



دانشگاه صنعتی شاهرود  
دانشکده ریاضی  
گروه ریاضی کاربردی

## کنترل بهینه سیستم‌های پارامتر توزیعی با استفاده از روش کالوکیشن

نگارش

فرزانه خیری نتاج

استاد راهنما

آقای دکتر علیرضا ناظمی

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

۲۹ شهریور ۱۳۹۱



# قدردانی

به استناد آیه می شریفه می ۱۰ از سوره می مبارکه می فاطمه که خداوند می فرماید ” الیه یصعد الکلم الطیب والعلل الصالح یرفعه ” ، سخنان و کلام ارزشمند به سوی خدا صعود می کند و با ابدیت نسیخت پیدا کرده و همواره آثار خود را ظاهر می سازند.

بسی شایسته است از تلاش های مداوم و کوشش های مستمر جناب آقای دکتر علیرضا ناطمی در اشاعه می تعلیم و تربیت و بسط و توسعه می علم و دانش و نیز از کارگشایی شمر بخش ایشان به عنوان استاد راهنما در کمال اتقان و افتخار تقدیر و تشکر نموده و مراتب سپاس خود را از ایشان داشته باشیم. از اساتید محترم جناب آقای دکتر اکبر هاشمی برزآبادی و دکتر علی مس فروش که زحمت مطالعه و داوری پایان نامه را منتقل شده اند، کمال تشکر را دارم. همچنین از نماینده تحصیلات تکمیلی جناب آقای دکتر احمد زیره تشکر می کنم.

از خانواده مهربانم که در طول تحصیل پشتیبان من بوده اند، صمیمانه سپاسگزاری می نمایم.

در پایان از دوستانی که در انجام این پایان نامه اینجانب را مورد تفقد قرار دادند نیز سپاسگزارم.

فرزانه خیری نتاج

۲۹ شهریور ۱۳۹۱

## چکیده

در این پایان نامه مسئله کنترل بهینه متناظر با مینیمم سازی تابع هدف از نوع رهگیری، بطوریکه دارای معادلات سهموی می باشد را مورد بررسی قرار می دهیم. ابتدا در فصل ۱ سیستم بهینه متناظر با مسئله اولیه داده می شود. در فصول ۲-۵ روش های کالوکیشن B - اسپلاین مرتبه ۳، ۴، ۵ و ۷ برای حل سیستم بهینه پارامتر توزیعی سهموی مورد استفاده قرار می گیرند. در انتهای هر فصل کارایی تقریب های B - اسپلاین مرتبه ۳، ۴، ۵ و ۷ توسط چند مثال عددی نشان داده می شود که کارایی طرح های مذکور توسط تغییر مقدار ضریب هزینه کنترل  $\nu$  که بقدر کافی کوچک است، نشان داده می شود. تمام محاسبات انجام شده و همچنین رسم نمودارها در سرتاسر پایان نامه به کمک نرم افزار متلب ۷.۱۲ صورت گرفته است.

**واژه های کلیدی:** مسئله کنترل بهینه، B-اسپلاین، سیستم های بهینه پارامتر توزیعی سهموی، روش کالوکیشن

# فهرست مطالب

چ	لیست جداول
ح	لیست تصاویر
۱	۱ مقدمه و مفاهیم اولیه
۲	۱.۱ مقدمه
۲	۲.۱ معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی
۴	۳.۱ فضاهاى سوبولف
۶	۴.۱ انواع معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی
۶	۵.۱ جواب معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی خطی
۶	۱.۵.۱ معادلات بیضوی
۷	۲.۵.۱ معادلات هذلولوی
۹	۳.۵.۱ معادلات سهموی
۱۰	۶.۱ مسائل کنترل بهینه سیستم‌های پارامتر توزیعی سهموی
۱۲	۷.۱ B - اسپلاین‌ها
۱۲	۱.۷.۱ نظریه اساسی
۱۳	۲.۷.۱ B - اسپلاین درجه صفر
۱۵	۳.۷.۱ B - اسپلاین درجه یک
۱۶	۴.۷.۱ خواص B - اسپلاین
۱۸	۵.۷.۱ مشتق و انتگرال B - اسپلاین
۲۰	۸.۱ B - اسپلاین‌های مراتب بالاتر
۲۴	۹.۱ تجزیه مقدار تکین و شبه‌معکوس
	۲ حل مساله کنترل بهینه سیستم‌های پارامتر توزیعی سهموی با استفاده از B - اسپلاین مرتبه
۲۶	۳
۲۷	۱.۲ مقدمه

۲۸	.....	B - اسپلاین مرتبه ۳ و روش کالوکیشن	۲.۲
۳۱	.....	نتایج عددی ۱.۲.۲	
<b>۳ حل مساله کنترل بهینه سیستم‌های پارامتر توزیعی سهموی با استفاده از B - اسپلاین مرتبه</b>			
۴۴			۴
۴۵	.....	مقدمه ۱.۳	
۴۵	.....	B - اسپلاین مرتبه ۴ و روش کالوکیشن	۲.۳
۴۸	.....	نتایج عددی ۱.۲.۳	
<b>۴ حل مساله کنترل بهینه سیستم‌های پارامتر توزیعی سهموی با استفاده از B - اسپلاین مرتبه</b>			
۶۰			۵
۶۱	.....	مقدمه ۱.۴	
۶۱	.....	B - اسپلاین مرتبه ۵ و روش کالوکیشن	۲.۴
۶۴	.....	نتایج عددی ۱.۲.۴	
<b>۵ حل مساله کنترل بهینه سیستم‌های پارامتر توزیعی سهموی با استفاده از B - اسپلاین مرتبه</b>			
۷۷			۷
۷۸	.....	مقدمه ۱.۵	
۷۸	.....	B - اسپلاین مرتبه ۷ و روش کالوکیشن	۲.۵
۸۱	.....	مثال‌های عددی ۳.۵	
۹۴		نتایج و پیشنهاداتی برای کارهای آینده	
۹۶		مراجع	
۱۰۱		واژه‌نامه فارسی به انگلیسی	

# لیست جداول

۲۰	.....	مقادیر $Q_i$ و $Q_i'$	۱.۱
۲۱	.....	مقادیر $Q_i$ و $Q_i'$ و $Q_i''$	۲.۱
۲۲	.....	مقادیر $Q_i$ ، $Q_i'$ ، $Q_i''$ و $Q_i'''$	۳.۱
۲۲	.....	مقادیر $Q_i$ ، $Q_i'$ ، $Q_i''$ و $Q_i'''$	۴.۱
۲۳	.....	مقادیر $Q_i$ ، $Q_i'$ ، $Q_i''$ و $Q_i'''$	۵.۱
۲۴	.....	مقادیر $Q_m$ ، $Q_m'$ ، $Q_m''$ و $Q_m'''$	۶.۱
۲۹	.....	مقادیر $Q_m$ ، $Q_m'$ و $Q_m''$	۱.۲
۳۲	.....	نتایج خطای میانگین مربع و خطای ماکزیمم در $x \in [0, 1]$ و $t$ های مختلف در مثال (۱.۲.۲)	۲.۲
۳۶	.....	نتایج خطای میانگین مربع و خطای ماکزیمم در $x \in [0, 1]$ و $t$ های مختلف در مثال (۲.۲.۲)	۳.۲
۴۰	.....	نتایج خطای میانگین مربع و خطای ماکزیمم در $x \in [0, 1]$ و $t$ های مختلف در مثال (۳.۲.۲)	۴.۲
۴۶	.....	مقادیر $Q_m$ ، $Q_m'$ ، $Q_m''$ و $Q_m'''$	۱.۳
۴۹	.....	نتایج خطای میانگین مربع و خطای ماکزیمم در $x \in [0, 1]$ و $t$ های مختلف در مثال (۱.۲.۳)	۲.۳
۵۲	.....	نتایج خطای میانگین مربع و خطای ماکزیمم در $x \in [0, 1]$ و $t$ های مختلف در مثال (۲.۲.۳)	۳.۳
۵۷	.....	نتایج خطای میانگین مربع و خطای ماکزیمم در $x \in [0, 1]$ و $t$ های مختلف در مثال (۳.۲.۳)	۴.۳
۶۲	.....	مقادیر $Q_m$ ، $Q_m'$ ، $Q_m''$ و $Q_m'''$	۱.۴
۶۵	.....	نتایج خطای میانگین مربع و خطای ماکزیمم در $x \in [0, 1]$ و $t$ های مختلف در مثال (۱.۲.۴)	۲.۴
۷۰	.....	نتایج خطای میانگین مربع و خطای ماکزیمم در $x \in [0, 1]$ و $t$ های مختلف در مثال (۲.۲.۴)	۳.۴
۷۳	.....	نتایج خطای میانگین مربع و خطای ماکزیمم در $x \in [0, 1]$ و $t$ های مختلف در مثال (۳.۲.۴)	۴.۴
۷۹	.....	مقادیر $\phi_m$ ، $\phi_m'$ ، $\phi_m''$ و $\phi_m'''$	۱.۵
۸۲	.....	نتایج خطای میانگین مربع و خطای ماکزیمم در $x \in [0, 1]$ و $t$ های مختلف در مثال (۱.۳.۵)	۲.۵
۸۶	.....	نتایج خطای میانگین مربع و خطای ماکزیمم در $x \in [0, 1]$ و $t$ های مختلف در مثال (۲.۳.۵)	۳.۵
۹۰	.....	نتایج خطای میانگین مربع و خطای ماکزیمم در $x \in [0, 1]$ و $t$ های مختلف در مثال (۳.۳.۵)	۴.۵

## لیست تصاویر

۱۴	. . . . . $B_i^0$ - اسپلین	۱.۱
۱۶	. . . . . $B_i^1$ - اسپلین	۲.۱
۳۲	. . . . . (۱.۲.۲) مقایسه جواب تقریبی و تحلیلی $y(x, t)$ به ازای $t$ های مختلف در مثال	۱.۲
۳۳	. . . . . (۱.۲.۲) مقایسه جواب تقریبی و تحلیلی $p(x, t)$ به ازای $t$ های مختلف در مثال	۲.۲
۳۳	. . . . . (۱.۲.۲) خطای $y - \hat{y}$ با $N = 38$ و $\nu = 10^{-7}$ در مثال	۳.۲
۳۴	. . . . . (۱.۲.۲) خطای $p - \hat{p}$ با $N = 20$ و $\nu = 10^{-8}$ در مثال	۴.۲
۳۴	. . . . . (۱.۲.۲) جواب تقریبی کنترل $u(x, t)$ با $N = 20$ و $\nu = 10^{-3}$ در مثال	۵.۲
۳۶	. (۲.۲.۲) مقایسه جواب تقریبی و تحلیلی $y(x, t)$ به ازای $\nu = 10^{-5}$ و $t$ های مختلف در مثال	۶.۲
۳۷	. (۲.۲.۲) مقایسه جواب تقریبی و تحلیلی $p(x, t)$ به ازای $\nu = 10^{-5}$ و $t$ های مختلف در مثال	۷.۲
۳۷	. . . . . (۲.۲.۲) خطای $y - \hat{y}$ با $N = 33$ و $\nu = 10^{-8}$ در مثال	۸.۲
۳۸	. . . . . (۲.۲.۲) خطای $p - \hat{p}$ با $N = 20$ و $\nu = 10^{-8}$ در مثال	۹.۲
۳۸	. . . . . (۲.۲.۲) جواب تقریبی کنترل $u(x, t)$ با $N = 20$ و $\nu = 10^{-3}$ در مثال	۱۰.۲
	مقایسه جواب تقریبی و تحلیلی $y(x, t)$ با $\nu = 10^{-5}$ در شکل بالا و $\nu = 10^{-7}$ در شکل	۱۱.۲
۴۱	. . . . . (۳.۲.۲) پایین به ازای $t$ های مختلف در مثال	
	مقایسه جواب تقریبی و تحلیلی $p(x, t)$ با $\nu = 10^{-5}$ در شکل بالا و $\nu = 10^{-7}$ در شکل	۱۲.۲
۴۱	. . . . . (۳.۲.۲) پایین به ازای $t$ های مختلف در مثال	
۴۲	. . . . . (۳.۲.۲) خطای $y - \hat{y}$ با $N = 20$ و $\nu = 10^{-8}$ در مثال	۱۳.۲
۴۲	. . . . . (۳.۲.۲) خطای $p - \hat{p}$ با $N = 20$ و $\nu = 10^{-8}$ در مثال	۱۴.۲
۴۳	. . . . . (۳.۲.۲) جواب تقریبی کنترل $u(x, t)$ با $N = 20$ و $\nu = 10^{-2}$ در مثال	۱۵.۲
۴۹	. . . . . (۱.۲.۳) مقایسه جواب تحلیلی و تقریبی $y(x, t)$ به ازای $t$ های مختلف در مثال	۱.۳
۵۰	. . . . . (۱.۲.۳) مقایسه جواب تحلیلی و تقریبی $p(x, t)$ به ازای $t$ های مختلف در مثال	۲.۳
۵۰	. . . . . (۱.۲.۳) خطای $y - \hat{y}$ با $N = 38$ و $\nu = 10^{-7}$ در مثال	۳.۳
۵۱	. . . . . (۱.۲.۳) خطای $p - \hat{p}$ با $N = 20$ و $\nu = 10^{-8}$ در مثال	۴.۳
۵۱	. . . . . (۱.۲.۳) جواب تقریبی کنترل $u(x, t)$ با $N = 20$ و $\nu = 10^{-3}$ در مثال	۵.۳
۵۳	. . . . . (۲.۲.۳) مقایسه جواب تقریبی و تحلیلی $y(x, t)$ به ازای $t$ های مختلف در مثال	۶.۳
۵۴	. . . . . (۲.۲.۳) مقایسه جواب تقریبی و تحلیلی $p(x, t)$ به ازای $t$ های مختلف در مثال	۷.۳



۵۴	.....	خطای $y - \hat{y}$ به ازای $N = 20$ و $\nu = 10^{-6}$ در مثال (۲.۲.۳).	۸.۳
۵۵	.....	خطای $p - \hat{p}$ به ازای $N = 20$ و $\nu = 10^{-8}$ در مثال (۲.۲.۳).	۹.۳
۵۵	.....	جواب تقریبی کنترل $u(x, t)$ با $N = 20$ و $\nu = 10^{-2}$ در مثال (۲.۲.۳).	۱۰.۳
		مقایسه جواب تقریبی و تحلیلی $y(x, t)$ با $\nu = 10^{-3}$ در شکل بالا و $\nu = 10^{-7}$ در شکل	۱۱.۳
۵۶	.....	پایین به ازای $t$ های مختلف در مثال (۳.۲.۳).	
		مقایسه جواب تقریبی و تحلیلی $p(x, t)$ با $\nu = 10^{-3}$ در شکل بالا و $\nu = 10^{-7}$ در شکل	۱۲.۳
۵۸	.....	پایین به ازای $t$ های مختلف در مثال (۳.۲.۳).	
۵۸	.....	خطای $y - \hat{y}$ با $N = 38$ و $\nu = 10^{-7}$ در مثال (۳.۲.۳).	۱۳.۳
۵۹	.....	خطای $p - \hat{p}$ با $N = 20$ و $\nu = 10^{-8}$ در مثال (۳.۲.۳).	۱۴.۳
۵۹	.....	جواب تقریبی کنترل $u(x, t)$ به ازای $N = 20$ و $\nu = 10^{-3}$ در مثال (۳.۲.۳).	۱۵.۳
۶۵	.....	مقایسه جواب تقریبی و تحلیلی $y(x, t)$ به ازای $t$ های مختلف در مثال (۱.۲.۴).	۱.۴
۶۶	.....	مقایسه جواب تقریبی و تحلیلی $p(x, t)$ به ازای $t$ های مختلف در مثال (۱.۲.۴).	۲.۴
۶۶	.....	خطای $y - \hat{y}$ با $N = 38$ و $\nu = 10^{-7}$ در مثال (۱.۲.۴).	۳.۴
۶۷	.....	خطای $p - \hat{p}$ با $N = 20$ و $\nu = 10^{-8}$ در مثال (۱.۲.۴).	۴.۴
۶۸	.....	جواب تقریبی کنترل $u(x, t)$ با $N = 20$ و $\nu = 10^{-3}$ در مثال (۱.۲.۴).	۵.۴
۶۹	.....	مقایسه جواب تقریبی و تحلیلی $y(x, t)$ به ازای $t$ های مختلف در مثال (۲.۲.۴).	۶.۴
۶۹	.....	مقایسه جواب تقریبی و تحلیلی $p(x, t)$ به ازای $t$ های مختلف در مثال (۲.۲.۴).	۷.۴
۷۱	.....	خطای $y - \hat{y}$ با $N = 20$ و $\nu = 10^{-6}$ در مثال (۲.۲.۴).	۸.۴
۷۱	.....	خطای $p - \hat{p}$ با $N = 20$ و $\nu = 10^{-8}$ در مثال (۲.۲.۴).	۹.۴
۷۲	.....	جواب تقریبی کنترل $u(x, t)$ با $N = 20$ و $\nu = 10^{-2}$ در مثال (۲.۲.۴).	۱۰.۴
		مقایسه جواب تقریبی و تحلیلی $y(x, t)$ به ازای $\nu = 10^{-3}$ در شکل بالا و $10^{-5}$ در شکل	۱۱.۴
۷۴	.....	پایین به ازای $t$ های مختلف در مثال (۳.۲.۴).	
		مقایسه جواب تقریبی و دقیق $p(x, t)$ به ازای $\nu = 10^{-3}$ در شکل بالا و $10^{-5}$ در شکل	۱۲.۴
۷۴	.....	پایین به ازای $t$ های مختلف در مثال (۳.۲.۴).	
۷۵	.....	خطای $y - \hat{y}$ با $N = 38$ و $\nu = 10^{-7}$ در مثال (۳.۲.۴).	۱۳.۴
۷۵	.....	خطای $p - \hat{p}$ با $N = 20$ و $\nu = 10^{-8}$ در مثال (۳.۲.۴).	۱۴.۴
۷۶	.....	جواب تقریبی کنترل $u(x, t)$ با $N = 20$ و $\nu = 10^{-3}$ در مثال (۳.۲.۴).	۱۵.۴
۸۳	.....	مقایسه جواب تقریبی و تحلیلی $y(x, t)$ در زمان های مختلف در مثال (۱.۳.۵).	۱.۵
۸۳	.....	مقایسه جواب تقریبی و تحلیلی $p(x, t)$ در زمان های مختلف در مثال (۱.۳.۵).	۲.۵
۸۴	.....	خطای $y - \hat{y}$ با $N = 38$ و $\nu = 10^{-7}$ در مثال (۱.۳.۵).	۳.۵
۸۴	.....	خطای $p - \hat{p}$ با $N = 20$ و $\nu = 10^{-8}$ در مثال (۱.۳.۵).	۴.۵
۸۵	.....	جواب تقریبی $u(x, t)$ با $N = 20$ و $\nu = 10^{-3}$ در مثال (۱.۳.۵).	۵.۵
۸۷	.....	مقایسه جواب تحلیلی و جواب تقریبی متغیر $y(x, t)$ در زمان های مختلف در مثال (۲.۳.۵).	۶.۵
۸۷	.....	مقایسه جواب تحلیلی و جواب تقریبی متغیر $p(x, t)$ در زمان های مختلف در مثال (۲.۳.۵).	۷.۵
۸۸	.....	خطای $y - \hat{y}$ با $N = 20$ و $\nu = 10^{-6}$ در مثال (۲.۳.۵).	۸.۵
۸۹	.....	خطای $p - \hat{p}$ با $N = 20$ و $\nu = 10^{-8}$ در مثال (۲.۳.۵).	۹.۵

۸۹	.....	۱۰.۵
	جواب تقریبی کنترل $u(x, t)$ با $N = 20$ و $\nu = 10^{-2}$ در مثال (۲.۳.۵).	
	.....	۱۱.۵
	مقایسه جواب تقریبی و تحلیلی $y(x, t)$ با $\nu = 10^{-3}$ در شکل بالا و $\nu = 10^{-7}$ در شکل	
۹۱	.....	۱۲.۵
	پایین به‌ازای $t$ های مختلف در مثال (۳.۳.۵).	
	.....	۱۳.۵
	مقایسه جواب تقریبی و تحلیلی $p(x, t)$ با $\nu = 10^{-3}$ در شکل بالا و $\nu = 10^{-7}$ در شکل	
۹۱	.....	۱۴.۵
	پایین به‌ازای $t$ های مختلف در مثال (۳.۳.۵).	
۹۲	.....	۱۵.۵
	خطای $y - \hat{y}$ با $N = 38$ و $\nu = 10^{-7}$ در مثال (۳.۳.۵).	
۹۲	.....	
	خطای $p - \hat{p}$ با $N = 20$ و $\nu = 10^{-8}$ در مثال (۳.۳.۵).	
۹۳	.....	
	جواب تقریبی کنترل $u(x, t)$ با $N = 20$ و $\nu = 10^{-3}$ در مثال (۳.۳.۵).	

# فصل ۱

## مقدمه و مفاهیم اولیه

## ۱.۱ مقدمه

اکثر پدیده‌های فیزیکی، چه در دینامیک سیالات، الکتریسیته، مغناطیس، کوانتوم و ... با معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی<sup>۱</sup> توصیف می‌شوند. در این فصل ما ابتدا خلاصه‌ای از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی و همچنین بحث کوتاهی از طرز رده‌بندی انواع مختلف آنها را بیان نموده، سپس به بیان تعاریف اولیه و قضایای مربوط به  $B$ -اسپلاین‌ها<sup>۲</sup> می‌پردازیم. در انتها به تعاریف و قضایای مورد نیاز در فصل‌های بعدی اشاره خواهیم کرد.

## ۲.۱ معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی

در معادله دیفرانسیل معمولی<sup>۳</sup> تابع مجهول فقط به یک متغیر بستگی دارد، در حالی که در معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی تابع مجهول به چندین متغیر بستگی دارد.

برای سادگی در نمادگذاری قرار داده‌ایم:

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

حال چند معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی معروف را بیان می‌کنیم.

$$u_t = u_{xx}, \quad \text{معادله گرما}^4$$

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad \text{معادله موج}^5$$

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad \text{معادله لاپلاس}^6$$

<sup>۱</sup>Partial Differential Equation

<sup>۲</sup>B-Splines

<sup>۳</sup>Ordinary Differential Equation

<sup>۴</sup>Heat Equation

<sup>۵</sup>Wave Equation

<sup>۶</sup>Laplace's Equation

اکثر قوانین فیزیک، نظیر معادلات ماکسول<sup>۷</sup>، قانون تبرید نیوتن<sup>۸</sup>، معادلات ناویه<sup>۹</sup> - استوکس<sup>۱۰</sup> و معادله شرودینگر<sup>۱۱</sup> در مکانیک کوانتوم برحسب معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی بیان شده‌اند (یا قابل بیانند)؛ یعنی این قوانین پدیده‌ای فیزیکی را به وسیله ارتباط فضا و مشتقات نسبت به زمان توضیح می‌دهند. وجود مشتق‌ها در این معادلات بدان خاطر است که مشتق‌ها عوامل طبیعی (مانند سرعت، شتاب، نیرو، شار و شدت جریان) را نمایش می‌دهند.

هدف ما این است که چطور معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی را همراه با شرایط اولیه، مرزی و نهایی حل نماییم.

سوالی که برای ما پیش می‌آید این است که معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی را چطور حل کنیم؟ روش‌های زیادی برای این کار وجود دارند مهمترین آنها روش‌هایی هستند که معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی را به معادلات دیفرانسیل معمولی تغییر دهند. یکی از مهم‌ترین روش‌ها عبارتست از:

**روش‌های عددی<sup>۱۲</sup>:** این روش یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی را به یک دستگاه معادلات تفاضلی که بشود آن را با تکنیک‌های مکرر در کامپیوتر حل کرد تغییر می‌دهد. در بسیاری حالات، این تنها تکنیکی است که کار می‌کند. علاوه بر روش‌های جایگزینی معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی با معادلات تفاضلی، روش‌های دیگری نیز هستند که جواب‌ها را با سطوح چندجمله‌ای تقریب می‌زنند (تقریب‌های اسپلاین). امروزه بیشترین روش‌های مورد استفاده، روش‌های عناصر متناهی<sup>۱۳</sup>، تفاضلات متناهی<sup>۱۴</sup>، عناصر مرزی<sup>۱۵</sup>، آدومین<sup>۱۶</sup>، تکرار وردشی<sup>۱۷</sup>، حجم

<sup>۷</sup>Maxwell

<sup>۸</sup>Newton

<sup>۹</sup>Navier

<sup>۱۰</sup>Stokes

<sup>۱۱</sup>Schrodinger

<sup>۱۲</sup>Numerical Methods

<sup>۱۳</sup>Finit Element Differential

<sup>۱۴</sup>Boundary Element Method

<sup>۱۵</sup>Finite Difference Method

<sup>۱۶</sup>Adomian method

<sup>۱۷</sup>Variational Iteration Method

محدود<sup>۱۸</sup> و هموتوپی<sup>۱۹</sup> می‌باشد.

برای جزئیات بیشتر می‌توان به [۱] مراجعه کرد.

### ۳.۱ فضاهای سوبولف

تعریف ۱.۳.۱.  $L^p(\Omega)$  ( $1 \leq p \leq \infty$ )، فضای همه توابع اندازه پذیر  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  می‌باشد که انتگرال

لبگ آنها متناهی است، یعنی:

$$\int_{\Omega} |f|^p dx < \infty.$$

نرم در این فضا به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

حال با قرار دادن  $p = 2$  به نرم  $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$  خواهیم رسید که به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} = \left( \int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

اگر  $p = \infty$  در این صورت  $L^\infty(\Omega)$  فضای تمام توابع اندازه‌پذیر  $f$  در  $\Omega$  با نرم متناهی می‌باشد، که به صورت زیر

تعریف می‌شود:

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \text{ess sup}\{|f(x)|; x \in \Omega\},$$

که در اینجا  $\text{ess sup } f(x) = \inf\{M : \mu\{x : f(x) > M\} = 0\}$ .

<sup>۱۸</sup>Finite Volume Method

<sup>۱۹</sup>Homotopy Perturbation Method

تعریف ۲.۳.۱. فضای سوبولف<sup>۲</sup> برای  $l \geq 0$ ، به صورت زیر تعریف می شود:

$$H^{l,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega); \|f\|_{l,p,\Omega} < \infty\},$$

که در آن

$$\|f\|_{l,p,\Omega} = \left( \sum_{0 \leq |\alpha| \leq l} \int_{\Omega} |D^{\alpha} f|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

و  $D^{\alpha}$  بیانگر مشتقات ضعیف مرتبه  $\alpha$  است که به صورت زیر تعریف می شود:

$$D^{\alpha} f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_2 \cdots \partial^{\alpha_n} x_n},$$

که در آن  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  را چنداندیشه می نامند،  $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$  و  $\alpha_i \in Z_+$ .

اگر  $p = \infty$ ، در این صورت نرم فضای سوبولف  $H^{l,\infty}$  نیز به صورت زیر تعریف می شود:

$$\|f\|_{l,\infty,\Omega} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq l} \text{ess sup} |D^{\alpha} f|^p.$$

نمایش دیگری از فضای سوبولف بر اساس گرادیان به صورت زیر می باشد:

$$H^{l,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega); \nabla^k f \in L^p(\Omega), k = 1, \dots, l\}.$$

در حالتی که  $p = 2$ ، فضای سوبولف  $H^{l,2}$  را با  $H^l$ ، و نرم  $\|\cdot\|_{l,2,\Omega}$  را با  $\|\cdot\|_{l,\Omega}$ ، نمایش می دهند.

تعریف ۳.۳.۱. هرگاه  $U$  تقریبی از تابع معلوم  $f \in C[a, b]$  باشد، خطای مطلق به صورت  $\|f - U\|$  و خطای نسبی

به صورت  $\frac{\|f - U\|}{\|U\|}$  تعریف می شوند. برای سنجش تقریب تابع  $U$  می بایست  $L_2 = \|f - U\|_2$  و  $L_{\infty} = \|f - U\|_{\infty}$

را مینیمم کنیم.

<sup>۲</sup> Sobolev Space

## ۴.۱ انواع معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی بر اساس معیارهای مختلفی رده‌بندی می‌شوند. رده‌بندی مفهوم مهمی است، زیرا نظریه عمومی و روش‌های حل، معمولاً فقط بر یک رده از معادلات داده شده اعمال می‌شود. فرم کلی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی به صورت زیر است:

$$G(u, u_x, u_{xx}, \dots, u_{x^{(n)}}, u_t, u_{tt}, \dots, u_t^{(m)}, u_{xt}, \dots) = 0, \quad (1.1)$$

که در آن  $u(x, t)$  تابعی وابسته به  $x$  و  $t$  می‌باشد.

**تعریف ۱.۴.۱.** مرتبه یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی، مرتبه بالاترین مشتق جزئی است.

## ۵.۱ جواب معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی خطی

در این قسمت انواع مختلف معادلات با مشتقات جزئی خطی با شرایط مرزی متفاوت به همراه جواب کلاسیک آنها را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

### ۱.۵.۱ معادلات بیضوی

یک معادله دیفرانسیل بیضوی روی  $Q \subset \mathbb{R}^n$  به صورت زیر را در نظر می‌گیریم:

$$L_u = \operatorname{div}(k(x)\nabla u) - a(x)u = f(x), \quad (2.1)$$

که در آن  $a(x) \in C(\bar{Q})$ ،  $k(x) \in C^1(\bar{Q})$  و  $k(x) \geq k_0 > 0$ ، برای هر  $x \in Q$  ضرایب حقیقی هستند.

**تعریف ۱.۵.۱.** (الف) تابع  $u(x) \in C^2(Q) \cap C(\bar{Q})$  را یک جواب کلاسیک<sup>۲۱</sup> از مساله مقدار مرزی نوع اول (

<sup>۲۱</sup>Classical solution



مساله دیریشله <sup>۲۲</sup> می‌نامند، هرگاه این تابع در معادله (۲.۱) و در شرط مرزی زیر صدق کند:

$$u|_{\partial Q} = \varphi(x). \quad (۳.۱)$$

(ب) - تابع  $u(x) \in C^2(Q) \cap C^1(\bar{Q})$  را یک جواب کلاسیک از مساله مقدار مرزی نوع سوم (مساله نویمن دیریشله <sup>۲۳</sup>) می‌نامند، هرگاه این تابع در معادله (۲.۱) و در شرط مرزی زیر صدق کند:

$$\left( \frac{\partial u}{\partial n} + \delta(x)u \right) \Big|_{\partial Q} = \varphi(x), \quad (۴.۱)$$

که در آن  $\delta(x) \in C(\partial Q)$  و  $\delta(x) > 0$  در نظر گرفته می‌شود.

اگر در شرط مرزی (۴.۱) تابع  $\delta(x) = 0$  در نظر گرفته شود، آنگاه شرط مرزی (۴.۱) به صورت زیر نوشته

می‌شود:

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial Q} = \varphi(x). \quad (۵.۱)$$

شرط (۵.۱) را شرط مرزی نویمن <sup>۲۴</sup> می‌نامند.

## ۲.۵.۱ معادلات هذلولوی

فرض کنید  $D$  یک دامنه کراندار در  $\mathbb{R}^n$  با مرز هموار  $\partial D$  باشد. برای این معادلات، یک ناحیه استوانه‌ای کراندار  $Q_T = D \times (0, T) \subset \mathbb{R}^{n+1}$  را در نظر می‌گیریم، که در آن  $T$  یک عدد مثبت حقیقی می‌باشد. تعریف

<sup>۲۲</sup>Dirichlet

<sup>۲۳</sup>Neumann-Dirichlet

<sup>۲۴</sup>Neumann

می‌کنیم:

$$\Gamma_T = \partial D \times (\circ, T),$$

$$D_\circ = D \times \{\circ\},$$

$$D_T = D \times \{T\}.$$

یک معادله دیفرانسیل هذلولوی روی  $Q_T \subset \mathbb{R}^{n+1}$  به صورت زیر است:

$$L_u = u_{tt} - \operatorname{div}(k(x)\nabla u) + a(x)u = f(x, t), \quad (۶.۱)$$

که در آن  $a(x) \in C(\bar{D})$ ،  $k(x) \in C^1(\bar{D})$  و  $k(x) \geq k_\circ > 0$ .

**تعریف ۲.۵.۱.** (الف) تابع  $u(x, t) \in C^2(Q_T) \cap C^1(Q_T \cup \Gamma_T \cup \bar{D}_\circ)$  را یک جواب کلاسیک از مساله مقدار مرزی نوع اول (مساله دیریشله) می‌نامند، هرگاه این تابع در معادله (۶.۱) و در شرایط اولیه زیر روی  $D_\circ$ :

$$u|_{t=\circ} = \varphi(x), \quad (۷.۱)$$

$$u_t|_{t=\circ} = \psi(x), \quad (۸.۱)$$

و در شرط مرزی زیر روی  $\Gamma_T$  صدق کند:

$$u|_{\Gamma_T} = \xi. \quad (۹.۱)$$

(ب) تابع  $u(x, t) \in C^2(Q_T) \cap C^1(Q_T \cup \Gamma_T \cup \bar{D}_\circ)$  را یک جواب کلاسیک از مساله مقدار مرزی نوع سوم (مساله نویمن دیریشله) می‌نامند، هرگاه این تابع در معادله (۶.۱)، شرایط اولیه (۷.۱)–(۸.۱)، و در شرط مرزی زیر روی  $\Gamma_T$  صدق کند:

$$\left( \frac{\partial u}{\partial n} + \delta(x)u \right) \Big|_{\Gamma_T} = \xi, \quad (۱۰.۱)$$

که در آن  $\delta(x) \in C(\Gamma_T)$  در نظر گرفته می‌شود.

اگر در شرط مرزی (۱۰.۱) تابع  $\delta(x) = 0$  در نظر گرفته شود، آنگاه شرط مرزی (۱۰.۱) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\Gamma_T} = \xi. \quad (11.1)$$

شرط (۱۱.۱) را شرط مرزی نویمن می‌نامند.

### ۳.۵.۱ معادلات سهموی

فرض کنید  $D$  یک دامنه کراندار در  $\mathbb{R}^n$  با مرز هموار  $\partial D$  باشد. برای این دسته از معادلات، یک ناحیه استوانه‌ای کراندار  $Q_T = D \times (0, T) \subset \mathbb{R}^{n+1}$  را در نظر می‌گیریم، که در آن  $T$  یک عدد مثبت حقیقی است. تعریف می‌کنیم:

$$\Gamma_T = \partial D \times (0, T),$$

$$D_0 = D \times \{0\},$$

$$D_T = D \times \{T\}.$$

یک معادله دیفرانسیل سهموی روی  $Q_T \subset \mathbb{R}^{n+1}$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L_u = u_t - \operatorname{div}(k(x)\nabla u) + a(x)u = f(x, t), \quad (12.1)$$

که در آن  $k(x) \in C^1(\overline{Q_T})$ ،  $k(x) \geq k_0 > 0$  و  $a(x) \in C(\overline{Q_T})$ .

**تعریف ۳.۵.۱.** (الف) تابع  $u(x, t) \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(Q_T \cup \Gamma_T \cup \overline{D_0})$  را یک جواب کلاسیک از مساله مقدار مرزی نوع اول (مساله دیریشله) می‌نامند، هرگاه این تابع در معادله (۱۲.۱) و در شرط اولیه زیر روی  $D_0$ :

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad (13.1)$$

و در شرط مرزی زیر روی  $\Gamma_T$  صدق کند:

$$u|_{\Gamma_T} = \xi. \quad (14.1)$$

(ب) تابع  $u(x, t) \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(Q_T \cup \Gamma_T \cup \bar{D}_*) \cap C^{1,0}(Q_T \cap \Gamma_T)$  را یک جواب کلاسیک از مساله مقدار مرزی نوع سوم (مساله نویمن دیریشله) می‌نامند، هرگاه این تابع در معادله (۱۲.۱)، شرط اولیه (۱۳.۱) و در شرط مرزی زیر روی  $\Gamma_T$  صدق کند:

$$\left( \frac{\partial u}{\partial n} + \delta(x)u \right) \Big|_{\Gamma_T} = \xi, \quad (15.1)$$

که در آن  $\delta(x) \in C(\Gamma_T)$ .

اگر در شرط مرزی (۱۵.۱) تابع  $\delta(x) = 0$  در نظر گرفته شود، آنگاه این شرط مرزی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma_T} = \xi. \quad (16.1)$$

شرط (۱۶.۱) را شرط مرزی نویمن می‌نامند.

## ۶.۱ مسائل کنترل بهینه سیستم‌های پارامتر توزیعی سهموی

مطالب زیادی در مورد بررسی مسائل کنترل بهینه گوناگون که دارای قیودی به صورت معادلات با مشتقات جزئی هستند، وجود دارد [۲]-[۶]. با وجود اینکه فقط نتایج کمی در زمینه محاسبه خطای تقریب‌های عناصر متناهی<sup>۲۵</sup> وجود دارد، محاسبات کاملاً گسسته از یک مساله کنترل بهینه توزیعی که به معادله گرما مربوط می‌شود، در [۸]-[۷] داده شده است. در [۹] یک مساله کنترل بهینه توزیعی، دارای قیود با مشتقات جزئی سهموی شبه خطی، مورد بررسی واقع شده است. بعضی از نتایج مربوط به بررسی استقرایی مسائل کنترل بهینه که دارای قیود با مشتقات جزئی سهموی خطی هستند در [۱۰]-[۱۱] توسعه داده شده است. نتایج بدست آمده به انواعی از

<sup>۲۵</sup>Finite Element

کنترل‌ها از جمله کنترل نویمان و رابین<sup>۲۶</sup> نیز مربوط می‌شوند که این کنترل‌ها در مسائل کنترل توزیعی نیز کاربرد دارند. در [۱۲] یک کنترل مرزی نویمان برای مینیمم‌سازی تابع هدف از نوع رهگیری<sup>۲۷</sup> دارای قیودی به صورت یک معادله با مشتقات جزئی سهموی همگن خطی به کار گرفته شده است. در [۱۳] یک نمونه از محاسبات مساله کنترل مرزی نویمان دارای قیود با مشتقات جزئی سهموی همگن خطی بررسی شده است. در [۱۴] (همچنین [۲] را ببینید) یک تقریب نیم‌گروه<sup>۲۸</sup> برای بررسی انواع مسائل کنترل بهینه دارای قیود مشتقات جزئی سهموی همگن خطی توسعه داده شده است و خطای این محاسبات برای تقریب‌های عناصر متناهی مورد بررسی قرار گرفته است. سرانجام، خطای محاسبه مرتبه اول برای تقریب نیمه‌گسسته<sup>۲۹</sup> از مسائل کنترل بهینه مرزی رابین که مقید به معادلات با مشتقات جزئی سهموی نیمه‌خطی هستند ارائه شده است [۱۵]. اینک می‌خواهیم یک نمونه از مساله کنترل بهینه که دارای قیود با مشتقات جزئی هستند را در این پایان‌نامه مورد بررسی قرار دهیم. مساله کنترل بهینه زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \min_{u \in L^{\nu}(Q)} J(y, u), \\ \text{subject to} \\ -\partial_t y + \Delta y = u, & \text{in } Q = \Omega \times (\circ, T), \\ y(x, \circ) = y_{\circ}(x), & \text{in } \Omega \text{ at } t = \circ, \\ y(x, t) = \circ, & \text{on } \Sigma = \partial\Omega \times (\circ, T). \end{cases} \quad (17.1)$$

که در آن  $y_{\circ}(x) \in H^1_0(\Omega)$  و تابع هدف از نوع رهگیری به صورت زیر است:

$$J(y, u) = \frac{1}{\nu} \|y - z\|_{L^{\nu}(Q)}^{\nu} + \frac{\nu}{\nu} \|u\|_{L^{\nu}(Q)}^{\nu}. \quad (18.1)$$

که در آن  $\nu > \circ$  وزن هزینه کنترل و  $z \in L^{\nu}(Q)$  حالت مطلوب می‌باشد. برای مساله کنترل بهینه فوق، یک جواب بهینه یکتا به صورت  $(y^*, u^*) = (y^*(u^*), u)$  وجود دارد ([۱۰]-[۱۱] را ببینید)، که در آن متغیر

$$H^{\nu,1}(Q) = L^{\nu}(\circ, T; H^{\nu}(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)) \cap H^1(\circ, T; L^{\nu}(\Omega))$$

<sup>۲۶</sup>Robin

<sup>۲۷</sup>Tracking

<sup>۲۸</sup>Semi-group

<sup>۲۹</sup>Semi-discrete

شرایط بهینگی متناظر مساله (۱۷.۱) با تابع هدف (۱۸.۱) به صورت زیر است [۱۶]:

$$-\partial_t y + \Delta y = u, \quad (19.1)$$

$$\partial_t p + \Delta p + (y - z) = 0, \quad (20.1)$$

$$\nu u - p = 0, \quad (21.1)$$

با شرط اولیه  $y(x, 0) = y_0(x)$  برای معادله حالت (به صورت پیشرو در زمان) و شرط پایانی  $p(x, T) = 0$  برای معادله الحاقی<sup>۳۰</sup> (به صورت پسرو در زمان) [۱۶]. از معادلات (۲۰.۱) و (۲۱.۱) داریم  $p, u \in H^{2,1}(Q)$  اینک واضح است که از شرط بهینگی (۲۱.۱)،  $u$  بر اساس یک رابطه مستقیم با  $p$  بدست خواهد آمد. در فصل دوم از این پایان نامه، به حل سیستم بهینه فوق با استفاده از  $B$ -اسپلاین مرتبه سوم می پردازیم. به همین ترتیب در فصول بعدی،  $B$ -اسپلاین های مرتبه ۴، ۵ و ۷ برای حل این سیستم بهینه بکار گرفته خواهد شد. در هر فصل یک تقریبی از تابع حالت  $y(x, t)$ ، تابع الحاقی  $p(x, t)$  و تابع کنترل بهینه  $u(x, t)$  بدست خواهیم آورد.

## ۷.۱ - اسپلاین ها - $B$

### ۱.۷.۱ نظریه اساسی

این بخش به دستگاهی از توابع اسپلاین اختصاص یافته که از آنها کلیه توابع اسپلاین دیگر می توانند با تشکیل ترکیب های خطی بدست آیند. این اسپلاین ها یک پایه برای فضا های اسپلاین های خاص فراهم می کنند و بنابراین  $B$  - اسپلاین نامیده می شوند. با معلوم بودن گره ها،  $B$  - اسپلاین ها به وسیله روابط بازگشتی به راحتی قابل تولید هستند و الگوریتم آنها نیز به نسبت ساده است.  $B$  - اسپلاین ها به واسطه برخورداری از نظریه ای جالب و رفتاری نمونه در محاسبات عددی متمایز هستند. بعلاوه  $B$  - اسپلاین ها می توانند تعمیم پیدا کنند.

با دستگاهی از گره های  $x_i$  بر روی اعداد حقیقی شروع می کنیم. در عمل معمولاً به یک مجموعه متناهی نیاز است اما برای گسترش راحت تر است که گره ها یک مجموعه نامتناهی از راست تا  $+\infty$  و از چپ تا  $-\infty$  را شامل

<sup>۳۰</sup> Adjoint

باشند:

$$\dots < x_{-2} < x_{-1} < x_0 < x_1 < x_2 < \dots$$

در تمام مباحث این گره‌ها ثابت فرض می‌شوند و تمام اسپلاین‌ها را بر این گره‌ها استوار می‌کنیم.

### ۲.۷.۱ B - اسپلاین درجه صفر

B - اسپلاین درجه صفر را با نماد  $B_i^\circ$  نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

#### تعریف ۱.۷.۱

$$B_i^\circ(x) = \begin{cases} 1, & x_i \leq x < x_{i+1}, \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

که دارای شکل (۱.۱) می‌باشد. این B - اسپلاین‌ها دنباله نامتناهی  $\{B_i^\circ : i \in Z\}$  را تشکیل می‌دهند.

برخی از خواص B - اسپلاین فوق در زیر آمده است.

۱. محمل<sup>۳۱</sup>  $B_i^\circ$  (یعنی مجموعه‌هایی که  $B_i^\circ \neq 0$ ) بازه  $[x_i, x_{i+1})$  می‌باشد.

۲.  $B_i^\circ(x) \geq 0$  به‌ازای همه  $x$  ها و  $i$  ها.

۳.  $B_i^\circ$  از راست پیوسته است.

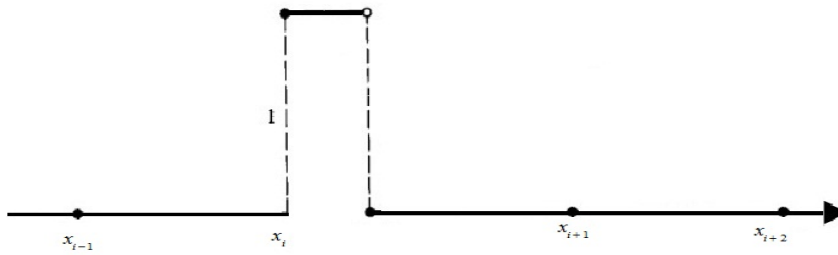
۴.  $\sum_{i=-\infty}^{+\infty} B_i^\circ(x) = 1$  به‌ازای تمام  $x$  ها.

نکته مهم دیگر این است که B - اسپلاین‌های درجه صفر یک پایه برای همه B - اسپلاین‌های درجه صفر تشکیل

می‌دهند. برای اثبات این ادعا، فرض کنید  $S$  یک تابع اسپلاین درجه صفر باشد. آنگاه این اسپلاین قطعه‌ای ثابت<sup>۳۲</sup>

<sup>۳۱</sup>Support

<sup>۳۲</sup>Piecewise Constant

شکل ۱.۱: B - اسپلاین  $B_i^\circ$ 

است و به صورت زیر تعریف می شود:

$$x_i \leq x \leq x_{i+1}, i \in Z \longrightarrow S(x) = c_i,$$

واضح است که

$$S(x) = \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} B_i^\circ(x),$$

بنابراین ما یک پایه به مفهوم شودر<sup>۳۳</sup> داریم (هر بردار در فضا یک نمایش منحصر بفرد به صورت یک سری نامتناهی  $\sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} c_i B_i^\circ$  دارد). توابع  $B_i^\circ$  نقطه شروعی برای تعریف بازگشتی همه B - اسپلاین های از درجه بالاتر هستند. رابطه بازگشتی برای بدست آوردن B - اسپلاین های با درجه بالاتر عبارت است از :

$$B_i^k(x) = \left(\frac{x - x_i}{x_{i+k} - x_i}\right) B_i^{k-1}(x) + \left(\frac{x_{i+k+1} - x}{x_{i+k+1} - x_{i+1}}\right) B_{i+1}^{k-1}(x), \quad (k \geq 1) \quad (22.1)$$

تمام ویژگی های B - اسپلاین از درجه بالاتر از این تعریف بازگشتی نتیجه خواهد شد. با وارد کردن برخی توابع

<sup>۳۳</sup>Schauder



خطی خاص

$$V_i^k(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+k} - x_i}, \quad (23.1)$$

می‌توانیم رابطه بازگشتی را به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$B_i^k = V_i^k B_i^{k-1} + (1 - V_{i+1}^k) B_{i+1}^{k-1}, \quad (24.1)$$

چون  $B_i^0$  یک چند جمله‌ای قطعه به قطعه<sup>۳۴</sup> از درجه صفر است و  $V_i^k$  خطی است لذا  $B_i^1$  یک چند جمله‌ای حداکثر از درجه یک می‌باشد. به همین دلیل می‌توان نشان داد که به طور کلی  $B_i^k$  یک چند جمله‌ای قطعه به قطعه حداکثر از درجه  $k$  می‌باشد.

### ۳.۷.۱ - اسپلاین درجه یک

با توجه به رابطه (۲۲.۱)،  $B$  - اسپلاین درجه یک را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

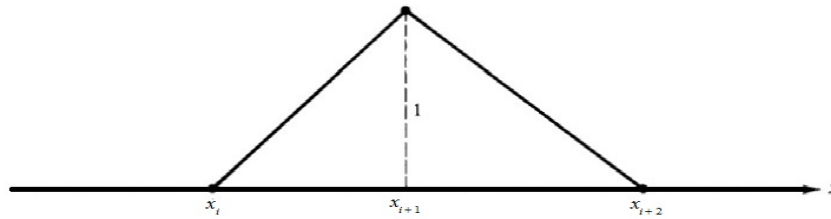
$$B_i^1(x) = \left(\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\right) B_i^0(x) + \left(\frac{x_{i+2} - x}{x_{i+2} - x_{i+1}}\right) B_{i+1}^0(x),$$

لذا:

$$B_i^1(x) = \begin{cases} \frac{x-x_i}{x_{i+1}-x} & x_i \leq x < x_{i+1}, \\ \frac{x_{i+2}-x}{x_{i+2}-x_{i+1}} & x_{i+1} \leq x < x_{i+2}, \\ 0 & \text{در غیر این صورت.} \end{cases}$$

نمودار  $B_i^1$  را می‌توان در شکل (۲.۱) دید. خواص  $B$  - اسپلاین درجه یک به صورت زیر می‌باشد.

<sup>۳۴</sup>Piecewise Polynomial

شکل ۲.۱: B - اسپلاین  $B_i^1$ 

۱. محمل  $B_i^1$  بازه  $[x_i, x_{i+2}]$  می باشد.

۲.  $B_i^1(x) \geq 0$  به ازای همه  $x$  ها و  $i$  ها.

۳.  $B_i^1$  از راست پیوسته است و در هر نقطه به جز  $x_i, x_{i+1}$  و  $x_{i+2}$  مشتق پذیر است.

۴.  $\sum_{i=-\infty}^{+\infty} B_i^1(x) = 1$  به ازای تمام  $x$  ها.

### ۴.۷.۱ خواص B - اسپلاین

لم ۲.۷.۱. اگر  $k \geq 1$ ،  $B_i^k(x) = 0$  آنگاه  $x \notin (x_i, x_{i+k+1})$ .

لم ۳.۷.۱. فرض کنید  $k \geq 0$ ، اگر  $x \in (x_i, x_{i+1})$ ، آنگاه  $B_i^k(x) > 0$ .

لم ۴.۷.۱. داریم:  $\sum_{i=-\infty}^{+\infty} c_i B_i^k = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} [c_i V_i^k + c_{i-1}(1 - V_i^k)] B_i^{k-1}$

رویه عددی متناظر با لم (۴.۷.۱)

در لم (۴.۷.۱)، ضرایب می توانند ثابت یا تابع باشند. بنابراین لم مورد نظر راهی برای محاسبه یک تابع داده

شده به شکل زیر فراهم می‌کند:

$$f(x) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} C_i^k(x) B_i^k(x),$$

فرض می‌کنیم که توابع  $C_i^k$  داده شده باشند؛ البته آنها ممکن است ثابت باشند. حال تعریف می‌کنیم:

$$C_i^{k-1}(x) = C_i^k(x) V_i^k(x) + C_{i-1}^k(x) [1 - V_i^k(x)], \quad (25.1)$$

سپس بنابر لم (۴.۷.۱) و رابطه (۲۵.۱) داریم:

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} C_i^k(x) B_i^k(x) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} C_i^{k-1}(x) B_i^{k-1}(x),$$

با تکرار بحث برای  $1, \dots, k-2, k-1, \dots$  بالاخره بدست می‌آوریم:

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} C_i^k(x) B_i^k(x) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} C_i^0(x) B_i^0(x),$$

لذا عبارت سمت راست به راحتی محاسبه می‌شود. برای  $x_j \leq x < x_{j+1}$  مقدارش برابر  $C_j^0(x)$  است. رابطه

(۲۵.۱) را با استفاده از رابطه (۲۴.۱) با جزئیات بیشتر به صورت زیر می‌نویسیم:

$$C_i^{j-1}(x) = \frac{(x - x_i) C_i^j(x) + (x_{i+j} - x) C_{i-1}^j(x)}{x_{i+j} - x_i}, \quad (26.1)$$

ملاحظات قبلی ما را به رویه عددی زیر هدایت می‌کند.

**الگوریتم:** اگر ضرایب  $C_i^k$  مفروض باشند، تابع اسپلاین  $S(x) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} C_i^k(x) B_i^k(x)$  برای یک  $x$  داده

شده می‌تواند به صورت زیر محاسبه شود: اندیس  $m$  را به گونه‌ای تعیین کنید که  $x_m \leq x < x_{m+1}$ . با استفاده

از معادله (۲۶.۱) آرایه مثلثی زیر را محاسبه کنید.

$$\begin{array}{ccccccc}
C_m^k & & C_m^{k-1} & & \dots & & C_m^1 & & C_m^0 \\
C_{m-1}^k & & C_{m-1}^{k-1} & & \dots & & C_{m-1}^1 & & \\
\vdots & & & & & & & & \\
C_{m-k+1}^k & & C_{m-k+1}^{k-1} & & & & & & \\
C_{m-k}^k & & & & & & & & 
\end{array}$$

آنگاه  $S(x) = C_m^0$ .

لم ۵.۷.۱. به ازای هر  $k$ ,

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} B_i^k(x) = 1.$$

### ۵.۷.۱ مشتق و انتگرال B - اسپلاین

لمی که ارائه خواهیم کرد فرمول مهم برای مشتق  $B_i^k$  ارائه می‌دهد. بهتر است از رابطه برای  $V_i^k$  استفاده کرده و قرار می‌دهیم:

$$\alpha_i^k = \frac{1}{x_{i+k} - x_i},$$

با این نمادگذاری ملاحظه می‌کنیم که

$$\frac{d}{dx} V_i^k(x) = \alpha_i^k,$$

بقیه فرمول‌های دیگر که تحقیق آنها بدیهی است، عبارتند از:

$$\alpha_i^k V_i^{k+1} = \alpha_i^{k+1} V_i^k,$$

$$\alpha_{i+1}^k (1 - V_i^{k+1}) = \alpha_i^{k+1} (1 - V_{i+1}^k),$$

لم ۶.۷.۱. به ازای  $k \geq 2$

$$\frac{d}{dx} B_i^k(x) = \left( \frac{k}{x_{i+k} - x_i} \right) B_i^{k-1}(x) - \left( \frac{k}{x_{i+k+1} - x_{i+1}} \right) B_{i+1}^{k-1},$$

وقتی  $k = 1$  معادله برای تمام  $x$  ها به جز  $x = x_i, x_{i+1}, x_{i+2}$  برقرار است.

لم ۷.۷.۱. به ازای  $k \geq 1$ ،  $B$  - اسپلاین های  $B_i^k$  به رده پیوستگی  $C^{k-1}(R)$  تعلق دارند.

لم ۸.۷.۱.

$$\int_{-\infty}^x B_i^k(s) ds = \left( \frac{x_{i+k+1} - x_i}{k+1} \right) \sum_{j=i}^{\infty} B_j^{k+1}(x),$$

اگر  $f$  یک تابع و  $K$  یک زیرمجموعه از دامنه اش باشد، آنگاه  $f|K$  تحدید<sup>۳۵</sup>  $f$  به  $K$  را نمایش می دهد. بنابراین،

$$(f|K)(x) = f(x) \quad (x \in K),$$

این مفهوم در کار با اسپلاین ها مفید می باشد، زیرا هر تابع  $B_i^k| (x_j, x_{j+1})$  یک چندجمله ای (به طور دقیق تر تحدید یک چندجمله ای) است. وقتی گفته می شود که یک مجموعه از توابع  $f_i$  بر روی یک مجموعه  $K$  مستقل خطی اند، به این معناست که مجموعه توابع تحدید شده ی  $f_i|K$  به مفهوم معمول مستقل خطی هستند. حال توابع  $B$  - اسپلاین  $B_0^k, B_1^k, \dots, B_n^k$  را در نظر بگیرید. وقتی اینها به هر بازه ی تنهایی بین گره های  $(x_v, x_{v+1})$  محدود شوند، نتیجه آن یک مجموعه از چندجمله ای هایی از  $(x_k, x_{k+1})$  باشد این تحدیدها یک پایه برای فضای چندجمله ای هایی  $\prod_k$  تشکیل می دهند.

لم ۹.۷.۱. مجموعه  $B$  - اسپلاین های  $\{B_j^k, B_{j+1}^k, \dots, B_{j+k}^k\}$  بر روی بازه  $(x_{k+j}, x_{k+j+1})$  مستقل خطی است.

لم ۱۰.۷.۱. مجموعه  $B$  - اسپلاین های  $\{B_{-k}^k, B_{-k+1}^k, \dots, B_{n-1}^k\}$  بر روی بازه  $(x_0, x_n)$  مستقل خطی اند.

**پایه ای برای فضای  $S_n^k$ :**  $S_n^k$  مجموعه تمام توابع از رده  $C^{k-1}$  و چندجمله ای های قطعه به قطعه از درجه کوچکتر مساوی  $k$  بر روی  $n$  بازه  $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$  می باشد. برای اینکه دامنه  $B$  - اسپلاین ها یکسان باشد،  $B$  - اسپلاین ها را به بازه  $[x_0, x_n]$  محدود می کنیم و با نماد  $B_i^k| [x_0, x_n]$  نمایش می دهیم.

<sup>۳۵</sup>Restriction

جدول ۱.۱: مقادیر  $Q_i$  و  $Q'_i$ .

$x$	$x_{i-1}$	$x_i$	$x_{i+1}$	$x_{i+2}$
$Q_i$	۰	۱	۱	۰
$Q'_i$	۰	$-\frac{2}{h}$	$\frac{2}{h}$	۰

قضیه ۱۱.۷.۱. یک پایه برای فضای  $S_n^k$  عبارت است از

$$\{B_i^k \mid [x_0, x_n] : -k \leq i \leq n-1\}, \quad (27.1)$$

در نتیجه بعد  $S_n^k$ ،  $n+k$  می‌باشد.

## ۸.۱ B - اسپلاین‌های مراتب بالاتر

در بخش‌های قبلی به B - اسپلاین درجه صفر و درجه یک اشاره کردیم. همچنین اشاره کردیم با توجه به رابطه بازگشتی می‌توان B - اسپلاین‌های درجه بالاتر با همان خواص را تولید کرد.

برای راحتی کار و ساده نویسی فرض می‌کنیم فاصله گره‌ها از یکدیگر ثابت باشد یعنی  $h = x_{i+1} - x_i$ . حال با توجه به رابطه (۲۴.۱) و B - اسپلاین مرتبه یک می‌توان B - اسپلاین مرتبه دو<sup>۳۶</sup> را به صورت زیر بدست آورد:

$$Q_i(x) = \frac{1}{h^2} \begin{cases} (x_{i+2} - x)^2 - 3(x_{i+1} - x)^2 + 3(x_i - x)^2, & [x_{i-1}, x_i], \\ (x_{i+2} - x)^2 - 3(x_{i+1} - x)^2, & [x_i, x_{i+1}], \\ (x_{i+2} - x)^2, & [x_{i+1}, x_{i+2}], \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (28.1)$$

و در جدول (۱.۱) مقادیر B - اسپلاین و مشتقاتش در گره‌ها بدست آورده شده است. دوباره با توجه به رابطه

<sup>۳۶</sup>Quadratic B-Spline

جدول ۲.۱: مقادیر  $Q_i$  و  $Q'_i$  و  $Q''_i$ .

$x$	$x_{i-2}$	$x_{i-1}$	$x_i$	$x_{i+1}$	$x_{i+2}$
$Q_i$	۰	۱	۴	۱	۰
$Q'_i$	۰	$\frac{2}{h}$	۰	$-\frac{2}{h}$	۰
$Q''_i$	۰	$\frac{6}{h^2}$	$-\frac{12}{h^2}$	$\frac{6}{h^2}$	۰

بازگشتی (۲۴.۱) و رابطه (۲۸.۱) B-اسپلاین مرتبه سه<sup>۳۷</sup> برابر است با

$$Q_i(x) = \frac{1}{h^3} \begin{cases} (x - x_{i-2})^3, & [x_{i-2}, x_{i-1}], \\ h^3 + 3h^2(x - x_{i-1}) + 3h(x - x_{i-1})^2 - 3(x - x_{i-1})^3, & [x_{i-1}, x_i], \\ h^3 + 3h^2(x_{i+1} - x)^2 + 3h(x_{i+1} - x) - 3(x_{i+1} - x)^3, & [x_i, x_{i+1}], \\ (x_{i+2} - x)^3, & [x_{i+1}, x_{i+2}], \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (29.1)$$

به همین منوال B-اسپلاین‌های درجه چهار<sup>۳۸</sup>، پنج<sup>۳۹</sup>، شش<sup>۴۰</sup> و هفت<sup>۴۱</sup> را به صورت زیر خواهیم داشت که همگی خواص ذکر شده در بخش‌های پیشین را دارا می‌باشند و به ترتیب جدول‌های (۳.۱)، (۴.۱)، (۵.۱) و (۶.۱) نشان‌دهنده مقادیر B-اسپلاین در نقاط گره‌ای می‌باشد.

$$Q_i(x) = \frac{1}{h^4} \begin{cases} (x - x_{i-2})^4, & [x_{i-2}, x_{i-1}], \\ (x - x_{i-2})^4 - 5(x - x_{i-1})^4, & [x_{i-1}, x_i], \\ (x - x_{i-2})^4 - 5(x - x_{i-1})^4 + 10(x - x_i)^4, & [x_i, x_{i+1}], \\ (x_{i+2} - x)^4 - 5(x_{i+2} - x)^4, & [x_{i+1}, x_{i+2}], \\ (x_{i+2} - x)^4, & [x_{i+2}, x_{i+3}], \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (30.1)$$

جدول ۳.۱: مقادیر  $Q_i, Q_i', Q_i'', Q_i'''$ .

$x$	$x_{i-2}$	$x_{i-1}$	$x_i$	$x_{i+1}$	$x_{i+2}$	$x_{i+3}$
$Q_i$	۰	۱	۱۱	۱۱	۱	۰
$Q_i'$	۰	$\frac{4}{h}$	$\frac{12}{h}$	$-\frac{12}{h}$	$-\frac{4}{h}$	۰
$Q_i''$	۰	$\frac{12}{h^2}$	$-\frac{12}{h^2}$	$-\frac{12}{h^2}$	$\frac{12}{h^2}$	۰
$Q_i'''$	۰	$\frac{24}{h^3}$	$-\frac{72}{h^3}$	$\frac{72}{h^3}$	$-\frac{24}{h^3}$	۰

جدول ۴.۱: مقادیر  $Q_i, Q_i', Q_i'', Q_i'''$ .

$x$	$x_{i-3}$	$x_{i-2}$	$x_{i-1}$	$x_i$	$x_{i+1}$	$x_{i+2}$	$x_{i+3}$
$Q_i$	۰	۱	۲۶	۶۶	۲۶	۱	۰
$Q_i'$	۰	$\frac{5}{h}$	$\frac{50}{h}$	۰	$-\frac{50}{h}$	$-\frac{5}{h}$	۰
$Q_i''$	۰	$\frac{20}{h^2}$	$\frac{40}{h^2}$	$-\frac{120}{h^2}$	$\frac{40}{h^2}$	$\frac{20}{h^2}$	۰
$Q_i'''$	۰	$\frac{60}{h^3}$	$-\frac{120}{h^3}$	۰	$\frac{120}{h^3}$	$-\frac{60}{h^3}$	۰

$$Q_i(x) = \frac{1}{h^5} \begin{cases} (x - x_{i-3})^5, & [x_{i-3}, x_{i-2}], \\ (x - x_{i-3})^5 - 6(x - x_{i-2})^5, & [x_{i-2}, x_{i-1}], \\ (x - x_{i-3})^5 - 6(x - x_{i-2})^5 + 15(x - x_{i-1})^5, & [x_{i-1}, x_i], \\ (x_{i+3} - x)^5 - 6(x_{i+2} - x)^5 + 15(x_{i+1} - x)^5, & [x_i, x_{i+1}], \\ (x_{i+3} - x)^5 - 6(x_{i+2} - x)^5, & [x_{i+1}, x_{i+2}], \\ (x_{i+3} - x)^5, & [x_{i+2}, x_{i+3}], \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (3.1.1)$$

<sup>۳۷</sup>Cubic B-Spline

<sup>۳۸</sup>Quartic B-Spline

<sup>۳۹</sup>Quintic B-Spline

<sup>۴۰</sup>Sextic B-Spline

<sup>۴۱</sup>Septic B-Spline



جدول ۵.۱: مقادیر  $Q_i, Q_i', Q_i'', Q_i'''$ 

$x$	$x_{i-3}$	$x_{i-2}$	$x_{i-1}$	$x_i$	$x_{i+1}$	$x_{i+2}$
$Q_i$	۱	۵۷	۳۰۲	۳۰۲	۵۷	۱
$Q_i'$	$\frac{-6}{h}$	$\frac{-150}{h}$	$\frac{-240}{h}$	$\frac{240}{h}$	$\frac{150}{h}$	$\frac{6}{h}$
$Q_i''$	$\frac{20}{h^2}$	$\frac{270}{h^2}$	$\frac{-300}{h^2}$	$\frac{-300}{h^2}$	$\frac{270}{h^2}$	$\frac{20}{h^2}$
$Q_i'''$	$\frac{-120}{h^3}$	$\frac{-120}{h^3}$	$\frac{-960}{h^3}$	$\frac{960}{h^3}$	$\frac{120}{h^3}$	$\frac{120}{h^3}$

$$Q_i(x) = \frac{1}{h^6} \begin{cases} (x - x_{i-3})^6, & [x_{i-3}, x_{i-2}], \\ (x - x_{i-3})^6 - 6(x - x_{i-2})^6, & [x_{i-2}, x_{i-1}], \\ (x - x_{i-3})^6 - 6(x - x_{i-2})^6 + 21(x - x_{i-1})^6, & [x_{i-1}, x_i], \\ (x - x_{i-3})^6 - 6(x - x_{i-2})^6 + 21(x - x_{i-1})^6 - 35(x - x_i)^6, & [x_i, x_{i+1}], \\ (x - x_{i-2})^6 - 6(x - x_{i-1})^6 + 21(x - x_i)^6, & [x_{i+1}, x_{i+2}], \\ (x - x_{i-2})^6 - 6(x - x_{i-1})^6, & [x_{i+2}, x_{i+3}], \\ (x - x_{i-1})^6, & [x_{i+3}, x_{i+4}], \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (32.1)$$

$$Q_i(x) = \frac{1}{h^6} \begin{cases} (x - x_{i-4})^6, & [x_{i-4}, x_{i-3}], \\ (x - x_{i-4})^6 - 6(x - x_{i-3})^6, & [x_{i-3}, x_{i-2}], \\ (x - x_{i-4})^6 - 6(x - x_{i-3})^6 + 21(x - x_{i-2})^6, & [x_{i-2}, x_{i-1}], \\ (x - x_{i-4})^6 - 6(x - x_{i-3})^6 + 21(x - x_{i-2})^6 - 56(x - x_{i-1})^6, & [x_{i-1}, x_i], \\ (x_{i+4} - x)^6 - 6(x_{i+3} - x)^6 + 21(x_{i+2} - x)^6 - 56(x_{i+1} - x)^6, & [x_i, x_{i+1}], \\ (x_{i+4} - x)^6 - 6(x_{i+3} - x)^6 + 21(x_{i+2} - x)^6, & [x_{i+1}, x_{i+2}], \\ (x_{i+4} - x)^6 - 6(x_{i+3} - x)^6, & [x_{i+2}, x_{i+3}], \\ (x_{i+3} - x)^6, & [x_{i+3}, x_{i+4}], \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (33.1)$$

جدول ۶.۱: مقادیر  $Q_m, Q'_m, Q''_m, Q'''_m$ .

$x$	$x_{m-4}$	$x_{m-3}$	$x_{m-2}$	$x_{m-1}$	$x_m$	$x_{m+1}$	$x_{m+2}$	$x_{m+3}$	$x_{m+4}$
$Q_i$	۰	۱	۱۲۰	۱۱۹۱	۲۴۱۶	۱۱۹۱	۱۲۰	۱	۰
$Q'_i$	۰	$\frac{7}{h}$	$\frac{392}{h}$	$\frac{1715}{h}$	۰	$-\frac{1715}{h}$	$-\frac{392}{h}$	$-\frac{7}{h}$	۰
$Q''_i$	۰	$\frac{42}{h^2}$	$\frac{1008}{h^2}$	$\frac{630}{h^2}$	$-\frac{23260}{h^2}$	$\frac{630}{h^2}$	$\frac{1008}{h^2}$	$\frac{42}{h^2}$	۰
$Q'''_i$	۰	$\frac{210}{h^3}$	$\frac{1680}{h^3}$	$-\frac{3990}{h^3}$	۰	$\frac{3990}{h^3}$	$-\frac{16800}{h^3}$	$-\frac{210}{h^3}$	۰

## ۹.۱ تجزیه مقدار تکین و شبه معکوس

در بدست آوردن نتایج عددی در بعضی موارد به حل دستگاه ماتریسی غیرمربعی می‌رسیم که برای حل آنها از تجزیه مقدار تکین<sup>۴۲</sup> [۲۳] آنها استفاده کرده‌ایم. برخود لازم دانستم در اینجا کمی در مورد آن توضیح دهیم.

**قضیه ۱.۹.۱. تجزیه مقدار تکین:** فرض کنید  $A$  یک ماتریس حقیقی  $m \times n$  باشد آنگاه ماتریس‌های متعامد  $U$  و  $V$  وجود دارند به طوری که

$$U^T A V = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ & \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \Sigma,$$

که در آن  $\Sigma_1$  یک ماتریس قطری نامنفرد است. عناصر قطر  $\Sigma$  همگی نامنفی هستند و می‌توانند به ترتیب ناصعودی مرتب شوند. تعداد عناصر قطری مخالف صفر  $\Sigma$  برابر با رتبه ماتریس  $A$  است.

شبه معکوس یک ماتریس همیشه وجود دارد و منحصر بفرد است. نشان می‌دهیم که تجزیه مقدار تکین یک عبارت جالب برای شبه معکوس فراهم می‌سازد. شبه معکوس  $A$  را با  $A^\dagger$  نمایش داده و دارای خاصیت‌های زیر است

:

$$AA^\dagger A = A \quad (1)$$

<sup>۴۲</sup> Singular Value Decomposition Method

$$A^\dagger AA^\dagger = A^\dagger \quad (۲)$$

$$(AA^\dagger)^T = AA^\dagger \quad (۳)$$

$$(A^\dagger A)^T = A^\dagger A \quad (۴)$$

فرض کنید  $A = U\Sigma V^T$ ، تجزیه مقدار تکین ماتریس  $A$  باشد، آنگاه  $A^\dagger = V\Sigma^\dagger U^T$  که در آن

$$\Sigma^\dagger = \text{diag}\left(\frac{1}{\sigma_1}, \frac{1}{\sigma_2}, \dots, \frac{1}{\sigma_r}, 0, \dots, 0\right) \in R^{m \times n},$$

**تعریف ۲.۹.۱.** جواب مینیمال، عنصری از این مجموعه است که دارای کمترین نرم اقلیدسی باشد. یک تعریف دیگر به صورت زیر بیان می‌شود: با استفاده از نرم اقلیدسی، فرض کنید

$$\rho = \inf\{\|Ax - b\|_2 : x \in \mathbb{C}^n\}$$

در این صورت جواب مینیمال معادله  $Ax = b$  عنصری با کمترین نرم از مجموعه  $K = \{x : \|Ax - b\|_2 = \rho\}$  است.

اینک با تعابیر فوق به بیان قضیه زیر برای حل دستگاه با استفاده از شبه‌معکوس‌ها می‌پردازیم:

**قضیه ۳.۹.۱.** یک جواب مینیمال معادله  $Ax = b$ ، توسط شبه‌معکوس به صورت زیر ارائه می‌شود:

$$x = A^\dagger b$$

اثبات. به [۱۷] مراجعه گردد.

## فصل ۲

حل مساله کنترل بهینه سیستم‌های پارامتر  
توزیعی سهموی با استفاده از B - اسپلاین مرتبه

۳

## ۱.۲ مقدمه

نظریه توابع اسپلاین در زمینه‌های تقریب توابع، مسائل مقدار مرزی<sup>۱</sup> و معادلات با مشتقات جزئی زمانی که حل عددی آنها مورد نظر باشد، بسیار کاربرد دارند. در میان انواع مختلف اسپلاین‌ها، اسپلاین‌های چندجمله‌ای بیشتر مورد توجه هستند به دلیل اینکه آنها یک پایه برای فضای B - اسپلاین‌ها [۶]-[۹] فراهم می‌کنند. به عنوان چندجمله‌های قطعه‌ای، B - اسپلاین‌ها ابزاری اساسی برای روش‌های عددی در حل مساله کنترل بهینه سیستم‌های پارامتر توزیعی هستند. مزیت اصلی استفاده از روش B اسپلاین، سرعت آن می‌باشد، لذا این روش‌ها یک حل سریع را برای مساله بوجود می‌آورند. نکته جالب توجه این است که با وجود اینکه ضریب هزینه کنترل کوچکتر می‌شود، رفتار همگرایی طرح مذکور بدتر نمی‌شود. اینک برای حالتی که بتوان مسائل کنترل بهینه را در بازه زمانی نامحدود نیز حل کرد، می‌توان از تقریب ارائه شده در قالب تکنیک‌های پسرو افق<sup>۲</sup> [۹] استفاده کرد. در این فصل، یک روش عددی براساس توابع B - اسپلاین مرتبه ۳ و روش کالوکیشن<sup>۳</sup> برای حل مساله کنترل بهینه با معادلات دیفرانسیل سهموی خطی استفاده خواهد شد. موفقیت روش کالوکیشن B - اسپلاین وابسته به انتخاب پایه B - اسپلاین است. B - اسپلاین مرتبه ۳ به منظور ایجاد راه حل تقریبی برای برخی از معادلات دیفرانسیل خطی و غیرخطی استفاده شده است [۱۸]-[۲۱]. در پایان فصل نتایج عددی ارائه شده است که در آنها خطای میانگین مربع<sup>۴</sup> و خطای ماکزیمم<sup>۵</sup> محاسبه شده است. نتایج عددی نشان دهنده این است که این روش یک تکنیک کاربردی و تقریبی بسیار خوب برای محاسبه جواب مساله است.

---

<sup>۱</sup>Boundary Value Problems

<sup>۲</sup>Receding Horizon Techniques

<sup>۳</sup>Collocation Method

<sup>۴</sup>Mean Square Error

<sup>۵</sup>Maximum Error

## ۲.۲ - اسپلاین مرتبه ۳ و روش کالوکیشن

در این بخش می‌خواهیم سیستم بهینه (۱۹.۱)-(۲۱.۱) را با استفاده از روش B- اسپلاین مرتبه ۳ حل کنیم، ابتدا شکل ساده شده این سیستم را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$-\partial_t y + \Delta y = \frac{p}{\nu}, \quad \text{in } Q, \quad (۱.۲)$$

$$y(x, 0) = y_0(x), \quad \text{in } \Omega \text{ at } t = 0, \quad (۲.۲)$$

$$y(x, t) = 0, \quad \text{on } \Sigma, \quad (۳.۲)$$

$$\partial_t p + \Delta p + (y - z) = 0, \quad \text{in } Q, \quad (۴.۲)$$

$$p(x, T) = 0, \quad \text{in } \Omega \text{ at } t = T, \quad (۵.۲)$$

$$p(x, t) = 0, \quad \text{on } \Sigma. \quad (۶.۲)$$

حال فرض کنید  $\Omega$  یک افراز یکنواخت از بازه  $[a, b]$  به صورت شبکه  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$  باشد که در آن  $h = x_{m+1} - x_m$  و  $m = -1, 0, \dots, N+1$  مجموعه B- اسپلاین‌های مرتبه سه  $\{Q_{-1}, Q_0, \dots, Q_{N+1}\}$  یک پایه روی  $[a, b]$  تشکیل می‌دهند [۲۲]. همچنین توابع B- اسپلاین مرتبه سه روی یک مجموعه صعودی از  $N+1$  گره در دامنه مساله، بعلاوه ۶ گره اضافی در خارج دامنه مساله، در نظر گرفته می‌شود که این ۶ گره اضافی به صورت زیر می‌باشند:

$$x_{-3} < x_{-2} < x_{-1} < x_0, x_N < x_{N+1} < x_{N+2} < x_{N+3}.$$

فرض کنید  $Q_m(x)$  که در آن  $m = -1, 0, \dots, N+1$  که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Q_m(x) = \frac{1}{h^3} \begin{cases} (x - x_{m-2})^3, & x \in [x_{m-2}, x_{m-1}], \\ h^3 + 3h^2(x - x_{m-1}) + 3h(x - x_{m-1})^2 - 3(x - x_{m-1})^3, & x \in [x_{m-1}, x_m], \\ h^3 + 3h^2(x_{m+1} - x) + 3h(x_{m+1} - x)^2 - 3(x_{m+1} - x)^3, & x \in [x_m, x_{m+1}], \\ (x_{m+2} - x)^3, & x \in [x_{m+1}, x_{m+2}], \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (۷.۲)$$

جدول ۱.۲: مقادیر  $Q_m$ ,  $Q'_m$ ,  $Q''_m$ .

$x$	$x_{m-2}$	$x_{m-1}$	$x_m$	$x_{m+1}$	$x_{m+2}$
$Q_m$	۰	۱	۴	۱	۰
$Q'_m$	۰	$\frac{2}{h}$	۰	$-\frac{2}{h}$	۰
$Q''_m$	۰	$\frac{6}{h^2}$	$-\frac{12}{h^2}$	$\frac{6}{h^2}$	۰

B- اسپلاین مرتبه ۳ باشد، که بیرون بازه  $[x_{m-2}, x_{m+2}]$  صفر است. اکنون جواب‌های تقریبی سیستم (۱.۲) - (۶.۲) را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$y(x, t) = \sum_{m=-1}^{N+1} c_m(t) Q_m(x), \quad (۸.۲)$$

$$p(x, t) = \sum_{m=-1}^{N+1} d_m(t) Q_m(x), \quad (۹.۲)$$

که در آن  $c_m(t)$  و  $d_m(t)$  مقادیر مجهول وابسته به زمان هستند که از شرایط اولیه، مرزی و نهایی تعیین می‌شوند. مقادیر  $Q_m(x)$  و دو مشتقات اولی آن یعنی  $Q'_m(x)$ ,  $Q''_m(x)$  در گره‌ها در جدول (۱.۲) بدست آورده شده است. اکنون جواب تقریبی در نظر گرفته شده  $y(x, t)$  و  $p(x, t)$  از روابط (۸.۲) - (۹.۲) را در معادله‌های (۱.۲) - (۶.۲) به صورت زیر قرار می‌دهیم:

$$-c'_{-1}(t)Q_{-1}(x_i) - c'_0(t)Q_0(x_i) - \dots - c'_{N+1}(t)Q_{N+1}(x_i) + c_{-1}(t)Q''_{-1}(x_i) + c_0(t)Q''_0(x_i) + \dots + c_{N+1}(t)Q''_{N+1}(x_i) - \frac{1}{\nu}(d_{-1}(t)Q_{-1}(x_i) + d_0(t)Q_0(x_i) + \dots + d_{N+1}(t)Q_{N+1}(x_i)) = 0, \quad (۱۰.۲)$$

$$i = 1, \dots, N-1, t \in (0, T),$$

$$d'_{-1}(t)Q_{-1}(x_i) + d'_0(t)Q_0(x_i) + \dots + d'_{N+1}(t)Q_{N+1}(x_i) + d_{-1}(t)Q''_{-1}(x_i) + d_0(t)Q''_0(x_i) + \dots + d_{N+1}(t)Q''_{N+1}(x_i) + c_{-1}(t)Q_{-1}(x_i) + c_0(t)Q_0(x_i) + \dots + c_{N+1}(t)Q_{N+1}(x_i) = z(t, x_i), \quad (۱۱.۲)$$

$$i = 1, \dots, N-1, t \in (0, T),$$

با شرایط اولیه

$$c_{-1}(\circ)Q_{-1}(x_i) + c_{\circ}(\circ)Q_{\circ}(x_i) + \dots + c_N(\circ)Q_N(x_i) + c_{N+1}(\circ)Q_{N+1}(x_i) = y_{\circ}(x_i),$$

$$i = 1, \dots, N - 1, t = \circ, \quad (12.2)$$

شرایط مرزی

$$c_{-1}(t)Q_{-1}(x_i) + c_{\circ}(t)Q_{\circ}(x_i) + \dots + c_N(t)Q_N(x_i) + c_{N+1}(t)Q_{N+1}(x_i) = \circ,$$

$$i = \circ, N, t \in (\circ, T), \quad (13.2)$$

$$d_{-1}(t)Q_{-1}(x_i) + d_{\circ}(t)Q_{\circ}(x_i) + \dots + d_N(t)Q_N(x_i) + d_{N+1}(t)Q_{N+1}(x_i) = \circ,$$

$$i = \circ, N, t \in (\circ, T), \quad (14.2)$$

و شرایط نهایی

$$d_{-1}(T)Q_{-1}(x_i) + d_{\circ}(T)Q_{\circ}(x_i) + \dots + d_N(T)Q_N(x_i) + d_{N+1}(T)Q_{N+1}(x_i) = \circ,$$

$$i = 1, \dots, N - 1, t = T. \quad (15.2)$$

جواب B- اسپلاین از معادلات (۱۰.۲)-(۱۵.۲)، در گره‌های  $\{x_i\}_{i=0}^N$  توسط حل دستگاه زیر بدست می‌آید:

$$AX = B, \quad (16.2)$$

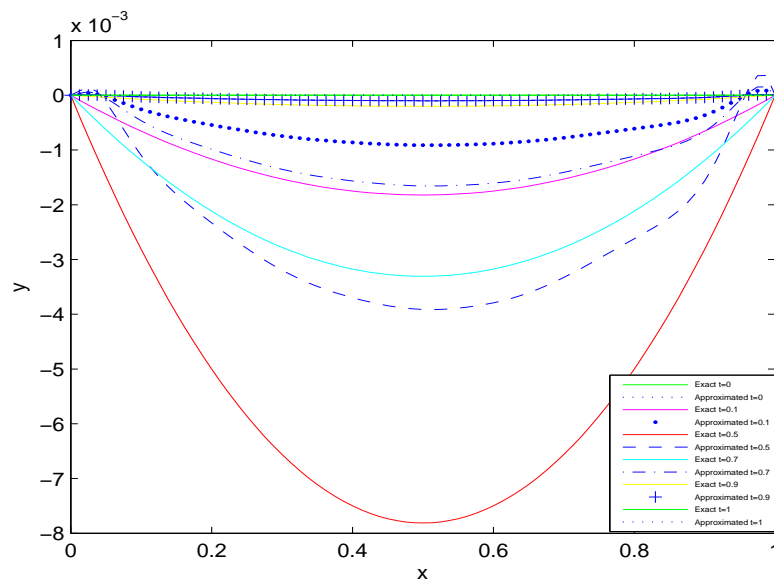
که در آن بعد ماتریس  $A$  برابر با  $(6N + 18) \times (4N)$  و ماتریس  $B$  یک ماتریس ستونی با  $4N$  سطر است. سیستم (۱۶.۲) را  $(N + 1)$  بار توسط برنامه‌ای که براساس روش تجزیه مقدار تکین نوشته‌ایم، حل می‌کنیم و در هر مرحله با استفاده از روابط (۸.۲) و (۹.۲) متغیرهای  $p(x_{\circ}, t_i), p(x_1, t_i), \dots, p(x_N, t_i)$  و  $y(x_{\circ}, t_i), y(x_1, t_i), \dots, y(x_N, t_i)$  که در آن  $i = 0, 1, \dots, N$  را بدست می‌آوریم. تابع کنترل بهینه نیز





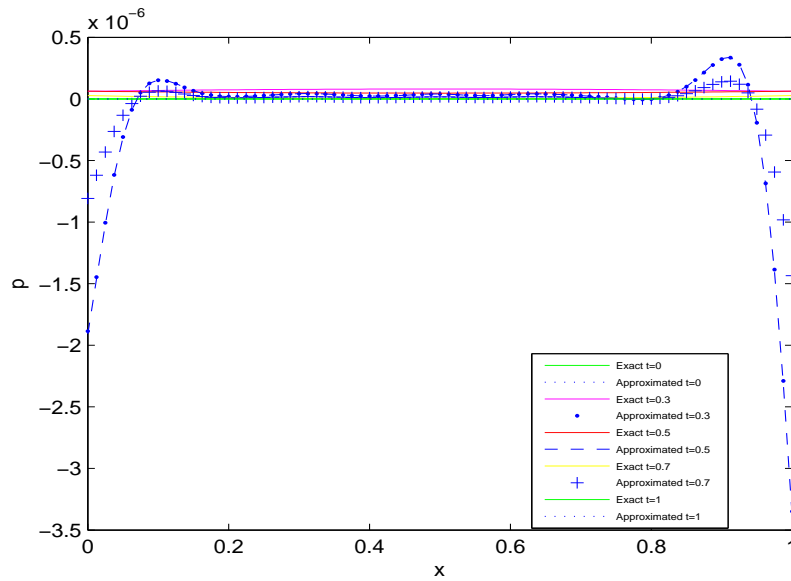
جدول ۲.۲: نتایج خطای میانگین مربع و خطای ماکزیمم در  $x \in [0, 1]$  و  $t$  های مختلف در مثال (۱.۲.۲).

$t$	$t = 0$	$t = 0.3$	$t = 0.5$	$t = 0.7$	$t = 1$
$L_2(y)$	$2.636 \times 10^{-12}$	$6.5138 \times 10^{-4}$	$6.6752 \times 10^{-4}$	$1.1965 \times 10^{-4}$	0
$L_\infty(y)$	$6.276 \times 10^{-14}$	$1.4872 \times 10^{-5}$	$1.5241 \times 10^{-5}$	$2.7318 \times 10^{-6}$	0
$L_2(p)$	$1.1181 \times 10^{-19}$	$2.8157 \times 10^{-11}$	$2.8730 \times 10^{-11}$	$5.1458 \times 10^{-12}$	0
$L_\infty(p)$	$4.7080 \times 10^{-20}$	$1.1634 \times 10^{-11}$	$1.1922 \times 10^{-11}$	$2.1368 \times 10^{-12}$	0

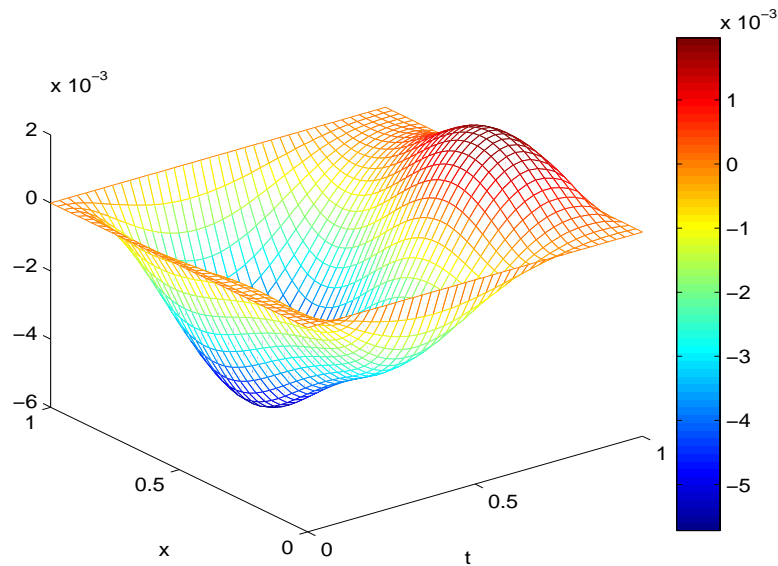


شکل ۱.۲: مقایسه جواب تقریبی و تحلیلی  $y(x, t)$  به‌ازای  $t$  های مختلف در مثال (۱.۲.۲).

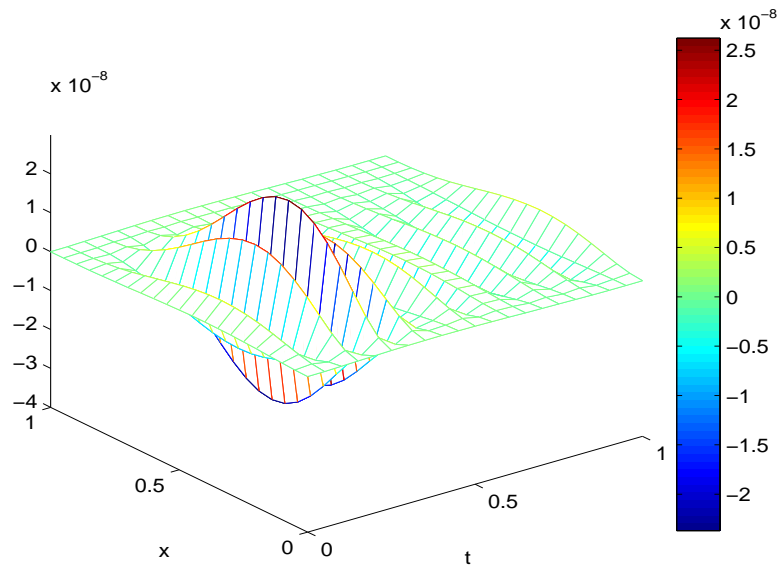
به‌ترتیب در شکل‌های (۱.۲) و (۲.۲) نشان داده می‌شود. همچنین برای حالتی که  $(x, t) \in [0, 1] \times [0, 1]$  باشد، نمودار خطای  $y - \hat{y}$  به‌ازای  $N = 38$  و  $\nu = 10^{-7}$  و نمودار خطای  $p - \hat{p}$  با  $N = 20$  و  $\nu = 10^{-8}$  به‌ترتیب در شکل‌های (۳.۲) و (۴.۲) نشان داده شده است. در نهایت نمودار جواب تقریبی کنترل به‌ازای  $N = 20$  و  $\nu = 10^{-3}$  در شکل (۵.۲) نمایش داده شده است.



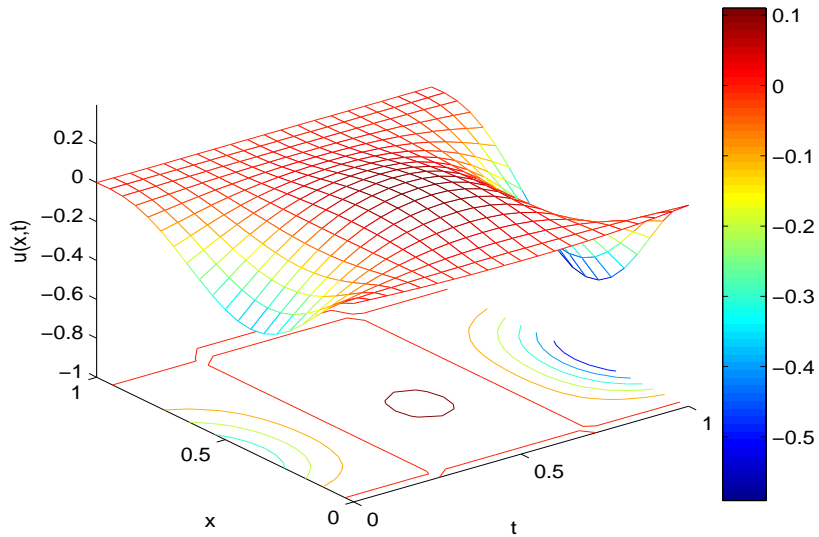
شکل ۲.۲: مقایسه جواب تقریبی و تحلیلی  $p(x, t)$  به‌ازای  $t$  های مختلف در مثال (۱.۲.۲).



شکل ۳.۲: خطای  $y - \hat{y}$  با  $N = ۳۸$  و  $\nu = ۱۰^{-۷}$  در مثال (۱.۲.۲).



شکل ۴.۲: خطای  $p - \hat{p}$  با  $N = 20$  و  $\nu = 10^{-8}$  در مثال (۱.۲.۲).



شکل ۵.۲: جواب تقریبی کنترل  $u(x,t)$  با  $\nu = 10^{-3}$  و  $N = 20$  در مثال (۱.۲.۲).

مثال ۲.۲.۲. مساله کنترل بهینه (۱۷.۱) را با  $T = 1, x \in [0, 1]$  و

$$z = \nu(2\pi^2 t(t-1)^2(t-2)^2 + \pi^2 t^2(2t-2)(t-2)^2 + \pi^2 t^2(2t-4)(t-1)^2 + \pi^4 t^2(t-1)^2(t-2)^2 - 2t^2(t-1)^2 - 2t^2(t-2)^2 - 2(t-1)^2(t-2)^2 - 2t^2(2t-2)(2t-4) - 4t(2t-2)(t-2)^2 - 4t(2t-4)(t-1)^2 - 2\pi^2 t(t-1)^2(t-2)^2 - \pi^2 t^2(2t-2)(t-2)^2 - \pi^2 t^2(2t-4)(t-1)^2) \sin(\pi x) + t^2(1-t)^2(2-t)^2 \sin(\pi x),$$

در نظر بگیرید، که جواب تحلیلی آن برای  $(y, p, u)^T$  به صورت زیر است:

$$y = t^2(1-t)^2(2-t)^2 \sin(\pi x),$$

$$p = \nu(-t^2(2t-2)(t-2)^2 - t^2(2t-4)(t-1)^2 - 2t(t-1)^2(t-2)^2 - \pi^2 t^2(t-1)^2(t-2)^2) \sin(\pi x),$$

$$u = \frac{p}{\nu} = (-t^2(2t-2)(t-2)^2 - t^2(2t-4)(t-1)^2 - 2t(t-1)^2(t-2)^2 - \pi^2 t^2(t-1)^2(t-2)^2) \sin(\pi x).$$

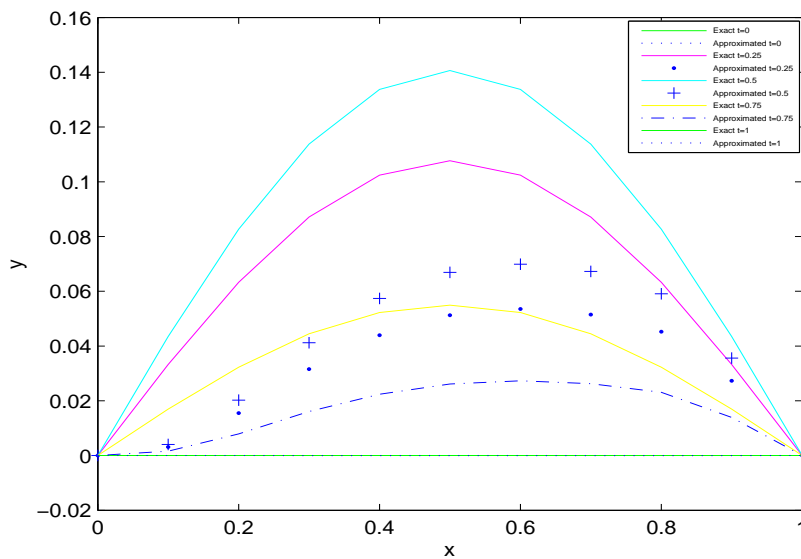
در مقایسه جواب بدست آمده از روش تقریبی B-اسپلاین مرتبه ۳ با جواب تحلیلی مساله، نتایج خطای میانگین مربع و خطای ماکزیمم با  $N = 10$  و  $\nu = 10^{-5}$  در  $x \in [0, 1]$  و زمان‌های  $t = 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1$  در جدول (۳.۲) نشان داده شده است. همچنین نمودار دویبعدی به‌ازای  $t$  های متفاوت از بازه  $[0, 1]$  به‌ازای  $N = 10$  و  $\nu = 10^{-5}$  برای جواب‌های تقریبی و تحلیلی متغیرهای  $y(x, t)$  و  $p(x, t)$  به‌ترتیب در شکل‌های (۶.۲) و (۷.۲) رسم شده است و نیز نمودار سه‌بعدی خطای  $y - \hat{y}$  برای  $N = 33$  و  $\nu = 10^{-8}$ ، خطای  $p - \hat{p}$  برای  $N = 20$  و  $\nu = 10^{-8}$  و نمودار سه‌بعدی جواب تقریبی متغیر کنترل  $u(x, t)$  به‌ازای  $N = 20$  و  $\nu = 10^{-3}$  به‌ترتیب در شکل‌های (۸.۲)-(۱۰.۲) نشان داده شده است.

مثال ۳.۲.۲. در این مثال مساله (۱۷.۱) را با  $T = 1, x \in [0, 1]$  و

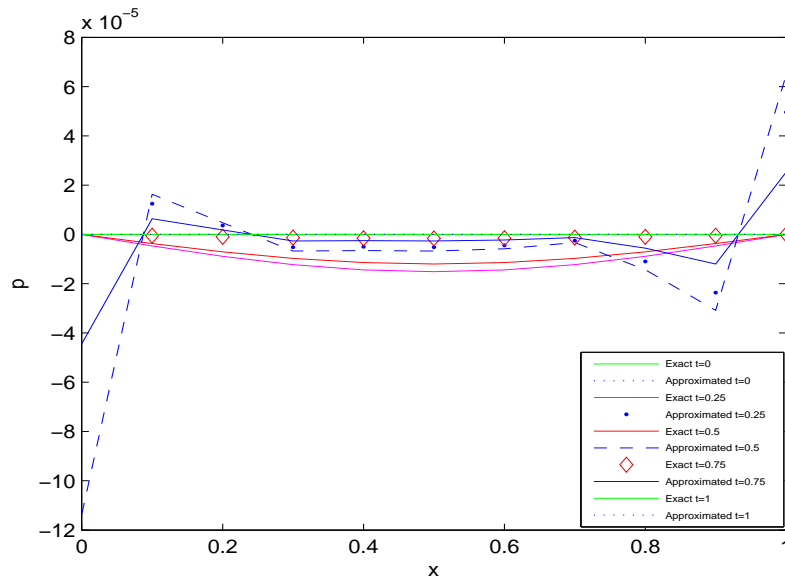
$$z = \nu((16\pi^4 t^3(t-1)^3 - 3t^3(2t-2) - 18t^2(t-1)^2 - 6t(t-1)^3) \cos(2\pi x)) + \nu(3t^3(2t-2) + 18t^2(t-1)^2 + 6t(t-1)^3) + t^3(1-t)^3(1 - \cos(2\pi x)),$$

جدول ۳.۲: نتایج خطای میانگین مربع و خطای ماکزیمم در  $x \in [0, 1]$  و  $t$  های مختلف در مثال (۲.۲.۲).

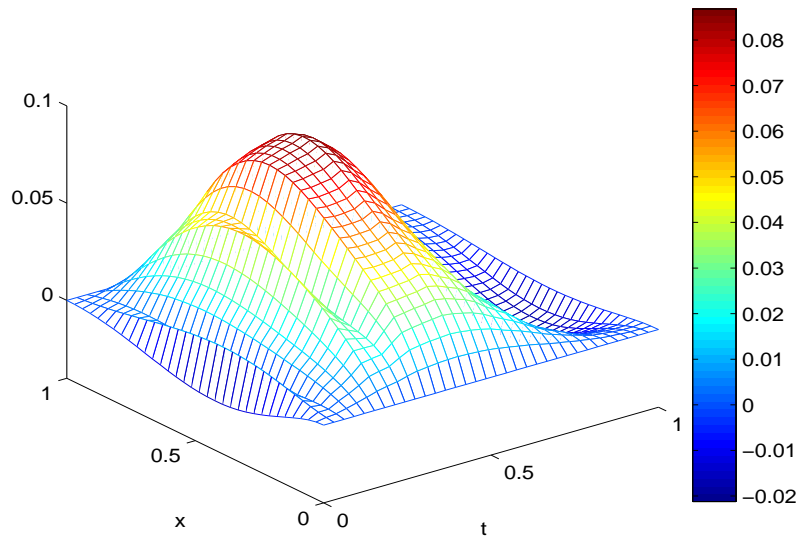
$t$	$t = 0$	$t = 0.25$	$t = 0.5$	$t = 0.75$	$t = 1$
$L_2(y)$	$7.6017 \times 10^{-11}$	$3.02 \times 10^{-2}$	$4.6 \times 10^{-3}$	$4.7511 \times 10^{-12}$	$4.6 \times 10^{-3}$
$L_\infty(y)$	$1.5933 \times 10^{-11}$	$6.4 \times 10^{-3}$	$9.7354 \times 10^{-4}$	$9.9584 \times 10^{-13}$	$9.7354 \times 10^{-4}$
$L_2(p)$	$7.6388 \times 10^{-19}$	$2.3631 \times 10^{-10}$	$3.5786 \times 10^{-11}$	$4.7742 \times 10^{-20}$	$3.8186 \times 10^{-11}$
$L_\infty(p)$	$2.4824 \times 10^{-19}$	$7.6721 \times 10^{-11}$	$1.1706 \times 10^{-11}$	$1.5515 \times 10^{-20}$	$1.2062 \times 10^{-11}$



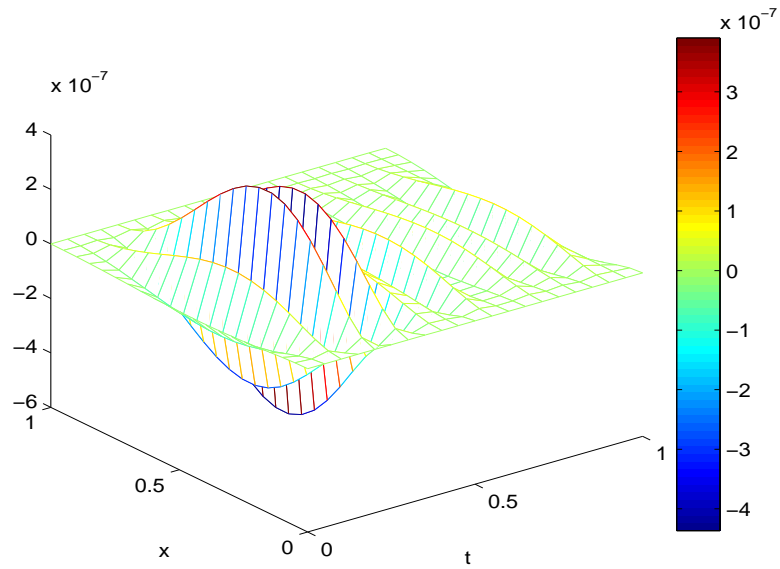
شکل ۶.۲: مقایسه جواب تقریبی و تحلیلی  $y(x, t)$  به‌ازای  $\nu = 10^{-5}$  و  $t$  های مختلف در مثال (۲.۲.۲).



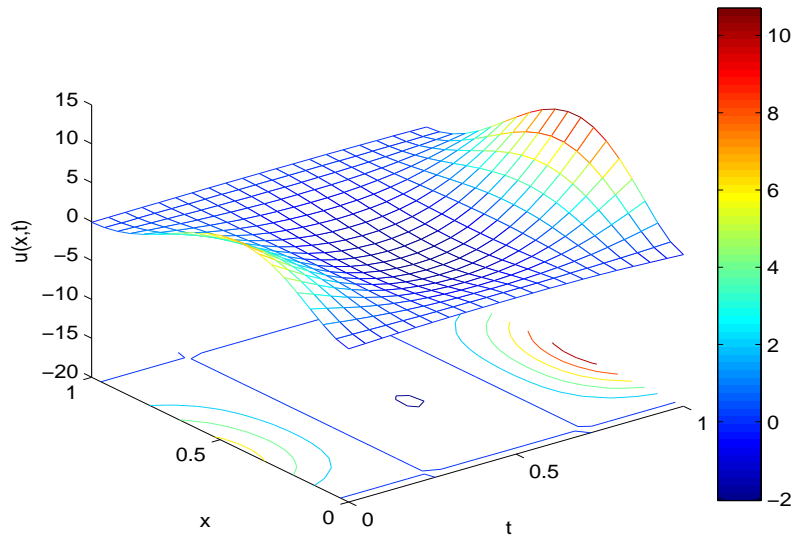
شکل ۷.۲: مقایسه جواب تقریبی و تحلیلی  $p(x, t)$  به ازای  $\nu = 10^{-5}$  و  $t$  های مختلف در مثال (۲.۲.۲).



شکل ۸.۲: خطای  $y - \hat{y}$  با  $N = 33$  و  $\nu = 10^{-8}$  در مثال (۲.۲.۲).



شکل ۹.۲: خطای  $p - \hat{p}$  با  $N = 20$  و  $\nu = 10^{-8}$  در مثال (۲.۲.۲).



شکل ۱۰.۲: جواب تقریبی کنترل  $u(x,t)$  با  $\nu = 10^{-3}$  و  $N = 20$  در مثال (۲.۲.۲).



در نظر بگیرید، که جواب تحلیلی آن برای  $(y, p, u)^T$  به صورت زیر است:

$$y = t^3(1-t)^3(1 - \cos(2\pi x)),$$

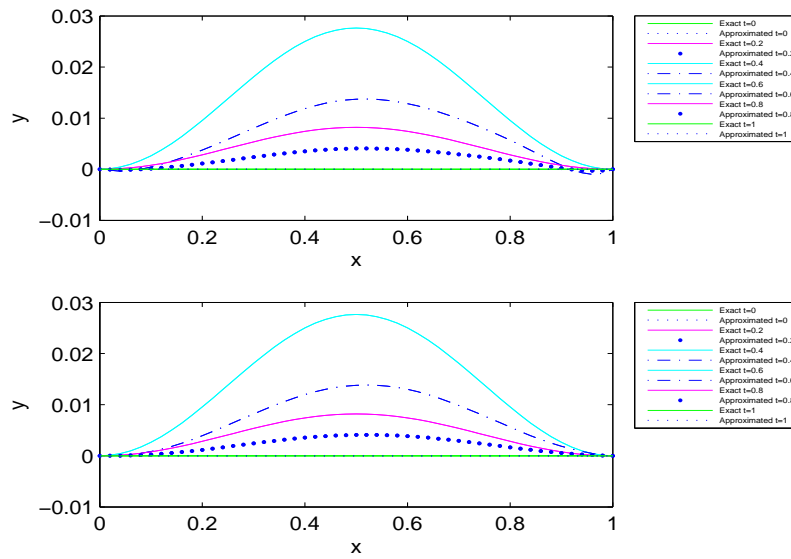
$$p = \nu((-3t^2(t-1)^3 - 3t^3(t-1)^2)(\cos(2\pi x) - 1)) - 4\pi^2 t^3(t-1)^3 \cos(2\pi x),$$

$$u = \frac{p}{\nu} = (-3t^2(t-1)^3 - 3t^3(t-1)^2)(\cos(2\pi x) - 1) - 4\pi^2 t^3(t-1)^3 \cos(2\pi x).$$

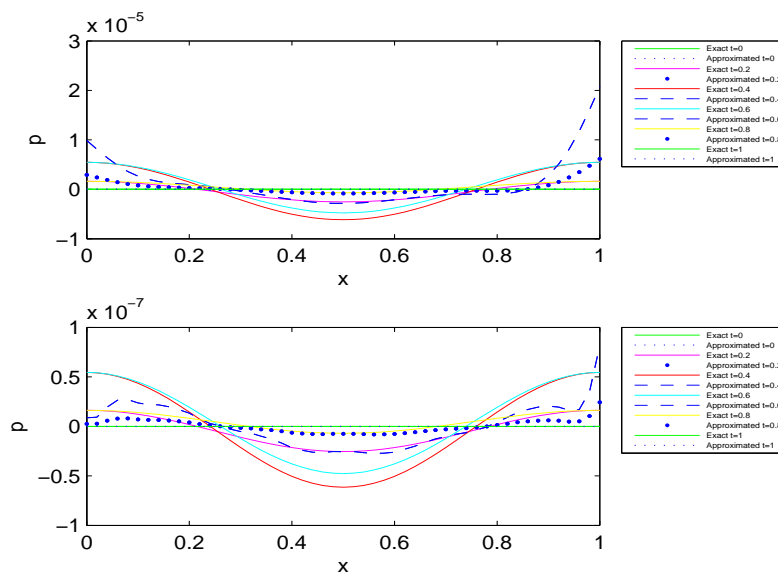
با داشتن جواب تحلیلی مساله، دقت طرح ارائه شده توسط نرم‌های  $L_2$  و  $L_\infty$  به ازای  $N = 50$  و  $\nu = 10^{-3}, 10^{-5}, 10^{-7}$  در زمان‌های ۱، ۰/۸، ۰/۶، ۰/۴، ۰/۲، ۰ در  $t$  بدست آمده و در جدول (۴.۲) نمایش داده شده است. همچنین نمودار دوبعدی  $y(x, t)$  و  $p(x, t)$  به ازای  $t$  های متفاوت از بازه  $[0, 1]$  برای جواب تقریبی و جواب تحلیلی به ازای  $\nu = 10^{-5}, \nu = 10^{-7}$  و  $N = 50$  به ترتیب در شکل‌های (۱۱.۲) و (۱۲.۲) رسم شده است. همچنین نمودار خطای  $y - \hat{y}$  برای  $N = 20$  و  $\nu = 10^{-8}$ ، خطای  $p - \hat{p}$  برای  $N = 20$  و  $\nu = 10^{-8}$  و نمودار جواب تقریبی کنترل به ازای  $N = 20$  و  $\nu = 10^{-2}$  به ترتیب در شکل‌های (۱۳.۲)–(۱۵.۲) نشان داده شده است. در پایان لازم است نتیجه قابل توجهی را از مثال عددی فوق تشریح کنیم. با مشاهده جدول مربوط به نرم‌های  $L_2$  و  $L_\infty$ ، برای متغیرهای  $y(x, t)$  و  $p(x, t)$  واضح است که با کاهش ضریب هزینه کنترل یا همان پارامتر  $\nu$  خطای میانگین مربع و خطای ماکزیمم نیز کوچکتر می‌شود. یعنی این سیستم با در نظر گرفتن پارامتر  $\nu$  کوچک زودتر به جواب دقیق نزدیک خواهد شد. علاوه بر این، ما با رسم نمودار دوبعدی متغیرهای  $y(x, t)$  و  $p(x, t)$  به ازای  $\nu$  های مختلف مانند  $10^{-5}, 10^{-7}$  در زمان‌های ۱، ۰/۸، ۰/۶، ۰/۴، ۰/۲، ۰ سعی در مشاهده اثر پارامتر ضریب هزینه کنترل  $\nu$  در جواب مساله داشته‌ایم، که این امر در نمودارهای (۱۱.۲)–(۱۲.۲) نشان داده شده است.

جدول ۴.۲: نتایج خطای میانگین مربع و خطای ماکزیمم در  $x \in [0, 1]$  و  $t$  های مختلف در مثال (۳.۲.۲)

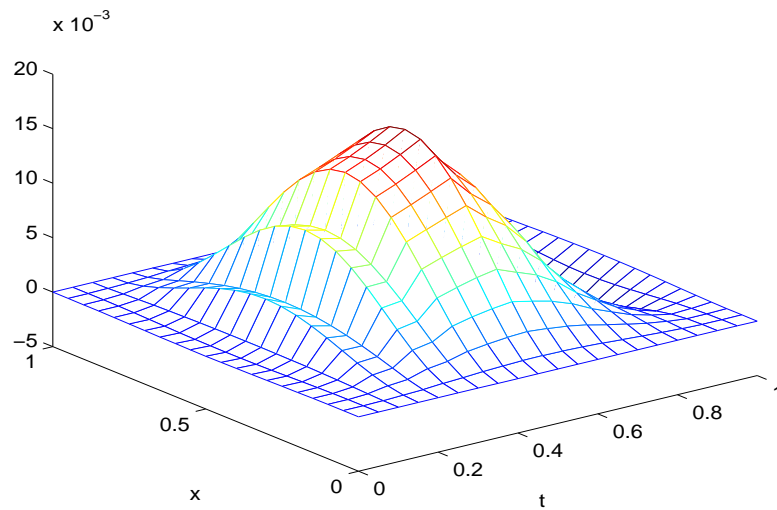
$t$	$t = 0$	$t = 0.2$	$t = 0.4$	$t = 0.6$	$t = 0.8$	$t = 1$
$\nu = 10^{-3}$						
$L_2(y)$	0	$1.3 \times 10^{-3}$	$1.46 \times 10^{-2}$	$1.46 \times 10^{-2}$	$1.3 \times 10^{-3}$	0
$L_\infty(y)$	0	$7.7954 \times 10^{-5}$	$9.0114 \times 10^{-4}$	$9.0114 \times 10^{-4}$	$7.7954 \times 10^{-5}$	0
$L_2(p)$	0	$5.1797 \times 10^{-6}$	$5.8161 \times 10^{-5}$	$5.6408 \times 10^{-5}$	$4.4848 \times 10^{-6}$	0
$L_\infty(p)$	0	$9.3243 \times 10^{-7}$	$1.133 \times 10^{-5}$	$1.1330 \times 10^{-5}$	$9.3243 \times 10^{-7}$	0
$\nu = 10^{-5}$						
$L_2(y)$	0	$3.2554 \times 10^{-4}$	$3.7 \times 10^{-3}$	$3.7 \times 10^{-3}$	$3.2554 \times 10^{-4}$	0
$L_\infty(y)$	0	$1.7176 \times 10^{-5}$	$1.9539 \times 10^{-4}$	$1.9539 \times 10^{-4}$	$1.7176 \times 10^{-5}$	0
$L_2(p)$	0	$8.6174 \times 10^{-11}$	$6.5158 \times 10^{-10}$	$5.6118 \times 10^{-10}$	$5.0433 \times 10^{-11}$	0
$L_\infty(p)$	0	$2.0462 \times 10^{-11}$	$2.3353 \times 10^{-10}$	$2.3353 \times 10^{-10}$	$2.0462 \times 10^{-11}$	0
$\nu = 10^{-7}$						
$L_2(y)$	0	$3.1763 \times 10^{-4}$	$3.6 \times 10^{-3}$	$3.6 \times 10^{-3}$	$3.1763 \times 10^{-4}$	0
$L_\infty(y)$	0	$1.7005 \times 10^{-5}$	$1.9369 \times 10^{-4}$	$1.9369 \times 10^{-4}$	$1.7005 \times 10^{-5}$	0
$L_2(p)$	0	$5.5067 \times 10^{-15}$	$2.8922 \times 10^{-14}$	$1.9461 \times 10^{-14}$	$1.7688 \times 10^{-15}$	0
$L_\infty(p)$	0	$3.1765 \times 10^{-16}$	$2.1158 \times 10^{-15}$	$2.1158 \times 10^{-15}$	$1.8575 \times 10^{-16}$	0



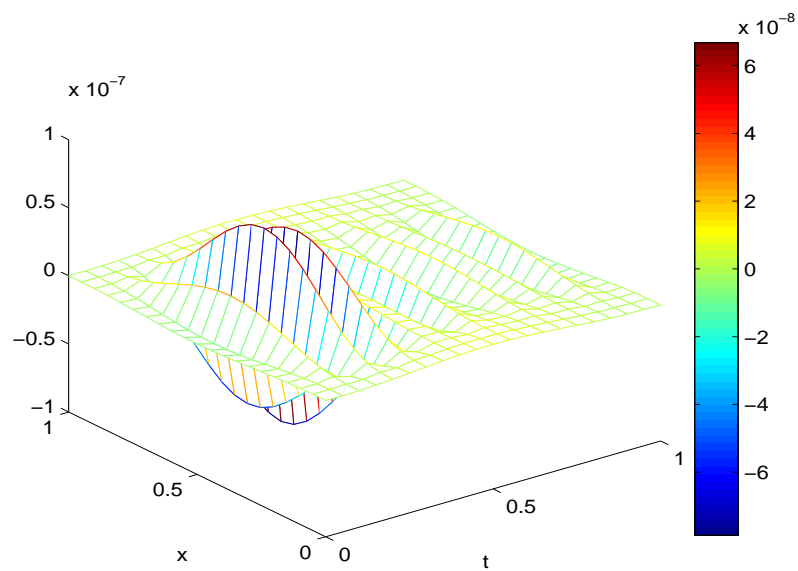
شکل ۱۱.۲: مقایسه جواب تقریبی و تحلیلی  $y(x, t)$  با  $\nu = 10^{-5}$  در شکل بالا و  $\nu = 10^{-7}$  در شکل پایین به ازای  $t$  های مختلف در مثال (۳.۲.۲).



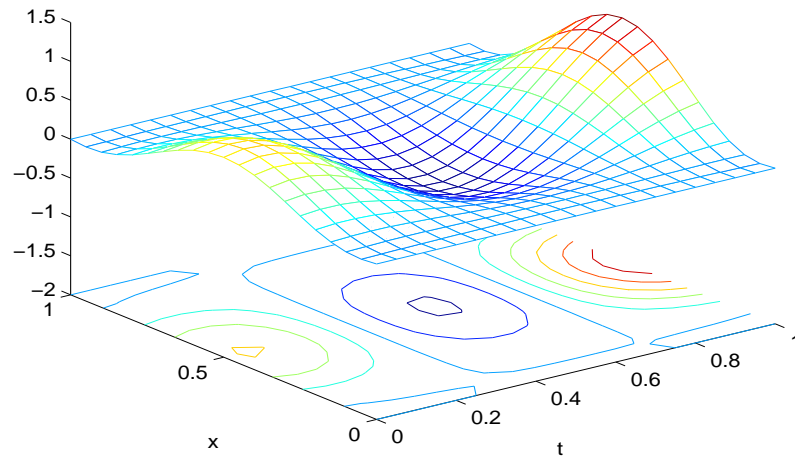
شکل ۱۲.۲: مقایسه جواب تقریبی و تحلیلی  $p(x, t)$  با  $\nu = 10^{-5}$  در شکل بالا و  $\nu = 10^{-7}$  در شکل پایین به ازای  $t$  های مختلف در مثال (۳.۲.۲).



شکل ۱۳.۲: خطای  $y - \hat{y}$  با  $N = 20$  و  $\nu = 10^{-8}$  در مثال (۳.۲.۲).



شکل ۱۴.۲: خطای  $p - \hat{p}$  با  $N = 20$  و  $\nu = 10^{-8}$  در مثال (۳.۲.۲).



شکل ۱۵.۲: جواب تقریبی کنترل  $u(x, t)$  با  $N = 20$  و  $\nu = 10^{-2}$  در مثال (۳.۲.۲).

## فصل ۳

حل مساله کنترل بهینه سیستم‌های پارامتر  
توزیعی سهموی با استفاده از B - اسپلاین مرتبه

۴

### ۱.۳ مقدمه

از میان چند جمله‌های قطعه‌ای، B-اسپلاین‌ها ابزاری اساسی برای روش‌های عددی در حل مساله کنترل بهینه سیستم‌های پارامتر توزیعی هستند. در این فصل، روش عددی B-اسپلاین مرتبه ۴ و روش کالوکیشن را برای حل مساله کنترل بهینه با معادلات دیفرانسیل سهموی خطی که در فصل اول ارائه شد، مورد استفاده قرار می‌دهیم. موفقیت روش کالوکیشن B-اسپلاین وابسته به انتخاب پایه B-اسپلاین است. B-اسپلاین مرتبه ۴ به منظور ایجاد راه حل تقریبی برای برخی از معادلات دیفرانسیل خطی و غیرخطی استفاده شده است [۲۵]-[۳۰]. در پایان فصل نتایج عددی ارائه شده، نشان دهنده این است که این روش نیز یک تکنیک کاربردی و تقریبی بسیار خوب از جواب مساله کنترل بهینه است.

### ۲.۳ B-اسپلاین مرتبه ۴ و روش کالوکیشن

فرض کنید  $\Omega$  یک افراز یکنواخت از بازه  $[a, b]$  به صورت  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$  باشد که در آن  $h = x_{j+1} - x_j$  و  $j = 0, 1, \dots, N-1$ . مجموعه B-اسپلاین‌های مرتبه چهار  $\{Q_{-2}, Q_{-1}, \dots, Q_{N+1}\}$  یک پایه روی  $[a, b]$  تشکیل می‌دهند [۲۲]. همچنین توابع B-اسپلاین مرتبه چهار روی یک مجموعه صعودی از  $N+1$  گره در دامنه مساله، بعلاوه ۸ گره اضافی در خارج دامنه مساله، در نظر گرفته می‌شود که این ۸ گره اضافی به صورت زیر می‌باشند:

$$x_{-4} < x_{-3} < x_{-2} < x_{-1} < x_0, x_N < x_{N+1} < x_{N+2} < x_{N+3} < x_{N+4}.$$

فرض کنید  $Q_m(x)$  که در آن  $m = -2, -1, \dots, N+1$ ، که به صورت زیر تعریف شود:

$$Q_m(x) = \frac{1}{h^4} \begin{cases} (x - x_{m-2})^4, & x \in [x_{m-2}, x_{m-1}], \\ (x - x_{m-2})^4 - 5(x - x_{m-1})^4, & x \in [x_{m-1}, x_m], \\ (x - x_{m-2})^4 - 5(x - x_{m-1})^4 + 10(x - x_m)^4, & x \in [x_m, x_{m+1}], \\ (x_{m+2} - x)^4 - 5(x_{m+2} - x)^4, & x \in [x_{m+1}, x_{m+2}], \\ (x_{m+2} - x)^4, & x \in [x_{m+2}, x_{m+3}], \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (1.3)$$

جدول ۱.۳: مقادیر  $Q_m, Q'_m, Q''_m, Q'''_m$ .

$x$	$x_{m-2}$	$x_{m-1}$	$x_m$	$x_{m+1}$	$x_{m+2}$	$x_{m+3}$
$Q_m$	۰	۱	۱۱	۱۱	۱	۰
$Q'_m$	۰	$\frac{4}{h}$	$\frac{12}{h}$	$-\frac{12}{h}$	$-\frac{4}{h}$	۰
$Q''_m$	۰	$\frac{12}{h^2}$	$-\frac{12}{h^2}$	$-\frac{12}{h^2}$	$\frac{12}{h^2}$	۰
$Q'''_m$	۰	$\frac{24}{h^3}$	$-\frac{72}{h^3}$	$\frac{72}{h^3}$	$-\frac{24}{h^3}$	۰

B - اسپلاین مرتبه ۴ باشد، که بیرون بازه  $[x_{m-2}, x_{m+3}]$  صفر است. اکنون جواب‌های تقریبی از سیستم (۱.۲)-(۶.۲) را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$y(x, t) = \sum_{m=-2}^{N+1} c_m(t) Q_m(x), \quad (2.3)$$

$$p(x, t) = \sum_{m=-2}^{N+1} d_m(t) Q_m(x), \quad (3.3)$$

که در آن  $c_m(t)$  و  $d_m(t)$  مقادیر مجهول وابسته به زمان هستند که از شرایط اولیه، مرزی و نهایی تعیین می‌شوند. مقادیر  $Q_m(x)$  و سه مشتقات اولی آن یعنی  $Q'_m(x), Q''_m(x), Q'''_m(x)$  در گره‌ها در جدول (۱.۳) بدست آورده شده است.

حال جواب تقریبی در نظر گرفته شده  $y(x, t)$  و  $p(x, t)$  از روابط (۲.۳) و (۳.۳) را در معادله‌های (۱.۲) - (۶.۲)



به صورت زیر قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned}
 & -c'_{-\nu}(t)Q_{-\nu}(x_i) - c'_{-1}(t)Q_{-1}(x_i) - \dots - c'_{N+1}(t)Q_{N+1}(x_i) + c_{-\nu}(t)Q''_{-\nu}(x_i) + c_{-1}(t)Q''_{-1}(x_i) + \\
 & \dots + c_{N+1}(t)Q''_{N+1}(x_i) - \frac{1}{\nu}(d_{-\nu}(t)Q_{-\nu}(x_i) + d_{-1}(t)Q_{-1}(x_i) + \dots + d_{N+1}(t)Q_{N+1}(x_i)) = 0, \\
 & i = 1, \dots, N - 1, t \in (0, T), \tag{4.3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & d'_{-\nu}(t)Q_{-\nu}(x_i) + d'_{-1}(t)Q_{-1}(x_i) + \dots + d'_{N+1}(t)Q_{N+1}(x_i) + d_{-\nu}(t)Q''_{-\nu}(x_i) + d_{-1}(t)Q''_{-1}(x_i) \\
 & + \dots + d_{N+1}(t)Q''_{N+1}(x_i) + c_{-\nu}(t)Q_{-\nu}(x_i) + c_{-1}(t)Q_{-1}(x_i) + \dots + c_{N+1}(t)Q_{N+1}(x_i) = z(t, x_i), \\
 & i = 1, \dots, N - 1, t \in (0, T), \tag{5.3}
 \end{aligned}$$

با شرایط اولیه

$$\begin{aligned}
 & c_{-\nu}(0)Q_{-\nu}(x_i) + c_{-1}(0)Q_{-1}(x_i) + \dots + c_N(0)Q_N(x_i) + c_{N+1}(0)Q_{N+1}(x_i) = y_0(x_i), \\
 & i = 1, \dots, N - 1, t = 0, \tag{6.3}
 \end{aligned}$$

شرایط مرزی

$$\begin{aligned}
 & c_{-\nu}(t)Q_{-\nu}(x_i) + c_{-1}(t)Q_{-1}(x_i) + \dots + c_N(t)Q_N(x_i) + c_{N+1}(t)Q_{N+1}(x_i) = 0, \\
 & i = 0, N, t \in (0, T), \tag{7.3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & d_{-\nu}(t)Q_{-\nu}(x_i) + d_{-1}(t)Q_{-1}(x_i) + \dots + d_N(t)Q_N(x_i) + d_{N+1}(t)Q_{N+1}(x_i) = 0, \\
 & i = 0, N, t \in (0, T), \tag{8.3}
 \end{aligned}$$

و شرایط نهایی

$$\begin{aligned}
 & d_{-\nu}(T)Q_{-\nu}(x_i) + d_{-1}(T)Q_{-1}(x_i) + \dots + d_N(T)Q_N(x_i) + d_{N+1}(T)Q_{N+1}(x_i) = 0, \\
 & i = 1, \dots, N - 1, t = T. \tag{9.3}
 \end{aligned}$$

جواب B-اسپلاین از معادله (۴.۳)-(۹.۳) در گره‌های  $\{x_i\}_{i=0}^N$  توسط حل دستگاه زیر بدست می‌آید:

$$AX = B, \quad (10.3)$$

که در آن بعد ماتریس  $A$  برابر با  $(6N+24) \times (4N)$  و ماتریس  $B$  یک ماتریس ستونی با  $4N$  سطر است. سیستم (۱۰.۳) را  $(N+1)$  بار توسط برنامه‌ای که بر اساس روش تجزیه مقدار تکین نوشته‌ایم، حل می‌کنیم و در هر مرحله  $p(x_0, t_i), p(x_1, t_i), \dots, p(x_N, t_i)$  و  $y(x_0, t_i), y(x_1, t_i), \dots, y(x_N, t_i)$  که در آن  $i = 0, 1, \dots, N$  را بدست می‌آوریم. تابع کنترل بهینه نیز به صورت زیر بدست می‌آید:

$$u(x, t) = \frac{p(x, t)}{\nu}. \quad (11.3)$$

### ۱.۲.۳ نتایج عددی

در این بخش روش توضیح داده شده را روی چند مساله بررسی می‌کنیم.

مثال ۱.۲.۳. مساله کنترل بهینه سیستم (۱۷.۱) را با  $x \in [0, 1]$  و  $T = 1$

$$z = \nu(2(t-1)^3 x(x-1) - 6t^2(t-1)^2 - 4t(t-1)^3 + 12t(t-1)^2 x(x-1) + 3t^2(2t-2)x(x-1) + 4t(t-1)^3 + 6t^2(t-1)^2) + t^2(1-t)^3 x(x-1),$$

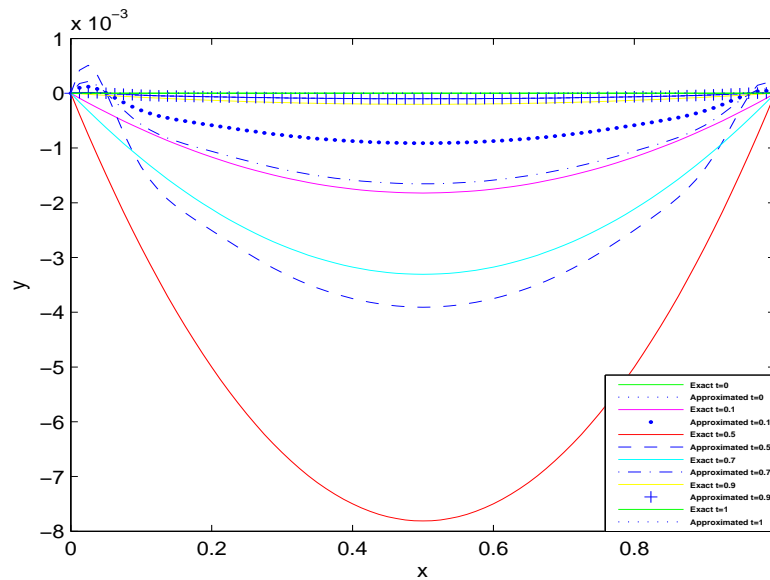
در نظر بگیرید که جواب تحلیلی آن برای  $(y, p, u)^T$  به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} y &= t^2(1-t)^3 x(x-1), \\ p &= \nu(2t(t-1)^3 x(x-1) - 2t^2(t-1)^3 + 3t^2(t-1)^2 x(x-1)), \\ u &= \frac{p}{\nu} = 2t(t-1)^3 x(x-1) - 2t^2(t-1)^3 + 3t^2(t-1)^2 x(x-1). \end{aligned}$$

حال به ازای  $N = 80$  و  $\nu = 10^{-6}$  خطای میانگین مربع و خطای ماکزیمم برای متغیرهای  $y(x, t)$  و  $p(x, t)$  در زمان‌های  $1, 0.7, 0.5, 0.3, 0$  حساب شده و نتایج در جدول (۲.۳) نشان داده شده است. اینک برای  $N = 80$ ، به ازای  $t$  های متفاوت از مساله و  $\nu = 10^{-6}$ ، نمودار دوبعدی جواب تحلیلی و جواب تقریبی متغیرهای  $y(x, t)$  و  $p(x, t)$  در شکل‌های (۱.۳) و (۲.۳) نمایش داده شده است. همچنین برای حالتی

جدول ۲.۳: نتایج خطای میانگین مربع و خطای ماکزیمم در  $x \in [0, 1]$  و  $t$  های مختلف در مثال (۱.۲.۳).

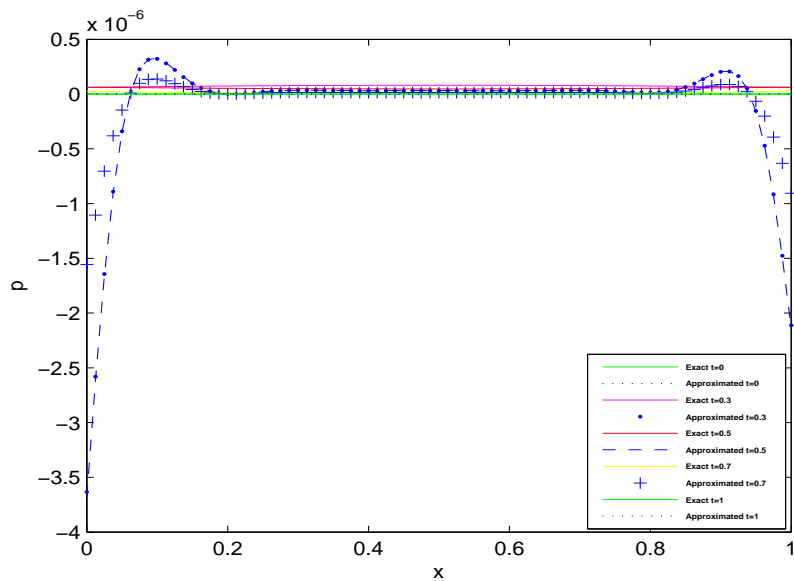
$t$	$t = 0$	$t = 0.3$	$t = 0.5$	$t = 0.7$	$t = 1$
$L_2(y)$	$2.6556 \times 10^{-12}$	$6.4592 \times 10^{-4}$	$6.6193 \times 10^{-4}$	$1.1865 \times 10^{-4}$	0
$L_\infty(y)$	$6.2541 \times 10^{-14}$	$1.4880 \times 10^{-5}$	$1.5248 \times 10^{-5}$	$2.7332 \times 10^{-6}$	0
$L_2(p)$	$1.3367 \times 10^{-19}$	$3.3464 \times 10^{-11}$	$3.4170 \times 10^{-11}$	$6.1213 \times 10^{-12}$	0
$L_\infty(p)$	$5.5452 \times 10^{-20}$	$1.3664 \times 10^{-11}$	$1.4002 \times 10^{-11}$	$2.5095 \times 10^{-12}$	0



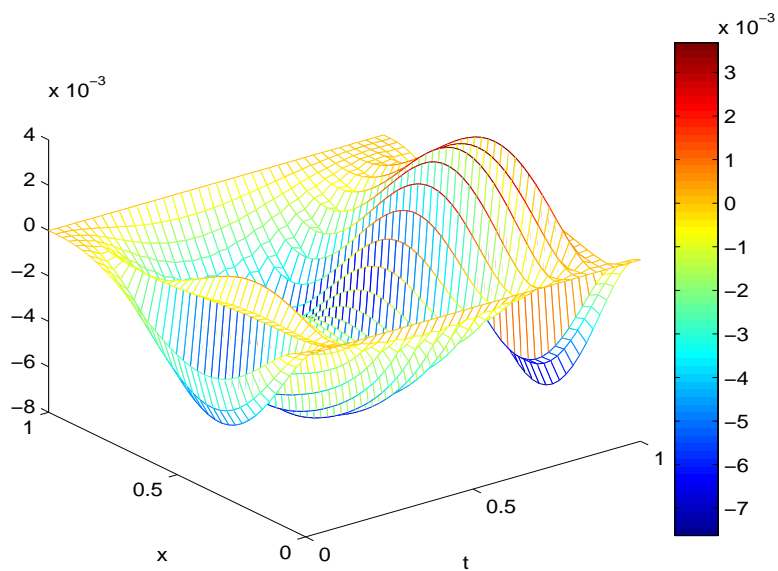
شکل ۱.۳: مقایسه جواب تحلیلی و تقریبی  $y(x, t)$  به ازای  $t$  های مختلف در مثال (۱.۲.۳).

که  $(x, t) \in [0, 1] \times [0, 1]$  باشد، نمودار خطای  $y - \hat{y}$  به‌ازای  $N = 38$  و  $\nu = 10^{-7}$ ، خطای  $p - \hat{p}$  برای  $N = 20$  و  $\nu = 10^{-8}$  در شکل‌های (۳.۳) و (۴.۳) نشان داده شده است. در ادامه جواب تقریبی کنترل  $u(x, t)$  به‌ازای  $N = 20$  و  $\nu = 10^{-3}$  در شکل (۵.۳) نشان داده شده است.

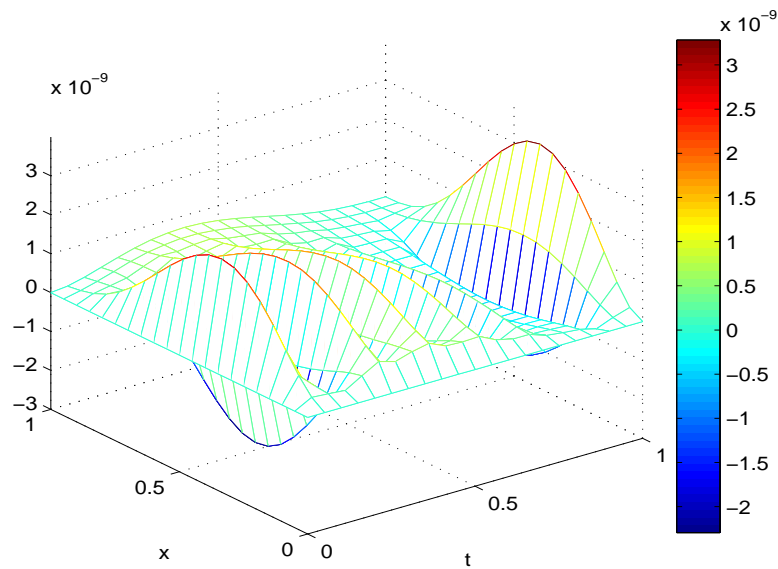
مثال ۲.۲.۳. مساله کنترل بهینه (۱۷.۱) را با  $x \in [0, 1]$  و  $T = 1$



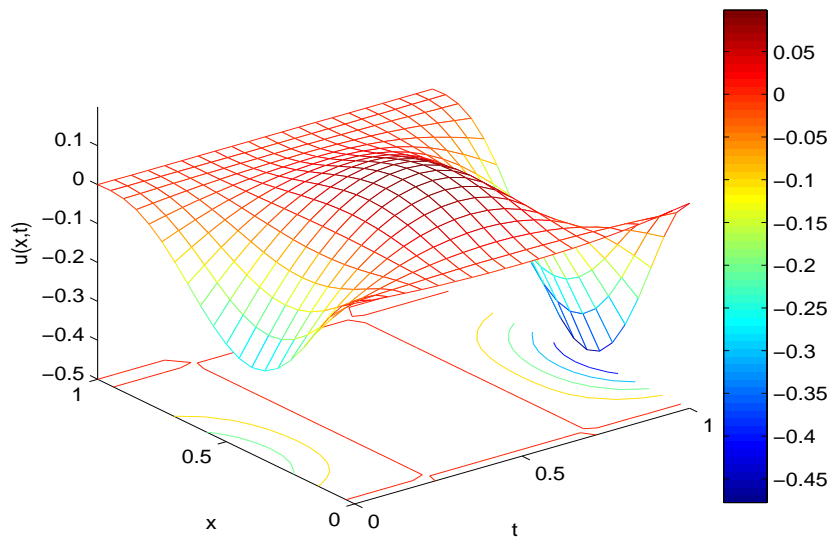
شکل ۲.۳: مقایسه جواب تحلیلی و تقریبی  $p(x, t)$  به ازای  $t$  های مختلف در مثال (۱.۲.۳).



شکل ۳.۳: خطای  $y - \hat{y}$  با  $N = ۳۸$  و  $\nu = ۱۰^{-۷}$  در مثال (۱.۲.۳).



شکل ۴.۳: خطای  $p - \hat{p}$  با  $N = 20$  و  $\nu = 10^{-8}$  در مثال (۱.۲.۳).



شکل ۵.۳: جواب تقریبی کنترل  $u(x,t)$  با  $N = 20$  و  $\nu = 10^{-3}$  در مثال (۱.۲.۳).

جدول ۳.۳: نتایج خطای میانگین مربع و خطای ماکزیمم در  $x \in [0, 1]$  و  $t$  های مختلف در مثال (۲.۲.۳).

$t$	$t = 0$	$t = 0.25$	$t = 0.5$	$t = 0.75$	$t = 1$
$L_2(y)$	$7.8377 \times 10^{-9}$	$1.5 \times 10^{-2}$	$2.57 \times 10^{-2}$	$3.9 \times 10^{-3}$	$4.8986 \times 10^{-10}$
$L_\infty(y)$	$1.5912 \times 10^{-9}$	$2.9 \times 10^{-3}$	$5 \times 10^{-3}$	$7.5722 \times 10^{-4}$	$9.9452 \times 10^{-11}$
$L_2(p)$	$4.3935 \times 10^{-14}$	$8.0077 \times 10^{-8}$	$1.3592 \times 10^{-7}$	$2.0718 \times 10^{-8}$	$2.7459 \times 10^{-15}$
$L_\infty(p)$	$4.3143 \times 10^{-14}$	$7.8323 \times 10^{-8}$	$1.3361 \times 10^{-7}$	$2.0376 \times 10^{-8}$	$2.6964 \times 10^{-15}$

$$z = \nu(2\pi^2 t(t-1)^2(t-2)^2 + \pi^2 t^2(2t-2)(t-2)^2 + \pi^2 t^2(2t-4)(t-1)^2 + \pi^2 t^2(t-1)^2(t-2)^2 - 2t^2(t-1)^2 - 2t^2(t-2)^2 - 2(t-1)^2(t-2)^2 - 2t^2(2t-2)(2t-4) - 4t(2t-2)(t-2)^2 - 4t(2t-4)(t-1)^2 - 2\pi^2 t(t-1)^2(t-2)^2 - \pi^2 t^2(2t-2)(t-2)^2 - \pi^2 t^2(2t-4)(t-1)^2) \sin(\pi x) + t^2(1-t)^2(2-t)^2 \sin(\pi x),$$

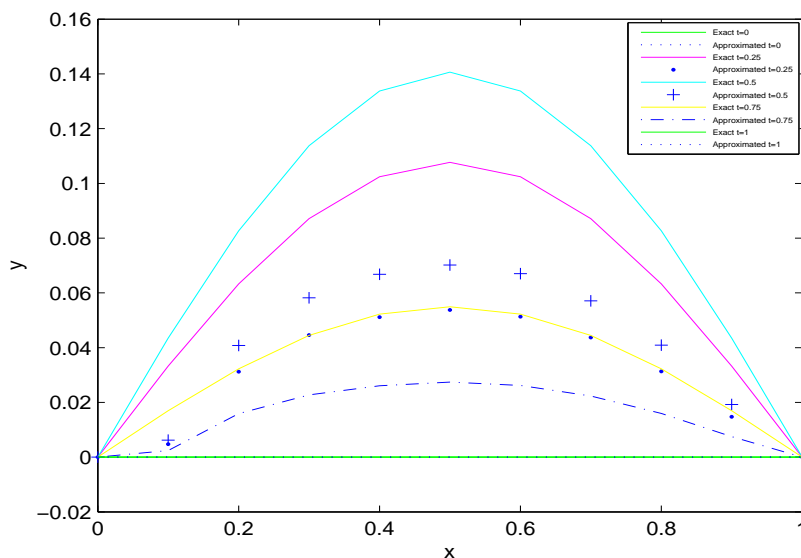
در نظر بگیرید که جواب تحلیلی آن برای  $(y, p, u)^T$  به صورت زیر است:

$$y = t^2(1-t)^2(2-t)^2 \sin(\pi x),$$

$$p = \nu(-t^2(2t-2)(t-2)^2 - t^2(2t-4)(t-1)^2 - 2t(t-1)^2(t-2)^2 - \pi^2 t^2(t-1)^2(t-2)^2) \sin(\pi x),$$

$$u = \frac{p}{\nu} = (-t^2(2t-2)(t-2)^2 - t^2(2t-4)(t-1)^2 - 2t(t-1)^2(t-2)^2 - \pi^2 t^2(t-1)^2(t-2)^2) \sin(\pi x).$$

در مقایسه جواب بدست آمده از روش تقریبی B-اسپلاین مرتبه ۴ با جواب تحلیلی مساله، نتایج خطای میانگین مربع و خطای ماکزیمم به ازای  $N = 10$  و  $\nu = 10^{-5}$  در زمان های  $t = 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1$  در جدول (۳.۳) نشان داده شده است. همچنین نمودار دوعبدي متغیرهای  $y(x, t)$  و  $p(x, t)$  به ازای  $t$  های متفاوت از مساله و  $N = 10$  و  $\nu = 10^{-5}$  برای جواب تقریبی و تحلیلی به ترتیب در شکل های (۶.۳) و (۷.۳) نمایش داده شده است. نمودار سببعدي خطای  $y - \hat{y}$  برای  $N = 20$  و  $\nu = 10^{-6}$ ، نمودار سببعدي خطای  $p - \hat{p}$  به ازای  $N = 20$  و  $\nu = 10^{-8}$  به ترتیب در شکل های (۸.۳) و (۹.۳) نشان داده شده است. در نهایت نمودار سببعدي



شکل ۶.۳: مقایسه جواب تقریبی و تحلیلی  $y(x, t)$  به ازای  $t$  های مختلف در مثال (۲.۲.۳).

جواب تقریبی کنترل  $u(x, t)$  برای  $N = 20$  و  $\nu = 10^{-2}$  در نمودار (۱۰.۳) نمایش داده شده است.

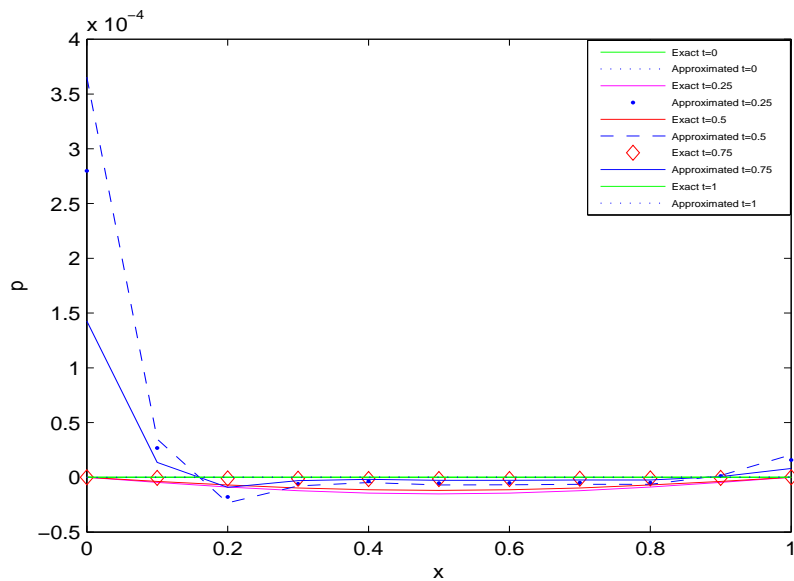
مثال ۳.۲.۳. در این مثال، مساله کنترل بهینه (۱۷.۱) را با  $T = 1, x \in [0, 1]$

$$z = \nu((16\pi^4 t^3(t-1)^3 - 3t^3(2t-2) - 18t^2(t-1)^2 - 6t(t-1)^3) \cos(2\pi x)) + \nu(3t^3(2t-2) + 18t^2(t-1)^2 + 6t(t-1)^3) + t^3(1-t)^3(1 - \cos(2\pi x)),$$

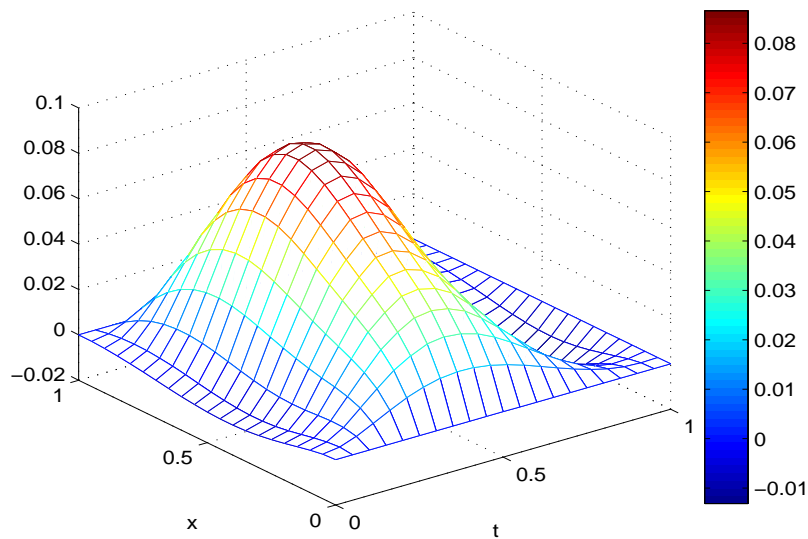
در نظر بگیرید که جواب تحلیلی آن برای  $(y, p, u)^T$  به صورت زیر است:

$$y = t^3(1-t)^3(1 - \cos(2\pi x)),$$

$$p = \nu((-3t^3(t-1)^3 - 3t^3(t-1)^2)(\cos(2\pi x) - 1)) - 4\pi^2 t^3(t-1)^3 \cos(2\pi x),$$

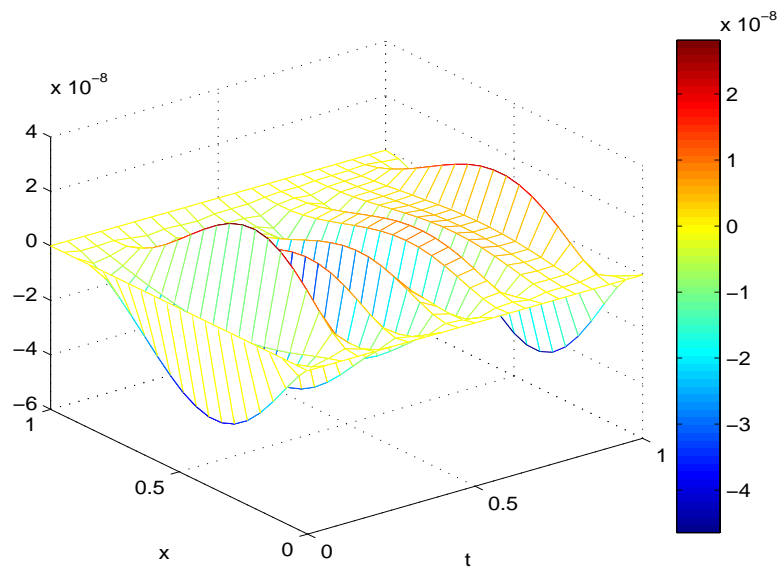


شکل ۷.۳: مقایسه جواب تقریبی و تحلیلی  $p(x, t)$  به ازای  $t$  های مختلف در مثال (۲.۲.۳).

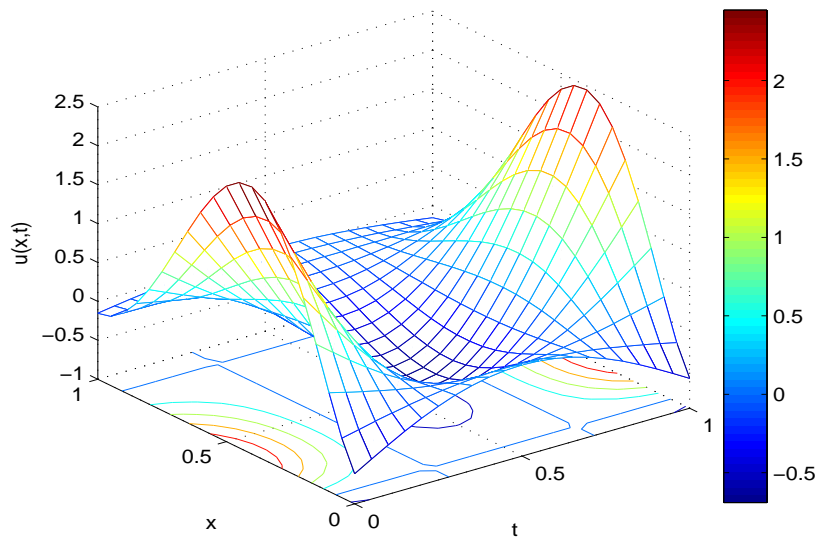


شکل ۸.۳: خطای  $y - \hat{y}$  به ازای  $N = 20$  و  $\nu = 10^{-6}$  در مثال (۲.۲.۳).

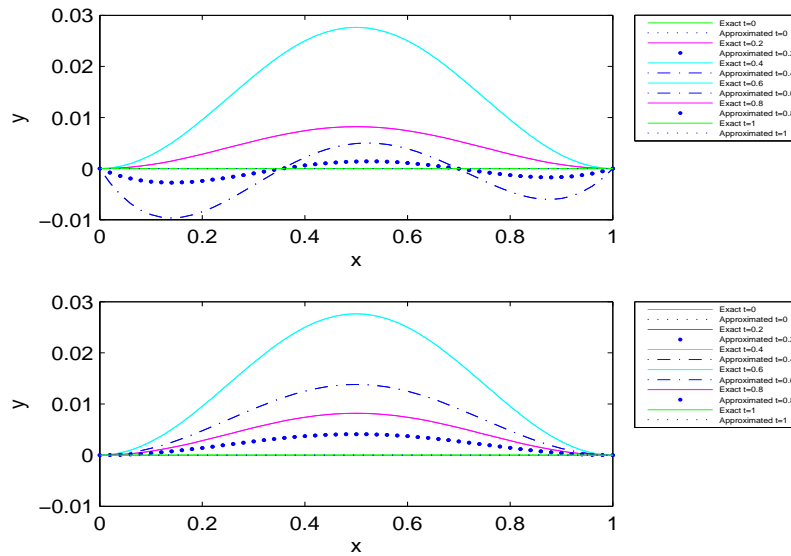




شکل ۹.۳: خطای  $p - \hat{p}$  به ازای  $N = 20$  و  $\nu = 10^{-8}$  در مثال (۲.۲.۳).



شکل ۱۰.۳: جواب تقریبی کنترل با  $u(x, t)$  و  $N = 20$  و  $\nu = 10^{-2}$  در مثال (۲.۲.۳).



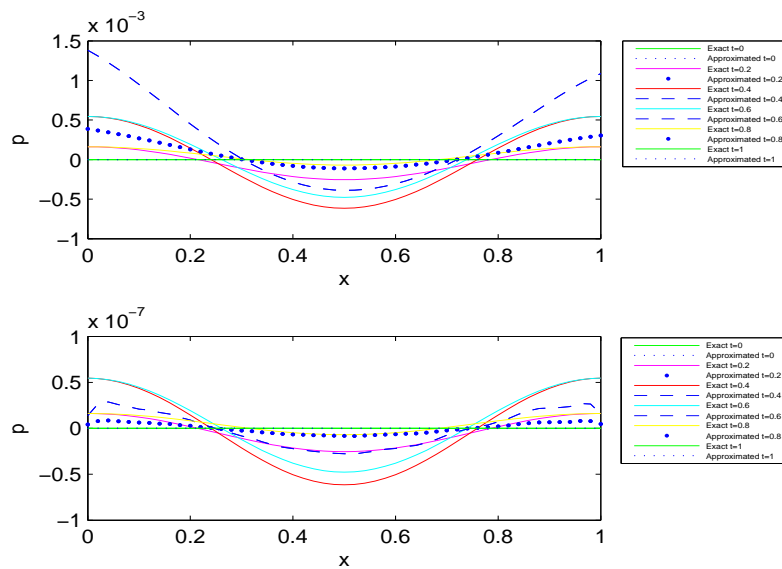
شکل ۱۱.۳: مقایسه جواب تقریبی و تحلیلی  $y(x, t)$  با  $\nu = 10^{-3}$  در شکل بالا و  $\nu = 10^{-7}$  در شکل پایین به ازای  $t$  های مختلف در مثال (۳.۲.۳).

$$u = \frac{p}{\nu} = (-3t^2(t-1)^3 - 3t^3(t-1)^2)(\cos(2\pi x) - 1) - 4\pi^2 t^3(t-1)^3 \cos(2\pi x).$$

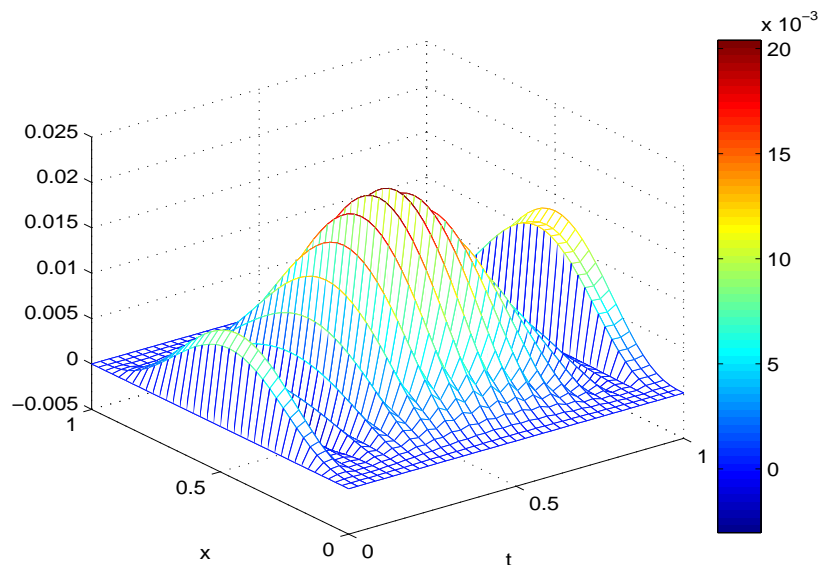
با داشتن جواب تحلیلی مساله، دقت طرح ارائه شده توسط نرم‌های  $L_2$  و  $L_\infty$  در زمان های  $t = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$  و  $N = 50$ ،  $\nu = 10^{-3}, 10^{-5}, 10^{-7}$  محاسبه شده و در جدول (۴.۳) نمایش داده شده است. به ازای  $t$  های مختلف از بازه  $[0, 1]$  نمودار دوبعدی جواب تقریبی و تحلیلی مساله به ازای  $N = 50$  و  $\nu = 10^{-3}, 10^{-7}$  در شکل‌های (۱۱.۳) و (۱۲.۳) رسم و با هم مقایسه شده‌اند. همچنین نمودار سه‌بعدی خطای  $y - \hat{y}$  به ازای  $N = 38$  و  $\nu = 10^{-7}$ ، نمودار سه‌بعدی خطای  $p - \hat{p}$  به ازای  $N = 20$  و  $\nu = 10^{-8}$  و همچنین نمودار سه‌بعدی جواب تقریبی کنترل  $u(x, t)$  با  $N = 20$  و  $\nu = 10^{-3}$  به ترتیب در شکل‌های (۱۳.۳)-(۱۵.۳) نمایش داده شده است.

جدول ۴.۳: نتایج خطای میانگین مربع و خطای ماکزیمم در  $x \in [0, 1]$  و  $t$  های مختلف در مثال (۳.۲.۳)

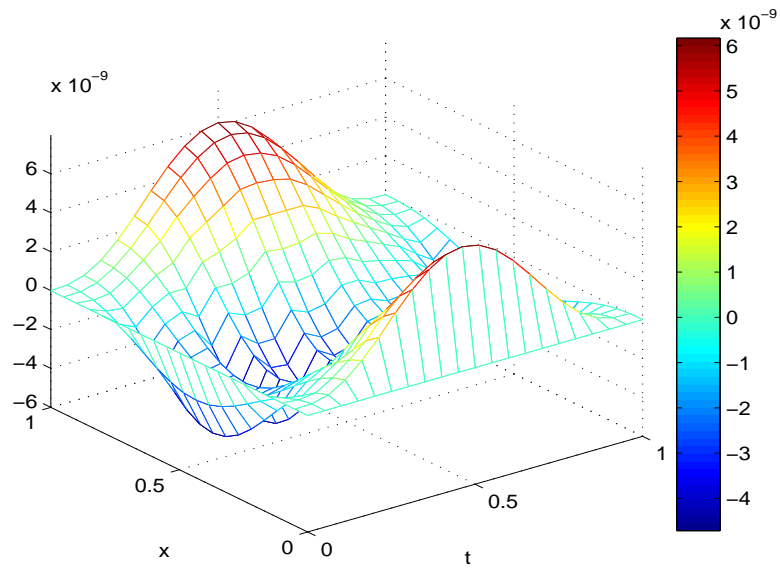
$t$	$t = 0$	$t = 0.2$	$t = 0.4$	$t = 0.6$	$t = 0.8$	$t = 1$
$\nu = 10^{-3}$						
$L_2(y)$	0	$1.3 \times 10^{-3}$	$1.5 \times 10^{-2}$	$1.5 \times 10^{-2}$	$1.3 \times 10^{-3}$	0
$L_\infty(y)$	0	$4.7058 \times 10^{-5}$	$5.2845 \times 10^{-4}$	$5.2844 \times 10^{-4}$	$4.7058 \times 10^{-5}$	0
$L_2(p)$	0	$7.9517 \times 10^{-7}$	$6.0200 \times 10^{-6}$	$4.8759 \times 10^{-6}$	$3.3026 \times 10^{-7}$	0
$L_\infty(p)$	0	$5.1164 \times 10^{-8}$	$6.9974 \times 10^{-7}$	$6.9974 \times 10^{-7}$	$5.1164 \times 10^{-8}$	0
$\nu = 10^{-5}$						
$L_2(y)$	0	$3.2524 \times 10^{-4}$	$3.7 \times 10^{-3}$	$3.7 \times 10^{-3}$	$3.2524 \times 10^{-4}$	0
$L_\infty(y)$	0	$1.6993 \times 10^{-5}$	$1.9330 \times 10^{-4}$	$1.9330 \times 10^{-4}$	$1.6993 \times 10^{-5}$	0
$L_2(p)$	0	$6.8512 \times 10^{-11}$	$4.4717 \times 10^{-10}$	$3.5519 \times 10^{-10}$	$3.2152 \times 10^{-11}$	0
$L_\infty(p)$	0	$1.0736 \times 10^{-11}$	$1.2256 \times 10^{-10}$	$1.2256 \times 10^{-10}$	$1.0736 \times 10^{-11}$	0
$\nu = 10^{-7}$						
$L_2(y)$	0	$3.1453 \times 10^{-4}$	$3.6 \times 10^{-3}$	$3.6 \times 10^{-3}$	$3.1453 \times 10^{-4}$	0
$L_\infty(y)$	0	$1.6769 \times 10^{-5}$	$1.9100 \times 10^{-4}$	$1.9100 \times 10^{-4}$	$1.6769 \times 10^{-5}$	0
$L_2(p)$	0	$5.3045 \times 10^{-15}$	$2.6675 \times 10^{-14}$	$1.7245 \times 10^{-14}$	$1.5791 \times 10^{-15}$	0
$L_\infty(p)$	0	$2.9563 \times 10^{-16}$	$1.6499 \times 10^{-15}$	$1.6499 \times 10^{-15}$	$1.4485 \times 10^{-16}$	0



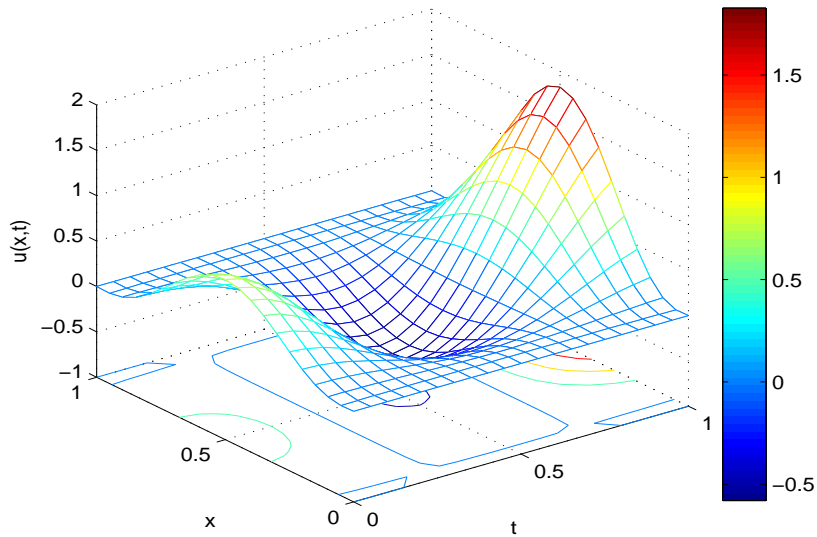
شکل ۱۲.۳: مقایسه جواب تقریبی و تحلیلی  $p(x, t)$  با  $\nu = 10^{-3}$  در شکل بالا و  $\nu = 10^{-7}$  در شکل پایین به‌ازای  $t$  های مختلف در مثال (۳.۲.۳).



شکل ۱۳.۳: خطای  $y - \hat{y}$  با  $N = 38$  و  $\nu = 10^{-7}$  در مثال (۳.۲.۳).



شکل ۱۴.۳: خطای  $p - \hat{p}$  با  $N = 20$  و  $\nu = 10^{-8}$  در مثال (۳.۲.۳).



شکل ۱۵.۳: جواب تقریبی کنترل  $u(x, t)$  به‌ازای  $N = 20$  و  $\nu = 10^{-3}$  در مثال (۳.۲.۳).

## فصل ۴

حل مساله کنترل بهینه سیستم‌های پارامتر  
توزیعی سهموی با استفاده از B-اسپلاین مرتبه

۵

## ۱.۴ مقدمه

در این فصل از پایان‌نامه مساله کنترل بهینه با معادلات دیفرانسیل سهموی خطی به صورت عددی توسط روش تقریبی B-اسپلاین مرتبه ۵ و روش کالوکیشن حل خواهد شد. B-اسپلاین مرتبه ۵ به منظور ایجاد راه حل تقریبی برای برخی از معادلات دیفرانسیل خطی و غیرخطی استفاده شده است [۳۱]-[۳۶]. در پایان فصل با ارائه ۳ مثال عددی، نتایج این طرح با جواب تحلیلی مقایسه شده است که تأییدی بر دقت خوب طرح ارائه شده است.

## ۲.۴ B-اسپلاین مرتبه ۵ و روش کالوکیشن

فرض کنید  $\Omega$  یک افراز یکنواخت از بازه  $[a, b]$  به صورت  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$  باشد که در آن  $h = x_j - x_{j-1}$  و  $j = 1, \dots, N$ . مجموعه B-اسپلاین‌های مرتبه پنج  $\{Q_{-2}, Q_{-1}, \dots, Q_{N+2}\}$  یک پایه روی  $[a, b]$  تشکیل می‌دهند [۲۲]. همچنین توابع B-اسپلاین مرتبه پنج روی یک مجموعه صعودی از  $N + 1$  گره در دامنه مساله، بعلاوه ۱۰ گره اضافی در خارج دامنه مساله، در نظر گرفته می‌شود که این ۱۰ گره اضافی به صورت زیر می‌باشند:

$$x_{-5} < x_{-4} < x_{-3} < x_{-2} < x_{-1} < x_0, x_N < x_{N+1} < x_{N+2} < x_{N+3} < x_{N+4} < x_{N+5}.$$

فرض کنید  $Q_m(x)$  که در آن  $m = -2, -1, \dots, N + 2$ ، که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Q_m(x) = \frac{1}{h^5} \begin{cases} (x - x_{m-3})^5, & x \in [x_{m-3}, x_{m-2}], \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5, & x \in [x_{m-2}, x_{m-1}], \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5 + 15(x - x_{m-1})^5, & x \in [x_{m-1}, x_m], \\ (x_{m+2} - x)^5 - 6(x_{m+2} - x)^5 + 15(x_{m+1} - x)^5, & x \in [x_m, x_{m+1}], \\ (x_{m+2} - x)^5 - 6(x_{m+2} - x)^5, & x \in [x_{m+1}, x_{m+2}], \\ (x_{m+2} - x)^5, & x \in [x_{m+2}, x_{m+3}], \\ \circ, & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (1.4)$$

جدول ۱.۴: مقادیر  $Q_m, Q'_m, Q''_m, Q'''_m$ .

$x$	$x_{m-3}$	$x_{m-2}$	$x_{m-1}$	$x_m$	$x_{m+1}$	$x_{m+2}$	$x_{m+3}$
$Q_m$	۰	۱	۲۶	۶۶	۲۶	۱	۰
$Q'_m$	۰	$\frac{5}{h}$	$\frac{50}{h}$	۰	$-\frac{50}{h}$	$-\frac{5}{h}$	۰
$Q''_m$	۰	$\frac{20}{h^2}$	$\frac{40}{h^2}$	$-\frac{120}{h^2}$	$\frac{40}{h^2}$	$\frac{20}{h^2}$	۰
$Q'''_m$	۰	$\frac{60}{h^3}$	$-\frac{120}{h^3}$	۰	$\frac{120}{h^3}$	$-\frac{60}{h^3}$	۰

B - اسپلاین مرتبه ۵ باشد، که بیرون بازه  $[x_{m-3}, x_{m+3}]$  صفر است. اکنون جواب‌های تقریبی از سیستم بهینه (۱.۲)-(۶.۲) را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$y(x, t) = \sum_{m=-2}^{N+2} c_m(t) Q_m(x), \quad (2.4)$$

$$p(x, t) = \sum_{m=-2}^{N+2} d_m(t) Q_m(x), \quad (3.4)$$

که در آن  $c_m(t)$  و  $d_m(t)$  مقادیر مجهول وابسته به زمان هستند که از شرایط اولیه، مرزی و نهایی تعیین می‌شوند. مقادیر  $Q_m(x)$  و سه مشتقات اولی آن یعنی  $Q'_m(x), Q''_m(x), Q'''_m(x)$  در گره‌ها در جدول (۱.۴) بدست آورده شده‌اند.

اکنون جواب تقریبی در نظر گرفته شده  $y(x, t)$  و  $p(x, t)$  از روابط (۲.۴) و (۳.۴) را در معادله‌های (۱.۲) -



(۶.۲) به صورت زیر قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned}
 & -c'_{-\nu}(t)Q_{-\nu}(x_i) - c'_{-1}(t)Q_{-1}(x_i) - \dots - c'_{N+\nu}(t)Q_{N+\nu}(x_i) + c_{-\nu}(t)Q''_{-\nu}(x_i) + c_{-1}(t)Q''_{-1}(x_i) + \\
 & \dots + c_{N+\nu}(t)Q''_{N+\nu}(x_i) - \frac{1}{\nu}(d_{-\nu}(t)Q_{-\nu}(x_i) + d_{-1}(t)Q_{-1}(x_i) + \dots + d_{N+\nu}(t)Q_{N+\nu}(x_i)) = 0, \\
 & i = 1, \dots, N - 1, t \in (0, T), \tag{۴.۴}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & d'_{-\nu}(t)Q_{-\nu}(x_i) + d'_{-1}(t)Q_{-1}(x_i) + \dots + d'_{N+\nu}(t)Q_{N+\nu}(x_i) + d_{-\nu}(t)Q''_{-\nu}(x_i) + d_{-1}(t)Q''_{-1}(x_i) \\
 & + \dots + d_{N+\nu}(t)Q''_{N+\nu}(x_i) + c_{-\nu}(t)Q_{-\nu}(x_i) + c_{-1}(t)Q_{-1}(x_i) + \dots + c_{N+\nu}(t)Q_{N+\nu}(x_i) = z(t, x_i), \\
 & i = 1, \dots, N - 1, t \in (0, T), \tag{۵.۴}
 \end{aligned}$$

با شرایط اولیه

$$\begin{aligned}
 & c_{-\nu}(0)Q_{-\nu}(x_i) + c_{-1}(0)Q_{-1}(x_i) + \dots + c_{N+1}(0)Q_{N+1}(x_i) + c_{N+\nu}(0)Q_{N+\nu}(x_i) = y_0(x_i), \\
 & i = 1, \dots, N - 1, t = 0, \tag{۶.۴}
 \end{aligned}$$

شرایط مرزی

$$\begin{aligned}
 & c_{-\nu}(t)Q_{-\nu}(x_i) + c_{-1}(t)Q_{-1}(x_i) + \dots + c_{N+1}(t)Q_{N+1}(x_i) + c_{N+\nu}(t)Q_{N+\nu}(x_i) = 0, \\
 & i = 0, N, t \in (0, T), \tag{۷.۴}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & d_{-\nu}(t)Q_{-\nu}(x_i) + d_{-1}(t)Q_{-1}(x_i) + \dots + d_{N+1}(t)Q_{N+1}(x_i) + d_{N+\nu}(t)Q_{N+\nu}(x_i) = 0, \\
 & i = 0, N, t \in (0, T), \tag{۸.۴}
 \end{aligned}$$

و شرایط نهایی

$$\begin{aligned}
 & d_{-\nu}(T)Q_{-\nu}(x_i) + d_{-1}(T)Q_{-1}(x_i) + \dots + d_{N+1}(T)Q_{N+1}(x_i) + d_{N+\nu}(T)Q_{N+\nu}(x_i) = 0, \\
 & i = 1, \dots, N - 1, t = T. \tag{۹.۴}
 \end{aligned}$$

جواب B - اسپلاین از معادلات (۴.۴) - (۹.۴) در گره‌های  $\{x_i\}_{i=0}^N$  توسط حل دستگاه زیر بدست می‌آید:

$$AX = B, \quad (10.4)$$

که در آن بعد ماتریس  $A$  برابر با  $(6N + 30) \times (4N)$  و ماتریس  $B$  یک ماتریس ستونی با  $4N$  سطر است. سیستم (۱۰.۴) را  $(N + 1)$  بار توسط برنامه‌ای که براساس روش تجزیه مقدار تکین نوشته‌ایم، حل می‌کنیم و در هر مرحله  $p(x_0, t_i), p(x_1, t_i), \dots, p(x_N, t_i)$  و  $y(x_0, t_i), y(x_1, t_i), \dots, y(x_N, t_i)$  که در آن  $i = 0, 1, \dots, N$  را بدست می‌آوریم. تابع کنترل بهینه نیز به صورت زیر بدست می‌آید:

$$u(x, t) = \frac{p(x, t)}{\nu}. \quad (11.4)$$

## ۱.۲.۴ نتایج عددی

در این بخش روش توضیح داده شده را با چند مثال عددی بررسی می‌کنیم.

مثال ۱.۲.۴. مساله کنترل بهینه سیستم (۱۷.۱) را با  $T = 1, x \in [0, 1]$  و

$$z = \nu(2(t-1)^3 x(x-1) - 6t^2(t-1)^2 - 4t(t-1)^3 + 12t(t-1)^2 x(x-1) + 3t^2(2t-2)x(x-1) + 4t(t-1)^3 + 6t^2(t-1)^2) + t^2(1-t)^3 x(x-1),$$

در نظر بگیرید که جواب تحلیلی آن برای  $(y, p, u)^T$  به صورت زیر است:

$$y = t^2(1-t)^3 x(x-1),$$

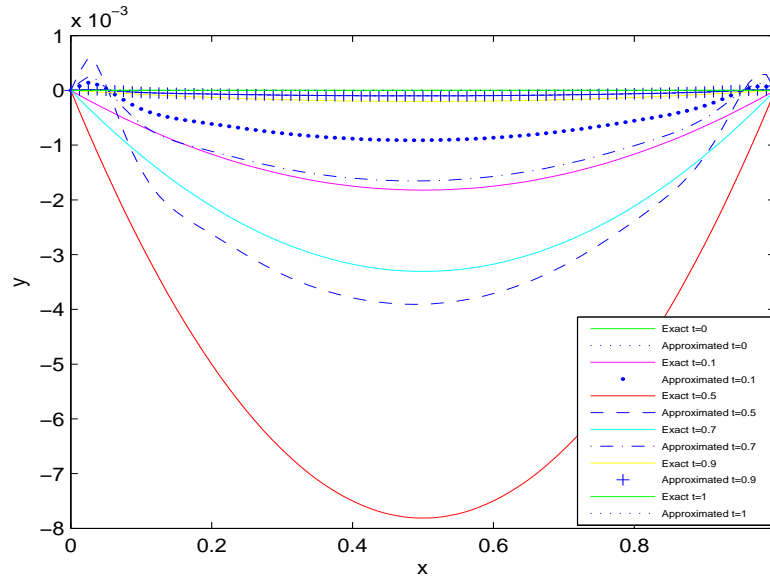
$$p = \nu(2t(t-1)^3 x(x-1) - 2t^2(t-1)^3 + 3t^2(t-1)^2 x(x-1)),$$

$$u = \frac{p}{\nu} = 2t(t-1)^3 x(x-1) - 2t^2(t-1)^3 + 3t^2(t-1)^2 x(x-1).$$

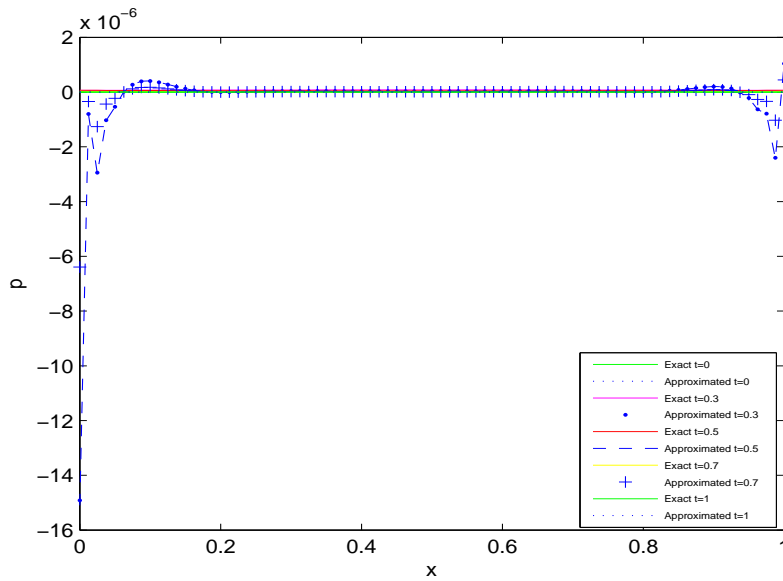
حال به‌ازای  $N = 80$  و  $\nu = 10^{-6}$  خطای میانگین مربع و خطای ماکزیمم برای متغیرهای  $y(x, t)$  و  $p(x, t)$  در زمان‌های  $1, 1/7, 1/5, 1/3, 0$  حساب شده و نتایج در جدول (۲.۴) ارائه شده است.

جدول ۲.۴: نتایج خطای میانگین مربع و خطای ماکزیمم در  $x \in [0, 1]$  و  $t$  های مختلف در مثال (۱.۲.۴).

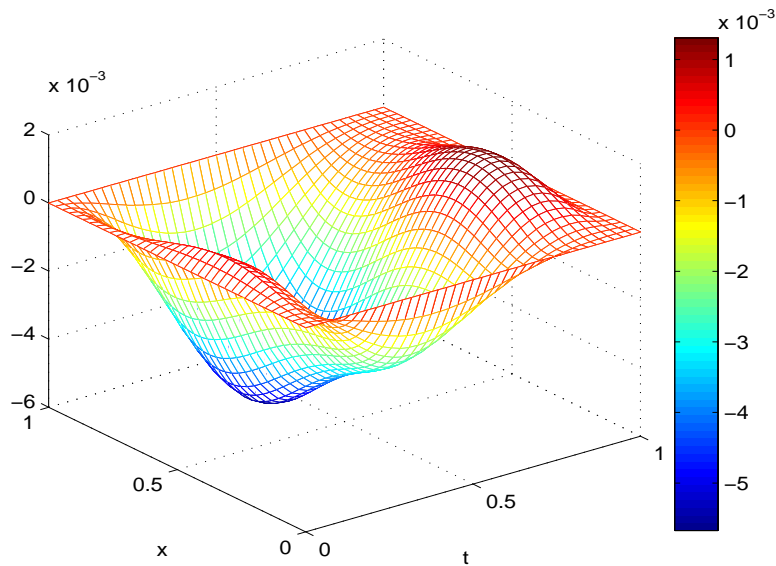
$t$	$t = 0$	$t = 0.3$	$t = 0.5$	$t = 0.7$	$t = 1$
$L_2(y)$	$2.6549 \times 10^{-12}$	$6.5004 \times 10^{-4}$	$6.6615 \times 10^{-4}$	$1.1940 \times 10^{-4}$	0
$L_\infty(y)$	$6.2570 \times 10^{-14}$	$1.4908 \times 10^{-5}$	$1.5277 \times 10^{-5}$	$2.7384 \times 10^{-6}$	0
$L_2(p)$	$1.0152 \times 10^{-18}$	$2.4455 \times 10^{-10}$	$2.5048 \times 10^{-10}$	$4.4889 \times 10^{-11}$	0
$L_\infty(p)$	$9.3352 \times 10^{-19}$	$2.2426 \times 10^{-10}$	$2.2981 \times 10^{-10}$	$4.1187 \times 10^{-11}$	0



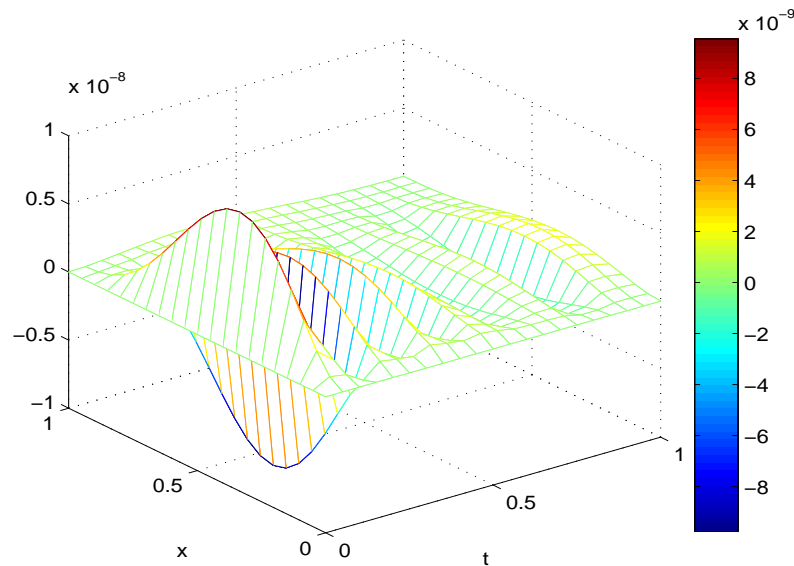
شکل ۱.۴: مقایسه جواب تقریبی و تحلیلی  $y(x, t)$  به ازای  $t$  های مختلف در مثال (۱.۲.۴).



شکل ۲.۴: مقایسه جواب تقریبی و تحلیلی  $p(x, t)$  به ازای  $t$  های مختلف در مثال (۱.۲.۴).



شکل ۳.۴: خطای  $y - \hat{y}$  با  $N = ۳۸$  و  $\nu = ۱۰^{-۷}$  در مثال (۱.۲.۴).



شکل ۴.۴: خطای  $p - \hat{p}$  با  $N = 20$  و  $\nu = 10^{-8}$  در مثال (۱.۲.۴).

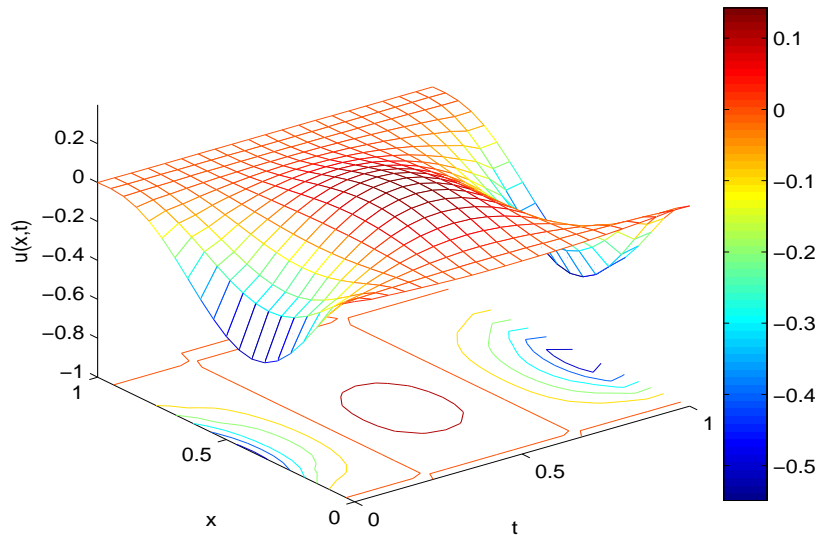
اینک برای  $N = 80$ ، به‌ازای  $t$  های متفاوت از مساله و  $\nu = 10^{-6}$ ، نمودار دوبعدی جواب تحلیلی و جواب تقریبی متغیرهای  $y(x, t)$  و  $p(x, t)$  در شکل‌های (۱.۴) و (۲.۴) نمایش داده شده است. همچنین برای حالتی که  $(x, t) \in [0, 1] \times [0, 1]$  باشد، نمودار سه‌بعدی خطای  $y - \hat{y}$  به‌ازای  $N = 38$  و  $\nu = 10^{-7}$ ، خطای  $p - \hat{p}$  برای  $N = 20$  و  $\nu = 10^{-8}$  در شکل‌های (۳.۴) و (۴.۴) نشان داده شده است. در ادامه نمودار سه‌بعدی جواب تقریبی کنترل  $u(x, t)$  به‌ازای  $N = 20$  و  $\nu = 10^{-3}$  در شکل (۵.۴) نمایش داده شده است.

**مثال ۲.۲.۴.** مساله کنترل بهینه (۱۷.۱) را با  $x \in [0, 1]$  و  $T = 1$

$$z = \nu(2\pi^2 t(t-1)^2(t-2)^2 + \pi^2 t^2(2t-2)(t-2)^2 + \pi^2 t^2(2t-4)(t-1)^2 + \pi^4 t^2(t-1)^2(t-2)^2 - 2t^2(t-1)^2 - 2t^2(t-2)^2 - 2(t-1)^2(t-2)^2 - 2t^2(2t-2)(2t-4) - 4t(2t-2)(t-2)^2 - 4t(2t-4)(t-1)^2 - 2\pi^2 t(t-1)^2(t-2)^2 - \pi^2 t^2(2t-2)(t-2)^2 - \pi^2 t^2(2t-4)(t-1)^2) \sin(\pi x) + t^2(1-t)^2(2-t)^2 \sin(\pi x),$$

در نظر بگیرید که جواب تحلیلی آن برای  $(y, p, u)^T$  به‌صورت زیر است:

$$y = t^2(1-t)^2(2-t)^2 \sin(\pi x),$$

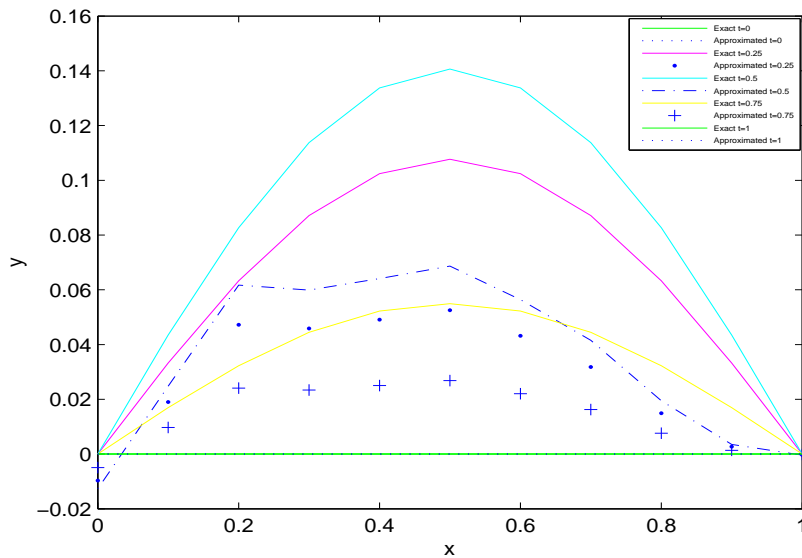


شکل ۵.۴: جواب تقریبی کنترل  $u(x, t)$  با  $N = 20$  و  $\nu = 10^{-3}$  در مثال (۱.۲.۴).

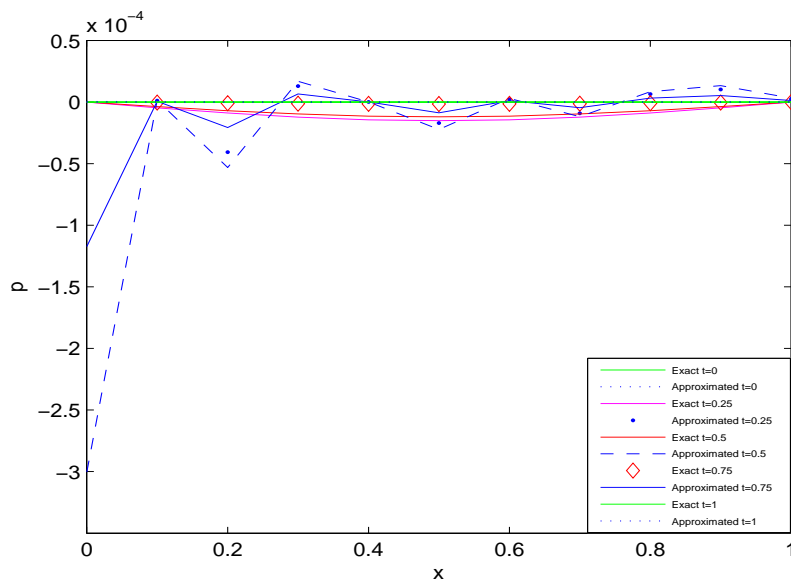
$$p = \nu(-t^2(2t-2)(t-2)^2 - t^2(2t-4)(t-1)^2 - 2t(t-1)^2(t-2)^2 - \pi^2 t^2(t-1)^2 \\ (t-2)^2) \sin(\pi x),$$

$$u = \frac{p}{\nu} = (-t^2(2t-2)(t-2)^2 - t^2(2t-4)(t-1)^2 - 2t(t-1)^2(t-2)^2 - \pi^2 t^2(t-1)^2 \\ (t-2)^2) \sin(\pi x).$$

در مقایسه جواب بدست آمده از روش تقریبی B-اسپلاین مرتبه ۵ با جواب تحلیلی مساله، نتایج خطای میانگین مربع و خطای ماکزیمم به‌ازای  $N = 10$  و  $\nu = 10^{-5}$  در زمان‌های ۱، ۰/۷۵، ۰/۵، ۰/۲۵، ۰ در جدول (۳.۴) نشان داده شده است. همچنین نمودار دوبعدی متغیرهای  $y(x, t)$  و  $p(x, t)$  به ازای  $t$  های متفاوت از مساله،  $N = 10$  و  $\nu = 10^{-5}$  برای جواب تقریبی و تحلیلی به‌ترتیب در شکل‌های (۶.۴) و (۷.۴) نمایش داده شده است. نمودار سه‌بعدی خطای  $y - \hat{y}$  برای  $N = 20$  و  $\nu = 10^{-6}$ ، نمودار سه‌بعدی خطای  $p - \hat{p}$  به‌ازای  $N = 20$  و  $\nu = 10^{-8}$  به‌ترتیب در شکل‌های (۸.۴) و (۹.۴) نشان داده شده است. نمودار سه‌بعدی جواب تقریبی کنترل  $u(x, t)$  برای  $N = 20$  و  $\nu = 10^{-2}$  در نمودار (۱۰.۴) نمایش داده شده است.



شکل ۶.۴: مقایسه جواب تقریبی و تحلیلی  $y(x, t)$  به ازای  $t$  های مختلف در مثال (۲.۲.۴).



شکل ۷.۴: مقایسه جواب تقریبی و تحلیلی  $p(x, t)$  به ازای  $t$  های مختلف در مثال (۲.۲.۴).

جدول ۳.۴: نتایج خطای میانگین مربع و خطای ماکزیمم در  $x \in [0, 1]$  و  $t$  های مختلف در مثال (۲.۲.۴).

$t$	$t = 0$	$t = 0.25$	$t = 0.5$	$t = 0.75$	$t = 1$
$L_2(y)$	$7.1972 \times 10^{-9}$	$1.8 \times 10^{-2}$	$3.07 \times 10^{-2}$	$4.7 \times 10^{-3}$	$4.4982 \times 10^{-10}$
$L_\infty(y)$	$1.5208 \times 10^{-9}$	$3.5 \times 10^{-3}$	$6 \times 10^{-3}$	$9.1277 \times 10^{-4}$	$9.505 \times 10^{-11}$
$L_2(p)$	$3.0427 \times 10^{-14}$	$5.5526 \times 10^{-8}$	$9.406 \times 10^{-8}$	$1.4337 \times 10^{-8}$	$1.9017 \times 10^{-15}$
$L_\infty(p)$	$2.9133 \times 10^{-14}$	$5.289 \times 10^{-8}$	$9.0221 \times 10^{-8}$	$1.3759 \times 10^{-8}$	$1.8208 \times 10^{-15}$

مثال ۳.۲.۴. در این مثال، مساله کنترل بهینه سیستم (۱۷.۱) را با  $T = 1, x \in [0, 1]$  و

$$z = \nu((16\pi^2 t^3(t-1)^3 - 3t^3(2t-2) - 18t^2(t-1)^2 - 6t(t-1)^3) \cos(2\pi x)) + \nu(3t^3(2t-2) + 18t^2(t-1)^2 + 6t(t-1)^3) + t^3(1-t)^3(1 - \cos(2\pi x)),$$

در نظر بگیرید که جواب تحلیلی آن برای  $(y, p, u)^T$  به صورت زیر است:

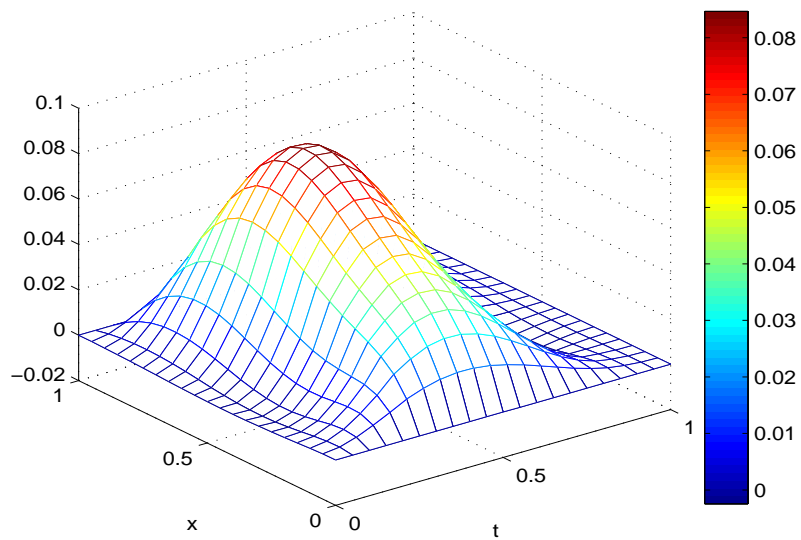
$$y = t^3(1-t)^3(1 - \cos(2\pi x)),$$

$$p = \nu((-3t^2(t-1)^3 - 3t^3(t-1)^2)(\cos(2\pi x) - 1) - 4\pi^2 t^3(t-1)^3 \cos(2\pi x)),$$

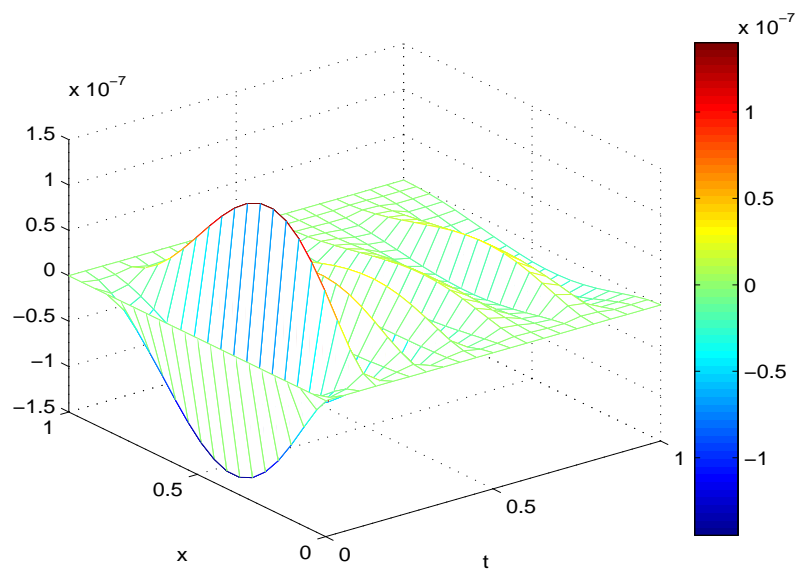
$$u = \frac{p}{\nu} = (-3t^2(t-1)^3 - 3t^3(t-1)^2)(\cos(2\pi x) - 1) - 4\pi^2 t^3(t-1)^3 \cos(2\pi x).$$

با داشتن جواب تحلیلی مساله، دقت طرح ارائه شده توسط نرم‌های  $L_2$  و  $L_\infty$  در زمان‌های  $t = 0, 0.2, 0.4, 0.6$  و با  $N = 50$  و  $\nu = 10^{-3}, 10^{-5}, 10^{-7}$  و  $N = 50$  و  $\nu = 10^{-3}, 10^{-5}$  به‌ازای  $t$  های مختلف از بازه  $[0, 1]$  نمودار دویبعدی جواب تقریبی و تحلیلی مساله به‌ازای  $N = 50$  و  $\nu = 10^{-3}, 10^{-5}$  در شکل‌های (۱۱.۴) و (۱۲.۴) رسم و با هم مقایسه شده‌اند. همچنین نمودار سابعدی خطای  $y - \hat{y}$  به‌ازای  $N = 38$  و  $\nu = 10^{-7}$ ، نمودار سابعدی خطای  $p - \hat{p}$  به‌ازای  $N = 20$  و  $\nu = 10^{-8}$  و در نهایت نمودار

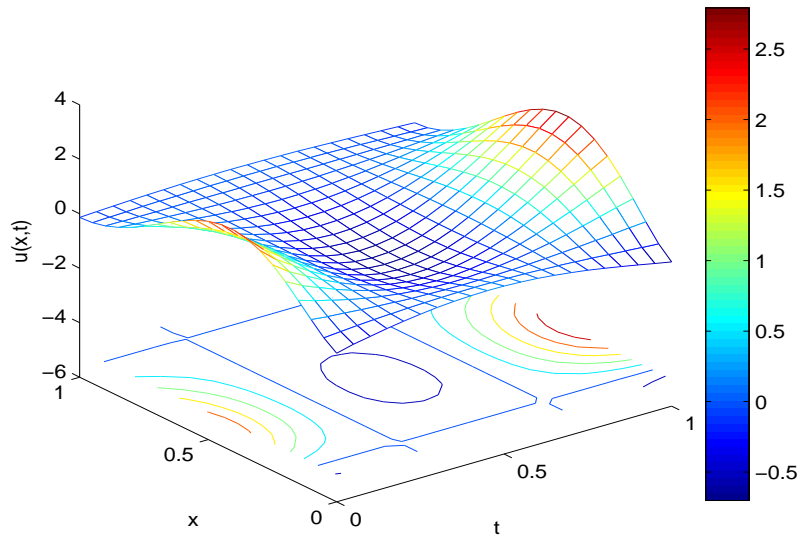




شکل ۸.۴: خطای  $y - \hat{y}$  با  $N = 20$  و  $\nu = 10^{-6}$  در مثال (۲.۲.۴).



شکل ۹.۴: خطای  $p - \hat{p}$  با  $N = 20$  و  $\nu = 10^{-8}$  در مثال (۲.۲.۴).

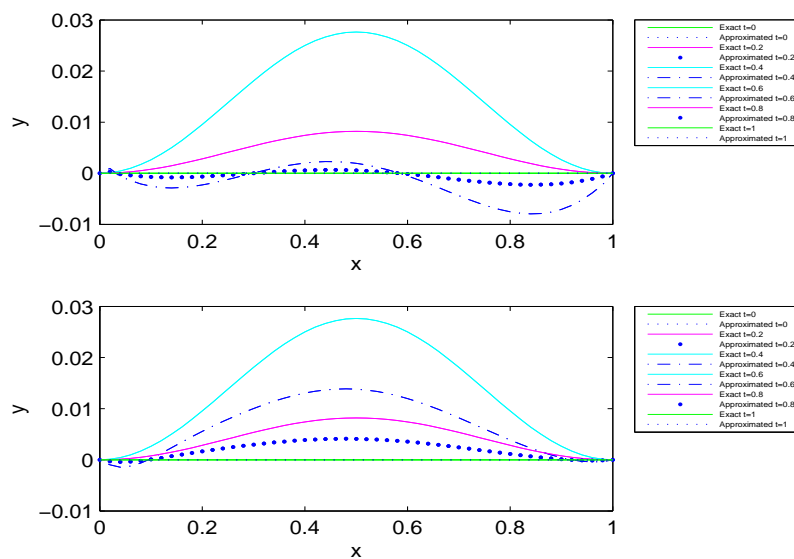


شکل ۴.۱۰: جواب تقریبی کنترل  $u(x,t)$  با  $N = 20$  و  $\nu = 10^{-2}$  در مثال (۲.۲.۴).

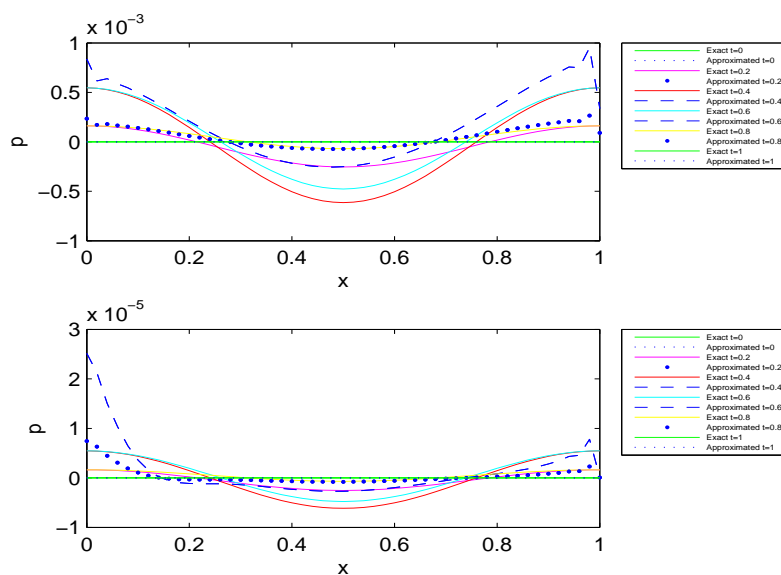
سه‌بعدی جواب تقریبی کنترل  $u(x,t)$  با  $N = 20$  و  $\nu = 10^{-3}$  به ترتیب در شکل‌های (۱۳.۴)–(۱۵.۴) نمایش داده شده است.

جدول ۴.۴: نتایج خطای میانگین مربع و خطای ماکزیمم در  $x \in [0, 1]$  و  $t$  های مختلف در مثال (۳.۲.۴)

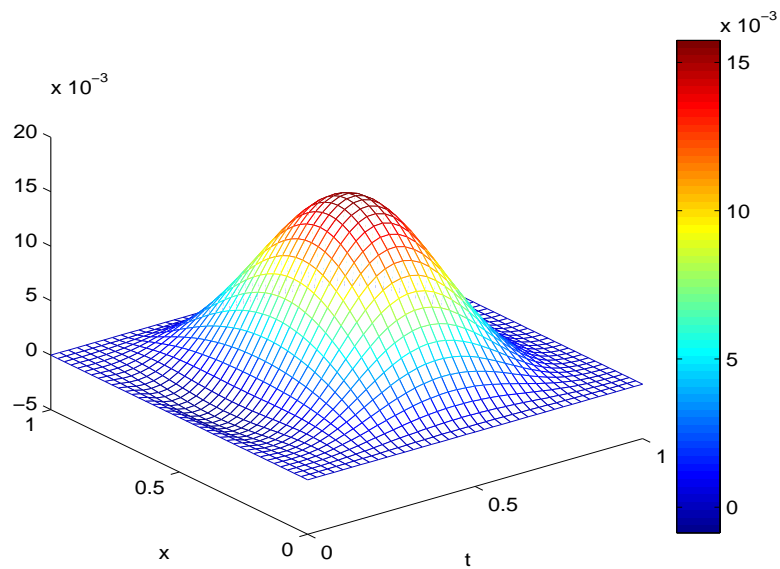
$t$	$t = 0$	$t = 0/2$	$t = 0/4$	$t = 0/6$	$t = 0/8$	$t = 1$
$\nu = 10^{-3}$						
$L_2(y)$	0	$1/4 \times 10^{-3}$	$1/61 \times 10^{-2}$	$1/61 \times 10^{-2}$	$1/4 \times 10^{-3}$	0
$L_\infty(y)$	0	$5/9607 \times 10^{-5}$	$6/7652 \times 10^{-4}$	$6/7652 \times 10^{-4}$	$5/9607 \times 10^{-5}$	0
$L_2(p)$	0	$6/456 \times 10^{-7}$	$3/0753 \times 10^{-6}$	$1/5715 \times 10^{-6}$	$4/4821 \times 10^{-8}$	0
$L_\infty(p)$	0	$3/3562 \times 10^{-8}$	$1/6783 \times 10^{-7}$	$1/6737 \times 10^{-7}$	$1/0973 \times 10^{-8}$	0
$\nu = 10^{-5}$						
$L_2(y)$	0	$3/1945 \times 10^{-4}$	$3/6 \times 10^{-3}$	$3/6 \times 10^{-3}$	$3/1945 \times 10^{-4}$	0
$L_\infty(y)$	0	$1/6974 \times 10^{-5}$	$1/9309 \times 10^{-4}$	$1/9309 \times 10^{-4}$	$1/6974 \times 10^{-5}$	0
$L_2(p)$	0	$1/1799 \times 10^{-10}$	$1/0193 \times 10^{-9}$	$9/3162 \times 10^{-10}$	$8/333 \times 10^{-11}$	0
$L_\infty(p)$	0	$3/3885 \times 10^{-11}$	$3/8668 \times 10^{-10}$	$3/8668 \times 10^{-10}$	$3/3885 \times 10^{-11}$	0
$\nu = 10^{-7}$						
$L_2(y)$	0	$3/1374 \times 10^{-4}$	$3/6 \times 10^{-3}$	$3/6 \times 10^{-3}$	$3/1374 \times 10^{-4}$	0
$L_\infty(y)$	0	$1/6824 \times 10^{-5}$	$1/9163 \times 10^{-4}$	$1/9163 \times 10^{-4}$	$1/6824 \times 10^{-5}$	0
$L_2(p)$	0	$6/9167 \times 10^{-15}$	$4/514 \times 10^{-14}$	$3/5768 \times 10^{-14}$	$3/2141 \times 10^{-15}$	0
$L_\infty(p)$	0	$7/2421 \times 10^{-16}$	$8/6743 \times 10^{-15}$	$8/9219 \times 10^{-15}$	$8/2204 \times 10^{-16}$	0



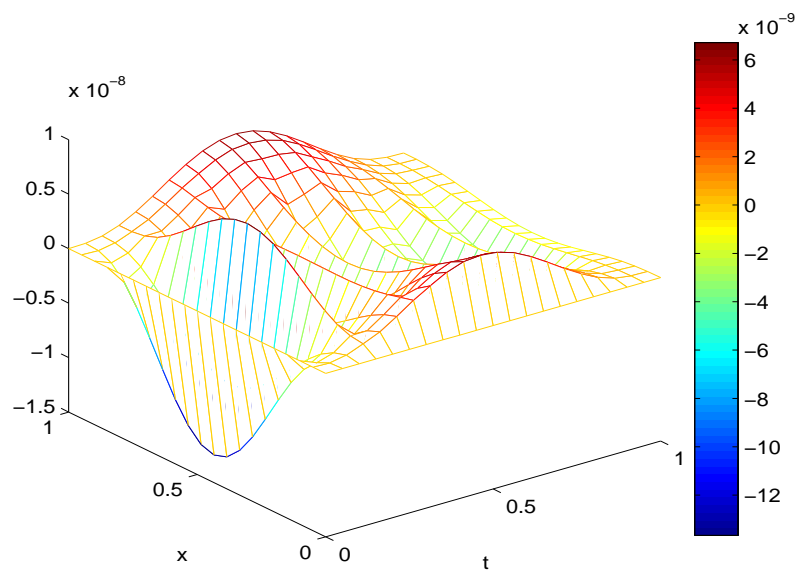
شکل ۱۱.۴: مقایسه جواب تقریبی و تحلیلی  $y(x, t)$  به‌ازای  $\nu = 10^{-3}$  در شکل بالا و  $10^{-5}$  در شکل پایین به‌ازای  $t$  های مختلف در مثال (۳.۲.۴).



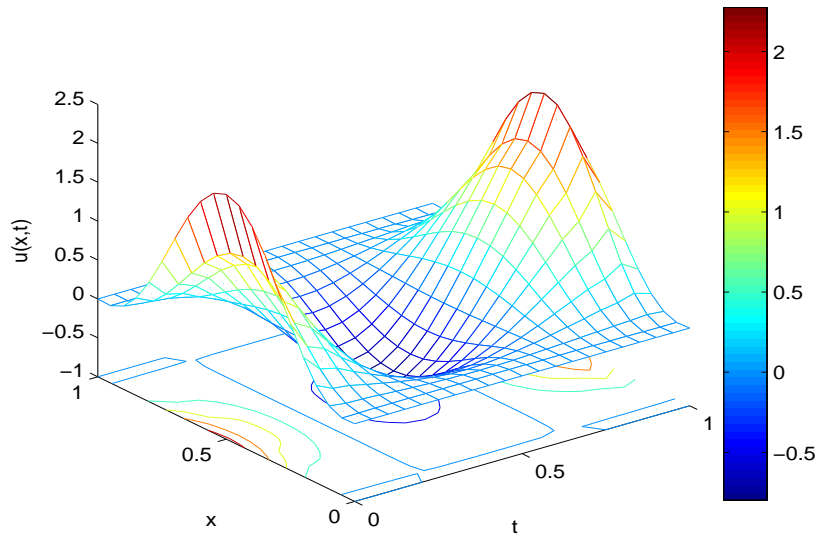
شکل ۱۲.۴: مقایسه جواب تقریبی و دقیق  $p(x, t)$  به‌ازای  $\nu = 10^{-3}$  در شکل بالا و  $10^{-5}$  در شکل پایین به‌ازای  $t$  های مختلف در مثال (۳.۲.۴).



شکل ۱۳.۴: خطای  $y - \hat{y}$  با  $N = ۳۸$  و  $\nu = ۱۰^{-۷}$  در مثال (۳.۲.۴).



شکل ۱۴.۴: خطای  $p - \hat{p}$  با  $N = ۲۰$  و  $\nu = ۱۰^{-۸}$  در مثال (۳.۲.۴).



شکل ۱۵.۴: جواب تقریبی کنترل  $u(x, t)$  با  $N = 20$  و  $\nu = 10^{-3}$  در مثال (۳.۲.۴).

## فصل ۵

حل مساله کنترل بهینه سیستم‌های پارامتر  
توزیعی سهموی با استفاده از B - اسپلاین مرتبه

۷

## ۱.۵ مقدمه

در فصل آخر از این پایان‌نامه، می‌خواهیم یک روش عددی بر اساس توابع B - اسپلاین مرتبه ۷ و روش کالوکیشن را برای حل مساله کنترل بهینه با معادلات دیفرانسیل سهموی خطی، مورد استفاده قرار دهیم. B - اسپلاین مرتبه ۷ به منظور ایجاد راه حل تقریبی برای برخی از معادلات دیفرانسیل خطی و غیرخطی استفاده شده است [۳۷]-[۳۸]. در پایان فصل نتایج عددی توسط ۳ مثال ارائه شده که در آنها خطای میانگین مربع و خطای ماکزیمم محاسبه شده است. نتایج عددی نشان دهنده این است که این روش نیز علاوه بر روش‌هایی که در فصول قبل ارائه شده، یک تکنیک کاربردی و همچنین تقریبی بسیار خوب از جواب مساله است.

## ۲.۵ B - اسپلاین مرتبه ۷ و روش کالوکیشن

شبهه  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ ، به‌عنوان یک افراز یکنواخت از دامنه جواب  $a \leq x \leq b$  توسط گره‌های  $x_m$  که  $m = -3, -2, -1, 0, \dots, N, N+1, N+2, N+3$  و  $h = x_{m+1} - x_m$  در نظر می‌گیریم. همچنین توابع B - اسپلاین مرتبه هفت روی یک مجموعه صعودی از  $N+1$  گره در دامنه مساله، علاوه ۱۴ گره اضافی در خارج دامنه مساله، در نظر گرفته می‌شود که این ۱۴ گره اضافی به‌صورت زیر می‌باشند:

$$x_{-7} < x_{-6} < x_{-5} < x_{-4} < x_{-3} < x_{-2} < x_{-1} < x_0,$$

$$x_N < x_{N+1} < x_{N+2} < x_{N+3} < x_{N+4} < x_{N+5} < x_{N+6} < x_{N+7}.$$



فرض کنید توابع B-اسپلاین مرتبه ۷ در گره‌های شبکه به صورت زیر تعریف شوند:

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^7} \begin{cases} (x - x_{m-4})^7, & x \in [x_{m-4}, x_{m-3}], \\ (x - x_{m-4})^7 - 7(x - x_{m-3})^7, & x \in [x_{m-3}, x_{m-2}], \\ (x - x_{m-4})^7 - 7(x - x_{m-3})^7 + 7(x - x_{m-2})^7, & x \in [x_{m-2}, x_{m-1}], \\ (x - x_{m-4})^7 - 7(x - x_{m-3})^7 + 7(x - x_{m-2})^7 - 7(x - x_{m-1})^7, & x \in [x_{m-1}, x_m], \\ (x_{m+4} - x)^7 - 7(x_{m+3} - x)^7 + 7(x_{m+2} - x)^7 - 7(x_{m+1} - x)^7, & x \in [x_m, x_{m+1}], \\ (x_{m+4} - x)^7 - 7(x_{m+3} - x)^7 + 7(x_{m+2} - x)^7, & x \in [x_{m+1}, x_{m+2}], \\ (x_{m+4} - x)^7 - 7(x_{m+3} - x)^7, & x \in [x_{m+2}, x_{m+3}], \\ (x_{m+4} - x)^7, & x \in [x_{m+3}, x_{m+4}], \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (1.5)$$

مجموعه اسپلاین‌های  $\{\phi_{-3}, \phi_{-2}, \phi_{-1}, \phi_0, \dots, \phi_N, \phi_{N+1}, \phi_{N+2}, \phi_{N+3}\}$  یک پایه برای فضای جواب روی بازه  $[a, b]$  تشکیل می‌دهند. این بدین معنی است که مقادیر توابع B-اسپلاین مرتبه ۷ ومشتقات مرتبه اول، دوم و سوم بیرون بازه  $[x_{m-4}, x_{m+4}]$  صفر هستند. مقادیر B-اسپلاین مرتبه ۷ و مشتقات آن در نقاط گره‌ای در جدول (۱.۵) نشان داده شده است.

جدول ۱.۵: مقادیر  $\phi_m, \phi'_m, \phi''_m, \phi'''_m$

$x$	$x_{m-4}$	$x_{m-3}$	$x_{m-2}$	$x_{m-1}$	$x_m$	$x_{m+1}$	$x_{m+2}$	$x_{m+3}$	$x_{m+4}$
$\phi_m$	0	1	120	1191	2416	1191	120	1	0
$\phi'_m$	0	$\frac{7}{h}$	$\frac{392}{h}$	$\frac{1715}{h}$	0	$-\frac{1715}{h}$	$-\frac{392}{h}$	$-\frac{7}{h}$	0
$\phi''_m$	0	$\frac{42}{h^2}$	$\frac{1008}{h^2}$	$\frac{630}{h^2}$	$-\frac{3360}{h^2}$	$\frac{630}{h^2}$	$\frac{1008}{h^2}$	$\frac{42}{h^2}$	0
$\phi'''_m$	0	$\frac{210}{h^3}$	$\frac{1680}{h^3}$	$-\frac{3990}{h^3}$	0	$\frac{3990}{h^3}$	$-\frac{1680}{h^3}$	$-\frac{210}{h^3}$	0

در حل عددی مساله کنترل بهینه سیستم (۱۷.۱)، از روش کالوکیشن همراه با B-اسپلاین مرتبه ۷ استفاده می‌کنیم. هدف یافتن جواب تقریبی  $y(x, t)$  و  $p(x, t)$  برای سیستم (۱.۲)-(۶.۲) می‌باشد، که به صورت زیر داده

شده است:

$$y(x, t) = \sum_{m=-\nu}^{N+\nu} c_m(t) Q_m(x), \quad (۲.۵)$$

$$p(x, t) = \sum_{m=-\nu}^{N+\nu} d_m(t) Q_m(x), \quad (۳.۵)$$

که در آن  $c_m(t)$  و  $d_m(t)$  مقادیر مجهول وابسته به زمان هستند که از شرایط اولیه، مرزی و نهایی تعیین می‌شوند. حال جواب تقریبی در نظر گرفته شده  $y(x, t)$  و  $p(x, t)$  از روابط (۲.۵) و (۳.۵) را در معادله‌های (۱.۲) - (۶.۲) به صورت زیر قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} & -c'_{-\nu}(t)Q_{-\nu}(x_i) - c'_{-\nu}(t)Q_{-\nu}(x_i) - \dots - c'_{N+\nu}(t)Q_{N+\nu}(x_i) + c_{-\nu}(t)Q''_{-\nu}(x_i) + c_{-\nu}(t)Q''_{-\nu}(x_i) + \\ & \dots + c_{N+\nu}(t)Q''_{N+\nu}(x_i) - \frac{1}{\nu}(d_{-\nu}(t)Q_{-\nu}(x_i) + d_{-\nu}(t)Q_{-\nu}(x_i) + \dots + d_{N+\nu}(t)Q_{N+\nu}(x_i)) = 0, \\ & i = 1, \dots, N - 1, t \in (0, T), \end{aligned} \quad (۴.۵)$$

$$\begin{aligned} & d'_{-\nu}(t)Q_{-\nu}(x_i) + d'_{-\nu}(t)Q_{-\nu}(x_i) + \dots + d'_{N+\nu}(t)Q_{N+\nu}(x_i) + d_{-\nu}(t)Q''_{-\nu}(x_i) + d_{-\nu}(t)Q''_{-\nu}(x_i) \\ & + \dots + d_{N+\nu}(t)Q''_{N+\nu}(x_i) + c_{-\nu}(t)Q_{-\nu}(x_i) + c_{-\nu}(t)Q_{-\nu}(x_i) + \dots + c_{N+\nu}(t)Q_{N+\nu}(x_i) = z(t, x_i), \\ & i = 1, \dots, N - 1, t \in (0, T), \end{aligned} \quad (۵.۵)$$

با شرایط اولیه

$$\begin{aligned} & c_{-\nu}(0)Q_{-\nu}(x_i) + c_{-\nu}(0)Q_{-\nu}(x_i) + \dots + c_{N+\nu}(0)Q_{N+\nu}(x_i) + c_{N+\nu}(0)Q_{N+\nu}(x_i) = y_0(x_i), \\ & i = 1, \dots, N - 1, t = 0, \end{aligned} \quad (۶.۵)$$

شرایط مرزی

$$c_{-r}(t)Q_{-r}(x_i) + c_{-r}(t)Q_{-r}(x_i) + \dots + c_{N+r}(t)Q_{N+r}(x_i) + c_{N+r}(t)Q_{N+r}(x_i) = 0, \\ i = 0, N, t \in (0, T), \quad (7.5)$$

$$d_{-r}(t)Q_{-r}(x_i) + d_{-r}(t)Q_{-r}(x_i) + \dots + d_{N+r}(t)Q_{N+r}(x_i) + d_{N+r}(t)Q_{N+r}(x_i) = 0, \\ i = 0, N, t \in (0, T), \quad (8.5)$$

و شرایط نهایی

$$d_{-r}(T)Q_{-r}(x_i) + d_{-r}(T)Q_{-r}(x_i) + \dots + d_{N+r}(T)Q_{N+r}(x_i) + d_{N+r}(T)Q_{N+r}(x_i) = 0, \\ i = 1, \dots, N-1, t = T. \quad (9.5)$$

جواب B-اسپلاین از معادلات (۴.۵)-(۹.۵) در گره‌های  $\{x_i\}_{i=0}^N$  توسط حل دستگاه زیر بدست می‌آید:

$$AX = B, \quad (10.5)$$

که در آن بعد ماتریس  $A$  برابر با  $(6N + 42) \times (4N)$  و ماتریس  $B$  یک ماتریس ستونی با  $4N$  سطر است. سیستم (۱۰.۵) را  $(N+1)$  بار توسط برنامه‌ای که براساس روش تجزیه مقدار تکین نوشته‌ایم، حل می‌کنیم و در هر مرحله  $p(x_0, t_i), p(x_1, t_i), \dots, p(x_N, t_i)$  و  $y(x_0, t_i), y(x_1, t_i), \dots, y(x_N, t_i)$  که در آن  $i = 0, 1, \dots, N$  را بدست می‌آوریم. تابع کنترل بهینه نیز به صورت زیر بدست می‌آید:

$$u(x, t) = \frac{p(x, t)}{\nu}. \quad (11.5)$$

## ۳.۵ مثال‌های عددی

در این بخش روش توضیح داده شده را روی چند مساله بررسی می‌کنیم.

مثال ۱.۳.۵. مساله کنترل بهینه سیستم (۱۷.۱) را با  $x \in [0, 1]$  و  $T = 1$  و

جدول ۲.۵: نتایج خطای میانگین مربع و خطای ماکزیمم در  $x \in [0, 1]$  و  $t$  های مختلف در مثال (۱.۳.۵).

$t$	$t = 0$	$t = 0.3$	$t = 0.5$	$t = 0.7$	$t = 1$
$L_2(y)$	$2.6549 \times 10^{-12}$	$6.5004 \times 10^{-4}$	$6.6615 \times 10^{-4}$	$1.1940 \times 10^{-4}$	۰
$L_\infty(y)$	$6.2570 \times 10^{-14}$	$1.4908 \times 10^{-5}$	$1.5277 \times 10^{-5}$	$2.7384 \times 10^{-6}$	۰
$L_2(p)$	$1.0152 \times 10^{-18}$	$2.4455 \times 10^{-10}$	$2.5048 \times 10^{-10}$	$4.4889 \times 10^{-11}$	۰
$L_\infty(p)$	$9.3352 \times 10^{-19}$	$2.2426 \times 10^{-10}$	$2.2981 \times 10^{-10}$	$4.1187 \times 10^{-11}$	۰

$$z = \nu(2(t-1)^3 x(x-1) - 6t^2(t-1)^2 - 4t(t-1)^3 + 12t(t-1)^2 x(x-1) + 3t^2(2t-2)x(x-1) + 4t(t-1)^3 + 6t^2(t-1)^2) + t^2(1-t)^3 x(x-1),$$

در نظر بگیرید که جواب تحلیلی آن برای  $(y, p, u)^T$  به صورت زیر است:

$$y = t^2(1-t)^3 x(x-1),$$

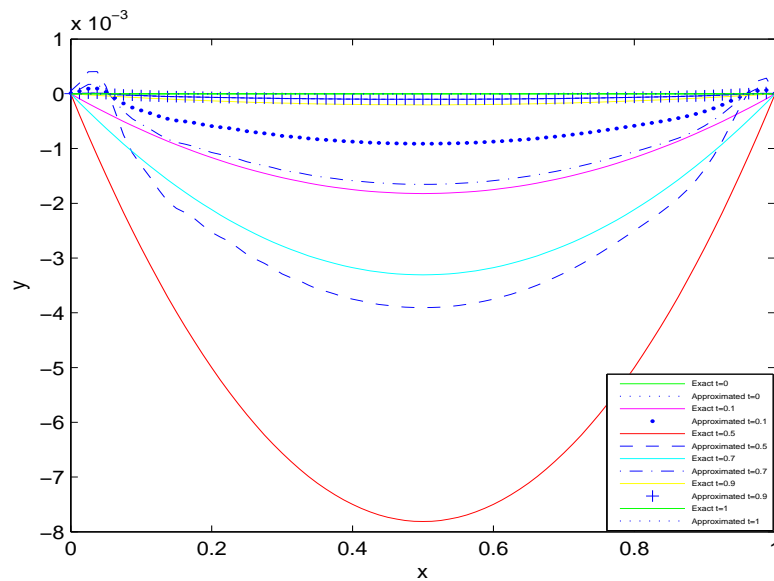
$$p = \nu(2t(t-1)^3 x(x-1) - 2t^2(t-1)^3 + 3t^2(t-1)^2 x(x-1)),$$

$$u = \frac{p}{\nu} = 2t(t-1)^3 x(x-1) - 2t^2(t-1)^3 + 3t^2(t-1)^2 x(x-1).$$

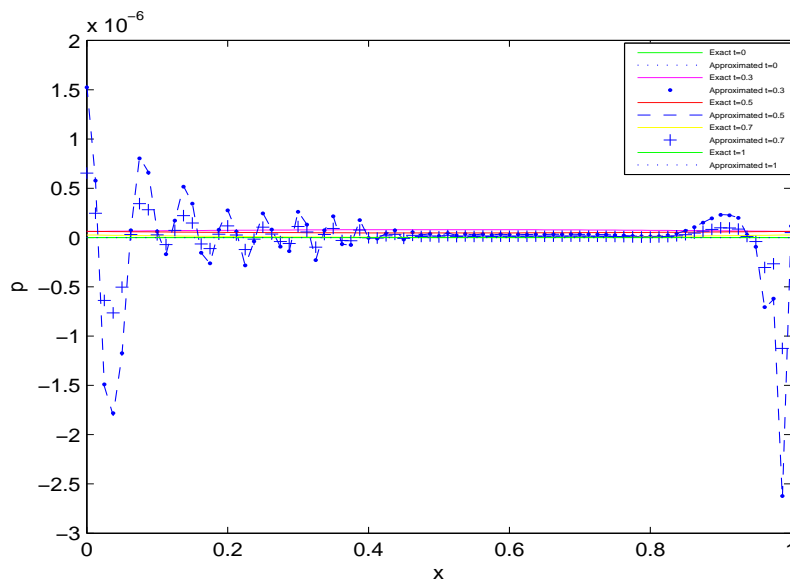
حال به ازای  $N = 80$  و  $\nu = 10^{-6}$  خطای میانگین مربع و خطای ماکزیمم برای متغیرهای  $y(x, t)$  و  $p(x, t)$  در زمان‌های  $0, 0.3, 0.5, 0.7, 1$  حساب شده و نتایج در جدول (۲.۵) ارائه شده است. اینک برای  $N = 80$  به ازای  $t$  های متفاوت از مساله و  $\nu = 10^{-6}$  نمودار دوبردی جواب تحلیلی و جواب تقریبی متغیرهای  $y(x, t)$  و  $p(x, t)$  در شکل‌های (۱.۵) و (۲.۵) نمایش داده شده است. همچنین برای حالتی که  $(x, t) \in [0, 1] \times [0, 1]$  تغییر می‌کند، نمودار سه‌بعدی خطای  $y - \hat{y}$  به ازای  $N = 38$  و  $\nu = 10^{-7}$  و نیز خطای  $p - \hat{p}$  برای  $N = 20$  و  $\nu = 10^{-8}$  در شکل‌های (۳.۵) و (۴.۵) نشان داده شده است. در ادامه نمودار سه‌بعدی جواب تقریبی کنترل  $u(x, t)$  به ازای  $N = 20$  و  $\nu = 10^{-3}$  در شکل (۵.۵) نمایش داده شده است.

**مثال ۲.۳.۵.** مساله کنترل بهینه سیستم (۱۷.۱) را با  $x \in [0, 1]$  و  $T = 1$

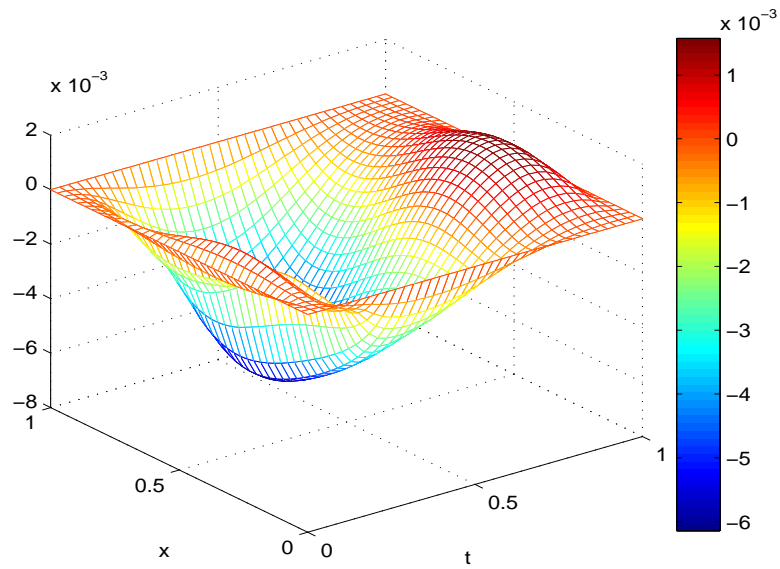
$$z = \nu(2\pi^2 t(t-1)^2(t-2)^2 + \pi^2 t^2(2t-2)(t-2)^2 + \pi^2 t^2(2t-4)(t-1)^2 + \pi^4 t^2(t-1)^2)$$



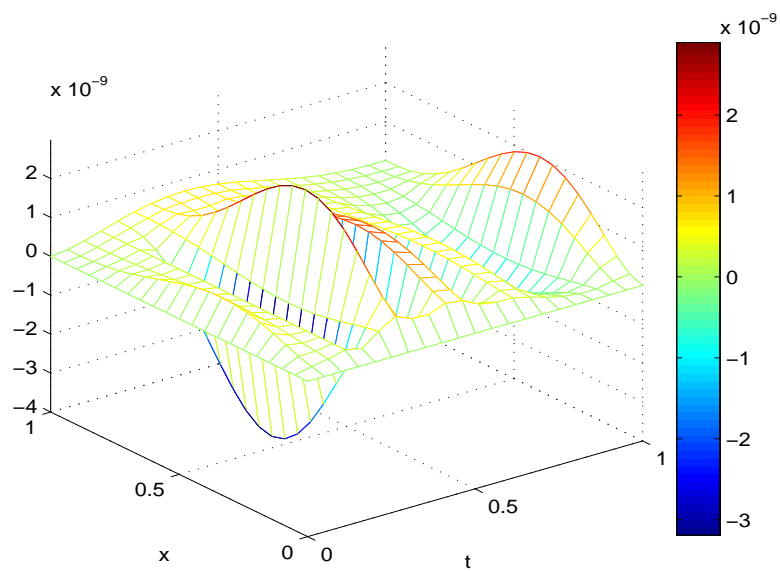
شکل ۱.۵: مقایسه جواب تقریبی و تحلیلی  $y(x, t)$  در زمان‌های مختلف در مثال (۱.۳.۵).



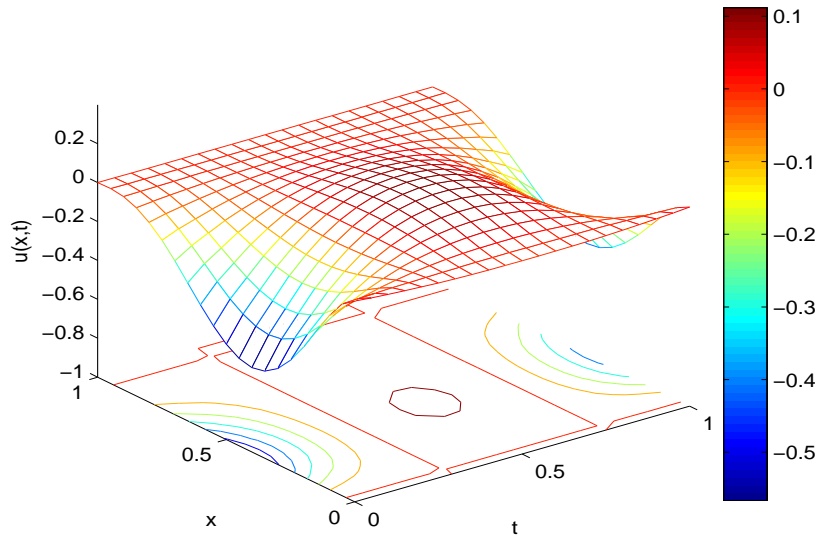
شکل ۲.۵: مقایسه جواب تقریبی و تحلیلی  $p(x, t)$  در زمان‌های مختلف در مثال (۱.۳.۵).



شکل ۳.۵: خطای  $y - \hat{y}$  با  $N = ۳۸$  و  $\nu = ۱۰^{-۷}$  در مثال (۱.۳.۵).



شکل ۴.۵: خطای  $p - \hat{p}$  با  $N = ۲۰$  و  $\nu = ۱۰^{-۸}$  در مثال (۱.۳.۵).



شکل ۵.۵: جواب تقریبی  $u(x, t)$  با  $N = 20$  و  $\nu = 10^{-3}$  در مثال (۱.۳.۵).

$$(t-2)^2 - 2t^2(t-1)^2 - 2t^2(t-2)^2 - 2(t-1)^2(t-2)^2 - 2t^2(2t-2)(2t-4) - 4t(2t-2)(t-2)^2 - 4t(2t-4)(t-1)^2 - 2\pi^2 t(t-1)^2(t-2)^2 - \pi^2 t^2(2t-2)(t-2)^2 - \pi^2 t^2(2t-4)(t-1)^2 \sin(\pi x) + t^2(1-t)^2(2-t)^2 \sin(\pi x),$$

در نظر بگیرید که جواب تحلیلی آن برای  $(y, p, u)^T$  به صورت زیر است:

$$y = t^2(1-t)^2(2-t)^2 \sin(\pi x),$$

$$p = \nu(-t^2(2t-2)(t-2)^2 - t^2(2t-4)(t-1)^2 - 2t(t-1)^2(t-2)^2 - \pi^2 t^2(t-1)^2(t-2)^2 \sin(\pi x),$$

$$u = \frac{p}{\nu} = (-t^2(2t-2)(t-2)^2 - t^2(2t-4)(t-1)^2 - 2t(t-1)^2(t-2)^2 - \pi^2 t^2(t-1)^2(t-2)^2 \sin(\pi x).$$

در مقایسه جواب بدست آمده از روش تقریبی B-اسپلاین مرتبه ۵ با جواب تحلیلی مساله، نتایج خطای میانگین مربع و خطای ماکزیمم به ازای  $N = 10$  و  $\nu = 10^{-5}$  در زمان‌های ۱، ۰/۷۵، ۰/۵، ۰/۲۵، ۰ در جدول (۳.۵) نشان داده شده است. همچنین نمودار دوبعدی متغیرهای  $y(x, t)$  و  $p(x, t)$  به ازای  $t$  های متفاوت از مساله، برای  $N = 10$  و  $\nu = 10^{-5}$  در شکل‌های (۶.۵) و (۷.۵) نمایش داده شده

جدول ۳.۵: نتایج خطای میانگین مربع و خطای ماکزیمم در  $x \in [0, 1]$  و  $t$  های مختلف در مثال (۲.۳.۵)

$t$	$t = 0$	$t = 0.25$	$t = 0.5$	$t = 0.75$	$t = 1$
$L_2(y)$	$7.7888 \times 10^{-9}$	$1.5 \times 10^{-2}$	$2.55 \times 10^{-2}$	$3.9 \times 10^{-3}$	$4.8680 \times 10^{-10}$
$L_\infty(y)$	$1.5972 \times 10^{-9}$	$2.9 \times 10^{-3}$	$4.9 \times 10^{-3}$	$7.5441 \times 10^{-4}$	$9.9823 \times 10^{-11}$
$L_2(p)$	$3.1164 \times 10^{-16}$	$9.1078 \times 10^{-10}$	$8.5624 \times 10^{-10}$	$1.1668 \times 10^{-10}$	$1.9478 \times 10^{-17}$
$L_\infty(p)$	$7.7717 \times 10^{-17}$	$2.1942 \times 10^{-10}$	$2.8719 \times 10^{-10}$	$3.6706 \times 10^{-11}$	$4.8573 \times 10^{-18}$

است. نمودار سه‌بعدی خطای  $y - \hat{y}$  برای  $N = 20$  و  $\nu = 10^{-6}$  و نمودار سه‌بعدی خطای  $p - \hat{p}$  به‌ازای  $N = 20$  و  $\nu = 10^{-8}$  به‌ترتیب در شکل‌های (۸.۵) و (۹.۵) نشان داده شده است. نمودار سه‌بعدی جواب تقریبی کنترل  $u(x, t)$  برای  $N = 20$  و  $\nu = 10^{-2}$  در نمودار (۱۰.۵) نمایش داده شده است.

**مثال ۳.۳.۵.** در این مثال، مساله کنترل بهینه سیستم (۱۷.۱) را با  $x \in [0, 1]$  و  $T = 1$

$$z = \nu((16\pi^2 t^3 (t-1)^3 - 3t^3(2t-2) - 18t^2(t-1)^2 - 6t(t-1)^3) \cos(2\pi x)) + \nu(3t^3(2t-2) + 18t^2(t-1)^2 + 6t(t-1)^3) + t^3(1-t)^3(1 - \cos(2\pi x)),$$

در نظر بگیرید که جواب تحلیلی آن برای  $(y, p, u)^T$  به‌صورت زیر است:

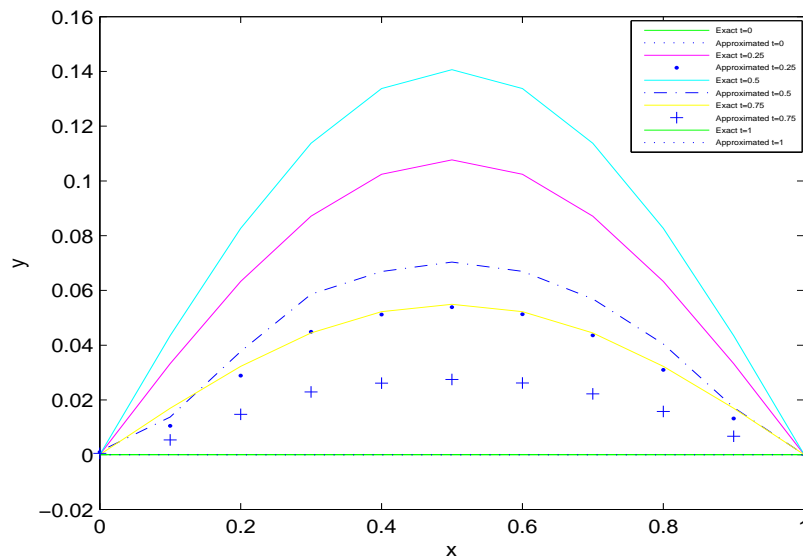
$$y = t^3(1-t)^3(1 - \cos(2\pi x)),$$

$$p = \nu((-3t^2(t-1)^3 - 3t^3(t-1)^2)(\cos(2\pi x) - 1) - 4\pi^2 t^3(t-1)^3 \cos(2\pi x)),$$

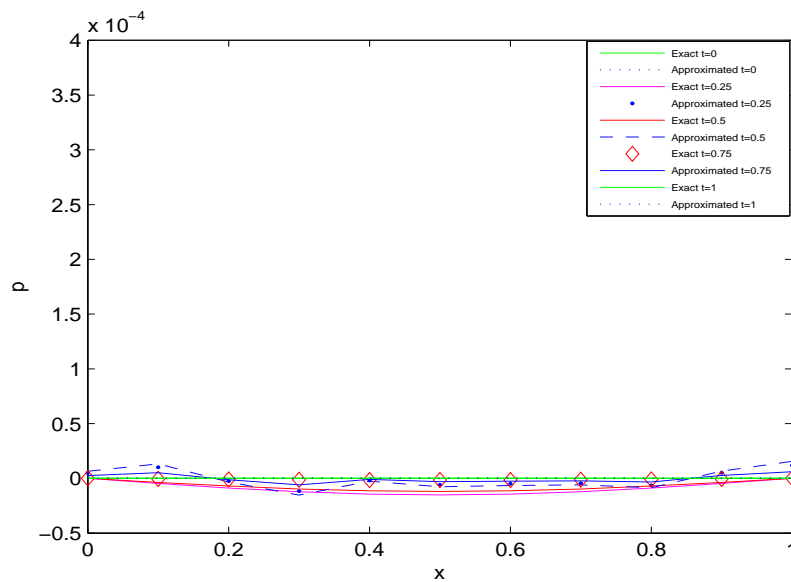
$$u = \frac{p}{\nu} = (-3t^2(t-1)^3 - 3t^3(t-1)^2)(\cos(2\pi x) - 1) - 4\pi^2 t^3(t-1)^3 \cos(2\pi x).$$

با داشتن جواب تحلیلی مساله، دقت طرح ارائه شده توسط نرم‌های  $L_2$  و  $L_\infty$  در زمان‌های  $t = 0, 0.2, 0.4, 0.6$  با  $N = 50$  و  $\nu = 10^{-3}, 10^{-5}, 10^{-7}$  محاسبه شده و در جدول (۴.۵) نمایش داده شده است. به‌ازای  $t$  های مختلف از بازه  $[0, 1]$  نمودار دوبعدی جواب تقریبی و تحلیلی مساله به‌ازای  $N = 50$  و  $\nu = 10^{-3}, 10^{-7}$  در شکل‌های (۱۱.۵) و (۱۲.۵) رسم و با هم مقایسه شده‌اند. همچنین نمودار سه‌بعدی خطای  $y - \hat{y}$  به‌ازای  $N = 38$  و  $\nu = 10^{-7}$  و نمودار سه‌بعدی خطای  $p - \hat{p}$  به‌ازای  $N = 20$  و  $\nu = 10^{-8}$

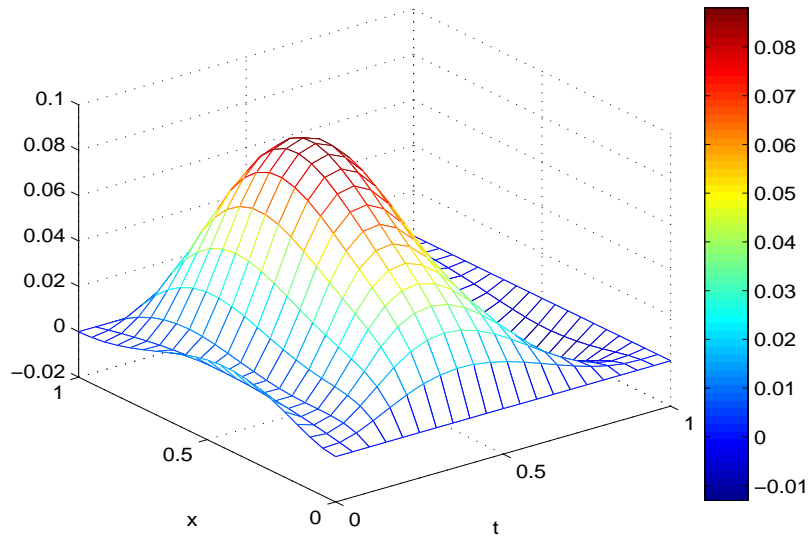




شکل ۶.۵: مقایسه جواب تحلیلی و جواب تقریبی متغیر  $y(x, t)$  در زمان‌های مختلف در مثال (۲.۳.۵).

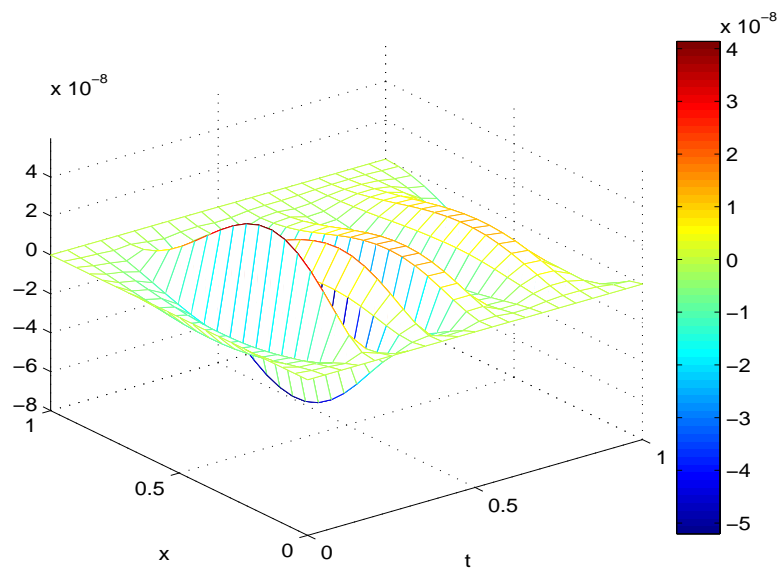


شکل ۷.۵: مقایسه جواب تحلیلی و جواب تقریبی متغیر  $p(x, t)$  در زمان‌های مختلف در مثال (۲.۳.۵).

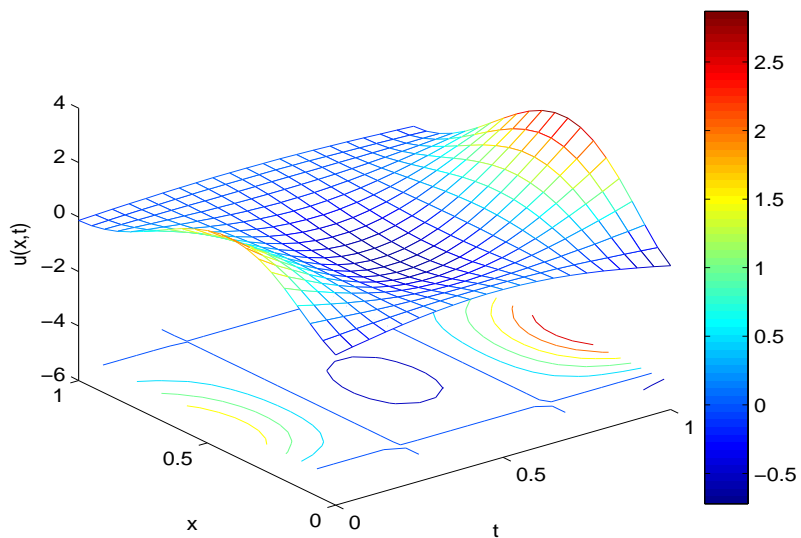


شکل ۸.۵: خطای  $y - \hat{y}$  با  $N = 20$  و  $\nu = 10^{-6}$  در مثال (۲.۳.۵).

و همچنین نمودار سه‌بعدی جواب تقریبی کنترل  $u(x, t)$  با  $N = 20$  و  $\nu = 10^{-3}$  به ترتیب در شکل‌های (۱۳.۵)-(۱۵.۵) نمایش داده شده است.



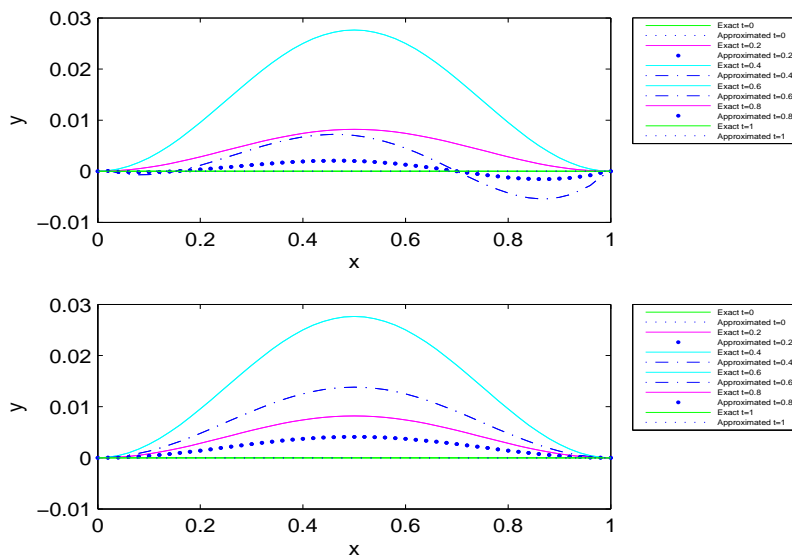
شکل ۹.۵: خطای  $p - \hat{p}$  با  $N = 20$  و  $\nu = 10^{-8}$  در مثال (۲.۳.۵).



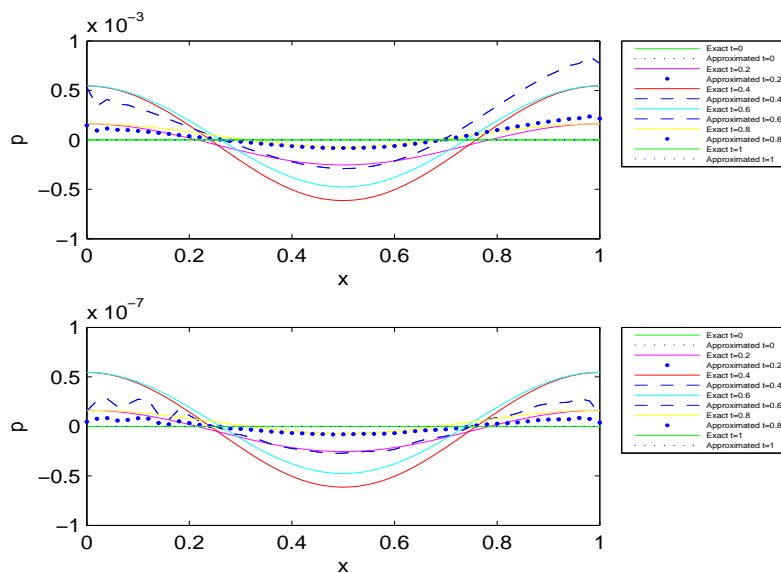
شکل ۱۰.۵: جواب تقریبی کنترل  $u(x,t)$  با  $N = 20$  و  $\nu = 10^{-2}$  در مثال (۲.۳.۵).

جدول ۴.۵: نتایج خطای میانگین مربع و خطای ماکزیمم در  $x \in [0, 1]$  و  $t$  های مختلف در مثال (۳.۳.۵).

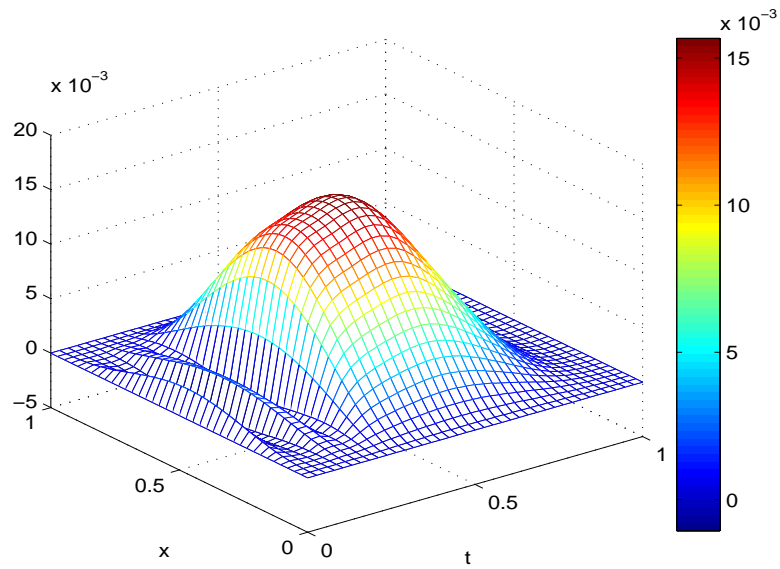
$t$	$t = 0$	$t = 0.2$	$t = 0.4$	$t = 0.6$	$t = 0.8$	$t = 1$
$\nu = 10^{-3}$						
$L_2(y)$	0	$9.0072 \times 10^{-4}$	$1.02 \times 10^{-2}$	$1.02 \times 10^{-2}$	$9.0073 \times 10^{-4}$	0
$L_\infty(y)$	0	$3.9056 \times 10^{-5}$	$4.3587 \times 10^{-4}$	$4.3586 \times 10^{-4}$	$3.9056 \times 10^{-5}$	0
$L_2(p)$	0	$5.6295 \times 10^{-7}$	$2.4848 \times 10^{-6}$	$1.2372 \times 10^{-6}$	$6.0559 \times 10^{-8}$	0
$L_\infty(p)$	0	$2.9106 \times 10^{-8}$	$1.0516 \times 10^{-7}$	$9.0331 \times 10^{-8}$	$5.6928 \times 10^{-9}$	0
$\nu = 10^{-5}$						
$L_2(y)$	0	$3.1491 \times 10^{-4}$	$3.6 \times 10^{-3}$	$3.6 \times 10^{-3}$	$3.1491 \times 10^{-4}$	0
$L_\infty(y)$	0	$1.6667 \times 10^{-5}$	$1.8959 \times 10^{-4}$	$1.8959 \times 10^{-4}$	$1.6667 \times 10^{-5}$	0
$L_2(p)$	0	$1.0025 \times 10^{-10}$	$8.1571 \times 10^{-10}$	$7.2747 \times 10^{-10}$	$6.5365 \times 10^{-11}$	0
$L_\infty(p)$	0	$3.3445 \times 10^{-11}$	$3.8127 \times 10^{-10}$	$3.8106 \times 10^{-10}$	$3.3361 \times 10^{-11}$	0
$\nu = 10^{-7}$						
$L_2(y)$	0	$3.1453 \times 10^{-4}$	$3.6 \times 10^{-3}$	$3.6 \times 10^{-3}$	$3.1453 \times 10^{-4}$	0
$L_\infty(y)$	0	$1.6594 \times 10^{-5}$	$1.8729 \times 10^{-4}$	$1.8729 \times 10^{-4}$	$1.6594 \times 10^{-5}$	0
$L_2(p)$	0	$5.3423 \times 10^{-15}$	$2.7108 \times 10^{-14}$	$1.7679 \times 10^{-14}$	$1.6175 \times 10^{-15}$	0
$L_\infty(p)$	0	$3.0512 \times 10^{-16}$	$1.7531 \times 10^{-15}$	$1.7531 \times 10^{-15}$	$1.5390 \times 10^{-16}$	0



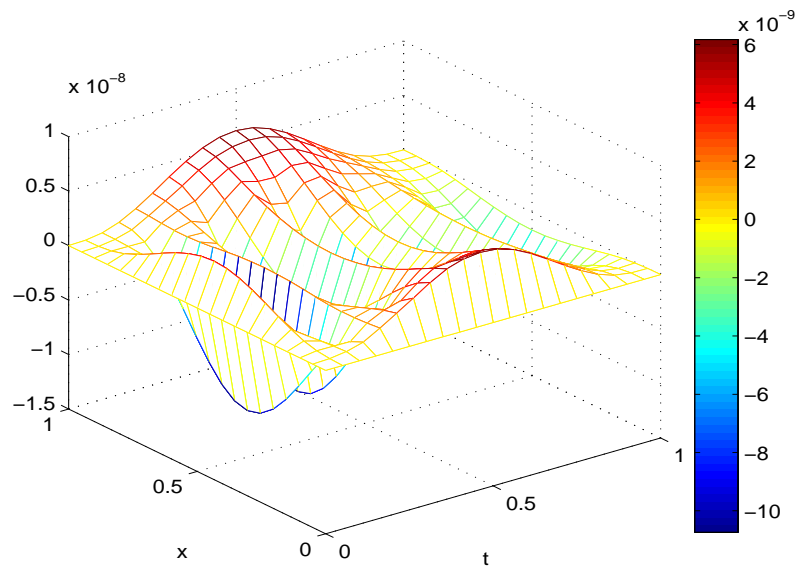
شکل ۱۱.۵: مقایسه جواب تقریبی و تحلیلی  $y(x, t)$  با  $\nu = 10^{-3}$  در شکل بالا و  $\nu = 10^{-7}$  در شکل پایین به‌ازای  $t$  های مختلف در مثال (۳.۳.۵).



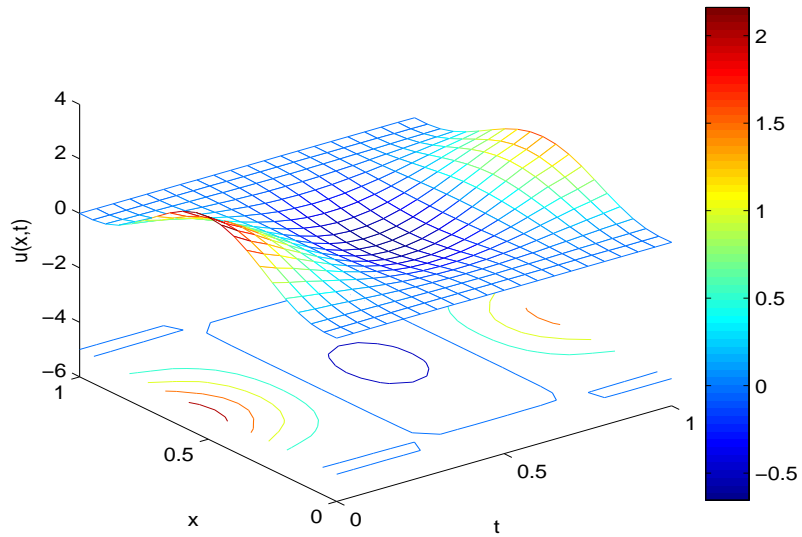
شکل ۱۲.۵: مقایسه جواب تقریبی و تحلیلی  $p(x, t)$  با  $\nu = 10^{-3}$  در شکل بالا و  $\nu = 10^{-7}$  در شکل پایین به‌ازای  $t$  های مختلف در مثال (۳.۳.۵).



شکل ۱۳.۵: خطای  $y - \hat{y}$  با  $N = 38$  و  $\nu = 10^{-7}$  در مثال (۳.۳.۵).



شکل ۱۴.۵: خطای  $p - \hat{p}$  با  $N = 20$  و  $\nu = 10^{-8}$  در مثال (۳.۳.۵).



شکل ۱۵.۵: جواب تقریبی کنترل  $u(x, t)$  با  $N = 20$  و  $\nu = 10^{-3}$  در مثال (۳.۳.۵).

## نتایج و پیشنهاداتی برای کارهای آینده

در این پایان نامه، هدف ما بررسی حل عددی مسئله کنترل بهینه دارای معادلات با مشتقات جزئی سهموی بود. چون معادله دیفرانسیل نقش بسیار مهم در ریاضیات کاربردی دارند. مسائل بهینه‌سازی متنوعی در پزشکی، مهندسی، فیزیک و... را می‌توان به زبان سیستم‌های پارامتر توزیعی بیان کرد. اما به دلیل اینکه ممکن است در حل مستقیم<sup>۱</sup> این مسائل با مشکلاتی از جمله بزرگ شدن بعد مسئله، کارا نبودن نرم‌افزار، غیرخطی شدن سریع مسئله و... مواجه شویم، لذا از روش‌های غیرمستقیم<sup>۲</sup> استفاده می‌کنیم تا جواب مورد نیاز در بازه‌های مختلف را بدست آوریم. توابعی که در اینجا به عنوان یکی از ابزار اساسی در حل عددی ما مورد استفاده قرار می‌گیرند توابع B-اسپلاین هستند که پایه‌های بسیار مناسب برای فضاهای جواب می‌باشند. ما در فصل‌های ۲ تا ۵، به بررسی روش‌های B-اسپلاین مرتبه ۳، ۴، ۵ و ۷ برای حل مسئله کنترل بهینه پارامتر توزیعی سهموی و ارائه نرم‌های  $L_2$  و  $L_\infty$  به ازای  $\nu$  های متفاوت در مثال سوم از هر فصل می‌پردازیم. واضح است که با کاهش ضریب هزینه کنترل  $\nu$ ، مساله کنترل بهینه به جواب دقیق‌تری خواهد رسید، از طرفی هرچه مرتبه پایه B-اسپلاین افزایش می‌یابد تعداد نقاط گره‌ای افزایش یافته و ما ملزم به یافتن جواب در بازه‌های کوچکتری می‌شویم، لذا جوابی که در زیر بازه‌های کوچکتر بدست می‌آید به جواب دقیق‌تر خواهد بود، این نتیجه‌گیری نشان‌دهنده این است که، همه روش‌های تقریبی استفاده شده در این پایان‌نامه یک تکنیک کاربردی و همچنین تقریبی بسیار خوب از جواب مساله می‌باشند.

برای کارهای آتی می‌توان این دسته از مسائل کنترل بهینه سیستم‌های پارامتر توزیعی سهموی را با استفاده از

---

<sup>۱</sup>Direct

<sup>۲</sup>Indirect



توابع پایه‌ای دیگر مثل موجک‌ها<sup>۳</sup> یا توابع پایه‌ای شعاعی<sup>۴</sup> حل نمود. همچنین می‌توان از مسائل کنترل بهینه سیستم‌های پارامتر توزیعی بیضوی و هذلولوی نیز استفاده کرد.

---

<sup>۳</sup>Wavelet

<sup>۴</sup>Radial Basis Functions

## مراجع

- [1] S. J. Farlow, (1982), "**Partial Differential Equation for Scientists and Engineers**", John Wiley, New York.
- [2] I. Lasiecka, R. Triggiani, (2000), "**Control Theory for Partial Differential Equations**", Cambridge University press.
- [3] A. Fursikov, (2000), "**Optimal Control of Distributed Systems**", Theory and Applications, AMS, Providence.
- [4] M. D. Gunzburger, (2003), "**Perspectives in flow control and optimization**", in: Advances in Design and Control, SIAM, Philadelphia.
- [5] J. -L. Lions, (1972), "**Some Aspects of the Control of Distributed Parameter Systems**", SIAM Publications.
- [6] P. Neittaanmaki, D. Tiba, (1994), "**Optimal Control of Nonlinear Parabolic Systems**". Theory, Algorithms and Applications, M. Dekker, New York.
- [7] D. Meidner, B. Vexler, (2008), "A priori error estimates for space-time finite element discretization of parabolic optimal control problems. Part I: Problems without control constraints", **SIAM J. Control Optim.**, 47: 1150–1177.
- [8] A. Rösch, (2006), "Error estimates for parabolic optimal control problems with control constraints", **Z. Anal. Anwend.**, 23: 353–376.

- [9] R. S. McNight, W. E. Bosarge, (1973), "The Ritz–Galerkin procedure for parabolic control problems", **SIAM J. Control Optim.**, 11: 510–524.
- [10] W. -B. Liu, N. Yan, (2003), "A posteriori error estimates for optimal control problems governed by parabolic equations", **Numer. Math.**, 93: 497–521.
- [11] W. -B. Liu, H. -P. Ma, T. Tang, N. Yan, (2004), "A posteriori error estimates for DG time-stepping method for optimal control problems governed by parabolic equations", **SIAM J. Numer. Anal.**, 42 (3): 1032–1061.
- [12] R. Winther, (1980), "Initial value methods for parabolic control problems", **Math. Comp.**, 34: 115–125.
- [13] K. Malanowski, (1981), "Convergence of approximations vs. regularity of solutions for convex, control-constrained optimal-control problems", **Appl. Math. Optim.**, 8: 69–95.
- [14] I. Lasiecka, (1984), "Rietz–Galerkin approximation of the time optimal boundary control problem for parabolic systems with Dirichlet boundary conditions", **SIAM J. Control Optim.**, 22: 477–500.
- [15] K. Chrysafinos, M. D. Gunzburger, L. S. Hou, (2006), "Semidiscrete approximations of optimal Robin boundary control problems constrained by semilinear parabolic PDE", **J. Math. Anal. Appl.**, 323: 891–912.
- [16] A. Borzi, (2003), "Multigrid method for parabolic distributed optimal control problems", **Jornal of Computational and Applied Mathematics**, 157: 365–382.
- [17] D. R. Kincaid, E. Ward Cheney, (2011), "**Numerical Analysis Mathematics of Scientific Computing**", Cengage Learning.

- [18] R. C. Mittal, R. K. Jain, (2012), "Redefined cubic B-splines collocation method for solving convection–diffusion equations", **Applied Mathematical Modelling**, 36: 5555-5573.
- [19] S. Chaabane, C. Elhechmi, M. Jaoua, (2008), "Error estimates in smoothing noisy data using cubic B-splines", **Numerical Analysis**, 346: 107-112.
- [20] I. Juha'sz, M. Hoffmann, (2004), "Constrained shape modification of cubic B-spline curves by means of knots", **Computer-Aided Design**, 36: 437-445.
- [21] Ī. DaĜ, D. Irk, B. Saka, (2005), "A numerical solution of the Burgers' equation using cubic B-splines", **Applied Mathematics and Computation**, 163: 199-211.
- [22] P. M. Prenter, (1975), "**Splines and Variational Methods**", John Wiley, New York.
- [23] A. Quarteroni, R. Sacco, F. Saleri, (2007), "**Numerical Mathematics**", second edition, Springer-Verlag, Berlin.
- [24] M. Dehghan, M. Tatari, (2006), "The Radial Basis Functions Method for Identifying an Unknown Parameter in a Parabolic Equation with Overspecified Data", **Faculty of Mathematics and Computer Science**, 984–997.
- [25] B. Saka, Ī. DaĜ, (2009), "Quartic B-spline Galerkin approach to the numerical solution of the KdVB equation", **Applied Mathematics and Computation**, 215: 746-758.
- [26] B. Saka, Ī. DaĜ, (2007), "Quartic B-spline collocation method to the numerical solutions of the Burgers' equation", **Chaos, Solitons & Fractals**, 32: 1125-1137.
- [27] F. Gao, C. M. Chi, (2006), "Solving third-order obstacle problems with quartic B-splines", **Applied Mathematics and Computation**, 180: 270-274.

- [28] K. R. Raslan, (2005), "Collocation method using quartic B-spline for the equal width (EW) equation", **Applied Mathematics and Computation**, 168: 795-805.
- [29] F. i. Haq, S. u. Islam, I. A. Tirmizi, (2010), "A numerical technique for solution of the MRLW equation using quartic B-splines", **Applied Mathematical Modelling**, 34: 4151-4160.
- [30] S. Rostami, S. Shojaee, A. Moeinadini, (2012), "A parabolic acceleration time integration method for structural dynamics using quartic B-spline functions", **Applied Mathematical Modelling**, 36: 5162-5182.
- [31] F. G. Lang, X. P. Xu, (2012), "Quintic B-spline collocation method for second order mixed boundary value problem", **Computer Physics Communications**, 183: 913-921.
- [32] D. Irk, Ī. DaĀ, (2011), "Quintic B-spline collocation method for the generalized nonlinear Schro" dinger equation", **Journal of the Franklin Institute**, 348: 378-392.
- [33] Ī. DaĀ, B. Sakab, D. Irk, (2006), "Galerkin method for the numerical solution of the RLW equation using quintic B-splines", **Journal of Computational and Applied Mathematics**, 190: 532-547.
- [34] I. Craveroa, C. Mannib, M. L. Sampolic, (2008), "Geometric construction of quintic parametric B-splines", **Journal of Computational and Applied Mathematics**, 221: 355-366.
- [35] R. C. Mittal, G. Arora, (2012), "Quintic B-spline collocation method for numerical solution of the Kuramoto-Sivashinsky equation", **Commun Nonlinear Sci Numer Simulat**, 15: 2798-2808.

- 
- [36] K. R. Raslan, T. S. EL-Danaf, (2012), "Solitary waves solutions of the MRLW equation using quintic B-splines", **Journal of King Saud University (Science)**, 22: 161–166.
- [37] M. A. Ramadan, T. S. El-Danaf, F. E. I. Abd Alaal, (2005), "A numerical solution of the Burgers equation using septic B-splines", **Chaos, Solitons and Fractals**, 26: 1249–1258.
- [38] T. S. Aly El-Danaf, (2012), "Septic B-spline method of the Korteweg-de Vries–Burger's equation", **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, 13: 554–566.

# واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Integration	انتگرالگیری
Partition	افراز
Elliptic	بیضوی
Recursion	بازگشتی
Optimization	بهینه‌سازی
Continuity	پیوستگی
Approximation	تقریب
Distributed	توزیعی
Linear combination	ترکیب خطی
Unique solution	جواب یکتا
Heat	حرارت
Error	خطا
Mean Square Error	خطای میانگین مربع
Maximum Error	خطای ماکزیمم
Fluid dynamics	دینامیک سیالات
Accuracy	دقت
Numerical Procedure	رویه عددی
Tracking	رهگیری
Parabolic	سه‌موی
Initial Condition	شرط اولیه
Boundary Condition	شرط مرزی
Terminal Condition	شرط نهایی
Current	شدت جریان
Flux	شار
Quasi-inverse	شبه معکوس
Network	شبکه
Coefficient	ضریب
Nonlinear	غیر خطی
Quantum	کوانتوم
Control	کنترل
Navier-stokes equation	معادلات ناویه - استوکس

---

Linear independent	مستقل خطی
Minimum	مینیمم
Maximum	ماکزیمم
Differentiable	مشتق پذیر
Differentiation	مشتق گیری
Wave	موج
Minimal	مینیمال
Norm	نرم
Hyperbolic	هذلولوی
Homogeneous	همگن
Cost	هزینه
Uniform	یکنواخت





## Abstract

In this thesis, The optimal control problem considered here is associated to the minimization of the tracking functional subject to parabolic equations is examined. At first, in chapter 1 the corresponding optimality system of the original problem is first given. In chapters 2-5 Cubic, Quartic, Quintic and Septic B- spline collocation methods that solves parabolic distributed optimality system, are then investigated. The end of chapter, accuracy properties of Cubic, Quartic, Quintic and Septic B-spline collocation methods are showed by using several numerical simulations, that the resulting scheme also shows robustness with respect to changes of the value of cost of the control, is sufficiently small. Note that we have computed the numerical results by Matlab programming.

**Keywords:** *Optimal Control Problem, B-Spline, Parabolic Distributed Optimality System, Collocation Method*



**Shahrood University of Technology**

**Faculty of Mathematical**

**Department of Mathematics**

**M.S Thesis**

**Optimal Control of Distributed Parameter  
Systems Using Collocation Method**

**By:**

**Farzaneh Kheyrintaj**

**Supervisor:**

**Dr Alireza Nazemi**

**Date**

**19 Sep 2012**