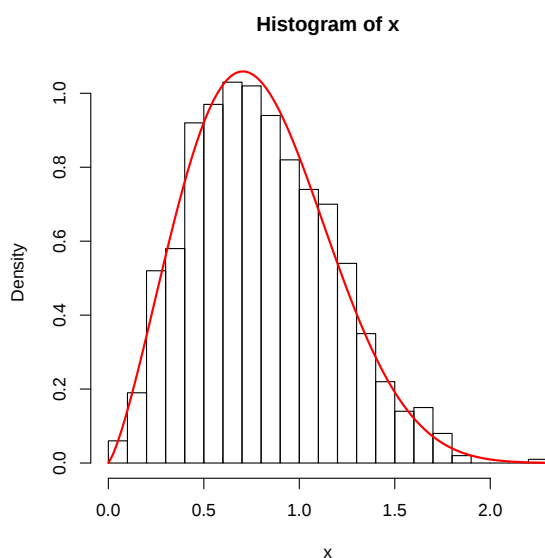
بنابراین برای شبیه سازی از توزیع $BGMW$ ، ابتدا V را از توزیع بتا با پارامترهای a و b تولید می کنیم و به ازای λ, β, γ و α مشخص، به حل معادله غیرخطی $v = \left[1 - \exp\{-(\lambda t)^{\beta} \exp(\gamma t)\}\right]^{\alpha}$ پرداخته و t را به دست می آوریم. در این صورت t حاصل، دارای توزیع $BGMW(a, b, \lambda, \beta, \gamma, \alpha)$ است.

برای مشاهده صحت روند شبیه سازی، نمودارهای تابع توزیع تجمعی دقیق و تجربی به ازای $n = 1000$ مشاهده شبیه سازی شده، در شکل ۳.۴ رسم شده اند. ملاحظه می شود که تابع توزیع دقیق و تابع

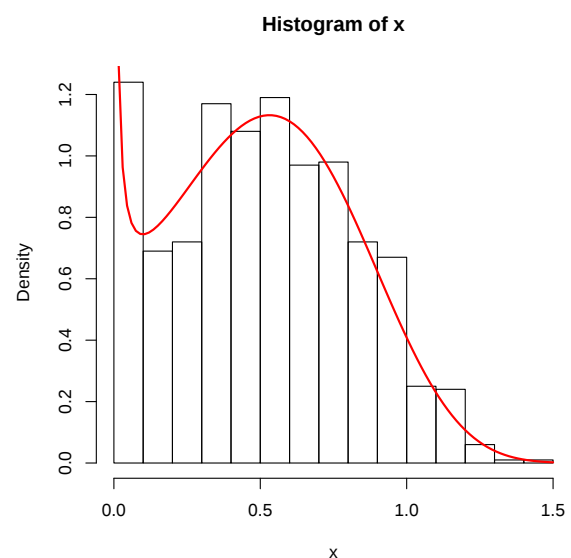


شکل ۳.۴: نمودار مقایسه تابع توزیع تجمعی تجربی و دقیق توزیع $BGMW$ به ازای $n = 1000$

توزیع تجربی مشاهدات شبیه‌سازی شده به خوبی بر هم منطبق هستند و این بیانگر این مطلب است که مشاهدات از توزیع بتا وایبل تعدیل‌یافته تعمیم‌یافته تبعیت می‌کنند. همچنین در شکل ۴.۴ نمودار بافت نگار و چگالی مرتبط با آن برای دو مجموعه داده شبیه‌سازی شده، به ازای مقادیر پارامتری $a = 1/5$ ، $b = 0/5$ ، $\lambda = 1/5$ ، $\beta = 1/5$ ، $\gamma = 0/5$ و $\alpha = 1$ برای مجموعه داده اول و $a = 3/5$ ، $b = 0/5$ ، $\lambda = 0/5$ ، $\beta = 0/2$ ، $\gamma = 2$ و $\alpha = 0/5$ برای مجموعه داده دوم، نشان داده شده‌اند. ملاحظه می‌شود که نمودار بافت‌نگار و تابع چگالی به خوبی بر هم منطبق هستند. در جدول ۱.۴ به برآورد پارامترهای



(الف)



(ب)

شکل ۴.۴: نمودار بافت‌نگار و تابع چگالی $BGMW$ برای داده‌های شبیه‌سازی شده با مقادیر پارامتری الف: $a = 1/5$ ، $b = 0/5$ ، $\lambda = 0/5$ ، $\beta = 1/5$ ، $\gamma = 0/5$ ، $\alpha = 1$ ؛ ب: $a = 3/5$ ، $b = 0/5$ ، $\lambda = 0/5$ ، $\beta = 0/2$ ، $\gamma = 2$ ، $\alpha = 0/5$

توزیع بتا وایبل تعدیل یافته تعمیم یافته با پارامترهای واقعی $a = 8$ ، $b = 0.5$ ، $\lambda = 1$ ، $\beta = 0.5$ ، $\gamma = 1/5$ و $\alpha = 0.5$ ، در حجم های ۵۰، ۱۰۰، ۲۰۰ و ۳۰۰ براساس ۱۰۰۰۰ مجموعه داده شبیه سازی شده پرداخته ایم و برآورد درست نمایی ماکسیمم پارامترها را برای هر تکرار توسط روش عددی *BFGS* به دست آورده ایم. میانگین ۱۰۰۰۰ تکرار را به عنوان برآورد نهایی پارامترها، در جدول نمایش داده ایم. مشاهده می کنیم با افزایش حجم نمونه، *RMSE* کاهش پیدا می کند و برآوردها به مقادیر واقعی نزدیک می شوند.

۷.۴ کاربرد مدل در مثال واقعی

در این بخش به بررسی توزیع بتا وایبل تعدیل یافته تعمیم یافته و زیرمدل هایش، روی مجموعه داده های واقعی آرزت که در فصل قبل بیان کردیم، می پردازیم.

جدول ۲.۴ مقادیر مربوط به برآورد درست نمایی ماکسیمم پارامترها با استفاده از الگوریتم ژنتیک و مقادیر *AIC*، *BIC* و *AICc* را برای توزیع بتا وایبل تعدیل یافته تعمیم یافته و زیرمدل هایش، نشان می دهد. با توجه به اینکه توزیع *BGMW* دارای کمترین مقدار *AIC*، *BIC* و *AICc* می باشد، در این صورت برتری این توزیع نسبت به زیرمدل هایش تایید می شود.

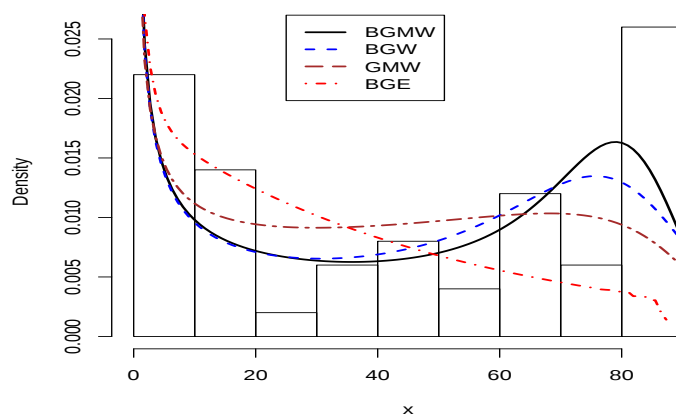
در شکل های ۵.۴ و ۶.۴ نیز نمودار بافت نگار داده های آرزت و تابع چگالی برآورد شده توزیع *BGMW* و زیرمدل هایش به ازای برآورد *MLE* پارامترها رسم شده است. به دلیل واضح بودن نمودارها برخی از زیر مدل ها را در نمودار اول و برخی دیگر را در نمودار دوم رسم کرده ایم. همچنین در جدول ۳.۴ مقادیر مربوط به آماره *LR* و جدول χ^2 نشان داده شده است. با توجه به مقادیر *AIC*، *BIC* و *AICc* مندرج در جدول ۲.۴، نمودار بافت نگار و جدول آماره نسبت درست نمایی، برتری این توزیع نسبت به زیرمدل هایش مشهود است.

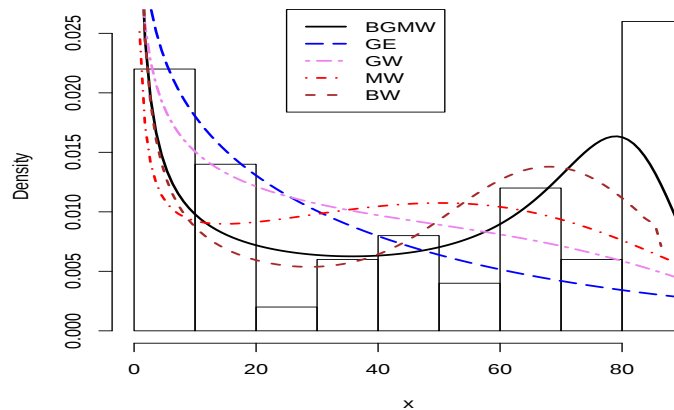
جدول ۱.۴: جدول میانگین برآورد و ریشه میانگین مربعات خطا

n	پارامتر	مقادیر واقعی	میانگین برآورد	RMSE
n=۵۰	$\hat{a}$	۸	۷/۹۹۸۶	۰/۰۱۶۰
	$\hat{b}$	۰/۵	۰/۴۸۵۹	۰/۲۲۰۰
	$\hat{\lambda}$	۱	۱/۱۱۱۱	۰/۵۶۹۶
	$\hat{\beta}$	۰/۵	۰/۷۳۱۹	۰/۳۶۹۳
	$\hat{\gamma}$	۱/۵	۱/۵۹۱۸	۰/۴۷۱۱
	$\hat{\alpha}$	۰/۵	۰/۴۴۹۳	۰/۲۲۵۳
n=۱۰۰	$\hat{a}$	۸	۷/۹۹۹۲	۰/۰۱۳۷
	$\hat{b}$	۰/۵	۰/۵۰۰۲	۰/۲۰۲۸
	$\hat{\lambda}$	۱	۱/۱۱۱۷	۰/۵۰۶۵
	$\hat{\beta}$	۰/۵	۰/۶۵۶۱	۰/۲۸۷۰
	$\hat{\gamma}$	۱/۵	۱/۵۳۴۵	۰/۳۹۶۹
	$\hat{\alpha}$	۰/۵	۰/۴۷۰۰	۰/۱۹۶۰
n=۲۰۰	$\hat{a}$	۸	۸/۰۰۰۳	۰/۰۱۳۵
	$\hat{b}$	۰/۵	۰/۴۹۰۹	۰/۱۷۴۵
	$\hat{\lambda}$	۱	۱/۰۷۴۲	۰/۴۱۴۹
	$\hat{\beta}$	۰/۵	۰/۵۸۹۱	۰/۲۲۷۶
	$\hat{\gamma}$	۱/۵	۱/۵۲۸۳	۰/۳۰۷۰
	$\hat{\alpha}$	۰/۵	۰/۴۸۷۴	۰/۱۸۰۹
n=۳۰۰	$\hat{a}$	۸	۸/۰۰۰۲	۰/۰۱۳۴
	$\hat{b}$	۰/۵	۰/۴۹۰۵	۰/۱۶۳۰
	$\hat{\lambda}$	۱	۱/۰۵۵۸	۰/۳۶۹۲
	$\hat{\beta}$	۰/۵	۰/۵۷۱۲	۰/۲۰۳۷
	$\hat{\gamma}$	۱/۵	۱/۵۲۶۷	۰/۲۷۷۶
	$\hat{\alpha}$	۰/۵	۰/۴۸۹۹	۰/۱۶۷۱

جدول ۲.۴: برآورد پارامترهای مدل‌های برازش داده شده به داده‌های آرزت و مقادیر AIC ، BIC و $AICc$

مدل	برآوردهای ML						AIC	BIC	AICc
	a	b	λ	β	γ	α			
BGMW	۰/۱۳۹	۰/۱۵۳	۰/۰۱۱	۵/۳۴۳	۰/۰۳۱	۰/۵۷۵	۴۴۴/۴۶۰	۴۵۵/۹۳۲	۴۴۶/۴۱۴
BGW	۰/۲۲۹	۰/۱۷۶	۰/۰۱۷	۵/۷۱۰	۰	۰/۳۴۷	۴۴۷/۶۳۸	۴۵۷/۱۹۹	۴۴۹/۰۰۲
GMW	۱	۱	۰/۰۰۳	۴/۲۷۳	۰/۰۶۵	۰/۱۱۱	۴۵۰/۶۰۵	۴۵۸/۲۵۳	۴۵۱/۴۹۴
BGE	۰/۳۶۶	۰/۰۴۷	۰/۴۲۷	۱	۰	۱/۵۰	۴۸۷/۲۱۸	۴۹۴/۸۶۶	۴۸۸/۱۰۷
GE	۱	۱	۰/۰۱۹	۱	۰	۰/۷۸	۴۸۸	۴۹۵/۶۴۸	۴۸۸/۸۸۹
GW	۱	۱	۰/۰۱۱	۵/۳۳۴	۰	۰/۱۳۰	۴۶۲/۱۸۰	۴۶۷/۹۱۶	۴۶۲/۷۰۲
MW	۱	۱	۰/۰۰۱	۰/۳۸۷	۰/۰۲۲	۱	۴۶۰/۴۰۸	۴۶۶/۱۴۵	۴۶۰/۹۳۰
BW	۰/۰۹۷	۰/۰۵۵	۰/۰۲۸	۴/۱۰۱	۰	۱	۴۵۰/۹۱۰	۴۵۸/۵۵۷	۴۵۱/۷۹۸

شکل ۵.۴: نمودار بافت‌نگار و چگالی برآورد شده به ازای توزیع‌های $BGMW$ ، BGW ، GMW و BGE برای داده‌های آرزت



شکل ۶.۴: نمودار بافت‌نگار و چگالی برآورد شده به ازای توزیع‌های $BGMW$ ، GE ، GW ، MW و BW برای داده‌های آرزت

جدول ۳.۴: مقدار آماره LR برای مقایسه مدل

مدل	مقدار آماره LR	$\chi^2_{0.025}$	$\chi^2_{0.975}$	df	رد فرض H_0
BGW vs BGMW	۵/۱۷۸	۰/۰۰۱	۵/۰۲۳۹	۱	✓
GMW vs BGMW	۱۰/۱۴۴	۰/۰۵۰۶	۷/۳۷۷۸	۲	✓
BGE vs BGMW	۴۶/۷۶	۰/۰۵۰۶	۷/۳۷۷۸	۲	✓
GE vs BGMW	۴۷/۵۴	۰/۴۸۴۴	۱۱/۱۴۳۳	۴	✓
GW vs BGMW	۲۳/۷۱۹	۰/۲۱۵۸	۹/۳۴۸۴	۳	✓
MW vs BGMW	۲۱/۹۴۸	۰/۲۱۵۸	۹/۳۴۸۴	۳	✓
BW vs BGMW	۱۰/۴۴۹	۰/۰۵۰۶	۷/۳۷۷۸	۲	✓

نتیجه‌گیری

در این پایان‌نامه به بررسی نسخه‌های تعمیم‌یافته توزیع وایبل پرداختیم که به ازای ترکیبات مختلف پارامتری، نرخ شکست‌های یکنوا، سهمی شکل و سهمی وارونه را در بردارند. همان‌طور که اشاره شد این توابع نرخ شکست غیریکنوا، کاربرد زیادی در قابلیت اطمینان و تحلیل بقا دارند.

در ابتدا به معرفی توزیع تعمیم وایبل تعدیل‌یافته با زیرمدل‌های GR ، GE ، MW ، GW ، توزیع مقادیر فرین، توزیع بتای تجمع‌شده، توزیع وایبل، نمایی و ریلی، پرداختیم و پس از بیان گشتاورهای توزیع GMW و زیرمدل‌هایش، در فصل بعدی، توزیع دیگری را تحت عنوان بتا وایبل تعمیم‌یافته (BGW) با زیرمدل‌های GE ، BE ، GR ، GW ، BW ، BGE ، ریلی و نمایی، معرفی کردیم. همچنین صورت دیگر نمایش تابع توزیع (چگالی) احتمال را بر حسب توزیع GW ، بیان کرده و بعد از محاسبه گشتاور مرتبه k ام توسط روش لاپلاس و روش مستقیم، معادلات غیرخطی را برای برآورد درست‌نمایی ماکسیمم پارامترهای مدل نتیجه گرفتیم و برتری توزیع BGW نسبت به زیرمدل‌هایش را، روی دو مجموعه داده واقعی با استفاده از سه رویکرد معیارهای انتخاب مدل، رسم نمودار بافت‌نگار و تابع چگالی به ازای مقادیر برآورد شده و آماره LR مورد بررسی قرار دادیم. در فصل آخر، با توجه به توزیع GMW و BGW توزیع جدیدی را تحت عنوان بتا وایبل تعدیل‌یافته تعمیم‌یافته، معرفی کردیم. این توزیع شامل تمام زیرمدل‌های دو توزیع فصل قبل بوده و درواقع تعمیمی از این توزیع‌ها می‌باشد. در نتیجه، این انتظار پیش می‌آید که توزیع $BGMW$ دارای کاربرد گسترده‌ای در مهندسی قابلیت اطمینان و تحلیل بقا باشد. بعد از معرفی و آشنایی با تابع توزیع، چگالی و تابع نرخ شکست این توزیع، توانستیم تابع توزیع و چگالی آن را بر حسب توزیع GMW نمایش دهیم و تابع چگالی آماره ترتیبی مرتبه i ام را به دست آوریم. در ادامه گشتاور مرتبه k ام این توزیع را به دو صورت مختلف نمایش داده و معادلات غیرخطی را برای برآورد درست‌نمایی ماکسیمم پارامترها نتیجه گرفتیم و در پایان، به مقایسه این توزیع و زیرمدل‌هایش، با استفاده از سه رویکرد فوق، روی یک مجموعه داده واقعی با نرخ شکست سهمی شکل، بررسی کردیم و مشاهده کردیم که این توزیع نسبت به زیرمدل‌هایش دارای برآزش بهتری می‌باشد.

پیشنهادهای برای آینده تحقیق

۱. از مشتقات دیگر توزیع وایبل، مانند توزیع وایبل گسترش یافته می‌توان به جای توزیع دلخواه در توزیع بتای تعمیم یافته استفاده نمود.
۲. بررسی‌های انجام شده در این پایان‌نامه را علاوه بر داده‌های کامل می‌توان، بر روی داده‌های سانسور شده نیز انجام داد.

پیوست آ

۱. آ ماتریس اطلاع فیشر توزیع BGW

عناصر ماتریس اطلاع K را، برای $i, j, k, l, m, n \in \{0, 1, 2\}$ و با فرض این که V دارای توزیع بتا با پارامترهای a و b ، تعریف می‌کنیم

$$T_{i,j,k,l,m,n} = E[(1-V)^{-i} V^{i-k/\alpha} (1-V^{1/\alpha})^j \{\log(1-V^{1/\alpha})\}^l \\ \times (\log V)^m (\log\{-\log(1-V^{1/\alpha})\}^{1/\beta})^n].$$

با در نظر گرفتن روابط زیر عناصر ماتریس اطلاع را به دست می‌آوریم:

$$V = (1 - e^{-(\lambda t)^\beta})^\alpha \quad 1 - V = 1 - (1 - e^{-(\lambda t)^\beta})^\alpha,$$

$$V^{1/\alpha} = 1 - e^{-(\lambda t)^\beta}, \quad 1 - V^{1/\alpha} = e^{-(\lambda t)^\beta},$$

$$\log(V^{1/\alpha}) = -(\lambda t)^\beta, \quad -\log(V^{1/\alpha}) = (\lambda t)^\beta,$$

$$\log\{-\log(V^{1/\alpha})\}^{1/\beta} = \log(\lambda t), \quad \log V = \alpha \log(1 - e^{-(\lambda t)^\beta}).$$

$$K_{a,a} = -E\left[\frac{\partial^2 l}{\partial a \partial a}\right] = -E\left[-\psi'(a) + \psi'(a+b)\right] = \psi'(a) - \psi'(a+b).$$

$$K_{a,b} = -E\left[\frac{\partial^2 l}{\partial a \partial b}\right] = -E\left[\psi'(a+b)\right] = -\psi'(a+b).$$

$$K_{a,\lambda} = -E\left[\frac{\partial^2 l}{\partial a \partial \lambda}\right] = -E\left[\frac{\alpha \beta t^\beta \lambda^{\beta-1} e^{-(\lambda t)^\beta}}{(1 - e^{-(\lambda t)^\beta})}\right] = \frac{\alpha \beta}{\lambda} T_{0,1,1,1,0,0}.$$

$$K_{a,\alpha} = -E\left[\frac{\partial^2 l}{\partial a \partial \alpha}\right] = -E\left[\log(1 - e^{-(\lambda t)^\beta})\right] = \frac{\psi'(a+b) - \psi'(a)}{\alpha}.$$

$$K_{a,\beta} = -E\left[\frac{\partial^2 l}{\partial a \partial \beta}\right] = -E\left[\frac{\alpha (\lambda t)^\beta \log(\lambda t) e^{-(\lambda t)^\beta}}{(1 - e^{-(\lambda t)^\beta})}\right] = \alpha T_{0,1,1,1,0,1}.$$

$$\begin{aligned}
 K_{\lambda, \alpha} &= -E \left[\frac{\partial^2 l}{\partial \lambda \partial \alpha} \right] \\
 &= -E \left[\frac{a\beta\lambda^{\beta-1}t^\beta e^{-(\lambda t)^\beta}}{(\lambda - e^{-(\lambda t)^\beta})} - (b-1) \left\{ \frac{\beta\lambda^{\beta-1}t^\beta e^{-(\lambda t)^\beta} (\lambda - e^{-(\lambda t)^\beta})^{\alpha-1}}{\lambda - (\lambda - e^{-(\lambda t)^\beta})^\alpha} \right. \right. \\
 &\quad + \frac{\alpha\beta\lambda^{\beta-1}t^\beta e^{-(\lambda t)^\beta} (\lambda - e^{-(\lambda t)^\beta})^{\alpha-1} \log(\lambda - e^{-(\lambda t)^\beta})}{\lambda - (\lambda - e^{-(\lambda t)^\beta})^\alpha} \\
 &\quad \left. \left. + \frac{\alpha\beta\lambda^{\beta-1}t^\beta e^{-(\lambda t)^\beta} (\lambda - e^{-(\lambda t)^\beta})^{\alpha-1} \log(\lambda - e^{-(\lambda t)^\beta})}{[\lambda - (\lambda - e^{-(\lambda t)^\beta})^\alpha]^\alpha} \right\} \right] \\
 &= \frac{\beta}{\lambda} [aT_{\circ, \lambda, \lambda, \lambda, \lambda, \circ} - (b-1) \{T_{\lambda, \lambda, \lambda, \lambda, \circ} + T_{\lambda, \lambda, \lambda, \lambda, \circ} + T_{\lambda, \lambda, \lambda, \lambda, \lambda}\}].
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_{\lambda, \beta} &= -E \left[\frac{\partial^2 l}{\partial \lambda \partial \beta} \right] \\
 &= -E \left[\frac{1}{\lambda} \left(\lambda - (\lambda t)^\beta - \beta(\lambda t)^\beta \log(\lambda t) - (a\alpha - 1) \left\{ \frac{e^{-(\lambda t)^\beta} (\lambda t)^\beta \log(\lambda t)}{(\lambda - e^{-(\lambda t)^\beta})} + \frac{e^{-(\lambda t)^\beta} (\lambda t)^\beta}{(\lambda - e^{-(\lambda t)^\beta})} \right. \right. \right. \\
 &\quad + \frac{\beta e^{-(\lambda t)^\beta} (\lambda t)^\beta \log(\lambda t)}{(\lambda - e^{-(\lambda t)^\beta})} - \frac{\beta e^{-(\lambda t)^\beta} (\lambda t)^\beta \log(\lambda t)}{(\lambda - e^{-(\lambda t)^\beta})^\alpha} \left. \right\} - (b-1) \left\{ \frac{\alpha(\lambda - e^{-(\lambda t)^\beta})^{\alpha-1} e^{-(\lambda t)^\beta} (\lambda t)^\beta}{\lambda - (\lambda - e^{-(\lambda t)^\beta})^\alpha} \right. \\
 &\quad + \frac{\alpha(\alpha-1)\beta(\lambda - e^{-(\lambda t)^\beta})^{\alpha-1} e^{-(\lambda t)^\beta} (\lambda t)^\beta \log(\lambda t)}{\lambda - (\lambda - e^{-(\lambda t)^\beta})^\alpha} - \frac{\alpha\beta(\lambda - e^{-(\lambda t)^\beta})^{\alpha-1} e^{-(\lambda t)^\beta} (\lambda t)^\beta \log(\lambda t)}{\lambda - (\lambda - e^{-(\lambda t)^\beta})^\alpha} \\
 &\quad \left. \left. + \frac{\alpha\beta(\lambda - e^{-(\lambda t)^\beta})^{\alpha-1} e^{-(\lambda t)^\beta} (\lambda t)^\beta \log(\lambda t)}{\lambda - (\lambda - e^{-(\lambda t)^\beta})^\alpha} + \frac{\alpha^\alpha \beta(\lambda - e^{-(\lambda t)^\beta})^{\alpha-1} e^{-(\lambda t)^\beta} (\lambda t)^\beta \log(\lambda t)}{[\lambda - (\lambda - e^{-(\lambda t)^\beta})^\alpha]^\alpha} \right\} \right) \right] \\
 &= -\frac{1}{\lambda} \left[\lambda + T_{\circ, \circ, \circ, \lambda, \circ, \circ} + \beta T_{\circ, \circ, \circ, \lambda, \circ, \lambda} - (a\alpha - 1) \{ \beta T_{\circ, \lambda, \lambda, \lambda, \circ, \lambda} + T_{\circ, \lambda, \lambda, \lambda, \circ, \circ} + \beta T_{\circ, \lambda, \lambda, \lambda, \circ, \lambda} - \beta T_{\circ, \lambda, \lambda, \lambda, \circ, \lambda} \} \right. \\
 &\quad \left. + (b-1) \alpha \{ T_{\lambda, \lambda, \lambda, \lambda, \circ, \circ} + \beta T_{\lambda, \lambda, \lambda, \lambda, \circ, \lambda} + \beta T_{\lambda, \lambda, \lambda, \lambda, \circ, \lambda} - (\alpha-1) \beta T_{\lambda, \lambda, \lambda, \lambda, \circ, \lambda} - \alpha \beta T_{\lambda, \lambda, \lambda, \lambda, \circ, \lambda} \} \right].
 \end{aligned}$$

۲.آ الگوریتم ژنتیک

محققان با مشاهده سازگاری، بقا، خودترمیمی، هدایت و تولید مثل و دیگر خصوصیات سیستم‌های طبیعی و این نکته که طبیعت مسایل خود را چگونه حل می‌کند، به فکر تقلید از روش‌های طبیعی در حل مسایل سخت و طراحی سیستم‌ها افتادند. ایده اصلی الگوریتم ژنتیک هم، بر اساس این تفکر و بر پایه تئوری تکامل داروین که در مورد تحول تدریجی انواع بیان شده است، شکل گرفت. وی حفظ تغییرات فردی مفید و حذف تغییرات فردی زیان آور را انتخاب طبیعی نامید و تغییرات حاصل در موجودات زنده را به انتخاب طبیعی نسبت داد. اصولاً الگوریتم ژنتیک یکی از مهم‌ترین الگوریتم‌های جستجوگر ابتکاری است که از آن برای بهینه‌سازی توابع مختلف استفاده می‌شود. الگوریتم ژنتیک جزئی از مسایل تکاملی است که خود جزئی از هوش مصنوعی است. تعریف زیر توسط گلدبرگ^۱ (۱۹۸۹) بیان شده است.

الگوریتم‌های ژنتیکی، تکنیک‌های جستجوی تصادفی هستند که بر اساس انتخاب طبیعی و نسل‌شناسی طبیعی کار می‌کنند.

جواب مسئله‌ای که از طریق الگوریتم ژنتیک حل می‌شوند، رفته رفته بهبود می‌یابد. الگوریتم ژنتیک با یک مجموعه از جواب‌ها که از طریق کروموزوم‌ها نشان داده می‌شوند، شروع می‌شود. این مجموعه جواب‌ها جمعیت^۲ اولیه نام دارد. در این الگوریتم، جواب‌های حاصل از یک جمعیت، برای تولید جمعیت بعدی استفاده می‌شود. در این فرایند امید است که جمعیت جدید نسبت به جمعیت قبلی بهتر باشد. انتخاب بعضی از جواب‌ها از میان کل جواب‌ها (والدین^۳) به منظور ایجاد جواب‌های جدید یا همان فرزندان^۴ بر اساس برازندگی آن‌ها می‌باشد. طبیعی است که جواب‌های مناسب‌تر شانس بیشتری برای تولید مجدد داشته باشند. این فرایند تا برقراری شرطی که تعیین شده است، (مانند تعداد جمعیت یا میزان بهبود جواب) ادامه دارد.

۱.۲.آ ساختار کلی الگوریتم ژنتیک

برای بیان ساختار کلی الگوریتم ژنتیک، ابتدا واژگان زیر را تعریف می‌کنیم:

کروموزوم:

رشته یا دنباله‌ای از بیت‌ها که به عنوان شکل کد شده یک جواب ممکن (مناسب یا نامناسب) از مسئله مورد مورد نظر می‌باشد را، کروموزوم گویند. در حقیقت بیت‌های یک کروموزوم، نقش ژن‌ها را در طبیعت بازی می‌کنند. هر بیت متغیر گسسته است که از یک مجموعه Q عضوی انتخاب می‌شود. چنان‌چه از کدگذاری دودویی استفاده شود، هر بیت یکی از دو مقدار ۰ و ۱ را خواهد پذیرفت، بنابراین $Q = 2$ می‌باشد. یک کروموزوم دارای n بیت یا ژن می‌باشد.

ژن:

عناصر تشکیل دهنده یک کروموزوم هستند که معمولاً عدد یا کلمه یا حتی دستورات برنامه‌نویسی هستند.

^۱Goldberg

^۲Population

^۳Parent

^۴Offspring

جمعیت ژنتیکی:

به مجموعه‌ای از کروموزوم‌ها، جمعیت گفته می‌شود. یکی از ویژگی‌های الگوریتم‌های ژنتیک این است که به جای تمرکز بر روی یک نقطه از فضای جستجو یا یک کروموزوم، بر روی جمعیتی از کروموزوم‌ها کار می‌کنند. به این ترتیب در هر مرحله، الگوریتم دارای جمعیتی از کروموزوم‌ها بوده که خواص مورد نظر را بیشتر از جمعیت مرحله قبل دارا می‌باشد. هر جمعیت یا یک نسل از کروموزوم‌ها، دارای یک اندازه می‌باشد که به اندازه جمعیت معروف است. اندازه جمعیت معرف تعداد کروموزوم‌های موجود در جمعیت یا یک نسل است. اگر تعداد کروموزوم‌ها خیلی کم باشد، امکان شکل‌گیری عملیات جابه‌جایی به وسیله الگوریتم ژنتیک بسیار کم خواهد بود و تنها قسمت کمی از فضای جستجو مورد کاوش قرار خواهد گرفت. از طرف دیگر، اگر تعداد کروموزوم‌ها خیلی زیاد باشد، سرعت الگوریتم بسیار کند خواهد شد.

تابع برازندگی:

یکی از مراحل الگوریتم ژنتیک ارزیابی جواب‌های به‌دست آمده در هر مرحله است. در واقع ارزش جواب‌های به‌دست آمده در هر مرحله تعیین می‌شود. مناسب بودن یا نبودن جواب با معیاری که از تابع هدف به دست می‌آید، سنجیده می‌شود. هرچه یک جواب مناسب‌تر باشد، مقدار برازندگی بیشتری دارد. برای آن که شانس بقای چنین جوابی بیشتر شود احتمال بقای آن، متناسب با مقدار برازندگی آن در نظر گرفته می‌شود. بنابراین رشته‌ای که برازنده‌تر است با احتمال بیشتری در تولید فرزندان شرکت می‌کند و دنباله‌های بیشتری را به‌وجود می‌آورد. با ارزش‌ترین جواب‌ها در هر مرحله مانند قویترین موجودات در یک جمعیت می‌باشند. در تکثیر، رشته‌های با میزان تطبیق کم، از جمعیت حذف می‌شوند و رشته‌های با میزان تطبیق زیاد، تاثیر بیشتری در تولید جمعیت بعدی خواهند داشت.

عملگر انتخاب:

وظیفه اصلی عملگر انتخاب، هدایت الگوریتم به نواحی امیدبخش فضای جواب است. چون در الگوریتم ژنتیک اندازه جمعیت ثابت است، عملگر انتخاب با شناسایی جواب‌های خوب، ساختن کپی از آن‌ها و حذف جواب‌های بد، علاوه بر حفظ اندازه جمعیت باعث تکثیر و افزوده شدن جواب‌های خوب در جمعیت می‌شود.

عملگر ترکیب یا جابجایی:

ترکیب به معنی باز ترکیب اطلاعات ژنتیکی بین کروموزوم‌ها می‌باشد و در واقع عملگر ترکیب یک روش برای اشتراک اطلاعات مابین کروموزوم‌ها می‌باشد. این عملگر، خصیصه‌های والدین را برای ساختن فرزندان ترکیب می‌کند تا این‌که کروموزوم‌های بهتری ایجاد شوند. به‌طور معمول عملگر ترکیب روی یک جفت از کروموزوم‌ها عمل می‌کند و دو فرزند برای هر جفت تولید می‌شود. عملگر ترکیب می‌تواند روی چندین والد نیز عمل کند که در این صورت خصیصه‌های بیش از دو والد را برای تولید فرزندان ترکیب می‌کند. علاوه بر این عملگر ترکیب می‌تواند بیش از دو فرزند را برای هر گروه از والدین تولید کند. وظیفه اصلی این عملگر بهبود برازندگی جمعیت می‌باشد. عملگر ترکیب برای حفظ و تنوع و گوناگونی جمعیت اجازه نمی‌دهد که فرزندان فقط ژن‌های خوب را به ارث ببرند. برحسب این که ژن‌های والد چگونه ژن‌های فرزندان را تولید می‌کنند عملگر ترکیب به انواع مختلفی تقسیم می‌شوند. احتمال وقوع ترکیب در یک کروموزوم را با P_c نشان می‌دهند.

عملگر جهش:

بعد از اعمال عملگر ترکیب به منظور اجتناب از همگرایی به بهینه محلی و ایجاد تنوع و گوناگونی در جمعیت با استفاده از عملگر جهش، یک تعداد از کروموزوم‌های به‌دست آمده تغییر داده می‌شوند. این عملگر ابتدا چند ژن از یک کروموزوم را انتخاب می‌کند و مقادیر آن‌ها را تغییر می‌دهد. با این عمل، کروموزوم‌های جدیدی که احتمالاً در کل جمعیت وجود نداشته‌اند، به‌وجود می‌آید. احتمال وقوع جهش در یک کروموزوم را نرخ جهش می‌گویند و با P_m نشان می‌دهند.

شرط توقف:

یکی دیگر از عوامل بهبود در الگوریتم ژنتیک برای پیاده‌سازی روی یک مسئله خاص، شرط توقف است. عمده‌ترین شروط توقف را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد:

۱. رسیدن به جوابی که دارای صلاحیت (برازندگی) بیشتر از مقدار تعیین‌شده باشد.
۲. تولید تعداد معلوم نسل.
۳. رسیدن به جمعیتی که برازندگی آن‌ها تقریباً یکی باشند، یا تغییرات محسوس در جمعیت صورت نگیرد یا واریانس برازندگی جواب‌ها از مقدار مشخص، کمتر گردد.

۲.۲.۲. مراحل اجرای الگوریتم ژنتیک

پس از بیان مفاهیم اولیه، مراحل مختلف در استفاده از الگوریتم ژنتیک مورد بررسی قرار می‌گیرد. ابتدا با توجه به‌صورت مسئله، متغیرهایی که باید تعیین شوند، مشخص می‌شوند. سپس این متغیرها به نحو مناسبی کدگذاری شده و به شکل کروموزوم نمایش داده می‌شوند. بر اساس تابع هدف، یک تابع برازندگی برای کروموزوم‌ها تعریف می‌گردد و یک جمعیت اولیه دلخواه نیز به‌طور تصادفی انتخاب می‌شود. به‌دنبال آن، میزان تابع برازندگی برای هر کروموزوم جمعیت اولیه محاسبه می‌شود. سپس مراحل زیر به‌ترتیب اجرا می‌شوند:

۱. تولید جمعیت اولیه و محاسبه مقدار برازندگی.
۲. انتخاب کروموزوم‌هایی برای ایجاد فرزندان با استفاده از عملگر انتخاب.
۳. انجام عملگر ترکیب با احتمال وقوع P_c ، و تولید فرزند.
۴. انجام عملگر جهش با احتمال وقوع P_m ، و تولید فرزند.
۵. ارزیابی فرزندان با محاسبه مقدار برازندگی هر کروموزوم.
۶. جایگزین کردن کروموزوم‌های شایسته‌تر (ایجاد جمعیت جدید).
۷. آزمون شرایط توقف و برگرداندن بهترین جواب در صورت توقف.

۳.۲.آ مزایای الگوریتم ژنتیک

برای درک بهتر مزیت‌های الگوریتم ژنتیک ابتدا مشکلاتی را که در روش‌های کلاسیک (روش‌هایی که در هر تکرار یک جواب را بهتر می‌کنند و از قوانین و تبدیلات غیراحتمالی استفاده می‌کنند) مانند روش جستجوی تصادفی ساده و روش عددی شبه‌نیوتن، وجود دارند، مورد بررسی قرار می‌دهیم. بیشتر الگوریتم‌های کلاسیک به صورت نقطه‌به‌نقطه و با استفاده از یک نقطه شروع و با اعمال و قوانین دقیق یک جهت را مشخص می‌کنند، و با حرکت در آن جهت به یک نقطه بهینه می‌رسند. حال این نقطه را به عنوان یک نقطه شروع بر می‌گزینند. فرآیند بالا تا رسیدن به شرط توقف تکرار می‌گردد. روش‌های کلاسیک را با توجه به نوع انتخاب جهت به دو دسته

۱. جستجوی مستقیم

۲. روش‌های گرادیان

تقسیم بندی می‌کنند.

معایب روش‌های بهینه‌سازی کلاسیک:

۱. وابستگی شدید این روش‌ها به نقطه شروع، که حتی انتخاب نامناسب آن در بعضی از حالات باعث شکست الگوریتم می‌شود.

۲. گرفتار شدن در نقاط بهینه محلی.

۳. معمولاً این الگوریتم‌ها در حل بعضی از مسایل کارا و در حل نوعی دیگر از مسایل ناکارا عمل می‌کنند.

۴. این الگوریتم‌ها را معمولاً برای حل مسایل بهینه‌سازی گسسته نمی‌توان به کار برد.

مزایای الگوریتم ژنتیک در بهینه‌سازی:

برخی از مزایای الگوریتم ژنتیک را به صورت زیر می‌توان بیان کرد:

۱. الگوریتم ژنتیک در یک جمعیت از جواب‌ها و با مجموعه‌ای از آن‌ها شروع به جستجو می‌کند. بدین ترتیب به جای یافتن نقطه مناسب، محدوده‌های مناسبی در فضای جستجو شناسایی می‌گردد. در نتیجه همزمان با ایجاد شانس بیشتر برای متغیرهای شایسته‌تر برای بقا و تولید مثل، جستجوی سایر مناطق فضای جستجو با شایستگی کمتر نیز نادیده گرفته نمی‌شود. لذا احتمال یافتن نقطه بهینه سراسری افزایش می‌یابد، این ویژگی به خصوص برای توابع با تغییرات ناگهانی و دارای چندین نقطه بهینه محلی مناسب می‌باشد. یکی از مهمترین تفاوت‌های الگوریتم ژنتیک با الگوریتم‌های کلاسیک هم، در این امتیاز است.

۲. در الگوریتم ژنتیک با تابع برازندگی سروکار داریم که معمولاً از تابع هدف استفاده می‌کند. بنابراین فقط اطلاعاتی درباره خود تابع هدف نیاز داریم نه به مشتق‌های مختلف آن و سایر موارد. به همین دلیل به راحتی می‌توان از این روش در بهینه‌سازی توابع گسسته یا توابع مشتق‌ناپذیر یا توابع با تغییرات ناگهانی و چندین جواب بهینه محلی، استفاده کرد.

۳. استفاده از قواعد احتمالی و ابتکاری به جای قواعد قطعی، یکی دیگر از امتیازات الگوریتم ژنتیک است. این امتیاز سبب دوری از بهینه‌های محلی می‌شود. البته استفاده الگوریتم ژنتیک از قواعد احتمالی به معنای يك جستجو صرفاً تصادفی نیست، بلکه این الگوریتم از انتخاب تصادفی به عنوان ابزاری برای هدایت عمل جستجو استفاده می‌کند. توجه کنید که الگوریتم ژنتیک فقط به نسل قبل وابسته است، پس می‌توان آن را نوعی فرایند مارکف نیز دانست. برای مطالعه بیشتر به مطیع و همکاران (۱۳۸۹) مراجعه شود.

پیوست ب

کدهای برنامه نویسی

در این پیوست به بیان کدهای مربوط به فصل چهارم پرداخته ایم و فصل های دیگر نیز به طور مشابه به دست می آیند.

- کدهای مربوط به نمودار تابع چگالی توزیع *BGMW*، قسمت الف شکل ۱.۴.

```
f<-function(x,a,b,L,B,G,A){
  (A*(L^B)*(x^(B-1))*(B+(G*x))*
  exp((G*x)-((L*x)^B)*exp(G*x))*
  (1-exp(-(L*x)^B)*exp(G*x)))^(a*A-1)*
  (1-((1-exp(-(L*x)^B)*exp(G*x)))^A)))^
  (b-1))/(beta(a,b))
}
curve(f(x,8,1,1.5,1,.5,1),xlim=c(0,3),
xlab="value of x",ylab="density function",
lwd=2,col="cyan")
curve(f(x,8,.5,1.5,1,.5,1),add=TRUE,
xlim=c(0,3), lty=2,lwd=2,col="Blue")
curve(f(x,1.5,1,1.5,1,.5,1),add=TRUE,
xlim=c(0,3), lty=4,lwd=2,col="red")
curve(f(x,1.5,.5,1.5,1,.5,1),add=TRUE,
xlim=c(0,10),lty=3,lwd=2,col="black")
legend(2.3,1.37,c("a=8,b=1","a=8,b=.5",
"a=1.5,b=1","a=1.5,b=.5"),lty=c(1,2,4,3),
text.font=.5,lwd=2,cex=.7,
col=c("cyan","Blue","red","black"))
```

- نمودار نرخ شکست توزیع *BGMW*، قسمت الف شکل ۲.۴.

```

Fbar<-function(x,a,b,L,B,G,A){
  (pbeta(1-(1-exp((-L*x)^B)*exp(G*x)))^A,
  b,a))/(pbeta(1,b,a))}
f<-function(x,a,b,L,B,G,A){
  (A*(L^B)*(x^(B-1))*(B+(G*x))*
  exp((G*x)-((L*x)^B)*exp(G*x))*
  (1-exp((-L*x)^B)*exp(G*x)))^(a*A-1)*
  (1-((1-exp((-L*x)^B)*exp(G*x)))^A))^(b-1))/
  (beta(a,b))
}
h<-function(x,a,b,L,B,G,A){
  f(x,a,b,L,B,G,A)/Fbar(x,a,b,L,B,G,A)}
curve(h(x,.5,.5,.25,.6,.001,12),
xlim=c(0,100),add=TRUE,xlab="value of t",
ylab="failure rate h(t)",lty=4,lwd=2,col="red")
curve(h(x,.5,.5,.01,.5,.001,.5),xlim=c(0,100),
add=TRUE,,lty=1,lwd=2,col="green")
curve(h(x,.5,.5,.01,5,.001,.5),xlim=c(0,100),
add=TRUE,,lty=2,lwd=2,col="blue")
curve(h(x,.5,.5,.01,5,.001,.1),xlim=c(0,200),
add=TRUE,,lty=3,lwd=2,col="black")
legend(45,.038,c("alpha=12,beta=.6,
lambda=.25 unimodal","alpha=.5,beta=.5,
lambda=.01 monotonic dec","alpha=.5,
beta=5,lambda=.01 monotonic inc",
"alpha=.1,beta=5,lambda=.01 bathtub"),
lty=c(4,1,2,3),text.font=.5,lwd=2,cex=.6,
col=c("red","green","blue","black"))

```

• نمودار تابع توزیع دقیق و تجربی داده‌های شبیه‌سازی شده شکل ۳.۴.

```

n<-1000
x<-c()
for(i in 1:n){
  a<-1.5
  b<-.5
  L<-1
  B<-1

```

```
G<-.5
A<-1
V<-function(a,b){
  rbeta(1,a,b)}
V<-V(a,b)
E<-function(x){
  (1-exp((- (L*x)^B)*exp(G*x)))^A-V
}
x[i]<-uniroot(E,c(0,100))$root
x
}
plot(ecdf(x),xlim=c(0,4),col="red",lwd=3)
curve((pbeta((1-exp((- (L*x)^B)*exp(G*x)))^
A,a,b))/(pbeta(1,a,b)),xlim=c(0,4)
,ylim=c(0,1),add=TRUE,lty=1,lwd=2)
legend(c(2.7,4),c(.8,.95),
c("empirical cdf","exact pdf"),
col=c("red","black")
,lty=c(3,1),lwd=c(2,3),cex=.7)
```

- نمودار بافت‌نگار و چگالی متناظر داده‌های شبیه‌سازی شده، شکل ۴.۴ قسمت الف.

```
set.seed(1)
n<-1000
x<-c()
for(i in 1:n){
  a<-1.5
  b<-.5
  L<-1.5
  B<-1.5
  G<-.5
  A<-1
  V<-function(a,b){
    rbeta(1,a,b)}
  V<-V(a,b)
  E<-function(x){
    (1-exp((- (L*x)^B)*exp(G*x)))^A-V
  }
  x[i]<-uniroot(E,c(0,100))$root
```

```

x
}
f<-function(x,a,b,L,B,G,A){
  (A*(L^B)*(x^(B-1))*(B+(G*x))*
  exp((G*x)-((L*x)^B)*exp(G*x))*
  (1-exp((-L*x)^B)*exp(G*x)))^
  (a*A-1)*(1-((1-exp((-L*x)^B)
  *exp(G*x)))^(A)))^(b-1))/
  (beta(a,b))
}
hist(x,freq=FALSE,ylab="Density",
breaks=20)#break=8
curve(f(x,1.5,.5,1.5,1.5,.5,1),
col="red",add=TRUE,lwd=2)

```

- کد مربوط به برآورد MLE داده‌های شبیه‌سازی شده در جدول ۱.۴ برای حجم نمونه $n = 50$.

```

n<-50
m<-10000
x<-c()
M<-list()
for(i in 1:m){

a<-8
b<- .5
L<-1
B<- .5
G<-1.5
A<- .5
grr<-function(theta){
a<-theta[1]
b<-theta[2]
L<-theta[3]
B<-theta[4]
G<-theta[5]
A<-theta[6]
n<-nrow(X)
c(-n*digamma(a)+n*digamma(a+b)+

```

```

A*(apply(log(1-exp((-L*X)^B)*exp(G*X))),2,sum)),
-n*digamma(b)+n*digamma(a+b)+
apply(log(1-(1-exp((-L*X)^B)*exp(G*X)))^A),2,sum),
((n*B)/L)-B*(L^(B-1))*apply((X^B)*(exp(G*X)),2,sum)
+(a*A-1)*B*(L^(B-1))
*apply((X^B)*(exp(G*X))*(exp((-L*X)^B)*exp(G*X)))
/(1-exp((-L*X)^B)*exp(G*X)),2,sum)-
(b-1)*A*B*(L^(B-1))*apply((X^B)*(exp(G*X))*
(exp((-L*X)^B)*exp(G*X)))
*((1-exp((-L*X)^B)*exp(G*X)))^(A-1))
/(1-(1-exp((-L*X)^B)*exp(G*X)))^A),2,sum),
n*log(L)+apply(log(X),2,sum)+
apply(1/(B+G*X),2,sum)-(L^B)*apply((X^B)*log(L*X)
*exp(G*X),2,sum)+(a*A-1)*
(L^B)*apply(exp((-L*X)^B)*
exp(G*X))*(X^B)
*log(L*X)*exp(G*X)/
(1-exp((-L*X)^B)*exp(G*X)),2,sum)-
(b-1)*A*(L^B)*apply(((1-exp((-L*X)^B)*exp(G*X)))^(A-1))
*exp((-L*X)^B)*exp(G*X)*exp(G*X)*(X^B)*log(L*X)
/(1-(1-exp((-L*X)^B)*exp(G*X)))^A),2,sum),
apply(X/(B+G*X),2,sum)+apply(X,2,sum)-
(L^B)*apply((X^(B+1))*exp(G*X),2,sum)
+(a*A-1)*(L^B)*apply(exp((-L*X)^B)*exp(G*X))*
exp(G*X)*(X^(B+1))
/(1-exp((-L*X)^B)*exp(G*X)),2,sum)-(b-1)*A*(L^B)
*apply(((1-exp((-L*X)^B)*exp(G*X)))^(A-1))
*exp((-L*X)^B)*exp(G*X)*exp(G*X)*(X^(B+1))
/(1-(1-exp((-L*X)^B)*exp(G*X)))^A),2,sum),
(n/A)+a*apply(log(1-exp((-L*X)^B)*exp(G*X)),2,sum)-
(b-1)*apply(((1-exp((-L*X)^B)*exp(G*X)))^A)*
log(1-exp((-L*X)^B)*exp(G*X))
/(1-(1-exp((-L*X)^B)*exp(G*X)))^A),2,sum))
}
BGW.lik<-function(theta){
a<-theta[1]
b<-theta[2]
L<-theta[3]
B<-theta[4]

```

```

G<-theta[5]
A<-theta[6]
n<-nrow(X)
logl<-n*log(A)+n*B*log(L)+(B-1)*apply(log(X),2,sum)+
apply(log(B+G*X),2,sum)-n*
log(beta(a,b))+G*apply(X,2,sum)-
(L^B)*apply((X^B)*exp(G*X),2,sum)+
(a*A-1)*apply(log(1-exp((-L*X)^B)*exp(G*X))),2,sum)+
(b-1)*apply(log(1-(1-exp((-L*X)^B)*exp(G*X)))^A),2,sum)
return(-logl)
}
for(j in 1:n){
V<-function(a,b){
rbeta(1,a,b)
}
V<-V(a,b)
E<-function(x){
(1-exp((-L*x)^B)*exp(G*x))^A-V
}
x[j]<-uniroot(E,c(0,100))$root
x
}
X<-as.matrix(x)
M[[i]]<-optim(c(8,.5,1,.5,1.5,.5),
BGW.lik,method="BFGS",control=list(maxit=500
,parscale=c(0.001,0.001,0.001,0.001,0.001,0.001)))$par
}
#M
estim<-do.call(rbind, M)
#estim
hat<-colMeans(estim)
hat
MSE<-colMeans((estim-matrix(c(8,.5,1,.5,1.5,.5),
nrow=m,ncol=6,byrow=TRUE))^2)
RMSE<-(MSE)^(1/2)
RMSE

```

• کدهای مربوط به محاسبه مقادیر معیارهای انتخاب مدل، جدول ۲.۴.

```

BGW.lik<-function(theta,X){

```

```

a<-theta[1]
b<-theta[2]
L<-theta[3]
B<-theta[4]
G<-theta[5]
A<-theta[6]
n<-nrow(X)
logl<-n*log(A)+n*B*log(L)+(B-1)*apply(log(X),2,sum)+apply(log(B+G*X),2,sum)-n*
log(beta(a,b))+G*apply(X,2,sum)-(L^B)*apply((X^B)*exp(G*X),2,sum)+
(a*A-1)*apply(log(1-exp((-L*X)^B)*exp(G*X))),2,sum)+
(b-1)*apply(log(1-(1-exp((-L*X)^B)*exp(G*X))^A),2,sum)
}
BGW.lik(theta,X)
k
AIC<-(2*k)-2*BGW.lik(theta,X)
AIC
BIC<-k*log(n)-2*BGW.lik(theta,X)
BIC
AICc<-AIC+(2*k*(k+1))/(n-k-1)
AICc

```

k تعداد پارامترهای آزاد مدل

• کد مربوط به محاسبه آماره LR داده‌های واقعی، مربوط به جدول ۳.۴.

```

x<-c(0.10,0.20,1,1,1,1,1,2,3,6,7,
11,12,18,18,18,18,18,21,32,36,40,
45,46,47,50,55,60,63,63,67,67,
67,67,72,75,79,82,82,83,84,
84,84,85,85,85,85,85,86,86)
X<-as.matrix(x)
theta0<-c(.097,.055,.028,4.101,0,1)
theta1<-c(.139,.153,.011,5.343,.031,.575)
BGW.lik<-function(theta,X){
a<-theta[1]
b<-theta[2]
L<-theta[3]
B<-theta[4]
G<-theta[5]
A<-theta[6]

```

```

n<-nrow(X)
logl<-n*log(A)+n*B*log(L)+(B-1)
*apply(log(X),2,sum)+
apply(log(B+G*X),2,sum)-n*
log(beta(a,b))+G*apply(X,2,sum)-
(L^B)*apply((X^B)*exp(G*X),2,sum)+
(a*A-1)*apply(log(1-exp((-L*X)^B)*
exp(G*X))),2,sum)+
(b-1)*apply(log(1-(1-exp((-L*X)^B)*
exp(G*X)))^A),2,sum)
}
LR<- -2*(BGW.lik(theta0,X)-BGW.lik(theta1,X))
LR

```

مراجع

- [۱] مطیع قادر ح، لطفی ش، سید اسفهان م، (۱۳۸۹)، ”مروری بر برخی روش‌های هوشمند“ چاپ اول، انتشارات دانشگاه آزاد اسلامی، شبستر، ایران.
- [2] Aarset M. (1987), ”How to Identify Bathtub Hazard Rate”, IEEE Transactions on Reliability, 36, 106-108.
- [3] Akaike H. (1974), ”A New Look at the Statistical Model Identification”, IEEE Transactions on Automatic Control, 19, 716-723.
- [4] Barreto-Souza W. , Santos A. and Cordeiro G. (2010), ”The Beta Generalized Exponential Distribution”, Journal of Statistical Computation and Simulation, 80, 159-72.
- [5] Bergman B. and Klefsjö B. (2008), ”Total Time on Test Plots”, Encyclopedia of Statistics in Quality and Reliability.
- [6] Bickel P. and Doksum K. (2001), *Mathematical Statistics: Basic Ideas and Selected Topics*. Second edition.
- [7] Bucar T. , Nagode M. and Fajdiga M. (2004), ”Reliability Approximation Using Finite Weibull Mixture Distributions”, Reliability Engineering and System Safety, 84, 241-251.
- [8] Burnham K. , Anderson D. (2002), ”Model Selection and Multimodel Inference: A Practical Information-Theoretic Approach”, Springer-Verlag.
- [9] Carrasco J. , Ortega E. and Cordeiro G. (2008), ”Generalized Modified Weibull Distribution for Lifetime Modeling”, Computational Statistics and Data Analysis, 53, 450-462.
- [10] Choudhury A. (2005), ”A Simple Derivation of Moments of the Exponentiated Weibull Distribution”, Metrika, 62, 17-22.

- [11] Corless R. , Gonnet G. , Hare D. , Jeffrey D. and Knuth D. (1996), "*On the Lambert W Function*", Advances in Computational Mathematics, 5, 329–359.
- [12] Glaser R. (1980), "*Bathtub and Related Failure Rate Characterizations*", Journal of the American Statistical Association, 75, 667-672.
- [13] Gradshteyn I. and Ryzhik I. (2000), "*Table of Integrals, Series and Products*", San Diego: Academic Press.
- [14] Gupta R. and Kundu D. (1999), "*Generalized Exponential Distributions*", Australian and New Zealand Journal of Statistics, 41, 173-188.
- [15] Gupta R. and Kundu D. (2001), "*Exponentiated Exponential Distribution: An Alternative to Gamma and Weibull Distributions*", Biometrical Journal, 43, 117-130.
- [16] Jiang R. , Ji P. and Xiao X. (2003), "*A GING Property of Unimodal Failure Rate Models*", Reliability Engineering System Safety, 79, 113–116.
- [17] Kundu D. and Rakab M. (2005), "*Generalized Rayleigh Distribution: Different Methods of Estimation*", Computational Statistics and Data Analysis, 49, 187–200.
- [18] Lai C. and Xie M. (2006), "*Stochastic Ageing and Dependence for Reliability*", Germany: Springer.
- [19] Lai C. , Xie M. and Murthy D. (2003), "*A Modified Weibull Distribution*", IEEE Transactions on Reliability, 52, 33–37.
- [20] Lee C. , Famoye F. and Olumolade O. (2007), "*Beta-Weibull Distribution: Some Properties and Applications to Censored Data*", Journal of Modern Applied Statistical Methods, 6, 173–186.
- [21] Mudholkar G. and Hutson A. (1996), "*The Exponentiated Weibull Family: Some Properties and A Flood Data Application*", Communications in Statistics-Theory and Methods, 25, 3059–3083.
- [22] Mudholkar G. , Srivastava D. and Kollia G. (1996), "*A Generalization of the Weibull Distribution with Application to the Analysis of Survival Data*", Journal of the American Statistical Association, 91, 1575–83.

- [23] Mudholkar G. and Srivastava D. (1993), "*Exponentiated Weibull Family for Analyzing Bathtub Failure data*", IEEE Transactions on Reliability, 42, 299–302.
- [24] Mudholkar G. , Srivastava D. and Friemer M. (1995), "*The Exponentiated Weibull Family: A Re-analysis of the Bus-motor-failure data*", Technometrics, 37, 436–445.
- [25] Nadarajah S. and Kotz S. (2005), "*On Some Recent Modifications of Weibull Distribution*", IEEE Transactions Reliability, 54, 561-562.
- [26] Nadarajah S. (2005), "*On the Moments of the Modified Weibull Distribution*", Reliability Engineering and System Safety, 90, 114-117.
- [27] Nadarajah S. and Kotz S. (2006), "*The Beta Exponential Distribution*", Reliability Engineering and System Safety, 91, 689–697.
- [28] Pham H. and Lai C. (2007), "*On Recent Generalizations of the Weibull Distribution*", IEEE Transactions on Reliability, 56, 454–458.
- [29] Raqab M. and Kundu D. (2003), "*Burr Type X Distribution; Revisted*", JPSS, 8, 179-198.
- [30] Sepanski J. and Kong L. (2008), "A Family of Generalised Beta Distributions for Income". Advances and Applications in Statistics, 10, 75 - 84.
- [31] Singh K. , Lee C. and George E. (1988), "*On Generalized Log-logistic Model for Censored Survival Data*", Biometrical Journal, 30, 843–850.
- [32] Singla N. , Jain K. and Sharma S. (2012), "*The Beta Generalized Weibull Distribution*", Reliability Engineering and System Safety, 102, 5–15.
- [33] Weibull W. (1951), "*Statistical Distribution Function of Wide Applicability*", ASME Journal of Applied Mechanics Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, 8, 293–297.
- [34] Wong K. (1989), "*Roller-coaster Curve Is In*", Quality and Reliability Engineering International, 5, 29–36.
- [35] Wong K. (1988), "*The Bathtub Does Not Hold Water Any More*", Quality and Reliability Engineering International, 4, 279–282.

-
- [36] Wong K. (1991), *"The Physical Basis for the Roller-coaster Hazard Rate Curve for Electronics"*, Quality and Reliability Engineering International, 7, 489– 495.
- [37] Xie M. , Tang Y. and Goh T. (2002), *"A Modified Weibull Extension with Bathtub Failure Rate Function"*, Reliability Engineering and System Safety, 76, 279–285.
- [38] Xie M. , Lai C. (1995), *"Reliability an Alysis Using an Additive Weibull Model with Bathtub-shaped Failure Rate Function"*, Reliability Engineering and System Safety, 52, 87–93.
- [39] Xu K. , Xie M. , Tang L. and Ho S. (2003), *"Application of Neural Networks in Forecasting Engine Systems Reliability"*, Applied Soft Computing, 2, 255–268.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Incomplete Beta Function	تابع بتای ناقص
Hypergeometric Function	تابع فوق هندسی
Laplace Transform	تبدیل لاپلاس
Modified	تعدیل یافته
Generalized	تعمیم یافته
Beta Integrated Distribution	توزیع بتای تجمیع شده
Extreme-Value Distribution	توزیع مقادیر فرین
Polygamma	چندگاما
Digamma	دوگاما
Rayleigh	ریلی
Bathtub Shape	شکل سهمی
Modified Bathtub Shaped	شکل تعدیل یافته
Upside-Down Bathtub	سهمی وارونه
Roller-Coster Shaped	شکل غلتکی
Reliability	قابلیت اطمینان
Akaike Information Criterion	معیار اطلاع آکائیک
Bayesian Information Criterion	معیار اطلاع بیزی
Failure Rate	نرخ شکست
Incomplete Beta Function Ratio	نسبت تابع بتای ناقص
Total-Time on Test Plot	نمودار زمان کل آزمون

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Akaike Information Criterion.....	معیار اطلاع آکائیک
Bathtub Shape.....	سهمی شکل
Bayesian Information Criterion.....	معیار اطلاع بیزی
Beta Integrated Distribution.....	توزیع بتای تجمیع شده
Digamma.....	دوگاما
Extreme-Value Distribution.....	توزیع مقادیر فرین
Failure Rate.....	نرخ شکست
Generalized.....	تعمیم یافته
Hypergeometric Function.....	تابع فوق هندسی
Incomplete Beta Function.....	تابع بتای ناقص
Incomplete Beta Function Ratio.....	نسبت تابع بتای ناقص
Laplace Transform.....	تبدیل لاپلاس
Modified.....	تعدیل یافته
Modified Bathtub Shaped.....	سهمی شکل تعدیل یافته
Polygamma.....	چندگاما
Rayleigh.....	ریلی
Reliability.....	قابلیت اطمینان
Roller-Coster Shaped.....	غلطکی شکل
Total-Time on Test Plot.....	نمودار زمان کل آزمون
Upside-Down Bathtub.....	سهمی وارونه

Aabstract

In this thesis, some ramification of Weibull distribution such as generalized modified Weibull distribution and beta generalized Weibull was introduced for modeling bathtub or upside-down bathtub (unimodal) shaped failure rates and according to these distributions, a new six parameter distribution called beta generalized modified Weibull distribution is introduced. The importance of these distributions lies in ability to model monotone as well as non-monotonic failure rates. These distributions also has a number of well-known distributions as sub-models.

after introduce the beta generalized modified Weibull (BGMW) distribution, the cumulative distribution function (cdf) and the probability density function (pdf) have been expressed as mixture of the generalized modified Weibull cdfs and pdfs. We derived two infinite sum representations for its moments and the non-linear equations for maximum likelihood estimators are presented. The distribution is found to be superior to the existing sub-models on being fitted a real data set.

keywords: Bathtub shaped failure rate, W lambert function, Generalized modified Weibull distribution, Beta generalized Weibull, Beta generalized modified Weibull distribution



Shahrood University Of Technology

Technology University of Shahrood
Faculty Of Mathematical Sciences

Dissertation Submitted in Partial
Fulfillment of The Requirements For The
Degree of Master of Science in
Statistic

The Beta Generalized Weibull Distribution

Supervisor

Dr. A. Nezakati

Advisor

Dr. M. Arashi

by

Sahar Jalali

2014