



دانشکده علوم ریاضی  
گروه ریاضی کاربردی

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته  
ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

عنوان

# روش‌های چندمقیاسی وردشی تطبیقی

استاد راهنما

دکتر علی مس فروش

دانشجو

مادی حسین پور

۱۳۹۲

تقدیم بہ

ساحت مقدس حضرت ولی عصر (عج)

وہ

روح پاک پدرم کہ عالمانہ بہ من آموخت کہ چگونه در عرصہ زندگی، استادگی نمایم

وہ

مادرم، دریای عشق کہ وجودم برایش ہمہ رنج بود و وجودش برایم ہمہ مہر

وہ

ہمسرم، امید بودم کہ نشانہ لطف الہی در زندگی من است.

# سپاس گزارمی...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی کران خود، آدمی را به زیور عقل آراست.  
با درود فراوان به روح پرفتوح پدر بزرگوارم و با سپاس بیکران به همدلی و همراهی مادر دلسوز و  
مهربانم که سجده ایثارش گل محبت را در وجودم پروراند.  
با تقدیر و تشکر شایسته از استاد فرهیخته و فرزانه، جناب آقای دکتر علی مس فروش که همواره  
راهنما و راهگشای من در اتمام و اکمال این پایان نامه بودند.  
در پایان از همسر عزیزم که در لحظه لحظه نگارش این پایان نامه، همراه و همگام من بودند،  
صمیمانه تشکر و قدردانی می کنم.

هادی حسین پور  
۱۳۹۲

## تعمدنامه

اینجانب هادی حسین پور دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی دانشکده علوم ریاضی دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان روش های چندمقیاسی وردشی تطبیقی، تحت راهنمایی دکتر علی مس فروش متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های دیگر پژوهش گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام " دانشگاه شاهرود " یا " Shahrood University " به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

هادی حسین پور  
۱۳۹۳

## مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی باشد.

## چکیده

یک روش عناصر متناهی جدید به نام روش چندمقیاسی وردشی تطبیقی را همراه با تکنیکی منظم، برای بدست آوردن تقریبی از بخش مقیاس ظریف جواب، توسعه می‌دهیم. جواب مقیاس ظریف، با مجموع جواب‌های مسایل موضعی مجزا که به صورت عددی حل شده‌اند، تخمین زده می‌شود. برآورد خطای پسینی را در نورم انرژی نتیجه می‌گیریم که به پارامترهای مهم گسسته‌سازی وابسته است. این پارامترها عبارتند از: اندازه مش مقیاس درشت، اندازه مش مقیاس ظریف و اندازه وصله‌ها. بر پایه برآورد خطای پسین، الگوریتمی تطبیقی را ارائه می‌دهیم که به صورت خودکار این پارامترها را کنترل می‌کند. در نهایت با ارائه مثال‌های عددی مختلف، نشان می‌دهیم که این روش در عمل چگونه کار می‌کند.

**کلمات کلیدی:** گالرکین، دوگان، برآورد خطای پسین، تطبیق، روش چندمقیاسی وردشی، همگن‌سازی، مساله سلولی، دوره‌ای، مسایل موضعی.

# فهرست مطالب

۱	مقدمه و پیش‌نیاز	۱
۱	۱.۱ مقدمه	۱
۲	۲.۱ تعاریف	۲
۶	۳.۱ معادله پواسون	۶
۷	۴.۱ روش عناصر متناهی	۷
۷	۱.۴.۱ فرم ضعیف	۷
۸	۲.۴.۱ برآورد خطا	۸
۸	۳.۴.۱ الگوریتم‌های تطبیقی	۸
۱۱	۲ معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی	۱۱
۱۱	۱.۲ مقدمه	۱۱
۱۱	۲.۲ معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی بیضوی	۱۱
۱۲	۱.۲.۲ مساله دیریکله برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی بیضوی	۱۲
۱۴	۲.۲.۲ مساله دوره‌ای برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی بیضوی	۱۴
۱۵	۳ همگن‌سازی برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی بیضوی	۱۵
۱۵	۱.۳ معادلات کامل	۱۵
۱۶	۲.۳ معادلات ساده شده	۱۶
۱۶	۳.۳ اشتقاق	۱۶
۱۹	۴.۳ ویژگی‌هایی از ضرایب همگن‌سازی شده	۱۹
۲۱	۵.۳ کاربردها	۲۱
۲۲	۱.۵.۳ حالت یک بعدی	۲۲
۲۳	۲.۵.۳ مواد لایه‌ای	۲۳
۲۵	۶.۳ تشریح موضوع	۲۵
۲۷	۴ همگن‌سازی برای معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی بیضوی: قضیه همگرایی	۲۷
۲۷	۱.۴ قضیه‌ها	۲۷

۲۸	برهان قضیه همگن سازی	۲.۴
۳۲	برهان همگرایی قوی در $H^1$	۳.۴
۳۵	روش های چندمقیاسی	۵
۳۶	بسط مجانبی	۱.۵
۴۵	روش های چندمقیاسی وردشی تطبیقی برای برآوردهای نورم انرژی	۶
۴۵	مقدمه	۱.۶
۴۶	روش چندمقیاسی وردشی	۲.۶
۴۶	مساله مدل	۱.۲.۶
۴۸	روش چندمقیاسی وردشی	۲.۲.۶
۴۹	تقریبی از معادلات مقیاس ظریف بر پایه مسایل دیریکله موضعی	۳.۲.۶
۵۲	برآورد خطای پسین در نورم انرژی	۳.۶
۶۱	حالت خاص: ضرایب دوره ای	۴.۶
۶۵	الگوریتم تطبیقی	۵.۶
۶۶	مثال های عددی	۶.۶
۷۱	روش های چندمقیاسی وردشی تطبیقی با استفاده از تکنیک های دوگان	۷
۷۱	مقدمه	۱.۷
۷۲	روش چندمقیاسی وردشی	۲.۷
۷۲	مساله مدل	۱.۲.۷
۷۲	روش چندمقیاسی وردشی	۲.۲.۷
۷۳	روش چندمقیاسی وردشی بر پایه مسایل دیریکله موضعی	۳.۲.۷
۷۵	زیرفضاها	۴.۲.۷
۷۷	برآورد خطای پسین	۳.۷
۷۷	مساله دوگان	۱.۳.۷
۷۷	فرمول نمایش خطا	۲.۳.۷
۸۰	الگوریتم تطبیقی	۴.۷
۸۱	مثال های عددی	۵.۷
۸۵	مراجع	
۸۷	واژه نامه فارسی به انگلیسی	
۹۰	واژه نامه انگلیسی به فارسی	

# فصل ۱

## مقدمه و پیش‌نیاز

### ۱.۱ مقدمه

امروزه مسایل چندمقیاسی، از بزرگترین چالش‌ها در ریاضیات محاسباتی هستند. این مسایل بیشتر تبدیل به دستگاه‌هایی از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی با ویژگی‌های چندمقیاسی می‌شوند. در یک روش با مش معمولی، پارامترهایی مانند اندازه مش و اندازه‌ای از گام‌های زمانی<sup>۱</sup> وجود دارد.

برای مطالعه روش‌های چندمقیاسی، نیاز به در نظر گرفتن اندازه‌های مش روی همه مقیاس‌ها، اندازه زیردامنه‌ها برای مسایل موضعی، شرایط مرزی برای مسایل موضعی، مش‌های مختلف برای معادلات مختلف، گام‌های زمان مختلف برای معادلات مختلف و مواردی مشابه می‌باشد. هرچند که الگوریتم‌های تطبیقی بیشتر جنبه نظری دارند، اما از آن‌ها برای تخمین خطا نیز استفاده می‌شود. الگوریتم‌های تطبیقی به صورت تکراری عمل می‌کنند و برای بهبود جواب، از جواب‌های قبلی استفاده می‌کنند.

امروزه شاخه‌هایی از علوم مهندسی دارای محاسباتی سنگین هستند که برای جلوگیری از انجام این محاسبات پیچیده، استفاده از روش‌های چندمقیاسی کاربرد زیادی دارند. هدف اصلی این پایان‌نامه، توسعه یک روش چندمقیاسی جدید برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی می‌باشد. برآورد و تطبیق خطا، بخش تفکیک‌ناپذیری از این روش می‌باشد. امیدواریم که برآورد خطا و الگوریتم تطبیقی این روش، بتواند به عنوان چارچوبی برای تطبیق در مسایل چندمقیاسی مورد استفاده قرار گیرد.

---

<sup>۱</sup>Time Steps



## ۲.۱ تعاریف

در این بخش تعاریفی را که مورد نیاز می‌باشند، بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۲.۱. عملگر لاپلاس<sup>۲</sup> به صورت

$$\Delta_n = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2},$$

و عملگر گرادیان<sup>۳</sup> به صورت

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right),$$

تعریف می‌شود. رابطه بین این دو عملگر به صورت زیر می‌باشد:

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla.$$

تعریف ۲.۲.۱. یک تابع خطی<sup>۴</sup>، تابعی مانند  $L$  است که  $L : V \rightarrow \mathbb{R}$ ، به گونه‌ای که رابطه زیر برقرار باشد:

$$L(\lambda u + \mu v) = \lambda L(u) + \mu L(v).$$

تعریف ۳.۲.۱. یک فرم دوخطی<sup>۵</sup> مانند  $a(\cdot, \cdot)$  روی  $V$ ، تابعی مانند  $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  است که نسبت به آرگومان خود خطی است. یعنی برای هر  $u, v, w \in V$  و  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  داریم:

$$a(\lambda u + \mu w, v) = \lambda a(u, v) + \mu a(w, v),$$

$$a(u, \lambda v + \mu w) = \lambda a(u, v) + \mu a(u, w).$$

تعریف ۴.۲.۱. فرم دوخطی  $a(\cdot, \cdot)$  را متقارن<sup>۶</sup> می‌نامیم هرگاه

$$a(v, w) = a(w, v), \quad \forall v, w \in V,$$

باشد و آن را معین مثبت<sup>۷</sup> می‌گوییم هرگاه

$$a(v, v) > 0, \quad \forall v \in V, v \neq 0,$$

باشد.

تعریف ۵.۲.۱. فرم دوخطی  $a(\cdot, \cdot)$  کراندار<sup>۸</sup> است هرگاه ثابت  $M$  به گونه‌ای موجود باشد که رابطه زیر برقرار باشد:

$$|a(w, v)| \leq M \|w\|_V \|v\|_V, \quad \forall v, w \in V.$$

<sup>۲</sup>Laplacian

<sup>۳</sup>Gradient

<sup>۴</sup>Linear Functional

<sup>۵</sup>Bilinear Form

<sup>۶</sup>Symmetric

<sup>۷</sup>Positive Definite

<sup>۸</sup>Bounded

تعریف ۶.۲.۱. فرم دوخطی  $a(\cdot, \cdot)$  را کورسیو<sup>۹</sup> در  $V$  می‌نامیم هرگاه رابطه زیر برقرار باشد:

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2, \quad \forall v \in V, \alpha > 0.$$

تعریف ۷.۲.۱. اگر  $a(\cdot, \cdot)$  یک فرم دوخطی متقارن باشد که در  $V$  کراندار و کورسیو باشد، آنگاه نورم انرژی<sup>۱۰</sup> را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\|v\|_a = a(v, v)^{\frac{1}{2}},$$

تعریف ۸.۲.۱. یک تابع هموار<sup>۱۱</sup> نامیده می‌شود هرگاه به تعداد کافی دارای مشتقات پیوسته باشد.

تعریف ۹.۲.۱. فرض می‌کنیم که  $X = (x_0, \dots, x_n)$  و  $Y = (y_0, \dots, y_n)$  دو بردار در  $\mathbb{R}^n$  باشند. ضرب داخلی<sup>۱۲</sup> این دو بردار را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\langle X, Y \rangle = x_0 y_0 + \dots + x_n y_n.$$

تعریف ۱۰.۲.۱. ضرب داخلی بین ماتریس‌ها را به صورت زیر مشخص می‌کنیم:

$$A : B = \text{tr}(A^T B) = a_{ij} b_{ij}.$$

تعریف ۱۱.۲.۱. مجموعه همه تابع‌های خطی کراندار روی  $V$  را فضای دوگان<sup>۱۳</sup>  $V^*$  می‌نامیم و آن را با  $V^*$  نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۲.۲.۱. فضای  $L_2(\Omega)$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L_2(\Omega) = \left\{ v : \left( \int_{\Omega} |v(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\}$$

تعریف ۱۳.۲.۱. فضای  $H_0^1$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$H_0^1(a, b) = \left\{ v \in L_2(a, b) : \int_a^b ((v(x))^2 + (v'(x))^2) dx < \infty, v(a) = v(b) = 0 \right\},$$

همچنین فضای دوگان  $H_0^1$  را با  $H^{-1}$  نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۴.۲.۱. فضای  $H^1$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H^1 = \{v : \|v\| + \|\nabla v\| < \infty\}.$$

تعریف ۱۵.۲.۱. فرض کنید  $X$  یک مجموعه غیرتهی دلخواه و  $d$  تابعی حقیقی بر  $X \times X$  باشد به طوری که:

$$1. \text{ به ازای هر } x \text{ و } y \text{ از } X, d(x, y) \geq 0;$$

$$2. \text{ به ازای هر } x \text{ و } y \text{ از } X, d(x, y) = 0 \text{ اگر و فقط اگر } x = y;$$

<sup>۹</sup>Coercive

<sup>۱۰</sup>Energy Norm

<sup>۱۱</sup>Smooth

<sup>۱۲</sup>Inner Product

<sup>۱۳</sup>Dual

۳. به ازای هر  $x$  و  $y$  از  $X$ ،  $d(x, y) = d(y, x)$ ؛

۴. به ازای هر  $x, y$  و  $z$  از  $X$ ،

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y),$$

در این صورت،  $d$  را یک متریک روی  $X$  و  $(X, d)$  را یک فضای متریک می‌نامند.

**تعریف ۱۶.۲.۱.** فضای برداری شامل تمام چندجمله‌ای‌های از درجه کمتر یا مساوی  $q$  را روی بازه  $(a, b)$  با نماد  $p^q(a, b)$  نمایش می‌دهیم.

**توابع پایه‌ای لاگرانژ**<sup>۱۴</sup> را با نماد  $\{\lambda_i\}_{i=0}^q$  نشان می‌دهیم که از توابع  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_q$  تشکیل شده‌اند. هر تابع متناظر یک نقطه گره‌ای  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  در بازه  $(a, b)$  به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\lambda_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

**تعریف ۱۷.۲.۱.** نامساوی کوشی شوارتز<sup>۱۵</sup> به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|.$$

**تعریف ۱۸.۲.۱.** ماتریس  $A$  را معین مثبت می‌نامیم هرگاه برای هر بردار غیرصفر  $\varepsilon \in \mathbb{R}^d$ ، رابطه زیر برقرار باشد:

$$\varepsilon A \varepsilon > 0.$$

**تعریف ۱۹.۲.۱.** ماتریس  $A$  را به طور یکنواخت معین مثبت می‌نامیم هرگاه ثابت‌های  $v_1$  و  $v_2$  به گونه‌ای که  $0 < v_1 < v_2$ ، موجود باشند به قسمی که رابطه

$$v_1 |\varepsilon|^2 \leq \varepsilon \cdot A(x) \varepsilon \leq v_2 |\varepsilon|^2, \quad \forall x \in \Omega, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^d,$$

برقرار باشد.

**تعریف ۲۰.۲.۱.** فرض می‌کنیم که  $v^+ = \lim_{s \rightarrow 0^+} v(t_n + s)$  و  $v^- = \lim_{s \rightarrow 0^+} v(t_n - s)$  باشد. پرش<sup>۱۶</sup> در زمان  $t_n$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$[v_n] = v_n^+ - v_n^-.$$

**تعریف ۲۱.۲.۱.** به ازای  $r > 0$ ، مجموعه  $s(a, r) = \{x : d(x, a) < r\}$  را یک گوی باز به مرکز  $a$  و شعاع  $r$  می‌نامیم.

**تعریف ۲۲.۲.۱.** نقطه  $a \in A$  را یک نقطه درونی می‌نامیم در صورتی که گوی بازی مانند  $s(a, r)$  بتوان یافت که جز  $A$  باشد. مجموعه  $A$  را باز می‌نامیم در صورتی که هر نقطه آن درونی باشد.

<sup>۱۴</sup>Lagrange Basis Functions

<sup>۱۵</sup>Cauchy- Schwarz

<sup>۱۶</sup>Jump

**تعریف ۲۳.۲.۱.** فرض کنید  $M$  یک فضای متریک و  $A \subseteq M$  باشد. خانواده  $\mathcal{H}$  از زیرمجموعه‌های  $M$ ، یک پوشش  $A$  نامیده می‌شود در صورتی که  $A \subseteq \cup_{B \in \mathcal{H}} B$  باشد. پوششی که اعضایش باز باشند، پوشش باز نامیده می‌شود.

**تعریف ۲۴.۲.۱.** فرض می‌کنیم که  $M$  هموار باشد و  $\{u_\alpha\}$  پوشش <sup>۱۷</sup> بازی از  $M$  باشد. تابع افزاز واحد <sup>۱۸</sup> با پوشش  $\{u_\alpha\}$ ، مجموعه‌ای از توابع هموار  $\{\rho_\alpha\}$  می‌باشد به قسمی که:

۱. برای هر  $\alpha$  رابطه زیر برقرار باشد:

$$0 \leq \rho_\alpha \leq 1.$$

۲. برای هر  $\alpha$  رابطه زیر برقرار باشد:

$$\text{supp}(\rho_\alpha) \leq u_\alpha.$$

۳. هر نقطه  $k \in M$  یک همسایگی داشته باشد که  $\text{supp}(\rho_\alpha)$  را برای تعداد متناهی  $\alpha$  قطع کند.

۴. برای هر  $k \in M$  رابطه زیر برقرار باشد:

$$\sum_{\alpha} \rho_\alpha(k) = 1.$$

**تعریف ۲۵.۲.۱.** فرض می‌کنیم که  $p \in [1, +\infty]$  باشد. در این صورت  $q \in [1, +\infty]$  را با شرط

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

در نظر می‌گیریم. می‌گوییم که دنباله  $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \in L_p(\Omega)$  به  $u(x) \in L_q(\Omega)$  همگرایی ضعیف دارد و می‌نویسیم:

$$u_n(x) \rightharpoonup u(x),$$

مشروط بر این که رابطه زیر برقرار باشد:

$$\int_{\Omega} u_n(x)v(x) dx \rightarrow \int_{\Omega} u(x)v(x) dx, \quad \forall v \in L_q(\Omega).$$

**تعریف ۲۶.۲.۱.** می‌گوییم که دنباله  $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \in L_p(\Omega)$  به  $u(x) \in L_q(\Omega)$  همگرایی قوی دارد و می‌نویسیم:

$$u_n(x) \rightarrow u(x),$$

مشروط بر این که رابطه زیر برقرار باشد:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n(x) - u(x)\| = 0.$$

**تعریف ۲۷.۲.۱.** ماتریس مربعی  $A$  را دوره‌ای <sup>۱۹</sup> می‌نامیم هرگاه  $A^{k+1} = A$  باشد که  $k$  عددی صحیح و مثبت است. اگر  $k$  کمترین عدد صحیح باشد، آنگاه می‌گوییم ماتریس  $A$  دوره‌ای به اندازه  $k$  دارد.

<sup>۱۷</sup>Cover

<sup>۱۸</sup>Partition of Unity

<sup>۱۹</sup>Periodic

**تعریف ۲۸.۲.۱.** فرض می‌کنیم که  $y$  یک سلول واحد باشد. به توابع با دوره یک، توابع یک‌دوره‌ای گفته می‌شود. فضایی از توابع هموار  $H^1(\mathbb{R}^d)$  که یک دوره‌ای هستند را به صورت  $H_{per}^1(y)$  نمایش می‌دهیم.

**تعریف ۲۹.۲.۱.** فضای  $H$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$H = \left\{ u \in H_{per}^1(y) : \int_y u dy = 0 \right\}.$$

**تعریف ۳۰.۲.۱.** دوگان فضای  $H$  را با  $H^*$  نمایش می‌دهیم که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H^* = \left\{ u \in (H_{per}^1(y))^* ; \langle u, 1 \rangle_{(H_{per}^1)^*, H_{per}^1} = 0 \right\}.$$

**تعریف ۳۱.۲.۱.** یک فرم دوخطی روی  $V$  را که معین مثبت و متقارن باشد، یک ضرب داخلی روی  $V$  می‌نامیم.

**تعریف ۳۲.۲.۱.** فضای  $V$  را به همراه ضرب داخلی تعریف شده روی آن، فضای ضرب داخلی می‌نامیم.

**تعریف ۳۳.۲.۱.** دنباله  $\{v_i\}_{i=1}^{\infty}$  را یک دنباله کوشی در  $V$  می‌نامیم، هرگاه رابطه

$$\|v_i - v_j\| \rightarrow 0,$$

برقرار باشد که در آن  $i$  و  $j$  به سمت بی‌نهایت میل می‌کنند.

**تعریف ۳۴.۲.۱.** اگر هر دنباله کوشی در فضای ضرب داخلی  $V$  همگرا باشد، آنگاه فضای ضرب داخلی  $V$ ، کامل<sup>۲۰</sup> نامیده می‌شود.

**تعریف ۳۵.۲.۱.** اگر  $V$  یک فضای ضرب داخلی کامل باشد، آن را فضای هیلبرت<sup>۲۱</sup> می‌نامیم.

## ۳.۱ معادله پواسون

در این فصل فرمول‌بندی استاندارد معادله پواسون<sup>۲۲</sup> را بیان می‌کنیم. در این پایان‌نامه، بیشتر معادله پواسون را بررسی می‌کنیم. برای مثال:

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{in } \Omega, \\ u = 0, & \text{on } \Gamma, \end{cases} \quad (1.1)$$

که در آن  $f$  تابعی مفروض،  $\Omega$  دامنه‌ای با مرز  $\Gamma$  و  $u$  جواب مجهول می‌باشد. مهمترین ویژگی این معادله این است که خارج از بخش‌های ناهموار از تابع بار<sup>۲۳</sup> یعنی  $f$ ، هموار می‌باشد. این مدل معادله در همه شاخه‌ها از علوم مهندسی مثل انتقال حرارت، مکانیک سازه و الکترومغناطیس ظاهر می‌شود.

<sup>۲۰</sup> Complete

<sup>۲۱</sup> Hilbert Space

<sup>۲۲</sup> Poisson

<sup>۲۳</sup> Load

## ۴.۱ روش عناصر متناهی

روش عناصر متناهی<sup>۲۴</sup> که در سال ۱۹۵۰ توسعه یافته بود، در سال ۱۹۶۰ برای محاسبه جواب‌های تقریبی معادلات دیفرانسیل جایگزین روش‌های تفاضل متناهی شد. در آغاز، این روش بیشتر برای مکانیک سازه مورد استفاده قرار می‌گرفت، ولی در ادامه به جنبه‌های ریاضی آن پرداخته شد. پایه ریاضی روش عناصر متناهی، ابزاری برای تحلیل برآورد خطا فراهم می‌کند که می‌تواند در بهبود جواب تقریبی مورد استفاده قرار گیرد.

### ۱.۴.۱ فرم ضعیف

اولین گام در فرمول‌بندی مساله به روش عناصر متناهی، تشکیل فرم ضعیف<sup>۲۵</sup> آن می‌باشد. به این منظور تابع آزمون<sup>۲۶</sup>

$$v \in V = \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ on } \Gamma\},$$

را در نظر گرفته، معادله (۱.۱) را در  $v \in V$  ضرب کرده و روی  $\Omega$  انتگرال‌گیری می‌کنیم و با استفاده از انتگرال جز به جز، فرم ضعیف به صورت زیر خوانده می‌شود:

$u \in V$  را به گونه‌ای پیدا کنید که رابطه

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx, \quad \forall v \in V, \quad (2.1)$$

برقرار باشد.

هدف روش عناصر متناهی این است که تقریبی از جواب معادله (۲.۱) را برای معادله (۱.۱) بدست آورد.

استفاده از فرم ضعیف و ابزارهایی از آنالیز تابعی<sup>۲۷</sup>، برآورد خطا را ممکن می‌سازد. فرض کنید که فضای گسسته  $V$  شامل چندجمله‌ای‌های قطعه‌وار پیوسته<sup>۲۸</sup> تعریف شده روی مشی متشکل از عناصر  $UK = \mathcal{K}$  با قطر  $h_k$  باشد.

روش عناصر متناهی به صورت زیر خوانده می‌شود:

$U \in V_h$  را به گونه‌ای بیابید که در رابطه

$$\int_{\Omega} \nabla U \cdot \nabla V \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx, \quad \forall v \in V_h, \quad (3.1)$$

صدق کند.

از آن‌جا که  $V_h \subset V$ ،  $U$  با  $u$  برابر نخواهد بود، اما امیدواریم که تقریب خوبی از آن باشد.

<sup>۲۴</sup>Finite Element Method

<sup>۲۵</sup>Weak Form

<sup>۲۶</sup>Test Function

<sup>۲۷</sup>Functional Analysis

<sup>۲۸</sup>Continuous Piecewise Polynomials

### ۲.۴.۱ برآورد خطا

دورده برای برآورد خطای<sup>۲۹</sup> عناصر متناهی وجود دارد، یکی پیشین<sup>۳۰</sup> و دیگری پسین<sup>۳۱</sup>. برآورد خطای پیشین به جواب دقیق معادله یعنی  $u$  بستگی دارد. در این برآورد خطا، محاسبات و تحلیل خطا به شکل تئوری و پیش از انجام محاسبات صورت می‌گیرد. برآورد خطای پسین وابسته به مانده است. در واقع این برآورد خطا پس از بدست آوردن جواب تقریبی یعنی  $U$  محاسبه می‌شود.

کران بالای خطا برای  $e = u - U$  در برآورد پیشین به  $u$  و  $h$  و در برآورد پسین به  $U$  و  $h$  وابستگی دارد. در این پایان‌نامه، فقط برآورد پسین را در نظر می‌گیریم. برآورد پسین معادله پواسون در بسیاری از کتاب‌ها یافت می‌شود، به [۳]، [۱۴] و [۱۲] مراجعه شود. برای مثال:

$$\|e\| \leq C \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} R_K^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

که در آن،

$$R_K = h_K^{\frac{1}{2}} \|Au_h - f\|_K + h_K^{\frac{1}{2}} \|a[n \cdot \nabla u_h]\|_{\partial K},$$

که  $A$  عملگری دیفرانسیل می‌باشد. همچنین برای نمونه، برآوردی را در نیم نورم انرژی بیان می‌کنیم:

$$\|\nabla e\|^2 \leq C \sum_{K \in \mathcal{K}} p_K^2, \quad (4.1)$$

که در آن،

$$p_K^2 = h_K^{\frac{1}{2}} \|f + \Delta U\|_K^2 + h_K \| [n \cdot \nabla u] \|_{\partial K}^2,$$

که  $\partial K$  مرز  $K$  می‌باشد و  $[n \cdot \nabla u]$  پرش سرتاسری مرز  $\partial K$  در مشتق نرمال  $n$  را مشخص می‌کند و  $C$  ثابت مستقل از  $h$  می‌باشد.

### ۳.۴.۱ الگوریتم‌های تطبیقی

الگوریتم تطبیقی فرآیندی تکراری است که مساله را به صورت مکرر و با نظریف<sup>۳۲</sup> فضای  $V_h$  حل می‌کند. برای پیاده‌سازی الگوریتم‌های تطبیقی، از خطای پسین استفاده می‌شود. برای مثال، اجرای الگوریتم تطبیقی برای معادله (۳.۱) با استفاده از (۴.۱) به شکل زیر صورت می‌گیرد:

۱. معادله (۳.۱) را روی مش اولیه حل می‌کنیم، (شکل سمت چپ (۱.۱) را ببینید).

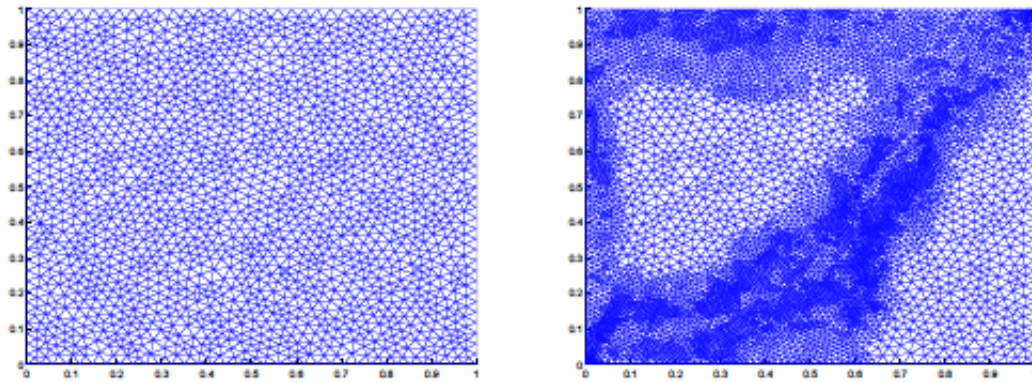
۲.  $p_K$  را از معادله (۴.۱) محاسبه می‌کنیم.

<sup>۲۹</sup>Error Estimation

<sup>۳۰</sup>A Priori

<sup>۳۱</sup>A Posteriori

<sup>۳۲</sup>Refine



شکل ۱.۱: شکل سمت چپ مش یکنواخت و شکل سمت راست مش نظریف شده به طور تطبیقی می باشد.

۳. اگر  $\sum_{K \in \mathcal{K}} p_K^2$  به اندازه کافی کوچک بود، متوقف می شویم و در غیر این صورت مش را بر اساس  $p_K$  نظریف می کنیم و به (۱) برمی گردیم.

نمونه ای از مش تطبیقی را در شکل سمت راست (۱.۱) مشاهده می کنید.





# فصل ۲

## معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

### ۱.۲ مقدمه

موضوع مورد بحث در این فصل، در مورد روش‌های چندمقیاسی روی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی بیضوی<sup>۱</sup> می‌باشد. ابتدا توضیحاتی مقدماتی را در مورد معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی بیضوی بیان می‌کنیم و سپس به معرفی مفهوم همگن‌سازی روی این معادلات می‌پردازیم. همچنین معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی بیضوی همراه با مساله مقدار مرزی دیریکله را بررسی می‌کنیم.

### ۲.۲ معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی بیضوی

مساله دیریکله (همگن)، به معنای پیدا کردن  $u$  می‌باشد که در واقع  $u$  تابع تعریف‌شده روی مجموعه باز  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  می‌باشد.

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (A(x)\nabla u) = f, & \forall x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & \forall x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.2)$$

که  $A(x)$  یک ماتریس معین مثبت می‌باشد و همچنین داریم:  
 $f = f(x) \in H^{-1}(\Omega)$ ,

که  $H^{-1}$  فضای دوگان  $H^1$  می‌باشد. فرض می‌کنیم که  $y = \mathbb{T}^d$ ، یک چنبره واحد<sup>۲</sup>  $d$  بعدی باشد. مساله دوره‌ای، پیدا کردن تابع یک دوره‌ای  $u(y)$  می‌باشد، به قسمی که:

$$-\nabla_y \cdot (A(y)\nabla_y u) = f(y), \quad (2.2)$$

<sup>۱</sup>Elliptic PDE

<sup>۲</sup>Unit Torus

که در آن  $A(y)$ ، ماتریس معین مثبت دوره‌ای و  $f \in H^*$  است که  $H^*$  دوگان  $H$  می‌باشد. در تعریف زیر، گروهی از ضرایب  $A(x)$  را در نظر می‌گیریم.

**تعریف ۱.۲.۲.** فرض می‌کنیم که  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ، به‌قسمی که  $0 < \alpha \leq \beta < \infty$ .  $M(\alpha, \beta, \Omega)$  را به‌صورت مجموعه‌ای از ماتریس‌های  $d \times d$  به‌نام  $A \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^{d \times d})$ ، به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

برای هر بردار  $\varepsilon \in \mathbb{R}^d$  و هر  $x \in \Omega$ ، داریم:

$$1. \langle \varepsilon, A(x)\varepsilon \rangle \geq \alpha|\varepsilon|^2$$

$$2. |A(x)\varepsilon| \leq \beta|\varepsilon|$$

به‌علاوه  $M_{per}(\alpha, \beta, y)$ ، را به‌صورت مجموعه‌ای از ماتریس‌های موجود در  $M(\alpha, \beta, y)$ ، با ضرایب  $y$  دوره‌ای تعریف می‌کنیم.

عملگرهای بیضوی در فرم زیر را بررسی می‌کنیم:

$$A = -\nabla \cdot (A\nabla) + b \cdot \nabla + c. \quad (3.2)$$

عملگرهای بیضوی در اصل ماکزیمم به‌صورت زیر می‌باشند:

$$A = -A : \nabla \nabla + b \cdot \nabla + c. \quad (4.2)$$

اگر  $A \in M(\alpha, \beta, \Omega)$  باشد، آنگاه به عملگر  $A$  در (۳.۲) یا (۴.۲) به‌طور یکنواخت بیضوی گفته می‌شود. عملگرهای فرم (۳.۲) به فرم واگرایی<sup>۳</sup> و عملگرهای فرم (۴.۲) به فرم غیرواگرایی<sup>۴</sup> معروف هستند.

## ۱.۲.۲ مساله دیریکله برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی بیضوی

ابتدا تعریف دقیقی از جواب را بیان می‌کنیم. برای این منظور به معرفی فرم دو خطی نیازمندیم:

$$a[\phi, \psi] = \int_{\Omega} \nabla \psi^T(x) A(x) \nabla \phi(x) dx, \quad \forall \phi, \psi \in H_0^1(\Omega). \quad (5.2)$$

توجه داریم که:

$$a[\phi, \psi] = (A\nabla\phi, \nabla\psi).$$

برای ضرب داخلی استاندارد در  $L^2(\Omega)$  از  $(\cdot, \cdot)$  و برای جفت کردن<sup>۵</sup> بین  $H_0^1(\Omega)$  و  $H^{-1}(\Omega)$  از  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  استفاده می‌کنیم.

حال قضیه بسیار مهم لکس میلگرام<sup>۶</sup> را بیان می‌کنیم:

<sup>۳</sup>Divergence

<sup>۴</sup>Nondivergence

<sup>۵</sup>Pairing

<sup>۶</sup>Lax- Milgram

قضیه ۲.۲.۲ (لکس میلگرام). اگر فرم دوخطی  $a(\cdot, \cdot)$  در فضای هیلبرت  $V$ ، کراندار و کورسیو باشد و  $L$  فرم خطی کراندار در  $V$  باشد، آنگاه بردار یکتای  $u \in V$  موجود است به گونه‌ای که:

$$a(u, v) = L(u), \quad \forall v \in V. \quad (۶.۲)$$

برای دیدن اثبات این قضیه، به [۱۲] مراجعه شود.

تعریف ۳.۲.۲. جواب ضعیف مساله مقدار مرزی (۱.۲) می‌باشد اگر رابطه

$$a[u, v] = \langle f, v \rangle_{H^{-1}, H^1}, \quad \forall v \in H^1_0(\Omega), \quad (۷.۲)$$

برقرار باشد.

به وسیله قضیه (۲.۲.۲)، می‌توان وجود و یکتایی کلاسی از ماتریس‌های  $A(x)$  ارایه شده در تعریف (۱.۲.۲) را اثبات کرد.

نکته ۴.۲.۲. فرم ضعیف مساله (۱.۲) به صورت زیر است:

$u \in H^1_0(\Omega)$  را به گونه‌ای پیدا کنید که رابطه

$$a[u, v] = (f, v), \quad \forall v \in H^1_0(\Omega), \quad (۸.۲)$$

برقرار باشد.

قضیه ۵.۲.۲. مساله دیریکله (۱.۲) همراه با  $A \in M(\alpha, \beta, \Omega)$  و  $f \in H^{-1}(\Omega)$ ، یک جواب ضعیف واحد  $u \in H^1_0(\Omega)$  را دارد. به علاوه برآورد زیر را داریم:

$$\|u\|_{H^1_0(\Omega)} \leq \frac{1}{\alpha} \|f\|_{H^{-1}(\Omega)}, \quad (۹.۲)$$

برهان. ابتدا با خاصیت کورسیوی، شروع می‌کنیم. چون ماتریس  $A$  معین مثبت می‌باشد، داریم:

$$a[u, u] = \int_{\Omega} \langle A \nabla u, \nabla u \rangle dx \geq \alpha \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = \alpha \|u\|_{H^1_0(\Omega)}^2, \quad (۱۰.۲)$$

اگر در معادله (۸.۲)، به جای  $v$  قرار دهیم  $u$ ، آنگاه:

$$a[u, u] = \langle f, u \rangle, \quad (۱۱.۲)$$

از طرفی بنابه نامساوی کوشی شوارتز داریم:

$$a[u, u] = \langle f, u \rangle \leq \|f\|_{H^{-1}(\Omega)} \|u\|_{H^1_0(\Omega)}, \quad (۱۲.۲)$$

با استفاده از روابط (۱۰.۲) و (۱۲.۲) داریم:

$$\alpha \|u\|_{H^1_0(\Omega)}^2 \leq a[u, u] \leq \|f\|_{H^{-1}(\Omega)} \|u\|_{H^1_0(\Omega)}.$$

در نهایت رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\alpha \|u\|_{H^1_0(\Omega)} \leq \|f\|_{H^{-1}(\Omega)} \Rightarrow \|u\|_{H^1_0(\Omega)} \leq \frac{1}{\alpha} \|f\|_{H^{-1}(\Omega)}.$$

□

اثبات این قضیه برگرفته از [۵] می‌باشد.

تذکره ۶.۲.۲. معادله (۱.۲) را همراه با  $A \in M(\alpha, \beta, \Omega)$  و  $f \in L^2(\Omega)$ ، در نظر می‌گیریم. داریم:

$$\|u\|_{H^1_0(\Omega)} \leq \frac{C_\Omega}{\alpha} \|f\|_{L^2(\Omega)},$$

که  $C_\Omega$  ثابت پوانکاره<sup>۷</sup> برای  $\Omega$  تعریف شده در نامساوی پوانکاره یعنی  $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$  می‌باشد.

قضیه ۷.۲.۲. فرض کنید که ثابت‌های مثبت  $\alpha$  و  $\beta$  وجود دارد که  $\alpha \leq \beta$ ، به قسمی که برای هر  $\varepsilon > 0$ ، خانواده یک پارامتری از ماتریس‌های  $A^\varepsilon = A^\varepsilon(x)$ ، به  $M(\alpha, \beta, \Omega)$  متعلق است.

مساله دیریکله را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (A^\varepsilon \nabla u^\varepsilon) = f, & \forall x \in \Omega, \\ u^\varepsilon = 0, & \forall x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (13.2)$$

همراه با  $f = f(x) \in H^{-1}(\Omega)$ . ثابت  $C$  مستقلی از  $\varepsilon$  وجود دارد به قسمی که:

$$\|u^\varepsilon\|_{H^1_0(\Omega)} \leq C, \quad (14.2)$$

به علاوه زیر دنباله  $\{\varepsilon_n\}_{n \geq 0}$  و تابع  $u \in H^1_0(\Omega)$  وجود دارد که  $u^{\varepsilon_n}(x)$  در  $L^2(\Omega)$ ، به طور قوی به  $u(x)$  می‌گراید.

برای دیدن اثبات به [۵] مراجعه شود.

## ۲.۲.۲ مساله دوره‌ای برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی بیضوی

برای مشخص کردن فرم دو خطی از نماد  $a_\gamma[\cdot, \cdot]$  استفاده می‌کنیم:

$$a_\gamma[u, v] = \int_Y \nabla_y v A \nabla_y u \, dy, \quad \forall u, v \in H,$$

لذا داریم:

$$a_\gamma[u, v] = \int_Y \langle A(x) \nabla u(x), \nabla v(x) \rangle \, dx, \quad \forall u, v \in H. \quad (15.2)$$

یادآور می‌شویم که جفت کردن بین  $H$  و  $H^*$  (دوگان  $H$ ) با  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^*, H}$  نمایش داده می‌شود.

تعریف ۸.۲.۲.  $u \in H$  جواب ضعیفی از مساله مقدار مرزی (۲.۲) می‌باشد اگر داشته باشیم:

$$a_\gamma[u, v] = \langle f, v \rangle_{H^*, H}, \quad \forall v \in H.$$

قضیه ۹.۲.۲. مساله (۲.۲) همراه با  $A \in M_{per}(\alpha, \beta, \gamma)$  و  $f \in H^*$ ، یک جواب ضعیف واحد دارد. همچنین برآورد زیر را داریم:

$$\|u\|_H \leq \frac{1}{\alpha} \|f\|_{H^*}.$$

به دلیل این که اثبات این قضیه مشابه قضیه (۵.۲.۲) می‌باشد، از ارایه آن صرف نظر می‌کنیم.

برای مشاهده اثبات به [۵] مراجعه شود.

<sup>۷</sup>Poincare

# فصل ۳

## همگن سازی برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی بیضوی

در این فصل با استفاده از بسط چندمقیاسی<sup>۱</sup>، به مطالعه مساله همگن سازی برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی به شکل یکنواخت بیضوی از مرتبه دوم در فرم واگرایی می پردازیم.

### ۱.۳ معادلات کامل

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی به شکل یکنواخت بیضوی در فرم واگرایی با شرایط مرزی دیریکله را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (A^\varepsilon \nabla u^\varepsilon) = f, & \forall x \in \Omega, \\ u^\varepsilon = 0, & \forall x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.3)$$

که در آن  $u^\varepsilon = u^\varepsilon(x)$  میدان اسکالر مجهولی می باشد که در ادامه تعیین می شود.  $A^\varepsilon = A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$  میدان ماتریسی و  $f = f(x)$  میدان اسکالری می باشد. ابتدا در نظر می گیریم که  $y = \frac{x}{\varepsilon}$  باشد. هدف این است که یک معادله همگن سازی شده را در شرایطی که  $y$  حذف شده و  $\varepsilon$  به سمت صفر میل می کند، بدست آوریم. علاوه بر این، ویژگی های متفاوتی از ضرایب همگن سازی شده را بررسی می کنیم.  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  را مجموعه باز و کران داری با مرز هموار در نظر می گیریم. فرض می کنیم که تابع ماتریس مقدار  $A(y)$ ، هموار، یک دوره ای و به طور یکنواخت معین مثبت می باشد. علاوه بر این تابع  $f(x)$  را هموار و مستقل از  $\varepsilon$  در نظر می گیریم؛ به طور خلاصه فرض های زیر را داریم:

$$f \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}), \quad (2.3)$$

<sup>۱</sup>Multiscale Expansions

$$A \in C_{per}^\infty(\mathbb{T}^d, \mathbb{R}^{d \times d}), \quad (۳.۳)$$

$$\exists \alpha > 0 : \langle \varepsilon, A(y)\varepsilon \rangle \geq \alpha |\varepsilon|^2, \quad \forall y \in \mathbb{T}^d, \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^d. \quad (۴.۳)$$

فرض های فوق روی  $A$  برای هر  $\beta$  مناسب و  $\alpha$  مستقل از  $\varepsilon$ ، رابطه زیر را می دهد:

$$A^\varepsilon \in M(\alpha, \beta, \Omega).$$

### ۲.۳ معادلات ساده شده

ضریب همگن سازی شده را به وسیله فرمول زیر تعریف می کنیم:

$$\bar{A} = \int_{\mathbb{T}^d} \left( A(y) + A(y) \nabla_y \chi(y)^T \right) dy, \quad (۵.۳)$$

که در آن میدان برداری  $\chi : y \rightarrow \mathbb{R}^d$  در مساله سلولی<sup>۲</sup> صدق می کند:

$$-\nabla_y \cdot (A(y) \nabla_y \chi(y)^T) = \nabla \cdot A(y)^T, \quad (۶.۳)$$

که در آن  $\chi(y)$  یک دوره ای می باشد.

نتیجه ۱.۲.۳. برای  $1 \gg \varepsilon > 0$ ، جواب  $u^\varepsilon$  از معادله (۱.۳)، تقریبی از جواب  $u$  از معادله همگن سازی شده زیر را می دهد:

$$\begin{cases} -\bar{A} : \nabla \nabla u = f, & \forall x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & \forall x \in \partial \Omega. \end{cases} \quad (۷.۳)$$

البته توجه داریم که میدان  $\chi$  بردار ثابت تعیین نشده ای است. اما، چون فقط  $\nabla \chi$  در (۵.۳) موجود می باشد، این مقدار ثابت بی ارتباط با موضوع مورد نظر ماست.

### ۳.۳ اشتقاق

از آن جا که پارامتر  $\varepsilon$  در معادله (۱.۳) ظاهر شده است، به دنبال جوابی به شکل بسط سری های توانی در  $\varepsilon$  هستیم:

$$u^\varepsilon = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots,$$

ایده اصلی روش چندمقیاسی این است که فرض کنیم که همه عبارات در این بسط، به طور آشکار به  $x$  و  $y = \frac{x}{\varepsilon}$  وابسته است. به علاوه، چون ضرایب معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی مورد نظر، توابع دوره ای از  $\frac{x}{\varepsilon}$  هستند، جواب همیشه تابع دوره ای از آرگومان می باشد. پس داریم:

$$u^\varepsilon(x) = u_0\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^2 u_2\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \dots, \quad (۸.۳)$$

که در آن  $u_j(x, y)$  برای  $j = 0, 1, \dots$  در  $y$ ، دوره ای هستند.

متغیرهای  $x$  و  $y = \frac{x}{\varepsilon}$ ، به ترتیب به عنوان مقیاس های آهسته و سریع نمایش داده می شوند. برای

<sup>۲</sup>Cell Problem

$\varepsilon \ll 1$ ، متغیر  $y$  با سرعت بیشتری نسبت به متغیر  $x$  تغییر می‌کند. در مسایل با مقیاس بسیار کوچک، می‌توان  $x$  را ثابت فرض کرد.  $x$  و  $y$  را به‌عنوان متغیرهای مستقل در نظر می‌گیریم. فرض این که  $\varepsilon$  به سمت صفر میل می‌کند، یکی از موضوعات اصلی در نظریه همگن‌سازی می‌باشد. از آن‌جا که  $y = \frac{x}{\varepsilon}$  است، مشتقات جزئی نسبت به  $x$  به صورت

$$\nabla_x \rightarrow \nabla_x + \frac{1}{\varepsilon} \nabla_y,$$

می‌باشد. به عبارت دیگر، مشتقات کلی از تابع  $f^\varepsilon(x) := f\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)$ ، به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\nabla_x f^\varepsilon(x) = \nabla_x f(x, y) \Big|_{y=\frac{x}{\varepsilon}} + \frac{1}{\varepsilon} \nabla_y f(x, y) \Big|_{y=\frac{x}{\varepsilon}},$$

توجه داریم که  $h(x, y)|_{y=z}$  به این معناست که تابع  $h(x, y)$  با  $y = z$  تعیین می‌شود. با استفاده از اطلاعات فوق، دوباره عملگر دیفرانسیل را بازنویسی می‌کنیم:

$$\mathcal{A}^\varepsilon := -\nabla \cdot (A(y) \nabla),$$

در فرم زیر:

$$\mathcal{A}^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^2} \mathcal{A}_0 + \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2, \quad (9.3)$$

که در آن:

$$\mathcal{A}_0 := -\nabla_y \cdot (A(y) \nabla_y), \quad (10.3)$$

$$\mathcal{A}_1 := -\nabla_y \cdot (A(y) \nabla_x) - \nabla_x \cdot (A(y) \nabla_y), \quad (11.3)$$

$$\mathcal{A}_2 := -\nabla_x \cdot (A(y) \nabla_x), \quad (12.3)$$

می‌باشد. توجه داریم که ضرایب در همه عملگرهای بالا توابعی دوره‌ای از  $y$  هستند. معادله (۹.۳) را در (۱.۳) جایگذاری می‌کنیم. داریم:

$$\begin{cases} \left( \frac{1}{\varepsilon^2} \mathcal{A}_0 + \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 \right) u^\varepsilon = f, & \forall x \in \Omega, \\ u^\varepsilon(x) = 0, & \forall x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (13.3)$$

با جایگذاری (۸.۳) در (۱۳.۳) داریم:

$$\left( \frac{1}{\varepsilon^2} \mathcal{A}_0 + \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 \right) (u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2) = f,$$

با انجام محاسباتی ساده به عبارت زیر می‌رسیم:

$$\frac{1}{\varepsilon^2} (\mathcal{A}_0 u_0) + \frac{1}{\varepsilon} (\mathcal{A}_0 u_1 + \mathcal{A}_1 u_0) + (\mathcal{A}_0 u_2 + \mathcal{A}_1 u_1 + \mathcal{A}_2 u_0) + O(\varepsilon) = f, \quad (14.3)$$

در معادله فوق، ضرایب توان‌های مساوی از  $\varepsilon$  را برابر صفر قرار می‌دهیم و دنباله‌ای از معادلات به شکل

$$O\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right) \quad \mathcal{A}_0 u_0 = 0, \quad (15.3)$$

$$O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \quad \mathcal{A}_0 u_1 = -\mathcal{A}_1 u_0, \quad (16.3)$$

$$O(1) \quad \mathcal{A}_0 u_2 = -\mathcal{A}_1 u_1 - \mathcal{A}_2 u_0 + f, \quad (17.3)$$



بدست می‌آوریم. در این جا  $u_j(x, y)$  در آرگومان دوم یک دوره‌ای می‌باشد. توجه داریم که  $A$  عملگری دیفرانسیلی در  $y$  است و  $x$  در معادلات (۱۶.۳) و (۱۷.۳) فقط به‌عنوان یک پارامتر ظاهر می‌شود. از (۱۵.۳) عبارت زیر را نتیجه می‌گیریم:

$$u_0(x, y) = u(x),$$

بنابراین اولین عبارت از بسط چندمقیاسی، مستقل از  $y$  است. دو معادله باقی مانده، یعنی معادلات (۱۶.۳) و (۱۷.۳) به شکل

$$A_0 v = h,$$

هستند که در آن  $v$ ، یک دوره‌ای است، همچنین  $v = v(x, y)$  بوده و به‌طور مشابه  $h = h(x, y)$  می‌باشد. پس  $x$  به‌عنوان یک پارامتر ظاهر می‌شود. حال به سراغ معادله (۱۶.۳) می‌رویم، پس داریم:

$$A_0 u_1 = (\nabla_y \cdot A^T) \cdot \nabla_x u, \quad \int_y u_1 dy = 0, \quad (18.3)$$

که در آن  $u(x)$ ، یک دوره‌ای می‌باشد. بنابراین شرط حل‌پذیری صادق است:

$$\int_y (\nabla_y \cdot A^T) \cdot \nabla_x u dy = \nabla_x u \cdot \int_y \nabla_y \cdot A^T dy = 0,$$

جوابی از (۱۸.۳) را با استفاده از جداسازی متغیرها جستجو می‌کنیم:

$$u_1(x, y) = \chi(y) \cdot \nabla_x u(x), \quad (19.3)$$

با قرار دادن (۱۹.۳) در (۱۸.۳)، مساله سلولی (۶.۳) را برای میدان برداری  $\chi(y)$  بدست می‌آوریم.  $\chi(y)$  را میدان اصلاح‌گر<sup>۳</sup> مرتبه اول می‌نامیم. یگانگی جواب مساله سلولی، به‌وسیله الزام میدان اصلاح‌گر به داشتن میانگین صفر، تضمین می‌شود. از آن‌جا که فرض کرده بودیم که تابع  $f(x)$  مستقل از  $y$  است، شرط حل‌پذیری منجر به برقراری رابطه

$$\int_y (A_2 u_0 + A_1 u_1) dy = f, \quad (20.3)$$

می‌شود.

عبارت اول از سمت چپ معادله (۲۰.۳) به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \int_y A_2 u_0 dy &= \int_y -\nabla_x \cdot (A(y) \nabla_x u) dy \\ &= -\nabla_x \cdot \left[ \left( \int_y A(y) dy \right) \nabla_x u(x) \right] \\ &= - \left( \int_y A(y) dy \right) : \nabla_x \nabla_x u(x). \end{aligned} \quad (21.3)$$

<sup>۳</sup> Corrector Field

به همین ترتیب داریم:

$$\begin{aligned} \int_y \mathcal{A}_1 u_1 &= \int_y \left( -\nabla_y \cdot (A(y) \nabla_x u_1) - \nabla_x \cdot (A(y) \nabla_y u_1) \right) dy \\ &=: I_1 + I_2, \end{aligned}$$

بنا به قضیه واگرایی،  $I_1 = 0$  است. حال  $I_2$  را در نظر می‌گیریم. با توجه به (۱۹.۳) داریم:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_y -\nabla_x \cdot (A(y) \nabla_y u_1) dy \\ &= - \int_y A(y) : \nabla_x \nabla_y (\chi \cdot \nabla_x u) dy \\ &= - \left( \int_y (A(y) \nabla_y \chi(y)^T) dy \right) : \nabla_x \nabla_x u. \end{aligned} \quad (22.3)$$

با جایگذاری (۲۱.۳) و (۲۲.۳) در (۲۰.۳) معادله همگن‌سازی شده را بدست می‌آوریم:

$$\begin{cases} -\bar{A} : \nabla_x \nabla_x u = f, & \forall x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & \forall x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

که در آن ضریب همگن‌سازی شده  $\bar{A}$  به وسیله فرمول زیر حاصل می‌شود:

$$\bar{A} = \int_y \left( A(y) + A(y) \nabla \chi(y)^T \right) dy,$$

که معادله فوق در واقع همان معادله (۵.۳) می‌باشد.

## ۴.۳ ویژگی‌هایی از ضرایب همگن‌سازی شده

در این بخش برخی از ویژگی‌های اساسی ضرایب موثر<sup>۴</sup> را بررسی می‌کنیم. نشان می‌دهیم که ماتریس  $\bar{A}$  معین مثبت است، که این سبب می‌شود که عملگر دیفرانسیل همگن‌سازی شده، به طور یکنواخت بیضوی باشد. با توجه به ماتریس ضرایب همگن‌سازی شده، پیدا کردن نمایش متناوبی از  $\bar{A}$ ، متداول می‌باشد. به این منظور، فرم دوخطی

$$a_1(\psi, \phi) = \int_y \langle \nabla_y \phi, A(y) \nabla_y \psi \rangle dy, \quad \forall \phi, \psi \in C^1(y), \quad (23.3)$$

را معرفی می‌کنیم.

توجه داریم که فرم دوخطی وابسته به عملگر  $A$  به صورت

$$\int_{\mathbb{T}^d} \phi A \cdot \psi dy = a_1(\phi, \psi), \quad \forall \phi, \psi \in C_{per}^1(\mathbb{T}^d),$$

است.

کار را با بدست آوردن یک فرمول‌بندی معادل و متناوب برای مساله سلولی شروع می‌کنیم.

<sup>۴</sup>Effective Coefficients

فرمول بندی دقیق وابسته به فرم ضعیف معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی بیضوی معرفی شده در قسمت های قبل می باشد.

فرض این که هر مولفه از بردار به طور پیوسته مشتق پذیر و دوره ای است، برای  $\chi_L(y) \in C_{per}^1(\mathbb{T}^d)$ ، کافی می باشد.

توجه داریم که  $e_L$  نشان دهنده بردار یکه ای با مولفه  $i$  ام  $\delta_{iL}$  می باشد. همچنین فرض می کنیم که  $y_L$  مشخص کننده مولفه  $L$  ام از بردار  $y$  باشد. توجه داریم که:

$$e_L = \nabla_y y_L.$$

فرض می کنیم که  $a_L(y)$  مشخص کننده ستون  $L$  ام از  $A(y)$  باشد. بنابراین مساله سلولی می تواند به صورت

$$\nabla_y \cdot (A \nabla_y \chi_L + a_L) = 0, \quad L = 1, \dots, d,$$

نوشته شود. با استفاده از این اطلاعات، می توان لم زیر را بدست آورد:

لم ۱.۴.۳. مساله سلولی را می توان به صورت زیر نوشت:

$$a_1(\chi_L + y_L, \phi) = 0, \quad \forall \phi \in C_{per}^1(y), \quad L = 1, \dots, d.$$

برای مشاهده اثبات به [۵] مراجعه شود.

بنابر لم فوق، چون  $A$  متقارن است،  $\bar{A}$  نیز متقارن می باشد.

لم ۲.۴.۳. ماتریس موثر  $\bar{A}$  دارای مولفه هایی است که از طریق زیر بدست می آید:

$$\bar{a}_{ij} = a_1(\chi_j + y_j, \chi_i + y_i), \quad i, j = 1, \dots, d. \quad (24.3)$$

برای مشاهده اثبات به [۵] مراجعه شود.

بنابه خاصیت تقارن،  $\bar{A}$  نیز معین مثبت می باشد.

قضیه ۳.۴.۳. ماتریس ضرایب همگن سازی شده  $\bar{A}$ ، معین مثبت است.

برهان. فرض می کنیم که  $\varepsilon \in \mathbb{R}^d$  بردار دلخواهی باشد. برای اثبات این قضیه کفایت ثابت کنیم که یک ثابت  $\bar{\alpha} > 0$  وجود دارد به قسمی که:

$$\langle \varepsilon, \bar{A}\varepsilon \rangle \geq \bar{\alpha} |\varepsilon|^2, \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^d.$$

حال رابطه

$$w = \varepsilon \cdot (\chi + y), \quad (25.3)$$

را در نظر می گیریم. با توجه به (۲۴.۳) و با در نظر گرفتن (۲۵.۳) داریم:

$$\langle \varepsilon, \bar{A}\varepsilon \rangle = a_1(w, w). \quad (26.3)$$

با توجه به این که  $A(y)$  معین مثبت است، رابطه

$$a_1(w, w) \geq \alpha \int_{\mathbb{T}^d} |\nabla_y w|^2 dy \geq 0,$$

برقرار است، پس  $a_1(w, w)$  نامنفی است. در واقع می توان گفت که  $\bar{a}_{ij} \geq 0$  می باشد. حال فرض می کنیم که  $\bar{a}_{ij} = 0$  است، در این صورت  $a_1(w, w) = 0$  می باشد، در نتیجه:

$$\langle \varepsilon, \bar{A}\varepsilon \rangle = 0,$$

پس داریم:

$$0 = a_1(w, w) \geq \alpha \int_{\mathbb{T}^d} |\nabla_y w|^2 dy \geq 0,$$

در نتیجه:

$$\alpha \int_{\mathbb{T}^d} |\nabla_y w|^2 dy = 0,$$

از طرفی  $\alpha > 0$  می باشد، پس:

$$\nabla_y w = 0.$$

لذا  $w = c$ ، که  $c$  برداری ثابت می باشد. حال با جایگذاری  $w = c$  در (۲۵.۳) داریم:

$$\varepsilon \cdot y = c - \varepsilon \cdot \chi, \quad (27.3)$$

در تساوی (۲۷.۳)، عبارت سمت راست یک دوره ای و پیوسته است، پس عبارت سمت چپ هم به همین ترتیب می باشد و این فقط زمانی اتفاق می افتد که  $\varepsilon = 0$  باشد، که تناقض با  $0 < \varepsilon < 1$  است. در نتیجه  $\bar{a}_{ij} \neq 0$ . پس  $\bar{a}_{ij} > 0$  و به عبارتی دیگر:  $\bar{a} > 0$ .  $\square$

اثبات این قضیه برگرفته از [۵] می باشد.

قضیه (۳.۴.۳) نشان می دهد که در رویه همگن سازی، به طور یکنواخت بیضوی بودن حفظ می شود. این امر در حالت خاص باعث می شود که معادله همگن سازی شده در فرم خوبی قرار بگیرد، چرا که یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی به طور یکنواخت بیضوی و با ضرایب ثابت حاصل می شود.

تذکر ۴.۴.۳. توجه داشته باشید که همگن سازی، همگرایی را حفظ نمی کند. در حالتی خاص، اگر عناصر غیر صفر ماتریس انتشار<sup>۵</sup>  $A$ ، فقط روی قطر واقع شده باشد، ماتریس پخش همگن سازی شده  $\bar{A}$  دارای عناصر غیر قطری غیر صفر می باشد.

فرض می کنیم که  $a_{ij} = 0, i \neq j$ . در این جا عناصر غیر قطری ماتریس همگن سازی شده از فرمول

$$\bar{a}_{ij} = \int_{\mathbb{T}^d} a_{ii} \frac{\partial \chi_j}{\partial y_i} dy, \quad i \neq j,$$

محاسبه می شود. صفر بودن این عبارت الزامی نیست.

## ۵.۳ کاربردها

در این بخش دو مثال مفید از همگن سازی را بیان می کنیم. مثال اول در حالت یک بعدی و مثال دوم در ابعاد بالاتر می باشد. در واقع، مساله سلولی در حالت یک بعدی، می تواند تنها از راه تجزیه

<sup>۵</sup>Diffusivity

حل شود و می‌توان فرمولی صریح برای انتشار موثر بدست آورد. در ابعاد بالاتر، فقط زمانی که ساختار خاصی از مسایل را داریم، فرمولی صریح برای انتشار موثر، حاصل می‌گردد. یعنی زمانی که بتوان محاسبات ضرایب همگن‌سازی را به حالت یک بعدی کاهش داد. این قبیل ساده‌سازی، در حالتی از مواد لایه‌ای<sup>۶</sup> که در مثال دوم در نظر می‌گیریم، ممکن می‌باشد.

### ۱.۵.۳ حالت یک بعدی

فرض می‌کنیم که  $d = 1$  و  $\Omega = [0, L]$  باشد. مساله دیریکله (۱.۳) به مساله مقدار مرزی دو نقطه‌ای تقلیل می‌یابد:

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx} \left( a \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{du^\varepsilon}{dx} \right) = f, & \forall x \in (0, L), \\ u^\varepsilon(0) = u^\varepsilon(L) = 0. \end{cases} \quad (28.3)$$

فرض می‌کنیم که  $a(y)$  هموار و دوره‌ای با دوره‌ای یک باشد. همچنین فرض می‌کنیم که ثابت‌های  $\alpha$  و  $\beta$  وجود دارند که  $0 < \alpha \leq \beta < \infty$ ، به قسمی که:

$$\alpha \leq a(y) \leq \beta, \quad \forall y \in [0, 1]. \quad (29.3)$$

همچنین فرض می‌کنیم که  $f$  هموار است.

در حالت یک بعدی مساله سلولی، یک مساله مقدار مرزی برای معادله دیفرانسیل معمولی با شرایط مرزی دوره‌ای، می‌باشد:

$$-\frac{d}{dy} \left( a(y) \frac{d\chi}{dy} \right) = \frac{da(y)}{dy}, \quad \forall y \in (0, 1), \quad (30.3)$$

$$\int_0^1 \chi(y) dy = 0, \quad (31.3)$$

که در آن  $\chi$ ، یک دوره‌ای می‌باشد. چون  $d = 1$  است، فقط یک ضریب موثر داریم که صورت یک بعدی از (۵.۳) می‌باشد. یعنی:

$$\bar{a} = \int_0^1 \left( a(y) + a(y) \frac{d\chi(y)}{dy} \right) dy = \left\langle a(y) \left( 1 + \frac{d\chi(y)}{dy} \right) \right\rangle. \quad (32.3)$$

در قسمت باقی مانده از این فصل، نماد

$$\langle f(y) \rangle := \int_{\mathbb{T}^d} f(y) dy,$$

را برای میانگین  $f$  روی  $\mathbb{T}^d$  به کار می‌گیریم.

معادله (۳۰.۳) را می‌توان به صورت دقیق حل کرد. با انتگرال‌گیری در بازه  $[0, y]$  داریم:

$$a(y) \frac{d\chi}{dy} = -a(y) + c_1, \quad (33.3)$$

که ثابت  $c_1$  در این نقطه مجهول می‌باشد.

چون نامساوی (۲۹.۳) ایجاب می‌کند که  $a$  به طور اکید مثبت باشد، پس می‌توانیم رابطه (۳۳.۳)

<sup>۶</sup>Layered Materials

را بر  $a(y)$  تقسیم کنیم. دوباره از  $\circ$  تا  $y$  انتگرال گیری می کنیم و رابطه

$$\chi(y) = -y + c_1 \int_{\circ}^y \frac{1}{a(y)} dy + c_2,$$

را نتیجه می گیریم. برای تعیین ثابت  $c_1$  از این که  $\chi(y)$  یک تابع دوره‌ای است، استفاده می کنیم:

$$\begin{aligned} \chi(\circ) = \chi(1) &\implies \circ = 1 - c_1 \int_{\circ}^1 \frac{1}{a(y)} dy \\ &\implies c_1 = \frac{1}{\int_{\circ}^1 \frac{1}{a(y)} dy} := \langle a(y)^{-1} \rangle^{-1}. \end{aligned}$$

پس داریم:

$$c_1 = \langle a(y)^{-1} \rangle^{-1}. \quad (34.3)$$

در نتیجه از رابطه (33.3) داریم:

$$1 + \frac{d\chi}{dy} = \frac{1}{\langle a(y)^{-1} \rangle a(y)}.$$

توجه داریم که بدست آوردن  $c_2$  برای محاسبه  $\bar{a}$  الزامی نیست.

حال با جایگذاری عبارت بدست آمده در (32.3) داریم:

$$\bar{a} = \langle a(y)^{-1} \rangle^{-1}, \quad (35.3)$$

که این فرمول ضریب همگن سازی در حالت یک بعدی را بیان می کند. ضریب همگن سازی شده وارون، تقریباً میانگینی از وارون ضریب همگن سازی نشده می باشد.

### ۲.۵.۳ مواد لایه‌ای

فرض می کنیم مساله (1.3) به همراه فرضیات (2.3)، (3.3) و (4.3) در حالت دوبعدی صدق کنند. فرض می کنیم که  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  یک ماده لایه‌ای را نمایش می دهد. ویژگی های این ماده فقط در یک جهت تغییر می کنند. از این رو، ضرایب  $A(y)$  توابعی از یک متغیر هستند. برای  $y = (y_1, y_2)^T$  داریم:

$$a_{ij} = a_{ij}(y_1), \quad i, j = 1, 2. \quad (36.3)$$

چون ضرایب، توابعی از  $y_1$  هستند، لذا سمت راست مساله سلولی (6.3)، تابعی تنها از  $y_1$  می باشد. در نتیجه جواب مساله سلولی نیز تابعی تنها از  $y_1$  می باشد:

$$\chi_L = \chi_L(y_1), \quad L = 1, 2. \quad (37.3)$$

با جایگذاری در (6.3)، مساله سلولی با شرایط مرزی دوره‌ای به صورت

$$-\frac{d}{dy_1} \left( a_{11}(y_1) \frac{d\chi_L(y_1)}{dy_1} \right) = \frac{da_{1L}(y_1)}{dy_1}, \quad L = 1, 2, \quad (38.3)$$

می باشد. به طریق مشابه فرمول ضریب همگن سازی شده (5.3)، به صورت

$$\bar{a}_{ij} = \int_{\circ}^1 \left( a_{ij}(y_1) + a_{i1}(y_1) \frac{d\chi_j(y_1)}{dy_1} \right) dy_1, \quad i, j = 1, 2, \quad (39.3)$$

است. می‌خواهیم معادله (۳۸.۳) را که یک معادله دیفرانسیل معمولی است، حل کنیم. برای این کار، از  $\circ$  تا  $y$  انتگرال می‌گیریم و طرفین را بر  $a_{11}(y_1)$  تقسیم می‌کنیم و رابطه زیر را بدست می‌آوریم:

$$\frac{d\chi_L}{dy_1} = -\frac{a_{1L}}{a_{11}} + c_1 \frac{1}{a_{11}}, \quad L = 1, 2, \quad (40.3)$$

که در آن ثابت  $c_1$  مشخص شده است. حالت  $L = 1$  و  $L = 2$  را جداگانه در نظر می‌گیریم. کار را با  $L = 1$  شروع می‌کنیم. در این حالت معادله فوق به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\frac{d\chi_1}{dy_1} = -1 + c_1 \frac{1}{a_{11}},$$

با توجه به رابطه (۳۴.۳)، به عبارت

$$\frac{d\chi_1}{dy_1} = -1 + \frac{1}{\langle a_{11}(y)^{-1} \rangle a_{11}(y)}, \quad (41.3)$$

می‌رسیم. حال معادله (۴۰.۳) را برای حالت  $L = 2$  در نظر می‌گیریم:

$$\frac{d\chi_2}{dy_1} = -\frac{a_{12}}{a_{11}} + c_1 \frac{1}{a_{11}},$$

یک بار دیگر از معادله فوق انتگرال گیری می‌کنیم، سپس ضریب  $c_1$  را به وسیله الزام  $\chi_2(y_1)$  به دوره‌ای بودن، مشخص می‌کنیم. سرانجام رابطه

$$\frac{d\chi_2(y_1)}{dy_1} = -\frac{a_{12}(y_1)}{a_{11}(y_1)} + \frac{\langle a_{12}(y_1)/a_{11}(y_1) \rangle}{\langle a_{11}^{-1}(y_1) \rangle} \frac{1}{a_{11}(y_1)}, \quad (42.3)$$

بدست می‌آید. حال می‌توان ضرایب همگن سازی را محاسبه کرد.

با  $\bar{a}_{11}$  شروع می‌کنیم. این محاسبه با حالت یک بعدی یکسان می‌باشد. یعنی:

$$\bar{a}_{11} = \langle a_{11}(y_1)^{-1} \rangle^{-1}. \quad (43.3)$$

اقدام به محاسبه  $\bar{a}_{12}$  می‌کنیم. با جایگذاری (۴۲.۳) در (۳۹.۳) با  $j = 2$  و  $i = 1$  نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} \bar{a}_{12} &= \int_{\circ}^1 \left( a_{12}(y_1) + a_{11}(y_1) \frac{d\chi_2(y_1)}{dy_1} \right) dy \\ &= \left( a_{12}(y_1) + a_{11}(y_1) \left( -\frac{a_{12}(y_1)}{a_{11}(y_1)} + \frac{\langle a_{12}(y_1)/a_{11}(y_1) \rangle}{\langle a_{11}^{-1}(y_1) \rangle} \frac{1}{a_{11}(y_1)} \right) \right) dy \\ &= \int_{\circ}^1 \left( a_{12}(y_1) - a_{12}(y_1) + \frac{\langle a_{12}(y_1)/a_{11}(y_1) \rangle}{\langle a_{11}^{-1}(y_1) \rangle} \right) dy \\ &= \frac{\langle a_{12}(y_1)/a_{11}(y_1) \rangle}{\langle a_{11}^{-1}(y_1) \rangle}, \end{aligned}$$

بنابراین داریم:

$$\bar{a}_{12} = \left\langle \frac{a_{12}(y_1)}{a_{11}(y_1)} \right\rangle \langle a_{11}^{-1}(y_1) \rangle^{-1}. \quad (44.3)$$

به طور مشابه داریم:

$$\bar{a}_{21} = \left\langle \frac{a_{21}(y_1)}{a_{11}(y_1)} \right\rangle \langle a_{11}^{-1}(y_1) \rangle^{-1}. \quad (45.3)$$

سرانجام  $\bar{a}_{22}$  را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned}\bar{a}_{22} &= \int_0^1 \left( a_{22}(y_1) + a_{21}(y_1) \frac{d\chi_2(y_1)}{dy_1} \right) dy \\ &= \int_0^1 \left( a_{22}(y_1) + a_{21}(y_1) \left( -\frac{a_{12}(y_1)}{a_{11}(y_1)} + \frac{\langle a_{12}(y_1)/a_{11}(y_1) \rangle}{\langle a_{11}^{-1}(y_1) \rangle} \frac{1}{a_{11}(y_1)} \right) \right) dy \\ &= \int_0^1 \left( a_{22}(y_1) - \frac{a_{12}(y_1)a_{21}(y_1)}{a_{11}(y_1)} + \frac{a_{21}(y_1) \langle a_{12}(y_1)/a_{11}(y_1) \rangle}{a_{11}(y_1) \langle a_{11}^{-1}(y_1) \rangle} \right) dy \\ &= \left\langle \frac{a_{21}(y_1)}{a_{11}(y_1)} \right\rangle \left\langle \frac{a_{12}(y_1)}{a_{11}(y_1)} \right\rangle \langle a_{11}^{-1}(y_1) \rangle^{-1} + \left\langle a_{22}(y_1) - \frac{a_{12}(y_1)a_{21}(y_1)}{a_{11}(y_1)} \right\rangle,\end{aligned}$$

در نتیجه داریم:

$$\bar{a}_{22} = \left\langle \frac{a_{21}(y_1)}{a_{11}(y_1)} \right\rangle \left\langle \frac{a_{12}(y_1)}{a_{11}(y_1)} \right\rangle \langle a_{11}^{-1}(y_1) \rangle^{-1} + \left\langle a_{22}(y_1) - \frac{a_{12}(y_1)a_{21}(y_1)}{a_{11}(y_1)} \right\rangle. \quad (۴۶.۳)$$

ضرایب همگن‌سازی شده وابسته به اصلی بسیار پیچیده، از معادلات (۴۳.۳)، (۴۴.۳)، (۴۵.۳) و (۴۶.۳)، از راه غیر خطی و به شکلی بدیهی حاصل می‌شود.

## ۶.۳ تشریح موضوع

ابتدا معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی بیضوی

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (A^\varepsilon \nabla u^\varepsilon) = f, & \forall x \in \Omega, \\ u^\varepsilon = 0, & \forall x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

را در نظر می‌گیریم. معادله همگن‌سازی شده به صورت

$$\begin{cases} -\bar{A} : \nabla \nabla u = f, & \forall x \in \Omega, \\ u = 0, & \forall x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

است. در مورد جواب  $u^\varepsilon$  بنابه (۸.۳) داریم:

$$u^\varepsilon(x) = u_0\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^2 u_2\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \dots$$

ابتدا از حل معادله همگن‌سازی شده،  $u(x)$  را بدست می‌آوریم:

$$u_0\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) = u(x).$$

حال به دنبال بدست آوردن  $u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)$  و  $u_2\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)$  هستیم.  $u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)$  از معادله زیر حاصل می‌شود:

$$u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) = \chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \cdot \nabla_x u(x) + \hat{u}_1(x),$$

که در آن  $\chi(y)$  از مساله سلولی

$$-\nabla_y \cdot (A(y) \nabla_y \chi(y)^T) = \nabla \cdot A(y)^T,$$



بدست می‌آید، که  $\chi(y)$  یک دوره‌ای می‌باشد. همچنین می‌توانیم معادلات از مراتب بالاتر را حل کنیم و عبارات از مراتب بالاتر در بسط دومقیاسی را بدست آوریم. برای مثال می‌توان با حل معادلات (۱۵.۳)، (۱۶.۳) و (۱۷.۳)،  $u_2(x, y)$  را محاسبه کرد:

$$u_2(x, y) = \Theta(y) : \nabla_x \nabla_x u(x) + \hat{u}_2(x),$$

که در آن میدان اصلاح‌گر مرتبه دوم  $\Theta(y)$ ، تابعی ماتریس مقدار می‌باشد که در مساله مقدار مرزی

$$A_0 \Theta = B,$$

صدق می‌کند. از طرفی داشتیم:

$$A_0 := -\nabla_y \cdot (A(y) \nabla_y),$$

در این جا  $B(y)$  از فرمول زیر محاسبه می‌شود:

$$B(y) := -\bar{A} + A(y) + A(y) \nabla_y \chi(y)^T + \nabla_y \chi(y) A(y) + \chi(y) \otimes (\nabla_y \cdot A(y)^T).$$

شایان ذکر است که تمام معادلات از مراتب بالاتر به فرم زیر هستند:

$$A_0 u_{k+2} = -A_1 u_{k+1} - A_2 u_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

# فصل ۴

## همگن سازی برای معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی بیضوی: قضیه همگرایی

### ۱.۴ قضیه‌ها

در این فصل قضیه همگن سازی را برای معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی به طور یکنواخت بیضوی از مرتبه دوم با ضرایب دوره‌ای و شرایط مرزی دیریکله، اثبات می‌کنیم.

قضیه ۱.۱.۴. فرض می‌کنیم که  $u^\varepsilon$  جواب معادله

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (A^\varepsilon \nabla u^\varepsilon) = f, & \forall x \in \Omega, \\ u^\varepsilon = 0, & \forall x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.4)$$

باشد که در آن:

$$f = f(x) \in H^{-1}(\Omega), \quad A^\varepsilon(x) = A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

$$A \in M_{per}(\alpha, \beta, \mathbb{T}^d), \quad 0 < \alpha \leq \beta < \infty,$$

است. به علاوه، فرض می‌کنیم که  $u$  جوابی از مساله همگن سازی شده

$$\begin{cases} -\bar{A} : \nabla \nabla u = f, & \forall x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & \forall x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.4)$$

باشد، که  $\bar{A}$  به صورت

$$\bar{A} = \int_{\mathbb{T}^d} \left( A(y) + A(y) \nabla_y \chi(y)^T \right) dy, \quad (3.4)$$

می‌باشد، که در آن میدان برداری  $\chi(y)$ ، جواب ضعیفی از مساله سلولی

$$-\nabla_y \cdot \left( \nabla_y \chi(y) A^T \right) = \nabla_y \cdot A^T, \quad (4.4)$$

است که  $\chi(y)$  یک دوره‌ای می‌باشد. در نتیجه  $u^\varepsilon$  در فضای  $H^1_0(\Omega)$ ، به  $u$ ، همگرایی ضعیف و  $u^\varepsilon$  در فضای  $L^2(\Omega)$ ، به  $u$ ، همگرایی قوی دارد. به عبارت دیگر:

$$u^\varepsilon \rightharpoonup u \quad \text{in } H^1_0(\Omega),$$

$$u^\varepsilon \rightarrow u \quad \text{in } L^2(\Omega).$$

بر اساس قضیه همگن سازی، به این نتیجه می‌رسیم که نگه داشتن عبارات اضافی در بسط چندمقیاسی، باعث بهبود تقریب می‌شود. این نتیجه نمایان‌گر این موضوع است که می‌توانیم در فضای  $H^1(\Omega)$  همگرایی قوی داشته باشیم.

**قضیه ۲.۱.۴.** فرض می‌کنیم که  $u^\varepsilon$  و  $u$ ، همان جواب‌های تعریف شده در قضیه قبل باشند. در این صورت داریم:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\| u^\varepsilon(x) - \left( u(x) + \varepsilon \chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \cdot \nabla u(x) \right) \right\|_{H^1(\Omega)} = 0. \quad (5.4)$$

## ۲.۴ برهان قضیه همگن سازی

**تعریف ۱.۲.۴.** فرض کنید که  $u^\varepsilon$  دنباله‌ای در  $L^2(\Omega)$  باشد. می‌گوییم  $u^\varepsilon$  همگرایی دومقیاسی به  $u_0(x, y) \in L^2(\Omega \times \mathbb{T}^d)$  است و همچنین می‌نویسیم  $u_0 \stackrel{L^2}{\rightharpoonup} u^\varepsilon$ ، اگر برای هر تابع آزمون  $\phi \in L^2(\Omega; C_{per}(\mathbb{T}^d))$  داشته باشیم:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u^\varepsilon(x) \phi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx = \int_{\Omega} \int_{\mathbb{T}^d} u_0(x, y) \phi(x, y) dy dx. \quad (6.4)$$

در این بخش، قضیه همگن سازی یعنی قضیه (۱.۱.۴) را با استفاده از همگرایی دومقیاسی اثبات می‌کنیم. قبل از بیان اثبات، دو نکته را متذکر می‌شویم. اول این که  $u^\varepsilon$  و  $\nabla u^\varepsilon$  دارای زیردنباله‌های همگرایی دومقیاسی می‌باشد. دوم این که از تابع آزمون به فرم زیر استفاده می‌کنیم:

$$\phi^\varepsilon(x) = \phi_0(x) + \varepsilon \phi_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right), \quad (7.4)$$

برهان قضیه (۱.۱.۴) را به سه بخش تقسیم می‌کنیم. در واقع سه لم را بیان می‌کنیم. برای اثبات قضیه (۱.۱.۴)، کفایت که به اثبات این سه لم بپردازیم.

**لم ۲.۲.۴.** فرض می‌کنیم که  $u^\varepsilon(x)$  جوابی از مساله (۱.۴) با فرض‌های قضیه (۱.۱.۴) باشد. سپس توابع

$$\{u(x), u_1(x, y)\} \in \{H^1_0(\Omega) \times L^2(\Omega; H^1_{per}(y))\},$$

وجود دارند به قسمی که  $u^\varepsilon$  و  $\nabla u^\varepsilon$  همگرایی دومقیاسی به  $u(x)$  و  $\nabla_x u + \nabla_y u_1$  می‌باشند. به علاوه،  $\{u, u_1\}$  در دستگاه دومقیاسی زیر صدق می‌کنند:

$$-\nabla_y \cdot \left( A(y)(\nabla_x u + \nabla_y u_1) \right) = 0, \quad \text{in } \Omega \times y, \quad (8.4)$$

$$-\nabla_x \cdot \left( \int_y A(y)(\nabla_x u + \nabla_y u_1) dy \right) = f, \quad \text{in } \Omega, \quad (9.4)$$

$$u(x) = 0, \quad \text{on } \partial\Omega, \quad (10.4)$$

که در آن  $u_1(x, y)$ ، تابعی یک دوره ای در  $y$  می باشد.

برهان. بنابه قضیه (۷.۲.۲) داریم:

$$\|u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq C,$$

که قسمت اول لم را نتیجه می دهد. یعنی توابع  $u(x) \in H^1(\Omega)$  و  $u_1(x, y) \in L^2(\Omega; H^1_{per}(y))$  وجود دارند به قسمی که:

$$u^\varepsilon(x) \xrightarrow{\varepsilon} u(x), \quad (11.4)$$

$$\nabla u^\varepsilon(x) \xrightarrow{\varepsilon} \nabla_x u(x) + \nabla_y u_1(x, y). \quad (12.4)$$

ابتدا فرم ضعیف مساله (۱.۴) را می نویسیم:

$$\int_{\Omega} \langle A^\varepsilon(x) \nabla u^\varepsilon, \nabla \phi^\varepsilon \rangle dx = \langle f, \phi^\varepsilon \rangle, \quad \forall \phi^\varepsilon \in H^1(\Omega). \quad (13.4)$$

از یک آزمونی به شکل (۷.۴) استفاده می کنیم:

$$\phi^\varepsilon(x) = \phi_0(x) + \varepsilon \phi_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right), \quad \phi_0 \in C^\infty(\Omega), \quad \phi_1 \in C^\infty\left(\Omega, C^\infty_{per}(y)\right),$$

واضح است که  $\phi^\varepsilon \in H^1(\Omega)$  می باشد.

با استفاده از این تابع آزمون در (۱۳.۴) و مرتب کردن مجدد عبارات داریم:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \langle \nabla u^\varepsilon, (A^\varepsilon(x))^T \cdot \nabla \phi^\varepsilon \rangle dx &= \int_{\Omega} \langle \nabla u^\varepsilon, (A^\varepsilon(x))^T \cdot (\nabla_x \phi_0(x) + \nabla_y \phi_1(x, \frac{x}{\varepsilon})) \rangle dx \\ &+ \varepsilon \int_{\Omega} \langle \nabla u^\varepsilon, (A^\varepsilon(x))^T \cdot \nabla_x \phi_1(x, \frac{x}{\varepsilon}) \rangle dx \\ &:= I_1 + \varepsilon I_2 = \langle f, \phi_0 + \varepsilon \phi_1 \rangle, \end{aligned}$$

تابع  $(A^\varepsilon(x))^T \cdot (\nabla_x \phi_0(x) + \nabla_y \phi_1(x, \frac{x}{\varepsilon}))$  به شکل  $\phi_1(y) \phi_2(x, y)$  می باشد که در آن  $\phi_1(y) \in L^\infty(y)$ ،  $\phi_2(x, y) \in L^2(\Omega; C_{per}(y))$ .

بنابراین تابع آزمون مورد نظر، قابل قبول می باشد. در نتیجه داریم:

$$I_1 \rightarrow \int_{\Omega} \int_{\mathbb{T}^d} \langle A(y) \cdot (\nabla_x u + \nabla_y u_1), (\nabla_x \phi_0 + \nabla_y \phi_1) \rangle dy dx.$$

تابع  $A^\varepsilon(x) \cdot \nabla_x \phi_1(x, \frac{x}{\varepsilon})$  نیز تابع آزمون قابل قبولی می باشد که داریم:

$$I_2 \rightarrow 0,$$

به علاوه،  $\phi_0 + \varepsilon \phi_1$  در فضای  $H^1(\Omega)$ ، به طور ضعیف به  $\phi_0$  می گراید، که این امر موجب برقراری رابطه

$$(f, \phi_0 + \varepsilon \phi_1) \rightarrow (f, \phi_0),$$

می شود. با در نظر گرفتن عبارات بدست آمده داریم:

$$\int_{\Omega} \int_{\mathbb{T}^d} \langle A(y) \cdot (\nabla_x u + \nabla_y u_1), (\nabla_x \phi_0 + \nabla_y \phi_1) \rangle dy dx = \langle f, \phi_0 \rangle. \quad (14.4)$$

در عبارت (۱۴.۴)، فرض می کنیم که توابع آزمون  $\phi_0$  و  $\phi_1$  هموار و چگال هستند که این امر موجب می شود تا عبارت (۱۴.۴) برای هر  $\phi_0 \in L^2(\Omega)$  و  $\phi_1 \in L^2(\Omega; H_{per}^1(y))$  برقرار باشد. حال نشان می دهیم که (۱۴.۴) فرم ضعیفی از دستگاه (۸.۴)، (۹.۴) و (۱۰.۴) می باشد. ابتدا در عبارت (۱۴.۴) قرار می دهیم  $\phi_0 = 0$ ، پس داریم:

$$\int_{\Omega} \int_{\mathbb{T}^d} \langle A(y) \cdot (\nabla_x u + \nabla_y u_1), (\nabla_y \phi_1) \rangle dy dx = 0,$$

که این عبارت به طور دقیق، فرم ضعیفی از (۸.۴) می باشد.

حال در عبارت (۱۴.۴) قرار می دهیم  $\phi_1 = 0$ ، در این صورت

$$\int_{\Omega} \int_{\mathbb{T}^d} \langle A(y) \cdot (\nabla_x u + \nabla_y u_1), (\nabla_x \phi_0) \rangle dy dx = \langle f, \phi_0 \rangle,$$

که این عبارت هم فرم ضعیفی از (۹.۴) می باشد.

شرایط مرزی (۱۰.۴) نیز از روابط زیر بدست می آید:

$$u(x) \in H_0^1(\Omega), \quad u_1(x, y) \in L^2(\Omega; H_{per}^1(y)).$$

□

اثبات این لم برگرفته از [۵] می باشد.

لم ۳.۲.۴. فرض های قضیه (۱.۱.۴) به همراه دستگاه دومقیاسی (۸.۴)، (۹.۴) و (۱۰.۴) دارای جواب واحدی به صورت

$$\{u(x), u_1(x, y)\} \in \{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega; H_{per}^1(y))\},$$

می باشد.

برهان. با استفاده از قضیه (۲.۲.۲) (قضیه لکس میلگرام)، وجود و یکتایی جواب را ثابت می کنیم. فرم ضعیفی از دستگاه دومقیاسی (۸.۴)، (۹.۴) و (۱۰.۴) به صورت زیر می باشد:

$$a[u, \phi] = (f, \phi_0), \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega; H_{per}^1(y)).$$

حال کران دار و کورسیو بودن فرم دوخطی فوق را بررسی می کنیم. قبل از انجام این کار، توضیحاتی مقدماتی را ارائه می دهیم.

فضای هیلبرت با ضرب داخلی به صورت زیر می باشد:

$$(U, V)_X = (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)} + (\nabla_y u_1, \nabla_y v_1)_{L^2(\Omega \times y)}, \quad \forall U = (u, u_1), V = (v, v_1),$$

که در آن:

$$X = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega; H_{per}^1(y)).$$

همچنین نورم

$$\|U\|_X^2 = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla_y u_1\|_{L^2(\Omega \times y)}^2,$$

را در نظر می گیریم. ابتدا روابط زیر را متذکر می شویم:

$$\int_{\Omega} \int_{\mathbb{T}^d} |\nabla_x a + \nabla_y b|^2 dy dx = \|\{a, b\}\|_X^2, \quad (۱۵.۴)$$

$$\int_{\Omega} \int_{\mathbb{T}^d} \langle \nabla_x a, \nabla_y b \rangle dy dx = 0, \quad (16.4)$$

که در آن،  $a = a(x)$  و  $b = b(x, y)$  که توابعی هموار هستند و  $b$  در  $\mathbb{T}^d$  دوره‌ای می‌باشد. کران‌داری فرم دوخطی مورد نظر را بررسی می‌کنیم. با استفاده از مرز  $L^\infty$  روی  $A(y)$  و نامساوی کوشی - شوارتز داریم:

$$\begin{aligned} a[U, \phi] &= \int_{\Omega} \int_{\mathbb{T}^d} \langle A(y) \cdot (\nabla_x u + \nabla_y u_1), (\nabla_x \phi + \nabla_y \phi_1) \rangle dy dx \\ &\leq \beta \int_{\Omega} \int_{\mathbb{T}^d} \langle \nabla_x u + \nabla_y u_1, \nabla_x \phi + \nabla_y \phi_1 \rangle dy dx \\ &\leq \beta \|U\|_X \|\Phi\|_X. \end{aligned}$$

حال به بررسی کورسیو بودن می‌پردازیم؛

$$\begin{aligned} a[U, U] &= \int_{\Omega} \int_{\mathbb{T}^d} \langle A(y) \cdot (\nabla_x u + \nabla_y u_1), (\nabla_x u + \nabla_y u_1) \rangle dy dx \\ &\geq \alpha \int_{\Omega} \int_{\mathbb{T}^d} |\nabla_x u + \nabla_y u_1|^2 dy dx \\ &= \alpha \left( \int_{\Omega} \int_{\mathbb{T}^d} |\nabla_x u|^2 dy dx + 2 \int_{\Omega} \int_{\mathbb{T}^d} \nabla_x u \cdot \nabla_y u_1 dy dx + \int_{\Omega} \int_{\mathbb{T}^d} |\nabla_y u_1|^2 dy dx \right) \\ &= \alpha \left( \|\nabla_x u\|_X^2 + \|\nabla_y u_1\|_{L^2(\Omega \times y)}^2 \right) = \alpha \|U\|_X^2, \end{aligned}$$

بنابراین داریم:

$$a[U, U] \geq \alpha \|U\|_X^2.$$

پس فرم دوخطی  $a[U, \Phi]$ ، کران‌دار و کورسیو می‌باشد. پس بنابه قضیه (۲.۲.۲)، یعنی قضیه لکس میلگرام، دارای جواب واحدی در دستگاه دومقیاسی (۸.۴)، (۹.۴) و (۱۰.۴) در  $X$  می‌باشد. □

اثبات این لم برگرفته از [۵] می‌باشد.

لم ۴.۲.۴. فرض می‌کنیم که:

$$(u, u_1) \in H^1_0(\Omega) \times L^2(\Omega; H^1_{per}(y)),$$

جواب واحدی از دستگاه دومقیاسی (۸.۴)، (۹.۴) و (۱۰.۴) باشد. آنگاه  $u$  جواب واحدی از مساله همگن سازی شده (۲.۴) می‌باشد و  $u_1(x, y)$  به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$u_1(x, y) = \chi(y) \cdot \nabla u(x), \quad (17.4)$$

که در آن  $\chi(y)$  جوابی از مساله سلولی (۴.۴) می‌باشد.

برهان. با جایگذاری (۱۷.۴) در (۸.۴) داریم:

$$-\nabla_y \cdot (\nabla_y \chi A^T) \cdot \nabla_x u = (\nabla_y \cdot A^T) \cdot \nabla_x u.$$

اگر  $\chi \in H$  جواب واحدی از مساله سلولی (۴.۴) باشد، این تساوی برقرار می باشد. معادله (۹.۴) به صورت

$$-\nabla_x \cdot \left( \int_{\mathbb{T}^d} A(\nabla_x u + (\nabla_y \chi)^T \nabla_x u) dy \right) = f,$$

می شود، بنابراین داریم:

$$-\nabla_x \cdot \left( \int_{\mathbb{T}^d} A(I + (\nabla_y \chi^T)) dy \right) \nabla_x u = f,$$

از این رو داریم:

$$-\left( \int_{\mathbb{T}^d} A(I + (\nabla_y \chi^T)) dy \right) : \nabla_x \nabla_x u = f,$$

پس بنابه (۳.۴) داریم که:

$$-\bar{A} : \nabla_x \nabla_x u = f.$$

□ که این به طور دقیق معادله همگن سازی شده با ضرایب همگن سازی شده (۳.۴) می باشد.

اثبات این لم برگرفته از [۵] می باشد.

با اثبات این سه لم، در واقع قضیه (۱.۱.۴) که همان قضیه همگرایی برای معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی بیضوی می باشد را اثبات نموده ایم. در این قسمت همگرایی قوی در  $L^2(\Omega)$  بررسی شد. در قسمت بعد، همگرایی قوی را در  $H^1$  بررسی می کنیم.

### ۳.۴ برهان همگرایی قوی در $H^1$

برهان. از قضیه (۱.۱.۴)، نتیجه گرفتیم که  $u^\varepsilon$  در  $L^2(\Omega)$  به  $u(x)$  همگرایی قوی دارد. حال برای اثبات قضیه (۲.۱.۴) کفایت رابطه زیر را ثابت کنیم:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\| \nabla u^\varepsilon(x) - \nabla \left( u(x) + \varepsilon u_\lambda \left( x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \right\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^d)} = 0,$$

یا به طور معادل:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\| \nabla u^\varepsilon(x) - \left( \nabla u(x) + \varepsilon \nabla_x u_\lambda \left( x, \frac{x}{\varepsilon} \right) + \nabla_y u_\lambda \left( x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \right\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^d)} = 0,$$

داریم:

$$\left\| \nabla_x u_\lambda \left( x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^d)} \leq C,$$

بنابراین وقتی که  $\varepsilon$  به سمت صفر میل می کند داریم:

$$\left\| \varepsilon \nabla_x u_\lambda \left( x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^d)} \rightarrow 0,$$

از این رو کفایت که ثابت کنیم:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\| \nabla u^\varepsilon(x) - \left( \nabla u(x) + \nabla_y u_\lambda \left( x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \right\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^d)} = 0.$$

به طور یکنواخت بیضوی بودن  $A$ ، موجب می شود که:

$$\begin{aligned}
& \alpha \left\| \nabla u^\varepsilon(x) - \left( \nabla u(x) + \nabla_y u_\gamma \left( x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \right\|_{L^2(\Omega; R^d)} \\
&= \alpha \int_{\Omega} \left| \nabla u^\varepsilon(x) - \left( \nabla u(x) + \nabla_y u_\gamma \left( x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \right|^2 dx \\
&\leq \int_{\Omega} \left\langle A^\varepsilon(x) \cdot (\nabla_x u^\varepsilon - \nabla_x u - \nabla_y u_\gamma), \nabla_x u^\varepsilon - \nabla_x u - \nabla_y u_\gamma \right\rangle dx \\
&\leq \int_{\Omega} \left\langle A^\varepsilon(x) \cdot \nabla_x u^\varepsilon(x), \nabla_x u^\varepsilon(x) \right\rangle dx \\
&\quad + \int_{\Omega} \left\langle A^\varepsilon(x) \cdot (\nabla_x u + \nabla_y u_\gamma), \nabla_x u + \nabla_y u_\gamma \right\rangle dx \\
&\quad - \int_{\Omega} \left\langle (A^\varepsilon(x) + (A^\varepsilon(x))^T) \cdot \nabla_x u^\varepsilon, \nabla_x u + \nabla_y u_\gamma \right\rangle dx \\
&:= (f, u^\varepsilon) + \int_{\Omega} \int_{\mathbb{T}^d} \left\langle A(y) (\nabla_x u + \nabla_y u_\gamma), \nabla_x u + \nabla_y u_\gamma \right\rangle dy dx \\
&\quad - \int_{\Omega} \int_{\mathbb{T}^d} \left\langle (A(y) + (A(y))^T) \cdot (\nabla_x u + \nabla_y u_\gamma), \nabla_x u + \nabla_y u_\gamma \right\rangle dy dx,
\end{aligned} \tag{۱۸.۴}$$

بنابر قضیه (۱.۱.۴)،  $u^\varepsilon$  به  $u$  همگرایی قوی دارد. از آنجا که همگرایی قوی موجب همگرایی ضعیف می شود، پس داریم:

$$(f, u^\varepsilon) \rightarrow (f, u) = a[u, u], \tag{۱۹.۴}$$

با توجه به (۱۹.۴)، رابطه (۱۸.۴) به صورت زیر می شود:

$$\alpha \left\| \nabla u^\varepsilon(x) - \left( \nabla u(x) + \nabla_y u_\gamma \left( x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \right\|_{L^2(\Omega; R^d)} = a[U, U] + a[U, U] - 2a[U, U] = 0,$$

بنابراین داریم:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\| \nabla u^\varepsilon(x) - \left( \nabla u(x) + \nabla_y u_\gamma \left( x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \right\|_{L^2(\Omega; R^d)} = 0,$$

□

در نتیجه قضیه (۲.۱.۴) نیز اثبات گردید.

این اثبات برگرفته از [۵] می باشد.





# فصل ۵

## روش‌های چندمقیاسی

مطالب این فصل برگرفته از مرجع [۴] می‌باشد.

در این فصل روش چندمقیاسی را برای مطالعه مساله

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A^\varepsilon \nabla u^\varepsilon) = f, & \text{in } \Omega, \\ u^\varepsilon = 0, & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.5)$$

در نظر می‌گیریم. در این فصل این روش را معرفی می‌کنیم و بسط مجانبی متداولی را برای  $u^\varepsilon$  بدست می‌آوریم. لازم به ذکر است که  $u^\varepsilon$  جواب معادله

$$\begin{cases} A_\varepsilon u^\varepsilon = f, & \text{in } \Omega, \\ u^\varepsilon = 0, & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.5)$$

است، که در آن  $A_\varepsilon$  به صورت

$$A_\varepsilon = -\operatorname{div}(A^\varepsilon \nabla) = -\sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}^\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_j} \right), \quad (3.5)$$

تعریف شده است که،

$$a_{ij}^\varepsilon(x) = a_{ij} \left( \frac{x}{\varepsilon} \right), \quad \text{in } \mathbb{R}^N, \quad \forall i, j = 1, \dots, N, \quad (4.5)$$

که برای  $a_{ij}$  هر  $i, j = 1, \dots, N$  دوره‌ای می‌باشد و

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq N} \in M(\alpha, \beta, Y), \quad (5.5)$$

که در آن  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  به قسمی که  $0 < \alpha < \beta$  بوده،  $M(\alpha, \beta, Y)$  با تعریف زیر بیان می‌شود؛

تعریف ۱.۰.۵. فرض می‌کنیم که  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  به قسمی که  $0 < \alpha < \beta$  با  $M(\alpha, \beta, \mathcal{O})$  مجموعه‌ای از ماتریس‌های  $N \times N$  را مشخص می‌کنیم که

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq N},$$

به قسمی که برای هر  $\lambda \in \mathbb{R}^N$  داریم:

$$\begin{cases} (A(x)\lambda, \lambda) \geq \alpha |\lambda|^2, \\ |A(x)\lambda| \leq \beta |\lambda|, \end{cases}$$

در این جا،  $Y$  سلول‌های مرجع<sup>۱</sup> تعریف شده به صورت زیر هستند:

$$Y = ]^\circ, L_1[ \times \cdots \times ]^\circ, L_N[,$$

که در آن  $L_1, \dots, L_N$  اعداد داده شده مثبت می‌باشند.

## ۱.۵ بسط مجانبی

متغیر  $x$  یک ماکروسکوپی<sup>۲</sup> و متغیر  $\frac{x}{\varepsilon}$  یک میکروسکوپی<sup>۳</sup> را تعریف می‌کند. در واقع اگر  $x \in \Omega$  باشد، بنابه تعریف  $k \in \mathbb{Z}^N$  وجود دارد به قسمی که:

$$\frac{x}{\varepsilon} = (k_L + y),$$

همراه با  $y \in Y$  که در آن:

$$k_L = (k_1 L_1, \dots, k_N L_N).$$

در نتیجه،  $x$  موقعیت یک نقطه را در  $\Omega$  و  $y$  موقعیت یک نقطه را در سلول مرجع  $Y$  می‌دهد. پس دنبال یک بسط مجانبی متداول به فرم زیر هستیم:

$$u^\varepsilon(x) = u_0\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^2 u_2\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \cdots, \quad (6.5)$$

همراه با  $u_j(x, y)$  برای  $j = 1, 2, \dots$  که برای  $u_j(x, y)$  برای  $x \in \Omega$  و  $y \in Y$ ، تعریف شده‌است و  $u_j(\cdot, y)$  دوره‌ای می‌باشد.

فرض می‌کنیم که  $\Psi = \Psi(x, y)$ ، تابعی وابسته به دو متغیر از  $\mathbb{R}^N$  باشد و با  $\Psi_\varepsilon$ ، به صورت

$$\Psi_\varepsilon(x) = \Psi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right),$$

مشخص شود که فقط به یک متغیر وابسته است. توجه داریم که:

$$\frac{\partial \Psi_\varepsilon(x)}{\partial x_i}(x) = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \Psi}{\partial y_i}\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \frac{\partial \Psi}{\partial x_i}\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right).$$

در نتیجه از (۳.۵)، می‌توان  $\mathcal{A}_\varepsilon \Psi_\varepsilon$  را به صورت

$$\mathcal{A}_\varepsilon \Psi_\varepsilon(x) = \left[ (\varepsilon^{-2} \mathcal{A}_0 + \varepsilon^{-1} \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2) \Psi \right] \left( x, \frac{x}{\varepsilon} \right), \quad (7.5)$$

نوشت، که در آن داریم:

$$\begin{cases} \mathcal{A}_0 = - \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial y_i} \left( a_{ij}(y) \frac{\partial}{\partial y_j} \right), \\ \mathcal{A}_1 = - \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}(y) \frac{\partial}{\partial y_i} \right) - \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial y_i} \left( a_{ij}(y) \frac{\partial}{\partial x_j} \right), \\ \mathcal{A}_2 = - \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}(y) \frac{\partial}{\partial x_j} \right). \end{cases} \quad (8.5)$$

با قرار دادن (۶.۵) و (۸.۵) در (۲.۵) و یکسان در نظر گرفتن عبارات با توان‌های مساوی از

$\varepsilon$ ، باید دستگاهی نامتناهی از معادلات زیر را حل کنیم:

$$\mathcal{A}_0 u_0 = 0, \quad \text{in } Y, \quad (9.5)$$

<sup>۱</sup>Reference

<sup>۲</sup>Macroscopic

<sup>۳</sup>Microscopic

که در آن  $u_0$  در  $y$ ،  $Y$  دوره‌ای می‌باشد.

$$A_0 u_1 = -A_1 u_0, \quad \text{in } Y, \quad (10.5)$$

که در آن  $u_1$  در  $y$ ،  $Y$  دوره‌ای می‌باشد.

$$A_0 u_2 = f - A_1 u_1 - A_2 u_0, \quad \text{in } Y, \quad (11.5)$$

که در آن  $u_2$  در  $y$ ،  $Y$  دوره‌ای می‌باشد.

$$A_0 u_{s+2} = -A_1 u_{s+1} - A_2 u_s, \quad \text{in } Y, \quad (12.5)$$

که در آن  $u_{s+2}$  برای هر  $s \geq 1$  در  $y$ ،  $Y$  دوره‌ای می‌باشد.

**تذکر ۱.۱.۵.** قبل از هر چیز، به ساختار خاص این دستگاه‌ها توجه کنید. مجهولات  $u_j$  می‌توانند به صورت متوالی تعیین شوند. در واقع معادله اول یعنی (۹.۵)، فقط شامل مجهول  $u_0$  می‌باشد. اگر  $u_0$  بدست آید، آنگاه در معادله دوم یعنی (۱۰.۵)،  $u_1$  را با استفاده از  $u_0$  مشخص می‌کنیم. به طور مشابه، در معادله سوم،  $u_2$  را با استفاده از  $u_0$  و  $u_1$  تعیین می‌کنیم و این روند به همین ترتیب ادامه خواهد داشت.

**تذکر ۲.۱.۵.** توجه داریم که همواره عملگر  $A_0$  که در همه معادلات فوق ظاهر می‌شود، به همان شکل تعریف شده، می‌باشد. مانند  $A_\varepsilon$  با  $\frac{x}{\varepsilon}$  که توسط  $y$  جایگزین شده است، که یک عملگر مرتبه دوم در  $y$  می‌باشد. در همه معادلات فوق،  $x$  نقش یک پارامتر را ایفا می‌کند.

قبل از بیان ادامه مطالب، به بیان چند قضیه و تعریف می‌پردازیم؛

**تعریف ۳.۱.۵.** رابطه هم‌ارزی<sup>۴</sup> زیر را در نظر می‌گیریم:

برای هر  $u$  و  $v$  در  $H_{per}^1(Y)$ ، هم‌ارز  $v$  است اگر و تنها اگر  $u - v$  عددی ثابت باشد. با توجه به این رابطه هم‌ارزی، فضای خارج قسمت  $W_{per}(Y) = H_{per}^1(Y) / \mathbb{R}$ ، فضایی از رده‌های هم‌ارزی را تعریف می‌کند.

با  $\dot{u}$  کلاس هم‌ارزی ارائه شده توسط  $u$  را مشخص می‌کنیم.

**گزاره ۴.۱.۵.** مقدار زیر یک نورم را روی  $W_{per}(Y)$ ، تعریف می‌کند:

$$\|\dot{u}\|_{W_{per}(Y)} = \|\nabla u\|_{L^2(Y)},$$

به علاوه، فضای دوگان  $(W_{per}(Y))'$  را به صورت

$$\left\{ F \in (H_{per}^1(Y))' \mid F(c) = 0, \forall c \in \mathbb{R} \right\},$$

همراه با:

$$\langle F, \dot{u} \rangle_{(W_{per}(Y))' \cdot W_{per}(Y)} = \langle F, u \rangle_{(H_{per}^1(Y))' \cdot H_{per}^1(Y)}, \quad \forall u \in \dot{u}, \dot{u} \in W_{per}(Y),$$

تعریف می‌کنیم. در این جا حالت خاصی از شرایط مرزی دوره‌ای را در نظر می‌گیریم.

فرض می‌کنیم که  $Y$  بازه‌ای از  $\mathbb{R}^N$  به صورت

$$Y = ]\circ, L_1[ \times \cdots \times ]\circ, L_N[,$$

<sup>۴</sup>Equivalent

باشد، که در آن  $L_1, \dots, L_N$  اعداد مثبت هستند.

فرض می‌کنیم که ضرایب  $a_{ij}$  دوره‌ای باشند. با فرض  $Y$  دوره‌ای بودن  $f$ ، مساله

$$- \operatorname{div}(A \nabla u) = f, \quad \text{in } Y, \quad (13.5)$$

را در نظر می‌گیریم که در آن  $u$ ،  $Y$  دوره‌ای می‌باشد. فضایی طبیعی برای جواب‌ها در  $W_{per}(Y)$  به وسیله تعریف (۳.۱.۵)، معرفی شده است.

فرم وردشی مساله (۱۳.۵)، برای  $f$  داده شده در  $(W_{per}(Y))'$  به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{cases} \dot{a}_Y(\dot{u}, \dot{v}) = \langle F, \dot{v} \rangle_{(W_{per}(Y))', W_{per}(Y)}, \\ \forall \dot{v} \in W_{per}(Y), \end{cases} \quad (14.5)$$

صدق کند که در آن:

$$\dot{a}_Y(\dot{u}, \dot{v}) = \int_Y A \nabla u \nabla v \, dy \quad \forall u \in \dot{u}, \forall v \in \dot{v}, \forall \dot{u}, \forall \dot{v} \in W_{per}(Y).$$

**قضیه ۵.۱.۵** (شرط مرزی دوره‌ای). فرض کنید که  $A$  یک ماتریس در  $M(\alpha, \beta, Y)$  با ضرایب  $Y$  دوره‌ای و  $f \in (W_{per}(Y))'$  باشد. آنگاه مساله (۱۴.۵)، جواب واحدی دارد. به عبارت دیگر داریم:

$$\|\dot{u}\|_{W_{per}(Y)} \leq \frac{1}{\alpha} \|f\|_{(W_{per}(Y))'}.$$

برای مشاهده اثبات این قضیه به [۴] مراجعه شود.

**قضیه ۶.۱.۵** (نوع دیگر از شرط مرزی دوره‌ای). فرض کنید که  $A$  ماتریسی در  $M(\alpha, \beta, Y)$  با ضرایب  $Y$  دوره‌ای و  $f \in (W_{per}(Y))'$  باشد. همچنین مساله زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} \int_Y A \nabla u \nabla v \, dy = \langle F, v \rangle_{(W_{per}(Y))', W_{per}(Y)}, \\ \forall v \in W_{per}(Y), \end{cases} \quad (15.5)$$

صدق کند.

آنگاه مساله (۱۵.۵)، دارای جواب واحدی است. به علاوه داریم:

$$\|u\|_{W_{per}(Y)} \leq \frac{1}{\alpha} \|f\|_{(W_{per}(Y))'}.$$

برای مشاهده اثبات این قضیه به [۴] مراجعه شود.

**تذکر ۷.۱.۵**. همه معادلات فوق به شکل (۱۳.۵) هستند. مساله (۱۳.۵) به شکل وردشی (۱۴.۵) و یا به شکل وردشی (۱۵.۵) می‌باشد. در حالت اول بنابر قضیه (۵.۱.۵)، جواب یک رده هم‌ارزی می‌باشد و در حالت دوم، بنابه قضیه (۶.۱.۵)، جواب یک تابع با مقدار متوسط صفر می‌باشد. در این جا از هر دو فرم استفاده می‌کنیم. دستگاه‌های (۱۰.۵) و (۱۱.۵) را به ترتیب با به کارگیری نتایج فوق حل می‌کنیم.

با دستگاه (۹.۵) شروع می‌کنیم که فرم وردشی آن به صورت (۱۴.۵) می‌باشد:

$$\begin{cases} \dot{u}_0 \in W_{per}(Y) \text{ را به گونه‌ای پیدا کنید که رابطه} \\ \dot{a}_Y(\dot{u}_0, \dot{v}) = 0, \\ \forall \dot{v} \in W_{per}(Y), \end{cases} \quad (14.5)$$

برقرار باشد که در آن:

$$\dot{a}_Y(\dot{u}, \dot{v}) = \int_Y A \nabla u \nabla v \, dy, \quad \forall u \in \dot{u}, \forall v \in \dot{v}, \forall \dot{u}, \forall \dot{v} \in W_{per}(Y), \quad (17.5)$$

$$W_{per}(Y) = H_{per}^1(Y) / \mathbb{R}.$$

دوباره رابطه هم‌ارزی زیر را در نظر می‌گیریم:

برای هر  $u$  و  $v$  در  $H_{per}^1(Y)$ ، هم‌ارزی  $u$  و  $v$  است اگر و تنها اگر  $u - v$  یک عدد ثابت باشد. حال متذکر می‌شویم که  $W_{per}(Y)$ ، فضایی از رده‌های هم‌ارزی با توجه به این رابطه هم‌ارزی می‌باشد. بنابر تعریف (۳.۱.۵)، رده‌ای هم‌ارزی از  $v$  را مشخص می‌کند. می‌توانیم با به کارگیری قضیه (۵.۱.۵) در مساله (۱۶.۵)، رابطه زیر را بدست آوریم:

$$\dot{u}_0 = 0, \quad \text{in } W_{per}(Y),$$

که یک جواب واحد می‌باشد. آن را به خاطر می‌سپاریم.

$u_0 = u_0(x, y)$  موجب می‌شود که جواب (۱۶.۵) مستقل از  $y$  باشد، بنابراین:

$$u_0(x, y) = u_0(x), \quad \forall u_0 \in \dot{u}_0. \quad (18.5)$$

تذکر ۸.۱.۵. در بسط مجانبی (۶.۵)، اولین عنصر یعنی  $u_0$ ، برآورد پسین برای تابعی نوسانی است، چون  $u_0$  وابسته به  $\frac{x}{\varepsilon}$  می‌باشد. رابطه (۱۸.۵) نشان می‌دهد که  $u_0$  فقط به  $x$  وابسته است و به  $\varepsilon$  و سرعت نوسان، یعنی  $\frac{x}{\varepsilon}$ ، وابسته نیست. لذا انتظار داریم که  $u_0$  جواب همگن سازی شده باشد. چیزی که باقی می‌ماند، یافتن معادله‌ای در صورت وجود در  $\Omega$ ، می‌باشد که با جایگذاری  $u_0$  صدق می‌کند. در این صورت معادله همگن سازی شده را نیز پیدا می‌کنیم.

با استفاده از معادلات (۸.۵) و (۱۸.۵)، معادله (۱۰.۵) می‌تواند به صورت

$$A_0 u_1 = - \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial a_{ij}}{\partial y_i} \frac{\partial u_0}{\partial x_j}, \quad \text{in } Y, \quad (19.5)$$

بازنویسی شود، که  $u_1$  در  $Y$  دوره‌ای می‌باشد. همچنین فرمول بندی وردشی آن به صورت زیر است:

$$\dot{u}_1 \in W_{per}(Y) \text{ را به گونه‌ای بیابید که رابطه}$$

$$\dot{a}_Y(\dot{u}_1, \dot{v}) = \langle F, \dot{v} \rangle_{(W_{per}(Y))', W_{per}(Y)}, \quad \forall \dot{v} \in W_{per}(Y), \quad (20.5)$$

برقرار باشد، که در آن  $\dot{a}_Y$  در معادله (۱۷.۵) داده شده و  $F$  نیز به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\langle F, \dot{\psi} \rangle_{(W_{per}(Y))', W_{per}(Y)} = \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial u_0}{\partial x_j} \int_Y a_{ij}(y) \frac{\partial \psi}{\partial y_i} \, dy, \quad \forall \psi \in \dot{\psi}, \dot{\psi} \in W_{per}(Y). \quad (21.5)$$

مشاهده می‌کنیم که اگر  $\psi_1, \psi_2 \in \psi$  باشد، آنگاه داریم:

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial y_i} = \frac{\partial \psi_2}{\partial y_i},$$

بنابراین داریم:

$$\langle F, \psi_1 \rangle_{(H_{per}(Y))', H_{per}(Y)} = \langle F, \psi_2 \rangle_{(H_{per}(Y))', H_{per}(Y)}.$$

به وسیله قضیه (۵.۱.۵)، جواب واحد  $u_1 \in W_{per}(Y)$  را از (۲۰.۵) بدست می‌آوریم. خطی بودن (۱۹.۵) که در این جا  $A_0$  فقط شامل متغیر  $y$  می‌باشد، همراه با این حقیقت که  $\frac{\partial u_0}{\partial x_j}$  مستقل از  $y$

است، نشان می‌دهد که به دنبال  $u_1$  به فرم خاص زیر هستیم:

$$u_1(x, y) = - \sum_{j=1}^N \hat{\chi}_j \frac{\partial u_0}{\partial x_j}(x), \quad \text{in } W_{per}(Y), \quad (22.5)$$

که در آن  $\hat{\chi}$  در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$A_0 \hat{\chi}_j = \sum_{i=1}^N \frac{\partial a_{ij}}{\partial y_i}, \quad \text{in } Y, \quad \forall j = 1, \dots, N, \quad (23.5)$$

که در آن  $\hat{\chi}_j$ ،  $Y$  دوره‌ای می‌باشد.

حال گزاره زیر را در نظر می‌گیریم:

گزاره ۹.۱.۵. فرض می‌کنیم که  $A^\circ$  ماتریس تعریف شده به صورت

$$A^\circ \lambda = M_Y (A \nabla \hat{W}_\lambda), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^N,$$

باشد، که عدد مثبت  $\alpha_0$  وجود دارد به قسمی که:

$$\sum_{i,j=1}^N a_{ij}^\circ \varepsilon_i \varepsilon_j \geq \alpha_0 |\varepsilon|^2, \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^d,$$

به آسانی می‌بینیم که بنا به قضیه (۵.۱.۵) و گزاره (۹.۱.۵)، جواب واحدی از مساله (۲۳.۵)

داده می‌شود.

به علاوه، در تذکر (۷.۱.۵) مشاهده می‌کنیم که می‌توان یک عنصر نماینده از  $\hat{\chi}$  را انتخاب کرد که در شکل وردشی زیر صدق کند:

$u \in W_{per}(Y)$  را به گونه‌ای بیابید که در رابطه

$$\begin{cases} \int_Y A \nabla u \nabla v \, dy = \langle F, v \rangle_{(W_{per}(Y))', W_{per}(Y)}, \\ \forall v \in W_{per}(Y), \end{cases} \quad (24.5)$$

صدق کند.

در این جا، قضیه (۶.۱.۵) وجود و یکتایی  $\hat{\chi}_j \in \hat{\chi}$  را نشان می‌دهد، که جوابی از مساله زیر است:

$\hat{\chi}_j \in W_{per}(Y)$  را به گونه‌ای بیابید که رابطه

$$\begin{cases} u_Y(\hat{\chi}_j, \psi) = \sum_{i=1}^N \int_Y a_{ij}(y) \frac{\partial \psi}{\partial y_i} \, dy, \\ \forall \psi \in W_{per}(Y), \end{cases} \quad (25.5)$$

برقرار باشد که در آن داریم:

$$W_{per}(Y) = \{v \in H_{per}^1(Y) ; M_Y(v) = 0\},$$

به عبارت دیگر، از رابطه (۲۲.۵) مشاهده می‌کنیم که هر جواب  $u_1(x, y)$  از معادله (۱۰.۵) به شکل

$$u_1(x, y) = - \sum_{j=1}^N \hat{\chi}_j(y) \frac{\partial \dot{u}_0}{\partial x_j} + \tilde{u}_1(x), \quad (26.5)$$

می‌باشد، که  $u_1 \in \dot{u}_1$ ، که در آن  $\tilde{u}_1$  مستقل از  $y$  می‌باشد.

حال به سراغ معادله (۱۱.۵) می‌رویم. با در نظر گرفتن (۱۸.۵) و (۲۶.۵) داریم:

$$f - \mathcal{A}_1 u_1 - \mathcal{A}_2 u_0 = f + \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial y_i} \left( a_{ij}(y) \frac{\partial u_1}{\partial x_j} \right) + \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}(y) \left( \frac{\partial u_1}{\partial y_j} + \frac{\partial u_0}{\partial x_j} \right) \right), \quad (27.5)$$

بنابراین، شکل وردشی از معادله (۱۱.۵)، به صورت زیر خوانده می‌شود:

$\dot{u}_2 \in W_{per}(Y)$  رابطه‌گونه‌ای بیابید که در رابطه

$$\begin{cases} \dot{a}_Y(\dot{u}_2, \dot{v}) = \langle F_1, \dot{v} \rangle_{(W_{per}(Y))', W_{per}(Y)}, \\ \forall \dot{v} \in W_{per}(Y), \end{cases} \quad (28.5)$$

صدق کند که در آن  $\dot{a}_Y$ ، به وسیله معادله (۱۷.۵)، داده شده و  $F_1$  به صورت زیر تعریف شده است:

$$\begin{aligned} \langle F_1, \dot{\psi} \rangle_{(W_{per}(Y))', W_{per}(Y)} &= \int_Y f \dot{\psi} \, dy - \sum_{i,j=1}^N \int_Y a_{ij}(y) \frac{\partial u_1}{\partial x_j} \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial y_i} \, dy \\ &+ \sum_{i,j=1}^N \int_Y \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}(y) \left( \frac{\partial u_1}{\partial y_j} + \frac{\partial u_0}{\partial x_j} \right) \right) \dot{\psi} \, dy, \end{aligned} \quad (29.5)$$

$$\forall \dot{\psi} \in \dot{\psi}, \dot{\psi} \in W_{per}(Y),$$

اگر  $F_1$  یک عنصر از  $(W_{per}(Y))'$  باشد، این مساله خوش‌وضع<sup>۵</sup> است. برای مثال اگر:

$$\langle F_1, 1 \rangle_{(H_{per}(Y))', H_{per}(Y)} = 0,$$

باشد، آنگاه به صورت زیر خوانده می‌شود:

$$- \sum_{i,j=1}^N \int_Y \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}(y) \left( \frac{\partial u_1}{\partial y_j} + \frac{\partial u_0}{\partial x_j} \right) \right) \, dy = \int_Y f \, dy,$$

این رابطه شرط لازم و کافی برای وجود و یکتایی جواب  $\dot{u}_2$  از مساله (۲۸.۵) و با توجه به قضیه (۵.۱.۵) می‌باشد.

در این جا  $u_1$  را به وسیله فرمول (۲۲.۵) جایگزین می‌کنیم. چون  $f = f(x)$  می‌باشد، لذا  $u_0$  در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$- \sum_{i,j,k=1}^N \int_Y \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}(y) \left( - \frac{\partial \hat{\chi}_k}{\partial y_j} \frac{\partial u_0}{\partial x_k} + \frac{\partial u_0}{\partial x_j} \right) \right) \, dy = |Y|f,$$

<sup>۵</sup>Well Posed



و یا به‌طور معادل با در نظر گرفتن (۱۸.۵) داریم:

$$-\sum_{i,k=1}^N \left[ \sum_{j=1}^N \int_Y \left( a_{ik} - a_{ij} \frac{\partial \hat{\chi}_k}{\partial y_j} \right) dy \right] \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_i \partial x_k} = |Y|f. \quad (30.5)$$

حال بسط زیر را برای  $A^\circ$  در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} a_{ij}^\circ = M_Y(a_{ij}) - M_Y \left( \sum_{k=1}^N a_{ik} \frac{\partial \hat{\chi}_j}{\partial y_k} \right) \\ = \frac{1}{|Y|} \int_Y a_{ij} dy - \frac{1}{|Y|} \sum_{k=1}^N \int_Y a_{ik} \frac{\partial \hat{\chi}_j}{\partial y_k} dy, \quad \forall i, j = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (31.5)$$

حال با استفاده از (۳۱.۵) داریم:

$$\sum_{j=1}^N \int_Y \left( a_{ik} - a_{ij} \frac{\partial \hat{\chi}_k}{\partial y_j} \right) dy = |Y|a_{ik}^\circ, \quad \forall i, k = 1, \dots, N.$$

بنابراین رابطه (۳۰.۵) به‌صورت زیر می‌شود:

$$-\sum_{i,k=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ik}^\circ \frac{\partial u_0}{\partial x_k} \right) = f, \quad \text{in } \Omega. \quad (32.5)$$

از گزاره (۹.۱.۵)، وجود و یکتایی  $u_0 \in H_0^1(\Omega)$  توسط قضیه (۲.۲.۲) نتیجه می‌شود. بنابراین داریم:

$$u_0 = u^\circ,$$

که در آن  $u^\circ$  جوابی واحد در  $H_0^1(\Omega)$  از مساله همگن‌سازی شده زیر می‌باشد:

$$\begin{cases} -\sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{i,j}^\circ \frac{\partial u^\circ}{\partial x_j} \right) = f, & \text{in } \Omega, \\ u^\circ = 0, & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \quad (33.5)$$

تذکر ۱۰.۱.۵. با مشاهده تذکر (۱.۱.۵)، می‌توانیم توابع  $u_j$  در بسط مجانبی (۸.۵) را محاسبه کنیم. در این‌جا فقط محاسبه  $u_2$  را شرح می‌دهیم. با جایگذاری (۲۶.۵) در (۱۱.۵) و انجام محاسباتی ساده، به معادله زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0 u_2 = f - \sum_{i,j,k=1}^N a_{ij}(y) \frac{\partial \hat{\chi}_k}{\partial y_j} \frac{\partial^2 u^\circ}{\partial x_j \partial x_k} \\ - \sum_{i,j,k=1}^N \frac{\partial (a_{ij}(y) \hat{\chi}_k)}{\partial y_i} \frac{\partial^2 u^\circ}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(y) \frac{\partial^2 u^\circ}{\partial x_i \partial x_j}, \quad \text{in } Y, \end{aligned}$$

که در آن  $u_2$  در  $Y$  دوره‌ای می‌باشد.

با استفاده از (۳۲.۵) و نام‌گذاری مجدد اندیس‌ها، معادله فوق به‌صورت زیر می‌شود:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0 u_2 = - \sum_{k,l=1}^N a_{kl}^\circ \frac{\partial^2 u^\circ}{\partial x_k \partial x_l} - \sum_{j,k,l=1}^N a_{kj}(y) \frac{\partial \hat{\chi}_l}{\partial y_j} \frac{\partial^2 u^\circ}{\partial x_l \partial x_k} \\ - \sum_{i,j,k=1}^N \frac{\partial (a_{ij}(y) \hat{\chi}_k)}{\partial y_i} \frac{\partial^2 u^\circ}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{j,l=1}^N a_{jl}(y) \frac{\partial^2 u^\circ}{\partial x_j \partial x_l}, \quad \text{in } Y, \end{aligned}$$

که در آن  $u_\gamma$  در  $Y$  دوره‌ای می‌باشد، که می‌تواند به صورت زیر بازنویسی شود:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\circ u_\gamma = & - \sum_{k,l=1}^N a_{kl}^\circ \frac{\partial^2 u^\circ}{\partial x_k \partial x_l} - \sum_{i,j,k,l=1}^N \frac{\partial(a_{ij} \delta_{kj} \hat{\chi}_l)}{\partial y_i} \frac{\partial^2 u^\circ}{\partial x_k \partial x_l} \\ & - \sum_{i,k,l=1}^N a_{kj} \frac{\partial(\hat{\chi}_l - y_l)}{\partial y_j} \frac{\partial^2 u^\circ}{\partial x_k \partial x_l}, \quad \text{in } Y, \end{aligned} \quad (34.5)$$

که در آن  $u_\gamma$  در  $Y$  دوره‌ای می‌باشد. بنابراین،  $F_\gamma$  نیز در رابطه (۲۹.۵)، می‌تواند به صورت زیر بازنویسی شود:

$$\begin{aligned} \langle F_\gamma, \psi \rangle_{(W_{per}(Y))', W_{per}(Y)} = & \sum_{k,l=1}^N \left[ -a_{kl}^\circ \int_Y \psi \, dy + \sum_{i,j=1}^N \int_Y \frac{\partial(a_{ij} \delta_{kj} \hat{\chi}_l)}{\partial y_i} \psi \, dy \right. \\ & \left. - \sum_{j=1}^N \int_Y a_{kj} \frac{\partial(\hat{\chi}_l - y_l)}{\partial y_j} \psi \, dy \right] \frac{\partial^2 u^\circ}{\partial x_k \partial x_l}, \\ & \forall \psi \in \dot{\psi}, \psi \in W_{per}(Y), \end{aligned}$$

مشابه استدلال استفاده شده در رابطه (۲۲.۵) نشان می‌دهد که به دنبال  $u_\gamma \in \dot{u}_\gamma$  هستیم که به فرم زیر می‌باشد:

$$\dot{u}_\gamma(x, y) = - \sum_{k,l=1}^N \dot{\theta}^{kl}(y) \frac{\partial^2 u^\circ}{\partial x_k \partial x_l}, \quad (35.5)$$

که در آن تابع  $\dot{\theta}^{kl}$ ، جواب مساله زیر می‌باشد:

$$\mathcal{A}_\circ \dot{\theta}^{kl} = -a_{kl}^\circ - \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial(a_{ij} \delta_{kj} \hat{\chi}_l)}{\partial y_i} - \sum_{j=1}^N a_{kj} \frac{\partial(\hat{\chi}_l - y_l)}{\partial y_j}, \quad \text{in } Y,$$

که در آن  $\dot{\theta}^{kl}$ ،  $Y$  دوره‌ای می‌باشد.

دوباره با استفاده از قضیه (۶.۱.۵)، وجود و یکتایی  $\dot{\theta}^{kl} \in \hat{\theta}^{kl}$ ، ثابت می‌شود که جواب مساله زیر می‌باشد:

$$\begin{cases} \hat{\theta}^{kl} \in W_{per}(Y) \text{ رابه گونه‌ای بیابید که در رابطه} \\ a_Y(\hat{\theta}^{kl}, \psi) = -a_{kl}^\circ \int_Y \psi \, dy - \sum_{i,j=1}^N \int_Y \frac{\partial(a_{ij} \delta_{kj} \hat{\chi}_l)}{\partial y_i} \psi \, dy \\ \quad - \sum_{j=1}^N \int_Y a_{kj} \frac{\partial(\hat{\chi}_l - y_l)}{\partial y_j} \psi \, dy, \\ \forall \psi \in W_{per}(Y), \end{cases} \quad (36.5)$$

صدق کند.

از (۳۵.۵) نتیجه می‌گیریم که هر جواب  $u_\gamma = u_\gamma(x, y)$  از (۱۱.۵)، به فرم زیر است:

$$u_\gamma(x, y) = \sum_{k,l=1}^N \hat{\theta}^{kl}(y) \frac{\partial^2 u^\circ}{\partial x_k \partial x_l} + \tilde{u}_\gamma(x), \quad (37.5)$$

همراه با  $u_2 \in \tilde{u}_2$  که در آن  $\tilde{u}_2$  مستقل از  $y$  می‌باشد. با جایگذاری فرم‌های خاص (۲۶.۵) و (۳۷.۵) از  $u_1$  و  $u_2$  (به ترتیب در نظر می‌گیریم  $\tilde{u}_1 = 0$  و  $\tilde{u}_2 = 0$ ) در بسط (۶.۵)، بدست می‌آوریم:

$$u^\varepsilon(x) = u^\circ(x) - \varepsilon \sum_{k=1}^N \hat{\chi}_k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial u^\circ}{\partial x_k}(x) + \varepsilon^2 \sum_{k,l=1}^N \hat{\theta}^{kl}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial^2 u^\circ}{\partial x_k \partial x_l}(x) + \dots \quad (38.5)$$

تذکر ۱۱.۱.۵. به توابع  $\hat{\chi}_k$  و  $\hat{\theta}^{kl}$ ، به ترتیب اصلاح گر مرتبه اول و اصلاح گر مرتبه دوم گفته می‌شود.

# فصل ۶

## روش‌های چندمقیاسی وردشی تطبیقی برپایه برآورد خطای پسین: برآوردهای نورم انرژی برای مسایل بیضوی

### ۱.۶ مقدمه

این فصل روی ارزیابی روش چندمقیاسی وردشی تطبیقی<sup>۱</sup> و بدست آوردن برآورد خطای پسین در نورم انرژی متمرکز است. ایده اصلی روش چندمقیاسی وردشی تطبیقی، تقسیم‌بندی مانده مقیاس ظریف به کمک‌های موضعی<sup>۲</sup> با استفاده از افرازی واحد و حل مسایل موضعی مجزای متناظر روی وصله‌ها<sup>۳</sup> همراه با شرایط مرزی دیریکله همگن، می‌باشد. جواب مقیاس ظریف<sup>۴</sup> با مجموع  $U_f = \sum_i U_{f,i}$  از جواب‌های  $U_{f,i}$  برای مسایل موضعی مرتبط با گره<sup>۵</sup> درشت<sup>۶</sup>  $i$ ، تقریب زده می‌شود. دقت  $U_f$  به اندازه مش مقیاس ظریف  $h$  و اندازه وصله‌ها وابستگی دارد. توجه داریم که محاسبات مقیاس ظریف به‌طور طبیعی موازی می‌باشد.

به منظور بهینه‌سازی کارایی، نیاز به ساخت یک الگوریتم تطبیقی برای کنترل خودکار اندازه مش درشت  $H$ ، اندازه مش ظریف  $h$  و اندازه وصله‌ها می‌باشد. این الگوریتم بر پایه برآورد پسین از

---

<sup>۱</sup>Adaptive Variational Multiscale Methods

<sup>۲</sup>Localized Contributions

<sup>۳</sup>Patches

<sup>۴</sup>Fine

<sup>۵</sup>Node

<sup>۶</sup>Coarse

خطای  $e = u - U_c - U_f$  در نورم انرژی برای معادله پواسون با ضریب متغیر  $a$  می‌باشد:

$$\|e\|_a^2 \leq C \sum_{i \in \mathcal{C}} \|HR(U_c)\|_{w_i}^2 \frac{1}{\sqrt{a}} \| \cdot \|_{L^\infty(w_i)}^2 + C \sum_{i \in \mathcal{F}} \left( \|\sqrt{H}\Sigma(U_{f,i})\|_{\partial w_i}^2 + \|hR_i(U_{f,i})\|_{w_i}^2 \right) \frac{1}{\sqrt{a}} \| \cdot \|_{L^\infty(w_i)}^2, \quad (1.6)$$

که در آن،

$$(-\Sigma(U_{f,i}), v_f)_{\partial w_i} = (f + \nabla \cdot a \nabla U_c, \varphi_i v_f)_{w_i} - a(U_{f,i}, v_f)_{w_i}, \forall v_f \in V_f^h(\bar{w}_i), \quad (2.6)$$

$\mathcal{C}$  به گره‌هایی که در آن مسایل غیرموضعی حل شده و  $\mathcal{F}$  به گره‌هایی که در آن مسایل موضعی حل شده‌است، اشاره دارد.  $U_c$  جواب مقیاس درشت و  $U = U_c + U_f$  می‌باشد.  $\{\varphi_i\}_{i \in \mathcal{C} \cup \mathcal{F}}$  افزاز واحدی می‌باشد.  $\mathcal{R}(U)$  مرز قابل محاسبه‌ای از مانده  $f + \nabla \cdot a \nabla U$  و  $\mathcal{R}_i(U_{f,i})$  یک مرز از مانده مقیاس ظریف  $\nabla \cdot a \nabla U_{f,i} + \varphi_i(f + \nabla \cdot a \nabla U_c)$  می‌باشد.  $\Sigma(U_{f,i})$  مرتبط با مشتق نرمال جواب مقیاس ظریف  $U_{f,i}$  و محاسبه اثر محدودیت برای وصله‌ها می‌باشد و  $V_f^h(\bar{w}_i)$  فضای عناصر متناهی روی مساله موضعی مقیاس ظریف  $i$  می‌باشد.

چارچوب روش چندمقیاسی وردشی تطبیقی به نسبت کلی می‌باشد و می‌تواند به انواع دیگری از روش‌های چندمقیاسی، برای مثال، بر پایه یک مساله نوین<sup>۷</sup> موضعی، توسعه یابد.

ادامه این فصل به شرح زیر است:

در بخش (۲.۶)، مساله مدل و فرمول‌بندی چندمقیاسی وردشی تطبیقی را معرفی می‌کنیم؛ در بخش (۳.۶) یک برآورد خطای پسین را ارائه می‌دهیم و اثبات می‌کنیم؛ در بخش (۴.۶)، حالت خاصی از ضرایب دوره‌ای را بررسی می‌کنیم؛ در بخش (۵.۶)، یک الگوریتم تطبیقی بر پایه یک برآورد خطای پسین ارائه می‌دهیم؛ و سرانجام در بخش (۶.۶)، نتایج عددی گویا را بیان می‌کنیم.

## ۲.۶ روش چندمقیاسی وردشی

### ۱.۲.۶ مساله مدل

ابتدا معادله پواسون استاندارد را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{in } \Omega, \\ u = 0, & \text{on } \Gamma. \end{cases} \quad (3.6)$$

می‌توان ضریبی وابسته به فضا را به معادله (۳.۶) اضافه کرد. این ضریب متغیر وابسته به فضا را که با  $a$  معرفی می‌کنیم دارای شرایط زیر است:

$$1. \quad a > 0.$$

$$2. \quad a \text{ یک دوره به اندازه } \varepsilon \text{ دارد یعنی } a = a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \text{ می‌باشد،}$$

<sup>۷</sup>Neumann

پس معادله (۳.۶) به صورت زیر می‌شود:

$$\begin{cases} -\nabla \cdot a \nabla u = f, & \text{in } \Omega, \\ u = 0, & \text{on } \Gamma. \end{cases}$$

معادله پواسون با ضرایب متغیر و شرایط مرزی دیریگله همگن را بررسی می‌کنیم:  
 $u \in H_0^1(\Omega)$  را به گونه‌ای پیدا کنید که رابطه

$$\begin{cases} -\nabla \cdot a \nabla u = f, & \text{in } \Omega, \\ u = 0, & \text{on } \Gamma, \end{cases} \quad (۴.۶)$$

برقرار باشد. در این جا  $\Omega$  یک دامنه چندضلعی<sup>۸</sup> در  $\mathcal{R}^d$  و  $d$  برابر با ۱، ۲ یا ۳ با مرز  $\Gamma$  می‌باشد و  
 $f \in L^2(\Omega)$  و  $a \in L^\infty(\Omega)$  می‌باشد، به قسمی که:

$$a(x) > 0, \quad \forall x \in \Omega.$$

حال می‌خواهیم فرم وردشی از (۴.۶) را بدست آوریم:

ابتدا فرم ضعیف را بدست می‌آوریم. برای نوشتن فرم ضعیف، ابتدا تابع آزمون را به صورت  
 $V = \{v \in H^1(\Omega); v = 0 \text{ on } \Gamma\}$ ,

در نظر می‌گیریم. حال معادله (۴.۶) را در  $v \in V$  ضرب کرده و روی  $\Omega$  انتگرال می‌گیریم:

$$\int_{\Omega} (-\nabla \cdot a \nabla u) \cdot v \, dx = \int_{\Omega} f \cdot v \, dx,$$

حال با استفاده از انتگرال گیری جز به جز داریم:

$$\int_{\Omega} (-\nabla \cdot a \nabla u) \cdot v \, dx = -a v \nabla u|_{\Gamma} + \int_{\Omega} a \nabla u \nabla v \, dx = I,$$

با توجه به تعریف  $V$ ،  $v \in V$  روی  $\Gamma$  برابر با صفر می‌باشد، پس داریم:

$$I = \int_{\Omega} a \nabla u \nabla v \, dx,$$

در نتیجه داریم:

$$\int_{\Omega} a \nabla u \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f \cdot v \, dx,$$

بنابراین داریم:

$$(a \nabla u, \nabla v) = (f, v).$$

حال فرم دوخطی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$a(u, v) = (a \nabla u, \nabla v), \quad \forall u, v \in \mathcal{V}, \quad (۵.۶)$$

بنابراین فرم وردشی (۴.۶) با توجه به فرم دوخطی (۵.۶)، به صورت زیر می‌شود:

$u \in \mathcal{V} = H_0^1(\Omega)$  را به گونه‌ای بیابید که در رابطه

$$a(u, v) = (f, v), \quad \forall v \in \mathcal{V}, \quad (۶.۶)$$

صدق کند.

<sup>۸</sup>Polygonal

### ۲.۲.۶ روش چندمقیاسی وردشی

ما روی دومقیاس متمرکز می‌شویم و فرمول‌بندی چندمقیاسی وردشی را به کار می‌بریم. دو فضای  $\mathcal{V}_c \subset \mathcal{V}$  و  $\mathcal{V}_f \subset \mathcal{V}$  را در نظر می‌گیریم، به قسمی که:

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_c \oplus \mathcal{V}_f,$$

که در آن  $\mathcal{V}_c$ ، فضای مقیاس درشت و  $\mathcal{V}_f$ ، فضای مقیاس ظریف می‌باشد. با اعمال این فضاها در مساله (۶.۶)، به فرم ضعیف زیر می‌رسیم:

$u_c \in \mathcal{V}_c$  و  $u_f \in \mathcal{V}_f$  را به گونه‌ای بیابید که در رابطه

$$\begin{cases} a(u_c, v_c) + a(u_f, v_c) = (f, v_c), & \forall v_c \in \mathcal{V}_c, \\ a(u_c, v_f) + a(u_f, v_f) = (f, v_f), & \forall v_f \in \mathcal{V}_f, \end{cases} \quad (۷.۶)$$

صدق کند.

در نظر می‌گیریم  $R: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}'$ ، که نشان‌دهنده مانده تعریف شده به صورت زیر می‌باشد:

$$(R(v), w) = (f, w) - a(v, w), \quad \forall w \in \mathcal{V}. \quad (۸.۶)$$

با در نظر گرفتن بخش مقیاس ظریف معادله (۷.۶)، داریم:

$$a(u_f, v_f) = (f, v_f) - a(u_c, v_f), \quad \forall v_f \in \mathcal{V}_f, \quad (۹.۶)$$

با توجه به رابطه (۸.۶)، می‌توان معادله (۹.۶) را به صورت زیر نوشت:

$u_f \in \mathcal{V}_f$  را به گونه‌ای پیدا کنید که رابطه

$$a(u_f, v_f) = (R(u_c), v_f), \quad \forall v_f \in \mathcal{V}_f, \quad (۱۰.۶)$$

برقرار باشد.

در واقع عبارت فوق، همان معادله مقیاس ظریف می‌باشد. بنابراین جواب مقیاس ظریف منتج از مانده جواب مقیاس درشت می‌باشد. اگر جواب  $u_f$  از رابطه (۱۰.۶) را با  $u_f = \tau R(u_c)$  نمایش دهیم، آنگاه مساله مقیاس درشت به صورت زیر تغییر می‌کند:

$$a(u_c, v_c) + a(\tau R(u_c), v_c) = (f, v_c), \quad \forall v_c \in \mathcal{V}_c, \quad (۱۱.۶)$$

که در آن عبارات دوم سمت چپ تساوی فوق، برای تاثیرات مقیاس ظریف روی مقیاس درشت محاسبه می‌شود. از آنجا که  $a(\tau R(\phi_i), \phi_j) = T_{ij} + d_j$  برای تعدادی ماتریس  $T$  و بردار  $d$  برقرار است، عبارات ماتریسی، یک ماتریس سختی<sup>۹</sup> اصلاح شده<sup>۱۰</sup> و یک سمت راست اصلاح شده را به ما می‌دهد. توجه داریم که  $(R(v), w)$  در معادله (۸.۶) تعریف شده که  $v$  معین می‌باشد. در

معادله (۱۱.۶) به جای  $u_c$  قرار می‌دهیم  $\phi_i$  و به جای  $v_c$  قرار می‌دهیم  $\phi_j$ ، پس داریم:

$$a(\phi_i, \phi_j) + a(\tau R(\phi_i), \phi_j) = (f, \phi_j), \quad \forall \phi_j \in \mathcal{V}_c.$$

با توجه به تعریف  $a(\tau R(\phi_i), \phi_j)$  داریم:

$$a(\phi_i, \phi_j) + T_{ij} + d_j = (f, \phi_j), \quad \forall \phi_j \in \mathcal{V}_c,$$

<sup>۹</sup>Stiffness

<sup>۱۰</sup>Modified

در نتیجه داریم:

$$a(\phi_i, \phi_j) + T_{ij} = (f, \phi_j) - d_j, \quad \forall \phi_j \in \mathcal{V}_c, \quad (12.6)$$

اگر ماتریس سختی گالرکین استاندارد را با  $A$  و عبارت سمت راست را با  $b$  مشخص کنیم، آنگاه داریم:

$$AU_G = b, \quad (13.6)$$

حال در معادله (۱۳.۶) به جای ماتریس سختی، ماتریس  $a(\phi_i, \phi_j) + T_{ij}$  و همچنین به جای بردار  $b$ ، بردار  $(f, \phi_j) - d_j$  را قرار می‌دهیم، پس داریم:

$$(a(\phi_i, \phi_j) + T_{ij})U_c = (f, \phi_j) - d_j, \quad \forall \phi_j \in \mathcal{V}_c,$$

با توجه به این که معادله فوق مساله مقیاس درشت می‌باشد، به جای  $U_G$  از  $U_c$  استفاده شده است. به جای  $(f, \phi_j)$  قرار می‌دهیم  $b_j$ ، پس داریم:

$$(a(\phi_i, \phi_j) + T_{ij})U_c = b_j - d_j, \quad \forall \phi_j \in \mathcal{V}_c,$$

لذا:

$$(A + T)U_c = b - d, \quad (14.6)$$

روشی دیگر، حل معادله (۷.۶) به صورت تکراری، با جواب گالرکین به عنوان فرض اولیه می‌باشد.

### ۳.۲.۶ تقریبی از معادلات مقیاس ظریف بر پایه مسایل دیریکله موضعی

ایده این است که معادلات مقیاس ظریف از جمله افراز واحد در سمت راست را تجزیه و سپس مسایل ناشی از آن را روی وصله‌ها حل کنیم. با برخی از نمادهای اولیه شروع می‌کنیم. یک افراز  $\mathcal{K} = \{K\}$  از  $\Omega$  را بر روی عناصر با شکل منظم درشت  $K$  با قطر  $H_K$  معرفی می‌کنیم. فرض می‌کنیم که  $\mathcal{N}$  مجموعه‌ای از گره‌های درشت و  $\mathcal{V}_c$  فضایی از چندجمله‌ای‌های قطعه‌وار پیوسته از درجه  $p$  تعریف شده روی  $\mathcal{K}$  باشد. فرض می‌کنیم رابطه زیر برقرار باشد:

$$u_f = \sum_{i \in \mathcal{N}} u_{f,i},$$

در این جا داریم:

$$a(u_{f,i}, v_f) = (\varphi_i R(u_c), v_f), \quad \forall v_f \in \mathcal{V}_f, \quad (15.6)$$

که در آن  $\{\varphi_i\}_{i \in \mathcal{N}}$ ، افرازی واحد می‌باشد. برای مثال می‌توان  $\{\varphi_i\}_{i \in \mathcal{N}}$  را مجموعه‌ای از توابع پایه‌ای لاگرانژ در  $\mathcal{V}_c$ ، به منظور تجزیه معادلات مقیاس ظریف در نظر گرفت. توجه داریم که عبارت سمت راست محملی<sup>۱۱</sup> یکسان مانند  $\varphi_i$  دارد و یک محمل کوچک که با  $\Omega$  مقایسه می‌شود. ابتدا معادله مقیاس ظریف (۷.۶) را در نظر می‌گیریم:

$$a(u_c, v_f) + a(u_f, v_f) = (f, v_f), \quad \forall v_f \in \mathcal{V}_f,$$

<sup>۱۱</sup>Support



این بسط از  $u_f$  را در عبارت سمت راست از معادله مقیاس ظریف (۷.۶) اعمال می‌کنیم و با در نظر گرفتن  $u_f = \sum_{i \in \mathcal{N}} u_{f,i}$  داریم:

$$a(u_c, v_f) + a\left(\sum_{i \in \mathcal{N}} u_{f,i}, v_f\right) = (f, v_f) \implies a\left(\sum_{i \in \mathcal{N}} u_{f,i}, v_f\right) = (f, v_f) - a(u_c, v_f),$$

حال با توجه به (۸.۶) داریم:

$$a\left(\sum_{i \in \mathcal{N}} u_{f,i}, v_f\right) = (R(u_c), v_f) \implies a(u_{f,i}, v_f) = (\varphi_i R(u_c), v_f),$$

در نتیجه معادله (۷.۶) به صورت زیر می‌شود:

$$\begin{cases} a(u_c, v_c) + a(u_f, v_c) = (f, v_c), & \forall v_c \in \mathcal{V}_c, \\ a(u_{f,i}, v_f) = (\varphi_i R(u_c), v_f), & \forall v_f \in \mathcal{V}_f, i \in \mathcal{N}. \end{cases} \quad (۱۶.۶)$$

در گام بعدی معادلات مقیاس ظریف را به صورت تقریبی حل می‌کنیم. برای هر عضو  $\varphi_i$  در افراز واحد، یک دامنه  $w_i$  را همراه می‌سازیم که در آن مساله دیریکله را حل می‌کنیم. دامنه موضعی  $w_i$  شامل محملی از عناصر افراز واحد  $\varphi_i$  می‌باشد که برای رسیدن به جوابی تقریبی مناسب، به اندازه کافی بزرگ انتخاب می‌شود. کیفیت جواب به وسیله برآوردهای خطا کنترل می‌شود. حال فضای عناصر متناهی موضعی  $\mathcal{V}_f^h(w_i)$  همراه با گره  $i$  را تعریف می‌کنیم. مش درشت را روی وصله  $w_i$  تعریف می‌کنیم و فرض می‌کنیم که  $\mathcal{V}_f^h(w_i)$ ، بخش ظریف پایه موروثی<sup>۱۲</sup> گره‌ای روی این مش باشد که شرایط مرزی دیریکله همگن را روی مرز وصله  $w_i$  برآورده می‌کند. این بدان معناست که توابع در فضای  $\mathcal{V}_f^h(w_i)$ ، چندجمله‌ای‌های قطعه‌وار پیوسته از درجه  $p$  می‌باشند که در گره‌های درشت مقیاس ظریف برابر با صفر هستند. فرض می‌کنیم که  $h$  پارامتر مش مقیاس ظریف مرتبط با این فضاها را مشخص می‌کند.

روش بدست آمده به صورت زیر خوانده می‌شود:

$U_c \in \mathcal{V}_c$  و  $U_f = \sum_{i \in \mathcal{N}} U_{f,i}$  که در آن  $U_{f,i} \in \mathcal{V}_f^h(w_i)$ ، را به گونه‌ای بیابید که در رابطه

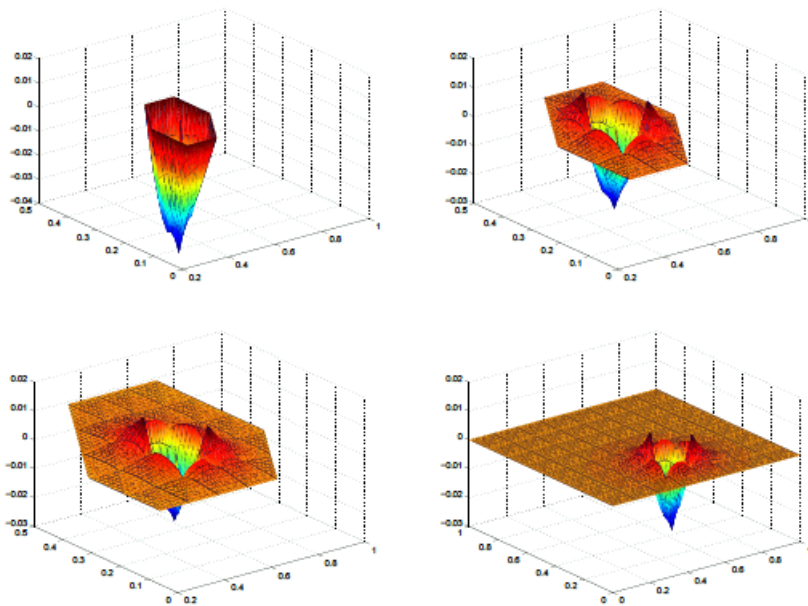
$$\begin{cases} a(U_c, v_c) + a(U_f, v_c) = (f, v_c), & \forall v_c \in \mathcal{V}_c, \\ a(U_{f,i}, v_f) = (\varphi_i R(U_c), v_f), & \forall v_f \in \mathcal{V}_f^h(w_i), i \in \mathcal{N}, \end{cases} \quad (۱۷.۶)$$

صدق کند.

از آنجا که توابع در فضاها عناصر متناهی موضعی  $\mathcal{V}_f^h(w_i)$ ، روی  $\partial w_i$  برابر با صفر هستند،  $U_f$  و در نتیجه  $U$ ، پیوسته خواهند بود.

**تذکر ۱.۲.۶.** برای مسایل با پدیده چندمقیاسی، لازم نیست که روی بخشی از دامنه، جواب مسایل موضعی برای همه گره‌های درشت موجود باشد. فرض می‌کنیم که  $C \subset \mathcal{N}$ ، به گره‌هایی که مسایل غیر موضعی در آن حل شده و  $\mathcal{F} \subset \mathcal{N}$ ، به گره‌هایی که مسایل موضعی در آن حل شده، اشاره دارد. بدیهی است که  $C \cup \mathcal{F} = \mathcal{N}$  باشد. برای  $i \in C$  برابر با صفر می‌باشد.

<sup>۱۲</sup>Hierarchical



شکل ۱.۶: یک نمونه از جواب موضعی  $U_{f,i}$  از معادلات مقیاس ظریف در ناحیه‌ای هموار با استفاده از یک، دو و سه ستاره لایه‌ای و کل دامنه.

تذکر ۲.۲.۶. در این روش انتخاب زیر دامنه‌های  $w_i$ ، بسیار مهم می‌باشد. یک نماد برای مش ستاره‌ای<sup>۱۳</sup> با تعداد زیاد لایه از عناصر درشت به صورت بازگشتی به صورت زیر است. فرض می‌کنیم که  $S_L^i$  محمولی از توابع پایه‌ای لاگرانژ  $\varphi_i$  در گره  $i$  باشد. مش ستاره‌ای توسعه یافته به صورت زیر می‌باشد:

$$S_L^i = \cup_{x_j \in S_{L-1}^i} S_j^i,$$

برای  $L > 1$ ، که در آن  $\varphi_j(x_j) = 1$  می‌باشد و گره‌های روی مرز را نیز شامل می‌شوند. در این جا  $L$ ، تعداد لایه‌ها را مشخص می‌کند.

تذکر ۳.۲.۶. توجه داریم که ساخت مسایل موضعی مقیاس ظریف، الهام گرفته از نورم انرژی یک برآورد خطای پسین، بر اساس مسایل دیریکله موضعی روی ستاره‌ها می‌باشد.

برای درک چگونگی رفتار جواب موضعی  $U_{f,i}$ ، وقتی که دامنه  $w_i$  افزایش می‌یابد، جواب‌های مختلف  $U_{f,i}$  در یک ناحیه هموار از جواب  $u$  را در شکل (۱.۶) مشاهده کنید. چون که  $U_{f,i}$  در فضای برش  $\mathcal{V}_f$  حل شده است و چون که عبارت سمت راست معادلات مقیاس ظریف (۱۷.۶)، محمولی یکسان دارد،  $U_{f,i}$  به سرعت نسبت به مرز  $w_i$  تجزیه خواهد شد که این نیز در شکل (۱.۶) دیده می‌شود. توجه داریم که ستاره‌های لایه یک، دقت بدی را می‌دهد در حالی که ستاره‌های لایه دو و یا بیشتر، ویژگی‌های اصلی از جواب مقیاس ظریف دقیق را می‌دهد.

اگر در نظر بگیریم  $w_i = \Omega$ ، همان جواب را بدست خواهیم آورد، مثل این که مساله کلی را روی مشی ظریف حل کنیم.

<sup>۱۳</sup>Mesh Stars

### ۳.۶ برآورد خطای پسین در نورم انرژی

با معرفی نمادهایی برای مانده شروع می‌کنیم. ابتدا قضیه زیر را در نظر می‌گیریم:

**قضیه ۱.۳.۶.** ثابت درونیابی  $C_i$  که فقط به زاویه  $\tau$  وابستگی دارد، موجود می‌باشد به قسمی که خطای تقریب عنصر متناهی گالرکین  $U$  نسبت به جواب  $u$  از معادله پواسون، در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$\|\nabla u - \nabla U\| \leq C_i \|hR(U)\|, \quad (18.6)$$

که در آن داریم:

$$R(U) = R_1(U) + R_2(U),$$

که  $R_1(U)$  و  $R_2(U)$  به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$R_1(U) = |f + \Delta U|, \quad \text{on } K \in \mathcal{K},$$

$$R_2(U) = \frac{1}{\nu} \max_{n \in \partial K} h_K^{-1} |[a \partial_n U]|, \quad \text{on } K \in \mathcal{K}.$$

همچنان که اشاره شد،  $R_1(U)$  به مانده کل عناصر درونی  $K$  اشاره دارد. توجه داریم که در حالتی از تقریب خطی قطعه‌وار،  $R_1(U) = |f|$  می‌باشد. به علاوه،  $R_2(U)$  به مانده‌ای از پرش مشتق نرمال  $U$  در سرتاسر لبه‌ها، اشاره دارد. همچنین مشاهده می‌کنیم که وجود عامل  $h$  در کنار مانده  $R(U)$  در (۱۸.۶)، از تعامد گالرکین<sup>۱۴</sup> و برآورد زیر حاصل می‌شود:

$$\|h^{-1}(e - \tilde{\pi}_h e)\| \leq C_i \|\nabla e\|.$$

حال فرض می‌کنیم که  $\mathcal{R}(U)$  مرزی از مانده تعریف شده، بنابه قضیه (۱.۳.۶) و به صورت زیر باشد:

$$\mathcal{R}(U) = |f + \nabla \cdot a \nabla U| + \frac{1}{\nu} \max_{\partial K \setminus \Gamma} H_K^{-1} |[a \partial_n U]|, \quad \text{on } K \in \mathcal{K}, \quad (19.6)$$

که در آن  $\mathcal{K}$  مجموعه‌ای از عناصر در مش و  $[\cdot]$  تفاضل مقدار تابع در طول فضای داخلی کنونی می‌باشد. توجه داریم:

$$|(R(U), v)| \leq \|H^s \mathcal{R}(U)\| \|H^{-s} v\|, \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

$\mathcal{R}_i(U_{f,i})$  را به همان روش  $\mathcal{R}(U)$  روی مش موضعی تعریف می‌کنیم، با این تفاوت که  $U_{f,i}$  را به جای  $U$ ،  $h$  را به جای  $H$  و  $\varphi_i \mathcal{R}(U_c)$  را به جای  $f$  قرار می‌دهیم. پس داریم:

$$\mathcal{R}(U_{f,i}) = |\varphi_i \mathcal{R}(U_c) + \nabla \cdot a \nabla U_{f,i}| + \frac{1}{\nu} \max_{\partial K \setminus \Gamma} h_K^{-1} |[a \partial_n U_{f,i}|], \quad \text{on } K \in \mathcal{K},$$

همچنین فضای جدیدی روی وصله‌های  $w_i$  تعریف می‌کنیم. فرض می‌کنیم  $\mathcal{V}_f^h(\bar{w}_i)$  بخش مقیاس ظریف از فضای موروثی از چندجمله‌ای‌های قطعه‌وار از درجه  $p$  تعریف شده روی مش ظریف روی

<sup>۱۴</sup>Galerkin Orthogonality

وصله  $w_i$  باشد. این فضا مشابه با  $\mathcal{V}_f^h(w_i)$  می باشد با این تفاوت که در  $\mathcal{V}_f^h(\bar{w}_i)$ ، هیچ الزامی برای صفر بودن روی مرز  $\partial w_i$  وجود ندارد. این بدان معناست که:

$$\mathcal{V}_f^h(w_i) \subset \mathcal{V}_f^h(\bar{w}_i),$$

همچنین فضای  $\mathcal{V}_f^h(\partial w_i)$  را که روی مرز محدودتر از  $\mathcal{V}_f^h(\bar{w}_i)$  می باشد، معرفی می کنیم. برای تابع داده شده  $v, v \in \mathcal{V}_f^h(\bar{w}_i)$  به مرز  $\mathcal{V}_f^h(\partial w_i)$  محدود شده است. یک برآورد خطا را نتیجه می گیریم که شامل هر دو خطای مقیاس درشت و مقیاس ظریف باشد. خطای مقیاس درشت به صورت زیر است:

$$e_c = u_c - U_c,$$

همچنین خطای مقیاس ظریف به صورت زیر می باشد:

$$e_f = \sum_{i \in \mathcal{N}} e_{f,i} := \sum_{i \in \mathcal{N}} (u_{f,i} - U_{f,i}),$$

که این خطاها ناشی از به کارگیری روش عناصر متناهی (۱۷.۶) می باشند. اگر بخش درشت معادله (۱۷.۶) را از بخش درشت معادله (۱۶.۶) کم کنیم، تعامد گالرکین را بدست می آوریم:

$$a(u_c - U_c, v_c) + a(u_f - U_f, v_c) = (f, v_c) - (f, v_c), \quad \forall v_c \in \mathcal{V}_c,$$

در نتیجه داریم:

$$a(e_c, v_c) + a(e_f, v_c) = 0, \quad \forall v_c \in \mathcal{V}_c. \quad (20.6)$$

همان استدلال روی معادله مقیاس ظریف، برای  $i \in \mathcal{F}$ ، نتیجه می دهد:

$$a(u_{f,i} - U_{f,i}, v_f) = (\varphi_i R(u_c) - \varphi_i R(U_c), v_f),$$

در نتیجه داریم:

$$a(e_{f,i}, v_f) = (\varphi_i (R(u_c) - R(U_c)), v_f),$$

چون که  $R$  خطی است، پس داریم:

$$a(e_{f,i}, v_f) = (\varphi_i (R(u_c - U_c)), v_f) = (\varphi_i (R(e_c)), v_f) = (R(e_c), \varphi_i v_f), \quad (21.6)$$

با توجه به تعریف (۸.۶) داریم:

$$(R(e_c), \varphi_i v_f) = (f, \varphi_i v_f) - a(e_c, \varphi_i v_f), \quad (22.6)$$

با در نظر گرفتن (۲۱.۶) و (۲۲.۶) داریم:

$$a(e_{f,i}, v_f) = (f, \varphi_i v_f) - a(e_c, \varphi_i v_f),$$

از آنجا که  $(f, \varphi_i v_f) = 0$  می باشد، در نهایت داریم:

$$a(e_{f,i}, v_f) = -a(e_c, \varphi_i v_f), \quad \forall v_f \in \mathcal{V}_f^h(w_i). \quad (23.6)$$

گزاره ۲.۳.۶. فرض می کنیم:

$$\pi : L^2(\Omega) \rightarrow V_h,$$

که در آن  $\pi$ ، درونیایی اسکات ژانگ<sup>۱۵</sup> بر روی فضای قطعه‌وار خطی  $V_h$  روی مثلث  $K$  می‌باشد. همچنین در نظر داریم که  $\pi$  در  $H^1(\Omega)$  نیز پایدار می‌باشد.

گزاره ۳.۳.۶. فرض می‌کنیم که  $\tilde{S}_h$ ، توابع قطعه‌وار خطی پیوسته را بر روی مثلث  $\tau_h$  مشخص می‌کند. در این جا توابع روی مرز  $\Gamma$ ، لزوماً به صفر میل نمی‌کنند. به وسیله  $\{\varphi_j\}_{j=1}^{N_h}$  همه گره‌های  $\tau_h$  برای  $1 \leq j \leq N_h$  مشخص می‌شوند، از جمله گره‌هایی که روی مرز  $\Gamma$  می‌باشند. همچنین  $\{\Phi_j\}_{j=1}^{N_h}$  متناظر با توابع هرمی شکل می‌باشد.

عملگر درونیایی  $I_h : C(\bar{\Omega}) \rightarrow \tilde{S}_h$ ، توسط رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$(I_h v)(x) = \sum_{i=1}^{N_h} v_i \Phi_i(x),$$

که در آن  $v_i = v(P_i)$ . به این ترتیب روی گره‌های  $P_j$ ، درونیایی  $I_h v$  با  $v$  برابر است، یعنی داریم:

$$(I_h v)(P_i) = v(P_i), \quad \forall i = 1, \dots, N_h.$$

در یک حالت قطعه‌وار خطی، برآوردهای خطی موضعی زیر را همراه با  $|v|_K = \|v\|_{L^2(K)}$  و  $|v|_{2,K} = \|v\|_{H^2(K)}$  داریم:

$$\|I_h(v) - v\|_K \leq C_K h_K^2 |v|_{2,K}, \quad \forall K \in \tau_h, \quad (24.6)$$

و

$$\|\nabla(I_h(v) - v)\|_K \leq C_K h_K |v|_{2,K}, \quad \forall K \in \tau_h. \quad (25.6)$$

قضیه ۴.۳.۶ (اثر<sup>۱۶</sup>). فرض می‌کنیم که  $\Omega$  یک دامنه کران‌دار در  $R^d$  ( $d \geq 2$ ) با مرز چندضلعی یا هموار  $\Gamma$  باشد. سپس عملگر اثر یعنی  $\gamma : C^1(\bar{\Omega}) \rightarrow C(\Gamma)$ ، می‌تواند به  $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$  توسعه یابد که برای هر  $v \in H^1(\Omega)$ ، بنابه تعریف،  $\gamma v \in L^2(\Gamma)$  می‌باشد. علاوه بر این، ثابت  $C = C(\Omega)$  وجود دارد به قسمی که:

$$\|\gamma v\|_{L^2(\Gamma)} \leq C \|v\|_1, \quad \forall v \in H^1(\Omega), \quad (26.6)$$

که به این رابطه، نامساوی اثر گفته می‌شود. از آن جا که:

$$\|v\|_1 = \left( \|v\|_{L^2}^2 + \|\nabla v\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

می‌باشد، پس می‌توان رابطه (۲۶.۶) را به صورت زیر نوشت:

$$\|\gamma v\|_{L^2(\Gamma)} \leq C \left( \|v\|_{L^2}^2 + \|\nabla v\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

برای مشاهده اثبات این قضیه به [۱۲] مراجعه شود.

<sup>۱۵</sup>Scott Zhang

<sup>۱۶</sup>Trace

قضیه ۵.۳.۶ ( نامساوی اثر مقیاس بندی شده <sup>۱۷</sup> ). فرض می کنیم که  $\Omega = (\circ, L) \times (\circ, L)$ ، یک دامنه مربعی شکل با ضلع  $L$  باشد. در این صورت نامساوی اثر مقیاس بندی شده به صورت زیر می باشد:

$$\|v\|_{L^r(\Gamma)} \leq C \left( L^{-1} \|v\|_{L^r(\Omega)}^2 + L \|\nabla v\|_{L^r(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall v \in C^1(\bar{\Omega}). \quad (27.6)$$

برای مشاهده اثبات به [۱۲] مراجعه شود.

قضیه ۶.۳.۶. یک ثابت  $C$ ، فقط وابسته به  $k$  وجود دارد به قسمی که:

$$\|\pi u\|_p \leq C \|u\|_p, \quad \forall u \in L_p(\circ, 1), \quad 1 \leq p \leq \infty. \quad (28.6)$$

برای مشاهده اثبات به [۱۰] مراجعه شود.

قضیه ۷.۳.۶. فرض می کنیم که  $1 \leq p \leq \infty$  باشد و برای  $p > 1$ ، افراز به گونه ای است که رابطه  $\frac{h_i}{h_j} \leq C \cdot \alpha^{|i-j|}$ ، برقرار باشد که در آن  $\alpha < (k+1)^{\frac{p}{p-1}}$  می باشد. پس داریم:

$$\|\nabla(\pi u)\|_p \leq C \|\nabla u\|_p, \quad \forall u \in \dot{W}_p^1(\circ, 1), \quad (29.6)$$

که در آن  $C$ ، وابسته به  $k$ ،  $C$ ،  $\alpha$ ،  $p$  و برای  $p > 1$  می باشد.

در این جا  $\dot{W}_p^1(\circ, 1)$  به صورت زیر تعریف می شود:

$$\dot{W}_p^1(\circ, 1) = \left\{ v \in L_p(\circ, 1); v' = \frac{dv}{dx} \in L_p(\circ, 1); v(\circ) = v(1) = 0 \right\}.$$

برای مشاهده اثبات به [۱۰] مراجعه شود.

گزاره ۸.۳.۶. ابتدا درون یایی قطعه وار خطی  $r_h v$  را در نظر می گیریم که  $r_h v \in V_h$  می باشد. حال برای  $1 \leq p \leq \infty$ ، رابطه زیر را داریم:

$$\|\nabla(r_h v)\|_p \leq \|\nabla v\|_p, \quad (30.6)$$

نورم را در  $L_p(I_i)$  با  $\|\cdot\|_{p, I_i}$  مشخص می کنیم:

$$\|v - r_h v\|_{p, I_i} \leq \frac{1}{4} h_i \|\nabla v\|_p,$$

حال از رابطه فوق داریم:

$$\frac{1}{h_i} \|v - r_h v\|_{p, I_i} \leq \frac{1}{4} \|\nabla v\|_p, \quad (31.6)$$

روابط (۳۰.۶) و (۳۱.۶) را با هم جمع می کنیم:

$$\frac{1}{h_i} \|v - r_h v\|_{p, I_i} + \|\nabla(r_h v)\|_p \leq \frac{1}{4} \|\nabla v\|_p + \|\nabla v\|_p,$$

در نتیجه داریم:

$$\frac{1}{h_i} \|v - r_h v\|_{p, I_i} + \|\nabla(r_h v)\|_p \leq C \|\nabla v\|_p, \quad (32.6)$$

حال طرفین رابطه (۳۲.۶) را به توان ۲ می رسانیم:

$$\frac{1}{h_i^2} \|v - r_h v\|_{p, I_i}^2 + \|\nabla(r_h v)\|_p^2 \leq C \|\nabla v\|_p^2, \quad (33.6)$$

با ضرب  $h_i$  در طرفین رابطه (۳۳.۶) داریم:

$$\frac{1}{h_i} \|v - r_h v\|_{p, I_i}^2 + h_i \|\nabla(r_h v)\|_p^2 \leq C h_i \|\nabla v\|_p^2. \quad (34.6)$$

در ادامه برآوردی را برای خطا در نورم انرژی، یعنی  $\|e\|_a = a(e, e)^{\frac{1}{2}}$ ، ارائه می‌دهیم.

**قضیه ۹.۳.۶.** فرض می‌کنیم که  $a \in L^\infty(\Omega)$  و  $f \in L^2(\Omega)$  باشد. اگر  $u$  جواب دقیق مساله (۴.۶) و  $U = U_c + \sum_{i \in \mathcal{N}} U_{f,i}$  جواب تقریبی مساله (۱۷.۶) باشد، آنگاه خطای  $e = u - U$  در برآورد زیر صدق می‌کند:

$$\begin{aligned} \|e\|_a^2 &\leq C \sum_{i \in \mathcal{C}} \|HR(U_c)\|_{w_i}^2 \left\| \frac{1}{\sqrt{a}} \right\|_{L^\infty(w_i)}^2 \\ &\quad + C \sum_{i \in \mathcal{F}} \left( \|\sqrt{H}\Sigma(U_{f,i})\|_{\partial w_i}^2 + \|hR_i(U_{f,i})\|_{w_i}^2 \right) \left\| \frac{1}{\sqrt{a}} \right\|_{L^\infty(w_i)}^2, \end{aligned} \quad (35.6)$$

که در آن  $\Sigma(U_{f,i}) \in \mathcal{V}_f^h(\partial w_i)$ ، توسط عبارت زیر تعریف می‌شود:

$$(-\Sigma(U_{f,i}), v_f)_{\partial w_i} = (\varphi_i R(U_c), v_f)_{w_i} - a(U_{f,i}, v_f)_{w_i}, \quad \forall v_f \in V_f^h(\bar{w}_i). \quad (36.6)$$

**برهان.** با توجه به تعریف نورم انرژی داریم:

$$\|e\|_a = a(e, e)^{\frac{1}{2}} \implies \|e\|_a^2 = a(e, e), \quad (37.6)$$

$v_c$  را به عنوان درون‌یابی اسکات ژانگ  $\pi_c e$  بر روی فضای درشت  $\mathcal{V}_c$ ، در نظر می‌گیریم. حال از معادله خطای (۲۰.۶) داریم:

$$a(e_c, v_c) + a(e_f, v_c) = 0 \implies a(e, v_c) = 0, \quad \forall v_c \in \mathcal{V}_c,$$

با توجه به این که  $\pi_c e \in \mathcal{V}_c$  است، پس  $a(e, \pi_c e) = 0$  می‌باشد. در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned} \|e\|_a^2 &= a(e, e) - a(e, \pi_c e) \\ &= a(e, e - \pi_c e) \\ &= a(u - U, e - \pi_c e) \\ &= a(u - (U_c + U_f), e - \pi_c e) \\ &= a(u - U_c, e - \pi_c e) - a(U_f, e - \pi_c e) \\ &= (R(U_c), e - \pi_c e) - a(U_f, e - \pi_c e) \\ &= \sum_{i \in \mathcal{C}} (\varphi_i R(U_c), e - \pi_c e) + \sum_{i \in \mathcal{F}} (\varphi_i R(U_c), e - \pi_c e) - a(U_{f,i}, e - \pi_c e) \\ &= \sum_{i \in \mathcal{C}} (\varphi_i R(U_c), e - \pi_c e) \\ &\quad + \sum_{i \in \mathcal{F}} (\varphi_i R(U_c), e - \pi_c e - \pi_{f,i} e + \pi_{f,i} e - \pi_{f,i} \pi_c e + \pi_{f,i} \pi_c e) \\ &\quad - a(U_{f,i}, e - \pi_c e - \pi_{f,i} e + \pi_{f,i} e - \pi_{f,i} \pi_c e + \pi_{f,i} \pi_c e), \end{aligned}$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} \|e\|_a^2 &= \sum_{i \in \mathcal{C}} (\varphi_i R(U_c), e - \pi_c e) \\ &+ \sum_{i \in \mathcal{F}} (\varphi_i R(U_c), \pi_{f,i}(e - \pi_c e)) - a(U_{f,i}, \pi_{f,i}(e - \pi_c e)) \\ &+ \sum_{i \in \mathcal{F}} (\varphi_i R(U_c), e - \pi_c e - \pi_{f,i}(e - \pi_c e)) - \sum_{i \in \mathcal{F}} a(U_{f,i}, e - \pi_c e - \pi_{f,i}(e - \pi_c e)) \\ &= I + II + III, \end{aligned} \quad (38.6)$$

که در آن  $\pi_{f,i}$  درونیایی اسکات ژانگ روی  $\mathcal{V}_f^h(\bar{w}_i)$  می باشد. با برآوردی از اولین عبارت (۳۸.۶) یعنی  $I$ ، شروع می کنیم. بنا بر نامساوی کوشی شوارتز داریم:

$$\sum_{i \in \mathcal{C}} (\varphi_i R(U_c), e - \pi_c e) \leq \sum_{i \in \mathcal{C}} \|\varphi_i R(U_c)\|_{w_i} \|e - \pi_c e\|_{w_i}, \quad (39.6)$$

طبق نظریه درونیایی داریم:

$$\|e - \pi_c e\|_{w_i} \leq CH \|\nabla e\|_{w_i}, \quad (40.6)$$

حال با توجه به رابطه (۳۹.۶) و (۴۰.۶) داریم:

$$I = \sum_{i \in \mathcal{C}} (\varphi_i R(U_c), e - \pi_c e) \leq C \sum_{i \in \mathcal{C}} \|HR(U_c)\|_{w_i} \|\nabla e\|_{w_i}. \quad (41.6)$$

حال دومین عبارت از (۳۸.۶)، یعنی  $II$  را در نظر می گیریم. ابتدا  $\Sigma(U_{f,i}) \in \mathcal{V}_f^h(\partial w_i)$  را به عنوان چندجمله ای قطعه وار تعریف شده روی  $\partial w_i$  در نظر می گیریم:

$$(-\Sigma(U_{f,i}), v_f)_{\partial w_i} = (R(U_c), \varphi_i v_f)_{w_i} - a(U_{f,i}, v_f)_{w_i}, \quad \forall v_f \in V_f^h(\bar{w}_i), \quad (42.6)$$

که جواب منحصر به فرد دارد.

با این تعریف، برآورد زیر برای  $II$  بدست می آید:

$$II = \sum_{i \in \mathcal{F}} (-\Sigma(U_{f,i}), \pi_{f,i}(e - \pi_c e))_{\partial w_i}, \quad (43.6)$$

با استفاده از لم کوشی شوارتز و با ضرب  $\sqrt{H}$  و  $\frac{1}{\sqrt{H}}$  در عبارت (۴۳.۶) داریم:

$$II \leq \sum_{i \in \mathcal{F}} \|\sqrt{H} \Sigma(U_{f,i})\|_{\partial w_i} \|\frac{1}{\sqrt{H}} \pi_{f,i}(e - \pi_c e)\|_{\partial w_i}, \quad (44.6)$$

حال رابطه (۲۷.۶) را در نظر می گیریم:

$$\|v\|_{L_r(\Gamma)} \leq C \left( L^{-1} \|v\|_{L_r(\Omega)}^2 + L \|\nabla v\|_{L_r(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall v \in C^1(\bar{\Omega}). \quad (45.6)$$

طرفین رابطه (۴۵.۶) را به توان ۲ می رسانیم:

$$\|v\|_{L_r(\Gamma)}^2 \leq C \left( L^{-1} \|v\|_{L_r(\Omega)}^2 + L \|\nabla v\|_{L_r(\Omega)}^2 \right), \quad \forall v \in C^1(\bar{\Omega}), \quad (46.6)$$

با توجه به رابطه (۴۶.۶) داریم:

$$\|\pi_{f,i}(e - \pi_c e)\|_{\partial w_i}^2 \leq C \left( \frac{1}{H} \|\pi_{f,i}(e - \pi_c e)\|_{w_i}^2 + H \|\nabla \pi_{f,i}(e - \pi_c e)\|_{w_i}^2 \right), \quad (47.6)$$



سپس از درون‌یابی اسکات ژانگ که در مش‌های منظم‌شکل موجود در  $L^2$  و  $H^1$  ثابت می‌باشد، استفاده می‌کنیم. بنابه رابطه (۲۸.۶) داریم:

$$\|\pi_{f,i}(e - \pi_c e)\|_{w_i} \leq C \|e - \pi_c e\|_{w_i}, \quad (۴۸.۶)$$

همچنین با در نظر گرفتن رابطه (۲۹.۶) داریم:

$$\|\nabla \pi_{f,i}(e - \pi_c e)\|_{w_i} \leq C \|\nabla(e - \pi_c e)\|_{w_i}, \quad (۴۹.۶)$$

حال با اعمال روابط (۴۸.۶) و (۴۹.۶) در (۴۷.۶) و همچنین در نظر گرفتن رابطه (۳۴.۶) داریم:

$$\begin{aligned} \|\pi_{f,i}(e - \pi_c e)\|_{\partial w_i}^2 &\leq C \left( \frac{1}{H} \|(e - \pi_c e)\|_{w_i}^2 + H \|\nabla(e - \pi_c e)\|_{w_i}^2 \right) \\ &\leq CH \|\nabla e\|_{w_i}^2, \end{aligned} \quad (۵۰.۶)$$

طرفین رابطه (۵۰.۶) را در  $\frac{1}{H}$  ضرب می‌کنیم و سپس جذر می‌گیریم:

$$\frac{1}{H} \|\pi_{f,i}(e - \pi_c e)\|_{\partial w_i}^2 \leq C \|\nabla e\|_{w_i}^2 \implies \|\frac{1}{\sqrt{H}} \pi_{f,i}(e - \pi_c e)\|_{\partial w_i} \leq C \|\nabla e\|_{w_i}, \quad (۵۱.۶)$$

با قرار دادن رابطه (۵۱.۶) در (۴۴.۶) داریم:

$$II \leq C \sum_{i \in \mathcal{F}} \|\sqrt{H} \Sigma(U_{f,i})\|_{\partial w_i} \|\nabla e\|_{w_i}. \quad (۵۲.۶)$$

حال به سراغ عبارت سوم از معادله (۳۸.۶)، یعنی  $III$  می‌رویم که به صورت زیر است:

$$\sum_{i \in \mathcal{F}} (\varphi_i R(U_c), e - \pi_c e - \pi_{f,i}(e - \pi_c e)) - a(U_{f,i}, e - \pi_c e - \pi_{f,i}(e - \pi_c e)),$$

با استدلالی مشابه قسمت‌های قبل، برای عبارت  $III$  برآورد زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} III &\leq C \sum_{i \in \mathcal{F}} \|h \mathcal{R}_i(U_{f,i})\|_{w_i} \|\nabla(e - \pi_c e)\|_{w_i} \\ &\leq C \sum_{i \in \mathcal{F}} \|h \mathcal{R}_i(U_{f,i})\|_{w_i} \|\nabla e\|_{w_i}. \end{aligned} \quad (۵۳.۶)$$

به سادگی مشاهده می‌کنیم:

$$\|\nabla e\|_{w_i} = \|\frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \sqrt{a} \nabla e\|_{w_i} \leq \|\frac{1}{\sqrt{a}}\|_{w_i} \|\sqrt{a} \nabla e\|_{w_i} \leq \|\frac{1}{\sqrt{a}}\|_{L^\infty(w_i)} \|\sqrt{a} \nabla e\|_{w_i}, \quad (۵۴.۶)$$

حال به معادله (۳۸.۶) برمی‌گردیم و با استفاده از برآوردهای بدست آمده یعنی معادلات (۴۱.۶)،

(۵۲.۶) و (۵۳.۶) داریم:

$$\begin{aligned}
 \|e\|_a^2 &\leq \sum_{i \in \mathcal{C}} (\varphi_i R(U_c), e - \pi_c e) \\
 &\quad + \sum_{i \in \mathcal{F}} (\varphi_i R(U_c), \pi_{f,i}(e - \pi_c e)) - a(U_{f,i}, \pi_{f,i}(e - \pi_c e)) \\
 &\quad + \sum_{i \in \mathcal{F}} (\varphi_i R(U_c), e - \pi_c e - \pi_{f,i}(e - \pi_c e)) \\
 &\quad - \sum_{i \in \mathcal{F}} a(U_{f,i}, e - \pi_c e - \pi_{f,i}(e - \pi_c e)) \\
 &\leq C \sum_{i \in \mathcal{C}} \|HR(U_c)\|_{w_i} \|\nabla e\|_{w_i} \\
 &\quad + C \sum_{i \in \mathcal{F}} \|\sqrt{H}\Sigma(U_{f,i})\|_{\partial w_i} \|\nabla e\|_{w_i} \\
 &\quad + C \sum_{i \in \mathcal{F}} \|h\mathcal{R}_i(U_{f,i})\|_{w_i} \|\nabla e\|_{w_i}, \tag{۵۵.۶}
 \end{aligned}$$

با توجه به (۵۴.۶)، رابطه (۵۵.۶) به صورت زیر می شود:

$$\begin{aligned}
 \|e\|_a^2 &\leq C \sum_{i \in \mathcal{C}} \|HR(U_c)\|_{w_i} \frac{1}{\sqrt{a}} \|L^\infty(w_i)\| \|\sqrt{a}\nabla e\|_{w_i} \\
 &\quad + C \sum_{i \in \mathcal{F}} \|\sqrt{H}\Sigma(U_{f,i})\|_{\partial w_i} \frac{1}{\sqrt{a}} \|L^\infty(w_i)\| \|\sqrt{a}\nabla e\|_{w_i} \\
 &\quad + C \sum_{i \in \mathcal{F}} \|h\mathcal{R}_i(U_{f,i})\|_{w_i} \frac{1}{\sqrt{a}} \|L^\infty(w_i)\| \|\sqrt{a}\nabla e\|_{w_i} \\
 &\leq C \left( \sum_{i \in \mathcal{C}} \|HR(U_c)\|_{w_i}^2 \frac{1}{\sqrt{a}} \|L^\infty(w_i)\| \right)^{\frac{1}{2}} \left( \|\sqrt{a}\nabla e\|_{w_i}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\quad + C \left( \sum_{i \in \mathcal{F}} \|\sqrt{H}\Sigma(U_{f,i})\|_{\partial w_i}^2 \frac{1}{\sqrt{a}} \|L^\infty(w_i)\| \right)^{\frac{1}{2}} \left( \|\sqrt{a}\nabla e\|_{w_i}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\quad + C \left( \sum_{i \in \mathcal{F}} \|h\mathcal{R}_i(U_{f,i})\|_{w_i}^2 \frac{1}{\sqrt{a}} \|L^\infty(w_i)\| \right)^{\frac{1}{2}} \left( \|\sqrt{a}\nabla e\|_{w_i}^2 \right)^{\frac{1}{2}},
 \end{aligned}$$

از آن جا که:

$$\left( \|\sqrt{a}\nabla e\|_a^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \int_{\Omega} (\sqrt{a}\nabla e)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \int_{\Omega} a(\nabla e)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \|e\|_a,$$

می باشد، پس داریم:

$$\begin{aligned}
 \|e\|_a^2 &\leq C \left( \sum_{i \in \mathcal{C}} \|HR(U_c)\|_{w_i}^2 \frac{1}{\sqrt{a}} \|L^\infty(w_i)\| \right)^{\frac{1}{2}} \|e\|_a \\
 &\quad + C \left( \sum_{i \in \mathcal{F}} \|\sqrt{H}\Sigma(U_{f,i})\|_{\partial w_i}^2 \frac{1}{\sqrt{a}} \|L^\infty(w_i)\| \right)^{\frac{1}{2}} \|e\|_a \\
 &\quad + C \left( \sum_{i \in \mathcal{F}} \|h\mathcal{R}_i(U_{f,i})\|_{w_i}^2 \frac{1}{\sqrt{a}} \|L^\infty(w_i)\| \right)^{\frac{1}{2}} \|e\|_a,
 \end{aligned}$$

حال طرفین رابطه فوق را به‌توان دو می‌رسانیم:

$$\begin{aligned} \|e\|_a^2 &\leq C \left( \sum_{i \in \mathcal{C}} \|H\mathcal{R}(U_c)\|_{w_i}^2 \left\| \frac{1}{\sqrt{a}} \right\|_{L^\infty(w_i)}^2 \right) \|e\|_a^2 \\ &\quad + C \left( \sum_{i \in \mathcal{F}} \|\sqrt{H}\Sigma(U_{f,i})\|_{\partial w_i}^2 \left\| \frac{1}{\sqrt{a}} \right\|_{L^\infty(w_i)}^2 \right) \|e\|_a^2 \\ &\quad + C \left( \sum_{i \in \mathcal{F}} \|h\mathcal{R}_i(U_{f,i})\|_{w_i}^2 \left\| \frac{1}{\sqrt{a}} \right\|_{L^\infty(w_i)}^2 \right) \|e\|_a^2, \end{aligned}$$

با فاکتورگیری از  $\|e\|_a^2$  داریم:

$$\begin{aligned} \|e\|_a^2 &\leq C \left( \sum_{i \in \mathcal{C}} \|H\mathcal{R}(U_c)\|_{w_i}^2 \left\| \frac{1}{\sqrt{a}} \right\|_{L^\infty(w_i)}^2 \right) \\ &\quad + C \left( \sum_{i \in \mathcal{F}} \|\sqrt{H}\Sigma(U_{f,i})\|_{\partial w_i}^2 \left\| \frac{1}{\sqrt{a}} \right\|_{L^\infty(w_i)}^2 \right) \\ &\quad + C \left( \sum_{i \in \mathcal{F}} \|h\mathcal{R}_i(U_{f,i})\|_{w_i}^2 \left\| \frac{1}{\sqrt{a}} \right\|_{L^\infty(w_i)}^2 \right), \end{aligned}$$

سرانجام رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} \|e\|_a^2 &\leq C \sum_{i \in \mathcal{C}} \|H\mathcal{R}(U_c)\|_{w_i}^2 \left\| \frac{1}{\sqrt{a}} \right\|_{L^\infty(w_i)}^2 \\ &\quad + C \sum_{i \in \mathcal{F}} \left( \|\sqrt{H}\Sigma(U_{f,i})\|_{\partial w_i}^2 + \|h\mathcal{R}_i(U_{f,i})\|_{w_i}^2 \right) \left\| \frac{1}{\sqrt{a}} \right\|_{L^\infty(w_i)}^2, \end{aligned}$$

□

به‌این ترتیب قضیه اثبات شد.

اثبات این قضیه برگرفته از [۸] می‌باشد.

**تذکر ۱۰.۳.۶.** مقدار  $\Sigma(U_{f,i})$  تعریف شده در (۳۶.۶) را می‌توان به‌عنوان یک تقریب وردشی از  $n \cdot a \nabla U_{f,i}$  تفسیر کرد. با تعریف  $U_{f,i} = 0$  روی  $w_i \setminus \Omega$ ، در واقع  $U_{f,i}$  را به  $\Omega$  توسعه می‌دهیم. سپس مانده پرش  $\|\sqrt{H}[\Sigma(U_{f,i})]\|_{\partial w_i}$  به  $\|\sqrt{H}\Sigma(U_{f,i})\|_{\partial w_i}$  ساده می‌شود. بنابراین مقدار دومی، در حقیقت یک مقدار مانده می‌باشد. برای محاسبه  $\Sigma(U_{f,i})$ ، توجه داریم که  $\Sigma(U_{f,i})$  یک چندجمله‌ای قطعه‌وار تعریف شده روی مرز وصله  $w_i$  می‌باشد. رابطه زیر را یادآور می‌شویم:

$$(\varphi_i R(U_c), v_f)_{w_i} - (a \nabla U_{f,i}, \nabla v_f)_{w_i} = 0, \quad \forall v_f \in \mathcal{V}_f^h(w_i), \quad (56.6)$$

که رابطه (۵۶.۶) از بخش ظریف معادله (۱۷.۶) بدست آمده‌است. تعداد یکسانی از مجهولات و معادلات را نتیجه می‌گیریم. در عمل محاسبه  $\Sigma(U_{f,i})$ ، به حل یک دستگاه خطی با ماتریس جرم<sup>۱۸</sup> تعریف شده روی مرز وصله، کاهش خواهد یافت.

<sup>۱۸</sup>Mass

تذکر ۱۱.۳.۶. به منظور برآورد خطا، نیاز به محاسبه مانده می‌باشد. به همین دلیل، فرض می‌کنیم که ناپیوستگی‌های روی ضریب  $a$ ، هم‌تراز با مش مقیاس ظریف هستند. در غیراین صورت  $\nabla \cdot a \nabla U$  نمی‌تواند به عنوان پایه برای برآورد خطا، منظور شود. اگر ناپیوستگی هم‌تراز نباشد، از تقریب  $a$  در دامنه‌ها که پیوسته است، استفاده خواهیم کرد و خطای صورت گرفته را به عنوان خطای مدل در نظر می‌گیریم.

در حالت کلی خطای مدل از تقریب در توصیف ریاضی پدیده‌های واقعی نتیجه می‌شود. برای مثال می‌توان به ضریب عملگر دیفرانسیل  $A$  وابسته به خواص مواد مانند گنجایش حرارت، اشاره کرد. برای اطلاعات بیشتر در مورد خطای مدل به کتاب [۶] مراجعه شود.

## ۴.۶ حالت خاص: ضرایب دوره‌ای

بسیاری از کاربردهای چندمقیاسی دارای ساختاری با ویژگی‌های مقیاس ظریف دوره‌ای می‌باشند. در این حالت خاص، می‌توان به اطلاعاتی خارج از محاسبات، دست یافت. فرض می‌کنیم که مقیاس موضعی به اندازه  $\varepsilon$  و یک مقیاس کلی به اندازه ۱ داریم. علاوه بر این، فرض می‌کنیم که  $a = a(\frac{x}{\varepsilon})$ ، هموار باشد. اگر معادله پواسون را با پارامتر  $\varepsilon < H$  و با استفاده از عناصر متناهی گالری گسسته‌سازی<sup>۱۹</sup> کنیم، برآورد زیر را خواهیم داشت.

گزاره ۱.۴.۶. فرض می‌کنیم که  $0 < a < \beta$  باشد، به قسمی که:

$$a = a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad f \in L^2(\Omega),$$

آنگاه ثابت  $C$  مستقل از  $H$  و  $\varepsilon$  وجود دارد به قسمی که:

$$\|e\|_a \leq C \frac{H}{\varepsilon} \|f\|, \quad (57.6)$$

که این برآورد برگرفته از [۱۳] می‌باشد.

واضح است که از این برآورد بدون حل مجدد مقیاس‌های ظریف، نمی‌توان امیدی به حاصل شدن یک تقریب خوب، داشت. برای تقریب چندمقیاسی وردشی بیان شده در این بخش، محاسباتی مشابه ارایه می‌دهیم. از آن‌جا که داده‌ها دوره‌ای می‌باشند، ما انتظار داریم که جواب به همان اندازه دشوار برای حل در همه بخش‌های دامنه باشد. بنابراین از وصله‌های با اندازه و دقت یکسان برای همه وصله‌ها استفاده می‌کنیم. اندازه مش مقیاس ظریف را کوچک‌تر از نوسان انتخاب می‌کنیم.

قضیه ۲.۴.۶. فرض می‌کنیم که  $f \in L^2(\Omega)$  و  $0 < a < \beta$  باشد، به قسمی که:

$$a = a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad u \in H^1(\Omega),$$

برآورد خطای زیر را داریم:

$$\|e\|_a^2 \leq C \left(\frac{h}{\varepsilon}\right)^2 \|f\|^2 + C \sum_{K \in \mathcal{K}} \|\sqrt{H} \Sigma(U_{f,i})\|_{\partial w_i}^2 \frac{1}{\sqrt{a}} \|1\|_{L^\infty(w_i)}. \quad (58.6)$$

<sup>۱۹</sup>Discretizing

برهان. از یک درونیابی اسکات ژانگ کلی از  $v$  روی مش ظریف مرتبط با  $h$  و  $\pi v$ ، در محاسبات زیر استفاده می‌کنیم.

با توجه به تعریف نورم انرژی داریم:

$$\|e\|_a = a(e, e)^{\frac{1}{2}} \implies \|e\|_a^2 = a(e, e), \quad (59.6)$$

به طرف راست رابطه (59.6)،  $a(e, \pi e)$  را اضافه و کم می‌کنیم. پس داریم:

$$\|e\|_a^2 = a(e, e) - a(e, \pi e) + a(e, \pi e), \quad (60.6)$$

بنابر تعامد گالرکین داریم:

$$a(e, \pi \pi_c e) = 0, \quad (61.6)$$

پس می‌توان رابطه (60.6) را به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \|e\|_a^2 &= a(e, e) - a(e, \pi e) + a(e, \pi e) - a(e, \pi \pi_c e) \\ &= a(e, e - \pi e) + a(e, \pi e - \pi \pi_c e), \end{aligned}$$

در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned} \|e\|_a^2 &= a(e, e - \pi e) + a(e, \pi(e - \pi_c e)) \\ &= a(e, u - \pi u) + \sum_{i \in \mathcal{N}} a(e_c, \varphi_i \pi_{f,i}(e - e_c)) + \sum_{i \in \mathcal{N}} a(e_{f,i}, \pi_{f,i}(e - \pi_c e)), \quad (62.6) \end{aligned}$$

حال عبارت دوم از (62.6) یعنی  $\sum_{i \in \mathcal{N}} a(e_c, \varphi_i \pi_{f,i}(e - e_c))$  را در نظر می‌گیریم. از رابطه (23.6) داریم:

$$a(e_{f,i}, v_f) = -a(e_c, \varphi_i v_f), \quad \forall v_f \in \mathcal{V}_f^h(w_i),$$

با در نظر گرفتن  $v_f = \pi_{f,i}(e - e_c)$  و  $e_{f,i} = U_{f,i}$  داریم:

$$a(e_c, \varphi_i v_f) = -a(U_{f,i}, v_f) = -(\varphi_i R(U_c), v_f), \quad (63.6)$$

از روابط (62.6) و (63.6)، داریم:

$$\begin{aligned} \|e\|_a^2 &= a(e, u - \pi u) - \sum_{i \in \mathcal{N}} (\varphi_i R(U_c), \pi_{f,i}(e - e_c)) \\ &\quad + \sum_{i \in \mathcal{N}} a(e_{f,i}, \pi_{f,i}(e - \pi_c e)), \quad (64.6) \end{aligned}$$

با در نظر گرفتن (36.6)، معادله (64.6) به صورت زیر می‌شود:

$$\begin{aligned} \|e\|_a^2 &= a(e, u - \pi u) + \sum_{i \in \mathcal{N}} (\Sigma(U_{f,i}), \pi_{f,i}(e - \pi_c e))_{\partial w_i} \\ &= I + II, \quad (65.6) \end{aligned}$$

با قسمت اول از (65.6) شروع می‌کنیم. از نتیجه زیر حاصل از نظریه تقریب<sup>۲۰</sup> استفاده می‌کنیم:

$$\|u - \pi u\|_a^2 \leq \beta^2 \|\nabla(u - \pi u)\|^2 \leq \beta^2 h^2 |u|_{\nabla}^2, \quad (66.6)$$

<sup>۲۰</sup> Approximation Theory

در این جا  $|u|_2$ ، نیم نورم  $H^2(\Omega)$  از  $u$  می‌باشد و برآورد منظم زیر را داریم:

$$|u|_2 \leq \frac{C}{\varepsilon} \|f\|, \quad (۶۷.۶)$$

عامل  $\frac{1}{\varepsilon}$  در معادله (۶۷.۶)، ناشی از نوسانات مقیاس کوچک در  $u$  می‌باشد.

حال با در نظر گرفتن روابط (۶۶.۶) و (۶۷.۶) داریم:

$$\|u - \pi u\|_a \leq \beta h \|u\|_2 \leq C \beta \frac{h}{\varepsilon} \|f\|,$$

در نتیجه داریم:

$$\|u - \pi u\|_a \leq C \frac{h}{\varepsilon} \|f\|, \quad (۶۸.۶)$$

حال با محاسبات زیر اثبات را ادامه می‌دهیم:

$$I = a(e, u - \pi u) \leq \|e\|_a \|u - \pi u\|_a, \quad (۶۹.۶)$$

روابط بدیهی زیر را در نظر می‌گیریم و از آن در ادامه اثبات استفاده می‌کنیم:

$$(a - b)^2 \geq 0 \implies a^2 + b^2 \geq 2ab \implies \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2 \geq ab, \quad (۷۰.۶)$$

با توجه به (۶۹.۶)، اگر در رابطه (۷۰.۶) قرار دهیم که  $a = \frac{1}{\sqrt{4}} \|e\|_a$  و  $b = \sqrt{2} \|u - \pi u\|_a$ ، آنگاه داریم:

$$\frac{1}{\sqrt{4}} \|e\|_a \sqrt{2} \|u - \pi u\|_a \leq \frac{1}{4} \left( \frac{1}{\sqrt{4}} \|e\|_a \right)^2 + \frac{1}{4} \left( \sqrt{2} \|u - \pi u\|_a \right)^2,$$

در نتیجه داریم:

$$\|e\|_a \|u - \pi u\|_a \leq \frac{1}{4} \|e\|_a^2 + \|u - \pi u\|_a^2, \quad (۷۱.۶)$$

بنابراین از (۶۹.۶) و (۷۱.۶) داریم:

$$I \leq \frac{1}{4} \|e\|_a^2 + \|u - \pi u\|_a^2, \quad (۷۲.۶)$$

با در نظر گرفتن رابطه (۶۸.۶)، نامساوی (۷۲.۶) به صورت زیر می‌شود:

$$I \leq \frac{1}{4} \|e\|_a^2 + C \left( \frac{h}{\varepsilon} \right)^2 \|f\|^2. \quad (۷۳.۶)$$

برای قسمت دوم از (۶۵.۶)، از نامساوی کوشی شوارتز برای مجموع، پایداری  $H^1$  از  $\pi$  و این که  $u_f = u - u_c$  می‌باشد، استفاده می‌کنیم:

$$II = \sum_{i \in \mathcal{N}} (\Sigma(U_{f,i}), \pi_{f,i}(e - \pi_c e))_{\partial w_i} \quad (۷۴.۶)$$

$$\leq \sum_{i \in \mathcal{N}} \|\sqrt{H} \Sigma(U_{f,i})\|_{\partial w_i} \left\| \frac{1}{\sqrt{H}} \pi_{f,i}(e - \pi_c e) \right\|_{\partial w_i},$$

با توجه به (۵۰.۶) داریم:

$$\|\pi_{f,i}(e - \pi_c e)\|_{\partial w_i} \leq C \sqrt{H} \|\nabla e\|_{w_i}, \quad (۷۵.۶)$$

طرفین (۷۵.۶) را در  $\frac{1}{\sqrt{H}}$  ضرب می‌کنیم:

$$\left\| \frac{1}{\sqrt{H}} \pi_{f,i}(e - \pi_c e) \right\|_{\partial w_i} \leq C \|\nabla e\|_{w_i}, \quad (۷۶.۶)$$

حال با توجه به (۵۴.۶) و (۷۶.۶) داریم:

$$\|\frac{1}{\sqrt{H}}\pi_{f,i}(e - \pi_c e)\|_{\partial w_i} \leq C \|\frac{1}{\sqrt{a}}\|_{L^\infty(w_i)} \|\sqrt{a}\nabla e\|_{w_i}, \quad (۷۷.۶)$$

از روابط (۷۴.۶) و (۷۷.۶) و نامساوی کوشی شوارتز روی مجموع داریم:

$$\begin{aligned} II &\leq C \sum_{i \in \mathcal{N}} \|\sqrt{H}\Sigma(U_{f,i})\|_{\partial w_i} \|\frac{1}{\sqrt{a}}\|_{L^\infty(w_i)} \|\sqrt{a}\nabla e\|_{w_i} \\ &\leq C \left( \sum_{i \in \mathcal{N}} \|\sqrt{H}\Sigma(U_{f,i})\|_{\partial w_i}^2 \|\frac{1}{\sqrt{a}}\|_{L^\infty(w_i)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \|\sqrt{a}\nabla e\|_{w_i}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \left( \sum_{i \in \mathcal{N}} \|\sqrt{H}\Sigma(U_{f,i})\|_{\partial w_i}^2 \|\frac{1}{\sqrt{a}}\|_{L^\infty(w_i)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|e\|_a, \end{aligned} \quad (۷۸.۶)$$

حال با ضرب  $\sqrt{2}$  و  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  در عبارت (۷۸.۶)، داریم:

$$II \leq C\sqrt{2} \left( \sum_{i \in \mathcal{N}} \|\sqrt{H}\Sigma(U_{f,i})\|_{\partial w_i}^2 \|\frac{1}{\sqrt{a}}\|_{L^\infty(w_i)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \|e\|_a, \quad (۷۹.۶)$$

حال اگر فرض کنیم:

$$a = C\sqrt{2} \left( \sum_{i \in \mathcal{N}} \|\sqrt{H}\Sigma(U_{f,i})\|_{\partial w_i}^2 \|\frac{1}{\sqrt{a}}\|_{L^\infty(w_i)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{2}} \|e\|_a,$$

آنگاه با توجه به رابطه (۷۰.۶) داریم:

$$\begin{aligned} C \left( \sum_{i \in \mathcal{N}} \|\sqrt{H}\Sigma(U_{f,i})\|_{\partial w_i}^2 \|\frac{1}{\sqrt{a}}\|_{L^\infty(w_i)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|e\|_a &\leq C \left( \sum_{i \in \mathcal{N}} \|\sqrt{H}\Sigma(U_{f,i})\|_{\partial w_i}^2 \|\frac{1}{\sqrt{a}}\|_{L^\infty(w_i)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2}} \|e\|_a^2, \end{aligned} \quad (۸۰.۶)$$

پس با در نظر گرفتن (۷۹.۶) و (۸۰.۶) داریم:

$$II \leq C \sum_{i \in \mathcal{N}} \|\sqrt{H}\Sigma(U_{f,i})\|_{\partial w_i}^2 \|\frac{1}{\sqrt{a}}\|_{L^\infty(w_i)}^2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \|e\|_a^2, \quad (۸۱.۶)$$

با توجه به (۶۵.۶)، (۷۳.۶) و (۸۱.۶) داریم:

$$\begin{aligned} \|e\|_a^2 &\leq I + II \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|e\|_a^2 + C \left( \frac{h}{\varepsilon} \right)^2 \|f\|^2 + C \sum_{i \in \mathcal{N}} \|\sqrt{H}\Sigma(U_{f,i})\|_{\partial w_i}^2 \|\frac{1}{\sqrt{a}}\|_{L^\infty(w_i)}^2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \|e\|_a^2, \end{aligned}$$

در نتیجه داریم:

$$\|e\|_a^2 \leq C \left( \frac{h}{\varepsilon} \right)^2 \|f\|^2 + C \sum_{i \in \mathcal{N}} \|\sqrt{H}\Sigma(U_{f,i})\|_{\partial w_i}^2 \|\frac{1}{\sqrt{a}}\|_{L^\infty(w_i)}^2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \|e\|_a^2 \quad (۸۲.۶)$$

از رابطه (۸۲.۶) داریم:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \|e\|_a^2 \leq C \left( \frac{h}{\varepsilon} \right)^2 \|f\|^2 + C \sum_{K \in \mathcal{K}} \|\sqrt{H}\Sigma(U_{f,i})\|_{\partial w_i}^2 \|\frac{1}{\sqrt{a}}\|_{L^\infty(w_i)}^2, \quad (۸۳.۶)$$

در نهایت طرفین رابطه (۸۳.۶) را در ۲ ضرب می‌کنیم:

$$\|e\|_a^2 \leq C \left(\frac{h}{\varepsilon}\right)^2 \|f\|^2 + C \sum_{K \in \mathcal{K}} \|\sqrt{H}\Sigma(U_{f,i})\|_{\partial w_i}^2 \left\| \frac{1}{\sqrt{a}} \right\|_{L^\infty(w_i)}^2.$$

□

اثبات این قضیه برگرفته از [۸] می‌باشد.

دوباره مشاهده می‌کنیم که خطای صورت گرفته به وسیله محدودیت وصله‌ها، به وسیله اندازه مشتق نرمال جواب مقیاس ظریف روی مرز وصله اندازه‌گیری می‌شود. وقتی که اندازه وصله برابر با کل دامنه باشد، این مقدار به سمت صفر خواهد آمد که این بدان معناست که این روش به همگرایی به جواب مرجع روش مش ظریف کلی تضمین شده است. وقتی که مسایل را با ضرایب دوره‌ای حل می‌کنیم، اگر تراز با نوسانات ممکن باشد، آنگاه انتخاب مش‌های سازمان یافته منطقی می‌باشد. به هر حال، هنوز انتخاب رابطه بین پارامترهای  $h$  و  $L$  به صورت تطبیقی، مهم می‌باشد. اگر مش با نوسانات مسایل موضعی حل شده درون دامنه تراز باشد، آنگاه فقط در عبارت سمت راست متفاوت خواهد بود، که این بدان معناست که تلاش برای محاسبات تقریباً ناچیز می‌باشد. اگر  $f$  همیشه دوره‌ای باشد، از محاسبات موضعی در معادله (۱۴.۶)، اشتراک یکسانی با ماتریس اصلاح شده  $T$  و بردار  $d$ ، بدست می‌آوریم. وصله‌هایی که شامل بخش‌هایی از مرز می‌باشند، همیشه در محاسبات به صورت تکراری ظاهر خواهند شد و یکی از هر نوع نیاز به محاسبه دارد.

## ۵.۶ الگوریتم تطبیقی

حال با استفاده از برآورد نرم انرژی قضیه (۹.۳.۶)، یک الگوریتم تطبیقی می‌سازیم. برآورد زیر را به خاطر می‌آوریم:

$$\|e\|_a^2 \leq C \sum_{i \in \mathcal{C}} \|HR(U_c)\|_{w_i}^2 \left\| \frac{1}{\sqrt{a}} \right\|_{L^\infty(w_i)}^2 + C \sum_{i \in \mathcal{F}} \left( \|\sqrt{H}\Sigma(U_{f,i})\|_{\partial w_i}^2 + \|hR_i(U_{f,i})\|_{w_i}^2 \right) \left\| \frac{1}{\sqrt{a}} \right\|_{L^\infty(w_i)}^2, \quad (۸۴.۶)$$

هر سه بخش این خطا به راحتی قابل فهم می‌باشد. اولین عبارت یک برآورد خطای پسین استاندارد برای جواب گالرکین روی مش درشت می‌باشد. به عنوان مثال اگر هیچ یک از مسایل موضعی را حل نکنیم، این عبارت را بدست می‌آوریم. اولین بخش از مجموع دوم، خطای ناشی از حل مسایل موضعی روی وصله‌های  $w_i$ ، به جای کل دامنه را نشان می‌دهد. به یاد داریم که  $\Sigma(U_{f,i})$ ، مشتق نرمال جواب مقیاس ظریف روی مرز وصله‌ها را نشان می‌دهد. سرانجام، دومین بخش از مجموع دوم، دقت مقیاس ظریف را بیان می‌کند. وقتی که از این روش استفاده می‌کنیم، دو بخش مجموع دوم به طور واضح به پارامترهای سود اشاره می‌کند. اولین عبارت، اندازه وصله می‌باشد. افزایش اندازه وصله،  $\|\sqrt{H}\Sigma_i(U_{f,i})\|_{\partial w_i}$  را کاهش خواهد داد، چون که  $\Sigma_i(U_{f,i})$  یک تقریب از مشتق نرمال  $U_{f,i}$



می‌باشد که با افزایش اندازه وصله ناشی از بار موضعی در عبارت سمت راست معادلات مقیاس ظریف (۱۷.۶)، کاهش می‌یابد و فضاها را به گونه‌ای تقسیم‌بندی می‌کند که نیروهای  $U_{f,i}$  در همه گره‌های درشت برابر با صفر می‌شود. دومین بخش، تلاش برای گسسته‌سازی مسایل موضعی با استفاده از اندازه مش مقیاس ظریف  $h$  را بیان می‌کند. حال الگوریتم تطبیقی زیر را بر پایه برآورد خطای (۸۴.۶)، بیان می‌کنیم:

## الگوریتم

۱. بدون در نظر گرفتن گره‌های درون  $\mathcal{F}$  شروع می‌کنیم.
۲. یک جواب  $U_c$  را با حل معادله (۱۷.۶) روی مش درشت، محاسبه می‌کنیم.
۳. برای هر  $i \in \mathcal{C}$ ، مانده را برای هر گره درشت و به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:  

$$R_i = \|HR(U_c)\|_{w_i}^2.$$
۴. برای هر  $i \in \mathcal{F}$ ، بخش اول از مسایل موضعی یعنی  $S_i = \|\sqrt{H}\Sigma(U_{f,i})\|_{\partial w_i}^2$  و بخش دوم یعنی  $W_i = \|hR_i(U_{f,i})\|_{w_i}^2$  را محاسبه می‌کنیم.
۵. برای مقادیر بزرگ  $R_i$ ،  $i$  را به  $\mathcal{F}$  اضافه می‌کنیم. برای مقادیر بزرگ در  $S_i$  یا  $W_i$  یا هر دو، یا شمار لایه‌ها را افزایش می‌دهیم و یا اندازه مش مقیاس ظریف را برای مساله موضعی  $i$ ، کاهش می‌دهیم. اگر به تحملی<sup>۲۱</sup> مطلوب رسیدیم، متوقف می‌شویم و در غیر این صورت به (۲) بر می‌گردیم.

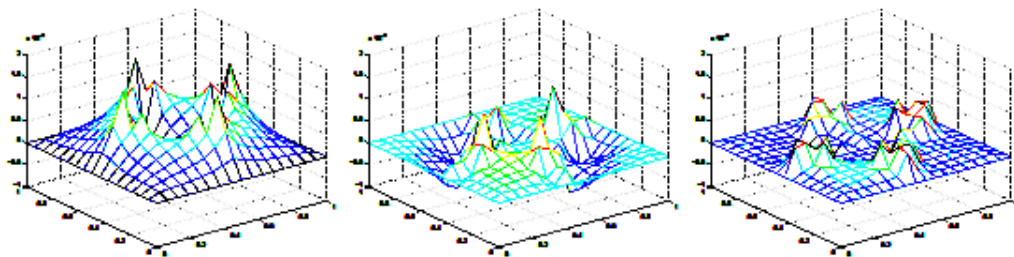
این ایده، با نظریف مش به صورت تطبیقی روی مقیاس درشت آغاز می‌شود که با استفاده از تکنیک‌های استاندارد، با ظریف و درشت نمودن، بدست می‌آید. زمانی که با استفاده از الگوریتم بالا شروع و مسایل موضعی را حل می‌کنیم، همیشه این امکان وجود دارد که از درشت نمودن در ناحیه‌هایی که جواب خیلی خوب دارند، استفاده کنیم. این کار را می‌توان با افزایش پارامتر مش موضعی  $h$  یا کاهش اندازه وصله  $L$ ، انجام داد که آن بر طبق شاخص‌های<sup>۲۲</sup>  $S_i$  و  $W_i$  انجام می‌گیرد.

## ۶.۶ مثال‌های عددی

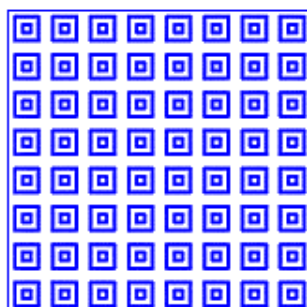
مساله مدل با تقریب قطعه‌وار خطی تعریف شده روی یک مش مثلثی یکنواخت را حل می‌کنیم. مثال ۱.۶.۶. در مثال اول فرض می‌کنیم که  $a = 1$ ،  $f = 1$  و  $\Omega$  به شکل مربعی واحد با شکافی به شکل بعلاوه، می‌باشد. جواب  $u$ ، روی مرز شامل شکاف، به طور الزامی صفر می‌باشد. مساله را با

<sup>۲۱</sup>Tolerance

<sup>۲۲</sup>Indicators



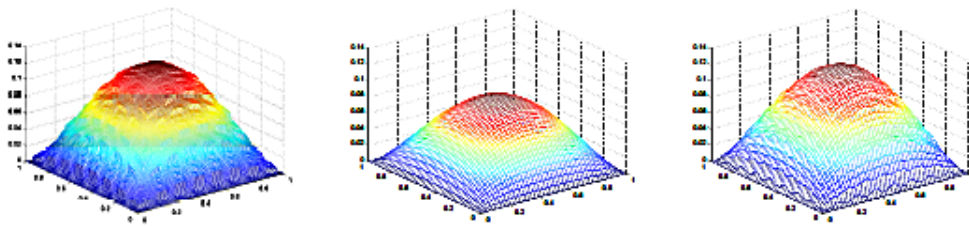
شکل ۲.۶: شکل سمت چپ خطای جواب گالرکین، شکل میانی خطا بعد از یک مرحله در الگوریتم تطبیقی و شکل سمت راست خطای بعد از دو مرحله در الگوریتم تطبیقی را نشان می‌دهد.



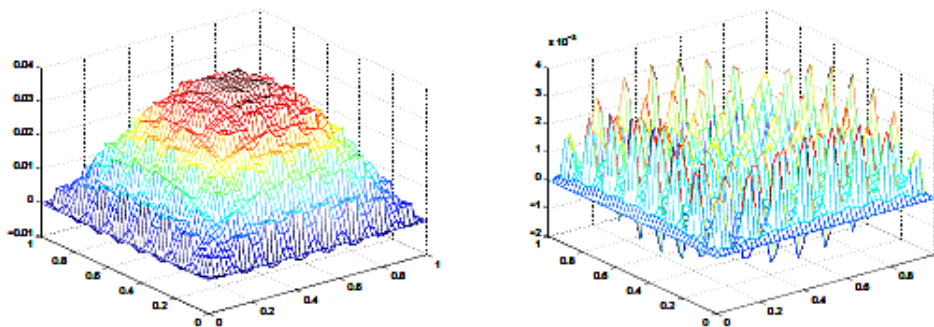
شکل ۳.۶: ضریب با مقادیر  $a = 1$  روی نواحی سفید و  $a = 0.05$  روی نواحی سیاه، ناپیوسته است.

استفاده از الگوریتم تطبیقی ارایه شده با یک سطح نظریف ۲۰٪ در هر تکرار، حل می‌کنیم. با یک نظریف و یک ستاره لایه‌ای برای مسایل موضعی، شروع می‌کنیم. بعد از تکرار دوم، مسایل موضعی بیشتری اضافه نمی‌شود اما تعداد لایه‌ها به دو افزایش می‌یابد. مشاهده می‌شود که الگوریتم، تصمیم به افزایش تعداد لایه‌ها برای همه گره‌های درشت، می‌گیرد. این نشان می‌دهد که مشتق نرمال  $U_{f,i}$ ، روی مرز وصله‌ها کوچک نیست. این به‌طور دقیق همان چیزی است که بدست می‌آوریم، اگر یک انتخاب خاص از  $U_{f,i}$  را با مرکز نزدیک به شکاف‌ها بررسی کنیم. کمک موضعی یک علامت ثابت دارد که یک خطای علامت‌دار ثابت در جواب گالرکین را نشان می‌دهد. در شکل (۲.۶)، خطای جواب گالرکین استاندارد و جواب‌های بعد از تکرار مرتبه اول و دوم الگوریتم تطبیقی را نسبت به جواب مرجع بررسی می‌کنیم. در هر سه شکل از مقیاسی یکسان استفاده شده است. جواب گالرکین خطای بزرگ در نقاط تکین دارد و خطا مثبت می‌باشد. می‌بینیم که مسایل موضعی، خطا را در هر تکرار کاهش می‌دهند.

مثال ۲.۶.۶. در این مثال، از یک شکل هندسی ساده مثل مربع واحد، استفاده می‌کنیم. اما ضریب  $a$  را به‌عنوان سرعت نوسان با دوره  $\varepsilon = \frac{1}{8}$  و با توجه به شکل (۳.۶)، در نظر می‌گیریم. ضخامت مربع‌های سیاه با  $a = 0.05$  برابر با  $\frac{1}{4\varepsilon}$  می‌باشد و این مقیاسی است که به‌منظور بدست آوردن یک تقریب خوب نیاز به حل آن، داریم. یک جواب مرجع روی فضای ظریف که در آن  $h = \frac{1}{144}$  می‌باشد، محاسبه می‌کنیم و آن را با گالرکین استاندارد بدست آمده با استفاده از مربع‌سازی روی



شکل ۴.۶: شکل سمت چپ جواب مرجع، شکل میانی گالرکین استاندارد روی مش درشت و شکل سمت راست جواب حاصل از مسایل موضعی با استفاده از دو ستاره لایه‌ای می‌باشد.



شکل ۵.۶: شکل سمت چپ خطای گالرکین استاندارد و شکل سمت راست خطای جواب حاصل از مسایل موضعی با دو ستاره لایه‌ای می‌باشد.

مش درشت  $H = \frac{1}{48}$ ، با حل و بدون حل مسایل موضعی، مقایسه می‌کنیم. می‌بینیم که گالرکین استاندارد روی یک مش درشت به شکلی بد برای این مساله انجام می‌شود (شکل ۴.۶) را ببینید) که البته این عجیب نیست. از معادله (۵۷.۶) می‌بینیم که اگر ویژگی‌های مقیاس ظریف حل شده نباشد تا زمانی که از گالرکین استفاده می‌کنیم، هیچ کنترلی از خطا نداریم. در این حالت  $H = \frac{1}{48}$  می‌باشد، اما ویژگی‌های مقیاس ظریف از اندازه  $\frac{1}{6}$  می‌باشند، هر چند که تاکنون دوره‌ای از تکرار  $\frac{1}{8}$  بوده‌است.

تقریب با استفاده از دو ستاره لایه‌ای محاسبه شده‌است. از سوی دیگر یک بهبود بسیار خوب از جواب را آرایه می‌دهد. در این جا، ویژگی‌های مقیاس ظریف حل شده هستند و خطا فقط به علت محدودیت به وصله‌ها می‌باشد. اندازه صحیح می‌باشد و اگر خطای بین این جواب و جواب مرجع را بررسی کنیم، خطایی ده برابر کوچک‌تر بدست می‌آوریم. شکل (۵.۶) را مشاهده کنید. مش درشت، هم‌تراز با نوسانات  $a$  می‌باشد. بنابراین، این جواب می‌تواند با حل تعداد بسیار کمی از مسایل موضعی کوچک و با صرف هزینه‌های بسیار کم، محاسبه شود.

همان‌طور که از قبل گفته شد، محاسبه یک ماتریس سختی اصلاح شده به جای استفاده از یک تقریب تکراری، در محیط دوره‌ای خیلی موثر می‌باشد. برای درک این روش جالب است بدانید که چطور این روش ماتریس سختی را اصلاح می‌کند. ما این کار را به وسیله، مطالعه طیفی از

نتایج ماتریس  $A + T$  برای شمار مختلفی از لایه‌ها انجام می‌دهیم. بیست تا از کم‌اهمیت‌ترین و پراهمیت‌ترین مقادیر ویژه<sup>۲۳</sup> را بررسی می‌کنیم. اولین چیزی که به آن توجه می‌کنیم این است که مقادیر ویژه  $A + T$  همیشه کوچکتر از مقادیر ویژه  $A$  می‌باشد که این امری طبیعی است، چون که گسسته‌سازی، مقادیر ویژه عملگر را افزایش می‌دهد. همچنین مشاهده می‌کنیم که پس از دو لایه، سازش خیلی خوب با طیف صحیحی که ما به منظور تقریب می‌خواهیم، بدست می‌آوریم. از مثال‌های عددی، نتیجه می‌گیریم که با استفاده از یک ستاره لایه‌ای، به‌طور تقریبی هیچ‌گاه نمی‌توان دقت به اندازه کافی خوبی بدست آورد اما دو ستاره لایه‌ای، جواب گالرکین را بسیار خوب بهبود می‌بخشد.

---

<sup>۲۳</sup>Eigenvalues



# فصل ۷

## روش‌های چندمقیاسی وردشی تطبیقی برپایه برآورد خطای پسین: تکنیک‌های دوگان برای مسایل بیضوی

### ۱.۷ مقدمه

در این فصل، یک تکنیک ساده برای تقریب عددی معادله مقیاس ظریف در روش چندمقیاسی، ارائه می‌دهیم. ایده اصلی این است که مانده مقیاس ظریف را با استفاده از یک افراز واحد، به کمک‌های موضعی تقسیم می‌کنیم و مسایل موضعی مجزای متناظر را روی وصله‌ها، با شرایط مرزی دیریکله همگن حل می‌کنیم. جواب مقیاس ظریف به وسیله مجموع  $U_f = \sum_i U_{f,i}$ ، تخمین زده می‌شود که در آن  $U_{f,i}$ ، جواب‌های مسایل موضعی می‌باشند. دقت  $U_f$  به اندازه مش مقیاس ظریف  $h$  و اندازه وصله‌ها، وابستگی دارد. توجه داریم که محاسبات مقیاس ظریف، به‌طور طبیعی موازی می‌باشد.

به منظور بهینه‌سازی کارایی، به دنبال ساخت الگوریتم تطبیقی برای کنترل خودکار اندازه مش درشت  $H$ ، اندازه مش ظریف  $h$  و اندازه وصله‌ها، هستیم. این الگوریتم بر پایه برآورد پسین از خطای  $e = u - U_c - U_f$ ، برای معادله پواسون با ضریب متغیر  $a$  می‌باشد:

$$(e, \psi) = \sum_{i \in \mathcal{C}} (\varphi_i R(U_c), \phi_f) + \sum_{i \in \mathcal{F}} ((\varphi_i R(U_c), \phi_f) - a(U_{f,i}, \phi_f)), \quad (1.7)$$

که در آن  $\psi \in H^{-1}(\Omega)$ ، یک توزیع داده شده می‌باشد.  $\mathcal{C}$  به گره‌هایی که مسایل غیر موضعی در آن حل شده و  $\mathcal{F}$  نیز به گره‌هایی که در آن مسایل موضعی حل شده‌است، اشاره دارد.  $U_c$  جواب مقیاس درشت می‌باشد و  $U = U_c + U_f$  است و  $R(U) = f + \nabla \cdot a \nabla U$ ، مانده می‌باشد.  $\{\varphi_i\}_{i \in \mathcal{C} \cup \mathcal{F}}$ ، توابع پایه‌ای درشت هستند و  $\phi_f$ ، بخش مقیاس ظریف از یک جواب دوگان منتج از  $\psi$  می‌باشد. اگر معادلات مقیاس ظریف حل نشده باشند، فقط عبارت اول در برآورد بدست می‌آید. عبارت دوم مربوط می‌شود به پارامتر مش مقیاس ظریف  $h$  با اندازه وصله  $w_i$ ، که در آن مسایل موضعی

حل شده هستند. در قضیه (۹.۳.۶)، برآوردی مشابه برای خطا در نورم انرژی، بدست آمده‌است. چارچوب به‌نسبت کلی است و می‌تواند به انواع دیگری از روش‌های چندمقیاسی، برای مثال بر اساس مسایل نویمن موضعی توسعه یابد. در این بخش، ابتدا مساله مدل را معرفی می‌کنیم و فرمول‌بندی چندمقیاسی وردشی از این مساله را انجام می‌دهیم. همچنین در مورد تقسیم فضاهای مقیاس درشت و ظریف بحث می‌کنیم. در بخش بعدی یک برآورد پسین از خطا ارائه می‌دهیم. این نتایج منجر به الگوریتم تطبیقی می‌شوند. در نهایت هم نتایج عددی را می‌آوریم.

## ۲.۷ روش چندمقیاسی وردشی

### ۱.۲.۷ مساله مدل

معادله پواسون را با ضریب بسیار نوسانی  $a^1$  و شرایط مرزی دیریکله مشابه، بررسی می‌کنیم. با توجه به رابطه (۴.۶)، داریم:

$$u \in H_0^1(\Omega) \text{ را به گونه‌ای بیابید که در رابطه}$$

$$-\nabla \cdot a \nabla u = f, \quad \text{in } \Omega, \quad (2.7)$$

صدق کند، که در آن  $\Omega$  یک دامنه چندضلعی در  $\mathcal{R}^d$  و  $d$  برابر با ۱، ۲ یا ۳ باشد و  $\Gamma$  می‌باشد و  $f \in L^2(\Omega)$  و  $a \in L^\infty(\Omega)$  است، به قسمی که:

$$a(x) \geq \alpha_0 > 0, \quad \forall x \in \Omega,$$

حال با توجه به رابطه (۶.۶)، فرم وردشی از (۲.۷)، به صورت زیر خوانده می‌شود:

$$u \in \mathcal{V} = H_0^1(\Omega) \text{ را به گونه‌ای بیابید که رابطه}$$

$$a(u, v) = (f, v), \quad \forall v \in \mathcal{V}, \quad (3.7)$$

با توجه به فرم دو خطی

$$a(u, v) = (a \nabla u, \nabla v), \quad \forall u, v \in \mathcal{V}, \quad (4.7)$$

برقرار باشد.

### ۲.۲.۷ روش چندمقیاسی وردشی

فرمول‌بندی چندمقیاسی وردشی را به کار می‌گیریم، یک مقیاس درشت و یک مقیاس ظریف را در مساله معرفی می‌کنیم. دو فضای  $\mathcal{V}_c \subset \mathcal{V}$  و  $\mathcal{V}_f \subset \mathcal{V}$  را انتخاب می‌کنیم، به قسمی که:

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_c \oplus \mathcal{V}_f, \quad (5.7)$$

<sup>1</sup>Highly Oscillating

سپس با اعمال در رابطه (۳.۷) داریم:

$u_c \in \mathcal{V}_c$  و  $u_f \in \mathcal{V}_f$  را به گونه‌ای بیابید که در رابطه

$$\begin{cases} a(u_c, v_c) + a(u_f, v_c) = (f, v_c), & \forall v_c \in \mathcal{V}_c, \\ a(u_c, v_f) + a(u_f, v_f) = (f, v_f), & \forall v_f \in \mathcal{V}_f, \end{cases} \quad (۶.۷)$$

صدق کند.

در نظر می‌گیریم  $R: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}'$ ، که نشان‌دهنده مانده تعریف شده به صورت زیر می‌باشد:

$$(R(v), w) = (f, w) - a(v, w), \quad \forall w \in \mathcal{V}, \quad (۷.۷)$$

بنابه رابطه (۷.۷)، معادله مقیاس ظریف به صورت زیر می‌شود:

$u_f \in \mathcal{V}_f$  را به گونه‌ای بیابید که رابطه

$$a(u_f, v_f) = (R(u_c), v_f), \quad \forall v_f \in \mathcal{V}_f, \quad (۸.۷)$$

برقرار باشد.

بنابراین جواب مقیاس ظریف منتج از مانده جواب مقیاس درشت می‌باشد. با در نظر گرفتن جواب  $u_f$  به صورت  $u_f = TR(u_c)$ ، برای بخش درشت مساله (۶.۷)، به مساله مقیاس درشت اصلاح شده می‌رسیم:

$$a(u_c, v_c) + a(TR(u_c), v_c) = (f, v_c), \quad \forall v_c \in \mathcal{V}_c, \quad (۹.۷)$$

که در آن عبارت دوم سمت چپ، برای تاثیرات مقیاس‌های ظریف روی مقیاس‌های درشت، محاسبه می‌شوند.

### ۳.۲.۷ روش چندمقیاسی وردشی برپایه مسایل دیریکله موضعی

یک افراز  $\mathcal{K} = \{K\}$  از دامنه  $\Omega$  روی عناصر با شکل منظم  $K$  و با قطر  $H_K$ ، معرفی می‌کنیم و  $\mathcal{N}$  را به عنوان مجموعه‌ای از گره‌ها در نظر می‌گیریم. علاوه بر این،  $\mathcal{V}_c$  را به عنوان فضایی از چندجمله‌ای‌های قطعه‌وار پیوسته از درجه  $p$ ، تعریف شده روی  $\mathcal{K}$  در نظر می‌گیریم. اکنون باید الگوریتمی بسازیم که معادله مقیاس ظریف را با یک مجموعه از مسایل مجزا، تخمین بزند.

شروع می‌کنیم با نوشتن  $u_f = \sum_{i \in \mathcal{N}} u_{f,i}$ ، که در این جا داریم:

$$a(u_{f,i}, v_f) = (\varphi_i R(u_c), v_f), \quad \forall v_f \in \mathcal{V}_f, \quad (۱۰.۷)$$

و مجموعه‌ای از توابع پایه‌ای لاگرانژ در  $\mathcal{V}_c$  می‌باشد. توجه داریم که  $\{\varphi_i\}_{i \in \mathcal{N}}$  یک افراز واحد، با محملی بر روی عناصر به اشتراک گذاشته شده گره  $i$  می‌باشد. به مجموعه‌ای از عناصر با یک گوشه در گره  $i$ ، یک مش ستاره‌ای در گره  $i$  گفته می‌شود و آن را با  $S_i^*$  مشخص می‌کنیم. بنابراین توابع  $u_{f,i}$  متناظر با اثرات مقیاس ظریف، به وسیله مانده موضعی  $\varphi_i R(u_c)$ ، ایجاد شده است. این بسط از  $u_f$  را در عبارت سمت راست از معادله مقیاس ظریف (۶.۷)، اعمال می‌کنیم و مساله زیر را بدست می‌آوریم:



$$u_f = \sum_{i \in \mathcal{N}} u_{f,i} \in \mathcal{V}_f \text{ و } u_c \in \mathcal{V}_c \text{ را به گونه‌ای بیابید که در رابطه}$$

$$\begin{cases} a(u_c, v_c) + a(u_f, v_c) = (f, v_c), & \forall v_c \in \mathcal{V}_c, \\ a(u_{f,i}, v_f) = (\varphi_i R(u_c), v_f), & \forall v_f \in \mathcal{V}_f, i \in \mathcal{N}, \end{cases} \quad (11.7)$$

صدق کند.

از واقعیت ساختار روش عناصر متناهی، برای حل مساله (۱۱.۷) به صورت تقریبی در دو گام، استفاده می‌شود.

• برای هر گروه درشت، یک وصله  $w_i$  تعریف می‌کنیم به قسمی که  $\text{supp}(\varphi_i) \subset w_i \subset \Omega$  باشد. مرز  $w_i$  را با  $\partial w_i$  مشخص می‌کنیم.

• روی این وصله‌ها، فضاهاى چندجمله‌ای قطعه‌وار  $\mathcal{V}_f^h(w_i)$  را با توجه به یک مش ظریف با تابع مش  $h = h(x)$ ، در نظر می‌گیریم که به عنوان یک تابع ثابت قطعه‌وار روی مش ظریف، تعریف می‌شوند. توابع در  $\mathcal{V}_f^h(w_i)$ ، روی مرز  $\partial w_i$  برابر با صفر هستند.

روش بدست آمده به صورت زیر خوانده می‌شود:

$$U_f = \sum_i^n U_{f,i} \text{ و } U_c \in \mathcal{V}_c \text{ که در آن } U_{f,i} \in \mathcal{V}_f^h(w_i) \text{، را به گونه‌ای بیابید که در رابطه}$$

$$\begin{cases} a(U_c, v_c) + a(U_f, v_c) = (f, v_c), & \forall v_c \in \mathcal{V}_c, \\ a(U_{f,i}, v_f) = (\varphi_i R(U_c), v_f), & \forall v_f \in \mathcal{V}_f^h(w_i), i \in \mathcal{N}, \end{cases} \quad (12.7)$$

صدق کند.

از آن جا که توابع در فضاهاى عناصر متناهی موضعی  $\mathcal{V}_f^h(w_i)$  روی مرز  $\partial w_i$  برابر با صفر هستند،  $U_f$  و در نتیجه  $U = U_c + U_f$ ، پیوسته خواهند بود.

**تذکر ۱.۲.۷.** برای مسایل با پدیده چندمقیاسی، لازم نیست که روی بخشی از دامنه، جواب مسایل موضعی برای همه گره‌های درشت موجود باشد. فرض می‌کنیم که  $C \subset \mathcal{N}$ ، به گره‌هایی که مسایل غیر موضعی در آن حل شده و  $\mathcal{F} \subset \mathcal{N}$ ، به گره‌هایی که مسایل موضعی در آن حل شده هستند، اشاره دارد. بدیهی است که  $C \cup \mathcal{F} = \mathcal{N}$  می‌باشد. برای  $i \in C$ ،  $U_{f,i}$  برابر با صفر می‌باشد.

**تذکر ۲.۲.۷.** در این روش انتخاب زیر دامنه‌های  $w_i$ ، بسیار مهم است. یک نماد برای مش ستاره‌ای با تعداد زیاد لایه از عناصر درشت به صورت بازگشتی به صورت زیر است. فرض می‌کنیم که  $S_1^i$  پوششی از توابع پایه‌ای لاگرانژ  $\varphi_i$  در گره  $i$  باشد. ستاره مش توسعه یافته به صورت زیر می‌باشد:

$$S_L^i = \cup_{x_j \in S_{L-1}^i} S_1^j,$$

برای  $L > 1$ ، که در آن  $\varphi_j(x_j) = 1$  می‌باشد و گره‌های روی مرز را نیز شامل می‌شوند. در این جا  $L$ ، تعداد لایه‌ها را مشخص می‌کند.

### ۴.۲.۷ زیرفضاها

انتخاب فضاهای مقیاس ظریف  $\mathcal{V}_f$ ، می‌تواند به روش‌های مختلف انجام شود. سه روش پایه‌ای موروثی یا  $HB$ <sup>۲</sup>، شرط مقدماتی  $BPX$ <sup>۳</sup> و روش پایه‌ای موروثی اصلاح‌شده با موج کوچک یا  $WHB$ <sup>۴</sup> را به اختصار بیان می‌کنیم. اما پیش از آرایه این سه روش، مقدماتی را در مورد این روش‌ها بیان می‌کنیم.

ابتدا  $S_j$  را به‌عنوان بازه‌ای از توابع پایه‌ای موروثی چندسطحی در نظر می‌گیریم. تعریف متوالی از فضاهای عناصر متناهی، دنباله‌ای تودرتو به‌صورت زیر تشکیل می‌دهند:

$$S_0 \subset S_1 \subset \dots \subset S_j \subset \dots \subset H_0^1(\Omega).$$

حال  $\mathcal{N}_j^f$  را در نظر می‌گیریم که گره‌های (ظریف) حاصل در یک مش تعریف شده موضعی را مشخص می‌کند. سپس تجزیه در سطح  $j$ ، به‌طور طبیعی به‌صورت زیر می‌شود:

$$\mathcal{N}_j = \mathcal{N}_{j-1} \cup \mathcal{N}_j^f. \quad (13.7)$$

نکته کلیدی، انعکاس مرتب‌سازی موروثی گره‌های (۱۳.۷) در توابع پایه‌ای گره‌ای متناظر می‌باشد. در نتیجه یک تقسیم موروثی را بدست می‌آوریم:

$$S_j = S_{j-1} \oplus S_j^f,$$

که در آن  $S_j^f$  را فضای برش می‌نامند. در نظر داریم که فضای برش  $S_j^f$  به‌عنوان مکمل  $S_{j-1}$  انتخاب شده‌است. یعنی داریم:

$$S_j^f = (\pi_j - \pi_{j-1})S_j,$$

که در آن  $\pi_j : L_2 \rightarrow S_j$ ، یک عملگر خطی با سه ویژگی زیر می‌باشد:

$$\pi_j|_{S_j} = I,$$

$$\pi_j \pi_k = \pi_{\min\{j, k\}},$$

$$\|(\pi_j - \pi_{j-1})u^{(j)}\|_{L_2} \simeq \|u^{(j)}\|_{L_2}, \quad u^{(j)} \in (I_j - I_{j-1})S_j,$$

که در آن  $I_j : L_2(\Omega) \rightarrow S_j$ ، مشخص‌کننده عملگر درونیابی عنصر متناهی می‌باشد. حال فرض می‌کنیم که  $Q_j : L_2(\Omega) \rightarrow S_j$ ، نگاشت  $L_2$  را مشخص می‌کند. قصد داریم که این چارچوب را به‌وسیله انتخاب  $\pi_j$  برابر با  $I_j$  و  $Q_j$ ، روی مثال‌های مختلف، به‌کار ببریم که به‌ترتیب به شرط مقدماتی  $HB$  و  $BPX$  منجر خواهد شد.

شرط مقدماتی  $WHB$ ، از برخی جهات بهتر از دو روش دیگر است، در حالی که عدد شرطی شرط مقدماتی  $HB$ ، با قرار دادن  $Q_j$  در تعریف  $\pi_j$ ، پایدار است و به نوعی استفاده از عملگرهای  $I_j - I_{j-1}$  در همان زمان، بهینگی محاسبات و هزینه ذخیره‌سازی در هر تکرار را تضمین می‌کند.

<sup>۲</sup>Hierarchical Basis

<sup>۳</sup>Bramble-Pasciak-Xu Preconditioner

<sup>۴</sup>Wavelet Modified Hierarchical Basis

عملگرهایی که در عین حال، پاسخگوی هر دو هدف می‌باشند، به صورت زیر هستند:

$$W_k = \prod_{j=1}^{k-1} I_j + Q_j^a(I_{j+1} - I_j), \quad (14.7)$$

همراه با  $W_j = I$ . در این نگاشت دقیق  $L_2$ ، به وسیله یک تقریب عملی محاسباتی،  $Q_j^a$  جایگزین شده است، به صورت زیر:

$$Q_j^a : L_2 \rightarrow S_j.$$

در نهایت فضای برش  $S_j^f$  را برای هر سه روش  $HB$ ،  $BPX$  و  $WHB$  در نظر می‌گیریم:

$$HB : S_j^f = (I_j - I_{j-1})S_j, \quad (15.7)$$

$$BPX : S_j^f = (Q_j - Q_{j-1})S_j, \quad (16.7)$$

$$WHB : S_j^f = (W_j - W_{j-1})S_j = (I - Q_{j-1}^a)(I - I_{j-1})S_j. \quad (17.7)$$

اگر تابع پایه‌ای موروثی را با  $\varphi_{HB}$  و تابع پایه‌ای موروثی اصلاح شده با موج کوچک را با  $\varphi_{WHB}$  نمایش دهیم، آنگاه با در نظر گرفتن روابط (15.7) و (17.7) داریم:

$$\varphi_{WHB} = (I - Q_{j-1}^a)\varphi_{HB}. \quad (18.7)$$

مطالب مقدماتی فوق برگرفته از منبع [۱] می‌باشد. حال به اختصار این سه روش را بیان می‌کنیم؛

### روش پایه‌ای موروثی

این روش، اولین و شاید ساده‌ترین تقریب برای  $\mathcal{V}_f$  است. فرض می‌کنیم که  $\mathcal{V}_f$  به صورت زیر باشد:

$$\mathcal{V}_f = \{v \in \mathcal{V} : v(x_j) = 0, j = \mathcal{N}\},$$

که در آن  $\{x_i\}_{i \in \mathcal{N}}$ ، گره‌های مش درشت می‌باشند. وقتی که  $\mathcal{V}_f$ ، توسط چندجمله‌ای‌های قطعه‌وار استاندارد روی مش ظریف گسسته‌سازی می‌شود، بدان معناست که توابع پایه‌ای برای مقیاس ظریف، محمولی روی ستاره‌های مقیاس ظریف خواهند داشت.

### شرط مقدماتی $BPX$

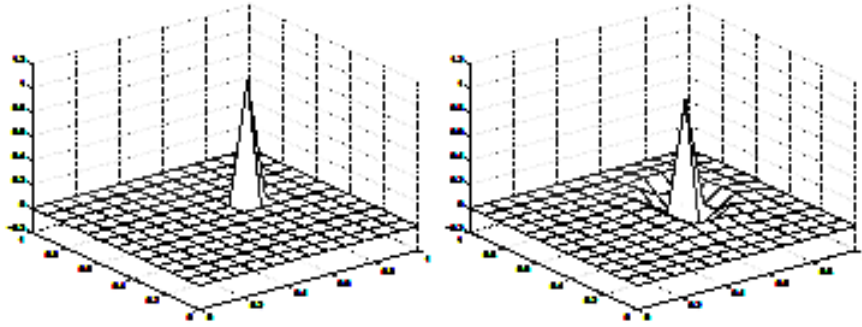
این روش دومین تقریب برای  $\mathcal{V}_f$  می‌باشد که از تعامد  $L^2(\Omega)$  با  $\mathcal{V}_c$  استفاده می‌کند. در این حالت محمولی کلی برای توابع پایه‌ای مقیاس ظریف داریم اما به سرعت خارج از مش ستاره‌ای ظریف تجزیه می‌شود.

### روش پایه‌ای موروثی اصلاح شده با موج کوچک

سومین روش ترکیبی از دو روش گفته شده می‌باشد. در این روش، فضای مقیاس ظریف  $\mathcal{V}_f$ ، به عنوان یک تقریب برای نسخه متعامد  $L^2(\Omega)$  از روش پایه‌ای موروثی، تعریف می‌شود. در نظر داریم که

$Q_c^a v \in \mathcal{V}_c$ ، یک جواب تقریبی (تعداد اندکی از تکرارهای ژاکوبی) برای

$$(Q_c^a v, w) = (v, w), \quad \forall w \in \mathcal{V}_c, \quad (19.7)$$



شکل ۱.۷: شکل سمت چپ، تابع  $HB$  و شکل سمت راست، تابع  $WHB$  با دو تکرار ژاکوبی می باشد.

می باشد و تابع موروثی اصلاح شده با موج کوچک مرتبط با تابع پایه ای موروثی  $\varphi_{HB}$  را بنابه (۱۸.۷)، به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\varphi_{WHB} = (I - Q_c^a)\varphi_{HB}, \quad (20.7)$$

شکل (۱.۷) را مشاهده کنید. در این فصل روی روش  $WHB$ ، متمرکز می شویم.

## ۳.۷ برآورد خطای پسین

### ۱.۳.۷ مساله دوگان

برآورد پسینی از خطا را در یک تابع خطی داده شده  $(e, \psi)$  همراه با  $e = u - U$  و  $\psi \in H^{-1}(\Omega)$  به عنوان یک وزن داده شده، نتیجه می گیریم. مساله دوگان را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$\phi \in \mathcal{V}$  را به گونه ای بیابید که در رابطه

$$a(v, \phi) = (v, \psi), \quad \forall v \in \mathcal{V}, \quad (21.7)$$

صدق کند.

در روش چندمقیاسی وردشی تطبیقی، این فرآیند به صورت زیر تعریف می شود:

$\phi_c \in \mathcal{V}_c$  و  $\phi_f \in \mathcal{V}_f$  را به گونه ای بیابید که رابطه

$$\begin{cases} a(v_c, \phi_c) + a(v_c, \phi_f) = (v_c, \psi), & \forall v_c \in \mathcal{V}_c, \\ a(v_f, \phi_f) + a(v_f, \phi_c) = (v_f, \psi), & \forall v_f \in \mathcal{V}_f, \end{cases} \quad (22.7)$$

برقرار باشد.

### ۲.۳.۷ فرمول نمایش خطا

حال یک فرمول نمایش خطا<sup>۵</sup> از روش عناصر متناهی (۱۲.۷)، نتیجه می گیریم که شامل هر دو خطای مقیاس درشت  $e_c = u_c - U_c$  و خطای مقیاس ظریف  $e_f = \sum_{i \in \mathcal{N}} (u_{f,i} - U_{f,i})$  می باشد.

<sup>۵</sup>Error Representation Formula

با استفاده از مساله دوگان (۲۲.۷)، یک برآورد خطای پسین را برای یک تابع خطی از خطای  $e = e_c + e_f$ ، نتیجه می‌گیریم. اگر بخش درشت معادله (۱۲.۷) را از بخش درشت معادله (۱۱.۷) کم کنیم، تعامد گالرکین حاصل می‌شود:

$$a(u_c - U_c, v_c) + a(u_f - U_f, v_c) = (f, v_c) - (f, v_c), \quad \forall v_c \in \mathcal{V}_c,$$

در نتیجه داریم:

$$a(e_c, v_c) + a(e_f, v_c) = 0, \quad \forall v_c \in \mathcal{V}_c. \quad (23.7)$$

با همین استدلال روی معادله مقیاس ظریف برای  $i \in \mathcal{F}$ ، داریم:

$$a(u_{f,i} - U_{f,i}, v_f) = (\varphi_i R(u_c) - \varphi_i R(U_c), v_f),$$

در نتیجه داریم:

$$a(e_{f,i}, v_f) = (\varphi_i (R(u_c) - R(U_c)), v_f),$$

چون که  $R$  خطی است، پس داریم:

$$a(e_{f,i}, v_f) = (\varphi_i (R(u_c - U_c)), v_f) = (\varphi_i (R(e_c)), v_f) = (R(e_c), \varphi_i v_f), \quad (24.7)$$

با توجه به تعریف (۸.۶)، داریم:

$$(R(e_c), \varphi_i v_f) = (f, \varphi_i v_f) - a(e_c, \varphi_i v_f), \quad (25.7)$$

با در نظر گرفتن روابط (۲۴.۷) و (۲۵.۷) داریم:

$$a(e_{f,i}, v_f) = (f, \varphi_i v_f) - a(e_c, \varphi_i v_f), \quad (26.7)$$

از آن جا که  $(f, \varphi_i v_f) = 0$  می‌باشد، از رابطه (۲۶.۷) داریم:

$$a(e_{f,i}, v_f) = -a(e_c, \varphi_i v_f), \quad v_f \in \mathcal{V}_f^h(w_1). \quad (27.7)$$

حال آماده برای شرح یک فرمول نمایش خطا هستیم.

قضیه ۱.۳.۷. اگر  $\psi \in H^{-1}(\Omega)$  باشد، آنگاه داریم:

$$(e, \psi) = \sum_{i \in \mathcal{C}} (\varphi_i R(U_c), \phi_f) + \sum_{i \in \mathcal{F}} ((\varphi_i R(U_c), \phi_f) - a(U_{f,i}, \phi_f)). \quad (28.7)$$

برهان. با تعریف مساله دوگان شروع می‌کنیم و با در نظر گرفتن  $v = e = u - U_c - U_f$ ، داریم:

$$\begin{aligned} (e, \psi) &= a(e, \phi) \\ &= a(e, \phi_f + \phi_c) \\ &= a(e, \phi_f) + a(e, \phi_c), \end{aligned} \quad (29.7)$$

حال رابطه (۲۳.۷) را در نظر می‌گیریم:

$$a(e_c, v_c) + a(e_f, v_c) = 0, \quad \forall v_c \in \mathcal{V}_c, \quad (30.7)$$

از رابطه (۳۰.۷) داریم:

$$a(e, v_c) = 0, \quad \forall v_c \in \mathcal{V}_c, \quad (31.7)$$

از آنجا که  $\phi_c \in \mathcal{V}_c$ ، با توجه به رابطه (۳۱.۷) داریم:

$$a(e, \phi_c) = 0, \quad (32.7)$$

حال با قرار دادن رابطه (۳۲.۷) در (۲۹.۷) داریم:

$$\begin{aligned} (e, \psi) &= a(e, \phi_f) \\ &= a(u - U_c - U_f, \phi_f) \\ &= a(u - U_c, \phi_f) - a(U_f, \phi_f) \\ &= (R(U_c), \phi_f) - a(U_f, \phi_f) \\ &= (R(U_c), \phi_f) - \sum_{i \in \mathcal{F}} a(U_{f,i}, \phi_f) \\ &= \sum_{i \in \mathcal{C}} (\varphi_i R(U_c), \phi_f) + \sum_{i \in \mathcal{F}} (\varphi_i R(U_c), \phi_f) - \sum_{i \in \mathcal{F}} a(U_{f,i}, \phi_f) \\ &= \sum_{i \in \mathcal{C}} (\varphi_i R(U_c), \phi_f) + \sum_{i \in \mathcal{F}} ((\varphi_i R(U_c), \phi_f) - a(U_{f,i}, \phi_f)). \end{aligned}$$

□

پس قضیه اثبات شد.

اثبات این قضیه برگرفته از [۷] می باشد.

ابتدا بخش مقیاس ظریف از معادله (۱۲.۷) را در نظر می گیریم:

$$a(U_{f,i}, v_f) = (\varphi_i R(U_c), v_f), \quad \forall v_f \in \mathcal{V}_f^h(w_i), \quad i \in \mathcal{N}, \quad (33.7)$$

از رابطه (۳۳.۷) داریم:

$$a(U_{f,i}, v_f) - (\varphi_i R(U_c), v_f) = 0, \quad \forall v_f \in \mathcal{V}_f^h(w_i), \quad i \in \mathcal{N}, \quad (34.7)$$

پس از رابطه (۳۴.۷) داریم:

$$\sum_{i \in \mathcal{F}} a(U_{f,i}, v_{f,i}^h) - \sum_{i \in \mathcal{F}} (\varphi_i R(U_c), v_{f,i}^h) = 0, \quad \forall v_{f,i}^h \in \mathcal{V}_f^h(w_i), \quad i \in \mathcal{N}, \quad (35.7)$$

حال توابع  $v_{f,i}^h \in \mathcal{V}_f^h(w_i)$  و  $\phi_f \in \mathcal{V}_f^h(w_i)$  را در نظر می گیریم که در آن  $i \in \mathcal{F}$  می باشد. با توجه به رابطه (۳۵.۷)، معادله (۲۸.۷) به صورت زیر می شود:

$$\begin{aligned} (e, \psi) &= \sum_{i \in \mathcal{C}} (\varphi_i R(U_c), \phi_f) + \sum_{i \in \mathcal{F}} (\varphi_i R(U_c), \phi_f) - \sum_{i \in \mathcal{F}} a(U_{f,i}, \phi_f) \\ &\quad + \sum_{i \in \mathcal{F}} a(U_{f,i}, v_{f,i}^h) - \sum_{i \in \mathcal{F}} (\varphi_i R(U_c), v_{f,i}^h) \\ &= \sum_{i \in \mathcal{C}} (\varphi_i R(U_c), \phi_f) + \sum_{i \in \mathcal{F}} (\varphi_i R(U_c), \phi_f - v_{f,i}^h) - \sum_{i \in \mathcal{F}} a(U_{f,i}, \phi_f - v_{f,i}^h), \quad (36.7) \end{aligned}$$

برای مثال،  $v_{f,i}^h = \pi_{h,i} \phi_f$  را انتخاب می کنیم که در آن  $\pi_{h,i} \phi_f$ ، درونیابی اسکات ژانگ می باشد.

حال با توجه به رابطه (۳۶.۷) داریم:

$$(e, \psi) = \sum_{i \in \mathcal{C}} (\varphi_i R(U_c), \phi_f) + \sum_{i \in \mathcal{F}} ((\varphi_i R(U_c), \phi_f - \pi_{h,i} \phi_f) - a(U_{f,i}, \phi_f - \pi_{h,i} \phi_f)). \quad (37.7)$$

تذکر ۲.۳.۷. از آنجا که حل مساله دوگان (۲۲.۷)، به اندازه مساله اولیه دشوار است، نیاز به حل عددی به‌طور معمول می‌باشد. حل مساله دوگان با دقت مشابه به مساله اولیه، به دلیل تعامد گالرکین کافی نخواهد بود. به‌هرحال در این زمینه همه چیز کمی متفاوت است. محاسبه  $\phi_f$  با حداقل تقریب (یک بار)، روی مسایل موضعی برای  $i \in \mathcal{N}$  در یک خطای  $(e, \psi)$  برابر با صفر نمی‌شود. چیزی که مهم است، فقط ذخیره بخشی از  $\phi_f$  با محملی روی  $w_i$  می‌باشد، زمانی که عبارت  $i$  را در مجموعی از معادلات (۲۸.۷)، محاسبه می‌کنیم. تمام توابع  $\phi_f$ ، به‌سختی می‌توانند در حافظه کامپیوتر ذخیره شوند.

## ۴.۷ الگوریتم تطبیقی

از فرمول نمایش خطا در قضیه (۱.۳.۷)، برای ساخت الگوریتم تطبیقی استفاده می‌کنیم. عبارت زیر را به یاد می‌آوریم:

$$(e, \psi) = \sum_{i \in \mathcal{C}} (\varphi_i R(U_c), \phi_f) + \sum_{i \in \mathcal{F}} ((\varphi_i R(U_c), \phi_f) - a(U_{f,i}, \phi_f)), \quad (38.7)$$

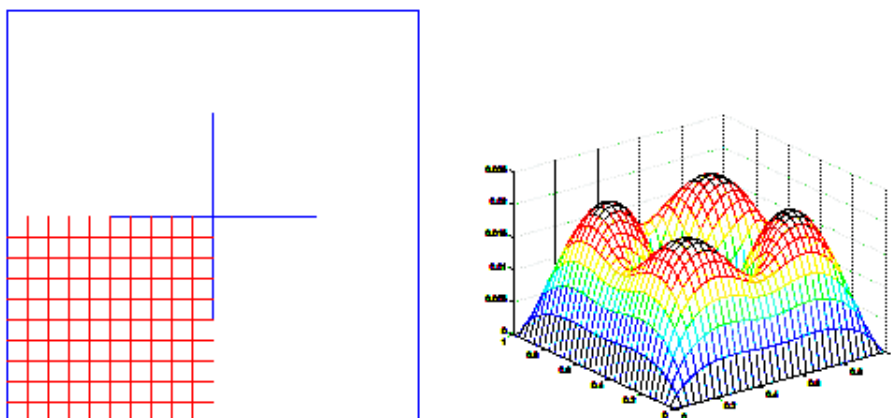
مجموع اول از فرمول نمایش خطا، بسیار مشابه به آن چیزی است که با استفاده از گالرکین استاندارد روی مش درشت، بدست می‌آید. تابع  $\phi_f = \phi - \phi_c$ ، که هم‌ارز با  $H \nabla \phi$  می‌باشد، به‌طور دقیق همان چیزی است که ما انتظار داریم. برای مجموع دوم، یک تعامد اضافی داریم. برای مثال، معادله (۳۷.۷) را در نظر می‌گیریم. اگر  $w_i = \Omega$  باشد، آنگاه داریم:

$$\phi_f - \pi_{h,i} \phi_f \sim h \nabla \phi,$$

برای مثال، همگرایی مقیاس ظریف را بدست می‌آوریم، اما در عمل وصله‌ها بسیار کوچک‌تر هستند. بنابراین در نهایت، در فضایی بین  $h$  و  $H$ ، همگرایی داریم. خلاصه این مبحث این‌که سه پارامتر مورد توجه که نیاز است در یک الگوریتم تطبیقی در نظر گرفته شوند، عبارتند از  $h$ ،  $H$  و اندازه وصله‌ها.

## الگوریتم تطبیقی

۱. بدون در نظر گرفتن گره‌های درون  $\mathcal{F}$  شروع می‌کنیم.
۲. به‌وسیله حل معادله (۱۲.۷)،  $U_c$  اولیه را محاسبه می‌کنیم.
۳. جواب دوگان  $\phi_f$  را به‌صورت موضعی و با دقت کم برای همه گره‌های درشت محاسبه می‌کنیم. (با اشاره به گره‌های صحیح برای محاسبات موضعی، نیازی نیست که  $\phi_f$  با دقت بسیار بالا حل شود.)
۴. کمک‌های خطای  $C_i = (\varphi_i R(U_c), \phi_f)$  را برای هر گره درشت که در آن مسایل مقیاس غیر ظریف حل شده‌اند و کمک‌های موضعی  $F_i = ((\varphi_i R(U_c), \phi_f) - a(U_{f,i}, \phi_f))$  را برای گره‌هایی که در آن مسایل مقیاس ظریف حل شده‌اند، محاسبه می‌کنیم.



شکل ۲.۷: سمت چپ، شکل هندسی و سمت راست، جواب مرجع روی این شکل هندسی می‌باشد.

۵. برای مقادیر بزرگ در  $C_i$ ، مسایل موضعی بیشتری را حل می‌کنیم و برای مقادیر بزرگ در  $F_i$ ، یا تعداد لایه‌ها را افزایش می‌دهیم و یا اندازه مش مقیاس ظریف  $h$  را برای مساله موضعی  $i$ ، کاهش می‌دهیم. اگر تحمل مطلوب حاصل شد متوقف می‌شویم و در غیر این صورت به (۲) می‌رویم.

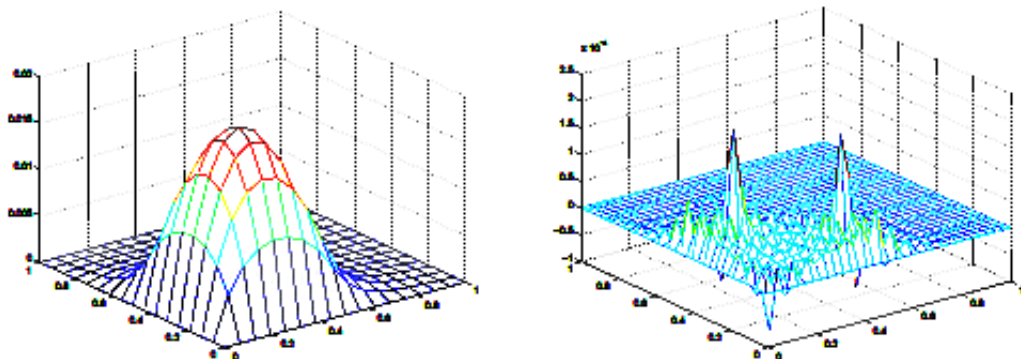
## ۵.۷ مثال‌های عددی

مسایل مدل دوبعدی را با توابع پایه‌ای خطی تعریف‌شده روی یک مش مثلثی یکنواخت، حل می‌کنیم.

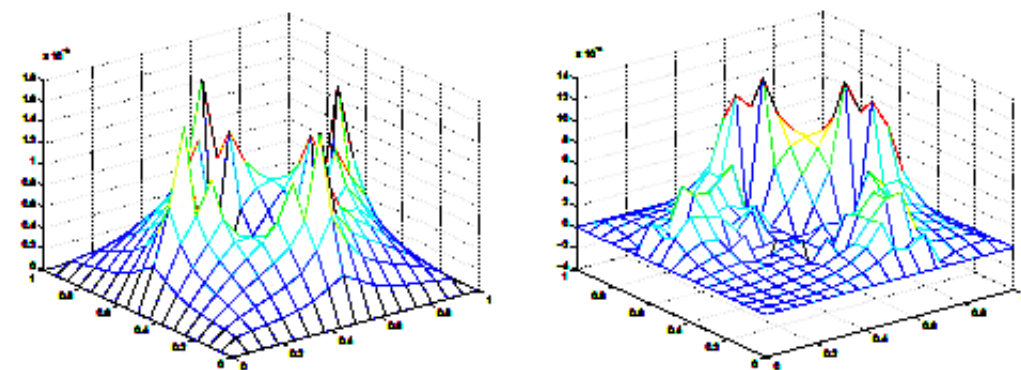
مثال ۱.۵.۷. در این مثال، نشان می‌دهیم که چطور می‌توان در مساله دوگان  $\psi$ ، دقتی بسیار بهبودیافته در بخشی از دامنه با انتخاب بار برابر با تابع شاخص برای این دامنه، بدست آورد. مربعی واحد با یک شکاف به شکل یک علامت بعلاوه، که در آن جواب به‌طور الزامی صفر می‌باشد، در نظر می‌گیریم. شکل (۲.۷) (سمت چپ) را مشاهده کنید. فرض می‌کنیم که  $\psi$  در ربع پایینی سمت چپ که در شکل (۲.۷) (سمت چپ) به‌صورت شبکه‌ای باریک مشخص شده است، برابر با یک و در بقیه دامنه برابر با صفر باشد. در شکل (۲.۷) (سمت راست)، جواب مرجع معادله پواسون همراه با  $a = f = 1$  و شرایط مرزی دیریکله همگن روی این شکل هندسی، مشاهده می‌شود. ایده استفاده از الگوریتم تطبیقی می‌باشد، با انتخاب آن نواحی که نیاز به حل با دقت بالا دارد. در شکل (۳.۷)، جواب دوگان با انتخاب  $\psi$  توصیف‌شده در بالا در سمت چپ و بخش مقیاس ظریف از جواب دوگان در سمت راست، رسم شده است. بعد از دو تکرار در الگوریتم تطبیقی، به‌وضوح می‌بینیم که مسایل موضعی، فقط گره‌هایی در گوشه پایین سمت چپ دارند. در الگوریتم تطبیقی، بعد از دو تکرار، بهبود در جواب به‌وضوح دیده می‌شود. در شکل (۴.۷)، جواب گالرکین استاندارد و جواب روش چندمقیاسی وردشی تطبیقی را با جواب مرجع مقایسه می‌کنیم. مشاهده می‌شود که خطا در ربع پایینی سمت چپ، خیلی کوچک‌تر از خطای گالرکین استاندارد است، اما در بقیه



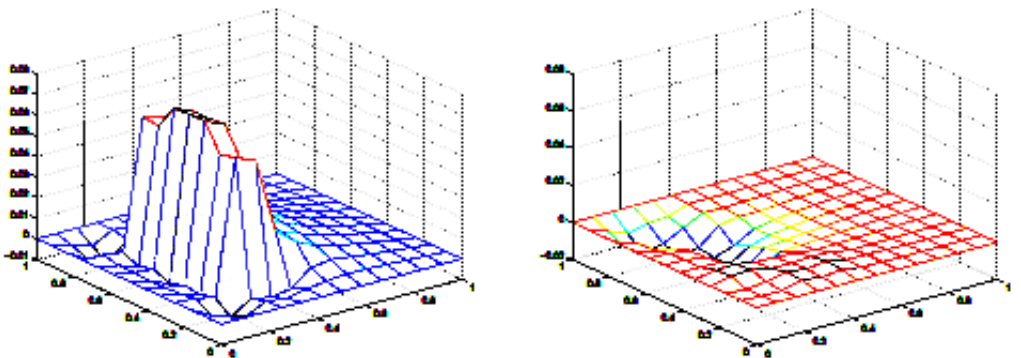
دامنه، خطای چندمقیاسی وردشی تطبیقی بسیار شبیه به خطای گالرکین استاندارد می‌باشد.



شکل ۳.۷: شکل سمت چپ، جواب دوگان و شکل سمت راست بخش مقیاس ظریف از جواب دوگان محاسبه شده با  $\psi = I_{\{0 \leq x, y \leq 0.5\}}$  می‌باشد.



شکل ۴.۷: شکل سمت چپ، خطای گالرکین و شکل سمت راست، خطای روش چندمقیاسی وردشی تطبیقی می‌باشد.



شکل ۵.۷: شکل سمت چپ، خطای گالرکین استاندارد و شکل سمت راست، خطای تطبیقی می‌باشد.

مثال ۲.۵.۷. در مثال بعدی، توجه شما را به یک مساله مدل با ضریب نوسانی در بخشی از دامنه، جلب می‌کنیم. در این مثال انتخاب می‌کنیم  $f = \psi = 1$ ، که موجب برابری اولیه و دوگان می‌شود. در مثال اول، می‌خواستیم یک بخش معین از دامنه را نظریف کنیم، لذا  $\psi$  را به منظور انجام این کار، انتخاب کردیم. در این جا دقت خوب را در کل دامنه می‌خواهیم و الگوریتم تطبیقی را انتخاب می‌کنیم تا به‌طور خودکار عمل نظریف را انجام دهد. دوباره گالرکین استاندارد و جوابمان را با یک جواب مرجع محاسبه شده روی یک مش ظریف‌تر، مقایسه می‌کنیم. این نتیجه در شکل (۵.۷)، مشاهده می‌شود. دوباره یک بهبود خوب در مقایسه با خطای گالرکین استاندارد مشاهده می‌کنیم. انتخاب  $\psi = 1$ ، کنترل میانگین خطا در طول دامنه را نشان می‌دهد.



## مراجع

- [1] B. Aksoylu, and M. Holst *An odyssey into local refinement and multiscale precondition II: stabilizing hierarchical basic methods*, SIAM J. Number. Anal. 2002. in review.
- [2] C. Carstensen, Merging the Bramble- pasciak-steinbach and the Crouzeix- Thomee, *Criterion for the  $H^1$ - stability of the  $L_\gamma$ - projection on to finite element spaces*, Math. Comp. 71, 237, 157-163, 2002.
- [3] C.Johnson, *Numerical solution of partial differential equations by the finite element method*, Studentlitteratur, 1987.
- [4] Doina Cioranescu and Patrizia Donato, *An introduction to Homogenization*, Oxford University Press, New York, 1999.
- [5] Grigorios A. Pavliotis and Andrew M. Stuart, *Multiscale Methods, Averaging and Homogenization*, Springer, 2008.
- [6] K. Eriksson, D. Estep, P. Hansbo and C. Johnson, *Computational Differential Equations*, Studentlitteratur, 1996.
- [7] Mats G. Larson and Axel Malqvist, *Adaptive Variational Multiscale Methods Based on A Posteriori Error Estimation: Duality Techniques for Elliptic Problems*, Lecture notes in: Computational Science and Engineering. B. Enquist, P. Lstedt, O. Runborg(eds.) Vol. 44, 181-193, 2005.
- [8] Mats G. Larson and Axel Malqvist, *Adaptive Variational Multiscale Methods Based on A Posteriori Error Estimation: Energy Norm Estimates for Elliptic Problems*, Submitted, 2005.
- [9] Mats G. Larson and Axel Malqvist, *Goal oriented adaptivity for coupled flow and transport problems with applications in oil reservoir simulations*, 2007.
- [10] M. Crouzeix and V. Thomee, *The Stability in  $L_p$  and  $W_p^1$  of the  $L_\gamma$ -Projection on to Finite Element Function Spaces*, Mathematics of Computation, 48, 178, 521-532, 1987.

- 
- [11] S. C. Brenner and L. R. Scott, *The mathematical theory of finite element methods*, Springer Verlag, 1994.
- [12] S. Larsson, and V. Thomee, *Partial differential equations with numerical methods*, Springer Verlag, 2005.
- [13] T. Y. Hou and X. H. Wu and Z. Cai, *Convergence of a multiscale finite element method for elliptic problems with rapidly oscillating coefficients*, Math, Comp, 68, 227, 913-943, 1999.
- [14] W. Bangerth and R. Rannacher, *Adaptive finite element methods for differential equations*, Birkhauser, 2003.

# واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Trace	اثر
Derivation	اشتقاق
Maximum Principle	اصل ماکزیمم
Partition of Unity	افراز واحد
Diffusivity	انتشار
Load	بار
Split	بخش
A Posteriori Error Estimate	برآورد خطای پسین
A Priori Error Estimate	برآورد خطای پیشین
Expansions	بسط
Weakly	به‌طور ضعیف
Strongly	به‌طور قوی
Test Function	تابع آزمون
Oscillating Function	تابع نوسانی
Tolerance	تحمل
Aligned	تراز
Adaptive	تطبیق
Refine	تظریف
Extra Orthogonality	تعامل اضافی
Galerkin Orthogonality	تعامل گالرکین
Separation	جداسازی
Mass	جرم
Pairing	جفت کردن
Unit Torus	چنبره واحد
Continuous Piecewise Polynomial	چندجمله‌ای قطعه‌وار پیوسته

Polygonal	چندضلعی
Well Posed	خوش وضع
Coarse	درشت
Periodic	دوره‌ای
Multiscale Method	روش چندمقیاسی
Finite Element Method	روش عناصر متناهی
Simplified	ساده شده
Stiffness	سختی
Indicator	شاخص
Solvability Condition	شرط حل پذیری
Preconditioner	شرط مقدماتی
Crack	شکاف
Explicit	صریح
Fine	ظریف
Elliptic Operators	عملگرهای بیضوی
Nondivergence	غیرواگرایی
Bilinear Form	فرم دوخطی
Weak Form	فرم ضعیف
Slice Space	فضای برش
Contributions Localized	کمک‌های موضعی
Time Steps	گام‌های زمان
Node	گره
Discretizing	گسسته‌سازی
Residual	مانده
Asymptotic	مجانبی
Decoupled	معجزا
Support	محمل
Quadrature	مربع‌سازی
Refrence	مرجع
Dual Problem	مساله دوگان
Cell Problem	مساله سلولی
Path	مسیر

Mesh Star	مش ستاره‌ای
Partial Differential Equations	معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی
Ordinary Differential Equations	معادله دیفرانسیل معمولی
Positive Definite	معین مثبت
Eigenvalues	مقادیر ویژه
Layered Materials	مواد لایه‌ای
Effective	موثر
Wavelet	موج کوچک
Hierarchical	موروثی
Corrector Field	میدان اصلاح‌گر
Representation	نمایش
Semi Norm	نیم‌نورم
Divergence	واگرایی
Variational	وردشی
Patches	وصله‌ها
Homogeneous	همگن



# واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Adaptive	تطبیق
Aligned	تراز
A Posteriori Error Estimate	برآورد خطای پسین
A Priori Error Estimate	برآورد خطای پیشین
Asymptotic	مجانمی
Bilinear Form	فرم دوخطی
Cell Problem	مساله سلولی
Coarse	درشت
Continuous Piecewise Polynomial	چندجمله‌ای قطعه‌وار پیوسته
Contributions Localized	کمک‌های موضعی
Corrector Field	میدان اصلاح‌گر
Crack	شکاف
Decoupled	مجزا
Derivation	اشتقاق
Diffusivity	انتشار
Discretizing	گسسته‌سازی
Divergence	واگرایی
Dual Problem	مساله دوگان
Effective	موثر
Eigenvalues	مقادیر ویژه
Elliptic Operators	عملگرهای بیضوی
Expansions	بسط
Explicit	صریح
Extra Orthogonality	تعامد اضافی
Fine	ظریف

Finite Element Method	روش عناصر متناهی
Galerkin Orthogonality	تعامد گالرکین
Hierarchical	موروثی
Homogeneous	همگن
Indicator	شاخص
Layered Materials	مواد لایه‌ای
Load	بار
Mass	جرم
Maximum Principle	اصل ماکزیمم
Mesh Star	مش ستاره‌ای
Multiscale Method	روش چندمقیاسی
Node	گره
Nondivergence	غیرواگرایی
Ordinary Differential Equations	معادله دیفرانسیل معمولی
Oscillating Function	تابع نوسانی
Pairing	جفت کردن
Partial Differential Equations	معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی
Partition of Unity	افراز واحد
Patches	وصله‌ها
Path	مسیر
Periodic	دوره‌ای
Polygonal	چندضلعی
Positive Definite	معین مثبت
Preconditioner	شرط مقدماتی
Quadrature	مربع‌سازی
Refine	تظریف
Refrence	مرجع
Representation	نمایش
Residual	مانده
Semi Norm	نیم‌نورم
Separation	جداسازی
Simplified	ساده شده

Slice Space	فضای برش
Solvability Condition	شرط حل‌پذیری
Split	بخش
Stiffness	سختی
Strongly	به‌طور قوی
Support	محمل
Test Function	تابع آزمون
Time Steps	گام‌های زمان
Tolerance	تحمل
Trace	اثر
Unit Torus	چنبره واحد
Variational	وردشی
Wavelet	موج کوچک
Weak Form	فرم ضعیف
Weakly	به‌طور ضعیف
Well Posed	خوش‌وضع

## **Abstract**

We develop a new adaptive multiscale finite element method using the variational multiscale framework together with a systematic technique for approximation of the fine scale part of the solution. The fine scale is approximated by a sum of solutions to decoupled localized problems, which are solved numerically. We derive an a posteriori error estimate in the energy norm which captures the dependency of the crucial discretization parameters: the coarse grid mesh size, the fine grid mesh size, and the sizes of the patches. Based on the a posteriori error estimate we present an adaptive algorithm that automatically tunes these parameters. Finally, we show how the method works in practice by presenting various numerical examples.

**Keywords:** Galerkin, duality, a posteriori error estimation, adaptivity, variational multiscale method, homogeneous, cell problem, periodic, localized problems.



Shahrood University  
Faculty Of Mathematical Sciences

Dissertation Submitted in Partial  
Fulfillment of The Requirements For The  
Degree of Master of Science in  
Applied Mathematics

# **Adaptive Variational Multiscale Methods**

Supervisor

**Dr.Ali Messforush**

by

**Hadi Hoseinpoor**

2014