دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی محض ، گرایش آنالیز ریاضی

عنوان

جواب تکراری معادلات شامل عملگر K-مثبت معین

استاد راهنما

دکتر مهدی ایرانمنش

دانشجو

زهره کاظمیان

۱۳۹۲

به‌نام آن‌که جان را فکرت آموخت

ماحصل آموخته هایم را تقدیم می کنم به آنان که مهر آسمانی شان آرام بخش آلام زمینی ام است

به استوارترین تکیه گاهم ، دستان پر مهر پدرم

به سبزترین نگاه زندگیم ، چشمان سبز مادرم

که هرچه آموختم در مکتب عشق شما آموختم و هرچه بکوشم قطره ای از دریای بی کران مهربانیتان را سپاس نتوانم بگویم.

راه آوردی گران سنگ تر از این ارزان نداشتم تا به خاک پایتان نثار کنم ، باشد که حاصل تلاشم نسیم گونه غبار خستگیتان را بزداید.

بوسه بر دستان پر مهرتان

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر مهدی ایرانمنش، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکر می‌کنم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

زهره کاظمیان
۱۳۹۲

شماره

تاریخ

ویرایش:

باسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شاهرود

مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۶)

فرم صورت جلسه دفاع از پایان نامه تحصیلی دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) نتیجه ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد زهره کاظمیان رشته ریاضی محض گرایش آنالیز ریاضی تحت عنوان جواب تکراری معادلات شامل عملگر K- مثبت معین که در تاریخ ۱۳۹۲/۱۱/۱۶ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

قبول (با درجه : بسیار خوب امتیاز ۱۸/۵ ☐ دفاع مجدد ☐ مردود ☐

۱ـ عالی (۲۰ ـ ۱۹) ۲ـ بسیار خوب (۱۸/۹۹ ـ ۱۸)

۳ـ خوب (۱۷/۹۹ ـ ۱۶) ۴ـ قابل قبول (۱۵/۹۹ ـ ۱۴)

۵- نمره کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول

عضو هیات داوران	نام ونام خانوادگی	مرتبهٔ علمی	امضاء
۱ـ استادراهنما	دکتر مهدی ایرانمنش	استادیار	
۲ـ استاد مشاور		استادیار	
۳ـ نماینده شورای تحصیلات تکمیلی	آقای سید حیدر جعفری	استادیار	
۴ـ استاد ممتحن	دکتر علیرضا خدامی	استادیار	
۵ ـ استاد ممتحن	دکتر احمد زیره	دانشیار	

رئیس دانشکده: دکتر احمد زیره امضاء

تعهدنامه

اینجانب **زهره کاظمیان** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی محض** **دانشکده علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **جواب تکراری معادلات شامل عملگر K- مثبت معین** ، تحت راهنمایی **دکتر مهدی ایرانمنش** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تاکنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام " دانشگاه شاهرود " یا " Shahrood University " به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

زهره کاظمیان
۱۳۹۲

مالکیت نتایج و حق نشر

چکیده

در این پایان‌نامه، حل معادله $Ax = y$ را به روش تکراری که در آن A عملگر $K-$مثبت معین و K عملگری بسته و به طور پیوسته $D(A)$-معکوس پذیر است را روی فضای باناخ بررسی می کنیم. سپس عملگر $K-$مثبت معین را به عملگر فریشه گسترش می دهیم . همگرایی موضعی به جواب یکتای معادله $Ax = y$ را روی فضای باناخ بررسی می کنیم. همچنین عملگر افزاینده قوی که حالت غیرخطی عملگرK-مثبت معین است را معرفی کرده و نتایجی بهترین تقریب را برای این عملگرها بیان می‌کنیم.

کلمات کلیدی: عملگرK-معین مثبت، فضای باناخ، همگرایی، فضای باناخ به طور یکنواخت هموار، عملگر افزاینده قوی، بهترین تقریب،

فهرست مطالب

فصل ۱

مقدمات و پیش نیاز ها

در این فصل ابتدا تاریخچه مختصری درباره موضوع مورد بررسی در این مجموعه را بیان کرده، و سپس تعاریف و قضایای مورد نیاز در فصل‌ها را یادآوری کرده و به برخی مفاهیم پایه از آنالیز تابعی و نظریه بهترین تقریب که مورد نیاز است اشاره می کنیم.

۱.۱ تاریخچه

تاکنون نتایج مختلفی در زمینه تقریب حل معادله $Ax = f$ که Aعملگر K-مثبت معین است به روش تکراری بیان شده است. چیدوم[۱] و آنک [۲] همگرایی قوی به جواب معادله را با یک فرایند تکراری از جابجایی عملگر A با K اثبات کردند. در مرجع [۴] نتیجه همگرایی مشابهی با استفاده از یک فرایند تکراری متفاوت بدون اعمال جابجایی عملگرها بدست آمده همچنین در مرجع [۸] چیدوم و اوسیلیک[۳] نتایج همگرایی را بر روی فضای باناخ q -به‌طور یکنواخت هموار($q > ۱$) بدون فرض جابجای عملگرها

[۱] Chidume

[۲] Aneke

[۳] Osilike

تعمیم دادند، بای چانزی در مرجع [۴] [۱]این نتایج را بر روی فضای باناخ به‌طور یکنواخت بررسی کرد. چیدوم و آنک در مرجع [۴] مفهوم عملگر K-مثبت معین را بر روی فضای باناخ خاص گسترش ، و در سال ۲۰۰۱ این عملگر ها را به عملگرهای فرشه گسترش دادند. در این راستا مفهوم جدید عملگر K-مثبت معین مجانبی نیز معرفی شد و در فضای باناخ مورد مطاله قرار گرفت.

۲.۱ تعاریف و قضایا

در این قسمت تعاریف و قضایای مورد نیاز در فصل‌های آتی آمده‌اند.

تعریف ۱.۲.۱. (فضای متریک) فرض کنیم X یک مجموعه‌ی ناتهی باشد. در این صورت زوج مرتب (X,d) که $d : X \times X \to \mathbb{R}$ یک تابع حقیقی است را یک فضای متریک گوییم، هرگاه

۱) $d(x,y) \geq 0$.

۲) $d(x,y) = 0$ اگر و فقط اگر $x = y$.

۳) $d(x,y) = d(y,x)$.

۴) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

تعریف ۲.۲.۱. (فضای خطی نرم‌دار) فضای برداری مختلط X را یک فضای خطی نرم‌دار گوییم، هرگاه به هر $x \in X$ یک عدد حقیقی نامنفی مانند $\|x\|$ به نام نرم x چنان مربوط شده باشند که

۱) به ازای هر x و y درX، $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

۲) اگر $x \in X$ و α اسکالر باشد آنگاه $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$.

۳) اگر $\|x\| = 0$ آنگاه . $x = 0$

تعریف ۳.۲.۱. (فضای باناخ) فضای باناخ یک فضای خطی نرم‌دار کامل است.
کامل بودن یعنی هر دنباله کشی در این فضا همگرا باشد.

تعریف ۴.۲.۱. (فضای ضرب داخلی) فضای خطی حقیقی X یک فضای ضرب داخلی نامیده می‌شود، هرگاه برای هر زوج از عناصر $x, y \in X$ بتوان یک اسکالر حقیقی مانند <x،y> معرفی کرد که شرایط زیر برای هر $x, y, z \in X$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ برقرار باشد

۱) $< x, x > \geq 0$.

۲) $< x, x > = 0$ اگر و فقط اگر $x = 0$.

۳) $< x, y > = < y, x >$.

[۴] Bia Chuanzhi

۴) $.< \alpha x, y >= \alpha < x, y >$

۵) $.< x + y, z >=< x, z > + < y, z >$

تعریف ۵.۲.۱. (فضای هیلبرت) بنابر تعریف ۴.۲.۱ فضای ضرب داخلی X یک فضای هیلبرت است، هرگاه هر دنباله‌ی کوشی در این فضای ضرب داخلی همگرا باشد.

تعریف ۶.۲.۱. (نگاشت خطی) فرض کنیم $H_۱$و$H_۲$ دو فضای هیلبرت باشند. در این صورت نگاشت $T : H_۱ \longrightarrow H_۲$ را نگاشت خطی گوییم، هرگاه برای هر $x, y \in H_۱$ و اسکالرهای α, β داشته باشیم

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty.$$

تعریف ۷.۲.۱. (عملگر) فرض کنیم H یک فضای هیلبرت باشد. در این صورت منظور از یک عملگر در H یک نگاشت خطی مانند T است که قلمرو آن $\mathcal{D}(T)$ زیر فضایی از H بوده و برد آن $\mathcal{R}(T)$ مشمول H باشد.

تعریف ۸.۲.۱. (نرم عملگر) نرم یک عملگر را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\| T \|= \sup\{\| Tx \|:\| x \|\leq ۱\}.$$

تعریف ۹.۲.۱. (عملگر کراندار) فرض کنیم H یک فضای هیلبرت باشد. در این صورت عملگر خطی T را کراندار گوییم، هرگاه مقدار ثابت c موجود باشد به‌طوری که برای هر $x \in H$

$$\| T(x) \|\leq c \| x \| .$$

همچنین، مجموعه تمام عملگر های خطی کراندار روی فضای هیلبرتH را با $\mathbb{B}(H)$ نشان می دهیم.

تعریف ۱۰.۲.۱. (نمودار) فرض‌کنیم $H_۱$ و $H_۲$ دو فضای هیلبرت و $T : D(T) \subseteq H_۱ \longrightarrow H_۲$ یک عملگر با دامنه$D(T)$ باشد. در این صورت نمودار (گراف) T را به عنوان زیر مجموعه ای از $H_۱ \times H_۲$ به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$G(T) = \{(x, Tx) : x \in D(T)\}.$$

تعریف ۱۱.۲.۱. (عملگر بسته) فرض‌کنیم X و Y دو فضای باناخ باشند. عملگر T را بسته‌گوییم، هرگاه نمودار آن زیر فضای بسته از $X \times Y$ باشد.

به عبارت دیگر، اگر $\{x_n\}$دنباله‌ای در $D(T)$ باشد به‌طوری که وقتی $n \longrightarrow \infty$ اگر

$$x_n \longrightarrow x^* \quad \text{و} \quad Tx_n \longrightarrow y^*$$

آنگاه

$$x^* \in D(T) \quad \text{و} \quad y^* = Tx^*$$

قضیه ۱۲.۲.۱. (قضیه گراف بسته) فرض کنیم Xو Yفضاهای باناخ و $T : X \longrightarrow Y$ عملگری خطی باشد، آنگاه گراف T بسته است اگر و فقط اگر T پیوسته است.

برهان. به مرجع [۱۵] رجوع شود. $\square$

تعریف ۱.۲.۱۳. (عملگر معکوس‌پذیر) عملگر $T \in \mathcal{B}(H)$ معکوس پذیر است هرگاه $S \in \mathcal{B}(H)$ چنان موجود باشد که $ST = I = TS$. در این حالت می نویسیم $S = T^{-1}$.

تعریف ۱.۲.۱۴. (فضای دوگان) فرض کنیم X یک فضای خطی نرم دار روی میدان $\mathbb{R}$ باشد. $X^* = B(X, \mathbb{R})$ فضای دوگان X و $X^{**} = B(X^*, \mathbb{R})$ فضای دوگان دوم X نامیده می شود.

تعریف ۱.۲.۱۵. (تفکیک‌پذیری) فرض کنیم E یک فضای متری باشد. E را تفکیک‌پذیر گوییم، هرگاه E حداقل یک زیرمجموعه حداکثر شمارش‌پذیر چگال داشته باشد.

تعریف ۱.۲.۱۶. (فاصله) فرض کنیم E فضای باناخ باشد $x \in E$و$K \subseteq E$. در این صورت فاصله x از مجموعه K را با $d(x, K)$ یا $dist(x, K)$ نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$d(x, K) = inf\{\|x - y\|, \quad y \in K\}.$$

تعریف ۱.۲.۱۷. (نقطه بهترین تقریب) فرض کنیم E فضای باناخ باشد. $x \in E$و$K \subseteq E$. $x^* \in K$ را نقطه بهترین تقریب(نزدیک‌ترین نقطه) x گوییم، هرگاه

$$\|x - x^*\| = inf\{\|x - y\| : y \in K\} = d(x, K).$$

تعریف ۱.۲.۱۸. (مجموعه بهترین تقریب) فرض کنیم E فضای باناخ باشد برای $K \subseteq E$ و $x \in E$ مجموعه بهترین تقریب‌های x در K را با $P_K(x)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$P_K(x) = \{y \in K, \|x - y\| = dist(x, K)\}$$

و $P_K : E \longrightarrow 2^K$ را نگاشت بهترین تقریب می‌نامیم.

تعریف ۱.۲.۱۹. (زیر مجموعه چبیشف) زیر مجموعه K از E را چبیشف [۵] گوییم، هرگاه برای هر $x \in E$ دقیقا یک بهترین تقریب منحصربه فرد در K موجود باشد.

مثال ۱.۲.۲۰. فرض کنیم $a \in E$ و $K = \{a\}$ در این صورت به راحتی نشان داد که Kزیر مجموعه چبیشفی از E است.

تعریف ۱.۲.۲۱. (پیوستگی یکنواخت) فرض کنیم $A \subseteq \mathbb{R}$ و $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع باشد، در این صورت f روی A پیوسته یکنواخت است، هرگاه

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 s.t \forall x_0 \in A, x \in A, [|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon]$$

تعریف ۱.۲.۲۲. (مجموعه محدب) مجموعه $A \subseteq \mathbb{R}$ محدب است هرگاه برای هر $x, y \in A$ و $\lambda \in [0, 1]$ داشته باشیم

$$\lambda x + (1 - \lambda) y \in A.$$

[۵] Chebyshev

تعریف ۲۳.۲.۱. (فضای باناخ به‌طور یکنواخت محدب) فرض کنیم E فضای باناخ باشد. در این صورت ضریب تحدب را روی E به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\psi_E(\varepsilon) = inf\{۱ - \|\frac{x+y}{۲}\| : \|x\| = ۱ = \|y\|, \|x-y\| \geq \varepsilon\}, \quad ۰ \leq \varepsilon \leq ۲.$$

فضای باناخ E را به‌طور یکنواخت محدب گوییم، هرگاه برای هر $\varepsilon > ۰$ $\psi_E(\varepsilon) > ۰$.

قضیه ۲۴.۲.۱. (قضیه نگاشت باز) اگر $A : X \longrightarrow Y$ عملگر خطی، پیوسته و پوشا بین دو فضای باناخX و Y باشد، آنگاه A یک نگاشت باز است.

برهان. به [۱۵] رجوع شود. □

تعریف ۲۵.۲.۱. (عملگر معکوس کراندار) فرض کنیم X و Y دو فضای باناخ و T عملگر خطی از X به توی Y با دامنه $D(T) \subset X$ باشد. در این صورت T را عملگر معکوس کراندار گوییم، هرگاه $m > ۰$ موجود باشد به طوری که به ازای هر $x \in D(T)$ داشته باشیم

$$\|x\| \leq m\|Tx\|.$$

به عبارت دیگر،

$$T^{-۱} \in B(Y, X) \Longleftrightarrow \exists m > ۰, \|x\| \leq m\|Tx\|.$$

قضیه ۲۶.۲.۱. (قضیه معکوس کراندار) فرض کنیم XوY دو فضای باناخ و $T : X \longrightarrow Y$عملگری خطی، کراندار و دوسویی باشد. در این صورت $T^{-۱}$ نیز کراندار است.

برهان. T عملگری پیوسته و پوشا بین دو فضای باناخ X و Y می‌باشد. پس بنابر قضیه (۲۴.۲.۱) عملگر T مجموعه بازی در X را به مجموعه باز در Y می‌برد. در این صورت برای هر مجموعه باز $U \subseteq X$، $T(U)$ در Y باز است. از این رو $T(U) = (T^{-۱})^{-۱}(U)$ در Y باز است لذا $T^{-۱}$ پیوسته و لذا کراندار است. □

تعریف ۲۷.۲.۱. (تابع محدب) تابع $f : R \longrightarrow R$ را محدب گوییم، هرگاه برای هر $x, y \in D(f)$ و $\theta \in [۰, ۱]$ داشته باشیم

$$f(\theta x + (۱-\theta)y) \leq \theta f(x) + (۱-\theta)f(y).$$

تعریف ۲۸.۲.۱. (همانسانی) فرض کنیم X و Y دو فضای باناخ باشند. در این صورت نگاشت $T : X \longrightarrow Y$ را همانسانی گوییم، هرگاه T نگاشتی پیوسته، دوسویی و $T^{-۱}$ نیز پیوسته باشد.

تعریف ۲۹.۲.۱. (O بزرگ) فرض کنیم f و g توابع حقیقی مثبت باشند. در این صورت $f(x) = O(g(x))$ اگر و فقط اگر ثابت c وجود داشته باشد که $f(x) \leq cg(x)$.

فصل ۲

حل معادلات به روش تکراری مربوطه عملگر $K - pd$ در فضاهای باناخ

فرض کنیم E یک فضای باناخ باشد. در این فصل $A : D(A) \subseteq E \longrightarrow E$ را عملگر $K-$ مثبت معین[۱] با دامنه $D(A)$ در نظر می گیریم. ابتدا نشان می دهیم معادله $Ax = f$ برای هر $f \in E$ دارای جوابی یکتا است و سپس همگرایی به این جواب یکتا را بررسی می کنیم و نتایج آن را مورد مطالعه قرار می دهیم، همچنین این مسله را در فضای باناخ تفکیک‌پذیر به‌طور یکنواخت هموار و نیز فضای باناخ تفکیک‌پذیر $q-$ یکنواخت هموار مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

[۱] K-positive definite operator

۱.۲ حل معادله $Ax = f$ به روش تکراری مربوط به عملگرهای $K - pd$ در فضاهای باناخ

تعریف ۱.۱.۲. فرض کنیم E یک فضای باناخ و $E_۱$ زیر مجموعه چگال از آن باشد. عملگر K با دامنه $D(K)$ شامل $E_۱$ را یک عملگر به طور پیوسته $E_۱$-معکوس پذیر گوییم، هرگاه $R(K|_{E_۱})$ یعنی تحدید K به $E_۱$ که آن را $K(E_۱)$ می نامیم در E چگال و K روی $K(E_۱)$ دارای معکوس کراندار باشد.

تعریف ۲.۱.۲. فرض کنیم H یک فضای هیلبرت باشد. عملگر $A : D(A) \longrightarrow E$ در نظر می گیریم. A را عملگر K-مثبت معین می گوییم، هرگاه عملگری بسته و به‌طورپیوسته $D(A)$- معکوس پذیر مانند K و همچنین $\alpha > ۰$ موجود باشند، به طوری که برای هر $x \in D(A)$ $(D(A) \subseteq D(K))$

$$< Ax, Kx > \geq \alpha \|Kx\|^۲. \qquad (۱.۲)$$

عملگر K-مثبت معین را به اختصار $K - pd$ می گوییم.

اگر $K = I$ عملگر همانی رویH باشد، آنگاه رابطه (۱.۲)به صورت زیر می توان نوشت

$$< Ax, x > \geq \alpha \|x\|^۲$$

در این صورت A را عملگر مثبت معین می‌نامیم.

مثال ۳.۱.۲. عملگر $A : L_۲ \longrightarrow L_۲$ را برای هر $x = (x_۱, x_۲, \dots) \in L_۲$ و $a \geq ۰$ با ضابطه‌ی $Ax = (ax_۱, ax_۲, \dots)$ تعریف می‌کنیم. اگر $K = I$ عملگر همانی باشد آنگاه

$$< Ax, x > = < (ax_۱, ax_۲, ...), (x_۱, x_۲, ...) > = a < x_۱, x_۱ > + a < x_۲, x_۲ > + ...$$

$$= a\Sigma_{i=۱}^{\infty} x_i^۲ = a\|x\|^۲ > (\frac{۱}{۲}a)\|x\|^۲.$$

بنابراین A یک عملگر مثبت معین است.

تعریف ۴.۱.۲. فرض کنیم E یک فضای باناخ و E^* فضای دوگان آن باشد. نگاشت $J : E \longrightarrow ۲^{E^*}$ راکه به صورت زیر تعریف می کنیم نگاشت دوگان نرمال می‌نامیم.

$$Jx = \{f \in E^* : < x, f > = \|x\|^۲ = \|f\|^۲\}.$$

که در آن $< ., . >$ زوج دوگان نرمال بین عناصر E و E^* است.

همچنین نگاشت دوگان نرمال تک مقداری را به صورت $j: E \longrightarrow E^*$ نمایش می‌دهیم. که برای هر $x \in E$ $j(x)$عضوی از E^* است که در شرایط زیر صدق می کند

$$<x, j(x)> = \|x\|\|j(x)\|, \quad \|j(x)\| = \|x\|.$$

با استفاده از تعریف نگاشت دوگان نرمال تعریفی از عملگر K-مثبت معین را بیان می کنیم.

تعریف ۵.۱.۲. فرض کنیم E H یک فضای هیلبرت باشد. در این صورت $A: D(A) \longrightarrow E$ را عملگر $K-$مثبت معین گوییم، هرگاه عملگر بسته و به‌طورپیوسته $D(A)-$ معکوس پذیر K و همچنین $\alpha > 0$ موجود باشد که برای هر $x \in E$ و $j(Kx) \in J(Kx)$ رابطه زیر برقرار باشد.

$$<Ax, j(Kx)> \geq \alpha\|Kx\|^2.$$

لم ۶.۱.۲. فرض کنیم A یک عملگر $K-pd$ باشد در این صورت

۱) A عملگر معکوس کرانداراست.

۲) Aعملگر بسته است.

۳) برای هر دو عضو $u, v \in D(A)$

$$<Au, Kv> = <Ku, Av>.$$

برهان. ۱) از خواص ضرب داخلی و تعریف عملگر $K-pd$ برای هر $x \in D(A)$

$$\alpha\|Kx\|^2 \leq <Ax, j(Kx)> \leq \|Ax\|\|j(Kx)\| = \|Ax\|\|Kx\| \qquad (۲.۲)$$

بنابراین

$$\alpha\|Kx\| \leq \|Ax\|. \qquad (۳.۲)$$

چون K به طورپیوسته $D(A)$ -معکوس‌پذیر است پس روی بردش عملگر معکوس کراندار است لذا $m > 0$ ای وجود دارد که برای هر $x \in R(A)$ و $x \neq 0$

$$\|x\| \leq m\|Kx\|$$

پس

$$\gamma\|x\| \leq \|Kx\| \quad \text{که} \quad \gamma = m^{-1}. \qquad (۴.۲)$$

چون $x \neq 0$ و K معکوس پذیر است لذا $Kx \neq 0$. بنابر (۳.۲) و (۴.۲) برای هر $x \in R(A)$

$$\alpha\gamma\|x\| \leq \|Ax\|.$$

پس

$$\|x\| \leq m'\|Ax\| \quad \text{که} \quad m' = (\alpha\gamma)^{-1}.$$

بنابر تعریف ۲۵.۲.۱ A عملگر معکوس کراندار است.

۲) فرض کنیم $\{x_n\}$دنباله‌ای در $D(A)$ و h عنصری از E باشد، برای $n \longrightarrow \infty$ اگر

$Ax_n \longrightarrow h$و $x_n \longrightarrow 0$ آنگاه $h=0$. چون $\alpha\|Kx\| \leq \|Ax\|$ لذا همگرایی $\{Ax_n\}$ مستلزم همگرایی $\{Kx_n\}$ است. فرض کنیم $x_n \longrightarrow 0$ در این صورت چون K عملگر بسته است لذا $n \longrightarrow \infty$آنگاه $Kx_n \longrightarrow 0$ فرض کنیم y یک عنصر دلخواه در $D(A)$ باشد، بنابر قسمت (۲) لم

$$< h, Ky >= \lim_{n\to\infty} < Ax_n, Ky >= \lim_{n\to\infty} < Kx_n, Ay >= 0.$$

بنابراین برای هر $y \in D(A)$ داریم $< h, Ky >= 0$ چون K پیوسته $D(A)$-معکوس پذیر است پس K مخالف صفر است. در نتیجه $h=0$. بنابراین A عملگر بسته است.

۳) به [۱۷] رجوع شود.

□

قضیه ۷.۱.۲. فرض کنیم E فضای باناخ و A عملگر K-مثبت معین باشد، که $D(A)=D(K)$ در این صورت $\beta > 0$ وجود دارد که برای هر $x \in D(A)$ نامساوی زیر برقرار است

$$\|Ax\| \leq \beta\|Kx\|. \tag{۵.۲}$$

همچنین، A عملگر بسته و برد A برابر با فضای باناخ E است. به علاوه ، برای هر $f \in E$ معادله $Ax=f$ جواب یکتایی دارد.

برهان. روی دامنه A $(D(A))$ ضرب داخلی و نرم جدید را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$< x, j(y) >=< Kx, j(Ky) >, \qquad |x|_1 = \|Kx\|.$$

چون K به طورپیوسته$D(K)$-معکوس پذیر است بنابراین $\overline{R(K)}=E$. نشان می دهیم $R(K)=\overline{R(K)}$. فرض کنیم $y \in \overline{R(K)}$ باشد در این صورت دنباله z_n در $R(K)$ وجود دارد به قسمی که $z_n \longrightarrow y$ پس $z_n = K(x_n)$ که $x_n \in D(K)$ لذا $Kx_n \longrightarrow y$. چون Kx_n همگرا پس کشی است از طرفی چون K پیوسته است لذا $K^{-1}(K(x_n))=x_n$ و x_n همگرا به α_0 می‌باشد چون K بسته است پس $y=K\alpha_0 \in R(K)$ در نتیجه $R(K)=E$.

حال اگر بحث فوق را به جای K برای K^{-1} بکارگیریم داریم $R(K^{-1})=E$ یعنی $E=R(K^{-1})=D(K)$. پس $D(K)$ یک فضای باناخ است و آن را با E_0 نشان می‌دهیم. همچنین، عملگر خطی A از E_0 به E $(D(K)=D(A))$ بسته است. زیرا اگر $\{x_n\}$ دنباله‌ای در E_0 باشد هرگاه $n \longrightarrow \infty$, اگر $|x_n - x_0|_1 \longrightarrow 0$و $Ax_n \longrightarrow h$ آنگاه $h = Ax_0$. $|x_n - x_0|_1 \longrightarrow 0$ با توجه به نرم تعریف شده $\|K(x_n - x_0)\| \longrightarrow 0$ چون K به‌طورپیوسته $D(K)$-معکوس‌پذیر لذا

$$\|x_n - x_0\| \longrightarrow 0, \qquad n \longrightarrow \infty$$

چون A عملگری $K-pd$ است بنابر قسمت (c) لم۶.۱.۲ A عملگری بسته است داریم

$$\|A(x_n - x_0)\| \longrightarrow 0, n \longrightarrow \infty$$

به عبارت دیگر $Ax_n \longrightarrow Ax_0$ بنابراین $Ax_0 = h$ پس A در E_0 بسته است. با توجه به قضیه(۱۲.۲.۱) A در E_0 کراندار است پس $\beta > 0$ وجود دارد که برای هر $x \in E$

$$\|Ax\| \leq \beta|x|_1 = \beta\|Kx\|.$$

پس عبارت (۵.۲) برقرار است.

اکنون نشان می دهیم $A : D(A) \subseteq E \longrightarrow R(A) \subseteq E$ بسته است. فرض کنیم $\{x_n\}$ دنباله ای در $D(A)$ باشد. هرگاه $n \longrightarrow \infty$ اگر $x_n \longrightarrow x$ و $Ax_n \longrightarrow h$ آنگاه $Ax = h$. بنابر (۳.۲) دنباله $\{Kx_n\}$ همگرا است.از بسته بودن عملگر K نتیجه می‌شود برای هر $x \in D(K)$, $Kx_n \longrightarrow Kx$ برای $n \longrightarrow \infty$. بنابر (۵.۲) و این‌که $D(A) = D(K)$

$$\|A(x_n - x)\| \leq \beta\|K(x_n - x)\| \longrightarrow 0. \qquad n \longrightarrow \infty$$

در نتیجه $Ax_n \longrightarrow Ax$ پس $Ax = h$ بنابراین A عملگر بسته است. برای اثبات $R(A) = E$ و اینکه معادله $Ax = f$ جواب یکتایی دارد. کافی است اثبات کنیم کهA یک به یک است. فرض کنیم$x_1 \neq x_2$ دو جواب معادله $Ax = f$ باشند در این صورت $A(x_1 - x_2) = 0$ یا $Ax_1 = Ax_2 = f$ با استفاده از نامساوی $\alpha\|Kx\| \leq \|Ax\|$ داریم

$$\alpha\|K(x_1 - x_2) \leq \|A(x_1 - x_2)\| = 0.$$

بنابراین $K(x_1 - x_2) = 0$ یا $(x_1 - x_2) = K^{-1}0 = 0.$ در نتیجه$x_1 = x_2$ که با فرض گرفته شده در تناقض است. لذا $R(A) = E$ و معادله $Ax = f$ دارای جواب یکتا برای هر $f \in E$ است. □

لم ۸.۱.۲. فرض کنیم Eیک فضای باناخ و J نگاشت دوگان روی E باشد در این صورت برای هر $x, y \in E$

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2 < y, j(x + y) > .$$

برهان. فرض کنیم x و y دو عضو ثابت و دلخواه E باشند و $\varphi(s) = \|x + sy\|^2$ که $s \in [0, +\infty]$.

در این صورت برای $s_1, s_2 \in [0,+\infty)$ و $t\in[0,1]$

$$\varphi(ts_1+(1-t)s_2)=\|t(x+s_1y)+(1-t)(x+s_2y)\|^2$$

$$\leq t^2\|x+s_1y\|^2+(1-t)^2\|x+s_2y\|^2+2t(1-t)\|x+s_1y\|\|x+s_2y\|$$

$$\leq t^2\|x+s_1y\|^2 \pm t(1-t)\|x+s_1y\|^2+(1-t)^2\|x+s_2y\|^2$$

$$\pm\, t(1-t)\|x+s_2y\|^2+2t(1-t)\|x+s_1y\|\|x+s_2y\|$$

$$\leq (t^2+t(1-t))\|x+s_1y\|^2+((1-t)^2+t(1-t))\|x+s_2y\|^2$$

$$-\,t(1-t)[\|x+s_1y\|+\|x+s_2y\|]^2$$

$$\leq (t^2+t(1-t))\|x+s_1y\|^2+((1-t)^2+t(1-t))\|x+s_2y\|^2$$

$$=t\varphi(s_1)+(1-t)\varphi(s_2).$$

در این صورت $\varphi:[0,+\infty)\longrightarrow[0,+\infty)$ تابع محدب است. پس برای هر $s>t>0$

$$\varphi(t)=\varphi(\frac{t}{s}\cdot s+(1-\frac{t}{s})\cdot 0)$$

$$\leq \frac{t}{s}\varphi(s)+(1-\frac{t}{s})\varphi(0)$$

$$=\frac{t}{s}(\varphi(s)-\varphi(0))+\varphi(0).$$

لذا

$$t^{-1}(\varphi(t)-\varphi(0))\leq s^{-1}(\varphi(s)-\varphi(0)).$$

چون $s>t$ پس تابع $t \longrightarrow t^{-1}(\varphi(t)-\varphi(0))$ افزایشی و از بالا کراندار است لذا حد آن موجود است.

$$\varphi(1)-\varphi(0)=\|x+y\|^2-\|x\|^2 \geq \lim_{t\to 0} t^{-1}(\varphi(t)-\varphi(0))$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\|x+ty\|^2-\|x\|^2}{t}=2\|x\|\|y\|$$

$$=2<y,x>=2<y,j(x)>.$$

پس

$$\|x+y\|^2 \geq \|x\|^2+2<y,j(x)>. \tag{۶.۲}$$

$x-y$ را با x جایگزین می کنیم

$$\|x\|^2 \geq \|x-y\|^2+2<y,j(x-y)>. \tag{۷.۲}$$

سپس با جایگذاری x با $-x$

$$\|-x\|^2 \geq \|-x-y\|^2-2<y,j(-x-y)>$$

$$\|x\|^2 \geq \|x+y\|^2-2<y,j(x+y)>.$$

بنابراین برای هر $x,y\in E$

$$\|x+y\|^2 \leq \|x\|^2+2<y,j(x+y)>.$$

□

لم ۹.۱.۲. : فرض کنیم $\{\delta_n\}$،$\{\Phi_n\}$ و $\{\sigma_n\}$ دنباله های نامنفی از اعداد حقیقی باشند. در این صورت اگر

$$\Phi_{n+1} \leq (1-\delta_n)\Phi_n+\sigma_n, \quad n\geq 0 \tag{۸.۲}$$

که در آن

$$\sigma_n=o(\delta_n), \quad \Sigma\delta_n=\infty, \quad \delta\in[0,1]$$

آنگاه

$$n\to\infty \qquad \Phi_n\to 0.$$

برهان. به [۱۹] رجوع شود. □

قضیه ۱۰.۱.۲. فرض کنیم E فضای باناخ و $A:D(A)\subseteq E\longrightarrow E$ عملگر $K-pd$ با $D(A)=D(K)$ باشد. برای هر $f\in E$، معادله $Ax=f$ جواب یکتایی مانند $x^*\in D(A)$ دارد. حال فرض کنیم $\{u_n\}$ و $\{v_n\}$ دنباله هایی در $D(A)$و دنباله‌های $\{Ku_n\}$ و $\{Kv_n\}$ کراندار باشند. در این صورت عدد حقیقی و مثبت λو دنباله های حقیقی $\{a'_n\},\{b'_n\},\{c'_n\},\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}\subseteq[0,1]$ موجود اند که در شرایط زیر صدق می‌کنند

۱) $\forall n \geq \circ$ $\qquad a_n + b_n + c_n = ۱ = a'_n + b'_n + c'_n.$

۲) $\forall n \geq \circ$ $\qquad b'_n \leq b_n \leq \lambda, \qquad c_n = b_n^{۲}. \qquad c'_n = b'_n.$

۳) $\Sigma_{n\geq\circ} b'_n = \infty \qquad n \longrightarrow \infty, \qquad b_n \longrightarrow \circ.$

$x_\circ \in D(A)$ دنباله تکراری $\{x_n\}$ که به صورت زیر تولید می شود همگرا به x^* است.

$$x_{n+۱} = a_n y_n + b_n(y_n - \gamma_n) + c_n(v_n + y_n - \gamma_n). \quad \forall n \geq \circ$$

$$y_n = a'_n x_n + b'_n(x_n - \mu_n) + c'_n(u_n + x_n - \mu_n). \quad \forall n \geq \circ$$

$$\gamma_n = K^{-۱}(Ay_n - f) \quad \text{و} \quad \mu_n = K^{-۱}(Ax_n - f). \quad \forall n \geq \circ$$

برهان. بنابر قضیه۷.۱.۲ معادله جواب یکتا دارد. فرض کنیم

$$L = max\{sup_{n\geq\circ}\|Kv_n\|, sup_{n\geq\circ}\|Ku_n\|\}.$$

$$B = max\{\|K\mu_\circ\|, L\}.$$

$$M = (۱ + ۳\beta)B.$$

$$\lambda = min\{\frac{\alpha B}{۸\beta^{۲}M}, \frac{\alpha B}{۲\beta M - \alpha\beta}\}.$$

در این صورت

$$K\gamma_n = Ay_n - f = (a'_n + b'_n + c'_n)Ax_n - (b'_n + c'_n)A\mu_n + c'_nAu_n - f$$

$$= Ay_n - f - (b'_n + c'_n)A\mu_n + c'_nAu_n$$

$$= K\mu_n - (b'_n + c'_n)A\mu_n + c'_nAu_n. \qquad \forall n \geq \circ$$

به همین ترتیب

$$K\mu_{n+1} = Ax_{n+1} - f = (a_n + b_n + c_n)Ay_n - (b_n + c_n)A\gamma_n + c_nAv_n - f$$

$$= Ay_n - f - (b_n + c_n)A\gamma_n + c_nAv_n$$

$$= K\gamma_n - (b_n + c_n)A\gamma_n + c_nAv_n. \qquad \forall n \geq 0$$

بنابر لم ۸.۱.۲

$$\|K\gamma_n\|^2 = \|K\mu_n - (b'_n + c'_n)A\mu_n + c'_nAu_n\|^2$$

$$\leq \|K\mu_n\|^2 - 2\langle (b'_n + c'_n)A\mu_n + c'_nAu_n, j(K\mu_n - (b'_n + c'_n)A\mu_n + c'_nAu_n)\rangle$$

$$= \|K\mu_n\|^2 - 2\langle (b'_n + c'_n)A\mu_n, j(K\mu_n - (b'_n + c'_n)A\mu_n + c'_nAu_n)\rangle$$

$$+ 2\langle c'_nAu_n, j(K\mu_n - (b'_n + c'_n)A\mu_n + c'_nAu_n)\rangle$$

$$= \|K\mu_n\|^2 - 2(b'_n + c'_n) < A\mu_n, j(K\gamma_n) > + 2c'_n < Au_n, j(K\gamma_n) >$$

$$\leq \|K\mu_n\|^2 - 2(b'_n + c'_n) < A\mu_n + A\gamma_n - A\gamma_n, j(K\gamma_n) > + 2c'_n < Au_n, j(K\gamma_n) >$$

$$= \|K\mu_n\|^2 - 2(b'_n + c'_n) < A\gamma_n, j(K\gamma_n) >$$

$$+ 2(b'_n + c'_n) < A\gamma_n - A\mu_n, j(K\gamma_n) >$$

$$+ 2c'_n < Au_n, j(K\gamma_n) > .$$

بنابر تعریف ۲.۱.۲ و قضیه ۷.۱.۲

$$\|K\gamma_n\|^{۲} \leq \|K\mu_n\|^{۲} - ۲\alpha(b'_n + c'_n)\|K\gamma_n\|^{۲}$$

$$+ ۲(b'_n + c'_n)[\|A\gamma_n - A\mu_n\|]\|K\gamma_n\| + ۲c'_n\|Au_n\|\|K\gamma_n\|$$

$$\leq \|K\mu_n\|^{۲} - ۲\alpha(b'_n + c'_n)\|K\gamma_n\|^{۲}$$

$$+ ۲(b'_n + c'_n)[\|A\gamma_n\| - \|A\mu_n\|]\|K\gamma_n\| + ۲c'_n\|Au_n\|\|K\gamma_n\|$$

$$\leq \|K\mu_n\|^{۲} - ۲\alpha(b'_n + c'_n)\|K\gamma_n\|^{۲}$$

$$+ ۲(b'_n + c'_n)[\beta\|K\gamma_n\|\|K\gamma_n\| - \beta\|K\mu_n\|\|K\gamma_n\|] + ۲c'_n\|Ku_n\|\|K\gamma_n\|$$

$$\leq \|K\mu_n\|^{۲} - ۲\alpha(b'_n + c'_n)\|K\gamma_n\|^{۲}$$

$$+ ۲(b'_n + c'_n)\beta[\|K\mu_n\| - (b'_n + c'_n)A\mu_n + c'_nAu_n\| - \|K\mu_n\|]\|K\gamma_n\| + ۲c'_n\|Ku_n\|\|K\gamma_n\|$$

$$\leq \|K\mu_n\|^{۲} - ۲\alpha(b'_n + c'_n)\|K\gamma_n\|^{۲}$$

$$+ ۲(b'_n + c'_n)\beta[(b'_n + c'_n)\beta\|K\mu_n\| + c'_n\beta\|Ku_n\|]\|K\gamma_n\| + ۲c'_n\|Ku_n\|\|K\gamma_n\|$$

$$\leq \|K\mu_n\|^{۲} - ۲\alpha(b'_n + c'_n)\|K\gamma_n\|^{۲}$$

$$+ ۲\beta^{۲}[(b'_n + c'_n)\|K\mu_n\| + c'_n\|Ku_n\|](b'_n + c'_n)\|K\gamma_n\|$$

$$+ ۲\beta c'_n\|Ku_n\|\|K\gamma_n\|.$$

(۹.۲)

به همین ترتیب

$$\begin{aligned}\|K\mu_{n+1}\|^2 &\leq \|K\gamma_n\|^2 - 2\alpha(b_n+c_n)\|K\mu_{n+1}\|^2\\ &+ 2\beta(b_n+c_n)\|K\mu_{n+1} - K\gamma_n\|\|K\mu_{n+1}\|\\ &+ 2\beta c_n\|Kv_n\|\|K\mu_{n+1}\|\\ &\leq \|K\gamma_n\|^2 - 2\alpha(b_n+c_n)\|K\mu_{n+1}\|^2\\ &+ 2\beta^2(b_n+c_n)[(b_n+c_n)\|K\gamma_n\| + c_n\|Kv_n\|]\|K\mu_{n+1}\|\\ &+ 2\beta c_n\|Kv_n\|\|K\mu_{n+1}\|.\end{aligned} \tag{۱۰.۲}$$

همچنین

$$\begin{aligned}\|K\gamma_n - K\mu_n\| \leq \|K\gamma_n\| - \|K\mu_n\| &\leq \|K\mu_n\| + \|(b'_n+c'_n)A\mu_n + c'_nAu_n\| - \|K\mu_n\|\\ &\leq (b'_n+c'_n)\beta\|K\mu_n\| + c'_n\beta\|Ku_n\|\\ &= \beta\{(b'_n+c'_n)\|K\mu_n\| + c'_n\|Ku_n\|\}.\end{aligned} \tag{۱۱.۲}$$

به همین ترتیب

$$\|K\mu_{n+1} - K\gamma_n\| \leq \beta\{(b_n+c_n)\|K\gamma_n\| + c_n\|Kv_n\|\}. \tag{۱۲.۲}$$

فرض کنیم $\|K\mu_n\| \leq B$ در این صورت بنابر (۱۱.۲) ، (۱۲.۲) و B

$$\begin{aligned}
\|K\gamma_n\| = \|K\gamma_n \pm K\mu_n\| &\leq \|K\mu_n\| + \|K\gamma_n - K\mu_n\| \\
&\leq \|K\mu_n\| + \beta\{(b'_n + c'_n)\|K\mu_n\| + c'_n\|Ku_n\|\} \\
&\leq B + \beta\{(b'_n + c'_n)B + c'_n L\} \qquad (\text{از تعریف} L) \\
&\leq B + \beta\{(b'_n + c'_n)B + c'_n B\} \qquad (\text{از تعریف} B) \\
&\leq B + \beta B[3c'_n] \qquad (\text{از فرض ۲}) \\
&\leq B(1 + 3\beta) = M.
\end{aligned}$$

در نتیجه $\|K\gamma_n\| \leq M$. به همین ترتیب، اگر $\|K\gamma_n\| \leq B$ آنگاه $\|K\mu_{n+1}\| \leq M$. با استفاده از فرض ۲ روی دنباله های حقیقی داریم

$$b'_n \leq \lambda = \frac{B\alpha}{2M\beta - B\alpha} \Rightarrow c'_n \leq \frac{b\alpha}{2M\beta - B\alpha} b'_n \Rightarrow c'_n \leq \frac{B\alpha}{2M\beta}(b'_n + c'_n) \qquad (۱۳.۲)$$

حال ثابت می کنیم برای همه $n \geq 0$ اگر $\|K\mu_n\| \leq B$ آنگاه $\|K\gamma_n\| \leq B$. به برهان خلف، برای تعدادی از n فرض کنیم $\|K\gamma_n\| > B$ و $\|K\mu_n\| \leq B$ باشد. بنابر (۹.۲)

$$\|K\gamma_n\|^۲ \leq B^۲ - ۲\alpha(b'_n + c'_n)M^۲$$

$$+ ۲\beta^۲[(b'_n + c'_n)B + c'_n L](b'_n + c'_n)M + ۲\beta c'_n BM$$

$$\leq [۱ - ۲\alpha(b'_n + c'_n)]B^۲ + ۲\beta^۲ BM(b'_n + c'_n)(b'_n + ۲c'_n) + ۲\beta BMc'_n$$

$$\leq [۱ - ۲\alpha(b'_n + c'_n)]B^۲ + ۶\beta^۲ BMb'_n(b'_n + c'_n) + ۲\beta BMc'_n \qquad \text{(از شرط۲)}$$

$$\leq [۱ - ۲\alpha(b'_n + c'_n)]B^۲ + ۶\beta^۲ BM(b'_n + c'_n)\frac{B\alpha}{۸M\beta^۲} + ۲\beta BM(b'_n + c'_n)\frac{B\alpha}{۲M\beta}$$

$$\leq [۱ - \frac{\alpha}{۴}(b'_n + c'_n)]B^۲$$

$$\leq B^۲.$$

با فرض در تناقض است. بنابراین برای $n \geq ۰$

$$\|K\mu_n\| \leq B \Longrightarrow \|K\gamma_n\| \leq B. \qquad (۱۴.۲)$$

همچنین نشان می دهیم برای $n \geq ۰$

$$\|K\mu_n\| \leq B \Longrightarrow \|K\mu_{n+۱}\| \leq B. \qquad (۱۵.۲)$$

بنابر (۱۴.۲) ، (۱۰.۲)

$$\|K\mu_{n+۱}\|^۲ \leq \|K\gamma_n\|^۲ - ۲\alpha(b_n + c_n)\|K\mu_{n+۱}\|^۲$$

$$+ ۲\beta^۲(b_n + c_n)[(b_n + c_n)\|K\gamma_n\| + c_n\|Kv_n\|]\|K\mu_{n+۱}\|$$

$$+ ۲\beta c_n\|Kv_n\|\|K\mu_{n+۱}\|.$$

لذا

$$\|K\mu_{n+1}\|^2 + 2\alpha(b_n + c_n)\|K\mu_{n+1}\|^2 = [1 + 2\alpha(b_n + c_n)]\|K\mu_{n+1}\|^2$$

$$\leq \|K\gamma_n\|^2 + 2\beta^2(b_n + c_n)[(b_n + c_n)\|K\gamma_n\| + c_n\|Kv_n\|]\|K\mu_{n+1}\|$$

$$+ 2\beta c_n\|Kv_n\|\|K\mu_{n+1}\|.$$

چون $\|K\gamma_n\| \leq B \Longrightarrow \|K\mu_{n+1}\| \leq M$ لذا

$$[1 + 2\alpha(b_n + c_n)]\|K\mu_{n+1}\|^2 \leq B^2 + 2\beta^2(b_n + c_n)[(b_n + c_n)B + Bc_n]M + 2\beta BMc_n$$

$$\leq B^2 + 2\beta^2 BM(b_n + c_n)(b_n + 2c_n) + 2\beta BMc_n$$

$$\leq B^2 + 6\beta^2 BM(b_n + c_n)\frac{B\alpha}{8M\beta^2} + 2\beta MB(b_n + c_n)\frac{B\alpha}{2M\beta}$$

$$\leq [1 + \frac{7\alpha}{4}(b_n + c_n)]B^2.$$

بنابراین (۱۵.۲) برقرار است. $\|K\mu_0\| \leq B$ و بنابر استقرا بر روی n داریم

$$\|K\mu_n\| \leq B \quad \text{و} \quad \|K\gamma_n\| \leq B$$

بنابر (۹.۲) و فرض ۲ $M_0 > 0$ موجود است که

$$\|K\gamma_n\|^2 \leq \|K\mu_n\|^2 - 4\alpha b'_n\|K\gamma_n\|^2$$

$$+ 4\beta^2[2b'_n\|K\mu_n\| + b'_n\|Ku_n\|]b'_n\|K\gamma_n\| \tag{۱۶.۲}$$

$$+ 2\beta b'_n\|Ku_n\|\|K\gamma_n\|.$$

با فاکتورگیری از b'_n از نامساوی (۱۶.۲)

$$\|K\gamma_n\|^2 \leq \|K\mu_n\|^2 + M_0 b'_n.$$

به همین ترتیب بنابر (۱۰.۲) $d > 0$ وجود دارد که

$$[1 + 2\alpha(b_n + c_n)]\|K\mu_{n+1}\|^2 \leq \|K\mu_n\|^2 + 2\beta d c_n.$$

فرض کنیم $\Phi_n = \|K\mu_n\|^۲$ و چون$(b_n \geq b_n + c_n)$ پس برای هر $n \geq ۰$ ،

$$(۱ + ۲\alpha b_n)\Phi_{n+۱} \leq \Phi_n + ۲\beta dc_n. \quad (۱۷.۲)$$

برای $۰ < x < ۱$ بسط زیر را داریم

$$(۱+x)^{-۱} \leq ۱ - x + x^۲$$

بنابر (۲۲.۲)

$$\begin{aligned}\Phi_{n+۱} \leq& (۱+۲\alpha b_n)^{-۱}\Phi_n + (۱+۲\alpha b_n)^{-۱}۲\alpha dc_n\\ &\leq [(۱ - ۲\alpha b_n + (۲\alpha b_n)^۲]\Phi_n\\ &+ [(۱ - ۲\alpha b_n + (۲\alpha b_n)^۲]۲\beta dc_n\end{aligned}$$

چون $c_n = b_n^۲$ و$۰ \longrightarrow b_n$ پس

$$\Phi_{n+۱} \leq (۱ - ۲\alpha b_n)\Phi_n + d^*c_n$$

بنابر لم۹.۱.۲

$$\Phi_n \longrightarrow ۰, n \longrightarrow \infty$$

بنابراین $۰ \longrightarrow \|K\mu_n\|$. چون K معکوس کراندار است لذا $\theta^{-۱}\|x\| \leq \|Kx\|$

$$\begin{aligned}۰ &= \lim_{n\to\infty} \|K\mu_n\| = \lim_{n\to\infty}\|Ax_n - f\| = \lim_{n\to\infty}\|A(x_n - x^*)\|\\ &\geq \alpha \lim_{n\to\infty}\|K(x_n - x^*)\|\\ &\geq \frac{\alpha}{\theta}\lim_{n\to\infty}\|x_n - x^*\|\end{aligned}$$

هرگاه $x_n \longrightarrow x^*$ $\quad n \longrightarrow \infty$ نتیجه حاصل می شود. □

نتیجه ۱۱.۱.۲. فرض کنیم E, A, K, f تعریف شده در قضیه ۱۰.۱.۲ باشد و $\{u_n\}$ دنباله ای در $D(A)$ و دنباله $\{Ku_n\}$ کراندار باشد. در این صورت عدد حقیقی مثبت λو دنباله های $\{a_n\}$ ، $\{b_n\}$ ، $\{c_n\}$ وجود دارند که در شرایط زیر صدق می کنند

۱) $\forall n \geq ۰ \qquad a_n + b_n + c_n = ۱$

۲) $\lim_{n\to\infty} b_n = ۰ \qquad b_n \leq \lambda,$

۳) $c_n = b_n^{2}, \qquad \Sigma_{n\geq 0} b_n = \infty$

$x_0 \in D(A)$ و دنباله تکراری $\{x_n\}$ که به صورت زیر تولید می شوند

$$x_{n+1} = a_n x_n + b_n(x_n - \mu_n) + c_n(u_n + x_n - \mu_n) \tag{۱۸.۲}$$

$$\mu_n = K^{-1}(Ax_n - f) \tag{۱۹.۲}$$

به جواب یکتای معادله $Ax = f$ همگرا است.

برهان. اگر در اثبات قضیه ۱۰.۱.۲ $b'_n = 0$ باشد، آنگاه بنابر خطی بودن K

$$K\mu_{n+1} = Ax_{n+1} - f = Ax_n(a_n + b_n + c_n) - A\mu_n(b_n + c_n) + c_n Au_n - f$$

$$= K\mu_n - A\mu_n(b_n + c_n) + c_n Au_n.$$

بنابر لم ۸.۱.۲

$$\begin{aligned}
\|K\mu_{n+1}\|^{2} &= \|K\mu_n - A\mu_n(b_n + c_n) + c_n Au_n\|^{2} \\
&\leq \|K\mu_n\|^{2} - 2 < A\mu_n(b_n + c_n) - c_n Au_n, j(K\mu_n - A\mu_n(b_n + c_n) + c_n Au_n) > \\
&\leq \|K\mu_n\|^{2} - 2(b_n + c_n) < A\mu_n + A\mu_{n+1} - A\mu_{n+1}, j(K\mu_{n+1}) > \\
&+ 2c_n < Au_n, j(K\mu_{n+1}) > \\
&\leq \|K\mu_n\|^{2} - 2(b_n + c_n) < A\mu_{n+1}, j(K\mu_{n+1} > \\
&+ 2(b_n + c_n) < A\mu_{n+1} - A\mu_n, j(K_{n+1}) > + 2c_n < Au_n, j(K\mu_{n+1}) > \\
&\leq \|K\mu_n\|^{2} - 2\alpha(b_n + c_n)\|K\mu_{n+1}\|^{2} + 2(b_n + c_n)\|A\mu_n - A\mu_{n+1}\|\|K\mu_{n+1}\| \\
&+ 2c_n\|Ku_n\|\|K\mu_{n+1}\|.
\end{aligned} \tag{۲۰.۲}$$

بنابر قضیه ۷.۱.۲

$$\|K\mu_{n+1}\|^2 \leq \|K\mu_n\|^2 - 2(b_n+c_n)\alpha\|K\mu_{n+1}\|^2$$

$$+ 2(b_n+c_n)[\|A\mu_n\| - \|A\mu_{n+1}\|]\|K\mu_{n+1}\| + 2c_n\|Au_n\|\|K\mu_{n+1}\|$$

$$\leq \|K\mu_n\|^2 - 2(b_n+c_n)\alpha\|K\mu_{n+1}\|^2$$

$$+ 2(b_n+c_n)\beta[\|K\mu_n\| - \|K\mu_{n+1}\|]\|K\mu_{n+1}\| + 2c_n\beta\|Ku_n\|\|K\mu_{n+1}\|$$

$$\leq \|K\mu_n\|^2 - 2(b_n+c_n)\alpha\|K\mu_{n+1}\|^2$$

$$+ 2(b_n+c_n)\beta[\|K\mu_n\| - \|K\mu_n\| + \|(b_n+c_n)A\mu_n\| - c_n\|Au_n\|]\|K\mu_{n+1}\|$$

$$+ 2c_n\beta\|Ku_n\|\|K\mu_{n+1}\|.$$

لذا

$$[1+2(b_n+c_n)\alpha]\|K\mu_{n+1}\|^2 \leq \|K\mu_n\|^2$$

$$+ 2(b_n+c_n)\beta[\|K\mu_n\| - \|K\mu_n\| + \|(b_n+c_n)A\mu_n\| - c_n\|Au_n\|]\|K\mu_{n+1}\|$$

$$+ 2c_n\beta\|Ku_n\|\|K\mu_{n+1}\|.$$

(۲۱.۲)

بنابر (۲۱.۲) $d > 0$ وجود دارد که

$$[1+2\alpha(b_n+c_n)]\|K\mu_{n+1}\|^2 \leq \|K\mu_n\|^2 + 2\alpha d c_n.$$

فرض کنیم $\Phi_n = \|K\mu_n\|^2$ و چون $(b_n + c_n \geq b_n)$ پس برای هر $n \geq 0$ ،

$$(1+2\alpha b_n)\Phi_{n+1} \leq \Phi_n + 2\beta d c_n. \qquad (۲۲.۲)$$

برای $0 < x < 1$ بسط زیر را داریم

$$(1+x)^{-1} \leq 1 - x + x^2$$

بنابر (۲۲.۲)

$$\Phi_{n+1} \leq (1 + 2\alpha b_n)^{-1}\Phi_n + (1 + 2\alpha b_n)^{-1} 2\alpha d c_n$$

$$\leq [(1 - 2\alpha b_n + (2\alpha b_n)^2]\Phi_n$$

$$+ [(1 - 2\alpha b_n + (2\alpha b_n)^2] 2\beta d c_n$$

چون $c_n = b_n^2$ و $b_n \longrightarrow 0$ پس

$$\Phi_{n+1} \leq (1 - 2\alpha b_n)\Phi_n + d^* c_n$$

بنابر لم ۹.۱.۲ هرگاه $n \longrightarrow \infty$ آنگاه $\Phi_n \longrightarrow 0$ پس برای $n \longrightarrow \infty$، $\|K\mu_n\| \longrightarrow 0$. چون K معکوس کراندار است لذا $\theta^{-1}\|x\| \leq \|Kx\|$

$$0 = \lim_{n\to\infty} \|K\mu_n\| = \lim_{n\to\infty} \|Ax_n - f\| = \lim_{n\to\infty} \|A(x_n - x^*)\|$$

$$\geq \alpha \lim_{n\to\infty} \|K(x_n - x^*)\|$$

$$\geq \frac{\alpha}{\theta} \lim_{n\to\infty} \|x_n - x^*\|$$

بنابراین هرگاه

$$n \longrightarrow \infty \text{ آنگاه } x_n \longrightarrow x^*$$

نتیجه حاصل می شود. □

۲.۲ حل تکراری معادله $Ax = f$ مربوط به عملگرهای $K - pd$ در فضاهای باناخ خاص

در این قسمت با در نظر گرفتن فضای باناخ تفکیک‌پذیر یکنواخت هموار و فضای باناخ تفکیک‌پذیر $q-$ یکنواخت هموار نتایج بدست آمده در بخش قبل را روی این دو فضا بررسی می کنیم .

تعریف ۱.۲.۲. دنباله $\{x_n\}$ را به طور یکنواخت کاهنده (کاهشی) می گوییم، هرگاه برای $n \geq ۱$

$$x_{n+۱} \leq x_n.$$

ویژگی ۲.۲.۲. فرض کنیم Eفضای باناخ باشد، در این صورت تابع $\rho_E : [۰,\infty) \longrightarrow [۰,\infty)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$\rho_E(t) = sup\{\frac{۱}{۲}(\|x+y\| + \|x-y\|) - ۱ \qquad \|x\| \leq ۱, \|y\| \leq t\} > ۰ \quad \forall t \in (۰,\infty)$$

تعریف ۳.۲.۲. فضای باناخ E به طور یکنواخت هموار گوییم، هرگاه

$$\lim_{t\to ۰} \frac{\rho_E(t)}{t} = ۰$$

تعریف ۴.۲.۲. فضای باناخ Eرا $q-$به‌طور یکنواخت هموار گوییم، هرگاه $c \geq ۰$ موجود باشد که

$$\rho_E(t) \leq ct^q, \qquad q \geq ۱.$$

لم ۵.۲.۲. فرض کنیم E فضای باناخ به طور یکنواخت هموار باشد در این صورت

۱) ضرایب مثبت c, d وجود دارد که

$$\|x+y\|^۲ \leq \|x\|^۲ + ۲ < y, j(x) > + cmax\{\|x\| + \|y\|, d\} p_x(\|y\|)$$

۲) تابع پیوسته و غیر نزولی $b := [۰,\infty) \longrightarrow [۰,\infty)$ موجود است که $b(۰) = ۰$ و برای $c \geq ۱$،$b(ct) = cb(t)$ لذا برای هر $x, y \in E$

$$\|x+y\|^۲ \leq \|x\|^۲ + ۲ < y, j(x) > + max\{۱, \|x\|\} \|y\| b(\|y\|)$$

برهان. به [۱۸] رجوع کند. □

لم ۶.۲.۲. فرض کنیم E فضای باناخ حقیقی باشد در این صورت

۱) $p_E(۰) = ۰, \qquad p_E(t) \leq t, \qquad t \geq ۰$

۲) $p_E(t)$ روی $[۰,\infty)$ محدب، پیوسته و افزایشی است.

۳) $\frac{p_E(t)}{t}$روی $(۰,\infty)$ افزایشی است.

برهان. به [۱۸] رجوع شود. □

قضیه ۷.۲.۲. فرض کنیم E فضای باناخ تفکیک‌پذیر و به‌طور یکنواخت هموار و A عملگر $K-pd$با $D(A) = E$ باشد. در این صورت $\omega > ۰$ وجود دارد که برای هر $x \in D(A)$

$$\|Ax\| \leq \omega \|Kx\|.$$

همچنین، عملگر Aبسته است و $R(A) = E$. و برای هر $f \in E$ معادله $Ax = f$ جواب یکتایی دارد.

برهان. به [۱] رجوع شود. □

قضیه ۸.۲.۲. فرض کنیم E فضای باناخ به طوریکنواخت هموار و $A : D(A) \subseteq E \longrightarrow E$ عملگر $K - pd$ با $D(A) = D(K)$ باشد. $x_\circ \in D(A)$ و در این صورت دنباله تکراری $\{x_n\}$ که به صورت زیر تولید می شوند

$$x_{n+1} = y_n + t_n\gamma_n. \qquad n \geq \circ \quad (۱$$

$$\gamma_n = K^{-۱}f - K^{-۱}Ay_n. \qquad n \geq \circ \quad (۲$$

$$y_n = x_n + r_n\mu_n. \qquad , n \geq \circ \quad (۳$$

$$\mu_n = K^{-۱}f - K^{-۱}Ax_n. \qquad n \geq \circ \quad (۴$$

$$\circ \leq t_n \leq ۱, \qquad r_n \leq \frac{۱}{۲\alpha}. \qquad n \geq \circ \quad (۵$$

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \circ. \quad (۶$$

$$\Sigma_{n=\circ}^{\infty} t_n = \infty, \qquad \lim_{n\to\infty} t_n = \circ. \quad (۷$$

$$b(\beta t_n) \leq \frac{۲\alpha}{B\beta}, \qquad b(\beta r_n) \leq \frac{۲\alpha}{B\beta}. \quad (۸$$

که $b(t)$ تابع تعریف شده در لم ۵.۲.۲ و β ضریب قضیه ۷.۱.۲ ، و α ضریب تعریف عملگر $K - pd$ است.

$$B = max\{۱, \|K\mu_\circ\|\}. \quad (۹$$

همگرا به جواب یکتای معادله $Ax = f$ است.

برهان. بنابر قضیه ۷.۲.۲ معادله $Ax = f$ جواب یکتا دارد. بنابر خطی بودن A و K و روابط ۴و۱

$$K\mu_{n+۱} = K(K^{-۱}f - K^{-۱}Ax_n) = f - A(y_n + t_n\gamma_n)$$

$$= f - Ay_n - t_nA\gamma_n$$

$$= K\gamma_n - t_nA\gamma_n.$$

به همین ترتیب

$$
\begin{aligned}
K\gamma_n = K(K^{-۱}f - K^{-۱}Ay_n) &= f - Ay_n \\
&= f - A(x_n + r_n\mu_n) \\
&= f - Ax_n - r_nA\mu_n \\
&= K\mu_n - r_nA\mu_n.
\end{aligned}
$$

بنابر لم ۵.۲.۲

$$
\begin{aligned}
\|K\gamma_n\|^۲ &= \|K\mu_n - r_nA\mu_n\|^۲ \\
&\leq \|K\mu_n\|^۲ - ۲ < r_nA\mu_n, J(K\mu_n) > \\
&+ max\{\|K\mu_n\|, ۱\}\|r_nA\mu_n\|b(\|r_nA\mu_n\|) \\
&\leq \|K\mu_n\|^۲ - ۲r_n\alpha\|K\mu_n\|^۲ \qquad (\text{تعریف عملگر } K-pd) \\
&+ max\{\|K\mu_n\|, ۱\}\|r_nA\mu_n\|b(\|r_nA\mu_n\|) \qquad (۲۳.۲) \\
&\leq \|K\mu_n\|^۲ - ۲r_n\alpha\|K\mu_n\|^۲ \\
&+ max\{\|K\mu_n\|, ۱\}r_n\beta\|K\mu_n\|b(r_n\beta\|K\mu_n\|) \qquad (\text{تعریف } \beta) \\
&\leq (۱ - ۲\alpha r_n)\|K\mu_n\|^۲ \\
&+ max\{\|K\mu_n\|, ۱\}r_n\beta\|K\mu_n\|b(r_n\beta\|K\mu_n\|).
\end{aligned}
$$

به همین ترتیب

$$\|K\mu_{n+1}\|^{2} = \|K\gamma_n - t_nA\gamma_n\|^{2}$$
$$\le \|K\gamma_n\|^{2} - 2 < t_nA\gamma_n, J(K\gamma_n) > \tag{2.24}$$
$$+ max\{\|K\gamma_n\|, 1\}\|t_nA\gamma_n\|b(\|t_nA\gamma_n\|)$$
$$\le (1 - 2\alpha t_n)\|K\gamma_n\| + max\{\|K\gamma_n\|, 1\}t_n\beta\|K\gamma_n\|b(\beta t_n\|K\gamma_n\|).$$

با استقرا روی $n > 0$نشان می دهیم $\|K\gamma_n\| \le B$ و $\|K\mu_n\| \le B$.
بنابر فرض ۹

$$\|K\mu_0\| \le B \tag{2.25}$$

بنابر (۲.۲۵) و (۲.۲۳) و فرض ۸

$$\|K\gamma_0\|^{2} \le (1 - 2\alpha r_0)\|K\mu_0\|^{2}$$
$$+ max\{\|K\mu_0\|, 1\}r_0\beta\|K\mu_0\|b(\beta r_0\|K\mu_0\|) \qquad (\text{از تعریف } B)$$
$$\le (1 - 2\alpha r_0)B^{2} + B^{3}\alpha r_0 b(\alpha r_0)$$
$$\le (1 - 2\alpha r_0)B^{2} + 2\alpha r_0 B^{2} \qquad (b(\beta r_n) \le \frac{2\alpha}{B\beta})$$
$$\le B^{2}$$

پس $\|K\gamma_0\| \le B$ فرض کنیم برای $m \ge 0$ ، $\|K\mu_m\| \le B$ و $\|K\gamma_m\| \le B$ درست باشد در این

صورت بنابر (۲۴.۲)

$$\|K\mu_{m+1}\|^2 \leq (1-2\alpha t_m)\|K\gamma_m\|^2$$

$$+ max\{\|K\gamma_m\|, 1\}t_m\beta\|K\gamma_m\|b(\beta t_n\|K\gamma_m\|)$$

$$\leq (1-2\alpha t_m)B^2 + B^2\beta t_m b(\beta t_m B) \qquad$$ (از تعریف B)

$$\leq (1-2\alpha t_m)B^2 + B^2 t_m B\beta b(\beta t_m)$$

$$\leq (1-2\alpha t_m)B^2 + 2\alpha t_m B^2 = B^2.$$

بنابر (۲۳.۲)

$$\|K\gamma_{m+1}\|^2 \leq B^2.$$

در نتیجه برای $n \geq 0$

$$\|K\gamma_n\| \leq B \text{ و } \|K\mu_n\| \leq B. \tag{۲۶.۲}$$

بنابر ۵

$$4\alpha t_n r_n \leq 2min\{t_n, r_n\} \leq t_n + r_n$$

با ضرب α در طرفین نامساوی بالا رابطه‌ی زیر را به دست می‌آوریم

$$(1-2\alpha t_n)(1-2\alpha r_n) \leq 1 - \alpha(t_n + r_n). \tag{۲۷.۲}$$

بنابر (۲۴.۲) و نامساوی (۲۷.۲)

$$\|K\mu_{n+1}\|^{2} \leq (1 - 2\alpha t_n)\|K\gamma_n\|^{2} + max\{\|K\gamma_n\|, 1\}\|t_nA\gamma_n\|b(\|t_nA\gamma_n\|)$$

$$\leq (1 - 2\alpha t_n)((1 - 2\alpha r_n)\|K\mu_n\|^{2} + max\{\|K\mu_n\|, 1\}\|r_nA\mu_n\|b(\|r_nA\mu_n\|))$$

$$+ max\{\|K\gamma_n\|, 1\}\|t_nA\gamma_n\|b(\|t_nA\gamma_n\|)$$

$$\leq (1 - 2\alpha t_n)(1 - 2\alpha r_n)\|K\mu_n\|^{2} \qquad (\text{تعریف } \mathbf{B})$$

$$+ (1 - 2\alpha r_n)B^{3}\beta t_nb(\beta t_n) + B^{3}\beta r_nb(\beta r_n)$$

$$\leq (1 - \alpha(t_n + r_n))\|K\mu_n\|^{2}$$

$$+ B^{3}\beta(t_nb(\beta t_n)) + r_nb(\beta r_n).$$

(۲۸.۲)

لذا با قرار دادن $\phi_n = \|K\mu_n\|^{2}$، $\delta_n = \alpha(t_n + r_n)$ و $\sigma_n = B^{3}\beta(t_nb(\beta t_n) + r_nb(\beta r_n))$ در (۲۸.۲)

$$\phi_{n+1} \leq (1 - \delta_n)\phi_n + \sigma_n.$$

بنابر لم۹.۱.۲ اگر $n \longrightarrow \infty$، آنگاه $\phi_n \longrightarrow 0$

پس برای $n \longrightarrow \infty$، $K\mu_n \longrightarrow f$. چون K به‌طورپیوسته$D(A)$-معکوس پذیر است،پس $\theta > 0$ وجود دارد که برای هر $x \in D(A)$

$$\|Kx\| \geq \theta\|x\|,$$

هرگاه $n \longrightarrow \infty, \mu_n = (K^{-1}f - K^{-1}Ax_n) \longrightarrow 0$. پس $Ax_n \longrightarrow f$ و چون A دارای معکوس كراندار است، پس $x_n \longrightarrow A^{-1}f$ كه جواب يكتای معادله $Ax = f$ است. نتيجه حاصل می شود. □

نتیجه ۹.۲.۲. فرض کنیم E فضای باناخ تفکیک‌پذیر و به طوریکنواخت هموار

$A : D(A) \subseteq E \longrightarrow E$ عملگر $K - pd$ با $D(A) = D(K)$ باشد. $x_0 \in D(A)$ دنباله تکراری $\{x_n\}$ که به صورت زیر تولید می شوند

$$1 \quad x_{n+1} = x_n + t_n\gamma_n. \qquad n \geq 0$$

۲ $n \geq 0$ $\quad \gamma_n = K^{-1}f - K^{-1}Ax_n.$

۳ $n \geq 0$ $\quad 0 \leq t_n \leq \frac{1}{2\alpha}.$

۴ $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$ $\quad \Sigma_{n=1}^{\infty} t_n = \infty.$

۵ $n \geq 0$ $\quad b(\beta t_n) \leq \frac{2\alpha}{B\beta}.$

که $b(t)$ تابع تعریف شده در لم ۵.۲.۲ و β ضریب در قضیه ۷.۱.۲ و α ضریب تعریف عملگر $K-pd$ است.

۶) $B = max\{1, \|K\gamma_0\|\}.$

برای هر $f \in E$ ، همگرا قوی به جواب یکتای معادله $Ax = f$ است.

برهان. با قرار دادن $r_n = 0$ در اثبات قضیه قبل نتیجه حاصل می شود.

□

لم ۱۰.۲.۲. فرض کنیم E یک فضای باناخ تفکیک‌پذیر و $q > 1$باشد. در این صورت اگر $A: D(A) \subseteq E \longrightarrow E$ عملگر $K-pd$ باشد، آنگاه برای هر $x \in D(A)$ و $j_q(Kx) \in J_q(Kx)$

$$< Ax, j_q(Kx) > \geq \alpha \|Kx\|^q.$$

برهان. به [۹] رجوع شود. □

قضیه ۱۱.۲.۲. فرض کنیم E فضای باناخ به طوریکنواخت هموار باشد. در این صورت E فضای q-به طور یکنواخت هموار است اگر و فقط اگر $c_q > 0$ وجود داشته باشد که

$$\|x+y\|^q \leq \|x\|^q + q < y, j_q(x) > + c_q\|y\|^q.$$

برهان. به [۹] رجوع شود. □

قضیه ۱۲.۲.۲. فرض کنیم E فضای باناخ تفکیک‌پذیر و q-به‌طور یکنواخت هموار و $A: D(A) \subseteq E \longrightarrow E$ عملگر $K-pd$ با $D(A) = D(K)$ باشد. در این صورت دنباله تکراری $\{x_n\}$ که به صورت زیر تولید می‌شود

$$x_{n+1} = x_n + t_n\gamma_n, \qquad n \geq 0$$

$$\gamma_n = K^{-1}f - K^{-1}Ax_n, \qquad n \geq 0$$

$$t_n = [\frac{< A\gamma_n, j_q(K\gamma_n) >}{c_q\|A\gamma_n\|^q}]^{(q-1)^{-1}}, \qquad n \geq 0$$

$$\lim_{n\to\infty} t_n = 0$$

برای هر $f \in E$، همگرا قوی به جواب یکتای معادله $Ax = f$ است.

برهان. بنابر قضیه ۷.۲.۲ معادله $Ax = f$ جواب یکتا دارد. بنابر خطی بودن A و K

$$K\gamma_{n+1} = K(K^{-1}f - K^{-1}Ax_{n+1})$$

$$= f - A(x_n + t_n\gamma_n)$$

$$= f - t_nA\gamma_n - Ax_n$$

$$= K\gamma_n - t_nA\gamma_n.$$

با بنابر قضیه ۱۱.۲.۲ داریم

$$\|K\gamma_{n+1}\|^q = \|K\gamma_n - t_nA\gamma_n\|^q$$

$$\leq \|K\gamma_n\|^q - qt_n < A\gamma_n, j_q(K\gamma_n) > +c_qt_n^q\|A\gamma_n\|^q$$

$$= \|K\gamma_n\|^q - q\frac{< A\gamma_n, j_q(K\gamma_n) >^{q(q-1)^{-1}}}{[c_q\|A\gamma_n\|^q]^{(q-1)^{-1}}} \qquad (\text{از تعریف } t_n)$$

$$+ \frac{< A\gamma_n, j_q(K\gamma_n) >^{q(q-1)^{-1}}}{[c_q\|A\gamma_n\|^q]^{(q-1)^{-1}}}.$$

بنابراین

$$\|K\gamma_{n+1}\|^q \leq \|K\gamma_n\|^q - (q-1)\frac{< A\gamma_n, j_q(K\gamma_n) >^{q(q-1)^{-1}}}{[c_q\|A\gamma_n\|^q]^{(q-1)^{-1}}}. \qquad (۲۹.۲)$$

بنابر (۲۹.۲) $\{K\gamma_n\}$ یک دنباله کاهشی است بنابراین پس همگرا به عدد حقیقی $\delta_q > ۰$ است. از فرض مسله داریم

$$\lim_{n\to\infty} \frac{< A\gamma_n, j_q(K\gamma_n) >^{q(q-1)^{-1}}}{[c_q\|A\gamma_n\|^q]^{(q-1)^{-1}}} = ۰ \qquad (۳۰.۲)$$

بنابر لم ۱۰.۲.۲ و قضیه۷.۲.۲

$$\frac{< A\gamma_n, j_q(K\gamma_n) >^{q(q-1)^{-1}}}{[c_q\|A\gamma_n\|]^{q(q-1)^{-1}}} \geq (\frac{\alpha}{\beta})^{q(q-1)^{-1}}\|K\gamma_n\|^q$$

چون K به طورپیوسته $-D(A)$ معکوس‌پذیر است پس $\theta > ۰$ موجود است که برای هر $x \in D(K)$

$$\|Kx\| \geq \theta\|x\|.$$

لذا

$$\frac{< A\gamma_n, j_q(K\gamma_n) >^{q(q-1)^{-1}}}{[c_q\|A\gamma_n\|]^{q(q-1)^{-1}}} \geq (\frac{\alpha}{\beta})^{q(q-1)^{-1}} \theta^q \|\gamma_n\|^q$$

رابطه (۳۰.۲) نتیجه می‌دهد که برای $\infty \longrightarrow n$آنگاه $\circ \longrightarrow \gamma_n$ در نتیجه $f \longrightarrow Ax_n$. چون A دارای معکوس کراندار است، پس $A^{-1}f \longrightarrow x_n$ جواب یکتای معادله $Ax = f \in E$ است. نتیجه حاصل است. □

نتیجه ۱۳.۲.۲. فرض کنیم $E = L_q$ $(q > 1)$ تفکیک‌پذیر و $A : D(A) \subseteq E \longrightarrow E$ عملگر K–مثبت معین باشد و همچنین $R(K) = D(A) = D(K)$. در این صورت دنباله تکراری $\{x_n\}$ که به صورت زیر تولید می‌شود

$$x_{n+1} = x_n + t_n K^{-1}\gamma_n \qquad n \geq 0$$

$$t_n = \frac{< B\gamma_n, j(K\gamma_n) >}{(p-1)\|B\gamma_n\|^2} \quad n \geq 0$$

$$x_0 \in D(A)$$

که در آن $B = KA^{-1}K$ و $f \in R(K)$ $\gamma_n = f - Ax_n,$.
به جواب یکتای معادله $Ax = f$ همگرا است.

برهان. به [۹] رجوع شود. □

فصل ۳

عملگر $K-pd$ و عملگر فرشه

در این فصل عملگر فرشه [1] را تعریف می‌کنیم که این عملگر شرایط عملگر K-مثبت معین را دارد. نشان می دهیم که معادله $Ax=f$ به طور موضعی نیز جواب یکتا دارد و قضایای مربوط و همچنین قضیه بهترین تقریب برای جواب یکتای معادله را بیان می‌کنیم.

۱.۳ عملگر $K-pd$ و عملگر فرشه

تعریف ۱.۱.۳. فرض کنیم X و Y فضاهای برداری نرم‌دار باشند. در این صورت مشتق فریشه عملگر $F: X \longrightarrow Y$ عملگر خطی و کراندار $DF(a): X \longrightarrow Y$ است که در شرط زیر صدق می کند

$$\lim_{h\to \circ} \frac{\|F(a+h)-F(a)-DF(a)h\|}{\|h\|} = \circ.$$

گزاره ۲.۱.۳. در تعریف ۱.۱.۳ اگر $F: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ در نظر گرفته شود، آنگاه این تعریف تعمیم مشتق تابع است.

مثال ۳.۱.۳. فرض کنیم $X=C[a,b]$ با نرم $\|.\|_\infty$ (نرم سوپریمم) و $T: X \longrightarrow X$ عملگر خطی انتگرال به صورت زیر باشد

$$(Tu)t = \int_a^b K(x,s)u(s)ds,$$

[1] derivative Fréchet

که $K(x,s)$ تابع پیوسته روی $[a,b]\times[a,b]$ است.
ابتدا برای هر $h\in X$، $T(u+h)-T(u)$ را محاسبه می‌کنیم

$$[T(u+h)-T(u)](t)=\int_a^b K(x,s)[u(s)+h(s)]ds-\int_a^b K(x,s)u(s)ds$$

$$=\int_a^b K(x,s)[u(s)+h(s)-u(s)]ds$$

$$=\int_a^b K(x,s)h(s)ds.$$

انتگرال آخر یک عملگر خطی بر حسب $h(s)$ است. به ازای هر $h\neq ۰$ پس

$$\forall h\neq ۰,\qquad \frac{۱}{\|h\|}[T(u+h)-T(u)-\int_a^b K(x,s)h(s)ds]=۰$$

بنابراین

$$DT(u)=\int_a^b K(x,s)h(s)ds,$$

مشتق فرشه مستقل از uاست.

تعریف ۴.۱.۳. عملگر A از فضای باناخ E را K-مثبت معین می‌گوییم، هرگاه A دارای مشتق فرشه باشد و عملگر بسته و به‌طور پیوسته $D(A)$-معکوس‌پذیر K و $c>۰$ موجود باشند که برای $j\in J(Kx)$ و $x\in D(A)$

$$<Ax,j>\geq c\|Kx\|^۲$$

.

تعریف ۵.۱.۳. فرض کنیم E فضای باناخ باشد. در این صورت نگاشت $T:E\longrightarrow E$ را نگاشت انقباضی می گوییم، هرگاه $۰\leq c\leq ۱$موجود باشد که برای هر $x,y\in E$

$$\|Tx-Ty\|\leq c\|x-y\|.$$

قضیه ۶.۱.۳. **قضیه نگاشت انقباضی:** فرض کنیم E فضای باناخ و $T:E\longrightarrow E$ یک نگاشت انقباضی باشد.در این صورت T یک نقطه ثابت یکتا دارد.

قضیه ۷.۱.۳. **قضیه تیلور** [۲]: فرض کنیم تابع f روی بازه بسته $[a,b]$ پیوسته و روی بازه (a,b) ، $(n+۱)$ بار به طور پیوسته مشتق‌پذیر باشد. هرگاه x,c نقاطی در (a,b) باشند. آنگاه

$$f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{f''(c)}{۲!}(x-c)^۲+\ldots+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n+r_n(x).$$

---

[۲] Taylor's Theorem

که در آن $r_n(x)$ مقدار خطا می‌باشد و به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$r_n(x)=\int_c^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{n+1}(t)dt.$$

و $p_n(x)$ چندجمله ای تیلور مرتبه n برای f در نقطه $c\in(a,b)$ و x نقطه‌ای روی (a,b) باشد. لذا

$$f(x)=p_n(x)+r_n(x).$$

قضیه ۸.۱.۳. قضیه تابع معکوس [۳]: فرض کنیم X و Y دو فضای باناخ باشند. نگاشت $A:X\longrightarrow Y$ در همسایگی نقطه $x_0\in X$ به طورپیوسته دارای مشتقات فرشه است. اگر $A'(x_0)$ همانسانی خطی از X به Y باشد، آنگاه A همانسانی موضعی از همسایگی x_0 به همسایگی از $A(x_0)$ است.

برهان. فرض کنیم $A(x_0)=y_0$ و $y\in Y$ به گونه ای که $\|y-y_0\|$ به قدر کافی کوچک باشد ابتدا p را طوری تعیین می‌کنیم که در رابطه $A(x_0+p)=y$ صدق کند لذا

$$A(x_0+p)-A(x_0)=y-y_0 \tag{۱.۳}$$

چون A در نقطه x_0 مشتق پذیر است. در (۱.۳) با قرار دادن $x=x_0+p$ از قضیه تیلور داریم

$$A(x)=A(x_0)+A'(x_0)(x-x_0)+R(x_0,p).$$

$$A(x)-A(x_0)=A'(x_0)(x-x_0)+R(x_0,p).$$

$A'(x_0)p+R(x_0,p)=y-y_0.$ $A'(x_0)$ (همیومورفیسم) معکوس‌پذیراست لذا

$$p=[A'(x_0)]^{-1}[(y-y_0)-R(x_0,p)]$$

و باقی مانده به صورت زیر است

$$R(x_0,p)=A(x_0+p)-A(x_0)-A'(x_0)p.$$

نشان می‌دهیم که (۱.۳) برای $\|p\|$ به اندازه کافی کوچک یک و فقط یک جواب دارد. برای این منظور کافی است نشان دهیم برای $\varepsilon>0$ به اندازه کافی کوچک، عملگر

$$T_p=[A'(x_0)]^{-1}\{(y-y_0)-R(x_0,p)\}$$

یک نگاشت انقباضی از کره $S(0,\varepsilon)$ در X به خودش است. فرض کنیم برای هر $p_1,p_2\in S(0,\varepsilon)$ $(\|p_1\|\le\epsilon,\|p_2\|\le\epsilon)$

---

[۳] The inverse function Theorem

$$A'(x_\circ)(Tp_۲ - Tp_۱) = R(x_\circ - p_۱) - R(x_\circ - p_۲)$$

$$= A(x_\circ + p_۱) - A(x_\circ + p_۲) - A'(x_\circ)(p_۱ - p_۲)$$

$$= \int_\circ^۱ \{A'(x_\circ + tp_۱ + (۱-t)p_۲) - A'(x_\circ)\}(p_۱ - p_۲)dt.$$

بنابراین

$$\|Tp_۱ - Tp_۲\| \leq \| \int_\circ^۱ [A'(x_\circ)]^{-۱} \|A'(x_\circ + tp_۱ + (۱-t)p_۲) - A'(x_\circ)\| \|p_۱ - p_۲\| dt. \quad (۲.۳)$$

چون A نگاشتی در $C^۱$ است و با انتخاب برای $\|p_۲\|$،$\|p_۱\|$ به مقدار کافی کوچک، جمله میانی انتگرال ۲.۳ از تعریف پیوستگی به اندازه کافی کوچک شود یعنی $۱ \leq \alpha \leq \circ$ موجود است که برای هر $p_۱, p_۲ \in S(\circ, \varepsilon)$

$$\forall p_۱, p_۲ \in S(\circ, \varepsilon), \qquad \|Tp_۱ - Tp_۲\| \leq \alpha \|p_۱ - p_۲\|.$$

پس T نگاشتی انقباضی است . برای هر $p \in S(\circ, \varepsilon)$

$$\|Tp\| = \|Tp - T(\circ)\| + \|T(\circ)\| \leq \alpha\|p\| + \|T(\circ)\|.$$

و

$$\|T(\circ)\| = \|[A'(x_\circ)]^{-۱}(y - y_\circ)\| < (۱-\alpha)\varepsilon.$$

مشروط بر اینکه

$$\|y - y_\circ\| < (۱-\alpha)\varepsilon \|[A'(x_\circ)]^{-۱}\|^{-۱}.$$

لذا $\|Tp\| \leq \alpha\epsilon + (۱-\alpha)\epsilon = \epsilon$ بنابراین T نگاشت انقباضی از $S(\circ, \varepsilon)$ به خودش است، حال با توجه به قضیه نگاشت انقباضی T یک نقطه ثابت p^* در $S(\circ, \delta)$ دارد که $\delta \leq \varepsilon$ و آن را طوری انتخاب می کنیم که

$$A(S(\circ, \delta) \subset S(y_\circ, (۱-\alpha)\varepsilon \|[A'(x_\circ)]^{-۱}\|^{-۱}).$$

بنابراین هر نقطه از همسایگی $x_\circ$ به یک نقطه از همسایگی $y_\circ$ برده می شود پس A عملگری دو سویی است. با انجام عکس مراحل اثبات، زمانی که $\|p\|, \|y - y_\circ\|$به اندازه کافی کوچک باشد، این نتیجه حاصل می‌شود که $A(x_\circ + p) = y$ یک و فقط یک جواب دارد. همچنین $A^{-۱}(y) = x$ خوش تعریف و نگاشت پیوسته از کره $S(y_\circ, (۱-\alpha)\varepsilon \|[A'(x_\circ)]^{-۱}\|^{-۱})$ در Yبه X است.

□

قضیه ۹.۱.۳. با توجه به شرایط قضیه ۸.۱.۳ دنباله تکراری، $x_{n+۱} = x_n + [A'(x_\circ)]^{-۱} r_n$ که در آن $r_n = [y - A(x_n)]$، به جواب یکتای معادله $Ax = y$در همسایگی $x_\circ$ همگرا است.

برهان. بنابر قضیه۸.۱.۳ T عملگر انقباضی است لذا دنباله $p_n = Tp_{n-1}$ به نقطه ثابت یکتای T همگرا است. از قضیه۸.۱.۳ برای $\|y - A(x_0)\|$ به اندازه کافی کوچک، معادله $Ax = y$ دارای جواب یکتا $x = x_0 + p^*$ است. که در آن p^*حد دنباله $p_{n+1} = Tp_n$ و $p^0 = 0$ است. آنگاه دنباله $x_n = x_0 + p_n$ همگرا به $x_0 + p^*$ است که جواب یکتای معادله $Ax = y$ در همسایگی x_0 است. با توجه به اثبات قضیه۸.۱.۳

$$\begin{aligned}
x_n = x_0 + p_n = x_0 + Tp_{n-1}\\
&= x_0 + [A'(x_0)]^{-1}[y - A(x_0) - R(x_0, p_{n-1})]\\
&= x_0 + [A'(x_0)]^{-1}[y - A(x_0) - A(x_0 + p_{n-1}) + A(x_0) + A'(x_0)p_{n-1}]\\
&= x_0 + [A'(x_0)]^{-1}[y + A'(x_0)p_{n-1} - A(x_0 + p_{n-1})]\\
&= x_0 + p_{n-1} + [A'(x_0)]^{-1}[y - A(x_{n-1})] \qquad (x_{n-1} = x_0 + p_{n-1})\\
&= x_{n-1} + [A'(x_0)]^{-1}[y - A(x_{n-1})].
\end{aligned}$$

پس دنباله تکراری x_{n+1} به جواب معادله $Ax = y$ در همسایگی x_0 همگرااست. □

نتیجه ۱۰.۱.۳. فرض کنیم A عملگر $K-pd$ روی دامنه چگال $D(A)$ از فضای باناخ E با برد $R(A)$باشد. برای $x_0 \in E$اگر$A'(x_0)$ هومورفیسم خطی از Eبه F باشد، آنگاه A یک هومورفیسم از $U(x_0)$ همسایگی x_0 به همسایگی $A(x_0)$ است. همچنین، اگر $\|y - A(x_0)\|$ به اندازه کافی کوچک باشد، دنباله ی $x_{n+1} = x_n + K^{-1}r_n$ که در آن $r_n = [y - A(x_n)]$ همگرا به جواب یکتای معادله $Ax = y$ درهمسایگی از x_0 است.

برهان. به [۵] رجوع شود. □

قضیه ۱۱.۱.۳. فرض کنیم E یک فضای باناخ و A یک عملگر $K-pd$ روی دامنه چگال $D(A) \subseteq E$ باشد. B یک عملگر خطی غیر کراندار و $D(A) \subseteq D(B)$ است. نشان می دهیم که معادله $Lu = f$ که در آن $L = A + B$، دارای جوابی منحصربفرد است، و روشی تکراری، وجود دارد که به جواب یکتای این معادله همگرا است.

برهان. فرض کنیم $Lu = (A + B)u = f$ با ضرب دو طرف مساوی در A^{-1}داریم

$$u + Tu = g$$

در (۱.۳) $T=A^{-1}B$ و $g=A^{-1}f$ چون A به طور پیوسته معکوس پذیر است، عملگر $T=A^{-1}B$ کاملا پیوسته است. اگر $A=B$ آنگاه $L=A+B=2A$ در این حالت

$$<Lu,Ku>=2<Au,Ku> \quad \geq 2\alpha\|Ku\|^2=\beta\|Ku\|^2$$

در این حالت L عملگر $K-$مثبت معین است، بنابراین معادله$Lu=f$ دارای جواب یکتا است.

وجود روش تکراری: با روندی مشابه اثبات قضیه ۸.۱.۳ اگر $\|g-Lu_\circ\|$ به اندازه کافی کوچک با شد، $Lu=g$ جواب یکتای $u=u_\circ+p^*$ دارد، که در آن p^* حد دنباله ی زیر است

$$p_\circ=0 \qquad p_{n+1}=Qp_n$$

است. و برای ε به اندازه کافی کوچک Q نگاشت انقباضی از $S(\circ,\varepsilon)$ به خودش است.

دنباله$u_n=u_\circ+p_n$ به $u_\circ+p^*$ همگرا است که جواب یکتای معادله $Lu=g$ در $U(u_\circ)$ است.

حال

$$\begin{aligned}
u_n&=u_\circ+p_n=u_\circ+Qp_{n-1}\\
&=u_\circ+[L(u_\circ)]^{-1}[g-L(u_\circ)-R(u_\circ,p_{n-1})] \qquad (\text{قضیه تیلور})\\
&=u_\circ+[L(u_\circ)]^{-1}[g+L(u_\circ)p_{n-1}-L(u_\circ+p_{n-1})]\\
&=u_\circ+p_{n-1}+[L(u_\circ)]^{-1}[g-Lu_{n-1}].
\end{aligned}$$

بنابراین

$$u_{n+1}=u_n+[L(u_\circ)]^{-1}[g-Lu_n]. \tag{۳.۳}$$

□

تعریف ۱۲.۱.۳. فرض کنیم E فضای باناخ باشد. عملگر A را عملگر $K-$ مثبت معین مجانبی گوییم، هرگاه عملگری خطی بسته به‌طورپیوسته$D(A)-$ معکوس‌پذیر K موجود و $c>0$ باشند که برای $j(Ku)\in J(Ku)$ داریم

$$\langle K^{n-1}Au, j(K^nu)\rangle \geq ck_n\|K^nu\|^2, \qquad \forall u\in D(A)$$

که در آن $\{k_n\}$ یک دنباله حقیقی و $\lim_{n\to\infty}k_n=1, k_n\geq 1$ است.

قضیه ۱۳.۱.۳. فرض کنیم A عملگر $K-$مثبت معین مجانبی روی همسایگی $x_\circ$ در فضای باناخ E باشد. $x_\circ\in D(A)$، در این صورت دنباله $\{x_n\}$ که به صورت زیرتولید می شود همگرا قوی به جواب

یکتای معادله $Ax=f$ است.

$$x_{n+1}=x_n+r_n \qquad n\geq 0$$

$$r_n=K^{-1}f-K^{-1}Ax_n$$

$$f\in R(A)$$

برهان. بنابر خطی بودن K

$$Kr_{n+1}=f-Ax_{n+1}=f-A(x_n+r_n)=f-Ax_n-Ar_n=Kr_n-Ar_n.$$

بنابر تعریف ۱۲.۱.۳ و لم ۸.۱.۲

$$\begin{aligned}\|K^n r_{n+1}\|^2&=\|K^n r_n-K^{n-1}Ar_n\|^2\\ &\leq \|K^n r_n\|^2-2\langle K^{n-1}Ar_n, j(K^n r_n-K^{n-1}Ar_n)\rangle\\ &\leq \|K^n r_n\|^2-2\langle K^{n-1}Ar_n, j(K^n r_{n+1})\rangle\\ &\leq \|K^n r_n\|^2-2ck_n\|K^n r_{n+1}\|^2.\end{aligned}$$

بنابراین

$$(1+2ck_n)\|K^n r_{n+1}\|^2\leq \|K^n r_n\|^2$$

، یا

$$\|K^n r_{n+1}\|^2\leq (1+2ck_n)^{-1}\|K^n r_n\|^2.$$

این نامساوی نشان می‌دهد دنباله $\{Kr_n\}$ به‌طور یکنواخت کاهش می‌یابد پس همگرا به عدد حقیقی $\delta\geq 0$ است. بنابراین $\lim_{n\to\infty}\|K^n r_n\|=0$. چون K به‌طورپیوسته معکوس پذیر است، لذا $r_n\longrightarrow 0$ و چون A عملگر معکوس کراندار است پس $x_n\longrightarrow A^{-1}f$ که جواب یکتای معادله $Ax=f$ است. □

لم ۱۴.۱.۳. فرض کنیم $\{\lambda_n\}$ و $\{\gamma_n\}$دنباله هایی از اعداد نامنفی و $\{\alpha_k\}$ دنباله‌ای از اعداد مثبت باشد و

$$\Sigma_1^{\infty}\{\alpha_k\}=\infty, \qquad \frac{\gamma_n}{\alpha_n}_{n\to\infty}\longrightarrow 0$$

و نامساوی زیر برقرار باشد

$$\lambda_{n+1} \leq \lambda_n - \alpha_n\phi(\lambda_n) + \gamma_n$$

که در آن $\phi(\lambda) : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ تابعی پیوسته، افزایشی و مثبت روی $\{0\}-\mathbb{R}^+$ است که $\lim_{t\to\infty}\phi(t) =$ $\phi(0) = 0$ و ∞ در این صورت

$$n \longrightarrow \infty, \qquad \lambda_n \longrightarrow 0.$$

برهان. به[۱۹] رجوع شود. □

قضیه ۱۵.۱.۳. فرض کنیم A عملگر $K-$مثبت معین مجانبی روی همسایگیx_0 در فضای باناخ به طوریکنواخت هموار E باشد. A دارای مشتق فریشه است. دنباله $\{x_n\}$ را به صورت زیر تولید می شود در همسایگی x_0 همگرا قوی به جواب یکتای معادله $Ax = y$ است.

$$x_0 \in U(x_0)$$

$$x_{n+1} = x_n + r_n, n \geq 0$$

$$r_n = K^{-1}y - K^{-1}Ax_n.$$

$$y \in R(A)$$

و

$$x_{n+1} - x_n \longrightarrow 0, n \longrightarrow \infty.$$

برهان. بنابر خطی بودن K

$$Kr_{n+1} = K(K^{-1}y - K^{-1}Ax_{n+1})$$

$$= y - Ax_{n+1} = y - Ax_n - Ar_n$$

$$= Kr_n - Ar_n.$$

$$K^{n-1}(Kr_{n+1} = Kr_n - Ar_n).$$

$$\begin{aligned}
\|K^n r_{n+1}\|^2 &= \|K^n r_n - K^{n-1}Ar_n\|^2 \\
&\le \|K^n r_n\|^2 - 2\langle K^{n-1}Ar_n, j(K^n r_n - K^{n-1}Ar_n)\rangle \\
&\le \|K^n r_n\|^2 - 2\langle K^{n-1}Ar_n, j(K^n r_{n+1})\rangle \qquad (\pm K^n r_n) \\
&\le \|K^n r_n\|^2 - 2\langle K^{n-1}Ar_n, j(K^n r_n)\rangle - 2\langle K^{n-1}Ar_n, j(K^{n-1} r_{n+1} - j(K^n r_n)\rangle \\
&\le \|K^n r_n\|^2 - 2ck_n\|K^n r_n\|^2 - 2\langle K^{n-1}Ar_n, j(K^n r_{n+1}) - j(K^n r_n)\rangle \\
&\le \|K^n r_n\|^2 - 2ck_n\|K^n r_n\|^2 + 2\|K^{n-1}Ar_n\|\|j(K^n r_{n+1} - j(K^n r_n)\|.
\end{aligned}$$

اکنون

$$K^n r_{n+1} - K^n r_n = K^n(r_{n+1} - r_n) = K^n K^{-1}A(x_{n+1} - x_n).$$

چون $x_{n+1} - x_n \longrightarrow 0$ و j پیوسته یکنواخت است لذا

$$n \longrightarrow \infty, \qquad \|j(K^n r_{n+1} - j(K^n r_n)\| \longrightarrow 0$$

و چون A دارای مشتق فریشه است پس $\|K^{n-1}Ar_n\|$ $U(x_0)$ همسایگی از x_0 کراندار است. بنابراین

$$\|K^n r_{n+1}\|^2 \le \|K^n r_n\|^2 - 2ck_n\|K^n r_n\|^2 + O(r).$$

با قراردادن $\lambda_n = \|K^n r_n\|^2$ و $\phi(t) = t$ در لم ۱۴.۱.۳

$$n \longrightarrow \infty \qquad \|K^n r_n\| \longrightarrow 0$$

چون K عملگر معکوس کراندار است، پس

$$n \longrightarrow \infty, r_n \longrightarrow 0,$$

در نتیجه

$$Ax_n \longrightarrow y.$$

بنابراین $x_n \longrightarrow A^{-1}y$ که جواب یکتای معادله $Ax = y$ در $U(x_0)$ است.

□

قضیه ۱۶.۱.۳. فرض کنیم A عملگر $K-$ مثبت معین مجانبی در $U(x_\circ)$ همسایگی $x_\circ$ از فضای باناخ یکنواخت هموار E باشد. دنباله ی تکراری $\{x_n\}$ به صورت زیر تولید شود

$$x_\circ \in U(x_\circ)$$

$$x_{n+1} = x_n + r_n \qquad n \geq \circ$$

$$r_n = K^{-1}y - K^{-1}Ax_n$$

$$y \in D(A)$$

همگرا قوی به جواب یکتای معادله $Ax = y$ است.

برهان. بنابر خطی بودنA و K

$$K(r_{n+1}) = K(K^{-1}y - K^{-1}A(x_{n+1})) = K(K^{-1}y - K^{-1}A(x_n + r_n)) = Kr_n - Ar_n$$

$$\|K^n r_{n+1}\|^2 = \|K^n r_n - K^{n-1}Ar_n\|^2$$

$$\leq \|K^n r_n\|^2 - 2\langle K^{n-1}Ar_n, j(K^n r_n)\rangle$$

$$+ max\{\|K^n r_n\|, 1\}\|K^{n-1}Ar_n\|b(\|K^{n-1}Ar_n\|)$$

$$\leq \|K^n r_n\|^2 - 2ck_n\|K^n r_n\|^2 \quad \text{(تعریف عملگرK-pd مجانبی)}$$

$$+ max\{\|K^n r_n\|, 1\}\|K^{n-1}Ar_n\|b(\|K^{n-1}Ar_n\|)$$

$$\leq \|K^n r_n\|^2 - 2ck_n\|K^n r_n\|^2$$

$$+ (\|K^n r_n + 1)\|K^{n-1}Ar_n\|b(\|K^{n-1}Ar_n\|).$$

چون A دارای مشتق فریشه است با توجه به خاصیت تابع b در لم ۵.۲.۲، مقدار $\|K^{n-1}Ar_n\|b(\|K^{n-1}Ar_n\|)$ در همسایگی $U(x_\circ)$ قرار می گیرد. c وجود دارد که

$$\|K^{n-1}Ar_n\|b(\|K^{n-1}Ar_n\|) \leq ck_n\|K^n r_n\|^2 \qquad (۴.۳)$$

از نامساوی (۴.۳) نتیجه می گیریم دنباله $\|K^n r_n\|_{n=\circ}^{\infty}$ به طور یکنواخت کاهشی است، بنابراین همگرا به عدد حقیقی کوچک $\delta \geq \circ$ است. درنتیجه

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\|K^n r_n\| = \circ$$

چون K به طور پیوسته $D(A)$-معکوس پذیر است نتیجه می شود که $r_n \longrightarrow \circ$. چون A معکوس کراندار دارد، پس $x_n \longrightarrow A^{-1}y$ که جواب یکتای معادله $Ax = y \in U(x_\circ)$ است.

□

فرض کنیم $E = L_q, (q > 2)$ باشد. حل معادله $Ax = f$ به روش تکراری را با دو عملگر زیر بررسی می‌کنیم

۱) A عملگری خطی و $K-pd$ روی E باشد.

۲) A عملگر K-افزاینده قوی و لیپ‌شیتس روی E باشد.

تعریف ۱۷.۱.۳. فرض کنیم E فضای باناخ باشد. در این صورت عملگر $T : E \longrightarrow E$ را افزاینده گوییم، هرگاه برای هر $x, y \in E$ و $j \in J(x-y)$

$$< Tx - Ty, j > \geq \circ.$$

تعریف ۱۸.۱.۳. فرض کنیم E فضای باناخ باشد. عملگر $T : E \longrightarrow E$ را افزاینده قوی گوییم، هرگاه $\alpha > \circ$ موجود باشد که برای هر $x, y \in E$

$$< Tx - Ty, j > \geq \alpha\|x - y\|^2. \qquad (۵.۳)$$

در تعریف ۱۸.۱.۳ اگر T عملگری خطی باشد نامساوی (۵.۳) برای هر $x \in D(T)$ به‌صورت زیر بیان می کنیم

$$< Tx, j > \geq \alpha\|x\|^2.$$

در این صورت T عملگر مثبت معین است.

لم ۱۹.۱.۳. فرض کنیم $E = L_q, (q > 2)$ و $j : E \longrightarrow E^*$ نگاشت دوگان نرمال تک مقداری باشد، در این صورت برای هر $x, y \in E$

$$\|x + y\|^2 \leq (q - 1)\|y\|^2 + \|x\|^2 + 2 < y, j(x) > .$$

برهان. به [۱۱] رجوع شود

□

تعریف ۲۰.۱.۳. فرض کنیم E فضای باناخ باشد عملگر غیرخطی $A:D(A)\subseteq E\longrightarrow E$ را K-افزاینده قوی گوییم، هرگاه عملگر بسته و به‌طور پیوسته $D(A)$-معکوس‌پذیر K موجود و $\alpha>۰$ باشد که برای هر $x,y\in E$

$$< Ax-Ay, j(Kx-Ky) >\geq \alpha\|Kx-Ky\|^{۲}. \qquad (۶.۳)$$

در تعریف ۲۰.۱.۳ اگر A عملگری خطی باشد نامساوی (۶.۳) به‌صورت زیر ساده می‌شود

$$< Ax, j(Kx) >\geq \alpha\|Kx\|^{۲}. \quad \forall x\in D(A)$$

که در این صورت A عملگر K-مثبت معین است.

تعریف ۲۱.۱.۳. گوییم عملگر T در شرط لیپ شیتس صدق می کند اگر ثابت مثبتی مانند $m>۰$ وجود داشته باشد که برای هر $x,y\in D(T)$

$$\|Tx-Ty\|\leq m\|x-y\|.$$

تعریف ۲۲.۱.۳. عملگر T را به‌طورپیوسته معکوس‌پذیر لیپ‌شیتس گوییم، هرگاه $\beta>۰$ موجود باشد که برای هر $x,y\in D(T)$

$$\|Tx-Ty\|\geq \beta\|x-y\|.$$

قضیه ۲۳.۱.۳. فرض کنیم $E=L_q$ و $A:D(A)\subseteq E\longrightarrow E$ عملگر خطی $K-pd$ باشد دنباله تکراری $\{Kx_n\}$ که به‌صورت زیر تولید می‌شود، همگرای به Kp است که p جواب یکتای معادله $Ax=f$ می‌باشد.

$$Kx_{n+۱}=Kx_n+t_nK\gamma_n. \quad n\geq ۰$$

$$t_n=\frac{< BK\gamma_n, j(K\gamma_n) >}{(q-۱)\|BK\gamma_n\|^{۲}}. \quad \text{و} \quad B=AK^{-۱}$$

$$\lim_{n\to\infty} t_n=۰$$

$$K\gamma_n=f-BKx_n.$$

برهان. بنابر خطی بودن A و K برای $n \geq ۰$

$$\begin{aligned} K\gamma_{n+۱} &= f - BKx_{n+۱} = f - B(Kx_n + t_n K\gamma_n) \\ &= f - BKx_n - BKx_{n+۱} \\ &= K\gamma_n - t_n BK\gamma_n. \end{aligned}$$

از لم ۱۹.۱.۳

$$\begin{aligned} \|K\gamma_{n+۱}\|^۲ &= \|K\gamma_n - t_n BK\gamma_n\|^۲ \\ &\leq \|K\gamma_n\|^۲ - ۲t_n < BK\gamma_n, j(K\gamma_n) > +(q-۱)t_n^۲\|BK\gamma_n\|^۲ \\ &= \|K\gamma_n\|^۲ - ۲\frac{< BK\gamma_n, j(K\gamma_n) >^۲}{(q-۱)\|BK\gamma_n\|^۲} \\ &+ \frac{< BK\gamma_n, j(K\gamma_n) >^۲}{(q-۱)\|BK\gamma_n\|^۲} \qquad (\text{تعریف}\ t_n) \\ &= \|K\gamma_n\|^۲ - \frac{< BK\gamma_n, j(K\gamma_n) >^۲}{(q-۱)\|BK\gamma_n\|^۲} \\ &\leq \|K\gamma_n\|^۲. \end{aligned} \tag{۷.۳}$$

بنابراین دنباله $\{K\gamma_n\}$ به‌طور یکنواخت کاهش (دنباله کاهشی است) می یابد، پس همگرا به عدد حقیقی $\delta \geq ۰$ است. بنابر فرض $\delta = ۰$ است.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{< BK\gamma_n, j(K\gamma_n) >^۲}{(q-۱)\|BK\gamma_n\|^۲} = ۰.$$

اما

$$\begin{aligned} \frac{< BK\gamma_n, j(K\gamma_n) >^۲}{(q-۱)\|BK\gamma_n\|^۲} &= \frac{< A\gamma_n, j(K\gamma_n) >^۲}{(q-۱)\|A\gamma_n\|^۲} \\ &= \frac{\alpha^۲\|K\gamma_n\|^۴}{(q-۱)\theta^۲\|K\gamma_n\|^۲} \qquad \text{تعریف عملگر (K-pd)} \\ &= \frac{\alpha^۲}{(q-۱)\theta^۲}\|K\gamma_n\|^۲. \end{aligned} \tag{۸.۳}$$

پس $n \longrightarrow \infty$, $K\gamma_n \longrightarrow 0$. در نتیجه

$$0 = \lim_{n\to\infty}(f - BKx_n) = f - BKp$$

$$= f - Ap \qquad (B = AK^{-1}).$$

در نتیجه $f = Ap = BKp$. بنابراین

$$0 = \lim_{n\to\infty}\|f - BKx_n\| = \lim_{n\to\infty}\|BK(p - x_n)\|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\|A(p - x_n)\|$$

$$\geq \alpha \lim_{n\to\infty}\|Kp - Kx_n\|.$$

برای $n \longrightarrow \infty$, $Kx_n \longrightarrow Kp$. نتیجه حاصل است. □

قضیه ۲۴.۱.۳. فرض کنیم $E = L_q(q > 2)$ و $A : D(A) \subseteq E \longrightarrow E$ عملگر K-افزاینده قوی $(\alpha > 0)$ و لیپ‌شیتس $(L \geq 1)$ باشد. $x_0 \in D(A)$، در این صورت دنباله تکراری $\{Kx_n\}$ که به‌صورت زیر تولید می‌شود، همگرا قوی به Kp است که p جواب یکتای معادله $Ax = f$ می باشد.

$$Kx_{n+1} = Kx_n + \lambda K\gamma_n$$

$$\lambda = \frac{\alpha}{[(q-1)L^2\beta^2]}$$

$$K\gamma_n = f - GKx_n \quad \text{و} \quad G = AK^{-1}.$$

برهان.

$$
\begin{aligned}
K\gamma_{n+۱} = f - GKx_{n+۱} &= f - G(Kx_n + \lambda K\gamma_n)\\
&= f - GKx_n - \lambda GK\gamma_n\\
&= K\gamma_n - GKx_{n+۱}\\
&= K\gamma_n - (GKx_{n+۱} - GKx_n).
\end{aligned}
$$

بنابر لم ۱۹.۱.۳

$$\|K\gamma_{n+1}\|^2 = \|K\gamma_n - (GKx_{n+1} - GKx_n)\|^2$$

$$\le \|K\gamma_n\|^2 - 2 < GKx_{n+1} - GKx_n, j(K\gamma_n) >$$

$$+ (q-1)\|GKx_{n+1} - GKx_n\|^2$$

$$\le \|K\gamma_n\|^2 - 2 < Ax_{n+1} - Ax_n, j(K\gamma_n) >$$

$$+ (q-1)\|Ax_{n+1} - Ax_n\|^2 \quad (\text{تعریف } G)$$

$$\le \|K\gamma_n\|^2 - 2\lambda < Ax_{n+1} - Ax_n, j(\lambda K\gamma_n) >$$

$$+ (q-1)L^2\|x_{n+1} - x_n\|^2 \quad (\text{تعریف لیپشتز})$$

$$\le \|K\gamma_n\|^2 - 2\lambda < Ax_{n+1} - Ax_n, j(\lambda K\gamma_n) >$$

$$+ \beta^2 L^2 (q-1)\|Kx_{n+1} - Kx_n\|^2$$

$$\le \|K\gamma_n\|^2 - 2\alpha\lambda\|K\gamma_n\|^2 + \beta^2 L^2 (q-1)\lambda^2\|K\gamma_n\|^2$$

$$= (1 - 2\alpha\lambda + \beta^2 L^2 (q-1)\lambda^2)\|K\gamma_n\|^2.$$

با توجه به اینکه $\lambda = \dfrac{\alpha}{\beta^2 L^2 (q-1)}$ است

$$\|K\gamma_{n+1}\|^2 \le (1 - \frac{\alpha^2}{\beta^2 L^2 (q-1)})\|K\gamma_n\|^2.$$

با قرار دادن $\mu = (1 - \dfrac{\alpha^2}{\beta^2 L^2 (q-1)})$

$$\|K\gamma_{n+1}\| \le \mu^{\frac{n}{2}}\|K\gamma_n\|.$$

برای $n=0$

$$\|K\gamma_1\| \le \|K\gamma_0\|.$$

برای $n=1$

$$\|K\gamma_2\| \le \mu^{\frac{1}{2}}\|K\gamma_1\| \le \mu^{\frac{1}{2}}\|K\gamma_0\|.$$

بنابر استقرا داریم

$$\|K\gamma_n\| \le \mu^{\frac{n}{2}}\|K\gamma_0\|.$$

جون $\mu^{\frac{n}{2}} \le 1$ برای $n \longrightarrow \infty$ ، $K\gamma_n \longrightarrow 0$. در نتیجه

$$0 = \lim_{n\to\infty} K\gamma_n = \lim_{n\to\infty}(f - GKx_n)$$

$$= f - GKq$$

$$= f - Aq.$$

پس

$$0 = \lim_{n\to\infty}\|K\gamma_n\| = \lim_{n\to\infty}\|f - GKx_n\|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\|Aq - Ax_n\|$$

$$\ge \alpha \lim_{n\to\infty}\|Kx_n - Kq\|.$$

نتیجه حاصل است.

□

نتیجه ۲۵.۱.۳. فرض کنیم $E = H$ فضای هیلبرت A, K, G دنباله $\{Kx_n\}$ تعریف شده در قضیه ۲۴.۱.۳ باشد، همچنین $\lambda = \alpha L^{-2}\beta^{-2}$ قرار دهیم در این صورت حکم قضیه ۲۴.۱.۳ برقرار است.

برهان. با قرار دادن $q = 2$ در قضیه ۲۴.۱.۳ نتیجه حاصل است.

□

۲.۳ بهترین تقریب و حل معادله $Ax=f$

تعریف ۱.۲.۳. فرض کنیم E فضای باناخ و K زیر مجموعه غیر تهی از E باشد. نگاشت $P_K : E \longrightarrow 2^K$ را نگاشت بهترین تقریب می‌نامیم.

$$P_K x = \{x^* \in K : \quad \|x - x^*\| = d(x, K)\}.$$

لم ۲.۲.۳. فرض کنیم K زیر مجموعه غیر تهی از فضای باناخ E و P_K نگاشت بهترین تقریب روی E باشد. برای هر $x, y \in E$

$$\|P_K x - P_K y\| \leq \|x - y\|.$$

برهان. به [۶] رجوع شود. □

قضیه ۳.۲.۳. فرض کنیم E فضای باناخ و K زیر مجموعه غیر تهی و چبیشف از E باشد و $P_K : K \longrightarrow E$ نگاشت بهترین تقریب روی E است. در این صورت برای $x \in E$ دلخواه و $x^* \in K$

$$x \in E, x^* \in K, \quad \|P_K x - P_K x^*\| \leq \|x - x^*\|.$$

برهان. رجوع شود به[۶] □

قضیه ۴.۲.۳. E فضای باناخ به‌طور یکنواخت محدب است اگر فقط اگر برای $p > 1$ تابع پیوسته و کاهشی $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ و $\phi(0) = 0$ موجود باشد به‌طوری‌که برای هر$x, y \in E$

$$\|x + y\|^p \geq \|x\|^p + p < y, j_p(x) > + \phi(\|y\|).$$

برهان. به[۱۸] رجوع شود. □

نتیجه ۵.۲.۳. فرض کنیم E فضای باناخ به‌طور یکنواخت محدب و K زیر مجموعه غیر تهی بسته و محدب از E باشد. در این صورت برای هر $x \in E$ دلخواه و $x^* \in K$

$$\|P_K x - P_K x^*\|^p \leq \|x - x^*\|^p - g(\|x - P_K x\|).$$

که در آن $g : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ تابع محدب، پیوسته، و کاهشی و $g(0) = 0$ است.

برهان. چون E به طور یکنواخت محدب است، بنابر قضیه ۴.۲.۳ تابع پیوسته، محدب و کاهشی $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ و $g(0) = 0$ موجود است که برای هر $x, y \in E$ دلخواه و $j_p(x) \in J_p(x)$

$$\|x + y\|^p \geq \|x\|^p + p < y, j_p(x) > + g(\|y\|). \tag{۹.۳}$$

حال با قرار دادن $x := u + v$ و $y := -v$ در نامساوی (۹.۳) برای $j_p(u + v) \in J_p(u + v)$

$$\|u\|^p \geq \|u + v\|^p - p < v, j_p(u + v) > + g(\|v\|)$$

بنابراین $\exists j_p(u + v) \in J_p(u + v)$

$$\|u + v\|^p \leq \|u\|^p + p < v, j_p(u + v) > - g(\|v\|). \tag{۱۰.۳}$$

فرض کنیم $u = x^* - x$ و $v = x - P_K x$ باشد و برای هر $j_p(x^* - P_K) \in j_p(x^* - P_K x)$

$$\|P_K x^* - P_K x\|^p = \|x^* - x + x - P_K x\|^p \quad (x^* \in K \text{بنابراین} P_K x^* = x^*)$$

$$\leq \|x - x^*\|^p + p < x - P_K x, j_p(x^* - P_K x) > -g(\|x - P_K x\|)$$

$$\leq \|x^* - x\|^p - g(\|x - P_K x\|). \quad (x^* - P_K x \perp x - P_K x)$$

نتیجه حاصل است. □

تعریف ۶.۲.۳. فرض کنیم E فضای باناخ عملگر T با دامنه$D(T)$ و برد $R(T)$ در E را شبه انقباضی قوی گوییم، هرگاه $t \geq ۱$ موجود باشد که برای هر $x, y \in D(T)$ و $r > ۰$

$$\|x - y\| \leq \|(۱ + r)(x + y) - rt(Tx - Ty)\|.$$

اگر $t = ۱$باشد، آنگاه عملگر T را انقباضی می‌نامیم.

لم ۷.۲.۳. فرض کنیم E فضای باناخ و $x, y \in E$ باشد، در این صورت برای هر $\|x\| \leq \alpha > ۰,$ $\|x + \alpha y\|$ اگر فقط اگر $f \in J_x$ موجود باشد که $< y, f >\geq ۰$.

برهان. به [۶] رجوع شود. □

لم ۸.۲.۳. فرض کنیم E فضای باناخ و K زیر مجموعه E و همچنین $U : K \longrightarrow E$ باشد، عملگر U شبه انقباضی قوی است اگر و فقط اگر $T = I - U$ عملگر افزاینده قوی باشد.

برهان. فرض کنیم U عملگر شبه انقباضی قوی باشد بنابراین $t \geq ۱$ موجود است که برای هر $x, y \in E$ و $r > ۰$

$$\|x - y\| \leq \|(۱ + r)(x - y) - rt(Ux - Uy)\|$$

$$= \|(۱ + r)(x - y) - r(tUx - tUy)\|$$

$$= \|x - y + r(x - tUx - y + tUy)\|.$$

عملگر $I - tU = I - t(I - T) = tT - (t - ۱)I$ در نظر می گیریم بنابر لم ۷.۲.۳ $j \in J(x - y)$

وجود داردکه برای هر $x, y \in K$

$$< x - tUx - y + tUy, j > \geq \circ$$

$$x < I - tU, j > -y < I - tU, j > \geq \circ$$

$$x < tT - (t-۱)I, j > -y < tT - (t-۱)I, j > \geq \circ$$

$$< tT - (t-۱)I, j > (x-y) \geq \circ$$

$$t < T, j > -(t-۱) < I, j > (x-y) \geq \circ$$

$$t < Tx - Ty, j > -(t-۱) < x-y, j > \geq \circ$$

$$t < Tx - Ty, j > \geq (t-۱) < x-y, j >$$

$$< Tx - Ty, j > \geq (۱ - \frac{۱}{t}) \|x-y\|^۲.$$

بنابراین T عملگر افزاینده قوی است.

برعکس، فرض کنیم T عملگر افزاینده قوی باشد،در این صورت $k > \circ$ موجود است که برای هر $x, y \in K$ و $j \in J(x-y)$

$$< Tx - Ty, j > \geq k \|x-y\|^۲. \quad (۱۱.۳)$$

بدون از دست دادن کلیت، فرض کنیم $\circ < k < ۱$ و $t = \frac{۱}{۱-k}$ باشد در این صورت نامساوی (۱۱.۳) به صورت زیر نوشته می‌شود

$$< Tx - Ty, j > \geq (۱ - \frac{۱}{k}) \|x-y\|^۲.$$

حال مراحل اثبات بالا را در جهت عکس انجام می‌دهیم در این صورت U عملگر شبه انقباضی قوی است. $\square$

قضیه ۹.۲.۳. فرض کنیم E فضای باناخ و K زیر مجموعه پروکسیمنال و بسته از E باشد، همچنین $T : K \longrightarrow E$ عملگر به‌طور پیوسته یکنواخت و شبه انقباضی قوی با نقطه ثابت $x^* \in K$ که $(I-T)$ روی K کراندار است که P_K نگاشت بهترین تقریب روی K باشد. دنباله‌های حقیقی $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ و $\{u_n\}, \{v_n\}$ در شرایط زیر صدق می کنند

۱) $0 \le \alpha_n, \beta_n < 1. \quad n \ge 0$

۲) $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0 = \lim_{n\to\infty} \beta_n.$

۳) $\sum_{n\ge 0} \alpha_n = \infty.$

۴) $\|v_n\| = o(\alpha_n), \quad lim_{n\to\infty}\|u_n\| = 0.$

$x_0 \in K$ دلخواه و $u_0, v_0 \in E$ ، دنباله تکراری $\{x_n\}$ که به صورت زیر تولید می‌شود همگرا قوی به x^* است.

$$x_{n+1} \in P_K z_n, \quad z_n = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T y_n + v_n. \quad n \ge 0 \tag{۱۲.۳}$$

$$y_n \in P_K w_n, \quad w_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n T x_n + u_n. \quad n \ge 0 \tag{۱۳.۳}$$

برهان. به [۶] رجوع شود. □

قضیه ۱۰.۲.۳. فرض کنیم E فضای باناخ و K زیر مجموعه پروکسمینال و بسته از E باشد. $T : E \longrightarrow K$ عملگر افزاینده قوی و پیوسته یکنواخت و معادله $Tx = f$ برای هر $f \in E$ دارای جواب یکتای $x^* \in K$ است. در این صورت برای $x_0 \in K$ ، $u_0, v_0 \in E$ دنباله تکراری $\{x_n\}$ تولیدشده به صورت زیر تولید می شود همگرا قوی به x^* است.

$$x_{n+1} \in P_K z_n, \quad z_n = x_n + \alpha_n(f - Ty_n) + v_n. \quad n \ge 0$$

$$y_n \in P_K w_n, \quad w_n = x_n + \beta_n(f - Tx_n) + u_n. \quad n \ge 0$$

برهان. به [۶] رجوع شود. □

مراجع

[1] Bai Chuanzhi. *Approximation of a solution for a K-positive definite operator equation in uniformly smooth separable Banach spaces*. J. Math. Anal. Appl. 130-141, 1999.

[2] C. E. Chidume. *Steepest descent approximations for accretive operator equations*. Nonlin. Anal. TMA. 299-311, 1996.

[3] C. E. Chidume. *An approximation method for monotone Lipschitzian operators in Hilbert spaces*. Journal of the Australian Mathematical Society. 59–63, 1986.

[4] C. E. Chidume and S. J. Aneke. *Existence, Uniqueness and Approximation of a Solution for a K-Positive Definite Operator Equation*. Appl. Anal. 285–294, 1993.

[5] C. E. Chidume and S. J. Aneke. *A local approximation method for the solution of K-positive definite operator equations*. Bulletin of the Korean Mathematical Society. 603–611, 2003.

[6] C. E. Chidume and Chika. Moore. *Best approximation and iterative solution of nonlinear equation in Banach spaces*. Department of Mathematics and Computer Science. 250-260, 1996.

[7] C. E. Chidume and Chika. Moore. *Iterative solution of equation involving K-pd operator*. Department of Mathematics and Computer Science. 324-358, 1998.

[8] C. E. Chidume and M. O. Osilike. *Approximation of a Solution for a K-Positive Definite Operator Equation*. J. Math. Anal. Appl. 1-7, 1997.

[9] C. E. Chidume and M. O. Osilike. *Approximation of a solution for a K-positive definite operator equation*. ICTP Miramare Trieste Italy. 34-50, 1994.

[10] C. Moore. *iterative approximation of the solution to a K-accretive operator equation in ceryain Banach spacs*. Department of mathimatics universti. 356-367, 1990.

[11] H. Kunxu And Z. Benxu. *Strongly Unigua Best Simuitaneous Apporximation in Uni Foroly Convex Banach Spaces*. J. Math. Anal. Appl. 78-89, 1996.

[12] T. Kato. *Nonlinear semigroups and evolution equations*. Journal of the Mathematical Society of Japan. 508–520, 1967.

[13] W. Rudin. Real Analysis. New York, 2010.

[14] S. J. Aneke. *The Solution by Iteration of a Composed K-Positive Definite Operator Equation in a Banach space*. J. Math. Anal. Appl. 267-298, 2010.

[15] W. Rudin. *Functional Analysis*. McGraw-Hill, New York, 32-45, 1973. .

[16] W. V. Petryshyn. *Direct and iterative methods for the solution of linear operator equations in Hilbert space*. Transactions of the American Mathematical Society. 136–175, 1962.

[17] W. V. Petryshyn. *On a class of K-pd and non K-pd operators and operator equations.* J. Math. Anal Appl. 1-24, 1965.

[18] Z. B. Xu and G. F. Roach. *Characteristic inequalities of uniformly convex and uniformly smooth Banach spaces*. J. Math. Anal. Appl. 189-210, 1991.

[19] Z. H. Haiyun and J. A. Yuting. *Approximation of Fixed Points of Strongly Pseudocontractive maps Without Lipschitz assumption.* J. Math. Anal. Appl. 1705-1720, 1997.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

انقباض	Contraction
باز	Open
برد	Range
بستار	Closure
به طور چگال تعریف شده	Densely Define
بیکران	Unbounded
تابع	Function
تابعی	Functional
تام	Complete
تجزیه	Decomposition
توپولوژی	Topology
چگال	Dense
حاصلضرب اسکالر	Scalar product
حاصلضرب داخلی	Inner product
حد	Limit
خطی	Linear
داخلی	Inner
قلمرو	Domain

دستگاه .... System

دنباله .... Sequence

دنباله همگرا .... Convergent sequence

دوگان .... Dually

زیر فضا .... Subspace

زیر فضای بسته .... Closed subspace

زیر مجموعه .... Subset

صحیح .... Integer

عملگر .... operator

عملگر بسته .... Closed operator

عملگر بیکران .... Unbounded operator

عملگر پیوسته .... Continuous operator

عملگر خطی .... Linear operator

عملگر کران دار .... Bounded operator

عملگر مثبت .... Positive operator

عملگر نرم .... Operator norm

فضای برداری .... Vector space

فضای ضرب داخلی .... Inner product Space

فضای متری .... Metric space

فضای نرمدار .... Normed space

فضای هیلبرت .... Hilbert space

کران دار .... Bounded

متریک .... Metric

معین .... definite

مثبت .... Positive

مختلط .... Complex

نامنفی .... Nonnegative

نرم .... Norm

نرمپذیر .... Normable

نرمدار .... Normed

نرمال .... Normal

نگاشت .... Mapping

نگاشت خطی .... Linear mapping

نمودار .... Graph

نمودار بسته .... Closed graph

نمودار یک عملگر .... Graph of an operator

وارون، معکوس .... Inverse

وارون پذیر، معکوس پذیر .... Invertible

همگرا .... Convergent

همگرایی .... Convergency

همگرایی دنباله .... Convergence of a sequence

همگرایی قوی .... Strong convergence

یکتا .... Unique

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Adjoint	الحاقی
Adjoint operator	عملگر الحاقی
Ball	گوی
Bijective mapping	نگاشت دوسوی
Bounded	کران دار
Bounded operator	عملگر کران دار
Closed graph	نمودار بسته
Closed operator	عملگر بسته
Closed subspace	زیر فضای بسته
Closure	بستار
Complete	تام
Complex conjugate	مزدوج مختلط
Continuous operator	عملگر پیوسته
Contraction	انقباض
Convergent	همگرا
Convergency	همگرایی
Convergence of a Sequence	همگرایی دنباله
Convergent sequence	دنباله همگرا

چگال .... Dense

به طور چگال تعریف شده .... Densely define

عملگر به طور چگال تعریف شده .... Densely defined operator

دوگان .... Dually

توسیع .... Extension

تابع .... Function

تابعی .... Functional

نمودار .... Graph

نمودار یک عملگر .... Graph of an operator

هرمیتی .... Hermitian

فضای هیلبرت .... Hilbert space

نامتناهی .... Infinite

نامتناهی البعد .... Infinite dimensional

دنباله نامتناهی .... Infinite sequence

داخلی .... Inner

حاصلضرب داخلی .... Inner product

فضای ضرب داخلی .... Inner product space

صحیح .... Integer

وارون، معکوس .... Inverse

وارون پذیر، معکوس پذیر .... Invertible

حد .... Limit

خطی .... Linear

نگاشت خطی .... Linear mapping

عملگر خطی .... Linear operator

نگاشت .... Mapping

متریک .... Metric

Metric space .... فضای متری

Nonnegative .... نامنفی

Normable .... نرم پذیر

Norm .... نرم

Normed .... نرمدار

Normed space .... فضای نرمدار

Normal .... نرمال

Norm topology .... توپولوژی نرم

Open .... باز

Operator .... عملگر

Operator norm .... عملگر نرم

Orthogonal .... متعامد

Partial .... جزئی

Point .... نقطه

Positive .... مثبت

Positive operator .... عملگر مثبت

Projection .... تصویر

Pure contraction .... انقباض سره

Range .... برد

Scalar .... اسکالر

Scalar product .... حاصلضرب اسکالر

Sequence .... دنباله

Strong metric .... متریک قوی

Strong convergence .... همگرایی قوی

Subset .... زیر مجموعه

Subspace .... زیر فضا

Aabstract

In this thesis, we discuss the equation $Ax = y$ on the Banach space with iterative method, where A is K-positive definite operator and k is a closed operator and continuous $D(A)$-inverse. Then we extend K-positive definite operator to Fréchet operator and we investigate local convergence towards unique equation $Ax = y$ on Banach space. Also we introduce K-strong accretive that it is the nonlinear case of K-positive definite operator and we express results of the best approximation.

keywords: K-positive definite operator, Banach space, Convergence, Uniformly smooth Banach space, Best approximation.

Shahrood University Of Technology

Shahrood University Of Technology
Faculty Of Mathematical Sciences

Dissertation Submitted in Partial
Fulfillment of The Requirements For The
Degree of Master of Science in

Pure Mathematics

Iterative Solution Of Equation Invoting K-p.d. Operator

Supervisor

Dr.M. Iranmanesh

by

Zohre Kazemyian

2014