دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی محض، گرایش هندسه دیفرانسیل

عنوان

اصل برهمنهی لی و کاربردهای آن در معادلات دیفرانسیل جزئی

استاد راهنما

دکتر سید رضا حجازی

پژوهشگر

مقداد بیاری

۲۷ آبان ماه ۱۳۹۲

نام خانوادگی دانشجو: بیاری   نام: مقداد

عنوان: اصل برهمنهی لی و کاربردهای آن در معادلات دیفرانسیل جزئی

استاد راهنما: دکتر سید رضا حجازی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد   رشته: ریاضی محض   گرایش: هندسه دیفرانسیل

دانشگاه: دانشگاه شاهرود   دانشکده علوم ریاضی

تاریخ فارغ‌التحصیلی: ۲۷ آبان ماه ۱۳۹۲   تعداد صفحات: ۵۸

واژگان کلیدی: معادله دیفرانسیل، اصل برهمنهی غیرخطی، دستگاه‌های لی، جبر لی، میدان برداری، برگ‌بندی

چکیده

در این رساله، اثباتی هندسی از قضیه لی در مورد اصول برهمنهی غیرخطی برای جواب‌های معادلات دیفرانسیل عادی ناهمگن ارائه شده است.

اثبات قضیه‌ی لی براساس تعریفی هم‌ارز از اصل برهمنهی می‌باشد. اصل برهمنهی را می‌توان به‌عنوان یک برگ‌بندی در نظر گرفت. با در نظر گرفتن بعد نقصان برگ‌بندی ساخته شده از جبر لی میدان‌های برداری، یکتایی تابع برهمنهی مورد بررسی قرار گرفته شده است.

در پایان نشان داده می‌شود که تعریف مذکور امکان تعمیم اصل برهمنهی برای دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل جزئی را نیز به ما می‌دهد.

تقدیم به روح پدر

وجود مادر

خدایا...[1]

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

اگر تنهاترین تنها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن‌ها است...

---

[1] مناجاتی از دکتر علی شریعتی.

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر سید رضا حجازی، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از جناب آقای دکتر هادی پسندیده و سرکار خانم دکتر الهام دسترنج که زحمت مطالعه و داوری این رساله را تقبل فرمودند، کمال امتنان را دارم.

در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگار مهر و مهربانی، مادر عزیزم و بعد از خدا وجود مقدسش را ستایش می‌کنم و از برادران عزیزم و خواهر مهربانم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان تشکر می‌کنم، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

مقداد یاری

۲۷ آبان ماه ۱۳۹۲

فهرست مطالب

مقدمه

به جرات می‌توان گفت انتگرال‌گیری از دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل که تقارن‌های بی‌نهایت کوچک را می‌پذیرند انگیزه اصلی لی [۲] در توسعه مفهومی بود که امروزه تحت عنوان قضایای گروه‌ها و جبرهای لی شناخته می‌شوند. لی در مقاله‌ای، اثباتی از یک قضیه مهم به منظور مرتبط ساختن جبرهای لی و اصول برهمنهی غیرخطی برای جواب‌های برخی از دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل ناهمگن را ارائه داده است.[۱۶] چنین دستگاه‌هایی را می‌توان به عنوان تعمیمی از دستگاه‌های خطی در نظر گرفت اما قانون برهمنهی برخلاف قانون‌های برهمنهی قبل خطی نیست. در این پایان‌نامه به مطالعه نظریه‌ی دستگاه‌های معادلات دیفرانسیلی که اصل برهمنهی (ممکن است غیرخطی باشد) را می‌پذیرند پرداخته می‌شود، به‌طوری‌که امکان بیان جواب عمومی دستگاه به فرم تابع برهمنهی، بر اساس مجموعه‌هایی از جواب‌های پایه‌ای ویژه را به ما می‌دهد، با این امید که شرایط لازم و کافی برای دستگاه‌هایی که چنین اصلی را می‌پذیرند بیابیم.هر چند این بار معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی را نیز در نظر گرفته‌ایم.

حتی اگر نظریه قضیه لی با سطح دقت امروزی بیان نشده بود، دستگاه‌های بدست آمده توسط جبر لی متناظر مشخص شده که اغلب اوقات در مسائل فیزیکی ظاهر می‌شود و در بسیاری از موارد مسئله با مسئله‌ی دیگری در گروه لی متناظر مرتبط است. این مسئله ما را با هر دو روش کاهش به مسائل ساده‌تر از یک طرف و روش دیگر، که توسط وی [۳] و نورمن [۴] معرفی شده است و شامل برخی تکنیک‌های جبری براساس نظریه گروه‌ها و جبرهای لی است از طرف دیگر آشنا می‌سازد.

تا آنجا که می‌دانیم اثبات دقیقی از قسمت شرطی در قضیه لی وجود ندارد و کارهای شناخته شده جهت دستیابی به یک اثبات هندسی دقیق همان بحث مطرح شده در مراجع [۲،۲۰] می‌باشند. در این پایان‌نامه نشان می‌دهیم که وجود اصل برهمنهی برای جواب‌های یک دستگاه غیرهمگن نشان دهنده‌ی آن است که دستگاه فرمی ضمنی دارد. اثبات آن براساس تعریفی هم‌ارز از اصل برهمنهی است. اصل فوق را به عنوان یک برگ‌بندی با برخی ویژگی‌هایی که در ادامه به‌طور ضمنی فرمول‌بندی شده است در نظر می‌گیریم. از سوی دیگر، قسمت معکوس به طور کامل و عام بیان نشده و تقریبا هیچ مطلبی در مورد یکتایی تابع برهمنهی برای این دستگاه‌ها گفته نشده است. تنها در [۱۱] یک مثال ذکر شده است و در [۱۶] دو تابع برهمنهی متفاوت مشخص شده است. این نتایج ما را به جوابی برای این سوال می‌رساند، نکته‌ی اصلی بعد نقصان برگ‌بندی ساخته شده از جبر لی بدست آمده از میدان‌های برداری است. بعد نقصان، زمانی‌که عمل جبر لی میدان‌های

[۲] Lie
[۳] Wei
[۴] Norman

برداری روی منیفلد اولیه متعدی نیست بسیار مهم است.

در نهایت نشان داده خواهد شد که با توجه تعریف هم‌ارز از اصل برهمنهی می‌توان این اصل را برای دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل جزئی نیز بکار برد.

فصل ۱

مقدمات و پیشنیازها

۱.۱ مفاهیم بنیادی هندسه

در این فصل فرض بر آن است که خواننده با مطالب بنیادی منیفلدها آشناست و مطالب بنیادی را می‌توان در مراجع یافت [۱۷].

تعریف ۱.۱.۱. فضای توپولوژیک M را یک **منیفلد توپولوژیک** n-بعدی گوییم هرگاه شرایط زیر برقرار باشد

- M هاسدورف [۱] باشد، یعنی زیر مجموعه‌های باز U و V از M وجود داشته باشند به‌طوری‌که

$$p \in U, q \in V \qquad , U \cap V = \varnothing.$$

- M شمارای نوع دوم باشد.
- M موضعا اقلیدسی از بعد n باشد، یعنی هر نقطه آن مشمول در یک همسایگی همئومورف با یک زیر مجموعه باز از $\mathbb{R}^n$ باشد.

فرض می‌کنیم $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ گردایه‌ای شمارا از زیر مجموعه‌های منیفلدM و V_α ها نیز زیر مجموعه‌های باز همبند از $\mathbb{R}^n$ باشند. اگر $\cup_{\alpha \in I} U_\alpha = M$ و $\varphi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow V_\alpha$ همئومورفیسم باشد آن‌گاه $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ را **چارت مختصاتی** روی منیفلد M می‌نامیم.

حال اگر (U, φ) و (V, ψ) دو چارت روی منیفلد M باشند نگاشت

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap V)$$

[۱] Husdorff

را **نگاشت گذر** از φ به ψ می‌نامیم. دو چارت فوق را به‌طور **هموار سازگار** می‌نامیم هرگاه $\psi \circ \varphi^{-1}$ دیفئومورفیسم باشد. مجموعه $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ را **اطلس** رویM می‌نامیم هرگاه اعضای $\mathcal{A}$ دو به دو به طور هموار سازگار باشند. اطلس $\mathcal{A}$ **بیشین** است هرگاه مشمول در هیچ اطلس دیگری نباشد. **ساختار هموار** روی منیفلد توپولوژیکی M، یک اطلس بیشین هموار است. هر منیفلد توپولوژیکی مجهز به یک ساختار هموار $\mathcal{A}$ را یک منیفلد هموار نامیده و با $(M, \mathcal{A})$ نشان می‌دهیم.

مثال ۲.۱.۱. فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ یک منیفلد هموار n-بعدی با اطلس بیشینی است که شامل چارت مختصاتی $(\mathbb{R}^n, \mathbb{I})$ می‌باشد.

تعریف ۳.۱.۱. اگر MوN منیفلدهایی هموار باشند، نگاشت $F : M \longrightarrow N$ را **نگاشتی هموار** گوییم هرگاه برای هر چارت مختصاتی $\chi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow V_\alpha \subset \mathbb{R}^m$ روی Mو هر چارت مختصاتی $\tilde{\chi}_\beta : \tilde{U}_\beta \longrightarrow \tilde{V}_\beta \subset \mathbb{R}^n$ روی N، نگاشت مرکب $\tilde{\chi}_\beta \circ F \circ \chi_\alpha^{-1} : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ نگاشتی هموار باشد.

تعریف ۴.۱.۱. منیفلد هموار M را در نظر می‌گیریم **عملگر خطی** $X : C^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ را یک مشتق در نقطه $p \in M$ می‌نامیم اگر $X(fg)(p) = f(p)X(g) + g(p)X(f)$.

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنید که M فضای توپولوژیک باشد منظور از کلاف برداری رویM فضای توپولوژیکی مانند E به همراه نگاشت $\pi : E \longrightarrow M$ می‌باشد به‌طوری‌که

۱. $\forall p \in M \Longrightarrow E_{(p)} = \pi^{-1}(p)$ یک فضای برداری k- بعدی است.

۲. نگاشت $\phi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{R}^k$ یک نگاشت همئومورفیسم است.

۳. $\forall p \in M \Longrightarrow E_p \simeq \{p\} \times \mathbb{R}^k$

اگر E و M منیفلد باشند و ϕ نیز یک دیفئومورفیسم باشد آن‌گاه E یک کلاف برداری است.

قرار می‌دهیم

T_pM=\{ X : X یک عملگر مشتق در نقطه $p \in M$ است. \}

و آن را فضای مماسی منیفلد M در نقطه $p \in M$ می‌نامیم. همچنین در تعریف فوق اگر قرار دهیم

$$E = TM$$

آن‌گاه کلاف برداری به کلاف مماسی منیفلدMدر نقطه $p \in M$ تبدیل می‌شود که در آن TM را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$TM = \coprod_{p \in M} T_pM$$

کلاف مماسی یک منیفلد هموار n۲-بعدی است.

تعریف ۶.۱.۱. میدان برداری روی منیفلد M در نقطه $x \in M$ برشی از کلاف مماسی TM است که به وسیله ضابطه‌ی زیر تعیین می‌شود

$$\sigma : M \longrightarrow E.$$

به‌طوری‌که ترکیب خطی آن با نگاشت $\pi : E \longrightarrow M$ که به‌صورت زیر بدست می‌آید

$$\pi \circ \sigma = Id_M$$

نگاشت همانی روی منیفلد M خواهد بود. حال می‌توان میدان برداری در نقطه‌ی $x \in M$ را به‌صورت هم‌ارزی زیر داشت

$$\sigma \simeq V|_x$$

در مختصات موضعی $(x^1, \dots, x^m)$ ، میدان برداری برای هر تابع هموار $\xi^i(x)$ از x دارای فرم

$$V|_x = \xi^1 \tfrac{\partial}{\partial x^1} + \xi^2 \tfrac{\partial}{\partial x^2} + \dots + \xi^m \tfrac{\partial}{\partial x^m}$$

می‌باشد.

تعریف ۷.۱.۱. منیفلدهای هموار M و N را به همراه نگاشت هموار $F : M \longrightarrow N$ بین آن‌ها در نظر می‌گیریم. به ازای هر $x \in M$ نگاشت $dF_x : T_xM \longrightarrow T_{F(x)}N$ را نگاشت دیفرانسیل F می‌نامیم که به ازای هر $f \in C^\infty(N)$ و $V|_x \in T_xM$ با ضابطه

$$dF(V|_x)f(y) = V(f \circ F)(x), \qquad y = F(x)$$

تعریف می‌شود و در مختصات موضعی داریم

$$dF(V|_x) = dF\left(\sum_{i=1}^{m} \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} \xi^i \frac{\partial F^j}{\partial x^i}(x)\right)\frac{\partial}{\partial y^j} = \sum_{j=1}^{n} V(F^j(x))\frac{\partial}{\partial y^j}.$$

نگاشت دیفرانسیل F را با F_* نیز نشان می‌دهند و آن را نگاشت پیش‌برنده می‌نامند.

تعریف ۸.۱.۱. اگر V و W دو میدان برداری روی منیفلد M باشند، کروشه‌ی لی آن‌ها، $[V, W]$ نیز یک میدان برداری است که برای هر تابع هموار $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$[V, W](f) = V(W(f)) - W(V(f)). \qquad (۱.۱)$$

همچنین در مختصات موضعی، اگر داشته باشیم

$$V=\sum_{i=1}^{m}\xi^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i},\qquad W=\sum_{i=1}^{m}\eta^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i} \tag{۲.۱}$$

سپس داریم

$$[V,W]=\sum_{i=1}^{m}(V(\eta^i)-W(\xi^i))\frac{\partial}{\partial x^i}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\left(\xi^j\frac{\partial\eta^i}{\partial x^j}-\eta^j\frac{\partial\xi^i}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{۳.۱}$$

گزاره ۹.۱.۱. *فرض کنیم V ،W و U میدان‌های برداری روی M باشند و ثابت‌های c و c' نیز اعداد حقیقی باشند، در این صورت کروشه‌ی لی آن‌ها در خواص زیر صدق می‌کند*

- *دو خطی*

$$[cV+c'V',W]=c[V,W]+c'[V',W],$$
$$[V,cW+c'W]=c[V,W]+c'[V,W'].$$

- *پادمتقارن*

$$[V,W]=-[W,V].$$

- *اتحاد ژاکوبی*

$$[U,[V,W]]+[W,[U,V]]+[V,[W,U]]=0.$$

برهان. با استفاده از (۲.۱) و (۳.۱) می‌توان احکام فوق را اثبات نمود. □

تعریف ۱۰.۱.۱. فرض کنیم x نقطه‌ای از منیفلد M باشد، تابع خطی $\omega:T_xM\longrightarrow\mathbb{R}$ را ۱-فرم دیفرانسیل در x می‌نامیم. فضای ۱-فرم‌ها دوگان فضای برداری مماسی T_xM می‌باشد و فضای هم مماسی نیز نامیده می‌شوند و با نماد T_x^*M نمایش می‌دهیم. فضاهای هم مماسی با هم تشکیل کلاف هم مماسی $T^*M=\coprod_{x\in M}T_x^*M$ را می‌دهند و مشابه کلاف مماسی، یک کلاف برداری $2m$-بعدی را روی M تشکیل می‌دهد. تابع هموار $f:M\longrightarrow\mathbb{R}$ را در نظر می‌گیریم، دیفرانسیل آن، $df=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x^i}dx^i$ ، یک ۱-فرم است. در مختصات موضعی $x=(x^1,\ldots,x^m)$ دیفرانسیل‌های dx^i از توابع مختصاتی، پایه‌ای برای

فضاهای هم مماسی در هر نقطه از چارت مختصاتی فراهم می‌کنند. برحسب این پایه هر ۱-فرم در مختصات موضعی را می‌توان به‌صورت زیر نوشت
$$\omega = \sum_{i=1}^{m} h_i(x)dx^i.$$
فرم‌های دیفرانسیلی از مرتبه‌ی بالاتر به عنوان نگاشتی چند خطی متناوب روی فضای مماسی تعریف می‌شوند. بنابراین k-فرم دیفرانسیلی Ω در نقطه‌ی $x \in M$ ، نگاشت k-خطی زیر است

$$\Omega : \overbrace{T_xM \times \ldots \times T_xM}^{k-\text{بار}} \to \mathbb{R}،$$

تابع حقیقی مقدار f به عنوان فرمی از مرتبه‌ی صفر در نظر گرفته می‌شود. فضای همه‌ی k-فرم‌ها در x به صورت $\Lambda^kT^*M|_x$ نمایش داده می‌شود و فضایی برداری از بعد $\binom{m}{k}$ می‌باشد.

تعریف ۱.۱.۱۱. فرض کنیم M و N دو منیفلد هموار $F : M \longrightarrow N$ نگاشتی هموار باشد، دیفرانسیل آن dF ، نگاشتی است به فرم زیر

$$dF : T_xM \longrightarrow T_{F(x)}N$$

به همین ترتیب نگاشت خطی القایی F^* وجود دارد که هم‌دیفرانسیل F نامیده می‌شود و k-فرم‌های دیفرانسیلی روی N را به k-فرم‌های دیفرانسیلی رویM می‌برد،

$$F^* : T^*_{F(x)}N \to T^*_xM$$

اگر $x = (x^1, \ldots, x^m)$ مختصات موضعی روی M و $y = (y^1, \ldots, y^n)$ مختصات موضعی روی N باشد، آن‌گاه

$$F^*(dy^i) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial y^i}{\partial x^j} dx^j$$

در حالت کلی ثابت می‌شود

$$F^*(\sum_I \alpha_I(y)dy^I) = \sum_{I,J} \alpha_I(F(x)) \frac{\partial y^I}{\partial x^J} dx^J$$

به‌طوری‌که

$$J = (j_1, \ldots, j_k)$$
$$I = (i_1, \ldots, i_k)$$
$$\partial y^I / \partial x^J = det(\partial y^{i_k} / \partial x^{j_v})$$

می‌باشد. نگاشت هم‌دیفرانسیل را نگاشت پس‌کشنده نیز می‌نامند.

تعریف ۱۲.۱.۱. فرض می‌کنیم V میدان برداری روی منیفلد M و σ میدان برداری یا فرم دیفرانسیلی روی M باشد. مشتق لی σ نسبت به V را به شکل زیر داریم

$$V(\sigma)|_x = \lim_{x \to 0} \frac{\phi^*_\varepsilon(\sigma|_{\exp(\varepsilon V)x}) - \sigma|_x}{\varepsilon} = \frac{d}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0} \phi^*_\varepsilon(\sigma|_{\exp(\varepsilon V)x})$$

گزاره ۱۳.۱.۱. *فرض کنید V و W میدان‌های برداری هموار روی M باشند. مشتق لی W نسبت به V برابر با کروشه‌ی لی V و W است*

$$V(W) = [V, W].$$

برهان. [۱۷]. □

۲.۱ گروه های لی

تعریف ۱.۲.۱. یک گروه لی r-پارامتری، گروهی جبری مانند G با ساختار منیفلد هموار r-بعدی است به‌طوری‌که عمل گروهی

$$m : G \times G \to G$$
$$(g, h) \mapsto g \cdot h$$

و وارون

$$i : G \to G$$
$$g \mapsto g^{-1}$$

نگاشت‌های هموار بین منیفلدها هستند.

مثال ۲.۲.۱. گروه‌های ماتریسی زیر با عمل ضرب ماتریس‌ها و وارون آن‌ها نسبت به عمل ضرب، مثال‌هایی از گروه‌های لی هستند. گروه تبدیلات خطی عمومی که شامل تمام ماتریس‌های $n \times n$ معکوس‌پذیر است، تشکیل یک گروه لی n^2-پارامتری می‌دهد و آن را با $GL(n)$ نمایش می‌دهیم

$$GL(n) = \{X : detX \neq 0\}،$$

گروه خطی ویژه که شامل همه ی ماتریس‌های وارون‌پذیر با دترمینان یک است، تشکیل یک گروه لی (n^2-1) -پارامتری می‌دهد که به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$SL(n) = \{X \in GL(n) : detX = 1\}،$$

گروه متعامد

$$O(n) = \{X \in GL(n) : X^T X = I\}،$$

گروه لی $\frac{n(n-1)}{2}$ -پارامتری و گروه متعامد ویژه

$$SO(n) = \{X \in O(n) : detX = 1\}$$

گروه لی $\frac{n(n-1)}{2}$ -پارامتری می‌باشد. همچنین گروه آفین

$$A(n-1) = \left\{ \begin{bmatrix} A & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : A \in GL(n-1), a \in \mathbb{R}^{(n-1)} \right\}$$

گروه لی $n(n-1)$ -پارامتری است. که بعد همه‌ی این گروه‌های ماتریسی روی صفحه‌ی مختلط دو برابر می‌شود.

تعریف ۳.۲.۱. فرض می‌کنیم G یک گروه لی باشد. برای هر عنصر گروهی $g \in G$، ضرب از راست $R_g : G \to G$ که به وسیله‌ی $R_g(h) = h.g$ تعریف می‌شود، دیفئومورفیسم با معکوس $R_{g^{-1}} = (R_g)^{-1}$ است. یک میدان برداری V روی G **ناوردای راست** نامیده می‌شود اگر برای هر g و h در G داشته باشیم

$$dR_g(V|_h) = V|_{R_g(h)} = V|_{hg}$$

تعریف ۴.۲.۱. **جبر لی راست** g از گروه لی G یک فضای برداری از همه‌ی میدان‌های برداری ناوردای راست روی G می‌باشد.

به‌طور عمومی‌تر، جبرلی، فضای برداری g با عملگر دو خطی

$$[\,,\,] : \mathrm{g} \times \mathrm{g} \to \mathrm{g},$$

است که کروشه‌ی لی نامیده می‌شود و در خواص کروشه‌ی‌لی صدق می‌کند.

برای تعریف میدان‌های برداری ناوردای چپ و جبرلی چپ نیز به همین شکل عمل می‌کنیم.

تعریف ۵.۲.۱. فرض می‌کنیم M یک منیفلد هموار باشد. یک **گروه تبدیلات موضعی** که روی M عمل می‌کنند به‌وسیله‌ی یک گروه لی G، زیرمجموعه باز $\mathcal{U}$ که حوزه تعریف عمل گروه است به‌طوری‌که $\{e\} \times M \subset \mathcal{U} \subset G \times M$ و نگاشت هموار $\Psi : \mathcal{U} \to M$ داده می‌شود و دارای خاصیت‌های زیر است

الف) اگر $(h,x) \in \mathcal{U},\ (g,\Psi(h,x)) \in \mathcal{U}$ و همچنین $(g.h,x) \in \mathcal{U}$ سپس $\Psi(g,\Psi(h,x)) = \Psi(g.h,x)$.

ب) برای هر $x \in M$ ، $\Psi(e,x) = x$.

ج) اگر $(g,x) \in \mathcal{U}$ سپس $(g^{-1},\Psi(g,x)) \in \mathcal{U}$ و $\Psi(g^{-1},\Psi(g,x)) = x$.

۱.۲.۱ عمل گروه تبدیلات

در اینجا نحوه‌ی تبدیل تابع $u = f(x)$ تحت عنصر گروهی $g \in G$ را توضیح می‌دهیم. تابع $u = f(x)$ را با گراف آن $\Gamma_f = \{(x,f(x)) : x \in \Omega\} \subset X \times U \simeq \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ را در نظر می‌گیریم، Ω حوزه تعریف تابع $u = f(x)$ است. توجه کنید که Γ_f زیرمنیفلدی $p-$بعدی از $X \times U$ می‌باشد. اگر گراف تابع f زیرمجموعه‌ای از حوزه تعریف گروه تبدیلات g باشد، تبدیل Γ_f به‌وسیله‌ی g به‌صورت زیر است

$$g\ .\ \Gamma_f = \{(\tilde{x},\tilde{u}) = g\ .\ (x,u);\ (x,u) \in \Gamma_f\}$$

مجموعه‌ی $g.\Gamma_f$ معمولا گراف تابع دیگری مثل $\tilde{u} = \tilde{f}(\tilde{x})$ نیست. با این وجود، چون G به‌طور هموار عمل می‌کند و عنصر همانی G، Γ_f را بدون تغییر می‌گذارد، با تعریف مناسب و محدود کردن حوزه‌ی تعریف تابع f، یعنی f (Ω) آن گاه برای عنصر g در همسایگی عنصر همانی، مطمئن می‌شویم $g\ .\ \Gamma_f = \Gamma_{\tilde{f}}$ گراف تابع دیگری مانند $\tilde{u} = \tilde{f}(\tilde{x})$ است و می‌نویسیم $\tilde{f} = g\ .\ f$ و تابع $\tilde{f}$ را تبدیل تابع f به وسیله‌ی g می‌نامیم.

در حالت کلی فرض می‌کنیم

$$(\tilde{x},\tilde{u}) = g\ .\ (x,u) = (\Xi_g(x,u), \phi_g(x,u)),$$

که ϕ_g و Ξ_g توابعی هموار باشند. گراف $\Gamma_{\tilde{f}} = g\ .\ \Gamma_f$ از $g\ .\ f$ به‌وسیله‌ی معادلات زیر داده می شود

$$\begin{aligned}
\tilde{x} &= \Xi_g(x,f(x)) = \Xi_g \circ (\mathbb{I} \times f)(x),\\
\tilde{u} &= \phi_g(x,f(x)) = \phi_g \circ (\mathbb{I} \times f)(x), \qquad x \in \Omega
\end{aligned}$$

در این جا $x \in \Omega$ و $\mathbb{I}$ تابع همانی روی X است. بایدx را از دستگاه معادلات بالا حذف کنیم. چون برای $g = e$ داریم $\Xi_g \circ (\mathbb{I} \times f) = \mathbb{I}$ و می‌دانیم درصورتی‌که g به اندازه کافی به عنصر همانی نزدیک شود ماتریس ژاکوبین $\Xi_g \circ (\mathbb{I} \times f)$ غیرتکین است، از این رو به وسیله‌ی قضیه‌ی تابع معکوس به‌طور موضعی برای x داریم

$$x = [\Xi_g \circ (\mathbb{I} \times f)]^{-1}(\tilde{x}).$$

لذا هرگاه عامل دوم وارون‌پذیر باشد، $\tilde{u}$ قابل محاسبه است.

$$\tilde{u} = g\ .\ f(x) = [\phi_g \circ (\mathbb{I} \times f)] \circ [\Xi_g \circ (\mathbb{I} \times f)]^{-۱}.$$

در بعضی موارد ممکن است فقط متغیر مستقل تبدیل شود

$$(\tilde{x}, \tilde{u}) = g\ .\ (x, u) = (\Xi_g(x), u),$$

که Ξ_g یک دیفئومورفیسم از X است و با $\Xi_g^{-۱} = \Xi_{g^{-۱}}$ تعریف می‌شود. به آسانی می‌توانیم x را حذف کنیم

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \Xi_g(x) \\ \Rightarrow x &= \Xi_g^{-۱}\tilde{x} = \Xi_{g^{-۱}}\tilde{x}. \end{aligned}$$

بنابراین

$$\tilde{f}(\tilde{x}) = \tilde{u} = u = f(x) = f(\Xi_{g^{-۱}}\tilde{x}).$$

حال مطالب گفته شده را در مثال زیر بکار می‌بریم.

مثال ۶.۲.۱. فرض می‌کنیم $G = SO(۲)$ عمل گروه دوران‌ها روی $X \times U \simeq \mathbb{R}^۲$ باشد. تبدیلات G به‌صورت زیر نمایش داده می‌شوند

$$(\tilde{x}, \tilde{u}) = \theta\ .\ (x, u) = (x\cos\theta - u\sin\theta, x\sin\theta + u\cos\theta). \qquad (۴.۱)$$

فرض کنید $u = f(x)$ یک تابع باشد، که گراف آن $\Gamma_f \subset X \times U$ است. گروه $SO(۲)$ روی f به‌صورت دوران گراف f عمل می‌کند. اگر θ بزرگ باشد، با توجه به متناوب بودن توابع $\sin$ و $\cos$ آن‌گاه $\theta.\Gamma_f$ گراف تابع دیگری نخواهد بود. اما اگر $f(x)$ روی بازه‌ی متناهی $a \leq x \leq b$ تعریف شده باشد و $|\theta|$ خیلی بزرگ نباشد آنگاه $\theta.\Gamma_f$ گراف تابع خوش‌تعریف $\tilde{u} = \tilde{f}(\tilde{x})$ خواهد بود که $\Gamma_{\tilde{f}} = \theta.\Gamma_f$ می‌باشد.

تابع خطی $u = f(x) = ax + b$ را در نظر می‌گیریم. گراف f یک خط مستقیم است. بنابراین دوران آن با زاویه θ یک خط مستقیم دیگر خواهد بود. حال تبدیل f تحت θ (یعنی $\tilde{f}$) را می‌یابیم.

$$(\tilde{x}, \tilde{u}) = \theta\ .\ (x, ax+b) = (x\cos\theta - (ax+b)\sin\theta, x\sin\theta + (ax+b)\cos\theta).$$

برای پیدا کردن $\tilde{u} = \tilde{f}(\tilde{x})$ باید x را از جفت معادلات بالا حذف کنیم

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= x\cos\theta - (ax+b)\sin\theta, \\ \Rightarrow x &= \frac{\tilde{x} + b\sin\theta}{\cos\theta - a\sin\theta}\ . \end{aligned}$$

با فرض $a \neq \cot\theta$ داریم

$$\begin{aligned}\tilde{u} = \tilde{f}(\tilde{x}) &= x\sin\theta + (ax+b)\cos\theta \\ &= \frac{\tilde{x}+b\sin\theta}{\cos\theta - a\sin\theta}\sin\theta + \left(a\frac{\tilde{x}+b\sin\theta}{\cos\theta - a\sin\theta} + b\right)\cos\theta \\ &\vdots \\ &= \frac{\sin\theta + a\cos\theta}{\cos\theta - a\sin\theta}\tilde{x} + \frac{b}{\cos\theta - a\cos\theta}\ .\end{aligned}$$

می‌بینیم که تبدیل f تحت θ دوباره تابعی خطی شد.

تعریف ۱.۲.۷. یک **مدار** از گروه تبدیلات موضعی، زیرمجموعه‌ی گروه-ناوردای غیرتهی مینیمال از منیفلد M می‌باشد. به‌عبارت دیگر، $\mathcal{O} \subset M$ در صورتی مدار است که در شرایط زیر صدق کند

الف) اگر $x \in \mathcal{O}$، $g \in G$ و $g.x$ تعریف شده باشد، سپس $g.x \in \mathcal{O}$ است.

ب) اگر $\tilde{\mathcal{O}} \subset \mathcal{O}$ و $\tilde{\mathcal{O}}$ در بخش قبل صدق کند، سپس یا $\tilde{\mathcal{O}} = \mathcal{O}$ یا $\tilde{\mathcal{O}}$ تهی می‌باشد.

تعریف ۱.۲.۸. فرض می‌کنیم G یک گروه تبدیلات موضعی باشد که روی M عمل می‌کند.

الف) گروه G به‌طور **نیم-منظم** عمل می‌کند اگر همه مدارهای آن به‌عنوان زیرمنیفلدی از M دارای بعد یکسان باشند.

ب) اگر گروه G به‌طور **نیم منظم** عمل کند و برای هر نقطه $x \in M$ همسایگی کوچک دلخواه U از x وجود داشته باشد با این خاصیت که هر مدار از G، U را به زیرمجموعه‌های همبند مسیری تقسیم کند گوییم گروه G به طور منظم عمل می‌کند.

تعریف ۱.۲.۹. گروه تبدیلات G به‌طور **موثر** عمل می‌کند اگر عناصر گروهی متفاوت، عمل‌های متفاوتی داشته باشند، به‌طوری‌که برای هر $x \in M$ داشته باشیم $g.x = h.x$ اگر و تنها اگر $g = h$.

زیرگروه ایزوتروپی سراسری $G_M = \{g \mid g.x = x,\ \forall x \in M\}$ که زیرگروه نرمال بسته از G می‌باشد موثر بودن عمل G را نشان می‌دهد به این معنی که G به طور موثر عمل می‌کند اگر و تنها اگر $G_M = \{e\}$. اگر G به‌طور موثر عمل نکند آنرا با گروه خارج‌قسمتی $\frac{G}{G_M}$ که به‌طور موثر روی M مانند G عمل می‌کند جایگزین می‌کنیم. بنابراین در حالت کلی می‌توانیم فرض کنیم که همه‌ی عمل گروه ها به‌طور (موضعی) موثر عمل می‌کنند. می‌گوئیم گروه لی G به‌طور موضعی موثر عمل می‌کند اگر زیرگروه ایزوتروپی سراسری G_M زیرگروهی گسسته از G باشد.

تعریف ۱۰.۲.۱. منحنی انتگرال از یک میدان برداری V، منحنی پارامتری هموار $x = \phi(\varepsilon)$ می‌باشد به‌طوری‌که بردار مماس بر هر نقطه منحنی با مقدار V در آن نقطه برابر باشد، یعنی

$$\dot{\phi}(\varepsilon) = V|_{\phi(\varepsilon)}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

در مختصات موضعی باید $x = \phi(\varepsilon) = (\phi^1(\varepsilon), \cdots, \phi^m(\varepsilon))$ جوابی از سیستم معادله دیفرانسیل معمولی زیر است

$$\frac{dx^i}{d\varepsilon} = \xi^i(x), \qquad i = 1, \cdots, m \tag{۵.۱}$$

که در آن $\xi^i(x)$ ها ضرایب V در x می‌باشند.

تعریف ۱۱.۲.۱. اگر V میدانی برداری باشد، منحنی انتگرال بیشین پارامتری که از نقطه x در M می‌گذرد را با $\Psi(\varepsilon, x)$ نشان می‌دهیم و Ψ را **شار** تولید شده به وسیله V می‌نامیم.

بنابراین برای هر $x \in M$ و هر ε در بازه‌ی I_x شامل صفر، $\Psi(\varepsilon, x)$ نقطه‌ای روی منحنی انتگرال گذرنده از x در M خواهد بود. شار میدان برداری برای هر $\varepsilon, \delta \in \mathbb{R}$ دارای ویژگی‌های زیر است

$$\Psi(\delta, \Psi(\varepsilon, x)) = \Psi(\delta + \varepsilon, x), \qquad x \in M, \tag{۶.۱}$$

$$\Psi(0, x) = x, \tag{۷.۱}$$

$$\frac{d}{d\varepsilon}\Psi(\varepsilon, x) = V|_{\Psi(\varepsilon, x)} \tag{۸.۱}$$

با مقایسه‌ی دو ویژگی (۶.۱) و (۷.۱) با ویژگی گروه موضعی می‌بینیم که شار تولید شده به وسیله‌ی میدان برداری با عمل گروه موضعی گروه لی $\mathbb{R}$ روی منیفلد M یکسان است و اغلب گروه ۱-پارامتری از تبدیلات و میدان برداری V، **مولد بی‌نهایت کوچک** عمل نامیده می‌شود، از این رو به وسیله‌ی قضیه‌ی تیلور در مختصات موضعی داریم

$$\Psi(\varepsilon, x) = x + \varepsilon\xi(x) + O(\varepsilon^2),$$

که $\xi = (\xi^1, \cdots, \xi^m)$ ضرایب V هستند. اگر $\Psi(\varepsilon, x)$ گروه ۱-پارامتری از تبدیلات باشد که روی M عمل می‌کنند، مولد بی‌نهایت کوچک آن بوسیله‌ی (۸.۱) با قراردادن $\varepsilon = 0$ بدست می‌آید.

$$V|_x = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \quad \Psi(\varepsilon, x). \tag{۹.۱}$$

تناظری یک‌به‌یک بین گروه‌های ۱-پارامتری موضعی از تبدیلات و مولدهای بی‌نهایت کوچک آن‌ها وجود دارد. اغلب محاسبه‌ی شار یا گروه ۱-پارامتری تولید شده به وسیله‌ی میدان برداری V به‌عنوان نگاشت نمایی آن‌ها در نظر گرفته می‌شود، بنابراین نمادگذاری

$$\exp(\varepsilon V)x \equiv \Psi(\varepsilon, x),$$

را برای زیرگروه ۱-پارامتری یا شار تولید شده به وسیله‌ی میدان برداری V به کار می‌بریم.

مثال ۱.۲.۱۲. مثال‌هایی از میدان‌های برداری و شار آن‌ها.

الف) $M=\mathbb{R}$ را با مختصات x و میدان برداری $V=\partial/\partial x\equiv\partial_x$ در نظر می‌گیریم. چون باید شار (عمل گروه ۱-پارامتری) تولید شده به‌وسیله‌ی V جوابی از $\dot{x}=1$ با مقدار اولیه x در $\varepsilon=0$ باشد، لذا

$$\exp(\varepsilon V)=\exp(\varepsilon\partial_x)x=x+\varepsilon.$$

که عمل گروه انتقالات نامیده می‌شود. همچنین شار تولید شده به‌وسیله میدان برداری $V=x\partial_x$ باید جوابی از معادله‌ی دیفرانسیل معمولی $\dot{x}=x$ با مقدار اولیه x در $\varepsilon=0$ باشد، آن‌گاه

$$\exp(\varepsilon V)x=\exp(\varepsilon x\partial_x)x=e^{\varepsilon}x.$$

ب) گروه دوران‌ها را در صفحه در نظر می‌گیریم

$$\Psi(\varepsilon,(x,y))=(x\cos\varepsilon-y\sin\varepsilon,x\sin\varepsilon+y\cos\varepsilon).$$

مولد بی‌نهایت کوچک آن میدان برداری $V=\xi(x,y)\partial_x+\eta(x,y)\partial_y$ می‌باشد که طبق (۱.۹) داریم

$$\begin{aligned}\xi(x,y)&=\frac{dx}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}(x\cos\varepsilon-y\sin\varepsilon)=-y,\\ \eta(x,y)&=\frac{dx}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}(x\sin\varepsilon+y\cos\varepsilon)=x.\end{aligned}$$

بنابراین مولد بی‌نهایت کوچک آن، $V=-y\partial_x+x\partial_y$ است. گروه تبدیلات بالا با جواب‌های سیستم معادلات دیفرانسیل معمولی

$$dx/d\varepsilon=-y,\qquad dy/d\varepsilon=x$$

مطابقت دارد.

قضیه ۱.۲.۱۳. *فرض می‌کنیم V میدان برداری تعریف شده روی M باشد. اگر x_0 نقطه تکین V نباشد به‌طوری‌که $V|_{x_0}\neq 0$ ، سپس مختصات موضعی اصلاحی $y=(y^1,\cdots,y^m)$ در همسایگی x_0 وجود دارد به طوری‌که $V=\partial/\partial y$ و شار انتقالی $\exp(tV)y=(y^1+t,y^2,\cdots,y^m)$ را تولید می‌کند.*

برهان. [۱۷] □

تصور کنید g جبرلی گروه لی G باشد. نتیجه‌ی بعدی نشان می‌دهد که تناظری یک‌به‌یک بین زیرفضاهای ۱-بعدی و زیرگروه های ۱-پارامتری همبند G وجود دارد.

گزاره ۱.۲.۱۴. *فرض می‌کنیم $V\neq 0$ یک میدان برداری ناوردای راست روی گروه لی G باشد شار تولید شده به وسیله‌ی V یعنی $g_\varepsilon=\exp(\varepsilon V)e$ که برای هر $\varepsilon\in\mathbb{R}$ تعریف می‌شود، زیرگروه ۱-پارامتری از G را تشکیل می‌دهد و با*

$$g_{\varepsilon+\delta}=g_\varepsilon\cdot g_\delta,\qquad g_0=e,\qquad g_\varepsilon^{-1}=g_{-\varepsilon}$$

نشان می‌دهند که با $\mathbb{R}$ یا با گروه دایره‌ای $SO(2)$ ایزومورف است. برعکس هر زیرگره یک-بعدی همبند از G به‌وسیله‌ی یک میدان برداری ناوردای راست به شیوه بالا تولید می‌شود.

برهان. [۱۹] □

تعریف ۱.۲.۱۵. نگاشت نمایی $\exp : \mathrm{g} \to G$ با قرار دادن $\varepsilon = 1$ در زیرگروه ۱-پارامتری تولید شده به‌وسیله‌ی V بدست می‌آید

$$\exp(V) \equiv \exp(V)e.$$

تعریف ۱.۲.۱۶. فرض می‌کنیم G گروهی موضعی از تبدیلات باشد که با $g\ .\ x = \Psi(g, x)$ برای هر $(g, x) \in \mathcal{U} \subset G \times M$ روی منیفلد M عمل می‌کند. عملی بی‌نهایت کوچک با جبرلی g از G روی M وجود دارد. به این معنی که اگر $V \in \mathrm{g}$ باشد $\psi(V)$ یک میدان برداری روی M است و شار آن با عمل زیرگروه ۱-پارامتری $\exp(\varepsilon V)$ از G روی M منطبق است. برای هر $x \in M$ و با فرض $\Psi(g) = \Psi(g, x)$ داریم

$$\psi(V)|_x = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \quad \Psi(\exp(\varepsilon V), x) = d\Psi_x(V|_e).$$

به علاوه برای $g \in G_x$ که $G_x = \{g \in G;\ (g, x) \in \mathcal{U}\}$ چون $\Psi_x \circ R_g(h) = \Psi_{g.x}(h)$ داریم

$$d\Psi_x(V|_g) = d\Psi_{g.x}(V|_e) = \psi(V)|_{g.x}.$$

میدان برداری $V \in \mathrm{g}$ مولد بی‌نهایت کوچک از عمل گروه G نامیده می‌شود و داریم

$$V|_x = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \quad \exp(\varepsilon V)x, \quad V \in g.$$

تعریف ۱.۲.۱۷. فرض می‌کنیم $\zeta^1(x), \cdots, \zeta^k(x)$ توابع حقیقی مقدار و هموار روی منیفلد M باشند

الف) $\zeta^1, \cdots, \zeta^k$ **وابسته‌ی تابعی** نامیده می‌شوند اگر برای هر $x \in M$ همسایگی U از x و یک تابع حقیقی مقدار و هموار $F(z^1, \cdots, z^k)$ که روی هر زیرمجموعه‌ی باز از $\mathbb{R}^k$ مخالف صفر است وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$\forall x \in U \qquad F(\zeta^1(x), \cdots, \zeta^k(x)) = 0,$$

ب) $\zeta^1, \cdots, \zeta^k$ **مستقل تابعی** نامیده می‌شوند اگر به هر زیرمجموعه‌ی باز $U \subset M$ تحدید شوند وابسته تابعی نباشند. به عبارت دیگر اگر برای هر $x \in U \subset M$ داشته باشیم

$$F(\zeta^1(x), \cdots, \zeta^k(x)) = 0,$$

آن‌گاه برای هر z در زیرمجموعه‌ی بازی از $\mathbb{R}^k$ (که حاوی تصویر U است) $F(z^1, \cdots, z^k) \equiv 0$ باشد.

تعریف ۱.۲.۱۸. اگر G یک گروه باشد و $x \in G$ ، مرکز ساز x را که با $C(x)$ نشان می‌دهیم و به‌صورت زیر داریم

$$C(x) = \{g \in G | xg = gx\}$$

تعریف ۱.۲.۱۹. فرض کنیم S یک مجموعه باشد و $\mathcal{T} = \mathcal{P}(S)$ در این‌صورت $\mathcal{T}$ یک توپولوژی روی S است که به آن توپولوژی گسسته می‌گوییم.

تعریف ۱.۲.۲۰. نگاشت‌های تصویری زیر را در نظر می‌گیریم

$$\begin{cases} \Pi : (x.V) \in T\mathbb{R}^n \longrightarrow x \in \mathbb{R}^n \\ \Pi_۲ : (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

میدان برداری t -وابسته‌ی X روی $\mathbb{R}^n$ نگاشت زیر می‌باشد

$$X : (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow X(t,x) \in T\mathbb{R}^n$$

به‌طوری‌که

$$\Pi \circ X = \Pi_۲$$

بنابر تعریف فوق

$$X(t,x) \in \Pi^{-۱}(x) = T_x\mathbb{R}^n$$

و لذا

$$X_t : x \in \mathbb{R}^n \longmapsto X_t(x) \equiv X(t,x) \in T\mathbb{R}^n$$

برای هر $t \in \mathbb{R}$ میدان برداری روی $\mathbb{R}^n$ است، بنابراین هر میدان برداری t -وابسته هم‌ارز است با خانواده‌ی $\{X\}_{t\in\mathbb{R}}$ از میدان‌های برداری روی $\mathbb{R}^n$.

در واقع می‌توان هر میدان برداری Y روی $\mathbb{R}^n$ را به عنوان میدان برداری t-وابسته یX در نظر گرفت به‌طوری‌که

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad , X_t = Y$$

از طرف دیگر میدان برداری t-وابسته‌ی ثابت X روی $\mathbb{R}^n$ را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$X_t = X'_t, \qquad t, t' \in \mathbb{R}$$

که به عنوان میدان برداری $Y = X_\circ$ روی این فضا در نظر گرفته می‌شود.

همانند میدان‌های برداری، میدان برداری t-وابسته نیز منحنی‌های انتگرال موضعی می‌پذیرد. برای هر میدان برداری t-وابسته‌ی X روی $\mathbb{R}^n$ شار g^X موجود است

$$\begin{cases} g^X : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ g^X(t,x) \equiv g_t^X(x) = \gamma_x(t) \end{cases}$$

که در آن $\gamma_x(t)$ منحنی انتگرال X است با شرط اولیه‌ی $\gamma_x(\circ) = x$.

تعریف ۲۱.۲.۱. میدان برداری t-وابسته‌ی زیر را روی $\mathbb{R}^n$ در نظر می‌گیریم

$$X(t,x) = \sum_{i=1}^{n} X^i(t,x) \frac{\partial}{\partial x^i}،$$

حال دستگاه متناظر با آن دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی اول است که منحنی‌های انتگرال آن را تعیین می‌کند

$$\frac{dx^i}{dt} = X^i(t,x), \qquad i = 1, \ldots, n$$

بنابراین تناظری یک‌به‌یک بین میدان‌های برداری t-وابسته و دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی اول فوق موجود است.

اکنون فضای $\mathbb{R}^{n(m+1)}$ را در نظر می‌گیریم. هر نقطه در $\mathbb{R}^{n(m+1)}$ را به‌صورت $(x_{(\circ)}, \ldots, x_{(m)})$ در نظر می‌گیریم که $x_{(j)}$ نمایشی از نقطه‌ای در j-امین منیفلد $\mathbb{R}^n$ از $\mathbb{R}^{n(m+1)}$ است. متناظر با $\mathbb{R}^{n(m+1)}$ گروه S_{m+1} از جایگشت‌ها موجود است که عناصر آن S_{ij} هستند به‌طوری‌که

$$i \leq j, \qquad j = \circ, 1, \ldots, m$$

و روی $\mathbb{R}^{n(m+1)}$ عمل می‌کنند و متغییرهای $x_{(i)}$ و $x_{(j)}$ را جابجا می‌کنند.

اکنون دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی همگن مرتبه‌ی اول عادی روی $\mathbb{R}^n$ را در نظر می‌گیریم

$$\frac{dy^i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} A^i{}_j(t) y^j, \qquad , i = 1, \ldots, n \tag{۱۰.۱}$$

که در آن $A^i{}_j(t)$ برای $i, j = 1, \ldots, n$ خانواده‌ای از توابع t-وابسته هستند و جواب عمومی آن $y(t)$ می‌تواند به‌صورت ترکیب خطی زیر برای خانواده‌ای از n-جواب ویژه (مستقل خطی) بیان شود

$$y(t) = \sum_{j=1}^{n} k_j y_{(j)}(t) \tag{۱۱.۱}$$

اصول برهمنهی خطی یافتن جواب عمومی یک دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی را به تعیین مجموعه‌ای متناهی از جواب‌های ویژه از آن کاهش می‌دهد. این ویژگی مخصوص دستگاه‌های خطی همگن نمی‌باشد در واقع برای دستگاه‌های خطی ناهمگن

$$\frac{dy^i}{dt} = \sum_{j=۱}^{n} A^i{}_j(t) y^j + B^i(t), \qquad i = ۱, \ldots, n \tag{۱۲.۱}$$

که در آن $A^i{}_j(t)$ و $B^i(t)$ خانواده‌ای از توابع t-وابسته هستند جواب عمومی آن $y(t)$ می‌تواند به‌صورت ترکیب خطی زیر بیان شود

$$y(t) = \sum_{j=۱}^{n} k_j (y_{(j)}(t) - y_{(\circ)}(t)) + y_{(\circ)}(t) \tag{۱۳.۱}$$

و $y_{(\circ)}(t), y_{(۱)}(t), \ldots, y_{(n)}(t)$ خانواده‌ای از $n + ۱$ جواب ویژه هستند به‌طوری‌که $y_{(j)}(t) - y_{(\circ)}(t)$ برای $j = ۱, \ldots, n$ جواب‌های مستقل خطی از مساله‌ی همگن متناظر با دستگاه فوق هستند.

فصل ۲
هندسه ریمانی

۱.۲ منیفلدهای ریمانی

در این فصل به بیان مباحثی از هندسه‌ی ریمانی که در این پایان‌نامه مورد استفاده قرار گرفته‌اند پرداخته می‌شود.

تعریف ۱.۱.۲. فرض کنیم $V_1, \ldots, V_k$ وWفضاهای برداری باشند نگاشت

$$F : V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_k \longrightarrow W$$

را یک نگاشت k-خطی می‌گوییم هرگاه داشته باشیم

$$F(V_1, \ldots, aV_i + bV_i', V_{i+1}, \ldots, V_k) = aF(V_1, \ldots, V_i, \ldots, V_k) + bF(V_1, \ldots, V_i', \ldots, V_k)$$

تعریف ۲.۱.۲. اگر V یک فضای برداری باشد، نگاشت k-خطی $T : \overbrace{V \times \cdots \times V}^{k-\text{بار}} \longrightarrow \mathbb{R}$ را یک k-تانسور هموردا روی V می‌گوییم و مجموعه‌ی چنین تانسورهایی را با $T^k(V)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۳.۱.۲. نگاشت k-خطی $T : \overbrace{V^* \times \cdots \times V^*}^{k-\text{بار}} \longrightarrow \mathbb{R}$ را یک k-تانسور ناهمورد می‌گوییم و مجموعه‌ی چنین تانسورهایی را با $T_k(V)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۴.۱.۲. میدان تانسوری از نوع $\binom{k}{l}$ را یک میدان تانسوری آمیخته گویند.که به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$F = \sum_{i_k} \sum_{j_l} F^{j_1,\ldots,j_l}_{i_1,\ldots,i_k} \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_l}} \otimes dx^{i_1} \otimes \ldots \otimes dx^{i_k}$$

تعریف ۵.۱.۲. فرض کنید M منیفلدی هموار باشد، میدان دو تانسوری همورد مانند $g \in \mathcal{J}^{2}(M)$ متریک ریمانی نام دارد هرگاه متقارن و مثبت باشد به‌طوری‌که

$$g : \mathcal{J}(M) \times \mathcal{J}(M) \longrightarrow C^{\infty}(M)$$

و دارای ویژگی‌های زیر است

۱. دوخطی بودن

$$g(X+Y,Z) = g(X,Z) + g(Y,Z)$$
$$g(X,Y+Z) = g(X,Y) + g(X,Z)$$

۲. متقارن بودن

$$g(X,Y) = g(Y,X)$$

۳. مثبت بودن

$$g(X,X) > 0$$

تعریف ۶.۱.۲. متر ریمانی ضرب داخلی $g(X,Y) = \langle X,Y \rangle$ را تعریف می‌کند به‌طوری‌که به زوج (M,g) منیفلد ریمانی گویند.

تعریف ۷.۱.۲. فرض کنید $\{E_1,\dots,E_n\}$ کنج موضعی برای TM باشد و $\{\varphi^1,\dots,\varphi^n\}$ نیز دوگان آن باشد طبق تعریف متر ریمانی داریم

$$g : T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(E_i,E_j) \longmapsto \langle E_i,E_j \rangle$$

و نیز می‌دانیم

$$\langle E_i,E_j \rangle := \sum_{i,j} g_{ij}\varphi^i \otimes \varphi^j = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i \otimes dx^j$$

که با در نظر گرفتن رابطه ضرب متقارن زیر

$$\omega\eta := \frac{1}{2}(\omega \otimes \eta + \eta \otimes \omega)$$

از دو ۱-فرم ω و η متر ریمانی به فرم زیر تبدیل می‌شود

$$g = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i \cdot dx^j$$

تعریف ۸.۱.۲. فرض کنیم

$$\pi : E \longrightarrow M$$

کلافی برداری باشد، متر تاری روی E ضرب داخلی روی هریک از تارهای π مانند $E_p = \pi^{-1}(p)$ است.در حالت خاصی که کلاف برداری،کلاف مماسی باشد و تارها نیز همان برش‌های هموار از نگاشت زیر

$$\pi : TM \longrightarrow M$$

باشند چنانچه ضرب داخلی روی آن‌ها تعریف شود متر تاری تبدیل به متر ریمانی می‌شود.

تعریف ۹.۱.۲. فرض کنید که

$$\pi : E \longrightarrow M$$

کلاف برداری بر روی منیفلدM باشد و $\varepsilon(M)$ فضای برش‌های هموار E همچنین $\mathcal{J}(M)$ نیز فضای میدان‌های برداری روی M باشد. بنابراین التصاق درE نگاشتی است به شکل زیر

$$\nabla : \mathcal{J}(M) \times \varepsilon(M) \longrightarrow \varepsilon(M)$$
$$(X, Y) \longmapsto \nabla_X Y$$

که در شرایط زیر صدق می‌کند

۱.
$$\nabla_{fX_1+gX_2} Y = f\nabla_{X_1} Y + g\nabla_{X_2} Y$$

۲.
$$\nabla_X (aY_1 + bY_2) = a\nabla_X Y_1 + b\nabla_X Y_2$$

۳.
$$\nabla_X (fY) = (Xf)Y + f\nabla_X Y$$

تعریف ۱۰.۱.۲. اگر کلاف برداری در تعریف التصاق، کلاف مماسی باشد واضح است که مجموعه ی برش‌های TM همان فضای میدان‌های برداری است، یعنی $\varepsilon(M) = \mathcal{J}(M)$ بنابراین التصاق خطی روی M با ویژگی‌هایی که در تعریف فوق ذکر شد عبارت است از نگاشت زیر

$$\nabla : \mathcal{J}(M) \times \mathcal{J}(M) \longrightarrow \mathcal{J}(M)$$

لذا التصاق خطی روی M یک میدان تانسوری از نوع $\binom{۲}{۱}$ است.
اگر $\{E_i\}$ کنجی موضعی برای TM به‌ازای $U \subset M$ باشد طبق تعریف التصاق داریم

$$\nabla_{E_i} E_j \in \mathcal{J}(M)$$

$$\nabla_{E_i} E_j = \sum_{k=۱}^{n} \Gamma_{ij}^{k} E_k$$

تعداد توابع Γ_{ij}^{k} روی U، $n^۳$ تابع است که به آن نماد کریستوفل روی کنج موضعی مذکور گفته می‌شود.

تعریف ۱۱.۱.۲. میدان برداری X در راستای خم $\alpha : I \longrightarrow M$ نگاشتی هموار مانند $X : I \longrightarrow TM$ است به‌طوری‌که

$$\forall t \in I, X(t) \in T_{\alpha(t)} M.$$

اکنون سرعت منحنی را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\alpha_* : T_{t_\circ} I \longrightarrow T_{\alpha(t_\circ)} M$$

$$\alpha_*(\frac{d}{dt}|_{t_\circ} f) = \frac{d}{dt}|_{t_\circ}(f \circ \alpha) = \dot{\alpha}(t_\circ) f = \alpha^{'}(t_\circ) f$$

فرض کنیم ∇ التصاق روی M باشد، برای هر خم هموار مانند

$$\alpha : I \longrightarrow M$$

∇، عملگری یکتا به شکل

$$D : \varepsilon(t) \longrightarrow \varepsilon(t)$$

با ویژگی‌های زیر تعریف می‌کند

۱. $D_t(aX + bY) = aD_t X + bD_t Y$ عملگر D_t روی $\mathbb{R}$ خطی است.

۲. $D_t(fX) = \dot{f} + fD_t X, \qquad f \in C^{\infty}(I)$

۳. $D_t X(t) = \nabla_{\dot{\alpha}(t)} \tilde{X}$ اگر X تعمیم‌پذیر بوده و $\tilde{X}$ تعمیم آن باشد.

تعریف ۱۲.۱.۲. میدان برداری X در راستای خم α تعمیم‌پذیر است هرگاه میدان برداری دیگری مانند $\tilde{X}$ در تصویر α موجود باشد به‌طوری‌که باX، α -مرتبط باشد.

$$\alpha_* X_t = \tilde{X}_{\alpha(t)}$$

تعریف ۱۳.۱.۲. فرض کنیم M منیفلدی هموار با التصاق خطی ∇ و α نیز خمی روی M باشد. شتاب خم α میدان برداری $D_t\dot{\alpha}$ در راستای خم α می‌باشد.

تعریف ۱۴.۱.۲. خم α را یک ژئودزیک نسبت به التصاق ∇ می‌گوییم هرگاه $D_t\dot{\alpha} \equiv ۰$ خم ژئودزیک کوتاهترین منحنی بین دو نقطه است و اگر در راستای این خم حرکت کنیم هیچ نیرویی حس نخواهیم کرد. از آنجاکه بردار شتاب در راستای خم ژئودزیک هم‌ارز صفر است لذا از دید ناظر معادله یک ژئودزیک، معادله‌ی یک خط راست است.

تعریف ۱۵.۱.۲. فرض کنیمM منیفلد هموار مجهز به التصاق خطی ∇ باشد میدان برداری X را در راستای خم α موازی در راستای α نسبت به ∇ می‌نامیم هرگاه

$$D_t X = ۰$$

۲.۲ منیفلدهای محیطی

تعریف ۱.۲.۲. فرض کنید $(\tilde{M}, \tilde{g})$ یک منیفلد ریمانی n-بعدی وM نیز منیفلدی n-بعدی و

$$i : M \longrightarrow \tilde{M}$$

نگاشت ایمرژن باشد، اگر متر روی M متر القایی توسط i باشد آن‌گاه به i ایمرژن ایزومتری گوییم به‌ویژه اگر i نشاننده باشد به آن نشاننده ایزومتری می‌گوییم.

مثال ۲.۲.۲. $S^۲$ در $\mathbb{R}^۳$ ایمبدشده است و $(\mathbb{R}^۳, \tilde{g})$ نیز منیفلدی ریمانی است، نگاشت ایمرژن زیر را در نظر می‌گیریم

$$i : S^۲ \longrightarrow \mathbb{R}^۳$$

حال می‌دانیم که متر کره $S^۲$ متر اقلیدسی است و آن‌را با $\tilde{g}$ نمایش می‌دهیم، به‌طوری‌که $\tilde{g} = (dx^i)^۲$ همچنین داریم

$$i^* \tilde{g} = g$$

بنابراین i یک نشاننده ایزومتری است.

اگر i نگاشت شمول باشد آن‌گاه M زیر منیفلد ریمانی $\tilde{M}$ است و به $\tilde{M}$ منیفلد محیطی می‌گوییم. همچنین اگر i روی یک مجموعه‌ی باز تعریف شود (هر ایمرژن به‌طور موضعی نشاننده است) آنگاه i یک نشاننده و بنابراین یک نشاننده ایزومتری است.

لم ۳.۲.۲. *اگر M زیر منیفلدی ریمانی از $\tilde{M}$ باشد، آن‌گاه*

$$T\tilde{M}|_M = \coprod_{p\in M} T_p\tilde{M}$$

یک کلاف برداری هموار روی M است.

اگر $\{\partial_1, \dots, \partial_m\}$ میدان‌های برداری پایه با چارت روی $\tilde{M}$ باشد آن‌گاه به $T\tilde{M}|_M$ کلاف مماسی محیطی روی M می‌گوییم. فرض کنید X یک میدان برداری روی $\tilde{M}$ باشد آن‌گاه X را می‌توان به عنوان برشی تحدید یافته روی $T\tilde{M}|_M$ در نظر گرفت، برعکس هر برش X روی $T\tilde{M}|_M$ قابل تعمیم به برشی هموار روی $T\tilde{M}$ است.

به ازای هر $p \in M$ فضای مماسی محیطی $T_p\tilde{M}$ را می‌توان به صورت $T_p\tilde{M} = T_pM \oplus N_pM$ نوشت به‌طوری‌که $N_pM := (T_pM)^\perp$ کلاف نرمال در نقطه‌ی p نسبت به ضرب داخلی $\tilde{g}$ است. تعریف معادل کلاف نرمال را به شکل زیر داریم

$$N_pM = \{X \in T_pM | \langle X, Y\rangle_{\tilde{g}} = 0 \ni Y \in T_p\tilde{M}\}$$

هر میدان برداری در M به عنوان یک میدان برداری در منیفلد محیطی قابل تعمیم به دو قسمت، مماسی در کلاف مماس و قسمی که خارج از آن در کلاف نرمال قرار دارد می‌باشد. بنابراین تعاریف زیر را برای $X \in T_p\tilde{M}$ داریم

تعریف ۴.۲.۲. نگاشت تصویر مماس

$$\pi^\top : T\tilde{M}|_M \longrightarrow TM \qquad \ni X^\top := \pi^\top X$$

تعریف ۵.۲.۲. نگاشت تصویر نرمال

$$\pi^\perp : T\tilde{M}|_M \longrightarrow NM \qquad \ni X^\perp := \pi^\perp X$$

تعریف ۶.۲.۲. اگر $X, Y \in \mathcal{J}(M)$ آن‌گاه عملگر مشتق کوواریان محیطی را به شکل زیر تعریف می‌کنیم

$$\begin{cases} \tilde{\nabla} : \mathcal{J}(\tilde{M}) \times \mathcal{J}(\tilde{M}) \longrightarrow \mathcal{J}(\tilde{M}) \\ \tilde{\nabla}_X Y = (\tilde{\nabla}_X Y)^\top + (\tilde{\nabla}_X Y)^\perp \end{cases}$$

فصل ۳

اصل برهمنهی، قضیه لی و معادلات دیفرانسیل جزئی

۱.۳ اصول برهمنهی برای معادلات دیفرانسیل عادی

در این بخش هدف آن است که اصل برهمنهی را در مورد دستگاه معادلات دیفرانسیل عادی به عنوان یک برگ‌بندی بیان کنیم. در اغلب مسائل ریاضیات کاربردی، چندین متغییر وابسته وجود دارد که هر کدام تابعی از یک متغییر مستقل هستند و این متغییر معمولا زمان است. وقتی این مسائل به صورت ریاضی توصیف شوند نتیجه یک دستگاه معادلات دیفرانسیل است که در آن تعداد معادلات برابر با تعداد متغییرهای وابسته است.

دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر را در نظر می‌گیریم

$$\frac{dx^i}{dt} = Y^i(t,x) \qquad i = ۱, \ldots, n \tag{۱.۳}$$

که در [۱۵] تابع برهمنهی

$$\Phi : \mathbb{R}^{n(m+۱)} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

به شکل زیر تعریف شده است

$$x = \Phi(x_{(۱)}, \ldots, x_{(m)}; k_۱, \ldots, k_n)$$

به‌طوری‌که در آن جواب عمومی را برای مقادیر کوچک متغییر مستقل t به‌صورت زیر داریم

$$x(t) = \Phi(x_{(۱)}(t), \ldots, x_{(m)}(t); k_۱, \ldots, k_n)$$

و در آن $\{x_{(a)}(t)|a = ۱, \dots, m\}$ مجموعه پایه‌ای از جواب‌های ویژه دستگاه (۱.۳) است، و $(k_۱, \dots, k_n)$ مجموعه‌ای از n ثابت دلخواه متناظر با هر جواب ویژه دستگاه است.

حال مثال استاندارد از دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی را در نظر می‌گیریم

$$\frac{dx^i}{dt} = \sum_{j=۱}^{n} A^i{}_j(t)x^j, \qquad i = ۱, \dots, n \tag{۲.۳}$$

که تابع برهمنهی زیر را با $m = n$ می‌پذیرد

$$x = \Phi(x_{(۱)}, \dots, x_{(n)}; k_۱, \dots, k_n) = \sum_{i=۱}^{n} k_i x_{(i)}.$$

عبارت فوق برای هر خانواده از m جواب ویژه مجاز است اگر مجموعه‌ی باز $U \subset \mathbb{R}^{nm}$ موجود باشد که عبارت مذکور برای هر مجموعه از جواب‌های ویژه‌ی $x_۱(t), \dots, x_m(t)$ برقرار باشد به‌طوری‌که $(x_۱(۰), \dots, x_m(۰))$ عضوی از U باشد

$$U = \left\{ (x_{(۱)}, \dots, x_{(n)}) \in (\mathbb{R}^n)^n | det \begin{pmatrix} x^۱_{(۱)} \dots x^۱_{(n)} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ x^n_{(۱)} \dots x^n_{(n)} \end{pmatrix} \neq ۰ \right\}$$

البته می‌توانیم هر جواب را با برهمنهی $x_{(۱)}(t), \dots, x_{(m)}(t)$ برای مقادیر مشخص $k_۱, \dots, k_n$ زمانی‌که توابع $x_{(۱)}(t), \dots, x_{(m)}(t)$ مستقل باشند، بدست آوریم این بدان معناست که آن‌ها باید مجموعه‌ای از جواب‌های پایه را تشکیل دهند در مثال فوق ماتریس زیر به ازای مقادیر کوچک t باید وارون‌پذیر باشد

$$X(t) = (x^i{}_{(j)}(t))^i{}_j \qquad i, j = ۱, \dots, n \tag{۳.۳}$$

در این ماتریس عناصر $x^i{}_{(j)}$ مولفه‌ی jام از جواب iام می‌باشند. نحوه‌ی انتخاب جواب‌های ویژه به شکلی است که نامرتبط‌اند(مستقل از یکدیگرند) و لذا تابع برهمنهی باید به شکلی باشد که جابجایی دو آرگومان تنها باعث تغییر پارامترهای k شود. علاوه بر این تابع برهمنهی به طور ضمنی مستقل از متغییر مستقل t فرض شده است.

از دیدگاه هندسی دستگاه‌های معادلات دیفرانسیلی همانند (۲.۳) منحنی‌های انتگرال میدان برداری t-وابسته زیر را در $\mathbb{R}^n$ تعیین می‌کنند، که تعمیم آن به منیفلد n-بعدی نیز به‌طور مشابه قابل بیان است.

$$Y(t, x) = \sum_{i=۱}^{n} Y^i(t, x) \frac{\partial}{\partial x^i},$$

توجه داشته باشید که در هر نقطه $x \in N$ از منیفلد، میدان برداریt-وابسته Y در N نه تنها یک بردار بلکه یک زیرفضای برداری را تعیین می‌کند که توسط مجموعه بردارهای $\{Y(t, x)|t \in \mathbb{R}\}$ از فضای مماسی

متناظر T_xN تولید شده‌اند، به‌طوری‌که با تغییر مقدار متغییر t بردارهای متفاوتی بدست می‌آیند که از نقطه‌ای به نقطه دیگر تغییر می‌کنند. بدین طریق توزیعی عام روی منیفلد تعریف می‌شود که بعد زیرفضای خطی می‌تواند از نقطه‌ای به نقطه‌ی دیگر تغییر کند.حال توجه داریم که توزیع k-بعدی، زیر فضایی k-بعدی مانند D_x از T_xN است که توزیع مماس k-بعدی بر N نامیده می‌شود. این توزیع که توسط میدان‌های برداری t-وابسته بدست می‌آید پیچشی است. توزیع هموار D را رویN پیچشی گویند هرگاه نسبت به کروشه‌ی لی بسته باشد.

حال نیاز به معرفی مفهوم جدیدی به نام برگ‌بندی جهت درک بهتر تابع برهمنهی داریم.

تعریف ۱.۱.۳. یک برگ‌بندی k-بعدی روی منیفلدn-بعدی M مجموعه‌ای از زیر منیفلدهای K-بعدی، جدا از هم، همبند و ایمبدشده از M است، به‌طوری‌که اجتماع آن‌ها برابر با M است و در یک همسایگی از هر نقطه $p \in M$ چارت هموار (u, φ) وجود داشته باشد به‌طوری‌که $\varphi(u)$ زیر مجموعه‌ای از حاصلضرب دکارتی زیر می‌باشد

$$U' \times U'' \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{(n-k)}$$

که در آن U' و U'' مجموعه‌هایی باز هستند و اشتراک هر برگ از برگ‌بندی با u یا تهی است یا اجتماعی از برش‌های k-بعدی به‌شکل زیر

$$x^{(k+1)} = c^{(k+1)}, \dots, x^{(n)} = c^{(n)}$$

می‌باشد(به چنین چارت‌هایی چارت مسطح برای برگ‌بندی گویند).

مثال ۲.۱.۳. مجموعه تمام کره‌های به مرکز مبدا یک برگ‌بندی $(n-1)$ -بعدی از $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ می‌باشند.

جهت دست‌یابی به قوانین برهمنهی نیاز به تصویری هندسی داریم. به‌عنوان نتیجه‌ای از قضیه تابع ضمنی، تابع $\Phi(x_{(1)}, \dots, x_{(m)}; \cdot) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ حداقل در اطراف نقاط عمومی موضعا می‌تواند معکوس شده و بنابراین می‌توانیم بنویسیم

$$k = \Psi(x_{(0)}, \dots, x_{(m)}) \tag{۴.۳}$$

برای تابع $\Psi : \mathbb{R}^{n(m+1)} \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

آن‌گاه برگ‌بندی تعریف شده توسط تابع Ψ تحت جابجایی $(m+1)$ متغییر ناورداست. لذا تابع Ψ یک تابع برهمنهی است. ارتباط بین Φ و Ψ به‌صورت زیر است

$$k = \Psi(\Phi(x_{(1)}, \dots, x_{(m)}; k_1, \dots, k_n), x_{(1)}, \dots, x_{(m)}) \tag{۵.۳}$$

که در آن $k = (k_1, \dots, k_n)$ می‌باشد لذا Ψ یک برگ‌بندی n-بعدی را روی منیفلد $\mathbb{R}^{n(m+1)}$ تعریف می‌کند، بدین صورت‌که

$$(k_1, \dots, k_n) = \Psi(\Phi(x_{(1)}, \dots, x_{(m)}; k), x_{(1)}, \dots, x_{(m)}) = (x_{(1)}, \dots, x_{(n)})$$

در معادله‌ی فوق توجه داریم که Ψ از $\mathbb{R}^{n(m+1)}$ به $\mathbb{R}^n$ می‌رود و نیز طبق تعریف برگ‌بندی معادله‌ی مذکور بدست می‌آید.

برای مثال، برای دستگاه (۲.۳) داریم

$$\Psi(x_{(0)}(t), \dots, x_{(n)}(t)) = X^{-1}(t) x_{(0)}(t)$$

، که در آن $X(t)$ ماتریس داده شده در (۳.۳) می‌باشد. این مثال در حالت عام نشان‌دهنده‌ی آن است که تابع برهمنهی Ψ روی زیر مجموعه‌ی باز فشرده‌ای از $\mathbb{R}^{n(m+1)}$ تعریف شده است تا روی کل $\mathbb{R}^{n(m+1)}$.

ویژگی اساسی تابع برهمنهی Ψ آن است که

$$k = \Psi(x_{(0)}(t), x_{(1)}(t), \dots, x_{(m)}(t)), \tag{۶.۳}$$

تابع $\Psi(x_{(0)}, \dots, x_{(m)})$ روی هر $(m+1)$-تایی از جواب‌های دستگاه (۱.۳) ثابت است. این ویژگی برای انتخاب هر $(m+1)$ جواب از مجموعه‌ی جواب‌ها صحیح می‌باشد و این بدان معناست که که تابع تحت جابجایی $(m+1)$ آرگومان از تابع Ψ ناورداست. در اینجا نشان دادیم که مجموعه ترازهای تابع Ψ که برش‌هایی از فضای $\mathbb{R}^{nm} \times \mathbb{R}^n$ هستند، در واقع همان برگ‌بندی‌های مورد نظر می‌باشند.

بعد از دیفرانسیل‌گیری از رابطه (۶.۳) نسبت به t، چون توابع $x_i(t)$ جواب‌های دستگاه (۱.۳) هستند داریم

$$D\Psi(Y(t, x_{(0)}), \dots, Y(t, x_{(m)})) = 0 \tag{۷.۳}$$

بدین معناست که

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{a=0}^{m} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i_{(a)}} Y^i(t, x_{(a)}) = 0$$

و بنابراین امتدادهای قطری $\tilde{Y}(t, x_{(0)}, \dots, x_{(m)})$ از میدان برداری t-وابسته $Y(t,x)$ ، به شکل زیر هستند

$$\tilde{Y}(t, x_{(0)}, \dots, x_{(m)}) = \sum_{a=0}^{m} Y_a(t, x_{(a)}), \qquad t \in \mathbb{R},$$

که در آن

$$Y_a(t, x_{(a)}) = \sum_{i=1}^{n} Y^i(t, x_{(a)}) \frac{\partial}{\partial x^i_{(a)}} \tag{۸.۳}$$

همان میدان‌های برداری t-وابسته روی $\overbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}^{(m+1)-\text{فاکتور}}$ هستند که بر مجموعه‌های تراز تابع Ψ (همان‌طور که در (۷.۳) نشان داده شده است) مماس هستند.

تعریف ۳.۱.۳. میدان برداری X روی $\mathbb{R}^n$ داده شده است. امتداد قطری آن به $\mathbb{R}^{n(m+1)}$ میدان برداری-t-وابسته‌ی یکتایی مانند $\tilde{X}$ است به‌طوری‌که دارای ویژگی‌های زیر است

- میدان برداری t-وابسته‌ی $\tilde{X}$ تحت عمل گروه تقارنی S_{m+1} روی $\mathbb{R}^{n(m+1)}$ ناوردا باشد.
- میدان‌های برداری $\tilde{X}_t$ تحت نگاشت تصویری زیر

$$Pr_\circ : (x_{(\circ)}, \dots, x_{(m)}) \in R^{n(m+1)} \mapsto x_{(\circ)} \in R^n$$

تصویرپذیر باشند و

$$Pr_{\circ *}\tilde{X}_t = X_t$$

در واقع این دو میدان برداری $Pr_\circ$-مرتبط هستند.

مجموعه‌های تراز تابع Ψ متناظر با مقادیرمنظم، برگ‌بندی n-بعدی $\mathcal{F}$ را روی زیر مجموعه باز فشرده $U \subset \overbrace{\mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n}^{(m+1)\text{-فاکتور}}$ تعریف می‌کنند و خانواده‌ی $\{\tilde{Y}, t \in \mathbb{R}\}$ از میدان‌های برداری در $\mathbb{R}^{n(m+1)}$ شامل میدان‌های برداری مماس به برگ‌های این برگ‌بندی است. این برگ‌بندی ویژگی مهم دیگری نیز دارد.

چون مجموعه تراز $\mathcal{F}_k$ متناظر با $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{R}^n$ و $(x_{(1)}, \dots, x_{(m)}) \in \mathbb{R}^{nm}$ است. نقطه یکتا $(x_{(\circ)}, x_{(1)}, \dots, x_{(m)}) \in \mathcal{F}_k$ به‌صورت $(\Phi(x_{(1)}, \dots, x_{(m)}; k), x_{(1)}, \dots, x_{(m)}) \in \mathcal{F}_k$ وجود دارد به‌طوری‌که نگاشت‌های تصویری روی m مولفه‌ی آخر

$$Pr : (x_{(\circ)}, x_{(1)}, \dots, x_{(m)}) \in \mathbb{R}^{n(m+1)} \mapsto (x_{(1)}, \dots, x_{(m)}) \in \mathbb{R}^{nm}$$

دیفئومورفیسم‌هایی روی برگ‌های $\mathcal{F}_k$ از $\mathcal{F}$ القا می‌کنند.

مطلب فوق را می‌توان به عنوان این واقعیت در نظر گرفت که برگ‌بندی $\mathcal{F}$ متناظر با التصاق ∇ در کلاف برداری $Pr : \mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n(m+1)} \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{nm}$ با انحنای بدیهی است. تحدید نگاشت Pr به یک برگ از برگ‌بندی نگاشتی یک‌به‌یک به ما می‌دهد. بدین طریق نگاشتی خطی بین میدان‌های برداری در $\mathbb{R}^{nm}$ و میدان‌های برداری(افقی) مماس بر یک برگ از برگ‌بندی موجود است.

توجه داشته باشید که آگاهی از این التصاق(برگ بندی) اصل برهمنهی را بدون نیاز به تابع Ψ به ما می‌دهد، اگر نقطه $x_{(\circ)}(\circ)$ را ثابت در نظر بگیریم بدین معنا که $k = (k_1, \dots, k_n)$ و m جواب

$$x_{(1)}(t), \dots, x_{(m)}(t)$$

را انتخاب می‌کنیم، آن‌گاه $x_{(\circ)}(t)$ نقطه‌ای یکتا در $\mathbb{R}^n$ است به‌طوری‌که $(x_{(\circ)}(t), x_{(1)}(t), \ldots, x_{(m)}(t))$ به همان برگ از (برگ‌بندی) $\mathcal{F}$ که به‌شکل $(x_{(\circ)}(\circ), x_{(1)}(\circ), \ldots, x_{(m)}(\circ))$ است تعلق دارد.

از سوی دیگر، اگر التصاق ∇ با انحنای بدیهی را در کلاف $Pr : \mathbb{R}^{n(m+1)} \longrightarrow \mathbb{R}^{nm}$ داشته باشیم آن‌گاه توزیع افقی ∇ در $T\mathbb{R}^{n(m+1)}$ پیچشی است، بنابراین میدان‌های برداری این توزیع می‌توانند برای دست‌یابی به یک برگ‌بندی در $\mathbb{R}^{n(m+1)}$ مورد استفاده قرار گیرند به‌طوری‌که $\tilde{Y}(t)$ به ∇ تعلق دارد و بر $\mathcal{F}$ مماس است.(مماس بر $\mathcal{F}$ بدین معناست که توزیع افقی است)

در واقع $k \in \mathbb{R}^n$ برگ‌های $\mathcal{F}_k$ را در $\mathcal{F}$ شماره‌گذاری می‌کنند (برای مثال یک سطح مقطع از $\mathcal{F}$) ، آن‌گاه $\Phi(x_{(1)}(t), \ldots, x_{(m)}(t); k)$ به‌عنوان نقطه یکتای $x_{(\circ)}(t) \in \mathbb{R}^n$ تعریف شده است به‌طوری‌که $(x_{(\circ)}(t), x_{(1)}(t), \ldots, x_{(m)}(t)) \in \mathcal{F}_k$ یک اصل برهمنهی برای دستگاه معادلات دیفرانسیل (۱.۳) می‌باشد. برای اثبات این امر، نشان می‌دهیم که معکوس آن نیز برقرار است

اگر $k = \Psi(x_{(\circ)}(t), x_{(1)}(t), \ldots, x_{(m)}(t))$ که با $(x_{(\circ)}(t), x_{(1)}(t), \ldots, x_{(m)}(t)) \in \mathcal{F}_k$ هم‌ارز می‌باشد.

حال اگر k را ثابت در نظر گرفته و جواب‌های $x_{(1)}(t), \ldots, x_{(m)}(t)$ از دستگاه (۱.۳) را در نظر بگیریم، آن‌گاه $x_{(\circ)}(t)$ توسط شرط $\Psi(x_{(\circ)}(t), x_{(1)}(t), \ldots, x_{(m)}(t)) = k$ تعریف شده است که در (۱.۳) صدق می‌کند. قرار می‌دهیم $x'_{(\circ)}(t)$ جواب (۱.۳) با مقدار اولیه‌ی

$$x'_{(\circ)}(\circ) = x_{(\circ)}(\circ)$$

باشد چون میدان‌های برداری t-وابسته $\tilde{Y}(t)$ بر $\mathcal{F}$ مماس هستند، منحنی

$$(x'_{(\circ)}(t), x_{(1)}(t), \ldots, x_{(m)}(t))$$

به‌طور کامل در یک برگ از $\mathcal{F}$ و به‌ویژه در $\mathcal{F}_k$ قرار دارد. اما یک نقطه از یک برگ بطور کامل توسط نگاشت تصویری Pr تعیین می‌شود، لذا

$$x'_{(\circ)}(t) = x_{(\circ)}(t)$$

و $x_{(\circ)}(t)$ یک جواب است. بنابراین مشخصه هندسی اصول برهمنهی زیر را اثبات نمودیم

گزاره ۴.۱.۳. *دست‌یابی به یک اصل برهمنهی ($\mathcal{Z}$) برای دستگاه معادلات دیفرانسیل (۱.۳) هم‌ارز با دست‌یابی به یک الصاق با انحنای صفر در کلاف $Pr : \mathbb{R}^{(m+1)n} \longrightarrow \mathbb{R}^{nm}$ است به‌طوری‌که امتدادهای قطری $\tilde{Y}(t)$ از میدان‌های برداری t- وابسته‌ی*

$$Y(t), \qquad t \in \mathbb{R}$$

، که دستگاه (۱.۳) را تعریف می‌کنند افقی باشند.

توجه داشته باشید، می‌توان منیفلد دلخواهN را جایگزین $\mathbb{R}^n$ نمود. بنابراین توابع برهمنهی توسط نگاشت‌های $\Phi : N^{(m+1)} \longrightarrow N$ یا توسط برگ‌بندی‌های مناسب در $N^{(m+1)}$ داده شده‌اند، بدین معنا: الصاق‌های با انحنای صفر در کلاف

$$Pr : N^{m+1} \longrightarrow N^m.$$

ملاحظه ۵.۱.۳. *به‌بیان دیگر، الصاق تنها به‌طور عمومی روی یک زیر مجموعه باز فشرده تعریف شده است. اما این مشکلی عام با برهمنهی‌هایی است که به‌طور عمومی تعریف شده‌اند. در ادامه تمام عناصر وساخته‌های ما عمومی هستند.*

مثال ۶.۱.۳. برگ‌بندی تعمیم یافته $\mathcal{F}$ از بعد نقصان یک را که روی $\mathbb{R}^2 - (0,0)$ توسط میدان برداری

$$x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$$

تولید شده است در نظر می‌گیریم. این برگ‌بندی الصاقی با انحنای صفر برای کلاف

$$\begin{aligned} pr : \mathbb{R} \times (\mathbb{R} - \{0\}) &\longrightarrow \mathbb{R} - \{0\} \\ (x, y) \mapsto y, &\qquad y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

تعریف می‌کند. برگ‌های $\mathcal{F}$ به‌شکل $(e^t x, e^t y), t \in \mathbb{R}, y \neq 0$ هستند. به‌ویژه، تابع

$$\Psi(x, y) = \frac{x}{y}$$

روی برگ‌های برگ‌بندی ثابت هستند. امتداد قطری از میدان‌های برداری t-وابسته

$$a(t)x\frac{\partial}{\partial x}$$

مماس بر $\mathcal{F}$ به‌شکل زیر می‌باشند

$$a(t)(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}).$$

این مثال اصل برهمنهی را برای معادلات دیفرانسیل خطی $\dot{x} = a(t)x$ بدین صورت بیان می‌کند

اگر $x_{(1)}(t)$ یک جواب باشد آن‌گاه $(x_{(0)}(t), x_{(1)}(t))$ به یک برگ تعلق دارد، برای مثال در مورد $\frac{x}{y} = k$ اگر $x_{(1)}(t)$ جوابی از آن باشد آن‌گاه $x_{(0)}(t)$ جواب دیگری از آن است، اگر وتنها اگر $x_{(0)}(t) = kx_{(1)}(t)$ زیرا همان‌طور که در بالا اشاره شد نسبت مقادیر در برگ‌های آن ثابت می‌باشد. لذا اصل برهمنهی استاندارد برای این معادله به‌صورت زیر است

$$\Psi(x_{(۰)}(t);k) = kx_{(۱)}(t).$$

ملاحظه ۷.۱.۳. *از (۴.۱.۳) مشخص است زمانی‌که امتدادهای قطری $\tilde{Y}(t)$ یک برگ‌بندی از بعد کوچکتر از بعد $\mathcal{F}$ را تولید می‌کنند، می‌توانیم $\mathcal{F}$ را با توجه به شرایط مورد نیاز تعویض کنیم (تعویض التصاق ∇) ، این بدان معناست که دستگاه نظیر (۱.۳) اصول برهمنهی متفاوتی را می‌پذیرد.*

۲.۳ قضیه لی برای دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل عادی که اصل برهمنهی را می‌پذیرند

در این بخش اثباتی از قضیه کلاسیک لی روی دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل عادی که اصل برهمنهی را می‌پذیرند ارائه خواهیم داد. نخست از مشخصه موجود برای اصول برهمنهی که در (۴.۱.۳) ارائه شده استفاده می‌کنیم و آن‌گاه همان‌طور که نشان خواهیم داد می‌توان از آن در مورد دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی نیز استفاده کرد.

یادآوری می‌کنیم که برگ‌بندی $(\mathcal{F})$ روی یک زیر مجموعه باز فشرده از

$$\tilde{N} = N^{(m+۱)} = \overbrace{N \times \ldots \times N}^{\text{فاکتور-}(m+۱)}$$

اصل برهمنهی را برای دستگاه معادلات دیفرانسیل (۱.۳) تعریف می‌کند اگر و تنها اگر برای $\mathcal{F}$ با بعد نقصان n نگاشت زیر را داشته باشیم

$$pr : \tilde{N} \longrightarrow \overbrace{N \times \ldots \times N}^{\text{فاکتور-}(m)}$$

که روی m آرگومان آخر، برگ‌های $\mathcal{F}$ را بطور دیفئومورفسیم نظیر می‌کند و علاوه بر آن برگ‌بندی عام $\mathcal{F}_۰$ تولیدشده توسط خانواده $\{\tilde{Y}(t)|t \in \mathbb{R}\}$ از امتدادهای قطری $Y(t)$ مشمول در $\mathcal{F}$ است.

ما با بخش منظم $\mathcal{F}_۰$ کار می‌کنیم، این بخش توسط $\{\tilde{Y}(t)|t \in \mathbb{R}\}$ تولیدشده است بدین معنا که در هر مورد، این بخش توسط امتدادهای قطری برخی از میدان‌های برداری روی N تولید شده‌اند به‌طوری‌که

$$.[\tilde{Y}(t), \tilde{Y}(t')] = [\widetilde{Y(t), Y(t')}]$$

اگر $\tilde{X}_۱, \ldots, \tilde{X}_r$ امتدادهای قطری باشند که موضعا قسمت منظم $\mathcal{F}_۰$ را از بعد r تولید می‌کنند و بنابراین $pr_*(\tilde{X}_۱), \ldots, pr_*(\tilde{X}_r)$ در نقاط عمومی مستقل خطی فرض شده‌اند، بنابراین $r \leq mn$.

چون $\tilde{X}_۱, \ldots, \tilde{X}_r$ یک برگ‌بندی، r -بعدی تولید می‌کند بنابراین برای $r^۳$ تابع $c_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$ تعریف شده روی $\tilde{N}$ رابطه‌ی زیر را داریم

$$[\tilde{X}_\alpha, \tilde{X}_\beta] = \sum_{\gamma=1}^{r} c_{\alpha\beta}{}^{\gamma} \tilde{X}_\gamma,$$

متذکر می‌شویم $[\tilde{X}_\alpha, \tilde{X}_\beta]$ نیز امتدادهای قطری تحت کروشه‌هایی از امتدادهای قطری هستند و نگاشت‌های $pr_*(\tilde{X}_1), \ldots, pr_*(\tilde{X}_r)$ مستقل تابعی هستند.

لم ۱.۲.۳. *اگر $\tilde{X}_\alpha = \sum_{a=0}^{m} X_\alpha(a)$ برای $\alpha = 1, \ldots, r$ و $r \leq mn$ امتدادهای قطری از میدان‌های برداری X_α روی N به $\tilde{N}$ باشند، به‌طوری‌که در هر نقطه $p \in N^m$ میدان‌های برداریی که در شرط زیر صدق می‌کنند*

$$pr_*(\tilde{X}_\alpha)(p) = \sum_{a=1}^{m} X_{\alpha(a)}(p)$$

مستقل خطی هستند، آن‌گاه $\sum_{\alpha=1}^{r} b_\alpha \tilde{X}_\alpha$ (ترکیب خطی چنین میدان‌های برداریی) با $b_\alpha \in C^\infty(\tilde{N})$ دوباره یک امتداد قطری است اگر و تنها اگر ضرایب b_α ثابت باشند.

برهان. در مختصات موضعی داریم

$$X_\alpha = \sum_{i=1}^{n} A^i{}_\alpha(x) \frac{\partial}{\partial x^i},$$

که اشاره دارد به

$$\tilde{X}_\alpha = \sum_{i=1}^{n} \sum_{a=0}^{m} A^i{}_\alpha(x_{(a)}) \frac{\partial}{\partial x^i}_{(a)}$$

در این صورت

$$\sum_{\alpha=1}^{r} b_\alpha(x_{(0)}, \ldots, x_{(m)}) \tilde{X}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{r} \sum_{i=1}^{n} \sum_{a=0}^{m} b_\alpha(x_{(0)}, \ldots, x_{(m)}) A^i{}_\alpha(x_{(a)}) \frac{\partial}{\partial x^i{}_{(a)}}$$

یک امتداد قطری است اگر وتنها اگر توابع $B_a^i(x)$ برای $a = 0, \ldots, m$ و $i = 1, \ldots, n$ موجود باشند به‌طوری‌که برای هر جفت از اندیس‌های i و a روابط زیر برقرار باشد

$$\sum_{\alpha=1}^{r} b_\alpha(x_{(0)}, \ldots, x_{(m)}) A^i{}_\alpha(x_{(a)}) = B^i{}_a(x_{(a)}), \qquad a = 0, \ldots, m, i = 1, \ldots, n$$

به ویژه r تابع $b_\alpha(x_{(0)}, \ldots, x_{(m)})$ دستگاه معادلات خطی زیر را در u_α های ناشناخته برای $\alpha = 1, \ldots, r$ حل می‌کند

$$\sum_{\alpha=1}^{r} u_\alpha A^i{}_\alpha(x_{(a)}) = B^i{}_a(x_{(a)}), \qquad i = 1, \ldots, n, \qquad a = 1, \ldots, m \qquad (۹.۳)$$

اما رتبه ماتریس

$$({A^i}_\alpha(x_{(a)}))^{i,a}{}_\alpha$$

برابر با r است که در آن $r \leq mn$ زیرا نگاشت‌های تصویری $pr_*(\tilde{X}_1), \ldots, pr_*(\tilde{X}_r)$ مستقل خطی هستند. بنابراین جواب‌های $u_1, \ldots, u_r$ از (۹.۳) یکتا هستند و کاملا توسط ماتریس ${A^i}_\alpha(x_{(a)})^{i,a}{}_\alpha$ و بردار ${B^i}_a(x_{(a)})^{i,a}$ برای $a = 1, \ldots, m$ تعیین می‌شوند، بنابراین به $x_{(0)}$ بستگی ندارند. اما از آن جا که امتدادهای قطری با توجه به گروه تقارنی S_{m+1} که روی $\tilde{N} = N^{m+1}$ عمل می‌کنند بوضوح ناوردا هستند، لذا توابع $b_\alpha(x_{(0)}, \ldots, x_{(m)})$ به متغییرهای $x_{(1)}, \ldots, x_{(m)}$ نیز وابسته نیستند. □

ملاحظه ۲.۲.۳. *توجه داشته باشید که فرض روی نگاشت‌های تصویری لم قبل الزامی است، و در واقع بدون این فرض نتیجه‌ی این لم اساسی همان‌طور که مثال زیر نشان می‌دهد ممکن است برقرار نباشد. میدان‌های برداری زیر که امتدادهای میدان‌های برداری در $\mathbb{R}$ هستند را در نظر بگیرید*

$$\tilde{X}_1 = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}, \qquad \tilde{X}_2 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$$

حال برای توابع

$$b_1(x,y) = xy, \qquad b_2(x,y) = -(x+y)$$

داریم

$$b_1(x,y)\tilde{X}_1(x,y) + b_2(x,y)\tilde{X}_2(x,y) = -(x^2\frac{\partial}{\partial x} + y^2\frac{\partial}{\partial y})$$

نیز یک امتداد است. هر چند b_1, b_2 ثابت نمی باشند این همان کمبود در اثبات‌های قضیه‌ی لی است که در این‌جا مورد بررسی قرار گرفته است. معمولا ادعا می‌شود که ترکیب تابعی از امتدادهای قطری یک امتداد قطری است اگر ضرایب ثابت باشند بدون فرض این‌که نگاشت‌های تصویری نظیر مستقل تابعی هستند.

در (۲.۲.۳) نشان دادیم که لزومی ندارد ضرایب ثابت باشند. حال در قضیه زیر چگونگی اصل بر همنهی برای ترکیبات خطی بدون ضرایب ثابت را نشان می‌دهیم.

قضیه ۳.۲.۳. *دستگاه معادلات (۱.۳) روی منیفلد N یک اصل برهمنهی می‌پذیرد اگر و تنها اگر بتوانیم میدان برداری t-وابسته $Y(t,x)$ را موضعا به‌شکل زیر بیان کنیم*

$$Y(t,x) = \sum_{\alpha=1}^{r} b_\alpha(t)X_\alpha(x)$$

به‌طوری‌که میدان‌های برداری t-وابسته X_α برای $\alpha = 1, \ldots, r$ ، روی یک جبر لی حقیقی متناهی بعد بسته باشند، به‌این معنی‌که r^3 عدد حقیقی ${c_{\alpha\beta}}^\gamma$ وجود دارند به‌طوری‌که

$$[X_\alpha, X_\beta] = \sum_{\gamma=1}^{r} c_{\alpha\beta}{}^{\gamma} X_\gamma, \qquad \forall \alpha, \beta = 1, \dots, r$$

برهان. فرض کنیم دستگاه معادلات دیفرانسیل یک اصل برهمنهی می‌پذیرد و $\mathcal{F}$ نیز یک برگ‌بندی نظیر تابع برهمنهی باشد. می‌دانیم مولدهای $\{\tilde{X}_\alpha | \alpha = 1, \dots, r\}$ از قسمت منظم $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$ روی یک جبر لی بسته است

$$[\tilde{X}_\alpha, \tilde{X}_\beta] = \sum_{\gamma=1}^{r} c_{\alpha\beta}{}^{\gamma} \tilde{X}_\gamma \tag{۱۰.۳}$$

که در آن ضرایب $c_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$ ثابت هستند، همچنین

$$[X_\alpha, X_\beta] = \sum_{\gamma=1}^{r} c_{\alpha\beta}{}^{\gamma} X_\gamma.$$

از آن‌جاکه هر $\tilde{Y}(t)$ بر $\mathcal{F}_0$ مماس است، توابع $b_t^\alpha(x_{(0)}, \dots, x_{(m)})$ وجود دارند به‌طوری‌که

$$\tilde{Y}(t) = \sum_{\alpha=1}^{r} b_t^\alpha \tilde{X}_\alpha.$$

اما $\tilde{Y}(t)$ یک امتداد قطری است، با استفاده از لم اساسی نتیجه می‌گیریم $b_t^\alpha = b^\alpha(t)$ روی $x_{(0)}, \dots, x_{(m)}$ مستقل خطی هستند. بنابراین

$$\tilde{Y}(t) = \sum_{\alpha=1}^{r} b^\alpha(t) \tilde{X}_\alpha \tag{۱۱.۳}$$

و همچنین

$$Y(t) = \sum_{\alpha=1}^{r} b^\alpha(t) X_\alpha. \tag{۱۲.۳}$$

برای اثبات ویژگی عکس فرض کنید که میدان برداریt-وابسته $Y(t,x)$ را همان‌طور که در (۱۲.۳) نشان داده شده می‌توان نوشت و $\tilde{Y}(t)$ توسط (۱۱.۳) تعریف می‌شود. می‌توانیم فرض کنیم که X_α ها روی $\mathbb{R}$ مستقل خطی باشند. بنابراین یک جبر لی r-بعدی با ثابت‌های ساختاری $c_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$ تعریف می‌کنند. □

تعریف ۴.۲.۳. دستگاه

$$\frac{dx^i}{dt} = X^i(t,x), \qquad i = 1, \dots, n$$

یک دستگاه لی است اگر میدان برداری t-وابسته ی نظیر آن را به‌توان بشکل زیر نوشت

$$X(t,x) = \sum_{\alpha=1}^{r} b_\alpha(t) X_\alpha(x)$$

می‌توان نشان داد در چه صورتی دستگاه فوق، دستگاه لی نیست. دستگاه X روی $\mathbb{R}^n$ یک دستگاه لی است اگر و تنها اگر $Lie(\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}})$ متناهی بعد باشند. برای تعیین این که دستگاه مورد نظر یک دستگاه لی نیست کافی است نشان دهیم $Lie(\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}})$ متناهی بعد نیست. برای این امر کافی است نشان دهیم، زنجیری نامتناهی مانند $\{Z_j\}_{j\in N}$ از میدان‌های برداری مستقل خطی روی $\mathbb{R}$ ، بدست آمده از کروشه‌های لی متوالی از عناصر موجود در $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ وجود دارد. برای نشان دادن این امر معادله‌ی آبل [1] نوع اول زیر را در نظر می‌گیریم

$$\frac{dx}{dt} = x^{۲} + b(t)x^{۳} \qquad , b(t) \neq ۰$$

$b(t)$ تابعی غیر ثابت است. این معادلات منحنی‌های انتگرال میدان برداریt-وابسته زیر را توصیف می‌کنند

$$X_t = (x^{۲} + b(t)x^{۳})\frac{\partial}{\partial x}$$

زنجیر میدان‌های برداری زیر را در نظر بگیرید

$$Z_{۱} = x^{۲}\frac{\partial}{\partial x}, \qquad Z_{۲} = x^{۳}\frac{\partial}{\partial x}, \qquad , Z_j = [X_{۱}, x_{j-۱}], \qquad j = ۳, ۴, \ldots$$

از آن‌جاکه $Z_j = x^{j+۱}\dfrac{\partial}{\partial x}$، این نشان می‌دهد که $Lie(\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}})$ یک زنجیر نامتناهی از میدان‌های برداری مستقل خطی $\{Z_j\}_{j\in\mathbb{R}}$ را می‌پذیرد و بنابراین، معادله آبل از نوع دستگاه لی نیست.

چون تنها وابستگی تابعی غیر بدیهی از $X_{۱}, \ldots, X_r$ ممکن است، عدد $m \leq r$ موجود است به‌طوری‌که امتدادهای قطری آن‌ها به $N^m = \overbrace{N \times \ldots \times N}^{m-\text{بار}}$ در هر نقطه مستقل خطی هستند. توزیع تولیدشده توسط امتدادهای قطری $\tilde{X}_{۱}, \ldots, \tilde{X}_r$ به $\tilde{N} = N^{m+۱}$ بوضوح پیچشی است، بنابراین برگ‌بندی $(\mathcal{F}_{۰})$ r -بعدی از N را تعریف می‌کند. علاوه بر این برگ‌های این برگ‌بندی روی حاصلضرب m فاکتور ازN به‌طور دیفئومورفیسم تصویر می‌شوند و حداقل از بعد نقصان n هستند. واضح است که می‌توانیم این برگ‌بندی را به برگ‌بندی، $\mathcal{F}$ از بعد نقصان n توسعه دهیم. این برگ‌بندی براساس (۴.۱.۳) اصل برهمنهی را تعریف می‌کند. توسیع یک برگ‌بندی بدین معناست که برگ‌های آن زیر منیفلدی از توسیع برگ‌بندی هستند.

ملاحظه ۵.۲.۳. *لزومی ندارد که منیفلدهای N در دامنه‌ی نگاشت تصویری باهم یکسان باشند.می‌توان $\tilde{N}$ را ضمن حفظ همان نگاشت‌ها و خصوصیات برگ‌بندی به‌صورت زیر در نظر گرفت*

$$\tilde{N} = N_{۰} \times \ldots \times N_m$$

[1] Abel

این بدان معناست که می‌توان جوابی از یک دستگاه را روی N_{0} جدای از، جواب‌های بعضی از دستگاه‌ها روی منیفلدهای دیگری همچون

$$.N_a, \qquad a = 1, \ldots, m$$

نیز بدست آورد.

۳.۳ تعیین تعداد جواب‌ها از یک مجموعه اساسی

اثبات ما از قضیه لی شامل اطلاعاتی در مورد تعداد جواب‌های به کار رفته در اصل برهمنهی است. برای دستگاه لی تعریف شده توسط میدان برداری

$$Y(t,x) = \sum_{\alpha=1}^{r} b_\alpha(t) X_\alpha(x),$$

که در آن $b_\alpha(t)$ ها عمومی هستند، عدد m کمینه k است به‌طوری‌که امتدادهای قطری از میدان‌های برداری $X_1, \ldots, X_r$ به N^k در هر نقطه مستقل تابعی باشند، تنها اعداد حقیقی که به عنوان جوابی از دستگاه خطی

$$\sum_{\alpha=1}^{r} c_\alpha X_\alpha(x_{(a)}) = 0, \qquad a = 1, \ldots, k$$

در یک نقطه عمومی، $(x_{(1)}, \ldots, x_{(k)})$ برای $k = m$ می‌باشند جواب‌های بدیهی $c_\alpha = 0, \alpha = 1, \ldots, m$ هستند و برای $k < m$ جواب‌های غیربدیهی وجود دارد.

لم ۱.۳.۳. *برای هر خانواده از میدان‌های برداری $X_1, \ldots, X_r$ مستقل خطی روی $\mathbb{R}$ عدد طبیعی m وجود دارد که امتدادهای آن‌ها به $\mathbb{R}^{nm}$ در یک نقطه عمومی مستقل خطی است.*

برهان. امتداد قطری X_α به $\mathbb{R}^{nq}$ را با $\hat{X}^q_\alpha$ نشان می‌دهیم و $\sigma(q)$ را حداکثر تعداد میدان‌های برداری در بین $\hat{X}^q_\alpha$ ها می‌گیریم که در یک نقطه‌ی عمومی از $\mathbb{R}^{nq}$ مستقل خطی هستند.فرض می‌کنیم که هر خانواده‌ی $\hat{X}^q_1, \cdots, \hat{X}^q_r$ از امتدادهای قطری در یک نقطه‌ی عمومی از $\mathbb{R}^{nq}$ وابسته‌ی خطی هستند به‌عبارت دیگر $1 \leq \sigma(q) < r$ برای هر q، آن‌گاه تابع $\sigma(q)$ باید بیشین مقدار $p < r$ را برای مقدار صحیح $\bar{m}$ بپذیرد برای مثال $p = \sigma(\bar{m})$ می‌توانیم فرض کنیم که $\hat{X}^{\bar{m}}_1, \cdots, \hat{X}^{\bar{m}}_p$ ، در یک نقطه‌ی عمومی از $\mathbb{R}^{n\bar{m}}$ مستقل خطی هستند علاوه بر این $\hat{X}^{\bar{m}+1}_1, \cdots, \hat{X}^{\bar{m}+1}_p$ نیز در یک نقطه‌ی عمومی از $\mathbb{R}^{n(\bar{m}+1)}$ مستقل خطی هستند و چون‌که $\sigma(\bar{m})$ بیشین است و باید $\sigma(\bar{m}) = \sigma(\bar{m}+1)$ ، در نتیجه عدد یکتای p وجود دارد که توابع $\bar{f}_1, \cdots, \bar{f}_p \in C^\infty(\mathbb{R}^{n(\bar{m}+1)})$ در معادله‌ی زیر صدق می‌کنند

$$\bar{f}_1 \hat{X}^{\bar{m}+1}_1 + \cdots + \bar{f}_p \hat{X}^{\bar{m}+1}_p = \hat{X}^{\bar{m}+1}_{p+1}.$$

آن‌گاه سمت چپ معادله‌ی فوق یک امتدادقطری است و چون‌که $\hat{X}_1^{\bar{m}}, \cdots, \hat{X}_p^{\bar{m}}$ در یک نقطه‌ی عمومی مستقل خطی هستند، آن‌گاه $\bar{f}_1, \cdots, \bar{f}_p$ باید ثابت باشند بنابراین با اثر دادن نگاشت Pr_0 روی معادله در می‌یابیم که $X_1, \cdots, X_{p+1}$ روی $\mathbb{R}$ مستقل خطی هستند و این با فرض اولیه $\sigma(q) < r$ در تناقض است و باید عدد طبیعی m موجود باشد که امتدادهای قطری $X_1, \cdots, X_r$ به $\mathbb{R}^{nm}$ در یک نقطه‌ی عمومی مستقل خطی باشند.

□

به‌عنوان مثال برای معادله ریکاتی [۲]

$$\dot{x} = b_0(t) + b_1(t)x + b_2(t)x^2,$$

که در آن میدان‌های برداری مولد برگ‌بندی $\mathcal{F}_0$ امتدادهایی از میدان‌های برداری زیر می‌باشند

$$X_0 = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad X_1 = x\frac{\partial}{\partial x}, \qquad X_2 = x^2\frac{\partial}{\partial x} \tag{۱۳.۳}$$

نمایشی از عمل گروه $SL(2, \mathbb{R})$ هستند، دستگاه

$$c_0 + c_1x_1 + c_2x_1^2 = 0, \qquad c_0 + c_1x_2 + c_2x_2^2 = 0$$

را در نظر می‌گیریم که جوابی غیر بدیهی دارد اما دستگاه

$$c_0 + c_1x_1 + c_2x_1^2 = 0, \qquad c_0 + c_1x_2 + c_2x_2^2 = 0, \qquad c_0 + c_1x_3 + c_2x_3^2 = 0,$$

جواب‌های غیر بدیهی را نمی‌پذیرد چرا که ماتریس ضرایب درصورتی‌که سه متغییر x_1, x_2 و x_3 متفاوت باشند، معکوس‌ناپذیر است و این نشان می‌دهد که در اصل برهمنهی برای معادله ریکاتی $m = 3$ است.

۴.۳ غیر یکتایی اصل برهمنهی

در این بخش با در نظر گرفتن قضیه زیر عدم یکتایی تابع برهمنهی را نشان می‌دهیم.

قضیه ۱.۴.۳. *فرض کنیم $F : M \longrightarrow N$ یک نگاشت هموار با رتبه ثابت k باشد در این صورت هر مجموعه تراز F یک زیر منیفلد نشانده بسته از بعد نقصان k در M است*

در بعضی از موارد برگ‌بندی $(\mathcal{F}_0)$ که توسط امتدادهای میدان‌های برداریt-وابسته به‌وجود آمده‌اند از بعد نقصان n هستند و اصل برهمنهی یکتایی(کمینه) را بدست می‌دهند(معادله ریکاتی). در موارد با بعد نقصان بیشتر از n، همان‌طورکه می‌توان $\mathcal{F}_0$ را به چندین طریق به یک برگ‌بندی با بعد نقصان n گسترش داد، چندین انتخاب نیز برای اصل برهمنهی وجود دارد.

[۲] Riccati

مثال ۲.۴.۳. عمل گروه آبلی $\mathbb{R}$ روی منیفلد $N=\mathbb{R}^{۲}$ توسط تبدیلات افقی $X=\dfrac{\partial}{\partial x}$ را در نظر می‌گیریم. این عمل روی $\mathbb{R}^{۲}$ آزاد است و داریم $m=۱$ بنابراین، منیفلد $\tilde{N}=\mathbb{R}^{۲}\times\mathbb{R}^{۲}$ و برگ‌بندی $\mathcal{F}_{\circ}$ تولیدشده توسط میدان برداری $\dfrac{\partial}{\partial x_{(۱)}}+\dfrac{\partial}{\partial x_{(\circ)}}$ می‌باشد که مختصات‌ها در $\tilde{N}$ به‌صورت زیر

$$(x_{(\circ)},y_{(\circ)},x_{(۱)},y_{(۱)})$$

هستند. این برگ‌بندی را می‌توان به یک برگ‌بندی دو بعدی $\mathcal{F}$ از $\tilde{N}$ با ویژگی مورد نیاز، با توجه به رابطه

$$Pr(x_{(\circ)},y_{(\circ)},x_{(۱)},y_{(۱)})=(x_{(۱)},y_{(۱)})$$

از نگاشت تصویری به روش‌های مختلف بسط داد. برای مثال می‌توانیم $\mathcal{F}$ را به‌عنوان مجموعه‌های تراز نگاشت زیر در نظر بگیریم

$$F(x_{(\circ)},y_{(\circ)},x_{(۱)},y_{(۱)})=(x_{(\circ)}-x_{(۱)},f(y_{(\circ)},y_{(۱)}))$$

که در آن f تابعی دلخواه است به‌طوری‌که

$$\frac{\partial f}{\partial y_{(\circ)}}\neq\circ.$$

نشان می‌دهد که f به عنوان تابعی از $y_{(\circ)}$ از مرتبه حداقل یک است، آن‌گاه هر جواب

$$(x_{(۱)}(t),y_{(۱)}(t)=y_{(۱)}(\circ))$$

از دستگاه معادلات دیفرانسیل

$$\dot{x}=a(t),\qquad \dot{y}=\circ,$$

جواب جدید $(x_{(\circ)}(t),y_{(\circ)}(t)=y_{(\circ)}(\circ))$ متناظر با مجموعه تراز $(k_{۱},k_{۲})$ را به‌صورت زیر می‌دهد

$$(x_{(\circ)}(t)=x_{(۱)}(t)+k_{۱},y_{(\circ)}(t)=y_{(\circ)}(\circ)).$$

که در آن $y_{(\circ)}(\circ)$ نقطه‌ای یکتا در $\mathbb{R}$ است به‌طوری‌که در رابطه‌ی زیر صدق می‌کند

$$f(y_{(\circ)}(\circ),y_{(۱)}(\circ))=k_{۲}.$$

در مورد $f(y_{(\circ)},y_{(۱)})=y_{(\circ)}-y_{(۱)}$ با استفاده از اصل برهمنهی استاندارد نتیجه می‌گیریم

$$\Phi(x_{(۱)},y_{(۱)};k_{۱},k_{۲})=(x_{(۱)}+k_{۱},y_{(۱)}+k_{۲}).$$

مثال ۳.۴.۳. معادله دیفرانسیل مر تبه اول تفکیک پذیر زیر را در نظر می‌گیریم

$$\dot{x} = a(t)f(x)،$$

در معادله فوق a و f توابعی دلخواه و هموار هستند به‌طوری‌که علامت f ثابت فرض شده است (می‌توان f را در همسایگی نقطه‌ای در نظر گرفت که در آن همسایگی صفر نشود) اگر $N = \mathbb{R}$ بنابراین میدان برداری روی آن به‌شکل زیر است

$$X(x) = f(x)\frac{\partial}{\partial x}.$$

با توجه به این‌که f صفر نمی‌شود داریم $m = ۱$ و امتداد قطری زیر

$$\tilde{X}(x_{(۰)}, x_{(۱)}) = f(x_{(۰)})\frac{\partial}{\partial x_{(۰)}} + f(x_{(۱)})\frac{\partial}{\partial x_{(۱)}},$$

برگ‌بندی یک بعدی را در $\mathbb{R}^۲$ تولید می‌کند که برگ‌های آن مجموعه‌های تراز تابع $\Psi(x_{(۰)}, x_{(۱)})$ هستند به‌طوری‌که

$$f(x_{(۰)})\frac{\partial \Psi}{\partial x_{(۰)}} + f(x_{(۱)})\frac{\partial \Psi}{\partial x_{(۱)}} = ۰,$$

و به دستگاه مشخصه زیر می‌رسیم

$$\frac{dx_{(۰)}}{f(x_{(۰)})} = \frac{dx_{(۱)}}{f(x_{(۱)})}.$$

بنابراین اگر تابع $\phi(y)$ به‌صورت زیر تعریف شود

$$\phi(y) = \int_{۰}^{y} \frac{d\zeta}{f(\zeta)}،$$

در می‌یابیم که برگ‌ها توسط یک ثابت k به‌طوری تعیین می‌شوند که

$$\phi(x_{(۰)}) - \phi(x_{(۱)}) = k.$$

تابع ϕ تابعی یکنواخت است، زیرا $\phi' = f(x)$ و $f(x)$ علامت یکسان دارند. بنابراین تابعی معکوس موجود است که باعث می‌شود تا اصل برهمنهی را به‌شکل زیر داشته باشیم

$$x = \phi^{-۱}(k + \phi(x_{(۱)})).$$

برای مثال اگر $f(x) = ۱/x^۲$ داریم $\phi(x) = -۱/x = \phi^{-۱}(x)$ و اصل برهمنهی را به‌شکل زیر بدست می‌آوریم

$$x = \frac{x_{(۱)}}{۱ - kx_{(۱)}}.$$

۵.۳ دستگاه‌های لی در گروه‌های لی و فضاهای همگن

در این بخش نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان از فضاهای همگن جهت دست‌یابی به اصل برهمنهی استفاده کرد. حالت خاص $m = ۱$ ، یعنی زمانی‌که تنها یک جواب برای دست‌یابی به جواب‌های دیگر کافی است را در نظر می‌گیریم و نیز فرض می‌کنیم که $\mathcal{F} = \mathcal{F}_۰$ یعنی اصل برهمنهی به‌عنوان یک برگ‌بندی یکتاست، $r = n$ و میدان‌های برداری $X_۱, \dots, X_n$ به‌طور عمومی فضای TN را تولید می‌کنند. برای سادگی فرض کنید که این میدان‌های برداری کامل هستند، منظور از یک میدان برداری کامل، میدان برداری است که دامنه شار آن کل فضای $\mathbb{R}$ می‌باشد و TN را به‌طور سراسری تولید می‌کنند چون این میدان‌های برداری روی یک جبر لی n-بعدی بسته هستند، عملی متعدی از گروه لی G متناظر با جبر لی g روی N، وجود دارد به‌طوری‌که $N = G/H$ که در آن H زیر گروه گسسته G است و برگ‌بندی $\mathcal{F} = \mathcal{F}_۰$ توسط میدان‌های برداری پایه‌ای از عمل گروه G تولید شده است.

قضیه ۱.۵.۳. *فرض کنیم g یک جبر لی با بعد متناهی باشد در این‌صورت گروه لی همبندی وجود دارد به‌طوری‌که جبر لی آن یکریخت با g است، این گروه به‌صورت G/H است که G یک گروه لی همبند ساده با جبر لی g و H نیز یک زیر گروه مرکز ساز گسسته آن است.*

میدان‌های برداری روی g تشکیل یک توزیع انتگرال‌پذیر می‌دهند ونیز می‌دانیم هر توزیع انتگرال‌پذیر پیچشی است. بنابر آنچه در [۱۹] بیان شده داریم

$$\forall g \in G \Longrightarrow g = g_۱ \cdot \dots \cdot g_k \ni \forall i = ۱, \dots, k \qquad g_i = \exp(\epsilon v_i)$$

بنابراین برای عناصر منیفلد M داریم

$$\forall y \in M \exists g \in G \ni y = gx = g_۱ \cdot \dots \cdot g_k \cdot x = \exp(\epsilon v_۱) \cdot \dots \cdot \exp(\epsilon v_k) x$$

و این نشان‌دهنده‌ی متعدی بودن عمل گروه G است.

حال اگر G روی G/H به عنوان منیفلد عمل کند آن‌گاه نگاشت عمل را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\Psi : G \times G/H \longrightarrow G/H \equiv \Psi_{g \cdot H} : G \longrightarrow G/H, \qquad \ni g \cdot H \in G/H$$

و اگر H بدیهی باشد یعنی $H = e$ یا $H = G$ آن‌گاه $G/H = G$ و بنابراین قرار می‌دهیم

$$g \cdot H = g' \in G/H = G$$

اکنون می‌توان نگاشت Ψ را به‌شکل زیر نوشت

$$\Psi_{g'} : G \longrightarrow G$$
$$h \mapsto g'h$$

که در واقع این یک انتقال از چپ است بنابراین

$$\Psi_{g'} \equiv L_{g'}$$

می‌توان نشان داد نگاشت Ψ با یک انتقال از چپ هم‌ارز است

$$\forall y \in M = G/H = G \qquad L_g(y) = \Psi_g(y) = gy$$

در این‌صورت عنصر g' از گروه G موجود است به‌طوری‌که $g' = gy$ و چون g' دلخواه است بنابراین عمل گروه G روی خودش متعدی است.از طرف دیگر داریم

$$(L_g)_*(v_{g'}) = v_{gg'}$$

در این‌صورت جهت دست‌یابی به تابع برهمنهی متناظر با $\mathcal{F} = \mathcal{F}_۰$ می‌توان ضرب گروه را به‌صورت زیر در نظر گرفت

$$\Phi : G \times G \longrightarrow G$$
$$(g_{(۱)}, k) \longrightarrow g_{(۱)}k$$

و به رابطه

$$\Psi(g_{(۰)}, g_{(۱)}) = g_{(۱)}^{-۱} g_{(۰)}$$

برای تابع برهمنهی رسید و بنابر

$$\Psi(g'g_{(۰)}, g'g_{(۱)}) = g_{(۱)}^{-۱} g'^{-۱} \cdot g'g_{(۰)} = g_{(۱)}^{-۱} g_{(۰)} = \Psi(g_{(۰)}, g_{(۱)})$$

Ψ ناوردای چپ خواهد بود. تا کنون نشان دادیم، تابع برهمنهی نظیر با برگ‌بندی $(\mathcal{F})$ که با توجه به جبر لی $\mathfrak{g}$ بدست آمده باید یک تابع ناوردا باشد. حال برعکس دستگاه لی تعریف شده توسط میدان برداری t-وابسته زیر

$$Y(t, g) = \sum_{\alpha=۱}^{r} b_\alpha(t) X_\alpha^R(g),$$

که در آن X_α^R پایه‌ای برای میدان‌های برداری ناوردای راست هستند، را در نظر می‌گیریم. در این‌صورت شرط تصویری بودن ایجاد شده و اصل برهمنهی یکتا نیز تعریف شده است. متذکر می‌شویم اگر میدان‌های برداری X_α^R یک زیر جبر لی با بعد کوچکتر تولید کنند آن‌گاه اصل برهمنهی یکتا نیست.

حال اگر $\{a_1, \ldots, a_n\}$ پایه‌ای برای T_eG (فضای مماسی در نقطه همانی) باشد آن‌گاه این فضای خطی را می‌توان به‌عنوان جبر لی g از گروه لی G در نظر گرفت که مجموعه تمام میدان‌های برداری ناوردای چپ روی G است و به‌شکل زیر تعریف می‌شوند

$$X_a^l(g) = L_{g*e}a$$

به‌طور مشابه X_a^R نمایشی از میدان‌های برداری ناوردای راست در G هستند که به‌صورت زیر تعریف می‌شوند

$$X_a^R(g) = R_{g*e}a$$

بنابراین برای منحنی

$$a(t) = \sum_{\alpha=1}^{n} b_\alpha(t)a_\alpha,$$

درT_eG میدان برداری t-وابسته‌ی مولد آن روی G را به‌شکل زیر داریم

$$X^R(t,g) = X^R_{a(t)}(g) = \sum_{\alpha=1}^{n} b_\alpha(t)X_\alpha^R(g) \tag{۱۴.۳}$$

لذا دستگاه معادلات دیفرانسیلی که منحنی‌های انتگرال چنین میدان‌های برداریی را تولید می‌کنند به‌شکل زیر هستند

$$\dot{g}(t) = \sum_{\alpha=1}^{n} b_\alpha(t)X_\alpha^R(g(t)), \tag{۱۵.۳}$$

حال با اثر دادن $R_{g^{-1}(x)*g(x)}$ در دو سمت معادله‌ی (۱۵.۳) به معادله‌ی زیر می‌رسیم

$$R_{g^{-1}(t)*g(t)}\dot{g(t)} = \sum_{\alpha=1}^{n} b_\alpha(t)a_\alpha = a(t) \tag{۱۶.۳}$$

حالت ساده تر زمانی است که $a(t)$ مقادیرش را روی زیر جبری از جبر لی T_eG اختیار کند تا کل آن. حال فرض کنید که H زیر گروه بسته دلخواه G باشد و فضای همگن G/H را در نظر می‌گیریم، بنابراین می‌توان G را به عنوان کلاف برداری

$$\tau : G \longrightarrow G/H$$

در نظر گرفت. علاوه بر این می‌دانیم که میدان‌های برداری ناوردای راست X_α^R ، τ -تصویری هستند و نیز میدان‌های بردای τ -مرتبط در N میدان‌های برداری پایه‌ای $-X_\alpha = -X_{a\alpha}$ نظیر عمل چپ طبیعی G روی N می‌باشند به‌طوری‌که $\tau_{*g}X_\alpha^R(g) = -X_\alpha(gH)$.

در این‌صورت می‌توانیم دستگاه لی روی گروه G/H، که در (۱۴.۳) داده شده را با دستگاه لی روی

$$\bar{X}(t,x) = -\sum_{\alpha=1}^{n} X_\alpha(x) \qquad (۱۷.۳)$$

روی N نظیر کرد. بنابراین منحنی انتگرال (۱۷.۳) که از نقطه‌ی x_0 شروع می‌شود به‌شکل $x(t) = \Phi(g(t), x_0)$ است به‌طوری‌که در آن $g(t)$ جواب (۱۶.۳) با فرض $g(0) = e$ می‌باشد.

توجه داریم که حتی اگر میدان برداری t-وابسته روی N توسط نگاشت سابمرژن $\pi : N \longrightarrow N_0$ بروی منیفلد N_0 قابل تصویر شدن باشد، آنگاه اصل برهمنهی در حالت کلی این قابلیت را ندارد و عدد m از جواب‌ها، که در اصل برهمنهی مورد استفاده قرار می‌گیرد، تغییر می‌کند. برای مثال در مورد معادله ریکاتی مجموعه پایه ای از سه جواب ساخته شده است، در حالی‌که برای بررسی اثر $SL(2,\mathbb{R})$ روی $\mathbb{R}^2$ تنها دو جواب مورد نیاز است و نیز برای بررسی اثر $SL(2,\mathbb{R})$ روی خودش یک جواب کافی است.

دستگاه لی $\dot{g}g^{-1} = a$ را در گروه لی G در نظر می گیریم، اخیرا در [۴] نشان داده شده است که آگاهی از یک جواب ویژه از این دستگاه در فضای همگن، مساله را به مساله‌ای روی گروه ایزوتوپی از یک نقطه در همین فضا کاهش می‌دهد. بنابراین اگر $x(t)$ جوابی از دستگاه لی نظیر در فضایی همگن با شروع از x_0 باشد، آن‌گاه می‌توان منحنی $\bar{g}(t)$ را به شکلی انتخاب کرد که $\Psi(\bar{g}(t), x_0) = x(t)$ و بنابراین باید منحنی $h(t) \in G_{x_0}$ به شکلی موجود باشد که $g(t) = \bar{g}(t)h(t)$. چنین منحنی $h(t)$ جوابی از دستگاه لی $\dot{h}h^{-1} = Ad\bar{g}^{-1}(a + \dot{\bar{g}}\bar{g}^{-1})$ است. بنابراین با یافتن جوابی از چنین معادله‌ای در زیر گروه G_{x_0} می‌توانیم جواب $g(t)$ از دستگاه لی در G به‌صورت $g(t) = \bar{g}(t)h(t)$ بدست آورد. استفاده از جوابی جدید با شروع از نقطه‌ای جدید، مساله را کاهش می‌دهد و بنابراین با تعدادی از جواب‌های موجود می‌توانیم جواب عمومی را بدست آوریم.

مورد مشابه زمانی است که نگاشت اکوواریان $F : N_1 \longrightarrow N_2$ بین دو فضای همگن از یک گروه لی موجود است. در این مورد میدان‌های پایه‌ای نظیر F-مرتبط هستند و لذا تصویر یک منحنی انتگرال از یک دستگاه لی در N_1 تحت F منحنی انتگرالی از دستگاه نظیر در N_2 است.

مثالی ساده عبارت است از تابع

$$F : \mathbb{R}^2 - (0,0) \longrightarrow \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \infty$$

با ضابطه زیر داده شده است

$$F(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1}{x_2}, & x_2 \neq 0 \\ \infty, & x_2 = 0 \end{cases}$$

که با توجه به عمل خطی گروه لی $SL(2,\mathbb{R})$ روی $\mathbb{R}^2 - (0,0)$ نگاشتی اکوواریان است، و عمل آن روی خط حقیقی $\bar{\mathbb{R}}$ به‌صورت زیر است

$$\Psi(A,x)=\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta},\qquad x\neq-\frac{\delta}{\gamma}$$
$$\Psi(A,\infty)=\frac{\alpha}{\gamma},\qquad \Psi(A,-\delta/\gamma)=\infty$$

اگر A توسط ماتریس زیر داده شده باشد

$$A=\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix}\in SL(2,\mathbb{R})$$

.

منحنی انتگرال دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر

$$\begin{cases} \dot{x_1}=\frac{1}{2}b_2x_1+b_1x_2,\\ \\ \dot{x_2}=-b_3x_1-\frac{1}{2}b_2x_2,\end{cases}$$

به‌صورت $x(t)=x_1(t)/x_2(t)$ است که منحنی انتگرالی از معادله ریکاتی

$$\dot{x}=b_1+b_2x+b_3x^2.$$

می‌باشد، این دقیقا همان روشی است که ریکاتی توسط آن به معادله آخر رسید.

۶.۳ اصول برهمنهی جزئی

در هر دو نظریه ی معادلات دیفرانسیل عادی و جزئی استفاده از جواب‌های قدیمی جهت دست‌یابی به جواب‌های جدید روشی معمول است که کاربردهای فراوانی در فیزیک دارد. برای بررسی این امر روش هندسی اصل برهمنهی غیر خطی را که تا کنون معرفی کرده‌ایم و نیز آنچه را که در [۱۳] به آن اشاره شده همانند توابع همبند استفاده شده در [۱۲] را توسعه می‌دهیم.

اصل برهمنهی جزئی از رتبه S بهمراه m جواب برای دستگاه معادلات دیفرانسیل عادی (۱.۳) توسط تابع

$$\Psi:\mathbb{R}^{nm+s}\longrightarrow\mathbb{R}^n$$

$$x=\Psi(x_{(1)},\dots,x_{(m)};k_1,\dots,k_s),\qquad (۱۸.۳)$$

بدست می‌آید به‌طوری‌که اگر $\{x_{(a)}(t)|a=1,\dots,m\}$ مجموعه‌ای از m جواب ویژه برای دستگاه معادلات دیفرانسیل (۱.۳) باشد، حداقل برای t به اندازه کافی کوچک

$$x(t)=\Psi(x_{(1)}(t),\dots,x_{(m)}(t);k_1,\dots,k_s),\qquad (۱۹.۳)$$

نیز جوابی از دستگاه (۱.۳) می‌باشد که $(k_۱, \ldots, k_s)$ مجموعه‌ای از ثابت‌های دلخواه هستند، که برای $s = n$ به همان اصل برهمنهی قبلی خواهیم رسید.

این تابع برهمنهی غیر یکتاست و به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\Psi : \mathbb{R}^{n(m+۱)} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\Psi^i(x_{(\circ)}, x_{(۱)}, \ldots, x_{(m)}) = \begin{cases} k_i & , i \leq s \\ \circ & , i > s \end{cases}$$

در واقع با استفاده از قضیه رتبه روی منیفلدها می‌توان به تابع فوق رسید و نیز توجه داریم که $(n - s)$ معادله آخر محدودیت‌هایی هستند که زیر منیفلد M با بعد نقصان $(n - s)$ را از $\mathbb{R}^{n(m+۱)}$ تعریف می‌کنند، بدین معنا که زیر منیفلد M از بعد $nm + s$ است و معادلات دیگر یک برگ‌بندی از بعد نقصان s در M را تولید می‌کند. حال می‌توان همان روند بخش ۳۰۱ را ادامه داد و به توزیعی روی $\mathbb{R}^{n(m+۱)}$ رسید که توسط میدان‌های برداری t-وابسته Y_a تعریف شده در (۸.۳) تولید می‌شوند که توزیعی در M را به ما می‌دهد چراکه بر M مماس هستند و برگ‌های اصلی آن nm- بعدی می‌باشند و هر برگ با انتخاب مقادیر $k_۱, \ldots, k_s$ ثابت می‌شوند.

اکنون با محدود کردن Pr روی زیر منیفلد M، $Pr|_M$ زیر کلافی از کلاف برداری

$$Pr : \mathbb{R}^{n(m+۱)} \longrightarrow \mathbb{R}^{nm}$$

را تعریف، و نیز دیفئومورفیسم‌های بین برگ‌های مختلف آن را تولید می‌کند که امکان تشخیص برگ‌های، برگ‌بندی تعریف شده توسط امتداد دستگاه ناهمگن داده شده را در بین آن‌ها به ما می‌دهد. برعکس اگر M زیر منیفلدی از $\mathbb{R}^{n(m+۱)}$ بابعد نقصان $(n - s)$ باشد به‌طوری‌که زیر کلافی از

$$Pr : \mathbb{R}^{n(m+۱)} \longrightarrow \mathbb{R}^{nm}$$

را تعریف کند، توزیع تعریف شده در $\mathbb{R}^{n(m+۱)}$ توسط امتداد میدان‌های برداری نیز یک توزیع در M می‌باشد بدین معنا که چنین بردارهایی بر M مماس هستند و $Pr|_M$ دیفئومورفیسم‌های بین برگ‌های مختلف را ایجاد می‌کند به‌طوری‌که بتوانیم بین آن‌ها برگ‌های برگ‌بندی تعریف شده توسط امتدادهایی از دستگاه ناهمگن داده شده را تشخیص دهیم. چنین دیفئومورفیسم‌هایی می‌توانند برای تعریف اصل برهمنهی از m جواب برای s ثابت مورد استفاده قرار گیرند.

به عنوان مثال اگر دستگاه خطی زیر را در نظر بگیریم

$$\frac{dx^۱}{dt} = a_{۱۱}(t)x^۱ + a_{۱۲}(t)x^۲$$

$$\frac{dx^{۲}}{dt} = a_{۲۱}(t)x^{۱} + a_{۲۲}(t)x^{۲}$$

به‌طوری‌که تابع برهمنهی

$$F(x_{(۱)}; k) = kx_{(۱)}$$

را که از رتبه یک می‌باشد و شامل یک جواب ویژه نیز هست می‌پذیرد، که زیر کلاف سه بعدی M از $\mathbb{R}^{۲} \longrightarrow \mathbb{R}^{۴} : Pr$ با محدود کردن به زیر مجموعه داده شده توسط رابطه‌ی زیر را تعریف می‌کند

$$x^{۱}x^{۲}_{(۱)} - x^{۲}x^{۱}_{(۱)} = ۰،$$

که همراه با یک برگ‌بندی است: هر برگ توسط عدد حقیقی k مشخص می‌شود و روی مجموعه‌ای از نقاط $(x^{۱}, x^{۲}, x^{۱}_{(۱)}, x^{۲}_{(۱)})$ تعریف می‌شوند به‌طوری‌که $x^{۱}x^{۲}_{(۱)} - x^{۲}x^{۱}_{(۱)} = ۰$. هر چند که ما تابع برهمنهی از رتبه یک اما شامل دو ثابت را داریم

$$F(x_{(۱)}, x_{(۲)}; k) = x_{(۱)} + kx_{(۲)}،$$

اکنون زیر کلاف به شکل زیر تعریف می‌شود

$$x^{۱}_{(۲)}(x^{۲} - x^{۲}_{(۱)}) - x^{۲}_{(۲)}(x^{۱} - x^{۱}_{(۱)}) = ۰.$$

۷.۳ اصول برهمنهی برای دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل جزئی

دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبه اول زیر را در نظر بگیرید

$$\frac{\partial x^i}{\partial t^a} = Y^i_a(t, x), \qquad x \in \mathbb{R}^n, t = (t^{۱}, \ldots, t^s) \in \mathbb{R}^s \tag{۲۰.۳}$$

که جواب‌های آن نگاشت‌های $x(t) : \mathbb{R}^s \longrightarrow \mathbb{R}^n$ هستند. شکل خاصی از معادله‌ی (۲۰.۳) زمانی‌که $s = ۱$ است همان دستگاه (۱.۳) می‌باشد. تفاوت عمده دستگاه فوق با دستگاه (۱.۳) در این است که به‌طور عمومی جوابی با مقدار اولیه $x(۰) \in \mathbb{R}^n$ وجود ندارد. برای درک بهتر مساله دستگاه (۲۰.۳) را در یک چارچوب هندسی بررسی می‌کنیم. برای منیفلد n-بعدی N کلاف تاری زیر را در نظر می‌گیریم

$$P^s_N = \mathbb{R}^s \times N \longrightarrow \mathbb{R}^s$$

التصاق $\bar{Y}$ در این کلاف یک توزیع در فضای TP^s_N می‌باشد بدین معنا که توزیع تراگرد s-بعدی از تارهاست، به‌طوری‌که

$$\bar{Y}_a = \frac{\partial}{\partial t^a} + Y_a(t,x)$$

که در آن

$$Y_a(t,x) = Y_a^i(t,x)\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

بنابراین جواب‌های (۲۰.۳) توسط زیر منیفلدهای انتگرال توزیع $\bar{Y}$ مشخص می‌شوند

$$(t, Y(t)), \qquad t \in \mathbb{R}^s.$$

مشخص شده است که جوابی(یکتا) از (۲۰.۳) با هر مقدار اولیه‌ای وجود دارد اگر و تنها اگر توزیع $\bar{Y}$ انتگرال پذیر باشد، بدین معنا که التصاق انحنای بدیهی داشته باشد

$$[\bar{Y}_a, \bar{Y}_b] = \sum_{c=1}^{r} f_{ab}^c \bar{Y}_c$$

برای بعضی از توابع f_{ab}^c در P_N^s. اما عملگرهای $[\bar{Y}_a, \bar{Y}_b]$ بوضوح عمودی هستند درحالی‌که $\bar{Y}_c$ میدان‌های برداری افقی مستقل خطی هستند، بنابراین $f_{ab}^c = 0$ به شرط انتگرال پذیری در حالت دستگاه معادلات $[\bar{Y}_a, \bar{Y}_b] = 0$ اشاره دارد، بدین معنا که در مختصات موضعی عبارت زیر را داریم

$$\frac{\partial Y_b^i}{\partial t^a}(t,x) - \frac{\partial Y_a^i}{\partial t^b}(t,x) + \sum_{j=1}^{n}\left(Y_a^j(t,x)\frac{\partial Y_b^i}{\partial x^j}(t,x) - Y_b^j(t,x)\frac{\partial Y_a^i}{\partial x^j}(t,x)\right) = 0 \qquad (۲۱.۳)$$

حال یک دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبه اول به شکل (۲۰.۳) را در نظر می‌گیریم که در شرط انتگرال‌پذیری (۲۱.۳) صدق می‌کند، بنابراین مطمئن هستیم که برای یک مقدار اولیه‌ی داده شده جوابی یکتا از (۲۰.۳) وجود دارد. حال درباره‌ی اصل برهمنهی در مورد چنین جواب‌هایی فکر می‌کنیم. هر چند کاملا واضح است که مفهوم اصل برهمنهی توسعه داده شده می‌تواند بدون هیچ تغییری در مورد معادلات دیفرانسیل جزئی نیز مورد استفاده قرار گیرند.

در فرمول

$$x = \Psi(x_{(1)}, \ldots, x_{(m)}; k_1, \ldots, k_n)$$

از بخش ۱.۳ باید در نظر داشت که t پارامتری حقیقی نیست اما $t \in \mathbb{R}^s$. تنها تفاوت زمانی‌که به برگ‌بندی‌های القا شده توسط تابع برهمنهی Ψ می‌رسیم آن است که با دیفرانسیل‌گیری از (۴.۳) نسبت به پارامتر t^a به‌شکل تازه‌ای از گزاره‌ی (۴.۱.۳) دست می‌یابیم

گزاره ۱.۷.۳. *اصل برهمنهی برای دستگاه (۲۰.۳) که در شرط انتگرال‌پذیری (۲۱.۳) صدق می‌کند هم‌ارز است با التصاقی در کلاف $Pr : N^{(m+1)} \longrightarrow N^m$ با انحنای صفر برای میدان‌های برداری*

$$Y_a(t), \qquad t \in \mathbb{R}^s, a = ۱, \dots, s$$

که امتدادهای قطری آن‌ها، $\tilde{Y}_a(t)$ افقی هستند.

اثبات قضیه لی همچنان بدون تغییر باقی مانده است، بنابراین مشابه قضیه لی برای دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل جزئی داریم

قضیه ۲.۷.۳. *دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی (۲۰.۳) تعریف شده روی منیفلد N که در شرط انتگرال‌پذیری (۲۱.۳) صدق می‌کند اصل برهمنهی را می‌پذیرد اگر و تنها اگر میدان‌های برداری $Y_a(t,x)$ روی N به پارامتر $t \in \mathbb{R}^s$ وابسته باشند و نیز بطور موضعی به‌شکل زیر نوشته شوند*

$$\sum_{\alpha=۱}^{r} u_a^\alpha(t) X_\alpha(x), \qquad a = ۱, \dots, s, \tag{۲۲.۳}$$

درحالی‌که میدان‌های برداری X_α روی یک جبر لی حقیقی متناهی بعد بسته هستند، یعنی این‌که $r^۳$ عدد حقیقی ثابت ${c_{\alpha\beta}}^\gamma$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$[X_\alpha, X_\beta] = \sum_{\gamma=۱}^{r} {c_{\alpha\beta}}^\gamma X_\gamma.$$

شرط انتگرال‌پذیری برای $Y_a(t,x)$ در (۲۲.۳) به شکل زیر قابل بیان است

$$\sum_{\alpha,\beta,\gamma=۱}^{r} \left[(u_b^\gamma)'(t) - (u_a^\gamma)'(t) + u_a^\alpha(t) u_b^\beta(t) c_{\alpha\beta}^\gamma \right] X_\gamma = ۰.$$

مثال ۳.۷.۳. دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی روی $\mathbb{R}^۲$ متناظر با عمل گروه $SL(۲,n)$ روی $\mathbb{R}$ که توسط میدان‌های برداری (۱۳.۳) نمایش داده شده است را در نظر بگیرید

$$u_x = a(x,y)u^۲ + b(x,y)u + c(x,y),$$
$$u_y = d(x,y)u^۲ + e(x,y)u + cf(x,y).$$

این معادله را می‌توان در فرم یک معادله دیفرانسیل جامع به‌شکل زیر نوشت

$$(a(x,y)u^۲ + b(x,y)u + c(x,y))dx + (d(x,y)u^۲ + e(x,y)u + f(x,y))dy = du.$$

شرط انتگرال‌پذیری تنها بیان می‌کند که ۱-فرم

$$\omega = (a(x,y)u^۲ + b(x,y)u + c(x,y))dx + (d(x,y)u^۲ + e(x,y)u + f(x,y))dy$$

برای هر تابع دلخواه $u = u(x,y)$ بسته است. اگر چنین باشد، آن‌گاه جوابی یکتا با شرط اولیه $u = u(x,y)$ وجود دارد و اصل برهمنهی جواب عمومی را به عنوان تابعی از سه جواب مستقل (دقیقا همان‌طورکه در معادله ریکاتی برقرار بود) به ما می‌دهد

$$\frac{(u - u_{(۱)})(u_{(۲)} - u_{(۳)})}{(u - u_{(۲)})(u_{(۱)} - u_{(۳)})} = k,$$

یا

$$u = \frac{(u_{(۱)} - u_{(۳)})u_{(۲)}k + u_{(۱)}(u_{(۳)} - u_{(۲)})}{(u_{(۱)} - u_{(۳)})k + (u_{(۳)} - u_{(۲)})}.$$

مراجع

[1] Carinena J.F., Fernandez D.J. and Ramos A.,*Group Theoretical Approach to The Intertwined Hamiltonians*, Ann. Phys. (N.Y.) 292 (2001) 42-66.

[2] Carinena J.F., Grabowski J. and marmo G., *Lie-Scheffers systems: A Geometric Approach*,Bibliopolis, napoli, 2000.

[3] Carinena J.F., Grabowski J. and Marmo G., *Some Applications in Physics of Differential Equation Systems Admitting a Superposition Rule*, Rep. Math. Phys. 48 (2001) 47-58.

[4] Carinena J.F.,Grabowski J. and Ramos A.,*Reduction of Time-dependent Systems Admitting a Superposition Principle*, Acta Appl. Math. 66(2001) 67-87.

[5] Carinena J.F., Marmo G. and Nasarre J.,*The Nonlinear Superposition Principle and The Wei-Norman Method*, Int. J. Mod. Phys A 13 (1998) 3601-27.

[6] Carinena J.F. and Ramos A.,*Integrability of The Riccati Equation From A Group Theoretical Viewpoint*, Int. J. Mod. Phys. A 14 (1999) 1935-51.

[7] Carinena J.F. and Ramos A.,*Riccati Equation, The Factorization Method and Shape Invariance*, Rev. Math. Phys. 12 (1999) 1279-304.

[8] Carinena J.F. and Ramos A., A*New Geometric Approach to Lie Systems and Physical Applications*, Acta Appl. Math. 70 (2002) 43-69.

[9] Carinena J.F. and Ramos A., *Lie Systems and Connections in Fiber Bundles: Applications in Quantum machanics*, 9 th Int. Conf. Diff. Geom. and Appl., p.437-52 (2004), J. Bures et al. eds, Matfyzpress, Praga 2005

[10] Carinena J.F. and lucas J.de,*Lie system: Theory, Generalisations, and Applications*

[11] Ibragimov N.Kh., *Group Analysis of Ordinary Differential Equations and The Invariance Principle in Mathematical Physics*, Russ. Math. Surveys 47 (1992) 89-156.

[12] Ibragimov NKh.,*Elementary Lie Group Analysis and Differential Equations*, J. Wiley, Chichester, 1999.

[13] Inselberg A.,*Noncommutative Superpositions For Nonlinear Opeators*, J.Math. Anal. Appl.29(1970) 294-98.

[14] Jones S.E. and Ames W.F., *Nonlinear Superposition*, J. Math. Anal. Appl. 17 (1967) 484-87.

[15] Levin S.A., *Principles of Nonlinear Superposition*, J. Math. Anal. Appl. 30 (1970) 197-205.

[16] Lie S., *Vorlesungen Uber Continuierliche Gruppen mit Geometrischen und Anderen Anwendungen*, Edited and revised by G. Scheffers, Teubner, Leipzig,1893.

[17] Lie, John M., *Introduction to Smooth Manifolds*, Springer, Washington, 2002.

[18] Odzijewicz A. and Grundland A.M.,*Superposition Principle For The Lie-type First Order PDES*, Rep. Math.Phys. 45 (2000) 293-305.

[19] Olver, P.J., *Applications of Lie Groups to Differential Equations*, Graduate Texts in mathematics, vol. 107, Springer-Verlag, new York, 1986.

[20] Stormark O., *Lie's Structural Approach to PDE Systems, Encyclopedia of Mathemathics and Its Applications* 80, Cambridge U.P., 2000.

[21] Wei J. and Norman E., *Lie Algebraic Solution of Linear Differential Equations*, J. math. Phys. 4 (1963) 575-81.

[22] Wei J. and Norman E., *on Global Representations of The Solutions of Linear Differential Equations As A Product of Exponentials*, Proc. Amer. Math. Soc. 15, 327-34 (1964).

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

اطلس	atlas
امتداد قطری	diagonal prolongation
اصل برهمنهی	superposition principle
انحنای صفر	trivial curvature
التصاق	connection
بعد نقصان	codimension
برگ‌بندی	foliation
برگ	leaf
بیشین	maximal
پیچشی	involutive
پیش‌برنده	push forward
پس‌کشنده	pull back
تانسور کوواریان	covariant tensor
توزیع	distribution
تراگرد	transversal
چارت مختصاتی	coordinate chart
دو خطی	bilinear
رتبه	rank
زیر منیفلد	submanifold
ساختار هموار	smooth structure
شار	flow
ضرب داخلی	inner product

عملگر خطی .... linear operator
عمل متعدی .... transitive action
کروشه لی .... lie bracket
کلاف‌مماسی .... tangent bundle
کلاف‌های برداری .... vector bundles
گروه متعامد .... orthogonal group
منیفلد محیطی .... ambient manifold
مستقل تابعی .... functional independent
موثر .... effective
منحنی ژئودزیک .... geodesic curve
متر تاری .... fiber metric
منحنی انتگرال .... integral curve
مولد بی‌نهایت کوچک .... infenitesimal generator
مشتق لی .... lie drivative
مجموعه تراز .... level set
مدار .... orbit
میدان تانسوری آمیخته .... mixed tensor field
منیفلد ریمانی .... riemannian manifold
متر ریمانی .... riemannian metric
متقارن .... symmetric
منیفلد توپولوژیک .... topological manifold
میدان‌های برداری .... vector fields
نگاشت نمایی .... exponential map
نگاشت تصویری .... projective map
ناوردای راست .... right invariant
نگاشت گذر .... transition map
نیمه منظم .... semi-regular
وابسته تابعی .... functional dependent

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

اطلس	atlas
منیفلد محیطی	ambient manifold
دو خطی	bilinear
چارت مختصاتی	coordinate chart
تانسور کوواریان	covariant tensor
التصاق	connection
بعد نقصان	codimension
توزیع	distribution
امتداد قطری	diagonal prolongation
موثر	effective
نگاشت نمایی	exponential map
شار	flow
وابسته تابعی	functional dependent
مستقل تابعی	functional independent
متر تاری	fiber metric
برگ‌بندی	foliation
منحنی ژئودزیک	geodesic curve
منحنی انتگرال	integral curve
مولد بی‌نهایت کوچک	infenitesimal generator
ضرب داخلی	inner product
پیچشی	involutive
عملگر خطی	linear operator

کروشه لی .... lie bracket

مشتق لی .... lie drivative

مجموعه تراز .... level set

برگ .... leaf

بیشین .... maximal

میدان تانسوری آمیخته .... mixed tensor field

گروه متعامد .... orthogonal group

مدار .... orbit

پیش‌برنده .... push forward

پس‌کشنده .... pull back

نگاشت تصویری .... projective map

ناوردای راست .... right invariant

منیفلد ریمانی .... riemannian manifold

متر ریمانی .... riemannian metric

رتبه .... rank

ساختار هموار .... smooth structure

زیر منیفلد .... submanifold

نیمه منظم .... semi-regular

متقارن .... symmetric

اصل برهمنهی .... superposition principle

منیفلد توپولوژیک .... topological manifold

نگاشت گذر .... transition map

کلاف مماسی .... tangent bundle

انحنای صفر .... trivial curvature

عمل متعدی .... transitive action

تراگرد .... transversal

کلاف‌های برداری .... vector bundles

میدان‌های برداری .... vector fields

Surname: Biyari Name: Meghdad

Title: Lie Superposition Principle with Applications in Partial Differential Equations

Supervisor: Dr.Seyed Reza Hejazi

Degree: Master of Science Subject: Pure Mathematics

Field: differential geometry

University of Shahrood Faculty Of Mathematical Sciences

Date: 2013 Number of pages: 58

Keywords: differential equation, nonlinear superposition, lie systems, lie algebra, vector field, foliation

Abstract

In this thesis a rigorous geometric proof of the Lie's Theorem on nonlinear superposition rules for solutions of non-autonomous ordinary differential equations is given filling in all gaps present in the existing literature. The proof is based on an alternative but equivalent definition of a superposition rule: it is considered as a foliation with some suitable properties. The problem of uniqueness of the superposition function is solved, the key point being the codimension of the foliation constructed from the given Lie algebra of vector fields. Finally, as a more convincing argument supporting the use of this alternative definition of superposition rule, it is shown that this definition allows an immediate generalization of Lie's Theorem for the case of systems of partial differential equations.

University of Shahrood
Faculty Of Mathematical Sciences

Dissertation Submitted in Partial
Fulfillment of The Requirements For The
Degree of Master of Science in
Pure Mathematics

Lie Superposition Principle with Applications in Partial Differential Equations

Supervisor

Dr.Seyed Reza Hejazi

by

Meghdad Biyari

2013