حوزه معاونت پژوهشی و فناوری

گزارش پایانی
طرح پژوهشی

قوانین حدی برای متغیرهای تصادفی وابسته

با کد ۲۳۰۴

مجری : احمد نزاکتی
عضو هیأت علمی دانشکده ریاضی

این طرح با استفاده از اعتبارات پژوهشی دانشگاه صنعتی شاهرود انجام شده است و تاریخ های تصویب و خاتمه آن به ترتیب ۸۳/۸/۲۵ و ۸۴/۳/۲۵ می باشد.

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

قوانین حدی برای متغیرهای تصادفی وابسته

چکیده

در این طرح پژوهشی به بررسی قانون قوی اعداد بزرگ برای متغیرهای تصادفی هم پیوند پرداخته ایم. در فصل اول به تعاریف مورد نیاز پرداخته و سپس به بررسی و بیان تحقیقاتی که تاکنون در مورد متغیرهای تصادفی هم پیوند انجام شده، پرداخته ایم. سپس با استفاده از یک تکنیک جالب، ثابت می‌کنیم که در یک دنباله از متغیرهای تصادفی هم‌پیوند اگر برای هر j

$$Var\left(X_j\right)+\sum_{k=1}^{\infty}Cov\left(X_j,X_k\right)<\infty$$

آنگاه

$$\frac{\sum_{j=1}^{n}\left(X_j-EX_j\right)}{\left(n\log n\right)^{1/2}\log\log n}\to 0$$

تقریبا همه جا وقتی $n\to\infty$ و نهایتا در پیوست ۱ مقاله مستخرج از این طرح پژوهشی که برای چاپ در مجله بین‌المللی International Journal of Mathematics and Mathematical Science پذیرفته شده ، قرار گرفته است.

فهرست

فصل اول

مقدمه

فرض استقلال بین متغیرهای تصادفی در بسیاری از مدلهای آماری و احتمال نمی‌تواند جوابگوی واقعیتهای جامعه آماری باشد. به همین خاطر بررسی روابط بین متغیرهای وابسته و قوانین مهم احتمالی برای آنها مورد توجه بسیاری از دانشمندان قرار گرفته است.

انواع مختلفی از وابستگیها مانند وابستگی ضعیف، α میکسینگ[1] و... تعریف شد و قوانین مهم احتمالی برای آنها مورد بررسی قرار گرفت.

لهمن[2](۱۹۶۶) با تعریف وابستگی منفی(مثبت) نوع جدیدی از وابستگی را ارائه داد.

تعریف ۱ . ۱ : دو متغیر Xو Yرا وابسته منفی(مثبت) ربعی[3] [(NQD)] گوییم هرگاه بازای هر $x,y \in \Re$ داشته باشیم:

$$P[X \le x, Y \le y] \le (\ge) P[X \le x] P[Y \le y]. \qquad (۱.۱)$$

البته به این نکته توجه داشته باشید که از تعریف (۱ . ۱) می‌توانیم نتیجه بگیریم که بازای هر $x,y \in \Re$ خواهیم داشت

$$P[X > x, Y > y] \le (\ge) P[X > x] P[Y > y]. \qquad (۲.۱)$$

---

[1] α -Mixing
[2] Lehmann
[3] Negatively Quadratic Dependent

زیرا

$$P[X > x, Y > y] = 1 - P[X \le x \quad \text{یا} \quad Y \le y]$$
$$= 1 - P[X \le x] - P[Y \le y] + P[X \le x, Y \le y]$$
$$\le 1 - P[X \le x] - P[Y \le y] + P[X \le x]P[Y \le y]$$
$$= (1 - P[X \le x])(1 - P[Y \le y]) = P[X > x]P[Y > y].$$

بطور مشابه می‌توانیم رابطه (۱ . ۱) را از رابطه (۱ .۲) نتیجه بگیریم. بنابراین روابط (۱ . ۱) و (۱ . ۲) با هم معادل می‌باشند.

قضیه (۱ . ۱): اگر متغیرهای تصادفی X و Y وابسته مثبت (منفی) ربعی باشند، آنگاه آنها مستقلند اگر و فقط اگر $Cov(X,Y) = 0$.

مثال : متغیرهای X و $-X$ وابسته منفی ربعی می‌باشند ، زیرا برای هر $x, y \in \Re$ اگر داشته باشیم که $x > -y$ آنگاه

$$P[X \le x, -X \le y] = P[-y \le X \le x] = 0,$$

و در غیر اینصورت داریم

$$P[X \le x, -X \le y] = P[X \le x] - P[X < -y]$$
$$\le P[X \le x] - P[X \le x]P[X < -y]$$
$$= P[X \le x](1 - P[X < -y]) = P[X \le x]P[X \ge -y]$$
$$= P[X \le x]P[-X \le y],$$

بنابراین X و $-X$ با توجه به رابطه (۱ . ۱) وابسته منفی ربعی می‌باشند.

اساری[1] و همکاران(۱۹۶۷) با استفاده از تعریف فوق دنباله های هم پیوند[2] را به صورت زیر تعریف کردند و به بررسی بعضی از خواص احتمالی آن پرداختند.

تعریف (۱ . ۲): یک دنباله متناهی $\{X_1, \ldots, X_n\}$ هم‌پیوند نامیده می‌شود اگر برای هر دو تابع f و g روی $\Re^n$ که درهر بعد نانزولی هستند ، داشته باشیم

$$Cov(f(X_1, \ldots, X_n), g(X_1, \ldots, X_n)) \ge 0.$$

---

[1] Esary
[2] Associated sequence

البته فرض می‌کنیم که کوواریانس وجود داشته باشد. همچنین یک دنباله نامتناهی $\{X_n, n \geq 1\}$ را هم‌پیوند می‌نامیم اگر هر زیردنباله متناهی آن هم‌پیوند باشد.

قضیه ۱ . ۲ : فرض کنید $\{X_j ; j \geq 1\}$ یک دنباله از متغیرهای تصادفی هم‌پیوند باشند. آنگاه دو زیرمجموعه $\{X_j ; j \in A\}$ و $\{X_k ; k \in B\}$ مستقل از همدیگر هستند اگر وفقط اگر $Cov(X_j, X_k) = 0$ برای هر $j \in A$ و $k \in B$. همچنین به طور مشابه X_j ها تواما مستقلند اگر وفقط اگر $Cov(X_j, X_k) = 0$ برای هر $j \neq k$.

قضیه ۱ . ۳ : اگر $\{X_1, \ldots, X_n\}$ یک دنباله از متغیرهای تصادفی هم‌پیوند و f یک تابع نانزولی باشد، آنگاه $\{f(X_1), \ldots, f(X_n)\}$ هم یک دنباله از متغیرهای تصادفی هم‌پیوند است.

نیومن و رایت[1] (۱۹۸۱) ثابت کردند که برای این نوع از دنباله ها نامساوی کولموگروف[2] به صورت زیر برقرار است.

قضیه ۱ . ۴ : اگر $\{X_1, \ldots, X_n\}$ یک دنباله از متغیرهای تصادفی هم‌پیوند با میانگین صفر و واریانس متناهی باشند آنگاه

$$P(\max_{1 \leq j \leq n} \left| \sum_{i=1}^{j} X_i \right| > \varepsilon) \leq \frac{Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)}{\varepsilon^2}.$$

نیومن(۱۹۸۳) قضیه حدمرکزی را برای حالت‌های خاصی از متغیرهای تصادفی هم‌پیوند بررسی نمود.

ما در این پژوهش به بررسی قانون قوی اعداد بزرگ برای متغیرهای تصادفی هم‌پیوند می‌پردازیم.

بیرکل[3](۱۹۸۸) قانون قوی اعداد بزرگ را برای یک دنباله از متغیرهای تصادفی هم پیوند ایستای کامل ثابت کرد.

قضیه ۱ . ۵ : فرض کنید $\{X_n ; n \geq 1\}$ یک دنباله از متغیرهای تصادفی ایستای کامل هم‌پیوند باشد. اگر برای یک دنباله نانزولی $\{b_n ; n \geq 1\}$ از اعداد حقیقی داشته باشیم

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{Var(X_j)}{b_j^2} + \sum_{1 \leq j \neq k}^{\infty} \frac{Cov(X_j, X_k)}{b_j b_k} < \infty,$$

[1] Newman and wright
[2] Kolmogorov inequality
[3] Birkel

آنگاه داریم

$$\frac{1}{b_n}\sum_{j=1}^{n}(X_j - EX_j) \to 0 \qquad a.e.$$

این قضیه اولین نتیجه بود. اما شرط ایستایی مناسب نیست . رائو[1](۲۰۰۲) ابتدا نامساوی هجیک- رنی[2] را که کمک زیادی برای اثبات قانون قوی اعداد بزرگ می‌کند ، به صورت زیر بیان و اثبات کرد.

قضیه ۱ . ۶ : فرض کنید $\{X_n; n \geq 1\}$ یک دنباله از متغیرهای تصادفی هم‌پیوند، $Var(X_j) = \sigma_j^2$ و $\{b_n; n \geq 1\}$ یک دنباله از اعداد حقیقی نانزولی و مثبت باشد. آنگاه برای هر $\varepsilon > 0$ داریم

$$P\left(\max_{1\leq k\leq n}\left|\frac{1}{b_n}\sum_{i=1}^{k}(X_i - EX_i)\right| \geq \varepsilon\right) \leq 4\varepsilon^{-2}\left\{\sum_{j=1}^{n}\frac{Var(X_j)}{b_j^2} + \sum_{1\leq j\neq k\leq n}\frac{Cov(X_j, X_k)}{b_j b_k}\right\}.$$

نتیجه ۱ . ۱ : تحت شرایط قضیه ۱ . ۶ ، برای هر عدد صحیح مثبت $m \leq n$ و هر $\varepsilon > 0$ داریم

$$P\left(\max_{m\leq k\leq n}\left|\frac{1}{b_n}\sum_{i=1}^{k}(X_i - EX_i)\right| \geq \varepsilon\right) \leq 4\varepsilon^{-2}\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{j=1}^{m}\frac{Var(X_j)}{b_m^2} + \sum_{1\leq j\neq k\leq m}\frac{Cov(X_j, X_k)}{b_m^2} \\ \displaystyle + \sum_{j=m+1}^{n}\frac{Var(X_j)}{b_j^2} + \sum_{m+1\leq j\neq k\leq n}\frac{Cov(X_j, X_k)}{b_j b_k}\end{array}\right\}.$$

او با استفاده از نامساوی های بالا و قضیه ۱ . ۴ قضایای زیر را بیان و اثبات کرد.

قضیه ۱ . ۷ : فرض کنید $\{X_n; n \geq 1\}$ یک دنباله از متغیرهای تصادفی هم‌پیوند با

$$\sum_{j=1}^{\infty}Var(X_j) + \sum_{1\leq j\neq k}^{\infty}Cov(X_j, X_k) < \infty.$$

دراینصورت $\sum_{j=1}^{\infty}(X_j - EX_j)$ قریب به یقین همگراست.

فرض کنید برای متغیر تصادفی X و هرمقدارثابت $c > 0$، تعریف کنیم $X^c = X$ اگر $|X| \leq c$ ، $X^c = -c$ اگر $X < -c$ و $X^c = c$ اگر $X > c$. واضح است که X^c یک تابع نانزولی از X است. بنابراین با استفاده از قضیه ۱ . ۳ ، اگر $\{X_n; n \geq 1\}$ یک دنباله از متغیرهای تصادفی هم‌پیوند باشد آنگاه

---

[1] Rao
[2] Hajek-Renyi inequality

برای هر مقدار ثابت $c > 0$، $\{X_n^c ; n \geq 1\}$ هم یک دنباله از متغیرهای تصادفی هم‌پیوند می‌باشد. بر همین اساس قضیه زیر را می‌توان بیان کرد.

قضیه ۱ . ۸ : فرض کنید $\{X_n ; n \geq 1\}$ یک دنباله از متغیرهای تصادفی هم‌پیوند بقسمی که

$$\sum_{n=1}^{\infty} EX_n^c < \infty,$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} Var(X_j^c) + \sum_{1 \leq j \neq k}^{\infty} Cov(X_j^c, X_k^c) < \infty,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P[|X_n| \geq c] < \infty$$

برای حداقل یک $c > 0$ برقرار باشد، آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ قریب به یقین همگراست.

قضیه ۱ . ۹: فرض کنید $\{X_n ; n \geq 1\}$ یک دنباله از متغیرهای تصادفی هم‌پیوند باشد. اگر برای یک دنباله نانزولی $\{b_n ; n \geq 1\}$ از اعداد حقیقی داشته باشیم

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{Var(X_j)}{b_j^2} + \sum_{1 \leq j \neq k}^{\infty} \frac{Cov(X_j, X_k)}{b_j b_k} < \infty,$$

آنگاه برای هر $0 < r < 2$ داریم

$$E\left[\sup_n \left(\frac{|S_n|}{b_n}\right)^r\right] < \infty.$$

رائو(۲۰۰۲) توانست با استفاده از قضایای فوق قضیه زیر را بیان و اثبات کند.

قضیه ۱ . ۹: فرض کنید $\{X_n ; n \geq 1\}$ یک دنباله از متغیرهای تصادفی هم‌پیوند باشد. اگر برای یک دنباله نانزولی $\{b_n ; n \geq 1\}$ از اعداد حقیقی داشته باشیم

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{Var(X_j)}{b_j^2} + \sum_{1 \leq j \neq k}^{\infty} \frac{Cov(X_j, X_k)}{b_j b_k} < \infty,$$

آنگاه

$$\frac{1}{b_n} \sum_{j=1}^{n} (X_j - EX_j) \to 0 \qquad a.e.$$

همانطور که مشاهده می‌شود او توانست شرط ایستایی را حذف کند. اما واقعیت این است که بررسی شرط اساسی قضیه در عمل بسیار مشکل است. به همین خاطر در این پروژه سعی می‌شود که با استفاده از تکنیک‌های دیگر شرایط دیگری را برای برقراری قضیه به دست آوریم که هم راحت‌تر بتوان برقراری آن را بررسی کرد و هم در شرایط یکسان سرعت همگرایی را بهبود بخشید.

فصل دوم

قانون قوی اعداد بزرگ برای یک دنباله از متغیرهای تصادفی هم پیوند

کراگلو[1](۲۰۰۴) با استفاده از یک تکنیک جالب ، قانون قوی اعداد بزرگ را برای یک دنباله از متغیرهای مارتینگلی[2] توسعه داد. در این پروژه با استفاده از این ایده توانستیم قانون قوی اعداد بزرگ را برای متغیرهای تصادفی هم‌پیوند توسعه داده و سرعت همگرایی را بهبود بخشیم.

قضیه ۲ . ۱ : فرض کنید $\{X_n ; n \geq 1\}$ یک دنباله از متغیرهای تصادفی هم‌پیوند باشد. همچنین فرض کنیدکه یک دنباله نانزولی و بی‌کران $\{b_n ; n \geq 1\}$ از اعداد حقیقی وجود داشته باشد به طوریکه برای یک دنباله از اعداد صحیح مثبت و نانزولی $\{k_n ; n \geq 1\}$ داشته باشیم

$$0 < a = \inf_{n\geq 1} b_{k_n} b_{k_{n+1}}^{-1} \leq \sup_{n\geq 1} b_{k_n} b_{k_{n+1}}^{-1} = c < 1 .$$

اگر

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Var\left(S_{k_n} - S_{k_{n-1}}\right)}{b_{k_n}^2} < \infty, \qquad (۲ . ۱)$$

که در آن $S_n = \sum_{j=1}^{n} \left(X_j - EX_j\right)$، آنگاه داریم:

---

[1] Kruglov
[2] Martingale

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}\sum_{j=1}^{n}\left(X_j-EX_j\right)=0 \qquad a.e. \tag{۲ . ۲}$$

اثبات : ابتدا قرار می‌دهیم $k_0=0$ و $b_0=0$. تعریف می‌کنیم $Y_j=X_j-EX_j$ و

$T_n=b_{k_n}^{-1}\sum_{j=k_{n-1}+1}^{k_n}Y_j$. توجه کنید که برای هر j، $EY_j=0$ و $Var(Y_j)=Var(X_j)$. همچنین واضح

است که برای هر عدد صحیح و مثبت n، عدد صحیح مثبتی مانند m وجود دارد به طوریکه

$k_{m-1}<n\le k_m$. توجه داشته باشید که $m\to\infty$ زمانی که $n\to\infty$. بدون از دست دادن کلیت قضیه،

فرض می‌کنیم $n>k_1$. بنابراین $k_{m-1}\ge 1$ و $b_n\ge b_{k_{m-1}}>0$.

ما می‌توانیم نشان دهیم که

$$\frac{1}{b_n}\sum_{j=1}^{n}Y_j=\frac{b_{k_{m-1}}}{b_n}\sum_{j=1}^{m-1}\frac{b_{k_j}}{b_{k_{m-1}}}T_j+\frac{1}{b_n}\sum_{j=k_{m-1}+1}^{n}Y_j.$$

چون $b_{k_{m-1}}\ge ab_{k_m}$ ، با استفاده از نامساوی مثلث و مفهوم ماکزیمم و $\frac{b_{k_{m-1}}}{b_n}<1$ ، داریم

$$\left|\frac{1}{b_n}\sum_{j=1}^{n}Y_j\right|\le\left|\sum_{j=1}^{m-1}\frac{b_{k_j}}{b_{k_{m-1}}}T_j\right|+\frac{1}{ab_{k_m}}\max_{k_{m-1}<l\le k_m}\left|\sum_{j=k_{m-1}+1}^{l}Y_j\right|. \tag{۳ . ۲}$$

برای اثبات (۲ . ۲) کافیست نشان دهیم هر دو قسمت سمت راست رابطه (۲ . ۳) قریب به یقین به سمت صفر میل می‌کنند وقتی که $n\to\infty$. اگر نشان دهیم

$$\lim_{j\to\infty}T_j=0 \quad a.e. \qquad \sup_{m\ge 2}\sum_{j=1}^{m-1}\frac{b_{k_j}}{b_{k_{m-1}}}<\infty, \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{b_{k_j}}{b_{k_{m-1}}}=0 \qquad \text{برای هر } j$$

با استفاده از لم تپلیتز[1] (می‌توانید کتاب لووی[2](۱۹۵۵) را ببینید) ثابت می‌شود که قسمت اول سمت راست رابطه (۲ . ۳) قریب به یقین به سمت صفر میل می‌کنند.

با توجه به اینکه دنباله $\{b_n\,;n\ge 1\}$ یک دنباله اکیدا صعودی و بدون کران می‌باشد بنابراین، بر اساس نتایج اولیه‌ای که برای دنباله‌ها در ریاضیات عمومی اثبات می‌شود، برای هر j خواهیم داشت

[1] Toeplitz lemma
[2] Loeve

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{k_j}}{b_{k_{m-1}}}=0.$$

دومین شرط هم صادق می‌باشد زیرا بر اساس شرائط قضیه برای هر $c\in(0,1)$ $b_{k_j}\le cb_{k_{j+1}}$. بنابراین

$$\frac{b_{k_j}}{b_{k_{m-1}}}=\prod_{i=j}^{m-2}\frac{b_{k_i}}{b_{k_{i+1}}}\le c^{m-j-1}$$

در این صورت می‌توانیم نشان دهیم که

$$\sum_{j=1}^{m-1}\frac{b_{k_j}}{b_{k_{m-1}}}\le\sum_{j=1}^{m-1}c^{m-j-1}=\frac{1-c^m}{1-c}<\frac{1}{1-c}<\infty.$$

بنابراین قسمت اول سمت راست رابطه (۲ . ۳) تقریبا همه جا همگرا به صفر است، وقتی $m\to\infty$، اگر دنباله $\{T_n,\ n\ge1\}$ هم قریب به یقین همگرا به صفر باشد.

با توجه به فرضیات قضیه، فرض کنید ε یک عدد مثبت دلخواه باشد. با استفاده از نامساوی مارکوف[1] می‌توانیم نشان دهیم که:

$$\varepsilon^2\sum_{n=2}^{\infty}P(|T_n|>\varepsilon)\le\sum_{n=2}^{\infty}E|T_n|^2\le\sum_{n=2}^{\infty}b_{k_n}^{-2}Var\left(S_{k_n}-S_{k_{n-1}}\right)<\infty.$$

آخرین نامساوی سمت راست بالا با توجه به شرط (۲ . ۱) برقرار می‌باشد. بنابراین براساس لم بورل-کانتلی[2] دنباله $\{T_n,n\ge1\}$ قریب به یقین همگرا به صفر است.

با توجه به اثبات فوق ، ثابت کردیم که قسمت اول رابطه (۲ . ۳) تقریبا همه جا همگرا به صفر است. بنابراین کافیست که ثابت کنیم آخرین قسمت رابطه (۲ . ۳) هم قریب به یقین همگرا به صفر است.

برای این منظور با استفاده از نامساوی چبیشف می‌توانیم نشان دهیم که برای هر عدد مثبت دلخواه مانند ε داریم:

$$\varepsilon^2P\left(\frac{1}{b_{k_m}}\underset{k_{m-1}<l\le k_m}{Max}\left|\sum_{j=k_{m-1}+1}^{l}Y_j\right|>\varepsilon\right)\le\frac{1}{b_{k_m}^2}E\left(\underset{k_{m-1}<l\le k_m}{Max}\left|\sum_{j=k_{m-1}+1}^{l}Y_j\right|^2\right).$$

اکنون با به کار بستن نا مساوی کولموگروف برای مجموعهای جزئی متغیرهای تصادفی هم‌پیوند برای $\{Y_j,k_{m-1}+1\le j\le k_m\}$ با میانگین صفر که توسط نیومن و رایت[1] (۱۹۸۱) اثبات شده و با استفاده از رابطه (۲ . ۱) می توانیم نشان دهیم:

[1] Markov inequalty
[2] Borel-Cantelli lemma

$$\varepsilon^2 P\left(\frac{1}{b_{k_m}} \underset{k_{m-1}<l\le k_m}{Max}\left|\sum_{j=k_{m-1}+1}^{l} Y_j\right| > \varepsilon\right) \le \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{b_{k_m}^2} E\left(\sum_{j=k_{m-1}+1}^{k_m} Y_j\right)^2$$

$$\le \sum_{m=2}^{\infty} \frac{Var\left(\sum_{j=k_{m-1}+1}^{k_m} Y_j\right)}{b_{k_m}^2}$$

$$\le \sum_{m=2}^{\infty} \frac{Var\left(S_{k_m} - S_{k_{m-1}}\right)}{b_{k_m}^2} < \infty.$$

با استفاده از لم بورل-کانتلی می‌توانیم نتیجه بگیریم که دنباله

$$\left\{\frac{1}{b_{k_m}} \max_{k_{m-1}<l\le k_m}\left|\sum_{j=k_{m-1}+1}^{l} Y_j\right|\right\}_{m\ge 1}$$

قریب به یقین همگرا به صفر است که در اینصورت اثبات قضیه کامل می‌شود.

با استفاده از قضیه فوق می توانیم قضیه زیر را بیان و اثبات کنیم.

قضیه ۲ . ۲ : فرض کنید $\{X_n, n\ge 1\}$ یک دنباله از متغیرهای تصادفی هم پیوند با شرط

$$Var\left(X_j\right) + \sum_{1\le k\ne j}^{\infty} Cov\left(X_j, X_k\right) = O(1) \qquad (۴ . ۲)$$

برای هر $j\ge 1$ باشد. آنگاه قریب به یقین

$$\frac{\sum_{j=1}^{n}\left(X_j - EX_j\right)}{(n\log n)^{1/2}\log\log n} \to 0$$

وقتی $n\to\infty$.

اثبات : تحت شرط (۲ . ۴) ، وجود دارد عدد ثابتی مانند B به طوریکه

$$Var\left(S_{k_n} - S_{k_{n-1}}\right) \le B\left(k_n - k_{n-1}\right) \le Bk_n.$$

در اینصورت دنباله $\{b_n = (n\log n)^{1/2}\log\log n, n\ge 1\}$ و $\{k_n = 2^{n+1}, n = 1,2,...\}$ در شرایط قضیه ۲ . ۱ صدق می‌کنند و بنابراین با استفاده از قضیه ۲ . ۱ اثبات این قضیه هم کامل می شود.

---

[1] Newman and wright

مثال : فرض کنید $\{X_n, n\geq 1\}$ یک دنباله از متغیرهای تصادفی هم‌پیوند با $Var(X_j)=1$

و $Cov(X_i,X_j)=\rho^{|i-j|}$، $0<\rho<1$ ، برای هر i و j باشد. در اینصورت

$$Var(X_j)+\sum_{1\leq k\neq j}^{\infty} Cov(X_j,X_k)\leq 1+2\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k<\infty.$$

بنابراین می‌توانیم از قضیه ۲ . ۲ برای این دنباله استفاده کنیم.

منابع

1. Birkel, T. (1988): *A note on the strong law of large numbers for positively dependent random variables.* Statist. Probab. Lett. 7, 17-20.
2. Esary, J., Proschan, D. and Walkup, D. (1967): *Association of random variables with applications.* Ann. Math. Statist. 38, 1466-1474.
3. Kruglov, V. M. (2002): *On extending the brunk-prokhorov strong law of large numbers.* Theory Probab. Appl. 47, 330- 333.
4. Lehmann, E.L. (1966):*Some concepts of dependence.* Ann. Math. Statist. 37, 1137-1153.
5. Loeve, M. (1963): *Probability Theory.* Van Nostrand, Princeton, NJ.
6. Newman, C. (1983):*A general central limit theorem for FKG systems.* Comm. Math. Phys. 74, 119-128.
7. Newman, C., Wright, A. L. (1981): *An invariance principle for certain dependent sequences.* Ann. Probab. 9, 671-675.
8. Prakasa Rao, B.L.S. (2002): *Hajek-Renyi-type inequality for associated sequences.* Statist.Probab.Lett. 57, 139-143.

پیوست ۱

مقاله مستخرج از طرح پژوهشی

From: Andrew Rosalsky <rosalsky@stat.ufl.edu>
To: nezakati <nezakati@shahrood.ac.ir>
Cc: Andrew Rosalsky <rosalsky@stat.ufl.edu>
Date: 05/17/2005 10:17 PM
Subject: Re: Report on " A strong law......"

Dear Professor Nezakati:

Your paper "A Note on the Strong Law of Large Numbers for Associated Sequences" has been successfully revised and all items of concern to the referee have been properly addressed. I am pleased to inform you that your paper has been accepted for publication in the IJMMS.

Within several days, I will be sending you an acceptance letter by postal airmail. (In due course, the Editor or Publisher will contact you requesting various electronic files.)

We are pleased that you chose the IJMMS for the submission of your paper.

Sincerely,

Andrew Rosalsky
Editorial Board member of the IJMMS

A NOTE ON THE STRONG LAW OF LARGE NUMBERS FOR ASSOCIATED SEQUENCES

A. NEZAKATI[†]
SHAHROOD UNIVERSITY OF TECHNOLOGY, IRAN

ABSTRACT. We prove that the sequence $\{b_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - EX_i)\}_{n\geq 1}$ converges almost everywhere to zero if $\{X_n, n \geq 1\}$ is a *associated* sequence of random variables with $\sum_{n=1}^{\infty} b_{k_n}^{-2}\mathrm{Var}(\sum_{i=k_{n-1}+1}^{k_n} X_i) < \infty$ that $\{b_n, n \geq 1\}$ is a positive non-decreasing sequence and $\{k_n, n \geq 1\}$is a strictly increasing sequence, both tending to infinity as n tends to infinity and

$$0 < a = \inf_{n\geq 1} b_{k_n} b_{k_{n+1}}^{-1} \leq \sup_{n\geq 1} b_{k_n} b_{k_{n+1}}^{-1} = c < 1.$$

1. INTRODUCTION

Let (Ω, F, P) be a probability space and $\{X_n, n \geq 1\}$ be a sequence of random variables defined on (Ω, F, P). We start with definitions.
A finite sequence $\{X_1, \cdots, X_n\}$ is said to be *associated* if for any two component wise non-decreasing functions f and g on R^n,

$$\mathrm{Cov}(f(X_1, \cdots, X_n), g(X_1, \cdots, X_n)) \geq 0,$$

assuming of course that the covariance exists. The infinite sequence $\{X_n, n \geq 1\}$ is said to be *associated* if every finite sub-family is associated. The concept of association was introduced by Esary et al.(1967). There are some results on the strong law of large numbers for associated sequences.
Prakasa Rao (2002) developed the Hajek-Renyi inequality for associated sequences and proved the following theorem: Let $\{X_n, n \geq 1\}$ be an associated sequence of random variables with

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mathrm{Var}(X_j)}{b_j^2} + \sum_{1\leq j\neq k}^{\infty} \frac{\mathrm{Cov}(X_j, X_k)}{b_j b_k} < \infty,$$

where $\{b_n, n \geq 1\}$ is a positive non-decreasing sequence of real numbers. Then $b_n^{-1}\sum_{j=1}^{n}(X_j - EX_j)$ converges to zero almost every where as $n \to \infty$.

2000 *Mathematics Subject Classification.* 60F15.
Key words and phrases. strong law of large number, almost everywhere convergence, associated sequences.
[†]This paper was supported by the Shahrood University and Technology in 2004.

In this paper we will prove the strong law of large numbers for associated sequences with new conditions.

2. Result

Theorem 1. *Let $\{X_n, n \geq 1\}$ be an associated sequence of random variables.If*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{k_n}^{-2} Var(S_{k_n} - S_{k_{n-1}}) < \infty, \tag{1}$$

where $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ and $\{b_n, n \geq 1\}$ is a positive non-decreasing sequence and $\{k_n, n \geq 1\}$is a strictly increasing sequence, both tending to infinity as n tends to infinity and,

$$0 < a = \inf_{n \geq 1} b_{k_n} b_{k_{n+1}}^{-1} \leq \sup_{n \geq 1} b_{k_n} b_{k_{n+1}}^{-1} = c < 1.$$

Then

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^{n} (X_k - EX_k) = 0 \quad a.e. \tag{2}$$

Proof. We set $k_0 = 0$, $b_0 = 0$ and $T_n = b_{k_n}^{-1} \sum_{j=k_{n-1}+1}^{k_n} Y_j$,where $Y_j = X_j - EX_j$. For any positive integer n,there exists a positive integer m such that $k_{m-1} < n \leq k_m$. Note that $m \to \infty$ as $n \to \infty$. Without loss of generality, we assume that $n > k_1$ and, therefore, $k_{m-1} \geq 1$ and $b_n \geq b_{k_{m-1}} > 0$. We can show that

$$\frac{1}{b_n} \sum_{j=1}^{n} Y_j = \frac{b_{k_{m-1}}}{b_n} \sum_{j=1}^{m-1} \frac{b_{k_j}}{b_{k_{m-1}}} T_j + \frac{1}{b_n} \sum_{j=k_{m-1}+1}^{n} Y_j.$$

Since $b_{k_{m-1}} \geq a b_{k_m}$, we conclude that

$$\left| \frac{1}{b_n} \sum_{j=1}^{n} Y_j \right| \leq \left| \sum_{j=1}^{m-1} \frac{b_{k_j}}{b_{k_{m-1}}} T_j \right| + \frac{1}{a b_{k_m}} \max_{k_{m-1} < l \leq k_m} \left| \sum_{j=k_{m-1}+1}^{l} Y_j \right|. \tag{3}$$

In order to prove (2) it suffices to demonstrate that each of the two terms in the right-hand side of (3) converges to zero almost everywhere as $n \to \infty$. The first term on the right hand side does so due to the Toeplitz lemma [see Loeve(1955)] provided that

$$\lim_{j\to\infty} T_j = 0 \quad a.e., \qquad \sup_{m \geq 2} \sum_{j=1}^{m-1} \frac{b_{k_j}}{b_{k_{m-1}}} < \infty, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{b_{k_j}}{b_{k_{m-1}}} = 0 \quad for\ every\ j.$$

The third condition is satisfied because by the hypothesis the sequence $\{b_n, n \geq 1\}$ monotonically increases without bounds. The second condition holds because

$$\frac{b_{k_j}}{b_{k_{m-1}}} = \Pi_{i=j}^{m-2} \frac{b_{k_i}}{b_{k_{i+1}}} \leq c^{m-j-1},$$

$$\sum_{j=1}^{m-1} \frac{b_{k_j}}{b_{k_{m-1}}} \leq \sum_{j=1}^{m-1} c^{m-j-1} = \frac{1-c^m}{1-c} < \frac{1}{1-c},$$

since by the hypothesis $b_{k_j} \leq cb_{k_{j+1}}$, $c \in (0,1)$. Thus, the first term in the right-hand side of (3) converges to zero almost everywhere as $m \to \infty$ if the sequence $\{T_n, n \geq 1\}$ also does so.
By the hypothesis, Let ϵ be an arbitrary positive number. With the use of the Markov inequality, we obtain

$$\epsilon^2 \sum_{n=2}^{\infty} P(\mid T_n \mid > \epsilon) \leq \sum_{n=2}^{\infty} E \mid T_n \mid^2 \leq \sum_{n=2}^{\infty} b_{k_n}^{-2} \text{Var}(S_{k_n} - S_{k_{n-1}}) < \infty.$$

The finiteness of the last series in the right-hand side is guaranteed by condition (1). In view of the Borel-Cantelli lemma, the sequence $\{T_n, n \geq 1\}$ converges to zero a.e. Let us turn to the second term in the right-hand side of (3).Applying the Chebyschev's inequality, we get that ,for any $\epsilon > 0$,

$$\epsilon^2 P(\frac{1}{b_{k_m}} \max_{k_{m-1} < l \leq k_m} \mid \sum_{j=k_{m-1}+1}^{l} Y_j \mid > \epsilon)$$

$$\leq \frac{1}{b_{k_m}^2} E(\max_{k_{m-1} < l \leq k_m} \mid \sum_{j=k_{m-1}+1}^{l} Y_j \mid^2)$$

We now apply the Kolmogorov-type inequality, valid for partial sums of associated random variables $\{Y_j, k_{m-1}+1 \leq j \leq k_m\}$ with mean zero (cf. Theorem 2, Newman and wright (1981)).
Hence,from (1), we have

$$\epsilon^2 \sum_{m=2}^{\infty} P(\frac{1}{b_{k_m}} \max_{k_{m-1} < l \leq k_m} \mid \sum_{j=k_{m-1}+1}^{l} Y_j \mid > \epsilon) \leq \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{b_{k_m}^2} E[\sum_{j=k_{m-1}+1}^{k_m} Y_j]^2$$

$$\leq \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\text{Var}(\sum_{j=k_{m-1}+1}^{k_m} Y_j)}{b_{k_m}^2}$$

$$\leq \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\text{Var}(S_{k_m} - S_{k_{m-1}})}{b_{k_m}^2} < \infty.$$

By virtue of the Borel-Cantelli lemma, the sequence

$$\{\frac{1}{b_{k_m}} \max_{k_{m-1} < l \leq k_m} \mid \sum_{j=k_{m-1}+1}^{l} Y_j \mid\}_{m \geq 1}$$

converges to zero almost everywhere. Thus, the theorem is proved.

Theorem 2. *Let $\{X_n', n \geq 1\}$ be an associated sequence of random variables with*

$$Var(X_j) + \sum_{1 \leq k \neq j}^{\infty} Cov(X_j, X_k) = O(1), \tag{4}$$

for all $j \geq 1$. *Then*

$$\frac{\sum_{j=1}^{n}(X_j - EX_j)}{(n\log n)^{1/2}\log\log n} \to 0 \qquad a.e. \qquad as \quad n \to \infty.$$

Proof. Under condition (4), there exist the constant of B such that

$$\mathrm{Var}(S_{k_n} - S_{k_{n-1}}) \leq B(k_n - k_{n-1}) \leq Bk_n.$$

The sequence $b_n = (n\log n)^{1/2}\log\log n$ and $k_n = 2^{n+1}, n = 1, 2, ...,$ satisfy the hypotheses of the theorem 1, which proves the theorem 2.

Example. Let $\{X_n, n \geq 1\}$ be an associated sequences with $\mathrm{Var}(X_i) = 1$ and $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \rho^{|i-j|}, 0 < \rho < 1$ for every i and j.Then

$$\mathrm{Var}(X_i) + \sum_{1\leq j\neq i}^{\infty}\mathrm{Cov}(X_i, X_j) \leq 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k < \infty.$$

Therefore, we can apply theorem 2.

REFERENCES

[1] Esary, J., Proschan, F., Walkup, D.(1967)*Association of random variables with applications.* Ann. Math. Statist., 38, 1466-1474.

[2] Loeve, M.(1955) *Probability Theory. Foundations. Random Sequences.* Van Nostrand, New York.

[3] Newman, C., Wright, A.L. (1981) *An invariance principle for certain dependent sequences.* Ann. Probab., 9, 671-675.

[4] Prakasa Rao, B.L.S. (2002) *Hajek-Renyi-type inequality for associated sequences.* Statist.Probab.Letters, 57, 139-143.

Faculty of Mathematics, Shahrood University of Technology, Shahrood,P.O.BOX 36155-316, Iran.

E-mail address: nezakati@shahrood.ac.ir