

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی کاربردی

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی کاربردی، گرایش گراف و ترکیبات

عنوان

بررسی جریان ماکسیمم در شبکه‌های فازی

استاد راهنما

دکتر صادق رحیمی شعرباف

دانشجو

آیلر کسلخه

بهمن ۱۳۹۲

تقدیم به مهربان فرشتگانی که:

لحظات ناب باور بودن، لذت و غرور دانستن، جسارت خواستن،
عظمت رسیدن و تمام تجربه‌های یکتا و زیبای زندگیم، مدیون حضور سبز
آنهاست.

تقدیم به خانواده عزیزم.

خدایا...

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

اگر تنها ترین تنها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن‌هاست...

سپاس‌گزاری...

شکر شایان نثار ایزد منان که توفیق را رفیق راهم ساخت تا این پایان‌نامه را به پایان برسانم. از استاد فاضل و اندیشمند جناب آقای دکتر صادق رحیمی شعرباف به عنوان استاد راهنما که همواره من را مورد لطف و محبت خود قرار داده‌اند، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

این پایان‌نامه را ضمن تشکر و سپاس بیکران و در کمال افتخار و امتنان تقدیم می‌نمایم به:

- محضر ارزشمند پدر و مادر عزیزم به خاطر همه‌ی تلاش‌های محبت‌آمیزی که در دوران مختلف زندگی‌ام انجام داده‌اند و با مهربانی چگونه زیستن را به من آموخته‌اند.
- به همسر مهربانم که سایه‌ی مهربانیش سایه‌سار زندگیم می‌باشد، او که اسوه‌ی صبر و تحمل بوده و مشکلات مسیر را برایم تسهیل نمود.

- به خواهرم که وجودش شادی‌بخش و صفایش مایه‌ی آرامش من است.
- به استادان فرزانه و فرهیخته‌ای که در راه کسب علم و معرفت مرا یاری نمودند.
- به آنان که در راه کسب دانش راهنمایم بودند.
- به آنان که نفس خیرشان و دعای روح پرورشان بدرقه‌ی راهم بود.
- اله‌ها به من کمک کن تا بتوانم ادای دین کنم و به خواسته‌ی آنان جامه‌ی عمل بپوشانم.
- پروردگارا حسن عاقبت، سلامت و سعادت را برای آنان مقدر نما.
- خدایا توفیق خدمتی سرشار از شور و نشاط و همراه و همسو با علم و دانش و پژوهش جهت رشد و شکوفایی ایران کهن‌سال عنایت بفرما.

آیلر کسلنج
بهمن ۱۳۹۲

تعمدنامه

اینجانب آیلر کسلخه دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی دانشکده علوم ریاضی دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان بررسی جریان ماکسیمم در شبکه های فازی، تحت راهنمایی دکتر صادق رحیمی شعرفاف متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های دیگر پژوهشگران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه شاهرود “ یا “ Shahrood University “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

آیلر کسلخه
بهمن ۱۳۹۲

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی باشد.

چکیده

در این پایان نامه، مساله‌ی جریان ماکسیمم در شبکه‌های فازی مورد بررسی قرار گرفته است. در مساله‌ی جریان ماکسیمم، هدف ارسال بیشترین مقدار جریان از راس مبدا به راس مقصد در یک شبکه با در نظر گرفتن این محدودیت که جریان در هیچ کمّانی نمی‌تواند از ظرفیت آن کمان فراتر رود، می‌باشد. در فصل اول، با بیان تاریخچه‌ی موضوع، مساله‌ی جریان ماکسیمم در شبکه‌های قطعی بیان و الگوریتم فورد و فالکرسون تشریح شده است. فصل دوم اختصاص به تعریف شبکه‌های فازی و عملیات مربوط به اعداد فازی مثلثی و دوزنقه‌ای دارد. در فصل سوم الگوریتمی برای حل مسایل جریان ماکسیمم در شبکه‌های فازی بیان می‌شود. فصل چهارم مربوط به حل مساله‌ی جریان ماکسیمم به روش برنامه‌ریزی خطی فازی است.

کلمات کلیدی:

جریان ماکسیمم فازی، شبکه‌های فازی، اعداد فازی، جریان فازی، مساله‌ی جریان ماکسیمم فازی، برنامه‌ریزی خطی فازی.

فهرست مطالب

د	فهرست شکل‌ها
۱	فهرست جداول
۳	۱ شبکه‌های قطعی
۳	۱.۱ مقدمه
۶	۲.۱ تعاریف مقدماتی
۱۷	۳.۱ قضیه جریان ماکسیم - برش مینیم
۲۲	۴.۱ الگوریتم جریان ماکسیم
۲۴	۱.۴.۱ الگوریتم فورد و فالکرسون
۳۰	۲.۴.۱ حوزه کاربردهای شبکه
۳۱	۲ شبکه‌های فازی
۳۱	۱.۲ مقدمه
۳۱	۲.۲ مفاهیم و تعاریف اولیه
۳۴	۱.۲.۲ دسته‌بندی برای حالت‌های مختلف شبکه‌های فازی
۳۶	۳.۲ تعاریف انواع مختلف اعداد فازی
۳۷	۱.۳.۲ عملیات حسابی اعداد فازی مثلثی
۳۷	۲.۳.۲ تبدیل قید نامساوی به قید تساوی
۳۷	۳.۳.۲ عملیات حسابی اعداد فازی دوزنقه‌ای
۳۸	۴.۳.۲ عملیات حسابی اعداد فازی دوزنقه‌ای تعمیم یافته
۳۹	۵.۳.۲ عملیات با اعداد فازی مثلثی
۴۳	۳ حل مسایل جریان ماکسیم
۴۳	۱.۳ مساله‌ی جریان ماکسیم در شبکه‌های فازی
۴۴	۲.۳ الگوریتمی برای حل مسایل جریان ماکسیم فازی

۴۶	 بیان الگوریتم با مثال	۱.۲.۳
۵۱	 استفاده از جریان ماکسیم برای حل مسایل کمترین هزینه	۳.۳
۵۲	 حل مسایل یافتن جریان ماکسیم روی شبکه‌های فازی	۱.۳.۳
۵۶	 حل مسایل جریان با هزینه‌ی مینیم در شبکه‌های فازی	۲.۳.۳
۵۹	حل مسایل جریان ماکسیم به روش برنامه‌ریزی خطی فازی	۴
۵۹	 مقدمه	۱.۴
۶۰	 فرمول‌بندی برنامه‌ریزی خطی مسایل جریان ماکسیم در محیط قطعی	۲.۴
۶۱	 فرمول‌بندی برنامه‌ریزی خطی مسایل جریان ماکسیم در محیط فازی	۳.۴
۶۱	 حل مساله‌ی جریان ماکسیم به روش برنامه‌ریزی خطی	۴.۴
۶۴	 توضیح روش با مثال	۱.۴.۴
۶۸	 تعمیم جریان ماکسیم در شبکه‌ی فازی با در نظر گرفتن ظرفیت راس:	۵.۴
۶۸	 بررسی جریان در شبکه با ظرفیت رئوس	۱.۵.۴
۶۹	 بررسی جریان در شبکه با ظرفیت رئوس فازی	۲.۵.۴
۷۱	 نتیجه‌گیری	۶.۴
۷۲	منابع	
۷۵	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی	
۷۷	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی	
۷۹	نمایه	

فهرست شکل‌ها

۷	شبکه‌ی صادرات کیوی.	۱۰.۱
۸	جریان برای شبکه‌ی شکل (۱۰.۱).	۲۰.۱
۹	یک شبکه با جریان	۳۰.۱
۱۱	روش تشکیل گراف مانده (گراف سمت راست، گراف مانده‌ی $G_0(x)$ است).	۴۰.۱
۱۳	شکل ۳ در مکان‌های مناسب	۵۰.۱
۱۴	جریان f_1 مقدار ۵ دارد، مقدار f را بهبود می‌بخشد.	۶۰.۱
۱۴	جریان f_2 مقدار ۶ دارد، که مقدار f_1 را بهبود می‌بخشد.	۷۰.۱
۱۵	جریان f_3 مقدار ۷ دارد، که مقدار f_2 را بهبود می‌بخشد و جریان ماکسیمال است.	۸۰.۱
۱۶	مکان‌های مناسب شکل ۴	۹۰.۱
۱۷	جریان فقط با w توسط $i(W) = 1$ افزایش می‌یابد.	۱۰۰.۱
۲۳	درخت f -اشباع نشده.	۱۱۰.۱
۲۶	شبکه‌ی اولیه	۱۲۰.۱
۲۷	گام اول	۱۳۰.۱
۲۷	گام دوم	۱۴۰.۱
۲۷	گام سوم	۱۵۰.۱
۲۸	گام چهارم	۱۶۰.۱
۲۸	گام پنجم	۱۷۰.۱
۲۸	گام ششم	۱۸۰.۱
۲۹	گام هفتم	۱۹۰.۱
۲۹	گام هشتم	۲۰۰.۱
۲۹	گام آخر	۲۱۰.۱
۳۵	یک شبکه‌ی جهت‌دار فازی با جریان و ظرفیت‌های فازی	۱۰.۲
۳۶	ماکسیمم اعداد فازی مثلثی.	۲۰.۲
۳۸	عدد فازی دوزنقه‌ای	۳۰.۲

۴۰	عدد فازی مثلثی	۴.۲
۴۱	مقدار دادن به ظرفیت‌های کمان‌ها (جریان‌ها یا هزینه‌های انتقال).	۵.۲
۴۶	شبکه‌ی اولیه	۱.۳
۴۷	مرحله‌ی اول	۲.۳
۴۸	مرحله‌ی دوم	۳.۳
۴۸	مرحله‌ی سوم	۴.۳
۴۹	مرحله‌ی چهارم	۵.۳
۴۹	مرحله‌ی ششم	۶.۳
۵۰	مرحله‌ی آخر	۷.۳
۵۳	شبکه‌ی اولیه	۸.۳
۵۴	عدد مثلثی فازی با مرکز مساوی با مقدار ۱۷ و اعداد مجاور با آن.	۹.۳
۵۶	شبکه با جریان ماکسیم برابر $(۵۰, ۸, ۸)$ واحد	۱۰.۳
	شبکه با جریان $(۴۵, ۸, ۸)$ واحد و هزینه‌های انتقال هر کمان از هزینه‌ی کل	۱۱.۳
۵۸	واحد استاندارد. $(۳۵۶۲, ۸, ۸)$	
۶۴	مقدار فازی جریان در امتداد هر کمان	۱.۴
۶۹	تکنیک تجزیه‌ی راس به منظور حذف ظرفیت راس	۲.۴
۷۰	تکنیک تجزیه‌ی راس به منظور حذف ظرفیت فازی راس	۳.۴

فهرست جداول

۷		۱.۱	مثال‌هایی از انواع مختلف شبکه‌ها
۵۰		۱.۳	جریان بهینه‌ی فازی در کمان‌های مختلف

فصل ۱

شبکه‌های قطعی

۱.۱ مقدمه

ما روزانه با انواع مختلفی از شبکه‌ها سروکار داریم، از جمله: شبکه‌های برق، تلفن، کابل، بزرگراه‌ها، راه‌آهن، تولید و شبکه‌های کامپیوتری. شبکه‌ها شامل، نقاطی خاص که گره یا راس نامیده می‌شوند و خطوط اتصال هر جفت راس که یال یا کمان نامیده می‌شوند، می‌باشند.

شبکه‌ی جریان با یک منبع و مقصد، با یک گراف جهت‌دار $G = (V, E)$ توصیف می‌شود به طوری که، V مجموعه‌ی رئوس یا گره‌هاست و E مجموعه‌ی یال‌ها (کمان‌ها) می‌باشد. برای راحتی کار، فرض می‌شود که این گراف هیچ کمان موازی ندارد و فاقد طوقه نیز می‌باشد و این باعث می‌شود برای هر کمان نقطه انتهایی منحصر به فردی وجود داشته باشد.

در مسایل جریان ماکسیمم به هر کمان ظرفیتی نسبت داده می‌شود که جریان عبوری از آن را محدود می‌کند و ما در جستجوی راهی برای ارسال بیشترین میزان جریان از یک راس مبدا s به یک راس مقصد t با در نظر گرفتن این محدودیت‌ها هستیم. این مساله کاربردهای بسیار زیادی دارد، از جمله: تحلیل شبکه‌های حمل و نقل که وسیله‌ی حمل کالاهای مراکز تولید به بازار هستند، شبکه‌های مخابراتی که داده‌ها را منتقل می‌کنند، شبکه‌های رایانه‌ای یا شبکه خطوط انتقال گاز در شهرها که توسط گراف‌های جهت‌دار مورد تحلیل قرار می‌گیرند. در این‌گونه شبکه‌ها، گراف متناظر نیازمند ساختار یا مولفه‌هایی اضافی است. مثلاً به طور خاص بایستی هر کمان جهت‌دار دارای عدد مثبت به عنوان میزان ظرفیت آن باشد که این عدد نشان دهنده‌ی ظرفیت حمل کالا در آن می‌باشد. تحلیل شبکه‌های جریان، دارای دامنه وسیعی از این کاربردهاست.

مساله‌ی یافتن جریان ماکسیمم در یک شکل کلی توسط هریس^۱ فرمول‌بندی شد [۱۴]. در واقع در سال ۱۹۳۰ بیان مساله‌ی راه‌آهن شوروی موجب تحریک آمریکایی‌ها برای حل این گونه مسایل شد. در ابتدای سال ۱۹۵۵ این مساله توسط «تی. ای. هریس» به این صورت بیان شد: شبکه راه‌آهنی را

^۱ Harris

در نظر بگیرید که دو شهر را از طریق تعدادی شهرهای میانی به هم وصل کرده است. در این شبکه، هر مسیر دارای عددی است که نشان دهنده‌ی ظرفیت انتقال آن مسیر می‌باشد. وضعیت پایداری را در نظر بگیرید؛ بیشترین جریانی که می‌تواند از هر شهر دلخواه خارج شود و به شهر مشخص دیگری وارد شود، چقدر است؟ **فورد و فالکرسون**^۲ بیان کردند که هریس در واقع یک مدل ساده از جریان ترافیک در این مساله را بیان کرده است. در واقع یک مساله‌ی مهم در مورد شبکه‌های جریان، یافتن جریان ماکسیمم است. از دیدگاه کاربردی تابع جریان ماکسیمم نشان‌دهنده‌ی بهترین روش استفاده از شبکه‌ی جریان در انتقال کالا از منبع به مقصد است.

مساله‌ی جریان ماکسیمم یکی از مسایل اصلی برای بهینه‌سازی ترکیبیاتی در گراف‌های جهت‌دار وزن‌دار می‌باشد. می‌توان مدل‌های بسیار مفیدی در زمینه‌های علمی از جمله در شبکه‌های ارتباطی، سیستم‌های خطوط لوله‌ی نفت و سیستم‌های قدرت را به کمک این مسایل بیان نمود. این مسایل ابتدا توسط فورد و فالکرسون و **دانتزیگ**^۳ در سال ۱۹۵۰ پیشنهاد شد و با روش سیمپلکس و برنامه‌ریزی خطی حل شد [۸] و [۱۰]. سپس توسط **فورد و فالکرسون** با روش الگوریتم مسیر افزایشی و پیچیدگی زمانی $O(n^2)$ در سال ۱۹۵۶ حل گردید [۱۱]. الگوریتم‌های مختلفی برای حل مسایل جریان ماکسیمال قطعی وجود دارد.

نسخه‌های مختلفی از الگوریتم فورد و فالکرسون وجود دارد. از جمله الگوریتم کوتاه‌ترین مسیر که توسط **ادموندز**^۴ در سال ۱۹۷۲ با پیچیدگی زمانی $O(nm^2)$ با n راس و m کمان بیان شده و در آن کوتاه‌ترین مسیر مکمل از منبع به مقصد در هر مرحله در شبکه‌ی مانده (با فرض اینکه هر کمان طول واحد دارد) انتخاب می‌شود و کوتاه‌ترین مسیریابی با توجه به جستجوی عرضی می‌باشد [۹].

در شرایط واقعی زندگی همیشه عدم قطعیت در مورد پارامترهای ناشی از مسایل جریان ماکسیمال (به عنوان مثال: هزینه‌ها، ظرفیت‌ها و نیازها) وجود دارد. برای مقابله با این نوع از مسایل، پارامترهای مسایل جریان ماکسیمال را با اعداد فازی نمایش می‌دهند، یعنی مسایل جریان ماکسیمال با پارامترهای فازی شناخته می‌شوند. مفهوم گراف فازی توسط **روزنفلد**^۵ در سال ۱۹۷۵ بیان شده است [۲۲]. در متون علمی، تعداد مقالات در رابطه با مسایل جریان ماکسیمال فازی بسیار کم هستند. مقاله‌ای که توسط **کیم و رئوش**^۶ در سال ۱۹۸۲ بیان شد، یکی از اولین مقالات در رابطه با این موضوع می‌باشد [۱۶]. **دلگادو و همکارانش**^۷ در سال ۱۹۷۸ مطالعات گسترده‌ای در زمینه‌ی مسایل بهینه‌سازی در گراف‌های فازی انجام داده‌اند. نظریه‌ی جریان فازی توسعه داده شد و شرایط لازم برای به‌دست آوردن جریان بهینه به کمک تعریف روی ماتریس‌های فازی فراهم آمد. **چاناس و کلودزیچیک**^۸ در سال

^۲Ford and Fulkerson^۳Dantzig^۴Edmonds^۵Rosenfeld^۶Kim and Roush^۷Delgado et al^۸Chanas and Kolodziejczyk

۱۹۸۴ این مساله را با استفاده از روش برش‌های مینیمم حل کردند و سپس الگوریتمی را برای یک گراف با ساختار قطعی و ظرفیت‌های فازی و به کمک برنامه‌ریزی خطی بیان کردند^[۳]. به عبارت دیگر، در این حالت کمان‌ها دارای تابع عضویت متناظر با جریان خود بودند. آن‌ها این مساله را به عنوان مدل‌بندی گراف فازی در نظر گرفتند. در سال ۱۹۹۳ روش حل با کمک برنامه‌ریزی خطی فازی توسط نگی و لی^۹ بیان شد. در سال ۱۹۹۹ شی و لی^{۱۰} مسایل جریان با هزینه‌ی مینیمم را با هزینه‌های کمان فازی حل نمودند. سپس دیموند در سال ۲۰۰۱ نسخه‌های توسعه‌یافته با ارزش بازه‌ای از قضیه‌ی جریان ماکسیمم-برش مینیمم فازی و الگوریتم کارپ-ادموندز را بیان نمود. همچنین با تلفیقی از الگوریتم‌های بهینه‌سازی موجود، با نمایش α -برش از گراف فازی، روش جدیدی را ابداع نمودند. قاطعی و هاشمی^{۱۱} در سال ۲۰۰۷ برای حل مساله‌ی جریان فازی با کمترین هزینه را به کمک تابع رتبه‌بندی بیان کردند. باقریان^{۱۲} در سال ۲۰۱۲ مساله‌ی جریان با هزینه‌ی مینیمم را به کمک شبکه‌های مانده و پارامترهای فازی حل نمود. او الگوریتم‌های MCF ^{۱۳} را برای حل مسایل جریان با کمترین هزینه با ظرفیت‌های کمان فازی به کار برد.

تعیین جریان ماکسیمم در شبکه‌ی حمل و نقل در شرایط غیرقطعی کمتر مورد مطالعه قرار گرفته است. روزنبرگ^{۱۴} در سال ۲۰۰۶ یک راه‌حل با در نظر گرفتن ظرفیت‌های بازه‌ای کمان پیشنهاد کرده است^[۲۳]. چاناس^{۱۵} برای حل این مساله اصطلاح «گراف‌های فازی» را به کار برد^[۴]. کومار^{۱۶} این مساله را به کمک روش سیمپلکس برنامه‌ریزی خطی بیان کرده است^[۱۷]. مسایل جریان ماکسیمم فازی توسط کومار^{۱۷} و کائور^{۱۸} با استفاده از برنامه ریزی خطی فازی و به کمک اعداد فازی مثلثی بیان شده و با کمک خواص آنالیز عددی حل شده است^[۲۰].

^۹Negi and Lee

^{۱۰}Shih and Lee

^{۱۱}Ghatee and Hashemi

^{۱۲}Bagherian

^{۱۳}Minimum Cost Flow

^{۱۴}Rozenberg

^{۱۵}Chanas

^{۱۶}Kumar

^{۱۷}Amit Kumar

^{۱۸}Manjot Kaur

۲.۱ تعاریف مقدماتی

در این بخش یک شبکه به عنوان یک گراف جهت‌دار و وزن‌دار (نوعاً همبند) معرفی و بعضی از ویژگی‌های مهم آن بیان می‌گردد. لازم به ذکر است که در این پایان‌نامه شبکه‌ها دارای یک منبع و یک مقصد در نظر گرفته می‌شوند و شبکه‌هایی که دارای چند منبع و چند مقصد (حالت کلی شبکه) هستند، به کار گرفته نمی‌شوند.

تعریف ۱.۲.۱. شبکه

فرض کنید $N = (V, E)$ یک گراف جهت‌دار ساده‌ی همبند (بدون طوقه) باشد. در این صورت N را شبکه^{۱۹} (شبکه‌ی ترابری) می‌نامند اگر دارای شرایط زیر باشد:

(الف): راس یکتای s از شبکه‌ی N یک منبع^{۲۰} (مبدأ) نامیده می‌شود، اگر درجه‌ی ورودی صفر داشته باشد.

(ب): راس t از N حفره^{۲۱} (مقصد) نامیده می‌شود، اگر درجه‌ی خروجی صفر داشته باشد. هر راس دیگر از N رئوس میانی نامیده می‌شود.

(ج): گراف N وزن‌دار است. لذا تابعی از E به مجموعه‌ی اعداد حقیقی نامفی وجود دارد که برای هر کمان $a \in E$ از N ، یک عدد صحیح نامفی $c(a)$ (تابع ظرفیت) اختصاص داده می‌شود که ظرفیت^{۲۲} a نامیده می‌شود.

تعاریف این بخش از منبع [۶] استخراج شده است.

برای درک مفهوم یک شبکه مثالهایی از انواع مختلفی از شبکه‌ها در جدول (۱.۱) ذکر شده است. در همه‌ی این شبکه‌ها ما می‌خواهیم کالایی، که به طور کلی جریان نام دارد، را از هر راس به راسی دیگر ارسال کنیم و انجام این کار با حداکثر کارایی، موضوع با قیدها و شرایط خاص، امکان‌پذیر است. نظریه‌ی جریان شبکه برای طراحی الگوریتم‌های محاسباتی کارآمد برای حل این گونه مسایل مورد مطالعه قرار گرفته است. به عنوان مثال، یک شرکت نیرو ممکن است مایل به ارسال ماکسیم مقدار گاز طبیعی بین هر جفت از شهرها از طریق شبکه‌ی خطوط لوله باشد. هر خط لوله در شبکه دارای ظرفیت محدود است. برای روشن شدن موضوع یک مثال شهودی به صورت زیر بیان شده است.

مثال ۲.۲.۱. تولیدکننده‌ای در نیوزیلند می‌خواهد چندین جعبه از محصولات کیوی خود را به بخش انبار در تایوان صادر کند. کانال‌های ارتباطی مختلفی وجود دارند که این جعبه‌ها ارسال شوند. این کانال‌های ارتباطی در شکل (۱.۱) به صورت گراف جهت‌دار نمایش داده شده‌اند، که راس s نمایانگر تولیدکننده و t نمایانگر بخش انبار می‌باشد. اعدادی که روی هر کمان نوشته شده، ماکسیم محموله‌هایی است که هر کانال می‌تواند حمل کند.

^{۱۹}Network

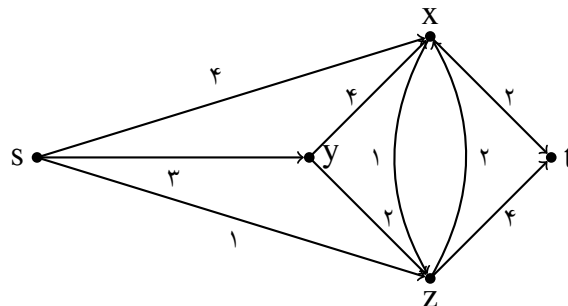
^{۲۰}Source

^{۲۱}Sink

^{۲۲}Capacity

جدول ۱۰۱: مثال‌هایی از انواع مختلف شبکه‌ها

شبکه	رئوس	کمان‌ها	جریان
ارتباط	تبادلات تلفنی، کامپیوترها، ماهواره‌ها	کابل‌ها، فیبر نوری، لینک‌های رله‌ای امواج ریز	پیام‌های صوتی، ویدیویی، اطلاعات
هیدرولیک	مخازن، دریاچه‌ها، ایستگاه‌های پمپاژ	خطوط لوله	مایع هیدرولیکی، آب، گاز، نفت
مالی	ارزها، سهام	معاملات	پول
حمل و نقل	فرودگاه‌ها، ایستگاه‌های راه‌آهن، تقاطع‌ها	بزرگراه‌ها، خطوط راه‌آهن، مسیرهای خطوط هوایی	حمل و نقل، وسایل نقلیه، مسافر



شکل ۱۰۱: شبکه‌ی صادرات کیوی.

تولیدکننده می‌خواهد ماکسیم مقدار جعبه‌هایی که می‌تواند توسط شبکه‌ای از کانال‌ها بفرستد را به‌دست آورد. همچنین متوسط نیروی انسانی x و y و z تا t از ظرفیت‌های مجاز هر کمان تجاوز نکند.

همان‌طور که در شکل (۱۰۱) می‌بینید، هر کمانی که با منبع s مجاور است، از s به رئوس دیگر می‌رود. هر کمانی که با حفره‌ی t مجاور است، از رئوس دیگر به t می‌رود.

در این تحقیق فرض می‌شود که شبکه‌ی N دارای دقیقاً یک منبع و دقیقاً یک حفره (مقصد) می‌باشد. صرف نظر از جزئیات، منبع در هر شبکه می‌تواند به عنوان تولیدکننده و مقصد به عنوان خریدار فرض شود. رئوس داخلی نمایانگر متوسط نیروی انسانی است که ظرفیت هر کمان ماکسیم مقدار مجازی است که می‌تواند از ابتدای کمان به انتهای کمان فرستاده شود. در شکل (۱۰۱)، s که تنها راس با درجه‌ی ورودی صفر است، منبع می‌باشد و به طور مشابه t نیز مقصد می‌باشد.

راس دلخواه u از شبکه‌ی N را در نظر بگیرید. مجموعه کمان‌هایی که به u وارد می‌شوند، را به

ترتیب با $I(u)$ و مجموعه کمان‌هایی که از آن خارج می‌شوند را با $O(u)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۳.۲.۱. تابع جریان^{۲۳} در شبکه‌ی N از منبع s به مقصد t ، تابع $f(a)$ است که برای هر کمان a یک عدد صحیح نامنفی اختصاص می‌دهد، به طوریکه:

(i) (قید ظرفیت^{۲۴}): برای هر کمان a داریم: $0 \leq f(a) \leq c(a)$ ،

(ii) (بقای جریان^{۲۵}): برای هر راس داخلی x ، مجموع جریان وارد شده به x برابر با مجموع جریان خارج شده از x است.

لم ۴.۲.۱. مجموع جریان وارد شده به مقصد t برابر با مجموع جریان خارج شده از منبع s می‌باشد.

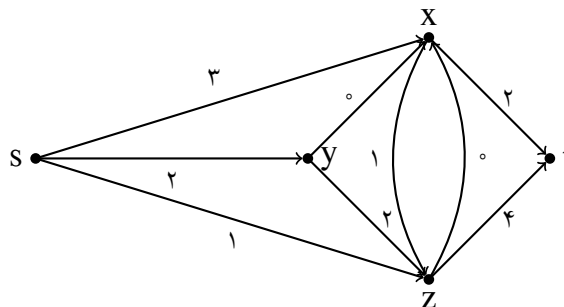
حالت خاص بیان شده در لم (۲.۱) به این معنی است که برای منبع s و مقصد t داریم:

$$\sum_{a \in O(s)} f(a) = \sum_{a \in I(t)} f(a), \quad (1.1)$$

و حالت دوم در تعریف (۳.۲.۱) به این معنی است که اگر x راسی به جز s و t باشد، آنگاه داریم:

$$\sum_{a \in O(x)} f(a) = \sum_{a \in I(x)} f(a), \quad (2.1)$$

برای مثال شکل (۲.۱) جریان را برای شبکه‌ی شکل (۱.۱) نشان می‌دهد. در این مثال داریم:



شکل ۲.۱: جریان برای شبکه‌ی شکل (۱.۱).

$$\begin{aligned} \sum_{a \in O(s)} f(a) &= 3 + 2 + 1 = 6 = 2 + 4 = \sum_{a \in I(t)} f(a), \\ \sum_{a \in O(x)} f(a) &= 2 + 1 = 3 = 3 + 0 = \sum_{a \in I(x)} f(a), \\ \sum_{a \in O(y)} f(a) &= 0 + 2 = 2 = \sum_{a \in I(y)} f(a), \\ \sum_{a \in O(z)} f(a) &= 0 + 4 = 4 = 1 + 2 + 1 = \sum_{a \in I(z)} f(a), \end{aligned}$$

^{۲۳}Flow

^{۲۴}Capacity constraint

^{۲۵}Flow conservation

و برای هر کمان a از شبکه داریم: $c(a) \geq f(a) \geq 0$ یعنی ظرفیت کمان‌ها در شکل (۱.۱) آمده است).

تعریف ۵.۲.۱. مقدار

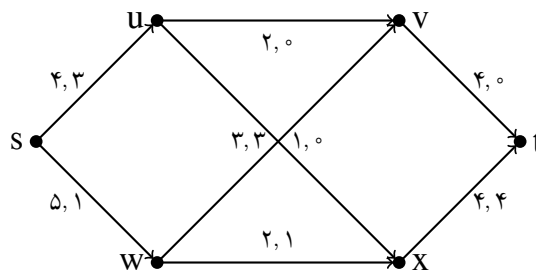
$$|f| = d = \sum_{a \in O(s)} f(a) = \sum_{a \in I(t)} f(a), \quad (3.1)$$

که s و t منبع و مقصد از شبکه‌ی N هستند، مقدار جریان f ^{۲۶} نامیده می‌شود.

این تساوی طبق لم برقرار است. برای مشاهده‌ی توضیحات بیشتر می‌توانید به منابع ذکر شده مراجعه نمایید.

بنابراین مقدار جریان در مثال (۲.۲.۱) برابر ۶ می‌باشد.

فرض کنید f یک جریان روی شبکه $N = (V, E)$ باشد و برای هر زیرمجموعه‌ی سره‌ی X از مجموعه رئوس V از N ، $\bar{X}$ نشان‌دهنده‌ی متمم X در V باشد، یعنی $\bar{X} = V - X$. اگر X شامل مبدا s باشد، اما شامل مقصد t نباشد، آنگاه به طور کلی انتظار داریم که مجموع جریان رئوس وارد شده به X و مجموع رئوس وارد شده به $\bar{X}$ ، مساوی d باشد، که d مقدار جریان است. ما آنرا با شبکه‌ی موجود در شکل (۳.۱) توضیح می‌دهیم که اولین عدد روی هر کمان a ، ظرفیت $c(a)$ است، در حالی که دومین عدد $f(a)$ جریان عبوری روی a است.



شکل ۳.۱: یک شبکه با جریان

حال اگر فرض کنیم که $X = \{s, u, x\}$ باشد، آنگاه داریم: $\bar{X} = \{v, w, t\}$ ، بنابراین کمان‌هایی که از رئوس X به رئوس $\bar{X}$ هستند، عبارتند از uv و sw و xt ، و تنها کمانی که از رئوس $\bar{X}$ به رئوس X وجود دارد، کمان wx است. بنابراین جریان شبکه از رئوس X به رئوس $\bar{X}$ برابر است با:

$$f(uv) + f(sw) + f(xt) - f(wx) = 0 + 1 + 4 - 1 = 4,$$

که برابر همان مقدار جریان f است، که انتظار داشتیم. در واقع مقدار جریان به دست آمده با استفاده از $f(su) + f(sw) = 3 + 1$ و به طور مشابه با کمک $f(vt) + f(xt) = 0 + 4$ می‌باشد.

^{۲۶}Flow value

همچنین، انتظار داریم که مجموع جریان از هر زیرمجموعه X به $\bar{X}$ بزرگتر از ظرفیت کمان‌ها (مجموع ظرفیت‌های هر کمان که از راس X به یک راس $\bar{X}$ می‌رود)، از X به $\bar{X}$ نباشد. برای مثال برای زیرمجموعه X در شبکه شکل (۳.۱)، ظرفیت کمان‌ها از X به $\bar{X}$ برابر است با:

$$c(uv) + c(sw) + c(xt) = ۲ + ۵ + ۴ = ۱۱,$$

که ظرفیت کمان‌ها به طور مطلق بزرگتر از هر مقدار جریان است، یعنی ۴.

تعریف ۶.۲.۱. اگر X و Y هر دو زیرمجموعه‌ای از رئوس شبکه‌ی N باشند، فرض کنید $E(X, Y)$ مجموعه‌ای از کمان‌هایی از رئوس موجود در X به رئوس موجود در Y باشد.

اگر g تابعی باشد که اعداد صحیح نامنفی را به کمان‌هایی از شبکه N نسبت می‌دهد (برای مثال g می‌تواند تابع ظرفیت c یا جریان f باشد)، آنگاه برای هر دو زیرمجموعه از رئوس X و Y از N تعریف می‌کنیم:

$$g(X, Y) = \sum_{a \in E(X, Y)} g(a). \quad (۴.۱)$$

به عبارت دیگر، $g(X, Y)$ مجموع مقادیر از تابع g روی هر کمان از یک راس در X به یک راس در Y است.

تعریف ۷.۲.۱. یک برش ^{۲۷} مجموعه‌ای از کمان‌های $E(X, \bar{X})$ است که منبع s در X و مقصد t در Y قرار دارد. ظرفیت برش برابر با مجموع ظرفیت کمان‌های عبوری از X به Y (X و Y افزایی از راس‌های شبکه می‌باشند) است.

تعریف ۸.۲.۱. برشی که در میان همه‌ی برش‌های موجود در مسیرهای s به t ، دارای کمترین ظرفیت باشد را یک برش مینیمم گویند.

بنابراین، برای زیر مجموعه $X = \{s, u, x\}$ از شکل (۳.۱)، $E(X, \bar{X})$ یک برش است. برای تابع ظرفیت c داریم:

$$c(X, \bar{X}) = \sum_{a \in E(X, \bar{X})} c(a) = c(uv) + c(sw) + c(xt) = ۲ + ۵ + ۴ = ۱۱.$$

تعریف ۹.۲.۱. مساله‌ی برش مینیمم ^{۲۸} مساله‌ی پیدا کردن برش با ظرفیت مینیمم است.

تعریف ۱۰.۲.۱. ظرفیت مانده ^{۲۹} برای جریان f و به ازای هر کمان $(u, v) \in E$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$C_{uv}^f = \begin{cases} C_{uv} - f_{uv}, & uv \in E \\ f_{uv}, & vu \in E \end{cases} \quad (۵.۱)$$

^{۲۷}Cut

^{۲۸}Min-cut

^{۲۹}Residual capacity

به عبارت دیگر، ظرفیت مانده، بیشترین جریان اضافی است که می‌توان از راس u به راس v با استفاده از کمان‌های (u, v) و (v, u) فرستاد. طبق این تعریف، ظرفیت مانده دارای دو مولفه است:

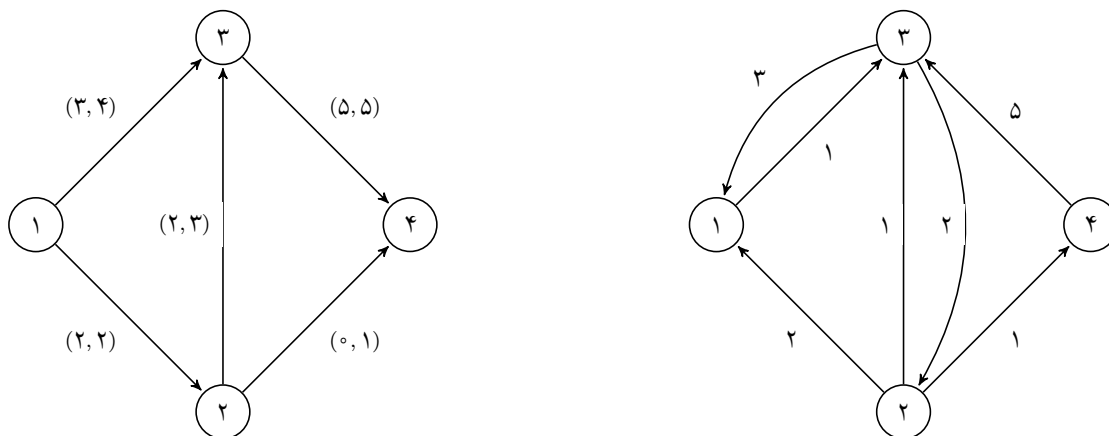
(۱) $C_{uv} - f_{uv}$ که همان ظرفیت استفاده نشده از کمان (u, v) است.

(۲) جریان جاری f_{uv} روی کمان (v, u) که می‌توان آن را برای افزایش جریان از راس u به راس v حذف نمود.

تعریف ۱۱.۲.۱. یک کمان مانده نسبت به جریان f ، یک کمان a با ظرفیت مانده‌ی مثبت است. همچنین یک مسیر را مانده گویند اگر همه‌ی کمان‌های آن مانده باشد. یک مسیر مانده را گاهی یک مسیر افزایشی نیز می‌نامند.

تعریف ۱۲.۲.۱. **گراف مانده** گراف جهت‌دار $G_0(x)$ را گراف مانده نسبت به جریان f گویند هرگاه مجموعه رئوس آن برابر با مجموعه‌ی رئوس G باشد و همچنین کمان‌های آن شامل کمان‌های با ظرفیت مانده‌ی مثبت باشد. در این گراف کمان‌های با ظرفیت مانده‌ی صفر حذف می‌شود.

روش ساخت گراف مانده در مثال شکل (۴.۱) توضیح داده شده است. به عنوان مثال از چهار واحد ظرفیت کمان $(۱, ۳)$ ، سه واحد آن برای ارسال جریان استفاده شده است، پس در گراف مانده، کمان $(۱, ۳)$ دارای یک واحد ظرفیت مانده خواهد بود. از طرفی همین سه واحد جریان را می‌توان از طریق کمان $(۳, ۱)$ بازپس فرستاد، پس در گراف مانده، کمان $(۳, ۱)$ دارای ظرفیت مانده‌ی سه خواهد بود.



شکل ۴.۱: روش تشکیل گراف مانده (گراف سمت راست، گراف مانده‌ی $G_0(x)$ است).

تعریف ۱۳.۲.۱. شبکه‌ی مانده^{۳۰}

با توجه به جریان f در شبکه N ، تابع ظرفیت $c_f : E \rightarrow R$ به صورت $c_f(v, w) = c(v, w) - f(v, w)$ تعریف می‌شود. شبکه‌ی مانده $G_f = (V, E, c_f)$ می‌باشد. توجه شود که شبکه‌ی مانده ممکن است کمان‌هایی با ظرفیت مانده‌ی صفر داشته باشد.

^{۳۰}Residual network

تعریف ۱۴.۲.۱. هر مسیر از s به t در گراف مانده را یک مسیر افزوده^{۳۱} یا مسیر افزایشی می‌نامند.

تعریف ۱۵.۲.۱. جریان افزوده یک جریان مجاز نسبت به ظرفیت اولیه است.

قضیه ۱۶.۲.۱. فرض کنید f یک جریان در شبکه‌ی $N = (V, E)$ با مقدار d باشد. اگر $E(X, \bar{X})$ یک برش در N باشد، آنگاه

$$d = f(X, \bar{X}) - f(\bar{X}, X), \quad (۶.۱)$$

و

$$d \leq c(X, \bar{X}). \quad (۷.۱)$$

به عبارت دیگر، مجموع جریان خروجی از X منهای مجموع جریان وارد شده به X ، یعنی، جریان خارج شده شبکه از X ، برابر است با d ، مقدار جریان و این هرگز بزرگتر از مجموع ظرفیت کمان‌های از X به $\bar{X}$ نمی‌باشد [۶].

برهان. از تعریف جریان، برای منبع s داریم:

$$f(\{s\}, V) = d \quad \text{و} \quad f(V, \{s\}) = 0, \quad (۸.۱)$$

در حالی که برای رئوس میانی که مخالف منبع s و مقصد t است، داریم:

$$f(\{u\}, V) = \sum_{a \in O(u)} f(a) = \sum_{a \in I(u)} f(a) = f(V, \{u\}), \quad (۹.۱)$$

یعنی داریم، $f(\{u\}, V) - f(V, \{u\}) = 0$ ، برای هر $u \neq s, t$.

به این ترتیب، برای مجموعه‌ی برش $E(X, \bar{X})$ داریم:

$$\sum_{x \in X} \{f(\{x\}, V) - f(V, \{x\})\} = f(\{s\}, V) - f(V, \{s\}) + 0 = d - 0 + 0 = d, \quad (۱۰.۱)$$

یعنی داریم: $f(X, V) - f(V, X) = d$ بنابراین

$$f(X, V) = f(X, X \cup (\bar{X})) = f(X, X) + f(X, \bar{X}), \quad (۱۱.۱)$$

و به طور مشابه

$$f(V, X) = f(X, X) + f(X, \bar{X}), \quad (۱۲.۱)$$

بنابراین

$$\begin{aligned} d &= f(X, V) - f(V, X) = f(X, X) + f(X, \bar{X}) - f(X, X) - f(\bar{X}, X) \quad (۱۳.۱) \\ &= f(X, \bar{X}) - f(\bar{X}, X), \end{aligned}$$

^{۳۱} Augmenting path

به عبارت دیگر داریم: $d = f(X, \bar{X}) - f(\bar{X}, X)$ ، بنابراین اولین قسمت قضیه اثبات شد. علاوه بر این، چون برای هر کمان a از شبکه‌ی N داریم: $f(a) \leq c(a)$ ، (طبق تعریف جریان)، بدست می‌آوریم $f(X, \bar{X}) \leq c(X, \bar{X})$ و همچنین داریم:

$$d = f(X, \bar{X}) - f(\bar{X}, X) \leq f(X, \bar{X}) \leq c(X, \bar{X}), \quad (۱۴.۱)$$

□

یعنی بدست آوردیم $d \leq c(X, \bar{X})$ و اثبات تمام شد.

قسمت دوم قضیه می‌گوید که مقدار هر جریان کمتر یا مساوی از ظرفیت کمان‌های از X به $\bar{X}$ برای هر برش $E(X, \bar{X})$ است. بنابراین، اگر f یک جریان با مقدار d باشد، داریم:

$$d \leq \min\{c(X, \bar{X}) : E(X, \bar{X}) \text{ یک برش است}\}. \quad (۱۵.۱)$$

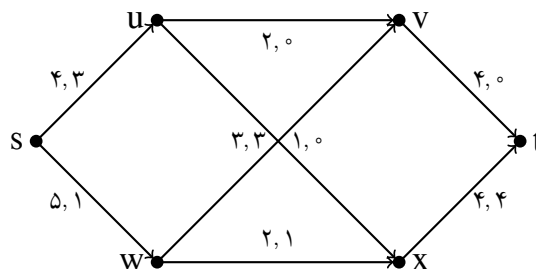
تعریف ۱۷.۲.۱. جریان مساوی با مقدار

$$\min\{c(X, \bar{X}) : E(X, \bar{X}) \text{ یک برش است}\}, \quad (۱۶.۱)$$

جریان ماکسیمال^{۳۲} (یا ماکسیمم) نامیده می‌شود.

در شبکه شکل (۳.۱)، اگر $E(X, \bar{X})$ یک برش باشد، آنگاه s باید در X و t در $\bar{X}$ باشد و هر یک از چهار راس میانی u, v, w, x می‌توانند در هر یک از X یا $\bar{X}$ قرار داشته باشند. این نشان می‌دهد که $۱۶ = ۲^۴$ برش ممکن در این شبکه وجود دارد. در حالت کلی اگر شبکه N دارای n راس داخلی باشد، آنگاه ۲^n برش دارد.

اگر ظرفیت هر یک از این برش‌ها را بررسی کنیم، نتیجه می‌دهد که برش $E(X, \bar{X})$ و $X = \{s, u, w, x\}$ است، همچنین $\bar{X} = \{v, t\}$ است، دارای ظرفیت $۱ + ۳ + ۱ + ۲ = ۷$ می‌باشد. این کوچکترین ظرفیت از هر یک برش‌های ممکن می‌باشد. بنابراین، طبق نامساوی بالا، به ازای هر جریان روی شبکه باید دارای حداکثر مقدار ۷ باشد.

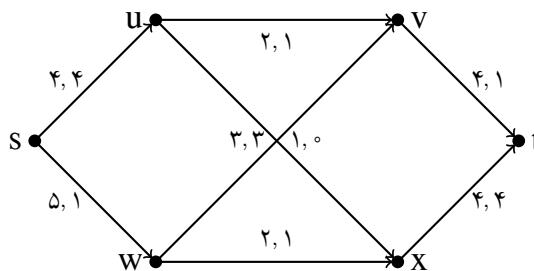


شکل ۵.۱: شکل ۳ در مکان‌های مناسب

^{۳۲}Maximal flow

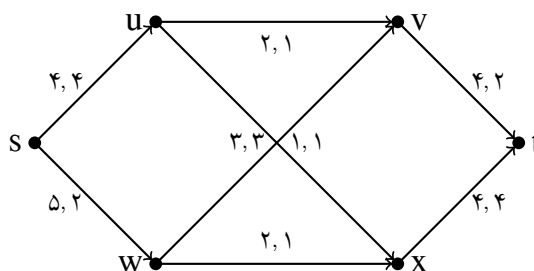
اکنون سعی می‌کنیم ماکسیم مقدار را روی شبکه ایجاد کنیم. f داده شده را به صورت پله‌ای افزایش می‌دهیم. شکل (۵.۱)، f را نشان می‌دهد.

برای مثال، جریان روی مسیر جهت‌دار $s \rightarrow u \rightarrow v \rightarrow t$ یک جریان ماکسیم نیست. زیرا تعداد جریان روی هر یک از su و uv و vt می‌تواند توسط ۱ واحد افزایش یابد و ظرفیت هر یک از کمان‌ها افزایش نمی‌یابد. این یک جریان جدید f_1 را به دست می‌دهد، که در شکل (۶.۱) نشان داده شده است.



شکل ۶.۱: جریان f_1 مقدار ۵ دارد، مقدار f را بهبود می‌بخشد.

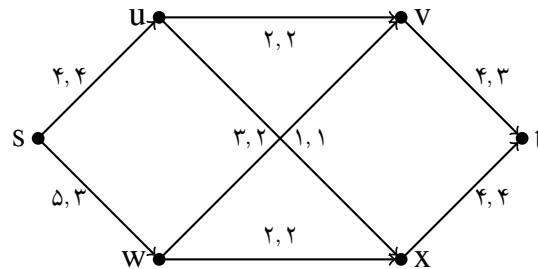
مقدار این جریان جدید $4 + 1 = 5$ است که مقدار f نیز می‌تواند باشد، به طور مشابه f_1 می‌تواند افزایش یابد، چون جریان روی مسیر جهت‌دار $s \rightarrow w \rightarrow v \rightarrow t$ ، جریان ماکسیم نیست، اما با زیاد کردن جریان به مقدار یک روی هر یک از کمان‌های sw ، wv و vt توسط یک واحد می‌تواند افزایش داده شود. یک مقدار جریان جدید f_2 ، با مقدار $4 + 2 = 6$ ، به دست می‌آید، در شکل (۷.۱) نشان داده شده است.



شکل ۷.۱: جریان f_2 مقدار ۶ دارد، که مقدار f_1 را بهبود می‌بخشد.

اکنون هر یک از ۴ مسیر جهت‌دار ممکن از s به t : $s \rightarrow u \rightarrow v \rightarrow t$ ، $s \rightarrow u \rightarrow x \rightarrow t$ ، $s \rightarrow w \rightarrow v \rightarrow t$ و $s \rightarrow w \rightarrow x \rightarrow t$ دارای یک کمان با جریانی برابر با مقدار ظرفیت می‌باشد: $s \rightarrow u \rightarrow v \rightarrow t$ شامل su و همچنین $s \rightarrow u \rightarrow x \rightarrow t$ را داراست، در حالی که $s \rightarrow w \rightarrow x \rightarrow t$ شامل sw و wx و $x \rightarrow t$ شامل wt و xt است. بنابراین می‌توانیم حدس بزنیم که f_2 یک جریان با مقدار ماکسیمال است. به عبارت دیگر، جریانی بیشتر از مقدار ۶ نمی‌تواند وجود داشته باشد. هر چند ما باید هنوز احتمال اینکه جریان می‌تواند با کمک برخی دیگر از سازگاری‌ها افزایش یابد را بررسی کنیم. در واقع اگر ما جریان را روی هر یک

از ux و vt و sw, wx, uv به مقدار یک افزایش دهیم، یک جریان جدید f_3 با مقدار $3 + 4 = 7$ به دست می‌آوریم که در شکل (۸.۱) نشان داده شده است. علاوه بر این، از آنجایی که یک برش با مقدار ظرفیت ۷ وجود دارد، f_3 یک جریان ماکسیمال است.



شکل ۸.۱: جریان f_3 مقدار ۷ دارد، که مقدار f_2 را بهبود می‌بخشد و جریان ماکسیمال است.

توجه می‌کنیم که هر تطابقی که از فرآیند به دست آوردن f_3 حاصل شده، در واقع یک جریان طبق تعریف به صورت زیر می‌باشد: اگر جریان از یک کمان به راس میانی z افزایش یابد، آنگاه یک افزایش مشابه روی کمان خارج شده از z می‌سازیم، یا مطابق کاهش جریان روی کمان‌های خارج شده از z می‌سازیم، به طوری که بقای جریان حفظ می‌شود، در حالی که افزایش جریان خروجی از منبع s با افزایش جریان ورودی به مقصد t با هم برابر است، به گونه‌ای که شرط (ii) از تعریف (۲.۱) نیز برقرار می‌باشد. نتیجه اصلی که از این بخش به دست می‌آوریم این است که برای هر شبکه همیشه یک جریان ماکسیمال وجود دارد. علاوه بر این از اثبات این نتیجه، یک الگوریتم که شامل جریان ماکسیمال است، حاصل می‌شود.

تعریف ۱۸.۲.۱. در هر گذر $W = v_0 v_1 \dots v_k$ داده شده در گراف زمینه‌ی G از یک شبکه‌ی N ، کمان‌های شرکت کننده در N ، به یکی از شکل‌های $v_{i-1} v_i$ یا $v_i v_{i-1}$ می‌باشد. کمان $v_{i-1} v_i$ را کمان پیش‌رو^{۳۳} و کمان $v_i v_{i-1}$ را کمان پس‌رو^{۳۴} از W می‌نامند.

اگر f یک جریان در N باشد، به گذر W در گراف زمینه‌ی G ، یک عدد صحیح نامنفی $i(W)$ نسبت می‌دهند، که یک افزایش (نمو)^{۳۵} از W نامیده می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$i(W) = \min\{i(a) : a \text{ یک کمان نسبت داده شده به وسیله } W \text{ می‌باشد}\}, \quad (۱۷.۱)$$

که

$$i(a) = \begin{cases} c(a) - f(a), & \text{اگر } a \text{ یک کمان پیش‌رو از } W \text{ باشد} \\ f(a), & \text{اگر } a \text{ یک کمان پس‌رو از } W \text{ باشد} \end{cases} \quad (۱۸.۱)$$

^{۳۳}Forward arc

^{۳۴}Reverse arc

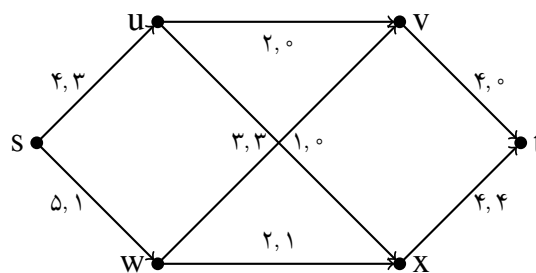
^{۳۵}Increment

برای مثال، برای جریان f روی شبکه N در شکل اصلی (۵.۱)، که دوباره در شکل (۹.۱) نشان داده شده است، گذر $W = s \rightarrow w \rightarrow x \rightarrow u \rightarrow v$ کمان‌های معکوس sw ، wx و uv را دارد، درحالی‌که کمان مانده xu که شرکت کرده، یک کمان پس‌رو از W است. بنابراین

$$\begin{aligned} i(sw) &= c(sw) - f(sw) = 5 - 1 = 4, & i(wx) &= c(wx) - f(wx) = 2 - 1 = 1, \\ i(xu) &= c(xu) - f(xu) = 3 - 0 = 3, & i(uv) &= c(uv) - f(uv) = 2 - 0 = 2, \end{aligned}$$

و در نتیجه داریم: $i(W) = \min\{4, 1, 3, 2\} = 1$

مقدار $i(W)$ بیشتر از مقداری است که جریان f همراه W می‌تواند قید ظرفیت را افزایش دهد. برای مثال، برای مسیر $W = s \rightarrow w \rightarrow x \rightarrow u \rightarrow v$ در بالا، می‌توانیم جریان را روی مسیر sw ، wx و uv به‌وسیله‌ی یک واحد افزایش دهیم و در مقابل به‌وسیله‌ی یک واحد روی کمان xu کاهش دهیم. در نتیجه بیشترین مقدار افزایش ممکن روی W را به‌دست می‌دهد. شکل (۱۰.۱) را ببینید.



شکل ۹.۱: مکان‌های مناسب شکل ۴

تعریف ۱۹.۲.۱. گشت W ، f -اشباع شده ^{۳۶} نامیده می‌شود، اگر $i(W) = 0$ و f -اشباع نشده ^{۳۷} است، اگر $i(W) > 0$.

این بدان معنی است که گشت‌های f -اشباع نشده دقیقاً از همه‌ی ظرفیت‌های خود استفاده نمی‌کنند. بنابراین برای مثال بالا گشت $W = s \rightarrow w \rightarrow x \rightarrow u \rightarrow v$ ، f -اشباع نشده است.

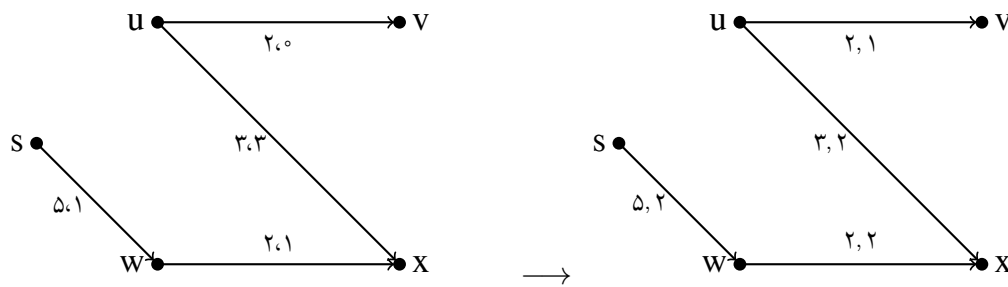
تعریف ۲۰.۲.۱. گشت f -افزایشی ^{۳۸} یک گشت f -اشباع نشده از منبع s به مقصد t است.

پیش از پرداختن به الگوریتم فورد و فالکرسون چند نتیجه اصلی بیان می‌شود. اثبات قضیه با ایجاد وقفه و در چندین مرحله که از آن‌ها برای ویژگی‌های شبکه استفاده می‌شود، بیان شده که در شکل (۹.۱) نشان داده شده است. هر وقفه با علامت $(\bullet)$ شروع و پایان می‌یابد.

^{۳۶}F-saturated

^{۳۷}F-unsaturated

^{۳۸}F-incrementing



شکل ۱۰.۱: جریان فقط با w توسط $i(W) = 1$ افزایش می‌یابد.

۳.۱ قضیه جریان ماکسیمم - برش مینیمم

یکی از مهمترین قضیه‌ها در مبحث جریان ماکسیمم، قضیه‌ی شناخته‌شده‌ی جریان ماکسیمم - برش مینیمم نام دارد. این قضیه که یکی از نخستین نتایج مهم به دست آمده در این مبحث است، توسط فورد و فالکرسون نخستین بار مطرح شده و به شرح زیر می‌باشد [۶]:

قضیه ۱.۳.۱. (جریان ماکسیمم - برش مینیمم) ^{۳۹}

فرض کنید N یک شبکه با تابع ظرفیت c باشد. آنگاه یک جریان ماکسیمم روی N وجود دارد، به عبارت دیگر جریان f در N با مقدار زیر وجود دارد:

$$\min\{c(X, \bar{X}) : E(X, \bar{X}) \text{ یک برش است}\}. \quad (۱۹.۱)$$

در واقع این قضیه می‌گوید که بیشترین میزان جریانی که می‌توان از یک راس مبدا s به یک راس مقصد t در یک شبکه‌ی دارای ظرفیت انتقال داد برابر با ظرفیت st -برش مینیمم است.

برهان. از قضیه قبل می‌دانیم که برای هر جریان f در N با مقدار d داریم:

$$d \leq \min\{c(X, \bar{X}) : E(X, \bar{X}) \text{ یک برش است}\}, \quad (۲۰.۱)$$

یک مقدار دلخواه برای f به دست می‌دهد، فرض کنید X مجموعه رئوس z در N باشد، به طوری که داشته باشیم $z = s$ و یا در گراف زمینه‌ی G از N یک گشت f -اشباع نشده $W = v_0 \dots v_k$ از s به z وجود داشته باشد، به طوری که داشته باشیم: $s = v_0, z = v_k$.

• به عنوان مثال برای N از شکل (۹.۱) داریم: مجموعه X شامل عبارات زیر است:

s ، منبع است،

u ، چون برای گشت $W = su$ داریم: $i(W) = i(su) = c(su) - f(su) = 4 - 3 > 0$

^{۳۹}The Max-Flow , Min-Cut

w ، چون برای گشت $W = sw$ داریم: $i(W) = i(sw) = c(sw) - f(sw) = 5 - 1 > 0$ ،
 v ، چون برای گشت $W = suv$ داریم:

$$\begin{aligned} i(W) &= \min\{i(su), i(uv)\} = \min\{c(su) - f(su), c(uv) - f(uv)\} \\ &= \min\{4 - 3, 2 - 0\} > 0, \end{aligned}$$

x ، چون برای گشت $W = swx$ داریم:

$$\begin{aligned} i(W) &= \min\{i(sw), i(wx)\} \\ &= \min\{c(sw) - f(sw), c(wx) - f(wx)\} \\ &= \min\{5 - 1, 2 - 1\} > 0, \end{aligned}$$

t مقصد است، چون برای گشت $W = suvt$ داریم:

$$\begin{aligned} i(W) &= \min\{i(su), i(uv), i(vt)\} \\ &= \min\{c(su) - f(su), c(uv) - f(uv), c(v, t) - f(vt)\} \\ &= \min\{4 - 3, 2 - 0, 4 - 0\} > 0, \end{aligned}$$

• به عبارت دیگر داریم: $X = \{s, u, w, v, x, t\}$.

• حال به اثبات قضیه می‌پردازیم: مقصد t در X یا در $\bar{X}$ قرار دارد. فرض کنید حالت اول برقرار باشد، یعنی t متعلق به X باشد. آنگاه گشت f -اشباع نشده‌ی W باید از s به t وجود داشته باشد، به عبارت دیگر، یک گشت f -افزایشی است. یک گشت W را انتخاب کنید و فرض کنید:

$$i(W) = \epsilon, \quad (21.1)$$

به طوری که $\epsilon > 0$.

• بنابراین در این مثال، W برابر $suvt$ است، به طوری که داریم: $i(W) = \epsilon = 1$.
 حال یک تابع جدید f_1 را روی کمان‌های a از N به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$f_1(a) = \begin{cases} f(a) + \epsilon, & \text{اگر } a \text{ یک کمان پیش‌رو در } W \text{ باشد} \\ f(a) - \epsilon, & \text{اگر } a \text{ یک کمان پس‌رو در } W \text{ باشد} \\ f(a), & \text{اگر } a \text{ هر کمان دیگری در } N \text{ باشد.} \end{cases} \quad (22.1)$$

بنابراین f_1 یک جریان با مقدار $d + \epsilon$ است. چون ϵ طبق تعریف یک عدد صحیح مثبت است، جریان f با مقدار d و جریان جدید f_1 با مقدار $d + \epsilon$ افزایش می‌یابد.

جریان جدید f_1 ، جریان اصلاح شده‌ی اساسی^{۴۰} (گشت f -افزایشی^{۴۱}) روی W نامیده می‌شود.

- در مثال ما، f_1 به درستی جریان f_1 را در شکل (۶.۱) بدست می‌دهد. چون

$$\begin{aligned} f_1(su) &= f(su) + \epsilon = 3 + 1 = 4, & f_1(sw) &= f(sw) = 1, \\ f_1(uv) &= f(uv) + \epsilon = 0 + 1 = 1, & f_1(ux) &= f(ux) = 3, \\ f_1(vt) &= f(vt) + \epsilon = 0 + 1 = 1, & f_1(wv) &= f(wv) = 0, \\ f_1(wx) &= f(wx) = 1, & f_1(xt) &= f(xt) = 4, \end{aligned}$$

- و مقدار این جریان جدید f_1 برابر $d + \epsilon = 4 + 1 = 5$ می‌باشد.

این ساختار افزایش جریان همیشه احتمال اینکه مقصد t در مجموعه X باشد را فراهم می‌کند. بنابراین ممکن است این مرحله را چندین بار تکرار کنیم. روی گشت‌ها به طور افزایشی طوری مرحله به مرحله پیش می‌رویم که، t در مجموعه‌ی X شرکت نداشته باشد. در این مرحله، گشت افزایشی بیشتر از این مقدار را به ما نخواهد داد. همچنین چون $t \notin X$ ، $E(X, \bar{X})$ یک برش است.

- در این مثال، مجموعه X که با f_1 شرکت کرده است (شکل (۶.۱))، شامل عبارات زیر است:

s منبع است،

w چون، برای گشت $W = swx$ داریم:

$$i(W) = i(sw) = c(sw) - f_1(sw) = 5 - 1 > 0,$$

x چون، برای گشت $W = swx$ داریم:

$$\begin{aligned} i(W) &= \min\{i(sw), i(wx)\} = \min\{c(sw) - f_1(sw), c(wx) - f_1(wx)\} \\ &= \min\{5 - 1, 2 - 1\} > 0, \end{aligned}$$

v چون، برای گشت $W = swv$ داریم:

$$\begin{aligned} i(W) &= \min\{i(sw), i(wv)\} = \min\{c(sw) - f_1(sw), c(wv) - f_1(wv)\} \\ &= \min\{5 - 1, 1 - 0\} > 0, \end{aligned}$$

u چون، برای گشت $W = swvu$ داریم:

$$\begin{aligned} i(w) &= \min\{i(sw), i(wv), i(vu)\} \\ &= \min\{c(sw) - f_1(sw), c(wv) - f_1(wv), f_1(uv)\} \\ &= \min\{5 - 1, 1 - 0, 1\} > 0, \end{aligned}$$

^{۴۰} Revised flow

^{۴۱} F-incrementing walk

t چون، برای گشت $W = swvt$ داریم:

$$\begin{aligned} i(w) &= \min\{i(sw), i(wv), i(vt)\} \\ &= \min\{c(sw) - f_1(sw), c(wv) - f_1(wv), c(vt) - f_1(vt)\} \\ &= \min\{5 - 1, 1 - 0, 4 - 1\} > 0, \end{aligned}$$

به عبارت دیگر به ازای هر f داریم: $X = V$.

گشت $W = swvt$ را با فرض $\epsilon = 1$ در نظر بگیرید. این گشت با تعریف یک تابع جدید f_2 روی کمان‌های N به صورت زیر به کار می‌رود:

$$\begin{aligned} f_2(sw) &= f_1(sw) + \epsilon = 1 + 1 = 2, & f_2(wv) &= f_1(wv) + \epsilon = 0 + 1 = 1, \\ f_2(vt) &= f_1(vt) + \epsilon = 0 + 1 = 1, \end{aligned}$$

و برای هر کمان دیگر a ، $f_1(a) = f_2(a)$. در حقیقت f_2 فقط جریان f_1 را در شکل (۷.۱) به دست می‌دهد.

حال مجموعه X که با f_2 شرکت کرده است را پیدا می‌کنیم که حاوی رئوس به صورت زیر هستند: (شکل (۷.۱) را ببینید.)

s منبع است،

w چون، برای گشت $W = swx$ داریم:

$$i(W) = i(sw) = c(sw) - f_2(sw) = 5 - 2 > 0,$$

x چون، برای گشت $W = swx$ داریم:

$$\begin{aligned} i(W) &= \min\{i(sw), i(wx)\} = \min\{c(sw) - f_2(sw), c(wx) - f_2(wx)\} \\ &= \min\{5 - 2, 2 - 1\} > 0, \end{aligned}$$

u چون، برای گشت $W = swxu$ داریم:

$$\begin{aligned} i(W) &= \min\{i(sw), i(wx), i(xu)\} \\ &= \min\{c(sw) - f_2(sw), c(wx) - f_2(wx), f_2(xu)\} \\ &= \min\{5 - 2, 2 - 1, 3\} > 0, \end{aligned}$$

v چون، برای گشت $W = swxvu$ داریم:

$$\begin{aligned} i(w) &= \min\{i(sw), i(wx), i(xu), i(wv)\} \\ &= \min\{c(sw) - f_2(sw), c(wx) - f_2(wx), f_2(xu), c(wv) - f_2(wv)\} \\ &= \min\{5 - 2, 2 - 1, 3, 2 - 1\} > 0, \end{aligned}$$

t چون، برای گشت $W = swxuv$ داریم:

$$\begin{aligned} i(w) &= \min\{i(sw), i(wx), i(xu), i(uv), i(vt)\} \\ &= \min\{c(sw) - f_2(sw), c(wx) - f_2(wx), f_2(ux), c(uv) - f_2(uv), c(vt) - f_2(vt)\} \\ &= \min\{5 - 2, 2 - 1, 3, 2 - 1, 4 - 2\} > 0, \end{aligned}$$

به عبارت دیگر، دوباره $X = V$ است.

بنابراین گشت $W = swxuv$ از s به t با فرض $\epsilon = 1$ را می‌سازیم و از آن برای تعریف یک تابع جدید f_3 روی کمان‌هایی از N به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} f_3(sw) &= f_2(sw) + \epsilon = 2 + 1 = 3, & f_3(wx) &= f_2(wx) + \epsilon = 1 + 1 = 2, \\ f_3(ux) &= f_2(ux) - \epsilon = 3 - 1 = 2, & f_3(uv) &= f_2(uv) + \epsilon = 1 + 1 = 2, \\ f_3(vt) &= f_2(vt) + \epsilon = 2 + 1 = 3, \end{aligned}$$

و برای بقیه‌ی کمان‌های a ، $f_3(a) = f_2(a)$ می‌باشد. در حقیقت، f_3 فقط در شکل (۸.۱) جریان f_3 را به دست می‌دهد.

حال عناصر شرکت‌کننده‌ی مجموعه X را مشخص می‌کنیم. که این مجموعه رئوس (شکل (۸.۱) را ببینید) عبارتند از:

s منبع است،

w ، چون برای گشت $W = sw$ داریم:

$$i(w) = i(sw) = c(sw) - f_3(sw) = 5 - 3 > 0,$$

و راس دیگری نیست، چون همه‌ی کمان‌های دیگر مجاور با s یا w به s می‌روند یا از w به رئوس دیگر می‌روند و مقدار جریان جاری آن‌ها با مقدار ظرفیت آن‌ها برابر است. به عبارت دیگر داریم:

$$X = \{s, w\},$$

چون $t \notin X$ ، $E(X, \bar{X})$ یک برش است. •

حال برمی‌گردیم به اثبات قضیه، جریان موجود را f' می‌نامیم (مجموعه‌ی X متعلق به شرط $X \not\ni t$ است).

بنابراین $E(X, \bar{X})$ یک برش است. حال اگر راس x در X باشد، آنگاه، طبق تعریف X ، گشت f' -اشباع نشده‌ی $W = v_0 \dots v_k$ از منبع s به منبع w وجود دارد، به‌طوری‌که $s = v_0$ و $v_k = x$. فرض کنیم y راسی باشد که در X قرار ندارد، به عبارت دیگر، $y \notin X$. بنابراین، اگر کمان xy از x به y با ویژگی $f'(xy) < c(xy)$ باشد، گشت $W_1 = v_0 \dots v_k y$ از s به y ممکن

است f -اشباع نشده باشد، نتیجه می‌گیریم که y در X قرار دارد، نه در $\bar{X}$ ، که این یک تناقض است.

به طور مشابه، اگر کمان yx از y به x با ویژگی $f'(yx) > 0$ وجود داشته باشد، آنگاه گشت y از $W = v_0 \dots v_k y$ به s ممکن است f -اشباع نشده باشد و دوباره یک تناقض بدست می‌آید. بنابراین هر کمان از xy که $x \in X$ و $y \in \bar{X}$ است و باید داشته باشیم $f'(xy) = c(xy)$ ، همچنین هر کمان از yx که $x \in X$ و $y \in \bar{X}$ است و باید داشته باشیم $f'(yx) = 0$. این نشان می‌دهد که

$$\forall f(\bar{X}, X) = 0 \longrightarrow f'(X, \bar{X}) = c(X, \bar{X}), \quad (23.1)$$

حال اگر f' دارای مقدار d باشد آنگاه چون $E(X, \bar{X})$ یک برش است، طبق قضیه قبل داریم:

$$d = f'(X, \bar{X}) - f'(X, \bar{X}), \quad (24.1)$$

بنابراین $d = c(X, \bar{X}) - 0 = c(X, \bar{X})$. به عبارت دیگر مقدار جریان f' برابر با ظرفیت برش $E(X, \bar{X})$ است. نشان می‌دهد که f' جریان ماکسیمال است. اثبات کامل شد.

• در مثال ما، $f' = f_3$ و مجموعه X ، $\{s, w\}$ را پیدا می‌کند. کمان‌هایی که از X به $\bar{X}$ هستند، در واقع $E(X, \bar{X})$ کمان‌های su, vw, wx می‌باشند، همچنین

$$c(X, \bar{X}) = c(su) + c(vw) + c(wx) = 4 + 1 + 2 = 7,$$

که مساوی با مقدار جریان f_3 است، مشابه آنچه انتظار داشتیم.

□

نتیجه‌ی بسیار مهمی که از این قضیه گرفته می‌شود این است که اگر جریان f را به گونه‌ای بیابیم که مقدار آن برابر ظرفیت یک برش باشد، آنگاه f یک جریان ماکسیم و برش متناظر آن یک برش مینیم است.

۴.۱ الگوریتم جریان ماکسیم

حال با توجه به قضایا و تعاریف داده شده، الگوریتم پیدا کردن جریان ماکسیم بیان می‌شود. کافی است که هر بار یک مسیر افزایشی از s به t در گراف مانده پیدا شود و جریان افزوده به گراف نسبت داده شود. در این قسمت الگوریتم فورد و فالکرسون بیان می‌شود و بر اساس آن جریان ماکسیمال به دست می‌آید. برای تولید جریان ماکسیمال از تکنیک برچسب‌گذاری استفاده می‌شود. با یک جریان دلخواه شروع می‌کنیم، برای مثال جریانی که دارای ظرفیت کمان صفر است (به عبارت دیگر، جریان صفر)، به ترتیب یک دنباله از جریان‌های با مقدار صعودی می‌سازیم، که نهایتاً به یک جریان ماکسیمال منتهی می‌شود.

تعریف ۱.۴.۱. درخت f -اشباع نشده^{۴۲} از شبکه‌ی N (با رابطه به جریان F) یک زیردرخت T از گراف زمینه‌ی G از N است، به طوری که:

(i) منبع s یک راس از T باشد،

(ii) برای هر راس v از T ، $s - v$ مسیر یکتا در T یک مسیر f -اشباع نشده باشد.

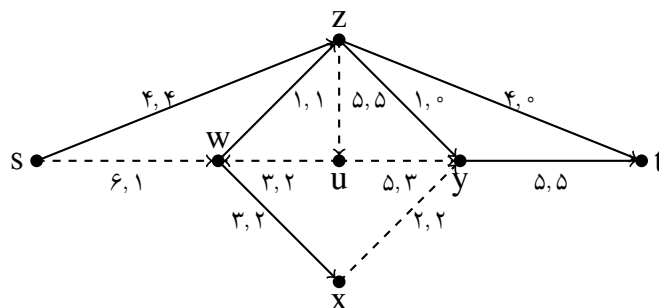
شکل (۱۱.۱) مثالی از یک درخت f -اشباع نشده می‌باشد که به وسیله‌ی کمان‌های هاشور خورده به دست آمده است. دنباله‌ای از جریان‌هایی با مقدار افزایشی را با استفاده از گشت‌های f -افزایشی پیدا می‌کنیم که یافتن به کمک درخت‌های f -اشباع نشده است. این فرآیند مرحله به مرحله به صورت زیر است:

(i) اولاً درخت T حتماً شامل منبع s باشد،

(ii) اگر X مجموعه رئوس T که در هر گام بدست می‌آید باشد، کمان a طبق دو روش زیر به T وصل می‌شود، این دو روش این امکان را به وجود می‌آورند که هیچ دوری در مسیر ایجاد نشود، (به عبارت دیگر، در پایان هر مرحله مسیر مورد نظر هنوز یک درخت است):

(a) اگر کمان a در برش $E(X, \bar{X})$ قرار گرفته باشد و داشته باشیم $f(a) < c(a)$ ، آنگاه به کمان a وصل می‌شوند و انتهای درخت T می‌شوند،

(b) اگر کمان a در برش $E(\bar{X}, X)$ قرار گرفته باشد و داشته باشیم $f(a) > 0$ ، آنگاه به کمان a وصل می‌شوند و یک گذر به T می‌شوند،



شکل ۱۱.۱: درخت f -اشباع نشده.

نسبت به این ساختار درخت T مورد نظر ما، نهایتاً تا مقصد t پیش می‌رود یا کوتاه‌تر از t متوقف می‌شود. اگر بیشتر از t افزایش یابد، می‌گوییم که عبور از مانع دارد و در این مورد st -مسیر در T ، مسیر f -افزایشی است. به بیان دیگر اگر عمل پیشروی قبل از رسیدن به t متوقف شود، آنگاه آخرین بخش از اثبات قضیه نشان می‌دهد که جریان f باید جریان ماکسیمال باشد.

تکنیک برچسب‌گذاری واقعی، برچسب‌ها را به رئوس f -اشباع نشده‌ی درخت T طوری اختصاص می‌دهد که افزایش یابند. برای هر راس v از T برچسب $i(p_v) = \lambda(v)$ است که p_v مسیر یکتا در T از

^{۴۲}F-unsaturated tree

منبع s به v می‌باشد. مزیت این برچسب‌گذاری این است که اگر عبور از مانع اتفاق افتاد، نه تنها مسیر f -افزایشی p_t از منبع s به مقصد t داریم، بلکه $\lambda(t) = i(p_t)$ محاسبه می‌شود. این رشد افزایشی برای به‌دست آوردن جریان اساسی اصلاح شده روی p_t به کار می‌رود. روش برچسب‌گذاری با قرار دادن منبع s با برچسب $\lambda(s) = \infty$ عملکرد خود را شروع می‌کند. طبق قوانین زیر فرآیند را ادامه می‌دهد:

(۱) اگر a یک کمان f -اشباع نشده باشد که گذر u برچسب خورده باشد، اما v برچسب نخورده باشد، آنگاه v دارای برچسب زیر است:

$$\lambda(v) = \min\{\lambda(u), c(a) - f(a)\}, \quad (25.1)$$

(۲) اگر a کمانی با شرط $f(a) > 0$ باشد، به‌طوریکه u برچسب خورده باشد اما گذر v برچسب نخورده باشد، آنگاه v دارای برچسب زیر است:

$$\lambda(v) = \min\{\lambda(u), f(a)\}, \quad (26.1)$$

در این موارد می‌گوییم که v بر پایه‌ی u برچسب‌گذاری شده است. برای یافتن برچسب راس u ، همه‌ی رئوسی که می‌توانند بر پایه‌ی u برچسب‌گذاری شوند را برچسب‌گذاری می‌کنیم. فرآیند برچسب‌گذاری، تا زمانی‌که هر کمان مقصد t برچسب‌گذاری شود، ادامه می‌یابد. به عبارت دیگر عبور از مانع داریم. در واقع یا همه‌ی رئوسی را که می‌توانیم برچسب‌گذاری کنیم را پیدا می‌کنیم و یا اینکه بیشتر رئوسی را که می‌توانیم برچسب‌گذاری می‌کنیم. به عبارت دیگر جریان f جریان ماکسیمال می‌باشد.

حال مراحل الگوریتم را با عبارات ریاضی بیان می‌شود. در ابتدا جریان صفر به عنوان جریان ابتدایی روی شبکه N به کار برده می‌شود.

نکته ۲.۴.۱. اگر مقادیر ظرفیت‌ها صحیح نامنفی باشند، الگوریتم متوقف می‌شود و مقدار جریان نهایی، یک جریان ماکسیمم است.

۱.۴.۱ الگوریتم فورد و فالکرسون

- گام ۱: برای هر کمان xy در N ، قرار می‌دهیم $f(xy) = 0$.
- گام ۲: قرار دهید $E' = \emptyset$ (مجموعه‌ی کمان‌ها در درخت اشباع نشده می‌باشد).
برای منبع s از N ، قرار دهید $\lambda(s) = \infty$.
قرار دهید $L = \{s\}$ (مجموعه‌ی رئوسی که برچسب خورده می‌باشد).
قرار دهید $S = \emptyset$ (مجموعه‌ی رئوسی در N است که مورد جستجو واقع شده بودند).
- گام ۳: فرض کنید F مجموعه‌ای از کمان‌های xy در N باشد، به‌طوری‌که $c(xy) > f(xy)$ (شامل کمان‌های پیش‌رو است).
- فرض کنید R مجموعه‌ای از کمان‌های xy در N باشد، به‌طوری‌که $f(xy) > 0$ (شامل کمان‌های پس‌رو می‌باشد).

- گام ۴: اگر $L - S = \emptyset$ ، به مرحله ی ۱۰ بروید.
- گام ۵: یک راس مانند $x \in L - S$ انتخاب کنید.
- گام ۶: اگر هیچ مسیر دیگری در $\bar{L}$ وجود نداشته باشد، به طوری که $xy \in F$ و مجموعه ای از کمان های $E' \cup \{xy\}$ درخت زمینه را تولید کند، آنگاه به گام ۷ بروید.
- اگر وجود داشته باشد یک $y \in \bar{L}$ به طوری که $xy \in F$ و مجموعه ای از کمان های $E' \cup \{xy\}$ درخت زمینه را تولید کند، آنگاه برچسب y به صورت زیر است:

$$\lambda(y) = \min\{\lambda(x), c(xy) - f(xy)\}, \quad (۲۷.۱)$$
- E' را به $E' \cup \{xy\}$ و L را به $L \cup \{y\}$ تغییر دهید. حال این مرحله را تکرار کنید.
- گام ۷: اگر هیچ $y \in \bar{L}$ وجود نداشته باشد، به طوری که $yx \in R$ و مجموعه ای از کمان های $E' \cup \{yx\}$ درخت زمینه را تولید کند، آنگاه به گام ۸ بروید.
- اگر وجود داشته باشد یک $y \in \bar{L}$ به طوری که $yx \in R$ و مجموعه ای از کمان های $E' \cup \{yx\}$ درخت زمینه را تولید کند، آنگاه برچسب y به صورت زیر است:

$$\lambda(y) = \min\{\lambda(x), f(yx)\}, \quad (۲۸.۱)$$
- E' را به $E' \cup \{yx\}$ و L را به $L \cup \{y\}$ تغییر دهید.
- حال این مرحله را تکرار کنید.
- گام ۸: L را به $L' \cup \{x\}$ تغییر دهید. اگر $t \notin L$ ، به مرحله ی ۴ بروید.
- گام ۹: (به این مرحله زمانی می رسیم که مقصد t برچسب خورده باشد، به عبارت دیگر زمانی که عبور از مانع داشته باشیم).
- حال حالت عکس این فرآیند را به کار می بریم، گشت افزایشی W از s به t در N پیدا می کنیم و برای کمان های E' به کار می بریم و برای هر کمان a در W ، اگر $a \in F$ باشد، $f(a)$ را به $f(a) + \lambda(t)$ تغییر می دهیم و اگر $a \in R$ باشد به $f(a) - \lambda(t)$ تغییر می دهیم.
- به مرحله ۲ برگردید.
- گام ۱۰: (به این مرحله زمانی می رسیم که همه ی برچسب های رئوس پیدا شده باشند و هیچ عبور از مانعی وجود نداشته باشد).
- مقادیر $f(xy)$ برای هر کمان xy در N یک جریان ماکسیمم در N به دست می دهد و مجموعه ای از رئوس L یک برش مینیمم به دست می دهد.

توضیح الگوریتم با بیان مثال

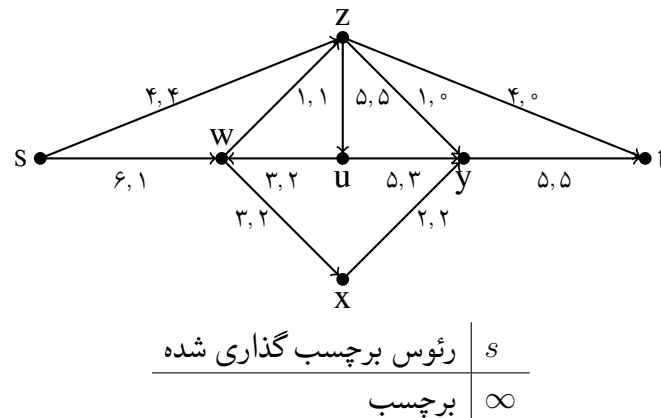
مثال ۳.۴.۱. حال این الگوریتم را به وسیله‌ی شکل‌های (۱۲.۱) تا (۲۱.۱) و با شبکه N از شکل (۱۱.۱) توضیح می‌دهیم، با جریان دلخواه f شروع می‌کنیم (به جای جریان صفر که در الگوریتم استفاده شده است). در هر مرحله درخت اشباع نشده با کمان‌های هاشور خورده نشان داده شده است و برچسب اختصاص داده شده با نمودار زیر شکل‌ها نشان داده شده است. برای ذخیره مکان، گام‌های مخصوص الگوریتم را برای مثال به کار برده و همچنین تغییرات لازم برای مجموعه‌های E' ، L و S اعمال شده است.

نمودار (۲۱.۱) آخرین نمودار ما می‌باشد، چون در مرحله‌ی بعدی برچسب همه‌ی رئوس پیدا شده‌اند. به عبارت دیگر s ، w و x برچسب جدیدی را برای رئوس به دست نمی‌دهند. چون همه‌ی برچسب رئوس پیدا شده است، به عبارت دیگر در مراحل بیان شده‌ی الگوریتم $L = S$ می‌باشد و هیچ عبور از مانعی نداریم. جریان نشان داده شده در نمودار شکل (۲۱.۱) یک جریان ماکسیمال است و برابر مقدار $f(sz) + f(sw) = ۴ + ۳ = ۷$ می‌باشد.

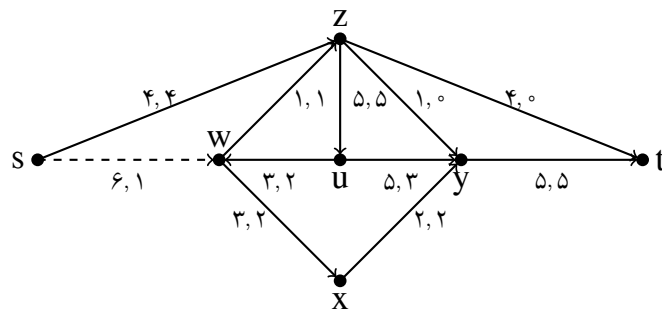
به هر حال مجموعه‌ی $X = \{s, w, x\}$ از برچسب رئوس یک جریان می‌نیمال $E(X, \bar{X})$ به دست می‌دهد، با ظرفیتی که به صورت زیر می‌باشد:

$$c(sz) + c(wz) + c(xy) = ۴ + ۱ + ۲ = ۷,$$

که همان مقدار جریان می‌باشد (همانی است که انتظار داشتیم).

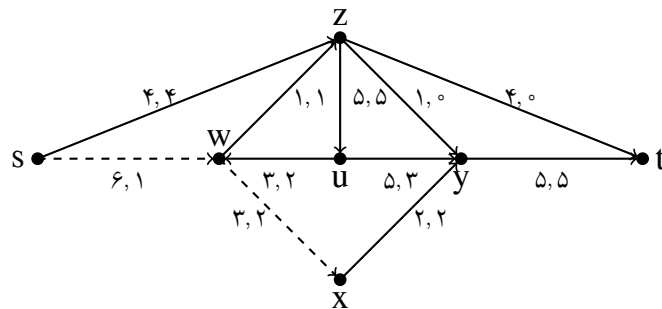


شکل ۱۲.۱: شبکه‌ی اولیه



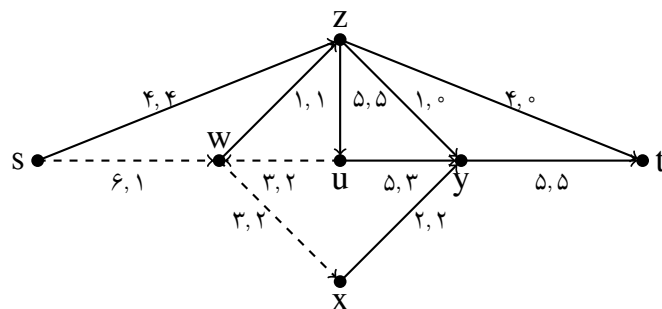
رئوس برچسب گذاری شده	s	w
برچسب	∞	$\min\{\infty, 6 - 1\} = 5$

شکل ۱۳.۱: گام اول



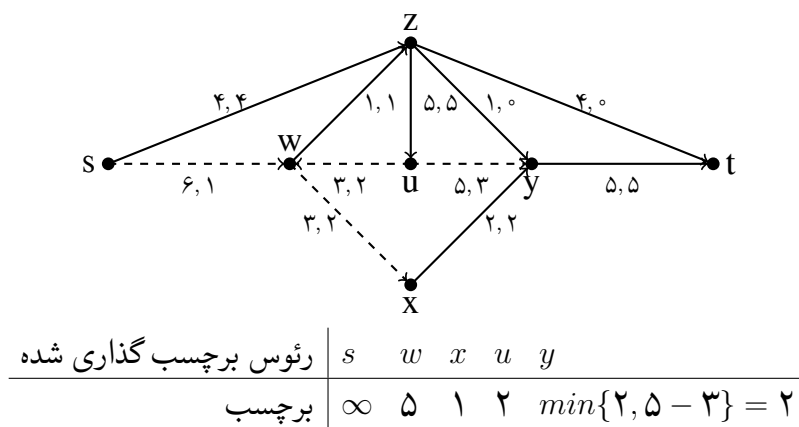
رئوس برچسب گذاری شده	s	w	x
برچسب	∞	5	$\min\{5, 3 - 2\} = 1$

شکل ۱۴.۱: گام دوم

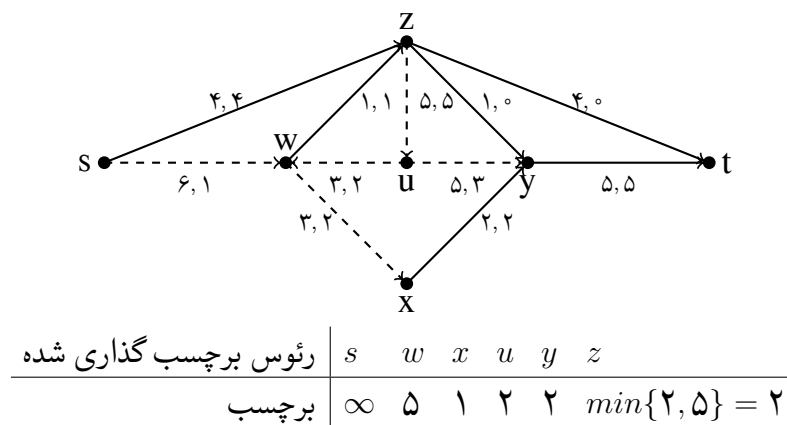


رئوس برچسب گذاری شده	s	w	x	u
برچسب	∞	5	1	$\min\{5, 2\} = 2$

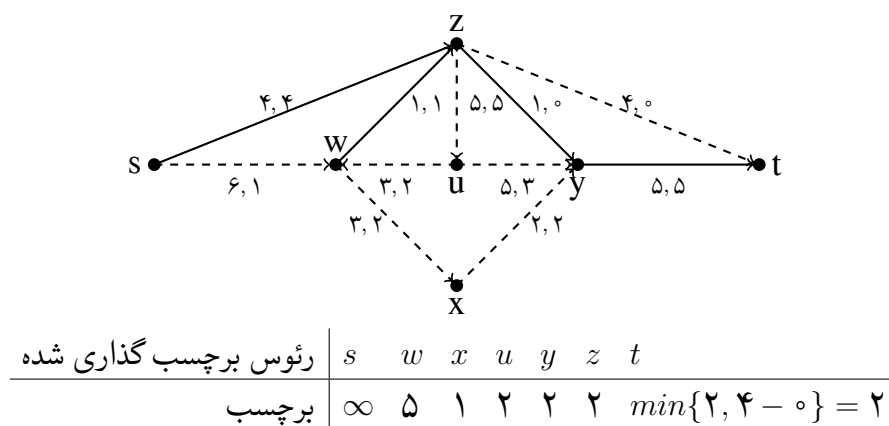
شکل ۱۵.۱: گام سوم



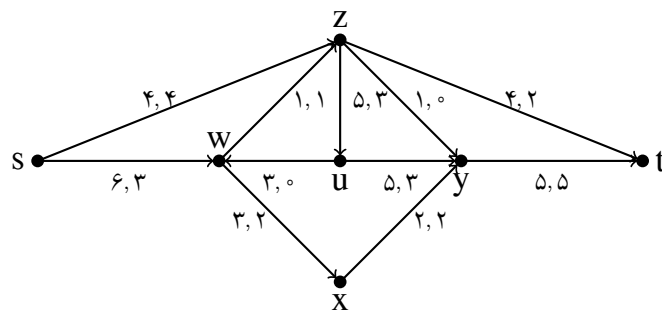
شکل ۱۶.۱: گام چهارم



شکل ۱۷.۱: گام پنجم

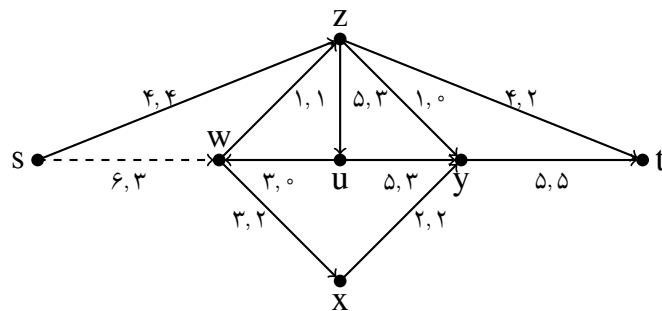


شکل ۱۸.۱: گام ششم



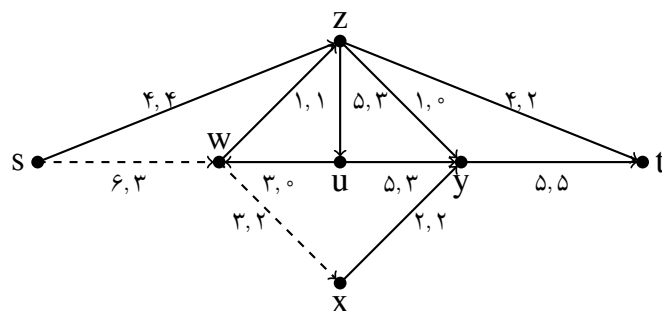
رئوس برچسب گذاری شده	s
برچسب	∞

شکل ۱۹.۱: گام هفتم



رئوس برچسب گذاری شده	s	w
برچسب	∞	$\min\{\infty, 6 - 3\} = 3$

شکل ۲۰.۱: گام هشتم



رئوس برچسب گذاری شده	s	w	x
برچسب	∞	۳	$\min\{3, 3 - 2\} = 1$

شکل ۲۱.۱: گام آخر

۲.۴.۱ حوزه‌ی کاربردهای شبکه

مسایل بسیاری در تحقیق در عملیات وجود دارند که به سادگی می‌توانند به صورت شبکه فرمول‌بندی و با کمک مساله‌ی جریان ماکسیمم حل گردند. به عنوان مثال می‌توان مسایل زیر را نام برد:

۱- طراحی یک شبکه‌ی خط لوله‌ی گازطبیعی در قسمت ساحلی دریا که چاه‌های نفت در خلیج مکزیک را به یک نقطه‌ی تحویل ساحلی مرتبط کند. هدف تابع مینیمم کردن هزینه‌ی ساخت خط لوله است.

۲- تعیین کوتاه‌ترین مسیر بین دو شهر واقع در یک شبکه‌ی راه‌های موجود.

۳- تعیین بیشترین ظرفیت (برحسب تن در سال) شبکه‌ی خط محلول زغال سنگ از معدن زغال سنگ در وایومینگ^{۴۳} به نیروگاه برق هاوستون^{۴۴} (با تلمبه کردن آب در خطوط لوله‌ی آبی، زغال‌سنگ انتقال می‌یابد).

۴- تعیین برنامه‌ی جریان با کمترین هزینه از میدان نفتی به پالایشگاه‌ها از طریق شبکه‌ی خط لوله.

۵- تعیین برنامه‌ی زمان‌بندی (تاریخ آغاز و انجام) برای فعالیت‌های یک طرح عمرانی.

۶- ماکسیمم‌سازی جریان از طریق شبکه‌ی توزیع شرکت از کارخانه‌ها به مشتریان آن.

۷- ماکسیمم‌سازی جریان از طریق شبکه‌ی عرضه‌ی یک شرکت از فروشندگان خود به کارخانه‌های آن.

۸- ماکسیمم‌سازی جریان نفت از طریق سیستم خطوط لوله.

۹- ماکسیمم‌سازی جریان آب از طریق سیستم قنات‌ها.

۱۰- ماکسیمم‌سازی جریان ناشی از وسایل نقلیه از طریق شبکه حمل و نقل.

حل این مسایل و موارد مشابه، با الگوریتم‌های مختلف بهینه‌سازی شبکه انجام می‌شود. الگوریتم جریان ماکسیمم، الگوریتم کوتاه‌ترین مسیر، شبکه‌ی کران‌دار با کمترین هزینه، از جمله‌ی این الگوریتم‌ها می‌باشند.

ضمن اینکه این مسایل با الگوریتم‌های یاد شده حل می‌شوند، می‌توان به طور صریح به صورت برنامه‌های خطی فرمول‌بندی و حل نمود. با وجود این، الگوریتم‌های پیشنهادی براساس شبکه، کاراتر از روش سیمپلکس هستند (برای توضیحات بیشتر این الگوریتم‌ها می‌توانید به منبع [۲۴] مراجعه نمایید).

^{۴۳}Wyoming

^{۴۴}Houston

فصل ۲

شبکه‌های فازی

۱.۲ مقدمه

در یک شبکه‌ی انتقالی ظرفیت کمان‌ها، مقادیر جریان ورودی و خروجی رئوس و هزینه‌های انتقال، ممکن است به عواملی مانند شرایط آب و هوایی، شرایط اضطراری در شبکه، ازدحام ترافیک، تعمیرات و بعضی از عوامل غیرقابل پیش‌بینی دیگر مانند تغییرات در قیمت بنزین، عوارض مربوط به عناصر شبکه و غیره بستگی داشته باشد. بنابراین این احتمال وجود دارد که جریان در شبکه و بالطبع جریان ماکسیمم در شبکه به درستی قابل اندازه‌گیری نباشد. در این حالت می‌توان بحث شبکه‌های انتقال فازی را مطرح نمود. در این فصل قبل از تعریف شبکه‌ی فازی ابتدا چند مفهوم مربوط به مجموعه‌های فازی و اعداد فازی بیان می‌شود.

۲.۲ مفاهیم و تعاریف اولیه

تعریف ۱.۲.۲. تابع عضویت^۱

تابع عضویت (مشخصه) μ_A در یک مجموعه‌ی قطعی $A \subseteq X$ ، نگاشتی از اعضای آن در مجموعه‌ی مرجع X به مجموعه‌ی $\{0, 1\}$ است.

$$\mu_A : X \rightarrow \{0, 1\}, \quad (1.2)$$

تابع عضویت در مجموعه‌های فازی، هر عضو را به بازه‌ی $[0, 1]$ نگاشت می‌کند.

$$\mu_{\tilde{A}} : X \rightarrow [0, 1], \quad (2.2)$$

که $[0, 1]$ ، اعداد حقیقی بین ۰ و ۱ (شامل ۰ و ۱) می‌باشد. $\mu_{\tilde{A}}(x)$ درجه‌ی عضویت اعضای x در مجموعه فازی $\tilde{A}$ برای هر $x \in X$ می‌باشد [۲۱].

^۱Membership function

تعریف ۲.۲.۲. مجموعه‌ی فازی^۲

فرض کنید X یک مجموعه‌ی ناتهی باشد. مجموعه فازی $\tilde{A}$ در X با تابع مشخصه‌ی زیر مشخص می‌شود:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = X \rightarrow [0, 1], \quad (3.2)$$

همچنین داریم که $\tilde{A}$ با مجموعه‌ی چندگانه‌ی زیر به طور کامل مشخص می‌شود [۲۱]:

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) \mid x \in X\}, \quad (4.2)$$

تعاریف زیر از منبع [۱۲] استخراج شده است.

تعریف ۳.۲.۲. α -برش^۳

α -برش (یا مجموعه‌ی α -سطح) یک مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ ، مجموعه‌ای شامل اعضای از مجموعه مرجع X است به طوری که مقدار عضویت آن‌ها بیشتر یا مساوی سطح α باشد، یعنی:

$$\tilde{A} = \{x \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}, \quad (5.2)$$

تعریف ۴.۲.۲. محمل^۴

محمل مجموعه‌ی $\tilde{A}$ ، اعضای از آن مجموعه است که تابع عضویت آن‌ها نامنفی هستند.

$$\text{support}(\tilde{A}) = \{x \in X : \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}. \quad (6.2)$$

تعریف ۵.۲.۲. تحدب^۵

مجموعه فازی $\tilde{A}$ محدب است اگر به ازای همه‌ی $x_1, x_2 \in X$ و $\lambda \in [0, 1]$

$$\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \min(\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)), \quad (7.2)$$

لم ۶.۲.۲. مجموعه فازی محدب است، اگر همه‌ی α -برش‌های آن محدب باشند.

تعریف ۷.۲.۲. عدد فازی^۶

عدد فازی $\tilde{A}$ یک مجموعه‌ی فازی از اعداد حقیقی با شرایط نرمال، محدب (فازی) و تابع عضویت پیوسته از محمل (مرز) کراندار می‌باشد. خانواده‌ی همه‌ی اعداد فازی را با F نمایش می‌دهند.

فرض کنید $\tilde{A}$ یک عدد فازی باشد. آنگاه $\tilde{A}_\alpha$ محدب بسته (فشرده) زیرمجموعه‌ای از R برای همه‌ی

$\alpha \in [0, 1]$ است و

$$a_1(\alpha) = \min \tilde{A}_\alpha, \quad a_2(\alpha) = \max \tilde{A}_\alpha, \quad (8.2)$$

^۲Fuzzy set

^۳ α -cut

^۴Support

^۵Convexity

^۶Fuzzy number

به عبارت دیگر، $a_1(\alpha)$ نشان‌دهنده‌ی نمای (کمان) سمت چپ و $a_2(\alpha)$ نمای سمت راست α -برش است. علاوه‌براین، تابع نمای سمت چپ:

$$a_1 : [0, 1] \rightarrow R, \quad (9.2)$$

صعودی یکنوا است و از پایین نیمه‌پیوسته (شبه پیوسته) می‌باشد و تابع نمای سمت راست:

$$a_2 : [0, 1] \rightarrow R, \quad (10.2)$$

نزولی یکنوا است و از بالا نیمه‌پیوسته می‌باشد. بنابراین:

$$\tilde{A}_\alpha = [a_1(\alpha), a_2(\alpha)]. \quad (11.2)$$

تعریف ۸.۲.۲. اعداد فازی ${}^V LR$

هر عدد فازی $\tilde{A} \in F$ می‌تواند به صورت زیر توصیف شود:

$$\mu_{\tilde{A}}(t) = \begin{cases} L\left(\frac{a-t}{\alpha}\right), & \text{if } t \in [a-\alpha, a] \\ 1, & \text{if } t \in [a, b] \\ R\left(\frac{t-b}{\beta}\right), & \text{if } t \in [b, b+\beta] \\ 0, & \text{o.w} \end{cases} \quad (12.2)$$

که $[a, b]$ راس یا نوک $\tilde{A}$ می‌باشد. α و β به ترتیب راست و چپ عرض $\tilde{A}$ هستند.

$$L : [0, 1] \rightarrow [0, 1], \quad R : [0, 1] \rightarrow [0, 1], \quad (13.2)$$

شکل پیوسته و غیرافزایشی توابع با $L(0) = R(0) = 1$ و $L(1) = R(1) = 0$ می‌باشد. این بازه‌ی فازی را می‌توان LR -گونه نامید و به صورت $\tilde{A} = (a, b, \alpha, \beta)_{LR}$ نشان داد. یک عدد LR فازی مثالی است، اگر $a = b$ و $L = R = 1 - x$. عدد فازی مثالی با مرکز $a = b$ می‌تواند به صورت مقدار فازی « x تقریباً برابر a » دیده شود.

تعریف ۹.۲.۲. فرض کنید $[a, b]$ و $[c, d]$ دو بازه‌ی بسته باشند، آنگاه داریم:

$$[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d], \quad \text{الف:}$$

$$-[a, b] = [-b, -a], \quad \text{ب:}$$

$$[a, b] - [c, d] = [a, b] + (-[c, d]) = [a, b] + [-d, -c] = [a - d, b - c], \quad \text{ج:}$$

تعریف ۱۰.۲.۲. گراف فازی A

فرض کنید X یک مجموعه متناهی و برابر با مجموعه $\{1, 2, \dots, n\}$ باشد. سه تایی $\tilde{G}(X, \sigma, \mu)$ گراف فازی روی X نامیده می‌شود، به‌طوری‌که:

${}^V LR$ fuzzy numbers

A Fuzzy graph

$\sigma : X \rightarrow [0, 1]$ و برای سطح عضویت هر گره یا راس برقرار است،
 $\mu : X \times X \rightarrow [0, 1]$ و برای سطح عضویت هر کمان برقرار است،
 همچنین داریم: $\mu(i, j) \leq \sigma(i) \wedge \sigma(j)$.

بدیهی است که $\mu(0, 0)$ به عنوان یک رابطه‌ی فازی در X خواهد بود، بنابراین می‌توانیم $\mu^n(0, 0)$ را به صورت ترکیب μ ، n بار باخودش و با کمک عمل ماکسیمم - مینیمم کلاسیک تعریف کنیم و

$$\mu^n(i, j) = \sup\{\mu(i_1 i_2) \wedge \mu(i_2 i_3) \wedge \dots \wedge \mu(i_{n-1} j) \mid i_1, \dots, i_{n-1} \in V\}, \quad (14.2)$$

$$\mu^\infty(i, j) = \sup_n \mu^n(i, j) \quad \forall i, j \in X, \quad n = \{1, 2, \dots\}. \quad (15.2)$$

رابطه‌ی اخیر شدت همبندی مسیر بین i و j تعریف می‌شود.

۱.۲.۲ دسته‌بندی برای حالت‌های مختلف شبکه‌های فازی

قبل از اینکه تعریف شبکه‌ی فازی بیان شود، باید به این نکته اشاره کرد که یک شبکه‌ی فازی، که به صورت گراف جهت‌دار $G = (V, E)$ می‌باشد، را می‌توان در حالت‌های مختلف زیر بررسی و تعریف نمود:

(۱) گراف مربوط به شبکه، فازی باشد، ولی ظرفیت کمان‌ها قطعی باشد ($\tilde{G} = (V, E)$).

(۲) گراف شبکه، قطعی باشد، ولی ظرفیت کمان‌ها فازی باشد ($G = (V, \tilde{E})$).

(۳) گراف و ظرفیت هر دو فازی باشند ($\tilde{G} = (V, \tilde{E})$).

(۴) گراف و ظرفیت هر دو قطعی باشند، اما رئوس گراف فازی باشد ($G = (\tilde{V}, E)$).

و به همین ترتیب می‌توان حالت‌های مختلف دیگری برای شبکه‌های فازی از جمله ظرفیت فازی، کمان فازی، راس فازی و ... در نظر گرفت. در این مجموعه شبکه‌ی فازی با حالت ظرفیت فازی، کمان فازی، گراف فازی و رئوس غیر فازی بیان و تعریف شده است.

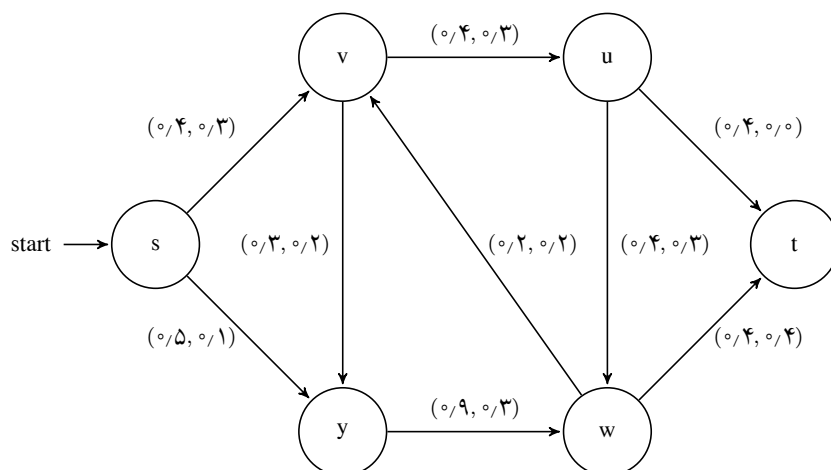
تعریف ۱۱.۲.۲. شبکه فازی^۹

فرض کنید $\tilde{G} = (V, \tilde{E})$ یک گراف جهت‌دار همبند باشد. در این صورت $\tilde{G}$ را که برای هر کمان آن، یک ظرفیت فازی در نظر گرفته شده است را یک شبکه‌ی فازی گویند، اگر شرایط زیر برقرار باشند:
 (الف): دارای راسی با درجه‌ی ورودی صفر به نام منبع s و همچنین دارای راسی با درجه‌ی خروجی صفر به نام مقصد t باشد.

(ب): گراف $\tilde{G}$ دارای وزن فازی می‌باشد. بنابراین تابعی از $\tilde{E}$ به مجموعه‌ی اعداد حقیقی نامنفی وجود دارد که به هر کمان ظرفیتی فازی اختصاص می‌دهد که جریان فازی عبوری از آن را محدود می‌کند و برای هر کمان (i, j) ، با $\tilde{c}_{(i,j)}$ نشان داده می‌شود.

در شکل (۱.۲) یک شبکه‌ی فازی نشان داده شده است. همان طور که مشاهده می‌کنید، هر کمان از دو عدد فازی که عدد اول بیانگر ظرفیت و عدد دوم بیانگر جریان عبوری از هر کمان می‌باشد، تشکیل

^۹Fuzzy Network



شکل ۱.۲: یک شبکه‌ی جهت‌دار فازی با جریان و ظرفیت‌های فازی

می‌شود. همچنین در هر کمان در جهت جریان دارای همان ظرفیت کمان و در جهت مخالف جریان دارای ظرفیت صفر می‌باشد. علاوه بر این مقدار جریان در یک کمان همواره کمتر مساوی ظرفیت آن کمان می‌باشد. همچنین لازم به ذکر است که در تمامی موارد ذکر شده در این پایان‌نامه رئوس غیر فازی هستند و دارای وزن واحد ($\sum V_i = 1$) می‌باشند.

تعریف ۱۲.۲.۲. جریان فازی^{۱۰}

جریان فازی $\tilde{f}$ در شبکه‌ی N با راس مبدا s و راس مقصد t و ظرفیت‌های کمان $\{\tilde{c}_i\}$ ، تابعی است که روی مجموعه کمان‌های E به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$0 \leq \tilde{f}(e) \leq \tilde{c}(e) \quad (16.2)$$

$$\begin{cases} 0 \leq \tilde{f}_i^R(e) \leq \tilde{c}_i^R(e) \\ 0 \leq \tilde{f}_i^L(e) \leq \tilde{c}_i^L(e) \end{cases} \quad (17.2)$$

که i عدد متناظر با α -سطح، L اندیس متناظر با کران پایین بازه‌ی α -سطح و R اندیس متناظر با کران بالای بازه‌ی α -سطح می‌باشد.

$$\sum_{(x,y) \in E} \tilde{f}(x,y) = \sum_{(y,x) \in E} \tilde{f}(y,x), \quad \forall x \neq s, t \quad (18.2)$$

تعریف ۱۳.۲.۲. محاسبات روی α -برش از اعداد فازی

فرض کنید $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ اعداد فازی با $\tilde{A}_\alpha = [a_1(\alpha), a_2(\alpha)]$ و $\tilde{B}_\alpha = [b_1(\alpha), b_2(\alpha)]$ باشد. آنگاه داریم [۲۵]:

$$[\tilde{A} + \tilde{B}]_\alpha = [a_1(\alpha) + b_1(\alpha), a_2(\alpha) + b_2(\alpha)], \quad (19.2)$$

^{۱۰}Fuzzy Flow

$$[\tilde{A} - \tilde{B}]_{\alpha} = [a_1(\alpha) - b_2(\alpha), a_2(\alpha) - b_1(\alpha)], \quad (20.2)$$

$$[\lambda \tilde{A}]_{\alpha} = \lambda \tilde{A}_{\alpha}, \quad (21.2)$$

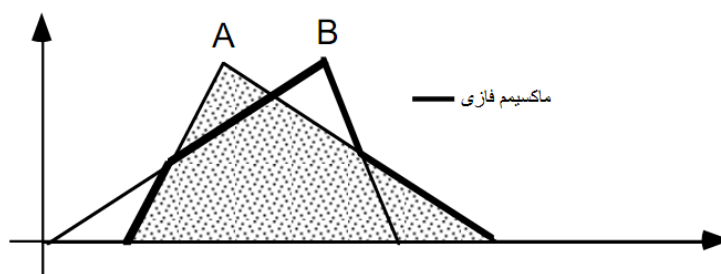
که $[\lambda \tilde{A}]_{\alpha} = [\lambda a_1(\alpha), \lambda a_2(\alpha)]$ اگر $\lambda \geq 0$ و $[\lambda \tilde{A}]_{\alpha} = [\lambda a_2(\alpha), \lambda a_1(\alpha)]$ اگر $\lambda < 0$ به ازای
همه $\alpha \in [0, 1]$ برقرار است.

تعریف ۱۴.۲.۲. ماکسیم فازی^{۱۱}

فرض کنید $\tilde{A}_{\alpha} = [a_1(\alpha), a_2(\alpha)]$ و $\tilde{B}_{\alpha} = [b_1(\alpha), b_2(\alpha)]$ دو عدد فازی باشند.

$$[\max(\tilde{A}, \tilde{B})]_{\alpha} = \max\{\tilde{A}_{\alpha}, \tilde{B}_{\alpha}\} = [\max\{a_1(\alpha), b_1(\alpha)\}, \max\{a_2(\alpha), b_2(\alpha)\}], \quad (22.2)$$

این نماد $\max\{\tilde{A}, \tilde{B}\}$ در شکل (۲.۲) نشان داده شده است.



شکل ۲.۲: ماکسیم اعداد فازی مثلثی.

تعاریف زیر از منبع [۲۲] استخراج شده است.

۳.۲ تعاریف انواع مختلف اعداد فازی

تعریف ۱.۳.۲. عدد فازی مثلثی^{۱۲}

عدد فازی $\tilde{A} = (a, b, c)$ گفته می‌شود، اگر تابع عضویت آن به صورت زیر باشد: $(a, b, c \in R)$

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{(x-a)}{(b-a)}, & a \leq x \leq b \\ \frac{(x-c)}{(b-c)}, & b \leq x \leq c \\ 0, & o.w \end{cases} \quad (23.2)$$

تعریف ۲.۳.۲. عدد فازی مثلثی $\tilde{A} = (a, b, c)$ عدد فازی نامنفی گفته می‌شود اگر فقط اگر $\alpha \geq 0$.

^{۱۱}Fuzzy maximum

^{۱۲}Fuzzy Triangular Number

۱.۳.۲ عملیات حسابی اعداد فازی مثلثی

حال جمع و تفریق بین اعداد فازی مثلثی روی مجموعه مرجع اعداد حقیقی R بیان می‌شود. فرض کنید $\tilde{A}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ و $\tilde{A}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ دو عدد فازی مثلثی باشند، آنگاه داریم:

$$\text{الف: } \tilde{A}_1 \oplus \tilde{A}_2 = (a_1, b_1, c_1) \oplus (a_2, b_2, c_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2),$$

$$\text{ب: } \tilde{A}_1 \ominus \tilde{A}_2 = (a_1, b_1, c_1) \ominus (a_2, b_2, c_2) = (a_1 - c_2, b_1 - b_2, c_1 - a_2),$$

$$\text{ج: } \tilde{A}_1 = \tilde{A}_2 \iff a_1 = a_2, b_1 = b_2, c_1 = c_2.$$

۲.۳.۲ تبدیل قید نامساوی به قید تساوی

فرض کنید $\tilde{A}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ و $\tilde{B}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ دو عدد فازی مثلثی باشند، آنگاه داریم [۱۹]:

$$\tilde{A} \preceq \tilde{B} \iff a_1 \leq a_2, b_1 - a_1 \leq b_2 - a_2, c_1 - b_1 \leq c_2 - b_2. \quad (24.2)$$

اگر $\tilde{A} \preceq \tilde{B}$ ، آنگاه می‌توان آن را به صورت $\tilde{A} \oplus \tilde{C} = \tilde{B}$ تبدیل کرد، $\tilde{C}$ عدد فازی مثلثی نامنفی می‌باشد.

تعریف ۳.۳.۲. عدد فازی دوزنقه‌ای^{۱۳}

عدد فازی $\tilde{A} = (a, b, c, d)$ عدد فازی دوزنقه‌ای گفته می‌شود، اگر تابع عضویت آن به صورت زیر

باشد: $(a, b, c, d \in R)$

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x \leq a \\ \frac{(x-a)}{(b-a)}, & a \leq x < b \\ 1, & b \leq x \leq c \\ \frac{(x-d)}{(c-d)}, & c < x \leq d \\ 0, & d \leq x < \infty \end{cases} \quad (25.2)$$

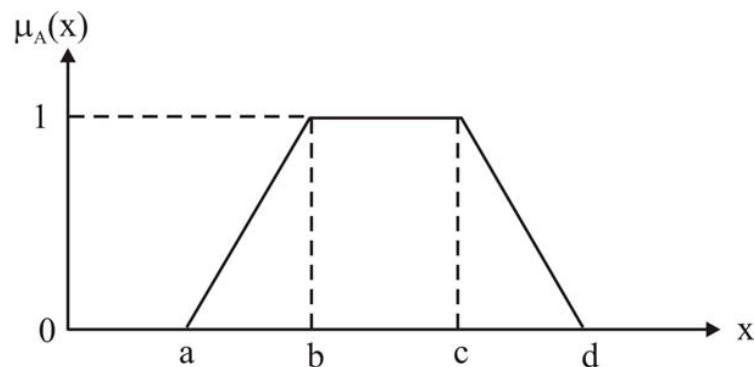
۳.۳.۲ عملیات حسابی اعداد فازی دوزنقه‌ای

فرض کنید $\tilde{A}_1 = (a_1, b_1, c_1, d_1)$ و $\tilde{A}_2 = (a_2, b_2, c_2, d_2)$ دو عدد فازی دوزنقه‌ای باشند، آنگاه داریم:

$$\text{الف: } \tilde{A}_1 \oplus \tilde{A}_2 = (a_1, b_1, c_1, d_1) \oplus (a_2, b_2, c_2, d_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2, d_1 + d_2),$$

$$\text{ب: } \tilde{A}_1 \ominus \tilde{A}_2 = (a_1, b_1, c_1, d_1) \ominus (a_2, b_2, c_2, d_2) = (a_1 - d_2, b_1 - c_2, c_1 - b_2, d_1 - a_2),$$

^{۱۳}Fuzzy trapezoidal Number



شکل ۳.۲: عدد فازی دوزنقه‌ای

تعریف ۴.۳.۲. عدد فازی دوزنقه‌ای تعمیم یافته^{۱۴}

عدد فازی $\tilde{A} = (a, b, c, d; w)$ عدد فازی دوزنقه‌ای تعمیم یافته نامیده می‌شود، اگر تابع عضویت آن به صورت زیر باشد: $(0 < w \leq 1 \text{ و } a, b, c, d \in R)$

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x \leq a \\ \frac{w(x-a)}{(b-a)}, & a \leq x < b \\ w, & b \leq x \leq c \\ \frac{w(x-d)}{(c-d)}, & c < x \leq d \\ 0, & d \leq x < \infty \end{cases} \quad (26.2)$$

۴.۳.۲ عملیات حسابی اعداد فازی دوزنقه‌ای تعمیم یافته

حال جمع و تفریق بین اعداد فازی دوزنقه‌ای تعمیم یافته، روی مجموعه مرجع اعداد حقیقی R بیان می‌شود.

اگر $\tilde{A}_1 = (a_1, b_1, c_1, d_1; w_1)$ و $\tilde{A}_2 = (a_2, b_2, c_2, d_2; w_2)$ دو عدد فازی دوزنقه‌ای تعمیم یافته باشند، آنگاه داریم:

$$(i) \quad \tilde{A}_1 \oplus \tilde{A}_2 = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2, d_1 + d_2; \min(w_1, w_2)), \quad (27.2)$$

$$(ii) \quad \tilde{A}_1 \ominus \tilde{A}_2 = (a_1 - d_2, b_1 - c_2, c_1 - b_2, d_1 - a_2; \min(w_1, w_2)), \quad (28.2)$$

مثال ۵.۳.۲. فرض کنید $\tilde{A} = (-2, 3, 5, 7; 0.3)$ و $\tilde{B} = (-3, 4, 10, 12; 0.2)$ دو عدد فازی دوزنقه‌ای تعمیم یافته باشند، آنگاه داریم:

$$(i) \quad \tilde{A} \oplus \tilde{B} = (-5, 7, 15, 19; \min(0.3, 0.2)) = (-5, 7, 15, 19; 0.2) \quad (29.2)$$

$$(ii) \quad \tilde{A} \ominus \tilde{B} = (-14, -7, 1, 10; \min(0.3, 0.2)) = (-14, -7, 1, 10; 0.2) \quad (30.2)$$

^{۱۴}Fuzzy generalized trapezoidal Number

تعریف ۶.۳.۲. تابع رتبه‌بندی^{۱۵}

یک روش موثر برای مقایسه‌ی اعداد فازی، استفاده از تابع رتبه‌بندی (رتبه‌ای)، $\mathfrak{R} : \tilde{F}(R) \rightarrow R$ می‌باشد، که $\tilde{F}(R)$ مجموعه اعداد فازی تعریف شده روی مجموعه اعداد حقیقی است که هر عدد فازی را به خط حقیقی نگاشت می‌کند و باید در آن یک ترتیب طبیعی وجود داشته باشد، به عبارت دیگر:

$$(i) \quad \tilde{A} \succ \tilde{B} \Leftrightarrow \mathfrak{R}(\tilde{A}) > \mathfrak{R}(\tilde{B}), \quad (31.2)$$

$$(ii) \quad \tilde{A} \prec \tilde{B} \Leftrightarrow \mathfrak{R}(\tilde{A}) < \mathfrak{R}(\tilde{B}), \quad (32.2)$$

$$(iii) \quad \tilde{A} \approx \tilde{B} \Leftrightarrow \mathfrak{R}(\tilde{A}) = \mathfrak{R}(\tilde{B}), \quad (33.2)$$

فرض کنید $\tilde{A} = (a_1, b_1, c_1, d_1; w_1)$ و $\tilde{B} = (a_2, b_2, c_2, d_2; w_2)$ دو عدد فازی دوزنقه‌ای تعمیم یافته باشند و $w = \min(w_1, w_2)$ ، آنگاه داریم:

$$\mathfrak{R}(\tilde{A}) = \frac{w(a_1 + b_1 + c_1 + d_1)}{4} \quad \text{و} \quad \mathfrak{R}(\tilde{B}) = \frac{w(a_2 + b_2 + c_2 + d_2)}{4}, \quad (34.2)$$

همچنین فرض کنید $\tilde{A} = (a, b, c)$ یک عدد فازی مثلثی باشد، آنگاه داریم:

$$\mathfrak{R}(\tilde{A}) = \frac{a + 2b + c}{4}$$

و اگر $\tilde{A} = (a, b, c, d)$ یک عدد فازی دوزنقه‌ای باشد، آنگاه داریم:

$$\mathfrak{R}(\tilde{A}) = \frac{a + b + c + d}{4}$$

تعریف ۷.۳.۲. تابع حالت^{۱۶} دو عدد فازی تعمیم یافته $\tilde{A} \approx \tilde{B}$ با تابع رتبه‌بندی متناظر را در نظر بگیرید، تابع حالت (نما) برای وضعیت جریان ماکسیم بیان می‌شود. تابع حالت به صورت $M : \tilde{F}(R) \rightarrow R$ می‌باشد، $\tilde{F}(R)$ مجموعه اعداد فازی تعریف شده روی مجموعه اعداد حقیقی است که هر عدد فازی را به خط حقیقی نگاشت می‌کند.

فرض کنید $\tilde{A} = (a_1, b_1, c_1, d_1; w_1)$ و $\tilde{B} = (a_2, b_2, c_2, d_2; w_2)$ دو عدد فازی دوزنقه‌ای تعمیم یافته باشند، آنگاه داریم:

$$M(\tilde{A}) = \frac{w_1(b_1 + c_1)}{2} \quad \text{و} \quad M(\tilde{B}) = \frac{w_2(b_2 + c_2)}{2}. \quad (35.2)$$

نکته ۸.۳.۲. فرض کنید $\tilde{A}_i$; $i = 1, 2, \dots, n$ یک مجموعه از اعداد فازی دوزنقه‌ای تعمیم یافته باشد. اگر به ازای همه‌ی i ها $\mathfrak{R}(\tilde{A}_k) \leq \mathfrak{R}(\tilde{A}_i)$ باشد، آنگاه عدد فازی دوزنقه‌ای تعمیم یافته $\tilde{A}_k$ مینیمم مجموعه‌ی $\tilde{A}_i$; $i = 1, 2, \dots, n$ است و اگر به ازای همه‌ی i ها $\mathfrak{R}(\tilde{A}_t) \geq \mathfrak{R}(\tilde{A}_i)$ باشد، آنگاه عدد فازی دوزنقه‌ای تعمیم یافته $\tilde{A}_t$ ماکسیم مجموعه‌ی $\tilde{A}_i$; $i = 1, 2, \dots, n$ می‌باشد.

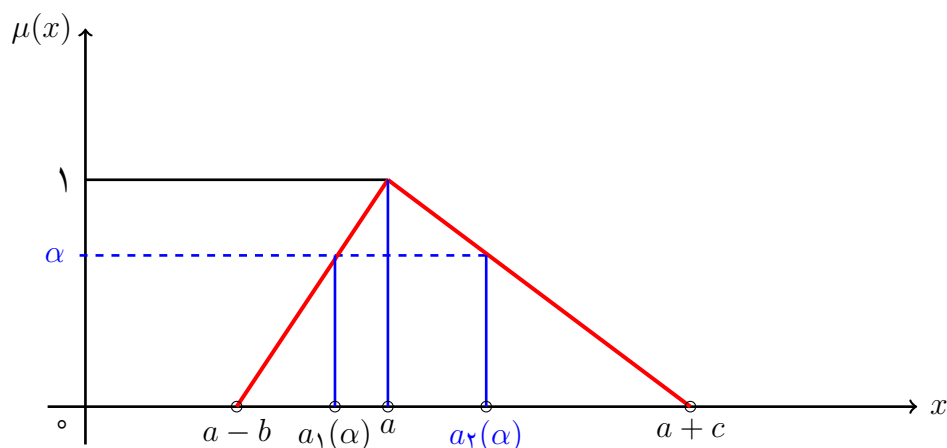
۵.۳.۲. عملیات با اعداد فازی مثلثی

زمانی که مسایل جریان ماکسیم و یافتن جریان با هزینه‌ی مینیم را در نظر می‌گیریم، با مسایل فازی سازی در شبکه مواجه می‌شویم. ظرفیت‌های کمان، مقادیر جریان، عبور در امتداد کمان‌ها، هزینه‌های

^{۱۵}Ranking Function^{۱۶}Mode Function

انتقال در هر واحد از محصولات با دقت نمی‌توانند اندازه‌گیری شوند، بنابراین ما این پارامترها را با اعداد فازی مثلثی نمایش خواهیم داد.

اعداد فازی مثلثی به این صورت نمایش داده می‌شود: (a, b, c) ، که a - مرکز عدد مثلثی، b - انحراف به سمت چپ مرکز، c - انحراف به سمت راست مرکز می‌باشد، همان‌طور که در شکل (۴.۲) نشان داده شده است.



شکل ۴.۲: عدد فازی مثلثی

جمع و تفریق اعداد فازی مثلثی به صورت زیر هستند: فرض کنید $\tilde{A}_1$ و $\tilde{A}_2$ اعداد مثلثی فازی باشند، به طوری که $\tilde{A}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ و $\tilde{A}_2 = (a_2, b_2, c_2)$. بنابراین داریم:

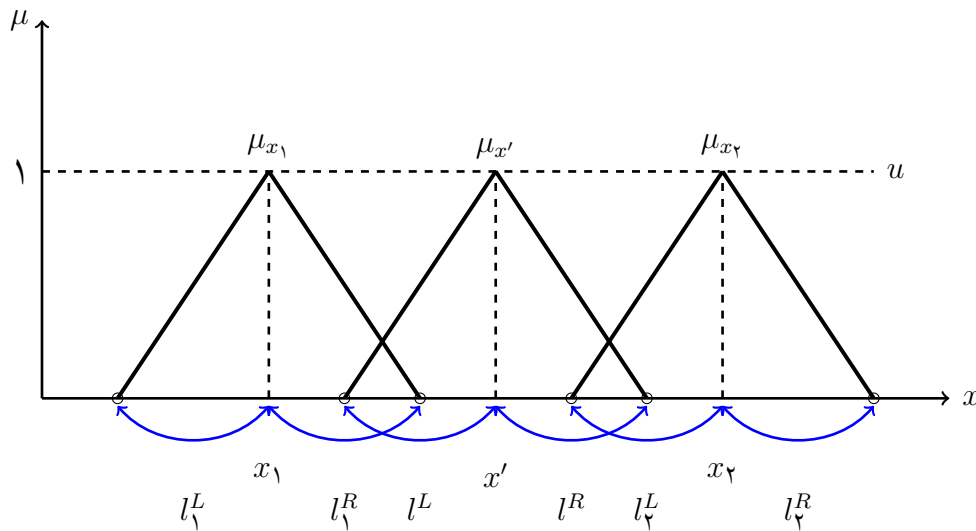
$$\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2), \quad (36.2)$$

$$\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2 = (a_1 - a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2), \quad (37.2)$$

نقطه‌ی ضعف این روش‌ها در جمع و تفریق اعداد فازی مثلثی، مبهم بودن عدد به دست آمده می‌باشد. به عنوان مثال، هنگام جمع کردن اعداد مثلثی با خود و با افزایش مرزهای غیرقطعی داریم: $(2, 1, 1) + (2, 1, 1) = (4, 2, 2)$ و $(2, 1, 1) + (2, 1, 1) + (2, 1, 1) = (6, 3, 3)$. در حالت کلی درست نیست، زیرا مرکز عدد مثلثی باید افزایش یابد، درحالی‌که مرزهای آن باید ثابت باقی بماند. در حقیقت مقدار مرزهای عدد فازی بستگی به اندازه‌ی مرکز آن دارد، که معمولاً هنگام تعیین اعداد فازی، در نظر گرفته نمی‌شود. بنابراین، بهتر است اول مرکز عدد مشخص باشد (برای مثال هنگامی که 1 kg از مواد را اندازه‌گیری می‌کنیم، در مورد «در حدود 1 kg صحبت می‌کنیم، در واقع اعداد بین « 900 تا 1100 g » را شامل می‌شود، اما هنگامی که در مورد 1 تن مواد صحبت می‌کنیم، به مفهوم «حدود 1 تن» دلالت می‌کند، یعنی اعداد بین 990 kg و 1110 kg).

مقایسه‌ی اعداد فازی مثلثی با توجه به معیارهای مختلف نیز بسیار دشوار و وقت‌گیر است. در نتیجه، روش بعدی برای زمانی‌که با اعداد مثلثی فازی سروکار داریم، پیشنهاد شده است. فرض کنید مقادیر

ظرفیت کمان‌ها وجود داشته باشند، جریان‌ها یا هزینه‌های انتقال به صورت اعداد فازی مثلثی می‌باشند. سپس هنگام جمع کردن (کم کردن) دو عدد فازی مثلثی اصلی، مراکز آن‌ها جمع (تفریق) می‌شوند و برای محاسبه‌ی انحرافات لازم به تعریف ارزش مورد نیاز برای مقادیر مجاور است. فرض کنید ظرفیت کمانی فازی (جریان یا هزینه‌ی حمل و نقل) «در نزدیکی x » بین دو مقدار وابسته‌ی «در نزدیکی x_1 » و «در نزدیکی x_2 » باشد، $(x_1 \leq x \leq x_2)$ که توابع عضویت $\mu_{x_1}(x_1)$ و $\mu_{x_2}(x_2)$ به شکل یک عدد مثلثی باشند، که در شکل (۵.۲) نشان داده شده‌اند.



شکل ۵.۲: مقدار دادن به ظرفیت‌های کمان‌ها (جریان‌ها یا هزینه‌های انتقال).

بنابراین، می‌توان مجموعه‌ی مرزهای تابع عضویت از ظرفیت کمان فازی (جریان یا هزینه‌ی انتقال) «در نزدیکی x » را بر اساس ترکیب خطی از مرزهای چپ و راست از مقادیر مجاور به صورت زیر نشان داد:

$$l^L = \frac{(x_2 - x)}{(x_2 - x_1)} \times l_1^L + \left(1 - \frac{(x_2 - x)}{(x_2 - x_1)}\right) \times l_2^L, \quad (38.2)$$

$$l^R = \frac{(x_2 - x)}{(x_2 - x_1)} \times l_1^R + \left(1 - \frac{(x_2 - x)}{(x_2 - x_1)}\right) \times l_2^R. \quad (39.2)$$

در رابطه‌ی (۳۸.۲) l^L مرز انحراف سمت چپ عدد فازی مورد نیاز است، l^R مرز انحراف سمت راست است. در مورد زمانی که مقدار مرکزی عدد مثلثی با جمع کردن (کم کردن) مقدار مشخص شده روی محور اعداد تکرار می‌شود، مرزهای انحراف آن منطبق با مرزهای انحراف تعداد مشخص شده روی محور اعداد می‌باشد. اگر مقدار مرکزی مورد نیاز بین دو عدد نباشد، اما مقدار آن اولین بار روی محور اعداد مشخص شده باشد، مرزهای انحراف آن همزمان مقادیر مشخص شده‌ی قبلی، روی محور مشخص شده‌اند. مشابه این حالت زمانی است که مقدار مورد نیاز مرکزی برای آخرین مقدار مشخص شده است.

فصل ۳

حل مسایل جریان ماکسیمم

۱.۳ مسالهی جریان ماکسیمم در شبکه‌های فازی

گفتیم که به یک گراف جهت دار با کمان‌های وزن دار به طوری که یک راس مبدا و یک راس مقصد داشته باشد، شبکه‌ی جریان^۱ می‌گوییم. وزن هر کمان، نشان‌دهنده‌ی ظرفیت جریان عبوری از آن کمان می‌باشد و جهت هر کمان نشان‌دهنده‌ی جهت قابل عبور جریان است. در مسالهی جریان ماکسیمم^۲ می‌خواهیم حداکثر جریانی را پیدا کنیم که می‌توان از منبع به مقصد منتقل کرد، به طوری که از هر کمان حداکثر به اندازه‌ی ظرفیت آن و در جهت مجاز جریان عبور کند.

مسالهی جریان ماکسیمم در شبکه‌های فازی به طور کلی به این صورت است: با در اختیار داشتن یک گراف با ظرفیت کمان‌های فازی مثبت و یک راس مبدا s و یک راس مقصد t ، هدف یافتن راهی برای ارسال بیشترین مقدار یک نوع کالا (جریان) در امتداد مسیرهایی از s به t به گونه‌ای که مقدار کالای عبوری از یک کمان حداکثر برابر ظرفیت آن کمان باشد. در مسالهی st -برش مینیمم (دوگان مسالهی جریان ماکسیمم) نیز هدف یافتن مجموعه‌ای از کمان‌ها با کمترین ظرفیت است به گونه‌ای که هر مسیر از s به t شامل حداقل یک کمان در این مجموعه باشد. یک نمونه از مسالهی جریان ماکسیمم فازی $\tilde{G} = (V, \tilde{E}, s, t, \tilde{c})$ که $s \in V$ راس متمایزی است که منبع نامیده می‌شود، $t \in \tilde{E}$ راس متمایزی است که حفره یا مقصد نامیده می‌شود و $\tilde{c}$ تابع ظرفیت فازی است. طبق تعریف جریان نیز داریم:

$$\forall v \in V - \{s, t\} : \sum_{w \in V: (v,w) \in \tilde{E}} \tilde{f}(v, w) = 0, \quad (1.3)$$

و این به این معنی است که برای همه‌ی رئوس به غیر از منبع و مقصد، جریان خالصی که از شبکه خارج می‌شود برابر صفر است. یعنی لازم نیست جریان خروجی و ورودی راس v را تشخیص دهیم، چون

^۱ Network flow

^۲ Maximum flow

مقدار جریانی که به هر راس وارد می‌شود با مقدار جریانی که از آن راس خارج می‌شوند، با هم برابرند. مقدار جریان فازی $\tilde{f}$ برابر جریان خالص ورودی به مقصد است:

$$|\tilde{f}| = \sum_{v \in V: (s,v) \in \tilde{E}} \tilde{f}(s,v) = \sum_{v \in V: (v,t) \in \tilde{E}} \tilde{f}(v,t), \quad (2.3)$$

هدف پیدا کردن یک جریان ماکسیم است. مسیر افزوده یک مسیر $s - t$ مانده است. بدیهی است که اگر مسیر افزوده در $\tilde{G}_{\tilde{f}}$ وجود داشته باشد، آنگاه $\tilde{f}$ را فقط از این مسیر می‌توان با ارسال جریان بهبود بخشید.

قضیه ۱.۱.۳. جریان $\tilde{f}$ یک جریان ماکسیم است اگر و فقط اگر $\tilde{G}_{\tilde{f}}$ هیچ مسیر افزوده‌ای نداشته باشد.

حال برای حل مساله‌ی جریان ماکسیم الگوریتمی بیان می‌شود. این الگوریتم از منبع [۲۰] استخراج شده است.

۲.۳ الگوریتمی برای حل مسایل جریان ماکسیم فازی

با توجه به این‌که در موارد بسیاری امکان محدود کردن تابع عضویت به شکل نرمال وجود ندارد، چن^۳ پیشنهاد مفهوم اعداد فازی تعمیم یافته را داد [۵]. تحقیقات زیادی در مورد اعداد فازی تعمیم یافته صورت گرفته‌اند که برای حل مسایل واقعی زندگی به کار رفته‌اند. اما تاکنون اعداد فازی تعمیم یافته جهت حل مسایل جریان ماکسیم به درستی به کار برده نشده است. در این قسمت، الگوریتم موجود برای یافتن جریان ماکسیمال فازی بین منبع و مقصد، با نمایش همه‌ی پارامترها با اعداد فازی دوزنقه‌ای تعمیم یافته، به کار رفته است.

الگوریتم بیان شده یک روش برچسب‌گذاری می‌باشد. چون این الگوریتم توسعه‌ی مستقیمی از الگوریتم‌های موجود است، بنابراین فهم آن خیلی ساده است و برای حل مسایل ماکسیمال فازی که در موقعیت‌های واقعی زندگی رخ می‌دهد، به کار می‌رود. الگوریتم جریان ماکسیمال فازی برای یافتن مسیرهای دارای شرایط لازم با جریان مثبت در شبکه، بین منبع و مقصد پایه‌ریزی شده است. کمان (i, j) با ظرفیت‌های فازی اولیه $(\tilde{f}_{c_{ij}}, \tilde{f}_{c_{ji}})$ را در نظر بگیرید. بخشی از این ظرفیت‌های فازی که از جریان در کمان به دست آمده‌اند، مقادیر مانده‌ی فازی (ظرفیت‌های فازی باقی‌مانده) از کمان به روز رسانی شده‌اند. نماد $(\tilde{f}_{c_{ij}}, \tilde{f}_{c_{ji}})$ را برای نمایش این مانده‌های فازی به کار می‌برند.

برای هر راس j که از راس i جریان دریافت می‌کند، برچسب $[fa_j, i]$ قرار می‌دهند، که fa_j جریان فازی از راس i به j می‌باشد. مراحل الگوریتم به صورت زیر خلاصه می‌شود:

^۳Chen

- گام اول: برای همه‌ی کمان‌های (i, j) ، مجموعه‌ی ظرفیت فازی مانده (خروجی) مساوی با مجموعه‌ی ظرفیت فازی اولیه (ورودی) می‌باشد، به عبارت دیگر داریم:

$$(\tilde{f}c_{ij}, \tilde{f}c_{ji}) = (\tilde{f}c_{ij}, \tilde{f}c_{ji}), \quad (3.3)$$

فرض کنید $\tilde{f}a_1 = (\infty, \infty, \infty, \infty; 1)$ و منبع ۱ را با $[(\infty, \infty, \infty, \infty; 1), -]$ برچسب گذاری کنید و قرار دهید $i = 1$ ، و به گام دوم بروید.

- گام دوم: S_i ، مجموعه‌ی رئوس برچسب نخورده‌ی j که می‌تواند مستقیماً از راس i به وسیله‌ی کمان‌های با مقدار مانده‌ی مثبت به دست آید، را تعیین کنید (به عبارت دیگر، $\tilde{f}c_{ij}$ به ازای همه‌ی $j \in S_i$ یک عدد فازی نامنفی است). اگر $S_i \neq \emptyset$ ، به گام سوم بروید. در غیر این صورت، به گام چهارم بروید.

- گام سوم: $k \in S_i$ را تعیین کنید به طوری که، $\max_{j \in S_i} \{\Re(\tilde{f}c_{ij})\} = \Re(\tilde{f}c_{ik})$ قرار دهید $\tilde{f}a_k = \tilde{f}c_{ik}$ و راس k را با $[\tilde{f}a_k, i]$ برچسب گذاری کنید. اگر $k = n$ ، راس مقصد برچسب خورده بود و مسیر مورد نظر پیدا شده بود، به گام پنجم بروید. در غیر این صورت قرار دهید $i = k$ و به گام دوم بروید.

- گام چهارم: مسیر برگشتی

اگر $i = 1$ ، هیچ مسیر دارای شرایطی امکان‌پذیر نیست، به گام ششم بروید. در غیر این صورت، اگر r راسی بود که بلافاصله قبل از راس i جاری برچسب خورده بود و i از مجموعه رئوس مجاور با r حذف شده بود. قرار دهید $i = r$ و به گام دوم بروید.

- گام پنجم: تعیین مانده‌ها

فرض کنید $N_p = \{1, k_1, k_2, \dots, n\}$ رئوسی از p امین مسیرهای دارای شرایط لازم از راس منبع ۱ به راس مقصد n تعریف شده باشد. بنابراین جریان ماکسیمال در امتداد مسیر به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\tilde{f}_p = \min\{\tilde{f}a_1, \tilde{f}a_{k_1}, \tilde{f}a_{k_2}, \dots, \tilde{f}a_n\}, \quad (4.3)$$

ظرفیت مانده‌ی هر کمان در امتداد مسیر دلخواه به وسیله‌ی $\tilde{f}_p$ در جهت جریان کاهش می‌یابد و به وسیله‌ی $\tilde{f}_p$ در عکس جهت جریان افزایش می‌یابد. به عبارت دیگر، برای رئوس i و j روی مسیر، جریان مانده از مقدار فعلی $(\tilde{f}c_{ij}, \tilde{f}c_{ji})$ به صورت زیر تغییر می‌یابد:

$$(f) \text{ اگر جریان از } i \text{ به } j \text{ باشد، } (\tilde{f}c_{ij} \ominus \tilde{f}_p, \tilde{f}c_{ji} \oplus \tilde{f}_p)$$

$$(b) \text{ اگر جریان از } j \text{ به } i \text{ باشد، } (\tilde{f}c_{ij} \oplus \tilde{f}_p, \tilde{f}c_{ji} \ominus \tilde{f}_p)$$

مجدداً برگردید به رئوسی که در گام چهارم حذف شد. قرار دهید $i = 1$ و به گام دوم برگردید، تا یک مسیر دارای شرایط لازم جدید پیدا کنید.

• گام ششم: راه حل

(الف) با توجه به اینکه m ، مسیرهای دارای شرایط لازم مشخص شده است، جریان ماکسیمال فازی در شبکه به صورت زیر است:

$$\tilde{F} = \tilde{f}_1 \oplus \tilde{f}_2 \oplus \dots \oplus \tilde{f}_m, \quad (5.3)$$

که m تعداد تکرار به دست آوردن مسیرهای بدون شرایط لازم می باشد.

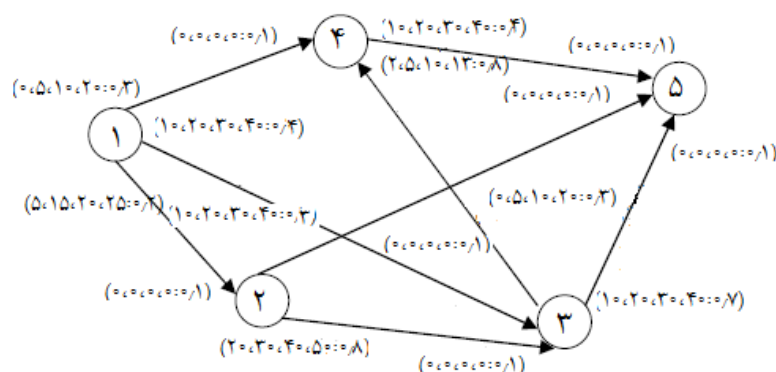
(ب) با استفاده از مانده های فازی اولیه و نهایی کمان (i, j) ، به ترتیب برابر $(\tilde{f}_{c_{ij}}, \tilde{f}_{\bar{c}_{ji}})$ و $(\tilde{f}_{c_{ij}}, \tilde{f}_{\bar{c}_{ji}})$ ، جریان بهینه فازی در کمان (i, j) به صورت زیر محاسبه می شود:

فرض کنید $(\alpha, \beta) = (\tilde{f}_{\bar{c}_{ij}} \ominus \tilde{f}_{c_{ij}}, \tilde{f}_{\bar{c}_{ji}} \ominus \tilde{f}_{c_{ji}})$. اگر $\Re(\alpha) > 0$ ، جریان فازی بهینه فازی از i به j ، α می باشد. در غیر این صورت، اگر $\Re(\beta) > 0$ ، جریان بهینه فازی از j به i ، β می باشد (اینکه هر دوی $\Re(\alpha)$ و $\Re(\beta)$ مثبت باشند، غیر ممکن است).

۱.۲.۳ بیان الگوریتم با مثال

در این قسمت الگوریتم ذکر شده با حل یک مثال عددی توضیح داده شده است.

مثال ۱.۲.۳. شبکه ی نشان داده شده در شکل (۱.۳) را در نظر بگیرید. ظرفیت های فازی دوطرفه با اعداد فازی دوزنقه ای تعمیم یافته نمایش داده شده است و روی کمان های مربوطه نشان داده شده است. برای مثال، برای کمان $(3, 4)$ حدود جریان با اعداد فازی دوزنقه ای تعمیم یافته $(0/3, 15, 20; 0, 5, 15)$ واحد از رئوس ۳ تا ۴ نمایش داده می شود. جریان ماکسیمال فازی در این شبکه بین منبع ۱ و مقصد ۵ را تعیین کنید. الگوریتم به شکل زیر اعمال می شود:

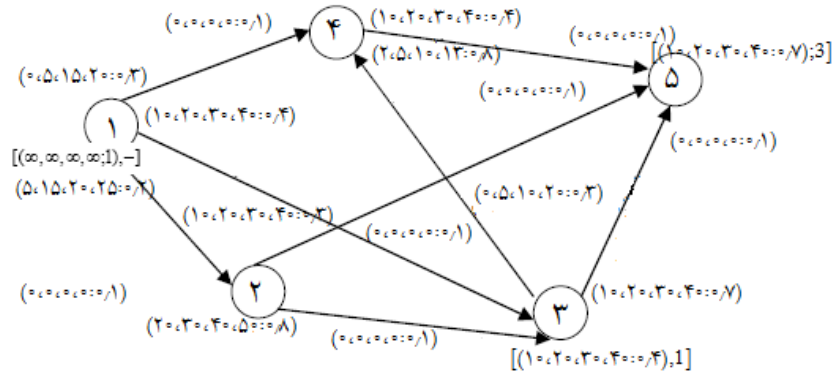


شکل ۱.۳: شبکه ی اولیه

تکرار اول:

مجموعه مانده ی فازی اولیه $(\tilde{f}_{c_{ij}}, \tilde{f}_{\bar{c}_{ji}})$ را مساوی با مجموعه ظرفیت های فازی اولیه $(\tilde{f}_{c_{ij}}, \tilde{f}_{\bar{c}_{ji}})$

قرار دهید.



شکل ۲.۳: مرحله‌ی اول

- گام ۱: قرار دهید $\tilde{f}a_1 = (\infty, \infty, \infty, \infty; 1)$ و راس ۱ را با $[(\infty, \infty, \infty, \infty; 1), -]$ برچسب بگذارید. بگذارید. قرار دهید $i = 1$.
- گام ۲: $S_1 = \{2, 3, 4\} (\neq \emptyset)$.
- گام ۳: $k = 3$ ، چون $\max\{\Re(\tilde{f}c_{12}), \Re(\tilde{f}c_{13}), \Re(\tilde{f}c_{14})\} = \Re(\tilde{f}c_{13})$ قرار دهید $\tilde{f}a_3 = (1^0, 2^0, 3^0, 4^0; 0/4)$ و راس ۳ را با $[(1^0, 2^0, 3^0, 4^0; 0/4), 1]$ برچسب‌گذاری کنید. قرار دهید $i = 3$ و گام ۲ را تکرار کنید.
- گام ۴: $S_2 = \{4, 5\}$.
- گام ۵: $k = 5$ ، چون $\max\{\Re(\tilde{f}c_{34}), \Re(\tilde{f}c_{35})\} = \Re(\tilde{f}c_{35})$ قرار دهید $\tilde{f}a_5 = (1^0, 2^0, 3^0, 4^0; 0/7)$ و راس ۵ را با $[(1^0, 2^0, 3^0, 4^0; 0/7), 3]$ برچسب‌گذاری کنید. مسیر مورد نظر پیدا شد. به گام ۵ بروید.
- گام ۵: مسیرهای مورد نظر و دارای شرایط لازم، با شروع برچسب‌گذاری از راس ۵ آغاز و با حرکت معکوس به سمت راس ۱ مشخص می‌شوند. مسیر مشخص شده به صورت $5 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ می‌باشد. بنابراین، $N_1 = \{1, 3, 5\}$ و $\tilde{f}_1$ به صورت زیر به دست می‌آید:

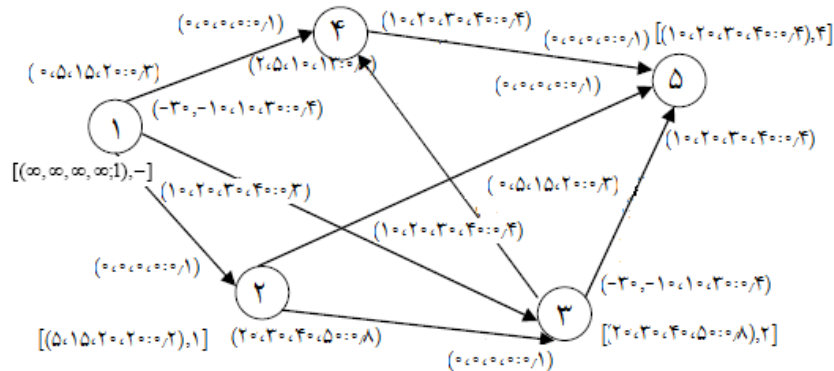
$$\tilde{f}_1 = \min\{\tilde{f}a_1, \tilde{f}a_3, \tilde{f}a_5\} = \min\{(\infty, \infty, \infty, \infty; 1), (1^0, 2^0, 3^0, 4^0; 0/4), (1^0, 2^0, 3^0, 4^0; 0/7)\} = (1^0, 2^0, 3^0, 4^0; 0/4),$$

ظرفیت‌های مانده‌ی فازی در امتداد مسیر N_1 به صورت زیر هستند:

$$(\tilde{f}c_{13}, \tilde{f}c_{31}) = ((1^0, 2^0, 3^0, 4^0; 0/4) \ominus (1^0, 2^0, 3^0, 4^0; 0/4), (0, 0, 0, 0; 1) \oplus (1^0, 2^0, 3^0, 4^0; 0/4)) = ((-3^0, -1^0, 1^0, 3^0; 0/4), (1^0, 2^0, 3^0, 4^0; 0/4)),$$

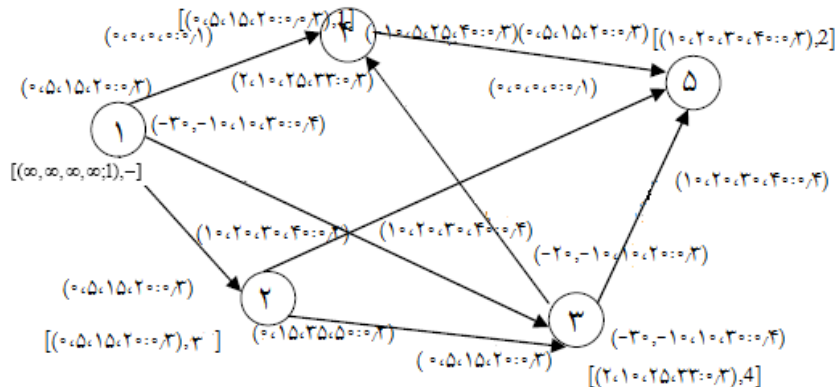
$$(\tilde{f}_{c_{35}}, \tilde{f}_{c_{53}}) = ((1, 2, 3, 4; 0/7) \ominus (1, 2, 3, 4; 0/4), (0, 0, 0, 0; 1) \oplus (1, 2, 3, 4; 0/4)) = ((-3, -1, 1, 3; 0/4), (1, 2, 3, 4; 0/4)),$$

تکرار دوم: روش توضیح داده شده در اولین تکرار را دوباره انجام دهید، برای شروع از راس ۱، مسیر مورد نظر به صورت $5 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ به دست می‌آید و $f = (0, 5, 10, 15; 0/3)$ می‌باشد.



شکل ۳.۳: مرحله‌ی دوم

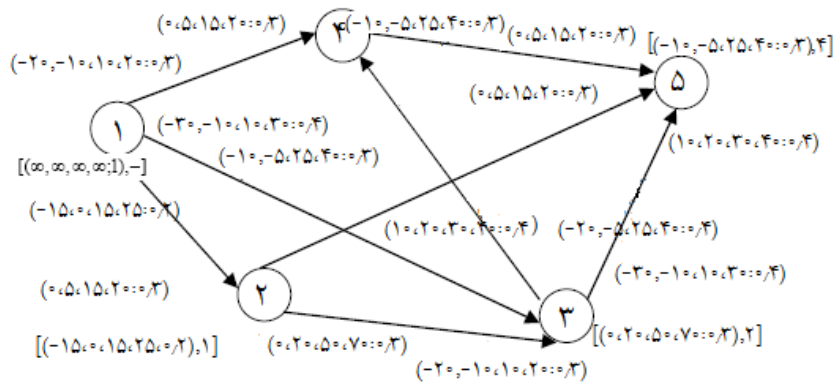
تکرار سوم: مسیر مورد نظر به صورت $5 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$ به دست می‌آید و $\tilde{f}_3 = (0, 5, 15, 20; 0/3)$ می‌باشد.



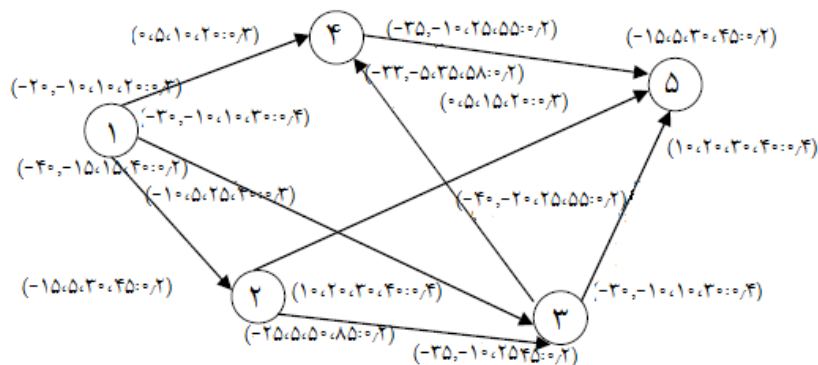
شکل ۴.۳: مرحله‌ی سوم

تکرار چهارم: مسیر مورد نظر به صورت $5 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ به دست می‌آید و $\tilde{f}_4 = (-15, 0, 15, 25; 0/2)$ می‌باشد.

تکرار پنجم: تکرارهای بیشتر بعد از ۴امین تکرار امکان‌پذیر نیست، چون هیچ راهی برای رفتن به مقصد از منبع وجود ندارد.



شکل ۵.۳: مرحله ی چهارم



شکل ۶.۳: مرحله ی ششم

• گام ۶: جریان ماکسیمال فازی در شبکه عبارتست از:

$$\begin{aligned}\tilde{F} &= \tilde{f}_1 \oplus \tilde{f}_2 \oplus \tilde{f}_3 \oplus \tilde{f}_4 = (1, 0, 20, 30, 40; 0/4) \oplus (0, 5, 15, 20; 0/3) \\ &\oplus (0, 5, 15, 20; 0/3) \oplus (-15, 0, 15, 25; 0/2) = (-5, 30, 75, 105; 0/2),\end{aligned}$$

جریان فازی در کمان های مختلف با تفاضل آخرین مانده های فازی $(\tilde{f}_{c_{ij}}, \tilde{f}_{c_{ji}})$ از ظرفیت های فازی اولیه $(\tilde{f}_{c_{ij}}, \tilde{f}_{c_{ji}})$ محاسبه می شود و در جدول (۱.۳) نشان داده شده است.

نتایج حل مثال

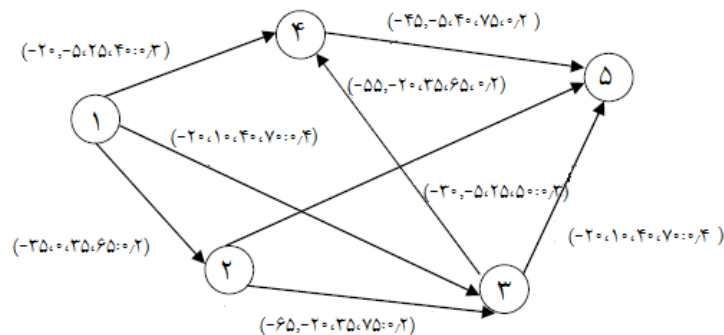
جریان بهینه ی فازی $\tilde{F} = (-5, 30, 75, 105; 0/2)$ می باشد. نتایج به دست آمده را می توان به صورت بیان کرد:

(الف) با توجه به تصمیم گیری به انتخاب مسیرها مقدار جریان بین منبع و مقصد بزرگتر از ۵- و کمتر از ۱۰۵ واحد می باشد.

(ب) سطح کلی رضایتمندی از تصمیم گیری برای انتخاب مسیرها در مورد نظریه ای که جریان ماکسیمال فازی بین ۳۰ تا ۷۵ واحد خواهد بود، ۲۰ درصد می باشد.

جدول ۱.۳: جریان بهینه‌ی فازی در کمان‌های مختلف

جهت	مقدار جریان فازی	$(\Re(\tilde{f}c_{ij} \ominus \tilde{f}c_{ji}), \Re(\tilde{f}c_{ij} \ominus \tilde{f}c_{ji}))$	$((\tilde{f}c_{ij} \ominus \tilde{f}c_{ji}), (\tilde{f}c_{ij} \ominus \tilde{f}c_{ji}))$	کمان
۱ → ۲	$(-۳۵, ۰, ۳۵, ۶۵; ۰/۲)$	$(۳/۲۵, -۳/۲۵)$	$((-۳۵, ۰, ۳۵, ۶۵; ۰/۲), (-۴۵, -۳۰, -۵, ۱۵; ۰/۲))$	(۱.۲)
۱ → ۳	$(-۲۰, ۱۰, ۴۰, ۷۰; ۰/۴)$	$(۱۰, -۱۰)$	$((-۲۰, ۱۰, ۴۰, ۷۰; ۰/۴), (-۴۰, -۳۰, -۲۰, -۱۰; ۰/۴))$	(۱.۳)
۱ → ۴	$(-۲۰, -۵, ۲۵, ۴۰; ۰/۴)$	$(۳, -۳)$	$((-۲۰, -۵, ۲۵, ۴۰; ۰/۴), (-۲۰, -۱۵, -۵, ۰; ۰/۳))$	(۱.۴)
۲ → ۳	$(-۶۵, -۲۰, ۳۵, ۷۵; ۰/۲)$	$(۱/۲۵, -۱/۲۵)$	$((-۶۵, -۲۰, ۳۵, ۷۵; ۰/۲), (-۴۵, -۲۵, ۱۰, ۳۵; ۰/۲))$	(۲.۳)
۲ → ۵	$(-۳۰, -۵, ۲۵, ۵۰; ۰/۳)$	$(۳, -۳)$	$((-۳۰, -۵, ۲۵, ۵۰; ۰/۳), (-۲۰, -۱۵, -۵, ۰; ۰/۳))$	(۲.۵)
۳ → ۴	$(-۵۵, -۲۰, ۳۵, ۶۵; ۰/۲)$	$(۱/۲۵, -۱/۲۵)$	$((-۵۵, -۲۰, ۳۵, ۶۵; ۰/۲), (-۵۶, -۳۰, ۱۵, ۴۶; ۰/۲))$	(۳.۴)
۳ → ۵	$(-۲۰, ۱۰, ۴۰, ۷۰; ۰/۴)$	$(۱۰, -۱۰)$	$((-۲۰, ۱۰, ۴۰, ۷۰; ۰/۴), (-۴۰, -۳۰, -۲۰, -۱۰; ۰/۴))$	(۳.۵)
۴ → ۵	$(-۴۵, -۵, ۴۰, ۷۵; ۰/۲)$	$(۳/۲۵, -۳/۲۵)$	$((-۴۵, -۵, ۴۰, ۷۵; ۰/۲), (-۴۵, -۳۰, -۵, ۱۵; ۰/۲))$	(۴.۵)



شکل ۷.۳: مرحله‌ی آخر

(ج) سطح کل رضایتمندی از تصمیم‌گیری برای انتخاب مسیرها برای مقدار مانده از جریان می‌توان به صورت زیر به دست آورد:

فرض کنید x نمایش‌دهنده‌ی مقدار جریان باشد، آنگاه سطح کلی رضایتمندی از تصمیم‌گیری برای انتخاب مسیرها برای $x = \mu_{\tilde{F}}(x) \times ۱۰۰$ به صورت زیر می‌باشد:

$$\mu_{\tilde{F}}(x) = \begin{cases} ۰, & -\infty < x \leq -۵ \\ \frac{۰/۲(x+۵)}{(۳۵)}, & -۵ \leq x < ۳۰ \\ ۰/۲, & ۳۰ \leq x \leq ۷۵ \\ \frac{۰/۲(x-۱۰۵)}{(-۳۰)}, & ۷۵ < x \leq ۱۰۵ \\ ۰, & ۱۰۵ \leq x < \infty \end{cases}$$

نکته ۲.۲.۳. همان‌طور که مشاهده نمودید این الگوریتم برای حل مسایل جریان ماکسیمال از اعداد فازی دوزنقه‌ای تعمیم‌یافته و تابع رتبه‌بندی استفاده شده است. اما حالت‌هایی وجود دارد که تابع رتبه‌بندی را برای تعیین مسیر جریان نمی‌توان به کار برد یا جواب درستی به دست نمی‌آید. برای همین منظور در منبع [۱] این الگوریتم با کمک اعداد فازی دوزنقه‌ای تعمیم‌یافته و تابع حالت بیان شده است. در واقع

محاسبات ریاضی در بیشتر موارد با کمک برنامه‌های کامپیوتری و محاسبات ساده‌تر انجام شده است که با توجه به تخصصی‌تر بودن این برنامه‌ها اینجا بیان نشده است. در صورت نیاز می‌توانید به منبع آن مراجعه نمایید.

روش بیان شده در بخش بعدی از منبع [۲] گرفته شده است.

۳.۳ استفاده از جریان ماکسیم برای حل مسایل کمترین هزینه

در این بخش شبکه با گراف جهت‌دار $G = (V, E)$ نمایش داده می‌شود، به طوری که V مجموعه راس‌هاست، E مجموعه کمان‌های مشخص شده بین رئوس اولیه (منبع) و رئوس پایانی (حفره یا مقصد) می‌باشد. برای هر کمان $(i, j) \in E$ ظرفیت تعیین کننده مقدار جریانی است که در امتداد کمان می‌تواند عبور کند. ارتباط بین مسایل جریان ماکسیم و تعیین مینیم هزینه‌ی جریان، نشان‌دهنده‌ی این واقعیت است که برای مدیریت ترافیک، می‌توان با در نظر گرفتن بخش‌های پر شده‌ی جاده‌ها، مسیر ترافیک را تغییر داده و ارزان‌ترین مسیر را انتخاب کرد. یک شبکه که کمان‌ها دارای ظرفیت (q_{ij}) می‌باشند را در نظر بگیرید. فرمول‌بندی مساله‌ی یافتن جریان ماکسیم در شبکه، به صورت زیر می‌باشد [۲]:

$$f = \sum_{v \in V: (s,v) \in E} x_{(s,v)} = \sum_{v \in V: (v,t) \in E} x_{(v,t)} \rightarrow \max, \quad (۶.۳)$$

$$\sum_{(i,j) \in E} x_{ij} - \sum_{(j,i) \in E} x_{ji} = \begin{cases} f, & i = s, \\ -f, & i = t, \\ 0, & \forall i \neq s, t, \end{cases} \quad (۷.۳)$$

$$0 \leq x_{ij} \leq q_{ij}, \quad \forall (i, j) \in E.$$

در رابطه‌ی (۶.۳)، x مقدار جریانی است که در امتداد کمان (i, j) عبور می‌کند؛ f مقدار جریان ماکسیم در شبکه؛ s راس آغازی (منبع)؛ t راس پایانی (مقصد)؛ q_{ij} ظرفیت کمان، (i, j) مجموعه رئوسی که کمان‌های آن‌ها از راس $i \in V$ خارج می‌شوند، (j, i) مجموعه رئوسی که کمان‌های آن‌ها به راس i وارد می‌شوند. x_{ij} نشان‌دهنده‌ی کمان‌هایی (برای مثال تعداد ماشین‌ها) است که از راس $i \in V$ به راس $j \in V$ می‌روند. معادله‌ی اول رابطه‌ی (۶.۳) نشان می‌دهد که ماکسیم تعداد کل واحدهای جریان‌های خروجی از منبع (s) ، باید مساوی با تعداد کل واحدهای جریان‌های ورودی به مقصد (t) باشند. دومین معادله‌ی رابطه‌ی (۷.۳) قید بقای جریان است، به این معنی که تعداد کل واحدهای جریان خارج شده از منبع (s) باید مساوی با تعداد کل واحدهای جریان وارد شده به مقصد (t) باشد، تعداد کل واحدهای جریان خارج شده از هر راس $i \neq s, t$ باید مساوی با تعداد کل واحدهای جریان وارد شده به راس $i \neq s, t$ باشد. نامساوی سوم رابطه‌ی (۷.۳) قید محدودیت است، نشان می‌دهد که مقدار جریان x در امتداد کمان (i, j) عبور می‌کنند، نباید از ظرفیت کمان‌ها تجاوز کنند.

تعیین جریان با کمترین هزینه در یک شبکه را می‌توان به صورت زیر فرمول‌بندی کرد:

فرض کنید یک شبکه دارید، که کمان‌ها دارای دو سری اعداد متناظرند، ظرفیت کمان (q_{ij}) و هزینه حمل و نقل (c_{ij}) یک واحد جریان عبوری از راس i به راس j می‌باشد. ماهیت این مساله یافتن جریان از مقدار مشخص شده f' از منبع به مقصد است که از جریان ماکسیم f در شبکه تجاوز نمی‌کند و دارای کمترین هزینه حمل و نقل است. با کمک عبارات ریاضی می‌توان مساله‌ی تعیین کمترین هزینه‌ی جریان در شبکه را به صورت زیر نمایش داد:

$$f' = \sum_{(i,j) \in E} c_{ij} \cdot x_{ij} \rightarrow \min, \quad (۸.۳)$$

$$\sum_{(i,j) \in E} x_{ij} - \sum_{(j,i) \in E} x_{ji} = \begin{cases} f', & i = s, \\ -f', & i = t, \\ 0, & \forall i \neq s, t, \end{cases} \quad (۹.۳)$$

$$0 \leq f_{ij} \leq q_{ij}, \quad \forall (i, j) \in E.$$

در (۸.۳) c_{ij} هزینه‌ی حمل و نقل یک واحد جریان روی فقط کمان (i, j) ، f' مقدار جریان داده شده است که از جریان ماکسیم f در شبکه تجاوز نمی‌کند.

ظرفیت‌های کمان، هزینه‌های انتقال، مقادیر جریان ورودی رئوس و خروجی از رئوس را نمی‌توان با توجه به ماهیت آن‌ها به درستی اندازه‌گیری کرد. شرایط آب و هوا، شرایط اضطراری در جاده‌ها، ازدحام ترافیک و تعمیرات بر ظرفیت‌های کمان تاثیرگذار هستند. تغییرات در قیمت بنزین، عوارض هم می‌تواند در هزینه‌های حمل و نقل تاثیرگذار باشد. بنابراین این پارامترها باید در یک فرم فازی، مانند اعداد فازی مثلثی معرفی شوند. بنابراین یک بیان مساله از ماکسیم و مسایل جریان با کمترین هزینه در شرایط فازی را به دست می‌آوریم.

۱.۳.۳ حل مسایل یافتن جریان ماکسیم روی شبکه‌های فازی

مساله‌ی یافتن جریان ماکسیم روی شبکه‌های فازی را می‌توان به صورت زیر فرمول‌بندی کرد:

$$\tilde{f} = \sum_{v \in V: (s,v) \in E} \tilde{x}_{(s,v)} = \sum_{v \in V: (v,t) \in E} \tilde{x}_{(v,t)} \rightarrow \max, \quad (۱۰.۳)$$

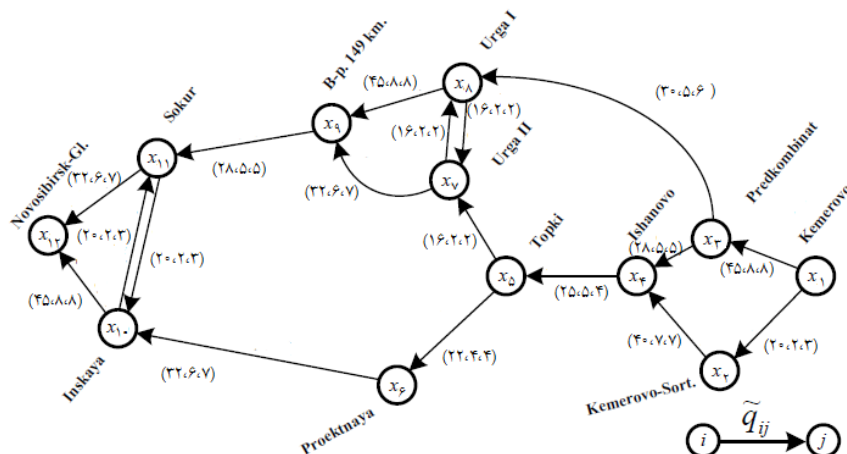
$$\sum_{(i,j) \in E} \tilde{x}_{ij} - \sum_{(j,i) \in E} \tilde{x}_{ji} = \begin{cases} \tilde{f}, & i = s, \\ -\tilde{f}, & i = t, \\ \tilde{0}, & \forall i \neq s, t, \end{cases} \quad (۱۱.۳)$$

$$\tilde{0} \leq \tilde{x}_{ij} \leq \tilde{q}_{ij}, \quad \forall (i, j) \in E.$$

در رابطه‌ی (۱۰.۳)، $\tilde{f}$ ، ماکسیم مقدار جریان فازی مورد نیاز در شبکه؛ $\tilde{x}_{ij}$ مقدار فازی جریان عبوری در امتداد کمان (i, j) ؛ $\tilde{q}_{ij}$ ظرفیت فازی برای کمان (i, j) ؛ $\tilde{0}$ عدد فازی به شکل $(0, 0, 0)$ ، به عنوان

نشان‌دهنده‌ی عدم وجود جریان می‌باشد.

راه حل این مساله را با مثال زیر و شکل (۸.۳) توضیح می‌دهیم. فرض کنید شبکه، به نمایندگی بخشی از نقشه‌ی راه‌آهن، به صورت گراف جهت‌دار فازی باشد، که با GIS «موضوعی زمین» به دست آمده است. فرض کنید راس x_1 منبع و راس x_{12} مقصد باشد. مقادیر ظرفیت‌های کمان به صورت اعداد مثلی فازی می‌باشد. مقدار جریان ماکسیمم بین ایستگاه «کمرو»^۴ (x_1) و «نوسیبیریک-ج ل»^۵ (x_{12})، را با توجه به الگوریتم ادموندز-کارپ^۶ [۹] و روش توضیح داده شده برای عملیات با اعداد مثلی فازی محاسبه می‌کنیم. تعیین جریان ماکسیمم مبتنی بر جریان‌های فرستاده شده در امتداد کمان‌ها در شبکه است، تا زمانی که نتوان هیچ واحد افزایشی جریانی را از منبع به مقصد فرستاد. الگوریتم ادموندز-کارپ نمایانگر انتخاب کوتاه‌ترین مسیر مکمل از منبع به مقصد در هر مرحله در شبکه‌ی مانده است (با فرض اینکه هر کمان واحد طول دارد). شبکه‌ی مانده (یا باقیمانده) شامل کمان‌هایی به صورت (x_i, x_j) با ظرفیت مانده‌ی کمان $\tilde{q}_{ij} - \tilde{f}_{ij}$ می‌باشد، اگر کمان‌های (x_i, x_j) مقدار جریان $\tilde{f}_{ij} < \tilde{q}_{ij}$ در شبکه‌ی اولیه را دارد و کمان‌های به صورت (x_j, x_i) با ظرفیت مانده‌ی کمان $\tilde{f}_{ij}$ می‌باشد، اگر کمان‌های (x_i, x_j) دارای مقدار جریان $\tilde{f}_{ij} > 0$ باشد. کمان (x_i, x_j) «اشباع شده» نامیده می‌شود، هنگامی که جریان عبوری در مسیر، مساوی با ظرفیت کمان $\tilde{q}_{ij}$ باشد ($\tilde{c}_{ij} = \tilde{q}_{ij}$). به عبارت دیگر، ظرفیت مانده‌ی کمان معین می‌کند که چه مقدار واحد جریان می‌تواند در مسیر کمان (x_i, x_j) برای رسیدن به ظرفیت کمان، فرستاده شود. ظرفیت مانده‌ی کمان از کمان اشباع‌شده‌ی کمان (x_i, x_j) صفر است. بنابراین، الگوریتم حاصل به صورت زیر خواهد بود: اولین تکرار از انجام الگوریتم، یک حلقه‌ی افزایشی



شکل ۸.۳: شبکه‌ی اولیه

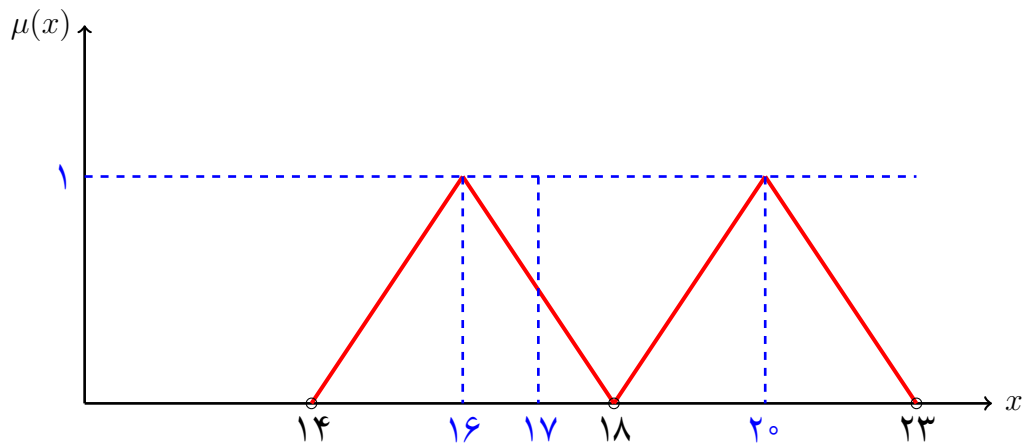
به صورت $x_1 x_3 x_8 x_9 x_{11} x_{12}$ می‌باشد. قرار دادن جریان، مساوی با $(28, 5, 5)$ واحد در امتداد مسیر

^۴Kemerove

^۵Novosibirsk-Gl

^۶Edmonds-Karp

است. کمان (x_9, x_{11}) اشباع شده است، در نتیجه، ظرفیت مانده‌ی فازی کمان (x_9, x_{11}) مساوی با $(0, 0, 0)$ می‌شود. فرض کنید ظرفیت‌های مانده‌ی فازی کمان‌های مانده برای حلقه‌های افزایشی تعریف کنیم. کمان (x_1, x_3) ظرفیت مانده‌ی فازی مساوی با $(28, 5, 5) - (45, 8, 8)$ دارد. بنابراین، مقدار مرکزی از عدد به دست آمده $17 = 45 - 28$ می‌باشد. که بین ظرفیت‌های کمان مجاور واقع شده است: $(16, 2, 2)$ و $(20, 2, 3)$ گراف اصلی در شکل (۹.۳) نشان داده شده است. مرزهای انحراف راست و



شکل ۹.۳: عدد مثلثی فازی با مرکز مساوی با مقدار ۱۷ و اعداد مجاور با آن.

چپ برای عدد مثلثی فازی با مرکز ۱۷ طبق روابط (۱۲.۳) تا (۱۴.۳) محاسبه می‌شود. بنابراین، یک عدد مثلثی فازی به صورت $(17, 2, 2/25)$ واحد به دست می‌آید (برای توضیح بیشتر روابط می‌توانید به بخش (۵.۳.۲) در فصل دوم مراجعه نمایید).

$$\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2), \quad (12.3)$$

$$\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2 = (a_1 - a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2), \quad (13.3)$$

$$l^L = \frac{(x_2 - x)}{(x_2 - x_1)} \times l_1^L + \left(1 - \frac{(x_2 - x)}{(x_2 - x_1)}\right) \times l_2^L, \quad (14.3)$$

$$l^R = \frac{(x_2 - x)}{(x_2 - x_1)} \times l_1^R + \left(1 - \frac{(x_2 - x)}{(x_2 - x_1)}\right) \times l_2^R. \quad (15.3)$$

ظرفیت مانده‌ی فازی از کمان (x_3, x_8) ، $(28, 5, 5) - (30, 5, 6)$ می‌باشد. در نتیجه، یک عدد مثلثی فازی با مرکز ۲ به دست می‌آید، سمت چپ عدد مثلثی فازی به صورت $(16, 2, 2)$ قرار گرفته است. تعداد مورد نیاز مرزهای انحراف منطبق با مرزهای انحراف عدد $(16, 2, 2)$ می‌باشد. بنابراین، یک عدد مثلثی فازی از نوع $(2, 2, 2)$ واحد به دست می‌آید.

ظرفیت مانده‌ی فازی برای کمان (x_8, x_9) مساوی با $(17, 2, 2/25)$ واحد است، که به طور مشابه مانند حالت کمان (x_1, x_3) به دست می‌آید.

سرانجام، ظرفیت مانده‌ی فازی برای کمان (x_{11}, x_{12}) مساوی با $(28, 5, 5) - (32, 6, 7)$ است، به عبارت دیگر، عدد فازی با $(4, 2, 2)$ واحد به دست می‌آوریم و ظرفیت مانده‌ی فازی برای کمان (x_{12}, x_{11}) مساوی با $(28, 5, 5)$ واحد می‌باشد. ظرفیت‌های مانده‌ی فازی برای کمان‌های (x_3, x_1) و (x_8, x_3) و (x_8, x_8) و (x_9, x_8) و (x_{11}, x_9) و (x_{12}, x_{11}) برابر $(28, 5, 5)$ واحد می‌باشند.

تکرار دوم از الگوریتم حلقه‌ی افزوده‌ی $x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_{10} x_{12}$ را به دست می‌دهد. جریان را مساوی با $(20, 2, 3)$ واحد در امتداد مسیر قرار دهید. کمان (x_1, x_2) اشباع شده می‌شود، در نتیجه ظرفیت مانده‌ی فازی برای کمان (x_1, x_2) مساوی $(0, 0, 0)$ می‌شود. ظرفیت مانده‌ی فازی کمان (x_2, x_4) ، $(20, 2, 3) - (40, 7, 7)$ می‌شود، به عبارت دیگر عدد مثلی فازی با $(20, 2, 3)$ واحد به دست می‌آید. ظرفیت مانده‌ی فازی کمان (x_4, x_5) اختلاف بین اعداد $(25, 5, 4)$ و $(20, 2, 3)$ می‌باشد. بنابراین یک عدد با مرکز ۵ به دست می‌آوریم که سمت چپ عدد $(16, 2, 2)$ قرار گرفته است و به عبارت دیگر برابر $(5, 2, 2)$ واحد می‌باشد. ظرفیت مانده‌ی فازی برای کمان (x_5, x_6) مساوی با $(20, 2, 3) - (22, 4, 4)$ است و یا به عبارت دیگر برابر $(2, 2, 2)$ واحد می‌باشد. ظرفیت مانده‌ی فازی برای کمان (x_6, x_{10}) مساوی با $(20, 2, 3) - (32, 6, 7)$ است و به عبارت دیگر برابر $(12, 2, 2)$ واحد می‌باشد. ظرفیت مانده‌ی فازی برای کمان (x_{10}, x_{12}) مساوی با $(20, 2, 3) - (45, 8, 8)$ است یا به عبارت دیگر برابر $(25, 5, 4)$ واحد می‌باشد. ظرفیت‌های مانده‌ی فازی برای کمان‌های (x_2, x_1) و (x_4, x_2) و (x_5, x_4) و (x_6, x_5) و (x_{10}, x_6) و (x_{10}, x_{12}) ، برابر $(20, 2, 3)$ واحد می‌باشد.

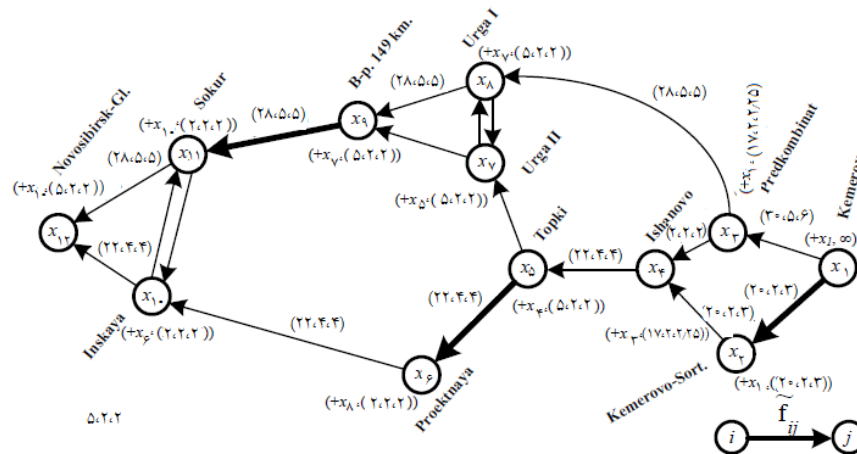
تکرار سوم از الگوریتم حلقه‌ی افزوده‌ی $x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_{10} x_{12}$ را به دست می‌دهد. جریان را مساوی با $(2, 2, 2)$ واحد در امتداد مسیر قرار دهید. کمان (x_5, x_6) اشباع شده می‌شود. فرض کنید ظرفیت‌های مانده‌ی فازی برای کمان‌های مانده حلقه‌ی افزایشی تعریف شده باشد. ظرفیت مانده‌ی فازی برای کمان (x_1, x_3) ، $(2, 2, 2) - (17, 2, 2/25)$ می‌شود و یا به عبارت دیگر برابر $(15, 2, 2)$ واحد می‌باشد. ظرفیت مانده‌ی فازی کمان (x_3, x_4) مساوی با $(2, 2, 2) - (28, 5, 5)$ است. بنابراین یک عدد با مرکز ۲۶ به دست می‌آوریم که بین مقادیر مجاور $(25, 5, 4)$ و $(28, 5, 5)$ قرار گرفته است.

مرزهای انحراف چپ و راست برای عدد مثلی فازی با مرکز ۲۶ را طبق رابطه‌ی (۳۸.۲) محاسبه کنید. بنابراین، عدد مثلی فازی به صورت $(26, 5, 4/33)$ واحد به دست می‌آید.

ظرفیت مانده‌ی فازی برای کمان (x_4, x_5) ، مساوی با $(2, 2, 2) - (5, 2, 2)$ می‌شود و به عبارت دیگر برابر با $(20, 2, 3)$ واحد می‌باشد. ظرفیت مانده‌ی فازی کمان (x_6, x_{10}) مساوی با $(12, 2, 2) - (2, 2, 2)$ می‌شود یا به عبارت دیگر برابر با $(10, 2, 2)$ واحد است. ظرفیت مانده‌ی فازی برای کمان (x_{10}, x_{12}) مساوی با $(2, 2, 2) - (25, 5, 4)$ می‌شود. به عبارت دیگر یک عدد با مرکز ۲۳ به دست می‌آوریم که بین مقادیر مجاور $(22, 4, 4)$ و $(25, 5, 4)$ قرار گرفته است. بنابراین مرز انحراف چپ عدد با مرکز ۲۳، مساوی با ۴۰.۳۳ و مرز انحراف راست برابر ۴ می‌شود. عدد مثلی فازی با $(23, 4/33, 4)$ واحد به دست می‌آید. ظرفیت‌های مانده‌ی فازی برای کمان‌های (x_5, x_4) و (x_6, x_5) و (x_{10}, x_6) و (x_{10}, x_{12}) برابر $(22, 4, 4)$ واحد می‌باشد.

پس از اجرای سه تکرار از الگوریتم غیرممکن است که جریان افزایشی در امتداد مسیر عبور کند. جریان کل برابر $(2, 2, 2) + (20, 2, 3) + (28, 5, 5)$ واحد می‌باشد. بنابراین یک عدد مثلی فازی با مرکز 50° به دست می‌آوریم که سمت راست عدد $(45, 8, 8)$ با مرزها قرار گرفته است و انحراف‌های تکرار شده برای عدد 45 : برابر $(50, 8, 8)$ واحد می‌باشد.

بنابراین، مقدار جریان ماکسیم بین موقعیت «کمر» و «نوووسیبیریک-ج ل» برابر $(50, 8, 8)$ واحد می‌باشد. حال اجازه دهید نتایج به دست آمده را تفسیر کنیم: جریان ماکسیم بین موقعیت‌ها نمی‌تواند کمتر مساوی 42 و بیشتر مساوی 58 واحد باشد، با بیشترین درجه‌ی اطمینان مساوی با 50° واحد خواهد بود. اما با تغییرات در محیط زیست، تعمیرات روی جاده‌ها، تراکم ترافیک، جریان در محدوده‌ی 42 تا 58 واحد تضمین شده است. توزیع جریان بهینه‌ی فازی در امتداد کمان‌ها و برجسب‌های رئوس در شکل (10.3) نشان داده شده است. کمان‌های اشباع‌شده پررنگ مشخص شده‌اند.



شکل ۱۰.۳: شبکه با جریان ماکسیم برابر $(50, 8, 8)$ واحد

۲.۳.۳ حل مسایل جریان با هزینه‌ی مینیم در شبکه‌های فازی

مسالهی یافتن جریان با هزینه‌ی مینیم در یک شبکه با توجه به اینکه ظرفیت‌های کمان دارای مقادیر فازی، جریان‌ها و هزینه‌های انتقال دارای یک جریان واحدند، را در نظر بگیرید.

$$\tilde{f}' = \sum_{(i,j) \in E} \tilde{c}_{ij} \cdot \tilde{x}_{ij} \rightarrow \min, \quad (16.3)$$

$$\sum_{(i,j) \in E} \tilde{x}_{ij} - \sum_{(j,i) \in E} \tilde{x}_{ji} = \begin{cases} \tilde{f}', & i = s, \\ -\tilde{f}', & i = t, \\ \tilde{o}, & \forall i \neq s, t, \end{cases} \quad (17.3)$$

$$\tilde{o} \leq \tilde{x}_{ij} \leq \tilde{q}_{ij}, \quad \forall (i, j) \in E.$$

در رابطه‌ی (۱۶.۳) $\tilde{c}_{ij}$ هزینه‌ی انتقال فازی جریان در امتداد مسیر کمان (i, j) ، $\tilde{f}'$ مقدار جریان فازی به دست آمده که از جریان ماکسیمم $\tilde{f}$ در شبکه تجاوز نمی‌کند.

حال با توجه به گرافی که در شکل (۸.۳) نشان داده شده است، هزینه را به دست می‌آوریم. مقادیر فازی هزینه‌های انتقال با افزودن ظرفیت‌های کمان فازی در این شبکه به این صورت داده شده است:

$$\begin{aligned}\tilde{c}_{x_1x_2} &= (12, 3, 3); \tilde{c}_{x_1x_3} = (6, 1, 2); \tilde{c}_{x_3x_4} = (10, 2, 3); \tilde{c}_{x_2x_4} = (18, 4, 5); \\ \tilde{c}_{x_3x_8} &= (4, 1, 1); \tilde{c}_{x_4x_5} = (12, 3, 3); \tilde{c}_{x_5x_6} = (20, 5, 6); \tilde{c}_{x_8x_6} = (15, 4, 4); \\ \tilde{c}_{x_6x_8} &= (15, 4, 4); \tilde{c}_{x_8x_9} = (21, 6, 7); \tilde{c}_{x_6x_9} = (10, 2, 3); \tilde{c}_{x_5x_9} = (30, 8, 9); \\ \tilde{c}_{x_9x_{10}} &= (8, 2, 2); \tilde{c}_{x_9x_{11}} = (19, 5, 5); \tilde{c}_{x_{11}x_{10}} = (32, 7, 12); \\ \tilde{c}_{x_{10}x_{11}} &= (32, 7, 12); \tilde{c}_{x_{11}x_{12}} = (25, 7, 8); \tilde{c}_{x_{10}x_{12}} = (20, 5, 6).\end{aligned}$$

پیدا کردن مقدار جریان $\tilde{f}'$ که دارای کمترین هزینه‌ی است، برای جریان $(45, 8, 8)$ واحد از منبع به مقصد ضروری است. طبق الگوریتم باساکر-گوون^۷ [۱۵]، با در نظر گرفتن ظرفیت‌ها و هزینه‌های فازی برای حل این مساله داریم:

مرحله‌ی ۱: تخصیص همه‌ی جریان‌های کمان و سرعت جریان مساوی با صفر.
مرحله‌ی ۲: تعیین هزینه‌های کمان اصلاح‌یافته $\tilde{c}_{ij}$ که مقدار آن در حال حاضر به جریان یافت شده وابسته است، به صورت زیر می‌باشد:

$$\tilde{c}_{ij}^* = \begin{cases} \tilde{c}_{ij}, & \text{اگر } \tilde{x}_{ij} \leq \tilde{q}_{ij} \\ \infty, & \text{اگر } \tilde{x}_{ij} = \tilde{q}_{ij} \\ -\tilde{c}_{ij}, & \text{اگر } \tilde{x}_{ij} > \tilde{q}_{ij} \end{cases} \quad (18.3)$$

مرحله‌ی ۳: کوتاه‌ترین حلقه (در این مورد - حلقه با کمترین هزینه) از منبع تا مقصد با توجه به حساب هزینه‌های کمان $\tilde{c}_{ij}^*$ در مرحله‌ی ۱، را پیدا کنید. جریان را در امتداد این حلقه قرار دهید، تا زمانی که کوتاه‌ترین مسیر وجود دارد. مقدار جریان جدید را با اضافه کردن مقدار جدید دریافت کنید، در امتداد حلقه‌ی در نظر گرفته شده، به یکی قبلی عبور کنید. اگر مقدار جریان جدید مساوی با $\tilde{f}'$ باشد، آنگاه تمام است. در غیر این صورت، به مرحله‌ی ۲ بروید.

حل این مساله با در نظر گرفتن حساب هزینه‌های ظرفیت‌های کمان فازی:

مرحله‌ی ۱: اختصاص دهید برای همه $\tilde{x}_{ij} = 0$.

مرحله‌ی ۲: تعیین $\tilde{c}_{ij}^* = \tilde{c}_{ij}$.

مرحله‌ی ۳: کوتاه‌ترین مسیر را طبق الگوریتم فورد [۷] پیدا کنید: $x_1x_3x_8x_9x_{11}x_{12}$ برای هزینه‌ی کل واحد استاندارد $(75, 8, 8)$ است. جریان را مساوی با $(28, 5, 5)$ واحد در امتداد این حلقه، قرار دهید.

^۷Busacker-Gowen

گام ۲: تعریف هزینه‌های کمان فازی اصلاح شده‌ی جدید:

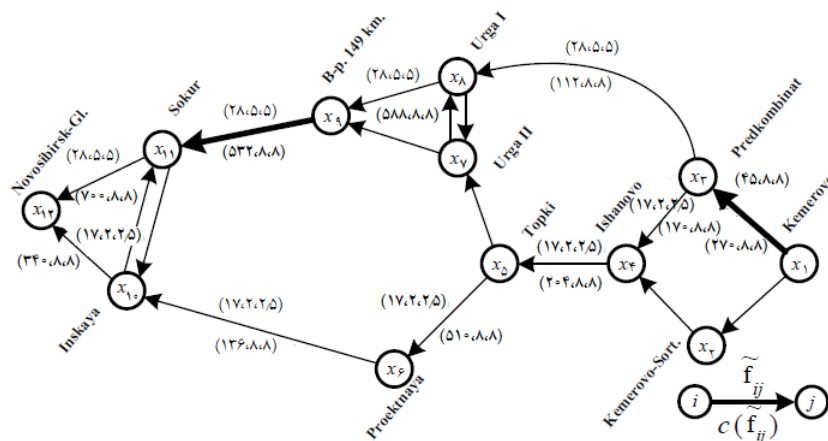
$$\tilde{c}_{x_1 x_3}^* = (6, 1, 2); \tilde{c}_{x_3 x_1}^* = -(6, 1, 2); \tilde{c}_{x_3 x_8}^* = (4, 1, 1); \tilde{c}_{x_8 x_3}^* = -(4, 1, 1);$$

$$\tilde{c}_{x_8 x_9}^* = (21, 6, 7); \tilde{c}_{x_9 x_8}^* = -(21, 6, 7); \tilde{c}_{x_9 x_{11}}^* = \infty; \tilde{c}_{x_{11} x_9}^* = -(19, 5, 5);$$

$$\tilde{c}_{x_{11} x_{12}}^* = (25, 7, 8); \tilde{c}_{x_{12} x_{11}}^* = -(25, 7, 8).$$

مرحله ۳: کوتاه‌ترین مسیر را با استفاده از هزینه‌های اصلاح‌شده به دست آورید:

برای هزینه‌ی کل $(86, 8, 8)$ واحد استاندارد است. جریان را مساوی با $(17, 2, 2/25)$ واحد در امتداد این حلقه، قرار دهید. به عنوان یک نتیجه، جریان کلی مساوی با واحد استاندارد $(45, 8, 8)$ را به دست می‌آوریم، با داشتن هزینه‌ی انتقال کل در شبکه، مساوی با $(3562, 8, 8) = ((75, 8, 8) + (86, 8, 8)) \times (28, 5, 5)$ است. مقادیر جریان فازی $\tilde{x}_{ij}$ تحت کمان‌ها و هزینه‌های انتقال فازی $\tilde{c}_{ij}$ از مقادیر جریان فازی بهینه $\tilde{x}_{ij}$ کمان‌های گراف بالا وجود دارد. کمان‌های اشباع‌شده در شکل (۱۱.۳) با خطوط پررنگ نشان داده شده است.



شکل ۱۱.۳: شبکه با جریان $(45, 8, 8)$ واحد و هزینه‌های انتقال هر کمان از هزینه‌ی کل $(3562, 8, 8)$ واحد استاندارد.

فصل ۴

حل مسایل جریان ماکسیم به روش برنامه‌ریزی خطی فازی

۱.۴ مقدمه

منطق و ریاضیات فازی بر خلاف نگرش کلاسیک، نگرشی بینهایت ارزشی به قضایا دارد و این امر باعث شده است که در طیف گسترده‌ای از علوم مختلف از جمله علوم پایه، مهندسی، پزشکی و غیره وارد شود. در شاخه‌ی ریاضیات، تحقیق در عملیات از جمله دروسی است که با منطق فازی می‌توان نگرشی جدید و متفاوت به قضایا داشت. شرایطی را در نظر بگیرید که تصمیم‌گیری توأم با ابهام و عدم قطعیت باشد، در این صورت مساله را می‌توان در محیط فازی طوری مدل‌سازی کرد که در آن ضرایب تکنولوژیکی، ضرایب تابع هدف و یا بردار سمت راست در برنامه‌ریزی خطی اعداد فازی باشند.

برنامه‌ریزی خطی به عنوان شناخته‌شده‌ترین و کاربردی‌ترین مدل در میان مدل‌های تصمیم‌گیری مسایل واقعی همواره مورد توجه ویژه‌ای بوده است. در اکثر مسایل تصمیم‌گیری که منجر به حل یک مساله برنامه‌ریزی خطی می‌شود، تصمیم‌گیرنده نمی‌تواند به طور دقیق مقادیر ضرایب مساله را تعیین کند و این ابهام ممکن است از نوع احتمالی نباشد. در حقیقت در برنامه‌ریزی خطی مرسوم عموماً ضرایب مساله تصمیم‌گیری توسط افراد خبره با مقادیر دقیق تعیین می‌شوند، ولی در محیط‌های فازی، فرض وجود اطلاعات دقیق توسط افراد خبره دور از واقعیت است. بدین ترتیب، طرح مدل‌سازی فازی در مسایل تصمیم‌گیری واقعی با داده‌های نادقیق، منطقی و مناسب به نظر می‌رسد.

مفهوم برنامه‌ریزی ریاضی فازی نخست توسط تاناکا و همکارانش در سال ۱۹۷۴ در چارچوب تصمیم‌گیری فازی ارایه شده و توسط بلمن و زاده پیشنهاد شد. نخستین فرمول‌بندی مساله‌ی برنامه‌ریزی خطی فازی توسط زیمرمن در سال ۱۹۷۸ مطرح شد. بعد از آن مدل‌ها و روش‌های متعددی پیشنهاد شد. یکی از متداول‌ترین روش‌ها برای حل این مسایل بر اساس مفهوم مقایسه‌ی اعداد فازی است. یک روش متداول و مناسب برای رتبه‌بندی اعداد فازی تعریف یک تابع رتبه‌بندی از مجموعه اعداد فازی به

مجموعه اعداد حقیقی است که در آن ترتیب وجود دارد. به طور کلی در چنین روش‌هایی مدل برنامه‌ریزی خطی فازی به یک مدل برنامه‌ریزی خطی کلاسیک تبدیل می‌شود و با استفاده از حل این مدل جواب مسالهی اصلی تعیین می‌شود.

در این بخش فرمول‌بندی برنامه‌ریزی خطی فازی مسایل جریان ماکسیم فازی به کمک برنامه‌ریزی خطی بیان شده و از فرمول بیان شده برای حل مسالهی جریان ماکسیم فازی استفاده شده است. در روش بیان شده تمامی پارامترها با اعداد فازی مثلثی نشان داده شده است. روش زیر از منبع [۱۸] و [۱۳] استخراج شده است.

تعریف ۱.۱.۴. تابع $x : E \rightarrow R$ را یک st -جریان شدنی گویند اگر در شرایط زیر صدق کند:

$$\sum_{(i,j) \in E} x_{ij} - \sum_{(j,i) \in E} x_{ji} = \circ, \quad \forall i \in V - \{s, t\}, \quad (1.4)$$

$$\circ \leq x_{ij} \leq c_{ij} \quad \forall (i, j) \in E. \quad (2.4)$$

در این شروط x_{ij} مقدار جریانی است که روی کمان (i, j) قرار دارد. همچنین شرط (۱.۴) همان قید توازن جریان (بقای جریان) است و شرط (۲.۴) قید ظرفیت کمان می‌باشد.

۲.۴ فرمول‌بندی برنامه‌ریزی خطی مسایل جریان ماکسیم در محیط قطعی

فرض کنید گراف جهت‌دار $G = (V, E)$ با ظرفیت‌های کران بالای u_{ij} باشد و برای هر کمان (i, j) ، مقدار x_{ij} برای جریان متناظر در این کمان (i, j) نسبت داده شده باشد. فرض کنید f نمایانگر مقدار جریان ماکسیم در این شبکه از راس مبدا s به راس مقصد t باشد. مسالهی جریان ماکسیم در محیط قطعی به صورت زیر فرمول‌بندی می‌شود:

Maximize f

Subject to

$$\sum_j x_{ij} = \sum_k x_{ki} \oplus f \quad ; i = s \quad (3.4)$$

$$\sum_j x_{ij} = \sum_k x_{ki} \quad ; \forall i \neq s, t \quad (4.4)$$

$$\sum_j x_{ij} \oplus f = \sum_k x_{ki} \quad ; i = t \quad (5.4)$$

$$\circ \leq x_{ij} \leq u_{ij} \quad \forall (i, j) \in E \quad (6.4)$$

۳.۴ فرمول‌بندی برنامه‌ریزی خطی مسایل جریان ماکسیمم در محیط فازی

فرض کنید گراف جهت‌دار $\tilde{G} = (V, E)$ با ظرفیت‌های فازی کران بالای $\tilde{u}_{ij}$ باشد و برای هر کمان (i, j) ، مقدار $\tilde{x}_{ij}$ را برای جریان فازی متناظر در این کمان (i, j) نسبت داده شده باشد. فرض کنید $\tilde{f}$ نمایانگر مقدار جریان ماکسیمم فازی در این شبکه از راس مبدا s به راس مقصد t باشد. مساله‌ی جریان ماکسیمم فازی در محیط فازی را می‌توان به صورت زیر فرمول‌بندی نمود:

$$\max \tilde{f} \\ s.t$$

$$\sum_j \tilde{x}_{ij} = \sum_k \tilde{x}_{ki} + \tilde{f} \quad ; i = s \quad (۷.۴)$$

$$\sum_j \tilde{x}_{ij} = \sum_k \tilde{x}_{ki} \quad ; \forall i \neq s, t \quad (۸.۴)$$

$$\sum_j \tilde{x}_{ij} + \tilde{f} = \sum_k \tilde{x}_{ki} \quad ; i = t \quad (۹.۴)$$

$$\tilde{x}_{ij} \leq \tilde{u}_{ij} \quad \forall (i, j) \in E \quad (۱۰.۴)$$

$\tilde{x}_{ij}$ یک عدد فازی نامنفی می‌باشد.

نکته ۱.۳.۴. برای عدد حقیقی x_i و عدد فازی $\tilde{x}_i$ داریم:

$$\sum_i^m x_i = x_1 + x_2 + \dots + x_m \quad (۱۱.۴)$$

$$\sum_i^m \tilde{x}_i = \tilde{x}_1 \oplus \tilde{x}_2 \oplus \dots \oplus \tilde{x}_m \quad (۱۲.۴)$$

۴.۴ حل مساله‌ی جریان ماکسیمم به روش برنامه‌ریزی خطی

مراحل حل مساله‌ی جریان ماکسیمم فازی و پیدا کردن جواب بهینه‌ی فازی با کمک برنامه‌ریزی خطی را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

گام ۱: فرمول‌بندی مساله‌ی جریان ماکسیمم فازی با کمک مساله‌ی برنامه‌ریزی خطی فازی زیر:

$$\max \tilde{f} \\ s.t$$

$$\sum_j \tilde{x}_{ij} = \sum_k \tilde{x}_{ki} \oplus \tilde{f} \quad ; i = s \quad (13.4)$$

$$\sum_j \tilde{x}_{ij} = \sum_k \tilde{x}_{ki} \quad ; \forall i \neq s, t \quad (14.4)$$

$$\sum_j \tilde{x}_{ij} \oplus \tilde{f} = \sum_k \tilde{x}_{ki} \quad ; i = t \quad (15.4)$$

$$\tilde{x}_{ij} \preceq \tilde{u}_{ij} \quad \forall (i, j) \in E \quad (16.4)$$

$\tilde{x}_{ij}$ یک عدد فازی نامنفی می‌باشد.

گام ۲: فرض کنید همه‌ی پارامترهای $\tilde{x}_{ij}$ و $\tilde{f}$ به ترتیب با اعداد فازی مثلثی نامنفی (a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}) ، (f_1, f_2, f_3) و (u_{ij}, v_{ij}, w_{ij}) نمایش داده شوند، آنگاه فرمول‌بندی برنامه‌ریزی خطی فازی مسالهی جریان ماکسیم فازی که از گام ۱ به دست آمده، به صورت زیر می‌باشد:

$$\max(f_1, f_2, f_3)$$

s.t

$$\sum_j (a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}) = \sum_k (a_{ki}, b_{ki}, c_{ki}) \oplus (f_1, f_2, f_3) \quad ; i = s \quad (17.4)$$

$$\sum_j (a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}) = \sum_k (a_{ki}, b_{ki}, c_{ki}) \quad ; \forall i \neq s, t \quad (18.4)$$

$$\sum_j (a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}) \oplus (f_1, f_2, f_3) = \sum_k (a_{ki}, b_{ki}, c_{ki}) \quad ; i = t \quad (19.4)$$

$$(a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}) \preceq (u_{ij}, v_{ij}, w_{ij}) \quad \forall (i, j) \in E \quad (20.4)$$

گام ۳: تبدیل قیدهای نامساوی به قیدهای تساوی با معرفی متغیر نامنفی $\forall (i, j) \in E$ ، $\tilde{S}_{ij} = (s'_{ij}, s''_{ij}, s'''_{ij})$ مسالهی برنامه‌ریزی خطی که در گام ۲ به دست آمده، به صورت زیر می‌باشد:

$$\max(f_1, f_2, f_3)$$

s.t

$$\sum_j (a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}) = \sum_k (a_{ki}, b_{ki}, c_{ki}) \oplus (f_1, f_2, f_3) \quad ; i = s \quad (21.4)$$

$$\sum_j (a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}) = \sum_k (a_{ki}, b_{ki}, c_{ki}) \quad ; \forall i \neq s, t \quad (22.4)$$

$$\sum_j (a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}) \oplus (f_1, f_2, f_3) = \sum_k (a_{ki}, b_{ki}, c_{ki}) \quad ; i = t \quad (23.4)$$

$$(a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}) \oplus (s'_{ij}, s''_{ij}, s'''_{ij}) = (u_{ij}, v_{ij}, w_{ij}) \quad \forall (i, j) \in E \quad (24.4)$$

گام ۴: با استفاده از تعریف رتبه‌بندی و عملیات ریاضی که در تعریف (۶.۳.۲) بیان شد، مساله‌ی برنامه‌ریزی خطی فازی که در گام ۳ به دست آمده، به مساله‌ی برنامه‌ریزی خطی قطعی به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} & \max \left(\frac{f_1, 2f_2, f_3}{4} \right) \\ & s.t \\ & \sum_j a_{ij} = \sum_k a_{ki} + f_1 \quad ; i = s \\ & \sum_j a_{ij} = \sum_k a_{ki} \quad ; \forall i \neq s, t \quad (25.4) \\ & \sum_j a_{ij} + f_1 = \sum_k a_{ki} \quad ; i = t \\ & \sum_j b_{ij} = \sum_k b_{ki} + f_2 \quad ; i = s \\ & \sum_j b_{ij} = \sum_k b_{ki} \quad ; \forall i \neq s, t \quad (26.4) \\ & \sum_j b_{ij} + f_2 = \sum_k b_{ki} \quad ; i = t \\ & \sum_j c_{ij} = \sum_k c_{ki} + f_3 \quad ; i = s \\ & \sum_j c_{ij} = \sum_k c_{ki} \quad ; \forall i \neq s, t \quad (27.4) \\ & \sum_j c_{ij} + f_3 = \sum_k c_{ki} \quad ; i = t \end{aligned}$$

$$a_{ij} + s'_{ij} = u_{ij}$$

$$b_{ij} + s''_{ij} = v_{ij}$$

$$c_{ij} + s'''_{ij} = w_{ij}$$

$$b_{ij} - a_{ij} \geq 0, \quad c_{ij} - b_{ij} \geq 0, \quad a_{ij} \geq 0, \quad b_{ij} \geq 0, \quad c_{ij} \geq 0$$

$$s''_{ij} - s'_{ij} \geq 0, \quad s'''_{ij} - s''_{ij} \geq 0, \quad s'_{ij} \geq 0, \quad s''_{ij} \geq 0, \quad s'''_{ij} \geq 0$$

$$f_2 - f_1 \geq 0, \quad f_3 - f_2 \geq 0, \quad f_1 \geq 0, \quad f_2 \geq 0, \quad f_3 \geq 0$$

$$\forall (i, j) \in E$$

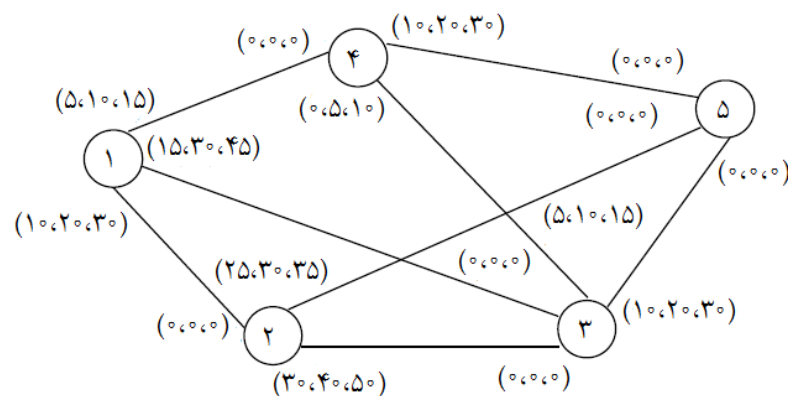
گام ۵: جریان بهینه‌ی f_1, f_2 و f_3 را با حل مسالهی برنامه‌ریزی خطی قطعی به دست آمده در گام ۴ پیدا کنید.

گام ۶: مقدار جریان ماکسیم فازی را با قرار دادن مقادیر f_1, f_2 و f_3 در رابطه $\tilde{f} = (f_1, f_2, f_3)$ به دست آورید.

۱.۴.۴ توضیح روش با مثال

حال روش پیشنهادی را با حل یک مثال عددی توضیح می‌دهیم.

مثال ۱.۴.۴. مساله پیدا کردن جریان ماکسیم فازی بین راس ۱ (راس مبدا) و راس ۵ (راس مقصد) روی شبکه‌ی نشان داده شده در شکل (۱.۴) می‌باشد.



شکل ۱.۴: مقدار فازی جریان در امتداد هر کمان

حل: جریان ماکسیم فازی بین راس ۱ و راس ۵ را می‌توان با کمک مراحل زیر به دست آورد:

گام ۱: مسالهی جریان ماکسیم فازی را می‌توان به صورت زیر به مسالهی برنامه‌ریزی خطی فازی فرمول‌بندی نمود:

$$\max \tilde{f}$$

s.t

$$\begin{aligned}\tilde{x}_{12} \oplus \tilde{x}_{13} \oplus \tilde{x}_{14} &= \tilde{f} \\ \tilde{x}_{23} \oplus \tilde{x}_{25} &= \tilde{x}_{12} \\ \tilde{x}_{34} \oplus \tilde{x}_{35} &= \tilde{x}_{13} \oplus \tilde{x}_{23} \\ \tilde{x}_{45} &= \tilde{x}_{14} \oplus \tilde{x}_{34} \\ \tilde{x}_{25} \oplus \tilde{x}_{35} \oplus \tilde{x}_{45} &= \tilde{f} \\ \tilde{x}_{ij} &\preceq \tilde{u}_{ij} \quad \forall (i, j) \in E\end{aligned}$$

که $\tilde{x}_{ij}$ یک عدد فازی نامنفی می‌باشد.

گام ۲: فرض کنید همه‌ی پارامترهای $\tilde{x}_{ij}$ و $\tilde{f}$ به ترتیب با اعداد فازی مثلثی نامنفی (a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}) ، (f_1, f_2, f_3) و (u_{ij}, v_{ij}, w_{ij}) نمایش داده شوند، آنگاه فرمول‌بندی برنامه‌ریزی خطی فازی مسالهی جریان ماکسیم فازی که از گام ۱ به دست آمده را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\max(f_1, f_2, f_3)$$

s.t

$$\begin{aligned}(a_{12}, b_{12}, c_{12}) \oplus (a_{13}, b_{13}, c_{13}) \oplus (a_{14}, b_{14}, c_{14}) &= (f_1, f_2, f_3) \\ (a_{23}, b_{23}, c_{23}) \oplus (a_{25}, b_{25}, c_{25}) &= (a_{12}, b_{12}, c_{12}) \\ (a_{34}, b_{34}, c_{34}) \oplus (a_{35}, b_{35}, c_{35}) &= (a_{13}, b_{13}, c_{13}) \oplus (a_{23}, b_{23}, c_{23}) \\ (a_{45}, b_{45}, c_{45}) &= (a_{14}, b_{14}, c_{14}) \oplus (a_{34}, b_{34}, c_{34}) \\ (a_{25}, b_{25}, c_{25}) \oplus (a_{35}, b_{35}, c_{35}) \oplus (a_{45}, b_{45}, c_{45}) &= (f_1, f_2, f_3) \\ \tilde{x}_{12} &\preceq (10, 20, 30), \quad \tilde{x}_{13} \preceq (15, 30, 45), \quad \tilde{x}_{14} \preceq (5, 10, 15), \\ \tilde{x}_{23} &\preceq (30, 40, 50), \quad \tilde{x}_{25} \preceq (25, 30, 35), \quad \tilde{x}_{34} \preceq (5, 10, 15), \\ \tilde{x}_{35} &\preceq (10, 20, 30), \quad \tilde{x}_{45} \preceq (10, 20, 30),\end{aligned}$$

گام ۳: تبدیل قیدهای نامساوی به قیدهای تساوی با معرفی متغیر نامنفی $\forall (i, j) \in E$ ، $\tilde{S}_{ij} = (s'_{ij}, s''_{ij}, s'''_{ij})$ مسالهی برنامه‌ریزی خطی که در گام ۲ به دست آمده را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\max(f_1, f_2, f_3)$$

s.t

$$\begin{aligned}
 (a_{12}, b_{12}, c_{12}) \oplus (a_{13}, b_{13}, c_{13}) \oplus (a_{14}, b_{14}, c_{14}) &= (f_1, f_2, f_3) \\
 (a_{23}, b_{23}, c_{23}) \oplus (a_{25}, b_{25}, c_{25}) &= (a_{12}, b_{12}, c_{12}) \\
 (a_{34}, b_{34}, c_{34}) \oplus (a_{35}, b_{35}, c_{35}) &= (a_{13}, b_{13}, c_{13}) \oplus (a_{23}, b_{23}, c_{23}) \\
 (a_{45}, b_{45}, c_{45}) &= (a_{14}, b_{14}, c_{14}) \oplus (a_{34}, b_{34}, c_{34}) \\
 (a_{25}, b_{25}, c_{25}) \oplus (a_{35}, b_{35}, c_{35}) \oplus (a_{45}, b_{45}, c_{45}) &= (f_1, f_2, f_3) \\
 (a_{12}, b_{12}, c_{12}) \oplus (s'_{12}, s''_{12}, s'''_{12}) &= (10, 20, 30) \\
 (a_{13}, b_{13}, c_{13}) \oplus (s'_{13}, s''_{13}, s'''_{13}) &= (15, 30, 45) \\
 (a_{14}, b_{14}, c_{14}) \oplus (s'_{14}, s''_{14}, s'''_{14}) &= (5, 10, 15) \\
 (a_{23}, b_{23}, c_{23}) \oplus (s'_{23}, s''_{23}, s'''_{23}) &= (30, 40, 50) \\
 (a_{25}, b_{25}, c_{25}) \oplus (s'_{25}, s''_{25}, s'''_{25}) &= (25, 30, 35) \\
 (a_{34}, b_{34}, c_{34}) \oplus (s'_{34}, s''_{34}, s'''_{34}) &= (5, 10, 15) \\
 (a_{35}, b_{35}, c_{35}) \oplus (s'_{35}, s''_{35}, s'''_{35}) &= (10, 20, 30) \\
 (a_{45}, b_{45}, c_{45}) \oplus (s'_{45}, s''_{45}, s'''_{45}) &= (10, 20, 30)
 \end{aligned}$$

گام ۴: با استفاده از تعریف رتبه‌بندی و عملیات ریاضی که در تعریف (۶.۳.۲) بیان شد، مسالهی برنامه‌ریزی خطی فازی که در گام ۳ به دست آمده، به مسالهی برنامه‌ریزی خطی قطعی به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\max \left(\frac{f_1, 2f_2, f_3}{4} \right)$$

s.t

$$\begin{aligned}
 a_{12} + a_{13} + a_{14} - f_1 &= 0, & b_{12} + b_{13} + b_{14} - f_2 &= 0 \\
 c_{12} + c_{13} + c_{14} - f_3 &= 0, & a_{23} + a_{25} - a_{12} &= 0 \\
 b_{23} + b_{25} - b_{12} &= 0, & c_{23} + c_{25} - c_{12} &= 0 \\
 a_{34} + a_{35} - a_{13} - a_{23} &= 0, & b_{34} + b_{35} - b_{13} - b_{23} &= 0 \\
 c_{34} + c_{35} - c_{13} - c_{23} &= 0, & a_{14} + a_{34} - a_{45} &= 0 \\
 b_{14} + b_{34} - b_{45} &= 0, & c_{14} + c_{34} - c_{45} &= 0 \\
 a_{25} + a_{35} + a_{45} - f_1 &= 0, & b_{25} + b_{35} + b_{45} - f_2 &= 0 \\
 c_{25} + c_{35} + c_{45} - f_3 &= 0
 \end{aligned}$$

$$a_{12} + s'_{12} = 10, \quad b_{12} + s''_{12} = 20, \quad c_{12} + s'''_{12} = 30$$

$$a_{13} + s'_{13} = 15, \quad b_{13} + s''_{13} = 30, \quad c_{13} + s'''_{13} = 45$$

$$a_{14} + s'_{14} = 5, \quad b_{14} + s''_{14} = 10, \quad c_{14} + s'''_{14} = 15$$

$$a_{23} + s'_{23} = 30, \quad b_{23} + s''_{23} = 40, \quad c_{23} + s'''_{23} = 50$$

$$a_{25} + s'_{25} = 25, \quad b_{25} + s''_{25} = 30, \quad c_{25} + s'''_{25} = 35$$

$$a_{34} + s'_{34} = 5, \quad b_{34} + s''_{34} = 10, \quad c_{34} + s'''_{34} = 15$$

$$a_{35} + s'_{35} = 10, \quad b_{35} + s''_{35} = 20, \quad c_{35} + s'''_{35} = 30$$

$$a_{45} + s'_{45} = 10, \quad b_{45} + s''_{45} = 20, \quad c_{45} + s'''_{45} = 30$$

$$b_{ij} - a_{ij} \geq 0, \quad c_{ij} - b_{ij} \geq 0, \quad a_{ij} \geq 0, \quad b_{ij} \geq 0, \quad c_{ij} \geq 0$$

$$s''_{ij} - s'_{ij} \geq 0, \quad s'''_{ij} - s''_{ij} \geq 0, \quad s'_{ij} \geq 0, \quad s''_{ij} \geq 0, \quad s'''_{ij} \geq 0$$

$$f_2 - f_1 \geq 0, \quad f_3 - f_2 \geq 0, \quad f_1 \geq 0, \quad f_2 \geq 0, \quad f_3 \geq 0$$

$$\forall (i, j) \in E$$

گام ۵: با حل مساله‌ی برنامه‌ریزی خطی قطعی به دست آمده در گام ۴، جریان بهینه برابر $f_1 = 30$ ، $f_2 = 55$ و $f_3 = 85$ به دست می‌آید.

گام ۶: با قرار دادن مقادیر $f_1 = 30$ ، $f_2 = 55$ و $f_3 = 85$ در رابطه $\tilde{f} = (f_1, f_2, f_3)$ ، مقدار جریان ماکسیم فازی برابر مقدار $\tilde{f} = (30, 55, 85)$ می‌باشد.

نتایج مثال

نتایج به دست آمده برای مثال فوق را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

الف: مقدار جریان بین مبدا و مقصد بزرگتر از ۳۰ و کمتر از ۸۵ واحد است.

ب: مقدار ماکسیم برای بهترین حالت مقدار جریان برابر ۵۵ واحد می‌باشد.

ج: درصد مطلوبیت برای جریان مانده را می‌توان به صورت زیر به دست آورد:

فرض کنید x نشان‌دهنده مقدار جریان باشد، آنگاه درصد مطلوبیت برابر $x = \mu_{\tilde{f}}(x) \times 100$ می‌باشد که:

$$\mu_{\tilde{f}}(x) = \begin{cases} \frac{(x - 30)}{25}, & 30 \leq x \leq 55 \\ \frac{(x - 85)}{-30}, & 55 \leq x \leq 85 \\ 0, & o.w \end{cases}$$

۵.۴ تعمیم جریان ماکسیم در شبکه‌ی فازی با در نظر گرفتن ظرفیت راس:

۱.۵.۴ بررسی جریان در شبکه با ظرفیت رئوس

در بعضی از شبکه‌ها با حالتی از مساله روبرو هستیم که در آن علاوه بر کمان‌ها، رئوس شبکه نیز دارای ظرفیت هستند، یعنی میزان جریانی که می‌تواند به هر راس وارد شود دارای محدودیت است. این حالت برای نمونه در هنگام محاسبه‌ی نمونه مسیرهای مجزا در گراف‌ها (یافتن مسیرهایی بین یک مبدا و مقصد مشخص به گونه‌ای که این مسیرها به جز مبدا و مقصد، راس مشترکی نداشته باشند) و یا در مساله‌های دیگری که رئوس، مدلی از اشیای دارای ظرفیت هستند نمایان می‌شود.

در مساله‌ی جریان ماکسیم، هر کمان ظرفیتی دارد که جریان عبوری از آن را محدود می‌کند. می‌توان حالت دیگری را در نظر گرفت که در آن علاوه بر کمان‌ها، رئوس گراف نیز دارای ظرفیت می‌باشند که مقدار جریانی که می‌تواند وارد هر راس شود را محدود می‌کنند.

هر راس $i \in V - \{s, t\}$ یک ظرفیت $c_i \geq 0$ دارد (یک ظرفیت می‌تواند ∞ باشد یعنی محدودیت ظرفیتی وجود نداشته باشد). در اینجا فرض می‌شود که مبدا و مقصد محدودیت ظرفیتی ندارند؛ اگر بخواهیم که ظرفیت داشته باشند می‌توانیم یک راس s' اضافه کنیم که به جای s مبدا باشد و برای مقصد نیز به جای راس t یک راس t' اضافه کنیم و سپس ظرفیت s را برای کمان (s', s) و ظرفیت t را برای کمان (t, t') در نظر بگیریم. توجه کنید که این تبدیل گراف را همچنان همان حالتی که هست (مسطح، همبند و یا ساده) نگه خواهد داشت و حتی در صورت st -مسطح بودن نیز st -مسطح باقی خواهد ماند. یک گراف بدون ظرفیت راس را می‌توان نمونه خاصی که در آن برای هر راس i ، $c_i = \infty$ است، در نظر گرفت.

با توجه به اضافه شدن شرط جدیدی برای ظرفیت رئوس، تعریف یک «جریان» را اندکی تغییر می‌دهیم (در واقع تنها یک شرط به آن اضافه می‌کنیم):

تعریف ۱.۵.۴. تابع $f: E \rightarrow R$ را یک جریان گوئیم اگر در شرایط زیر صدق کند:

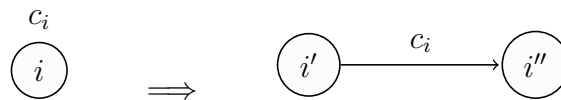
$$\sum_{(i,j) \in E} f_{ij} - \sum_{(j,i) \in E} f_{ji} = 0 \quad \forall i \in V - \{s, t\} \quad (28.4)$$

$$0 \leq f_{ij} \leq c_{ij} \quad \forall (i, j) \in E \quad (29.4)$$

$$\sum_{(j,i) \in E} f_{ji} \leq c_i \quad \forall i \in V - \{s, t\} \quad (30.4)$$

شرط (۳۰.۴) را محدودیت ظرفیت راس می‌نامند. یعنی مقدار جریان ورودی به راس v_i همواره کمتر یا مساوی ظرفیت راسی v_i یعنی c_i می‌باشد.

فورد و فالکرسون نخستین بار این نسخه از مساله را مورد مطالعه قرار دادند [۱۱]. آن‌ها تبدیل ساده‌ی زیر که به تکنیک « تجزیه‌ی راس » معروف است را به منظور حذف ظرفیت رئوس پیشنهاد کردند؛ هر راس i با ظرفیت متناهی c_i را با دو راس i' و i'' جایگزین می‌کنیم. کمان‌هایی که وارد i می‌شده‌اند اکنون وارد i' می‌شوند و کمان‌هایی که از i خارج می‌شده‌اند اکنون از i'' خارج می‌شوند. همچنین یک کمان جدید با ظرفیت c_i از i' به i'' اضافه می‌شود (شکل (۲.۴)). اگر همه‌ی رئوس دارای



شکل ۲.۴: تکنیک تجزیه‌ی راس به منظور حذف ظرفیت راس

ظرفیت واحد باشند آنگاه به مساله‌ی st -مسیرهای راس-مجزا (یافتن بیشترین تعداد مسیرهای بین یک مبدا و مقصد مشخص به گونه‌ای که این که این مسیرها به جز مبدا و مقصد، راس مشترکی نداشته باشند) می‌رسیم.

۲.۵.۴ بررسی جریان در شبکه با ظرفیت رئوس فازی

گفتیم که برای برخی از شبکه‌ها می‌توانیم حالتی از مساله را در نظر بگیریم که در آن علاوه بر کمان‌ها، رئوس شبکه نیز دارای ظرفیت فازی باشند. برای مساله‌ی جریان ماکسیمم نیز می‌توان حالت دیگری را در نظر گرفت که در آن علاوه بر اینکه کمان‌ها دارای ظرفیت فازی باشند، رئوس گراف نیز دارای ظرفیت فازی باشند و مقدار جریانی که می‌تواند وارد هر راس شود را محدود کند. برای گراف فازی $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$ و جریان فازی $\tilde{f}$ و ظرفیت فازی $\tilde{c}$ مساله به صورت زیر تغییر می‌نماید.

هر راس $i \in \tilde{V} - \{s, t\}$ یک ظرفیت $\tilde{c}_i \geq 0$ دارد (یک ظرفیت می‌تواند ∞ باشد یعنی محدودیت ظرفیتی وجود نداشته باشد). در اینجا فرض می‌شود که مبدا و مقصد محدودیت ظرفیتی ندارند؛ اگر بخواهیم که ظرفیت داشته باشند می‌توانیم یک راس s' اضافه کنیم که به جای s مبدا باشد و برای مقصد نیز به جای راس t یک راس t' اضافه کنیم و سپس ظرفیت s را برای کمان (s', s) و ظرفیت t را برای کمان (t, t') در نظر بگیریم. یک گراف بدون ظرفیت راس را می‌توان نمونه خاصی که در آن برای هر راس i ، $\tilde{c}_i = \infty$ است، در نظر گرفت.

با توجه به اضافه شدن شرط جدیدی برای ظرفیت فازی رئوس، تعریف جریان را اندکی تغییر می‌یابد (در واقع تنها یک شرط به آن اضافه می‌شود):

تعریف ۲.۵.۴. تابع $\tilde{f} : \tilde{E} \rightarrow R$ را یک جریان گوئیم اگر در شرایط زیر صدق کند:

$$\sum_{(i,j) \in \tilde{E}} \tilde{f}_{ij} - \sum_{(j,i) \in \tilde{E}} \tilde{f}_{ji} = 0 \quad \forall i \in \tilde{V} - \{s, t\} \quad (31.4)$$

$$0 \leq \tilde{f}_{ij} \leq \tilde{c}_{ij} \quad \forall (i, j) \in \tilde{E} \quad (32.4)$$

$$\sum_{(j,i) \in \tilde{E}} \tilde{f}_{ji} \leq \tilde{c}_i \quad \forall i \in \tilde{V} - \{s, t\} \quad (33.4)$$

شرط (۳۳.۴) را محدودیت ظرفیت راس می‌نامند. یعنی مقدار جریان ورودی به راس v_i همواره کمتر یا مساوی ظرفیت راسی $\tilde{V}_i$ یعنی $\tilde{c}_i$ می‌باشد.

همانند روش ذکر شده برای حالت قطعی، برای حذف ظرفیت فازی رئوس می‌توان هر راس i با ظرفیت متناهی $\tilde{c}_i$ را با دو راس i' و i'' جایگزین نمود. کمان‌هایی که وارد i می‌شده‌اند اکنون وارد i' می‌شوند و کمان‌هایی که از i خارج می‌شده‌اند اکنون از i'' خارج می‌شوند. همچنین یک کمان جدید با ظرفیت $\tilde{c}_i$ از i' به i'' اضافه می‌شود (شکل (۳.۴)).



شکل ۳.۴: تکنیک تجزیه‌ی راس به منظور حذف ظرفیت فازی راس

می‌توان با روش بیان شده، حل مسایل جریان ماکسیم با الگوریتم‌های ذکر شده در فصل سوم و برنامه‌ریزی خطی این فصل، شبکه‌ی تعمیم یافته با ظرفیت راس را نیز حل نمود.

۶.۴ نتیجه‌گیری

مساله‌ی جریان ماکسیم دارای کاربردهای زیادی در زمینه‌های متعدد از جمله تعیین جریان ماکسیم در انواع شبکه‌ها می‌باشد. با توجه به اینکه در بسیاری از این کاربردها عدم قطعیت در مورد پارامترهای شبکه‌های قطعی وجود دارد، در این پایان‌نامه مساله‌ی جریان ماکسیم در شبکه‌های فازی مورد مطالعه قرار گرفت. برای این منظور ابتدا ویژگی‌های شبکه‌های قطعی و فازی بررسی و الگوریتم‌ها و روش‌های حل مساله‌ی جریان ماکسیم با استفاده از اعداد فازی مثلثی و دوزنقه‌ای بیان شد. همچنین حل مسایل جریان ماکسیم به روش برنامه‌ریزی خطی فازی مطرح گردید. اختصاص ظرفیت فازی برای رئوس در شبکه‌های فازی و بیان روش حل آن از جنبه‌های نوآوری این پایان‌نامه می‌باشد.

در تمامی موارد گفته شده، فقط حالت‌هایی که در آن‌ها کمان‌ها و یا ظرفیت کمان‌ها دارای مقادیر فازی بودند، بیان شد. می‌توان صورت دیگری از مساله را معرفی کرد که در آن علاوه بر کمان‌ها، رئوس نیز دارای ظرفیت فازی باشند، به این ترتیب که توسط تکنیکی به نام گراف گسترش یافته می‌توان این مساله را به همان مساله‌ی اولیه (بدون ظرفیت فازی راس) تغییر داد.

طراحی الگوریتم‌های دیگر و تهیه‌ی برنامه‌های محاسباتی برای الگوریتم‌های ارایه شده از جمله چشم‌اندازهای آینده‌ی این پایان‌نامه می‌باشد.

- [1] Alam M. K; and Hasan M. K; *Solution of Fuzzy Maximal Flow Network Problem Based on Generalized Trapezoidal Fuzzy Numbers with Rank and Mode*, International Journal of Engineering Research and Development, Issue 7, vlo. 9, (2014), pp. 40-49.
- [2] Bozhenyuk A; Gerasimenko E; and Rozenberg I; *The Methods of Maximum Flow and Minimum Cost Flow Finding in Fuzzy Network*, Workshop co-located with the 10th International Conference on Formal Concept Analysis, vol. 12, (2012), pp. 1-12.
- [3] Chanas S; and Kolodziejczyk W; *Real-valued flows in a network with fuzzy arc capacities*, Fuzzy Sets and Systems, vol. 13, (1984),pp. 139-151.
- [4] Chanas S; Delgado b. M; Verdegay b. J. L; and Vila u. M. A; *Theory and Methodology Fuzzy optimal flow on imprecise structures*, European Journal of Operational Research 13, vol. 83, (1995), pp. 568-580.
- [5] Chen S. H; *Operations on fuzzy numbers with function principal*, Tamkang Journal of Management Sciences, vol 6, (1985), pp. 13-25.
- [6] Clark J; and Holton D. A; *A first look at graph theory*, Depatment of Mathematics and statistics University of Otago New Zealand, vol. 330, (1991), pp. 261-288.
- [7] Christofides N; *Graph Theory: An Algorithmic Approach*, Academic Press, New York, London, San Francisco, vol. 23, (1976), pp. 368-388.
- [8] Dantzig G. B; *Applications of the simplex method to a transportation problem*, In T. C. Koopmans, editor, Activity analysis and production and allocation, Wiley, New York, vol. 13, (1951), pp. 359-373.
- [9] Edmonds J; and Karp R. M; *Theoretical Improvements in Algorithmic Efficiency for Network Flow Problems*, Journal of the Association for Computing Machinery, vol. 19 (2), (1972), pp. 248-264.
- [10] Ford L. R; and Fulkerson D. R; *Maximal flow through a network*, Canadian Journal of Mathematics, vol. 8, (1956), pp. 399-404.

- [11] Ford L. R; and Fulkerson D. R; *Flows in Networks*, Princeton University Press, Princeton, vol. 208, (1962), pp. 121-133.
- [12] Fuller R; *Fuzzy Reasoning and Fuzzy Optimization*, Fuzzy Sets and Systems, vol. 78, (1998), pp. 139-153.
- [13] Ganesan K; Veeramani P; *Fuzzy Linear Programs with Trapezoidal Fuzzy Numbers*, Ann Oper Res, vol. 143 , (2006), pp. 305-315.
- [14] Harris T. E, and Ross F. S; *Fundamentals of a method for Evaluating rail net capacities*, (U) RAND Corporation, Research Memorandum RM-1573, vol. 63, (1956), pp. 41-51.
- [15] Hu T. C; *Integer Programming and Network Flows*, Addison-Wesley Publishing Company, Ontario, vol. 4, (1970), pp. 570-605.
- [16] Kim K; and Roush F; *Fuzzy flows on network*, Fuzzy Sets and Systems, vol. 8, (1982), pp. 35-38.
- [17] Kumar A; and Kaur M; *A Fuzzy Linear Programming Approach to Solve Fuzzy Maximal Flow Problems*, International Journal of Physical and Mathematical Sciences, vol. 1(1), (2010), pp. 6-12.
- [18] Kumar A; and Kaur M; *Solution of Fuzzy Maximal Flow Problems Using Fuzzy Linear Programming*, International Journal of Computational and Mathematical Sciences 5:2, vol. 5, (2011), pp. 62-66.
- [19] Kumar A; Kaur J; and Singh P; *Fuzzy Optimal Solution of Fully Fuzzy Linear Programming Problems with Inequality Constraints*, International Journal of Mathematical and Computer Sciences 6:1, vol. 6, (2010), pp. 37-41.
- [20] Kumar A; and Kaur M; *An Algorithm for Solving Fuzzy Maximal Flow Problems Using Generalized Trapezoidal Fuzzy Numbers*, International Journal of Applied Science and Engineering, vol. 10, (2010), pp. 109-118.
- [21] Lee H. K; *First Course on Fuzzy Theory and Applications*, Advanced Institute of Science and Technology. KAIST, Kusong-dong 373-1, vol. 340, (2005), pp. 129-150.
- [22] Rosenfeld A; *Fuzzy graph*, in: Zadeh. L.A, Fu. K.S, Tanaka. K and Shimura. M, *Fuzzy Sets and Their Applications to Cognitive and Decision Processes*, Academic Press, New York, (1975), pp. 79-97.
- [23] Rozenberg I; and Starostina T; *Minimal Cost Flow Problem in a Graph with Flow Inten-sification and Fuzzy Parameters* In: 13th Zittau East West Fuzzy Colloquium, Hochschule Zittau Goerlitz, Zittau, (2006), pp. 176-184.

-
- [24] Taha H. A; *Operations Research*, An Introduction, (1991) , pp. 281-369.
- [25] Todinov M; *Topology optimisation of repairable flow networks for a maximum*, Computers and Mathematics with Applications, vol. 64, (2012), pp. 3729–3746.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Saturated	اشباع شده
Fuzzy triangular number	اعداد مثلثی فازی
Trapezoidal fuzzy numbers	اعداد ذوزنقه‌ای فازی
Augmenting	افزایشی
Acyclic	بدون دور
Cut	برش
Linear programming	برنامه‌ریزی خطی
Fuzzy linear programming	برنامه‌ریزی خطی فازی
Optimality	بهینگی
Backward	پس‌رو
Ranking function	تابع رتبه‌بندی
Sensitivity analysis	تحلیل حساسیت
Iteration	تکرار
Flow	جریان
Maximal flow	جریان ماکسیمال
Maximum flow	جریان ماکسیمم
Admissible flow	جریان مجاز
Additivity	جمع‌پذیری
Direction	جهت
Augmenting chain	حلقه‌ی افزوده
Transportation	حمل و نقل
Cycle	دور
Cycling	دور زدن
Dual	دوگان
Generalized trapezoidal	ذوزنقه‌ای تعمیم‌یافته

Fuzzy subgraph.....	زیرگراف فازی
Imprecise structures.....	ساختارهای غیرقطعی
Fuzzy transportation network.....	شبکه حمل و نقل فازی
Residue network.....	شبکه‌ی مانده
Connected network.....	شبکه‌ی همبند
Fuzzy arc capacity.....	ظرفیت کمان فازی
Fuzziness.....	فازی‌سازی
Constraint.....	قید
Reduction.....	کاهش
Arc.....	کمان
Least-cost.....	کمترین هزینه
Shortest chain.....	کوتاه‌ترین حلقه
Shortest path.....	کوتاه‌ترین مسیر
Fuzzy graph.....	گراف فازی
Node.....	گره، راس
Maximization.....	ماکسیم‌سازی
Residual.....	مانده
Obstruction.....	مانع
Fuzzy sets.....	مجموعه‌های فازی
Restriction.....	محدودیت
Boundary.....	مرز
Step.....	مرحله
Optimization problems.....	مسائل بهینه‌سازی
Path.....	مسیر
Augmenting path.....	مسیر افزوده
Flow value.....	مقدار جریان
Sink.....	مقصد
Source.....	منبع، مبدا
α -cut representation.....	نمایش α -برش
Objective.....	هدف
Minimal cost.....	هزینه‌ی می‌نیمال

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

α -cut representation	نمایش α -برش
Acyclic	بدون دور
Additivity	جمع‌پذیری
Admissible flow	جریان مجاز
Arc	کمان
Augmenting	افزایشی
Augmenting chain	حلقه‌ی افزوده
Augmenting path	مسیر افزوده
Backward	پس‌رو
Boundary	مرز
Connected network	شبکه‌ی همبند
Constraint	قید
Cut	برش
Cycle	دور
Cycling	دور زدن
Direction	جهت
Dual	دوگان
Flow	جریان
Flow value	مقدار جریان
Fuzziness	فازی‌سازی
Fuzzy arc capacity	ظرفیت کمان فازی
Fuzzy graph	گراف فازی
Fuzzy linear programming	برنامه‌ریزی خطی فازی
Fuzzy sets	مجموعه‌های فازی
Fuzzy subgraph	زیرگراف فازی

Fuzzy transportation network	شبکه حمل و نقل فازی
Fuzzy triangular number	اعداد مثلثی فازی
Generalized trapezoidal	دوزنقه‌ای تعمیم‌یافته
Imprecise structures	ساختارهای غیرقطعی
Iteration	تکرار
Least-cost	کمترین هزینه
Linear programming	برنامه‌ریزی خطی
Maximal flow	جریان ماکسیمال
Maximization	ماکسیم‌سازی
Maximum flow	جریان ماکسیمم
Minimal cost	هزینه‌ی می‌نیمال
Node	گره، راس
Objective	هدف
Obstruction	مانع
Optimality	بهینگی
Optimization problems	مسائل بهینه‌سازی
Path	مسیر
Ranking function	تابع رتبه‌بندی
Reduction	کاهش
Residual	مانده
Residue network	شبکه‌ی مانده
Restriction	محدودیت
Saturated	اشباع‌شده
Sensitivity analysis	تحلیل حساسیت
Shortest chain	کوتاه‌ترین حلقه
Shortest path	کوتاه‌ترین مسیر
Sink	مقصد
Source	منبع، مبدا
Step	مرحله
Transportation	حمل و نقل
Trapezoidal fuzzy numbers	اعداد دوزنقه‌ای فازی

نمایه

- α -برش، ۳۲
- عدد فازي دوزنقه‌ای تعمیم یافته، ۳۸
- عدد فازي مثلی، ۳۶
- اشباع شده، ۱۶
- اعداد فازي LR ، ۳۳
- الگوریتم فورد و فالکرسون، ۲۴
- برش، ۱۰
- برش مینیمم، ۱۰
- بقای جریان، ۸
- تابع جریان، ۸
- تابع حالت، ۳۹
- تابع رتبه‌بندی، ۳۹
- تابع عضویت، ۳۱
- تحدب، ۳۲
- جریان شدنی، ۶۰
- جریان فازي، ۳۵
- جریان ماکسیمال، ۱۳
- جریان ماکسیمم، ۵۲
- جریان ماکسیمم - برش مینیمم، ۱۷
- درخت f -اشباع نشده، ۲۳
- روش برنامه‌ریزی خطی، ۶۱
- شبکه، ۶
- شبکه فازي، ۳۴
- شبکه‌ی مانده، ۱۱
- ظرفیت، ۶
- ظرفیت مانده، ۱۰
- عدد فازي، ۳۲
- عدد فازي دوزنقه‌ای، ۳۷
- قید ظرفیت، ۸
- ماکسیمم فازي، ۳۶
- مجموعه فازي، ۳۲
- محمل، ۳۲
- مسیر افزوده، ۱۲
- مقدار جریان، ۹
- مقصد، ۶
- منبع، ۶
- هزینه‌ی مینیمم، ۵۶
- کمان پس‌رو، ۱۵
- کمان پیش‌رو، ۱۵
- کمترین هزینه، ۵۱
- گراف فازي، ۳۳
- گراف مانده، ۱۱
- گشت f -افزایشی، ۱۶

Abstract

In this thesis, the maximum flow problem in fuzzy networks has been studied. In the maximum flow problem, the goal of a maximum amount of flow from the source vertex to the sink vertex in a network respect to the limitation that no arc can not exceed the capacity of the arc is included. In the first chapter, the problem of maximum flow in networks is described in the definitive expression of Ford and Fulkerson algorithm. The second chapter is dedicated to define fuzzy networks and operations of fuzzy numbers are triangular and trapezoidal. The third chapter is represented an algorithm for solving the maximum flow problem in fuzzy networks. The fourth chapter is described of solving the fuzzy linear programming method.

Keywords:

Fuzzy Maximum Flow; Fuzzy Networks; Fuzzy Flow; Fuzzy Maximum Flow Problem; Fuzzy Number; Fuzzy Linear Programming



Shahrood University
Faculty Of Mathematical Sciences

Dissertation Submitted in Partial
Fulfillment of The Requirements For The
Degree of Master of Science in
Applied Mathematics

Study Maximum Flow in Fuzzy Networks

Supervisor
Dr.Sadegh Rahimi Shearbaf

by
Ailar Kasalkheh

February 2014