



دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی  
گروه ریاضی کاربردی

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته  
ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

عنوان

# حل مسایل مقدار اولیه و مقدار مرزی با استفاده از موجک‌های لژاندر

استاد راهنما

دکتر مهدی قوتمند

استاد مشاور

دکتر علیرضا ناظمی

دانشجو

مریم رحمتی

۱۳۹۲

تقدیم بہ ہمہ می کسانی کہ

طالب آموختند.

# سپاس گزارمی...

سپاس پروردگاری را سزااست که کسوت هستی را بر اندام موزون آفرینش بپوشانید و تجلیات قدرتش را در آثار طبیعت نمایان گردانید.

در آغاز بر خود واجب می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر مهدی قوتمند، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که انجام و تدوین این پایان نامه را از آغاز تا پایان مرهون راهنمایی‌ها و الطاف بی‌دریغ این استاد گرانقدر می‌دانم.

هم‌چنین شایسته می‌بینم از جناب آقای دکتر علیرضا ناظمی که با قبول مسئولیت استاد مشاور این پایان نامه افتخار بزرگی نصیب حقیر نمودند، سپاسگزاری نمایم.

همچنین لازم می‌دانم از تمام اساتیدی که در دوران تحصیلم از مساعدت‌های بی‌دریغ آن‌ها بهره بردم، کمال قدردانی را داشته باشم.

در پایان، از خانواده عزیز و مهربانم که تمام موفقیت‌هایم را مرهون محبت‌ها و دلگرمی‌های آن‌ها هستم، قدردانی می‌نمایم.

مریم رحمتی  
۱۳۹۲

## تعمدنامه

اینجانب مریم رحمتی دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی دانشکده علوم ریاضی دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان حل مسایل مقدار اولیه و مقدار مرزی با استفاده از موجک‌های لژاندر، تحت راهنمایی دکتر مهدی قوتمند متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تاکنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه شاهرود “ یا “ Shahrood University “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

مریم رحمتی  
۱۳۹۲

## مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

## چکیده

در این پایان نامه، ابتدا روش های طیفی و آنالیز فوریه معرفی می شوند و ویژگی های آن ها مورد بررسی قرار می گیرند. سپس به معرفی چند جمله ای های انتقال یافته لژاندر و ویژگی های آن ها پرداخته می شود. در ادامه، موجک لژاندر معرفی و ماتریس عملگر مشتق این موجک تعیین می شود. همچنین کاربرد ماتریس عملگر مشتق برای حل مسایل مقدار اولیه و مقدار مرزی توضیح داده می شود. برای بررسی کارایی این روش، معادلات دیفرانسیل خطی و غیرخطی مختلفی به صورت عددی حل می شوند. در انتها، یک روش عددی برای حل معادلات  $Lane - Emden$ ، که به صورت مسایل مقدار اولیه تکین ارایه شده است، به کار می بریم. این کار را با استفاده از عملگر انتگرال و تبدیل معادلات  $Lane - Emden$  به معادلات انتگرال و به کارگیری تقریب موجک لژاندر انجام می دهیم. همچنین مثال های گویا و روشی از کاربرد این روش ارایه می کنیم.

واژگان کلیدی: موجک های لژاندر؛ چند جمله ای های لژاندر انتقال یافته؛  
ماتریس عملگر مشتق موجک لژاندر؛ معادلات Lane-Emden؛ معادلات انتگرال؛ انتگرال گوسی

# فهرست مطالب

۵	تعاریف مقدماتی و آنالیز فوریه	۱
۵	۱.۱ مقدماتی از آنالیز حقیقی	
۸	۲.۱ معادلات دیفرانسیل معمولی	
۹	۳.۱ دستگاه معادلات دیفرانسیل	
۱۰	۴.۱ مقدمه‌ای از روش‌های طیفی	
۱۰	۵.۱ آنالیز فوریه	
۱۲	۱.۵.۱ تعریف سری‌های فوریه	
۱۴	۲.۵.۱ نماد گذاری مختلط برای سری‌های فوریه	
۱۷	۳.۵.۱ پدیده گیبس	
۲۰	۶.۱ دستگاه چند جمله‌ای‌های متعامد	
۲۱	۷.۱ توابع لژاندر و کاربردهای آن‌ها	
۲۳	۱.۷.۱ فرمول‌های بازگشتی برای چند جمله‌ای‌های لژاندر	
۲۴	۲.۷.۱ تعامد چند جمله‌ای‌های لژاندر	
۲۶	۸.۱ چند جمله‌ای‌های انتقال یافته‌ی لژاندر	
۲۷	آنالیز چند ریزه‌ساز و نظریه موجک‌ها	۲
۲۷	۱.۲ اشاره‌ای به نقاط ضعف	
۲۸	۲.۲ تاریخچه‌ای کوتاه از موجک‌ها	
۲۹	۳.۲ کاربردهایی برای موجک‌ها	
۳۱	۴.۲ موجک هار	
۳۳	۵.۲ آنالیز چند ریزه‌ساز	
۳۷	۶.۲ پایه موجکی	
۴۰	۷.۲ موجک لژاندر	
۴۳	موجک‌های لژاندر و ماتریس عملگر مشتق	۳
۴۳	۱.۳ چند جمله‌ای‌های لژاندر و ویژگی‌های آن‌ها	
۴۵	۱.۱.۳ موجک‌های لژاندر و ویژگی‌های آن‌ها	

۴۷	.....	ماتریس عملگر مشتق و حاصلضرب ماتریس عملیاتی	۲.۳
۵۴	.....	کاربردهایی از ماتریس عملگر مشتق	۳.۳
۵۴	.....	معادلات دیفرانسیل خطی	۱.۳.۳
۵۸	.....	معادلات دیفرانسیل غیر خطی	۲.۳.۳
۶۳		روش موجک‌های لژاندر برای حل معادلات دیفرانسیل از نوع <i>Lane – Emden</i>	۴
۶۳	.....	معادلات <i>Lane – Emden</i>	۱.۴
۶۵	.....	درون‌یابی از نقاط متمایز فضا	۲.۴
۶۶	.....	انتگرال‌گیری گوسی	۳.۴
۶۸	.....	نقاط هم‌محل	۴.۴
۶۹	.....	ریشه معادلات <i>Lane – Emden</i>	۵.۴
۷۳	.....	حل معادلات <i>Lane – Emden</i> با استفاده از ماتریس عملگر مشتق	۶.۴
۷۸		نمایش کدهای <i>Maple</i>	آ
۷۸	.....	کد مثال ۲ فصل ۳	۱.آ
۸۳	.....	کد مثال ۱ فصل ۴	۲.آ
۹۰		مراجع	
۹۲		واژه‌نامه فارسی به انگلیسی	
۹۳		واژه‌نامه انگلیسی به فارسی	
۹۴		نمایه	

# پیش‌گفتار

به دست آوردن جواب‌های کلاسیک معادلات دیفرانسیل معمولی و معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی همیشه امکان پذیر نبوده و در بسیاری از موارد تقریباً غیر ممکن است. بنابراین برای حل این دسته از معادلات باید از روش‌های تقریبی استفاده کرد. روش‌های تقریبی که برای حل معادلات دیفرانسیل به کار می‌روند معمولاً به دو دسته تقسیم می‌شوند. دسته اول روش‌های موضعی<sup>۱</sup> و روش دوم روش‌های فراگیر<sup>۲</sup> هستند. در روش‌های موضعی ابتدا دامنه تعریف مساله به تعداد متناهی زیر دامنه تقسیم می‌شود، سپس در هر زیر دامنه جواب مساله توسط توابع پایه‌ای مناسب تقریب زده می‌شود. روش تفاضلات متناهی<sup>۳</sup> و روش عناصر متناهی<sup>۴</sup> از جمله مهمترین و پرکاربردترین روش‌های موضعی هستند. به عنوان مثال برای حل مسایلی که دامنه پیچیده‌ای دارند روش تفاضلات متناهی دارای کارایی و دقت خوبی است. اما روش‌های فراگیر برای حل عددی مسایل، جواب مسایل را در سراسر دامنه به صورت مجموعی از توابع پایه‌ای مناسب تقریب می‌زنند. روش‌های فراگیر معمولاً برای حل مسایلی به کار می‌روند که دارای ساختار و شکل دامنه ساده‌ای هستند و به دقت بیشتری نیاز دارند.

یکی از مهمترین و موفق‌ترین روش‌های فراگیر برای حل معادلات تابعی به ویژه معادلات دیفرانسیل معمولی و معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی روش‌های طیفی<sup>۵</sup> هستند. سری فوریه که برای نمایش توابع متناوب توسط ژوزف فوریه<sup>۶</sup> در سال ۱۸۰۷ معرفی شد نقطه‌ی شروعی برای استفاده از روش‌های طیفی بود. کاربرد این روش برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی نیز به زمان لانکوزوس<sup>۷</sup> بر می‌گردد. اگر معادله تابعی به صورت زیر تعریف شود:

$$Lu = f,$$

که در آن  $L : X \rightarrow Y$  یک عملگر بین فضاهاى تابعی  $X$  و  $Y$ ،  $u$  تابع مجهول و  $f$  تابعی معلوم است. آنگاه در روش‌های طیفی تابع جواب به صورت یک سری از توابع پایه‌ای در سراسر دامنه تعریف مساله

---

<sup>۱</sup>Local methods

<sup>۲</sup>Global methods

<sup>۳</sup>Finite differences

<sup>۴</sup>Finite elements

<sup>۵</sup>Spectral methods

<sup>۶</sup>Joseph Fourier

<sup>۷</sup>Lanczos



به صورت زیر تقریب زده می‌شود

$$u(x) \simeq \sum_{n=0}^N a_n \varphi_n(x),$$

که در آن  $\varphi_n(x)$  ها توابع پایه‌ای هستند که با توجه به تناوبی بودن یا نبودن مساله مورد نظر می‌توانند توابع مثلثاتی یا چندجمله‌ای‌های متعامد لژاندر<sup>۸</sup> یا چبیشف<sup>۹</sup> باشند و  $a_n$  ها ضرایب مجهول می‌باشند که باید با استفاده از شرایط مساله و توابع پایه‌ای محاسبه شوند. در روش‌های طیفی انتخاب توابع پایه‌ای<sup>۱۰</sup> و توابع آزمون<sup>۱۱</sup>، نقش اساسی دارد. توابع پایه به عنوان توابع تقریب در بسط جواب مساله به کار می‌روند و توابع آزمون برای تضمین اینکه سری به دست آمده برای تقریب تابع جواب، با حداکثر دقت ممکن در معادله صدق کند، مورد استفاده قرار می‌گیرند. انتخاب توابع آزمون روش‌های طیفی را از همدیگر متمایز می‌کند و با توجه به نوع انتخاب این توابع، سه دسته روش طیفی گالرکین<sup>۱۲</sup>، هم‌محلی<sup>۱۳</sup> و تاو<sup>۱۴</sup> برای تقریب جواب معادلات تابعی مورد استفاده قرار می‌گیرند. در روش هم‌محلی، توابع آزمون از جنس توابع دلتای دیراک<sup>۱۵</sup> هستند در حالی که در روش تاو و گالرکین، توابع آزمون از جنس توابع پایه هستند. در روش طیفی اگر توابع پایه‌ای به طور مناسب انتخاب شوند، این روش‌ها دقت بسیار خوبی در تقریب توابع خواهند داشت.

استفاده از سری فوریه و توابع پایه‌ای مثلثاتی برای تقریب توابع متناوب بی‌نهایت بار هموار، دقت بسیار خوبی را نتیجه می‌دهد. برای تقریب توابع غیر متناوب و انتگرال‌پذیر از چندجمله‌ای‌های متعامد لژاندر و چبیشف در بازه  $[-1, 1]$  به عنوان توابع پایه‌ای استفاده می‌شود. که این چندجمله‌ای‌ها معروفترین پایه‌های چندجمله‌ای‌های متعامد در روش‌های طیفی هستند. برای استفاده از این چندجمله‌ای‌ها در بازه  $[0, 1]$ ، می‌توان با یک تغییر متغیر، چندجمله‌ای‌های انتقال یافته لژاندر و چبیشف را به دست آورد. در حل معادلات تابعی با استفاده از روش‌های طیفی، استفاده از ماتریس‌های عملگر، بسیار مفید و کارآمد است. فرض کنید  $\Phi(t) = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N]$  یک مجموعه از پایه‌ها باشد که برای تقریب تابع  $u(x)$  به کار رفته‌اند و  $L$  عملگری در معادله تابعی که قبلاً ذکر شد باشد. در این صورت ماتریس عملگر  $M$  برای این مجموعه توابع پایه‌ای و عملگر  $L$  به صورت زیر تعریف می‌شود

$$L\Phi(x) = M\Phi(x),$$

که در آن ماتریس عملگر  $M$  با توجه به توابع پایه‌ای و نوع عملگر  $L$  قابل محاسبه است. با کمک ماتریس‌های عملگر و روش‌های طیفی می‌توان عملگرهای موجود در معادلات تابعی را حذف و این معادلات را به یک دستگاه معادلات بر حسب ضرایب مجهول بسط تقریب تابع جواب تبدیل کرد.

<sup>۸</sup>Legendre orthogonal polynomials

<sup>۹</sup>Chebyshev orthogonal polynomials

<sup>۱۰</sup>Trial functions

<sup>۱۱</sup>Test functions

<sup>۱۲</sup>Galerkin

<sup>۱۳</sup>Collocation

<sup>۱۴</sup>Tau

<sup>۱۵</sup> Dirac delta function

با وجود تمام ویژگی‌های بسیار خوب روش‌های طیفی، این روش‌ها دارای نقاط ضعفی نیز هستند. از جمله این نقاط ضعف می‌توان به سراسری بودن توابع پایه‌ای در این روش‌ها اشاره کرد که باعث می‌شود تحلیل خوبی از رفتارهای موضعی توابع مورد نظر ارایه نشود. همچنین در تقریب معادلات تابعی که یکی از توابع جواب یا توابع موجود در معادله تحلیلی نباشند دقت مطلوب، حاصل نخواهد شد.

با کمک آنالیز چند ریزه‌ساز<sup>۱۶</sup> و پایه‌های موجک می‌توان برخی از مشکلات و نقاط ضعف روش‌های طیفی را مرتفع ساخت. در واقع بر خلاف پایه‌ها در روش طیفی، موجک‌ها دارای ویژگی منحصر به فردی هستند که آن‌ها را قادر به تقریب و نمایش رفتارهای موضعی توابع می‌نمایند. همچنین پایه‌های موجک با توجه به ساختاری که دارند می‌توانند رفتارهای تکین توابع را به خوبی نمایش دهند. در سال ۱۹۰۹ آلفرد هار<sup>۱۷</sup> اولین کسی بود که به طور غیر مستقیم به مفهوم موجک‌ها اشاره کرد، در اصل تاریخچه موجک‌ها به دهه‌ی ۱۹۸۰ میلادی باز می‌گردد. برای اولین بار در سال ۱۹۸۲ جین مورله<sup>۱۸</sup>، ژئوفیزیکدان فرانسوی، مفهوم "موجک" را که به معنی موج کوچک است معرفی کرد و مطالعاتی را تحت عنوان تبدیل موجک به عنوان ابزاری جدید برای تحلیل سیگنال‌های مرتعش انجام داد. هم‌چنین پس از مدتی یک فرانسوی به نام الکس گروسمن<sup>۱۹</sup> که محقق فیزیک نظری بود، تحقیقاتی را برای یافتن فرمول وارون تبدیل موجک انجام داد. و در سال ۱۹۸۴، آقایان مورله و گروسمن مطالعات گسترده‌ای را برای تبدیلات موجک‌های پیوسته و کاربردهای گوناگون آن انجام دادند.

در سال ۱۹۸۵، وس میر<sup>۲۰</sup> با استفاده از عملگرهای کالدرن-زیگموند<sup>۲۱</sup> و قضیه لیتلوود-پالی<sup>۲۲</sup>، توانست اساس ریاضی قضیه موجک‌ها را بنا کند. در طول سال‌های ۸۶-۱۹۸۵ همکاری میر و لماری<sup>۲۳</sup> منجر به ساختاری از پایه‌های موجک متعامد هموار روی فضاها  $R$  و  $R^n$  شد.

در سال ۱۹۸۹، میر و مالت<sup>۲۴</sup> با استفاده از پایه‌های موجک متعامد توانستند مفهوم آنالیز چندریزه‌ساز را برای ساختار موجک‌ها معرفی کنند. هم‌چنین مالت، تجزیه موجک و الگوریتم‌های ساختاری را با به کارگیری آنالیز چندریزه‌ساز ایجاد کرد. به دنبال آن، باتله<sup>۲۵</sup> و لماری به طور مستقل ساختاری از موجک‌های متعامد اسپلاین را با نزول نمایی پیشنهاد کردند.

هم‌چنین در سال ۱۹۸۸، با الهام از کار میر، دابشی<sup>۲۶</sup> توانست با ایجاد خانواده‌ای از موجک‌های متعامد با محمل فشرده، کمک قابل توجه‌ای به قضیه موجک‌ها کند.

در سمیناری که در تابستان ۱۹۸۹ در دانشگاه کایزرزلاترن آلمان<sup>۲۷</sup> برگزار شد، میر و ویکرهازر<sup>۲۸</sup> مفهومی

<sup>۱۶</sup>Multiresolution analysis

<sup>۱۷</sup>Alfred Haar

<sup>۱۸</sup>Jean Morlet

<sup>۱۹</sup>Alex Grossmann

<sup>۲۰</sup>Yves Meyer

<sup>۲۱</sup>Calderon-Zygmund

<sup>۲۲</sup>Littlewood-Paley

<sup>۲۳</sup>Lemarie

<sup>۲۴</sup>Mallet

<sup>۲۵</sup>Battle

<sup>۲۶</sup>Daubechies

<sup>۲۷</sup>Kaiserslautern

از "بسته‌های موجک" را معرفی کردند.

در سال‌های اخیر در کشور ما نیز تحقیقاتی زیادی روی موجک‌ها، از جمله موجک‌های هار و لژاندر صورت گرفته است. از جمله در سال ۲۰۰۱ آقایان رزاقی<sup>۲۹</sup> و یوسفی<sup>۳۰</sup> ماتریس عملگر انتگرال موجک‌های لژاندر را ارائه کردند. چند سال بعد آقای یوسفی روشی را برای حل معادلات دیفرانسیل از نوع Lane-Emden با استفاده از موجک‌های لژاندر ارائه داد.

موجک‌ها خانواده‌ای از توابع هستند که با استفاده از انتقال<sup>۳۱</sup> و اتساع<sup>۳۲</sup> یک تابع به نام تابع موجک مادر<sup>۳۳</sup> ساخته می‌شوند. با تغییر پارامترهای انتقال  $a$  و اتساع  $b$ ، خانواده توابع موجک  $\psi_{a,b}(x)$  را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\psi_{a,b}(x) = |a|^{-\frac{1}{2}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right), \quad a, b \in R, a \neq 0.$$

موجک‌های لژاندر و چبیشف از جمله مهمترین پایه‌های موجک متعامد هستند که دارای کاربردهای فراوانی در حل معادلات دیفرانسیل هستند.

مشابه روش‌های طیفی می‌توان یک تابع را بر حسب پایه‌های موجک لژاندر به صورت زیر تقریب زد:

$$u(x) \simeq \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^{2^k-1} c_{nm} \psi_{nm}(t) = C^T \Psi(t).$$

---

<sup>۲۸</sup>Wickerhausr

<sup>۲۹</sup>Razzaaghi

<sup>۳۰</sup>Yausefi

<sup>۳۱</sup>Translation

<sup>۳۲</sup>Dilation

<sup>۳۳</sup>Mother wavelet

# فصل ۱

## تعاریف مقدماتی و آنالیز فوریه

در این فصل به طور مختصر مقدماتی از تعاریف و قضایای آنالیز حقیقی که در ادامه این فصل و فصل‌های بعدی به آن نیاز داریم، بیان می‌شود. سپس آنالیز فوریه را به طور مختصر معرفی می‌کنیم.

### ۱.۱ مقدماتی از آنالیز حقیقی

در این بخش برای بررسی و اثبات قضیه‌ها به [۱، ۲] رجوع کنید.

**تعریف ۱.۱.۱.** فرض کنید  $[a, b]$  یک بازه کراندار باشد. تغییرات کل تابع  $u : [a, b] \rightarrow R$  روی  $[a, b]$  به صورت زیر تعریف می‌شود

$$V(u) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n |u(x_i) - u(x_{i-1})| \mid a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \right\}.$$

که در آن سوپریموم روی تمام افرازهای متناهی بازه  $[a, b]$  مانند  $\{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$  گرفته می‌شود.

**تعریف ۲.۱.۱.** تابع  $u$  روی بازه  $[a, b]$  با تغییر کراندار است اگر تغییرات کل تابع یعنی  $V(u)$  متناهی باشد. با توجه به تعریف تابع با تغییر کراندار می‌توان نتیجه گرفت که توابع اکیدا یکنوا روی بازه  $[a, b]$  با تغییر کراندار هستند. به علاوه هر تابع  $u(x)$  که بر  $[a, b]$  پیوسته و بر  $(a, b)$  مشتق‌پذیر باشد و  $\sup |u'(x)| < M$  در بازه  $[a, b]$  با تغییر کراندار است. باید توجه نمود که کراندار بودن، تغییر کراندار بودن را نتیجه نمی‌دهد ولی عکس آن درست است.

**مثال ۳.۱.۱.** تابع  $u : [0, 1] \rightarrow R$  به صورت زیر را در نظر بگیرید

$$u(x) = \begin{cases} 0 & x = 0, \\ x \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) & x \neq 0, \end{cases}$$

این تابع در بازه  $[0, 1]$  پیوسته و کراندار است، ولی با تغییر کراندار نیست، چون در نزدیکی  $x = 0$  دارای نوسان خیلی زیادی است. برای اثبات این موضوع افراز  $\{0, \frac{1}{m}, \frac{1}{m-1}, \dots, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\}$

را برای این بازه در نظر بگیرید. مقادیر تابع  $u$  روی این افراز به صورت زیر هستند

$$uP_m = \left\{ 0, \frac{1}{2^m}, \frac{-1}{2^{m-1}}, \dots, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, -1 \right\},$$

برای این افراز داریم

$$\sum_{i=1}^n |u(x_i) - u(x_{i-1})| = 2 \left( \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^{m-1}} + \dots + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) + 1,$$

با استفاده از واگرایی سری همساز نتیجه می‌شود که برای هر  $M$  یک افراز  $P_m$  وجود دارد به طوری که

$$\sum_{i=1}^n |u(x_i) - u(x_{i-1})| > M.$$

**تعریف ۴.۱.۱.** تابع  $f(x)$  را انتگرال‌پذیر مطلق می‌نامند هرگاه

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty.$$

**تعریف ۵.۱.۱.** فرض کنید  $1 \leq p < \infty$  و  $[a, b]$  یک بازه حقیقی باشد، مجموعه تمام توابع اندازه‌پذیر  $f$  که برای آن‌ها  $|f|^p$  روی بازه  $[a, b]$  انتگرال‌پذیر است را فضای  $L^p([a, b])$  نامند. به بیان دیگر فضای  $L^p([a, b])$  متشکل از تمام توابع اندازه‌پذیر  $f$  است که

$$\int_a^b |f(x)|^p dx < \infty.$$

**تعریف ۶.۱.۱.** یک فضایی برداری که ضرب داخلی روی آن تعریف شده است را فضای ضرب داخلی می‌نامند.

**مثال ۷.۱.۱.** فرض کنید  $V = L^2([a, b])$ ، فضای تمام توابع اندازه‌پذیر  $f$  باشد که برای آن‌ها

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty,$$

در این صورت تابع  $(\cdot, \cdot)_2 : V * V \rightarrow R$  که به صورت  $(f, g)_2 = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$  تعریف می‌شود یک ضرب داخلی روی این فضا است و بنابراین فضای  $L^2([a, b])$  تحت این تعریف، فضای ضرب داخلی است.

**تعریف ۸.۱.۱.** فرض کنید  $H$  فضای ضرب داخلی باشد، اگر فضای  $H$  تحت این ضرب داخلی فضای تام باشد،  $H$  را فضای هیلبرت می‌نامند. به عبارت دیگر هر فضای هیلبرت یک فضای باناخ است که نرم آن توسط ضرب داخلی تعریف شده است.

**مثال ۹.۱.۱.** فضای  $L^2([a, b])$  را همراه با ضرب داخلی  $(\cdot, \cdot)_2$  روی آن در نظر بگیرید. این ضرب داخلی نرمی به صورت زیر روی این فضا تعریف می‌کند

$$\|f\|_2^2 = \int_a^b |f(x)|^2 dx,$$

این نرم القا شده توسط ضرب داخلی را نرم  $L^2$  نیز می‌نامند. و فضای  $L^2([a, b])$  تحت این نرم، فضای هیلبرت است.

تعریف ۱۰.۱.۱. دنباله توابع  $\{f_n\}$  را در بازه  $[a, b]$  به طور نقطه‌وار به تابع  $f$  همگرا گویند، هرگاه برای هر  $x \in [a, b]$  و  $\epsilon > 0$  عدد صحیح مثبت  $N(x)$  وجود داشته باشد به طوری که برای هر  $n \geq N(x)$

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

تعریف ۱۱.۱.۱. دنباله توابع  $\{f_n\}$  را به طور یکنواخت در بازه  $[a, b]$  به تابع  $f$  همگرا گویند هرگاه برای هر  $\epsilon > 0$ ، عدد صحیح مثبت  $N$  وجود داشته باشد به طوری که اگر  $n \geq N$ ، آنگاه برای هر  $x \in [a, b]$

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

توجه کنید که در همگرایی یکنواخت،  $N$  فقط به  $\epsilon$  وابسته است و به مقدار  $x$  بستگی ندارد، ولی در همگرایی نقطه‌وار  $N$  به  $x$  نیز بستگی دارد.

تعریف ۱۲.۱.۱. دنباله توابع انتگرال‌پذیر  $\{f_n\}$  در  $L_2$  به تابع  $f$  همگراست اگر

$$\|f_n(x) - f(x)\|_2 \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

قضیه ۱۳.۱.۱. اگر دنباله توابع  $\{f_n\}$  به طور یکنواخت به تابع  $f$  همگرا باشد آنگاه  $\{f_n\}$  به طور نقطه‌ای نیز به تابع  $f$  همگراست.

باید توجه داشت که عکس قضیه فوق درست نیست. این مطلب در مثال زیر نشان داده شده است.

مثال ۱۴.۱.۱. دنباله توابع زیر را در نظر بگیرید

$$f_n(x) = x^n, \quad x \in [0, 1],$$

این دنباله به طور نقطه‌وار در  $[0, 1]$  به تابع

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1, \\ 1 & x = 1, \end{cases}$$

همگراست، ولی این دنباله به تابع  $f(x)$  همگرایی یکنواخت نیست.

تعریف ۱۵.۱.۱. فرض کنید  $V_0$  یک زیر فضا از فضای ضرب داخلی  $V$  باشد در این صورت مکمل متعامد  $V_0$ ، که با  $V_0^\perp$  نشان داده می‌شود مجموعه همه بردارهای  $V$  است که بر  $V_0$  عمودند. یعنی

$$V_0^\perp = \{v \in V \mid (v, w) = 0, \forall w \in V_0\}.$$

قضیه ۱۶.۱.۱. نگاهت فرض کنید  $V_0$  زیر فضایی با بعد متناهی از فضای ضرب داخلی  $V$  باشد در این صورت هر بردار  $v \in V$  را می‌توان به صورت یگانه به شکل  $v = v_0 + v_1$  نوشت که در آن  $v_0$  متعلق به  $V_0$  و  $v_1$  متعلق به  $V_0^\perp$  است. به عبارت دیگر

$$V = V_0 \oplus V_0^\perp.$$

## ۲.۱ معادلات دیفرانسیل معمولی

معادله‌ای که شامل یک تابع مجهول و مشتقات آن باشد را معادله دیفرانسیل می‌نامند، هرگاه تابع مجهول موجود در معادله، تنها به یک متغیر مستقل وابسته باشد، در این حالت معادله دیفرانسیل را معمولی می‌نامند و چنانچه وابسته به بیش از یک متغیر باشد آن را معادله دیفرانسیل جزئی می‌نامند. تابعی که در معادله دیفرانسیل و قیود آن صدق کند را جواب معادله دیفرانسیل می‌نامند. شکل کلی یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه  $n$  به صورت زیر است:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (1.1)$$

معادله دیفرانسیل (۱.۱) خطی است اگر  $F$  تابعی خطی از متغیرهای  $y, y', \dots, y^{(n)}$  باشد. شکل کلی یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه  $n$  به صورت زیر است:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = g(x).$$

معادله دیفرانسیلی که خطی نباشد، یک معادله دیفرانسیل غیرخطی نامیده می‌شود.

**تعریف ۱.۲.۱.** یک مساله مقدار اولیه، یک معادله دیفرانسیل مرتبه  $n$  همراه با یک مجموعه شرایط اولیه به صورت زیر است:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (2.1)$$

$$y^{(i)}(a) = \alpha_i, \quad i = 0, 1, \dots, n-1, \quad (3.1)$$

که در آن نقطه اولیه و  $\alpha_i$  ها مقادیر ثابتی هستند. منظور از حل یک مساله مقدار اولیه، پیدا کردن تابع  $y(x)$  است که در معادله دیفرانسیل (۲.۱) و شرایط (۳.۱) صدق کند.

**تعریف ۲.۲.۱.** یک معادله دیفرانسیل مرتبه  $n$  همراه با یک مجموعه از شرایط مرزی را یک مساله مقدار مرزی می‌نامند. شکل کلی یک مساله مقدار مرزی مرتبه  $n$  را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (4.1)$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} (\alpha_{ij}y^{(i)}(a) + \beta_{ij}y^{(j)}(b)) = \gamma_i, \quad i = 0, 1, \dots, n-1, \quad (5.1)$$

که در آن  $\alpha_{ij}$  ها،  $\beta_{ij}$  ها و  $\gamma_i$  ها مقادیری ثابت و  $a$  و  $b$  مقادیر مرزی هستند. منظور از حل یک مساله مقدار مرزی، پیدا کردن تابع  $y(x)$  است که در معادله دیفرانسیل (۴.۱) و شرایط مرزی (۵.۱) صدق کند.

### ۳.۱ دستگاه معادلات دیفرانسیل

$$\begin{cases} y_1' = f_1(t, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ y_2' = f_2(t, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \vdots \\ y_n' = f_n(t, y_1, y_2, \dots, y_n), \end{cases} \quad (۶.۱)$$

برای دستگاه معادلات دیفرانسیل بالا شرایط اولیه به صورت زیر است:

$$\begin{cases} y_1(a) = \alpha_1, \\ y_2(a) = \alpha_2, \\ \vdots \\ y_n(a) = \alpha_n, \end{cases} \quad (۷.۱)$$

هدف از حل یک دستگاه معادلات دیفرانسیل، تعیین توابع  $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$  است که در معادله (۲.۱) و شرایط اولیه (۷.۱) صدق کنند. اگر معادله دیفرانسیل مرتبه  $n$  را بتوان به صورت صریح بر حسب بالاترین مرتبه مشتق به صورت زیر بیان کرد:

$$y^{(n)}(t) = f(x, y'(t), y''(t), \dots, y^{(n-1)}(t)), \quad (۸.۱)$$

آنگاه با شرایط اولیه  $y^{(i)}(a) = \alpha_i, i = 0, 1, \dots, n-1$  و با قرار دادن تغییر متغیر

$$\begin{aligned} z_1(t) &= y(t), \\ z_2(t) &= y'(t), \\ &\vdots \\ z_n(t) &= y^{(n-1)}(t), \end{aligned}$$

معادله دیفرانسیل (۸.۱) را می‌توان به یک دستگاه معادلات مرتبه اول به صورت

$$z' = \begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \\ \vdots \\ z_{n-1}' \\ z_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_n \\ f(t, z_1, z_2, \dots, z_n) \end{pmatrix}$$

با شرایط اولیه

$$\begin{cases} z_1(a) = \alpha_1, \\ z_2(a) = \alpha_2, \\ \vdots \\ z_n(a) = \alpha_n, \end{cases}$$



تبدیل کرد.

در بخش بعد مقدمه‌ای از روش‌های طیفی و آنالیز فوریه بیان می‌شود.

## ۴.۱ مقدمه‌ای از روش‌های طیفی

به دست آوردن جواب کلاسیک برای معادلات دیفرانسیل همیشه امکان پذیر نبوده و در برخی از موارد تقریباً غیر ممکن است. بنابراین برای حل این دسته از معادلات، از روش‌های تقریبی استفاده می‌کنیم. انتخاب روش‌های تقریبی برای حل مسایل، اغلب با توجه به شکل مساله، پیچیدگی دامنه مساله و دقت مورد نیاز، انجام می‌شود. یکی از این روش‌های تقریبی که معمولاً برای حل این نوع مسایل به کار می‌رود، روش‌های فراگیر هستند که برای حل عددی آن، جواب را در سراسر دامنه به صورت مجموعی از توابع پایه‌ای مناسب تقریب می‌زنند. روش‌های فراگیر معمولاً برای حل مسایلی به کار می‌روند که دارای ساختار و شکل دامنه ساده هستند و به دقت بیشتری نیاز دارند.

در روش‌های طیفی تابع جواب به صورت یک سری از توابع پایه‌ای در سراسر دامنه تعریف مساله به صورت زیر تقریب زده می‌شود:

$$u(x) = \sum_{n=0}^N a_n \varphi_n(x).$$

که در آن  $\varphi_n(x)$  ها توابع پایه‌ای هستند که با توجه به متناوب بودن یا نبودن مساله مورد نظر می‌توانند توابع مثلثاتی یا چندجمله‌ای‌های متعامد لژاندر<sup>۱</sup> یا چیشیف<sup>۲</sup> باشند و  $a_n$  ها ضرایب مجهول هستند که باید با استفاده از شرایط مساله و توابع پایه‌ای محاسبه شوند.

شناخته‌ترین روش طیفی برای به دست آوردن جواب مسایل متناوب، استفاده از بسط توابع متناوب به صورت سری فوریه است. در سری فوریه، توابع پایه‌ای، توابع مثلثاتی سینوسی و کسینوسی با فرکانس‌های متفاوت هستند. انتخاب توابع پایه‌ای مثلثاتی متناوب در روش فوریه، روندی کلی را برای محاسبه ضرایب بسط فراهم کرده و همگرایی طیفی را نیز برای توابع بی‌نهایت بار متناوب و هموار تضمین می‌کند. اما وقتی که مسایل متناوب نباشند، استفاده از پایه‌های مثلثاتی مناسب نیستند.

در ادامه ابتدا آنالیز فوریه برای توابع متناوب بررسی می‌کنیم و نقاط ضعف و قوت آن مشخص می‌شود.

## ۵.۱ آنالیز فوریه

فوریه در سال ۱۸۰۷ ایده جالب بسط یک تابع بر حسب توابع مثلثاتی را بدون اثبات جزئیات ریاضی آن بیان کرد. در ابتدا ایده او به دلیل نداشتن استدلال ریاضی قوی با مخالفت‌ها و انتقادات زیادی از طرف داورانی مانند لاگرانژ<sup>۳</sup>، لژاندر و لاپلاس<sup>۴</sup> روبرو شد و به همین دلیل از انتشار آن جلوگیری شد.

<sup>۱</sup>Legendre orthogonal polynomials

<sup>۲</sup>Chebyshev orthogonal polynomials

<sup>۳</sup>Lagrange

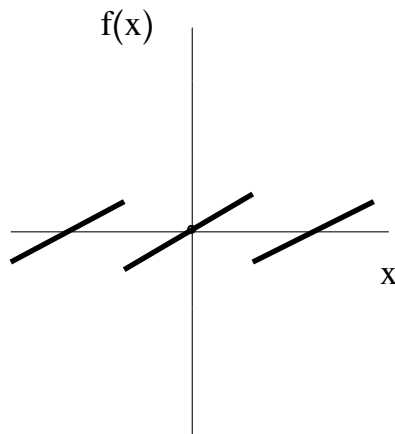
ولی سرانجام پس از ۱۵ سال فوریه با اثبات جزئیات روش خود توانست آن‌ها را قانع و نتایج خود را منتشر کند. لئوناردو اویلر<sup>۵</sup> نیز فرمول‌های کلی برای محاسبه ضرایب فوریه ارائه کرد. سپس فوریه نظریه خود را برای حل مساله گرما بر حسب سری فوریه گسترش داد و پس از آن سری فوریه به عنوان ابزاری کاربردی برای حل معادلات با مشتقات جزئی با شرایط مرزی و اولیه معین مورد استفاده قرار گرفت. تبدیل فوریه نه تنها در زمینه‌های ریاضی و مهندسی بلکه در بسیاری از زمینه‌های علمی دیگر مورد استفاده قرار گرفته است. در ادامه سری فوریه معرفی و همگرایی آن مورد بحث قرار می‌گیرد.

## توابع متناوب

تابع  $f(x)$  دارای دوره تناوب  $P$  است هرگاه، به ازای همه  $x$  ها،  $f(x + P) = f(x)$  باشد که در آن  $P$  یک ثابت مثبت است. کوچکترین مقدار  $P > 0$  را کوچکترین دوره‌ی تناوب، یا به طور ساده، دوره‌ی تناوب  $f(x)$  می‌نامند. به عنوان مثال  $\sin(x)$  دارای دوره تناوب‌های  $2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots$  است و  $2\pi$  کوچکترین دوره تناوب  $\sin(x)$  است.

## توابع قطعه به قطعه پیوسته

تابعی مانند  $f(x)$  را در یک بازه، قطعه به قطعه پیوسته می‌گوییم هرگاه بتوان این بازه را به تعدادی متناهی زیر بازه تقسیم کرد به طوری که در هر یک از آن‌ها  $f(x)$  پیوسته باشد و حدود  $f(x)$ ، وقتی  $x$  به نقاط انتهایی هر زیر بازه نزدیک می‌شود، متناهی باشند. راه دیگر بیان این مطلب آن است که بگوییم یک تابع قطعه به قطعه پیوسته تابعی است که حداکثر دارای تعداد متناهی نقاط ناپیوستگی باشد. مثالی از یک تابع قطعه به قطعه پیوسته در شکل (۱.۱) نشان داده شده است.



شکل ۱.۱: تابع قطعه به قطعه پیوسته

<sup>۴</sup>Laplace

<sup>۵</sup>Euler

### ۱.۵.۱ تعریف سری‌های فوریه

فرض کنیم  $f(x)$  در بازه‌ی  $(-L, L)$  تعریف شده باشد و در خارج از این بازه، با  $f(x + 2L) = f(x)$  تعیین شده باشد، یعنی فرض کنیم که  $f(x)$  دارای دوره‌ی تناوب  $2L$  باشد. سری فوریه یا بسط فوریه‌ی متناظر با  $f(x)$  را به صورت

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right), \quad (9.1)$$

تعریف می‌کنند که در آن، ضرایب فوریه  $a_n$  و  $b_n$  عبارتند از

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \\ b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (10.1)$$

اگر  $f(x)$  دارای دوره تناوب  $2L$  باشد، می‌توان ضرایب  $a_n$  و  $b_n$  را به طور هم ارز با رابطه‌ی زیر به دست آورد

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{L} \int_c^{c+2L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \\ b_n = \frac{1}{L} \int_c^{c+2L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (11.1)$$

که در آن  $c$  عدد حقیقی دلخواهی است. در حالت خاصی که  $c = -L$  است، (۱۱.۱) به (۱۰.۱) تبدیل می‌شود. توجه داشته باشید که جمله‌ی ثابت در (۹.۱) برابر با  $\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx$  است. اگر  $L = \pi$  باشد سری (۹.۱) و ضرایب (۱۰.۱) یا (۱۱.۱) بسیار ساده می‌شوند و تابع مورد نظر در این حالت دارای دوره تناوب  $2\pi$  است.

برای بررسی طریقه‌ی به دست آوردن این ضرایب به [۱۴] رجوع کنید. باید بر این امر تاکید شود که سری (۹.۱) فقط یک سری متناظر با  $f(x)$  است. ما نمی‌دانیم که آیا این سری همگرا است یا خیر. این مساله‌ی همگرایی را، دیریکله<sup>۶</sup> بررسی کرد و شرایطی را برای همگرایی سری‌های فوریه گسترش داد، که اینک به آن‌ها می‌پردازیم.

### شرایط دیریکله

#### قضیه ۱.۵.۱. فرض کنیم که

۱.  $f(x)$  به جز در تعداد متناهی از نقاط واقع در  $(-L, L)$ ، معین و تک مقداری است.

۲.  $f(x)$  متناوب با دوره‌ی تناوب  $2L$  است.

۳.  $f(x)$  و  $f'(x)$  در  $(-L, L)$  قطعه به قطعه پیوسته‌اند.

آن‌گاه

<sup>۶</sup>Dirichlet

(الف) سری (۹.۱) با ضرایب (۱۰.۱) به سمت  $f(x)$  اگر  $x$  یک نقطه‌ی پیوستگی باشد، همگرا است.  
 (ب) سری (۹.۱) با ضرایب (۱۰.۱) به سمت  $\frac{f(x+\circ)+f(x-\circ)}{2}$  اگر  $x$  یک نقطه‌ی ناپیوستگی باشد، همگرا است.

برای اثبات این قضیه می‌توانید به [۱۴] رجوع کنید.

طبق این نتیجه، در هر نقطه‌ی پیوستگی  $x$ ، می‌توانیم بنویسیم

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right). \quad (12.1)$$

ولی اگر  $x$  یک نقطه‌ی ناپیوستگی باشد، آن‌گاه طرف چپ با  $\frac{f(x+\circ)+f(x-\circ)}{2}$  جایگزین می‌شود. شرایط ۱، ۲، ۳ که بر  $f(x)$  تحمیل شده‌اند شرایط کافی هستند ولی لازم نیستند، یعنی اگر این شرایط برقرار باشند، همگرایی تضمین شده است. با این وجود اگر این شرایط برقرار نباشند، سری نامبرده ممکن است همگرا باشد یا نباشد.

## همگرایی یکنواخت

فرض کنیم یک سری نامتناهی مانند  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  داریم. حاصل جمع جزئی  $R$  ام این سری را به صورت حاصل جمع  $R$  جمله‌ی نخست آن تعریف می‌کنیم، یعنی

$$S_R(x) = \sum_{n=1}^R u_n(x). \quad (13.1)$$

حال بنا بر تعریف می‌گوییم این سری در بازه‌ی معینی به سمت  $f(x)$  همگرا است در صورتی که اگر عدد مثبت دلخواهی مانند  $\epsilon$  داده شده باشد، آن‌گاه به ازای  $x$  واقع در این بازه، عدد مثبتی مانند  $N$  وجود داشته باشد به طوری که

$$|S_R(x) - f(x)| < \epsilon \quad R > N. \quad (14.1)$$

عدد  $N$  در حالت کلی، نه فقط به  $\epsilon$ ، بلکه به  $x$  نیز بستگی دارد. یک حالت مهم هنگامی پیش می‌آید که  $N$  به  $\epsilon$ ، ولی نه به مقدار  $x$  در بازه‌ی مورد بحث، بستگی داشته باشد. در چنین حالتی می‌گوییم که این سری به طور یکنواخت به سمت  $f(x)$  میل می‌کند یا به سمت  $f(x)$  همگرای یکنواخت است.

قضیه ۲۰.۵.۱. آزمون  $M$  ویراشتراس: اگر مجموعه‌ای از ثابت‌های  $n = 1, 2, \dots$  و  $M_n$  موجود باشد به طوری که، به ازای هر  $x$  واقع در بازه‌ی معین،  $|u_n(x)| \leq M_n$  و اگر علاوه بر آن سری  $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$  همگرا باشد، آن‌گاه  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  در این بازه‌ی معین به طور یکنواخت همگرا است. در ضمن، تحت این شرایط

سری مفروض مطلقاً همگرا است، یعنی  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$  همگرا است.

اثبات [۱].

مثال ۳.۵.۱. سری  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$  در بازه  $(-\pi, \pi)$  یا در واقع در هر بازه دلخواهی به طور یکنواخت همگرا است، زیرا مجموعه‌ای از ثابت‌های  $M_n = \frac{1}{n^2}$  می‌توان یافت، به طوری که  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  و  $|\frac{\sin nx}{n^2}| \leq \frac{1}{n^2}$  همگرا است.

## ۲.۵.۱ نماد گذاری مختلط برای سری‌های فوریه

با استفاده از فرمول اویلر  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ ، سری فوریه‌ی  $f(x)$  را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{L}}, \quad (15.1)$$

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-\frac{in\pi x}{L}} dx, \quad (16.1)$$

هنگام نوشتن تساوی (۱۵.۱)، فرض ما بر این است که شرایط دیریکله برقرارند و علاوه بر آن،  $f(x)$  در  $x$  پیوسته است. اگر  $f(x)$  در  $x$  ناپیوسته باشد، طرف چپ (۱۵.۱) را باید با  $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$  جایگزین کرد.

بدون از دست دادن کلیت، اگر  $L = \pi$  فرض شود آن‌گاه انتگرال‌گیری روی بازه  $[-\pi, \pi]$  انجام می‌شود و تساوی (۱۶.۱) به صورت زیر نوشته می‌شود

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx,$$

و همچنین اگر  $f(x)$  روی بازه  $[0, 2\pi]$  تعریف شود و متناوب نیز باشد آن‌گاه تساوی (۱۶.۱) به صورت زیر نوشته می‌شود

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx.$$

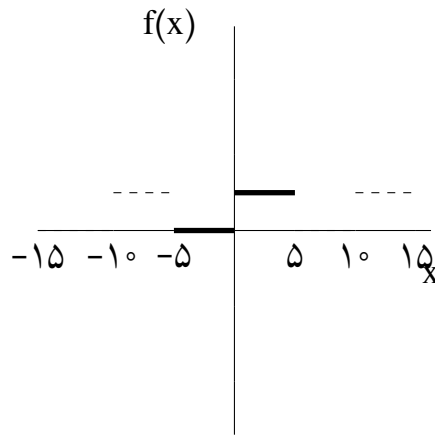
در ادامه مثالی را در رابطه با سری فوریه بیان می‌کنیم.

مثال ۴.۵.۱. تابع  $f(x)$  زیر را در نظر بگیرید

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -5 < x < 0, \\ 3 & 0 < x < 5, \end{cases} \quad \text{دوره تناوب} = 10$$

ابتدا ضرایب فوریه و سری فوریه‌ی متناظر با  $f(x)$  را به دست می‌آوریم، سپس  $f(x)$  را طوری تعریف می‌کنیم تا سری فوریه‌ی بالا، به ازای  $-5 \leq x \leq 5$  به سمت  $f(x)$  همگرا باشد. نمودار  $f(x)$  در شکل (۲.۱) نشان داده شده است.

چون دوره‌ی تناوب،  $2L = 10$  و  $L = 5$  است. بازه‌ی از  $c$  تا  $c + 2L$  را از  $-5$  تا  $5$  انتخاب می‌کنیم،

شکل ۲.۱: نمودار تابع  $f(x)$ 

در نتیجه  $c = -5$  است، آنگاه داریم

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L} \int_c^{c+2L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{1}{5} \int_{-5}^5 f(x) \cos \frac{n\pi x}{5} dx \\ &= \frac{1}{5} \left\{ \int_{-5}^0 (0) \cos \frac{n\pi x}{5} dx + \int_0^5 (3) \cos \frac{n\pi x}{5} dx \right\} \\ &= \frac{3}{5} \int_0^5 \cos \frac{n\pi x}{5} dx = \frac{3}{5} \left( \frac{5}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{5} \right) \Big|_0^5 = 0, \quad \text{اگر } n \neq 0 \end{aligned}$$

$$a_n = a_0 = \frac{3}{5} \int_0^5 \cos \frac{0\pi x}{5} dx = \frac{3}{5} \int_0^5 dx = 3 \text{ اگر } n = 0.$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{L} \int_c^{c+2L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{1}{5} \int_{-5}^5 f(x) \sin \frac{n\pi x}{5} dx \\ &= \frac{1}{5} \left\{ \int_{-5}^0 (0) \sin \frac{n\pi x}{5} dx + \int_0^5 (3) \sin \frac{n\pi x}{5} dx \right\} \\ &= \frac{3}{5} \int_0^5 \sin \frac{n\pi x}{5} dx = \frac{3}{5} \left( \frac{-5}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{5} \right) \Big|_0^5 = \frac{3(1 - \cos n\pi)}{n\pi}. \end{aligned}$$

سری فوریه‌ی متناظر با  $f(x)$  عبارت است از

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) &= \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3(1 - \cos n\pi)}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{5} \\ &= \frac{3}{2} + \frac{6}{\pi} \left( \sin \frac{\pi x}{5} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{5} + \frac{1}{5} \sin \frac{5\pi x}{5} + \dots \right). \end{aligned}$$

چون  $f(x)$  در شرایط دیریکله صدق می‌کند، می‌توانیم بگوییم که این سری، در همه‌ی نقاط پیوستگی، به سمت  $f(x)$ ، و در نقاط ناپیوستگی به سمت  $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$  همگرا است. در  $5, 0, -5$  که نقاط ناپیوستگی هستند، سری مورد بحث به سمت  $\frac{3+0}{2}$  همگرا است. اگر  $f(x)$  را به قرار زیر دوباره تعریف کنیم، سری بالا به ازای  $-5 \leq x \leq 5$  به سمت  $f(x)$  همگرا خواهد بود.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2} & x = -5, \\ 0 & -5 < x < 0, \\ \frac{3}{2} & x = 0, \\ 3 & 0 < x < 5, \\ \frac{3}{2} & x = 5, \end{cases}$$

## اتحاد پارسوال<sup>۷</sup>

**قضیه ۵.۵.۱.** فرض کنید سری فوریه‌ی متناظر با  $f(x)$  در  $(-L, L)$  به طور یکنواخت به سمت  $f(x)$  همگرا است، آنگاه رابطه‌ی زیر بین  $(f(x))^2$  و ضرایب فوریه  $f(x)$  برقرار است، که این معادله را تساوی پارسوال می‌نامند.

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L \{f(x)\}^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

**برهان.** اگر  $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L})$  باشد، پس از ضرب در  $f(x)$  و انتگرال‌گیری جمله به جمله بین  $-L$  تا  $L$  (این موجه است زیرا سری مورد نظر به طور یکنواخت همگرا است)، به دست می‌آوریم

$$\int_{-L}^L \{f(x)\}^2 dx = \frac{a_0}{2} \int_{-L}^L f(x) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx + b_n \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \right\},$$

از طرفی از رابطه‌ی (۱۰.۱) می‌دانیم  $\int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx = La_n$ ،  $\int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx = Lb_n$  و  $\int_{-L}^L f(x) dx = La_0$ . پس به دست می‌آوریم

$$\int_{-L}^L \{f(x)\}^2 dx = \frac{a_0^2}{2} L + L \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \Rightarrow \frac{1}{L} \int_{-L}^L \{f(x)\}^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

□

**لم ۶.۵.۱.** (ریمان لبگ:) اگر  $f(x)$  تابع قطعه به قطعه پیوسته باشد، آنگاه

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = 0.$$

<sup>۷</sup>Parseval identity

برهان. این مطلب بی‌درنگ از قضیه‌ی (۵.۵.۱) نتیجه می‌شود، زیرا اگر سری  $\frac{a_n}{\sqrt{n}} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$  همگرا باشد، داریم  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ ، از طرفی چون  $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \pi b_n$  و  $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \pi a_n$  بنابراین نتیجه‌ی مورد نظر حاصل می‌شود. □

### ۳.۵.۱ پدیده گیبس

پدیده گیبس<sup>۸</sup> رفتار نوسانی سری فوریه یک تابع با تغییر کراندار و متناوب را در همسایگی یک نقطه‌ی ناپیوستگی آن تشریح می‌کند. سری فوریه قطع شده هر تابع دارای نوسان‌هایی در اطراف تابع واقعی است، ولی این رفتار در اطراف یک نقطه‌ی ناپیوستگی دارای ویژگی‌های خاصی است. برای اولین بار در سال ۱۸۸۴ هنری ویلبرهام<sup>۹</sup> به موضوع نوسانات سری فوریه در نزدیکی نقاط ناپیوستگی اشاره و یک مقاله نیز در این رابطه منتشر کرد که مورد توجه دنیای ریاضیات واقع نشد. سپس در سال ۱۸۹۹ ویلارد گیبس<sup>۱۰</sup> شیمی‌دان و ریاضی‌دان آمریکایی، یک مقاله راجع به سری فوریه منتشر کرد و در آن پدیده نوسانات سری فوریه را در نزدیکی نقاط ناپیوستگی شرح داد. سرانجام در سال ۱۹۰۹ ماکسیم بوچر<sup>۱۱</sup> جزئیات ریاضی نوسانات سری فوریه در نزدیکی نقاط ناپیوستگی را به طور کامل بررسی کرد و آن را پدیده گیبس نامید.

برای بررسی پدیده گیبس، تابع موج مربعی را که به صورت زیر داده شده است در نظر بگیرید

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < \pi, \\ 0 & \pi \leq x < 2\pi, \end{cases} \quad (17.1)$$

نمودار تابع  $\phi(x)$  در شکل (۳.۱) نشان داده شده است. این تابع در مبدا ناپیوسته است و  $0 = \phi(0^-) \neq \phi(0^+) = 1$ . این رفتار نوسانی را می‌توان با استفاده از نمایش انتگرالی سری فوریه قطع شده تابع به راحتی توجیه کرد. فرض کنید  $S_N u(x)$  سری فوریه قطع شده تابع دلخواه  $u(x)$  به صورت زیر باشد

$$\begin{aligned} S_N u(x) &= \sum_{|k| \leq \frac{N}{\sqrt{\pi}}} c_k e^{ikx} = \sum_{|k| \leq \frac{N}{\sqrt{\pi}}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} e^{-ik(t-x)} u(t) dt, \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{|k| \leq \frac{N}{\sqrt{\pi}}} e^{-ik(t-x)} \right) u(t) dt, \end{aligned}$$

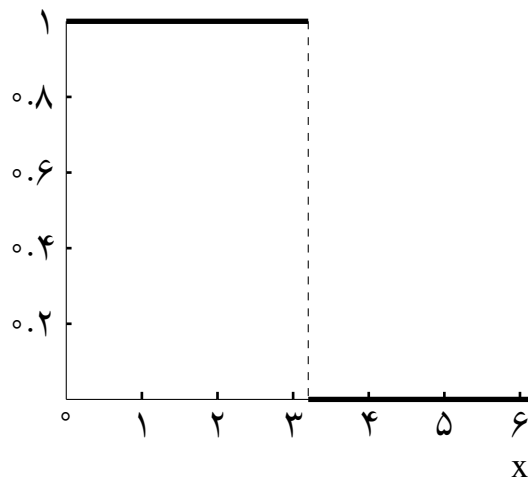
<sup>۸</sup>Gibbs phenomenon

<sup>۹</sup>Henry Wilbraham

<sup>۱۰</sup>Willard Gibbs

<sup>۱۱</sup>Maxime Bocher





شکل ۳.۱: نمودار تابع  $\phi(x)$

از طرفی می‌دانیم  $e^{-ik(t-x)} = \cos k(t-x) - i \sin k(t-x)$  است، بنابراین داریم

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} e^{-ik(t-x)} &= \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \cos k(t-x) - i \sin k(t-x) \\ &= \left( \cos\left(-\frac{N}{2}(t-x)\right) + \dots + 1 + \dots + \cos\left(\frac{N}{2}(t-x)\right) \right) \\ &\quad - i \left( \sin\left(-\frac{N}{2}(t-x)\right) + \dots + 0 + \dots + \sin\left(\frac{N}{2}(t-x)\right) \right) \\ &= 1 + 2 \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}} \cos k(t-x). \end{aligned}$$

نمایش انتگرالی  $S_N u(x)$  را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$S_N u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (D_N(x-t))u(t)dt, \quad (18.1)$$

که در آن  $D_N(\xi)$  هسته دیریکله<sup>۱۲</sup> نامیده می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌شود

$$D_N(\xi) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}} \cos(k\xi) = \begin{cases} \frac{\sin\left(\frac{(N+1)\xi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\xi}{2}\right)} & \xi \neq 2\pi j, \\ N+1 & \xi = 2\pi j, \end{cases} \quad (19.1)$$

با توجه به تعریف هسته دیریکله  $D_N(\xi)$ ، خواص زیر برای این تابع بیان می‌شود

۱.  $D_N(\xi)$  تابعی زوج از  $\xi$  می‌باشد.

۲. تابع  $D_N(\xi)$  در نقاط  $\xi_j = \frac{2\pi j}{N+1}$  تغییر علامت می‌دهد.

<sup>۱۲</sup>Dirichlet kernel

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} D_N(\xi) d\xi = 1 \quad ۳.$$

۴. در هر بازه که شامل  $\xi_j = 2\pi j, j \in Z$  نباشد،  $D_N(\xi)$  به طور یکنواخت به صفر میل می‌کند.

حال فرض کنید تابع  $u$  همان تابع موج مربعی تعریف شده در (۱۷.۱) باشد که در مبدا دارای ناپیوستگی است. با توجه به تعریف تابع موج مربعی، نمایش انتگرالی (۱۸.۱) سری فوریه‌ی قطع شده آن را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$S_N \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi} (D_N(x-t)) \phi(t) dt + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\pi}^{2\pi} (D_N(x-t)) \phi(t) dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi} (D_N(x-t)) dt,$$

با تغییر متغیر  $x - t = y$ ، مقدار انتگرال برابر زیر خواهد بود

$$\begin{aligned} S_N \phi(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{x-\pi}^x D_N(y) dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[ \int_0^x D_N(y) dy + \int_{-\pi}^0 D_N(y) dy + \int_{x-\pi}^{-\pi} D_N(y) dy \right], \end{aligned} \quad (۲۰.۱)$$

در رابطه‌ی فوق وقتی  $x > 0$  به  $\pi$  نزدیک نباشد مقدار انتگرال  $\int_{x-\pi}^{-\pi} D_N(y) dy$  به اندازه کافی کوچک می‌باشد و طبق خاصیت سوم تابع هسته دیریکله نتیجه می‌شود:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^0 D_N(y) dy \simeq \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad (۲۱.۱)$$

در نتیجه تابع  $S_N \phi(x)$  را می‌توان به صورت تقریبی زیر نوشت

$$S_N \phi(x) \simeq \frac{1}{\sqrt{\pi}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x D_N(y) dy, \quad (۲۲.۱)$$

رابطه‌ی فوق پدیده گیبس را به طور کامل توضیح می‌دهد. در واقع فرض کنید  $x > 0$  به اندازه کافی از نقطه ناپیوستگی  $x = 0$  فاصله داشته باشد. در این صورت

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x D_N(y) dy \simeq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi} D_N(y) dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad (۲۳.۱)$$

با جایگذاری رابطه‌ی فوق در (۲۲.۱) نتیجه می‌شود که

$$S_N \phi(x) \simeq 1, \quad (۲۴.۱)$$

بنابراین مقدار سری فوریه قطع شده  $S_N \phi(x)$  در نقاطی که از  $\pi$  و  $0$  به اندازه‌ی کافی فاصله داشته باشند، تقریباً با مقدار تابع در این نقاط، یعنی برابر ۱ است. حال فرض کنید که  $x > 0$  به صفر نزدیک باشد، در این صورت  $x \neq 2\pi j, j \in N$  پس  $D_N(x) = \frac{\sin(\frac{(N+1)x}{\sqrt{\pi}})}{\sin(\frac{x}{\sqrt{\pi}})}$ ، بنابراین حاصل زیر را خواهیم داشت

$$\frac{d}{dx} \int_0^x D_N(y) dy = D_N(x) = 0 \Rightarrow \frac{\sin(N+1)x}{\sqrt{\pi}} = 0 \Rightarrow x = \frac{2\pi j}{N+1}, j \in N,$$

با توجه به رابطه‌ی فوق و ویژگی دوم تابع هسته دیریکله، نتیجه می‌شود که تابع  $\int_0^x D_N(y) dy$  در نقاط دارای ماکزیمم و می‌نیمم می‌باشد و برای  $x > 0$  ماکزیمم مطلق این تابع نیز به ازای  $\frac{2\pi j}{N+1}$  به دست می‌آید. بنابراین ماکزیمم نوسانات تابع  $S_N \phi(x)$  برای  $x > 0$  وقتی که  $N \rightarrow \infty$  به صورت زیر است

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{2\pi j}{N+1}} D_N(y) dy = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{t} dt \simeq 0.58949, \quad (۲۵.۱)$$

حاصل انتگرال بالا با توجه به  $D_N(y) = \frac{\sin(\frac{(N+1)y}{2})}{\sin(\frac{y}{2})}$  و تغییر متغیر  $dy = \frac{2}{N+1} dt$  به  $t = \frac{N+1}{2}y \Rightarrow$  دست آمده است.

با استفاده از رابطه‌ی (۲۲.۱) و (۲۵.۱) مشخص می‌شود که تابع  $S_N\phi(x)$  نیز در نقاط  $\frac{2\pi j}{N+1}$  دارای ماکزیمم و می‌نیمم است، در نتیجه این تابع در نزدیکی  $x = 0$  دارای نوسان می‌باشد. حد دنباله‌ی مقادیر ماکزیمم نوسانات تابع  $S_N\phi(x)$  به صورت زیر قابل محاسبه می‌باشد

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} S_N\phi\left(\frac{2\pi}{N+1}\right) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \left[ \int_0^{\frac{2\pi}{N+1}} D_N(y) dy + \int_{-\pi}^0 D_N(y) dy + \int_{\frac{2\pi}{N+1}-\pi}^{-\pi} D_N(y) dy \right] \\ &= \frac{1}{2} + \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{N+1}} D_N(y) dy = \frac{1}{2} + 0.58949 = 1.08949 > \phi(0^+). \end{aligned}$$

رابطه‌ی بالا با استفاده از روابط (۲۲.۱) و (۲۵.۱) به دست آمده است. این تحلیل ریاضی از پدیده‌ی گیبس برای هر تابع  $u(x)$  که در بازه‌ی  $[0, 2\pi]$  با تغییر کراندار است و در نقطه‌ای مانند  $x = x_0$  ناپیوسته است، نیز قابل بررسی و اثبات است. [۵]

## ۶.۱ دستگاه چندجمله‌ای‌های متعامد

**تعریف ۱.۶.۱.** فرض کنید  $w(x)$  تابع پیوسته، مثبت و انتگرال‌پذیر در بازه‌ی  $[a, b]$  باشد، در این صورت فضای  $L_w^2[a, b]$  متشکل از تمام توابعی مانند  $u(x)$  است که

$$\int_a^b u(x)w(x)dx < \infty.$$

در فضای  $L_w^2[a, b]$  تابع دوتایی  $(u, v)_w$  که به صورت

$$(u, v)_w = \int_a^b u(x)v(x)w(x)dx,$$

تعریف می‌شود یک ضرب داخلی است. هم‌چنین نرم القا شده توسط این ضرب داخلی در فضای  $L_w^2[a, b]$  به صورت زیر بیان می‌شود

$$\|u\|_w^2 = (u, u)_w = \left( \int_a^b |u(x)|^2 w(x) dx \right).$$

**تعریف ۲.۶.۱.** فرض کنید که  $\{P_k\}_{k=0}^\infty$  مجموعه‌ای از چندجمله‌ای‌های باشند که درجه  $P_k$  برابر  $k$  است و  $w(x)$  تابعی پیوسته، نامنفی و انتگرال‌پذیر در بازه‌ی  $[a, b]$  باشد. این چندجمله‌ای‌ها در بازه‌ی  $[a, b]$  نسبت به تابع وزن  $w(x)$  متعامدند، هرگاه

$$(P_n, P_m)_w = \int_a^b P_n(x)P_m(x)w(x)dx = \delta_{mn} \|P_n\|_w^2,$$

یعنی

$$(P_n, P_m)_w = \begin{cases} \|P_n\|_w^2 & \text{اگر } m = n, \\ 0 & \text{اگر } m \neq n, \end{cases}$$

که در آن تابع  $w(x)$ ، تابع وزن نامیده می‌شود.

تعریف ۳.۶.۱. اگر در یک دستگاه متعامد از چندجمله‌ای‌های هموار  $\|P_k\|_w = 1$  باشد، آنگاه دستگاه چندجمله‌ای‌های  $\{P_k\}_{k=0}^{\infty}$  را دستگاه متعامد یکه می‌نامیم. یعنی داشته باشیم

$$(P_n, P_m)_w = \int_a^b P_n(x)P_m(x)w(x)dx = \begin{cases} 1 & \text{اگر } m = n, \\ 0 & \text{اگر } m \neq n, \end{cases}$$

## ۷.۱ توابع لژاندر و کاربردهای آنها

معادله دیفرانسیل لژاندر از مرتبه  $n$  عبارت است از

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0, \quad (26.1)$$

که توابع لژاندر به عنوان جواب‌های این معادله، مطرح می‌شوند.

اگر معادله بالا، جوابی به صورت  $y = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k x^{k+\beta}$  داشته باشد، که به ازای  $k < 0$ ،  $c_k = 0$ ، آنگاه خواهیم داشت  $n(n+1)y = \sum_{k=-\infty}^{\infty} n(n+1)c_k x^{k+\beta}$  و  $-2xy' = \sum_{k=-\infty}^{\infty} -2(k+\beta)c_k x^{k+\beta}$  و هم‌چنین

$$\begin{aligned} (1-x^2)y'' &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (k+\beta)(k+\beta-1)c_k x^{k+\beta-2} - \sum_{k=-\infty}^{\infty} (k+\beta)(k+\beta-1)c_k x^{k+\beta} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (k+\beta+2)(k+\beta+1)c_{k+2} x^{k+\beta} - \sum_{k=-\infty}^{\infty} (k+\beta)(k+\beta-1)c_k x^{k+\beta}, \end{aligned}$$

آنگاه پس از جمع کردن داریم

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} [(k+\beta+2)(k+\beta+1)c_{k+2} - (k+\beta)(k+\beta-1)c_k - 2(k+\beta)c_k + n(n+1)c_k] x^{k+\beta} = 0,$$

و چون ضریب  $x^{k+\beta}$  باید صفر باشد، به دست می‌آوریم

$$(k+\beta+2)(k+\beta+1)c_{k+2} + [n(n+1) - (k+\beta)(k+\beta+1)]c_k = 0, \quad (27.1)$$

اگر قرار دهیم  $k = -2$ ، چون  $c_{-2} = 0$ ، معادله‌ی  $\beta(\beta-1)c_0 = 0$  را به دست می‌آوریم، که با فرض  $c_0 \neq 0$ ، داریم  $\beta = 0$  یا  $\beta = 1$ .

حالت ۱:  $\beta = 0$

در این حالت معادله (۲۷.۱) به

$$(k+2)(k+1)c_{k+2} + [n(n+1) - k(k+1)]c_k = 0, \quad (28.1)$$

تبدیل می‌شود. اگر در تساوی بالا به طور متوالی  $k = -1, 0, 1, 2, 3, \dots$  قرار دهیم در می‌یابیم که  $c_1$  دلخواه است در حالی که

$$c_2 = -\frac{n(n+1)}{2!}c_0, \quad c_3 = \frac{1 \times 2 - n(n+1)}{3!}c_1,$$

$$c_4 = \frac{[2 \times 3 - n(n+1)]}{4!} c_2, \dots$$

از این رو به دست می‌آوریم

$$y = c_0 \left[ 1 - \frac{n(n+1)}{2!} x^2 + \frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{4!} x^4 - \dots \right] + c_1 \left[ x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!} x^3 + \frac{(n-1)(n-3)(n+2)(n+4)}{5!} x^5 - \dots \right], \quad (29.1)$$

چون جوابی با دو ثابت دلخواه داریم، دیگر نیازی به بررسی حالت  $\beta = 1$  نیست.

به ازای یک عدد صحیح زوج  $n \geq 0$ ، نخستین سری از دو سری بالا در جایی خاتمه می‌یابد و یک جواب به شکل چندجمله‌ای به دست می‌آید. به ازای یک عدد صحیح فرد  $n > 0$  دومین سری نیز در جایی خاتمه می‌یابد و جوابی به شکل چندجمله‌ای به دست می‌آید. به این ترتیب به ازای هر عدد صحیح  $n \geq 0$  معادله‌ی نامبرده دارای جواب‌هایی به شکل چندجمله‌ای است.

حال با توجه به فرمول (28.1) می‌بینیم که اگر  $k = n$  باشد آنگاه  $c_{n+2} = 0$  است و به این ترتیب

$$c_{n+4} = 0, c_{n+6} = 0, \dots$$

بنابراین اگر قرار دهیم  $k = n - 2, n - 4, \dots$  با توجه به (28.1)، به دست می‌آوریم

$$c_{n-2} = -\frac{n(n-1)}{2(2n-1)} c_n,$$

$$c_{n-4} = -\frac{(n-2)(n-3)}{4(2n-3)} c_{n-2} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \times 4(2n-1)(2n-3)} c_n, \dots$$

که این‌ها منجر به جواب‌های چندجمله‌ای شکل به صورت

$$y = c_n \left[ x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \times 4(2n-1)(2n-3)} x^{n-4} - \dots \right],$$

می‌شوند که با انتخاب  $c_n = \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 3 \times 1}{n!}$ ، این چندجمله‌ای‌ها را چندجمله‌ای‌های لژاندر می‌نامیم

و با  $L_n(x)$  نمایش می‌دهیم یعنی داریم

$$L_n(x) = \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 1}{n!} \times \left\{ x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \times 4(2n-1)(2n-3)} x^{n-4} - \dots \right\}. \quad (30.1)$$

برخی از نخستین چندجمله‌ای‌های لژاندر به قرار زیر هستند:

$$L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = x, \quad L_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad L_3(x) = \frac{1}{4}(5x^3 - 3x), \quad \dots$$

در همه‌ی حالات  $L_n(1) = 1, L_n(-1) = (-1)^n$  است.

قضیه ۱.۷.۱. تابع مولد چندجمله‌ای‌های لژاندر  $\{L_n(x)\}$  عبارت است از [۱۴]

برهان. ثابت می‌کنیم که

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)t^n.$$

با استفاده از قضیه‌ی دو جمله‌ای

$$(1+v)^p = 1 + pv + \frac{p(p-1)}{2!}v^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}v^3 + \dots,$$

داریم

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} &= [1-t(2x-t)]^{-\frac{1}{2}} \\ &= 1 + \frac{1}{2}t(2x-t) + \frac{1 \times 3}{2 \times 4}t^2(2x-t)^2 + \frac{1 \times 3 \times 5}{2 \times 4 \times 6}t^3(2x-t)^3 + \dots, \end{aligned}$$

و ضریب  $t^n$  در این عبارت، برابر

$$\begin{aligned} \frac{1 \times 3 \times 5 \dots (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \dots 2n} (2x)^n - \frac{1 \times 3 \times 5 \dots (2n-3)}{2 \times 4 \times 6 \dots (2n-2)} \times \frac{(n-1)}{1!} (2x)^{n-2} \\ + \frac{1 \times 3 \times 5 \dots 2n-5}{2 \times 4 \times 6 \dots 2n-4} \times \frac{(n-2)(n-3)}{2!} (2x)^{n-4} - \dots, \end{aligned}$$

است که می‌توان آن را به صورت

$$\frac{1 \times 3 \times 5 \dots (2n-1)}{n!} \times \left\{ x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \times 4(2n-1)(2n-3)} x^{n-4} - \dots \right\},$$

نوشت و می‌دانیم که این مقدار برابر  $L_n(x)$  است. پس نتیجه‌ی مطلوب حاصل شد.  $\square$

### ۱.۷.۱ فرمول‌های بازگشتی برای چند جمله‌ای‌های لژاندر

قضیه ۲.۷.۱. چند جمله‌ای‌های لژاندر در رابطه‌ی بازگشتی زیر صدق می‌کنند.

$$L_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1}xL_n(x) - \frac{n}{n+1}L_{n-1}(x),$$

برهان. با توجه به تابع مولد لژاندر داریم

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)t^n, \quad (31.1)$$

پس از مشتق‌گیری نسبت به  $t$  داریم

$$\frac{x-t}{(1-2xt+t^2)^{\frac{3}{2}}} = \sum_{n=0}^{\infty} nL_n(x)t^{n-1},$$

اگر در  $1-2xt+t^2$  ضرب کنیم به دست می‌آوریم

$$\frac{x-t}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (1-2xt+t^2)nL_n(x)t^{n-1}, \quad (32.1)$$

حال می‌توان طرف چپ (۳۲.۱) را بر حسب (۳۱.۱) نوشت و خواهیم داشت

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x-t)L_n(x)t^n = \sum_{n=0}^{\infty} (1-2xt+t^2)nL_n(x)t^{n-1},$$

یعنی

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x)L_n(x)t^n - \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)t^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} nL_n(x)t^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} 2nxL_n(x)t^n + \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)t^{n+1},$$

اگر ضرایب  $t^n$  را در دو طرف با هم برابر قرار دهیم، به دست می‌آوریم

$$xL_n(x) - L_{n-1}(x) = (n+1)L_{n+1}(x) - 2nxL_n(x) + (n-1)L_{n-1}(x).$$

□ که نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.

### ۲.۷.۱ تعامد چندجمله‌ای‌های لژاندر

می‌خواهیم نشان دهیم که چندجمله‌ای‌های لژاندر، مجموعه‌ی متعامد تشکیل می‌دهند. برای این منظور قضیه زیر را بیان می‌کنیم

قضیه ۳.۷.۱. چندجمله‌ای‌های لژاندر متعامد هستند یعنی:

$$\int_{-1}^1 L_m(x)L_n(x)dx = 0 \quad \text{اگر } m \neq n.$$

برهان. چون  $L_m(x)$  و  $L_n(x)$  در معادله‌ی لژاندر صدق می‌کنند پس

$$(1-x^2)L_m'' - 2xL_m' + m(m+1)L_m = 0,$$

$$(1-x^2)L_n'' - 2xL_n' + n(n+1)L_n = 0,$$

آن‌گاه اگر معادله‌ی اول را در  $L_n$  و معادله‌ی دوم را در  $L_m$  ضرب کنیم و سپس آن‌ها را از هم کم کنیم، به دست می‌آوریم

$$(1-x^2)[L_nL_m'' - L_mL_n''] - 2x[L_nL_m' - L_mL_n'] = [n(n+1) - m(m+1)]L_mL_n,$$

که می‌توان آن را به صورت

$$(1-x^2)\frac{d}{dx}[L_nL_m' - L_mL_n'] - 2x[L_nL_m' - L_mL_n'] = [n(n+1) - m(m+1)]L_mL_n,$$

یا

$$\frac{d}{dx} \{ (1-x^2)[L_nL_m' - L_mL_n'] \} = [n(n+1) - m(m+1)]L_mL_n,$$

نوشت، به این ترتیب با انتگرال‌گیری داریم

$$[n(n+1) - m(m+1)] \int_{-1}^1 L_m(x)L_n(x)dx = (1-x^2)[L_nL_m' - L_mL_n'] \Big|_{-1}^1 = 0,$$

آن‌گاه چون  $m \neq n$ ،

$$\int_{-1}^1 L_m(x)L_n(x)dx = 0.$$

□

قضیه ۴.۷.۱. رابطه‌ی زیر برای چندجمله‌ای‌های لژاندر برقرار است. [۱۴]

$$\int_{-1}^1 [L_n(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1}.$$

برهان. با توجه به تابع مولد

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)t^n,$$

اگر هر دو طرف را مجذور کنیم داریم

$$\frac{1}{1-2tx+t^2} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} L_m(x)L_n(x)t^{m+n},$$

آنگاه اگر از ۱ تا ۱ انتگرال بگیریم داریم

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{1-2tx+t^2} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \int_{-1}^1 L_m(x)L_n(x)dx \right\} t^{m+n},$$

اگر نتیجه قضیه قبل را در طرف راست به کار ببریم و اگر در طرف چپ انتگرال گیری را انجام دهیم، به دست می آوریم

$$-\frac{1}{2t} \ln(1-2tx+t^2) \Big|_{-1}^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \int_{-1}^1 [L_n(x)]^2 dx \right\} t^{2n},$$

یا

$$\frac{1}{t} \ln \left( \frac{1+t}{1-t} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \int_{-1}^1 [L_n(x)]^2 dx \right\} t^{2n},$$

یعنی

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2t^{2n}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \int_{-1}^1 [L_n(x)]^2 dx \right\} t^{2n},$$

اگر ضرایب  $t^{2n}$  را برابر قرار دهیم، نتیجه می شود که

$$\int_{-1}^1 [L_n(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1}.$$

□

بسط هر تابع  $f \in L^2(-1, 1)$  توسط چندجمله ای های لژاندر به صورت زیر قابل بیان است

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k L_k(x),$$

قضیه ۵.۷.۱. ضرایب  $A_k$ ، در بسط تابع  $f$  توسط چندجمله ای های لژاندر به صورت زیر محاسبه می شوند [۱۴]

$$A_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 L_k(x) f(x) dx.$$

برهان. اگر سری مفروض را در  $L_m(x)$  ضرب کنیم و از ۱ تا ۱ انتگرال بگیریم، با استفاده از قضیه های (۳.۷.۱) و (۴.۷.۱) خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 L_m(x) f(x) dx &= \sum_{k=0}^{\infty} A_k \int_{-1}^1 L_m(x) L_k(x) dx \\ &= A_m \int_{-1}^1 [L_m(x)]^2 dx = \frac{2A_m}{2m+1}, \end{aligned}$$



پس همان طور که مطلوب بود

$$A_m = \frac{2m+1}{2} \int_{-1}^1 L_m(x) f(x) dx.$$

□

## ۸.۱ چندجمله‌ای‌های انتقال یافته‌ی لژاندر

حال به منظور استفاده از چندجمله‌ایهای لژاندر روی بازه‌ی  $[0, 1]$ ، چندجمله‌ایهای لژاندر انتقال یافته را با معرفی تغییر متغیر  $t = 2x - 1$ ، معرفی می‌کنیم. [۵، ۱۳]

فرض کنید چندجمله‌ایهای لژاندر انتقال یافته  $L_m(2x - 1)$  توسط  $P_m(x)$  نشان داده شود. آنگاه  $P_m(x)$  می‌تواند از رابطه بازگشتی زیر به دست آید:

$$(m+1)P_{m+1}(x) = (2m+1)(2x-1)P_m(x) - mP_{m-1}(x) \quad \text{برای } m = 1, 2, 3, \dots, \quad (33.1)$$

که در آن  $P_1(x) = 2x - 1$  و  $P_0(x) = 1$  است.

شکل تحلیلی چندجمله‌ایهای لژاندر انتقال یافته  $P_m(x)$  به این صورت است: [۵]

$$P_m(x) = \sum_{k=0}^m (-1)^{m+k} \frac{(m+k)! x^k}{(m-k)!(k!)^2},$$

و شرایط تعامد این چندجمله‌ای به این صورت می‌باشد

$$\int_0^1 P_m(x) P_n(x) dx = \begin{cases} \frac{1}{2m+1} & \text{اگر } m = n, \\ 0 & \text{اگر } m \neq n, \end{cases}$$

هر تابع انتگرال‌پذیر  $f(x)$  در بازه‌ی  $[0, 1]$  را می‌توان بر حسب چندجمله‌ای‌های انتقال یافته لژاندر به صورت زیر نوشت

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k P_k(x),$$

که در آن ضرایب  $c_k$  به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$c_k = (2k+1) \int_0^1 f(x) P_k(x) dx.$$

## فصل ۲

# آنالیز چند ریزه‌ساز و نظریه موجک‌ها

در فصل قبل سری فوریه و دستگاه چندجمله‌ای‌های متعامد برای تقریب توابع، معرفی شد و همگرایی آن‌ها مورد بررسی قرار گرفت. ویژگی‌های ذکر شده در مورد روش‌های سری فوریه و چندجمله‌ای‌های متعامد دارای برخی مشکلات و ضعف‌ها نیز هستند که به طور مختصر به آن‌ها اشاره می‌کنیم، سپس به منظور یافتن روش‌هایی که این نقاط ضعف را نداشته باشد نظریه موجک‌ها و پایه‌های موجکی را معرفی می‌کنیم. در پایان موجک‌ها<sup>۱</sup> به عنوان ساده‌ترین نوع موجک معرفی می‌شود و با استفاده از این ایده، نظریه آنالیز چند ریزه‌ساز که ساختار کلی برای ساختن موجک‌ها را ارائه می‌کند، بررسی می‌کنیم.

### ۱.۲ اشاره‌ای به نقاط ضعف

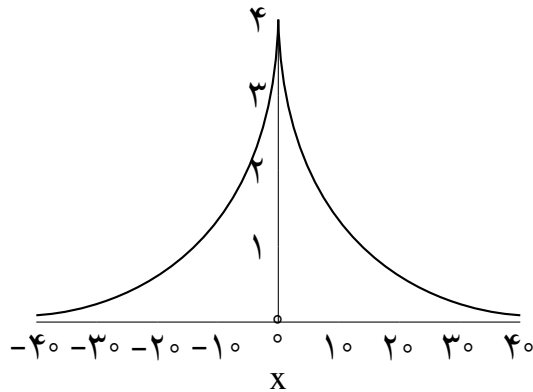
همان طور که در فصل قبل اشاره شد با استفاده از سری فوریه مثلثاتی هر تابع متناوب در فضای  $L^2[0, 2\pi]$  را می‌توان به صورت یک سری از توابع پایه‌ای سینوسی و کسینوسی با فرکانس‌های متفاوت نوشت. همچنین تقریب هر تابع هموار در فضای  $L^2[-1, 1]$  توسط چندجمله‌ای‌های لژاندر و در فضای  $L^2[0, 1]$  توسط چندجمله‌ای‌های لژاندر انتقال‌یافته را بررسی کردیم. ولی اگر تابع مورد بحث در بازه‌های فوق تحلیلی نباشد آن‌گاه استفاده از روش‌های طیفی برای تقریب چنین توابعی دقت لازم را ندارد. همانطور که در فصل قبل بیان شد اگر تابع متناوب در یک بازه متناهی  $[a, b]$  تحلیلی نباشد استفاده از سری فوریه منجر به پدیده گیپس می‌شود. راجع به پایه‌های غیرمتناوب چندجمله‌ای‌های متعامد مانند لژاندر نیز می‌توان نتایج مشابهی بیان کرد [۳]. بنابراین در حالت کلی می‌توان نتیجه گرفت در مواردی که تابع تحلیلی نیست روش‌های طیفی از دقت خوبی برخوردار نیستند و باید از روش‌های دیگری و پایه‌های متفاوتی برای تقریب استفاده کرد. استفاده از پایه‌های متعامد موجک برای تقریب توابع غیر تحلیلی می‌تواند این مشکل را برطرف کند.

سری فوریه برای نمایش توابع متناوب را در نظر بگیرید. در این سری پایه‌ها به صورت زیر است:

$$w_n(x) = e^{inx} = \cos(nx) + i \sin(nx), \quad (1.2)$$

<sup>۱</sup>Haar wavelet

برای اعداد صحیح  $n$  با اندازه بزرگ، تابع  $w_n(x)$  یک موج با فرکانس بالا و برای اعداد صحیح  $n$  با اندازه کوچک، تابع  $w_n(x)$  یک موج با فرکانس پایین است. بنابراین هر تابع متناوب در فضای  $L^2[0, 2\pi]$  را می‌توان به صورت یک سری از این توابع موجی با فرکانس‌های متفاوت نوشت. به عبارتی دیگر، وجود این توابع پایه‌ای برای تقریب یک تابع متناوب در بازه  $[0, 2\pi]$  با دقت دلخواه، کافی است. با این حال توابع پایه‌ای  $w_n(x)$  در سری فوریه در کل دامنه حقیقی  $R$  فراگیر هستند و قادر به نمایش رفتارهای موضعی توابع نیستند. برای مثال شکل (۱.۲) را در نظر بگیرید: این تابع غیر متناوب است و در مبدا



شکل ۱.۲: نمودار تابع غیرمتناوب

دارای یک برجستگی<sup>۲</sup> می‌باشد، در حالی که در هر بازه‌ای که به مبدا نزدیک نباشد تابع دارای نوسان و مقادیر کمتری نسبت به برجستگی تابع در مبدا می‌باشد. چون توابع پایه‌ای  $w_n(x)$  متناوب هستند و دارای خاصیت موضعی نمی‌باشند برای تقریب تابع در نزدیکی مبدا توسط سری فوریه به توابع پایه‌ای با فرکانس زیاد و وقتی که از مبدا فاصله داشته باشیم به توابع پایه‌ای با فرکانس کمتر نیاز داریم. در نتیجه برای تقریب تابع در کل دامنه، سری فوریه دچار دوگانگی در استفاده از توابع پایه‌ای می‌شود و قادر به تقریب دقیق این نوع توابع نیست. بنابراین برای تقریب این نوع توابع باید از توابع پایه‌ای متفاوتی استفاده کرد.

## ۲.۲ تاریخچه‌ای کوتاه از موجک‌ها

در سال ۱۹۷۰ ژئوفیزیک‌دان فرانسوی به نام مورله<sup>۳</sup> متوجه شد که پایه‌های فوریه بهترین ابزار ممکن برای تحلیل سیگنال‌ها در اکتشافات زیر زمینی نیستند و این موضوع منجر به کشف تبدیل‌های موجک شد. او یک روش جایگزین برای تبدیل فوریه مطرح کرد. در همین سال‌ها فیزیک‌دانی نظری، به نام گراسمان<sup>۴</sup> که به طور گسترده در زمینه‌های مکانیک کوانتومی کار می‌کرد و با مشکلات مشابهی در کاربرد

<sup>۲</sup>Peak

<sup>۳</sup>Morlet

<sup>۴</sup>Grossmann

تبدیلات فوریه مواجه بود، متوجه شد که تبدیلات فوریه مورله، مشابه روشی است که او به خوبی در مکانیک کوانتومی مورد استفاده قرار داده است. او یک فرمول دقیق برای تبدیلات مورله ساخت و سپس کاربردهای زیادی را بر روی این موضوع مورد بررسی قرار داد. در بهار ۱۹۸۵ میر<sup>۵</sup> که ریاضیدانی در حوزه ریاضی محض بود، چیزهایی راجع به کار مورله و گراسمان شنید. وقتی که او مقالات آن‌ها را مطالعه کرد متوجه شد که تحلیل و فرمول‌های آن‌ها، اصلاح فرمولی است که کالدرون<sup>۶</sup> در دهه‌ی شصت آن را در آنالیز هارمونیک معرفی کرده است. میر که یک متخصص برجسته در زمینه خود بود، متوجه رابطه تبدیلات مورله با آنالیز هارمونیک شد و به این بحث جدید در زمینه آنالیز هارمونیک علاقه‌مند شد، همچنین او شیفته‌ی تعبیر متفاوت گراسمان و مورله از فرمول کالدرون شد. میر با آن‌ها تماس برقرار کرد، و این آغاز یک فعل و انفعال بین محققان در زمینه‌ی آنالیز هارمونیک و محققان کاربردی بود که هر دو طرف از این بهره بردند. سرانجام با گسترش موجک‌های متعامد یکه با محمل فشرده توسط دابشی<sup>۷</sup>، شالوده‌ی نظریه مدرن موجک‌ها پیریزی شد. با وجود تمام کارهایی که توسط مورله، میر، گراسمان و دابشی در زمینه‌ی موجک‌ها انجام شد آن‌ها اولین کاشفان موجک نبودند بلکه این افتخار به سال ۱۹۰۹ و به آلفرد هار<sup>۸</sup> ریاضیدان آلمانی برمی‌گردد که ساده‌ترین و قابل فهم‌ترین نوع موجک‌های متعامد را در رساله‌ی دکتری خود معرفی کرد. موجک‌های معرفی شده توسط هار که در حال حاضر نیز به نام او معرفی می‌شوند با وجود سادگی، دارای کاربردهای علمی کمی هستند.

موجک‌ها دارای کاربردهای فراوانی در زمینه‌های مختلف علمی هستند که در بخش بعد به طور مختصر به آن‌ها اشاره می‌کنیم.

## ۳.۲ کاربردهایی برای موجک‌ها

تکنولوژی روز بر پایه انتقال داده از یک مکان به مکان دیگر بنا نهاده شده است. بنابراین ذخیره و نمایش اطلاعات با کمترین حجم ممکن دارای اهمیت بسیار زیادی است. هر چه اطلاعات، با حجم کمتر و دقت بیشتری انتقال داده شود تکنولوژی نیز پیشرفت بیشتری خواهد داشت. این موضوع محققان را بر آن داشت تا پایه‌هایی را معرفی کنند که قابلیت ذخیره و نمایش اطلاعات در حداقل حجم و حداکثر دقت ممکن را داشته باشند. از سال ۱۹۸۰ به بعد موجک‌ها به عنوان پایه‌هایی که دارای این ویژگی هستند برای نمایش و ذخیره اطلاعات به کار رفته‌اند. پایه‌های موجکی با توجه به ساختاری که دارند می‌توانند داده‌ها را در حجم کم و با دقت بالا ذخیره کنند. به علاوه موجک‌ها قادرند با استفاده از تعداد پایه‌های کمتری توابع را بازسازی کنند. موجک‌ها با توجه به ساختارشان قادرند بر روی رفتارهای محلی توابع تمرکز کنند، بنابراین از آن‌ها می‌توان در پردازش تصاویر و در حوزه پزشکی برای شناسایی تومورهای بالقوه استفاده کرد. همچنین موجک‌ها در رادار و ردیابی تصاویر برای مشخص کردن مرز حوزه‌های نفتی زیر زمینی و در باستان‌شناسی برای تعیین مکان اشیا مورد استفاده قرار می‌گیرند.

<sup>۵</sup>Meyer

<sup>۶</sup>Calderon

<sup>۷</sup>Daubechies

<sup>۸</sup>Alfred Haar

در تحلیل و پردازش تصاویر ویدئویی نیز می‌توان از موجک‌ها استفاده کرد. تلفن‌های تصویری در حال حاضر خیلی مورد استقبال قرار نمی‌گیرند زیرا امکان انتقال دنباله‌ای از تصاویر با کیفیت بالا توسط خطوط تلفن امکان پذیر نیست و حجم این تصاویر از ظرفیت خطوط تلفن بیشتر می‌باشد. ولی اگر تصاویر ویدئویی فشرده شوند یا توسط یک مجموعه از داده‌ها با حجم کمتر ذخیره شوند بدون اینکه کیفیت تصاویر صدمه جدی ببینند، استفاده از تلفن‌های تصویری نیز امکان‌پذیر خواهند بود. استفاده از موجک‌ها، با توجه به خواص فشرده‌سازی خوبی که دارند، برای این کار می‌توانند بسیار مفید باشد.

موجک‌ها به فشرده‌سازی تصاویر نیز کمک می‌کنند. در تصاویر تلویزیونی صحنه‌های مختلف معمولاً در جزئیات کمی با هم تفاوت دارند. به عنوان مثال در صحنه‌های تلویزیونی چارچوب تصاویر ثابت است و ممکن است که فقط یک عضو از بدن یک شخص از یک صحنه به صحنه دیگر جابجا شود. بنابراین به جای ذخیره و انتقال کل صحنه جدید، فقط تفاوت‌های صحنه‌ها باید انتقال داده شوند. اگر از موجک‌ها استفاده شود، ضرایب موجک‌هایی که در تصاویر مشابه‌اند تغییری نمی‌کند و فقط تفاوت‌های کوچک در صحنه‌های متفاوت بروز می‌کنند. از آنجایی که موجک‌ها می‌توانند بر روی ناحیه مشخصی از تصاویر متمرکز شوند، این به روزرسانی فقط با تعداد داده کمی قابل انجام است.

تبدیل موجک‌ها برای ذخیره دیجیتال اثر انگشت در اف بی آی<sup>۹</sup> مورد استفاده قرار گرفته‌اند. اثر انگشت‌ها در اف بی آی باید به صورت الکترونیک ذخیره می‌شد تا در مواقع ضروری در دسترس باشند. برای ذخیره اثرات انگشت یک نفر به صورت کامل به حدود ۱۰ مگابایت حافظه نیاز بود. حال اگر قرار بود اثرات انگشت حدود ۲۰۰ میلیون نفر ذخیره شود تقریباً ۲۰۰۰ ترابایت حافظه نیاز بود و این کار عملاً غیر ممکن بود. در نهایت یک گروه تحقیقاتی از آزمایشگاه ملی لوس آلاموس<sup>۱۰</sup> با استفاده از موجک‌ها این کار را با استفاده از  $\frac{1}{3}$  حافظه مورد نیاز انجام دادند. برای بررسی جزئیات به [۴] رجوع شود. همچنین مریخ‌نوردان ناسا از تبدیلات موجک برای فشرده‌سازی تصاویر ارسالی خود استفاده می‌کنند.

از دیگر کاربردهای جالب موجک‌ها، استفاده از تبدیلات موجک برای طراحی نرم‌افزارهای ذخیره فایل‌ها با حجم کم است. جی‌پی‌ئی‌جی<sup>۱۱</sup> که یک روش استاندارد و متداول در رایانه، برای فشرده‌سازی پرونده‌های گرافیکی است با استفاده از تبدیلات موجک تصاویر را فشرده‌سازی می‌کند به طوری که می‌توان آن‌ها را دوباره به حالت تصویری و قالب اولیه بازگرداند. امروزه قالب جی‌پی‌ئی‌جی متداولترین روش برای ذخیره فایل‌های تصویری است. همچنین دژوی‌یو که یک قالب برای فایل‌های رایانه‌ای است و کاربرد اصلی آن در ذخیره‌سازی تصاویر اسکن شده‌ی دارای نوشته و ترسیم‌های خطی با حجم کم است، از تبدیلات موجک برای فشرده‌سازی فایل‌ها کمک می‌گیرد.

<sup>۹</sup>FBI

<sup>۱۰</sup>Los alamos national laboratory

<sup>۱۱</sup>JPEG(Joint photographic experts group)

## ۴.۲ موجک هار

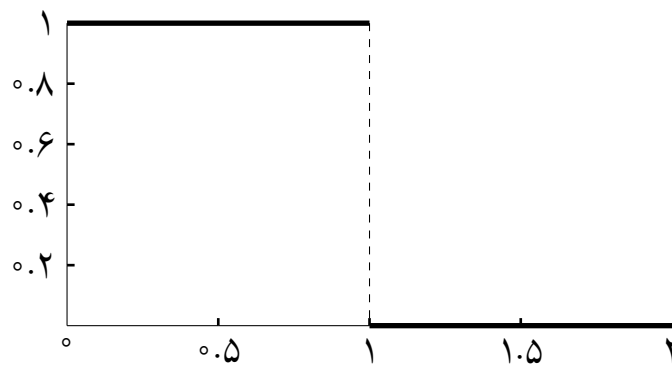
در سال ۱۹۰۹ هار با استفاده از انتقال و اتساع تابع پله‌ای واحد یک مجموعه از پایه‌های متعامد یکه برای فضای  $L^2(R)$  ساخت. موجک هار ساده‌ترین نوع پایه‌های موجک متعامد است. در این بخش ابتدا به طور مختصر روش ساختن پایه‌های موجک هار مورد بررسی قرار می‌گیرد، سپس با استفاده از ایده‌ی هار یک روش و ساختار کلی برای ساختن موجک‌ها ارایه می‌شود.

در نظریه موجک‌ها دو تابع نقش اساسی دارند، تابع مقیاس<sup>۱۲</sup>  $\phi$  و تابع موجک  $\psi$ . با استفاده از انتقال<sup>۱۳</sup> و اتساع‌های<sup>۱۴</sup> این دو تابع، مجموعه پایه‌های موجک ساخته می‌شوند. تابع مقیاس  $\phi$  را تابع موجک پدر و تابع موجک  $\psi$  را تابع موجک مادر می‌نامند.

تعریف ۱.۴.۲. تابع مقیاس هار به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, 1), \\ 0 & \text{جاهای دیگر,} \end{cases} \quad (۲.۲)$$

در واقع تابع مقیاس هار همان تابع پله‌ای واحد است. که نمودار این تابع در شکل (۲.۲) رسم شده است. با انتقال و اتساع تابع مقیاس  $\phi$ ، مجموعه توابع  $\{\phi(2^j x - k) \mid j, k \in \mathbb{Z}\}$  ساخته می‌شوند.



شکل ۲.۲: تابع مقیاس هار

برای ثابت‌های  $j, k$  تابع  $\phi(2^j x - k)$  یک تابع تکه‌ای است که عرض آن به اندازه  $2^{-j}$  فشرده شده و به اندازه  $k2^{-j}$  یا  $\frac{k}{2^j}$  انتقال داده شده است و خارج از بازه  $I_{j,k} = \left[\frac{k}{2^j}, \frac{(k+1)}{2^j}\right)$  صفر است. برای مثال نمودار توابع  $\phi(2x)$  و  $\phi(2x - 1)$  در شکل (۳.۲) رسم شده است.

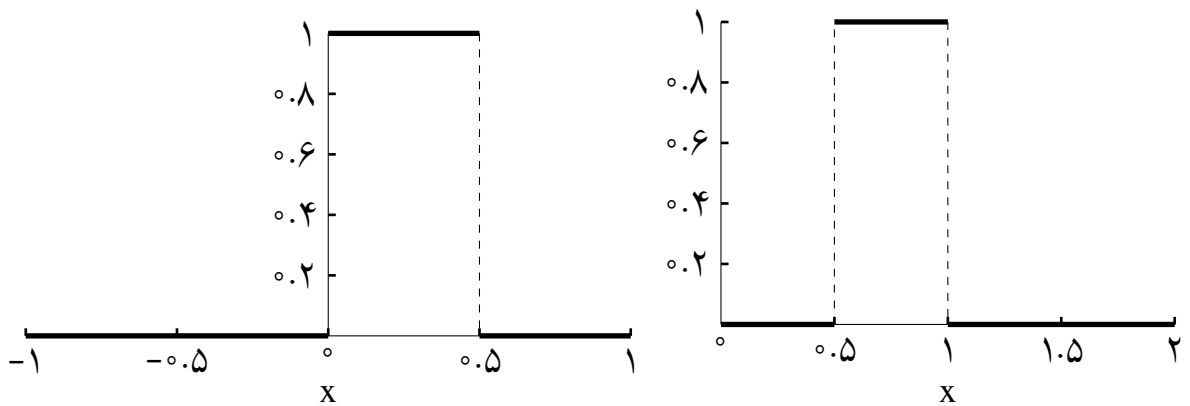
نمودار سمت راست نشان‌دهنده‌ی تابع  $\phi(2x - 1)$  است و نمودار سمت چپ تابع  $\phi(2x)$  را نشان می‌دهد.

تعریف ۲.۴.۲. محمل تابع  $f$  را که با  $\text{supp } f$  نشان می‌دهیم برابر است با  $\overline{\{x : f(x) \neq 0\}}$ .

<sup>۱۲</sup>Scale function

<sup>۱۳</sup>Translation

<sup>۱۴</sup>Dilation



شکل ۳.۲: نمودارهای تابع  $\phi(2x)$  و  $\phi(2x - 1)$

برای هر تابع  $f$  روی  $\mathbb{R}$ ،  $f_{j,k}$  را چنین تعریف می‌کنیم:

$$f_{j,k}(x) = \sqrt{2^j} f(2^j x - k), \quad x \in \mathbb{R}, \quad j, k \in \mathbb{Z}$$

برای  $j = 0$  داریم  $f_{0,k}(x) = f(x - k)$ ، که این برای  $k > 0$  انتقال نمودار به سمت راست و برای  $k < 0$  انتقال نمودار به سمت چپ را نمایش می‌دهد. همچنین برای  $k = 0$  داریم  $f_{j,0}(x) = \sqrt{2^j} f(2^j x)$  یعنی برای  $j > 0$  منقبض (فشرده) کردن نمودار و برای  $j < 0$  منبسط کردن (کشیدن) نمودار را بیان می‌کند.

توجه کنید به عنوان مثال برای  $j = 1$  داریم  $f_{1,k}(x) = \sqrt{2} f(2x - k)$  و این بدین معنی است که به ترتیب ترکیب‌های زیر را انجام دهیم:

$$x \mapsto f(x - k) \mapsto f(2x - k) \mapsto \sqrt{2} f(2x - k).$$

ملاحظه ۳.۴.۲. اگر  $a$  و  $b$  اعداد حقیقی باشند، عملگرهای انتقال و اتساع را روی  $L^2(\mathbb{R})$  چنین تعریف می‌کنیم:

$$T_a : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}), \quad (T_a f)(x) = f(x - a),$$

$$D_b : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}), \quad (D_b f)(x) = \sqrt{b} f(bx),$$

حال با توجه به تعریف تابع مقیاس هار و تعریف بالا،  $\phi_{j,k}(x)$  را به صورت در نظر می‌گیریم:

$$\phi_{j,k}(x) = \begin{cases} \sqrt{2^j} & x \in \left[ \frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j} \right) \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases} \quad (3.2)$$

توجه داریم که برای  $j$  ثابت هرگاه  $k \neq l$  باشد آنگاه محمل‌های  $\phi_{j,k}$  و  $\phi_{j,l}$  مجزایند یعنی برای  $k \neq l$  مجموعه  $\left[ \frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j} \right) \cap \left[ \frac{l}{2^j}, \frac{l+1}{2^j} \right) = \emptyset$  است بنابراین

$$(\phi_{j,k}, \phi_{j,l}) = \int_{\mathbb{R}} \phi_{j,k}(x) \phi_{j,l}(x) dx = 0.$$

به طور مشابه می‌توان نشان داد که برای  $j \neq m$ ،  $(\phi_{j,k}, \phi_{m,k}) = 0$  از طرفی داریم

$$\|\phi_{j,k}\|_2^2 = (\phi_{j,k}, \phi_{j,k}) = \int_{\mathbb{R}} \phi_{j,k}(x)\phi_{j,k}(x)dx = \int_{\frac{k}{2^j}}^{\frac{k+1}{2^j}} (\sqrt{2^j})^2 dx = 1.$$

بنابراین خانواده‌ی  $\{\phi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}$  یک مجموعه متعامد یکه در  $L^2(\mathbb{R})$  تشکیل می‌دهد. فرض کنیم

$$V_j = \text{span}\{\phi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\} = \text{span}\{\sqrt{2^j}\phi(2^j x - k) : k \in \mathbb{Z}\}.$$

در این صورت  $\{\phi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}$  یک پایه‌ی متعامد یکه برای  $V_j$  است. به عبارتی  $V_j$  فضای توابع تکه‌ای با محمل فشرده است که در نقاط  $\{\frac{k}{2^j} | k \in \mathbb{Z}\}$  ناپیوسته‌اند. با توجه به تعریف فوق فضای  $V_0$  شامل توابع تکه‌ای ثابت است که در مجموعه اعداد صحیح ناپیوسته‌اند و فضای  $V_1$  شامل توابع تکه‌ای ثابت هستند که در مجموعه اعداد  $\{\dots, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \dots\}$  ناپیوسته‌اند.

قضیه ۴.۴.۲. هر تابع  $f \in L^2(\mathbb{R})$  را می‌توان توسط توابع پیوسته با دقت دلخواه تقریب زد.

برای اثبات می‌توانید به [۱] رجوع کنید.

قضیه ۵.۴.۲. هر تابع پیوسته را می‌توان توسط توابع پله‌ای در  $V_j$ ها با دقت دلخواه تقریب زد، یعنی برای هر تابع پیوسته  $f$  و هر  $\epsilon > 0$ ، یک اندیس  $j$  و یک تابع  $g \in V_j$  وجود دارد به طوری که

$$\|f - g\|_2 < \epsilon.$$

برای اثبات به [۱] رجوع کنید.

## ۵.۲ آنالیز چند ریزه‌ساز

آنالیز چند ریزه‌ساز<sup>۱۵</sup> (یا تقریب چند ریزه‌ساز<sup>۱۶</sup>) برای  $L^2(\mathbb{R})$  یک دنباله‌ی  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  از زیر فضاهای بسته‌ی خطی  $L^2(\mathbb{R})$  است که در شرایط قضیه (۱.۵.۲) صدق کند:

قضیه ۱.۵.۲. دنباله‌ی  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  که به صورت  $V_j = \text{span}\{\phi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}$  ساخته می‌شود در شرایط زیر صدق می‌کند

(الف)  $\forall j \in \mathbb{Z} \quad V_j \subset V_{j+1}$

(ب)  $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$  (چگال بودن) و  $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$  (تفکیک پذیری)

(ج)  $\forall j \in \mathbb{Z} \quad f(x) \in V_j$  اگر و تنها اگر  $f(2x) \in V_{j+1}$

(د)  $\forall k \in \mathbb{Z} \quad f(x) \in V_0$  اگر و تنها اگر  $f(x - k) \in V_0$

<sup>۱۵</sup>Multiresolution analysis

<sup>۱۶</sup>Multiresolution approximation

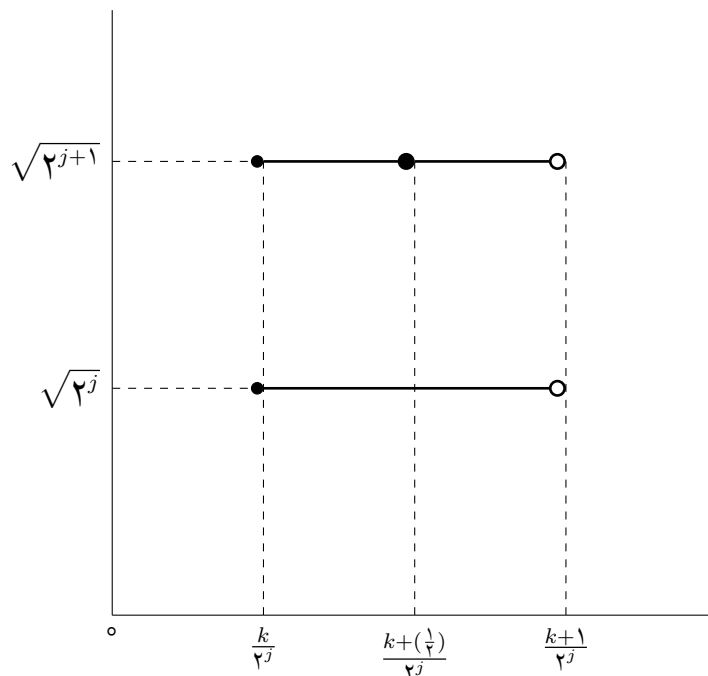


ه) تابعی مانند  $\phi \in V_0$  وجود دارد به طوری که خانواده‌ی  $\{\phi(x-k) : k \in \mathbb{Z}\}$  یک پایه‌ی متعامد یکه برای  $V_0$  است.

برهان. الف) هرگاه  $f(x) \in V_j$  باشد با توجه به اینکه  $\{\phi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}$  پایه‌ی متعامد یکه برای  $V_j$  است داریم  $f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \phi_{j,k}(x)$  ،  $a_k \in \mathbb{R}$  . اما با توجه به شکل (۴.۲) داریم:

$$\begin{aligned} \phi_{j,k}(x) &= \begin{cases} \sqrt{2^j} & \text{اگر } x \in \left[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j}\right), \\ 0 & \text{سایر جاها,} \end{cases} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \phi_{j+1,2k}(x) + \frac{1}{\sqrt{2}} \phi_{j+1,2k+1}(x), \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{cases} \sqrt{2^{j+1}} & \text{اگر } x \in \left[\frac{2k}{2^{j+1}}, \frac{2k+1}{2^{j+1}}\right), \\ 0 & \text{سایر جاها,} \end{cases} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{cases} \sqrt{2^{j+1}} & \text{اگر } x \in \left[\frac{2k+1}{2^{j+1}}, \frac{2k+2}{2^{j+1}}\right), \\ 0 & \text{سایر جاها,} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \sqrt{2^j} & \text{اگر } x \in \left[\frac{k}{2^j}, \frac{k+\frac{1}{2}}{2^j}\right), \\ 0 & \text{سایر جاها,} \end{cases} + \begin{cases} \sqrt{2^j} & \text{اگر } x \in \left[\frac{k+\frac{1}{2}}{2^j}, \frac{k+1}{2^j}\right), \\ 0 & \text{سایر جاها,} \end{cases} \end{aligned}$$

البته توجه داریم، همان طور که قبلاً گفته شد، چون  $2k \neq 2k+1$  است پس محمل‌های  $\phi_{j+1,2k}$



شکل ۴.۲: نمودار تابع  $\phi_{j,k}(x)$

و  $\phi_{j+1,2k+1}$  مجزایند یعنی  $\left[\frac{2k}{2^{j+1}}, \frac{2k+1}{2^{j+1}}\right) \cap \left[\frac{2k+1}{2^{j+1}}, \frac{2k+2}{2^{j+1}}\right) = \emptyset$  تهی است.

پس

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \phi_{j+1, 2k}(x) + \frac{1}{\sqrt{2}} \phi_{j+1, 2k+1}(x) \right) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k \phi_{j+1, k}(x). \end{aligned}$$

که در آن

$$b_k = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} a_{\frac{k}{2}} & \text{اگر } k \text{ زوج باشد,} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} a_{\frac{k-1}{2}} & \text{اگر } k \text{ فرد باشد,} \end{cases}$$

(ب) هرگاه  $f \in V_j$ ، آن‌گاه برای هر  $k \in \mathbb{Z}$ ،  $c_{j,k}$  ثابتی وجود دارد که

$$f(x) = c_{j,k}, \quad x \in \left[ \frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j} \right) \quad (۴.۲)$$

بنابراین از تعریف  $V_j$  ها نتیجه می‌شود که  $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j$  شامل مجموعه‌ی همه‌ی توابع ساده است که در  $L^2(\mathbb{R})$  چگال است، پس  $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$ . حال فرض کنیم که  $f \in \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j$ . هرگاه  $a_1 > a_2 > 0$  داده شده باشند، آن‌گاه با گرفتن  $k = 0$  در (۴.۲)،  $l \in \mathbb{Z}$  ای وجود دارد به طوری که

$a_1, a_2 \in [0, 2^{-l})$ . بنا به فرض  $f \in V_l$ ، پس  $f(a_1) = f(a_2)$ . در نتیجه  $f$  روی  $\mathbb{R}^+$  ثابت است. به روشی مشابه ثابت می‌شود که  $f$  روی  $\mathbb{R}^-$  نیز ثابت است. حال چون  $f \in L^2(\mathbb{R})$  است، پس هرگاه  $c_1 = c_2 = 0$  برای  $f(x) = c_1$  برای  $x \in \mathbb{R}^+$  و  $f(x) = c_2$  برای  $x \in \mathbb{R}^-$ ، آن‌گاه

$$\int_{\mathbb{R}^+} c_1^2 dx + \int_{\mathbb{R}^-} c_2^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx < \infty,$$

در نتیجه  $c_1 = c_2 = 0$  و بنابراین  $f = 0$  و  $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$ .

(ج) هرگاه  $f \in V_j$ ، آن‌گاه

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \phi_{j,k}(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

که  $a_k$  ها حقیقی هستند و  $\phi_{j,k}$  نیز در تعریف (۳.۲) آورده شده است. از طرفی می‌دانیم  $D_2 f(x) = \sqrt{2} f(2x)$ ، پس داریم

$$\begin{aligned} f(2x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} D_2 f(x) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{2} \phi_{j,k}(2x)) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sqrt{2} \begin{cases} \sqrt{2^j} & \text{اگر } 2x \in \left[ \frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j} \right) \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases} \right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{cases} \sqrt{2^{j+1}} & \text{اگر } x \in \left[ \frac{k}{2^{j+1}}, \frac{k+1}{2^{j+1}} \right) \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases} \end{aligned}$$

پس

$$f(2x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \frac{1}{\sqrt{2}} \phi_{j+1, k}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \phi_{j+1, k}(x),$$

که در آن  $c_k = \frac{a_k}{\sqrt{\varphi}}$  . در نتیجه  $f(\varphi x) \in V_{j+1}$  بر عکس، هرگاه  $f(x) \in V_{j+1}$  ، آن‌گاه

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k \phi_{j+1,k}(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

که  $b_k$  ها حقیقی‌اند و بنابراین

$$f\left(\frac{x}{\varphi}\right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k \phi_{j+1,k}\left(\frac{x}{\varphi}\right),$$

از (۳.۲) نتیجه می‌شود که

$$\phi_{j+1,k}\left(\frac{x}{\varphi}\right) = \begin{cases} \sqrt{\varphi^{j+1}} & \text{اگر } \frac{x}{\varphi} \in \left[\frac{k}{\varphi^{j+1}}, \frac{k+1}{\varphi^{j+1}}\right), \\ 0 & \text{سایر جاها,} \end{cases}$$

پس

$$f\left(\frac{x}{\varphi}\right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k \sqrt{\varphi} \phi_{j,k}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_k \phi_{j,k}(x),$$

که در آن  $d_k = \sqrt{\varphi} b_k$  و در نتیجه  $f\left(\frac{x}{\varphi}\right) \in V_j$

(د) هرگاه  $f \in V_0$  ، آن‌گاه

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \phi_{0,k}(x),$$

در نتیجه

$$f(x-l) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \phi_{0,k}(x-l) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k T_l \phi_{0,k}(x),$$

از طرفی داریم

$$\phi_{0,k}(x) = \begin{cases} 1 & x \in [k, k+1), \\ 0 & \text{سایر جاها,} \end{cases}$$

و هم‌چنین می‌دانیم

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, 1), \\ 0 & \text{سایر جاها,} \end{cases}$$

و داریم

$$T_k \phi(x) = \phi(x-k) = \begin{cases} 1 & x \in [k, k+1), \\ 0 & \text{سایر جاها,} \end{cases}$$

بنابراین  $T_k \phi(x) = \phi_{0,k}(x)$  است. حال چون داریم

$$T_l \phi_{0,k}(x) = T_l T_k \phi(x) = \phi(x-(l+k)) = T_{l+k} \phi(x) = \phi_{0,l+k}(x),$$

پس

$$f(x-l) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \phi_{0,l+k}(x),$$

یعنی  $f(x-l) \in V_0$  .

ه) ادعا می‌کنیم که تابع مقیاس هار، یعنی  $\phi$ ، جواب است و برای اثبات کافی است در بحث قبل از قضیه (۴.۴.۲)، یعنی بحث متعامد یکه بودن  $\phi_{j,k}$  و تعریف  $V_j$ ،  $j = 0$  اختیار شود.

□

ملاحظه ۲.۵.۲. الف) شرط ۳ قضیه (۱.۵.۲) معادل است با:

$$f \in V_j \quad \text{اگر و تنها اگر} \quad D_{\nu} f \in V_{j+1}, j \in \mathbb{Z}$$

$$. D_{\nu}(V_j) = V_{j+1} \quad \text{یعنی}$$

ب) عملگرهای  $T_a$  و  $D_b$  یکانی هستند.

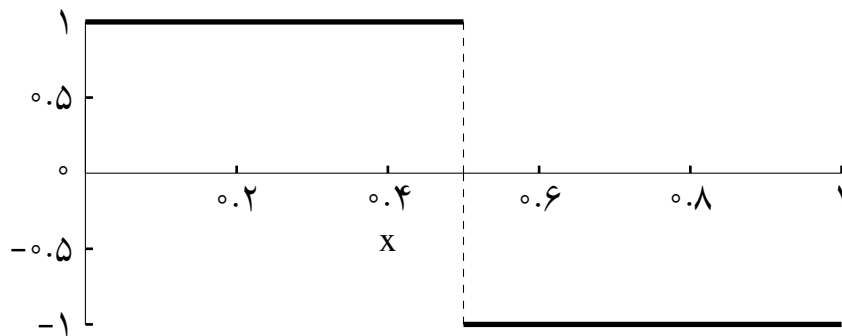
## ۶.۲ پایه موجکی

به کمک خاصیت تودرتویی  $V_j$  ها می‌توان یک پایه متعامد برای فضای  $L^2(\mathbb{R})$  ساخت. این کار با کمک تابع موجک هار امکان پذیر است.

تعریف ۱.۶.۲. فرض کنید  $\phi$  تابع مقیاس هار باشد، تابع

$$\psi(x) = \phi(2x) - \phi(2x - 1) = \begin{cases} 1 & x \in [0, \frac{1}{2}), \\ -1 & x \in [\frac{1}{2}, 1), \\ 0 & \text{سایر جاها,} \end{cases}$$

تابع هار یا تابع موجک هار نامیده می‌شود. نمودار این تابع در شکل (۵.۲) رسم شده است.



شکل ۵.۲: نمودار تابع  $\psi(x)$

فرض کنید  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  یک آنالیز چندریزه‌ساز برای  $L^2(\mathbb{R})$  باشد، بنا به شرط ۱ قضیه (۱.۵.۲)، داریم  $V_j \subset V_{j+1}$ ،  $j \in \mathbb{Z}$ . فرض کنید

$$W_j = \{f \in V_{j+1} : f \perp V_j\},$$

در این صورت  $W_j = V_{j+1} \cap V_j^\perp$  و  $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$  است، یعنی هر  $f \in V_{j+1}$  را می‌توان به صورت یکتای  $f = f_j + g_j$  نوشت که  $f_j \in V_j$  و  $g_j \in W_j$  است. از تعریف  $W_j$  در بالا نتیجه می‌شود که برای همه  $l < j$ ،

$$W_l \subset V_{l+1} \subset V_j, \quad W_j \perp V_j,$$

در نتیجه  $W_j \perp W_l$ ، به عبارت دیگر برای  $l \neq j$  است. بنابراین

$$\begin{aligned} V_{j+1} &= V_j \oplus W_j \\ &= V_{j-1} \oplus W_{j-1} \oplus W_j \\ &\vdots \\ &= \dots \oplus W_{j-2} \oplus W_{j-1} \oplus W_j = \bigoplus_{l=-\infty}^{l=j} W_l, \quad j \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

پس داریم

$$\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j \subset \dots \oplus W_{-1} \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus \dots \subset L^2(\mathbb{R}),$$

چون  $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$ ، در نتیجه

$$L^2(\mathbb{R}) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \oplus W_j, \quad (5.2)$$

تساوی (۵.۲) نشان می‌دهد که برای یافتن پایه‌ی متعامد یکه برای  $L^2(\mathbb{R})$ ، کافی است برای هر  $W_j$  پایه‌ی متعامد یکه بیابیم، بنابراین مساله به این صورت تبدیل می‌شود که تابع  $\psi$  را طوری بیابیم که

$$\psi_{j,k} = \begin{cases} \sqrt{2^j} & x \in \left[ \frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j} \right), \\ -\sqrt{2^j} & x \in \left[ \frac{k+1}{2^j}, \frac{k+1}{2^j} \right), \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

یک پایه‌ی متعامد یکه برای  $W_j$  باشد.

**قضیه ۲.۶.۲.** فرض کنید  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  یک آنالیز چندریزه‌ساز برای  $L^2(\mathbb{R})$  است و هم‌چنین  $\{\psi(x-k) : k \in \mathbb{Z}\}$  پایه‌ی متعامد یکه برای  $W_0 = V_1 \cap V_0^\perp$  باشد. آنگاه

(الف) برای هر  $j \in \mathbb{Z}$ ،  $\{\psi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\} = \{\sqrt{2^j} \psi(2^j x - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ ، پایه‌ی متعامد یکه برای  $W_j = V_{j+1} \cap V_j^\perp$  است.

(ب)  $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$  پایه‌ی متعامد یکه برای  $L^2(\mathbb{R})$  است، یعنی  $\psi$  یک موجک می‌باشد.

برهان. الف) داریم

$$D_{\sqrt{2}^j} \psi_{\circ, l} = \sqrt{\sqrt{2}^j} \psi_{\circ, l}(\sqrt{2}^j x) = \sqrt{\sqrt{2}^j} \begin{cases} 1 & \sqrt{2}^j x \in [l, l + \frac{1}{\sqrt{2}^j}), \\ -1 & \sqrt{2}^j x \in [l + \frac{1}{\sqrt{2}^j}, l + 1), \\ 0 & \text{سایر جاها,} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \sqrt{\sqrt{2}^j} & x \in [\frac{l}{\sqrt{2}^j}, \frac{l + \frac{1}{\sqrt{2}^j}}{\sqrt{2}^j}), \\ -\sqrt{\sqrt{2}^j} & x \in [\frac{l + \frac{1}{\sqrt{2}^j}}{\sqrt{2}^j}, \frac{l + 1}{\sqrt{2}^j}), \\ 0 & \text{سایر جاها,} \end{cases} \quad (6.2)$$

رابطه‌ی (۶.۲)، برابر  $\psi_{j, l}$  است. از شرط (ج) قضیه (۱.۵.۲) و یکانی بودن عملگر  $D_b$  برای  $l, n \in \mathbb{Z}$  نتیجه می‌شود که

$$(\psi_{j, l}, \psi_{j, n}) = (D_{\sqrt{2}^j} \psi_{\circ, l}, D_{\sqrt{2}^j} \psi_{\circ, n}) = (\psi_{\circ, l}, \psi_{\circ, n}) = \delta_{l, n},$$

یعنی خانواده‌ی  $\{\psi_{j, k} : k \in \mathbb{Z}\}$  متعامد یکه است.

فرض کنیم  $f \in W$ ، آن‌گاه طبق فرض مساله  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \psi_{\circ, k} = f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \psi(x - k)$  که در آن  $\{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$ . همچنین  $f \in V_1$  و برای هر  $g \in V_0$  داریم  $f \perp g$ ، بنابراین  $D_{\sqrt{2}^j} f \in V_{j+1}$  و داریم

$$(D_{\sqrt{2}^j} f, D_{\sqrt{2}^j} g) = (f, g) = 0, \quad g \in V_0,$$

از طرفی برای هر  $j \in \mathbb{Z}$  داریم  $D_{\sqrt{2}^j} V_0 = V_j$ ، بنابراین برای  $q \in V_j$  داریم

$$(D_{\sqrt{2}^j} f, q) = 0,$$

پس  $D_{\sqrt{2}^j} f \in W_j = V_{j+1} \cap V_j^\perp$ . حال چون عملگر  $D_{\sqrt{2}^j}$  یک به یک و پوشاست برای هر  $j \in \mathbb{Z}$  داریم  $D_{\sqrt{2}^j} W_0 = W_j$  و در نتیجه

$$D_{\sqrt{2}^j} f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k D_{\sqrt{2}^j} \psi_{\circ, k} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \psi_{j, k},$$

یعنی خانواده‌ی  $\{\psi_{j, k} : k \in \mathbb{Z}\}$  زیرفضای  $W_j$  را پدید می‌آورد و بنابراین یک پایه‌ی متعامد یکه است.

ب) چون  $L^2(\mathbb{R}) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \oplus W_j$  و برای  $l \neq n$ ،  $W_l \perp W_n$ ، بنابراین اگر  $r \neq j$  یا  $s \neq k$  داریم:

$$(\psi_{j, k}, \psi_{r, s}) = 0,$$

و برای هر  $j, k \in \mathbb{Z}$  داریم:

$$\|\psi_{j, k}\|_2 = 1,$$

پس با توجه به قسمت ۱ نتیجه می‌شود که خانواده‌ی  $\{\psi_{j, k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$  پایه‌ی متعامد یکه برای  $L^2(\mathbb{R})$  است.

□

## ۷.۲ موجک لژاندر

در بخش قبل موجک هار به عنوان اولین موجک متعامد معرفی شد. ولی هنگام استفاده و به کارگیری آن، به دلیل ناپیوسته بودن این موجک، با محدودیت‌های زیادی مواجه هستیم. با کمک آنالیز چند ریزه‌ساز می‌توان پایه‌های موجکی پیوسته تولید کرد. در بخش قبل ساختار کلی آنالیز چند ریزه‌ساز و روش ساختن پایه‌های موجک با استفاده از آن بررسی شد. موجک‌های دابشی، شانون، اسپلاین، لژاندر و چیبیشف از جمله مهمترین موجک‌های پیوسته به شمار می‌آیند.

در فصل قبل چند جمله‌ای‌های انتقال یافته لژاندر  $P_n(t)$  را به ازای  $n = 0, 1, 2, \dots$  معرفی کردیم. هم‌چنین ثابت شد که این چند جمله‌ای‌ها، در بازه  $[0, 1]$  نسبت به تابع وزن  $w(t) = 1$  متعامدند و شرط تعامد برای آن‌ها به صورت زیر است:

$$\int_0^1 P_m(t)P_n(t)dt = \frac{1}{\sqrt{m+1}}\delta_{m,n}.$$

با استفاده از رابطه بالا برای چند جمله‌ای‌های انتقال یافته لژاندر در بازه  $[0, 1]$  نتیجه می‌شود که مجموعه چند جمله‌ای‌های  $\{\sqrt{2m+1}P_m(t)\}$  در بازه  $[0, 1]$  متعامد یک‌ه‌اند. یعنی

$$\int_0^1 \sqrt{2m+1}P_m(t)\sqrt{2n+1}P_n(t)dt = \begin{cases} m=n & \int_0^1 \sqrt{2m+1}P_m(t)\sqrt{2m+1}P_m(t)dt, \\ 0 & \text{سایر جاها,} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} m=n & \int_0^1 (2m+1)P_m(t)P_m(t)dt, \\ 0 & \text{سایر جاها,} \end{cases}$$

از طرفی چون  $\int_0^1 P_m(t)P_m(t)dt = \frac{1}{\sqrt{m+1}}$ ، پس  $\int_0^1 (2m+1)P_m(t)P_m(t)dt = 1$ . بنابراین اگر تابع مقیاس  $\phi_m(t)$  را به صورت زیر در نظر بگیریم

$$\phi_m(t) = \begin{cases} \sqrt{2m+1}P_m(t) & 0 \leq t < 1, \\ 0 & \text{سایر جاها,} \end{cases}$$

آن‌گاه

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_m(t-l)\phi_m(t-n)dt = \delta_{l,n},$$

بنابراین برای هر عدد طبیعی  $m$ ، تابع  $\phi_m$  را می‌توان به عنوان یک تابع مقیاس در نظر گرفت و با توجه به اینکه  $\sqrt{2^j}\phi(2^jx-k)$  پایه‌ی متعامد یک‌ه برای  $V_j$  ها است، نتیجه می‌شود که مجموعه‌های  $V_j$  که به صورت

$$V_j = \text{span}\{2^{\frac{j}{2}}\phi_m(2^jt-k) : k \in \mathbb{Z}\},$$

تعریف می‌شوند در شرایط آنالیز چند ریزه‌ساز صدق می‌کنند و مجموعه‌ی  $\{2^{\frac{j}{2}}\phi_m(2^jt-k) : k \in \mathbb{Z}\}$  پایه‌ی متعامد یک‌ه برای فضای  $V_j$  است. توجه داریم که این مجموعه را به صورت زیر نیز می‌توان

در نظر گرفت

$$\begin{cases} 2^{\frac{j+1}{\nu}} \sqrt{m + \frac{1}{\nu}} P_m(2^j t - k) & \frac{k}{\nu^j} \leq t < \frac{k+1}{\nu^j} \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

که در آن  $P_m(t) = L_m(2t - 1)$ ، پس  $P_m(2^j t - k) = L_m(2^{j+1} t - (2k + 1))$ ، همان تابع مقیاس  $\phi$  است. و همچنین باید توجه داشت که برای  $m = 0$ ،  $\phi$  همان تابع مقیاس هار است. اگر در فضای  $V_j$  قرار دهیم  $1 - 2^j, 2, \dots, 1, 0, k$  آن گاه اعضای  $V_j$  فقط در بازه  $[0, 1]$  مخالف صفر هستند و زیرمجموعه‌ای از  $V_j$  که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\psi_{k,m} = \begin{cases} 2^{\frac{j+1}{\nu}} \sqrt{m + \frac{1}{\nu}} L_m(2^{j+1} t - (2k + 1)) & \frac{k}{\nu^j} \leq t < \frac{k+1}{\nu^j} \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

تشکیل یک پایه متعامد یکه برای  $L^2[0, 1]$  می‌دهد. توابع  $\psi_{k,m}(t)$ ، موجک‌های لژاندر نامیده می‌شوند و رابطه تعامد برای آن‌ها به صورت زیر است

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{k,m}(t) \psi_{r,s}(t) dt = \delta_{k,r} \delta_{m,s},$$

بنابراین هر تابع  $f \in L^2[0, 1]$  را می‌توان بر حسب موجک لژاندر به صورت زیر تقریب زد

$$f(t) \simeq \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^j-1} c_{km} \psi_{km}(t), \quad (7.2)$$

که در آن

$$c_{km} = (f(t), \psi_{km}(t)),$$

و  $(\cdot, \cdot)$  ضرب داخلی در فضای  $L^2[0, 1]$  است. با برش سری نامتناهی در رابطه (۷.۲)، تابع  $f$  را می‌توان به صورت زیر تقریب زد

$$f(t) \simeq \sum_{m=0}^M \sum_{k=0}^{2^j-1} c_{km} \psi_{km}(t),$$

سری فوق را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$f(t) \simeq \sum_{m=0}^M \sum_{k=0}^{2^j-1} c_{km} \psi_{km}(t) = C^T \Psi(t),$$

که در آن  $C$  بردار ضرایب تابع و  $\Psi(t)$  بردار موجک لژاندر به صورت زیر هستند:

$$C = [c_{0,0}, c_{0,1}, \dots, c_{0,M}, c_{1,0}, \dots, c_{1,M}, \dots, c_{2^j-1,0}, \dots, c_{2^j-1,M}]^T,$$

$$\Psi(t) = [\psi_{0,0}(t) \psi_{0,1}(t) \dots \psi_{0,M}(t) \psi_{1,0}(t) \dots \psi_{1,M}(t) \dots \psi_{2^j-1,0}(t) \dots \psi_{2^j-1,M}(t)]^T.$$

در ادامه می‌توان لم زیر را برای همگرایی بسط موجک لژاندر بیان کرد

لم ۱.۷.۲. اگر بسط موجک لژاندر تابع پیوسته  $f(x)$  به طور یکنواخت همگرا باشد، آن گاه این بسط به تابع  $f(x)$  همگرا است.

برای اثبات این لم به [۸] رجوع کنید.





# فصل ۳

## موجک‌های لژاندر و ماتریس عملگر مشتق

چون هدف ما در این پایان نامه حل عددی معادلات دیفرانسیل با استفاده از موجک‌های لژاندر است پس در ابتدا به توضیح بسیار مختصری از چندجمله‌ایهای لژاندر و لژاندر انتقال یافته می‌پردازیم و موجک‌های لژاندر و ویژگی‌های آن‌ها را بیان می‌کنیم. و هم‌چنین روش کلی به دست آوردن ماتریس عملگر مشتق موجک‌های لژاندر ارائه می‌شود.

### ۱.۳ چندجمله‌ای‌های لژاندر و ویژگی‌های آن‌ها

در ادامه به برخی از ویژگی‌های چندجمله‌ایهای لژاندر می‌پردازیم: [۵]

$$|L_k(x)| \leq 1, \quad -1 \leq x \leq 1 \quad (\text{الف})$$

$$L_k(\pm 1) = (\pm 1)^k \quad (\text{ب})$$

$$|L'_k(x)| \leq \frac{1}{2}k(k+1) \quad -1 \leq x \leq 1 \quad (\text{ج})$$

$$L'_k(\pm 1) = (\pm 1)^k \frac{1}{2}k(k+1) \quad (\text{د})$$

$$\int_{-1}^1 L_k(x) L_k(x) dx = (k + \frac{1}{2})^{-1} = \frac{2}{2k+1} \quad (\text{ه})$$

و بسط هر  $u \in L^2(-1, 1)$  بر حسب  $L_k$ ها به صورت زیر است

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{u}_k L_k(x), \quad \hat{u}_k = (k + \frac{1}{2}) \int_{-1}^1 u(x) L_k(x) dx \quad (\text{و})$$

$$L'_{k+1}(x) - L'_{k-1}(x) = (2k+1)L_k(x) \quad (\text{ز})$$

در قضیه بعد، رابطه بین چندجمله‌ای‌های لژاندر انتقال یافته و مشتق آن‌ها، که برای مشتق‌گیری از ماتریس عملگر مشتق موجک لژاندر بسیار مهم است، اثبات می‌کنیم.

قضیه ۱.۱.۳. فرض کنید  $P_m(x)$  چندجمله‌ای لژاندر انتقال یافته روی بازه  $[0, 1]$  باشد، آنگاه داریم

$$P'_m(x) = 2 \sum_{\substack{k=0 \\ k+m \text{ فرد}}}^{m-1} (2k+1)P_k(x). \quad (1.3)$$

برهان. فرض کنید که بسط لژاندر تابع  $u(x)$  به این صورت باشد

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{u}_k L_k(x), \quad (2.3)$$

آنگاه  $u'(x)$  را می‌توان به صورت زیر نمایش داد: [۵]

$$u'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{u}_k^{(1)} L_k(x), \quad (3.3)$$

که در آن

$$\hat{u}_k^{(1)} = (2k+1) \sum_{\substack{p=k+1 \\ p+k \text{ فرد}}} \hat{u}_p, \quad k \geq 0, \quad (4.3)$$

که کلید اثبات فرمول (۴.۳)، از ویژگی (ز)، چندجمله‌ای‌های لژاندر نتیجه می‌شود، یعنی

$$(2k+1)L_k(x) = L'_{k+1}(x) - L'_{k-1}(x) \quad k \geq 0,$$

با قرار دادن رابطه بالا در (۳.۳) داریم

$$\begin{aligned} u'(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\hat{u}_k^{(1)}}{2k+1} L'_{k+1}(x) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\hat{u}_k^{(1)}}{2k+1} L'_{k-1}(x) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\hat{u}_{k-1}^{(1)}}{2k-1} L'_k(x) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\hat{u}_{k+1}^{(1)}}{2k+3} L'_{k-1}(x) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{\hat{u}_{k-1}^{(1)}}{2k-1} - \frac{\hat{u}_{k+1}^{(1)}}{2k+3} \right] L'_k(x), \end{aligned} \quad (5.3)$$

از طرفی داریم

$$u'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{u}_k L'_k(x), \quad (6.3)$$

از مقایسه دو رابطه (۵.۳) و (۶.۳) بدست می‌آید

$$\hat{u}_k = \frac{\hat{u}_{k-1}^{(1)}}{2k-1} - \frac{\hat{u}_{k+1}^{(1)}}{2k+3} \quad k \geq 1,$$

که رابطه (۴.۳) را نتیجه می‌دهد. به عنوان مثال داریم :

$$\begin{aligned} \hat{u}_1 &= \hat{u}_0^{(1)} - \frac{\hat{u}_2^{(1)}}{5}, \\ \hat{u}_2 &= \frac{\hat{u}_1^{(1)}}{3} - \frac{\hat{u}_3^{(1)}}{7}, \\ \hat{u}_3 &= \frac{\hat{u}_2^{(1)}}{5} - \frac{\hat{u}_4^{(1)}}{9}, \\ \hat{u}_4 &= \frac{\hat{u}_3^{(1)}}{7} - \frac{\hat{u}_5^{(1)}}{11}, \\ \hat{u}_5 &= \frac{\hat{u}_4^{(1)}}{9} - \frac{\hat{u}_6^{(1)}}{13}, \\ \hat{u}_6 &= \frac{\hat{u}_5^{(1)}}{11} - \frac{\hat{u}_7^{(1)}}{15}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \hat{u}_0^{(1)} = \hat{u}_1 + \hat{u}_3 + \hat{u}_5 + \dots,$$

$$\hat{u}_1^{(1)} = 3(\hat{u}_2 + \hat{u}_4 + \hat{u}_6 + \dots),$$

⋮

حال با در نظر گرفتن  $u(x) = L_m(x)$  در رابطه (۲.۳) ، داریم  $\hat{u}_m = 1$  و برای  $i \neq m$  داریم  $\hat{u}_i = 0$  . در نتیجه

$$\hat{u}_k^{(1)} = \begin{cases} 2k + 1 & \text{فرد } m + k, \quad k \leq m - 1, \\ 0 & \text{جاهای دیگر,} \end{cases}$$

پس با توجه به (۳.۳) می‌توان نتیجه گرفت

$$L'_m(x) = \sum_{\substack{k=0 \\ \text{فرد } m+k}}^{m-1} (2k + 1)L_k(x), \quad (7.3)$$

با جایگذاری مناسب  $x = 2t - 1$  در رابطه (۷.۳) ، داریم

$$P'_m = 2 \sum_{\substack{k=0 \\ \text{فرد } m+k}}^{m-1} (2k + 1)P_k(t). \quad (8.3)$$

□

### ۱.۱.۳ موجک‌های لژاندر و ویژگی‌های آن‌ها

موجک‌های لژاندر توابع متعامد و مستقل خطی هستند. بنابراین می‌توان آن‌ها را برای تقریب جواب‌های معادلات دیفرانسیل به کار برد. با کمک ویژگی موجک‌های لژاندر و ماتریس عملگر مشتق آن که در

بخش بعد به آن می‌پردازیم، دستگاه معادلات دیفرانسیل را برای سادگی حل، به دستگاه معادلات جبری تبدیل می‌کنیم و با حل معادلات جبری می‌توان جواب معادلات دیفرانسیل را به دست آورد. به طور کل موجک‌ها از یک خانواده تحت عنوان موجک مادر ساخته می‌شوند که این موجک مادر شامل پارامترهای اتساع (a) و انتقال (b) است. و هنگامی که این پارامترها به طور پیوسته تغییر می‌کنند، خانواده‌ای از موجک‌های پیوسته به صورت زیر را خواهیم داشت:

$$\psi_{a,b}(t) = |a|^{-\frac{1}{\nu}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad a, b \in \mathbb{R} \quad a \neq 0, \quad (9.3)$$

اگر پارامترهای  $a, b$  را به مقادیر مجزا به صورت  $a = a_0^{-k}$  و  $b = nb_0 a_0^{-k}$  و  $a_0 > 1$  و  $b_0 > 0$  محدود کنیم که در آن  $k, n$  مقادیر صحیح مثبتی هستند. آنگاه خانواده‌ای از موجک‌های را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\psi_{k,n}(t) = |a_0|^{-\frac{k}{\nu}} \psi(a_0^k t - nb_0),$$

که در آن  $\psi_{k,n}(t)$  شکل یک موجک پایه برای  $L^2(\mathbb{R})$  می‌باشد. به ویژه هنگامی که  $a_0 = 2$  و  $b_0 = 1$ ،  $\psi_{k,n}(t)$  پایه‌ای متعامد را تشکیل می‌دهد. موجک‌های لژاندر  $\psi_{nm}(t) = \psi(k, n, m, t)$  دارای چهار آرگومان به این صورت می‌باشد: آرگومان  $n$  و آرگومان  $k$  که می‌تواند هر عدد صحیح مثبتی فرض شود،  $m$  درجه چندجمله‌ای لژاندر و  $t$  زمان نرمال شده می‌باشد. موجک‌های لژاندر روی بازه  $[0, 1]$  این گونه می‌باشد: [۹]

$$\psi_{nm}(t) = \begin{cases} \sqrt{m + \frac{1}{\nu}} 2^{\frac{k+1}{\nu}} L_m(2^{k+1}t - (2n+1)) & \frac{n}{\nu^k} \leq t < \frac{(n+1)}{\nu^k}, \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases} \quad (10.3)$$

که در آن  $m = 0, 1, \dots, M$  و  $n = 0, 1, 2, \dots, 2^k - 1$  و ضریب  $\sqrt{m + \frac{1}{\nu}}$  برای تعامد است. در این جا  $L_m(t)$  همان چندجمله‌ای لژاندر از درجه  $m$  است که روی بازه  $[-1, 1]$  تعریف شده است. تابع معین  $f(t)$  روی بازه  $[0, 1]$  می‌تواند به صورت جملاتی از موجک‌های لژاندر به این صورت بسط داده شود:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} c_{nm} \psi_{nm}(t), \quad (11.3)$$

که در آن  $c_{nm} = (f(t), \psi_{nm}(t))$  و  $(.,.)$  نشان دهنده ضرب داخلی است. اگر سری‌های نامتناهی در معادله (۱۱.۳) را برش دهیم، آنگاه معادله (۱۱.۳) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$f(t) \simeq \sum_{n=0}^{2^k-1} \sum_{m=0}^M c_{nm} \psi_{nm}(t) = \mathbf{C}^T \mathbf{\Psi}(t).$$

که در آن  $\mathbf{C}$  و  $\mathbf{\Psi}(t)$  ماتریس‌های مشخص با ابعاد  $1 \times (M+1) \times 2^k$ ، به شکل زیر هستند:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{0,0} & c_{0,1} & \dots & c_{0,M} & c_{1,0} & \dots & c_{1,M} & \dots & c_{2^k-1,0} & \dots & c_{2^k-1,M} \end{bmatrix}^T,$$

$$\mathbf{\Psi}(t) = \begin{bmatrix} \psi_{0,0}(t) & \psi_{0,1}(t) & \dots & \psi_{0,M}(t) & \psi_{1,0}(t) & \dots & \psi_{1,M}(t) & \dots & \psi_{2^k-1,0}(t) & \dots & \psi_{2^k-1,M}(t) \end{bmatrix}^T, \quad (12.3)$$

## ۲.۳ ماتریس عملگر مشتق و حاصلضرب ماتریس عملیاتی

در این بخش، ماتریس عملگر مشتق موجک‌های لژاندر، جدیدی را معرفی می‌کنیم.

قضیه ۱.۲.۳. فرض کنید  $\Psi(t)$  بردار موجک‌های لژاندر تعریف شده در (۱۲.۳) باشد. در این صورت بردار مشتق  $\Psi(t)$  می‌توان به این صورت زیر بیان کرد:

$$\frac{d\Psi(t)}{dt} = D\Psi(t), \quad (13.3)$$

که در آن  $D$  ماتریس عملگر مشتق تعریف شده با ابعاد  $2^k(M+1) \times 2^k(M+1)$  به صورت زیر است

$$D = \begin{pmatrix} F & \circ & \dots & \circ \\ \circ & F & \dots & \circ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \circ & \circ & \circ & F \end{pmatrix},$$

یا به طور معادل

$$D = \begin{pmatrix} [F] & [\circ] & \dots & [\circ] \\ [\circ] & [F] & \dots & [\circ] \\ & & \vdots & \\ [\circ] & [\circ] & \dots & [F] \end{pmatrix},$$

که در آن  $F$  و  $\circ$  ماتریس‌هایی با ابعاد  $(M+1) \times (M+1)$  می‌باشند. و  $(v, s)$  امین عنصر ماتریس  $F$  به صورت زیر تعریف می‌شود

$$F_{v,s} = \begin{cases} 2^{k+1} \sqrt{(2v-1)(2s-1)} & v = 2, \dots, (M+1), s = 1, \dots, v-1 \text{ and } (v+s) \text{ فرد باشد,} \\ \circ & \text{جاهای دیگر,} \end{cases} \quad (14.3)$$

یعنی داریم

$$F = \begin{pmatrix} \circ & \circ & \dots & \circ & \circ \\ \sqrt{3}2^{k+1} & \circ & \dots & \circ & \circ \\ \circ & \sqrt{15}2^{k+1} & \circ & \dots & \circ \\ \sqrt{7}2^{k+1} & \circ & \sqrt{35}2^{k+1} & \dots & \circ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix},$$

برهان. با استفاده از چندجمله‌ای لژاندر انتقال‌یافته در بازه  $[0, 1]$ ،  $r$  امین عنصر از بردار  $\Psi(t)$  در (۱۲.۳) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$L_m(\gamma x - 1) = P_m(x), \quad t = \gamma x - 1, \quad \Rightarrow x = \frac{t}{\gamma} + \frac{1}{\gamma} \quad L_m(t) = P_m\left(\frac{t}{\gamma} + \frac{1}{\gamma}\right),$$

$$\Psi_r(t) = \psi_{n,m}(t) = \gamma^{\frac{k+1}{\gamma}} \sqrt{m + \frac{1}{\gamma}} P_m\left(\gamma^{k+1}\left(\frac{t}{\gamma} + \frac{1}{\gamma}\right) - (\gamma n + 1)\right) \chi_{[\frac{n}{\gamma^k}, \frac{n+1}{\gamma^k}]},$$

که در آن

$$P_m\left(\gamma^{k+1}\left(\frac{t}{\gamma} + \frac{1}{\gamma}\right) - (\gamma n + 1)\right) = P_m\left(\gamma^k t + \underbrace{\gamma^k - 1}_n - \gamma n\right) = P_m(\gamma^k t - n),$$

در نتیجه داریم

$$\Psi_r(t) = \psi_{n,m}(t) = \gamma^{\frac{k+1}{\gamma}} \sqrt{m + \frac{1}{\gamma}} P_m(\gamma^k t - n) \chi_{[\frac{n}{\gamma^k}, \frac{n+1}{\gamma^k}]}, \quad i = 1, 2, \dots, \gamma^k(M+1), \quad (15.3)$$

که در آن  $r = n(M+1) + (m+1)$  و  $m = 0, 1, \dots, M$ ;  $n = 0, 1, \dots, (\gamma^k - 1)$ ;  $\chi_{[\frac{n}{\gamma^k}, \frac{n+1}{\gamma^k}]}$ ; تابع مشخص تعریف شده به صورت

$$\chi_{[\frac{n}{\gamma^k}, \frac{n+1}{\gamma^k}]} = \begin{cases} 1 & t \in [\frac{n}{\gamma^k}, \frac{n+1}{\gamma^k}], \\ 0 & \text{جاهای دیگر,} \end{cases}$$

است. پس ماتریس رابطه (۱۵.۳) به شکل زیر نوشته می‌شود

$$\begin{pmatrix} \psi_{0,0} \\ \psi_{0,1} \\ \vdots \\ \psi_{0,M} \\ \psi_{1,0} \\ \vdots \\ \psi_{1,M} \\ \vdots \\ \psi_{\gamma^k-1,0} \\ \vdots \\ \psi_{\gamma^k-1,M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_{0(M+1)+1} \\ \Psi_{0(M+1)+2} \\ \vdots \\ \Psi_{0(M+1)+M} \\ \Psi_{1(M+1)+1} \\ \vdots \\ \Psi_{1(M+1)+M+1} \\ \vdots \\ \Psi_{\gamma^k-1(M+1)+1} \\ \vdots \\ \Psi_{\gamma^k-1(M+1)+M+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \vdots \\ \Psi_{(M+1)} \\ \Psi_{(M+1)+1} \\ \vdots \\ \Psi_{(M+1)+M+1} \\ \vdots \\ \Psi_{\gamma^k-1(M+1)+1} \\ \vdots \\ \Psi_{\gamma^k-1(M+1)+M+1} \end{pmatrix},$$

با مشتق‌گیری نسبت به  $t$  از رابطه (۱۵.۳) داریم

$$\frac{d\Psi_r(t)}{dt} = \gamma^{\frac{k+1}{\gamma}} \sqrt{m + \frac{1}{\gamma}} \gamma^k P'_m(\gamma^k t - n) \chi_{[\frac{n}{\gamma^k}, \frac{n+1}{\gamma^k}]}, \quad (16.3)$$

تابع فوق در خارج از بازه  $[\frac{n}{\gamma^k}, \frac{n+1}{\gamma^k}]$  صفر است. بنابراین بسط موجک‌های لژاندر آن، فقط شامل تعداد متناهی از عناصر موجک‌های پایه در  $\Psi$  می‌باشد که در بازه‌ی  $[\frac{n}{\gamma^k}, \frac{n+1}{\gamma^k}]$  غیر صفر هستند.

یعنی توابع  $\Psi_i(t), i = n(M+1)+1, n(M+1)+2, \dots, n(M+1)+M+1$  که در بازه  $[\frac{n}{p^k}, \frac{n+1}{p^k}]$  غیر صفر هستند، بنابراین بسط موجک لژاندر آن به صورت

$$\frac{d\Psi_r(t)}{dt} = \sum_{i=n(M+1)+1}^{(n+1)(M+1)} a_i \Psi_i(t),$$

است. باز شده‌ی سری بالا را به صورت زیر داریم

$$\frac{d\Psi_r(t)}{dt} = \sum_{i=n(M+1)+1}^{(n+1)(M+1)} a_i \Psi_i(t) = a_{n(M+1)+1} \Psi_{n(M+1)+1} + \dots + a_{(n+1)(M+1)} \Psi_{(n+1)(M+1)}.$$

توجه داریم که  $(2^k - 1), 1, \dots, n = 0$  است و پارامتر کنار  $\Psi_i(t)$  که منظور همان ضرایب  $a_i$  ها است، به ازای  $r$  های مختلف، متفاوت در نظر گرفته می‌شود. به عنوان مثال

$$r = 1 \Rightarrow r = n(M+1) + (m+1) \Rightarrow n = 0, m = 0,$$

در نتیجه

$$\frac{d\Psi_1(t)}{dt} = \Psi'_1(t) = a_1 \Psi_1(t) + a_2 \Psi_2(t) + \dots + a_{M+1} \Psi_{M+1}.$$

همچنین

$$r = 2 \Rightarrow r = n(M+1) + (m+1) \Rightarrow n = 0, m = 1,$$

بنابراین داریم

$$\frac{d\Psi_2(t)}{dt} = \Psi'_2(t) = b_1 \Psi_1(t) + b_2 \Psi_2(t) + \dots + b_{M+1} \Psi_{M+1}.$$

همچنین

$$r = (M+1) + 1 \Rightarrow r = n(M+1) + (m+1) \Rightarrow n = 1, m = 0,$$

بنابراین داریم

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi_{(M+1)+1}(t)}{dt} &= \Psi'_{(M+1)+1}(t) = g_{(M+1)+1} \Psi_{(M+1)+1}(t) + g_{(M+1)+2} \Psi_{(M+1)+2}(t) \\ &+ \dots + g_{2(M+1)} \Psi_{2(M+1)}. \end{aligned}$$

برای سایر مشتق‌ها نیز می‌توان به همین صورت عمل کرد.

از این مطلب می‌توان نتیجه گرفت که ماتریس عملگر  $D$  یک ماتریس بلوکی است. زیرا



$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} \psi_{\circ,\circ}(t) \\ \vdots \\ \psi_{\circ,M}(t) \\ \psi_{\backslash,\circ}(t) \\ \vdots \\ \psi_{\backslash,M}(t) \\ \vdots \\ \psi_{\sphericalangle^{k-1},\circ}(t) \\ \vdots \\ \psi_{\sphericalangle^{k-1},M}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_{\backslash}(t) \\ \vdots \\ \Psi_{(M+1)}(t) \\ \Psi_{(M+1)+\backslash}(t) \\ \vdots \\ \Psi_{(M+1)+M+\backslash}(t) \\ \vdots \\ \Psi_{\sphericalangle^{k-1}(M+1)+\backslash}(t) \\ \vdots \\ \Psi_{\sphericalangle^{k-1}(M+1)+M+\backslash}(t) \end{pmatrix},$$

پس مشتق آن به صورت زیر است.

$$\Psi'(t) = \begin{pmatrix} \Psi'_{\backslash}(t) \\ \vdots \\ \Psi'_{(M+1)}(t) \\ \Psi'_{(M+1)+\backslash}(t) \\ \vdots \\ \Psi'_{(M+1)+M+\backslash}(t) \\ \vdots \\ \Psi'_{\sphericalangle^{k-1}(M+1)+\backslash}(t) \\ \vdots \\ \Psi'_{\sphericalangle^{k-1}(M+1)+M+\backslash}(t) \end{pmatrix},$$

باز شده‌ی ماتریس  $\Psi'(t)$  را می‌توانید در صفحه‌ی بعد مشاهده کنید.



توجه داریم که  $\Psi_{\nu^k(M+1)}(t) = \Psi_{\nu^{k-1}(M+1)+(M+1)} = \Psi_{(M+1)[\nu^{k-1}+1]}$  است. از طرفی از قبل داشتیم

$$\frac{d\Psi_r(t)}{dt} = \nu^{\frac{k+1}{\nu}} \sqrt{m + \frac{1}{\nu}} \nu^k P'_m(\nu^k t - n) \chi_{[\frac{n}{\nu^k}, \frac{n+1}{\nu^k}]},$$

و همچنین می‌دانیم

$$\frac{d}{dt} P_\circ(t) = \circ,$$

پس به ازای

$$r = 1, (M+1)+1, 2(M+1)+1, 3(M+1)+1, \dots, (\nu^k-1)(M+1)+1, (17.3)$$

نتیجه می‌گیریم که  $\frac{d\Psi_r(t)}{dt} = \circ$ ، به عنوان مثال برای  $r = 1$  داریم

$$r = 1 \Rightarrow \frac{d\Psi_1(t)}{dt} = \Psi'_1(t) = \nu^{\frac{k+1}{\nu}} \sqrt{\frac{1}{\nu}} \nu^k P'_\circ(\nu^k t) \chi_{[\circ, \frac{1}{\nu^k}]}.$$

یا برای  $r = (M+1)+1$  داریم

$$r = (M+1)+1 \Rightarrow \frac{d\Psi_{(M+1)+1}(t)}{dt} = \Psi'_{(M+1)+1}(t) = \nu^{\frac{k+1}{\nu}} \sqrt{\frac{1}{\nu}} \nu^k P'_\circ(\nu^k t - 1) \chi_{[\frac{1}{\nu^k}, \frac{2}{\nu^k}]}.$$

پس شکل ماتریسی آن را می‌توان به این صورت نوشت

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \circ \\ \Psi'_\nu(t) \\ \vdots \\ \Psi'_{(M+1)+\nu}(t) \\ \vdots \\ \Psi'_{\nu^k(M+1)}(t) \end{pmatrix}}_{\Psi'(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \dots a_{(M+1)} \\ \vdots \\ l_1 \dots l_{(M+1)} \end{bmatrix} \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} \circ & \dots & \circ \\ \vdots & & \vdots \\ \circ & \dots & \circ \end{bmatrix} \end{pmatrix}}_{\mathbf{D}} \underbrace{\begin{pmatrix} \Psi_1(t) \\ \vdots \\ \Psi_{(M+1)+1}(t) \\ \vdots \\ \Psi_{\nu^k(M+1)}(t) \end{pmatrix}}_{\Psi(t)}$$

با توجه به شکل ماتریسی بالا و چون  $\Psi_i(t)$  ها به ازای  $i = 1, 2, \dots, \nu^k(M+1)$  مستقل خطی هستند. پس بنابر رابطه (۱۷.۳) سطر اول ماتریس  $F$  صفر است. حال با جایگذاری  $P'_m(\nu^k t - n)$

از معادله (۸.۳) در معادله (۱۶.۳) داریم

$$\frac{d\Psi_r(t)}{dt} = \Psi^{\frac{k+1}{\Psi}} \sqrt{m + \frac{1}{\Psi}} \Psi^k \sum_{\substack{j=0 \\ j+m \text{ فرد}}}^{m-1} \Psi(\Psi j + 1) P_j(\Psi^k t - n) \chi_{[\frac{n}{\Psi^k}, \frac{n+1}{\Psi^k}]}, \quad (18.3)$$

با بسط دادن این معادله در پایه موجک‌های لژاندر داریم

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi_r(t)}{dt} &= \Psi^{\frac{k+1}{\Psi}} \sqrt{m + \frac{1}{\Psi}} \Psi^k \sum_{\substack{j=0 \\ j+m \text{ فرد}}}^{m-1} \Psi(\Psi j + 1) \underbrace{P_j(\Psi^k t - n) \chi_{[\frac{n}{\Psi^k}, \frac{n+1}{\Psi^k}]}}_{\frac{1}{\Psi^{\frac{k+1}{\Psi}} \sqrt{j+\frac{1}{\Psi}}}} \Psi_r(t) \\ &= \Psi^{k+1} \sqrt{m + \frac{1}{\Psi}} \sum_{j=0}^{m-1} \sqrt{\Psi} \sqrt{\Psi j + 1} \Psi_{n(M+1)+(m+1)}(t) \\ &= \Psi^{k+1} \sqrt{\Psi m + 1} \sum_{j=0}^{m-1} \sqrt{\Psi j + 1} \Psi_{n(M+1)+(m+1)}(t) \\ &= \Psi^{k+1} \sum_{\substack{s=1 \\ s+v \text{ فرد}}}^{v-1} \sqrt{(\Psi v - 1)(\Psi s - 1)} \Psi_{n(M+1)+v}(t), \end{aligned}$$

توجه داشته باشید که در رابطه‌ی آخر  $v = m + 1$ ,  $s = j + 1$ , انتخاب شده و در نتیجه  $v - 1 = m$  می‌باشد. بنابراین اگر  $F_{v,s}$  را بدین صورت انتخاب کنیم

$$F_{v,s} = \begin{cases} \Psi^{k+1} \sqrt{(\Psi v - 1)(\Psi s - 1)} & v = \Psi, \dots, (M + 1), s = 1, \dots, v - 1 \text{ و } (v + s) \text{ فرد باشد} \\ 0 & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$$

□ آن‌گاه معادله (۱۴.۳) برقرار است و این منجر به نتیجه مورد نظر می‌شود.

نتیجه ۲.۲.۳. با استفاده از معادله (۱۳.۳)، ماتریس عملگر برای  $n$  امین مشتق به این گونه می‌تواند بیان شود

$$\frac{d^n \Psi(x)}{dx^n} = D^n \Psi(x). \quad (19.3)$$

که در آن  $D^n$ ، ماتریس  $D$  به توان  $n$  است.

با استفاده از حاصلضرب دو تابع برداری موجک‌های لژاندر رابطه زیر را خواهیم داشت:

$$e^T \Psi \Psi^T = \Psi^T E, \quad (20.3)$$

که در آن  $e$  برداری معلوم و  $E$  ماتریسی با ابعاد  $(\Psi^k(M+1)) \times (\Psi^k(M+1))$  وابسته به  $e$  است که ماتریس عملگر حاصلضرب توابع برداری موجک‌های لژاندر نامیده می‌شود. [۱۰] به عنوان مثال اگر  $e$  را بردار معلوم  $C$  که در رابطه (۱۲.۳) آورده شده است در نظر بگیریم و  $M = 2$  و  $k = 1$  انتخاب کنیم. یعنی داشته باشیم

$$e = C = [c_{00}, c_{01}, c_{02}, c_{10}, c_{11}, c_{12}]^T,$$

و

$$\Psi(\mathbf{t}) = [\psi_{00}, \psi_{01}, \psi_{02}, \psi_{10}, \psi_{11}, \psi_{12}]^T,$$

آن‌گاه داریم

$$\Psi(\mathbf{t})\Psi^T(\mathbf{t}) = \begin{pmatrix} \psi_{00}\psi_{00} & \psi_{00}\psi_{01} & \psi_{00}\psi_{02} & \psi_{00}\psi_{10} & \psi_{00}\psi_{11} & \psi_{00}\psi_{12} \\ \psi_{01}\psi_{00} & \psi_{01}\psi_{01} & \psi_{01}\psi_{02} & \psi_{01}\psi_{10} & \psi_{01}\psi_{11} & \psi_{01}\psi_{12} \\ \psi_{02}\psi_{00} & \psi_{02}\psi_{01} & \psi_{02}\psi_{02} & \psi_{02}\psi_{10} & \psi_{02}\psi_{11} & \psi_{02}\psi_{12} \\ \psi_{10}\psi_{00} & \psi_{10}\psi_{01} & \psi_{10}\psi_{02} & \psi_{10}\psi_{10} & \psi_{10}\psi_{11} & \psi_{10}\psi_{12} \\ \psi_{11}\psi_{00} & \psi_{11}\psi_{01} & \psi_{11}\psi_{02} & \psi_{11}\psi_{10} & \psi_{11}\psi_{11} & \psi_{11}\psi_{12} \\ \psi_{12}\psi_{00} & \psi_{12}\psi_{01} & \psi_{12}\psi_{02} & \psi_{12}\psi_{10} & \psi_{12}\psi_{11} & \psi_{12}\psi_{12} \end{pmatrix},$$

می‌دانیم که به ازای  $t$  مشخص اگر  $i \neq k$  آن‌گاه  $\psi_{ij}(t)\psi_{kl}(t) = 0$  است. پس ماتریس  $\Psi(t)\Psi^T(t)$  به صورت زیر خواهد بود:

$$\Psi(\mathbf{t})\Psi^T(\mathbf{t}) = \begin{pmatrix} \psi_{00}\psi_{00} & \psi_{00}\psi_{01} & \psi_{00}\psi_{02} & 0 & 0 & 0 \\ \psi_{01}\psi_{00} & \psi_{01}\psi_{01} & \psi_{01}\psi_{02} & 0 & 0 & 0 \\ \psi_{02}\psi_{00} & \psi_{02}\psi_{01} & \psi_{02}\psi_{02} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \psi_{10}\psi_{10} & \psi_{10}\psi_{11} & \psi_{10}\psi_{12} \\ 0 & 0 & 0 & \psi_{11}\psi_{10} & \psi_{11}\psi_{11} & \psi_{11}\psi_{12} \\ 0 & 0 & 0 & \psi_{12}\psi_{10} & \psi_{12}\psi_{11} & \psi_{12}\psi_{12} \end{pmatrix},$$

با استفاده از بردار  $C$ ، ماتریس  $E$  در رابطه (۱۰.۵.۴) با ابعاد  $6 \times 6$  می‌تواند به صورت زیر نوشته شود

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} B_0 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix},$$

که در آن  $B_i$  برای  $i = 0, 1$  ماتریسی  $3 \times 3$  به شکل زیر است:

$$\mathbf{B}_i = \begin{pmatrix} c_{i0}\psi_{i0} & c_{i0}\psi_{i1} & c_{i0}\psi_{i2} \\ c_{i1}\psi_{i0} & c_{i1}\psi_{i1} & c_{i1}\psi_{i2} \\ c_{i2}\psi_{i0} & c_{i2}\psi_{i1} & c_{i2}\psi_{i2} \end{pmatrix},$$

### ۳.۳ کاربردهایی از ماتریس عملگر مشتق

#### ۱.۳.۳ معادلات دیفرانسیل خطی

معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خطی زیر را در نظر بگیرید.

$$y''(x) + f_1(x)y'(x) + f_2(x)y(x) = g(x), \quad (21.3)$$

با شرایط اولیه

$$y(0) = A, \quad (22.3)$$

$$y'(0) = B.$$

یا شرایط مرزی

$$y(\circ) = A,$$

$$y(\lambda) = B.$$

برای حل مساله (۲۱.۳)،  $f_1(x)$ ،  $f_2(x)$ ،  $y(x)$  و  $g(x)$  را توسط موجک‌های لژاندر به این گونه تقریب می‌زنیم

$$\begin{aligned} y(x) &= C^T \Psi(x), \\ f_1(x) &= F_1^T \Psi(x), \\ f_2(x) &= F_2^T \Psi(x), \\ g(x) &= G^T \Psi(x). \end{aligned} \quad (23.3)$$

با استفاده از معادله (۱۹.۳) و (۲۳.۳) داریم

$$\begin{aligned} y'(x) &= C^T D\psi(x), \\ y''(x) &= C^T D^2\psi(x). \end{aligned} \quad (24.3)$$

با به کارگیری معادلات (۲۳.۳) و (۲۴.۳)،  $R(x)$  باقیمانده، برای معادله (۲۱.۳) به این صورت نوشته می‌شود

$$R(x) = (C^T D^2 \Psi(x) + F_1^T \Psi(x) \Psi^T(x) D^T C + F_2^T \Psi(x) \Psi^T(x) C - G^T \Psi(x)),$$

با به کارگیری ماتریس عملگر ضرب برای موجک‌های لژاندر و با استفاده از رابطه (۲۰.۳) داریم

$$R(x) = (\Psi^T(x) (D^2)^T C + \Psi^T(x) \tilde{F}_1 D^T C + \Psi^T(x) \tilde{F}_2 C - \Psi^T(x) G).$$

حال با استفاده از روش تاو<sup>۱</sup> [۵]، می‌توان  $2 - 2^k(M+1)$  معادله خطی برای بردار مجهول  $C$  به صورت زیر به دست آورد:

$$\int_{\circ}^{\lambda} \Psi_j(x) R(x) dx = 0 \quad j = 1, \dots, 2^k(M+1) - 2. \quad (25.3)$$

هم‌چنین با استفاده از شرایط اولیه (۲۲.۳)، دو معادله خطی به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} y(\circ) &= C^T \Psi(\circ) = A, \\ y'(\circ) &= C^T D\Psi(\circ) = B. \end{aligned} \quad (26.3)$$

و با استفاده از شرایط مرزی داریم:

$$\begin{aligned} y(\circ) &= C^T \Psi(\circ) = A, \\ y(\lambda) &= C^T \Psi(\lambda) = B. \end{aligned} \quad (27.3)$$

رابطه‌ی (۲۶.۳) یا (۲۷.۳) همراه با رابطه‌ی (۲۵.۳) تشکیل  $2^k(M+1)$  معادله خطی می‌دهند. با حل این معادلات خطی، مقدار بردار  $C$  محاسبه می‌شود و با جایگذاری این بردار در رابطه‌ی (۲۳.۳)، مقدار تقریبی  $y(x)$  به دست می‌آید. حال کاربرد ماتریس عملگر مشتق موجک‌های لژاندر در حل معادلات دیفرانسیل خطی با ارایه مثال‌های عددی بررسی می‌شود.

<sup>۱</sup>Tau

مثال ۱.۳.۳. معادله دیفرانسیل خطی زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} y'' + y' = 2x + 2, \\ y(0) = y'(0) = 0, \end{cases}$$

جواب دقیق این معادله دیفرانسیل، تابع  $y(x) = x^2$  است. با استفاده از ماتریس عملگر مشتق موجک لژاندر این معادله دیفرانسیل برای  $M = 2, k = 0$  حل می‌شود. ابتدا تابع جواب به صورت زیر تقریب زده می‌شود

$$y(x) = C^T \Psi(x) = [c_{00}, c_{01}, c_{02}] \begin{bmatrix} \psi_{00}(x) \\ \psi_{01}(x) \\ \psi_{02}(x) \end{bmatrix}, \quad (28.3)$$

برای این مقادیر  $k$  و  $M$ ، ماتریس‌های  $D$  و  $D^2$  و  $G$  به صورت زیر هستند:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \end{pmatrix}, \quad D^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 16\sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{1}{3}\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix},$$

با استفاده از روش تاو در (۲۵.۳) معادله خطی به صورت زیر به دست می‌آید

$$12\sqrt{5}c_{02} + 2\sqrt{3}c_{01} - 3 = 0,$$

همچنین با استفاده از شرایط اولیه مساله، دو معادله خطی به صورت زیر به دست می‌آیند

$$c_{00} - \frac{1}{3}\sqrt{6}\sqrt{2}c_{01} + \frac{1}{3}\sqrt{10}\sqrt{2}c_{02} = 0,$$

$$2\sqrt{3}c_{01} - \sqrt{15}\sqrt{6}\sqrt{2}c_{02} = 0,$$

معادلات فوق تشکیل یک دستگاه سه معادله‌ای برای بردار مجهول  $C$  می‌دهند. با حل این دستگاه

معادلات خطی بردار مجهول  $C$  به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$C^T = [c_{00}, c_{01}, c_{02}] = \left[ \frac{1}{12}\sqrt{6}\sqrt{2}\sqrt{3} - \frac{1}{6}\sqrt{5}\sqrt{10}\sqrt{2}, \frac{1}{6}\sqrt{3}, \frac{1}{30}\sqrt{5} \right],$$

با جایگذاری این بردار در (۲۸.۳) جواب معادله به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$y(x) = C^T \Psi(x) = \left[ \frac{1}{12}\sqrt{6}\sqrt{2}\sqrt{3} - \frac{1}{6}\sqrt{5}\sqrt{10}\sqrt{2}, \frac{1}{6}\sqrt{3}, \frac{1}{30}\sqrt{5} \right] \begin{bmatrix} \psi_{00}(x) \\ \psi_{01}(x) \\ \psi_{02}(x) \end{bmatrix} = 2 \times 10^{-1} + x^2.$$

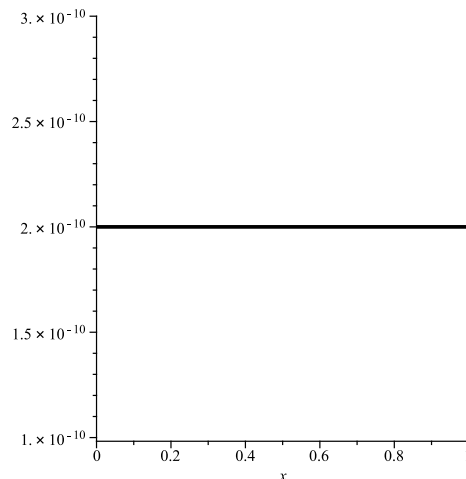
شکل (۱.۳) مقدار خطای مطلق حاصل از این روش را نشان می‌دهد.

مثال ۲.۳.۳. مساله مقدار مرزی خطی زیر را در نظر بگیرید [۳]

$$\begin{cases} y'' + |2x - 1|y' + y = h(x), & x \in [0, 1], \\ y(0) = 1, y(1) = 1, \end{cases}$$

جواب دقیق این معادله به صورت زیر است

$$y(x) = |2x - 1|^3 = \begin{cases} -(2x - 1)^3 = -8x^3 + 12x^2 - 6x + 1 & 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ (2x - 1)^3 = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 & \frac{1}{2} \leq x < 1, \end{cases}$$



شکل ۱.۳: خطای مطلق حاصل از روش موجک لژاندر

که در آن  $y(x)$  در نقطه‌ی  $x = \frac{1}{4}$  تحلیلی نیست. این معادله را با استفاده از ماتریس عملگر مشتق موجک لژاندر به ازای مقادیر  $k = 1$  و  $M = 3$  حل می‌کنیم. برای این مقادیر  $k$  و  $M$ ، جواب به دست آمده به صورت

$$y(x) = \begin{cases} -8,000,000,000x^3 + 12x^2 - 5,999,999,977x + 1,000,000,013, & 0 \leq x < \frac{1}{4}, \\ 8,000,000,000x^3 - 12x^2 + 6,000,000,004x - 1, & \frac{1}{4} \leq x < 1, \end{cases}$$

است در حالی که استفاده از چندجمله‌های متعامد و روش‌های طیفی برای حل این معادله از دقت کافی برخوردار نیست [۳].

مثال ۳.۳.۳. معادله دیفرانسیل خطی زیر را در نظر بگیرید

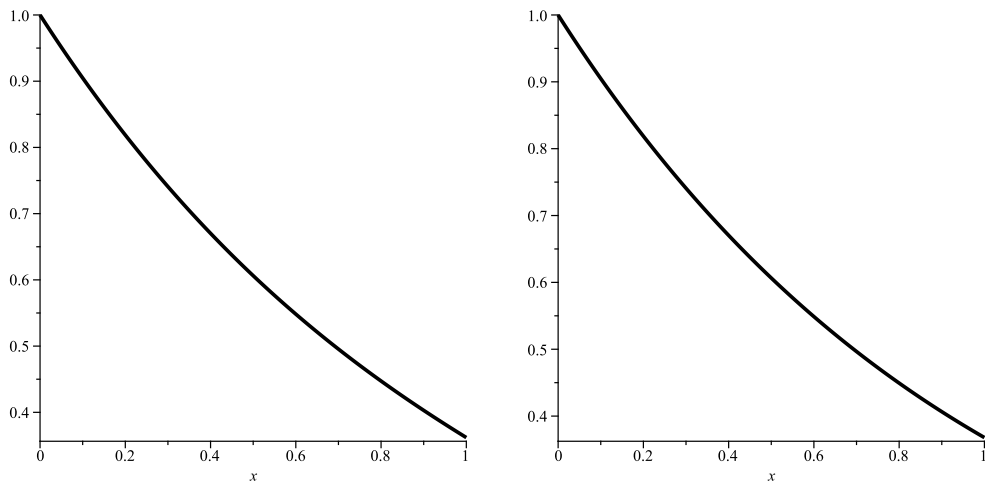
$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = 4e^{-x}, & x \in [0, 1], \\ y(0) = 1, y'(0) = -1, \end{cases}$$

جواب دقیق این معادله  $y(x) = e^{-x}$  است. که بسط تیلور این تابع تا جمله‌ی پنجم آن به صورت  $e^{-x} = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{120}x^5$  است. این معادله را با استفاده از روش توضیح داده شده در بخش (۱.۳.۳) به ازای مقادیر  $k = 0$  و  $M = 5$  حل می‌کنیم. برای این مقادیر  $k$  و  $M$ ، جواب به دست آمده به صورت زیر است

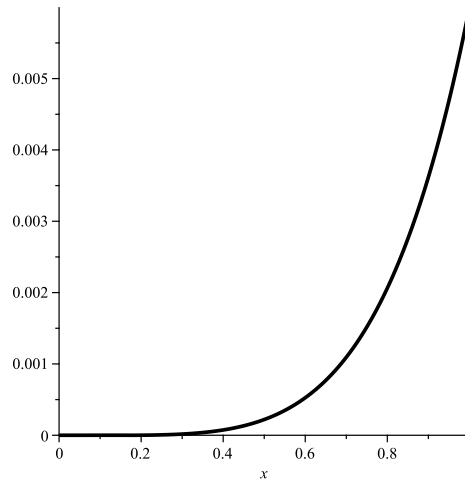
$$y(x) = 1 - x + 0,5000375872x^2 - 0,1662297498x^3 + 0,03847115336x^4 - 0,01039293228x^5$$

شکل (۲.۳) جواب دقیق و جواب به دست آمده در مثال (۳.۳.۳) را نشان می‌دهد. هم‌چنین شکل (۲.۳) خطای مطلق حاصل از این روش را در این مثال نشان می‌دهد.





شکل ۲.۳: سمت راست نمودار جواب به دست آمده و سمت چپ نمودار جواب دقیق است.



شکل ۳.۳: خطای مطلق حاصل از روش موجک لژاندر

### ۲.۳.۳ معادلات دیفرانسیل غیر خطی

معادله دیفرانسیل غیر خطی

$$y''(x) = F(x, y'(x), y(x)), \quad (29.3)$$

را همراه با شرایط اولیه

$$y(\circ) = A, \quad (30.3)$$

$$y'(\circ) = B.$$

یا شرایط مرزی زیر در نظر بگیرید

$$y(\circ) = A, \quad (31.3)$$

$$y(1) = B.$$

برای حل این معادله، ابتدا تابع  $y(x)$  را برحسب پایه‌ی موجک لژاندر به صورت زیر تقریب می‌زنیم:

$$y(x) = C^T \Psi(x). \quad (۳۲.۳)$$

با استفاده از معادلات (۲۴.۳) و (۲۹.۳) داریم

$$C^T D^\nu \Psi(x) = F(x, C^T D \Psi(x), C^T \Psi(x)). \quad (۳۳.۳)$$

هم‌چنین، شرایط اولیه (۳۰.۳) دو معادله خطی زیر را نتیجه می‌دهد:

$$y(\circ) = C^T \Psi(\circ) = A, \quad (۳۴.۳)$$

$$y'(\circ) = C^T D \Psi(\circ) = B.$$

و با استفاده از شرایط مرزی (۳۱.۳) دو معادله خطی زیر به دست می‌آید:

$$y(\circ) = C^T \Psi(\circ) = A, \quad (۳۵.۳)$$

$$y(۱) = C^T \Psi(۱) = B.$$

به منظور یافتن  $y(x)$ ، ابتدا معادله (۳۳.۳) را در  $۲ - ۲^k(M+1)$  نقطه محاسبه می‌کنیم. برای به دست آوردن نتایج بهتر، از  $۲ - ۲^k(M+1)$  تا از ریشه‌های لژاندر انتقال یافته  $P_{2^k(M+1)}(x)$  استفاده می‌کنیم. این معادلات با هم به همراه معادلات (۳۴.۳) یا (۳۵.۳)،  $۲^k(M+1)$  معادله‌ی غیرخطی ایجاد می‌کند که می‌توان آن‌ها را با روش تکرار نیوتن حل کرد. در نتیجه  $y(x)$  داده شده در معادله‌ی (۳۲.۳) محاسبه می‌شود. عملکردهای اشاره شده در بالا برای معادلات دیفرانسیل خطی و غیرخطی می‌تواند برای معادلات دیفرانسیل با درجه‌های بالاتر نیز به آسانی مورد استفاده قرار گیرد. در ادامه دو مثال برای معادلات دیفرانسیل غیرخطی بیان می‌کنیم و با روش موجک لژاندر آن‌ها را حل می‌کنیم.

مثال ۴.۳.۳. مساله مقدار مرزی غیرخطی زیر را در نظر بگیرید [۹]

$$\begin{cases} y''(x) + 2(y'(x))^2 + \lambda y(x) = \circ, & x \in [0, 1], \\ y(\circ) = y(1) = \circ. \end{cases}$$

جواب دقیق این معادله،  $y(x) = x - x^2$  است. این معادله را با به کار بردن روش توضیح داده شده در بخش (۲.۳.۳) به ازای مقادیر  $k = 0$  و  $M = 2$  حل می‌کنیم.

ابتدا تابع جواب به صورت زیر تقریب زده می‌شود

$$y(x) = C^T \Psi(x) = [c_{\circ\circ}, c_{\circ 1}, c_{\circ 2}] \begin{bmatrix} \psi_{\circ\circ}(x) \\ \psi_{\circ 1}(x) \\ \psi_{\circ 2}(x) \end{bmatrix},$$

برای این مقادیر  $k$  و  $M$ ، ماتریس‌های  $D$  و  $D^2$  به صورت زیر هستند

$$D = \begin{pmatrix} \circ & \circ & \circ \\ 2\sqrt{3} & \circ & \circ \\ \circ & 2\sqrt{3}\sqrt{5} & \circ \end{pmatrix}, \quad D^2 = \begin{pmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ 12\sqrt{5} & \circ & \circ \end{pmatrix}$$

با استفاده از معادله (۳۳.۳)، معادله‌ی زیر به دست می‌آید

$$C^T D^2 \Psi(x) + 2(C^T D \Psi(x))^2 + \lambda C^T \Psi(x) = \circ,$$

معادله‌ی بالا را در اولین ریشه‌ی لژاندر انتقال یافته  $P_2(x)$ ، یعنی  $x_0 = \frac{1}{2} \left( -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} + 1 \right)$ ، محاسبه می‌کنیم که به دست می‌آوریم

$$8c_{00} + 2 \left( 2\sqrt{3}c_{01} - 0,7745966692c_{02}\sqrt{15}\sqrt{6}\sqrt{2} \right)^2 - 3,098386677c_{01}\sqrt{6}\sqrt{2} + \left( 1,5999999999\sqrt{10}\sqrt{2} + 4\sqrt{15}\sqrt{3} \right) c_{02} = 0,$$

هم‌چنین با استفاده از شرایط مرزی، داریم

$$c_{00} - \sqrt{3}c_{01} + \sqrt{5}c_{02} = 0,$$

$$c_{00} + \sqrt{3}c_{01} + \sqrt{5}c_{02} = 0,$$

معادلات فوق تشکیل یک دستگاه سه معادله‌ای برای بردار مجهول  $C$  می‌دهند. که با حل این دستگاه به دست می‌آوریم

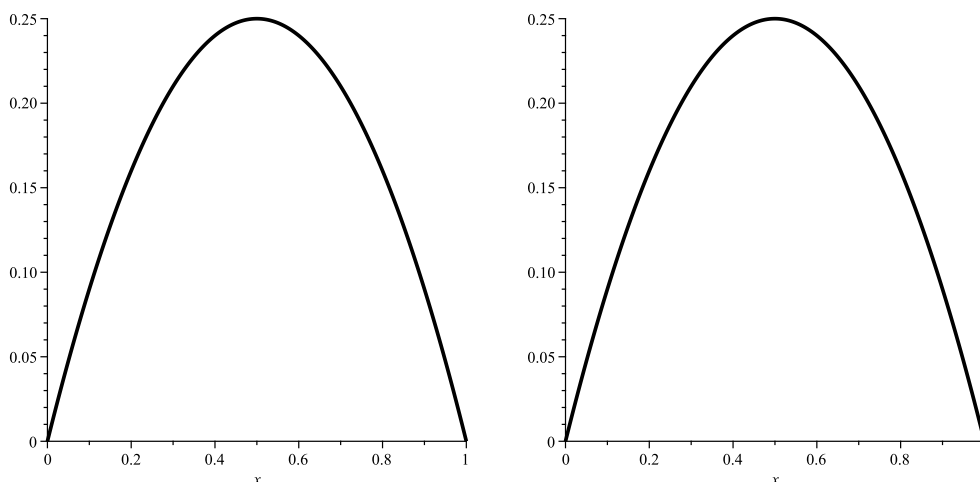
$$C^T = [c_{00}, c_{01}, c_{02}] = [0,1666666666, 0, -0,07453559924],$$

با جایگذاری این بردار در (۳۲.۳)، جواب معادله دیفرانسیل غیرخطی به صورت زیر محاسبه می‌شود

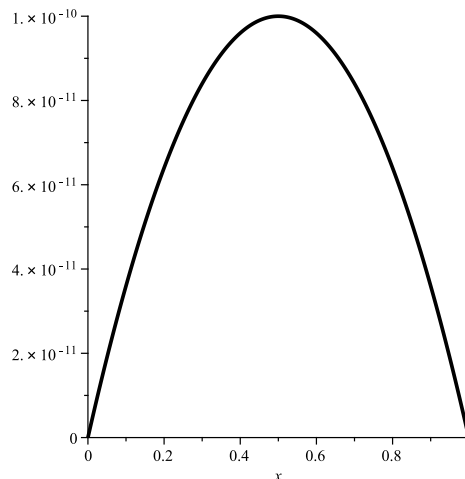
$$y(x) = C^T \Psi(x) = \begin{bmatrix} 0,1666666666, 0, -0,07453559924 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{00}(x) \\ \psi_{01}(x) \\ \psi_{02}(x) \end{bmatrix} \\ = -0,9999999996x^2 + 0,9999999996x.$$

شکل (۴.۳)، جواب دقیق و جواب به دست آمده در مثال (۴.۳.۳) را نشان می‌دهد.

شکل (۵.۳) خطای مطلق حاصل از این روش را در مثال (۴.۳.۳) نشان می‌دهد.



شکل ۴.۳: سمت راست نمودار جواب به دست آمده و سمت چپ نمودار جواب دقیق است.



شکل ۵.۳: خطای مطلق حاصل از روش موجک لژاندر

مثال ۵.۳.۳. مساله مقدار مرزی غیرخطی زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} y''(x) + (y'(x))^2 = 0, \\ y(0) = 3, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

جواب دقیق این معادله،  $y(x) = 3$  است. این معادله را با به کار بردن روش توضیح داده شده در بخش (۲.۳.۳) به ازای مقادیر  $k = 0$  و  $M = 2$  حل می‌کنیم. ابتدا تابع جواب به صورت زیر تقریب زده می‌شود

$$y(x) = C^T \Psi(x) = [c_{00}, c_{01}, c_{02}] \begin{bmatrix} \psi_{00}(x) \\ \psi_{01}(x) \\ \psi_{02}(x) \end{bmatrix},$$

با استفاده از معادله (۳۳.۳)، معادله‌ی زیر به دست می‌آید

$$C^T D^2 \Psi(x) + (C^T D \Psi(x))^2 = 0,$$

معادله‌ی بالا را در اولین ریشه‌ی لژاندر انتقال یافته  $P_2(x)$ ، یعنی  $x_0 = \frac{1}{3} \left( -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} + 1 \right)$  محاسبه می‌کنیم. معادله‌ی به دست آمده از این ریشه به همراه دو معادله به دست آمده از شرایط مرزی یک دستگاه سه معادله‌ای برای بردار مجهول  $C$  تشکیل می‌دهند. که با حل این دستگاه به دست می‌آوریم

$$C^T = [c_{00}, c_{01}, c_{02}] = [3, 0, 0],$$

با جایگذاری این بردار در (۳۲.۳)، جواب معادله دیفرانسیل غیرخطی به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$y(x) = C^T \Psi(x) = [3, 0, 0] \begin{bmatrix} \psi_{00}(x) \\ \psi_{01}(x) \\ \psi_{02}(x) \end{bmatrix} = 3$$



# فصل ۴

## روش موجک‌های لژاندر برای حل معادلات دیفرانسیل از نوع Lane – Emden

در این فصل یک روش عددی برای حل معادلات Lane – Emden، که به صورت مسایل مقدار اولیه تکین ارائه شده است، به کار می‌بریم. این کار را، با استفاده از عملگر انتگرال و تبدیل معادلات Lane – Emden به معادلات انتگرال، و با به کارگیری تقریب موجک لژاندر انجام می‌دهیم. ویژگی‌های موجک لژاندر به همراه روش انتگرال‌گیری گوسی، برای ساده سازی معادلات انتگرال به جوابی از معادلات جبری به کار گرفته شده‌اند.

### ۱.۴ معادلات Lane – Emden

در سال‌های اخیر، مسایل مقدار اولیه تکین، در معادلات دیفرانسیل معمولی از درجه دوم (ODEs)، توجه بسیاری از ریاضی و فیزیک‌دانان را به خود جلب کرده است. یکی از این نوع معادلات که مورد بحث قرار گرفته است، معادلات فرمول‌بندی شده از نوع Lane – Emden است که به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$y''(x) + \frac{\alpha}{x}y'(x) + f(x, y) = g(x), \quad 0 < x \leq 1, \quad \alpha \geq 0 \quad (1.4)$$

با شرایط اولیه‌ی

$$y(0) = A, \quad y'(0) = B, \quad (2.4)$$

که در آن  $A$  و  $B$  مقادیری ثابت هستند و  $f(x, y)$  تابعی حقیقی و پیوسته است و  $g(x) \in C[0, 1]$  می‌باشد. معادله (۱.۴) برای مدل‌سازی بسیاری از پدیده‌ها در ریاضی فیزیک و نجوم از قبیل قضیه‌ی ساختار ستاره‌ای، رفتار حرارتی ابرهای گازی شکل کروی، کره‌های گازی هم‌دما، و قضیه‌ی شدت جریان گرمایی استفاده می‌شود. [۶، ۱۲]

چندین روش برای حل معادلات Lane – Emden شناخته شده است. مبحث فرمول‌بندی این مدل‌ها و ساختار فیزیکی حل آن‌ها را می‌توان در [۶، ۱۵] یافت. بیشتر الگوریتم‌های متداول برای به کارگیری

مسائل از نوع Lane – Emden، بر پایه‌ی روش‌های اختلال هستند. وزواز<sup>۱</sup> [۱۵، ۱۶]، با به کارگیری روش تجزیه آدومیان، تحقیقات کلی برای ساختن دقیق معادلات Lane – Emden و ریشه‌های سری آن‌ها، ارائه داد. راسل<sup>۲</sup> و شامپین<sup>۳</sup> معادله (۱.۴) را برای تابع خطی  $f(x, y) = ky + h(x)$  بررسی کردند. و ثابت کردند که اگر  $h(x) \in C[0, 1]$  و  $-\infty < k \leq \pi^2$  باشد، معادله (۱.۴) دارای جواب یکتا و دقیق است.

در این فصل ما با کاربردهایی از موجک‌های لژاندر برای حل عددی معادله (۱.۴) سروکار داریم. روشی که به کار می‌بریم شامل تحویل معادلات Lane – Emden به معادلات انتگرال است و با به کارگیری ضرایب نامعلوم موجک‌های لژاندر، ریشه آن را بسط می‌دهیم. ویژگی موجک‌های لژاندر به همراه فرمول انتگرال گوسی، برای محاسبه‌ی ضرایب نامعلوم و یافتن ریشه‌ی تقریبی معادله (۱.۴) به کار رفته است.

در این بخش برخی از ویژگی موجک‌های لژاندر را با کمی تغییر در اندیس‌ها و برخی پارامترها، نسبت به فصل ۳، ذکر می‌کنیم.

موجک‌های لژاندر  $\psi_{nm}(t) = \psi(k, \hat{n}, m, n)$  دارای چهار آرگومان به این صورت است: آرگومان‌های  $n = 1, 2, 3, \dots, 2^{k-1}$ ،  $\hat{n} = 2n - 1$  و  $k$  که می‌تواند هر عدد صحیح مثبتی فرض شود و  $m$  که درجه چندجمله‌ای لژاندر و  $t$  زمان نرمال شده است. موجک‌های لژاندر  $\psi_{nm}(t)$  روی بازه  $[0, 1]$  این گونه تعریف می‌شوند: [۱۱]

$$\psi_{nm}(t) = \begin{cases} \sqrt{m + \frac{1}{2^k}} 2^{\frac{k}{2}} L_m(2^k t - \hat{n}), & \text{برای } \frac{\hat{n}-1}{2^k} \leq t < \frac{\hat{n}+1}{2^k}, \\ 0, & \text{جا‌های دیگر,} \end{cases}$$

که در آن  $n = 1, 2, 3, \dots, 2^{k-1}$  و  $m = 0, 1, \dots, M - 1$  ضریب تعامد می‌باشد.  $L_m(t)$  همان چندجمله‌ای لژاندر از درجه  $m$  است که روی بازه  $[-1, 1]$  تعریف شده است. تابع  $f(t)$  روی بازه  $[0, 1]$  به این صورت بسط داده می‌شود:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} c_{nm} \psi_{nm}(t). \quad (3.4)$$

که در آن  $c_{nm} = (f(t), \psi_{nm}(t))$  است و  $(., .)$  به ضرب داخلی اشاره دارد. اگر سری‌های نامتناهی در معادله (۳.۴) قطع شود، آن‌گاه معادله (۳.۴) را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$f(t) \simeq \sum_{n=1}^{2^{k-1}} \sum_{m=0}^{M-1} c_{nm} \psi_{nm}(t) = C^T \Psi(t).$$

که  $C$  و  $\Psi(t)$  ماتریس‌هایی با ابعاد  $2^{k-1} M \times 1$  هستند که به صورت زیر نمایش داده شده است:

$$C = \begin{bmatrix} c_{1,0} & c_{1,1} & \dots & c_{1,M-1} & c_{2,0} & \dots & c_{2,M-1} & \dots & c_{2^{k-1},0} & \dots & c_{2^{k-1},M-1} \end{bmatrix}^T$$

<sup>۱</sup>Wazwaz

<sup>۲</sup>Russell

<sup>۳</sup>Shampine

$$\Psi(t) = \left[ \psi_{1,0}(t)\psi_{1,1}(t) \dots \psi_{1,M-1}(t)\psi_{2,0}(t) \dots \psi_{2,M-1}(t) \dots \psi_{k-1,0}(t) \dots \psi_{k-1,M-1}(t) \right]^T \quad (۴.۴)$$

## ۲.۴ درون‌یابی از نقاط متمایز فضا

مجموعه‌ای از نقاط متمایز فضا را در نظر بگیرید، چندجمله‌ای درون‌یاب  $P_n(x)$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n p_k(x) f(x_k). \quad (۵.۴)$$

در آن  $p_k(x)$  وزن‌های تابع در  $n+1$  نقطه هستند. وزن‌های  $p_k(x)$  متناظر با هر نقطه‌ی پایه، چندجمله‌ای‌هایی از درجه  $n$  هستند. معادله‌ی (۵.۴) ترکیب خطی از چندجمله‌ای‌های از درجه  $n$  است، بنابراین  $P_n(x)$  چندجمله‌ای از درجه  $n$  است.

به منظور اینکه چندجمله‌ای درون‌یاب، تابع را در همه‌ی نقاط پایه‌ای به طور دقیق برازش کند، هر چندجمله‌ای وزن‌دار خاص  $p_k(x)$  باید طوری انتخاب شود که، هنگامی که  $x = x_k$  است دارای مقدار واحد، و در نقاط پایه‌ای دیگر دارای مقدار صفر باشد یعنی

$$p_k(x_i) = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ 1 & i = k \end{cases} \quad (۶.۴)$$

چندجمله‌ای‌های لاگرانژ که به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود

$$p_k(x) = C_k \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n (x - x_i), \quad (۷.۴)$$

به علت وجود عبارت  $(x - x_i)$ ، در قسمت اول شرایط (۶.۴) صدق می‌کند. برای به دست آوردن چندجمله‌ای لاگرانژی که در شرایط دوم معادله‌ی (۶.۴) صدق کند، ثابت  $C_k$  به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$C_k = \frac{1}{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n (x_k - x_i)}, \quad (۸.۴)$$

با ترکیب معادلات (۷.۴) و (۸.۴)، چندجمله‌ای‌های لاگرانژ به صورت زیر به دست می‌آید

$$p_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \left( \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \right) \quad (۹.۴)$$

هم‌چنین چندجمله‌ای درون‌یاب  $P_n(x)$  دارای عبارت خطا به صورت زیر است

$$R_n(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \quad (۱۰.۴)$$



### ۳.۴ انتگرال‌گیری گوسی

انتگرال‌گیری گوسی روشی قوی از انتگرال‌گیری است که نقاط پایه‌ای متمایز فضا را به کار می‌گیرد. این روش، چندجمله‌ای‌های لاگرانژ را برای تقریب تابع استفاده می‌کند و سپس چندجمله‌ای‌های متعامد را برای تعیین مکان هندسی نقاط پایه به کار می‌گیرد.

تابع  $f(x)$  که توسط چندجمله‌ای لاگرانژ و باقیمانده‌اش جایگذاری شده است در نظر بگیرید

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x)f(x_i) + \prod_{i=0}^n (x - x_i) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, \quad (11.4)$$

که در آن

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}. \quad (12.4)$$

انتگرال  $\int_a^b f(x)dx$  به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b P_n(x)dx + \int_a^b R_n(x)dx, \quad (13.4)$$

بدون از دست دادن کلیت، بازه  $[a, b]$  را به  $[-1, 1]$  تغییر می‌دهیم. معادله کلی انتقال برای تبدیل کردن بین  $x$  در بازه‌ی  $[a, b]$  و  $z$  در بازه‌ی  $[c, d]$  به صورت زیر است:

$$\frac{x - a}{b - a} = \frac{z - c}{d - c},$$

برای تبدیل شدن به بازه‌ی  $[-1, 1]$ ، این معادله به شکل زیر تبدیل می‌شود

$$z = \frac{2x - (a + b)}{b - a}. \quad (14.4)$$

با استفاده از معادلات (۱۱.۴)، (۱۲.۴)، و (۱۴.۴) در (۱۳.۴) داریم

$$\int_{-1}^1 F(z)dz = \sum_{i=0}^n w_i F(z_i) + \int_{-1}^1 R_n(z)dz, \quad (15.4)$$

که در آن وزن‌های  $w_i$  از رابطه زیر محاسبه می‌شوند

$$w_i = \int_{-1}^1 L_i(z)dz = \int_{-1}^1 \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{z - z_j}{z_i - z_j} dz.$$

و عبارت خطا به صورت زیر داده شده است

$$\int_{-1}^1 R_n(z)dz = \int_{-1}^1 \prod_{i=0}^n (z - z_i) q_n(z) dz. \quad (16.4)$$

در معادله بالا  $q_n(z)$  و  $\prod_{i=0}^n (z - z_i)$  به ترتیب چندجمله‌ای‌هایی از درجه‌ی  $n$  و  $n + 1$  هستند.

فرمول انتگرال‌گیری گوسی به منظور صفر کردن عبارت خطا (۱۶.۴)، گامی بزرگ برمی‌دارد. برای انجام این کار، دو چندجمله‌ای موجود در عبارت خطا به عبارت‌هایی از چندجمله‌ای‌های متعامد لژاندر بسط داده می‌شوند. مقادیر  $z_i$  به عنوان ریشه‌هایی از چندجمله‌ای لژاندر از درجه  $n + 1$  انتخاب می‌شوند. این انتخاب ریشه‌ها به همراه چندجمله‌ای  $q_n$ ، که می‌دانیم از درجه  $n$  است و هم‌چنین ویژگی تعامد

چند جمله ای های لژاندر که در قضیه (۳.۷.۱) بیان شد، باعث می شود که عبارت خطا به صفر میل کند. بنابراین معادله (۱۵.۴) به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\int_{-1}^1 F(z) dz = \sum_{i=0}^n w_i F(z_i). \quad (17.4)$$

تعدادی از ریشه های چند جمله ای های لژاندر که با  $z_i$  نشان می دهیم و مقادیر وزنی  $w_i$  متناظر با این ریشه ها در بازه  $[-1, 1]$  در جدول زیر آورده شده است.

$w_i$	$\int_{-1}^1 F(z) dz = \sum_{i=0}^n w_i F(z_i)$	$z_i$
۱٫۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰	فرمول دو-نقطه ای ( $n + 1 = 2$ )	$\pm 0,577350269189626$
۰٫۸۸۸۸۸۸۸۸۸۸۸۸۸۸۸۸۸۸ ۰٫۵۵۵۵۵۵۵۵۵۵۵۵۵۵۵۵۵۵	فرمول سه-نقطه ای ( $n + 1 = 3$ )	$0,0000000000000000$ $\pm 0,774596669241482$
۰٫۶۵۲۱۴۵۱۵۴۸۶۲۵۴۶ ۰٫۳۴۷۸۵۴۸۴۵۱۳۷۴۵۴	فرمول چهار-نقطه ای ( $n + 1 = 4$ )	$\pm 0,339981043584856$ $\pm 0,861136311594053$
۰٫۵۶۸۸۸۸۸۸۸۸۸۸۸۸۸۸۹ ۰٫۴۷۸۶۲۸۶۷۰۴۹۹۳۶۶ ۰٫۲۳۶۹۲۶۸۸۵۰۵۶۱۸۹	فرمول پنج-نقطه ای ( $n + 1 = 5$ )	$0,0000000000000000$ $\pm 0,538469310105683$ $\pm 0,906179845938664$
۰٫۴۶۷۹۱۳۹۳۴۵۷۲۶۹۱ ۰٫۳۶۰۷۶۱۵۷۳۰۴۸۱۳۹ ۰٫۱۷۱۳۲۴۴۹۲۳۷۹۱۷۰	فرمول شش-نقطه ای ( $n + 1 = 6$ )	$\pm 0,238619186083197$ $\pm 0,661209386466265$ $\pm 0,932469514203152$
۰٫۲۹۵۵۲۴۲۲۴۷۱۴۷۵۳ ۰٫۲۶۹۲۶۶۷۱۹۳۰۹۹۹۶ ۰٫۲۱۹۰۸۶۳۶۲۵۱۵۹۸۲ ۰٫۱۴۹۴۵۱۳۴۹۱۵۰۵۸۱ ۰٫۰۶۶۶۷۱۳۴۴۳۰۸۶۸۸	فرمول ده-نقطه ای ( $n + 1 = 10$ )	$\pm 0,148874338981631$ $\pm 0,433395394129247$ $\pm 0,679409568299024$ $\pm 0,865063366688985$ $\pm 0,973906528517172$

فرمول انتگرال گیری گوسی پیشرفته در این بخش، به نام فرمول انتگرال گیری گوس-لژاندر شناخته شده است زیرا از چند جمله ای های لژاندر استفاده کردیم. چند جمله ای های متعامد دیگر از قبیل چیبیشف، لاگر<sup>۴</sup>، یا هرمیت<sup>۵</sup>، در یک رفتار مشابه برای توسعه ی فرمول های انتگرال گیری گوسی ممکن است مورد استفاده قرار گیرند.

<sup>۴</sup>Laguerre  
<sup>۵</sup>Hermite

## ۴.۴ نقاط هم‌محل

این روش‌ها بر پایه‌ی مفهومی از درونیابی نقاط متمایز فضا است، که با انتخاب یک تابع که معمولاً یک چندجمله‌ای است، ریشه‌ی معادله دیفرانسیل را در دامنه‌ای از انتگرال یعنی  $(a \leq x \leq b)$  تقریب می‌زند و ضرایب تابع را با استفاده از مجموعه‌ای از توابع پایه، تعیین می‌کند. معادله دیفرانسیل مرتبه دوم

$$y''(x) = F(x, y(x), y'(x)) \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (18.4)$$

را همراه با دو مقدار مرزی زیر در نظر بگیرید

$$y(0) = 0, \quad (19.4)$$

$$y(1) = 1.$$

فرض کنید چندجمله‌ای

$$P_n(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n, \quad (20.4)$$

وجود دارد که تقریب خوبی از  $y(x)$  در معادله‌ی (۱۸.۴) است، و قرار می‌دهیم

$$y(x) \cong P_n(x), \quad (21.4)$$

با مشتق‌گیری از دو طرف معادله‌ی (۲۱.۴) و قرار دادن آن در معادله‌ی (۱۸.۴) داریم

$$P_n''(x) = F(x, P_n(x), P_n'(x)),$$

بنابراین شکل باقیمانده‌ی آن به صورت زیر است

$$R(x) = P_n''(x) - F(x, P_n(x), P_n'(x)). \quad (22.4)$$

هدف، تعیین ضرایب  $\{c_i \mid i = 0, 1, \dots, n\}$  از چندجمله‌ای  $P_n(x)$  است به طوری که باقیمانده تا حد امکان، روی دامنه انتگرال معادله دیفرانسیل، کوچک به دست آید. با صفر قرار دادن انتگرال داریم:

$$\int_0^1 W_k R(x) dx = 0. \quad (23.4)$$

که در آن  $W_k$ ، توابع وزنی انتخاب شده‌اند. این روش را روش باقیمانده‌ی وزن دار می‌نامیم. روش هم‌محل<sup>۶</sup>، توابع وزنی را برابر با تابع دلتای دیراک<sup>۷</sup> به صورت زیر انتخاب می‌کند

$$W_k = \delta(x - x_k),$$

که در آن  $\delta(x)$  دارای ویژگی زیر است

$$\int_0^1 a(x) \delta(x - x_k) dx = a(x_k),$$

بنابراین، انتگرال (۲۳.۴) به صورت زیر تبدیل می‌شود

$$\int_0^1 W_k R(x) dx = R(x_k) = 0, \quad (24.4)$$

<sup>۶</sup> Collocation

<sup>۷</sup> Dirac delta

با ترکیب معادلات (۲۲.۴) و (۲۴.۴)، داریم

$$P_n''(x_k) - F(x_k, P_n(x_k), P_n'(x_k)) = 0. \quad (25.4)$$

این نتیجه می‌دهد که در تعداد مشخصی از نقاط هم‌محل،  $\{x_k \mid k = 0, 1, \dots, n\}$ ، ضرایب چندجمله‌ای معادله‌ی (۲۰.۴) طوری انتخاب می‌شوند که معادله‌ی (۲۵.۴) برقرار باشد، یعنی چندجمله‌ای، جواب دقیقی از معادله دیفرانسیل در این نقاط هم‌محل است.

معادله‌ی (۲۵.۴) شامل  $n + 1$  نقطه‌ی هم‌محل است که ضرایب چندجمله‌ای  $P_n(x)$  یعنی  $\{c_i \mid i = 0, 1, \dots, n\}$  را تعیین می‌کنند. با توجه به اینکه شرایط مرزی باید در معادله صدق کنند، دو نقطه‌ی هم‌محل در این نوع از معادلات مرتبه دوم با مقدار مرزی، از قبل ثابت هستند، یعنی در  $x = 0$ .

$$y(0) = 0 = c_0, \quad (26.4)$$

و در  $x = 1$

$$y(1) = 1 = c_0 + c_1 + \dots + c_n = \sum_{i=1}^n c_i. \quad (27.4)$$

بنابراین برای انتخاب  $n - 1$  نقطه‌ی هم‌محل باقیمانده، آزادی عمل بیشتری داریم. حال معادله‌ی (۲۵.۴) را برای هر نقطه‌ی هم‌محل به صورت زیر می‌نویسیم:

$$P_n''(x_1) - F(x_1, P_n(x_1), P_n'(x_1)) = 0 \\ \vdots \quad (28.4)$$

$$P_n''(x_{n-1}) - F(x_{n-1}, P_n(x_{n-1}), P_n'(x_{n-1})) = 0$$

معادلات (۲۶.۴) تا (۲۸.۴) تشکیل دستگاهی با  $n + 1$  معادله جبری غیرخطی و  $n + 1$  مجهول می‌دهد. جواب این دستگاه را می‌توان با به کار بردن روش تکرار نیوتن به دست آورد. نتایج بهتر زمانی به دست می‌آید که برای تعیین نقاط هم‌محل، از ریشه‌های چندجمله‌ای‌های متعامد مناسب استفاده کنیم.

## ۵.۴ ریشه معادلات Lane – Emden

معادلات Lane-Emden ارایه شده در (۱.۴) را در نظر بگیرید. عملگر انتگرال را به این صورت تعریف می‌کنیم:

$$L_\alpha(\cdot) = \int_0^x x^{-\alpha} \int_0^x t^\alpha(\cdot) dt dx.$$

با بکارگیری  $L_\alpha$  در هر دو طرف معادله‌ی (۱.۴) نتایج زیر را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^x x^{-\alpha} \int_0^x t^\alpha y''(t) dt dx + \int_0^x x^{-\alpha} \int_0^x t^\alpha \left( \frac{\alpha}{t} y'(t) \right) dt dx \\
 & + \int_0^x x^{-\alpha} \int_0^x t^\alpha (f(t, y(t))) dt dx = \int_0^x x^{-\alpha} \int_0^x t^\alpha g(t) dt dx \\
 = & \int_0^x x^{-\alpha} \left( t^\alpha y'(t) \Big|_0^x - \alpha \int_0^x t^{\alpha-1} y'(t) dt \right) dx + \int_0^x x^{-\alpha} \alpha \int_0^x t^{\alpha-1} y'(t) dx \\
 & + \int_0^x x^{-\alpha} \int_0^x t^\alpha (f(t, y(t))) dt dx = \int_0^x x^{-\alpha} \int_0^x t^\alpha g(t) dt dx \\
 = & \int_0^x x^{-\alpha} x^\alpha y'(x) dx - \int_0^x x^{-\alpha} \alpha \int_0^x t^{\alpha-1} y'(t) dt dx + \int_0^x x^{-\alpha} \alpha \int_0^x t^{\alpha-1} y'(t) dt dx \\
 & + \int_0^x x^{-\alpha} \int_0^x t^\alpha (f(t, y(t))) dt dx = \int_0^x x^{-\alpha} \int_0^x t^\alpha g(t) dt dx \\
 = & \int_0^x y'(x) dx + \int_0^x x^{-\alpha} \int_0^x t^\alpha (f(t, y(t))) dt dx = \int_0^x x^{-\alpha} \int_0^x t^\alpha g(t) dt dx \\
 = & y(x) - y(0) + \underbrace{\int_0^x x^{-\alpha} \int_0^x t^\alpha (f(t, y(t))) dt dx}_{L_\alpha(f(x,y))} = \underbrace{\int_0^x x^{-\alpha} \int_0^x t^\alpha g(t) dt dx}_{L_\alpha(g(x))}.
 \end{aligned}$$

در کل، می‌توانیم رابطه زیر را بنویسیم

$$y(x) = A + Bx + L_\alpha(g(x)) - L_\alpha(f(x, y)).$$

فرض کنید

$$G(x) = A + Bx + L_\alpha(g(x)),$$

$$F(x, y(x)) = x^{-\alpha} \int_0^x t^\alpha (f(t, y(t))) dt.$$

بنابراین داریم

$$y(x) = G(x) - \int_0^x F(t, y(t)) dt, \quad (29.4)$$

که این یک معادله انتگرال غیرخطی ولتررا<sup>۸</sup> است.

به منظور استفاده از موجک‌های لژاندر، ابتدا  $y(x)$  را به صورت زیر تقریب می‌زنیم:

$$y(x) = C^T \Psi(x), \quad (30.4)$$

که در آن  $C$  و  $\Psi(x)$  را قبلاً در معادله (۴.۴) تعریف کرده‌ایم. حال با استفاده از معادلات (۲۹.۴) و

(۳۰.۴) معادله‌ی زیر را به دست می‌آوریم:

$$C^T \psi(x) = G(x) - \int_0^x F(t, C^T \psi(t)) dt, \quad (31.4)$$

<sup>۸</sup>Volterra

اکنون معادله‌ی (۳۱.۴) را در  $2^{k-1}M$  تا نقاط  $x_i$ ، به صورت زیر هم محل می‌کنیم:

$$C^T \psi(x_i) = G(x_i) - \int_0^{x_i} F(t, C^T \psi(t)) dt. \quad (32.4)$$

در این جا نقاط هم محل مناسب، صفرهای چندجمله‌ای‌های چیشف هستند. [۷]

$$x_i = \cos\left(\frac{(2i+1)\pi}{2^k M}\right), \quad i = 1, 2, \dots, 2^{k-1}M.$$

به منظور استفاده از فرمول انتگرال‌گیری گوسی برای معادله‌ی (۳۲.۴)،  $t$  را از بازه‌ی  $[0, x_i]$  به  $\tau$  در بازه‌ی  $[-1, 1]$  توسط تبدیل زیر انتقال می‌دهیم

$$\tau = \frac{2}{x_i}t - 1 \Rightarrow t = (\tau + 1)\frac{x_i}{2}.$$

معادله (۳۲.۴) می‌تواند به صورت زیر بازنویسی شود

$$C^T \psi(x_i) = G(x_i) - \frac{x_i}{2} \int_{-1}^1 F\left(\frac{x_i}{2}(\tau + 1), C^T \psi\left(\frac{x_i}{2}(\tau + 1)\right)\right) d\tau$$

با استفاده از فرمول انتگرال‌گیری گوسی، معادله‌ی زیر را به دست می‌آوریم:

$$C^T \psi(x_i) \approx G(x_i) - \frac{x_i}{2} \sum_{j=1}^s w_j F\left(\frac{x_i}{2}(\tau_j + 1), C^T \psi\left(\frac{x_i}{2}(\tau_j + 1)\right)\right), \quad i = 1, 2, \dots, 2^{k-1}M. \quad (33.4)$$

در معادله‌ی بالا  $\tau_j$ ،  $s$  تا از صفرهای چندجمله‌ای لژاندر  $L_{s+1}$  است و همچنین  $w_j$ ، وزن‌های متناظر با این صفرها هستند که در [۷] ارایه شده است. فرمول انتگرال‌گیری گوسی بالا برای چندجمله‌ای‌های تا درجه  $2s + 1$  دقیق است. معادله‌ی (۳۳.۴) تشکیل دستگاهی با  $2^{k-1}M$  معادله‌ی غیرخطی می‌دهد. جواب این دستگاه را که همان عناصر  $C$  هستند، را می‌توان با روش تکرار نیوتن به دست آورد. در ادامه این بخش چند مثال را برای درک بهتر مطالب گفته شده، حل می‌کنیم.

مثال ۱.۵.۴. معادله *Lane - Emden* زیر را در نظر بگیرید [۱۷]

$$\begin{cases} y''(x) + \frac{2}{x}y' + y(x) = 6 + 12x + x^2 + x^3, & 0 \leq x \leq 1, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

جواب دقیق این معادله  $y(x) = x^2 + x^3$  است. معادله انتگرال متناظر با معادله‌ی بالا، به صورت زیر است

$$y(x) = x^2 + x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^5 - L_2(y(x)),$$

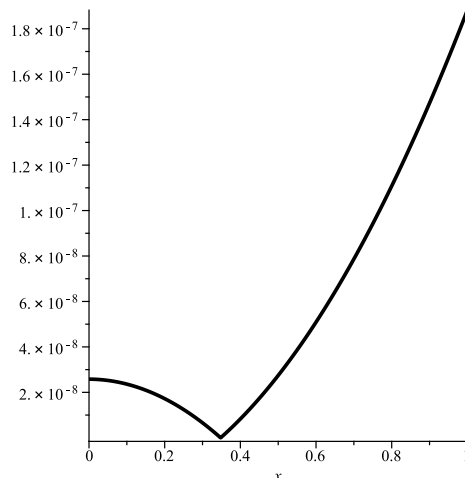
روش ارایه شده در این بخش را برای حل این مثال، به ازای  $k = 1$  و  $M = 4$  و  $s = 6$  به کار می‌بریم. در نهایت بردار مجهول  $C$  به صورت زیر به دست می‌آید

$$C = \left[ 0.5833333333333333, 0.5484821168, 0.1863390142, 0.1889822373 \right],$$

با به کارگیری معادله (۳۰.۴) به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} y(x) &= c_{10}\psi_{10}(x) + c_{11}\psi_{11}(x) + c_{12}\psi_{12}(x) + c_{13}\psi_{13}(x) \\ &= -2.581000000 \times 10^{-8} + 1.000000000 \times 10^{-9}x + 1.0000000209x^2 \\ &\quad + 1.000000004x^3. \end{aligned}$$

شکل (۱.۴) خطای مطلق حاصل از روش موجک لژاندر را برای مثال (۱.۵.۴) نشان می‌دهد.



شکل ۱.۴: خطای مطلق حاصل از روش موجک لژاندر

مثال ۲.۵.۴. معادله Lane – Emden زیر را در نظر بگیرید [۱۷]

$$\begin{cases} y''(x) + \frac{1}{x}y'(x) + xy(x) = x^5 - x^4 + 44x^2 - 30x, & 0 \leq x \leq 1, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$$

جواب دقیق این معادله  $x^4 - x^3$  است. معادله انتگرال متناظر با معادله‌ی بالا، به صورت زیر است

$$y(x) = \frac{1}{98}x^7 - \frac{1}{78}x^6 + x^4 - x^3 - L_{\lambda}(xy(x)),$$

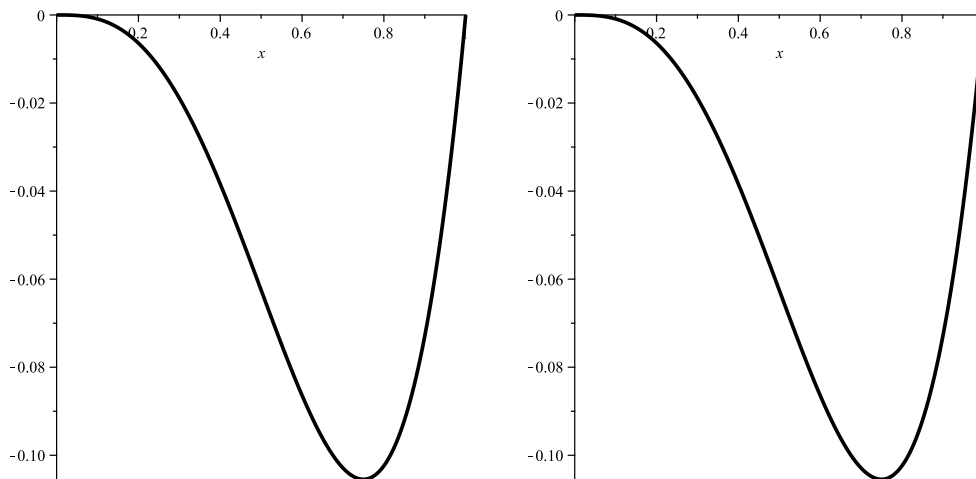
روش ارایه شده در این بخش را برای حل این مثال، به ازای  $k = 1$  و  $M = 5$  و  $s = 7$  به کار می‌بریم. در نهایت بردار مجهول  $C$  به صورت زیر به دست می‌آید

$$C = [-0.050000000000000007, -0.02886751343, 0.01597191414, 0.01889822360, 0.0004761904751],$$

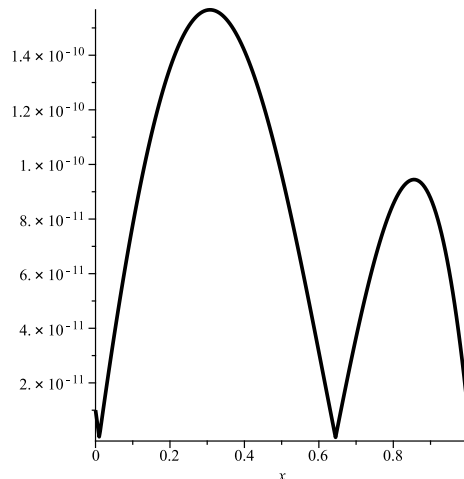
با به کارگیری معادله (۳.۴) به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} y(x) &= c_{10}\psi_{10}(x) + c_{11}\psi_{11}(x) + c_{12}\psi_{12}(x) + c_{13}\psi_{13}(x) + c_{14}\psi_{14}(x) \\ &= 1.0000000000 \times 10^{-11} - 1.0000000000 \times 10^{-9}x + 1.0000000000 \times 10^{-9}x^2 \\ &\quad - 0.999999999977x^3 + 0.999999999977x^4. \end{aligned}$$

شکل (۲.۴) جواب به دست آمده و جواب دقیق مثال (۲.۵.۴) را نشان می‌دهد. و شکل (۳.۴) خطای مطلق حاصل از روش موجک لژاندر را در مثال (۲.۵.۴) نشان می‌دهد.



شکل ۲.۴: سمت راست نمودار جواب به دست آمده و سمت چپ نمودار جواب دقیق است.



شکل ۳.۴: خطای مطلق حاصل از روش موجک لژاندر

## ۶.۴ حل معادلات $Lane - Emden$ با استفاده از ماتریس عملگر مشتق

در بخش قبل مثال‌های (۲.۵.۴) و (۱.۵.۴) را با استفاده از عملگر انتگرال و موجک‌های لژاندر حل کردیم. اکنون، در این بخش قصد داریم این دو مثال را با کمک ماتریس عملگر مشتق موجک لژاندر که در

فصل ۳ به آن اشاره شد، حل کنیم، و در پایان مشخص می‌شود که کدامیک از دو روش، برای حل معادلات  $Lane - Emden$ ، نتایج بهتر و دقیقتری را نتیجه می‌دهد.

مثال (۱.۵.۴) را که در بخش قبل ارایه شد در نظر بگیرید. این مثال را با استفاده از ماتریس عملگر مشتق موجک لژاندر، به ازای  $k = 0$  و  $M = 3$  حل می‌کنیم. در نظر داشته باشید که ساده شده‌ی بسط



تیلور تابع  $\frac{y}{x}$  تا جمله‌ی سوم آن، حول  $x = 0.54$  به صورت

$$\frac{y}{x} \simeq 14.81481481 - 41.15226337x + 50.80526341x^2 - 23.52095528x^3$$

است.

حال تابع جواب را به صورت  $y(x) = C^T \Psi(x)$  تقریب می‌زنیم.

برای این مقادیر  $k$  و  $M$ ، ماتریس‌های  $D$  و  $D^2$  به صورت زیر هستند

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{15} & 0 & 0 \\ 2\sqrt{7} & 0 & 2\sqrt{35} & 0 \end{pmatrix}, \quad D^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4\sqrt{15}\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4\sqrt{35}\sqrt{15} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

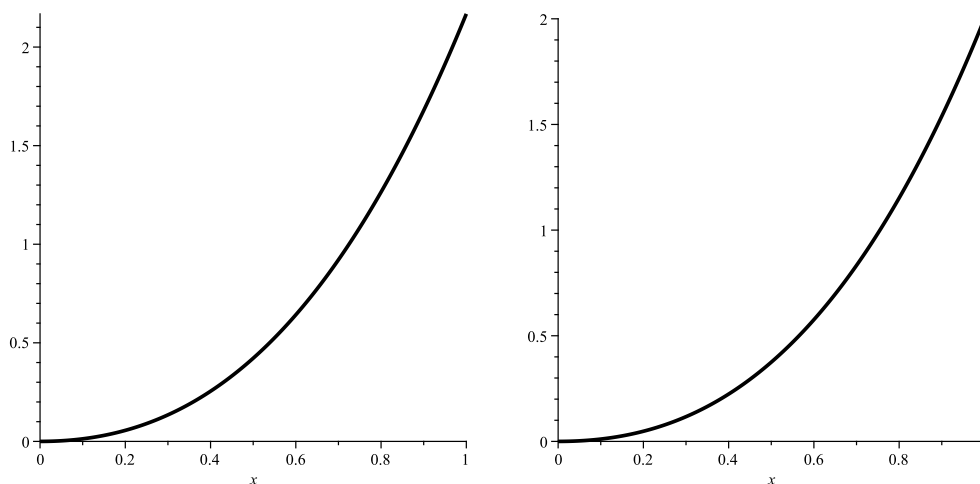
بردار مجهول  $C$  به صورت

$$C^T = [0.6426023611, 0.5981672764, 0.1974696084, 0.1818073933],$$

به دست می‌آید. با جایگذاری این بردار در (۳.۴)، جواب معادله به صورت زیر حاصل می‌شود

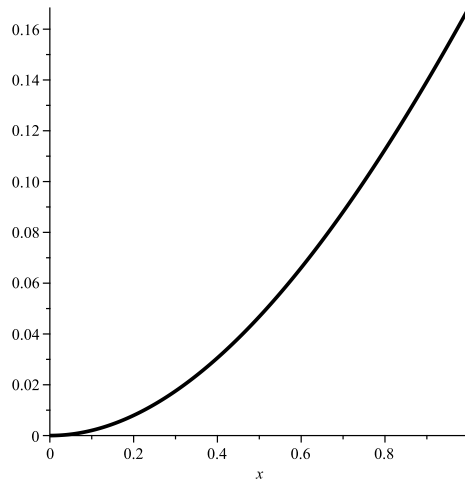
$$y(x) = -2.000000000 \times 10^{-11} + 2.000000000 \times 10^{-9}x + 1.206281358x^2 + 0.9620342983x^3$$

شکل (۴.۴) جواب به دست آمده و جواب دقیق مثال (۱.۵.۴) را با استفاده از روش ماتریس عملگر



شکل ۴.۴: سمت چپ نمودار جواب به دست آمده و سمت راست نمودار جواب دقیق است.

مشتق موجک لژاندر نشان می‌دهد. و همچنین شکل (۵.۴) خطای مطلق حاصل از این روش را نشان می‌دهد.



شکل ۵.۴: خطای مطلق حاصل از روش ماتریس عملگر مشتق

اکنون مثال (۲.۵.۴) را که در بخش قبل ارایه شد در نظر بگیرید. می‌خواهیم این مثال را با استفاده از ماتریس عملگر مشتق موجک لژاندر به ازای  $k = ۰$  و  $M = ۴$ ، حل کنیم. ساده شده‌ی بسط تیلور  $\frac{\Delta}{x}$  تا جمله‌ی چهارم، حول نقطه‌ی  $x = ۰/۶$  به صورت

$$\frac{\Delta}{x} \simeq ۶۶/۶۶۶۶۶۶۶۶ - ۲۲۲/۲۲۲۲۲۲۲x + ۳۷۰/۳۷۰۳۷۰۲x^2 - ۳۰۸/۶۴۱۹۷۵۳x^3 + ۱۰۲/۸۸۰۶۵۸۴x^4$$

است. تابع جواب را به صورت

$$y(x) = C^T \Psi(x) = [c_{۰۰}, c_{۰۱}, c_{۰۲}, c_{۰۳}, c_{۰۴}] \begin{bmatrix} \psi_{۰۰}(x) \\ \psi_{۰۱}(x) \\ \psi_{۰۲}(x) \\ \psi_{۰۳}(x) \\ \psi_{۰۴}(x) \end{bmatrix}, \quad (۳۴.۴)$$

تقریب می‌زنیم. برای این مقادیر  $k$  و  $M$ ، ماتریس  $D$  و  $D^2$  به صورت زیر هستند

$$D = \begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۲\sqrt{۳} & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲\sqrt{۱۵} & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۲\sqrt{۷} & ۰ & ۲\sqrt{۳۵} & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۶\sqrt{۳} & ۰ & ۶\sqrt{۷} & ۰ \end{pmatrix}, \quad D^2 = \begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۴\sqrt{۱۵}\sqrt{۳} & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۴\sqrt{۳۵}\sqrt{۱۵} & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱۲۰ & ۰ & ۱۲\sqrt{۷}\sqrt{۳۵} & ۰ & ۰ \end{pmatrix}$$

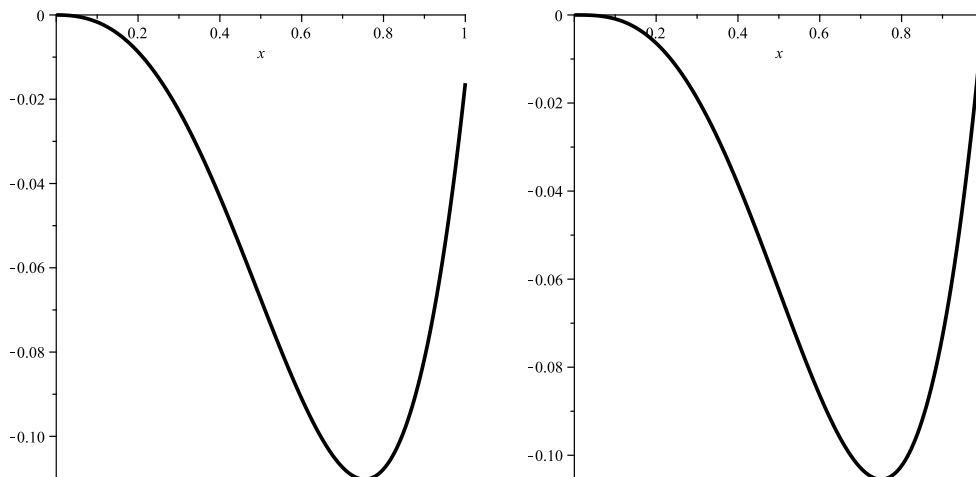
بردار مجهول  $C$  به صورت

$$C^T = [-۰/۰۵۴۷۱۷۶۸۰۸۲, -۰/۰۳۱۵۲۸۲۲۲۵۴, ۰/۰۱۵۴۴۶۴۶۵۲۸, ۰/۰۱۷۵۸۲۴۳۱۶۵, ۰/۰۰۴۰۲۹۵۳۰۹۰۲],$$

به دست می‌آید. با جایگذاری این بردار در (۳۴.۴)، جواب معادله به صورت زیر حاصل می‌شود

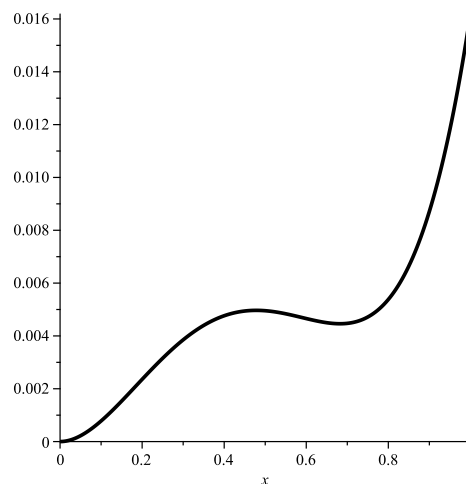
$$۱/۰۰۰۰۰۰۰۰۰ \times ۱۰^{-۱۰} x - ۰/۱۰۰۰۳۵۲۸۲۶۰ x^2 - ۰/۷۶۲۰۲۸۱۴۷۲ x^3 + ۰/۸۴۶۲۰۱۴۸۹۴ x^4$$

شکل (۶.۴) جواب به دست آمده و جواب دقیق مثال (۲.۵.۴) را با استفاده از ماتریس عملگر مشتق موجک لژاندر نشان می‌دهد.



شکل ۶.۴: سمت چپ نمودار جواب به دست آمده و سمت راست نمودار جواب دقیق است.

شکل (۷.۴) خطای مطلق حاصل از روش ماتریس عملگر مشتق موجک لژاندر را نشان می‌دهد.



شکل ۷.۴: خطای مطلق حاصل از روش ماتریس عملگر مشتق موجک لژاندر

همان‌طور که مشاهده می‌کنیم، جواب معادلات Lane – Emden به دست آمده از روش ارایه شده در بخش (۵.۴)، نسبت به جواب معادلات Lane – Emden به دست آمده از روش ماتریس عملگر مشتق موجک لژاندر، دقیق‌تر است.

## نتیجه‌گیری

در این پایان‌نامه روش‌های طیفی به طور مفصل مورد بررسی قرار گرفتند. همچنان که ذکر شد با استفاده از سری فوریه قادر به تقریب توابع متناوب بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر هستیم. چندجمله‌ای‌های متعامد لژاندر معرفی و برای استفاده از این چندجمله‌ای‌ها در بازه  $[-1, 1]$ ، چندجمله‌ای‌های انتقال‌یافته لژاندر معرفی شدند.

با وجود خواص بسیار خوبی که روش‌های طیفی دارند، این روش‌ها دارای برخی نقاط ضعف اساسی نیز هستند. از جمله این مشکلات می‌توان به سراسری بودن توابع پایه‌ای و پدیده‌ی گیس برای توابع غیر تحلیلی اشاره کرد. با کمک آنالیز چند ریزه‌ساز و پایه‌های موجک می‌توان برخی مشکلات و نقاط ضعف روش‌های طیفی را مرتفع ساخت. موجک‌های متعامد لژاندر از جمله مهمترین پایه‌های موجک بوده و دارای کاربردهای فراوانی در حل معادلات دیفرانسیل هستند. با استفاده از عملگر مشتق‌گیری این پایه‌های موجکی، روش‌های تقریبی کارآمد و دقیقی، برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی پیشنهاد شد.

در این پژوهش پایه‌های متعامد موجک‌های لژاندر، همراه با ماتریس عملگر مشتق این موجک‌ها، برای حل مسایل مقدار مرزی خطی و غیرخطی مورد بررسی قرار گرفتند، و برای اثبات کارایی این روش، مثال‌های عددی ارائه شد.

در فصل آخر، یک روش عددی برای حل معادلات  $Lane - Emden$  که به صورت مسایل مقدار اولیه تکین ارائه شده است، مورد بررسی قرار گرفت. برای این کار، از عملگر انتگرال و تبدیل معادلات  $Lane - Emden$  به معادلات انتگرال، و به کارگیری تقریب موجک لژاندر استفاده کردیم. و در انتها مثال‌هایی برای کارایی این روش، ارائه شد.

با این حال سوالاتی در این زمینه وجود دارد که در آینده می‌توان راجع به آن‌ها به تحقیق و پژوهش پرداخت. یکی از این سوالات به صورت زیر مطرح می‌شود: آیا می‌توان از ماتریس عملگر مشتق موجک لژاندر برای حل معادلات دیفرانسیل از نوع  $Bratu$  استفاده کرد.

# پیوست آ

## نمایش کدهای Maple

### آ.۱ کد مثال ۲ فصل ۳

در این جا کد Maple مثال دوم ارایه شده است.

```
> with(linalg);
> with(LinearAlgebra);
>
> k := 1; M := 3;
> C := Matrix(2^k*(M+1), 1, [c[0, 0], c[0, 1], c[0, 2], c[0, 3], c[1, 0],
c[1, 1], c[1, 2],
c[1, 3]]);
> p1 := Matrix(1, 2^k*(M+1), [c[0, 0], c[0, 1], c[0, 2], c[0, 3], c[1, 0],
c[1, 1], c[1, 2],
c[1, 3]]);
> F := Matrix(M+1, M+1, proc (r, s) options operator, arrow; if modp(r+s, 2) <> 0
and 1 <= s
and s <= r-1
then 2^(k+1)*sqrt((2*r-1)*(2*s-1)) else 0 end if end proc);
> with(Student[LinearAlgebra]);
>
> U := [ `<|>`(`<, >`(0, 4*sqrt(3), 0, 4*sqrt(7)), `<, >`(0, 0, 4*sqrt(15), 0), `<, >`
(0, 0, 0, 4*sqrt(35)), `<, >`(0, 0, 0, 0)), `<|>`(`<, >`(0, 4*sqrt(3), 0, 4*sqrt(7)), `
```

```

(0, 0, 4*sqrt(15), 0), `<>`(0, 0, 0, 4*sqrt(35)), `<>`(0, 0, 0, 0));
> l := DiagonalMatrix(U);
> transpose(l);
> e := Multiply(l, l);
> L[0] := 1;
> L[0] := 1; L[1] := z; L[0] := unapply(L[0], z); L[1] := unapply(L[1], z);
> for i to 5 do L[i+1] := simplify(L[i](z)*(2*i+1)*z/(i+1)-i*L[i-1](z)/(i+1));
  L[i+1] := unapply(L[i+1], z) end do;
> for j from 0 to 2^k-1 do for m from 0 to M do
  w := proc (j, m, t) local u, b; u := m; b := j;
  if b/2^k <= t and t <= (b+1)/2^k then
  sqrt(u+1/2)*2^((1/2)*k+1/2)*L[u](2^(k+1)*t-2*b-1)
  else 0 end if end proc end do end do;
> w(1, 1, .2);
> for m from 0 to M do for j from 0 to 2^k-1 do
T[j, m] := simplify(sqrt(m+1/2)*2^((k+1)*(1/2))*L[m](2^(k+1)*h-2*j-1));
  T[j, m] := unapply(T[j, m], h) end do end do;
> a := Matrix(4, 1, proc (i, j) options operator, arrow; T[j-1, i-1](h) end proc);
> A := Matrix(2^k*(M+1), 1, [sqrt(2), sqrt(6)*(4*h-1), sqrt(10)*(24*h^2-12*h+1), sqrt(14)*(24*h^2-12*h+1)]);
> Omega := Matrix(1, 2^k*(M+1), [sqrt(2), sqrt(6)*(4*h-1), sqrt(10)*(24*h^2-12*h+1), sqrt(14)*(24*h^2-12*h+1)]);
> G := Matrix(1, 2^k*(M+1), [J[0, 0], J[0, 1], J[0, 2], J[0, 3], J[1, 0], J[1, 1], J[1, 2], J[1, 3]]);
> Multiply(G, A) = -2*h+1;
> solve({160*sqrt(14)*J[0, 3] = 0, 24*sqrt(10)*J[0, 2]-120*sqrt(14)*J[0, 3] = 0,
  4*sqrt(6)*J[0, 1]-12*sqrt(10)*J[0, 2]+24*sqrt(14)*J[0, 3] = -2,
  sqrt(2)*J[0, 0]-sqrt(6)*J[0, 1]+sqrt(10)*J[0, 2]-sqrt(14)*J[0, 3] = 1}, [J[0, 0], J[0, 1], J[0, 2], J[0, 3]]);
> gy := Matrix(1, 2^k*(M+1), [(1/4)*sqrt(2), -(1/12)*sqrt(6), 0, 0, J[1, 0], J[1, 1], J[1, 2], J[1, 3]]);
> B := Matrix(1, 2^k*(M+1), [f[0, 0], f[0, 1], f[0, 2], f[0, 3], f[1, 0], f[1, 1], f[1, 2], f[1, 3]]);
> Multiply(B, A) = 40*h^3-60*h^2-18*h+19;
> solve({160*sqrt(14)*f[0, 3] = 40, 24*sqrt(10)*f[0, 2]-120*sqrt(14)*f[0, 3] = -60,
  4*sqrt(6)*f[0, 1]-12*sqrt(10)*f[0, 2]+24*sqrt(14)*f[0, 3] = -18,

```

```

sqrt(2)*f[0, 0]-sqrt(6)*f[0, 1]+sqrt(10)*f[0, 2]-sqrt(14)*f[0, 3] = 19},
[f[0, 0], f[0, 1], f[0, 2], f[0, 3]]);
> `&varpi;` := Matrix(1, 2^k*(M+1), [(43/8)*sqrt(2),
-(13/8)*sqrt(6), -(1/8)*sqrt(10), (1/56)*sqrt(14), f[1, 0], f[1, 1], f[1, 2],
f[1, 3]]);
> multiply(multiply(pl, e), A);
> dm := multiply(multiply(gy, A), Omega);
> multiply(multiply(dm, transpose(l)), C);
> multiply(pl, A);
> multiply(`&varpi;`, A);
> vv := 16*c[0, 2]*sqrt(15)*sqrt(3)*sqrt(2)+
16*c[0, 3]*sqrt(35)*sqrt(15)*sqrt(6)*(4*h-1);
> mm := (4*(-2*h+1))*sqrt(2)*sqrt(3)*c[0, 1]+
(4*(-2*h+1))*sqrt(6)*(4*h-1)*sqrt(15)*c[0, 2]+((4*(-2*h+1))
*sqrt(2)*sqrt(7)+(4*(-2*h+1))*sqrt(10)
*(24*h^2-12*h+1)*sqrt(35))*c[0, 3];
> pp := c[0, 0]*sqrt(2)+c[0, 1]*sqrt(6)*(4*h-1)+c[0, 2]*sqrt(10)*
(24*h^2-12*h+1)+c[0, 3]*sqrt(14)*(160*h^3-120*h^2+24*h-1);
> nn := 40*h^3-60*h^2-18*h+19;
> ww := simplify(vv+mm+pp-nn);
> T[1] := T[0, 0](h);
> T[2] := T[0, 1](h);
> T[3] := T[0, 2](h);
> T[4] := T[0, 3](h);
> Lambda := simplify(T[1]*ww);
> Upsilon := simplify(T[2]*ww);
> delta := simplify(T[3]*ww);
> `&varrho;` := simplify(T[4]*ww);
> simplify(int(Lambda, h = 0 .. 1/2) = 0);
> simplify(int(Upsilon, h = 0 .. 1/2) = 0);
> simplify(int(delta, h = 0 .. 1/2) = 0);
> simplify(int(`&varrho;`, h = 0 .. 1/2) = 0);
> `&Ascr;` := Matrix(4, 1, proc (i, j) options operator, arrow;
T[j-1, i-1](0) end proc);

```

```

> `&Bscr;` := matrix(8, 1, [sqrt(2), -sqrt(6), sqrt(10), -sqrt(14), 0, 0, 0, 0]);
> multiply(pl, `&Bscr;`) = 1;
> solve({(1/8)*sqrt(2)*sqrt(5)+2*sqrt(5)*c[0, 3]*sqrt(7)-3*c[0, 2] = 0,
c[0, 0]*sqrt(2)-c[0, 1]*sqrt(6)+c[0, 2]*sqrt(10)-c[0, 3]*sqrt(14) = 1,
(13/8)*sqrt(2)*sqrt(3)+78*sqrt(3)*c[0, 3]*sqrt(7)+2*sqrt(3)*c[0, 2]*sqrt(5)-c[0, 1] = 0,
-(43/8)*sqrt(2)+2*c[0, 3]*sqrt(7)+46*c[0, 2]*sqrt(5)+2*sqrt(3)*c[0, 1]+c[0, 0] = 0},
[c[0, 0], c[0, 1], c[0, 2], c[0, 3]]);
> simplify(evalf(-(395/24)*sqrt(2)+(80993/46116)*sqrt(14)*sqrt(7)+
(1393/13176)*sqrt(7)*sqrt(14)*sqrt(6)*sqrt(2)*sqrt(3)-
(199/92232)*sqrt(7)*sqrt(14)*sqrt(10)*sqrt(2)*sqrt(5)));
> simplify(evalf((49/24)*sqrt(2)*sqrt(3)-(51689/230580)*sqrt(3)*sqrt(7)*
sqrt(14)-(889/21960)*sqrt(7)*sqrt(14)*sqrt(6)*sqrt(2)+(127/461160)*sqrt(3)*
sqrt(7)*sqrt(14)*sqrt(10)*sqrt(2)*sqrt(5)));
> simplify(evalf((1/24)*sqrt(2)*sqrt(5)-(407/230580)*sqrt(5)*sqrt(7)*sqrt(14)
-(7/65880)*sqrt(5)*sqrt(7)*sqrt(14)*sqrt(6)*sqrt(2)*sqrt(3)+(1/92232)*
sqrt(7)*sqrt(14)*sqrt(10)*sqrt(2)));
> simplify(evalf(-(407/153720)*sqrt(14)-(7/43920)*sqrt(14)*sqrt(6)*sqrt(2)*
sqrt(3)+(1/307440)*sqrt(14)*sqrt(10)*sqrt(2)*sqrt(5)));
> `&Rscr;` := matrix(1, 4, [.1767767083, -.1837117287, 0.7905694144e-1,
-0.1336306210e-1]);
> simplify(multiply(`&Rscr;`, a));
> ye := -8*x^3+12*x^2-6*x+1;
> Y := 1.000000013-5.999999977*x+12.*x^2-8.000000001*x^3;
> plot(abs(ye-Y), x = 0 .. 1/2);
> v := Matrix(4, 1, proc (i, j) options operator, arrow; T[j, i-1](h) end proc);
> A := Matrix(2^k*(M+1), 1, [0, 0, 0, 0, sqrt(2), sqrt(6)*(4*h-3),
sqrt(10)*(24*h^2-36*h+13), sqrt(14)*(160*h^3-360*h^2+264*h-63)]);
> Omega := Matrix(1, 2^k*(M+1), [0, 0, 0, 0, sqrt(2), sqrt(6)*(4*h-3),
sqrt(10)*(24*h^2-36*h+13), sqrt(14)*(160*h^3-360*h^2+264*h-63)]);
> G := Matrix(1, 2^k*(M+1), [J[0, 0], J[0, 1], J[0, 2], J[0, 3], J[1, 0], J[1, 1],
J[1, 2], J[1, 3]]);
> Multiply(G, A) = 2*h-1;
> solve({160*sqrt(14)*J[0, 3] = 0, 24*sqrt(10)*J[0, 2]-120*sqrt(14)*J[0, 3] = 0,
4*sqrt(6)*J[0, 1]-12*sqrt(10)*J[0, 2]+24*sqrt(14)*J[0, 3] = -2,

```



```

sqrt(2)*J[0, 0]-sqrt(6)*J[0, 1]+sqrt(10)*J[0, 2]-sqrt(14)*J[0, 3] = 1}, [J[0, 0],
J[0, 1], J[0, 2], J[0, 3]]);
> solve({160*sqrt(14)*J[1, 3] = 0, 24*sqrt(10)*J[1, 2]-360*sqrt(14)*J[1, 3] = 0,
4*sqrt(6)*J[1, 1]-36*sqrt(10)*J[1, 2]+264*sqrt(14)*J[1, 3] = 2,
sqrt(2)*J[1, 0]-3*sqrt(6)*J[1, 1]+13*sqrt(10)*J[1, 2]-63*sqrt(14)*J[1, 3] = -1},
[J[1, 0], J[1, 1], J[1, 2], J[1, 3]]);
> gy := Matrix(1, 2^k*(M+1), [J[0, 0], J[0, 1], J[0, 2], J[0, 3],
(1/4)*sqrt(2), (1/12)*sqrt(6), 0, 0]);
> B := Matrix(1, 2^k*(M+1), [f[0, 0], f[0, 1], f[0, 2], f[0, 3],
f[1, 0], f[1, 1], f[1, 2], f[1, 3]]);
> Multiply(B, A) = 56*h^3-84*h^2+90*h-31;
> solve({160*sqrt(14)*f[1, 3] = 56, 24*sqrt(10)*f[1, 2]-360*
sqrt(14)*f[1, 3] = -84, 4*sqrt(6)*f[1, 1]-36*sqrt(10)*f[1, 2]+
264*sqrt(14)*f[1, 3] = 90, sqrt(2)*f[1, 0]-3*sqrt(6)*f[1, 1]+
13*sqrt(10)*f[1, 2]-63*sqrt(14)*f[1, 3] = -31}, [f[1, 0], f[1, 1], f[1, 2], f[1, 3]]);
> `&varpi;` := Matrix(1, 2^k*(M+1), [f[0, 0], f[0, 1], f[0, 2],
f[0, 3], (55/8)*sqrt(2), (101/40)*sqrt(6), (7/40)*sqrt(10), (1/40)*sqrt(14)]);
> multiply(multiply(pl, e), A);
> dm := multiply(multiply(gy, A), Omega);
> multiply(multiply(dm, transpose(l)), C);
> multiply(pl, A);
> multiply(`&varpi;`, A);
> vv := 16*c[1, 2]*sqrt(15)*sqrt(3)*sqrt(2)+16*c[1, 3]*sqrt(35)*
sqrt(15)*sqrt(6)*(4*h-3);
> mm := (4*(2*h-1))*sqrt(2)*sqrt(3)*c[1, 1]+(4*(2*h-1))*sqrt(6)*
(4*h-3)*sqrt(15)*c[1, 2]+((4*(2*h-1))*sqrt(2)*sqrt(7)+(4*(2*h-1))*
sqrt(10)*(24*h^2-36*h+13)*sqrt(35))*c[1, 3];
> pp := c[1, 0]*sqrt(2)+c[1, 1]*sqrt(6)*(4*h-3)+c[1, 2]*sqrt(10)*
(24*h^2-36*h+13)+c[1, 3]*sqrt(14)*(160*h^3-360*h^2+264*h-63);
> nn := 56*h^3-84*h^2+90*h-31;
> ww := simplify(vv+mm+pp-nn);
> T[5] := T[1, 0](h);
> T[6] := T[1, 1](h);
> T[7] := T[1, 2](h);

```

```

> T[8] := T[1, 3](h);
> Lambda := simplify(T[5]*ww);
> Upsilon := simplify(T[6]*ww);
> delta := simplify(T[7]*ww);
> `&varrho;` := simplify(T[8]*ww);
> simplify(int(Lambda, h = 1/2 .. 1) = 0);
> simplify(int(Upsilon, h = 1/2 .. 1) = 0);
> simplify(int(delta, h = 1/2 .. 1) = 0);
> simplify(int(`&varrho;`, h = 1/2 .. 1) = 0);
> `&Ascr;` := Matrix(4, 1, proc (i, j) options operator, arrow; T[j, i-1](1) end proc);
> `&Bscr;` := matrix(8, 1, [0, 0, 0, 0, sqrt(2), sqrt(6), sqrt(10), sqrt(14)]);
> multiply(pl, `&Bscr;`) = 1;
> solve({-(7/40)*sqrt(2)*sqrt(5)+2*sqrt(5)*c[1, 3]*sqrt(7)+5*c[1, 2] = 0,
c[1, 0]*sqrt(2)+c[1, 1]*sqrt(6)+c[1, 2]*sqrt(10)+c[1, 3]*sqrt(14) = 1,
-(101/40)*sqrt(2)*sqrt(3)+82*sqrt(3)*c[1, 3]*sqrt(7)+2*sqrt(3)*c[1, 2]*
sqrt(5)+3*c[1, 1] = 0, -(55/8)*sqrt(2)+2*c[1, 3]*sqrt(7)+50*c[1, 2]*sqrt(5)+
2*sqrt(3)*c[1, 1]+c[1, 0] = 0}, [c[1, 0], c[1, 1], c[1, 2], c[1, 3]]);
>
> `&Rscr;` := matrix(1, 4, [.1767766944, .1837117302, 0.7905694149e-1, 0.1336306210e-1]);
> simplify(multiply(`&Rscr;`, v));
> ye := -1+6*x-12*x^2+8*x^3;
> Y := -1.+6.000000004*x-12.*x^2+8.000000001*x^3;
> plot(abs(ye-Y), x = 1/2 .. 1);

```

## ۲.آ. کد مثال ۱ فصل ۴

در این جا کد *Maple* مثال اول ارایه شده است.

```

> with(linalg);
> with(LinearAlgebra);
> k := 1; M := 4;
> L[0] := 1;
> L[0] := 1; L[1] := t; L[0] := unapply(L[0], t); L[1] := unapply(L[1], t);
> for i to 5 do L[i+1] := simplify(L[i](t)*(2*i+1)*t/(i+1)-i*L[i-1](t)/(i+1));

```

```

L[i+1] := unapply(L[i+1], t) end do;
> for j from 0 to 2^(k-1) do for m from 0 to M-1 do g := proc (j, m, t) local u, b;
u := m; b := j; if (2*b-2)/2^k <= t and t <= 2*b/2^k then
  sqrt(u+1/2)*2^((1/2)*k)*L[u](2^k*t-2*b+1) else 0 end if end proc end do end do;
> g(1, 1, 3/4);
> C := Matrix(4, 1, [c[1, 0], c[1, 1], c[1, 2], c[1, 3]]);
> for m from 0 to M-1 do for j to 2^(k-1) do T[j, m] := simplify(sqrt(m+1/2)*
2^((1/2)*k)*L[m](2^k*h-2*j+1));
T[j, m] := unapply(T[j, m], h) end do end do;
> a := Matrix(4, 1, proc (i, j) options operator, arrow; T[j, i-1](h) end proc);
> A := Matrix(1, 4, [c[1, 0], c[1, 1], c[1, 2], c[1, 3]]);
> N := multiply(A, a);
> H := c[1, 0]+c[1, 1]*sqrt(3)*(2*h-1)+c[1, 2]*sqrt(5)*(6*h^2-6*h+1)+c[1, 3]*sqrt(7)
> U := simplify(h^2*H);
> simplify(int(U, h = 0 .. t));
> W := (10/3)*c[1, 3]*sqrt(7)*t^4+(6/5)*t^3*c[1, 2]*sqrt(5)-6*t^3*c[1, 3]*
sqrt(7)-(3/2)*t^2*c[1, 2]*sqrt(5)+3*t^2*c[1, 3]*sqrt(7)+(1/2)*t^2*c[1, 1]*
sqrt(3)+(1/3)*t*c[1, 0]+(1/3)*t*c[1, 2]*sqrt(5)-(1/3)*t*c[1, 1]*sqrt(3)-(1/3)*
c[1, 3]*sqrt(7)*t;
> Y := simplify(((10/3)*t^4*sqrt(7)-6*sqrt(7)*t^3+3*t^2*sqrt(7)-(1/3)*t*
sqrt(7))*c[1, 3];
> P := ((6/5)*t^3*sqrt(5)-(3/2)*t^2*sqrt(5)+(1/3)*t*sqrt(5))*c[1, 2];
> E := ((1/2)*t^2*sqrt(3)-(1/3)*t*sqrt(3))*c[1, 1];
> B := (1/3)*t*c[1, 0];
> G := Y+P+E+B;
> evalf(.3826834325*(1/2));
> evalf(0+1);
> evalf(.1913417162);
simplify(evalf(((10/3)*.1913417162^4*sqrt(7)-6*sqrt(7)*.1913417162^3+3*
.1913417162^2*sqrt(7)-(1/3*.1913417162)*sqrt(7))*c[1, 3]+((6/5)*.1913417162^3*sq
(1/3*.1913417162)*sqrt(5))*c[1, 2]+((1/2)*.1913417162^2*sqrt(3)-
(1/3*.1913417162)*sqrt(3))*c[1, 1]+(1/3*.1913417162)*c[1, 0]));
> Lambda := evalf(.4179591838*(0.2246351416e-1*c[1, 3]+0.3861576967e-
1*c[1, 2]-0.7876457036e-1*c[1, 1]+0.6378057207e-1*c[1, 0]));

```

```

> evalf(.4058451514+1);
> evalf(.1913417162*1.405845151);
simplify(evalf(((10/3)*.2689968239^4*sqrt(7)-6*sqrt(7)*.2689968239^3+
3*.2689968239^2*sqrt(7)-(1/3*.2689968239)*sqrt(7))*c[1, 3]+((6/5)*.2689968239^3*sqrt(
(1/3*.2689968239)*sqrt(5))*c[1, 2]+((1/2)*.2689968239^2*sqrt(3)-
(1/3*.2689968239)*sqrt(3))*c[1, 1]+(1/3*.2689968239)*c[1, 0]));
> Upsilon := evalf(.3818300506*(0.7428909515e-1*c[1, 3]+
0.1002647179e-1*c[1, 2]-0.9264040427e-1*c[1, 1]+0.8966560797e-1*c[1, 0]));
> evalf(-.4058451514+1);
> evalf(.1913417162*.5941548486);
simplify(evalf(((10/3)*.1136866084^4*sqrt(7)-6*sqrt(7)*.1136866084^3+
3*.1136866084^2*sqrt(7)
-(1/3*.1136866084)*sqrt(7))*c[1, 3]+((6/5)*.1136866084^3*sqrt(5)-
(3/2)*.1136866084^2*sqrt(5)+
(1/3*.1136866084)*sqrt(5))*c[1, 2]+((1/2)*.1136866084^2*sqrt(3)-
(1/3*.1136866084)*sqrt(3))*c[1, 1]+(1/3*.1136866084)*c[1, 0]));
> Omega := evalf(.3818300506*(-0.1952811616e-1*c[1, 3]+0.4532912190e-1*
c[1, 2]-0.5444392312e-1*c[1, 1]+0.3789553613e-1*c[1, 0]));
> evalf(.7415311856+1);
> evalf(.1913417162*1.741531186);
simplify(evalf(((10/3)*.3332275659^4*sqrt(7)-6*sqrt(7)*.3332275659^3+
3*.3332275659^2*sqrt(7)-(1/3*.3332275659)*sqrt(7))*c[1, 3]+((6/5)*.3332275659^3*sqrt(
(1/3*.3332275659)*sqrt(5))*c[1, 2]+((1/2)*.3332275659^2*sqrt(3)-
(1/3*.3332275659)*sqrt(3))*c[1, 1]+(1/3*.3332275659)*c[1, 0]));
> `&varphi;` := evalf(.2797053914*(.1088337202*c[1, 3]-0.2478213970e-
1*c[1, 2]-0.9622503518e-1*c[1, 1]+.1110758553*c[1, 0]));
> evalf(-.7415311856+1);
> evalf(.1913417162*.2584688144);
simplify(evalf(((10/3)*0.4945586653e-1^4*sqrt(7)-6*sqrt(7)*0.4945586653e-
1^3+3*0.4945586653e-1^2*sqrt(7)-(1/3*0.4945586653e-1)*sqrt(7))*c[1, 3]+((6/5)*0.49455
(1/3*0.4945586653e-1)*sqrt(5))*c[1, 2]+((1/2)*0.4945586653e-
1^2*sqrt(3)-(1/3*0.4945586653e-1)*sqrt(3))*c[1, 1]+
(1/3*0.4945586653e-1)*c[1, 0]));
> B := evalf(.2797053914*(-0.2606985498e-1*c[1, 3]+0.2898306484e-1*

```

```

c[1, 2]-0.2643516127e-1*c[1, 1]+0.1648528884e-1*c[1, 0]));
> evalf(.9491079123+1);
> evalf(.1913417162*1.949107912);
simplify(evalf(((10/3)*.3729456529^4*sqrt(7)-6*sqrt(7)*.3729456529^3
+3*.3729456529^2*
sqrt(7)-(1/3*.3729456529)*sqrt(7))*c[1, 3]+((6/5)*.3729456529^3*
sqrt(5)-(3/2)*.3729456529^2*sqrt(5)+
(1/3*.3729456529)*sqrt(5))*c[1, 2]+((1/2)*.3729456529^2*sqrt(3)-
(1/3*.3729456529)*sqrt(3))*c[1, 1]+(1/3*.3729456529)*c[1, 0]));
> u := evalf(.1294849661*(.1222360272*c[1, 3]-0.4935124696e-1*
c[1, 2]-0.9486613333e-1*c[1, 1]+.1243152176*c[1, 0]));
> `&varpi;` := Lambda+Upsilon+Omega+`&varphi;`+B+u;
> evalf(.1913417162*`&varpi;`);
> simplify(evalf(.3826834325^2+.3826834325^3+(1/20)*.3826834325^4+
(1/30)*.3826834325^5));
> simplify(c[1, 0]+2*c[1, 1]*sqrt(3)*.3826834325-c[1, 1]*sqrt(3)+6*c[1, 2]*
sqrt(5)*.3826834325^2-6*c[1, 2]*sqrt(5)*.3826834325+c[1, 2]*sqrt(5)+20*c[1, 3]*sq
sqrt(7)*.3826834325-c[1, 3]*sqrt(7));
> simplify(evalf(c[1, 0]-.4063965111*c[1, 1]-.9333815924*c[1, 2]+
.8457322098*c[1, 3]+(0.1325528284e-1*c[1, 3]+0.6134610892e-
2*c[1, 2]-0.2596010519e-1*c[1, 1]+0.2432734756e-1*c[1, 0]))) = .2038352066;
> evalf((- .3826834325)*(1/2));
> evalf(0+1);
> evalf((- .1913417162)*1);
simplify(evalf(((10/3)*(-.1913417162)^4*sqrt(7)-6*sqrt(7)*(-.1913417162)^3+3*
(-.1913417162)^2*sqrt(7)-(1/3*(-.1913417162))*sqrt(7))*c[1, 3]+((6/5)*(-.1913417
(1/3*(-.1913417162))*sqrt(5))*c[1, 2]+((1/2)*(-.1913417162)^2*sqrt(3)-
(1/3*(-.1913417162))*sqrt(3))*c[1, 1]+(1/3*(-.1913417162))*c[1, 0]));
> nu := evalf(.4179591838*(.5823711140*c[1, 3]-.2842142000*c[1, 2]+
.1421778124*c[1, 1]-0.6378057207e-1*c[1, 0]));
> evalf(.4058451514+1);
> evalf((- .1913417162)*1.405845151);
simplify(evalf(((10/3)*(-.2689968239)^4*sqrt(7)-6*sqrt(7)*(-.2689968239)^3+
3*(-.2689968239)^2*sqrt(7)-(1/3*(-.2689968239))*sqrt(7))*c[1, 3]+((6/5)*(-.26899

```

```

(1/3*(-.2689968239))*sqrt(5))*c[1, 2]+((1/2)*(-.2689968239)^2*sqrt(3)
-(1/3*(-.2689968239))*sqrt(3))*c[1, 1]+(1/3*(-.2689968239))*c[1, 0]));
> sigma := evalf(.3818300506*(1.166731057*c[1, 3]-.4954273539*c[1, 2]+.2179703732*c[1,
> evalf(-.4058451514+1);
> evalf((- .1913417162)*.5941548486);
simplify(evalf(((10/3)*(-.1136866084)^4*sqrt(7)-6*sqrt(7)*(-.1136866084)^3+
3*(-.1136866084)^2*sqrt(7)-(1/3*(-.1136866084))*sqrt(7))*c[1, 3]+((6/5)*(-.1136866084)
(1/3*(-.1136866084))*sqrt(5))*c[1, 2]+((1/2)*(-.1136866084)^2*sqrt(3)
-(1/3*(-.1136866084))*sqrt(3))*c[1, 1]+(1/3*(-.1136866084))*c[1, 0]));
> rho := evalf(.3818300506*(.2276469161*c[1, 3]-.1320302758*c[1, 2]+
0.7683006483e-1*c[1, 1]-0.3789553613e-1*c[1, 0]));
> evalf(.7415311856+1);
> evalf((- .1913417162)*1.741531186);
simplify(evalf(((10/3)*(-.3332275659)^4*sqrt(7)-6*sqrt(7)*(-.3332275659)^3+
3*(-.3332275659)^2*sqrt(7)-(1/3*(-.3332275659))*sqrt(7))*c[1, 3]+((6/5)*(-.3332275659)
(1/3*(-.3332275659))*sqrt(5))*c[1, 2]+((1/2)*(-.3332275659)^2*sqrt(3)-(1/3*(-.3332275
> `&zscr;` := evalf(.2797053914*(1.871362389*c[1, 3]-.7201009213*c[1, 2]+.2885530146*c[
> evalf(-.7415311856+1);
> evalf((- .1913417162)*.2584688144);
simplify(evalf(((10/3)*(-0.4945586653e-1)^4*sqrt(7)-6*sqrt(7)*(-0.4945586653e-1)^3
+3*(-0.4945586653e-1)^2*sqrt(7)-(1/3*(-0.4945586653e-1))*sqrt(7))*c[1, 3]+((6/5)*(-0.
(1/3*(-0.4945586653e-1))*sqrt(5))*c[1, 2]+((1/2)*(-0.4945586653e-1)^2*sqrt(3)-(1/3*(-
> G := evalf(.2797053914*(0.6500255827e-1*c[1, 3]-0.4539054501e-1*c[1, 2]+0.3067155444e
> evalf(.9491079123+1);
> evalf((- .1913417162)*1.949107912);
simplify(evalf(((10/3)*(-.3729456529)^4*sqrt(7)-6*sqrt(7)*(-.3729456529)^3+3*(-.37294
> hb := evalf(.1294849661*(2.426949131*c[1, 3]-.8836825072*c[1, 2]+.3357744129*c[1, 1]-
> `&Ascr;` := nu+sigma+rho+`&zscr;`+G+hb;
> evalf(-.1913417162*`&Ascr;`);
> simplify(evalf((- .3826834325)^2+(-.3826834325)^3+(1/20)*(-.3826834325)^4+(1/30)*(-.3
> simplify(c[1, 0]+2*c[1, 1]*sqrt(3)*(-.3826834325)-c[1, 1]*sqrt(3)+6*c[1, 2]*sqrt(5)*(-
> simplify(evalf(c[1, 0]-3.057705105*c[1, 1]+9.335092433*c[1, 2]-29.38491338*c[1, 3]-.3
> evalf(.9238795325*(1/2));
> evalf(0+1);

```

```

> evalf(.4619397662);
simplify(evalf(((10/3)*.4619397662^4*sqrt(7)-6*sqrt(7)*.4619397662^3+3*.4619397662*sqrt(7)-(1/3*.4619397662)*sqrt(7))*c[1, 3]+((6/5)*.4619397662^3*sqrt(5)-(3/2)*.4619397662)*c[1, 2]+(1/3*.4619397662)*c[1, 1]));
> tau := evalf(.4179591838*(.1231112973*c[1, 3]-.1069187602*c[1, 2]-0.8190131855*c[1, 1]));
> evalf(.4058451514+1);
> evalf(.4619397662*1.405845151);
simplify(evalf(((10/3)*.6494157804^4*sqrt(7)-6*sqrt(7)*.6494157804^3+3*.6494157804*sqrt(7)-(1/3*.6494157804)*sqrt(7))*c[1, 3]+((6/5)*.6494157804^3*sqrt(5)-(3/2)*.6494157804)*c[1, 2]+(1/3*.6494157804)*c[1, 1]));
> kappa := evalf(.3818300506*(-0.4433919375e-2*c[1, 3]-.1956048684*c[1, 2]-0.9702000000*c[1, 1]));
> evalf(-.4058451514+1);
> evalf(.4619397662*.5941548486);
simplify(evalf(((10/3)*.2744637518^4*sqrt(7)-6*sqrt(7)*.2744637518^3+3*.2744637518*sqrt(7)-(1/3*.2744637518)*sqrt(7))*c[1, 3]+((6/5)*.2744637518^3*sqrt(5)-(3/2)*.2744637518)*c[1, 2]+(1/3*.2744637518)*c[1, 1]));
> chi := evalf(.3818300506*(0.7769505521e-1*c[1, 3]+0.7385579581e-2*c[1, 2]-0.9322000000*c[1, 1]));
> evalf(.7415311856+1);
> evalf(.4619397662*1.741531186);
simplify(evalf(((10/3)*.8044825089^4*sqrt(7)-6*sqrt(7)*.8044825089^3+3*.8044825089*sqrt(7)-(1/3*.8044825089)*sqrt(7))*c[1, 3]+((6/5)*.8044825089^3*sqrt(5)-(3/2)*.8044825089)*c[1, 2]+(1/3*.8044825089)*c[1, 1]));
> `&xscr;` := evalf(.2797053914*(-.1437193754*c[1, 3]-.1740592168*c[1, 2]+0.9601660000*c[1, 1]));
> evalf(-.7415311856+1);
> evalf(.4619397662*.2584688144);
simplify(evalf(((10/3)*.1193970237^4*sqrt(7)-6*sqrt(7)*.1193970237^3+3*.1193970237*sqrt(7)-(1/3*.1193970237)*sqrt(7))*c[1, 3]+((6/5)*.1193970237^3*sqrt(5)-(3/2)*.1193970237)*c[1, 2]+(1/3*.1193970237)*c[1, 1]));
> E := evalf(.2797053914*(-0.1737502154e-1*c[1, 3]+0.4574555137e-1*c[1, 2]-0.5658800000*c[1, 1]));
> evalf(.9491079123+1);
> evalf(.4619397662*1.949107912);
simplify(evalf(((10/3)*.9003704532^4*sqrt(7)-6*sqrt(7)*.9003704532^3+3*.9003704532*sqrt(7)-(1/3*.9003704532)*sqrt(7))*c[1, 3]+((6/5)*.9003704532^3*sqrt(5)-(3/2)*.9003704532)*c[1, 2]+(1/3*.9003704532)*c[1, 1]));
> vb := evalf(.1294849661*(-.1506041733*c[1, 3]-0.8943435395e-1*c[1, 2]+.1822290510*c[1, 1]));
> `&Fscr;` := tau+kappa+chi+`&xscr;`+E+vb;
> evalf(.4619397662*`&Fscr;`);
> simplify(evalf(.9238795325^2+.9238795325^3+(1/20)*.9238795325^4+(1/30)*.9238795325^5));
> simplify(c[1, 0]+2*c[1, 1]*sqrt(3)*.9238795325-c[1, 1]*sqrt(3)+6*c[1, 2]*sqrt(5)*.9238795325-c[1, 2]*sqrt(5));
> simplify(evalf(c[1, 0]+1.468361774*c[1, 1]+1.292543775*c[1, 2]+.6655726608*c[1, 3]));
> evalf((- .9238795325)*(1/2));
> evalf(0+1);
> evalf((- .4619397662)*1);
simplify(evalf(((10/3)*(-.4619397662)^4*sqrt(7)-6*sqrt(7)*(-.4619397662)^3+3*(-.4619397662)*sqrt(7)-(1/3*(-.4619397662))*sqrt(7))*c[1, 3]+((6/5)*(-.4619397662)^3*sqrt(5)-(3/2)*(-.4619397662)*sqrt(7))*c[1, 2]+(1/3*(-.4619397662))*c[1, 1]));

```

```

> `&Mscr;` := evalf(.4179591838*(4.067478326*c[1, 3]-1.324533792*c[1, 2]+.4515007784*c[1, 1]-
> evalf(.4058451514+1);
> evalf((- .4619397662)*1.405845151);
  simplify(evalf(((10/3)*(-.6494157804)^4*sqrt(7)-6*sqrt(7)*(-.6494157804)^3+3*(-.6494157804)^2+
> `&Nscr;` := evalf(.3818300506*(9.836612326*c[1, 3]-2.633518799*c[1, 2]+.7401786708*c[1, 1]-
> evalf(-.4058451514+1);
> evalf((- .4619397662)*.5941548486);
  simplify(evalf(((10/3)*(-.2744637518)^4*sqrt(7)-6*sqrt(7)*(-.2744637518)^3+3*(-.2744637518)^2+
> `&Yscr;` := evalf(.3818300506*(1.218228821*c[1, 3]-.5127169367*c[1, 2]+.2236997187*c[1, 1]-
> evalf(.7415311856+1);
> evalf((- .4619397662)*1.741531186);
  simplify(evalf(((10/3)*(-.8044825089)^4*sqrt(7)-6*sqrt(7)*(-.8044825089)^3+3*(-.8044825089)^2+
> `&Rscr;` := evalf(.2797053914*(17.80552961*c[1, 3]-4.167437420*c[1, 2]+1.024952999*c[1, 1]-
> evalf(-.7415311856+1);
> evalf((- .4619397662)*.2584688144);
  simplify(evalf(((10/3)*(-.1193970237)^4*sqrt(7)-6*sqrt(7)*(-.1193970237)^3+3*(-.1193970237)^2+
> H := evalf(.2797053914*(.2472609643*c[1, 3]-.1413753538*c[1, 2]+0.8127965822e-1*c[1, 1]-
> evalf(.9491079123+1);
> evalf((- .4619397662)*1.949107912);
  simplify(evalf(((10/3)*(-.9003704532)^4*sqrt(7)-6*sqrt(7)*(-.9003704532)^3+3*(-.9003704532)^2+
> mv := evalf(.1294849661*(24.61112477*c[1, 3]-5.348684889*c[1, 2]+1.221887299*c[1, 1]-
> `&Zscr;` := `&Mscr;`+`&Nscr;`+`&Yscr;`+`&Rscr;`+H+mv;
> evalf(-.4619397662*`&Zscr;`);
> simplify(evalf((- .9238795325)^2+(-.9238795325)^3+(1/20)*(-.9238795325)^4+(1/30)*(-.9238795325)^5+
> simplify(c[1, 0]+2*c[1, 1]*sqrt(3)*(-.9238795325)-c[1, 1]*sqrt(3)+6*c[1, 2]*sqrt(5)*(-.9238795325)+
> simplify(evalf(c[1, 0]-4.932463390*c[1, 1]+26.08283302*c[1, 2]-141.4544754*c[1, 3]-6.4619397662*c[1, 4]-
> solve({1.024327348*c[1, 0]-3.116017404*c[1, 1]+9.466526551*c[1, 2]-29.69712334*c[1, 3]+1.024327348*c[1, 4]-
> xv := matrix(1, 4, [.5833333779, .5484828168, .1863390142, 0.1889822373e-1]);
> a := matrix(4, 1, [1, sqrt(3)*(2*h-1), sqrt(5)*(6*h^2-6*h+1), sqrt(7)*(20*h^3-30*h^2+10*h-1)]);
> simplify(multiply(xv, a));
> ft := -2.581000000*10^(-8)+1.000000000*10^(-9)*h+1.000000209*h^2+1.000000004*h^3;
> ye := h^3+h^2;
> plot(ft, h = 0 .. 1);
> plot(abs(ft-ye), h = 0 .. 1);

```



## مراجع

- [1] C.D. Aliprantis and O. Burkinshaw, *Principles of Real Analysis*. Academic Press, 1998.
- [2] T.M. Apostol, *Mathematical Analysis*, Addison-Wesley, Reading, 1957.
- [3] E. Babolian, M.M.Hosseini, *A modified spectral method for numerical solution of ordinary differential equations with non-analytic solution*, Applied. Mathematics. computation,132 (2002) 341-351.
- [4] J. Bradley, C. Brislawn, and T. Hopper , *The FBI Wavelet/Scalar Quantization Standard for Gray-scale Fingerprint Image Compression*, Tech. Report LA-UR-93-1659, Los Alamos Natl Lab, Los Alamos, N.M. 1993.
- [5] C. Canuto, M. Hussaini, A. Quarteroni, T. Zang , *Spectral Methods in Fluid Dynamics*, Springer, Berlin, 1988.
- [6] S.Chandrasekhar, *Introduction to the Study of Stellar Structure*, Dover, New York, 1967.
- [7] A. Constantinides, *Applied Numerical Methods with Personal Computers*, McGraw-Hill, New York, 1987.
- [8] N. Liu, En-Bing Li, *Legendre Wavelet Method for Numerical Solutions of Partial Differential Equations Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 26 (2010) 81-94.
- [9] F. Mohammadi, M.M. Hosseini , *A new Legendre Wavelet operational matrix of derivative and its applications in solving the singular ordinary differential equations*, Journal of the Franklin Institute 348 (2011) 1787-1796.
- [10] M. Razzaghi. S. Yousefi, *Legendre Wavelets Method for the Solution of Nonlinear Problems in the Calculus of Variations*, Mathematics. Computation. Modeling 34 (2001) 45-54.
- [11] M. Razzaghi, S. Yousefi,, *Legendre Wavelets direct method for variational problems*, Mathematics. Computation. Simulation. 53 (2000) 185-192.

- 
- [12] O. U. Richardson, *The Emission of Electricity from Hot Bodies*, Longman, Green and Co., London, New York, 1921.
- [13] A. Saadatmandia, M. Dehghan, *A new operational matrix for solving fractional-order differential equations*, *Computation. Mathematics. Applied.* 59 (2010) 1326-1336.
- [14] Murray R. Spiegel, Ph.D, *Fourier Analysis*, 1990.
- [15] A. M, Wazwaz, *A new Algorithm for Solving Differential Equations of Lane-Emden type*, *Applied. Mathematics. Computation.* 111 (2000) 53.
- [16] A. M, Wazwaz, *A new Method for Solving Singular Initial Value Problems in the Second-Order Ordinary Differential Equations*, *Applied. Mathematics. Computation.* 128 (2002) 45-57.
- [17] S. Yousefi, *Legendre Wavelets method for solving differential equations of Lane-Emden type*, *Applied Mathematics and Computation* 181 (2006) 1417-1422.

# واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Multiresolution analysis	آنالیز چندریزه‌ساز
Fourier analysis	آنالیز فوریه
Parseval identity	اتحاد پارسوال
Dilation	اتساع
Translation	انتقال
Gibbs phenomenon	پدیده گیبس
Basis function	تابع پایه
Periodic function	تابع متناوب
Scaling function	تابع مقیاس
Shifted Legendre polynomials	چندجمله‌ای‌های انتقال یافته لژاندر
Legendre polynomials	چندجمله‌ای لژاندر
Orthogonal polynomials	چندجمله‌ای‌های متعامد
Tau method	روش تاو
Spectral method	روش طیفی
Collocation method	روش هم‌محلی
Fourier series	سری فوریه
Operational matrix	ماتریس عملگر
Compact support	محمل فشرده
Legendre wavelet	موجک لژاندر
Haar wavelet	موجک هار
Mother wavelet	موجک مادر

# واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Basis function	تابع پایه
Collocation method	روش هم‌محلی
Compact support	محمل فشرده
Dilation	اتساع
Fourier analysis	آنالیز فوریه
Fourier series	سری فوریه
Gibbs phenomenon	پدیده گیبس
Haar wavelet	موجک هار
Legendre polynomials	چندجمله‌ای لژاندر
Legendre wavelet	موجک لژاندر
Mother wavelet	موجک مادر
Multiresolution analysis	آنالیز چندریزه‌ساز
Operational matrix	ماتریس عملگر
Orthogonal polynomials	چندجمله‌ای‌های متعامد
Parseval identity	اتحاد پارسوال
Periodic function	تابع متناوب
Scaling function	تابع مقیاس
Shifted Legendre polynomials	چندجمله‌ای‌های انتقال‌یافته لژاندر
Spectral method	روش طیفی
Tau method	روش تاو
Translation	انتقال

# نمایه

آ

آنالیز چندریزه‌ساز، ۱

آنالیز فوریه، ۱

ت

تابع متناوب، ۳

تابع مقیاس، ۱

چ

چندجمله‌ای‌های لژاندر، ۱

چندجمله‌ای‌های انتقال‌یافته لژاندر، ۱

چندجمله‌ای‌های متعامد، ۱

م

موجک

موجک لژاندر، ۱

موجک مادر، ۱

موجک هار، ۱

## **Aabstract**

In this thesis, the shifted legendre polynomials are introduced and their properties are investigated. Then the Legendre wavelets is introduced and the operational matrix of derivatives for this wavelet is derived. The application of the proposed operational matrix for solving initial and boundary value problems is explained.

Finally a numerical method for solving the Lane-Emden equations as singular initial value problems is presented. Using integral operator and convert Lane-Emden equations to integral equations and then applying Legendre Wavelet approximations.

Illustrative examples are included to demonstrate the validity and applicability of the techniques.

keywords : Legendre wavelets, Shifted legendre polynomials, Lane-Emden equations, Integral equations, Gaussian integration



Shahrood University  
Faculty Of Mathematical Sciences

Dissertation Submitted in Partial  
Fulfillment of The Requirements For The  
Degree of Master of Science in  
Applied Mathematics

**Solving of initial value and boundary value  
problems  
using Legendre Wavelets**

Supervisor  
**Dr.Mahdi Ghovatmand**

Advisor  
**Dr.Ali Reza Nazemi**

by  
**Maryam Rahmati**

2014