به‌نام آن‌که جان را فکرت آموخت

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

عنوان

حل معادلات دیفرانسیل جبری جزیی با روش‌های نیمه‌تحلیلی

استاد راهنما

دکتر مهدی قوتمند

استاد مشاور

دکتر علی مس‌فروش

دانشجو

سیده رقیه میرباقری

بهمن ۱۳۹۲

دانشگاه صنعتی شاهرود

مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره

باسمه تعالی

شماره:

تاریخ:

ویرایش:

فرم صورت جلسه دفاع از پایان نامه تحصیلی دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) نتیجه ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خانم **سیده رقیه میرباقری**. رشته **ریاضی کاربردی** گرایش **آنالیز عددی** تحت عنوان **حل معادلات دیفرانسیل جبری جزیی با روش‌های نیمه‌تحلیلی**

که در تاریخ ۹۲/۱۱/۳۰ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

قبول (با درجه : خوب امتیاز ۱۷/۸۵) ☐ دفاع مجدد ☐ مردود ☐

۱ـ عالی (۲۰ ـ ۱۹) ۲ـ بسیار خوب (۱۸/۹۹ ـ ۱۸)

۳ـ خوب (۱۷/۹۹ ـ ۱۶) ۴ـ قابل قبول (۱۵/۹۹ ـ ۱۴)

۵- نمره کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول

عضو هیأت داوران	نام ونام خانوادگی	مرتبهٔ علمی	امضاء
۱ـ استاد راهنما	دکتر مهدی قوتمند	استادیار	
۲ـاستاد مشاور	دکتر علی مس‌فروش	استادیار	
۳ـ نماینده شورای تحصیلات تکمیلی	دکتر احمد زیره	دانشیار	
۴ـ استاد ممتحن	دکتر حجت احسنی طهرانی	استادیار	
۵ـ استاد ممتحن	دکتر علیرضا ناظمی	استادیار	

رئیس دانشکده: دکتر احمد زیره امضاء

دانشکده ریاضی - دانشگاه صنعتی شاهرود

خدایا...[1]

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

اگر تنهاترین تنها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن‌هاست...

[1] مناجاتی از دکتر علی شریعتی.

تقدیم به خانواده عزیزم

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر مهدی قوتمند، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از جناب آقای دکتر علی مس‌فروش که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.

در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکر می‌کنم از خواهران عزیزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

سیده رقیه میرباقری

بهمن ۱۳۹۲

تعهدنامه

اینجانب **سیده رقیه میرباقری** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی کاربردی** **دانشکده علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **حل معادلات دیفرانسیل جبری جزیی با روش‌های نیمه‌تحلیلی** ، تحت راهنمایی **دکتر مهدی قوتمند** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تاکنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام " دانشگاه شاهرود " یا " Shahrood University " به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی‌که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی‌که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی‌که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

سیده رقیه میرباقری
بهمن ۱۳۹۲

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

معادلات دیفرانسیل جبری جزیی خطی به‌شکل $Au_t(t,x) + Bu_{xx}(t,x) + Cu(t,x) = f(t,x)$ زمانی مورد مطالعه قرار می‌گیرند که حداقل یکی از ماتریس‌های $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ منفرد باشد. حالت $A = 0$ و $B = 0$ به‌ترتیب به معادلات دیفرانسیل معمولی و معادلات دیفرانسیل جبری منتهی می‌شوند. بنابراین فرض می‌کنیم که $A, B \neq 0$. برای این سیستم‌ها یک اندیس دیفرانسیل زمانی یکنواخت و یک اندیس دیفرانسیل مکانی را معرفی می‌کنیم. این اندیس‌ها به‌ترتیب به‌وسیله‌ی یک تبدیل فوریه و لاپلاس مشخص می‌شوند. علاوه بر این یک جفت اندیس اختلال را معرفی می‌کنیم و رابطه‌ی بین اندیس دیفرانسیل زمانی یکنواخت و اندیس دیفرانسیل مکانی را نشان می‌دهیم. همچنین، تعداد شرایط اولیه و مرزی را برای خانواده‌های منتظم به‌دست می‌آوریم.
روش پسرو زمانی، مرکزی مکانی را برای حل عددی معادلات دیفرانسیل جبری جزیی به‌کار می‌بریم. در پایان، خطای برش کامل و خطای گسسته‌سازی کامل را معرفی می‌کنیم و نرمشان را بررسی می‌کنیم.

کلمات کلیدی: اندیس اختلال، اندیس دیفرانسیل زمانی، اندیس دیفرانسیل مکانی، گسسته‌سازی زمانی، گسسته‌سازی فضایی

فهرست مطالب

۱ مفاهیم و تعاریف اولیه ۱
۱.۱ معادلات دیفرانسیل جزیی ۱
۱.۱.۱ روشهای حل معادلات دیفرانسیل جزیی ۲
۲.۱.۱ دسته‌بندی $PDEs$ ۳
۲.۱ معادلات دیفرانسیل جبری خطی با ضرایب ثابت ۴
۳.۱ تبدیلات لاپلاس ۶
۱.۳.۱ توابع پله‌ای ۹
۴.۱ انتگرال فوریه ۱۰
۱.۴.۱ تعریف انتگرال فوریه ۱۰
۵.۱ حاصل‌ضرب کرونکر ۱۱
۶.۱ روش اویلر ضمنی ۱۲

۲ معادلات دیفرانسیل جبری جزیی ($PDAEs$) ۱۵
۱.۲ تاریخچه ۱۵
۲.۲ مقدمه ۱۶
۳.۲ اندیس‌های معادله دیفرانسیل جبری جزیی ۱۸
۱.۳.۲ تبدیل لاپلاس و اندیس مکانی ۱۹
۲.۳.۲ تبدیل فوریه و اندیس زمانی ۲۲
۳.۳.۲ اندیس اختلال PDAE ۳۰
۴.۲ نمایش پایدار جواب ۳۲
۵.۲ شرایط مرزی و اولیه برای خانواده‌های منتظم (A, B) ۳۳

۳ حل $PDAEs$ با روش‌های نیمه‌تحلیلی ۳۹
۱.۳ گسسته سازی مکانی و همگرایی ۳۹
۲.۳ گسسته‌سازی زمانی و همگرایی گسسته‌سازی کامل ۴۱
۱.۲.۳ روش BTCS ۴۱
۲.۲.۳ نمایش فوریه‌ی متناهی خطای گسسته‌سازی کامل ۵۰

۴ مثال عددی ۵۳
آ کد متلب مثال فصل ۴ ۶۰
مراجع ۶۲
واژه‌نامه فارسی به انگلیسی ۶۶
واژه‌نامه انگلیسی به فارسی ۶۸

فصل ۱

مفاهیم و تعاریف اولیه

۱.۱ معادلات دیفرانسیل جزیی

اکثر قوانین طبیعی فیزیک، نظیر معادلات ماکسول [۱] ، معادلات ناویه - استوکس، [۲] معادلات حرکت نیوتن [۳] و معادله‌ی شرودینگر [۴] در مکانیک کوانتوم، بر حسب معادلات دیفرانسیل جزیی (PDE) [۵] بیان شده‌اند. به عبارت دیگر، قوانین فوق، پدیده‌های فیزیکی را به وسیله‌ی ارتباط بین فضا و مشتقات آن نسبت به زمان توضیح می‌دهند. وجود مشتق در این معادلات به این دلیل است که مشتق‌ها پدیده‌ای طبیعی (مانند سرعت، شتاب، نیرو، اصطکاک، شار، شدت جریان) را نمایش می‌دهند. تعاریف و قضایای این فصل از مرجع [۱] برداشت شده است.

تعریف ۱.۱.۱. یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی معادله‌ای شامل یک تابع و مشتقات آن می‌باشد که تابع مجهول به چند متغیر وابسته است و تفاوت آن با معادله دیفرانسیل معمولی (ODE) [۶] در این است که در ODE تابع فقط به یک متغیر وابسته است.

در اینجا چند PDE معروف را معرفی می‌کنیم:

$$u_t = u_{xx} \quad \text{(معادله‌ی یک بعدی گرما)}$$

$$u_t = u_{xx} + u_{yy} \quad \text{(معادله‌ی دوبعدی گرما)}$$

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0 \quad \text{(معادله‌ی لاپلاس در مختصات قطبی)}$$

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} \quad \text{(معادله‌ی سه‌بعدی موج)}$$

---

[۱] Maxwell

[۲] Navier-Stokes

[۳] Newton

[۴] Schrodinger

[۵] Partial Differential Equation

[۶] Ordinary Differential Equation

$$u_{tt} = u_{xx} = \alpha u_t + \beta u \quad \text{(معادله‌ی تلگراف)}$$

توجه کنید که:

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_{xx} = \frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲}, \quad \cdots$$

متذکر می‌شویم که در معادلات فوق تابع مجهول u همواره به بیش از یک متغیر وابسته است. متغیر u را که از آن مشتق می‌گیریم، متغیر وابسته و متغیرهایی که مشتق‌گیری نسبت به آن‌ها صورت می‌گیرد متغیرهای مستقل نامیده می‌شوند. به عنوان مثال، در معادله‌ی

$$u_t = u_{xx},$$

واضح است که متغیر وابسته‌ی $u(x,t)$ تابعی از دو متغیر مستقل x وt می‌باشد، حال آن‌که در معادله‌ی

$$u_t = u_{rr} + \frac{۱}{r}u_r + \frac{۱}{r^۲}u_{\theta\theta},$$

$u(r,\theta,t)$ به r ، θ و t بستگی دارد.

۱.۱.۱ روشهای حل معادلات دیفرانسیل جزیی

در ادامه مشاهده خواهیم کرد که روشهای زیادی برای حل این معادلات وجود دارند، مهمترین آنها روش‌هایی هستند که $PDEs$ را به $ODEs$ تبدیل می‌کنند. در اینجا چند روش را معرفی می‌کنیم:

۱. جداسازی متغیرها : در این روش یک PDE با n متغیر را به n تا ODE تبدیل می‌کنیم.

۲. تبدیل‌های انتگرال : در این روش یک PDE با n متغیر مستقل را به یک PDE با $n-۱$ متغیر تبدیل می‌کنیم، درنتیجه، یک PDE دو متغیره را می‌توان به یک ODE تبدیل کرد.

۳. تغییر مختصات : در این روش با تغییر مختصات مساله، مانند دوران محور، PDE را به یک ODE یا PDE ساده‌تر تبدیل می‌کنیم.

۴. تبدیل متغیر وابسته : در این روش مجهول یک PDE را به یک مجهول جدید که جواب ساده‌تر به دست می‌آید، تبدیل می‌کنیم.

۵. روشهای عددی :در این روشها یک PDE را به یک دستگاه معادلات تفاضلی که بتوان آن را با روشی تکراری توسط کامپیوتر حل کرد، تبدیل می‌کنیم.

۶. روش اختلال : این روش یک مساله‌ی غیرخطی را به چند مساله‌ی خطی که مساله‌ی غیرخطی را تقریب می‌کنند، تغییر می‌دهد.

۷. معادلات انتگرال : در این روش یک PDE را به یک معادله‌ی انتگرال، (معادله‌ای که در آن تابع مجهول داخل انتگرال است) تبدیل می‌کنیم. سپس معادله‌ی انتگرال را با روش‌های مختلف حل می‌کنیم.

۸. روش حساب تغییرات : در این روش جواب PDE را با تبدیل معادله به یک مساله‌ی مینیمم‌سازی می‌یابیم. در نتیجه مینیمم یک عبارت، منجر به جواب PDE می‌شود.

۲.۱.۱ دسته‌بندی $PDEs$

معادلات دیفرانسیل جزیی به روش‌های مختلفی دسته‌بندی می‌شوند که چند نوع آن را به‌صورت زیر بیان می‌کنیم:

۱. مرتبه‌ی PDE : مرتبه‌ی PDE مرتبه‌ی بالاترین مشتق جزیی در معادله است، برای مثال:

$$u_t = u_{xx}, \quad (\text{مرتبه‌ی دوم}),$$

$$u_t = u_x, \quad (\text{مرتبه‌ی اول}),$$

$$u_t = uu_{xxx} + \sin x, \quad (\text{مرتبه‌ی سوم}).$$

۲. تعداد متغیرها: تعداد متغیرها تعداد متغیرهای مستقل است، برای مثال:

$$u_t = u_{xx}, \quad (\text{دو متغیر : x و t}),$$

$$u_t = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}, \quad (\text{سه متغیر : r ، } \theta \text{ و t}).$$

۳. خطی و غیرخطی : معادلات دیفرانسیل جزیی را می‌توان به دو نوع خطی و غیرخطی تقسیم‌بندی نمود. در معادلات دیفرانسیل خطی متغیر وابسته‌ی u و همه‌ی مشتقاتش به‌صورت خطی ظاهر می‌شوند. در حالت خاص، یک معادلات خطی مرتبه‌ی دوم دومتغیره به‌صورت زیر است:

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G, \qquad (1.1)$$

که در آن A, B, C, D, E, F و G ثابت‌ها یا توابع معلومی برحسب x و y هستند. برای مثال:

$$utt = e^{-t}u_{xx} + \sin t, \quad (\text{خطی}),$$

$$uu_{xx} + u_t = 0, \quad (\text{غیرخطی}),$$

$$u_{xx} + yu_{yy} = 0, \quad (\text{خطی}),$$

$$xu_x + yu_y + u^2 = 0, \quad (\text{غیرخطی}).$$

۴. همگن‌بودن : معادله‌ی (۱.۱) را همگن گوییم، هرگاه $G(x,y)$ برای هر x و y برابر صفر باشد، در غیر این‌صورت ناهمگن می‌نامیم.

۵. ضرایب : هرگاه ضرایب A, B, C, D, E و F در معادله‌ی (۱.۱) ثابت باشند، آن‌گاه (۱.۱) با ضرایب ثابت است. در غیر این صورت، با ضرایب متغیر می‌نامیم. سه نوع اساسی از معادلات دیفرانسیل جزیی خطی مانند (۱.۱) به‌صورت زیر می‌باشند:

(آ) سهموی،

(ب) هذلولوی،

(ج) بیضوی.

سهموی : معادلات سهموی روش‌های شارش گرما را توصیف و در شرط $B^۲ - ۴AC = ۰$ صدق می‌کنند.

هذلولوی: معادلات هذلولوی دستگاههای مرتعش و حرکت موج را توصیف و در شرط $B^۲ - ۴AC > ۰$ صدق می‌کنند.

بیضوی : معادلات بیضوی پدیده‌های حالت پایدار را توصیف و در شرط $B^۲ - ۴AC < ۰$ صدق می‌کنند.

مثال‌ها:

الف: سهموی $u_t = u_{xx}, \quad B^۲ - ۴AC = ۰,$

ب: هذلولوی $u = ۰, \quad B^۲ - ۴AC = ۱,$

ج: هذلولوی $u_{tt} = u_{xx}, \quad B^۲ - ۴AC = ۴,$

د: بیضوی $u_{xx} + u_{yy} = ۰, \quad B^۲ - ۴AC = -۴,$

ط:

$$yu_{xx} + u_{yy} = ۰ \quad B^۲ - ۴AC = -۴y \begin{cases} y > ۰ & \text{بیضوی,} \\ y = ۰ & \text{سهموی ,} \\ y < ۰ & \text{هذلولوی.} \end{cases}$$

۲.۱ معادلات دیفرانسیل جبری خطی با ضرایب ثابت

شکل کلی معادلات دیفرانسیل جبری خطی مرتبه‌ی اول با ضرایب ثابت به صورت زیر می‌باشد:

$$AX'(t) + BX(t) = q(t), \tag{۲.۱}$$

که A و B ماتریس‌های مربعی $(n\times n)$ هستند و A منفرد می‌باشد. ابتدا خانواده ماتریس و ماتریس‌های پوچ‌توان را معرفی می‌کنیم. سپس قضیه‌ای را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۲.۱. هرگاه A و B ماتریس‌های مختلط $n \times n$ و مخالف صفر باشند، در این صورت خانواده ماتریس (A, B) را به‌صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$A + \lambda B, \lambda \in \mathbb{C}(\mathbb{R}).$$

تعریف ۲.۲.۱. هرگاه حداقل یک λ موجود باشد به‌طوری که

$$det(A + \lambda B) \neq ۰,$$

آنگاه خانواده ماتریس را منتظم می‌نامیم.

تعریف ۳.۲.۱. ماتریس مربعی N پوچ‌توان است، هرگاه حداقل یک عدد صحیح مثبت k موجود باشد که $N^k = ۰$.

مثال ۴.۲.۱. ماتریس $M = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix}$ یک ماتریس پوچ‌توان است. زیراه $M^۲ = ۰$.

ماتریس مثلثی که درایه‌های قطر اصلی همگی صفر باشند، پوچ‌توان است.

مثال ۵.۲.۱. ماتریس $N = \begin{pmatrix} ۶ & ۱ & ۲ & ۰ \\ ۲ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۳ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}$ پوچ‌توان است. داریم:

$$N^۲ = \begin{pmatrix} ۷ & ۲ & ۰ & ۰ \\ ۳ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}.$$

$$N^۳ = \begin{pmatrix} ۶ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}.$$

$$N^۴ = \begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}.$$

قضیه ۶.۲.۱. برای خانواده ماتریس منتظم (A, B)، ماتریس‌های نامنفرد E و F وجود دارند به‌طوری که

$$EAF = \begin{pmatrix} I & ۰ \\ ۰ & J \end{pmatrix}, \quad EBF = \begin{pmatrix} W & ۰ \\ ۰ & I \end{pmatrix},$$

که W یک ماتریس مربعی و J یک ماتریس بلوکی جردن پوچ‌توان می‌باشد. به عبارت دیگر $\mu \in \mathbb{N}$ موجود است به‌طوری‌که

$$J^{\mu-۱} \neq ۰, \quad J^{\mu} = ۰.$$

μ اندیس [۱] خانواده ماتریس (A, B) و DAE [۲] نامیده می‌شود.

$\begin{pmatrix} I & ۰ \\ ۰ & J \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} W & ۰ \\ ۰ & I \end{pmatrix}$ شکل کانونی کرونکر خانواده‌ی (A, B) نامیده می‌شود. [۸]

---

[۱] Index

[۲] Differential Algebraic Equation

با قرار دادن

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = F^{-1}X.$$

در (۲.۱) داریم:

$$EAF(F^{-1}X)' + EBF(F^{-1}X) = Eq(t).$$

بنابراین

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}' + \begin{pmatrix} W & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(t) \\ r(t) \end{pmatrix}, \tag{۳.۱}$$

که دستگاه (۳.۱) معادل با دستگاه زیر است:

$$\begin{cases} y' + Wy = p(t), \\ Jz' + z = r(t). \end{cases} \tag{۴.۱}$$

معادله‌ی اول دستگاه (۴.۱) یک ODE می‌باشد.

در حالت $\mu = 2$ داریم: $J^1 \neq 0$ و $J^2 = 0$. سطر دوم (۴.۱) را در J ضرب می‌کنیم. در نتیجه

$$J^2 z' + Jz = Jr, \tag{۵.۱}$$

داریم: $j^2 = 0$. بنابراین $Jz = Jr$. درنتیجه

$$(Jz)' = (Jr)'.$$

$$z = r - Jz' = r - (Jr)'.$$

همچنین، در حالت $\mu = 3$ داریم:

$$z = \sum_{j=0}^{\mu-1} (-1)^j (J^j r)^{(j)}.$$

از طرفی $\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = F^{-1}X$ و درنتیجه $X = F\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$، که در آن

$$X(0) = F\begin{pmatrix} y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}.$$

۳.۱ تبدیلات لاپلاس

تعریف ۱.۳.۱. تابع $f(t)$ را در یک بازه‌ی بسته، قطعه‌وار پیوسته گوییم، هرگاه این بازه اجتماعی از زیربازه‌های متناهی باشد به‌طوری که در هر یک از این زیربازه‌ها $f(t)$ پیوسته و در نقاط مرزی تابع f حد متناهی داشته باشد.

تعریف ۲.۳.۱. گوییم تابع $f(t)$ وقتی $t \to \infty$ از مرتبه‌ی نمایی است، هرگاه اعدادی مانند α ، M و L موجود باشند به‌طوری که برای $t \geq L$ داشته باشیم:

$$|f(t)| < Me^{\alpha t}. \tag{۶.۱}$$

تعریف ۳.۳.۱. هرگاه برای هر $t > \circ$ تابع $f(t)$ معلوم باشد و p عددی حقیقی باشد به طوری که

$$F(p) = \int_{\circ}^{\infty} e^{-pt} f(t)dt, \tag{۷.۱}$$

برای مقادیر بزرگتر یا مساوی p همگرا باشد، آنگاه $F(p)$ را تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ می‌نامیم. تبدیل (۷.۱) را با نماد

$$T\{f(t)\} = F(p), \tag{۸.۱}$$

نشان می‌دهیم.

قضیه ۴.۳.۱. فرض کنیم $f(t)$ در تمام بازه‌های متناهی ناحیه‌ی $t \geq \circ$ قطعه‌وار پیوسته و $f(t)$ از مرتبه‌ی نمایی باشد، آنگاه تبدیل لاپلاس $F(p)$ وقتی $t \to \infty$، که به‌صورت

$$F(p) = \int_{\circ}^{\infty} e^{-pt} f(t)\mathrm{d}t \quad p > \alpha, \tag{۹.۱}$$

تعریف می‌شود موجود و به‌طور مطلق همگراست. [۱]

رابطه‌ی بین $F(p)$ و $f(t)$ را با

$$T^{-1}\{F(p)\} = f(t), \tag{۱۰.۱}$$

نیز نشان می‌دهیم و $T^{-1}\{F(p)\}$ را تبدیل‌معکوس $F(p)$ می‌نامیم. برای مثال داریم:

$$\frac{1}{p-a} = T\{e^{at}\} \quad e^{at} = T^{-1}\{\frac{1}{p-a}\}.$$

تبدیل T خطی است، یعنی

$$T\{af(t) + bg(t)\} = aT\{f(t) + bT\{g(t)\} = aF(p) + bG(p). \tag{۱۱.۱}$$

با توجه به (۱۱.۱) و یکتا بودن تبدیلات معکوس داریم:

$$\begin{aligned} T^{-1}\{aF(p) + bG(p)\} &= aT^{-1}\{F(p)\} + bT^{-1}\{G(p)\} \\ &= af(t) + bg(t), \end{aligned} \tag{۱۲.۱}$$

همچنین

$$F(p+g) = \int_{\circ}^{\infty} e^{-(p+g)} f(t)dt = \int_{\circ}^{\infty} e^{-pt}[e^{-gt} f(t)]dt. \tag{۱۳.۱}$$

در نتیجه

$$T\{e^{-gt} f(t)\} = F(p+g).$$

قضیه ۵.۳.۱. هرگاه برای هر $t \geq a$، $f(t)$ قطعه‌وار پیوسته باشد و برای ثابت مثبت M و هر $t \geq M$ ، $|f(t)| \leq M$ و $\int_M^{\infty} g(t)\mathrm{d}t$ همگرا باشد، آنگاه $\int_{\circ}^{\infty} f(t)dt$ نیز همگراست. همچنین، هرگاه برای هر $t \geq M$، $f(t) \geq g(t) \geq \circ$ و $\int_M^{\infty} g(t)\mathrm{d}t$ واگرا باشد، آنگاه $\int_a^{\infty} f(t)\mathrm{d}t$ واگراست. [۱]

قضیه ۶.۳.۱. فرض کنیم f بر بازه‌ی دلخواه $\circ \leq t \leq A$ پیوسته و f' قطعه‌ای پیوسته باشد. همچنین ثابتهای M, k, a موجود باشند به‌طوری که برای هر $t \geq M$ ، $|f(t)| \leq Ke^{at}$. در این صورت برای هر $s > a$ ، $T\{f'(t)\}$ موجود است، همچنین

$$T\{f'(t)\} = sT\{f(t)\} - f(\circ). \tag{۱۴.۱}$$

نتیجه ۷.۳.۱. فرض کنیم $f, f', \cdots, f^{(n-1)}$ بر بازه‌ی دلخواه $\circ \leq t \leq A$ پیوسته و $f^{(n)}$ بر این بازه قطعه‌ای پیوسته باشد. همچنین ثابتهای K, a و M موجود باشند که برای $t \geq M$ ، $|f(t)| \leq Ke^{at}$ ، $|f'(t)| \leq Ke^{at}$ ، $\cdots$ ، $|f^{(n-1)}(t)| \leq Ke^{at}$. در این صورت $T\{f^{(n)}(t)\}$ برای هر $s > a$ موجود و برابر است با

$$T\{f^{(n)}(t)\} = s^nT\{f(t)\} - s^{n-1}f(\circ) - \cdots - sf^{(n-2)}(\circ) - f^{(n-1)}(\circ). \qquad (۱۵.۱)$$

مثال ۸.۳.۱. جواب معادله دیفرانسیل زیر را بیابید:

$$y'' + y = \sin 2t, \qquad (۱۶.۱)$$

که در شرایط اولیه‌ی

$$y(\circ) = 2, \quad y'(\circ) = 1, \qquad (۱۷.۱)$$

صدق می‌کند. فرض کنیم این مساله‌ی مقدار اولیه جواب $y = \phi(t)$ داشته باشد که با دو مشتق اول خود در شرایط نتیجه‌ی (۷.۳.۱) صدق می‌کند. در این‌صورت با گرفتن تبدیل لاپلاس از معادله دیفرانسیل، داریم:

$$s^2Y(s) - sy(\circ) - y'(\circ) + Y(s) = \frac{2}{(s^2+4)}.$$

در نتیجه

$$Y(s) = \frac{2s^3 + s^2 + 8s + 6}{(s^2+1)(s^2+4)}. \qquad (۱۸.۱)$$

با استفاده ازکسرهای جزیی می‌توان $Y(s)$ را به‌صورت

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{as+b}{s^2+1} + \frac{cs+d}{s^2+4} \\ &= \frac{(as+b)(s^2+4) + (cs+d)(s^2+1)}{(s^2+1)(s^2+4)}, \end{aligned} \qquad (۱۹.۱)$$

نوشت. در نتیجه

$$2s^3 + s^2 + 8s + 6 = (a+c)s^3 + (b+d)s^2 + (4a+c)s + (4b+d).$$

بنابراین

$$a + c = 2, \quad b + d = 1,$$

$$4a + c = 8, \quad 4b + d = 6.$$

در نتیجه $a = 2$ ، $c = \circ$ ، $b = \frac{5}{3}$ و $d = -\frac{2}{3}$ که داریم:

$$Y(s) = \frac{2s}{s^2+1} + \frac{\frac{5}{3}}{s^2+1} - \frac{\frac{2}{3}}{s^2+4}.$$

در نتیجه

$$y = \phi(t) = 2\cos t + \frac{5}{3}\sin t - \frac{1}{3}\sin 2t.$$

۱.۳.۱ توابع پله‌ای

در این بخش چند خاصیت دیگر تبدیل لاپلاس را معرفی می‌کنیم.
تابع را با u_c نشان می‌دهیم و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$u_c(t) = \begin{cases} ۰, & t < c, \\ ۱, & t \geq c, \end{cases} \tag{۲۰.۱}$$

که در آن $c \geq ۰$.
برای تابع $f(t)$، به‌ازای $t \geq ۰$ ، تابع g را به‌صورت

$$y = g(t) = \begin{cases} ۰ & t < c, \\ f(t-c) & t \geq c, \end{cases}$$

که انتقال f را به اندازه‌ی c در جهت مثبت t نشان می‌دهد تعریف می‌کنیم. $g(t)$ را با تابع پله‌ای واحد به‌صورت زیر می‌توان نوشت:

$$g(t) = u_c(t)f(t-c).$$

قضیه ۹.۳.۱. [۱] هرگاه برای هر $s > a \geq ۰$ ، $F(s) = T\{f(t)\}$ موجود و c تابع مثبتی باشد، آنگاه

$$T\{u_c(t)f(t-c)\} = e^{-cs}T\{f(t)\} = e^{-cs}F(s), \quad s > a. \tag{۲۱.۱}$$

برعکس، هرگاه $f(t) = T^{-۱}\{F(s)\}$ ، آن‌گاه

$$u_c(t)f(t-c) = T^{-۱}\{e^{-cs}F(s)\}. \tag{۲۲.۱}$$

مثال ۱۰.۳.۱. هرگاه تابع f به‌صورت زیر تعریف شود :

$$f(t) = \begin{cases} \sin t, & ۰ \leq t < \frac{\pi}{۴}, \\ \sin t + \cos(t - \frac{\pi}{۴}), & t \geq \frac{\pi}{۴}. \end{cases}$$

$T\{f(t)\}$ را می‌یابیم. توجه می‌کنیم که $f(t) = \sin t + g(t)$ ، که در آن

$$g(t) = \begin{cases} ۰ & t < \frac{\pi}{۴}, \\ \cos(t - \frac{\pi}{۴}) & t \geq \frac{\pi}{۴}. \end{cases}$$

بنابراین

$$g(t) = u_{\frac{\pi}{۴}}(t)\cos(t - \frac{\pi}{۴}),$$

و

$$\begin{aligned} T\{f(t)\} &= T\{\sin t\} + T\{u_{\frac{\pi}{۴}}(t)\cos(t - \frac{\pi}{۴})\} \\ &= T\{\sin t\} + e^{-\frac{\pi}{۴}}T\{\cos t\}. \end{aligned} \tag{۲۳.۱}$$

با استفاده از تبدیلات لاپلاس داریم:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{۱}{s^۲+۱} + e^{-\frac{\pi s}{۴}}\frac{s}{s^۲+۱} = \frac{۱ + se^{-\frac{\pi s}{۴}}}{s^۲+۱}$$

مثال ۱۱.۳.۱. تبدیل معکوس تابع زیر را به‌دست آورید:

$$F(s)=\frac{1-e^{-2s}}{s^2}.$$

با استفاده از ویژگی خطی تبدیل معکوس داریم:

$$\begin{aligned} f(t)&=T^{-1}\{F(s)\}=T^{-1}\{\frac{1}{s^2}\}-T^{-1}\{\frac{e^{-2s}}{s^2}\}\\ &=t-u_2(t)(t-2). \end{aligned} \tag{۲۴.۱}$$

تابع f را می‌توان به‌صورت زیر نوشت :

$$f(t)=\begin{cases} t, & 0\leq t<2,\\ 2, & t\geq 2. \end{cases}$$

قضیه ۱۲.۳.۱. [۱] فرض کنیم برای هر $s>a\geq 0$ ، $F(s)=T\{f(t)\}$ موجود و c ثابت مثبت باشد، آنگاه

$$T\{e^{ct}f(t)\}=F(s-c),\quad s>a+c. \tag{۲۵.۱}$$

برعکس ، هرگاه $f(t)=T^{-1}\{F(s)\}$ ، آنگاه

$$e^{ct}f(t)=T^{-1}\{F(s-c)\}. \tag{۲۶.۱}$$

۴.۱ انتگرال فوریه

هرگاه تابعی متناوب باشد، آنگاه بسطی به‌صورت سری فوریه دارد. اگر تابعی چنین خاصیتی نداشته باشد، آنگاه نمایشی انتگرالی شبیه بسط فوریه دارد. برای این منظور، تابع باید بر $\mathbb{R}$ تعریف شده باشد.

۱.۴.۱ تعریف انتگرال فوریه

تعریف ۱.۴.۱. انتگرال فوریه‌ی [۱] تابع f به‌صورت زیر است:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{d}y\int_{-\infty}^\infty f(t)\cos y(x-t)\mathrm{d}t.$$

مثال ۲.۴.۱. هرگاه تابع f به‌صورت زیر تعریف شده باشد:

$$f(t)=1,\quad |t|\leq 1;\quad f(t)=0,\quad |t|>1,$$

دراین‌صورت انتگرال فوریه‌ی f به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{d}y\int_{-1}^1(\cos xy\cos ty+\sin xy\sin ty)\mathrm{d}t\\ &=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\cos xy\mathrm{d}y\int_0^1\cos ty\mathrm{d}t=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin y\cos xy}{y}\mathrm{d}y. \end{aligned} \tag{۲۷.۱}$$

[1] Fourier Integral

تعریف ۳.۴.۱. تابع g با ضابطه‌ی

$$g(x) = \sqrt{\frac{۲}{\pi}} \int_{۰}^{\infty} f(t) \cos xt dt, \qquad (۲۸.۱)$$

را تبدیل کسینوسی فوریه‌ی f می‌نامیم.

تعریف ۴.۴.۱. تابع g با ضابطه‌ی

$$g(x) = \sqrt{\frac{۲}{\pi}} \int_{۰}^{\infty} f(t) \sin xt dt, \qquad (۲۹.۱)$$

را تبدیل سینوسی فوریه‌ی f می‌نامیم.

۵.۱ حاصل‌ضرب کرونکر

هرگاه A یک ماتریس $m \times n$ و B یک ماتریس $p \times q$ باشد، آنگاه حاصل‌ضرب کرونکر [۱] $A \otimes B$ ، ماتریس بلوکی $mp \times nq$ زیر است:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{۱۱}B & \cdots & a_{۱n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m۱}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix}.$$

برای مثال داریم:

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} ۰ & ۵ \\ ۶ & ۷ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۰ & ۵ & ۰ & ۱۰ \\ ۶ & ۷ & ۱۲ & ۱۴ \\ ۰ & ۱۵ & ۰ & ۲۰ \\ ۱۰ & ۲۱ & ۲۴ & ۲۸ \end{pmatrix}.$$

همچنین روابط زیر برقرارند:

$$A \otimes (B + C) = A \otimes B + A \otimes C,$$

$$(A + B) \otimes C = A \otimes C + B \otimes C,$$

$$(kA) \otimes B = A \otimes (kB) = k(A \otimes B),$$

$$(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C).$$

در حالت کلی $A \otimes B \neq B \otimes A$ ، ولی ماتریس‌های تبدیل (جایگشت) P و Q وجود دارند که:

$$A \otimes B = P(B \otimes A)Q.$$

همچنین $A \otimes B$ معکوس پذیر است، اگر و تنها اگر A و B معکوس پذیر باشند و داریم:

$$(A \otimes B)^{-۱} = A^{-۱} \otimes B^{-۱}, \quad (A \otimes B)^* = A^* \otimes B^*,$$

که $*$ به معنی ترانهاده‌ی مزدوج است و

$$A^* = (\bar{A})^T = (\bar{A^T}).$$

[۱] Kronecker Product

در قسمت بعد، روش اویلر ضمنی را برای معادلات دیفرانسیل معرفی می‌کنیم که بعدا مورد استفاده قرار می‌گیرند.

۶.۱ روش اویلر ضمنی

فرض کنیم معادله‌ی زیر را داشته باشیم:

$$Ey' = Ay + \gamma(t).$$

در این صورت روش اویلر ضمنی [1] برای معادله‌ی فوق به صورت زیر است:

$$E\frac{(y_{n+1} - y_n)}{h} = Ay_{n+1} + \gamma(t_{n+1}),$$

که h گام زمان می‌باشد. بنابراین

$$E(y_{n+1} - y_n) = h(Ay_{n+1} + \gamma(t_{n+1})).$$

در نتیجه

$$y_{n+1}(E - Ah) = Ey_n + h\gamma(t_{n+1}),$$

که داریم:

$$y_{n+1} = (E - Ah)^{-1}(Ey_n + h\gamma(t_{n+1})).$$

جواب دقیق $y(t_n)$ در رابطه‌ی زیر صدق می‌کند:

$$E(\frac{(y(t_{n+1}) - y(t_n))}{h} + h\frac{y''(\xi)}{2}) = Ay(t_{n+1}) + \gamma(t_{n+1}). \qquad (۳۰.۱)$$

با تعریف $e_n = y(t_n) - y_n$داریم:

$$e_{n+1} = (E - Ah)^{-1}(Ee_n - h^2\frac{y''(\xi)}{2}),$$

که $e_0 = 0$. زیرا از (۳۰.۱) داریم:

$$E(\frac{(y(t_{n+1}) - y(t_n))}{h}) - Ay(t_{n+1}) = \gamma(t_{n+1}) - E(h\frac{y''(\xi)}{2}).$$

بنابراین

$$E(\frac{y(t_{n+1})}{h}) - Ay(t_{n+1}) = E(\frac{y(t_n)}{h}) + \gamma(t_{n+1}) - E(h\frac{y''(\xi)}{2}).$$

در نتیجه به دست می‌آوریم:

$$Ey(t_{n+1}) - Ahy(t_{n+1}) = h(E(\frac{y(t_n)}{h}) + \gamma(t_{n+1}) - E(h\frac{y''(\xi)}{2})).$$

بنابراین داریم:

$$y(t_{n+1})(E - Ah) = h(E(\frac{y(t_n)}{h}) + \gamma(t_{n+1}) - E(h\frac{y''(\xi)}{2})).$$

[1] Implicit Euler Method

در نتیجه

$$y(t_{n+1}) = (E - Ah)^{-1} h\big(E(\frac{y(t_n)}{h}) + \gamma(t_{n+1}) - E(h\frac{y''(\xi)}{2})\big).$$

بنابراین داریم

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= y(t_{n+1}) - y_{n+1} \\ &= (E - Ah)^{-1}[E(y(t_n) - h^2\frac{y''(\xi)}{2}) + h\gamma(t_{n+1})] \\ &- (E - Ah)^{-1}[Ey_n + h\gamma(t_{n+1})] \\ &= (E - Ah)^{-1}\big(Ee_n - h^2\frac{y''(\xi)}{2}\big). \end{aligned} \tag{۳۱.۱}$$

فصل ۲

معادلات دیفرانسیل جبری جزیی $(PDAEs)$

۱.۲ تاریخچه

مدل‌های ریاضی زیادی در علوم و مهندسی وجود دارند که منجر به دستگاه‌های معادلات مختلفی می‌شوند. ممکن است این دستگاه‌ها شامل یکی از موارد زیر باشند:

الف. معادلات دیفرانسیل سهموی و بیضوی،

ب. معادلات دیفرانسیل سهموی، بیضوی و معمولی،

ج. معادلات دیفرانسیل بیضوی و معمولی و معادلات جبری.

شرایط زیادی برای ترکیب این نوع معادلات وجود دارند. این معادلات باید با شرایط اولیه [۱] و شرایط مرزی [۲] مناسبی کامل شوند. چنین دستگاه‌هایی را می‌توان با تبدیلات لاپلاس و یا تبدیلات فوریه به دنباله‌ای از معادلات دیفرانسیل جبری [۳] تبدیل کرد. دستگاه اولیه را معادله دیفرانسیل جبری جزیی [۴] می‌نامیم. روش‌های زیادی برای حل این نوع معادلات وجود دارند. برخی از آنها را ذکر می‌کنیم. در سال ۲۰۰۳ اسچیتکویسکی [۵] برازش داده‌ها را در معادلات دیفرانسیل جبری جزیی مطرح کرد. برای این منظور یک روش عددی را برای تخمین پارامترها در سیستم‌هایی از معادلات دیفرانسیل جبری جزیی یک بعدی معرفی کرد. در این روش پس از مشاهده‌ی زمان و اندازه‌گیری، مینیمم مربعات فاصله‌ی داده از یک برازش مقیاس محاسبه می‌شود که وابسته به جواب سیستم دینامیکی است. هدف اصلی، ارائه‌ی کاربردهای عملی صنعت روی پیچیدگی سیستم‌های معادلات دیفرانسیل جزیی است. روش فوق در داروشناسی، زمین‌شناسی، مهندسی مکانیک، مهندسی شیمی، مهندسی صنایع غذایی و مهندسی برق است.

[۱] Initial Conditions

[۲] Boundary Conditions

[۳] Differential Algebraic Equations

[۴] Partial Differential Algebraic Equation

[۵] Schittkowski

در سال ۲۰۰۴ دبرابانت [۱] و استرحمل [۲] همگرایی روش‌های رانگه‌کوتا [۳] را برای معادلات دیفرانسیل جبری جزیی خطی بررسی کردند. روش فوق به‌صورت زیر است:

$$Au_t(t,x) + B(u_{xx}(t,x) + ru_x(t,x)) + Cu(t,x) = f(t,x),$$

که در آن $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ و ماتریس A منفرد است. در این روش تحت شرایط خاصی مرتبه‌ی همگرایی طرح کاملا گسسته‌ی وابسته به اندیس زمانی $PDAE$ در نظر گرفته می‌شود. همچنین ثابت می‌شود که طرح کاملا گسسته یک تقلیل مرتبه‌ای دارد که با شرایط مرزی به‌دست می‌آید.

در سال ۲۰۰۴ لاچت [۴] سیستم‌های دیفرانسیل جبری جزیی مرتبه‌ی دوم متقارن را بررسی نمود. در این روش مساله‌ی مقدار مرزی اولیه‌ی خطی و بعضی از معادلات دیفرانسیل جبری جزیی مرتبه‌ی اول متقارن در نظر گرفته می‌شوند که نسبت به متغیرهای فضایی به‌وسیله‌ی روش المان‌های محدود استاندارد نیمه‌گسسته می‌شوند. هدف از این روش به‌دست آوردن نتایج همگرایی L^2 برای سیستم‌های نیمه‌گسسته است که پارامتر مش المان‌های محدود h به صفر میل می‌کند. مطابق با بسیاری از کاربردهای عملی، $PDAE$ ممکن است قسمت‌های هذلولوی داشته باشد.

۲.۲ مقدمه

معادله دیفرانسیل جبری جزیی خطی به‌صورت زیر است:

$$Au_t(t,x) + Bu_{xx}(t,x) + Cu(t,x) = f(t,x),$$

که در آن حداقل یکی از ماتریس‌های $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ منفرد است. برای این سیستم یک اندیس دیفرانسیل زمانی و یک اندیس دیفرانسیل مکانی را معرفی می‌کنیم. این اندیس‌ها به‌ترتیب به‌وسیله‌ی یک تبدیل فوریه و لاپلاس مشخص می‌شوند. علاوه بر این یک جفت اندیس اختلال را تعریف می‌کنیم و رابطه‌ی بین جفت اندیس اختلال و دو اندیس دیفرانسیل را بیان می‌کنیم. در پایان روش $BTCS$ را برای حل عددی به‌کار می‌بریم.

مثال ۱.۲.۲. مدل‌سازی یک متحرک عمومی با n گونه در وابستگی m منبع غذا که به‌دلخواه توزیع می‌شوند، به‌صورت زیر است: ([۲]، [۱۵])

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} = D\Delta u_j + f_j(u,v), \quad j = 1,\cdots,n,$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = g_i(u,v), \quad i = 1,\cdots,m,$$

که در آن $u = (u_1,\cdots,u_n)^T$ چگالی نوع [۵] و $v = (v_1,\cdots,v_m)^T$ بردار چگالی منبع غذا [۶] هستند.

---

[۱] Debrabant

[۲] Strehmel

[۳] Runge-Kutta

[۴] Lucht

[۵] Species Density

[۶] Food Source Density

فرض کنیم کمیت‌های $D > 0, f_j, g_i$ و شرایط اولیه و مرزی مشخص باشند. غلظت u_j،ماده‌ی در حال پخش است در حالی که غلظت v_i ، ماده‌ای است که اجسامش نمی‌توانند پخش شوند.

همانطور که بیان کردیم، معادلات دیفرانسیل جبری جزیی به‌صورت زیر می‌باشند:

$$Au_t(t,x) + Bu_{xx}(t,x) + Cu(t,x) = f(t,x), \tag{۱.۲}$$

که در آن $t \in (0, t_e)$ و $x \in (-l, l)$ ، $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$و $u, f : [0, t_e] \times [-l, l] \to \mathbb{R}^n$. فرض کنیم حداقل یکی از ماتریسهای A و B منفرد است. حالت‌های $A = 0$ یا $B = 0$ به معادلات دیفرانسیل معمولی یا جبری منجر می‌شوند. بنابراین فرض می‌کنیم ماتریس‌های A و B صفر نباشند. برای مولفه‌های u_j از u، شرایط مرزی زیر برای $j \in \mathcal{M}_{BC} \subseteq \{1, \cdots, n\}$ برقرار است (مجموعه اندیس [۱] $\mathcal{M}_{BC}$ در بخش‌های بعدی مشخص می‌شود):

$$\mathbb{R}_B u_j(t,x) = \frac{\partial^k u_j}{\partial x^k}(t, \pm l) = 0, \quad k = 0, 1, \tag{۲.۲}$$

که در آن $t \in [0, t_e]$. همچنین شرایط اولیه‌ی زیر برقرار است:

$$u(0, x) = g(x), \quad x \in [-l, l]. \tag{۳.۲}$$

مولفه‌های g_j از g برای $j \in \mathcal{M}_{IC} \subseteq \{1, 2, \cdots, n\}$ ($\mathcal{M}_{IC}$ در بخش‌های بعدی مشخص می‌شود) را می‌توان تعیین کرد.

همچنین، شرایط سازگاری [۲]

$$\mathcal{R}_B g(x) = \mathcal{R}_B u(0, x), \tag{۴.۲}$$

بین شرایط اولیه و مرزی برقرار است.

در مسایلی که ماتریس‌های A یا B منفرد هستند، باید شرایط پایداری [۳] بین شرایط اولیه و مرزی برقرار باشد. در مثال زیر، به این مطلب اشاره می‌کنیم.

مثال ۲.۲.۲. فرض کنید $u = (u_1, u_2, u_3)^T$ و داشته باشیم:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \\ u_{3t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1xx} \\ u_{2xx} \\ u_{3xx} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 \\ 0 & c_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix},$$

که شرایط اولیه و مرزی به‌صورت زیر می‌باشند:

$$u_j(t, -1) = u_j(t, 1) = 0, \quad j \in \mathcal{M}_{BC},$$

$$u_j(0, x) = g_j(x)\sin(\pi x), \quad i \in \mathcal{M}_{IC},$$

که در آن $t \in (0, t_e)$ ، $x \in (-1, 1)$ ، $a, b > 0$ ، $c_i \neq 0$ و توابع $f_i(t,x), i = 1, 2, 3$ به قدر کافی هموار هستند. عبارت $\sin(\pi x)$ پایداری بین شرایط اولیه و مرزی را برقرار می‌کند.

---

[۱] Index Set

[۲] Compatibility Conditions

[۳] Consistency Conditions

در نتیجه، داریم:

$$u_{1t} - u_{1xx} + c_1 u_2 = f_1(t,x). \tag{۵.۲}$$

$$au_{2t}(t,x) - bu_{2xx}(t,x) + c_2 u_3(t,x) = f_2(t,x). \tag{۶.۲}$$

$$c_3 u_2(t,x) = f_3(t,x). \tag{۷.۲}$$

در نتیجه داریم:

$$u_2(t,x) = \frac{1}{c_3} f_3(t,x). \tag{۸.۲}$$

$$u_{2t}(t,x) = \frac{1}{c_3} f_{3t}(t,x), \quad u_{2xx}(t,x) = \frac{1}{c_3} f_{3xx}(t,x).$$

بنابراین از معادله‌ی (۶.۲) داریم:

$$c_2 u_3(t,x) = f_2(t,x) - \frac{a}{c_3} f_{3t}(t,x) + \frac{b}{c_3} f_{3xx}(t,x).$$

در نتیجه

$$u_3(t,x) = \frac{1}{c_2}\big(f_2(t,x) - \frac{a}{c_3} f_{3t}(t,x) + \frac{b}{c_3} f_{3xx}(t,x)\big). \tag{۹.۲}$$

از (۸.۲) و (۹.۲) نتیجه می‌گیریم که u_2 و u_3 را نمی‌توان به‌دلخواه انتخاب کرد. همچنین، هیچ شرطی برای u_1 به‌دست نیاوردیم. پس u_1 باید در شرایط اولیه و مرزی صدق کند. در نتیجه $\mathcal{M}_{IC} = \mathcal{M}_{BC} = \{1\}$. از (۵.۲) داریم:

$$\begin{aligned} u_{1t}(t,x) &= f_1(t,x) + u_{1xx}(t,x) - c_1 u_2(t,x) \\ &= u_{1xx}(t,x) + f_1(t,x) - \frac{c_1}{c_3} f_3(t,x). \end{aligned} \tag{۱۰.۲}$$

u_1 باید در شرایط اولیه و مرزی صدق کند، در نتیجه:

$$u_{(}t,-1) = u_1(t,1) = 0, \quad u_1(0,x) = g_1(x)\sin(\pi x).$$

در قسمت بعدی اندیس دیفرانسیل مکانی و اندیس دیفرانسیل زمانی یکنواخت را به‌ترتیب با استفاده از تبدیل لاپلاس و فوریه معرفی می‌کنیم. اگر B ماتریس صفر باشد، آنگاه اندیس دیفرانسیل زمانی معادل با اندیس DAE است. همچنین، زوج اندیس اختلال را در بخش‌های بعدی تعریف می‌کنیم. در پایان نتیجه می‌گیریم زوج اندیس اختلال می‌تواند بر حسب اندیس دیفرانسیل مکانی و اندیس دیفرانسیل زمانی یکنواخت بیان شود.

در مثال ۲.۲.۲ مشاهده کردیم که در حالت کلی شرایط مرزی و اولیه نمی‌تواند برای تمام مولفه‌های بردار u مشخص شود. برای این منظور مجموعه‌های اندیس $\mathcal{M}_{IC}$ و $\mathcal{M}_{BC}$ را تعریف می‌کنیم و نشان می‌دهیم این مجموعه‌ها می‌توانند با استفاده از ماتریس‌های A ، B و C تعیین شوند.

۳.۲ اندیس‌های معادله دیفرانسیل جبری جزیی

همانطور که یادآوری کردیم، دو نوع اندیس دیفرانسیل برای $PDAE$ وجود دارد که به‌ترتیب اندیس دیفرانسیل مکانی و زمانی نامیده می‌شوند. اندیس دیفرانسیل مکانی و زمانی را به‌ترتیب با استفاده از

تبدیل لاپلاس و فوریه تعیین می‌کنیم. همچنین اندیس اختلال را برای $PDAE$ معرفی می‌کنیم که با اختلالات کوچک روی جواب $PDAE$ تعیین می‌شود.

در ادامه‌ی بحث، فرض کنیم شرایط زیر برقرار باشند:

۱. مساله‌ی مقدارمرزی اولیه [۱] (۱.۲) تا (۴.۲)

۲. مولفه‌های u در شرط زیر صدق می‌کنند:

$$|u_i(t,x)| \leq Me^{\alpha t}, \quad i = 1, \cdots, n,$$

(M و α مستقل از x هستند).

۳. خانواده ماتریس [۲] $(B, \xi A + C)$، $Re(\xi) > \alpha$ منتظم است.

۴. خانواده ماتریس $(A, \mu_k B + C)$ برای هر k منتظم است که μ_k مقدارویژه‌ی عملگر $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ با شرایط مرزی (۲.۲) است.

۵. بردار $f(t,x)$ و بردار اولیه‌ی $g(x)$ به قدر کافی هموار هستند.

۱.۳.۲ تبدیل لاپلاس و اندیس مکانی

فرض کنیم $t_e = \infty$ و $y : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ پیوسته و از مرتبه‌ی نمایی باشد. به عبارت دیگر در رابطه‌ی زیر صدق کند:

$$|y(t)| \leq Me^{\alpha t}; \quad \forall t \in [0, \infty), \quad \exists 0 < M < \infty, \quad \alpha > 0.$$

تبدیل لاپلاس $y(t)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$y_\xi = \int_0^\infty e^{-t\xi} y(t) dt, \quad Re(\xi) > \alpha.$$

با استفاده از فرض ۲ در بخش ۳.۲ داریم:

$$|u_i(t,x)| \leq Me^{\alpha t}.$$

درنتیجه می‌توان از u تبدیل لاپلاس گرفت. تبدیل لاپلاس $y(t)$ را با y_ξ نشان می‌دهیم. در نتیجه تبدیل لاپلاس $u(t,x)$ برابر $u_\xi(x)$ می‌باشد. داریم:

$$u_\xi(x) = \int_0^\infty e^{-t\xi} u(t,x) \mathrm{d}t.$$

همچنین:

$$\begin{aligned} L\{u_t(t,x)\} &= \int_0^\infty e^{-t\xi} u_t(t,x) \mathrm{d}t \\ &= e^{-t\xi} u(t,x)\Big|_0^\infty + \xi \int_0^\infty e^{-t\xi} u(t,x) \mathrm{d}t \\ &= -g(x) + \xi u_\xi(x). \end{aligned} \tag{۱۱.۲}$$

[۱] Initial Boundary Value Problem

[۲] Matrix Pencil

در نتیجه از (۱۰.۲) داریم:

$$A(\xi u_\xi(x) - g(x)) + Bu_\xi''(x) + Cu_\xi(x) = f_\xi(x).$$

بنابراین:

$$Bu_\xi''(x) + (\xi A + C)u_\xi(x) = f_\xi(x) + Ag(x), \quad Re(\xi) > \alpha. \tag{۱۲.۲}$$

که در آن $g(x)$ بردار اولیه‌ی (۳.۲) است. اگر ماتریس B منفرد باشد، آنگاه (۱۲.۲) یک DAE وابسته به ξ است و تحت شرایط بخش ۳.۲ معادله‌ی (۱۲.۲) جواب یکتا دارد.

برای تعریف اندیس مکانی، شکل نرمال کرونکر [1] DAE (۱۲.۲) را به کار می‌بریم. بنا به فرض ۳ از بخش ۳.۲ نتیجه می‌گیریم ماتریس‌های منتظم $P_{L,\xi}, Q_{L,\xi} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ وجود دارند به‌طوری که [۸]

$$P_{L,\xi}BQ_{L,\xi} = \begin{pmatrix} I_{m_1} & 0 \\ 0 & N_{L,\xi} \end{pmatrix}, \quad P_{L,\xi}(\xi A + C)Q_{L,\xi} = \begin{pmatrix} R_{L,\xi} & 0 \\ 0 & I_{m_2} \end{pmatrix}. \tag{۱۳.۲}$$

$R_{L,\xi} \in \mathbb{R}^{m_1\times m_1}$ ماتریس مربعی، $N_{L,\xi} \in \mathbb{R}^{m_2\times m_2}$ یک ماتریس جردن زنجیری پوچ توان است که $m_1 + m_2 = n$ و $I_k \in \mathbb{R}^{k\times k}, k \in \{m_1, m_2\}$ ماتریس همانی است. ($(N_{L,\xi})^{v_{L,\xi}-1} \neq 0$ و $(N_{L,\xi})^{v_{L,\xi}} = 0$). با توجه به معادله‌ی(۱۲.۲) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} &P_{L,\xi}BQ_{L,\xi}Q^{-1}{}_{L,\xi}u_\xi''(x) + P_{L,\xi}(\xi A + C)Q_{L,\xi}Q^{-1}{}_{L,\xi}u_\xi(x) \\ &= P_{L,\xi}f_\xi(x) + P_{L,\xi}Ag(x) = P_{L,\xi}(f_\xi(x) + Ag(x)). \end{aligned} \tag{۱۴.۲}$$

تعریف می‌کنیم:

$$P_{L,\xi}(f_\xi(x) + Ag(x)) := (r_{\xi,1}{}^T(x), r_{\xi,2}{}^T(x))^T,$$

و

$$Q_{L,\xi}{}^{-1}u_\xi(x) := (v_\xi{}^T(x), w_\xi{}^T(x))^T.$$

در نتیجه

$$\begin{pmatrix} I_{m_1} & 0 \\ 0 & N_{L,\xi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_\xi''(x) \\ w_\xi'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_{L,\xi} & 0 \\ 0 & I_{m_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_\xi(x) \\ w_\xi(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{\xi,1}(x) \\ r_{\xi,2}(x) \end{pmatrix}.$$

در نتیجه داریم:

$$v_\xi''(x) + R_{L,\xi}v_\xi(x) = r_{\xi,1}(x), \tag{۱۵.۲}$$

$$N_{L,\xi}w_\xi''(x) + w_\xi(x) = r_{\xi,2}(x), \tag{۱۶.۲}$$

که در آن

$$(v_\xi{}^T(x), w_\xi{}^T(x))^T := Q_{L,\xi}{}^{-1}u_\xi(x),$$

$$(r_{\xi,1}{}^T(x), r_{\xi,2}{}^T(x))^T := P_{L,\xi}(f_\xi(x) + Ag(x)).$$

[1] Kronecker Normal Form

معادله‌ی (۱۵.۲) یک دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی دو با بعد $m_۱$ می‌باشد. در حالت کلی، برای هر مولفه‌ی $v_{\xi,j}$ از v_ξ یک شرط مرزی به‌دست می‌آید. در نتیجه $\mathcal{M}_{BC}$ ، $m_۱$ مولفه دارد. معادله‌ی (۱۶.۲) یک معادله‌ی جبری است و داریم:

$$\begin{aligned} w_\xi(x) &= r_{\xi,۲}(x) - N_{L,\xi} w_\xi''(x) \\ &= r_{\xi,۲}(x) - N_{L,\xi} r_{\xi,۲}''(x) + N_{L,\xi}{}^{۲} w_\xi{}^{(۴)}(x) \\ &\vdots \\ &= r_{\xi,۲}(x) - N_{L,\xi} r_{\xi,۲}''(x) + \cdots (-۱)^{v_{L,\xi}-۱} N_{L,\xi}{}^{v_{L,\xi}-۱} r_{\xi,۲}{}^{(۲v_{L,\xi}-۲)}(x) \\ &\quad + (-۱)^{v_{L,\xi}} N_{L,\xi}{}^{v_{L,\xi}} w_\xi{}^{(۲v_{L,\xi})}(x). \end{aligned} \tag{۱۷.۲}$$

درنتیجه برای هر مولفه‌ی $w_\xi \in \mathbb{R}^{m_۲}$ یک عبارت برحسب $r_{\xi,۲}$ و مشتقاتش نسبت به x، تا مرتبه‌ی $۲v_{L,\xi} - ۲$ به‌دست می‌آوریم. یعنی برای مولفه‌های w_ξ شرایط مرزی نمی‌تواند مشخص شود، زیرا $N_{L,\xi}{}^{v_{L,\xi}} = ۰$. در نتیجه در معادله‌ی (۱۷.۲) عبارت آخر که در آن $w_\xi{}^{(۲v_{L,\xi})}$ به‌کار رفته است، برابر صفر می‌شود.

توجه کنیم که معادله‌ی (۱۲.۲) در حالت کلی یک $PDAE$ است. هرگاه B منفرد باشد، در این صورت $PDAE$ تبدیل به DAE می‌شود.

ماتریس‌های $P_{L,\xi}, Q_{L,\xi}, R_{L,\xi}, N_{L,\xi}$ و $m_۱, m_۲, v_{L,\xi}$ وابسته به پارامتر ξ هستند، بنابراین ممکن است تغییر کنند. برای هر مولفه‌ی $u_\xi(x)$ (و درنهایت $u(t,x)$) می‌توانیم یک BC وابسته به ماتریس $Q_{L,\xi}$ مشخص کنیم. $Re(\xi)$ را طوری انتخاب می‌کنیم که مجموعه اندیس $\mathcal{M}_{BC}$ مستقل از پارامتر لاپلاس ξ باشد.

اکنون از (۱۷.۲) نسبت به x مشتق می‌گیریم و خواهیم داشت:

$$w_\xi'(x) = r_{\xi,۲}'(x) - N_{L,\xi} r_{\xi,۲}'''(x) + \cdots (-۱)^{v_{L,\xi}-۱} N_{L,\xi}{}^{v_{L,\xi}-۱} r_{\xi,۲}{}^{(۲v_{L,\xi}-۱)}(x). \tag{۱۸.۲}$$

یعنی برای به‌دست‌آوردن یک معادله‌دیفرانسیل برای $w_\xi(x)$ باید $۲v_{L,\xi} - ۱$ بار نسبت به x مشتق بگیریم. حال اندیس دیفرانسیل مکانی $v_{d,x}$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

تعریف ۱.۳.۲. فرض کنید $\alpha^* \in \mathbb{R}^+$ عددی باشد که

الف. $\alpha^* > \alpha$،

ب. $N_{L,\xi}$ ماتریس پوچ‌توان با پوچ‌توانی $v_{L,\xi} \geq ۱$ برای هر $\xi \in \mathbb{C}$ با $Re(\xi) > \alpha$ ساختار مشابه داشته باشد، یعنی $N_{L,\xi}$ مستقل از ξ باشد.

آنگاه داریم:

$$v_{d,x} = ۲v_L - ۱ \quad , v_L = v_{L,\xi}, \quad Re(\xi) > \alpha^*,$$

که $v_{d,x}$ را اندیس دیفرانسیل مکانی [۱] $PDAE$ ۱.۲ می‌نامیم. هرگاه $v_L = ۰$ ، آنگاه اندیس دیفرانسیل مکانی را صفر تعریف می‌کنیم.

[۱] Differential Spatial Index

تذکر ۲.۳.۲. تحت شرایط بخش ۳.۲ ، $\alpha^* \in \mathbb{R}^+$ موجود است.

تذکر ۳.۳.۲. معمولا اگر n را کوچک بگیریم، (برای مثال $n = ۲,۳,۴$) آنگاه پوچ‌توانی $v_{L,\xi}$ از $N_{L,\xi}$ به‌راحتی به‌دست می‌آید. هرگاه $N_{L,\xi}$ شامل یک بلوک باشد، آنگاه $v_{L,\xi} = m_۲$.

۲.۳.۲ تبدیل فوریه و اندیس زمانی

اکنون $PDAE$ (۱.۲) را با تابع اسکالر $\phi_k(x)$ ضرب می‌کنیم و روی $[-l,l]$ نسبت به x انتگرال می‌گیریم. $\phi_k(x), k = ۱,۲,\cdots$ توابع ویژه‌ی متعامد یکه‌ی عملگر $\frac{\partial^۲}{\partial x^۲}$ با مقدار ویژه‌ی μ_k هستند. یعنی

$$\frac{\partial^۲}{\partial x^۲}\phi_k(x) = \mu_k\phi_k(x), \quad k = ۱,۲,\cdots.$$

تبدیل فوریه‌ی متناهی یک تابع با مقدار برداری $\chi(t,x)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\hat{\chi}_k(t) = \frac{۱}{l}\int_{-l}^{l}\chi(t,x)\phi_k(x)dx.$$

داریم:

$$Au_t(t,x) + Bu_{xx}(t,x) + Cu(t,x) = f(t,x).$$

در نتیجه بنا بر تعریف تبدیل فوریه داریم:

$$\hat{u}_k(t) = \frac{۱}{l}\int_{-l}^{l}u(t,x)\phi_k(x)\mathrm{d}x. \qquad (۱۹.۲)$$

که $\phi_k(x), k = ۱,۲,\cdots$ توابع ویژه‌ی متعامد یکه از عملگر $\frac{\partial^۲}{\partial x^۲}$ با مقداروی‌ژه‌ی μ_k هستند.

تبدیل فوریه‌ی $u_t(t,x)$ برابر با $\hat{u}'_k(t)$ است. زیرا

$$\frac{۱}{l}\int_{-l}^{l}u_t(t,x)\phi_k(x)\mathrm{d}x = \hat{u}'_k(t).$$

همچنین، بنا بر (۱۹.۲) تبدیل فوریه‌ی $u_{xx}(t,x)$ به‌صورت $\frac{۱}{l}\int_{-l}^{l}u_{xx}(t,x)\phi_k(x)\mathrm{d}x$ است. بنابراین

$$\begin{aligned}\frac{۱}{l}\int_{-l}^{l}u_{xx}(t,x)\phi_k(x)\mathrm{d}x &= \frac{۱}{l}\big(\phi_k(x)u_x(t,x)|_{-l}^{l} - \int_{-l}^{l}u_x(t,x)\phi'_k(x)\mathrm{d}x\big)\\ &= \frac{۱}{l}\big(\phi_k(x)u_x(t,x)|_{-l}^{l} - u(t,x)\phi'_k(x)|_{-l}^{l}\big)\\ &+ \frac{۱}{l}\big(\int_{-l}^{l}u(t,x)\phi_k{}''(x)\mathrm{d}x\big)\\ &= \frac{۱}{l}\big(\phi_k(x)u_x(t,x)|_{-l}^{l} - u(t,x)\phi'_k(x)|_{-l}^{l}\big) + \mu_k\hat{u}_k(t).\end{aligned} \qquad (۲۰.۲)$$

زیرا بنا به فرض داریم:

$$\frac{\partial^۲}{\partial x^۲}\phi_k(x) = \mu_k\phi_k(x).$$

در معادله‌ی (۲۰.۲) انتگرال جزبه‌جز را به کار بردیم، در نتیجه معادله‌ی (۱.۲) به معادله‌ی زیر تبدیل می‌شود:

$$A\hat{u}'_k(t) + (\mu_kB + C)\hat{u}_k(t) = \hat{f}_k(t) + B\rho_k(t) = \bar{f}_k(t), \qquad (۲۱.۲)$$

که در آن $\rho_k(t) = (\rho_{k1}(t), \cdots, \rho_{kn}(t))^T$ و

$$\rho_{kj}(t) = 0, \quad j \in \mathcal{M}_{BC},$$

$$\rho_{kj}(t) = \frac{1}{l}\left[\phi_k'(x)u_j(t,x) - \phi_k(x)u_{x,j}(t,x)\right]_{x=-l}^{x=l}, \quad j \notin \mathcal{M}_{BC},$$

اگر ماتریس A منفرد باشد، آنگاه معادله‌ی (۱.۳.۲) یک DAE وابسته به پارامتر μ_k است که تحت شرایط ۴ و ۵ از بخش ۳.۲با شرایط اولیه‌ی مناسب، جواب یکتا دارد. مشابه حالت تبدیل لاپلاس در زیربخش ۱.۳.۲ فرض ۴ از بخش ۳.۲ نتیجه می‌دهد که ماتریس‌های منتظم $P_{F,k}$ ، $Q_{F,k}$ وجود دارند به‌طوری که [۸]

$$P_{F,k}AQ_{F,k} = \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & N_{F,k} \end{pmatrix} \quad , \quad P_{F,k}(\mu_k B + C)Q_{F,k} = \begin{pmatrix} R_{F,k} & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{pmatrix}, \qquad (۲۲.۲)$$

که در آن $R_{F,k} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$ و $N_{F,k} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$ یک ماتریس جردن زنجیری با اندیس پوچ‌توانی $\nu_{F,k}$ است. البته $n_1 + n_2 = n$. داریم:

$$\begin{aligned} &P_{F,k}AQ_{F,k}Q_{F,k}^{-1}u_k'(t) + P_{F,k}(\mu_k B + C)Q_{F,k}Q_{F,k}^{-1}\hat{u}_k(t) \\ &= P_{F,k}(\hat{f}_k(t) + B\rho_k(t)) = P_{F,k}(\bar{f}_k(t)). \end{aligned} \qquad (۲۳.۲)$$

در نظر می‌گیریم:

$$(y_k^T(t), z_k^T(t))^T := Q_{F,k}^{-1}\hat{u}_k(t),$$

و

$$(s_{k,1}^T(t), s_{k,2}^T(t))^T = P_{F,k}\bar{f}_k(t).$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & N_{F,k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_k'(t) \\ z_k'(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_{F,k} & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_k(t) \\ z_k(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} s_{k,1}(t) \\ s_{k,2}(t) \end{pmatrix}, \end{aligned} \qquad (۲۴.۲)$$

بنابراین از معادله‌ی (۲۴.۲) داریم:

$$y_k'(t) + R_{F,k}y_k(t) = s_{k,1}(t). \qquad (۲۵.۲)$$

$$N_{F,k}z_k'(t) + z_k(t) = s_{k,2}(t). \qquad (۲۶.۲)$$

معادله‌ی (۲۵.۲) یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه‌ی اول با بعد n_1 است.

همچنین داریم:

$$N_{F,k}z_k'(t) + z_k(t) = s_{k,2}(t).$$

در نتیجه

$$z_k(t) = s_{k,2}(t) - N_{F,k}z_k'(t).$$

از طرفی داریم:

$$z_k'(t) = s'_{k,۲}(t) - N_{F,k} z_k''(t).$$

همچنین:

$$z_k''(t) = s''_{k,۲}(t) - N_{F,k} z_k'''(t).$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} z_k(t) &= s_{k,۲}(t) - N_{F,k}(s'_{k,۲}(t) - N_{F,k} z_k''(t)) \\ &= s_{k,۲}(t) - N_{F,k} s'_{k,۲}(t) + N^{۲}{}_{F,k} z_k''(t) \\ &= s_{k,۲}(t) - N_{F,k} s'_{k,۲}(t) + N^{۲}{}_{F,k}(s''_{k,۲}(t) - N_{F,k} z_k'''(t)) \\ &= s_{k,۲}(t) - N_{F,k} s'_{k,۲}(t) + N^{۲}{}_{F,k} s''_{k,۲}(t) - N^{۳}{}_{F,k} z_k'''(t). \end{aligned} \tag{۲۷.۲}$$

در نتیجه بنا بر (۱۷.۲) داریم:

$$z_k(t) = \sum_{i=۰}^{v_{F,k}-۱} (-N_{F,k})^i s_{k,۲}{}^{(i)}(t). \tag{۲۸.۲}$$

از معادله‌ی (۲۸.۲) نتیجه می‌گیریم که در حالت کلی نمی‌توان یک شرط اولیه‌ی $z_k(۰)$ را تعیین کرد. زیرا از (۲۸.۲) مشاهده می‌کنیم مقادیر اولیه‌ی $z_k(t)$ به‌وسیله‌ی تابع سمت راست مشخص می‌شود.

در ادامه اندیس زمانی را تعریف می‌کنیم:

تعریف ۴.۳.۲. $PDAE$ (۱.۲) اندیس زمانی دیفرانسیل یکنواخت [۱] $v_{d,t} = v_F$ دارد هرگاه خانواده‌ی $(A, \mu_k B + C)$ برای هر k منتظم باشد و اندیس پوچ‌توانی $v_{F,k} = v_F$ (مستقل از k) داشته باشد و همچنین ماتریس $N_{F,k}$ برای هر k ساختار مشابهی داشته باشد(یعنی $N_{F,k}$ مستقل از kباشد).

چون $y_k \in \mathbb{R}^{n_۱}$ ، درنتیجه تعداد شرایط اولیه‌ی لازم برای جواب (۱.۲) برابر $n_۱$ می‌باشد.

تذکر ۵.۳.۲. هرگاه $v_{d,t} = ۰$ و $v_{d,x} = ۰$ ، آنگاه سیستم (۱.۲) یک PDE است.

در مثال زیر اندیس دیفرانسیل مکانی و اندیس دیفرانسیل زمانی یکنواخت را تعیین می‌کنیم:

مثال ۶.۳.۲. فرض کنید

$$A = \begin{pmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -۱ & ۰ \\ -۱ & ۰ \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_۱ & c_۲ \\ -۱ & ۰ \end{pmatrix}, \quad c_۱, c_۲ > ۰.$$

داریم:

$$v_{d,x} = v_{d,t} = ۱,$$

زیرا با استفاده از تبدیل کرونکر از ماتریس‌های

$$P_{L,\xi} = \begin{pmatrix} ۰ & \frac{۱}{\xi+c_۲} \\ \frac{۱}{\xi+c_۲} & -\frac{۱}{\xi+c_۲} \end{pmatrix}, \quad Q_{L,\xi} = \begin{pmatrix} -(\xi + c_۲) & ۰ \\ \xi + c_۱ - ۱ & ۱ \end{pmatrix}.$$

[۱] Uniform Differential Time Index

و

$$P_{F,k} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c_2} & \frac{c_1-c_2-\mu_k}{c_2(\mu_k-1)} \\ 0 & \frac{1}{\mu_k-1} \end{pmatrix}, \quad Q_{F,k} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ c_2 & 1 \end{pmatrix}.$$

داریم

$$\begin{aligned} P_{L,\xi}BQ_{L,\xi} &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\xi+c_2} \\ \frac{1}{\xi+c_2} & -\frac{1}{\xi+c_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -(\xi+c_2) & 0 \\ \xi+c_1-1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\xi+c_2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -(\xi+c_2) & 0 \\ \xi+c_1-1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \qquad (۲۹.۲)$$

در نتیجه

$$N_{L,\xi}^{1} = 0, \quad v_L = v_{L,\xi} = 1.$$

بنابراین

$$v_{d,x} = 2v_L - 1 = 2 \times 1 - 1 = 1.$$

همچنین

$$\begin{aligned} P_{F,k}AQ_{F,k} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{c_2} & \frac{c_1-c_2-\mu_k}{c_2(\mu_k-1)} \\ 0 & \frac{1}{\mu_k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ c_2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{c_2} & \frac{1}{c_2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ c_2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \qquad (۳۰.۲)$$

در نتیجه

$$N_{F,k}^{1} = 0, \quad v_F = v_{F,k} = 1.$$

مثال ۷.۳.۲. فرض کنید $n = 2$ ، A منفرد، B منتظم و برای $t \in [0, t_e]$ شرایط مرزی دیریکله‌ی همگن $u(t,-l) = u(t,l) = 0$ برقرار باشد. چون B منتظم است پس از (۲۱.۲) نتیجه می‌گیریم $\rho_k(t) = 0$. حال فرض کنید ماتریس‌های $A, B, C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ به‌صورت زیر باشند:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix}.$$

نشان می‌دهیم هرگاه یکی از روابط $(b_2\mu_k + c_2)(b_3\mu_k + c_3) \neq 0$ ، $b_4\mu_k = c_4$ یا $b_4\mu_k \neq -c_4$ برقرار باشند، در این صورت خانواده ماتریس $(A, \mu_k B + C)$ منتظم است. زیرا داریم:

$$\begin{aligned}(A, \mu_k B + C) &= A + \lambda(\mu_k B + C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \mu_k b_1 + c_1 & \mu_k b_2 + c_2 \\ \mu_k b_3 + c_3 & \mu_k b_4 + c_4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 + \lambda(\mu_k b_1 + c_1) & \lambda(\mu_k b_2 + c_2) \\ \lambda(\mu_k b_3 + c_3) & \lambda(\mu_k b_4 + c_4) \end{pmatrix}\end{aligned} \quad (۳۱.۲)$$

خانواده‌ی $(A, \mu_k B + C)$ منتظم است، هرگاه حداقل یک λ موجود باشد به‌طوری‌که:

$$\det(A + \lambda(\mu_k B + C)) \neq 0.$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}\det(A + \lambda(\mu_k B + C)) &= (1 + \lambda(\mu_k b_1 + c_1))(\lambda(\mu_k b_4 + c_4)) \\ &\quad - \lambda^2(\mu_k b_2 + c_2)(\mu_k b_3 + c_3) \\ &= \lambda(\mu_k b_4 + c_4) + \lambda^2 \mu_k b_1(\mu_k b_4 + c_4) \\ &\quad + \lambda^2 c_1(\mu_k b_4 + c_4) - \lambda^2(\mu_k b_2 + c_2)(\mu_k b_3 + c_3)\end{aligned} \quad (۳۲.۲)$$

بنابراین، هرگاه $\mu_k b_4 + c_4 \neq 0$، آنگاه خانواده‌ی $(A, \mu_k B + C)$ منتظم است و هرگاه $\mu_k b_4 + c_4 = 0$، در این صورت برای اینکه خانواده‌ی $(A, \mu_k B + C)$ منتظم باشد، باید شرط $(\mu_k b_2 + c_2)(\mu_k b_3 + c_3) \neq 0$ برقرار باشد.

مثال ۸.۳.۲. فرض کنیم

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

که در آن $b_1 > 0$. می‌خواهیم اندیس دیفرانسیل مکانی و اندیس دیفرانسیل زمانی یکنواخت را تعیین کنیم. بنابراین ماتریس‌های منتظم $P, Q, P', Q' \in \mathbb{R}^2$ موجودند به‌طوری که

$$PBQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P(\xi A + C)Q = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P'AQ' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P'(\mu_k B + C)Q' = \begin{pmatrix} R' & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

یعنی

$$\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi + 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} P'_{11} & P'_{12} \\ P'_{21} & P'_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} \\ Q'_{21} & Q'_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} P'_{۱۱} & P'_{۱۲} \\ P'_{۲۱} & P'_{۲۲} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_k b_۱ + ۱ & \mu_k b_۲ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q'_{۱۱} & Q'_{۱۲} \\ Q'_{۲۱} & Q'_{۲۲} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R' & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}.$$

در نتیجه، برای اندیس مکانی داریم:

$$P_{۱۱} b_۱ Q_{۱۱} + P_{۱۱} b_۲ Q_{۲۱} = ۱, \tag{۳۳.۲}$$

$$P_{۱۱} b_۱ Q_{۱۲} + P_{۱۱} b_۲ Q_{۲۲} = ۰, \tag{۳۴.۲}$$

$$P_{۲۱} b_۱ Q_{۱۱} + P_{۲۱} b_۲ Q_{۲۱} = ۰, \tag{۳۵.۲}$$

$$P_{۲۱} b_۱ Q_{۱۲} + P_{۲۱} b_۲ Q_{۲۲} = ۰, \tag{۳۶.۲}$$

$$P_{۱۱}(\xi + ۱) Q_{۱۱} + P_{۱۲} Q_{۲۱} = R, \tag{۳۷.۲}$$

$$P_{۱۱}(\xi + ۱) Q_{۱۲} + P_{۱۲} Q_{۲۲} = ۰, \tag{۳۸.۲}$$

$$P_{۲۱}(\xi + ۱) Q_{۱۱} + P_{۲۲} Q_{۲۱} = ۰, \tag{۳۹.۲}$$

$$P_{۲۱}(\xi + ۱) Q_{۱۲} + P_{۲۲} Q_{۲۲} = ۱, \tag{۴۰.۲}$$

از (۳۳.۲) داریم

$$P_{۱۱}(b_۱ Q_{۱۱} + b_۲ Q_{۲۱}) = ۱,$$

بنابراین $P_{۱۱} \neq ۰$ و $b_۱ Q_{۱۱} + b_۲ Q_{۲۱} \neq ۰$ ، بنابر (۳۴.۲) داریم:

$$P_{۱۱}(b_۱ Q_{۱۲} + b_۲ Q_{۲۲}) = ۰,$$

همچنین از (۳۳.۲) داریم:

$$b_۱ Q_{۱۲} + b_۲ Q_{۲۲} = ۰.$$

از (۳۵.۲) نتیجه می‌گیریم:

$$P_{۲۱}(b_۱ Q_{۱۱} + b_۲ Q_{۲۱}) = ۰,$$

و بنابر (۳۶.۲) داریم:

$$P_{۲۱}(b_۱ Q_{۱۲} + b_۲ Q_{۲۲}) = ۰,$$

فرض کنیم $P_{۲۱} \neq ۰$. در نتیجه، بنابر (۳۵.۲) داریم:

$$b_۱ Q_{۱۱} + b_۲ Q_{۲۱} = ۰,$$

و از (۳۶.۲) نتیجه می‌گیریم:

$$b_۱ Q_{۱۲} + b_۲ Q_{۲۲} = ۰.$$

بنابراین داریم:

$$\begin{cases} b_۱ Q_{۱۱} + b_۲ Q_{۲۱} = ۰ \\ b_۱ Q_{۱۲} + b_۲ Q_{۲۲} = ۰ \end{cases} \tag{۴۱.۲}$$

در نتیجه

$$\begin{cases} -b_1 Q_{11} Q_{22} - b_2 Q_{21} Q_{22} = 0 \\ b_1 Q_{21} Q_{12} + b_2 Q_{21} Q_{22} = 0 \end{cases} \tag{۴۲.۲}$$

بنابراین

$$b_1(Q_{21}Q_{12} - Q_{11}Q_{22}) = 0.$$

چون $b_1 > 0$، در نتیجه

$$Q_{21}Q_{12} = Q_{11}Q_{22},$$

که با منتظم‌بودن Q در تناقض است. پس باید $P_{21} = 0$. بنابراین از (۳۹.۲) نتیجه می‌گیریم $P_{22}Q_{21} = 0$ و داریم $P_{22} \neq 0$. بنابراین $Q_{21} = 0$. از (۴۰.۲) داریم $P_{22}Q_{22} = 1$. بنابراین $Q_{22} = \frac{1}{P_{22}}$. چون Q منتظم است، پس باید $Q_{11} \neq 0$. داریم

$$b_1 Q_{12} = -b_2 Q_{22},$$

و

$$Q_{12} = \frac{-b_2 Q_{22}}{b_1},$$

از (۳۸.۲) داریم:

$$P_{11}(\xi+1)\frac{(-b_2 Q_{22})}{b_1} + P_{12}Q_{22} = 0.$$

درنتیجه

$$Q_{22}\left(P_{12} - \frac{b_2}{b_1}(\xi+1)P_{11}\right) = 0.$$

چون Q منتظم است، پس

$$P_{12} = \frac{b_2}{b_1}(\xi+1)P_{11}.$$

بنابراین

$$\begin{pmatrix} P_{11} & \frac{b_2}{b_1}(\xi+1)P_{11} \\ 0 & P_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{11} & \frac{-b_2}{b_1 P_{22}} \\ 0 & \frac{1}{P_{22}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

و

$$\begin{pmatrix} P_{11} & \frac{b_2}{b_1}(\xi+1)P_{11} \\ 0 & P_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi+1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{11} & \frac{-b_2}{b_1 P_{22}} \\ 0 & \frac{1}{P_{22}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

در نتیجه

$$\begin{pmatrix} P_{11}b_1 & P_{11}b_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{11} & \frac{-b_2}{b_1 P_{22}} \\ 0 & \frac{1}{P_{22}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

بنابراین $P_{11}b_1 = \frac{1}{Q_{11}}$. همچنین

$$\begin{pmatrix} P_{۱۱}(\xi+۱) & \frac{b_۲}{b_۱}(\xi+۱)P_{۱۱} \\ ۰ & P_{۲۲} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{۱۱} & \frac{-b_۲}{b_۱ P_{۲۲}} \\ ۰ & \frac{۱}{P_{۲۲}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}.$$

در نتیجه $P_{۱۱}(\xi+۱)Q_{۱۱} = R$. بنابراین داریم:

$$P = \begin{pmatrix} P_{۱۱} & \frac{b_۲}{b_۱}(\xi+۱)P_{۱۱} \\ ۰ & P_{۲۲} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} Q_{۱۱} & \frac{-b_۲}{b_۱ P_{۲۲}} \\ ۰ & \frac{۱}{P_{۲۲}} \end{pmatrix},$$

و خواهیم داشت:

$$P_{۱۱}b_۱ = \frac{۱}{Q_{۱۱}}, \quad P_{۱۱}(\xi+۱)Q_{۱۱} = R.$$

با قراردادن

$$Q_{۱۱} = ۱, \quad P_{۱۱} = \frac{۱}{b_۱}, \quad P_{۲۲} = \frac{۱}{۲}, \quad Q_{۲۲} = ۲,$$

داریم

$$\begin{aligned} PBQ &= \begin{pmatrix} \frac{۱}{b_۱} & \frac{b_۲}{b_۱{}^۲}(\xi+۱) \\ ۰ & \frac{۱}{۲} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_۱ & b_۲ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۱ & \frac{-۲b_۲}{b_۱} \\ ۰ & ۲ \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ۱ & \frac{b_۲}{b_۱} \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۱ & \frac{-۲b_۲}{b_۱} \\ ۰ & ۲ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{۴۳.۲}$$

همچنین

$$\begin{aligned} P(\xi A + C)Q &= \begin{pmatrix} \frac{۱}{b_۱} & \frac{b_۲}{b_۱{}^۲}(\xi+۱) \\ ۰ & \frac{۱}{۲} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi+۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۱ & \frac{-۲b_۲}{b_۱} \\ ۰ & ۲ \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\xi+۱}{b_۱} & \frac{b_۲}{b_۱{}^۲}(\xi+۱) \\ ۰ & \frac{۱}{۲} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۱ & \frac{-۲b_۲}{b_۱} \\ ۰ & ۲ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\xi+۱}{b_۱} & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{۴۴.۲}$$

به طریق مشابه، برای اندیس دیفرانسیل زمانی داریم:

$$\begin{pmatrix} P'_{۱۱} & P'_{۱۲} \\ P'_{۲۱} & P'_{۲۲} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q'_{۱۱} & Q'_{۱۲} \\ Q'_{۲۱} & Q'_{۲۲} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix},$$

و

$$\begin{pmatrix} P'_{۱۱} & P'_{۱۲} \\ P'_{۲۱} & P'_{۲۲} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_k b_۱ + ۱ & \mu_k b_۲ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q'_{۱۱} & Q'_{۱۲} \\ Q'_{۲۱} & Q'_{۲۲} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R' & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}.$$

بنابراین

$$\begin{pmatrix} P'_{۱۱} & ۰ \\ P'_{۲۱} & ۰ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q'_{۱۱} & Q'_{۱۲} \\ Q'_{۲۱} & Q'_{۲۲} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix},$$

و

$$\begin{pmatrix} P'_{۱۱}(\mu_k b_۱ + ۱) & P'_{۱۱}(\mu_k b_۲ + P_{۱۲}) \\ P'_{۲۱}(\mu_k b_۱ + ۱) & P'_{۲۱}(\mu_k b_۲ + P_{۲۲}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q'_{۱۱} & Q'_{۱۲} \\ Q'_{۲۱} & Q'_{۲۲} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R' & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}.$$

داریم $P'_{11}Q'_{11} = 1$ ، در نتیجه $P'_{11} = \frac{1}{Q'_{11}}$ ، پس $P'_{11}, Q'_{11} \neq 0$ ، همچنین $P'_{11}Q'_{12} = 0$ ، بنابراین $Q'_{12} = 0$ و نیز $P'_{21}Q'_{11} = 0$ ، همچنین، داریم : $Q'_{11} \neq 0$ ، در نتیجه $P'_{21} = 0$.
همچنین $P'_{21}Q'_{12} = 0$ و داریم

$$P'_{11}(\mu_k b_1 + 1)Q'_{11} + (P'_{11}\mu_k b_2 + P'_{12})Q'_{21} = R', \tag{۴۵.۲}$$

$$P'_{21}(\mu_k b_1 + 1)Q'_{11} + (P'_{21}(\mu_k b_2) + P'_{22})Q'_{21} = 0, \tag{۴۶.۲}$$

$$P'_{11}(\mu_k b_1 + 1)Q'_{12} + (P'_{11}\mu_k b_2 + P'_{12})Q'_{22} = 0, \tag{۴۷.۲}$$

$$P'_{21}(\mu_k b_1 + 1)Q'_{12} + (P'_{21}\mu_k b_2 + P'_{22})Q'_{22} = 1, \tag{۴۸.۲}$$

از (۴۶.۲) نتیجه می‌شود $P'_{22}Q'_{21} = 0$ و بنا بر (۴۸.۲) داریم $P'_{22}Q'_{22} = 1$. در نتیجه $P'_{22} = \frac{1}{Q'_{22}}$ ، بنابراین $P'_{22} \neq 0$ ، در نتیجه $Q'_{21} = 0$ ، از (۴۷.۲) داریم

$$(P'_{11}\mu_k b_2) + P'_{12})Q'_{22} = 0.$$

می‌دانیم $Q'_{22} \neq 0$ ، بنابراین

$$P'_{11}\mu_k b_2) + P'_{12} = 0 \quad \Rightarrow \quad P'_{12} = -P'_{11}(\mu_k b_2).$$

همچنین بنابر (۴۵.۲) داریم:

$$P'_{11}(\mu_k b_1 + 1)Q'_{11} = R', \quad (Q'_{11} = \frac{1}{P'_{11}}) \quad \Rightarrow \mu_k b_1 + 1 = R'.$$

با قرار دادن

$$P' = \begin{pmatrix} 1 & -\mu_k b_2 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad Q' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

داریم:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\mu_k b_2 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

و

$$\begin{pmatrix} 1 & -\mu_k b_2 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_k b_1 + 1 & \mu_k b_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_k b_1 + 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

بنابراین $v_{d,x} = v_{d,t} = 1$.

۳.۳.۲ اندیس اختلال PDAE

علاوه بر اندیس‌های دیفرانسیل $v_{d,x}$ و $v_{d,t}$ که در قسمت‌های قبل تعریف شده است، اندیس اختلال[1] $PDAE$ (۱.۲) را معرفی می‌کنیم. یادآور می‌شویم که اندیس اختلال، در واقع یک جفت اندیس اختلال

[1] Perturbation Index

می‌باشد که در فضای (t,x) تعریف می‌شود. این اندیس شکل متفاوتی از اندیس مکانی و اندیس زمانی یکنواخت است که به‌ترتیب با استفاده از تبدیل لاپلاس و فوریه از $PDAE$ تعریف شدند.

فرض کنید برای $I=[\circ,t]$ ، داشته باشیم $\circ < t \leq t_e$. در این صورت تعریف زیر را داریم:

تعریف ۹.۳.۲. فرض کنیم شرط ۱ برقرار باشد، آنگاه مساله‌ی (۱.۲) روی $[\circ,t_e]\times[-l,l]$ جفت اندیس اختلال $[m,k]$ دارد، هرگاه m و k کوچکترین عدد صحیح مثبت باشند به‌طوری که برای هر $\hat{u}(t,x)$ که خطای زیر را دارد:

$$A\hat{u}_t(t,x)+B\hat{u}_{xx}(t,x)+C\hat{u}(t,x)=f(t,x)+\delta(t,x)$$

برآورد زیر را روی $[-l,l]\times[\circ,t_e]$ ، برای شرایط مرزی دیریکله،[۱] داشته باشیم:

$$\begin{aligned}\|\hat{u}(t,x)-u(t,x)\| &\leq C_\circ\Big(\|\hat{u}(\circ,x)\|+\sum_{i=\circ}^{m-1}\sum_{j=\circ}^{k-1}\max_{\tau\in I}\|\frac{\partial^{i+j}\delta(\tau,x)}{\partial\tau^i\partial x^j}\|\Big)\\ &+C_1\max_{\tau\in I}(\|\hat{u}(\tau,-l)-u(\tau,-l)\|+\|\hat{u}(\tau,l)-u(\tau,l)\|)\end{aligned}\tag{۴۹.۲}$$

که عبارت سمت راست به‌قدر کافی کوچک است. معمولا δ به عنوان یک اختلال در مساله‌ی (۱.۲) تعبیر می‌شود. همچنین، فرض کنیم $C_\circ$ و C_1 ثابت‌های نامنفی مستقل از t,x و δ باشند.

عبارت زیر را برای شرایط مرزی نویمن[۲] (در معادله‌ی (۲.۲)، $k=1$) جایگزین سطر دوم (۴۹.۲) می‌کنیم:

$$\begin{aligned}&C_1\sum_{j\in M_{BC}}\max_{\tau\in I}\Big(\|\frac{\partial(\hat{u}_j(\tau,-l)-u_j(\tau,-l))}{\partial x}\|+\|\frac{\partial(\hat{u}_j(\tau,l)-u_j(\tau,l))}{\partial x}\|\Big)\\ &+C_2\sum_{j\notin M_{BC}}\max_{\tau\in I}(\|\hat{u}_j(\tau,-l)-u_j(\tau,-l)\|+\|\hat{u}_j(\tau,l)-u_j(\tau,l)\|)\end{aligned}\tag{۵۰.۲}$$

که C_2 ثابت نامنفی می‌باشد.

رابطه‌ای بین جفت اندیس اختلال $[m,k]$ و دو اندیس دیفرانسیل مکانی و زمانی وجود دارد که در لم زیر آن را بیان می‌کنیم:

لم ۱۰.۳.۲. فرض کنید $t_e=\infty$ و $\hat{u}$ به قدر کافی هموار باشد. همچنین، فرض کنید $v_{d,x}$ و $v_{d,t}$ به‌ترتیب اندیس دیفرانسیل مکانی و زمانی $PDAE$ باشند. آن‌گاه جفت اندیس اختلال $PDAE$ به صورت زیر داده می‌شود:

$$[m,k]=[v_{d,t},v_{d,x}].$$

برهان. کافی است نشان دهیم بالاترین مشتقات اختلال δ نسبت به t و x که در $\hat{u}(t,x)$ رخ می‌دهند، به‌ترتیب از مرتبه‌ی $v_{d,t}-1$ و $v_{d,x}-1$ هستند. برای این منظور، دو شکل متفاوت تابع $\hat{u}$ که بنا به فرض موجود و یکتاست را به‌کار می‌بریم. (یک نمایش با یک سری فوریه، دیگری با تبدیل لاپلاس).

[۱] Dirichlet

[۲] Neumann

ابتدا با جایگزین‌کردن $f+\delta$ به‌جای f در $PDAE$ (۱.۲)، مشتقات δ را نسبت به t در نظر می‌گیریم. با توجه به زیربخش ۲.۳.۲ بالاترین مرتبه‌ی مشتق زمانی تبدیل فوریه‌ی $\bar{f}_k(t)+\delta_k(t)$ برابر $v_{F,k}-1$ است (معادله‌ی (۲۸.۲) را ببینید). به دلیل این‌که تبدیل فوریه‌ی معکوس مرتبه‌ی مشتق نسبت به زمان را تغییر نمی‌دهد و چون اندیس زمانی بنا به فرض ، یکنواخت (یکسان) است (یعنی $v_{F,k}=v_F$) ، نتیجه می‌گیریم بالاترین مرتبه‌ی مشتق زمانی δ در فضای (t,x) از مرتبه‌ی v_F-1 است، یعنی $m=v_F=v_{d,t}$ (بنا به تعریف ۴.۳.۲).

در قسمت دوم، در $\hat{u}(t,x)$، بالاترین مرتبه‌ی مشتق $\delta(t,x)$ نسبت به x را در نظر می‌گیریم. برای این منظور، حال از تبدیل لاپلاس $\hat{u}_\xi(x)=Q_{L,\xi}(\hat{v}_\xi^T(x),\hat{w}_\xi^T(x))^T$ از $\hat{u}(t,x)$ استفاده می‌کنیم (بنا به فرض لم $\hat{u}_\xi$ وجود دارد). از فرضیات ۲ و ۳ و معادله‌ی (۱۷.۲) می‌بینیم که بالاترین مرتبه‌ی مشتق نسبت به x از تبدیل لاپلاس δ_ξ برابر با $2v_L-2$ است. به دلیل این‌که تبدیل لاپلاس معکوس، مرتبه‌ی مشتقات نسبت به x را تغییر نمی‌دهد و از تعریف ۹.۳.۲ نتیجه می‌گیریم که باید $k=2v_L-1$ انتخاب شود. با توجه به تعریف ۱.۳.۲ ، نتیجه می‌گیریم $k=v_{d,x}$. بنابراین بالاترین مرتبه‌ی مشتق زمانی δ که در $\hat{u}$ رخ می‌دهد، برابر v_F-1 است و اثبات لم کامل می‌شود. □

۴.۲ نمایش پایدار جواب

یادآور می‌شویم که در حالت کلی نمی‌توان شرایط مرزی و اولیه را برای همه‌ی مولفه‌های $u_i(t,x), i=1,\dots,n$ تعیین کرد. عبارت " نمایش پایدار جواب" یعنی این‌که می‌خواهیم جوابی از مساله‌ی (۱.۲) را به‌دست آوریم که شرایط اولیه و مرزی را به‌ترتیب، فقط برای مولفه‌های $u_i, i\in\mathcal{M}_{IC}$، و $u_j, j\in\mathcal{M}_{BC}$ به‌کار برد.

در قسمت‌های قبلی به این نتیجه رسیدیم که می‌توانیم شرایط مرزی را برای $v_\xi(x)$ تعیین کنیم و دیدیم که مجموعه‌ی $\mathcal{M}_{BC}$ ، m_1 مولفه دارد و برای m_2 مولفه‌ی دیگر $u_\xi(x)$ نمی‌توانیم شرایط مرزی را مشخص کنیم.

در زیر یک نمایش صوری برای $t\in[0,\infty)$ ، $x\in[-l,l]$ ، از جواب $u(t,x)$ از مساله‌ی (۱.۲) تا (۳.۲) در نظر می‌گیریم. ابتدا فرض می‌کنیم شرایط مرزی دیریکله‌ی همگن (۲.۲) برقرار باشند، یعنی $u_j(t,\pm l)=0$ ، $j\in\mathcal{M}_{BC}$. فرض کنید جواب به‌صورت سری زیر باشد:

$$u(t,x)=\sum_{k=0}^{\infty}\tilde{u}_k(t)\phi_k(x)+d(t,x), \qquad (۵۱.۲)$$

که در آن $\tilde{u}_k:[0,\infty)\to\mathbb{R}^n, \phi_k:[-l,l]\to\mathbb{R}, d:[0,\infty)\times[-l,l]\to\mathbb{R}^n$. همچنین، مولفه‌های d_j از تابع برداری مقدار d به گونه‌ای است که

$$d_j=0, \quad j\in\mathcal{M}_{BC}.$$

فرض کنید $d(t,x)$ یک تابع برداری هموار باشد به طوری که:

$$d(t,\pm l)=u(t,\pm l)$$

و $U(t,x)$ یک تابع برداری جدید باشد که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$U(t,x) := u(t,x) - d(t,x). \tag{۵۲.۲}$$

واضح است که U در شرایط زیر صدق می‌کند:

$$U(t,-l) = U(t,l) = 0. \tag{۵۳.۲}$$

$u = U + d$ را در معادله‌ی (۱.۲) جایگزین می‌کنیم. در نتیجه داریم:

$$AU_t(t,x) + Ad_t(t,x) + BU_{xx}(t,x) + Bd_{xx}(t,x) + CU(t,x) + Cd(t,x) = f(t,x).$$

بنابراین $PDAE$ جدید زیر را به دست می‌آوریم:

$$AU_t(t,x) + BU_{xx}(t,x) + CU(t,x) = F(t,x), \tag{۵۴.۲}$$

که در آن $F := f - Ad_t - Bd_{xx} - Cd$. شرایط اولیه به صورت زیر است:

$$U_j(0,x) = g_j(x) - d_j(0,x) \quad j \in \mathcal{M}_{IC}. \tag{۵۵.۲}$$

فرض کنید

$$U(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(t)\phi_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(t)\cos(\frac{k\pi}{2l}x). \tag{۵۶.۲}$$

با فرض این‌که $F(t,x)$ و $U(0,x)$ را بتوان به‌طور مشابه، به صورت یک سری فوریه‌ی کسینوسی نمایش داد، بنا به قبل نتیجه می‌گیریم که $U_k(t)$ یک جواب DAE زیر است:

$$AU'_k(t) + (\mu_k B + C)U_k(t) = F_k(t), \quad k = 1, 2, \cdots, \tag{۵۷.۲}$$

که در آن روابط زیر با شرایط اولیه‌ی پایدار برقرارند:

$$\mu_k = -(\frac{k\pi}{2l})^2, \quad F_k(t) = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} F(t,x)\cos(\frac{k\pi}{2l}x)\mathrm{d}x. \tag{۵۸.۲}$$

بنا بر بخش ۳.۲ و تحت شرایط ۴ و ۵ (F باید جایگزین f شود) یک جواب یکتا از این DAE برای $k = 1, 2, \cdots$ وجود دارد. در این حالت، نمایش جواب به صورت (۵۱.۲) پایدار است.

۵.۲ شرایط مرزی و اولیه برای خانواده‌های منتظم (A,B)

همان‌طور که در قسمت‌های ۱.۳.۲ و ۲.۳.۲ نشان داده شد، تبدیلات لاپلاس و فوریه‌ی جواب u از مساله‌ی (۱.۲) به ترتیب حاصل مجموعه اندیس‌های $\mathcal{M}_{BC}$ و $\mathcal{M}_{IC}$ هستند. بنابراین می‌دانیم که برای مولفه‌های u یک شرط مرزی و یک شرط اولیه می‌تواند مشخص شود. به هر حال، در حالت کلی برای به‌دست آوردن شرط مرزی برای $u_i, \quad i \notin \mathcal{M}_{BC}$ و شرط اولیه برای $u_j, \quad j \notin \mathcal{M}_{IC}$، معادلات سازگاری (۱۷.۲) و (۲۸.۲) به سادگی حل نمی‌شوند. در این قسمت روشی که آسان‌تر است را ارائه می‌دهیم، زیرا حل آن نیاز به معادلات سازگاری ندارد.

فرض کنیم خانواده ماتریس (A,B) منتظم باشد. منتظم بودن خانواده‌ی (A,B) نتیجه می‌دهد ماتریس‌های منتظم $P, Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ وجود دارند به‌طوری که:

$$PAQ = \begin{pmatrix} {I_1}^{(1)} & 0 \\ 0 & N^{(1)} \end{pmatrix}, \quad PBQ = \begin{pmatrix} R^{(1)} & 0 \\ 0 & {I_2}^{(1)} \end{pmatrix}.$$

در نتیجه، با جایگذاری در مساله‌ی (۱.۲) داریم:

$$\begin{pmatrix} {I_1}^{(1)} & 0 \\ 0 & N^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_t \\ w_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R^{(1)} & 0 \\ 0 & {I_2}^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{xx} \\ w_{xx} \end{pmatrix} + \tilde{C} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \tilde{f}. \tag{۵۹.۲}$$

که داریم:

$$(v(t,x)^T, w(t,x)^T)^T := Q^{-1}u(t,x),$$

همچنین

$$\tilde{f}(t,x) := Pf(t,x), \quad \tilde{C} := PCQ.$$

${I_j}^{(1)}$ یک ماتریس همانی از مرتبه‌ی ${n_j}^{(1)}$ ، $j = 1, 2$ است. فرض کنیم $t_e = \infty$. از قبل داشتیم:

$$y_\xi = \int_0^\infty e^{-t\xi} y(t) \mathrm{d}t, \quad Re(\xi) > \alpha.$$

بنابر آنچه قبلا ذکر شد، از معادله‌ی (۱.۲) تبدیل لاپلاس می‌گیریم، سپس داریم:

$$B{u_\xi}''(x) + (\xi A + C)u_\xi(x) = f(x) + Ag(x). \tag{۶۰.۲}$$

اکنون از (۵۹.۲) تبدیل لاپلاس می‌گیریم، درنتیجه داریم:

$$\begin{pmatrix} R^{(1)} & 0 \\ 0 & {I_2}^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {v_\xi}'' \\ {w_\xi}'' \end{pmatrix} + \xi \begin{pmatrix} {I_1}^{(1)} & 0 \\ 0 & N^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_\xi \\ w_\xi \end{pmatrix} + \tilde{C} \begin{pmatrix} v_\xi \\ w_\xi \end{pmatrix} = {\tilde{f}_\xi}^{(1)}.$$

که ${\tilde{f}_\xi}^{(1)}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$${\tilde{f}_\xi}^{(1)} := \tilde{f} + \begin{pmatrix} {I_1}^{(1)} & 0 \\ 0 & N^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}_{|t=0}.$$

زیرا داشتیم $u(0,x) = g(x)$ ، یعنی u در $t = 0$ برابر $g(x)$ می‌باشد. بنابراین $g(x)$ در اینجا مقدار $\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$ در نقطه‌ی $t = 0$ است. بنابراین داریم:

$$PBQ \begin{pmatrix} {v_\xi}'' \\ {w_\xi}'' \end{pmatrix} + \xi PAQ \begin{pmatrix} v_\xi \\ w_\xi \end{pmatrix} + \tilde{C} \begin{pmatrix} v_\xi \\ w_\xi \end{pmatrix} = {\tilde{f}_\xi}^{(1)}.$$

در نتیجه

$$PBQ \begin{pmatrix} {v_\xi}'' \\ {w_\xi}'' \end{pmatrix} + P(\xi A + C)Q \begin{pmatrix} v_\xi \\ w_\xi \end{pmatrix} = {\tilde{f}_\xi}^{(1)}. \tag{۶۱.۲}$$

فرض کنیم خانواده‌ی $(PBQ, P(\xi A + C)Q)$ برای α $Re(\xi) > \alpha$ منتظم باشد. بنابراین معادله‌ی (۶۱.۲) را می‌توان با ماتریس‌های مربعی (n, n) منتظم P_ξ و Q_ξ به‌صورت کرونکر تبدیل کرد. در نتیجه، معادله‌ی زیر را به دست می‌آوریم:

$$\begin{pmatrix} I_{L1}{}^{(2)} & 0 \\ 0 & N_L{}^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{v}''_\xi \\ \bar{w}''_\xi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_L{}^{(2)} & 0 \\ 0 & I_{L2}{}^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{v}_\xi \\ \bar{w}_\xi \end{pmatrix} = \tilde{f}^{(2)}_\xi. \qquad (۶۲.۲)$$

که در آن

$$\begin{pmatrix} I_{L1}{}^{(2)} & 0 \\ 0 & N_L{}^{(2)} \end{pmatrix} = P_\xi \begin{pmatrix} R^{(1)} & 0 \\ 0 & I_2{}^{(1)} \end{pmatrix} Q_\xi, \qquad (۶۳.۲)$$

و

$$\begin{pmatrix} R_L{}^{(2)} & 0 \\ 0 & I_{L2}{}^{(2)} \end{pmatrix} = P_\xi (\xi \begin{pmatrix} I_1{}^{(1)} & 0 \\ 0 & N^{(1)} \end{pmatrix} + \tilde{C}) Q_\xi, \qquad (۶۴.۲)$$

که

$$(\bar{v}^T_\xi, \bar{w}^T_\xi)^T := Q_\xi{}^{-1} (v_\xi{}^T, w_\xi{}^T)^T, \quad \tilde{f}^{(2)}_\xi := P_\xi \tilde{f}^{(1)}_\xi.$$

مشابه قبل، $I_{Lj}{}^{(2)}, j = 1, 2$ ، یک ماتریس همانی از مرتبه‌ی $n_{Lj}{}^{(2)}$ است. هرگاه $R^{(1)}$ منفرد باشد، آن‌گاه $N_L{}^{(2)}$ یک ماتریس پوچ‌توان از مرتبه‌ی $n_{L2}{}^{(2)}$ است. دستگاه (۶۲.۲) مشابه دستگاه معادلات (۱۵.۲) و (۱۶.۲) است. از معادله‌ی (۶۲.۲) نتیجه می‌گیریم که $n_{L1}{}^{(2)}$ شرط مرزی برای مولفه‌های $\bar{v}_\xi$ لازم است. به دلیل این‌که مرتبه‌ی یک ماتریس (n, n) با ضرب در یک ماتریس (n, n) منتظم تغییر نمی‌کند، در نتیجه بنا به تعریف $R^{(1)}$ و از معادلات (۶۳.۲) و (۶۴.۲) نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{aligned} rank(B) &= rank \begin{pmatrix} R^{(1)} & 0 \\ 0 & I_2{}^{(1)} \end{pmatrix} \\ &= r^{(1)} + n_2{}^{(1)} \\ &= n_{L1}{}^{(2)} + rank(N_L{}^{(2)}) \end{aligned} \qquad (۶۵.۲)$$

که $r^{(1)}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$r^{(1)} := rank(R^{(1)}).$$

حال به‌طور مشابه، تعداد شرایط اولیه‌ی لازم برای حل مساله‌ی (۱.۲) را به‌دست می‌آوریم. ابتدا از (۵۹.۲) تبدیل فوریه می‌گیریم و بنا به قسمت ۲.۳.۲ فرض کنیم خانواده‌ی زیر منتظم است:

$$(\begin{pmatrix} I_1{}^{(1)} & 0 \\ 0 & N^{(1)} \end{pmatrix}, \mu_k \begin{pmatrix} R^{(1)} & 0 \\ 0 & I_2{}^{(1)} \end{pmatrix} + \tilde{C}) \qquad (۶۶.۲)$$

حال مجددا از ماتریس‌های (n, n) منتظم $P_{F,k}$ و $Q_{F,k}$ تبدیل کرونکر می‌گیریم. در نتیجه، معادله‌ای مشابه با معادلات (۲۵.۲) و (۲۶.۲) به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{pmatrix} {I_{Fk1}}^{(2)} & 0 \\ 0 & {N_{Fk}}^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {y_k}'(t) \\ {z_k}'(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} {R_{Fk}}^{(2)} & 0 \\ 0 & {I_{Fk2}}^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_k(t) \\ z_k(t) \end{pmatrix} = s_k, \qquad (۶۷.۲)$$

همچنین مشابه با معادلات (۶۳.۲) و (۶۴.۲)، معادلات زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{pmatrix} {I_{Fk1}}^{(2)} & 0 \\ 0 & {N_{Fk}}^{(2)} \end{pmatrix} = P_{Fk} \begin{pmatrix} {I_1}^{(1)} & 0 \\ 0 & N^{(1)} \end{pmatrix} Q_{Fk}, \qquad (۶۸.۲)$$

$$\begin{pmatrix} {R_{Fk}}^{(2)} & 0 \\ 0 & {I_{Fk2}}^{(2)} \end{pmatrix} = P_{Fk}(\mu_k \begin{pmatrix} R^{(1)} & 0 \\ 0 & {I_2}^{(1)} \end{pmatrix} + \tilde{C}) Q_{Fk}, \qquad (۶۹.۲)$$

که در آن ${Q_{Fk}}^{-1}\hat{u}_k$ = $({y_k}^T, {z_k}^T)^T$ که s_k و μ_k را در قسمت ۲.۳.۲ تعریف کردیم. از معادلات (۶۸.۲) و (۶۹.۲) نتیجه می‌گیریم (مشابه معادله‌ی (۶۵.۲)):

$$\begin{aligned} rank(A) &= rank \begin{pmatrix} {I_1}^{(1)} & 0 \\ 0 & N^{(1)} \end{pmatrix} \\ &= {n_1}^{(1)} + rank(N^{(1)}) \\ &= {n_{Fk1}}^{(2)} + rank({N_{Fk}}^{(2)}). \end{aligned} \qquad (۷۰.۲)$$

در واقع لم زیر را ثابت کرده‌ایم:

لم ۱.۵.۲. فرض کنید خانواده ماتریس (A, B) منتظم باشد. همچنین داشته باشیم:

الف. خانواده‌ی $(PBQ, P(\xi A + C)Q)$ برای $Re(\xi) > \alpha$ منتظم باشد،

ب. خانواده‌ی (۶۶.۲) برای $k = 1, 2, \cdots$ منتظم باشد،

ج. ماتریس‌های ${N_{Fk}}^{(2)}$ و ${R_{Fk}}^{(2)}$ مستقل از k هستند (یعنی اندیس k در این ماتریس‌ها می‌تواند حذف شود. برای مثال داریم: ${I_{Fk1}}^{(2)} = {I_{F1}}^{(2)}$ و ${N_{Fk}}^{(2)} = {N_F}^{(2)}$).

آن‌گاه تعداد کل [1] شرایط مرزی (برای متغیرهای تبدیل لاپلاس) و شرایط اولیه (برای متغیرهای تبدیل فوریه) به‌ترتیب به‌صورت زیر است:

$${n_{L1}}^{(2)} = r^{(1)} + {n_2}^{(1)} - rank({N_L}^{(2)}), \qquad (۷۱.۲)$$

$${n_{F1}}^{(2)} = {n_1}^{(1)} + rank(N^{(1)}) - rank({N_F}^{(2)}). \qquad (۷۲.۲)$$

مثال ۲.۵.۲. فرض کنید

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -b \\ -1 & -b \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix},$$

[1] Total Number

که در آن $b \in \mathbb{R}, b \neq ۱$. واضح است خانواده‌ی (A, B) منتظم است. ماتریس‌های منتظم P و Q را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$P = \frac{۱}{۱-b}\begin{pmatrix} ۱ & -۱ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} -b & -۱ \\ ۱ & ۱ \end{pmatrix}.$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} PAQ &= \frac{۱}{۱-b}\begin{pmatrix} ۱ & -۱ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -b & -۱ \\ ۱ & ۱ \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{۱}{۱-b} & \frac{۱}{۱-b} \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -b & -۱ \\ ۱ & ۱ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {I_۱}^{(۱)} & ۰ \\ ۰ & N^{(۱)} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{۷۳.۲}$$

و

$$\begin{aligned} PBQ &= \frac{۱}{۱-b}\begin{pmatrix} ۱ & -۱ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -۱ & -b \\ -۱ & -b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -b & -۱ \\ ۱ & ۱ \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ۰ & ۰ \\ -\frac{۱}{۱-b} & -\frac{b}{۱-b} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -b & -۱ \\ ۱ & ۱ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^{(۱)} & ۰ \\ ۰ & {I_۲}^{(۱)} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{۷۴.۲}$$

درنتیجه

$${n_۱}^{(۱)} = ۱, \quad {n_۲}^{(۱)} = ۱, \quad r^{(۱)} = Rank(R^{(۱)}) = Rank(۰) = ۰.$$

بنابراین

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_t \\ w_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_{xx} \\ w_{xx} \end{pmatrix} + \tilde{C}\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \tilde{f}. \tag{۷۵.۲}$$

حال از (۷۵.۲) تبدیل لاپلاس می‌گیریم. در نتیجه

$$\begin{pmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} {v_\xi}'' \\ {w_\xi}'' \end{pmatrix} + \xi\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_\xi \\ w_\xi \end{pmatrix} + \tilde{C}\begin{pmatrix} v_\xi \\ w_\xi \end{pmatrix} = \tilde{f} + \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}_{|t=۰}. \tag{۷۶.۲}$$

در گام بعد، (۷۶.۲) را به شکل نرمال کرونکر (۶۲.۲) تبدیل می‌کنیم. دقت کنید که مولفه‌های $\tilde{C}$ را با $\tilde{c}_i, i = ۱, ۲, ۳, ۴$ نمایش می‌دهیم. ماتریس‌های منتظم P_ξ و Q_ξ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$P_\xi = \begin{pmatrix} \frac{\tilde{c}_۲}{\xi+\tilde{c}_۱} & -۱ \\ \frac{۱}{\tilde{c}_۲} & ۰ \end{pmatrix}, \quad Q_\xi = \frac{۱}{\xi+\tilde{c}_۱}\begin{pmatrix} \tilde{c}_۲ & \tilde{c}_۲ \\ -(\xi+\tilde{c}_۱) & ۰ \end{pmatrix}.$$

در نتیجه

$$P_\xi\begin{pmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}, \quad Q_\xi = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix}.$$

همچنین

$$\xi \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} + \tilde{C} = \begin{pmatrix} \xi + \tilde{c}_۱ & \tilde{c}_۲ \\ \tilde{c}_۳ & \tilde{c}_۴ \end{pmatrix}.$$

بنابراین

$$P_\xi \begin{pmatrix} \xi + \tilde{c}_۱ & \tilde{c}_۲ \\ \tilde{c}_۳ & \tilde{c}_۴ \end{pmatrix} Q_\xi = \begin{pmatrix} \frac{(\xi+\tilde{c}_۱)\tilde{c}_۴ - \tilde{c}_۲\tilde{c}_۳}{\xi+\tilde{c}_۱} & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}.$$

در نتیجه به‌دست می‌آوریم:

$$I_{L۱}{}^{(۲)} = ۱, \quad R_L{}^{(۲)} = \frac{(\xi + \tilde{c}_۱)\tilde{c}_۴ - \tilde{c}_۲\tilde{c}_۳}{\xi + \tilde{c}_۱}, \quad N_L{}^{(۲)} = ۰, \quad I_{L۲}{}^{(۲)} = ۱.$$

بنابراین، بنا به لم ۲.۵.۱، تعداد شرایط مرزی لازم برای حل $PDAE$ به صورت زیر است:

$$n_{L۱}{}^{(۲)} = r^{(۱)} + n_۲{}^{(۱)} - rank(N_L{}^{(۲)}) = ۰ + ۱ - ۰ = ۱.$$

به روش مشابه می‌توانیم تعداد شرایط اولیه را به دست آوریم. در پایان، یک شرط اولیه می‌تواند برای v اختصاص یابد.

فصل ۳

حل $PDAEs$ با روش‌های نیمه‌تحلیلی

۱.۳ گسسته سازی مکانی و همگرایی

در این بخش گسسته سازی مکانی [۱] مساله‌ی مقدار مرزی اولیه‌ی (۱.۲) تا (۴.۲) را به وسیله‌ی تفاضلات متناهی در نظر می‌گیریم و رفتار همگرایی را در مکان بررسی می‌کنیم.

ابتدا مکان را روی شبکه‌ی با فاصله‌های مساوی به صورت زیر گسسته‌سازی می‌کنیم:

$$\Omega_h = \{x_k : x_k = -l + kh, k = ۱, \cdots, N, \quad h = \frac{۲l}{N+۱}\},$$

که در آن $N \in \mathbb{N}$. $u_{xx}(t, x_k)$ را با رابطه‌ی زیر جایگزین می‌کنیم:

$$u_{xx}(t, x_k) \approx \frac{۱}{h^۲}(u_{k+۱}(t) - ۲u_k(t) + u_{k-۱}(t)), \quad k = ۱, \cdots, N.$$

قرار می‌دهیم: $u_k(t) \approx u(t, x_k)$. بنابراین معادله‌ی (۱.۲) به معادله‌ی نیمه گسسته‌ی زیر تبدیل می‌شود:

$$A{u_k}'(t) + \frac{۱}{h^۲}B(u_{k+۱}(t) - ۲u_k(t) + u_{k-۱}(t)) + Cu_k(t) = f_k(t). \qquad (۱.۳)$$

با استفاده از حاصل‌ضرب کرونکر، به‌شکل ماتریسی به صورت زیر است:

$$(I_N \otimes A)U'(t) + (\frac{۱}{h^۲}P \otimes B + I_N \otimes C)U(t) = F(t) - r(t), \qquad (۲.۳)$$

که در آن مولفه‌ی $u_k(t)$ از بردار $U(t) \in \mathbb{R}^{nN}$ تقریب زمانی پیوسته با $u(t, x_k)$ است و بردارهای $r(t)$ و $F(t)$ با بعد nN به صورت زیر می‌باشند:

$$r(t) = (\frac{۱}{h^۲}I_N \otimes B)(u^T(t, -l), ۰, \cdots, ۰, u^T(t, l))^T,$$

$$F(t) = ({f_۱}^T(t), \cdots, {f_N}^T(t))^T, \quad f_k(t) = f(t, x_k).$$

I_N ماتریس همانی $(N \times N)$ است و ماتریس P به صورت زیر تعریف می‌شود:

---
[۱] Space Discretization

$$P = \begin{pmatrix} -۲ & ۱ & & \\ ۱ & -۲ & ۱ & \\ & & \ddots & \\ & & ۱ & -۲ \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N\times N}. \qquad (۳.۳)$$

با توجه به معادله‌ی (۳.۲)، معادله‌ی (۲.۳) با بردار اولیه‌ی زیر کامل می‌شود:

$$U(۰) = \left(\tilde{g}^T(x_۱), \cdots, \tilde{g}^T(x_N)\right)^T \in \mathbb{R}^{nN}. \qquad (۴.۳)$$

هرگاه $h \to ۰$ ، آن‌گاه تفاضل $g - \tilde{g}$ به صفر میل می‌کند. همچنین، هرگاه A منفرد باشد، آن‌گاه برای h ثابت، معادله‌ی (۲.۳) یک DAE است [۴] . در این صورت حداقل برای h کوچک، اندیس دیفرانسیل آن معادل با اندیس دیفرانسیل زمانی یکنواخت $v_{d,t}$ است. فرض کنیم $U(t)$ را به‌صورت زیر نمایش دهیم:

$$U(t) = \sum_{k=۱}^{N} \phi_k \otimes w_k(t), \quad \phi_k \in \mathbb{R}^N, \quad w_k \in \mathbb{R}^n, \qquad (۵.۳)$$

که در آن ϕ_k بردار ویژه‌ی ماتریس $\frac{۱}{h^۲}P$ است، یعنی

$$\frac{۱}{h^۲}P\phi_k = \lambda_k\phi_k, \quad k = ۱, \cdots, N. \qquad (۶.۳)$$

همچنین مقادیر ویژه‌ی $\frac{۱}{h^۲}P$ به صورت زیر داده می‌شوند:

$$\lambda_k = -\frac{۴}{h^۲}\sin^۲\left(\frac{k\pi}{۲(N+۱)}\right), \quad h = \frac{۲l}{N+۱}.$$

هرگاه $h \to ۰$، در این صورت برای $k = ۱, \cdots, N$ این مقادیر ویژه به $\mu_k = -\left(\frac{k\pi}{۲l}\right)^۲$ همگرا هستند که متناظر با توابع ویژه‌ی $\cos\left(\frac{k\pi}{۲l}x\right)$ از عملگر $\frac{\partial^۲}{\partial x^۲}$ با شرایط مرزی دیریکله‌ی همگن روی بازه‌ی $(-l, l)$ می‌باشد. همچنین، واضح است مجموعه‌ی $\{\phi_k, \quad k = ۱, \cdots, N\}$ متعامد است. فرض کنید $U_h(t)$ تحدید $u(t, x)$ به شبکه‌ی مکانی Ω_h باشد، در این صورت بردار

$$\eta_h(t) = U_h(t) - U(t)$$

خطای مکانی جامع در نیمه‌گسسته‌سازی در نظر گرفته می‌شود.

تعریف ۱.۱.۳. هرگاه روی بازه‌ی $I^* := [۰, t^*)$ که $t^* > ۰$ داشته باشیم:

$$\max_{t\in I^*}\|\eta_h(t)\| = o(۱), \quad h \to ۰,$$

در این صورت مساله‌ی (۲.۳) و (۴.۳) روی I^* همگرا نامیده می‌شود.

همچنین، خطای برش مکانی [۱] از (۲.۳) به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\alpha_h(t) = (I_N \otimes A)U_h'(t) + \left(\frac{۱}{h^۲}P \otimes B + I_N \otimes C\right)U_h(t) - F(t) + r(t). \qquad (۷.۳)$$

تذکر ۲.۱.۳. $\alpha_h(t)$ خطای تابع شبکه‌ای $U_h(t)$ را نسبت به DAE (۲.۳) نشان می‌دهد.

[1] Space Truncation Error

تعریف ۳.۱.۳. هرگاه

$$\max_{t\in I^*}\|\alpha_h(t)\| = o(1), \quad h \to 0,$$

در این صورت نیم‌گسسته‌سازی را پایدار گوییم.

۲.۳ گسسته‌سازی زمانی و همگرایی گسسته‌سازی کامل

هرگاه روش اویلر ضمنی را روی DAE (۲.۳) به کار ببریم، در این صورت روش پسرو زمانی ، مرکزی مکانی ($BTCS$) [1] (یعنی در این روش ابتدا مکان را گسسته می‌کنیم و سپس برحسب گسسته‌سازی مکان، زمان را نیز گسسته می‌کنیم.) حاصل می‌شود. در این روش گسسته‌سازی، رفتار خطای متناظر با جواب دقیق مساله‌ی مقدار مرزی اولیه‌ی (۱.۲) یا (۴.۲) را بررسی می‌کنیم. برای راحتی کار، خود را به یک کمیت با اندازه‌ی τ محدود می‌کنیم. داریم:

$$(I_N \otimes A)U'(t) + (\frac{1}{h^2}P \otimes B + I_N \otimes C)U(t) = F(t) - r(t).$$

بنابراین

$$(I_N \otimes A)U'(t) = -(\frac{1}{h^2}P \otimes B + I_N \otimes C)U(t) + F(t) - r(t).$$

یادآوری می‌کنیم که روش اویلر ضمنی به صورت زیر می‌باشد:

$$E(\frac{y_{n+1} - y_n}{h}) = Ay_{n+1} + \gamma(t_{n+1}).$$

در نتیجه، با استفاده از روش اویلر ضمنی داریم:

$$(I_N \otimes A)\frac{U_{m+1} - U_m}{\tau} = -(\frac{1}{h^2}P \otimes B)U_{m+1} + F(t_{m+1}) - r(t_{m+1}).$$

در اینجا τ گام زمان می‌باشد. بنابراین

$$(\frac{1}{\tau}I_N \otimes A + (\frac{1}{h^2}P \otimes B + I_N \otimes C)U_{m+1} = (\frac{1}{\tau}I_N \otimes A)U_m + F(t_{m+1}) - r(t_{m+1}).$$

روش فوق را طرح $BTCS$ گوییم که به صورت زیر بیان می‌کنیم:

۱.۲.۳ روش BTCS

این روش برای $PDAE$ (۱.۲) به صورت

$$G(\tau, h^2)U_{m+1} = (\frac{1}{\tau}I_N \otimes A)U_m + F(t_{m+1}) - r(t_{m+1}), \tag{۸.۳}$$

داده می‌شود که $U_0 = U(0)$ و

$$G(\tau, h^2) = \frac{1}{\tau}I_N \otimes A + \frac{1}{h^2}P \otimes B + I_N \otimes C. \tag{۹.۳}$$

[1] Backward In Time, Centered In Space

هرگاه معادله‌ی (۸.۳) برای محاسبه‌ی U_{m+1} استفاده شود، در این صورت جواب یکتا دارد. (G منتظم است) . لم زیر نشان می‌دهد جواب یکتای معادله‌ی (۸.۳) از منتظم بودن ماتریس‌های $(n \times n)$ زیر نتیجه می‌شود:

$$G_k(\tau, h^2) = \frac{1}{\tau}A + \lambda_k B + C, \quad k = 1, \cdots, N \tag{۱۰.۳}$$

لم ۱.۲.۳. فرض کنید

الف. ماتریس‌های $G_k(\tau, h^2), \quad k = 1, \cdots, N$ برای $0 < \tau < \tau_0$ و $0 < h < h_0$ منتظم باشند (τ, h اعداد ثابت هستند)،

ب. عبارت ناهمگن $\tilde{F}(t_{m+1}) := F(t_{m+1}) - r(t_{m+1})$ را برای هر h بتوان به‌صورت سری زیر نمایش داد:

$$\tilde{F}(t_{m+1}) = \sum_{k=1}^{N} \phi_k \otimes \tilde{f}_{k,m+1},$$

که در آن $\tilde{f}_{k,m+1} \in \mathbb{R}^n$.

در این صورت معادله‌ی (۸.۳) جواب یکتای U_{m+1} دارد. [۱۴]

برهان. در حالت کلی، $U_{m+1} \in \mathbb{R}^{nN}$ بر حسب N بردار ویژه‌ی مستقل خطی ϕ_k نمایش داده می‌شود، یعنی

$$U_{m+1} = \sum_{k=1}^{N} \phi_k \otimes U_{k,m+1}.$$

N بردار $U_{k,m+1} \in \mathbb{R}^n$ معلوم هستند. داریم:

$$\tilde{F}(t_{m+1}) = \sum_{k=1}^{N} \phi_k \otimes \tilde{f}_{k,m+1}, \tag{۱۱.۳}$$

$$U_{m+1} = \sum_{k=1}^{N} \phi_k \otimes U_{k,m+1}. \tag{۱۲.۳}$$

همچنین، بنا (۸.۳) داریم:

$$G(\tau, h^2)U_{m+1} = (\frac{1}{\tau}I_N \otimes A)U_m + F(t_{m+1}) - r(t_{m+1}).$$

حال، بسط‌های (۱۱.۳) و (۱۲.۳) را در (۸.۳) جایگذاری می‌کنیم، در نتیجه داریم:

$$G(\tau, h^2)(\sum_{k=1}^{N} \phi_k \otimes U_{k,m+1}) = (\frac{1}{\tau}I_N \otimes A)(\sum_{k=1}^{N} \phi_k \otimes U_{k,m}) + \sum_{k=1}^{N} \phi_k \otimes \tilde{f}_{k,m+1}. \tag{۱۳.۳}$$

طرفین معادله‌ی (۱۳.۳) را از سمت چپ در ϕ_k ضرب می‌کنیم. می‌دانیم مجموعه بردارهای $\{\phi_k\}_{k=1}^{N}$ متعامدند. در نتیجه

$$\phi_k.\phi_{k'} = 0, \quad k \neq k'.$$

همچنین حاصل $\phi_k.\phi_k$ عددی ثابت می‌باشد که هرگاه ϕ_k را در (۱۳.۳) ضرب کنیم، از طرفین ساده می‌شود. در نتیجه

$$G_k(\tau, h^۲)U_{k,m+۱} = \frac{۱}{\tau}AU_{k,m} + \tilde{f}_{k,m+۱}, \quad k = ۱, \cdots, N.$$

بنا به فرض $G_k(\tau, h^۲), \quad k = ۱, \cdots, N$ منتظم است، درنتیجه G منتظم است. پس معکوس‌پذیر است. بنابراین جواب $U_{k,m+۱}$ یکتاست. در نتیجه جواب $U_{m+۱}$ نیز یکتا است. □

بنابراین، هرگاه ماتریس‌های $G_k(\tau, h^۲), \quad k = ۱, \cdots, N$ منتظم باشند، آنگاه $G(\tau, h^۲)$ نیز منتظم می‌باشد.

لم ۲.۲.۳. فرض کنید $G(\tau, h^۲)$ منتظم باشد و $v_{d,t}$ و $v_{d,x}$ به ترتیب اندیس دیفرانسیل زمانی یکنواخت و اندیس دیفرانسیل مکانی $PDAE$ (۱.۲) باشند. آنگاه برای ماتریس‌های منتظم $G^{-۱}(\tau, h^۲)$ روابط زیر برقرارند: [۱۴]

الف. برای $v_{d,t} \geq ۰$ و $h > ۰$ ثابت

$$\lim_{\tau \to ۰} \tau^{v_{d,t}} G_{i,j}{}^{-۱}(\tau, h^۲) = ۰, \quad i, j = ۱, \cdots, nN, \qquad (۱۴.۳)$$

ب. برای $v_{d,t} \geq ۱$ و $h > ۰$ ثابت

$$\lim_{\tau \to ۰} \tau^{v_{d,t}} \left(G^{-۱}(\tau, h^۲)\frac{۱}{\tau}(I_N \otimes A)\right)_{i,j} = ۰, \quad i, j = ۱, \cdots, nN, \qquad (۱۵.۳)$$

ج. برای $v_{d,x} \geq ۰$ و $\tau > ۰$ ثابت

$$\lim_{h \to ۰} h^{v_{d,x}} \left(G_{i,j}{}^{-۱}(\tau, h^۲)\right) = ۰, \quad i, j = ۱, \cdots, nN, \qquad (۱۶.۳)$$

د. برای $v_{d,x} \geq ۱$ و $\tau > ۰$ ثابت

$$\lim_{h \to ۰} h^{v_{d,x}} \left(G^{-۱}(\tau, h^۲)\frac{۱}{h^۲}(I_N \otimes B)\right)_{i,j} = ۰, \quad i, j = ۱, \cdots, nN. \qquad (۱۷.۳)$$

برهان. ابتدا خانواده ماتریس $(I_N \otimes A, \frac{۱}{h^۲}P \otimes B + I_N \otimes C)$ را در نظر می‌گیریم و فرض کنیم این خانواده ماتریس منتظم باشد. بنابراین می‌توان یک تبدیل کرونکر از این خانواده با ماتریس‌های منتظم $P_h, Q_h \in \mathbb{R}^{nN \times nN}$ را انجام داد، یعنی

$$I_N \otimes A = P_h{}^{-۱} \begin{pmatrix} I_۱ & ۰ \\ ۰ & \bar{N} \end{pmatrix} Q_h{}^{-۱},$$

$$\frac{۱}{h^۲}P \otimes B + I_N \otimes C = P_h{}^{-۱} \begin{pmatrix} R_h & ۰ \\ ۰ & I_۲ \end{pmatrix} Q_h{}^{-۱}.$$

هرگاه A منفرد باشد، آنگاه $\bar{N}$ پوچ‌توان است و $I_۱, R_h \in \mathbb{R}^{N_۱ \times N_۱}$، $I_۲, \bar{N} \in \mathbb{R}^{N_۲ \times N_۲}$، $N_۱ + N_۲ = nN$ (I_k یک ماتریس همانی می‌باشد). در نتیجه

$$\begin{aligned} G(\tau,h^{۲}) &= \frac{۱}{\tau} I_N \otimes A + \frac{۱}{h^{۲}} P \otimes B + I_N \otimes C \\ &= \frac{۱}{\tau} {P_h}^{-۱} \begin{pmatrix} I_۱ & ۰ \\ ۰ & \bar{N} \end{pmatrix} {Q_h}^{-۱} + {P_h}^{-۱} \begin{pmatrix} R_h & ۰ \\ ۰ & I_۲ \end{pmatrix} {Q_h}^{-۱} \\ &= {P_h}^{-۱} \begin{pmatrix} \frac{I_۱}{\tau} & ۰ \\ ۰ & \frac{\bar{N}}{\tau} \end{pmatrix} {Q_h}^{-۱} + {P_h}^{-۱} \begin{pmatrix} R_h & ۰ \\ ۰ & I_۲ \end{pmatrix} {Q_h}^{-۱} \\ &= {P_h}^{-۱} \begin{pmatrix} \frac{I_۱}{\tau} + R_h & ۰ \\ ۰ & \frac{\bar{N}}{\tau} + I_۲ \end{pmatrix} {Q_h}^{-۱} \end{aligned} \tag{۱۸.۳}$$

همچنین می‌دانیم که $(AB)^{-۱} = B^{-۱}A^{-۱}$. بنابراین

$$\begin{aligned} G^{-۱}(\tau,h^{۲}) &= ({Q_h}^{-۱})^{-۱} \left[{P_h}^{-۱} \begin{pmatrix} \frac{I_۱}{\tau} + R_h & ۰ \\ ۰ & \frac{\bar{N}}{\tau} + I_۲ \end{pmatrix} \right]^{-۱} \\ &= Q_h \begin{pmatrix} \frac{I_۱}{\tau} + R_h & ۰ \\ ۰ & \frac{\bar{N}}{\tau} + I_۲ \end{pmatrix}^{-۱} P_h, \end{aligned} \tag{۱۹.۳}$$

که در آن

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{I_۱}{\tau} + R_h & ۰ \\ ۰ & \frac{\bar{N}}{\tau} + I_۲ \end{pmatrix}^{-۱} &= \frac{\tau^{۲}}{(I_۱ + R_h\tau)(\bar{N} + I_۲\tau)} \begin{pmatrix} \frac{\bar{N}+I_۲\tau}{\tau} & ۰ \\ ۰ & \frac{I_۱+R_h\tau}{\tau} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \tau(I_۱ + R_h\tau)^{-۱} & ۰ \\ ۰ & \tau(\bar{N} + I_۲\tau)^{-۱} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \tau(I_۱ + R_h\tau)^{-۱} & ۰ \\ ۰ & (I_۲ + \frac{۱}{\tau}\bar{N})^{-۱} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{۲۰.۳}$$

زیرا

$$\tau(\bar{N} + I_۲\tau)^{-۱} = (\tau^{-۱})^{-۱}(\bar{N} + I_۲\tau)^{-۱} = \left((\bar{N} + I_۲\tau)\frac{۱}{\tau}\right)^{-۱} = (I_۲ + \frac{۱}{\tau}\bar{N})^{-۱}.$$

در نتیجه

$$G^{-۱}(\tau,h^{۲}) = Q_h \begin{pmatrix} \tau(I_۱ + R_h\tau)^{-۱} & ۰ \\ ۰ & (I_۲ + \frac{۱}{\tau}\bar{N})^{-۱} \end{pmatrix} P_h.$$

همچنین داریم:

$$G^{-1}(\tau,h^2)\frac{1}{\tau}I_N\otimes A=Q_h\begin{pmatrix}\tau(I_1+R_h\tau)^{-1} & 0\\ 0 & \tau(\bar N+I_2\tau)^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{I_1}{\tau} & 0\\ 0 & \frac{\bar N}{\tau}\end{pmatrix}{Q_h}^{-1}$$
$$=Q_h\begin{pmatrix}I_1(I_1+R_h\tau)^{-1} & 0\\ 0 & (\bar N+I_2\tau)^{-1}\bar N\end{pmatrix}{Q_h}^{-1}.$$
(۲۱.۳)

داریم:
$$(\bar N+I_2\tau)^{-1}\bar N=(I_2+\frac{1}{\tau}\bar N)^{-1}).$$
بنابراین، با استفاده از اتحاد زیر واضح است که گزاره‌های (۱۴.۳) و (۱۵.۳) برقرارند.
$$(I+\frac{1}{\tau}\bar N)^{-1}=\sum_{l=0}^{v_{d,t}-1}(-\frac{1}{\tau}\bar N)^{l}.$$
به روش مشابه با یک تبدیل کرونکر از خانواده ماتریس $(P\otimes B, I_N\otimes(\frac{1}{\tau}A+C))$ گزاره‌های (۱۶.۳) و (۱۷.۳) ثابت می‌شوند. □

بنابراین، برای روش $BTCS$ می‌توانیم اندیس دیفرانسیل مکانی و اندیس دیفرانسیل زمانی یکنواخت $PDAE$ (۱.۲) را به صورت زیر تعیین کنیم:

نتیجه ۳.۲.۳. اندیس دیفرانسیل مکانی و اندیس دیفرانسیل زمانی یکنواخت برای روش $BTCS$ ،کوچکترین عدد صحیحی هستند که به ترتیب (۱۶.۳) و (۱۴.۳) برقرارند.

از معادلات (۱۵.۳) و (۱۷.۳) می‌بینیم که برای $v_{d,t},v_{d,x}\geq 1$ ماتریس‌های
$$\tau^{v_{d,t}}G^{-1}(\tau,h^2)\frac{1}{\tau}(I_N\otimes A)\quad \text{و}\quad h^{v_{d,x}}G^{-1}(\tau,h^2)\frac{1}{h^2}(I_N\otimes B)$$
به ترتیب ویژگی‌های مشابه با ماتریس‌های $\tau^{v_{d,t}}G^{-1}(\tau,h^2)$ و $h^{v_{d,x}}G^{-1}(\tau,h^2)$ را دارند. حال خطای برشی کامل [1] را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:
$$le_{m+1}=U_h(t_{m+1})-\hat U_{m+1},\qquad (۲۲.۳)$$
که در آن
$$\hat U_{m+1}=G^{-1}(\tau,h^2)((\frac{1}{\tau}I_N\otimes A)U_h(t_m)+\tilde F(t_{m+1})).\qquad (۲۳.۳)$$
تعریف ۴.۲.۳. هرگاه
$$\frac{1}{\tau}\|le_{m+1}\|\to 0,\quad \tau,h\to 0,\quad m=0,\cdots,N,\qquad (۲۴.۳)$$
در این صورت روش $BTCS$ ۱.۲.۳ نسبت به $PDAE$ (۱.۲) در یک نرم $\|.\|$ پایدار است.

تعریف ۵.۲.۳. هرگاه
$$\frac{1}{\tau}\|le_{m+1}\|=O(h^p)+O(\tau^q),\quad \tau,h\to 0,\qquad (۲۵.۳)$$
در این صورت روش $BTCS$ دقیقا از مرتبه‌ی (p,q) است که در آن $p,q\geq 1$ می‌باشد.

[1] Full Truncation Error

معادله‌ی (۷.۳) به صورت زیر است:

$$\alpha_h(t) = (I_N \otimes A)U_h'(t) + (\frac{1}{h^2}P \otimes B + I_N \otimes C)U_h(t) - F(t) + r(t).$$

می‌دانیم $\tilde{F}(t) = F(t) - r(t)$. در نتیجه بنابر رابطه‌ی (۷.۳) داریم:

$$\alpha_h(t_{m+1}) = (I_N \otimes A)U_h'(t_{m+1}) + (\frac{1}{h^2}P \otimes B + I_N \otimes C)U_h(t_{m+1}) - \tilde{F}(t_{m+1}).$$

بنابراین

$$\tilde{F}(t_{m+1}) = (I_N \otimes A)U_h'(t_{m+1}) + (\frac{1}{h^2}P \otimes B + I_N \otimes C)U_h(t_{m+1}) - \alpha_h(t_{m+1}). \quad (۲۶.۳)$$

در نتیجه، با استفاده از روابط (۲۲.۳) ، (۲۳.۳) و (۲۶.۳) به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} le_{m+1} = U_h(t_{m+1}) - G^{-1}(\tau, h^2)\{(\frac{1}{\tau}I_N \otimes A)U_h(t_m) + (I_N \otimes A)U_h'(t_{m+1}) \\ + (\frac{1}{h^2}P \otimes B + I_N \otimes C)U_h(t_{m+1}) - \alpha_h(t_{m+1})\}. \end{aligned} \quad (۲۷.۳)$$

همچنین داریم:

$$G(\tau, h^2) = \frac{1}{\tau}I_N \otimes A + \frac{1}{h^2}P \otimes B + I_N \otimes C. \quad (۲۸.۳)$$

طرفین (۲۸.۳) را در $G^{-1}(\tau, h^2)$ ضرب می‌کنیم، در نتیجه به دست می‌آوریم:

$$I = G^{-1}(\tau, h^2)\frac{1}{\tau}I_N \otimes A + G^{-1}(\tau, h^2)(\frac{1}{h^2}P \otimes B + I_N \otimes C).$$

بنابراین داریم:

$$G^{-1}(\tau, h^2)\frac{1}{\tau}I_N \otimes A = I - G^{-1}(\tau, h^2)(\frac{1}{h^2}P \otimes B + I_N \otimes C). \quad (۲۹.۳)$$

با جایگذاری (۲۹.۳) در (۲۷.۳) داریم:

$$\begin{aligned} le_{m+1} = (G^{-1}(\tau, h^2)\frac{1}{\tau}I_N \otimes A)U_h(t_{m+1}) \\ - G^{-1}(\tau, h^2)\{(\frac{1}{\tau}I_N \otimes A)U_h(t_m) + (I_N \otimes A)U_h'(t_{m+1}) - \alpha_h(t_{m+1})\}. \end{aligned} \quad (۳۰.۳)$$

در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned} le_{m+1} = G^{-1}(\tau, h^2)\{(\frac{1}{\tau}I_N \otimes A)(U_h(t_{m+1}) - U_h(t_m)) \\ - (I_N \otimes A)U_h'(t_{m+1}) + \alpha_h(t_{m+1})\}. \end{aligned} \quad (۳۱.۳)$$

با یک بسط تیلور از $U_h(t_{m+1})$ و $U_h'(t_{m+1})$ نسبت به t_m داریم:

$$\begin{aligned} le_{m+1} = \tau G^{-1}(\tau, h^2)(I_N \otimes A)\{\frac{1}{2}U_h''(t_m + \xi\tau) - U_h''(t_m + \zeta\tau)\} \\ + h^2 G^{-1}(\tau, h^2)(I_N \otimes B)\gamma_h(t_{m+1}), \end{aligned} \quad (۳۲.۳)$$

که در آن $\xi, \zeta \in (0, 1)$. بنابراین، برای $t \in I^*$ برآورد

$$\|le_{m+1}\| \leq C_0(\tau\|G^{-1}(\tau, h^2)(I_N \otimes A)\| + h^2\|G^{-1}(\tau, h^2)(I_N \otimes B)\|), \quad (۳۳.۳)$$

را برای خطای برشی کامل به‌دست می‌اوریم که در آن C_0 ثابت مثبت مستقل از τ و h است. عبارات سمت راست (۳۳.۳) به‌راحتی با لم ۲.۲.۳ برآورد می‌شوند، زیرا با استفاده از لم فوق روابط زیر برای $\tau, h \to 0$ برقرارند:

$$\begin{aligned} &\tau^{v_{d,t}-1}\|G^{-1}(\tau,h^2)\| \le k_1, \quad v_{d,t} \ge 0,\\ &h^{-2}\|G^{-1}(\tau,h^2)\| \le k_2, \quad v_{d,x} = 0,\\ &\tau^{v_{d,t}-2}\|G^{-1}(\tau,h^2)(I_N \otimes A)\| \le k_3, \quad v_{d,t} \ge 1,\\ &h^{v_{d,x}-3}\|G^{-1}(\tau,h^2)(I_N \otimes B)\| \le k_4, \quad v_{d,x} \ge 1. \end{aligned} \tag{۳۴.۳}$$

که در آن τ و h همزمان به صفر میل می‌کنند. یعنی حداکثر یکی از شرایط زیر برقرار است:

$$c_0 \le \frac{\tau}{h^2} \quad \text{یا} \quad \frac{\tau}{h^2} \le c_1 \quad \text{یا} \quad c_0 \le \frac{\tau}{h^2} \le c_1, \quad c_0, c_1 \in \mathbb{R}^+. \tag{۳۵.۳}$$

تذکر ۶.۲.۳. هرگاه $c_0 = 0$ و $c_1 = \infty$ ، در این صورت هیچ شرطی برای τ و h وجود ندارد.

تذکر ۷.۲.۳. بدیهی‌ست هرگاه طرح $BTCS$ دقیقا از مرتبه‌ی (p,q) باشد، در این صورت این روش پایدار است. اگر روابط (۲۴.۳) و (۲۵.۳) تحت یکی از شرایط ۳۵.۳ برقرار باشند، آنگاه روش $BTCS$ به ترتیب به‌طور مشروط پایدار و به‌طور مشروط دقیقا از مرتبه‌ی (p,q) می‌باشد.

قضیه ۸.۲.۳. [۱۳] هرگاه برای $PDAE$ داده شده‌ی (۱.۲) رابطه‌های مجانبی (۳۴.۳) تحت یکی از شرایط (۳۵.۳) برقرار باشند، در این صورت روش $BTCS$ برای $t \in I^*$ به‌طور مشروط دقیقا از مرتبه‌ی $(1,2)$ می‌باشد برای

الف. یک اندیس زمانی یکنواخت $v_{d,t} = 0$ و یک اندیس مکانی $v_{d,x} \ge 0$،

ب. یک اندیس زمانی یکنواخت $v_{d,t} \ge 0$ و یک اندیس مکانی $v_{d,x} = 0$ تحت شرط $0 < \tilde{c}_0 \le \frac{\tau}{h^2}$،

ج. یک اندیس زمانی یکنواخت $v_{d,t} = 1$ و یک اندیس مکانی $v_{d,x} = 1$ تحت شرط $0 < \tilde{c}_0 \le \frac{\tau}{h^2}$.

برهان. در طول اثبات K ثابتی است که مستقل از τ و h می‌باشد.

ابتدا حالت $v_{d,t} = 0$ و $v_{d,x} \ge 0$ را در نظر می‌گیریم. با توجه به این‌که $v_{d,t} = 0$، بنابراین با استفاده از نامساوی اول (۳۴.۳) داریم: $\frac{1}{\tau}\|G^{-1}\| \le k_1$. در نتیجه، $\|\tau^{-1}G^{-1}\| \le k_1$. بنابراین، سمت راست برآورد (۳۳.۳) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$K(\tau^2\|\tau^{-1}G^{-1}\| + \tau h^2\|\tau^{-1}G^{-1}\| = O(\tau^2) + O(\tau h^2).$$

در نتیجه

$$\frac{1}{\tau}\|le_{m+1}\| = O(\tau) + O(h^2).$$

بنابراین، با توجه به تعریف ۵.۲.۳ روش $BTCS$ دقیقا از مرتبه‌ی $(1,2)$ می‌باشد.

به طریق مشابه، در حالت $v_{d,t} \ge 0$ و $v_{d,x} = 0$، با استفاده از نامساوی دوم (۳۴.۳) داریم: $\|h^{-2}G^{-1}\| \le k_2$. بنابراین کران بالای زیر را برای سمت راست برآورد (۳۳.۳) به‌دست می‌آوریم:

$$K\big(\tau h^2\|h^{-2}G^{-1}\| + h^4\|h^{-2}G^{-1}\|\big) = O(\tau h^2) + O(h^4).$$

همچنین، داریم: $\frac{\tau}{h^{۲}} \leq \tilde{c}_{۰} > ۰$. بنابراین $O(\tau) = O(h^{۲})$. در نتیجه

$$O(\tau h^{۲}) + O(h^{۴}) = O(\tau^{۲}) + O(\tau h^{۲}).$$

بنابراین

$$\frac{۱}{\tau}\|le_{m+۱}\| = O(\tau) + O(h^{۲}).$$

مشابه قسمت قبل، بنابه تعریف ۵.۲.۳ روش $BTCS$ دقیقا از مرتبه‌ی $(۱, ۲)$ است.

برای قسمت آخر، با استفاده از دو نامساوی آخر (۳۴.۳) داریم:

$$\|\tau^{-۱}G^{-۱}(I_N \otimes A)\| \leq k_{۳}, \quad \|h^{-۲}G^{-۱}(I_N \otimes B)\| \leq k_{۴}.$$

بنابراین برای سمت راست برآورد (۳۳.۳) کران بالای زیر را به دست می‌آوریم:

$$K\left(\tau^{۳-v_{d,t}}\|\tau^{v_{d,t}-۲}G^{-۱}(I_N \otimes A)\| + h^{۵-v_{d,x}}\|h^{v_{d,x}-۳}G^{-۱}(I_N \otimes B)\|\right). \tag{۳۶.۳}$$

با جایگذاری $v_{d,t} = v_{d,x} = ۱$ در (۳۶.۳)، به دست می‌آوریم:

$$K\left(\tau^{۲}\|\tau^{-۱}G^{-۱}(I_N \otimes A)\| + h^{۴}\|h^{-۲}G^{-۱}(I_N \otimes B)\|\right). \tag{۳۷.۳}$$

بنابراین داریم:

$$\|le_{m+۱}\| = O(\tau^{۲}) + O(h^{۴}).$$

در نتیجه مشابه با قسمت قبل، چون $\frac{\tau}{h^{۲}} \leq \tilde{c}_{۰} > ۰$، بنابراین

$$O(\tau^{۲}) + O(h^{۴}) = O(\tau^{۲}) + O(\tau h^{۲}).$$

در نتیجه مشابه با قسمت قبل، روش $BTCS$ دقیقا از مرتبه‌ی $(۱, ۲)$ است. □

اکنون خطای گسسته‌سازی کامل [۱] در زمان $t_{m+۱}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\epsilon_h(t_{m+۱}) = U_h(t_{m+۱}) - U_{m+۱}. \tag{۳۸.۳}$$

تعریف ۹.۲.۳. هرگاه

$$\|\epsilon_h(t_{m+۱})\| = O(h^p) + O(\tau^q), \quad \tau, h \to ۰, \quad m = ۰, \cdots, N, \tag{۳۹.۳}$$

در این صورت روش $BTCS$ همگرا از مرتبه‌ی (p, q) است. اگر رابطه‌ی (۳۹.۳) تحت یکی از شرایط (۳۵.۳) برقرار باشد، آنگاه روش $BTCS$ را به‌طور مشروط همگرا از مرتبه‌ی (p, q) می‌نامیم.

از تعریف خطای گسسته‌سازی کامل داریم:

$$\epsilon_h(t_{m+۱}) = U_h(t_{m+۱}) - U_{m+۱}. \tag{۴۰.۳}$$

همچنین تعریف خطای برشی کامل به‌صورت زیر است:

$$le_{m+۱} = U_h(t_{m+۱}) - \hat{U}_{m+۱}.$$

بنابراین

$$U_h(t_{m+۱}) = le_{m+۱} + \hat{U}_{m+۱}. \tag{۴۱.۳}$$

[۱] Full Discretization Error

همچنین

$$\hat{U}_{m+1} = G^{-1}(\tau, h^2)\big((\frac{1}{\tau}I_N \otimes A)U_h(t_m) + \bar{F}(t_{m+1})\big). \qquad (۴۲.۳)$$

حال (۴۱.۳) و (۴۲.۳) را در (۴۰.۳) جایگذاری می‌کنیم. در نتیجه داریم:

$$\epsilon_h(t_{m+1}) = G^{-1}(\tau, h^2)\big((\frac{1}{\tau}I_N \otimes A)U_h(t_m) + \bar{F}(t_{m+1})\big) - U_{m+1} + le_{m+1}.$$

همچنین بنا بر (۸.۳) داریم:

$$U_{m+1} = G^{-1}(\tau, h^2)(\frac{1}{\tau}I_N \otimes A)U_m + G^{-1}(\tau, h^2)\bar{F}(t_{m+1}).$$

بنابراین

$$\epsilon_h(t_{m+1}) = G^{-1}(\tau, h^2)(\frac{1}{\tau}I_N \otimes A)\epsilon_h(t_m) + le_{m+1}, \qquad (۴۳.۳)$$

و با استقرا به دست می‌آوریم:

$$\epsilon_h(t_{m+1}) = \big(G^{-1}(\tau, h^2)(\frac{1}{\tau}I_N \otimes A)\big)^{m+1}\epsilon_h(0) + \sum_{i=0}^{m}\big(G^{-1}(\tau, h^2)(\frac{1}{\tau}I_N \otimes A)\big)^{i} le_{m+1-i}. \qquad (۴۴.۳)$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}\|\epsilon_h(t_{m+1})\| &\le \big\|\big(G^{-1}(\tau, h^2)(\frac{1}{\tau}I_N \otimes A)\big)^{m+1}\big\|\|\epsilon_h(0)\| \\ &+ \max_{i=0}^{m}\|le_{i+1}\|\sum_{i=0}^{m}\big\|\big(G^{-1}(\tau, h^2)(\frac{1}{\tau}I_N \otimes A)\big)^{i}\big\|\end{aligned} \qquad (۴۵.۳)$$

برای $0 < m\tau \le t^*$ فرض کنیم شرط زیر برقرار باشد:

$$\sup\{\big\|\big(G^{-1}(\tau, h^2)(\frac{1}{\tau}I_N \otimes A)\big)^{i}\big\|, \quad i \in \mathbb{N}, \quad \text{طبق ۳۵.۳ } \tau \text{ و احتمالا محدود } h\} < \infty. \qquad (۴۶.۳)$$

فرض کنیم $\|\epsilon_h(0)\| = O(h^2)$. در این صورت برای $t \in I^*$ برآورد

$$\|\epsilon_h(t_{m+1})\| \le \bar{K}(m+1)\max_{i=0}^{m}\|le_{i+1}\| \le K\max_{i=0}^{m}\frac{\|le_{i+1}\|}{\tau},$$

را برای $t \in I^*$ به‌دست می‌آوریم که تحت شرط $\tau m = t \in I^*$ (t ثابت)، هرگاه $\tau, h \to 0$ ، در این صورت K و $\bar{K}$ ثابت‌های مثبت مستقل از τ و h هستند. با استفاده از (۸.۲.۳) قضیه‌ی زیر را داریم:

قضیه ۱۰.۲.۳. [۱۲] فرض کنید مفروضات قضیه‌ی ۸.۲.۳ و برآورد (۴۶.۳) برقرار باشند. در این صورت روش $BTCS$ برای هر $t \in I^*$ و تحت شرایط زیر نسبت به $\|.\|$ به‌طور مشروط همگرا از مرتبه‌ی $(1, 2)$ است.

الف. $v_{d,t} = 0$ و $v_{d,x} \ge 0$،

ب. تحت شرط $0 < \tilde{c}_0 \le \frac{\tau}{h^2}$، $v_{d,t} \ge 0$ و $v_{d,x} = 0$،

ج. تحت شرط $0 < \tilde{c}_0 \le \frac{\tau}{h^2}$، $v_{d,t} = v_{d,x} = 1$.

۲.۲.۳ نمایش فوریه‌ی متناهی خطای گسسته‌سازی کامل

علاوه بر خطای گسسته‌سازی کامل $\epsilon_h(t_{m+1})$ مولفه‌ی تعمیم‌یافته‌ی این خطا برحسب ماتریس‌های $n\times n$ ، $G_K{}^{-1}\frac{A}{\tau}$ و $G_k{}^{-1}B$ را تعریف می‌کنیم.

حال در فضای برداری $\mathbb{R}^N$ از نرم گسسته‌ی L_2 متناظر با ضرب داخلی زیر استفاده می‌کنیم:

$$< x, y >= hx^Ty = \sum_{i=1}^{N} hx_iy_i, \quad x, y \in \mathbb{R}^N, \quad h = \frac{2l}{N+1}.$$

فرض کنیم $\|\phi_k\| = \sqrt{< \phi_k, \phi_k >} = 1$.

لم ۱۱.۲.۳. فرض کنید برای $\tau, h > 0$

الف. برای $k = 1, \cdots, N$ ، $G_k{}^{-1}$ منتظم باشد،

ب. برای هر $t \in I^*$ و $x \in [-l, l]$ ، $u(t, x)$ (و بنابراین $U_h(t)$ و $\gamma_h(t)$) به قدر کافی هموار باشد،

ج. $\epsilon_h(t_j)$ به صورت یک سری فوریه‌ی تعمیم‌یافته‌ی متناهی نسبت به ϕ_k (مشابه با معادله‌ی ۵.۳) به صورت زیر نمایش داده شود:

$$\epsilon_h(t_j) = \sum_{k=1}^{N} \phi_k \otimes e^j{}_{h,k}, \quad j = 0, 1, \cdots, \tag{۴۷.۳}$$

که $e^j{}_{h,k} \in \mathbb{R}^n$.

در این صورت برای $t \in I^*$ ، $e_{h,k}{}^{m+1}$ می‌تواند به صورت زیر برآورد شود:

$$\|e_{h,k}{}^{m+1}\| \le \left\|\left(G_k{}^{-1}\frac{A}{\tau}\right)^m\right\| \|e^0{}_{h,k}\| + \omega \sum_{i=0}^{m} \left\|\left(G_k{}^{-1}\frac{A}{\tau}\right)^i\right\| \left[h^2\|G_k{}^{-1}B\| + \tau^2\|G_k{}^{-1}\frac{A}{\tau}\|\right], \tag{۴۸.۳}$$

که در آن ω ثابت مثبت مستقل از τ و h می‌باشد. [۱۳]

برهان. از (۴۳.۳) داریم:

$$G(\tau, h^2)\epsilon_h(t_{m+1}) = \frac{1}{\tau}(I_N \otimes A)\epsilon_h(t_m) + G(\tau, h^2)le_{m+1}.$$

با استفاده از (۳۲.۳) به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} G(\tau, h^2)\epsilon_h(t_{m+1}) &= \frac{1}{\tau}(I_N \otimes A)\epsilon_h(t_m) + \tau(I_N \otimes A)\big[\frac{1}{2}U_h''(t_m + \xi\tau) \\ &- U_h''(t_m + \zeta\tau)\big] + h^2(I_N \otimes B)\gamma_h(t_{m+1}). \end{aligned} \tag{۴۹.۳}$$

طرفین (۴۹.۳) را از سمت چپ در $h(\phi_{k'}{}^T \otimes I_n)$ که $k' \in \{1, \cdots, N\}$ ،ضرب می‌کنیم. به دلیل این‌که ϕ_k بردار ویژه هستند و بنابراین متعامدند، در نتیجه تنها در حالت $k' = k$ حاصل‌ضرب داخلی $< \phi_k, \phi_{k'} >$ مخالف صفر می‌شود. بنابراین نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{aligned} G_ke_{h,k}{}^{m+1} &= \frac{A}{\tau}e_{h,k}{}^m + h^2(h\phi_k{}^T \otimes B)\gamma_h(t_{m+1}) \\ &+ \tau(h\phi_k{}^T \otimes A)\big[\frac{1}{2}U_h''(t_m + \xi\tau) - U_h''(t_m + \zeta\tau)\big]. \end{aligned} \tag{۵۰.۳}$$

بنابراین با استفاده از فرضیات ۱۱.۲.۳ و ۱۱.۲.۳ داریم:

$$\begin{aligned} e_{h,k}{}^{m+1} &= G_k{}^{-1}\frac{A}{\tau}e_{h,k}{}^{m} + G_k{}^{-1}h^{2}(h\phi_k{}^{T}\otimes B)\gamma_h(t_{m+1}) \\ &+ G_k{}^{-1}\tau(h\phi_k{}^{T}\otimes A)\big[\frac{1}{2}U_h''(t_m+\xi\tau) - U_h''(t_m+\zeta\tau)\big]. \end{aligned} \tag{۵۱.۳}$$

با گرفتن نرم از طرفین اثبات لم کامل می‌شود. □

لم ۱۲.۲.۳. فرض کنید برای $0 < \tau \leq \tau_0$ و $0 < h \leq h_0$، مفروضات لم ۱۱.۲.۳ برقرار باشند و همچنین وقتی $\tau, h \to 0$، $\|\epsilon_h(t_{m+1})\|$ به صفر میل کند. در این صورت برای $t \in I^*$، رابطه‌ی

$$\|e_{h,k}{}^{m+1}\| \to 0, \quad \tau, h \to 0$$

برقرار است. همچنین، مرتبه‌ی همگرایی $\|e_{h,k}{}^{m+1}\|$ (نسبت به τ و h) مشابه با مرتبه‌ی همگرایی $\|\epsilon_h(t_{m+1})\|$ می‌باشد.

برهان. معادله‌ی (۴۷.۳) را از سمت چپ در $h(\phi_{k'}{}^{T}\otimes I_n)$ ضرب می‌کنیم و از خاصیت تعامد بردارهای ویژه‌ی ϕ_k و $\phi_{k'}$ استفاده می‌کنیم و داریم:

$$e_{h,k'}{}^{m+1} = h(\phi_{k'}{}^{T}\otimes I_n)\epsilon_h(t_{m+1}).$$

با گرفتن نرم از طرفین،اثبات لم کامل می‌شود. □

مثال ۱۳.۲.۳. فرض کنید برای $PDAE$ (۱.۲) داشته باشیم:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

می‌دانیم $G_k = \frac{1}{\tau}A + \lambda_k B + C$. در نتیجه

$$G_k = \begin{pmatrix} \frac{\tau+1}{\tau} & 1-\lambda_k & 0 \\ 0 & \frac{1}{\tau} & 1-\lambda_k \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

بنابراین

$$G_k{}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\tau}{\tau+1} & 0 & \frac{\tau(1-\lambda_k)}{\tau+1} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{1-\lambda_k} & \frac{1}{\tau(\lambda_k-1)} \end{pmatrix}.$$

در نتیجه

$$G_k{}^{-1}\frac{A}{\tau} = \begin{pmatrix} (1+\tau)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\tau-\tau\lambda_k)^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

همچنین

$$G_k{}^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\tau}{\tau+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda_k - 1)^{-1} \end{pmatrix}.$$

داریم:

$$\lambda_k = -\frac{4}{h^2}\sin^2\left(\frac{k\pi}{2(N+1)}\right), \quad h = \frac{2L}{N+1}, \quad L = \frac{h(N+1)}{2},$$

بنابراین $h = \frac{4L}{2(N+1)}$. در نتیجه

$$\begin{aligned} -\tau\lambda_k &= \frac{\tau}{h^2}4\sin^2\left(\frac{k\pi}{2(N+1)}\right) \\ &= \frac{\tau}{h^2}4\sin^2\left(\frac{\pi kh}{4L}\right). \end{aligned} \tag{۵۲.۳}$$

بنابراین

$$\|G_k{}^{-1}\frac{A}{\tau}\| = \max\left\{\frac{1}{1+\tau}, \frac{1}{\tau(1-\lambda_k)}\right\},$$

که برای $\tau, h \to 0$ تحت شرط $-\tau\lambda_k = \kappa_k\frac{\tau}{h^2} \geq 1$، به یک میل می‌کند. ($\kappa_k = 4\sin^2(\frac{\pi kh}{4l})$).

بنابراین $c_0 = \kappa_k{}^{-1}$. زیرا $c_0 \leq \frac{\tau}{h^2} \leq c_1$ و همچنین

$$-\tau\lambda_k = \kappa_k\frac{\tau}{h^2} \geq 1.$$

بنابراین $\frac{\tau}{h^2} \geq \kappa_k{}^{-1}$. در نتیجه $c_0 = \kappa_k{}^{-1}$. همچنین

$$-\tau\lambda_k = \kappa_k\frac{\tau}{h^2} \geq 1,$$

پس داریم:

$$\lambda_k = \frac{\kappa_k\tau}{-\tau h^2} = -\frac{\kappa_k}{h^2}.$$

در نتیجه

$$\frac{1}{1-\lambda_k} = \frac{1}{1+\frac{\kappa_k}{h^2}} = \frac{h^2}{h^2+\kappa_k}.$$

داریم: $\frac{\kappa_k\tau}{h^2} \geq 1$، بنابراین $\kappa_k\tau \geq h^2$. در نتیجه

$$\frac{1}{1-\lambda_k} \leq \frac{\kappa_k\tau}{\kappa_k+h^2}.$$

بنابراین به‌دست می‌آید:

$$\|G_k{}^{-1}B\| = \max\left\{\frac{\tau}{1+\tau}, \frac{1}{(1-\lambda_k)}\right\} \leq \max\left\{\frac{\tau}{1+\tau}, \frac{\kappa_k\tau}{\kappa_k+h^2}\right\} = O(\tau).$$

با توجه به این‌که $m\tau = t$ برای همگرایی ثابت می‌باشد و

$$\sum_{i=0}^{m}\left\|\left(G_k{}^{-1}\frac{A}{\tau}\right)^i\right\| = O\left(\frac{1}{\tau}\right), \quad \tau, h \to 0$$

بنابراین از برآورد (۴۸.۳) نتیجه می‌شود که $\|e_{h,k}{}^{m+1}\| = O(\tau) + O(h^2)$، که هرگاه $\tau, h \to 0$، این نرم به صفر میل می‌کند (تحت شرط $0 < c_0 = \frac{1}{\kappa_k} \leq \frac{\tau}{h^2}$).

فصل ۴

مثال عددی

با ارائه‌ی مثالی می‌خواهیم نرم خطای برش کامل و خطای گسسته‌سازی کامل را بررسی کنیم.

مثال ۱۴.۰.۴. معادله دیفرانسیل جبری جزیی به‌صورت زیر را در نظر بگیرید:

$$Au_t(t,x) + Bu_{xx}(t,x) + Cu(t,x) = f(t,x).$$

فرض کنیم $x \in [-۱,۱]$ و $t \in [۰,۱]$ و

$$A = \begin{pmatrix} ۰ & ۲ & ۰ \\ ۱ & -۱ & ۰ \\ ۱ & -۱ & ۰ \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}.$$

تابع f را طوری انتخاب می‌کنیم که جواب دقیق مساله به‌صورت زیر باشد:

$$u(t,x) = (x^۲e^{-t}, x^۲e^{-\frac{۱}{۲}t}, x^۲\sin t)^T.$$

داریم:

$$Au_t(t,x) + Bu_{xx}(t,x) + Cu(t,x) = f(t,x)$$

با جایگذاری، تابع f به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$f(t,x) = (-x^۲e^{-\frac{۱}{۲}t} - ۲e^{-t}, -x^۲e^{-t} - \frac{۱}{۲}x^۲e^{-\frac{۱}{۲}t}, -x^۲e^{-t} + \frac{۱}{۲}x^۲e^{-\frac{۱}{۲}t} - ۲\sin t + x^۲\sin t)^T.$$

روش $BTCS$ به‌صورت زیر است:

$$G(\tau,h^۲)U_{m+۱} = (\frac{۱}{\tau}I_N \otimes A)Um + F(T_{m+۱}) - r(t_{m+۱}), \quad m = ۰,\cdots,N,$$

با $U_۰ = U(۰)$ که در آن

$$U(۰) = (\tilde{g}^T(x_۱),\cdots,\tilde{g}^T(x_N))^T \approx (g^T(x_۱),\cdots,g^T(x_N))^T.$$

می‌دانیم

$$(g^T(x_۱),\cdots,g^T(x_N))^T = (u(۰,x_۱),\cdots,u(۰,x_N))^T.$$

در نتیجه

$$U_۰ = U(۰) = (۰/۲۵, ۰/۲۵, ۰, ۰, ۰, ۰, ۰/۲۵, ۰/۲۵, ۰)^T.$$

همچنین

$$G(\tau, h^۲) = \frac{۱}{\tau} I_N \otimes A + \frac{۱}{h^۲} P \otimes B + I_N \otimes C.$$

بنابراین

$$U_{m+۱} = G^{-۱}(\tau, h^۲)((\frac{۱}{\tau} I_N \otimes A)U_m + F(T_{m+۱}) - r(t_{m+۱})).$$

با در نظر گرفتن $h = \frac{۱}{۲}$ نتیجه می‌گیریم $N = ۳$ و

$$\omega_h = \{-\frac{۱}{۲}, ۰, \frac{۱}{۲}\}, \quad t_m \in \{\frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۲}, \frac{۳}{۴}\}.$$

یعنی

$$t_۰ = ۰, \quad t_۱ = \frac{۱}{۴}, \quad t_۲ = \frac{۱}{۲}, \quad t_۳ = \frac{۳}{۴}, \quad t_۴ = ۱.$$

زیرا $t_m = \frac{m}{N+۱}, \quad m = ۱, \cdots, N$.
داریم:

$$\tilde{F}(t_{m+۱}) = F(t_{m+۱}) - r(t_{m+۱}),$$

که در آن

$$r(t) = (\frac{۱}{h^۲} I_N \otimes B)(u^T(t, -l), ۰, \cdots, ۰, u^T(t, l))^T,$$

$$F(t) = (f_۱^T(t), \cdots, f_N^T(t))^T, \quad f_k(t) = f(t, x_k).$$

بنابراین

$$F(t) = \begin{pmatrix} -۲e^{-t} - \frac{۱}{۴}e^{-\frac{۱}{۲}t} \\ -\frac{۱}{۴}e^{-t} - \frac{۱}{۸}e^{-\frac{۱}{۲}t} \\ \frac{۱}{۸}e^{-\frac{۱}{۲}t} - \frac{۱}{۴}e^{-t} - \frac{۷}{۴}\sin t \\ -۲e^{-t} \\ ۰ \\ -۲\sin t \\ -۲e^{-t} - \frac{۱}{۴}e^{-\frac{۱}{۲}t} \\ -\frac{۱}{۴}e^{-t} - \frac{۱}{۸}e^{-\frac{۱}{۲}t} \\ \frac{۱}{۸}e^{-\frac{۱}{۲}t} - \frac{۱}{۴}e^{-t} - \frac{۷}{۴}\sin t \end{pmatrix},$$

$$(u(t, -۱), ۰, ۰, ۰, u(t, ۱))^T = (e^{-t}, e^{-\frac{۱}{۲}t}, \sin t, ۰, ۰, ۰, e^{-t}, e^{-\frac{۱}{۲}t}, \sin t)^T,$$

درنتیجه

$$r(t) = (-۴e^{-t}, ۰, -۴\sin t, ۰, ۰, ۰, -۴e^{-t}, ۰, -۴\sin t)^T.$$

بنابراین

$$\tilde{F}(t)=F(t)-r(t)=\begin{pmatrix} ۲e^{-t}-\frac{۱}{۴}e^{-\frac{۱}{۲}t} \\ -\frac{۱}{۴}e^{-t}-\frac{۱}{۸}e^{-\frac{۱}{۲}t} \\ \frac{۱}{۸}e^{-\frac{۱}{۲}t}-\frac{۱}{۴}e^{-t}+\frac{۹}{۴}\sin t \\ -۲e^{-t} \\ ۰ \\ -۲\sin t \\ ۲e^{-t}-\frac{۱}{۴}e^{-\frac{۱}{۲}t} \\ -\frac{۱}{۴}e^{-t}-\frac{۱}{۸}e^{-\frac{۱}{۲}t} \\ \frac{۱}{۸}e^{-\frac{۱}{۲}t}-\frac{۱}{۴}e^{-t}+\frac{۹}{۴}\sin t \end{pmatrix}.$$

همچنین

$$G(\tau,h^{۲})=\begin{pmatrix} ۸ & ۸ & ۰ & -۴ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۴ & -۵ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۴ & -۴ & ۹ & ۰ & ۰ & -۴ & ۰ & ۰ & ۰ \\ -۴ & ۰ & ۰ & ۸ & ۸ & ۰ & -۴ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۴ & -۵ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۴ & ۴ & -۴ & ۹ & ۰ & ۰ & -۴ \\ ۰ & ۰ & ۰ & -۴ & ۰ & ۰ & ۸ & ۸ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۴ & -۵ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & -۴ & ۴ & -۴ & ۹ \end{pmatrix}.$$

بنابراین

$$G^{-۱}(\tau,h^{۲})=$$

$$\begin{pmatrix} ۰/۰۷۵۸ & ۰/۱۲۱۲ & ۰ & ۰/۰۲۲۸ & ۰/۰۳۶۵ & ۰ & ۰/۰۰۶۳ & ۰/۰۱۰۱ & ۰ \\ ۰/۰۶۰۶ & -۰/۱۰۳۰ & ۰ & ۰/۰۱۸۲ & ۰/۰۲۹۲ & ۰ & ۰/۰۰۵۱ & ۰/۰۰۸۱ & ۰ \\ -۰/۰۱۰۶ & -۰/۱۳۴۹ & ۰/۱۴۷۴ & -۰/۰۰۸۷ & -۰/۰۷۹۲ & ۰/۰۸۱۶ & -۰/۰۰۴۴ & -۰/۰۳۶۱ & ۰/۰۳۶۳ \\ ۰/۰۲۲۸ & ۰/۰۳۶۵ & ۰ & ۰/۰۸۲۱ & ۰/۱۳۱۴ & ۰ & ۰/۰۲۲۸ & ۰/۰۳۶۵ & ۰ \\ ۰/۰۱۸۲ & ۰/۰۲۹۲ & ۰ & ۰/۰۶۵۷ & -۰/۰۹۴۹ & ۰ & ۰/۰۱۸۲ & ۰/۰۲۹۲ & ۰ \\ -۰/۰۰۸۷ & -۰/۰۷۹۲ & ۰/۰۸۱۶ & -۰/۰۱۵۰ & -۰/۱۷۱۰ & ۰/۱۸۳۷ & -۰/۰۰۸۷ & -۰/۰۷۹۲ & ۰/۰۸۱۶ \\ ۰/۰۰۶۳ & ۰/۰۱۰۱ & ۰ & ۰/۰۲۲۸ & ۰/۰۳۶۵ & ۰ & ۰/۰۷۵۸ & ۰/۱۲۱۲ & ۰ \\ ۰/۰۰۵۱ & ۰/۰۰۸۱ & ۰ & ۰/۰۱۸۲ & ۰/۰۲۹۲ & ۰ & ۰/۰۶۰۶ & -۰/۱۰۳۰ & ۰ \\ -۰/۰۰۴۴ & -۰/۰۳۶۱ & ۰/۰۳۶۳ & -۰/۰۰۸۷ & -۰/۰۷۹۲ & ۰/۰۸۱۶ & -۰/۰۱۰۶ & -۰/۱۳۴۹ & ۰/۱۴۷۴ \end{pmatrix}$$

همچنین برای $t_m \in \{\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۴}\}$ داریم:

$$U_h(t)=(u(t,x_۱),\cdots,u(t,x_N))^T,$$

در نتیجه

$$U_h(t) = (\frac{1}{4}e^{-t}, \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}t}, \frac{1}{4}\sin t, 0, 0, 0, \frac{1}{4}e^{-t}, \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}t}, \frac{1}{4}\sin t)^T,$$

خطای گسسته‌سازی کامل در هر مرحله به‌صورت زیر است:

$$\epsilon_h(t_{m+1}) = U_h(t_{m+1}) - U_{m+1}, \quad m = 0, \cdots, N,$$

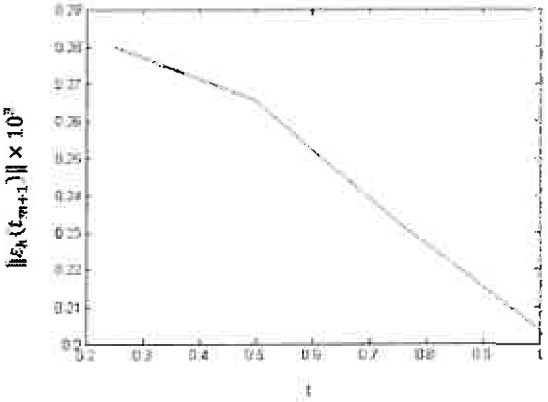
همچنین داریم:

$$le_{m+1} = U_h(t_{m+1}) - \hat{U}_{m+1},$$

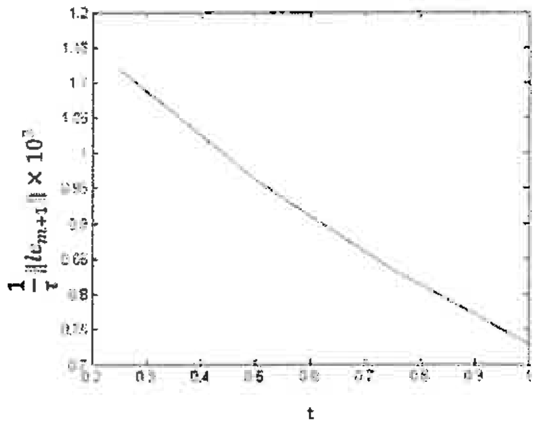
که در آن

$$\hat{U}_{m+1} = G^{-1}(\tau, h^2)((\frac{1}{\tau}I_N \otimes A)U_h(t_m) + \tilde{F}(t_{m+1})).$$

حال خطای برشی کامل و خطای گسسته‌سازی کامل را برای $h = \frac{1}{2}$ در زمان $t \in [0, 1]$ بررسی می‌کنیم و نمودار نرم آنها را رسم می‌کنیم. محور افقی زمان t و محور عمودی خطای حاصل برحسب 10^{-3} می‌باشد. درنتیجه نمودارهای زیر حاصل می‌شوند:



شکل ۱.۴: نمودار $\|\epsilon_h(t_{m+1})\|$ برای $h=\frac{1}{2}$ در بازه‌ی زمانی $[0,1]$



شکل ۲.۴: نمودار $\frac{1}{\tau}\|le_{m+1}\|$ برای $h=\frac{1}{2}$ در بازه‌ی زمانی $[0,1]$

همانطور که مشاهده می‌کنیم، نمودار خطاها در زمان $t \in [۰, ۱]$ نزولی می‌باشد. به عبارت دیگر، در هر مرحله‌ی زمانی خطاها همگرا به صفر می‌باشند. یعنی داریم:

$$\frac{۱}{\tau}\|le_{N+۱}\| \leq \frac{۱}{\tau}\|le_N\| \leq \cdots \leq \frac{۱}{\tau}\|le_۱\|,$$

و

$$\|\epsilon_h(t_{N+۱})\| \leq \|\epsilon_h(t_N)\| \leq \cdots \leq \|\epsilon_h(t_۱)\|.$$

یعنی در این مثال، روش $BTCS$ پایدار و همگرا می‌باشد.

نتایج

همانطور که در فصل‌های قبل مشاهده کردیم، برای حل معادلات دیفرانسیل جبری جزیی، ابتدا باید اندیس‌ها و مجموعه اندیس‌های $\mathcal{M}_{BC}$ و $\mathcal{M}_{IC}$ را بررسی کنیم و شرایط اولیه و مرزی لازم را که برای حل معادله لازم هستند، به‌دست آوریم. در این پایان نامه برای حل $PDAE$ از روش $BTCS$ استفاده کردیم. به گونه‌ای که ابتدا مکان و سپس زمان را گسسته کردیم و مشاهده کردیم که نرم خطای گسسته‌سازی و نرم وابسته به خطای برشی در هر مرحله‌ی زمانی کاهش می‌یابد و خطا به صفر میل می‌کند و درنتیجه روش فوق همگرا می‌باشد.

پیشنهادات

روش دیگری برای حل $PDAE$ وجود دارد. مشابه قبل، ابتدا با استفاده از گسسته‌سازی مکانی، $PDAE$ را به DAE تبدیل می‌کنیم. سپس قاعده‌ی ذوزنقه‌ای [۱] را روی DAE پیاده می‌کنیم که روش کرانک-نیکلسون [۲] را نتیجه می‌دهد. دو روش دیگر را در زیر معرفی می‌کنیم:

۱. حل عددی $PDAE$ با تقریب پاده چند متغیره: در این روش ابتدا $PDAE$ با تبدیل دیفرانسیل دوبعدی به سری توانی تبدیل می‌شود. سپس جواب عددی معادله به‌صورت سری پاده چند متغیره در می‌آید که جواب فوق جواب عددی $PDAE$ است.

۲. آنالیز همگرایی $PDAE$ از پیوست یک مدل نیمه‌رسانایی به یک مدل مداری: در این روش شبیه‌سازی مداری را با استفاده از آنالیز گره‌ای اصلاح‌شده به‌کار می‌بریم. برای شرح نیمه‌رساناها، معادلات انتشار رانندگی ایستا استفاده می‌شوند. سیستم کامل شده یک $PDAE$ است. ابتدا معادله‌ی فوق را با روش المان‌های محدود و گسسته‌سازی اسچارفتر گومل [۳] در فضا گسسته می‌کنیم. در نتیجه، سیستم نیمه‌گسسته به یک معادله دیفرانسیل جبری تبدیل می‌شود و معیار توپولوژی اندیس یک را ارائه می‌دهیم که برای $PDAE$ غیرگسسته برابر با نتایج قبلی است.

[۱] Trapezoidal Rule

[۲] Crank-Nicolson

[۳] Scharfetter-Gummel

برای گسسته‌سازی زمانی از روش‌های استاندارد BDF [1] استفاده می‌کنیم. در پایان یک برآورد همگرایی به حالت تعدل را برای $PDAE$ به‌دست می‌آوریم.

[1]Backward Differentiation Formula

پیوست آ

کد متلب مثال فصل ۴

```
clc;clear all
%% parameters
A=[0 2 0;1 -1 0;1 -1 0];
B=[-1 0 0;0 0 0;0 0 -1];
C=[0 0 0;0 -1 0;0 0 1];
L1=-1;L2=1;
t1=0;t2=1;

for d=2;
h1(d-1)=1/d
h=1/d
[T,Wh,p,N,ht]=efraz(h,L1,L2,t1,t2);
% Wh(1,1)=L1;Wh(1,2:length(wh)+1)=wh;Wh(1,length(wh)+2)=L2;
I=eye(N);
syms t x
U=[(x^2)*exp(-t);(x^2)*exp(-.5*t);(x^2)*sin(t)];% javabe daghigh
Uxx=diff(diff(U,x),x);% moshtaghe dovom
Ut1=diff(U,t);
n=length(U);
%% hale moadele va bedast avardane F
Ftx=A*Ut1+B*Uxx+C*U;
for i=1:N
f((i-1)*n+1:i*n,1)=subs(Ftx,x,Wh(i));
```

```
Ut((i-1)*n+1:i*n,1)=subs(U,x,Wh(i));
end
n2=length(f);n3=n2-2*n;
% ut=zeros(n2,1);
e1=subs(U,x,L1);e2=subs(U,x,L2);
ut=[e1;zeros(n3,1);e2];
% ut(1:n,1)=e1;ut(n+1:n2-n,1)=0;ut(n2-n+1:n3,1)=e2;
R=(1/(h^2))*Kronker(I,B)*ut;
f_r=f-R;
%% hale moadeleye G
for i=1:n-1
Gth=((1/ht)*Kronker(I,A))+((1/h^2)*Kronker(p,B))+Kronker(I,C);
end
%% mohasebeye U(t,x) va khata
u=[];ue=[];khataye_Boresh_kamel=[];khataye_gosastesazi_kamel=[];
u(:,1)=subs(Ut,t,0);
for i=2:N+2
ue(:,i)=inv(Gth)*(((1/2)*Kronker(I,A))*subs(Ut,t,T(i-1))+subs(f,t,T(i))-subs(R,t,T(
u(:,i)=inv(Gth)*(((1/2)*Kronker(I,A))*u(:,i-1)+subs(f,t,T(i))-subs(R,t,T(i)));
khataye_Boresh_kamel(i)=(1/ht)*norm(ue(:,i)-subs(Ut,t,T(i)));
khataye_gosastesazi_kamel(i)=norm(u(:,i)-subs(Ut,t,T(i)));
end
figure;plot(T(2:end),khataye_Boresh_kamel(2:end))
title('khataye Boresh kamel');
figure;plot(T(2:end),khataye_gosastesazi_kamel(2:end))
title('khataye gosastesazi kamel');
% nemudar_khataye_Boresh_kamel(1,d-1)=norm(khataye_Boresh_kamel);
% nemudar_khataye_gosastesazi_kamel(1,d-1)=norm(khataye_gosastesazi_kamel);
end
```

مراجع

[۱] کرایه‌چیان،ا، "**معادلات دیفرانسیل و کاربردها**"، چاپ شانزدهم، انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد، ۱۳۸۷.

[2] A. Boumenir and V. Nguyen, *Perron theorem in monotone iteration method for traveling waves in delayed reaction-diffusion equations*, J. Diff. Eqs. 2008, 1551-1570.

[3] A. Leung, *Stable invariant manifolds for coupled Navier-Stokes and second-order wave systems*, Asymptotic Analysis, 2005, 339-357.

[4] A.W. Leung, *systems of nonlinear partial differential equations*, Kluwer Acad. Publ., Dortrecht, Boston, London, 1989.

[5] C.W. Gear and L.R. Petzold, *ODE methods for the solution of differential/algebraic systems.*, SIAM J.Numer. Anal. 1984, 716-728.

[6] E. Hairer and G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations II*, Springer-Verlag, 1996.

[7] E. Hairer, Ch. Lubich and M. Roche, *The numerical solution of differetial-algebraic systems by Runge Kutta methods*, Springer-Verlag, 1989.

[8] F.R. Gantmacher, *Matrizentheorie*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1986.

[9] G. Ali, N. Rotundo, *An existence result for elliptic partial differential-algebraic equations arising in semiconductor modeling*, Nonlinear Anal. Theory Methods Appl. 2010, 4666-4681.

[10] J.W. Thomas, *Numerical partial differential equations: Finite difference methods*, Springer, New York, 1995.

[11] K. Debrabant, K. Strehmel, *Convergence of Runge-Kutta methods applied to linear partial differential-algebraic equations*, Applied Numerical Mathematics, 2005, 213-229.

[12] K.E. Brenan, S.L. Campbell, and L.R. Petzold, *Numerical solution of initial-value problems in differential algebraic equations*, North-Holland Publ. Co. Amsterdam, 1989.

[13] K. Schittkowski, *Data Fitting in Partial Differential Algebraic Equations*, Elsevier Science, 2003.

[14] K. Strehmel and R. Weiner, *Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen*, Verlagsge sellschaft, Stuttgart, 1995.

[15] M. Bodestedt, *Perturbation analysis of refined models in circuit simulation*, Ph.D. thesis, Technical University of Berlin, 2007.

[16] M. Matthes , C. Tischendorf, *Convergence analysis of a partial differential algebraic system from coupling a semiconductor model to a circuit model*, Applied Numerical Mathematics, 2011, 382-394.

[17] M. Yigider, E. Celik, *The Numerical Solution of Partial Differential-Algebraic Equations By Multivariate Pade Approximation*, European Journal of Pure and Applied Mathematics, 2011, 67-75.

[18] R.D. Richtmyer and K.W. Morton, *Difference methods for initial-value problems*, Interscience Publ., New York, 1967.

[19] S. Cui, *Analysis of a mathematical model for the growth of tumars under the action of external inhibitors*, J. Math. Biol. 2002, 395-426.

[20] S. Lenhart and J. Workman, *Optimal Control Applied to Biological Models*, Chapman and Hall/CRC Mathematical and comutational Biolagy, 2007.

[21] W. Lucht, *Partial differential-algebraic systems of second order with symmetric convection*, Applied Numerical Mathematics, 2005, 357-371.

[22] W. Lucht, K. Strehmel and C. Eichler-Liebenow, *Linear partial differential algebraic equations, Part I: Indexes, consistent boundary/initial conditions*, Fachbereich Mathematik und Informatik, Martin-Luther-Universität Halle, 1997, 258-277.

[23] W. Lucht, K. Strehmel and C. Eichler-Liebenow, *Linear partial differential algebraic equations, Part II:Numerical solution*, Fachbereich Mathematik und Informatik, Martin-Luther-Universität Halle, 1997, 354-376.

[24] W. Lucht, *Mathematisch-physikalische Modellierung von elektrothermischen Reaktoren zur Calciumcarbid Herstellung*, Thesis B, Martin-Luther-Universität Halle, 1988.

[25] W. Walter, *Differential and integral inequalities*, Springer-Verlag New York, 1970.

[26] X. Hou and A. Leung, *Traveling wave solutions for a competitive reaction-diffusion system and their asymptotics*, Nonlin. Anal. Real World Appl. 2008, 2196-2213.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

به اندازه‌ی کافی هموار	Sufficiently Smooth
بیضوی	Elliptic
پایدار	Consistent
پوچ‌توان	Nilpotent
تبدیل فوریه	Fourier Transform
تبدیل لاپلاس	Laplace Transform
جبری	Algebraic
خطی	Linear
رتبه	Rank
سهموی	Parabolic
ضرب اسکالر	Scalar Product
عدد ثابت	Constant
غیرخطی	Nonlinear
فرض	Assumption
ماتریس یکانی	Unitary Matrix
مرتبه	Order
مستقل	Independent
مشتق	Derivative
مقادیر اولیه	Initial Values
مقادیر مرزی	Boundary Values
منتظم	Regular
منفرد	Singular
ناهمگن	Inhomogeneous
همگرا	Convergent
همگن	Homogeneous

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Algebraic .... جبری
Assumption .... فرض
Boundary Values .... مقادیر مرزی
Consistent .... پایدار
Constant .... عدد ثابت
Convergent .... همگرا
Derivative .... مشتق
Elliptic .... بیضوی
Fourier Transform .... تبدیل فوریه
Homogeneous .... همگن
Independent .... مستقل
Inhomogeneous .... ناهمگن
Initial Values .... مقادیر اولیه
Laplace Transform .... تبدیل لاپلاس
Linear .... خطی
Nilpotent .... پوچ‌توان
Nonlinear .... غیرخطی
Order .... مرتبه
Parabolic .... سهموی
Rank .... رتبه
Regular .... منتظم
Scalar Product .... ضرب اسکالر
Singular .... منفرد
Sufficiently Smooth .... به اندازه‌ی کافی هموار
Unitary Matrix .... ماتریس یکانی

Aabstract

Linear partial differential algebraic equations of the form $Au_t(t,x) + Bu_{xx}(t,x) + Cu(t,x) = f(t,x)$ are studied where at least one of the matrices $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ is singular. the two special cases $A = 0$ and $B = 0$ lead to ordinary differential equations and differential algebraic equations, respectively. therefore we assume that none of the matrices A or B is the zero matrix. we introduce a uniform differential time and a differential space index for these systems. these indexes are characterized by means of a fourier and a laplace transform, respectively. furthermore, we introduce a perturbation index pair and show the relation between the uniform differential time index and the differential space index. also we obtain the number of initial and boundary conditions for regular pencils.
we use the backward in time, centered in space scheme for numerical solution partial differential algebraic equations. at the end, we introduce the full truncation error and the full discretization error and we investigate their norm.

keywords: Differential Space Index, Differential Time Index, Perturbation Index, Space Discretization, Time Discretization

Shahrood University Of Technology

Technology University of Shahrood
Faculty Of Mathematical Sciences

Dissertation Submitted in Partial Fulfillment of The Requirements For The Degree of Master of Science in Applied Mathematics

Solving Partial Differential Algebraic Equations By Semi-Analysis Methods

Supervisor
Dr.M. Ghovatmand

Advisor
Dr.A. Mesforush

by

Sayedeh Roghayeh Mirbagheri

2014